Г.Харди

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Настоящая книга представляет собой монографию, посвященную суммированию расходящихся рядов. Она содержит обширный исторический обзор вопроса, краткое введение в общую теорию суммирования рядов и подробное исследование ряда конкретных методов суммирования (методов Чезаро, Абеля, Вороного, Эйлера и др.).

Кроме того, здесь рассматриваются — приложения теории к задаче перемножения рядов, к исследованию формулы суммирования Эйлера-Маклорена, к аналитическому продолжению функций, к суммированию рядов Фурье и к нахождению значений определенных интегралов.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов — и требует для своего чтения знания теории функций действительного и комплексного переменного. В некоторые своих разделах она может быть также полезна для тех инженеров, которые встречаются с расходящимися рядами.

Содержание

Указатель определений

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Пожалуй, ни одна математическая дисциплина не нуждается так в обзорной монографии, как теория суммирования расходящихся рядов. Посвященная ей журнальная литература непрерывно увеличивается и почти необозрима. Некоторые теоремы до того обросли обобщениями, вариантами и аналогами, что во всем этом лесу трудно ориентироваться без хорошего путеводителя. Частично эту роль и выполняет книга Г. Харди „Расходящиеся ряды“. Читатель найдет здесь обширный исторический обзор вопроса (гл. I—II), краткое введение в общую теорию суммирования рядов (гл. III), подробное исследование многих конкретных методов суммирования (гл. IV—IX), изложение теории Винера и свойств хаусдорфовских средних (гл. XI и XII), а также некоторые приложения теории (гл. X и XIII).

Этот перечень показывает, что в книге затронуты далеко не все вопросы теории суммирования рядов. Например, автор ограничивается определением абсолютной суммируемости по Чезаро и не изучает это понятие. Далее, автор совершенно не рассматривает суммирование двойных и кратных рядов. Возникающие здесь специфические трудности не нашли никакого отражения в книге. Наконец, автор просто прошел мимо важной общей теории суммирования ограниченных последовательностей, развитой главным образом молодым советским математиком А. Л. Брудно. Приложения теории суммирования к рядам Фурье развиты недостаточно подробно. Например, автор не излагает важных исследований Д. Е. Меньшова, С. М. Никольского и С. М. Лозинского по этим вопросам. В основном книга посвящена исследованию конкретных „классических“ методов суммирования. Но и здесь изложение не является исчерпывающим. В частности, автор не рассматривает соотношения между методами суммирования при непрерывном и дискретном изменении параметра (М. П. Щеглов), а также важнейшие методы суммирования С. Н. Бернштейна-Рогозинского, изученные С. Н. Бернштейном, В. Рогозинским, Ф. И. Харшиладзе и другими. К книге приложена моя обзорная статья „Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского". Редакция отказалась от мысли дать также обзорные статьи, посвященные общей теории суммирования ограниченных последовательностей и суммирования рядов Фурье, так как эти темы очень обширны, и их рассмотрение требует привлечения средств функционального анализа, чуждых последовательной теоретико-функциональной точке зрения автора.

Как известно, в 1901 г. Г. Ф. Вороной ввел в рассмотрение метод суммирования, определяемый формулой

$$w_n = \frac{p_n s_0 + p_{n-1} s_1 + \ldots + p_0 s_n}{p_0 + p_1 + \ldots + p_n}.$$

Однако в иностранной математической литературе этот метод суммирования неправильно называется методом Нерлунда, хотя Нерлунд рассмотрел его только через 18 лет, в 1919 г. В настоящем переводе этому методу присвоено исторически правильное название *метода Вороного.* Далее Харди связывает также с именем Нерлунда метод суммирования, определяемый формулой

$$\sigma_n = \frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n}{p_0 + p_1 + \ldots + p_n},$$

Этот метод встречается уже у Бореля в его монографии, вышедшей в 1901 г., и относится к тому типу методов, которые были впоследствии подробно изучены М. Риссом. Поэтому для данного метода в переводе принято обозначение $(\overline{R}, p_n)$.

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу истории возникновения и развития теории суммирования расходящихся рядов. Основоположником теории суммирования рядов является Леонард Эйлер. Многие математики XVII и XVIII веков (Лейбниц, Бернулли, Даламбер, Лагранж и др.) долго и безуспешно спорили о том, *чему равна сумма расходящегося ряда.* Эйлер первый понял, что задача поставлена неправильно и что нужно спрашивать: *как определить сумму расходящегося ряда*? Он пишет: «И вот я говорю, что вся трудность кроется в названии „сумма". Действительно, если под „суммой" ряда понимать, как это обычно делается, результат сложения всех его членов, то нет никакого сомнения, что суммы можно получить только для тех бесконечных рядов, которые являются сходящимися и дают результаты, тем более близкие к некоторому определенному значению, чем больше членов складывается. Расходящиеся же ряды, члены которых не убывают ..., вообще не будут иметь никаких определенных сумм, если только слово „сумма“ понимается в смысле результата сложения всех членов.

Этих затруднений и кажущихся противоречий мы совершенно избежим, если мы припишем слову „сумма“ значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что *сумма* некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд ... При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова „сумма“ совпадает с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового определения не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений» (Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, ГИТТЛ, М.—Л., 1949, стр. 101).

Как видно из этой цитаты, точка зрения Эйлера на расходящиеся ряды вполне современна: расходящиеся ряды не имеют суммы в обычном смысле этого слова, однако возможно дать новое определение суммы ряда (мы бы сказали: определение *метода суммирования рядов*), применимое как ко всем сходящимся рядам, так и к некоторым расходящимся рядам; при этом от определения нужно потребовать, чтобы для сходящихся рядов новая сумма совпадала с обычной (мы бы сказали: метод должен быть *регулярным*). Что же касается конкретного определения Эйлера „сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд“, то оно еще недостаточно четко и легко могло привести к противоречиям.

Эти высказывания Эйлера долгое время не были правильно поняты и способствовали некритическому допущению в анализ расходящихся рядов и основанных на них рассуждений. Достаточно отметить, что в большом трактате Лакруа по дифференциальному и интегральному исчислению (начало XIX века) вовсе не фигурирует понятие сходимости ряда и не излагаются известные к тому времени признаки сходимости (признак Лейбница, признак Даламбера и признак, который теперь часто называют интегральным признаком Коши). После произведенного в первой половине XIX века критического пересмотра основ анализа расходящиеся ряды были почти полностью изгнаны из математики. Однако они все же встречаются как у Коши, так и в более позднее время, например у Лагерра.

Современная теория суммирования расходящихся рядов начала бурно развиваться в конце XIX — начале XX века. Этому значительно способствовало то обстоятельство, что выявились связи этой теории с другими математическими дисциплинами. Так, Чезаро (1880) ввел свои методы суммирования в связи с рассмотрением задачи о перемножении рядов; Борель (1895—1901) изучал „метод Бореля“ в связи с исследованием аналитического продолжения функций; наконец, Л. Фейер (1904) показал, какую пользу может принести теория суммирования рядов теории рядов Фурье. Этот период в основном завершился выходом в свет первой обзорной монографии Бореля (1901), посвященной расходящимся рядам. После этого теория расходящихся рядов стала доступной для широкого круга математиков, и ее развитие больше не останавливалось.

С. Б. Стечкин.

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

Здесь приводятся некоторые условные обозначения, а также хорошо известные результаты, не выделенные в тексте книги.

Теорема Стирлинга.

В § 13.11 доказывается, что для больших вещественных x

$$\log \Gamma(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

и вообще

$$\log \Gamma(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{1}^{k} \frac{(-1)^{r-1}B_r}{(2r-1)\,2r}\frac{1}{x^{2r-1}} + O\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right).$$

Эти формулы часто применяются и в предшествующих главах. Вторая из них в § 6.10 принимается за известную и для комплексных x (см. Уиттекер и Ватсон, 12.33).

Биномиальные коэффициенты.

Для $n=0,\ 1,\ \ldots,$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},$$

$$\binom{n+\beta}{\beta} = \frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{n!} = \binom{n+\beta}{n}.$$

Из теоремы Стирлинга следует, что при $\beta \neq -1,\ -2,\ \ldots$

$$\binom{n+\beta}{\beta} = \frac{n^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} + \sum_{s=1}^{p} c_s n^{\beta-p} + O(n^{\beta-p-1}).$$

Обозначение суммирования.

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f(n) \quad \text{означает} \quad \sum_{\alpha \leqslant n \leqslant \beta} f(n);$$

при $\beta < \alpha$ под этим понимается нуль.

Символ $\sum$ без указания пределов суммирования обычно означает $\sum\limits_{0}^{\infty}$, или $\sum\limits_{1}^{\infty}$, если нулевой член не определен; но иногда ему придается и другой смысл. Соглашения об употреблении символа $\sum$ устанавливаются на стр. 61, 126, 169, 178, 206, 257, 269, 283, 292, 298, 395, 440—441 и 458.

Разности:

$$\Delta u_n = u_n - u_{n+1}, \qquad \Delta^0 u_n = u_n,$$
$$\Delta^k u_n = \Delta\Delta^{k-1} u_n \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Соглашения, относящиеся к интегрированию.

„Интегрируема в (a, b)“ означает: „интегрируема в смысле Лебега в (a, b)“.

Все рассматриваемые функции предполагаются измеримыми. Таким образом, если, например, (a, b) есть конечный интервал, то „$f = O(1)$ в (a, b)“ влечет, что „f интегрируема в (a, b)“.

$\int\limits_0^\infty$ означает $\lim\limits_{X\to\infty}\int\limits_0^X$, если этот предел существует, т. е. если интеграл сходится.

Символ $\int$ без указания пределов интегрирования обычно означает $\int\limits_0^\infty$, но иногда ему придается и другой смысл. Соглашения об употреблении символа $\int$ устанавливаются на стр. 26, 71, 128, 143, 148, 173, 198, 211, 269, 293, 318, 352, 366, 403, 406 и 416.

Классы L и L^r $(r > 0)$.

„f принадлежит $L^r(a, b)$“ означает: „[f измерима и] $|f|^r$ интегрируема в (a, b)“.

„f принадлежит L“ означает: „f принадлежит L^1“. Таким образом, „f принадлежит $L(0, \infty)$“ равносильно „$\int\limits_0^\infty f\,dx$ абсолютно сходится“.

Постоянные.

Прописные буквы, например $H, K, \ldots$, употребляются для обозначения чисел, не зависящих от рассматриваемых переменных; однако они не обязательно сохраняют в каждом случае одно и то же значение.

O, O_L, O_R, o и $\sim$.

Если $\varphi > 0$, то

$$„f = O(\varphi)“ \quad \text{означает} \quad „|f| < H\varphi“,$$

$$„f = O_L(\varphi) \ [\text{или } O_R(\varphi)] \quad \text{означает} \quad „f > -H\varphi“ \ [\text{или } < H\varphi],$$

$$„f = o(\varphi)“ \quad \text{означает} \quad „\frac{f}{\varphi} \to 0“,$$

$$„f \sim \varphi“ \quad \text{означает} \quad „\frac{f}{\varphi} \to 1“ \ ^{*)}.$$

Символ $\sim$ употребляется также в смысле „имеет асимптотическим рядом“, „имеет рядом Фурье“ и „есть преобразование Фурье для“.

Знак x.

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Целая часть x.

$[x]$ означает алгебраически наибольшее целое число, не превосходящее x.

---

*) Разумеется, здесь φ может быть и отрицательной.

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Сумма ряда. Ряд

$$\sum_{0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

называют *сходящимся* к сумме s, если его „частичные суммы“

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

стремятся к конечному пределу s, когда $n \to \infty$; ряд не сходящийся называют *расходящимся*. Так, ряды

(1.1.1) $$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

(1.1.2) $$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots,$$

(1.1.3) $$1 - 2 + 4 - 8 + \ldots,$$

(1.1.4) $$1 - 1! + 2! - 3! + \ldots$$

(1.1.5) $$1 + 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

(1.1.6) $$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$

расходятся. Ряды

(1.1.7) $$1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \ldots,$$

(1.1.8) $$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots$$

расходятся для всех вещественных θ, а ряд

(1.1.9) $$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots$$

расходится, за исключением значений θ, кратных π, когда он сходится к сумме 0.

Определения сходимости и расходимости относятся теперь к элементам анализа. Суть этих понятий была известна математикам и до Ньютона и Лейбница (фактически уже Архимеду); и все выдающиеся математики семнадцатого и восемнадцатого веков, как бы беззаботно ни обращались они с рядами, достаточно хорошо знали, сходятся ли употребляемые ими ряды. Но лишь с эпохи Коши определения сходимости и расходимости стали формулировать явно и в общем виде.

Ньютон и Лейбниц — первые математики, систематически пользовавшиеся бесконечными рядами, — не имели достаточных побуждений к употреблению расходящихся рядов (хотя Лейбниц изредка касался их). Такие побуждения стали умножаться с расширением анализа, и вскоре обнаружилось, что расходящиеся ряды полезны и что некритически выполняемые над ними действия часто приводят к важным результатам, справедливость которых может быть затем проверена независимым путем. Несколько простых примеров этому будет дано в следующем параграфе; в гл. II мы приведем другие, весьма важные, примеры из работ классиков анализа.

1.2. Некоторые вычисления с расходящимися рядами. Как известно,

$$1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x} \tag{1.2.1}$$

при $|x|<1$. Представляется очевидным, что если мы пожелаем приписать этому ряду „сумму“ (в каком-либо смысле) для других значений x, то эта сумма должна быть формально той же. Действительно, 1) было бы весьма неудобно, если бы формула менялась при переходе к другим случаям; 2) естественно ожидать, что сумма s должна удовлетворять уравнениям

$$s=1+x+x^2+x^3+\ldots=1+x(1+x+x^2+\ldots)=1+xs,$$

и 3) левая часть формулы (1.2.1) есть результат выполнения деления, указанного в правой части, так что во всяком случае имеется такой смысл знака „$=$“, который дает возможность считать формулу (1.2.1) верной для всех x.

(1) Примем, что формула (1.2.1) верна, в некотором смысле, для всех x (за исключением, быть может, значения $x=1$, очевидно, представляющего специальные трудности), и позволим себе оперировать с этой формулой в совершенно некритическом духе.

Полагая $x=e^{i\theta}$, где $0<\theta<2\pi$ (так что $x\neq 1$), получаем

$$1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\ldots=\frac{1}{1-e^{i\theta}}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}, \tag{1.2.2}$$

откуда

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots=0, \tag{1.2.3}$$

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \tag{1.2.4}$$

для $0<\theta<2\pi$. Заменяя θ на $\theta+\pi$, получаем

$$\frac{1}{2}-\cos\theta+\cos 2\theta-\ldots=0, \tag{1.2.5}$$

$$\sin\theta-\sin 2\theta+\ldots=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \tag{1.2.6}$$

для $-\pi < \theta < \pi$. Формула (1.2.5) при $\theta = 0$ дает

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{1.2.7}$$

(2) Будем теперь повторно дифференцировать (1.2.5) и (1.2.6) по θ. Мы получим

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{2k} \cos n\theta = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots; \ -\pi < \theta < \pi), \tag{1.2.8}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{2k+1} \sin n\theta = 0, \tag{1.2.9}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{2k} \sin n\theta = (-1)^k \left(\frac{d}{d\theta}\right)^{2k} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \tag{1.2.10}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{2k+1} \cos n\theta = (-1)^k \left(\frac{d}{d\theta}\right)^{2k+1} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \tag{1.2.11}$$

— последние три формулы для $k = 0, 1, \ldots, -\pi < \theta < \pi$. Полагая, в частности, $\theta = 0$ в (1.2.8) и (1.2.11) и $\theta = \frac{\pi}{2}$ в (1.2.9) и принимая во внимание, что рядом Тэйлора для $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ служит

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sum_0^\infty \frac{2^{2k+2} - 1}{(2k+2)!} B_{k+1} \theta^{2k+1},$$

где B_k — числа Бернулли, получаем

$$1^{2k} - 2^{2k} + 3^{2k} - \ldots = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.2.12}$$

$$1^{2k+1} - 2^{2k+1} + \ldots = (-1)^k \frac{2^{2k+2} - 1}{2k+2} B_{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.2.13}$$

$$1^{2k+1} - 3^{2k+1} + 5^{2k+1} - \ldots = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{1.2.14}$$

Аналогичным образом, исходя из формулы

$$e^{i\theta} - e^{3i\theta} + e^{5i\theta} - \ldots = \frac{e^{i\theta}}{1 + e^{2i\theta}} = \frac{1}{2} \sec \theta \tag{1.2.15}$$

и принимая во внимание, что

$$\sec \theta = 1 + \sum_1^\infty \frac{E_k \theta^{2k}}{(2k)!},$$

где E_k — числа Эйлера, получим формулы (1.2.14) и

$$1^{2k} - 3^{2k} + 5^{2k} - \ldots = \frac{1}{2} (-1)^k E_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.2.16}$$

Заметим попутно, что формула (1.2.13) при $k=0$ дает

$$1-2+3-4+\ldots=\frac{1}{4}, \tag{1.2.17}$$

и тот же результат получается при возведении формулы (1.2.7) в квадрат по правилу Коши:

$$(1-1+1-\ldots)(1-1+1-\ldots)=1\cdot 1-(1\cdot 1+1\cdot 1)+\\+(1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1)-\ldots$$

(3) Интегрируя (1.2.5) от $\theta=0$ до $\theta=\varphi$ и заменяя затем φ снова на θ, получаем

$$\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta-\ldots=\frac{\theta}{2} \quad (-\pi<\theta<\pi). \tag{1.2.18}$$

Этот ряд — сходящийся. Второе интегрирование дает

$$1-\cos\theta-\frac{1-\cos 2\theta}{2^2}+\frac{1-\cos 3\theta}{3^2}-\ldots=\frac{\theta^2}{4}. \tag{1.2.19}$$

Эта формула справедлива и для граничных значений $\theta=-\pi$ и $\theta=\pi$ *); полагая $\theta=\pi$, получаем

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{1.2.20}$$

Так как

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}-\ldots=\\=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right),$$

то заключаем, что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}, \tag{1.2.21}$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots=\frac{\pi^2}{12}, \tag{1.2.22}$$

и потому

$$\cos\theta-\frac{\cos 2\theta}{2^2}+\frac{\cos 3\theta}{3^2}-\ldots=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\theta^2}{4} \quad (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi). \tag{1.2.23}$$

Дальнейшие интегрирования приводят к выражению сумм рядов $\sum(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n^{2k}}$ и $\sum(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n^{2k+1}}$ через многочлены Бернулли.

* Ибо ряд равномерно сходится для всех θ.

(4) С другой стороны, действуя еще более смело, можно вывести формулу (1.2.19) из формул (1.2.7) и (1.2.12) следующим образом:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{1-\cos n\theta}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(n\theta)^{2k+2}}{(2k+2)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\theta^{2k+2}}{(2k+2)!}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}n^{2k} = \frac{\theta^2}{2}(1-1+1-\ldots) = \frac{\theta^2}{4}.$$

Этот способ можно обобщить. Пусть ряд

$$f(\theta) = a_0 + a_1\theta^2 + a_2\theta^4 + \ldots$$

сходится для всех θ. Тогда применение того же приема подсказывает, что

$$(1.2.24)\qquad \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{f(n\theta)}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sum_{l=0}^\infty a_l (n\theta)^{2l} =$$

$$= \sum_{l=0}^\infty a_l\theta^{2l}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}n^{2l-2} = a_0\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots\right) +$$

$$+ a_1\theta^2(1-1+1-\ldots) = \frac{1}{12}a_0\pi^2 + \frac{1}{2}a_1\theta^2.$$

Ясно, что эта формула не может быть верной во всех случаях; так, например, она неверна при $f(\theta) = e^{-\theta^2}$. Однако она все же верна для весьма широких классов функций. Так, если в качестве $f(\theta)$ взять бесселеву функцию

$$J_0(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2^2} + \frac{\theta^4}{2^2\cdot 4^2} - \ldots,$$

то формула (1.2.24) дает верный результат

$$(1.2.25)\qquad J_0(\theta) - \frac{J_0(2\theta)}{2^2} + \frac{J_0(3\theta)}{3^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\theta^2}{8}\qquad (-\pi < \theta < \pi).$$

(5) Из формулы (1.2.4) получаем, что

$$\sum_1^\infty \cos n\theta \sin n\varphi = \frac{1}{4}\left\{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi+\theta) + \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\varphi-\theta)\right\} = \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos\theta-\cos\varphi},$$

а потому

$$\frac{\cos m\theta - \cos m\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi} = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\cos n\theta\,(\cos m\theta - \cos m\varphi)$$

для любого натурального m. Интегрируя это равенство от $\theta=0$ до $\theta=\pi$ (не обращая внимания на трудности, связанные с тем, для каких значений θ его можно считать справедливым*)), получим

$$\int_0^\pi \frac{\cos m\theta - \cos m\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi}\,d\theta = \pi\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi} \tag{1.2.26}$$

— формулу, справедливость которой можно проверить различными путями.

(б) Из формул (1.2.4) и (1.2.6) следует, что

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta, \quad \sin 2\theta + \sin 4\theta + \ldots = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta.$$

Умножая эти равенства на θ, интегрируя от $\theta=0$ до $\theta=\frac{\pi}{2}$ и замечая, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin(2n+1)\theta\,d\theta = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin 2n\theta\,d\theta = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{4n},$$

получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\sin\theta}\,d\theta = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots\right), \tag{1.2.27}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\operatorname{ctg}\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\log 2. \tag{1.2.28}$$

Эти формулы можно также проверить независимым путем.

1.3. Первоначальные определения. Результаты формальных вычислений в § 1.2 во всех случаях, где они допускают проверку, правильны; так, правильны все формулы (1.2.18) — (1.2.23), (1.2.25) и (1.2.26) — (1.2.28). Естественно предположить, что и остальные формулы окажутся правильными, а наши преобразования — обоснованными, если только надлежащим образом истолковать их. Мы сможем тогда рассматривать указанные преобразования как сокращенные записи более сложных операций, обосновываемых по обычным прави-

*) Законность формулы (1.2.4) при $\theta=0$ или $\theta=2\pi$ сомнительна, поскольку левая часть для этих значений обращается в нуль, а правая — в бесконечность; поэтому в интегрируемом равенстве внушают беспокойство значения θ, для которых $\cos\theta = \cos\varphi$. Но имеются основания предполагать, что эти трудности снимаются умножением на $\cos m\theta - \cos m\varphi$, и результат оправдывает наше ожидание.

лам анализа. Ясно, что первым шагом к такому истолкованию должно быть некоторое определение (или определения) „суммы" бесконечного ряда, применимое более широко, чем классическое определение Коши.

Это замечание сейчас тривиально: современному математику и не придет в голову, что какое-либо соединение математических символов может иметь „смысл" до того, как ему придан смысл с помощью определения. Но это не было тривиальностью даже для наиболее выдающихся математиков восемнадцатого века. Определения не были в их обычае; для них не было естественно говорить: „под X мы *понимаем* Y". С некоторыми оговорками, к которым мы вернемся в §§ 1.6—1.7, в общем, верно будет сказать, что математики до Коши спрашивали не „как определить $1-1+1-\ldots$?", а „что есть $1-1+$ $+1-\ldots$?"; и этот склад мышления приводил их к ненужным затруднениям и спорам, зачастую, по существу, чисто словесного характера.

Нетрудно усмотреть одно обстоятельство, усугублявшее эту тенденцию и затруднявшее для старых аналитиков принятие современной, более „условной" точки зрения. Вообще представляется, что существует только одна сумма, которую „разумно" приписывать расходящемуся ряду; так, все „естественные" вычисления с рядом (1.1.1), повидимому, приводят к заключению, что его сумма должна быть принята равной $\frac{1}{2}$. Можно придумать рассуждения, приводящие и к другому значению *), но всегда останется ощущение, что, применяя их, мы как-то „нарушаем правила игры".

Причина этого довольно очевидна. Простейший довод в пользу равенства (1.2.7) таков: „$s=1-1+1-\ldots=1-(1-1+1-\ldots)=$ $=1-s$, и потому $s=\frac{1}{2}$"; таким образом, мы получаем значение $\frac{1}{2}$ независимо от выбора определения суммы ряда, лишь бы только оно удовлетворяло некоторым весьма естественным условиям.

Предположим, например, что нам дано какое угодно определение суммы ряда, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(*А*) *если* $\sum a_n=s$, *то* $\sum ka_n=ks$;

(*Б*) *если* $\sum a_n=s$ *и* $\sum b_n=t$, *то* $\sum(a_n+b_n)=s+t$;

(*В*) *если* $a_0+a_1+a_2+\ldots=s$, *то* $a_1+a_2+a_3+\ldots=s-a_0$, *и обратно.*

На самом деле все определения, которыми мы будем пользоваться, будут удовлетворять аксиомам (*А*) и (*Б*), а большинство, хотя и не все, — также аксиоме (*В*).

*) См. § 1.6 (2).

Тогда, если $1-1+1-\ldots=s$, то

$$s=1-1+1-1+\ldots=1+(-1+1-1+\ldots)=$$
$$=1-(1-1+1-\ldots)=1-s;$$

здесь мы использовали только аксиомы (*А*) и (*В*).

Аналогично, если $1-2+3-4+\ldots=s$, то

$$s=1-2+3-4+\ldots=1+(-2+3-4+\ldots)=$$
$$=1-(2-3+4-\ldots)=$$
$$=1-(1-1+1-\ldots)-(1-2+3-\ldots)=1-\frac{1}{2}-s,$$

так что $s=\frac{1}{4}$, в согласии с формулой (1.2.17). Здесь мы использовали все три аксиомы (*А*), (*Б*) и (*В*).

Из большого числа полезных определений суммы ряда, с которыми нам придется иметь дело в дальнейшем, мы выделим пока четыре. Мы будем систематически пользоваться следующими терминами и обозначениями. Устанавливая, что сумма ряда $\sum a_n$ в некотором новом, скажем „пиквикском“, смысле равна s, мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ *суммируем* (P), будем называть s P-*суммой* ряда $\sum a_n$ и будем писать

$$\sum a_n=s \text{ (P)}.$$

Мы будем также говорить, что s есть P-*предел* частичных сумм s_n, и писать

$$s_n\to s \text{ (P)}.$$

Выбор букв, ассоциируемых с различными определениями, будет определяться большей частью произвольным соглашением, но иногда и соображениями исторического характера.

(1) Пусть $s_n=a_0+a_1+\ldots+a_n$. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}=s, \tag{1.3.1}$$

то мы будем называть s (C, 1)-суммой ряда $\sum a_n$ и (C, 1)-пределом последовательности s_n.

(2) Если степенной ряд $\sum a_nx^n$ сходится для $0\leqslant x<1$ (и тем самым для всех x, как вещественных, так и комплексных, удовлетворяющих неравенству $|x|<1$), $f(x)$ — сумма этого ряда и

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=s, \tag{1.3.2}$$

то мы будем называть s A-суммой ряда $\sum a_n$.

(3) Если $\sum a_n x^n$ сходится для малых значений x и определяет функцию $f(x)$ комплексного переменного x, однозначную и аналитичную в некоторой связной открытой области, содержащей начало $x=0$ и точку $x=1$, и если $f(1)=s$, то мы будем называть s $\mathfrak{E}$-суммой ряда $\sum a_n$. Значение s, естественно, может зависеть от выбора области.

(4) Наше четвертое определение требует несколько большего количества слов. Предположим, что ряд $\sum a_n x^n$ сходится для малых x, и пусть

$$x=\frac{y}{1-y},\quad y=\frac{x}{1+x}, \tag{1.3.3}$$

так что значению $x=1$ соответствует $y=\frac{1}{2}$. Тогда для малых x и y имеем

$$xf(x)=\sum_0^\infty a_n x^{n+1}=a_0\frac{y}{1-y}+a_1\frac{y^2}{(1-y)^2}+a_2\frac{y^3}{(1-y)^3}+\ldots=$$

$$=\sum_{p=0}^\infty a_p\sum_{m=0}^\infty\binom{p+m}{m}y^{p+m+1}=\sum_{p=0}^\infty a_p\sum_{n=p}^\infty\binom{n}{n-p}y^{n+1}.$$

Обращая порядок суммирования, получаем, что для малых y

$$xf(x)=\sum_{n=0}^\infty y^{n+1}\sum_{p=0}^n\binom{n}{n-p}a_p=\sum_{n=0}^\infty y^{n+1}\sum_{p=0}^n\binom{n}{p}a_p=\sum_{n=0}^\infty b_n y^{n+1},$$

где

$$b_0=a_0,\quad b_n=a_0+\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}a_2+\ldots+a_n. \tag{1.3.4}$$

Если ряд по y сходится при $y=\frac{1}{2}$ к сумме s, т. е. если

$$\frac{1}{2}b_0+\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{8}b_2+\ldots=\sum\frac{b_n}{2^{n+1}}=s, \tag{1.3.5}$$

то мы будем называть s (E, 1)-суммой ряда $\sum a_n$.

Буквы $\mathfrak{E}$ и E поставлены в честь Эйлера, A — Абеля и C — Чезаро (Cesàro). Основания для этого, а также для цифр в (C, 1) и (E, 1) выяснятся позже.

„(C, 1)-определение" было использовано Даниилом Бернулли в 1771 г., однако лишь для специального случая периодического колеблющегося ряда, т. е. когда $a_{n+p}=a_n$ при любом n и фиксированном p, а

$$a_0+a_1+\ldots+a_{p-1}=0.$$

Оно было применено к ряду (1.1.1) Лейбницем в 1713 г. (или еще раньше). Но ни Лейбниц, ни Бернулли не говорили, что они дали определение. В современный период его неявно использовали Фробениус и Гёльдер в 1880 и 1882 гг. Однако оно не было установлено как формальное определение, повидимому, вплоть до 1890 г., когда Чезаро опубликовал работу об умножении рядов, в которой впервые была явно сформулирована „теория расходящихся рядов": „Когда s_n, не стремясь к пределу, обладает определенным конечным средним значением s [т. е. когда имеет место соотношение (1.3.1)], мы говорим, что ряд $a_0+a_1+a_2+\ldots$ — однократно неопределенный, и *мы уславливаемся говорить, что s есть сумма этого ряда*". Чезаро переходит далее к рассмотрению „r-кратно неопределенных" рядов и доказывает общую теорему *), которая будет играть важную роль в гл. X. Работа Чезаро приобрела широкую известность, и сейчас его замечание: „отсюда получается классификация неопределенных рядов, несомненно, неполная и не достаточно естественная..." — представляется почти абсурдно скромным. В действительности его классификация совершенно естественна.

„A-определение" иногда называют „P-определением", по имени Пуассона, действительно применившего его к суммированию рядов Фурье. Следы его можно также обнаружить у Эйлера и даже Лейбница. Букву „A" обосновывают теоремой Абеля о непрерывности степенного ряда, устанавливающей „регулярность" (§ 1.4) рассматриваемого метода суммирования; эта теорема будет доказана, как частный случай значительно более общей теоремы, в гл. IV.

$\mathfrak{E}$-метод воплощает, на современном языке, знаменитый принцип Эйлера: „Сумма всякого ряда есть значение того конечного выражения, из развертывания которого возникает этот ряд". Мы подробнее остановимся на нем в §§ 1.6—1.7; сейчас заметим только, что Эйлер, очевидно, имел в виду степенные ряды и что, возможно, ни один математик его времени не мог, высказываясь на подобные темы, избежать весьма серьезных неясностей.

Наконец, „(E, 1)-метод" выведен из „преобразования Эйлера", бывшего первоначально средством преобразования медленно сходящихся рядов в быстро сходящиеся, но применявшегося Эйлером и к расходящимся рядам.

Ясно, что все эти методы удовлетворяют нашим аксиоматическим требованиям (*A*) и (*Б*), и легко проверить, что первые три удовлетворяют также требованию (*В*), в предположении, что $\mathfrak{E}$-метод связан с определенной областью продолжения функции. Действительно, обозначим частичные суммы рядов $a_0+a_1+a_2+\ldots$ и $a_1+a_2+a_3+\ldots$ через s_n и t_n, так что $t_n=s_{n+1}-a_0$, и положим

$$f_1(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots,$$

так что $xf_1(x)=f(x)-a_0$.

(1) Если ряд $a_0+a_1+a_2+\ldots$ суммируем (C, 1) к s, то

$$\frac{t_0+t_1+\ldots+t_n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n+2}}{n+2}-a_0\right)\to s-a_0,$$

так что ряд $a_1+a_2+\ldots$ суммируем (C, 1) к $s-a_0$.

(2) Если ряд $a_0+a_1+\ldots$ суммируем (A) к s, то

$$f_1(x)=\frac{f(x)-a_0}{x}\to s-a_0,$$

и ряд $a_1+a_2+\ldots$ суммируем (A) к $s-a_0$.

(3) Если $f(x)$ однозначна и регулярна в области, содержащей 0 и 1, и $f(1)=s$, то $f_1(x)$ также однозначна и регулярна в этой области, а $f_1(1)=s-a_0$.

---

*) Наша теорема 41.

Таким образом, прямое утверждение аксиомы (B) верно для каждого из рассмотренных трех методов, и проведенные рассуждения, очевидно, обратимы. Менее очевидно, что и (E, 1)-метод удовлетворяет требованию (B); мы это пока примем на веру, отложив доказательство до § 8.3. Теперь становится ясным, что все четыре метода, если они применимы к ряду (1.1.1), должны дать сумму $\frac{1}{2}$. Это легко проверить и непосредственно: для первого — принимая во внимание, что s_n есть 1 для четных и 0 для нечетных n, так что $s_0+s_1+\ldots+s_n$ равно $\frac{1}{2}(n+2)$ или $\frac{1}{2}(n+1)$; для второго и третьего — опираясь на то, что $f(x)=\frac{1}{1+x}$, и для четвертого — в силу того, что $b_0=1$ и $b_n=0$ при $n>0$.

Позже мы увидим (а сейчас читатель может проверить это в порядке упражнения), что все четыре метода доставляют также равенства (1.2.2)—(1.2.6), а последние три метода—и равенства (1.2.8)—(1.2.17). (C, 1)-метод теряет силу для формулы (1.2.17), поскольку s_n принимает значения $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ и $s_0+s_1+\ldots+s_n$ равно $\frac{1}{2}(n+2)$ для четных и 0 для нечетных n. Заметим, что повторение процесса усреднения приводит в этом случае к пределу $\frac{1}{4}$.

Методы (1), (2) и (4) в качестве суммы ряда (1.1.5) дают ∞, причем, в случае последнего метода, $b_0=1$, $b_1=2$, $b_2=4, \ldots$, так что ряд (1.3.5) есть здесь $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$. Метод (3) неприменим, поскольку функция $f(x)=\frac{1}{1-x}$ не регулярна при $x=1$.

Методы (1) и (2) теряют силу для ряда (1.1.3): s_n принимают значения $1, -1, 3, -5, 11, \ldots$, а ряд $\sum a_n x^n$ не сходится при $x \geqslant \frac{1}{2}$. Метод (3) дает сумму $\frac{1}{3}$. При методе (4) $b_n=(1-2)^n=$ $=(-1)^n$, и потому

$$\frac{1}{2}b_0+\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{8}b_2+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\ldots=\frac{1}{3},$$

так что этот метод снова дает $\frac{1}{3}$. Очевидно, эта сумма — „верная", так как удовлетворяет уравнению $s=1-2s$.

Поучительно рассмотреть еще ряд (1.1.6). Здесь метод (1) дает ∞. Метод (2) неприменим по той же причине, что и в предыдущем случае. Метод (3) дает $\frac{1}{1-2\cdot 1}=-1$. Наконец, при методе (4) мы имеем $b_n=(1+2)^n=3^n$ и

$$\frac{1}{2}b_0+\frac{1}{4}b_1+\frac{1}{8}b_2+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n+\ldots,$$

а этот ряд расходится к ∞, так что рассматриваемый метод дает ∞. Таким образом, в этом случае нам подсказываются две „суммы“, а именно ∞ и -1, причем вторая на вид парадоксальна, поскольку представляется неестественным приписывать ряду, состоящему из положительных членов, отрицательную сумму.

1.4. Регулярность метода. Легко сформулировать в общем виде некоторые качества, которыми должен обладать пригодный метод суммирования расходящихся рядов. Он должен быть *простым*, как, например, первые два метода § 1.3; он должен быть разумно *общим*, в смысле применимости к значительному множеству важных рядов. Имеется еще одно требование, которое можно сформулировать более точно, а именно *совместность* или *регулярность*.

Метод суммирования рядов называется *регулярным*, если он суммирует каждый сходящийся ряд к его обыкновенной сумме. Так, $(C, 1)$-метод и А-метод регулярны, поскольку из $\sum a_n = s$ следует как

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \to s,$$

так и $f(x) = \sum a_n x^n \to s$ при $x \to 1$, первое — по известной теореме Коши, второе — по теореме Абеля о степенных рядах.

Эти методы регулярны и в расширенном смысле. Если a_n вещественны и $s_n \to \infty$ (например, если $\sum a_n$ — расходящийся ряд с положительными членами), то $S_n \to \infty$, и $(C, 1)$-метод дает $s = \infty$. Для А-метода имеются две возможности. Либо ряд $\sum a_n x^n$ расходится для некоторого $x = x_0 < 1$; в этом случае он необходимо расходится к ∞ в интервале $(x_0, 1)$, и $f(x) = \infty$ в таком интервале. Либо же $\sum a_n x^n$ сходится для $0 \leqslant x < 1$; в этом случае $f(x) \to \infty$ при $x \to 1$. В обоих случаях мы можем сказать, что А-метод дает $s = \infty$. Если регулярный метод обладает этим дополнительным свойством, мы будем говорить, что он *вполне регулярен*. Мы увидим (§§ 3.6 и 4.6), что $(E, 1)$-метод также вполне регулярен. Очевидно, что $\mathfrak{E}$-метод не вполне регулярен, ибо суммирует ряд $1+2+4+8+\ldots$ к -1. В действительности он даже не регулярен, поскольку из сходимости ряда $\sum a_n$ не следует, что $f(x)$ регулярна в точке $x = 1$.

1.5. Расходящиеся интегралы и обобщенные пределы функций непрерывного переменного. Естественно дать аналогичные определения и применительно к функциям непрерывного переменного x. Предположим, что $a(t)$ интегрируема на каждом конечном интервале $[0, x]$; положим

$$s(x) = \int_0^x a(t)\, dt,$$

и пусть нам дано некоторое „пиквикское" определение предела s функции $s(x)$ при $x \to \infty$, или, что то же, интеграла

$$\int_0^\infty a(x)\,dx.$$

Тогда мы будем говорить, что $a(x)$ Р-*интегрируема* в интервале $(0, \infty)$ или $s(x)$ имеет Р-*предел* s, и писать

$$\int_0^\infty a(x)\,dx = s \ (\mathrm{P})$$

или $s(x) \to s$ (P).

Так, первым трем определениям § 1.3 соответствуют здесь следующие.

(1) Если

$$\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt \to s \tag{1.5.1}$$

или, что то же, если

$$\frac{1}{x}\int_0^x (x-t)\,a(t)\,dt \to s,$$

то

$$\int_0^\infty a(x)\,dx = s \ (\mathrm{C},\ 1). \tag{1.5.2}$$

(2) Если интеграл

$$(w) = \int_0^\infty e^{-wx}\,a(x)\,dx \tag{1.5.3}$$

сходится при $w > 0$, и $f(w) \to s$ при $w \to +0$, то мы будем считать, что

$$\int_0^\infty a(x)\,dx = s \ (\mathrm{A}). \tag{1.5.4}$$

(3) Если существует функция $f(w)$ комплексного переменного w, определенная формулой (1.5.3) для больших положительных w, однозначная и регулярная в связной открытой области, содержащей начало 0 и достаточно удаленную часть положительной вещественной

полуоси, и если $f(0) = s$, то мы будем считать, что *)

$$\int_0^\infty a(x)\,dx = s\ (\mathfrak{C}). \tag{1.5.5}$$

Все эти определения можно, если угодно, модифицировать, изменяя нижний предел интегрирования. Полезного аналога (E, 1)-определения нет.

Таким образом, беря $a(x) = e^{mix}$, где $m > 0$, получаем:

$$s(x) = \frac{i}{m}(1 - e^{mix}), \quad \frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt = \frac{i}{m} + \frac{1 - e^{mix}}{m^2 x} \to \frac{i}{m},$$

так что

$$\int_0^\infty e^{mix}\,dx = \frac{i}{m}, \quad \int_0^\infty \cos mx\,dx = 0, \quad \int_0^\infty \sin mx\,dx = \frac{1}{m} \tag{1.5.6}$$

— всё в смысле (C, 1); и так как

$$\int_0^\infty e^{-(w - mi)x}\,dx = \frac{1}{w - mi} \to \frac{i}{m},$$

то A-метод и $\mathfrak{C}$-метод приводят к тем же результатам. Далее, беря за P (C, 1), A или $\mathfrak{C}$, имеем

$$s(x) = \frac{i}{m}(1 - e^{mix}) \to \frac{i}{m}\ (P),$$

так что

$$e^{mix} \to 0, \quad \cos mx \to 0, \quad \sin mx \to 0\ (P). \tag{1.5.7}$$

Таким образом, определен различный смысл равенств $\cos\infty = 0$ и $\sin\infty = 0$.

Заметим, что

$$\frac{1}{x}\int_0^x \begin{matrix}\cos^2\\ \sin^2\end{matrix} mt\,dt = \frac{1}{2} \pm \frac{\sin 2mx}{4mx} \to \frac{1}{2},$$

так что

$$\cos^2 mx \to \frac{1}{2}, \quad \sin^2 mx \to \frac{1}{2} \quad (C, 1);$$

и легко показать, что A- и $\mathfrak{C}$-методы дают те же пределы. Таким образом, не следует ожидать, чтобы P-предел квадрата функции обычно был равен квадрату ее P-предела.

Приведем некоторые примеры формальных вычислений с интегралами, аналогичных вычислениям § 1.2; все интеграции производятся по интервалу $(0, \infty)$. Дифференцирование последних двух из фор-

*) Это определение не в точности соответствует „$\mathfrak{C}$-определению" § 1.3, поскольку $f(w)$ обычно не регулярна в бесконечности.

мул (1.5.6) по m дает

$$(1.5.8)\qquad \int x^{2p}\cos mx\,dx = 0,\qquad \int x^{2p+1}\sin mx\,dx = 0,$$

$$(1.5.9)\qquad \int x^{2p}\sin mx\,dx = (-1)^p\frac{(2p)!}{m^{2p+1}},$$

$$\int x^{2p+1}\cos mx\,dx = (-1)^{p+1}\frac{(2p+1)!}{m^{2p+2}}.$$

Полагая

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \ldots$$

и производя почленное интегрирование, получаем:

$$(1.5.10)\qquad \int \varphi(x)\cos mx\,dx =$$

$$= a_0\int\cos mx\,dx + a_1\int x^2\cos mx\,dx + \ldots = 0,$$

$$(1.5.11)\qquad \int \varphi(x)\sin mx\,dx =$$

$$= a_0\int\sin mx\,dx + \ldots = \frac{a_0}{m} - \frac{2!\,a_1}{m^3} + \frac{4!\,a_2}{m^5} - \ldots$$

Как и следовало ожидать, эти формулы в некоторых случаях правильны, а в некоторых — нет. Так, при $\varphi(x) = J_0(x)$ получаем формулы

$$\int J_0(x)\cos mx\,dx = 0,\quad \int J_0(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\frac{1}{m^3} + \ldots = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}},$$

правильные при $m > 1$. Но эти формулы неверны при $m < 1$, и точно так же формула (1.5.10), очевидно, неверна, если $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

1.6. Некоторые исторические замечания. В следующей главе мы дадим важные примеры применения расходящихся рядов Эйлером и другими ранними аналитиками. Нам будет удобно предпослать этим примерам несколько разрозненных замечаний.

(1) Наиболее ранние аналитики были, в целом, довольно строгими „ортодоксами“: их работа проводилась в арифметическом духе древних греков. Работам Кавальери, Валлиса, Броункера, Грегори (впервые употребившего слово „сходится“) и Меркатора нехватало не *строгости*, а *техники*. В частности, им мешало отсутствие удобных признаков сходимости. Среди аналитиков Ньютон первый был мастером действительно мощной техники: он рассматривал бесконечные ряды прежде всего как средство выполнения квадратур, и ему предстояло в этой области сделать столько, что потеря ортодоксальности была достаточно возмещена. Он, несомненно, знал, что многие из его формул

можно истолковывать в различных смыслах, например, что разложение

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots, \tag{1.6.1}$$

где f и g — многочлены, можно истолковывать как в арифметическом смысле, требующем сходимости, так и в алгебраическом, согласно которому формула (1.6.1) означает, что

$$f(x) - (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)\, g(x) \tag{1.6.2}$$

делится на x^{n+1} для любого значения n.

(2) Итак, до Эйлера расходящиеся ряды встречаются мало, за исключением некоторых мест в переписке между Лейбницем и братьями Бернулли; эти места оставляют впечатление, что Лейбниц упустил блестящую возможность. Он был на пути по крайней мере к одному из принятых теперь определений, но уступил искушению приправить обсуждение вопроса метафизикой. Сумма ряда $1 - 1 + 1 - \ldots$ должна равняться $\frac{1}{2}$ на основании „вероятности": „Этот способ аргументации, хотя и кажется более метафизическим, чем математическим, всё же надежен; впрочем, правила истинной метафизики гораздо более употребительны в точных науках, в анализе, даже в геометрии, чем обычно считают". Такие речи столь выдающегося математика запутывали людей более слабого интеллекта*). А лейбницев „закон непрерывности", „из которого следует, что в континуумах исключенное крайнее может рассматриваться так же, как и включенное", — принцип, к которому так часто апеллировали британские математики начала девятнадцатого века, „что верно до предела, верно и в пределе", — был еще неудачней. Почти 100 лет спустя Лагранж, по поводу одного приводимого ниже наблюдения Кайе, заметил, что „геометры должны быть благодарны гражданину Кайе, обратившему их внимание на парадокс, доставляемый рассматриваемыми рядами, и постаравшемуся предостеречь их от применения метафизических рассуждений в вопросах, которые, принадлежа чистому анализу, могут быть разрешены лишь с помощью начальных принципов и основных правил исчисления".

Замечание Кайе относится к эйлеровскому принципу „сумма всякого ряда...", упомянутому в § 1.3 и бывшему предметом переписки между Эйлером и Николаем Бернулли в 1743 г. Бернулли возражал, что один и тот же ряд мог бы „возникнуть" из двух различных „выражений", которые доставляли бы различные значения, а Эйлер взял на себя риск утверждать, что этого не может случиться. В письме

*) Даже Эйлер апеллировал к метафизике, когда не умел придумать ничего лучшего: „по метафизическим основаниям..., которыми спокойно можно пользоваться в анализе".

к Гольдбаху в 1745 г. Эйлер говорит: „Притом он*) не привел никакого примера, я же совершенно уверен, что никогда один и тот же ряд не может возникнуть из разложения двух действительно различных конечных выражений“. Сорок или пятьдесят лет спустя Кайе заметил, что ряд $1-1+1-\ldots$ возникает, если положить $x=1$, не только из разложения $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots$, но также из разложения

$$\frac{1+x+\ldots+x^{m-1}}{1+x+\ldots+x^{n-1}}=\frac{1-x^m}{1-x^n}=1-x^m+x^n-x^{n+m}+x^{2n}-\ldots \tag{1.6.3}$$

при любых m и n с $m<n$, так что принцип Эйлера можно было бы использовать, чтобы приписать ряду $1-1+1-\ldots$ любую сумму $\frac{m}{n}$.

Объяснение этого парадокса довольно очевидно (и было дано самим Лагранжем). Ряд (1.6.3), рассматриваемый как степенной ряд, имеет пропуски; так, при $m=2$, $n=3$ этот ряд имеет вид

$$1+0\cdot x-1\cdot x^2+1\cdot x^3+0\cdot x^4-1\cdot x^5+\ldots.$$

Принцип Эйлера приписывает здесь сумму $\frac{2}{3}$ не ряду $1-1+1-\ldots$, а ряду $1+0-1+1+0-1+\ldots$, и нет априорной причины ожидать, чтобы эти два ряда имели одинаковую сумму. И в действительности утверждение Эйлера, если его надлежащим образом истолковать, верно, ибо сходящийся степенной ряд обладает единственной порождающей его функцией.

Ошибочно считать Эйлера „нестрогим“ математиком, хотя его язык может иногда показаться нестрогим на современный слух; он даже иногда высказывает точки зрения, далеко опережавшие общие идеи того времени. Так, в том же месте, где Эйлер формулирует свой принцип, он упоминает о ряде (1.1.4). Принцип Эйлера, как мы его сформулировали в § 1.3, неприменим к этому ряду, поскольку ряд $1-1!\,x+2!\,x^2-3!\,x^3+\ldots$ не сходится ни для какого x, кроме 0. Всё же, говорит Эйлер, „я полагаю, что каждый ряд должен обладать определенным значением. Однако, чтобы справиться со всеми возникающими здесь трудностями, следовало бы это значение не именовать суммой, поскольку с этим словом обычно связывают такое понятие, как если бы сумма получалась в результате действительного суммирования, а эта идея для расходящихся рядов не имеет места...“. Это — почти тот язык, которым мог бы пользоваться Чезаро или Борель. А в другом месте, касаясь более общим образом споров, возбуждавшихся применением расходящихся рядов, Эйлер указывал, что эти споры носили большей частью словесный характер: „Хотя это расхождение и представляется существенным, однако ни одна из споря-

*) То есть Н. Бернулли.

щих сторон не может упрекнуть другую в какой-либо ошибке, поскольку дело идет об употреблении такого рода рядов в анализе: важно здесь то, что ни одна из сторон не впадает в ошибку, а всё расхождение заключается в одних словах“. Здесь, как и в некоторых других случаях, Эйлер был по существу прав. Затруднения того времени относительно расходящихся рядов возникали большей частью не из-за какой-либо особой таинственности расходящихся рядов как таковых, сколько из-за несклонности давать формальные определения и недостаточности тогдашней теории функций. Принцип Эйлера невозможно сжато сформулировать без ясных представлений о функциях комплексного переменного и аналитическом продолжении.

(3) Важно помнить, что Эйлер имел в виду степенные ряды; как только мы допускаем другие типы разложений, возникают разнообразные трудности. Так,

$$\frac{1}{1-2x} = 1+2x+4x^2+8x^3+\ldots$$

дает

$$1+2+4+8+\ldots = -1,$$

а (1.2.1) дает в качестве суммы ряда $1+1+1+\ldots$ (комплексную) ∞. Но *)

$$\frac{2}{e^{2y}-1} = \frac{2}{e^{2y}+1}+\frac{4}{e^{4y}+1}+\frac{8}{e^{8y}+1}+\ldots \qquad (y>0)$$

при $y=0$ дает

$$1+2+4+8+\ldots = \infty,$$

а

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots \qquad (s>1)$$

при $s=0$ дает

$$1+1+1+\ldots = \zeta(0) = -\frac{1}{2}.$$

С другой стороны, для $0 \leqslant x < 1$ имеем

$$x+(2x^2-x)+(3x^3-2x^2)+(4x^4-3x^3)+\ldots = 0$$

и

$$x+(3x^2-x)+(7x^4-3x^2)+(15x^8-7x^4)+\ldots = 0,$$

а это при $x=1$ дает

$$1+1+1+\ldots = 0, \quad 1+2+4+\ldots = 0.$$

*) Это — следствие тождества $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}$.

Кроме того, даже для степенных рядов, имеются трудности с многозначными функциями. Естественно считать, что

$$\frac{2}{1}-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}-\ldots=\log(1+2)=\log 3,$$

поскольку $\log 3$ есть значение $\log(1+x)$ при естественном приближении x к 2. Но мы могли бы рассуждать и так:

$$\frac{2}{1}+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}+\ldots=\log\frac{1}{1-2}=\log(-1)=(2k+1)\pi i,$$

и здесь πi и $-\pi i$ представляются одинаково естественными значениями (хотя каждое из них парадоксально).

Следующий пример мог бы озадачить Эйлера. Ряд

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4+\ldots \tag{1.6.4}$$

сходится как для малых, так и для больших x, но к различным суммам, а именно соответственно к

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} \quad \text{и} \quad \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

При $x=2i$ мы получаем

$$1-\frac{1}{2}\,\frac{16}{9}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{16}{9}\right)^2-\ldots=\pm\frac{3}{5}.$$

Какой знак следует выбрать?

(4) В этой связи интересно рассмотреть предложенное Гольдбахом преобразование геометрического ряда, которое можно рассматривать как образец „аналитического продолжения" в восемнадцатом веке. Рассуждения самого Гольдбаха здесь упрощены и обобщены.

Идея заключается в преобразовании ряда $1-x+x^2-\ldots$ путем формального умножения на ряд типа

$$1+A_1-A_1+A_2-A_2+\ldots=1$$

в ряд по отрицательным степеням $y=ax+b$. Пишем $A_n=\alpha_n y^{-n}$ и располагаем произведение так:

$$\begin{array}{lllll}
1 & -x & x^2 & -x^3 & \ldots \\
\alpha_1 y^{-1} & -\alpha_1 y^{-1}-\alpha_1 xy^{-1} & \alpha_1 xy^{-1}+\alpha_1 x^2 y^{-1} & -\alpha_1 x^2 y^{-1}-\alpha_1 x^3 y^{-1} & \ldots \\
 & \alpha_2 y^{-2} & -\alpha_2 y^{-2}-\alpha_2 xy^{-2} & \alpha_2 xy^{-2}+\alpha_2 x^2 y^{-2} & \ldots \\
 & & \alpha_3 y^{-3} & -\alpha_3 y^{-3}-\alpha_3 xy^{-3} & \ldots \\
 & & & \alpha_4 y^{-4} & \ldots
\end{array}$$

Если принять теперь $\alpha_n=(b-a)^{n-1}(a-y)$, то C_n, сумма членов, стоящих в n-м столбце, как можно показать*), равна $a(b-a)^{n-1}y^{-n}$, и мы получаем требуемое разложение

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=ay^{-1}+a(b-a)y^{-2}+a(b-a)^2y^{-3}+\ldots.$$

*) По индукции, основываясь на равенстве $C_n=-xC_{n-1}-\alpha_{n-1}y^{-n+1}+\alpha_n y^{-n}$.

Первый ряд сходится для $|x|<1$, а второй — для $|ax+b|>|b-a|$. Если например, $b>a>0$, то вторая область содержит первую. Так как оба ряда сходятся, и преобразование законно для $|x|<1$, то второй ряд дает продолжение первого.

(5) Математика после Эйлера медленно, но непрерывно развивалась по направлению к ортодоксальности, наконец наложенной на нее Коши, Абелем и их последователями, и расходящиеся ряды были постепенно изгнаны из анализа и вновь появились там лишь в самый последний период. Они всегда имели противников, как Даламбер *), Лаплас **) и (в его последние годы) Лагранж; после Коши оппозиция, казалось, одержала полную победу.

Аналитиками, больше всего, после Эйлера, применявшими расходящиеся ряды, были Фурье и Пуассон (последний — почти современник Коши). Мы познакомимся с образцами их работы в гл. II и XIII. Наиболее важен для нас здесь Пуассон, вплотную подошедший к формулировке определения (2) § 1.3. Действительно, Пуассон определяет сумму тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2}a_0+\sum(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

как предел при $r\to 1$ соответствующего степенного ряда

$$\frac{1}{2}a_0+\sum(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\,r^n.$$

Так, рассматривая ряд (1.1.9), он говорит: „Этот ряд не является ни сходящимся, ни расходящимся ***), и хотя мы рассматриваем его как предел сходящегося ряда, это не означает, что он может иметь определенное значение... Мы принимаем, следуя Эйлеру, что суммы этих рядов, рассматриваемые сами по себе, не имеют определенных значений; но мы добавляем, что каждая из них имеет единственное значение, причем этими рядами можно оперировать в анализе, если рассматривать их как пределы сходящихся рядов, т. е. явно предполагать их последовательные члены умноженными на степени дроби, бесконечно мало отличающейся от единицы". Практически это — „A-определение", но мы не должны преувеличивать ясность взглядов Пуассона. Его представления относительно повторных пределов часто

*) „Что касается меня, то признаюсь, что все рассуждения и вычисления, основанные на не сходящихся рядах... всегда кажутся мне весьма подозрительными, даже тогда, когда результаты этих рассуждений согласуются с истинами, известными из других источников".

**) „К иллюзиям я причисляю также применение теории вероятностей (к суммированию таких рядов, как $1-1+1-\dots$), сделанное Лейбницем и Даниилом Бернулли".

***) Пуассон, конечно, подразумевает „собственно расходящимся" к $+\infty$ или $-\infty$.

далеко не отличаются ясностью; так, он записывает теорему Фурье в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{1}^{\infty}\cos n(t-x)\right\}f(t)\,dt,$$

хотя, конечно, он *имеет в виду*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(t-x)f(t)\,dt.$$

1.7. Замечания о британских аналитиках первой половины девятнадцатого века. Мы заключим эту главу несколькими замечаниями о работе над рассматриваемым кругом проблем, производившейся в Британии в 1840—1850 гг. и тщательно проанализированной Буркхардтом в его статье, упоминаемой в примечании к § 1.3 в конце главы. Это было задолго до того, как труды выдающихся континентальных аналитиков были поняты в Англии, и работы британских математиков, о которых мы будем сейчас говорить, обнаруживают своеобразное и часто забавное смешение тонкости в отдельных частностях с некомпетентностью в основных вопросах.

(1) Преобладающей была школа кэмбриджских „символистов"—Вудхауза, Пикока, Д. Ф. Грегори и др. Представляемое ими направление можно было бы охарактеризовать как „$f(D)$-школу" анализа. Они исходили из алгебры и обладали в некоторой степени духом, хотя ни в коей мере не точностью современных абстрактных алгебраистов. Они занимались „общими символами", над которыми производились по некоторым правилам операции: „Символы не ограничены ни значением, ни формой выражения; операции над ними, какого бы они рода ни были, возможны во всех случаях..." Но основы их символизма не отличались ни гибкостью, ни точностью. Они столь безоговорочно настаивали на параллелизме между „арифметической" и „общей" алгеброй, что последовательное проведение их точки зрения фактически разрушило бы общность; и они, повидимому, никогда ясно себе не представляли, что формула, верная при одном истолковании входящих в нее символов, вполне может оказаться неверной при другом. Кроме того, они были слишком во власти фраз вроде: „что верно до предела...", и неудивительно, что их вклад в основной фонд анализа ничтожно мал.

Однако изредка они приходили к формулам, заслуживающим исследования и сейчас. Так, формулы Грегори

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+n)=0, \tag{1.7.1}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\varphi(x+n)=0, \tag{1.7.2}$$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\varphi(x+n)-\varphi(x-n)\right]=\varphi'(x) \tag{1.7.3}$$

верны непосредственно или при надлежащем истолковании в модифицированном виде для интересных классов функций.

(2) Один том журнала *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (т. 8, вышедший в 1849 г. и охватывающий период 1844—1849 гг.) содержит чрезвычайно любопытный набор аналитических работ и дает весьма точную картину состояния анализа в Британии того времени. Он содержит

знаменитую работу Стокса „On the critical values of the sums of periodic series“, в которой впервые появилась в печати „равномерная сходимость“, работы С. Эрншоу и Дж. Р. Юнга, недалеко ушедшие от полной бессмыслицы, и длинную и интересную статью де Моргана о расходящихся рядах, поразительное смешение тонкости и путаницы.

Как замечает Буркхардт, де Морган не был, подобно Пикоку, „чистым алгоритмиком“. Он был плодовитым и остроумным писателем, как по логике, так и по математике; ему принадлежит открытие „логарифмической шкалы“ признаков сходимости, а его „Дифференциальное и интегральное исчисление“, являющееся лучшим из ранних английских учебников этого рода, содержит многое, что еще и сейчас интересно прочесть и вместе с тем трудно найти в других книгах. В указанной статье он пытается дать обоснованную формулировку своего отношения к расходящимся рядам, „единственному оставшемуся еще предмету элементарного характера, относительно признания абсолютной правильности или неправильности результатов которого среди математиков существует серьезный раскол“. Он высказывает много замечательно дельного, но особенности того времени слишком связывали его: хотя и будучи логиком, он не мог или не хотел дать определения.

„Новые математики“, — говорит он, — „как мне кажется, впадают в ту же путаницу в своем отрицании расходящихся рядов, считая иногда, что этими рядами нельзя уверенно пользоваться при существующих представлениях об их смысле и происхождении, а иногда — что уже одно только чье-нибудь намерение применить их, при любых обстоятельствах, есть абсурд. Приходится признать, что многими рядами действительно нельзя уверенно пользоваться кроме как средствами для открытий, результаты которых подлежат последующей проверке... Но говорить, что тем, чем мы не можем пользоваться, никогда не сможет никто другой... представляется мне отходом от всех правил благоразумия...“ Мог ли бы вообще анализ так развиться, если бы Эйлер и другие математики отказались от употребления $\sqrt{-1}$?

Он отказывается делать различие между разными типами расходящихся рядов: если следует применять некоторые, то и все. „Я спорю не с теми, кто отвергает всё, что лежит вне сферы арифметики, но лишь с теми, кто отказывается от применения бесконечно расходящихся рядов и, однако, повидимому, с доверием относится к употреблению конечно расходящихся рядов. Такая практика, повидимому, широко распространена как у нас, так и за границей. Вполне мирятся с тем, что $1-1+1-\ldots=\frac{1}{2}$, но не могут допустить, что $1+2+4+\ldots=-1$“. Очень странно, что ему никогда не приходила в голову возможность истолкований расходящихся рядов (например, пуассоновского), применимых в одном случае и неприменимых в другом.

Позже, возвращаясь к этому пункту, он проявляет некоторую непоследовательность. Существуют случаи, когда ряд $1+2+4+\ldots$ представляется выражающим -1, и случаи, когда он представляется выражающим ∞ *): так, предел ряда

$$1+2x+4x^4+\ldots+2^n x^{n^2}+\ldots$$

при $x \to 1$ есть ∞ (хорошо выбранный пример). Это он может допустить, но „пусть только появится что-нибудь отличное от -1 и ∞, и притом в качестве результата любого процесса, не содержащего *интегрирования, производимого над расходящимся рядом* ... и я буду обязан признать, что от расходящихся рядов следует отказаться“ **). Его точка зрения имеет не-

*) См. § 1.6 (3).

**) Особое значение, придаваемое здесь интегрированию, кажется странным, но де Морган, повидимому, рассматривал интегрирование как „существенно арифметический“ процесс, разрушающий результаты любого „символического“ рассуждения.

которые основания: -1 есть корень уравнения $z = 1 + 2z$, и в некотором смысле то же можно сказать и о ∞, однако во всяком случае не о 0 или 1. В § 1.6 (3) мы получили в качестве суммы рассматриваемого ряда и 0, но де Морган, несомненно, почувствовал бы, что этот пример некорректен, и не был бы в этом полностью неправ. Верно, что -1 и ∞ являются единственными „естественными" суммами рассматриваемого ряда.

Аналогично обстоит дело и с рядом $1 - 1 + 1 - \dots$: было бы губительно, если бы его сумма получилась равной чему-нибудь отличному от $\frac{1}{2}$. „Все здание периодических рядов и интегралов тотчас же рухнуло бы, если бы оказалось возможным, чтобы ряд $1 - 1 + 1 - \dots$ имел одну величину, как предельную форму ряда $A_0 - A_1 + A_2 - \dots$, и другую — как предельную форму ряда $B_0 - B_1 + B_2 - \dots$"; и далее следует совершенно ошибочная критика Пуассона. Де Морган считает, что определить Σa_n как $\lim \Sigma a_n x^n$ означает допустить, что „то, что верно до предела, верно и в пределе", тогда как именно различие между тем и другим схватывается и выражается этим определением.

Де Морган приводит любопытные примеры парадоксов, возникающих в результате интегрирования. Здесь и еще в некоторых случаях он обнаруживает большое формальное остроумие, однако другие парадоксы основываются лишь на путанице с многозначными функциями. Он забывает, что интегралом для x^{-1}, когда x отрицательно, служит $\log|x|$, а не $\log x$, и заключает, что

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{tg} x\, dx = 2\pi i$$

и „$\operatorname{tg}^2 x$ имеет своим средним значением -1", что он пытается подкрепить и другими соображениями. Некоторое место уделено обсуждению формул (1.7.1) — (1.7.3) и знакопеременных асимптотических рядов типа Эйлера-Маклорена. „Если знакопеременный ряд сходится и взято некоторое число его членов ..., то первый отброшенный член является верхним пределом ошибки приближения ...*). Было замечено, что этим весьма полезным свойством обладают широкие классы знакопеременных рядов как конечно расходящихся, так даже и бесконечно расходящихся; я не упомню, чтобы кто-нибудь отрицал его всеобщую применимость ..." Де Морган показывает на примерах, что последняя не имеет места, но при этом не получает никакого существенного продвижения вопроса. В действительности эти дополнительные рассмотрения лишь подтверждают оставленное предыдущими разделами статьи чувство удивления, что столь тонкий мыслитель, который мог бы сказать много интересного, тем не менее прошел мимо всего существенного.

(3) Ради справедливости упомянем нескольких британских математиков, ближе подошедших к сути дела. Ф. В. Ньюмэн протестовал против догмы „что верно..." и указал, что в случае тригонометрического ряда

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots$$

она явно неверна. Его анализ неудовлетворителен, но в главном он свою позицию обосновал; его работа интересна еще и потому, что привела несколько позже Вилбрагама к открытию того, что называют теперь „явлением Гиббса". Стокс в своей уже упоминавшейся статье заметил, что, „конечно, мы можем пользоваться расходящимся рядом лишь как сокращенным способом выражения предела суммы сходящегося ряда", и высказал мнение, что

*) Разумеется, это не верно без оговорок.

вряд ли возможно „открыть столь быстро расходящийся ряд, чтобы нельзя было найти сходящийся ряд, первые n членов которого имели бы своими пределами первые n членов данного расходящегося ряда“ *). Наконец, Гомершэм Кокс, говоря об „эквивалентности“ символистов, пользовался совершенно современным по духу языком: „как уже сказано, символ „ = “ означает здесь символическую эквивалентность. Истинность этого утверждения зависит от определения этой фразы, и, несомненно, можно было бы дать много произвольных определений, в согласии с которыми биномиальную теорему можно было бы считать справедливой для расходящихся рядов“.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ I

§ 1.1. Многие авторы, особенно в Англии, употребляют слово „расходящийся“ в более узком смысле. Так, Бромвич, Харди и Гобсон в своих учебниках называют ряд Σa_n расходящимся только когда $s_n \to +\infty$ или $s_n \to -\infty$, описывая другие не сходящиеся ряды, как „колеблющиеся“. В первом издании своей книги Гобсон называл ряд Σa_n расходящимся, если $|s_n| \to \infty$; так, ряд $1-2+3-\ldots$ — расходящийся в этом смысле.

Более узкое толкование термина „расходящийся“ имеет свои преимущества в элементарном преподавании, но для наших целей более широкое истолкование почти необходимо. „Теория расходящихся рядов“ есть главным образом теория колеблющихся рядов, поскольку теоремы о рядах, расходящихся в „собственном смысле“ к $+\infty$ или $-\infty$, обычно имеют тот же характер, что и теоремы о сходящихся рядах. См., например, § 3.6, а также замечания в книге Hobson 2, 4.

Analyse algébrique, Cauchy (Париж, 1821) **) был первым образцовым руководством по анализу, написанным в подлинно современном духе. Многое из его работы по основаниям анализа можно найти, иногда даже в более точной форме, в ряде мемуаров, опубликованных Больцано в Праге в 1817 г. См. Stolz, *MA*, **18** (1881), 255—279.

§ 1.2. Обоснование результатов, найденных в (1) — (3), (5) и (6), см. в Приложении I. Что же касается (4), то, полагая

$$f(x)=\int_0^a \cos xt\,\chi(t)\,dt,$$

где $0<a\leqslant 1$, $\chi(t)$ — произвольная интегрируемая функция и $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, имеем

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{f(n\theta)}{n^2}=\int_0^a\left\{\sum_1^\infty(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta t}{n^2}\right\}\chi(t)\,dt=\int_0^a\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{\theta^2t^2}{4}\right)\chi(t)\,dt,$$

что равно $\frac{\pi^2}{12}f(0)+\frac{\theta^2}{4}f''(0)$ в согласии с формулой (1.2.24). Аналогичным образом можно доказать много других формул того же типа. Ограничения $a\leqslant 1$ и $|\theta|\leqslant\pi$ существенны.

По поводу чисел Бернулли и Эйлера и многочленов Бернулли см. Bromwich, 297 и сл., 370, а также гл. XIII настоящей книги.

---

*) Рассмотрите ряд $\Sigma\varphi(n)x^{\varphi(n)}$, где $\varphi(n)$ быстро $\to\infty$.

**) Имеется русский перевод: О. Л. Коши, Алгебраический анализ (Лейпциг, 1864). (*Прим. ред.*)

Ряд (1.2.18), повидимому, впервые просуммировал посредством интегрирования Эйлер, *Novi Commentarii Acad. Petropolitanae*, **5** (1760), 203. [Opera (I), **14**, 542—584. Другой метод — в Opera (I), **15**, 435—497.]

§ 1.3. Более подробные сведения о ранних работах Бернулли и других по расходящимся рядам можно найти в книге Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen (Тюбинген, 1889), в работе Буркхардта в *MA*, **70** (1911), 169—206, и в статье Буркхардта „Trigonometrische Reihen und Integrale“ в *Enzykl. d. Math. Wiss.* (II A 12). Книга Рейфа полезна, но не пробуждает интереса к предмету и не всегда точна. Сочинения Буркхардта гораздо более интересны и содержат массу любопытных сведений, которые трудно было бы найти где-нибудь в другом месте. Исторические рассмотрения здесь и в §§ 1.6—1.7 основаны главным образом на этих источниках.

Hutton, Tracts on math. and philosophical subjects (Лондон, 1812), предложил фактически следующее определение предела расходящейся последовательности (s_n). Определяем $s_n^{(k)}$ для $k=1, 2, \ldots$ формулой

$$s_n^{(k)}=\frac{1}{2}s_{n-1}^{(k-1)}+\frac{1}{2}s_n^{(k-1)} \qquad (n\geqslant 0),$$

при условиях

$$s_{-1}^{(k)}=0 \quad (k\geqslant 0), \quad s_n^{(0)}=s_n \quad (n\geqslant 0),$$

так что, в частности, $s_n^{(1)}$ и $s_n^{(2)}$ соответственно равны

$$\frac{1}{2}s_0,\quad \frac{1}{2}s_0+\frac{1}{2}s_1,\quad \frac{1}{2}s_1+\frac{1}{2}s_2,\ldots,\quad \frac{1}{2}s_{n-1}+\frac{1}{2}s_n,\ldots$$

и

$$\frac{1}{4}s_0,\quad \frac{1}{2}s_0+\frac{1}{4}s_1,\quad \frac{1}{4}s_0+\frac{1}{2}s_1+\frac{1}{4}s_2,\ldots,\quad \frac{1}{4}s_{n-2}+\frac{1}{2}s_{n-1}+\frac{1}{4}s_n,\ldots$$

Тогда

$$s_n\to s\ (\mathrm{Hu},\ k)\ \text{означает}\ s_n^{(k)}\to s.$$

Легко проверить, что

$$1-1+1-\ldots=\frac{1}{2}\ (\mathrm{Hu},\ 1),\qquad 1-2+3-\ldots=\frac{1}{4}(\mathrm{Hu},\ 2);$$

и можно показать, опираясь на общие теоремы гл. III или соответствующие теоремы о средних Вороного из гл. IV, что любой ряд, суммируемый (Hu, k), суммируем, и притом к той же сумме, посредством соответствующего среднего Чезаро.

Примеры применения преобразования Эйлера в числовых расчетах см. в книге Bromwich, 62—66.

§ 1.4. По поводу теоремы Коши см. Харди, 167, или Bromwich, 414. Она является частным случаем теоремы 44. Теорема Абеля содержится, например, в теоремах 27 и 55.

§ 1.5. По поводу формул (1.5.10) и (1.5.11) см. Приложение I, § 4, где исправлены некоторые ошибки работы, помещенной в *TCPS*, **21** (1908), 1—48.

§ 1.6. Первым явно сформулированным признаком сходимости был, повидимому, известный признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда $a_0-a_1+a_2-\ldots$ с убывающими положительными a_n.

(3) Ряд (1.6.4) сходится в двух областях, ограниченных окружностями $u^2+(v\pm 1)^2=2$, где $u+iv=x$, а именно, в веретенообразной области, заключенной между ними, и неограниченной области вне ее, и расходится в двух остающихся луночках. Точка $2i$ лежит в верхней из этих луночек. Этот

ряд представляет одну двузначную функцию от $z = \frac{2x}{1+x^2}$, но две различные однозначные функции от x.

(4) По поводу изложения рассматриваемого преобразования самим Гольдбахом см. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Math., **3**, изд. 2 (Лейпциг, 1901), 641. Описание в книге Reiff, 89, неточно.

§ 1.7 (1). Читатель, знакомый с элементами теории рядов Фурье, легко убедится в справедливости формул (1.7.1)—(1.7.3) для функций $\varphi(x)$, определенных надлежащими тригонометрическими интегралами.

(2) Буркхардт анализирует работы Эрншоу и Юнга более тщательно, чем они заслуживают. Он много говорит также о второстепенных немецких работах этого периода, но это в общем менее интересно.

(3) Работы Ньюмэна, Вилбрагама и Гомершэм Кокса были опубликованы в *Cambridge and Dublin Math. Journal*, **3** (1848), 108 и 198, и **7** (1852), 98. Ф. В. Ньюмэн, профессор математики в лондонском университетском колледже, был братом кардинала Дж. Х. Ньюмэна.

Глава II

НЕСКОЛЬКО ИСТОРИЧЕСКИХ ПРИМЕРОВ

2.1. Введение. В этой главе мы даем примеры работы Эйлера и других математиков, обещанные в § 1.6, отправляясь каждый раз от соответствующего отрывка из оригинальных сочинений рассматриваемого аналитика. Темы этих отрывков важны и сейчас, так что последние имеют не только исторический интерес; поэтому мы довольно подробно проанализируем их, присоединив пояснения, необходимые для установления их связи с более современными работами.

А. ЭЙЛЕР И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

2.2. Функциональные уравнения для $\zeta(s)$, $\eta(s)$ и $L(s)$. ζ-функция Римана $\zeta(s)$, определенная при $s=\sigma+it$ и $\sigma>1$ рядом

(2.2.1) $$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots,$$

является однозначной аналитической функцией от s, регулярной на всей плоскости комплексного переменного, за исключением простого полюса при $s=1$. Она удовлетворяет функциональному уравнению

(2.2.2) $$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

В окрестности точки $s=1$ имеем

(2.2.3) $$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+\ldots,$$

где γ — постоянная Эйлера.

Функции $\eta(s)$ и $L(s)$, определенные при $\sigma>0$ рядами

(2.2.4) $$\eta(s)=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\ldots,$$

(2.2.5) $$L(s)=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\ldots,$$

являются целыми функциями от s; при этом $\eta(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)$, но $L(s)$ есть независимая трансцендентная функция. Эти функции удовлетворяют функциональным уравнениям

$$(2.2.6)\quad (2^{s-1}-1)\,\eta(1-s) = -(2^s-1)\,\pi^{-s}\cos\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\,\eta(s),$$

$$(2.2.7)\quad L(1-s) = 2^s\pi^{-s}\sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s)\,L(s).$$

Эти результаты обычно приписываются Риману, Мальмстену и Шлёмильху. Сравнительно недавно было обнаружено, сперва Каэном, а затем Ландау, что и уравнение (2.2.6), равносильное уравнению (2.2.2), и уравнение (2.2.7) содержатся в одной работе Эйлера, написанной в 1749 г., т. е. более чем за сто лет до Римана. Эйлер не рассматривает комплексных значений s и не претендует на *доказательство* этих уравнений даже для вещественных s. Он формулирует их и проверяет их справедливость в таком числе случаев, которое „не оставляет никакого сомнения в истинности нашего предположения“. Заодно его проверки проливают много света на его взгляды на расходящиеся ряды.

2.3. Эйлерова проверка. Эйлер записывает уравнение (2.2.6) в форме

$$(2.3.1)\quad \frac{1-2^{s-1}+3^{s-1}-\ldots}{1-2^{-s}+3^{-s}-\ldots} = -\frac{(s-1)!\,(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\,\pi^s}\cos\frac{s\pi}{2}$$

и приступает к проверке его (а) для всех целых s и (б) для $s=\frac{1}{2}$ и $s=\frac{3}{2}$. Заметим, что $s=\frac{1}{2}$ является единственным из этих значений s, при котором оба ряда сходятся.

Эйлер опирается на формулы

$$(2.3.2)\quad 1-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\ldots = \frac{2^{2k-1}-1}{(2k)!}\,\pi^{2k}B_k,$$

$$(2.3.3)\quad 1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2}\quad (A),$$

$$(2.3.4)\quad 1-2^{2k}+3^{2k}-\ldots = 0\quad (A),$$

$$(2.3.5)\quad 1-2^{2k-1}+3^{2k-1}-\ldots = (-1)^{k-1}\,\frac{2^{2k}-1}{2k}\,B_k\quad (A),$$

где k — натуральное число. Из них формула (2.3.2) хорошо известна, а остальные, без (A), суть соответственно формулы (1.2.7), (1.2.12) и (1.2.13).

Важно заметить, что, во всяком случае, здесь Эйлер вполне отдает себе отчет в том, что применяемые им ряды — расходящиеся и что их надлежит суммировать согласно A определению § 1.3(2). Легко проверить справедливость этих формул в указанном смысле. Действительно, из

$$(2.3.6)\quad \frac{1}{e^y}-\frac{1}{e^{2y}}+\frac{1}{e^{3y}}-\ldots = \frac{1}{e^y+1}\quad (y>0)$$

следует, что

$$\frac{1^m}{e^y}-\frac{2^m}{e^{2y}}+\frac{3^m}{e^{3y}}-\ldots=(-1)^m\left(\frac{d}{dy}\right)^m\frac{1}{e^y+1} \tag{2.3.7}$$

для $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Но

$$\frac{1}{e^y+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{y}{2}=\frac{1}{2}-\sum_1^\infty(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}-1}{(2k)!}B_k y^{2k-1},$$

так что (2.3.7) имеет своим пределом

$$\frac{1}{2} \text{ при } m=0, \quad 0 \text{ при } m=2k>0,$$

$$(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}-1}{2k}B_k \quad \text{при } m=2k-1>0.$$

Отсюда следует, что ряды (2.3.6) и (2.3.7) имеют требуемые пределы при $y\to 0$ или $x=e^{-y}\to 1$.

Это доказывает формулы (2.3.3)—(2.3.5) и показывает также, что рассматриваемые ряды суммируемы ($\mathfrak{E}$) к той же сумме; Эйлер мог с одинаковым успехом пользоваться и этим определением. Разумеется, таким же образом можно доказать справедливость, в тех же смыслах, формул (1.2.8)—(1.2.11), (1.2.14) и (1.2.16).

Во-первых, из (2.3.4) следует, что

$$\eta(1-s)=0 \qquad (s=3,\ 5,\ 7,\ \ldots),$$

а из (2.3.2) и (2.3.5), — что

$$\frac{\eta(1-s)}{\eta(s)}=\frac{(-1)^{\frac{s}{2}-1}(s-1)!\,(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\,\pi^s} \qquad (s=2,\ 4,\ 6,\ldots).$$

Замечая, что $\cos\frac{s\pi}{2}$ равен 0 при нечетном s и $(-1)^{\frac{s}{2}}$ при четном s, видим, что полученными двумя формулами устанавливается справедливость уравнения (2.3.1) для $s=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots$

Во-вторых, если мы возьмем $s=1$ и истолкуем $\dfrac{\cos\frac{s\pi}{2}}{2^{s-1}-1}$ при $s=1$, как предел этого выражения при $s\to 1$, т. е. как $-\dfrac{\pi}{2\log 2}$, то уравнение (2.3.1) примет вид

$$\frac{1-1+1-\ldots}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots}=\frac{1}{2\log 2},$$

в согласии с (2.3.3).

В-третьих, если мы напишем: $(s-1)!\,(2^s-1)=\frac{s!\,(2^s-1)}{s}$ и истолкуем это при $s=0$ как $1\cdot\log 2$, то уравнение (2.3.1) при $s=0$ примет вид

$$\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots}{1-1+1-\dots}=2\log 2,$$

снова в согласии с (2.3.3).

В-четвертых, заменяя $(s-1)!$ на $\Gamma(s)$ и пользуясь формулой

$$\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}=\frac{\pi}{2\Gamma(1-s)\cos\frac{(1-s)\pi}{2}},$$

заключаем, что из справедливости уравнения (2.3.1) для значений $s>1$ следует его справедливость и для $s<0$. Поэтому мы можем считать, что это уравнение проверено для всех целых s.

В-пятых, если $s=\frac{1}{2}$ и мы истолкуем $\left(-\frac{1}{2}\right)!$ как $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, то

$$-\frac{(s-1)!\,(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\pi^s}\cos\frac{s\pi}{2}=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2^{\frac{1}{2}}-1)}{(2^{-\frac{1}{2}}-1)\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}}=1,$$

так что уравнение (2.3.1) справедливо и для $s=\frac{1}{2}$. Это завершает программу Эйлера, за исключением случая $s=\frac{3}{2}$. Для этого последнего случая он дает только численную проверку. Он суммирует расходящийся ряд, стоящий в числителе левой части, с помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена и получает значение 0,380129.... Это дает для левой части уравнения (2.3.1) значение 0,496774, что согласуется со значением правой части до пятого знака включительно. „Наше предположение доведено до столь высокой степени достоверности, что не остается более никакого сомнения в его справедливости и для случаев, когда показатель s принимает дробные значения".

Как замечает Ландау, эйлеровское вычисление ряда $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\dots$ легко преобразовать в строгое определение его абелевской суммы. Нелишне заметить, что интересующую нас сумму можно также вычислить с помощью эйлеровского преобразования из § 1.3 (4). В рассматриваемом случае $a_n=(-1)^n\sqrt{n+1}$; вычисляя последовательные разности для $\sqrt{n+1}$, находим:

$$b_0=1,\quad b_1=-0{,}4142,\quad b_2=-0{,}0964,\quad b_3=-0{,}0465,\quad b_4=-0{,}0285,$$
$$b_5=-0{,}0197,$$

так что рядом Эйлера служит здесь

$$\frac{1}{2}-\frac{0{,}4142}{4}-\frac{0{,}0964}{8}-\frac{0{,}0465}{16}-\frac{0{,}0285}{32}-\frac{0{,}0197}{64}-\ldots,$$

что с точностью до третьего знака равно 0,380. Конечно, наше вычисление значительно грубее вычисления Эйлера.

Формулу (2.2.7) Эйлер не рассматривает с такой же подробностью, но из текста видно, что он выполнил аналогичные проверки. Он кончает замечанием, что „это последнее предположение относится к выражению более простому, чем предыдущее; поэтому, так как оно равным образом верно, следует ожидать, что можно с большей надеждой на успех трудиться над разысканием полного его доказательства, которое, несомненно, пролило бы много света на массу других исследований этого рода".

Б. ЭЙЛЕР И РЯД $1 - 1!x + 2!x^2 - \ldots$

2.4. Суммирование ряда $1-1!x+2!x^2-\ldots$. Ряд

$$f(x)=1-1!x+2!x^2-3!x^3+\ldots, \tag{2.4.1}$$

приводящийся при $x=1$ к виду (1.1.4), не сходится ни для какого x, за исключением $x=0$, и не суммируем ни одним из методов, указанных в § 1.3. Так, например, при $x=1$ ряд (1.3.5) почти так же быстро расходится, как и исходный ряд.

Однако Эйлеру удалось просуммировать этот ряд следующим образом. Считая x положительным и полагая, формально,

$$\varphi(x)=xf(x)=x-1!x^2+2!x^3-\ldots,$$

получаем путем почленного дифференцирования

$$x^2\varphi'(x)+\varphi(x)= \tag{2.4.2}$$
$$=x^2(1!-2!x+3!x^2-\ldots)+x-1!x^2+2!x^3-\ \ldots\ =x.$$

Это дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель $\dfrac{1}{x^2e^{\frac{1}{x}}}$, и решением, обращающимся в нуль вместе с x, служит

$$\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{t}}\frac{dt}{t}\ ^{*}). \tag{2.4.3}$$

Делая подстановку $t=\dfrac{x}{1+xw}$, получаем

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x}=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-w}}{1+xw}\,dw; \tag{2.4.4}$$

*) Легко проверить с помощью интегрирования по частям, что $\varphi(x)=O(x)$ при малых x.

и это выражение тем естественнее приписать в качестве суммы ряду (2.4.1), что мы вновь вернемся к этому ряду, развертывая $\frac{1}{1+xw}$ по степеням xw и формально интегрируя почленно.

Так как $x>0$, то из (2.4.3) следует также, что

$$f(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\int_0^x e^{-\frac{1}{t}}\frac{dt}{t}=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}e^{-u}\frac{du}{u}=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\operatorname{li}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right), \tag{2.4.5}$$

где $\operatorname{li} v$ — „интегральный логарифм" от v, определяемый для $0<v<1$ формулой

$$\operatorname{li} v=\int_0^v\frac{dt}{\log t}=-\int_{\log\frac{1}{v}}^{\infty}e^{-u}\frac{du}{u}.$$

Тогда

$$-\operatorname{li}\left(e^{-y}\right)=\int_y^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du=\int_1^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du-\int_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}du-\int_1^y\frac{du}{u}+\int_0^y\frac{1-e^{-u}}{u}du=$$

$$=-\gamma-\log y+y-\frac{y^2}{2\cdot 2!}+\frac{y^3}{3\cdot 3!}-\ldots,$$

и из формулы (2.4.5) вытекает, что

$$f(x)=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\log\frac{1}{x}+S\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2.4.6}$$

где

$$S(y)=-ye^{y}\left(\gamma-y+\frac{y^2}{2\cdot 2!}-\frac{y^3}{3\cdot 3!}+\ldots\right) \tag{2.4.7}$$

есть целая функция от y. Эти формулы дают аналитическое продолжение функции $f(x)$ на всю плоскость комплексного переменного. В результате получаем многозначную функцию с бесконечным множеством ветвей, отличающихся на целые кратные $2\pi i\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, причем одна ветвь стремится к 1, когда $x\to 0$ по положительным значениям.

Полагая $x=1$, получаем формулу

$$1-1!+2!-3!+\ldots=-e\left(\gamma-1+\frac{1}{2\cdot 2!}-\frac{1}{3\cdot 3!}+\ldots\right). \tag{2.4.8}$$

2.5. Асимптотическое поведение ряда. Пусть $x = re^{i\theta}$, где $-\pi < \theta < \pi$. Имеем

$$(2.5.1)\quad f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-w}}{1+xw}\,dw =$$

$$= \int_0^\infty e^{-w}\,[1 - xw + x^2w^2 - \ldots + (-1)^n x^n w^n]\,dw +$$

$$+ (-1)^{n+1}x^{n+1}\int_0^\infty \frac{e^{-w}w^{n+1}}{1+xw}\,dw =$$

$$= 1 - 1!x + 2!x^2 - \ldots + (-1)^n n!x^n + R_n(x).$$

Но

$$|1+xw| = \sqrt{1+2rw\cos\theta + r^2w^2}$$

имеет минимум 1, если $\cos\theta \geqslant 0$, и минимум $|\sin\theta|$, если $\cos\theta \leqslant 0$. Поэтому $|R_n(x)|$ не превосходит $(n+1)!r^{n+1}$, если $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}$, или $(n+1)!\,r^{n+1}\,|\operatorname{cosec}\theta|$, если $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi$, и потому равно $O(r^{n+1})$ равномерно в угле $-\pi + \delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta$ для любого положительного δ. В частности,

$$(2.5.2)\quad f(x) = 1 - 1!x + 2!x^2 - \ldots + (-1)^n n!x^n + O(x^{n+1})$$

для малых положительных x и заданного n.

Ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

называют *асимптотическим рядом* для функции $f(x)$, вблизи $x = 0$, если

$$(2.5.3)\qquad f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + O(x^{n+1})$$

для каждого фиксированного n и малых x. Мы интересовались здесь главным образом положительными значениями x, но определение применимо и к комплексным x. Таким образом, (2.4.1) служит асимптотическим рядом для нашей функции $f(x)$ в любом угле $-\pi + \delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta$, т. е. в любом угле, исходящем из начала 0 и не содержащем отрицательную вещественную ось. Тем самым, по крайней мере, в одном смысле рассматриваемый ряд „представляет“ функцию $f(x)$.

Определение асимптотического ряда интересно только для того случая, когда ряд расходится. Если функция $f(x)$ регулярна в точке $x = 0$, то ее ряд Тэйлора $\sum a_nx^n$ сходится для малых x и удовлетворяет условию (2.5.3); однако в этом случае мы не имеем ничего нового. Расходящиеся асимптотические ряды встречаются в работах большинства старых аналитиков, но первыми математиками, подвергшими эти ряды систематическому исследованию, были Пуанкаре и Стилтьес, а первая общая теория асимптотических рядов содержится в знаменитом мемуаре Пуанкаре о дифференциальных уравнениях.

Вообще говоря, существует бесконечное множество различных функций, асимптотически представимых одним и тем же рядом $\sum a_n x^n$. Так, если $g(x) = e^{-\frac{a}{x}}$, где a положительно, то $\frac{g(x)}{x^{n+1}} \to 0$ для каждого n равномерно в любом угле $-\frac{\pi}{2} + \delta \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$ (и, в частности, для положительных x), и потому, например, ряд (2.4.1) дает асимптотическое представление для каждой из функций $f(x) + Cg(x)$. Сказать, что некоторый ряд служит асимптотическим рядом для функции $f(x)$, еще не значит „определить его сумму" в смысле § 1.3. Существуют „теоремы единственности" для асимптотических рядов, принадлежащие Ватсону, Ф. Неванлинна и Карлеману; но они основываются на знании точных оценок для остаточных членов, как $R_n(x)$ в (2.5.1), верных для всех n и всех x в надлежащей области.

Мы часто будем употреблять термин „асимптотический ряд" в немного расширенном смысле, а именно: будем говорить, что $\sum a_n x^{n+\alpha}$ есть асимптотический ряд для $f(x)$, если $\sum a_n x^n$ есть асимптотический ряд для $\frac{f(x)}{x^\alpha}$, причем будем иногда для выражения этого пользоваться записью

$$f(x) \sim \sum a_n x^{n+\alpha}. \tag{2.5.4}$$

2.6. Численные расчеты. Эйлер находил численное значение суммы ряда (1.1.4) различными способами. Во-первых, можно воспользоваться формулой (2.4.8), во-вторых—формулой (2.4.5), находя значение интеграла при $x = 1$ с помощью численной квадратуры. Эти методы дают

$$s = 1 - 1! + 2! - 3! + \ldots = 0{,}5963\ldots \tag{2.6.1}$$

В трактате Лакруа приведено более замечательное, хотя и менее точное вычисление (также принадлежащее Эйлеру). Лакруа обозначает $1 - s = 1! - 2! + \ldots$ через S и преобразует S как в § 1.3 (4), получая ряд

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \ldots,$$

расходящийся несколько менее быстро, чем исходный ряд. Он полагает затем $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + S'$ и повторное применение указанного преобразования к S'' дает

$$S' = \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^6} + \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \frac{615}{2^{12}} - \ldots$$

Наконец, он полагает $S' = \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^6} + S''$ и, в третий раз применяя то же преобразование (но к S''), получает:

$$S'' = \frac{21}{2^9} - \frac{15}{2^{12}} + \frac{159}{2^{15}} - \frac{429}{2^{18}} + \frac{5241}{2^{21}} - \ldots$$

Беря восемь членов этого ряда, получаем для S значение 0,4008, а для s — значение 0,5992, с двумя верными знаками. На первый взгляд может показаться удивительным, что мы смогли получить столь хороший результат, поскольку все использованные нами ряды расходятся (причем последний — по меньшей мере столь же быстро, как ряд для s). Позже (стр. 245—246) мы увидим, почему примененный метод оказался столь успешным.

В. ФУРЬЕ И ЕГО ТЕОРЕМА

2.7. Теорема Фурье. Под „теоремой Фурье" мы понимаем здесь теорему, утверждающую, что если $f(x)$ принадлежит надлежащему классу функций и „представима" тригонометрическим рядом

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{2.7.1}$$

в том смысле, что этот ряд сходится к $f(x)$ в открытом интервале $(-\pi, \pi)$, то

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \tag{2.7.2}$$

Таким образом, эта теорема утверждает, что если тригонометрический ряд сходится к $f(x)$ для $-\pi<x<\pi$, то он необходимо служит „рядом Фурье" для $f(x)$.

Формулы (2.7.2) старше Фурье. Так, Буркхардт в своей статье в Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften возводит формулу для a_n к Клеро (1757). Эти формулы были известны Эйлеру, давшему обычный их вывод путем почленного интегрирования в 1777 г.

Следует заметить, что „теорема Фурье", как мы ее сформулировали, есть теорема „единственности", верная или неверная в зависимости от рассматриваемого класса функций и смысла „представимости". Так, согласно дю Буа-Реймону и Валле-Пуссену она верна, если $f(x)$ конечна и интегрируема, а под представлением понимается обычная сходимость. Если же мы предположим только, что ряд суммируем одним из стандартных методов теории расходящихся рядов, то теорема может стать неверной, даже когда $f(x)$ тождественно равна нулю. Так, ряд

$$\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x+\ldots$$

суммируем (A) к 0 для всех x, но, очевидно, не является рядом Фурье для 0. Во всяком случае теорема настолько тонка, что для Фурье было совершенно невозможно строго доказать ее: простейший ее случай, когда $f(x)$ есть 0 и под представлением понимается сходимость, был впервые доказан Кантором в 1870 г.

Есть замечательное место в Théorie de la chaleur Фурье, где он пытается доказать частный случай рассматриваемой теоремы. Предположим, что $f(x)$ — нечетная аналитическая функция, регулярная для $|x| \leqslant \pi$, так что

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{2.7.3}$$

для $|x| \leqslant \pi$; и пусть

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{2.7.4}$$

для $-\pi < x < \pi$, причем ряд сходится в классическом смысле *). Таковы фактически предположения Фурье и целью его является доказать, что b_n задается второй из формул (2.7.2).

2.8. Первая формула Фурье. „Естественным“ методом доказательства формул (2.7.2) является почленное интегрирование; этот метод, которым уже пользовался Эйлер, сразу привел бы Фурье к доказательству, удовлетворительному с точки зрения тогдашних требований. Фурье, повидимому, не знакомый с работой Эйлера, идет совершенно другим и притом весьма неожиданным путем (хотя он позже и упоминает доказательство с помощью интегрирования). Он заменяет каждый синус в формуле (2.7.4) его рядом Тэйлора и приравнивает коэффициенты при степенях x соответствующим коэффициентам ряда (2.7.3). Это дает бесконечную систему линейных уравнений

$$b_1 + 2^{2h+1} b_2 + 3^{2h+1} b_3 + \ldots = (-1)^h f^{(2h+1)}(0) \quad (h = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.8.1}$$

с бесконечным числом неизвестных, причем все эти ряды расходятся уже в простейших случаях; так, функция $f(x) = x$ имеет ряд Фурье

$$2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots\right) \tag{2.8.2}$$

и в этом случае уравнения (2.8.1) принимают вид

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2}, \quad 1 - 2^{2h} + 3^{2h} - \ldots = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots).$$

Как мы знаем, эти равенства действительно справедливы при надлежащих определениях, например при A-определении. Но то обстоятельство, что полученные ряды расходятся и что (как мы видели в § 2.7) малейшее вторжение расходящихся рядов делает „теорему Фурье“ неверной, дает представление о трудностях, возникающих на

---

*) Разумеется, его суммой для $x = -\pi$ или π служит не $f(x)$, а $\frac{1}{2}[f(-\pi) + f(\pi)]$.

избранном Фурье пути. С точки зрения современных представлений, он поставил перед собой безнадежную задачу.

И тем не менее рассуждение Фурье имеет не только исторический интерес, но вполне заслуживает изучения еще и сейчас. Значительные части его верны или нуждаются лишь в небольших перефразировках; оно содержит идеи, важные и для других целей, а некоторые его побочные продукты могут еще навести на интересные задачи.

Перепишем уравнения (2.8.1) в виде

$$b_1 + 2^{2h-1}b_2 + 3^{2h-1}b_3 + \ldots = A_h \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.8.3}$$

Руководящая идея Фурье состоит в том, чтобы, отбросив все уравнения, кроме r первых, и все неизвестные, кроме r первых, и получив таким образом конечную систему

$$\sum_{n=1}^{r} n^{2h-1}b_n = A_h \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ r), \tag{2.8.4}$$

вычислить соответствующие значения $b_{n,r}$ неизвестных b_n и определить предел $b_{n,r}$ при $r \to \infty$. В настоящее время эта идея является господствующей в теории решения бесконечных систем линейных уравнений, и впервые она появилась в работе Фурье.

Однако Фурье действует не совсем так. Одновременно с искомыми b_n он изменяет и правые части A_h, заменяя систему (2.8.4) системой

$$\sum_{n=1}^{r} n^{2h-1}b_{n,r} = A_{h,r} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{2.8.5}$$

Назовем ее системой (r). Идея Фурье заключается в том, что, надлежащим образом выбирая $A_{h,r}$, можно добиться, чтобы и $A_{h,r} \to A_h$ и $b_{n,r}$ стремились к пределам b_n.

Он пытается показать *), что если выбрать $A_{h,r}$ так, чтобы

$$A_{1,1} = A_{1,2} - \frac{A_{2,2}}{2^2}, \tag{2.8.6}$$

$$A_{1,2} = A_{1,3} - \frac{A_{2,3}}{3^2}, \qquad A_{2,2} = A_{2,3} - \frac{A_{3,3}}{3^2}, \tag{2.8.7}$$

и вообще

$$A_{h,r} = A_{h,r+1} - \frac{A_{h+1,r+1}}{(r+1)^2} \qquad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ r), \tag{2.8.8}$$

то мы будем иметь

$$b_{1,1} = b_{1,2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right), \tag{2.8.9}$$

$$b_{1,2} = b_{1,3}\left(1 - \frac{1}{3^2}\right), \qquad b_{2,2} = b_{2,3}\left(1 - \frac{2^2}{3^2}\right), \tag{2.8.10}$$

*) Эта часть рассуждения Фурье изложена в более точной форме в примечании Дарбу к стр. 191 выпущенного им издания работ Фурье.

и вообще

(2.8.11) $$b_{n,r}=b_{n,r+1}\left(1-\frac{n^2}{(r+1)^2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Отсюда будет следовать, что если $A_{h,r}$ удовлетворяют уравнениям (2.8.8), то $b_{n,r}\to b_n$ при $r\to\infty$, где

(2.8.12) $$b_n\left(1-\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)\left(1-\frac{n^2}{(n+2)^2}\right)\ldots=b_{n,n}.$$

Тогда остается выразить $b_{1,1}$, $b_{2,2}$, ... через A_h (которые, *по предположению*, являются пределами для $A_{h,r}$).

Но, по первой из систем (2.8.5), $b_{1,1}=A_{1,1}$. Выразим это сначала согласно (2.8.6) через $A_{1,2}$ и $A_{2,2}$, затем согласно (2.8.7) через $A_{1,3}$, $A_{2,3}$ и $A_{3,3}$, и т. д. Получим:

$$A_{1,1}=A_{1,2}-\frac{A_{2,2}}{2^2}=A_{1,3}-A_{2,3}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{A_{3,3}}{2^2 3^2}=$$
$$=A_{1,4}-A_{2,4}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+A_{3,4}\left(\frac{1}{3^2 4^2}+\frac{1}{4^2 2^2}+\frac{1}{2^2 3^2}\right)-\frac{A_{4,4}}{2^2 3^2 4^2}=\ldots,$$

и в пределе

(2.8.13) $$b_{1,1}=A_{1,1}=A_1P_{1,1}-A_2P_{2,1}+A_3P_{3,1}-\ldots,$$

где

(2.8.14) $$P_{1,1}=1,\quad P_{2,1}=\sum\frac{1}{m_1^2},\quad P_{3,1}=\sum\frac{1}{m_1^2m_2^2},\ \ldots,$$

причем суммирования распространяются на неравные значения m_1, m_2, ..., отличные от 1. В соединении с (2.8.12) это дает выражение для b_1 через значения A_h.

Аналогично можно вычислить $b_{2,2}$, $b_{3,3}$, ..., а тем самым и b_2, b_3, ... А именно, мы выражаем $b_{2,2}$ через $A_{1,2}$ и $A_{2,2}$ из системы (2), затем через $A_{1,3}$, $A_{2,3}$ и $A_{3,3}$ из (2.8.7) и т. д. и так получаем b_2; совершенно так же мы можем получить b_n, отправляясь от системы (n). В итоге приходим к следующим результатам:

(2.8.15) $$b_1\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots=A_1P_{1,1}-A_2P_{2,1}+A_3P_{3,1}-\ldots,$$

. . . .

(2.8.16) $$nb_n\prod_{m\neq n}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)=A_1P_{1,n}-A_2P_{2,n}+A_3P_{3,n}-\ldots,$$

где

(2.8.17) $$P_{1,n}=1,\quad P_{2,n}=\sum\frac{1}{m_1^2},\quad P_{3,n}=\sum\frac{1}{m_1^2m_2^2},\ \ldots$$

и суммирования распространяются теперь на неравные $m_1, m_2, \ldots$, отличные от n. Пользуясь соотношением

$$\prod_{m \neq n}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)=\lim_{z \to n}\left\{\frac{\sin \pi z}{\pi z}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}\right\}=(-1)^{n-1}\frac{1}{2},$$

можно эти формулы упростить, причем (2.8.16) примет вид

$$(2.8.18)\qquad (-1)^{n-1}\frac{1}{2}nb_n=A_1P_{1,2}-A_2P_{2,n}+A_3P_{3,n}-\ldots.$$

Легко найти значения $P_{h,n}$ для всех h и n. Положим

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)=\frac{\sin \pi z}{\pi z}=P_1-P_2z^2+P_3z^4-\ldots.$$

Тогда $P_{h+1}=\dfrac{\pi^{2h}}{(2h+1)!}$, и из тождества

$$\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)(P_{1,n}-P_{2,n}z^2+P_{3,n}z^4-\ldots)=P_1-P_2z^2+P_3z^4-\ldots$$

можно выразить коэффициенты $P_{h,n}$ через коэффициенты P_h. Выполняя эти вычисления и подставляя результаты в (2.8.18), получаем

$$(2.8.19)\quad (-1)^{n-1}\frac{1}{2}nb_n=A_1+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{3!}\right)A_2+\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^2}\frac{\pi^2}{3!}+\frac{\pi^4}{5!}\right)A_3+\ldots$$

Этим завершается первая и наиболее сложная часть рассуждения Фурье. В частности, если $f(x)=x$, то $A_1=1$, $A_2=A_3=\ldots=0$, и мы получаем $\frac{1}{2}nb_n=(-1)^{n-1}$, так что

$$x=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right).$$

2.9. Другие формы коэффициентов и рядов. Вспоминая, что $A_h=(-1)^{h-1}f^{(2h-1)}(0)$, так что

$$f(\pi)=\pi A_1-\frac{\pi^3}{3!}A_2+\ldots,\quad f''(\pi)=-\pi A_2+\frac{\pi^3}{3!}A_3-\ldots,\quad \ldots,$$

и располагая правую часть формулы (2.8.19) по степеням $\frac{1}{n^2}$, получаем, что

$$(2.9.1)\qquad b_n=(-1)^{n-1}\frac{2}{\pi n}\left(f(\pi)-\frac{f''(\pi)}{n^2}+\frac{f^{\mathrm{IV}}(\pi)}{n^4}-\ldots\right).$$

Подставляя эти значения коэффициентов b_n в ряд $\sum b_n \sin nx$ и объединяя в получающемся двойном ряде члены, содержащие соответственно $f(\pi)$, $f''(\pi)$, ..., находим, что

$$(2.9.2) \quad \frac{1}{2}\pi f(x) = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h f^{(2h)}(\pi)\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2^{2h+1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2h+1}} - \ldots\right).$$

Каждая из этих формул представляет самостоятельный интерес и справедлива при довольно широких условиях.

О формуле (2.9.2) мы будем подробнее говорить в гл. XIII (§ 13.9). Здесь мы коснемся еще дальнейших преобразований формулы (2.9.1), которые проделывает Фурье. Он замечает, что функция

$$\chi(x) = f(x) - \frac{f''(x)}{n^2} + \frac{f^{IV}(x)}{n^4} - \ldots$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{n^2}\chi''(x) + \chi(x) = f(x),$$

общим решением которого служит

$$\chi(x) = C\cos nx + D\sin nx + n\sin nx\int_0^x f(t)\cos nt\,dt - n\cos nx\int_0^x f(t)\sin nt\,dt.$$

Так как f нечетна, то и χ нечетна, и $C = \chi(0) = 0$. Поэтому, полагая $x = \pi$ и пользуясь формулой (2.9.1), получаем

$$b_n = (-1)^{n-1}\frac{2}{n\pi}\chi(\pi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt,$$

что совпадает со второй из формул (2.7.2). Так, наконец, Фурье приходит к обычной формуле для коэффициентов.

2.10. Законность формул Фурье. Несомненно, было бы вполне возможно определить условия на $f(x)$, достаточные для обоснования всех сложных преобразований, проведенных Фурье, но для этого потребовался бы весьма тщательный анализ его рассуждения. Здесь мы рассмотрим лишь два вопроса: (а) действительно ли (2.9.1) является верной формулой для b_n и (б) действительно ли b_n удовлетворяют уравнениям (2.8.1). Второй вопрос, разумеется, предполагает предварительный выбор некоторого определения для сумм расходящихся рядов.

(1) Прежде всего, если $f(x)$ нечетна и регулярна на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ вещественной оси *), то, повторно интегрируя по частям и принимая во внимание, что $f(0) = f''(0) = \ldots = 0$, получаем

$$\frac{1}{2}\pi b_n = \int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx = (-1)^{n-1}\left\{\frac{f(\pi)}{n} - \frac{f''(\pi)}{n^3} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{(-1)^h f^{(2h)}(\pi)}{n^{2h+1}} + \frac{(-1)^h}{n^{2h+1}}\int_0^\pi f^{(2h+1)}(x)\cos nx\,dx\right\}.$$

Так как последний член в фигурных скобках есть $O(n^{-2h-2})$ для больших n, то мы видим, что (2.9.1) есть асимптотический ряд для b_n.

Далее, если

$$|f^{(2h)}(\pi)| < CK^{2h} \qquad (h = 0,\ 1,\ \ldots)$$

при некоторых C и K, то этот ряд сходится для $n > K$. В частности, это будет верно, если $f(x)$ есть целая функция порядка 1 и конечного типа, т. е. если $|f(x)| < De^{L|x|}$ при некоторых D и L. Если $L < 1$, а в этом случае и $K < 1$, то ряд сходится для $n \geqslant 1$. При этих условиях формула (2.9.1) верна в обычном смысле.

Можно также доказать, что при более широких условиях рассматриваемый ряд суммируем в различных смыслах, но это требует некоторого знакомства с определениями суммы расходящегося ряда, связанными с именем Бореля.

(2) Мы докажем теперь, что уравнения (2.8.1) справедливы, если содержащиеся в них расходящиеся ряды суммируемы А-методом § 1.3 (2). При этом мы снова будем предполагать лишь, что $f(x)$ нечетна и регулярна на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ вещественной оси.

Так как $f(x)$ регулярна для $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, то

$$b_n = \frac{1}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{nix}dx = \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} f(x)\,e^{nix}dx,$$

где C_1 — контур, идущий от $-\pi$ до π немного выше вещественной оси. Поэтому, для любого $\delta > 0$,

$$\sum b_n e^{-\delta n} = \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} f(x)\sum e^{nix-\delta n}dx = \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} f(x)\,\frac{e^{ix-\delta}}{1-e^{ix-\delta}}\,dx.$$

*) Это, конечно, более общее предположение, чем у Фурье, принимающего, что ряд Тэйлора функции $f(x)$ сходится для $|x| \leqslant \pi$.

Дифференцируя $2h+1$ раз по δ и затем заменяя производную под знаком интеграла соответствующей производной по x, получаем

$$\sum n^{2h+1} b_n e^{-\delta n} = \frac{(-1)^{h-1}}{\pi} \int\limits_{C_1} f(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{2h+1} \frac{e^{ix-\delta}}{1-e^{ix-\delta}}\, dx.$$

При $\delta \to 0$ правая часть стремится к

$$\frac{(-1)^{h-1}}{\pi} \int\limits_{C_1} f(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{2h+1} \frac{e^{ix}}{1-e^{ix}}\, dx = \frac{(-1)^h}{2\pi i} \int\limits_{C_1} f(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{2h+1} \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\, dx.$$

Так как $f(x)$ — нечетная функция, то это равно половине того же интеграла, взятого по контуру, делающему полный оборот вокруг начала в отрицательном направлении; применяя же к последнему интегралу повторно интегрирование по частям, получаем

$$\frac{(-1)^{h-1}}{2\pi i} \int\limits_{C} f^{(2h+1)}(x) \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\, dx = (-1)^h f^{(2h+1)}(0),$$

что и служит тем самым A-суммой для ряда $\sum n^{2h+1} b_n$. В действительности рассматриваемые ряды суммируемы и методами Чезаро, а именно $\sum n^{2h+1} b_n$ суммируем $(C,\ 2h+1)$ *); но A-метод является простейшим, суммирующим все эти ряды одновременно.

Г. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЙ РЯД ХЭВИСАЙДА

2.11. Хэвисайд о расходящихся рядах. Последний наш пример имеет другой характер, так как относится к вполне современному периоду и взят из работы человека, не бывшего профессиональным математиком.

Хэвисайд поместил во втором томе своей Electromagnetic theory (Лондон, 1899) большую главу о расходящихся рядах. Он явно не знал, что ко времени опубликования этого тома уже существовала научная теория расходящихся рядов **), и его работа совершенно несистематична и часто ошибочна. Он не стремится построить нечто заслуживающее наименования „теории“ расходящихся рядов; его отношение к ним было, по существу, такое же, как у Эйлера за 150 лет до него: в действительности у Эйлера были даже более ясные представления. Но Хэвисайд, как бы ни оценивать его достоинства как математика, был человеком большого таланта и оригинальности, и то, что он говорил (хотя зачастую и раздражало математика), было всегда интересно.

*) См. § 5.4.

**) Работы Бореля о расходящихся рядах были опубликованы в течение 1895—1899 гг., а его книга — в 1901 г. Теория асимптотических рядов Пуанкаре датируется 1886 годом.

Нелишне подтвердить эти утверждения цитатами из сочинений Хэвисайда.

„Я должен сказать несколько слов по поводу обобщенного дифференцирования и расходящихся рядов... Нелегко возбудить какой-либо энтузиазм к ним после того, как он был искусственно погашен хо одным душем ригористов... Как мне говорили, я послужил средством стимулирования некоторого интереса к этому предмету. Пожалуй, вряд ли стоит оговаривать, что никоим образом не в Англии, но действительно в Париже недавно была предложена большая премия по поводу роли, которую расходящиеся ряды играют в анализе... Надеюсь, что лауреату этой премии будет что сказать...

„В *OPM* *) я изложил развитие моих взглядов о расходящихся рядах вплоть до времени написания этих работ... Я уклонился от определения смысла эквивалентности. Определения в свое время появятся сами собой... Первоначальная моя точка зрения на ряд состояла в том, что для того, чтобы иметь конечное значение, он должен сходиться... расходящийся же ряд, разумеется, имеет бесконечное значение. Решения физических проблем всегда должны даваться в конечных терминах сходящихся рядов, так как в противном случае ничего, кроме бессмыслицы, не получится...

„Затем пришло частичное освобождение от невежественной слепоты. Расходящиеся ряды на самом деле используются при решении некоторых физических проблем, особенно Стоксом, опирающимся на расходящуюся формулу для колеблющейся функции $J_n(x)$. Он показал, что ошибка меньше последнего сохраняемого члена. Но здесь члены ряда попеременно положительны и отрицательны. Это, повидимому, дает ключ...

„Несомненно, имеются три рода эквивалентности... **) Эквивалентность не означает тождества... Но числовой смысл расходящихся рядов остается еще неясным... Следовало бы появиться теории расходящихся рядов или, скажем, более широкой, чем нынешняя, теории функций, которая бы объединила сходящиеся и расходящиеся ряды в одно гармоничное целое..." (Electromagnetic theory, 2, 434—450.)

„Ригористы", к которым Хэвисайд питал такую нелюбовь, создали то, что он требовал, уже к тому времени, когда он писал цитированные строки.

2.12. Обобщенный показательный ряд.

Хэвисайд особенно часто пользуется одним рядом и, повидимому, первый ввел его в рассмотрение, хотя этот ряд является частным случаем ряда, задолго до того рассмотренного Риманом. Речь идет о ряде

$$S = S(x, c) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{x^{c-r}}{\Gamma(c-r+1)}, \tag{2.12.1}$$

*) „On Operators in Physical Mathematics": три работы, представленные Королевскому обществу в 1892—1894 гг., но никогда полностью не опубликованные.

**) Численная, аналитическая, алгебраическая. Хэвисайд, конечно, имеет в виду, что

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

может означать: (а) что $1 + x + x^2 + \ldots$ сходится к $\frac{1}{1-x}$; (б) что это есть „представление" функции $\frac{1}{1-x}$; (в) что это есть результат алгебраического процесса „бесконечного деления" 1 на $1-x$. Эйлер сказал бы то же самое.

где $x > 0$, c вещественно и коэффициенты считаются равными нулю, если c есть целое n и $r > n$; в этом случае S сводится к обыкновенному показательному ряду. В остальных случаях ряд S расходится для всех x; но поскольку он при формальном дифференцировании воспроизводится, естественно принять, что он должен иметь, в некотором смысле, сумму e^x для всех c.

Пусть c — нецелое, R — целое и $R > c$. Тогда, как легко проверить интегрированием по частям или дифференцированием результата,

$$\frac{1}{\Gamma(c-R)}\int_x^\infty e^{-t}t^{c-R-1}dt = 1 - e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{c-R+n}}{\Gamma(c-R+n+1)}.$$

Поэтому

$$S_R(x,\ c) = \sum_{r=-\infty}^{R}\frac{x^{c-r}}{\Gamma(c-r+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{c-R+n}}{\Gamma(c-R+n+1)} =$$

$$= e^x - \frac{e^x}{\Gamma(c-R)}\int_x^\infty e^{-t}t^{c-R-1}\,dt = e^x + Q_R.$$

Знак Q_R совпадает со знаком $-\Gamma(c-R)$, и

$$|Q_R| < \frac{1}{|\Gamma(c-R)|}\int_x^\infty t^{c-R-1}dt = \frac{x^{c-R}}{|\Gamma(c-R+1)|}.$$

Члены ряда S при $r > c$ имеют чередующиеся знаки. Если, например, u_R, последний член в S_R, положителен, то $\Gamma(c-R) < 0$, $0 < Q_R < u_R$ и $e^x < S_R < e^x + u_R$. Если же u_R отрицателен, то $e^x + u_R < S_R < e^x$. Таким образом, ряд S асимптотически представляет функцию e^x в смысле, аналогичном указанному в § 2.5; его члены, начиная с некоторого места, имеют чередующиеся знаки; а ошибка, получающаяся, если оборвать ряд на каком-либо члене, имеет тот же знак и численно меньше, чем последний сохраненный член.

2.13. Ряд $\sum\varphi^{(r)}(x)$. Ряд Хэвисайда является частным случаем ряда

$$S = S(x) = \sum_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(r)}(x), \tag{2.13.1}$$

где $\varphi^{(r)}(x)$, r-я обобщенная производная функции $\varphi(x)$, определяется для $r = -s < 0$ формулой

$$\varphi^{(-s)}(x) = \varphi_s(x) = \left(\int_0^x dt\right)^s\varphi(t) = \frac{1}{(s-1)!}\int_0^x (x-t)^{s-1}\varphi(t)\,dt, \tag{2.13.2}$$

а для $r=-s+N$ как N-я производная от $\varphi_s(x)$. Если $\varphi(x)$ кратна x^c, где $c>-1$, то ряд (2.13.1) сводится к (2.12.1).

Полагая

$$S=\Big(\sum_{r<0}+\sum_{r\geqslant 0}\Big)\varphi^{(r)}(x)=S^{(1)}+S^{(2)}, \tag{2.13.3}$$

имеем

$$S^{(1)}=\sum_{s>0}\frac{1}{(s-1)!}\int_0^x (x-t)^{s-1}\varphi(t)\,dt=\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt \tag{2.13.4}$$

для любой интегрируемой функции φ.

Примем для простоты, что $\varphi(t)$ неограниченно дифференцируема на любом конечном интервале положительных значений t и что интеграл

$$\int_0^\infty e^{-t}\varphi^{(r)}(t)\,dt$$

сходится для $r=0, 1, \ldots$, откуда следует, что $e^{-t}\varphi^{(r)}(t)\to 0$ при $t\to\infty$ для $r=0, 1, \ldots$. Тогда, интегрируя по частям, получаем

$$\int_x^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt-\int_x^\infty e^{-t}\varphi^{(R+1)}(t)\,dt=e^{-x}\sum_{r=0}^{R}\varphi^{(r)}(x),$$

откуда

$$S_R^{(2)}=\sum_{r=0}^{R}\varphi^{(r)}(x)=e^x\Big\{\int_x^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt-\int_x^\infty e^{-t}\varphi^{(R+1)}(t)\,dt\Big\}.$$

Соединяя это с (2.13.4), получаем, что

$$S_R=\sum_{r=-\infty}^{R}\varphi^{(r)}(x)=e^x\int_0^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt-e^x\int_x^\infty e^{-t}\varphi^{(R+1)}(t)\,dt. \tag{2.13.5}$$

Если теперь $|\varphi^{(R+1)}(x)|<\chi_{R+1}(x)$, где $\chi_{R+1}(x)\to 0$ при $x\to\infty$ для каждого R, то (2.13.5) дает

$$S_R=e^x\int_0^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt+O\{\chi_{R+1}(x)\}=Ae^x+O\{\chi_{R+1}(x)\},$$

и в этом смысле S служит асимптотическим рядом для Ae^x.

2.14. Обобщенный биномиальный ряд. У Хэвисайда встречается также „обобщенный биномиальный ряд“, а именно

$$(1+x)^n=\sum_{s=-\infty}^{\infty}x^{n-m+s}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-s+1)\Gamma(n+s-m+1)}, \tag{2.14.1}$$

где m и n обычно не целые. Этот ряд, в отличие от показательного, явно содержится в более ранней работе Римана.

Если m и n целые и n положительно, то (2.14.1) сводится к элементарной биномиальной теореме; если только m целое, — к обычному бесконечному ряду.

$$\sum_{s=-\infty}^{m} x^{n-m+s} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-s+1)\Gamma(n+s-m+1)} = \sum_{r=0}^{\infty} x^{n-r} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)},$$

сходящемуся к $x^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = (1+x)^n$ при $|x|>1$. Вообще же ряд бесконечен в обе стороны, причем сходится в одну сторону и расходится в другую, сообразно со значением x.

Отделяя положительные и отрицательные значения s и записывая получающиеся два ряда с помощью обозначений, принятых для гипергеометрических рядов, получаем

$$\text{(2.14.2)} \qquad \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+1)} x^{m-n}(1+x)^n = \\ = F(1, -m, n-m+1, -x) + \\ + \frac{n-m}{(m+1)x} F\left(1, -n+m+1, m+2, -\frac{1}{x}\right).$$

Если, например, $0<x<1$, то первый ряд справа сходится, а второй расходится, но суммируем различными способами и представляет аналитическое продолжение функции, определяемой им там, где он сходится. Формула (2.14.2) может быть доказана непосредственно, либо выведена из известных теорем о связях между различными гипергеометрическими функциями.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ II

§ 2.2. Euler, „Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques", Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-lettres (*Mémoires de l'Académie*), **17** (Берлин, 1768), 83—106 [Opera (I), **15**, 70—91] Том относится к 1761 г., работа же была прочитана в 1749 г.

Cahen, *AEN* (3), **11** (1894), 75—161 (75—76) повидимому, был первым современным автором, привлекшим внимание к работе Эйлера. Landau, *Bibliotheca Math.* (3), **7** (1906), 69—79, подробно излагает ее, с надлежащими ссылками на других авторов. Повидимому, никто до Римана (1859) не дал удовлетворительного доказательства функционального уравнения (2.2.2), однако уравнение (2.2.7) было найдено Шлёмильхом в 1849 г. и доказано в 1858 г. Обычное доказательство уравнения (2.2.2) можно найти у Landau, Handbuch, 281—298; см. также Ингам, 55—64, Уиттекер и Ватсон, II, 49. Различными авторами предложено много других доказательств.

§ 2.3. По поводу формулы (2.3.2) см., например, Bromwich, 298.

§ 2.4. Эйлеровские исследования относительно ряда (2.4.1), повидимому, начались в его переписке с Н. Бернулли: см., в частности, Opera (I), **14**, 585. Другие указания на литературу можно найти в книге Рейфа, упомянутой в примечании к § 1.3. Суммируемость этого ряда различными методами исследовал Hardy, *PCPS*, **37** (1941), 1—8; см. § 8.11.

Систематическое изложение теории функции $\mathrm{li}\, e^{-x}$ имеется в книге Nielsen, Theorie des Integral-logarithmus und verwandter Transzendenten (Лейпциг, 1906).

§ 2.5. Мемуар Пуанкаре был опубликован в *AM*, **8** (1886), 295—344. Теория асимптотических рядов излагается в книгах Borel, гл. I; Bromwich, гл. 12; Knopp, гл. 14 и Ford, Studies.

По поводу теорем Ватсона и Карлемана см. Watson, *PTRS* (A), **211** (1912), 279—313; Carleman, Les fonctions quasi-analytiques (Париж, 1926); а также § 8.11.

§ 2.6. Lacroix, Traité du calcul, **3**, изд. 2 (Париж, 1819), 346—348; Bromwich, 336.

§ 2.7. Краткие изложения соответствующих разделов теории рядов Фурье содержатся в книге Hardy and Rogosinski и других указанных там книгах, весьма полное — в книге Зигмунда.

Наиболее полное изложение ранней истории формул (2.7.2) содержится в указанной в примечании к § 1.3 статье Буркхардта из Enzyklopädie.

§ 2.8. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, изд. 2 (Париж, 1822), 187 и след. (воспроизведено в т. 1 его Oeuvres). Краткие изложения рассуждений Фурье см. в F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (Париж, 1913), гл. 1, и Hardy, *Annals*, **36** (1935), 167—181; но эти изложения — слишком сжатые и оба автора совершенно не отдают должного Фурье.

Замечания Бозанкэ (Bosanquet): (1) во всяком случае сомнительно, всегда ли возможно, при условиях, принятых Фурье, выбрать $A_{h,r}$ так, чтобы удовлетворить требованиям (2.8.8) и $A_{h,r} \to A_h$; (2) из (2.8.5) можно непосредственно вывести, что

$$nb_{n,r} \prod_{m=1}^{r}{}' \left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) = \left\{\prod_{m=1}^{r}{}' \left(1 - \frac{E}{m^2}\right)\right\} A_{1,r} = \sum_{h=1}^{r} (-1)^{h-1} A_{h,r} P_{h,n}^{(r)},$$

где штрих указывает на исключение значения $m = n$, $EA_{h,r} = A_{h+1,r}$ и

$$P_{1,n}^{(r)} = 1, \qquad P_{h,n}^{(r)} = \sum \frac{1}{m_1^2 m_2^2 \ldots m_{h-1}^2} \quad (h > 1),$$

причем суммирование распространено на неравные $m_1, m_2, \ldots$ от 1 до r, отличные от n. Беря тогда $r \to \infty$ и предполагая, что $A_{h,r} \to A_h$, мы получим (2.8.16), не опираясь на соотношения (2.8.6) — (2.8.12).

§ 2.10 (2). Проведенное здесь рассуждение можно обобщить: см. указанную в примечании к § 2.8 работу Харди, 172. Весьма общие теоремы о суммируемости по Чезаро рядов, полученных путем дифференцирования рядов Фурье (и охватывающих, как частные случаи, рассмотренные здесь ряды), доказал W. H. Young, *PLMS* (2), **17** (1918), 195—236. Еще более общие результаты, а также подробные литературные указания можно найти у Зигмунда, 254 и сл., и Bosanquet, *PLMS* (2), **46** (1940), 270—289.

§ 2.12. И показательный ряд Хэвисайда и обобщенный биномиальный ряд § 2.14 являются частными случаями обобщенного ряда Тэйлора, приведенного на стр. 268 посмертного римановского фрагмента „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation" (Сочинения, 262—275). Риманово разложение таково:

$$f(x+h) = \sum \frac{h^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)} D^{m+r} f(x),$$

где r фиксировано и, вообще говоря, не целое, m изменяется от $-\infty$ до ∞, а D^{m+r} есть символ обобщенного дифференцирования. Риман не выписывает явно показательного ряда и не делает никаких попыток строгого исследования. По поводу последнего см. Hardy, *JLMS*, **20** (1945), 48—57.

Указанный фрагмент взят из рукописи, датированной 14 января 1847 г., когда Риман был студентом. Как отмечают редакторы немецкого издания „Сочинений" Римана Дедекинд и Вебер, он никогда не предназначался для опубликования; но он впервые содержит определение „интегралов Римана-Лиувилля" и, несомненно, знаменует начало работ Римана по гипергеометрическим рядам.

Асимптотичность ряда (2.12.1) доказал Barnes, *TCPS*, **20** (1908), 253—279. Доказательство Барнеса справедливо для комплексных x с $|\arg x| < \pi$.

§ 2.13. Полиа доказал, что если ряд (2.13.1) сходится хотя бы для одного x, для которого $\varphi(x)$ регулярна, то $\varphi(x)$ есть целая функция, а ряд равномерно сходится в любой ограниченной области изменения x (так что его сумма необходимо кратна e^x). См. Полиа и Сеге, **1**, 161 и 365.

Харди, в работе, указанной в примечании к § 2.8, исследует суммируемость ряда (2.13.1) методами борелевского типа.

§ 2.14. Биномиальный ряд содержится, в виде формулы (3), на стр. 266 указанного выше римановского фрагмента. Риман объясняет его непригодность для отрицательных целых n.

Формула (2.14.2) содержится, например, в Barnes, *PLMS* (2), **6** (1908), 141—177 (146, формула I). Ее можно доказать непосредственно путем вычисления интеграла

$$\int \frac{(1-u)^n}{(-u)^{m+1}} \frac{du}{1+xu}$$

по надлежаще выбранному контуру.

Глава III

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

3.1. Линейные преобразования. Теория расходящихся рядов имеет своим предметом обобщения понятия предела последовательности (s_n). Эти обобщения осуществляются обычно с помощью некоторой вспомогательной последовательности линейных средних, образованных из членов последовательности (s_n). Так, в § 1.3 мы определили (C, 1)-предел последовательности (s_n), или (C, 1)-сумму ряда $\sum a_n$, как предел последовательности

(3.1.1) $$t_m = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_m}{m+1}$$

при $m \to \infty$, и A-предел последовательности (s_n), или A-сумму ряда $\sum a_n$, — как предел выражения

(3.1.2) $$t(x) = \sum a_n x^n = \sum x^n (1-x) s_n,$$

когда $x \to 1$, оставаясь меньше 1. В обоих случаях вспомогательные средние имеют вид

(3.1.3) $$t_m = \sum c_{m,n} s_n \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

или

(3.1.4) $$t(x) = \sum c_n(x) s_n,$$

где x — непрерывный параметр *). Так, в (3.1.1)

$$c_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1} & \text{при } 0 \leqslant n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } n > m, \end{cases}$$

а в (3.1.2)

$$c_n(x) = x^n (1-x).$$

---

*) Все суммирования, если не оговорено противное, распространяются на значения $0, 1, 2, \ldots$. Индекс, по которому производится суммирование, не указывается явно, если только это не требуется для избежания путаницы; так, например, очевидно, что в (3.1.3) и (3.1.4) суммирование должно производиться по индексу n, так что, например, $\Sigma c_{m,n} s_n$ означает $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{m,n} s_n$.

В одном случае средние зависят от целочисленного параметра m, в другом — от непрерывного параметра x; но, как мы увидим, это различие не очень существенно. Рассмотрим сейчас средние типа (3.1.3).

Систему равенств (3.1.3), которую можно короче записать в виде

$$t = \mathrm{T}(s), \tag{3.1.5}$$

мы будем называть *линейным преобразованием* T, а матрицу

$$|\mathrm{T}| = (c_{m,n}),$$

где $c_{m,n}$ есть элемент, стоящий на пересечении m-й строки и n-го столбца, — *матрицей* преобразования T.

3.2. Регулярные преобразования. Наиболее важными являются *регулярные* преобразования. Мы говорим, что преобразование T регулярно, если из

$$s_m \to s \quad (m \to \infty) \tag{3.2.1}$$

всегда следует

$$t_n \to s \quad (n \to \infty). \tag{3.2.2}$$

При этом подразумевается, что второе утверждение включает существование t_m для всех m, т. е. сходимость всех рядов (3.1.3). Так, по теореме Коши, упомянутой в § 1.4, преобразование (3.1.1) регулярно.

Необходимые и достаточные условия регулярности преобразования T устанавливаются важной теоремой, принадлежащей Теплицу и Шуру. Это предложение (теорема 2) будет доказано в § 3.3; ее удобно связать с двумя другими теоремами аналогичного характера, относящимися к другим классам преобразований. Класс линейных преобразований будем обозначать через $\mathfrak{T}$, класс регулярных преобразований — через $\mathfrak{T}_r$. Через $\mathfrak{T}_c$ мы будем обозначать класс преобразований, переводящих все сходящиеся последовательности снова в сходящиеся, т. е. обладающих тем свойством, что из сходимости s_n к s следует сходимость t_m к *некоторому* пределу t. Таким образом, $\mathfrak{T}_r$ есть подкласс класса $\mathfrak{T}_c$, характеризуемый тем, что в нем t всегда совпадает с s. Наконец, через $\mathfrak{T}_c^*$ мы будем обозначать класс преобразований, переводящих все ограниченные последовательности в сходящиеся, т. е. обладающих тем свойством, что из $s_n = O(1)$ следует $t_m \to t$. Ясно, что $\mathfrak{T}_c^*$ также есть подкласс класса $\mathfrak{T}_c$; но классы $\mathfrak{T}_c^*$ и $\mathfrak{T}_r$, как мы увидим, не пересекаются. Мы докажем следующие три теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы преобразование* T *принадлежало к классу* $\mathfrak{T}_c$, *необходимо и достаточно*, (I) *чтобы*

$$\gamma_m = \sum |c_{m,n}| < H, \tag{3.2.3}$$

где H не зависит от m; (II) *чтобы*

$$c_{m,n} \to \delta_n \tag{3.2.4}$$

при $m \to \infty$ для каждого n, и (III) *чтобы*

$$c_m = \sum c_{m,n} \to \delta \tag{3.2.5}$$

при $m \to \infty$. При этих условиях ряд $\sum \delta_n$ абсолютно сходится, и если $s_n \to s$, то при $m \to \infty$

$$t_m \to t = \delta s + \sum \delta_n (s_n - s) = s(\delta - \sum \delta_n) + \sum \delta_n s_n. \tag{3.2.6}$$

Разумеется, пределы δ_n и δ предполагаются здесь конечными.

Теорема 2. *Для того чтобы преобразование* T *принадлежало к классу $\mathfrak{T}_r$ (т. е. чтобы* T *было регулярно), необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия теоремы* 1, *чтобы $\delta_n = 0$ для всех n и чтобы $\delta = 1$.*

Теорема 3. *Для того чтобы преобразование* T *принадлежало к классу $\mathfrak{T}_c^*$, необходимо и достаточно, чтобы $c_{m,n} \to \delta_n$ для каждого n, т. е. было выполнено второе условие теоремы* 1, *и чтобы ряд $\sum |c_{m,n}|$ равномерно сходился относительно m. При этих обстоятельствах первое и третье условия теоремы* 1 *необходимо выполняются, $\sum \delta_n = \delta$, и*

$$t_m \to t = \sum \delta_n s_n$$

для всех ограниченных последовательностей (s_n).

3.3. Доказательство теорем 1 и 2. (1) Докажем сперва достаточность условий теоремы 1. Так как $s_n \to s$, то последовательность (s_n) ограничена и из (3.2.3) следует, что все ряды (3.1.3) абсолютно сходятся.

Далее, ряды (3.2.5) абсолютно сходятся. Кроме того, в силу (3.2.4)

$$\sum_0^N |\delta_n| = \lim_{m \to \infty} \sum_0^N |c_{m,n}| \leqslant H$$

для каждого N, так что

$$\sum |\delta_n| \leqslant H. \tag{3.3.1}$$

Таким образом, ряды $\sum \delta_n$, $\sum \delta_n s_n$ и третий ряд, входящий в (3.2.6), абсолютно сходятся.

Пусть сначала $s = 0$. Тогда мы можем выбрать $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы

$$|s_n| < \frac{\varepsilon}{4H} \quad (n > N). \tag{3.3.2}$$

Но

$$t_m - \sum \delta_n s_n = \sum (c_{m,n} - \delta_n) s_n =$$
$$= \sum_0^N (c_{m,n} - \delta_n) s_n + \sum_{N+1}^\infty (c_{m,n} - \delta_n) s_n = U + V.$$

В силу (3.3.2), (3.2.3) и (3.3.1) здесь

$$|V| \leqslant \frac{\varepsilon}{4H} \sum_{N+1}^\infty (|c_{m,n}| + |\delta_n|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

а в силу (3.2.4) $U \to 0$ при фиксированном N и $m \to \infty$, так что $|U| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $m \geqslant M(\varepsilon, N) = M(\varepsilon)$. Поэтому, для $m \geqslant M(\varepsilon)$,

$$|t_m - \sum \delta_n s_n| < \varepsilon,$$

и $t_m \to \sum \delta_n s_n$. Тем самым при $s = 0$ достаточно уже условий (3.2.3) и (3.2.4), без (3.2.5).

В общем случае полагаем

$$s'_n = s_n - s, \quad t'_m = \sum c_{m,n} s'_n.$$

Тогда $s'_n \to 0$ и по доказанному

$$t'_m \to \sum \delta_n s'_n.$$

Поэтому, используя теперь условие (3.2.5), имеем

$$t_m = \sum c_{m,n} (s'_n + s) = t'_m + s c_m \to \sum \delta_n s'_n + \delta s =$$
$$= s(\delta - \sum \delta_n) + \sum \delta_n s_n = t.$$

Таким образом, условия теоремы достаточны в любом случае.

(2) Переходим к доказательству необходимости условий теоремы. Будем предполагать, что T принадлежит к классу $\mathfrak{T}_c$.

(а) Возьмем

$$s_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = k, \\ 0 \text{ при } n \neq k, \end{cases}$$

так что $s_n \to 0$. Тогда $t_m = c_{m,k}$, и потому $c_{m,k}$ при $m \to \infty$ стремится к некоторому пределу. Тем самым условие (3.2.4) необходимо.

(б) Возьмем $s_n = 1$ для всех n, так что $s_n \to 1$. Тогда

$$t_m = \sum c_{m,n} = c_m,$$

и потому c_m стремится к некоторому пределу δ. Тем самым и условие (3.2.5) необходимо.

(в) Остается доказать необходимость условия (3.2.3). Это — центральный пункт теоремы.

Прежде всего, γ_m конечно для каждого m. В самом деле, при $\gamma_m = \infty$ мы могли бы выбрать (ε_n) так, чтобы *)

$$\varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_n \to 0, \quad \sum \varepsilon_n | c_{m,n} | = \infty.$$

Взяв затем $s_n = \varepsilon_n \operatorname{sign} \overline{c_{m,n}}$, мы имели бы $s_n \to 0$ и

$$t_m = \sum \varepsilon_n | c_{m,n} | = \infty,$$

в противоречие с нашим предположением.

Итак, γ_m конечно для каждого m, и нам нужно только доказать, что γ_m ограничены в совокупности. Пусть это неверно. Тогда для каждого заданного G можно найти такое m, что $\gamma_m > G$. Положим

$$\gamma_{m,n} = \sum_{\nu=0}^{n} | c_{m,\nu} |, \tag{3.3.3}$$

$$d_n = \sum_{\nu=0}^{n} | \delta_\nu |. \tag{3.3.4}$$

Как мы уже знаем, $\gamma_{m,n} \to \gamma_m$ при $n \to \infty$ и $c_{m,\nu} \to \delta_\nu$ (так что $\gamma_{m,n} \to d_n$) при $m \to \infty$.

Зададим произвольно n_1 и построим индуктивно две возрастающие последовательности $m_1, m_2, m_3, \ldots$ и $n_1, n_2, n_3, \ldots$. А именно, предполагая, что $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}, n_1, n_2, \ldots, n_r$ уже определены, выберем $m_r > m_{r-1}$ так, чтобы

$$\gamma_{m_r} = \sum | c_{m_r, n} | > 2rd_{n_r} + r^2 + 2r + 2. \tag{3.3.5}$$

Это возможно, ибо, каково бы ни было G, всегда существует такое m, что $\gamma_m > G$. Так как

$$\sum_0^{n_r} | c_{m,n} | \to \sum_0^{n_r} | \delta_n | = d_{n_r}$$

при $m \to \infty$, то мы можем также предполагать, что

$$\gamma_{m_r, n_r} = \sum_0^{n_r} | c_{m_r,n} | < d_{n_r} + 1. \tag{3.3.6}$$

Принимая во внимание, что $\gamma_{m_r,n} \to \gamma_{m_r}$ при $n \to \infty$, выберем теперь $n_{r+1} > n_r$ так, чтобы

$$\gamma_{m_r} - \gamma_{m_r, n_{r+1}} = \sum_{n_{r+1}+1}^{\infty} | c_{m_r,n} | < 1. \tag{3.3.7}$$

*) Например, можно, следуя Абелю, взять $\varepsilon_n = \dfrac{1}{\sum\limits_{\nu=N}^{n} | c_{m,\nu} |}$, где $c_{m,N}$ — первое $c_{m,\nu}$, отличное от нуля.

Тогда из (3.3.5) — (3.3.7) следует, что

$$\sum_{n=n_r+1}^{n_{r+1}} |c_{m_r,n}| > rd_{n_r} + r^2 + 2r. \tag{3.3.8}$$

Возьмем теперь

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant n_1, \\ \frac{1}{r} \operatorname{sign} \overline{c_{m_r,n}} & \text{при } n_r < n \leqslant n_{r+1} \quad (r = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Тогда $|s_n| \leqslant 1$, $s_n \to 0$ и

$$|t_{m_r}| \geqslant \frac{1}{r} \sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} |c_{m_r,n}| - \sum_{0}^{n_r} |c_{m_r,n}| - \sum_{n_{r+1}+1}^{\infty} |c_{m_r,n}| >$$
$$> \frac{1}{r}(rd_{n_r} + r^2 + 2r) - (d_{n_r} + 1) - 1 = r.$$

Поэтому $t_m \to \infty$, когда $m \to \infty$, пробегая последовательность (m_r), и T не является преобразованием класса $\mathfrak{T}_c$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Единственным пунктом, представляющим трудность, является доказательство необходимости условия (3.2.3). Следующее замечание сделает более понятным смысл этого доказательства. Предположим, что мы хотели бы доказать необходимость условия (3.2.3) для того, чтобы из $|s_n| \leqslant K$ следовало $|t_m| \leqslant HK$, т. е. вместо теоремы о *сходимости* доказывали бы теорему о *равномерной ограниченности*. Мы бы зафиксировали m и положили $s_n = K \operatorname{sign} \overline{c_{m,n}}$. Тогда

$$t_m = K\sum |c_{m,n}| = K\gamma_m,$$

откуда и следовало бы (3.2.3). Доказательство теоремы 1 и опирается (в решающем пункте) на комбинацию этого приема с применением „быстро возрастающих" последовательностей. Такого рода доказательства обычны, например, в теории „дефектов сходимости" рядов Фурье.

Теперь легко доказать теорему 2. Прежде всего, ее условия достаточны, поскольку они включают условия теоремы 1, и потому

$$t_m \to t = \delta s + \sum \delta_n (s_n - s) = s.$$

Доказательство же необходимости этих условий остается тем же самым, причем для условия (3.2.3) оно даже немного упрощается, в силу того, что все $\delta_n = 0$ и тем самым все $d_n = 0$.

3.4. Доказательство теоремы 3. Если условия теоремы 3 удовлетворены и s_n ограничены, то ряды $\sum c_{m,n}$, $\sum c_{m,n}s_n$ равномерно сходятся (относительно m). Поэтому при $m \to \infty$

$$\lim t_m = \lim \sum c_{m,n}s_n = \sum (\lim c_{m,n}) s_n = \sum \delta_n s_n,$$

и достаточность условий теоремы установлена. В частности, полагая $s_n = 1$, имеем

$$\delta = \lim \sum c_{m,n} = \sum \delta_n.$$

Условия (3.2.4) и (3.2.5), будучи необходимыми в теореме 1, тем более необходимы здесь. Остается доказать, что ряд

$$\gamma_m = \sum |c_{m,n}| \tag{3.4.1}$$

(равномерная ограниченность которого обеспечена) равномерно сходится, если T принадлежит к классу $\mathfrak{T}_c^*$.

Покажем сначала, что это достаточно установить в том частном предположении, что $\delta_n = 0$ для всех n. Если преобразование T принадлежит к классу $\mathfrak{T}_c^*$, то оно принадлежит и к классу $\mathfrak{T}_c$, так что $\sum |\delta_n| < \infty$. Формулы

$$t'_m = \sum (c_{m,n} - \delta_n) s_n = \sum c'_{m,n} s_n$$

определяют преобразование T$'$, для которого $c'_{m,n} \to 0$ при $m \to \infty$. Если T принадлежит к классу $\mathfrak{T}_c^*$ и $s_n = O(1)$, то $t_m \to t$ и

$$t'_m \to t - \sum \delta_n s_n,$$

так что T$'$ также принадлежит к классу $\mathfrak{T}_c^*$. Если поэтому равномерная сходимость ряда (3.4.1) установлена в указанном частном случае, то ряд $\sum |c'_{m,n}|$ равномерно сходится, а тогда то же верно и для ряда $\sum |c_{m,n}| = \sum |c'_{m,n} + \delta_n|$.

Заметим далее, что, опираясь на условие (3.2.4), можно представить условие равномерной сходимости в другом виде. Именно, если ряд (3.4.1) равномерно сходится, то

$$\gamma_m = \sum |c_{m,n}| \to \sum |\delta_n|; \tag{3.4.2}$$

а по известной теореме Дини верно и обратное, ибо $|c_{m,n}| \geqslant 0$ *). Тем самым условие равномерной сходимости можно заменить усло-

*) Во всяком случае суть той теоремы, на которую мы опираемся, — та же, что и у Дини; но сам Дини установил свою теорему в другой форме (для равномерной сходимости на интервале значений непрерывного переменного). Поэтому небесполезно привести непосредственное доказательство того, что́ нам фактически требуется, а именно, что *если $u_{m,n} \geqslant 0$, $u_{m,n} \to U_n$ при $m \to \infty$, ряды $\sum u_{m,n}$ и $\sum U_n$ сходятся и*

$$\sum u_{m,n} \to \sum U_n$$

при $m \to \infty$, то ряд $\sum u_{m,n}$ сходится равномерно относительно m.

Действительно, имеем

$$\sum_{N+1}^{\infty} u_{m,n} = \left(\sum_0^{\infty} u_{m,n} - \sum_0^{\infty} U_n\right) + \sum_{N+1}^{\infty} U_n - \sum_0^{N} (u_{m,n} - U_n) = P + Q + R,$$

вием (3.4.2); в том же частном случае, который, как показано, нам достаточно рассмотреть, это условие приводится к виду

$$\gamma_m = \sum |c_{m,n}| \to 0. \tag{3.4.3}$$

Надо, следовательно, доказать необходимость условия (3.4.3) для того, чтобы преобразование T, с $\delta_n = 0$, принадлежало к классу $\mathfrak{T}_c^*$.

Но если условие (3.4.3) не выполнено, то существуют число $\gamma > 0$ и последовательность $(m^{(i)})$ такие, что

$$\gamma_m = \sum |c_{m,n}| \to \gamma, \tag{3.4.4}$$

когда $m \to \infty$, принимая значения $m^{(i)}$. Покажем, что в этом случае можно построить ограниченную последовательность (s_n) такую, что t_m не будет стремиться к пределу, когда $m \to \infty$, пробегая последовательность $(m^{(i)})$.

Зададим произвольно n_1 и построим индуктивно две возрастающие последовательности (m_r) и (n_r), причем первую выбираем из последовательности $(m^{(i)})$. А именно, предполагая, что $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}$ и $n_1, n_2, \ldots, n_r$ уже определены, и принимая во внимание, что $\gamma_m \to \gamma$ и $c_{m,n} \to 0$ при $m \to \infty$, выбираем $m_r > m_{r-1}$ из $(m^{(i)})$ так, чтобы

$$|\gamma_{m_r} - \gamma| < \frac{1}{2^r}, \tag{3.4.5}$$

$$\sum_0^{n_r} |c_{m_r,n}| < \frac{1}{2^r}. \tag{3.4.6}$$

Принимая, далее, во внимание сходимость ряда $\sum |c_{m_r,n}|$, выбираем затем $n_{r+1} > n_r$ так, чтобы

$$\sum_{n_{r+1}+1}^{\infty} |c_{m_r,n}| < \frac{1}{2^r}. \tag{3.4.7}$$

так что

$$0 \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} u_{m,n} \leqslant |P| + |Q| + |R|.$$

Мы можем выбрать $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы $|Q| < \varepsilon$; зафиксировав затем $N(\varepsilon)$, мы можем выбрать $M(\varepsilon, N) = M(\varepsilon)$ так, чтобы $|P| < \varepsilon$ и $|R| < \varepsilon$ при $m \geqslant M(\varepsilon)$. В итоге будем иметь

$$0 \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} u_{m,n} < 3\varepsilon \tag{a}$$

для $m \geqslant M(\varepsilon)$ и $N = N(\varepsilon)$, а потому (так как $u_{m,n} \geqslant 0$) — и для $m \geqslant M(\varepsilon)$, $N \geqslant N(\varepsilon)$. Но при фиксированном $M(\varepsilon)$ мы можем выбрать $N_1(\varepsilon) \geqslant N(\varepsilon)$ так, чтобы (*a*) выполнялось также для $0 \leqslant m < M(\varepsilon)$ и $N \geqslant N_1(\varepsilon)$; тем самым (*a*) будет верно для $N \geqslant N_1(\varepsilon)$ и всех m.

Тогда из (3.4.4)—(3.4.7) следует, что

$$\left| \sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} |c_{m_r,n}| - \gamma \right| < \frac{3}{2^r}. \tag{3.4.8}$$

Определим теперь s_n так:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \leqslant n_1, \\ (-1)^r \operatorname{sign} \overline{c_{m_r,n}} & \text{при } n_r < n \leqslant n_{r+1} \ (r = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{3.4.9}$$

Тогда $|s_n| \leqslant 1$, и в силу (3.4.6) и (3.4.7)

$$\left| \sum_{0}^{n_r} c_{m_r,n} s_n \right| < \frac{1}{2^r}, \quad \left| \sum_{n_{r+1}+1}^{\infty} c_{m_r,n} s_n \right| < \frac{1}{2^r}. \tag{3.4.10}$$

С другой стороны, согласно (3.4.9)

$$\sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} c_{m_r,n} s_n = (-1)^r \sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} |c_{m_r,n}|.$$

Поэтому в силу (3.4.8)

$$\left| \sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} c_{m_r,n} s_n - (-1)^r \gamma \right| < \frac{3}{2^r}. \tag{3.4.11}$$

Наконец, в силу (3.4.10) и (3.4.11) имеем

$$|t_{m_r} - (-1)^r \gamma| < \frac{5}{2^r},$$

и потому t_{m_r} не стремится ни к какому пределу. Этим завершается доказательство теоремы 3.

3.5. Варианты и аналоги. Теоремы § 3.2 допускают много вариантов, систематическое перечисление которых не входит в наши цели. Мы упомянем только немногие, которые позже нам понадобятся.

(1) Первый относится к последовательностям, стремящимся к нулю.

Теорема 4. *Для того чтобы из $s_n \to 0$ следовало $t_m \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (3.2.3) *теоремы* 1 *и чтобы $c_{m,n}$ стремились к нулю при $m \to \infty$ для каждого фиксированного n.*

Достаточность этих условий следует из рассуждений, приведенных в § 3.3(1), если принять там $\delta_n = 0$ и $s = 0$. Как уже указывалось в § 3.3(1), стремления c_m к пределу в этом случае не требуется. Рассуждения из § 3.3(2), (а) и (в) устанавливают также необходимость обоих сохраненных условий; рассуждение же из (б) здесь неприменимо.

(2) Теоремы § 3.2 допускают аналоги, в которых m заменено непрерывным параметром x. Так, аналогом теоремы 2 служит

Теорема 5. *Пусть x — непрерывный параметр, стремящийся к бесконечности, и*

$$t(x) = \sum c_n(x) s_n. \tag{3.5.1}$$

Тогда, для того чтобы $t(x)$ существовало при $x \geqslant 0$ и стремилось к s при $x \to \infty$, когда $s_n \to s$, необходимо и достаточно, (I) *чтобы ряд $\sum |c_n(x)|$ сходился при $x \geqslant 0$ и*

$$\sum |c_n(x)| < H \tag{3.5.2}$$

для $x \geqslant x_0$, где H не зависит от x; (II) *чтобы*

$$c_n(x) \to 0 \tag{3.5.3}$$

при $x \to \infty$ для каждого n, и (III) *чтобы*

$$\sum c_n(x) \to 1 \tag{3.5.4}$$

при $x \to \infty$.

При выполнении этих условий преобразование T, определенное формулой (3.5.1), мы также будем называть регулярным.

Теорему 5 можно доказать с помощью рассуждения, аналогичного проведенному в § 3.3. Однако она представляет собой следствие теоремы 2. В самом деле, во-первых, условия теоремы 5 гарантируют, что $t(x) \to s$, когда $x \to \infty$, пробегая любую последовательность (x_m), стремящуюся к ∞, а потому и вообще при $x \to \infty$. Во-вторых, если условия (I) не выполнены, то либо ряд $\sum c_n(x_m)$ расходится для некоторых $x_m \geqslant 0$, либо

$$\overline{\lim} \sum |c_{m,n}| = \overline{\lim} \sum |c_n(x_m)| = \infty,$$

когда $x \to \infty$, пробегая некоторую последовательность (x_m), стремящуюся к ∞. Но тогда, по теореме 2, существуют последовательности (s_n), для которых s_n стремится к s и, однако,

$$t(x_m) = \sum c_{m,n} s_n$$

либо не определено для некоторых x_m, либо не стремится к s. Этим доказана необходимость условия (3.5.2); необходимость же условий (3.5.3) и (3.5.4) очевидна.

Аналогичные теоремы, очевидно, имеются и для случая, когда x стремится к конечному пределу a (или $a+0$, или $a-0$). Они получаются из теоремы 5 с помощью тривиальных преобразований, и мы будем считать, что они содержатся в этой теореме. Теорема 4 также допускает аналог с непрерывным параметром x, но мы его формулировать не будем.

(3) Существуют аналогичные теоремы относительно интегральных преобразований

$$t(x) = \int c(x, y) s(y)\, dy\ ^{*)}; \tag{3.5.5}$$

но они несколько менее симметричны, поскольку ядро $c(x, y)$ на конечных участках изменения x и y может вести себя сложнее, чем функция целочисленных переменных. Поэтому мы удовольствуемся здесь установлением *достаточных* условий (которые нам только и нужны) и предположим $s(y)$ ограниченной для всех y.

Теорема 6. *Для того чтобы для каждой ограниченной* $s(y)$ *из*

$$s(y) \to s \qquad (y \to \infty) \tag{3.5.6}$$

следовало

$$t(x) \to s \qquad (x \to \infty), \tag{3.5.7}$$

достаточно, чтобы

$$\int |c(x, y)|\, dy < H, \tag{3.5.8}$$

где H не зависит от x, чтобы

$$\int_0^Y |c(x, y)|\, dy \to 0 \tag{3.5.9}$$

при $x \to \infty$ для каждого конечного Y, и чтобы

$$\int c(x, y)\, dy \to 1 \tag{3.5.10}$$

при $x \to \infty$.

Доказательство аналогично доказательству достаточности в § 3.3. Предполагаем сперва, что $s = 0$. Тогда

$$t(x) = \int_0^Y c(x, y) s(y)\, dy + \int_Y^\infty c(x, y) s(y)\, dy = U + V.$$

---

*) Если не указано противное, интеграции распространяются на интервал $(0, \infty)$. Интеграл (3.5.5) определен, вообще говоря, как

$$\lim_{Y \to \infty} \int_0^Y c(x, y) s(y)\, dy;$$

но в теореме 6 интеграл — абсолютно сходящийся.

Выбираем Y так, чтобы $|s(y)| < \frac{\varepsilon}{2H}$ при $y \geqslant Y$ и, следовательно,

$$|V| \leqslant \frac{\varepsilon}{2H} \int_Y^\infty |c(x, y)|\, dy \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, $U \to 0$ при фиксированном Y и $x \to \infty$. Поэтому $t(x) \to 0$. Затем переходим к общему случаю, заменяя $s(y)$ на $s_1(y) = s(y) - s$.

Преобразование (3.5.5) охватывает ранее рассмотренные преобразования как частные случаи. Так, если $s(y) = s_n$, $c(x, y) = c_n(x)$ при $n \leqslant y < n+1$, то $t(x) = \sum c_n(x) s_n$, т. е. мы имеем преобразование, рассмотренное в теореме 5. Если затем ограничить x целыми значениями m, то получим преобразование из теоремы 2.

Условие (3.5.9) по форме не совсем параллельно условию (3.2.4) с $\delta_n = 0$. Параллелизм был бы восстановлен, если бы мы записали последнее условие в форме

$$\sum_{\nu=0}^{n} |c_{m,\nu}| \to 0$$

(что можно сделать).

(4) Мы можем также формулировать теоремы рассматриваемого типа в терминах рядов, а не последовательностей. Две такие теоремы, относящиеся к преобразованиям классов $\mathfrak{T}_c$ и $\mathfrak{T}_c^*$, хорошо известны в элементарном анализе*).

Теорема 7. *Для того чтобы из сходимости ряда $\sum a_n$ следовала сходимость ряда $\sum \chi_n a_n$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum |\Delta\chi_n| = \sum |\chi_n - \chi_{n+1}| < \infty. \tag{3.5.11}$$

Теорема 8. *Для того чтобы из ограниченности сумм $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ следовала сходимость ряда $\sum \chi_n a_n$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (3.5.11) *и чтобы χ_n стремились к нулю.*

Действительно, пусть t_m — частичные суммы ряда $\sum \chi_n a_n$. Тогда

$$t_m = \sum_0^m \chi_n a_n = \sum_0^{m-1} (\chi_n - \chi_{n+1}) s_n + \chi_m s_m,$$

так что

$$c_{m,n} = \begin{cases} \Delta\chi_n & \text{при } 0 \leqslant n < m, \\ \chi_m & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n > m \end{cases}$$

*) В части достаточности их условий.

и

$$\gamma_m = \sum_0^{m-1} |\Delta\chi_n| + |\chi_m|. \tag{3.5.12}$$

Остается показать, что для этих t_m условия теорем 7 и 8 сводятся соответственно к условиям теорем 1 и 3.

Из формулы (3.5.12) ясно, что (3.2.3) влечет (3.5.11). Обратно, если условие (3.5.11) выполнено, то ряд $\sum(\chi_n - \chi_{n+1})$ сходится, так что χ_n стремятся к некоторому конечному пределу χ. В таком случае они тем более ограничены, а тогда (3.2.3) следует из (3.5.11) в силу формулы (3.5.12). Итак, условие (3.5.11) равносильно условию (3.2.3).

Далее, $c_{m,n} = \Delta\chi_n$ для $m > n$, так что $c_{m,n} \to \Delta\chi_n = \delta_n$ при $m \to \infty$; с другой стороны,

$$c_m = \sum_0^{m-1} (\chi_n - \chi_{n+1}) + \chi_m = \chi_0 = \delta.$$

Таким образом, условия (3.2.4) и (3.2.5) выполнены без каких бы то ни было ограничений на χ_n. Тем самым теорема 7 доказана.

Дополнительное условие для теоремы 8 состоит, по теореме 3, в равномерной сходимости ряда $\sum |c_{m,n}|$ (относительно m). Как мы видели в § 3.4, это равносильно условию

$$\sum |c_{m,n}| \to \sum |\delta_n|$$

или, в данном случае, условию

$$\sum_0^{m-1} |\Delta\chi_n| + |\chi_m| \to \sum_0^{\infty} |\Delta\chi_n|,$$

т. е. одновременному выполнению соотношений $\sum |\Delta\chi_n| < \infty$ и $\chi_n \to 0$. Тем самым доказана и теорема 8.

Разумеется, теоремы 7 и 8 можно доказать непосредственно, не ссылаясь на более трудные теоремы, из которых мы их здесь вывели.

(5) В заключение этого параграфа заметим, что классы $\mathfrak{T}_r$ и $\mathfrak{T}_c^*$, являющиеся оба подклассами класса $\mathfrak{T}_c$, не пересекаются. Действительно, если T принадлежит к классу $\mathfrak{T}_c^*$, то ряд $\sum |c_{m,n}|$ и тем более ряд $\sum c_{m,n}$ равномерно сходится, так что

$$\sum \delta_n = \sum \lim c_{m,n} = \lim \sum c_{m,n} = \lim c_m = \delta.$$

Но это невозможно для регулярного преобразования T, ибо в случае такого преобразования $\delta_n = 0$ для всех n, а $\delta = 1$.

3.6. Положительные преобразования. В этом параграфе мы будем рассматривать только регулярные преобразования. Особенно важное значение имеют те из них, для которых

$$c_{m,n} \geqslant 0 \tag{3.6.1}$$

для всех m и n или, по крайней мере, для $n \geqslant n_0$. Мы будем называть такие преобразования *положительными* (регулярными) преобразованиями.

Если T регулярно, то $c_{m,n} \to 0$ при $m \to \infty$ для каждого n, так что значения $c_{m,n}$ с $n < n_0$ не влияют на поведение t_m при больших m. Поэтому несущественно, предполагаем ли мы, что $c_{m,n} \geqslant 0$ для всех m и n или только для $n \geqslant n_0$.

Теорема 9. *Если* T *регулярно и положительно, то*

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n \leqslant \varliminf_{m\to\infty} t_m \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} t_m \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} s_n \tag{3.6.2}$$

для любой вещественной последовательности (s_n). *В частности, из* $s_n \to s$ *следует* $t_m \to s$ *как в случае конечного, так и в случае бесконечного* s.

Действительно, если $\varliminf s_n = \sigma$ конечен, то $s_n > \sigma - \varepsilon$ для $n \geqslant N = N(\varepsilon)$. При этом мы можем предполагать, что $N \geqslant n_0$, а тогда в силу условия (3.6.1) либо $t_m = \infty$, либо

$$t_m = \sum_0^N c_{m,n} s_n + \sum_{N+1}^\infty c_{m,n}s_n \geqslant \sum_0^N c_{m,n}s_n + (\sigma - \varepsilon) \sum_{N+1}^\infty c_{m,n}.$$

Первый член в правой части при $m \to \infty$ стремится к нулю, а второй — к $\sigma - \varepsilon$, так что $t_m > \sigma - 2\varepsilon$ для достаточно больших m. Поэтому

$$\varliminf t_m \geqslant \sigma = \varliminf s_n.$$

Доказательство последнего из неравенств (3.6.2), в случае конечного $\varlimsup s_n$, аналогично.

Если $\varliminf s_n = \infty$ (так что $s_n \to \infty$), то $s_n > G$ для любого G и $n \geqslant N = N(G) \geqslant n_0$; тогда либо $t_m = \infty$, либо $t_m > \frac{1}{2} G$ для достаточно больших m, так что $t_m \to \infty$. Аналогично рассуждаем в случае $\varlimsup s_n = -\infty$.

Последний пункт теоремы 9 подсказывает еще одну интересную задачу, относящуюся к вещественным преобразованиям. Мы можем говорить, как в § 1.4, что вещественное преобразование T *вполне регулярно*, если из $s_n \to s$ следует $t_m \to s$ для всякого *конечного или бесконечного* s. Условия теоремы 2 должны тогда выполняться, и естественно задаться вопросом о дополнительных условиях, необходимых и достаточных для полной регулярности. В общем случае эти условия довольно сложны, и мы ограничимся рассмотрением „треугольных" преобразований

$$t_m = \sum_{0}^{m} c_{m,n} s_n, \tag{3.6.3}$$

т. е. преобразований, для которых $c_{m,n} = 0$ при $n > m$.

Теорема 10. *Для того чтобы вещественное преобразование вида* (3.6.3) *было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы оно было регулярным и положительным.*

После теоремы 9 остается только доказать, что если T вполне регулярно, то $c_{m,n} \geqslant 0$ для $n \geqslant n_0$.

Пусть это условие не выполнено. Тогда существуют отрицательные $c_{m,n}$ с произвольно большими n и, так как $c_{m,n} = 0$ при $n > m$, также с произвольно большими m. Поэтому существует такая последовательность (m_i) значений m, что (1) $c_{m_i,n} < 0$ для некоторых n и (2) если n_{m_i} — номер последнего такого $c_{m_i,n}$, то $n_{m_i} \leqslant m_i$ и n_{m_i} стремится к бесконечности вместе с m_i.

В дальнейшем мы рассматриваем лишь значения m из последовательности (m_i), и вместо m_i пишем просто m. Зададим произвольно m_1 и построим индуктивно последовательности (m_r) *) и (s_n). А именно, пусть $m_1, m_2, \ldots, m_r$, а также соответствующие значения n_m и значения s_n для $n \leqslant m_r$ уже определены. Выбираем m_{r+1} так, чтобы $m_{r+1} \geqslant n_{m_{r+1}} > m_r$ и

$$\left| \sum_{0}^{m_r} c_{m_{r+1}, n} s_n \right| < 1.$$

Это возможно, поскольку $n_m \leqslant m$, n_m стремится к бесконечности вместе с m и $c_{m,n} \to 0$ при $m \to \infty$ для каждого n. Далее, значения s_n при $m_r < n \leqslant m_{r+1}$ определяем так:

$$s_n = \begin{cases} n & \text{при } m_r < n \leqslant m_{r+1}, \quad n \neq n_{m_{r+1}}, \\ \dfrac{m_{r+1}^2}{|c_{m_{r+1}, n_{m_{r+1}}}|} & \text{при } n = n_{m_{r+1}}. \end{cases}$$

Тогда $s_n \to \infty$ (ибо $|c_{m,n}| \leqslant H$), но

$$t_{m_{r+1}} = \sum_{0}^{m_r} c_{m_{r+1}, n} s_n + \sum_{m_r+1}^{m_{r+1}} c_{m_{r+1}, n} s_n <$$

$$< 1 + m_{r+1} \sum_{m_r+1}^{m_{r+1}} |c_{m_{r+1}, n}| - m_{r+1}^2 < 1 + H m_{r+1} - m_{r+1}^2,$$

и потому $t_m \to -\infty$ при $m = m_r$ и $r \to \infty$. Тем самым T не является вполне регулярным.

*) (m_r), конечно, — подпоследовательность последовательности, обозначенной нами раньше через (m_i).

Следующие примеры познакомят читателя с различными возможностями, представляющимися при нарушении условий теоремы.

(I) Преобразование, при котором $c_{m,m}=2$, $c_{m,m+1}=-1$ и $c_{m,n}=0$ в остальных случаях, регулярно, но не вполне регулярно. Так, если $s_n=2^n$, то $t_m=0$ для всех m; если $s_n=3^n$, то $s_n\to\infty$, тогда как $t_m\to-\infty$.

(II) Преобразование

$$t_m=\frac{2}{m+1}(s_0+s_1+\ldots+s_{m-1})-\frac{m-1}{m+1}s_m,$$

имеющее вид (3.6.3), регулярно, но не вполне регулярно; действительно если $s_n=n+1$, то $s_n\to\infty$, тогда как $t_m=1$ для всех m.

(III) Преобразование, определенное матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2^3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix},$$

вполне регулярно. Действительно, условия теоремы 2 выполнены. Кроме того, так как

$$t_m=s_m-\frac{1}{2^{m+1}}s_{m+1}+\frac{1}{2^{m+2}}s_{m+2}+\frac{1}{2^{m+3}}s_{m+3}+\ldots,$$

то при $s_n\to\infty$ имеются две возможности. Либо ряд $\sum\frac{s_n}{2^n}$ расходится, и тогда $t_m=\infty$ для всех m. Либо этот ряд сходится; тогда $\frac{1}{2^{m+1}}s_{m+1}=o(1)$ и $t_m\geqslant s_m-o(1)\to\infty$.

3.7. Теорема Кноппа. Кноппу принадлежит интересное обобщение теоремы 9 на комплексные последовательности. Следуя Кноппу, мы установим его для общего интегрального преобразования (3.5.5).

Такое преобразование мы будем называть *положительным*, если $c(x, y)\geqslant 0$ для всех x, y *). Условия теоремы 6 сводятся тогда к требованиям, чтобы интеграл

$$c(x)=\int c(x, y)\,dy \tag{а}$$

был ограниченным и стремился к 1 при $x\to\infty$, а

$$\int_0^Y c(x, y)\,dy\to 0 \tag{б}$$

*) Условием, строго параллельным принятому в § 3.6, было бы „$c(x, y)\geqslant 0$ для $y\geqslant Y$". Мы принимаем $Y=0$ во избежание малосущественных усложнений.

при $x \to \infty$ для каждого конечного Y. Мы будем дальше предполагать всюду, что эти требования выполнены, и будем называть такое преобразование *нормальным*.

Рассмотрим комплексную плоскость $w = u + iv$ с единственной бесконечно удаленной точкой $w = \infty$. Для любого множества S точек w ($w \neq \infty$) определим *замкнутую выпуклую оболочку K множества S* следующим образом. Если S не содержится ни в какой замкнутой полуплоскости, то K есть вся плоскость, включая ∞. Если такие полуплоскости существуют, то K есть их общая часть. При этом мы включаем ∞ в K, когда S неограниченно, и не включаем, когда S ограниченно; и в том, и в другом случае K замкнуто. Таким образом, например, если S состоит из одной точки, то K есть эта точка; если S состоит из двух точек, то K есть соединяющий их прямолинейный отрезок; если S — вещественная ось, то K — вещественная ось с присоединенной точкой ∞; если S состоит из вещественной и мнимой осей, то K есть вся плоскость.

Пусть теперь $s(y) = u + iv$ есть комплексная функция вещественного переменного y, определенная для $y \geqslant 0$ и ограниченная на любом конечном интервале $(0, Y)$. Обозначим через $K(s, y_0)$ замкнутую выпуклую оболочку K множества всех значений $s(y)$ для $y \geqslant y_0$, так что $K(s, y_2)$ содержится в $K(s, y_1)$ при $y_2 \geqslant y_1$. Наконец, назовем *ядром* функции $s(y)$ и обозначим через $K(s)$ пересечение всех $K(s, y)$; аналогично определим ядро $K(t)$ функции $t(x)$, получающейся из $s(y)$ посредством преобразования (3.5.5).

Если $s(y)$ при $y \to \infty$ стремится к конечному пределу a, то $K(s)$ есть точка a. Если $s(y)$ вещественно, то $K(s)$ есть отрезок вещественной оси с концами $\underline{\lim}\, s(y)$ и $\overline{\lim}\, s(y)$, притом содержащий точку ∞, если $\underline{\lim}\, s(y) = -\infty$ или $\overline{\lim}\, s(y) = \infty$. Какова бы ни была функция $s(y)$, $K(s)$, во всяком случае, не пусто, как предел убывающей последовательности непустых замкнутых множеств[1]; но оно может состоять и из одной только точки ∞.

Если $K(s)$ сводится к одной точке ∞, то мы говорим, что $s(y)$ *расходится к* ∞. Если $s(y)$ вещественно, то это означает, что либо $s(y) \to +\infty$, либо $s(y) \to -\infty$. Таким образом, наше определение дает целесообразное обобщение понятия „собственной расходимости" на комплексные функции.

Теперь мы можем сформулировать теорему Кноппа.

Теорема 11. *Если преобразование* (3.5.5) *нормально и* $t(x)$ *существует для* $x \geqslant 0$, *то* $K(t)$ *содержится в* $K(s)$.

В частности, это верно, с очевидными изменениями определений, для регулярных и положительных преобразований (3.1.3).

[1] Комплексная плоскость с присоединенной бесконечно удаленной точкой — компакт. (*Прим. перев.*)

Мы можем принять, что $K(s)$ не есть вся плоскость, — иначе нечего было бы доказывать. Тогда нужно доказать, что каждая точка w, лежащая вне $K(s)$, лежит и вне $K(t)$. Но если точка w лежит вне $K(s)$, то она лежит и вне $K(s, y_0)$ для некоторого y_0. Поэтому дело сводится к доказательству того, что *если точка w лежит вне $K(s, y_0)$, то она лежит и вне $K(t, x_0)$ для некоторого x_0*. Здесь следует различать два случая.

(1) Пусть $w \neq \infty$. Тогда мы можем считать (произведя, если нужно, параллельный перенос), что $w = 0$. Так как $K(s, y_0)$ замкнуто, то оно содержит точку w_0, наименее удаленную от $w = 0$ *). При этом мы можем предполагать (произведя, если нужно, поворот), что

$$w_0 = w_0 - w = 4d > 0.$$

Тогда, в силу выпуклости множества $K(s, y_0)$, у всех его точек, а тем более у всех точек множеств $K(s, y)$ с $y > y_0$, абсциссы не меньше $4d$. Следовательно, $\Re\, s(y) > 3d$ при $y \geqslant y_0$.

Так как, по предположению, $s(y)$ ограничена на каждом конечном интервале изменения y, то существует такое M, что $|s(y)| < M$ при $0 \leqslant y \leqslant y_0$. Так как, далее,

$$\int_0^{y_0} c(x, y)\, dy \to 0, \quad \int_0^{\infty} c(x, y)\, dy \to 1$$

при $x \to \infty$, то мы можем выбрать x_0 так, чтобы

$$\int_0^{y_0} c(x, y)\, dy < \frac{d}{M}, \quad \int_{y_0}^{\infty} c(x, y)\, dy > \frac{2}{3}$$

при $x \geqslant x_0$. Тогда при $x \geqslant x_0$ будем иметь

$$\Re\, t(x) = \Re\left\{\int_0^{y_0} c(x, y)\, s(y)\, dy\right\} + \Re\left\{\int_{y_0}^{\infty} c(x, y)\, s(y)\, dy\right\} >$$
$$> -M \cdot \frac{d}{M} + \frac{2}{3} \cdot 3d = -d + 2d = d.$$

Но это показывает, что точка $w = 0$ лежит вне $K(t, x_0)$.

(2) Пусть теперь $w = \infty$. В этом случае $K(s, y_0)$ ограничено, так что $s(y)$ ограничена для $y \geqslant y_0$, а потому и для всех y. Таким образом, $|s(y)| \leqslant N$ для некоторого N и, следовательно,

$$|t(x)| \leqslant N \int c(x, y)\, dy,$$

*) Из выпуклости множества $K(s, y_0)$ следует даже, что такая точка единственная; но это не используется в дальнейших рассуждениях.

так что и $t(x)$ ограничена. Тем самым $w=\infty$ лежит вне $K(t, x_0)$ при любом x_0.

Теорема 11 полностью доказана. В частности, заключаем, что если $t(x)$ расходится к ∞, то и $s(y)$ расходится к ∞.

3.8. Одно применение теоремы 2. Любое преобразование (3.1.3) может быть положено в основу определения метода суммирования рядов: если

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

t_m определено формулой (3.1.3) и $t_m \to s$, то мы можем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (T) к сумме s, и писать

$$s_n \to s \ (\mathrm{T}), \quad \sum a_n = s \ (\mathrm{T}).$$

Если преобразование T регулярно, то и соответствующий метод суммирования мы будем называть регулярным; таким образом, регулярный метод — это метод, суммирующий любой сходящийся ряд к его обыкновенной сумме.

В следующей главе теорема 2 будет использована для доказательства регулярности наиболее употребительных в анализе методов суммирования. Здесь мы используем ее для доказательства теоремы, которая нам позже понадобится, но относится к не столь распространенным методам.

Если

$$p_n \geqslant 0, \quad p_0 > 0, \quad \sum p_n = \infty \tag{3.8.1}$$

(так что $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \to \infty$) и

$$t_n = \frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n}{p_0 + p_1 + \ldots + p_n} \to s \tag{3.8.2}$$

при $n \to \infty$, то мы будем писать, что

$$s_n \to s \ (\overline{\mathrm{R}}, p_n)\ ^{*}). \tag{3.8.3}$$

Докажем сперва следующую теорему:

Теорема 12. *Метод* $(\overline{\mathrm{R}}, p_n)$ *регулярен.*

Действительно, здесь

$$c_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{p_n}{P_m} & \text{при } n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } n > m, \end{cases}$$

$$\sum |c_{m,n}| = \sum c_{m,n} = 1$$

*) Этот метод является незначительным видоизменением метода „нормальных средних Рисса“, рассматриваемого в § 4.16. (*Прим. ред.*)

и $c_{m,n} \to 0$ для каждого n. Тем самым условия теоремы 2 выполнены.

В частности, отсюда вытекает регулярность (C, 1)-метода, соответствующего случаю $p_n = 1$.

В дальнейшем, во избежание малосущественных усложнений, мы будем предполагать, что $p_n > 0$ для всех n.

Теорема 13. *Если* $p_n > 0$ *и* $s_n \to s$ $(\bar{R}, p_n)$, *то*

$$s_n - s = o\left(\frac{P_n}{p_n}\right).$$

Действительно

$$p_n s_n = P_n t_n - P_{n-1} t_{n-1} = s(P_n - P_{n-1}) + o(P_n) = s p_n + o(P_n).$$

В частности, из $s_n \to s$ (C, 1) следует $s_n - s = o(n)$, а потому и $s_n = o(n)$, $a_n = o(n)$. Теорема 13 принадлежит к важному классу теорем, которые мы будем называть „лимитирующими". С каждым „приличным" методом суммирования связана своя лимитирующая теорема, утверждающая, что он не может суммировать *слишком быстро* расходящиеся ряды *).

Следующая теорема, являющаяся основной теоремой этого параграфа, устанавливает связь между методами, соответствующими двум различным последовательностям (p_n) и (q_n).

Теорема 14. *Если* $p_n > 0$, $q_n > 0$, $\sum p_n = \infty$, $\sum q_n = \infty$ *и либо* (а)

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1}}{p_n}, \tag{3.8.4}$$

либо (б)

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leqslant \frac{q_{n+1}}{q_n} \tag{3.8.5}$$

и

$$\frac{P_n}{p_n} \leqslant H \frac{Q_n}{q_n}, \tag{3.8.6}$$

то из $\sum a_n = s$ $(\bar{R}, p_n)$ *следует* $\sum a_n = s$ $(\bar{R}, q_n)$.

Пусть

$$t_m = \frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots + p_m s_m}{P_m}, \quad u_m = \frac{q_0 s_0 + q_1 s_1 + \ldots + q_m s_m}{Q_m}.$$

Тогда

$$p_0 s_0 = P_0 t_0, \quad p_m s_m = P_m t_m - P_{m-1} t_{m-1} \quad (m > 0),$$

---

*) Имеются методы суммирования, для которых не существует лимитирующей теоремы. (*Прим. ред.*)

так что

$$(3.8.7)\qquad u_m=\frac{1}{Q_m}\left\{\frac{q_0}{p_0}P_0t_0+\frac{q_1}{p_1}(P_1t_1-P_0t_0)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{q_m}{p_m}(P_mt_m-P_{m-1}t_{m-1})\right\}.$$

Следовательно, $u_m=\sum c_{m,n}t_n$, где

$$(3.8.8)\qquad c_{m,n}=\begin{cases}\left(\dfrac{q_n}{p_n}-\dfrac{q_{n+1}}{p_{n+1}}\right)\dfrac{P_n}{Q_m} & \text{при}\quad n<m,\\ \dfrac{q_mP_m}{p_mQ_m} & \text{при}\quad n=m,\\ 0 & \text{при}\quad n>m.\end{cases}$$

Так как $Q_m\to\infty$, то $c_{m,n}\to 0$ при $m\to\infty$ и фиксированном n. Беря $s_n=1$ для всех n, имеем $t_m=1$ и $u_m=1$, так что

$$(3.8.9)\qquad \sum c_{m,n}=1$$

для каждого m. Таким образом, преобразование (3.8.7) удовлетворяет условиям (3.2.4) и (3.2.5) теоремы 1 с $\delta_n=0$ и $\delta=1$.

Остается проверить, что оно удовлетворяет также условию (3.2.3). Но в случае (а) имеем $c_{m,n}\geqslant 0$, $\sum|c_{m,n}|=\sum c_{m,n}$ и (3.2.3) следует из (3.8.9). В случае же (б) $c_{m,n}\leqslant 0$ при $n\neq m$, но $c_{m,m}>0$. Поэтому

$$\sum_0^{\infty}|c_{m,n}|=-\sum_0^{m-1}c_{m,n}+\frac{q_mP_m}{p_mQ_m},$$

$$1=\sum_0^{\infty}c_{m,n}=\sum_0^{m-1}c_{m,n}+\frac{q_mP_m}{p_mQ_m},$$

так что, принимая во внимание (3.8.6), имеем

$$\sum|c_{m,n}|=2\frac{q_mP_m}{p_mQ_m}-1\leqslant 2H-1,$$

и условие (3.2.3) снова выполнено (с заменой H на $2H-1$). Таким образом, преобразование (3.8.7) в обоих случаях регулярно, а отсюда и следует утверждение теоремы.

Грубо говоря, в случае (а) ряд $\sum q_n$ расходится медленнее, чем $\sum p_n$, в случае же (б) — быстрее, но не слишком. Если $p_n=n^{\alpha}$, $q_n=n^{\beta}$, то первое условие выполняется при $\alpha>\beta>-1$, а второе — при $\beta>\alpha>-1$ (так как $\dfrac{P_n}{p_n}$ и $\dfrac{Q_n}{q_n}$ асимптотически кратны n, то условие (3.8.6) здесь выполнено). Если $p_n=1$, $q_n=2^n$, то $\dfrac{P_n}{p_n}\sim n$, $\dfrac{Q_n}{q_n}\to 2$, и теорема теряет силу.

6 Зак. 2499. Г. Харди

Если ряд $\sum q_n$ расходится слишком быстро, то метод $(\overline{R}, q_n)$ становится тривиальным, в том смысле, что суммирует только сходящиеся ряды. Более точно это устанавливается следующей теоремой.

Теорема 15. *Если* $\dfrac{Q_{n+1}}{Q_n} \geqslant 1+\delta > 1$, *то ряд* $\sum u_n$ *суммируется* $(\overline{R}, q_n)$ *только если он сходится.*

Действительно, $Q_m u_m = q_0 s_0 + \ldots + q_m s_m$, так что

$$s_m = \frac{Q_m u_m - Q_{m-1} u_{m-1}}{q_m} = \sum c_{m,n} u_n, \tag{3.8.10}$$

где

$$c_{m,m-1} = -\frac{Q_{m-1}}{q_m}, \quad c_{m,m} = \frac{Q_m}{q_m}, \tag{3.8.11}$$

а остальные $c_{m,n}$ равны нулю. Очевидно, $c_{m,n} \to 0$ при $m \to \infty$, и

$$\sum c_{m,n} = \frac{Q_m - Q_{m-1}}{q_m} = 1.$$

Кроме того, $q_m \geqslant \delta Q_{m-1}$, так что

$$\sum |c_{m,n}| = \frac{Q_{m-1} + Q_m}{q_m} = 2\frac{Q_{m-1}}{q_m} + 1 \leqslant \frac{2}{\delta} + 1.$$

Поэтому преобразование (3.8.10), переводящее u_n в s_m, регулярно, и, следовательно, $s_m \to s$, когда $u_n \to s$.

Таким образом, ряд $1-1+1-\ldots$, суммируемый $(\overline{R}, 1)$, т. е. (C, 1), не суммируем $(\overline{R}, 2^n)$. Это предложение является хорошей иллюстрацией к теореме 14. Вот еще один аналогичный пример. Средние

$$t_m = \frac{1}{P_m}\left(s_0 + \frac{s_1}{2} + \ldots + \frac{s_m}{m+1}\right) \sim \frac{1}{\log m}\left(s_0 + \frac{s_1}{2} + \ldots + \frac{s_m}{m+1}\right),$$

для которых $p_n = \dfrac{1}{n+1}$, эффективнее (C, 1)-средних. Они суммируют любой ряд, суммируемый (C, 1), а также такие ряды, как $\sum \dfrac{1}{n^{1+ci}}$, для которых (C, 1)-метод теряет силу. Мы вернемся к этим („логарифмическим“) средним в § 4.16.

3.9. Разбавление рядов. Теорема 14 допускает простое применение к вопросу, названному Чэпменом „разбавлением“ рядов. Сходимость или расходимость ряда не нарушается от вставки между его членами нулей: если один из рядов $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ и $0 + 0 + \ldots + a_0 + 0 + \ldots + a_1 + 0 + \ldots$ сходится, то и другой также сходится, притом к той же сумме. Однако такое изменение может нарушить суммируемость расходящегося ряда или изменить его сумму. Так, ряды

$$1-1+1-\ldots, \quad 1-1+0+1-1+0+1-\ldots$$

суммируемы (C, 1) соответственно к суммам $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{3}$.

Рассмотрим, например, связь между (C, 1)-суммируемостью ряда $\sum a_n$ и рядов

(I) $$\sum b_n = a_0 + a_1 + 0 + 0 + a_2 + 0 + 0 + 0 + 0 + a_3 + \ldots,$$

(II) $$\sum c_n = 0 + a_0 + a_1 + 0 + a_2 + 0 + 0 + 0 + a_3 + 0 + \ldots,$$

в которых a_m стоят соответственно на местах с номерами m^2 и 2^m.

(I) Если $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$, то

$$t_n = \sum_{\nu \leqslant n} b_\nu = \sum_{m^2 \leqslant n} a_m = s_{[\sqrt{n}]}.$$

Поэтому при $M^2 \leqslant N < (M+1)^2$ имеем

$$\frac{t_0 + t_1 + \ldots + t_N}{N+1} = \frac{s_0 + 3s_1 + \ldots + (2M-1)\, s_{M-1}}{N+1} + \frac{N - M^2 + 1}{N+1} s_M. \tag{3.9.1}$$

Левая часть равенства (3.9.1) стремится к s тогда и только тогда, когда $\sum b_n = s$ (C, 1). Далее, $N+1 \sim M^2$, так что первый член правой части стремится к s тогда и только тогда, когда

$$\sum a_n = s \quad (\bar{R},\ 2n+1)$$

или, что, по теореме 14, равносильно этому, когда $\sum a_n = s$ (C, 1). Наконец, при выполнении любого из этих предположений относительно рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, $s_M = o(M)$ по теореме 13, так что второй член правой части равенства (3.9.1) есть $o\left(M \cdot M \cdot \frac{1}{M^2}\right) = o(1)$. Отсюда следует, что *ряд* $\sum b_n$ *суммируем* (C, 1) *к* s *тогда и только тогда, когда ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, 1) *к* s.

(II) В этом случае аналогичное рассуждение показывает, что из суммируемости ряда $\sum c_n$ следует суммируемость ряда $\sum a_n$. Но обратное — неверно. Предположим, например, что $a_n = (-1)^n$, так что ряд $\sum a_n$ суммируем к $\frac{1}{2}$. Тогда, как легко проверить,

$$t_0 + t_1 + \ldots + t_n = \frac{1}{3}(2^{2m} - 1)$$

при $2^{2m-1} \leqslant n \leqslant 2^{2m} - 1$, так что (C, 1)-среднее ряда $\sum c_n$ при возрастании n вдоль этого отрезка изменяется приблизительно в пределах от $\frac{1}{3}$ до $\frac{2}{3}$.

Естественно задаться вопросом, что можно сказать о соответствующих абелевских пределах. Мы докажем в § 4.10, что при $a_n = (-1)^n$ ряд (I) суммируем (A) к $\frac{1}{2}$. Мы докажем также, что $x - x^a + x^{a^2} - \ldots$, где $a > 1$, не стремится к пределу при $x \to 1$, так что, в частности, ряд (II) не суммируем (A).

Легко непосредственно доказать, что

$$\text{из } \sum a_n x^{n^2} \to s \text{ следует } \sum a_n x^n \to s,$$

когда ряд $\sum a_n x^n$ сходится при $|x| < 1$; и мы докажем более общие теоремы этого рода, принадлежащие Картрайту, в Приложении V.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ III

§ 3.2. Автором наиболее важной теоремы — теоремы 2 — по существу является Toeplitz, *PMF*, **22** (1911), 113—119. Теплиц рассматривал только „треугольные“ преобразования, т. е. преобразования, для которых $c_{m,n} = 0$ при $n > m$. Распространение на общие преобразования, не содержащее никаких принципиальных трудностей, было произведено Штейнгаузом, там же, 121—134.

Теорему 1 доказал для треугольных преобразований Kojima, *TMJ*, **12** (1917), 291—326, и независимо от него, притом для общих преобразований, Schur, *JM*, **151** (1921), 79—111. В той же работе Шур доказал также теорему 3.

Ряд других общих теорем можно найти в книге Dienes, гл. 12.

§ 3.4. По поводу теоремы Дини, в ее обычной форме, и связанных с нею теорем о равномерной сходимости см. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse, 148—150; Bromwich, 138—141; Hardy, *PCPS*, **19** (1918), 148—156.

Мы предполагали в тексте, что ряды для t_m сходятся для всех m. При желании мы могли бы допустить их расходимость для конечного числа значений m, т. е. предполагать их сходящимися только для $m > m_0$. Здесь m_0 может быть на первый взгляд $m_0(s)$, т. е. зависеть от последовательности (s_n); но из теоремы Agnew, *BAMS*, **45** (1939), 689—730, следует, что если рассматриваемый ряд при стремлении s_n к пределу сходится для $m > m_0(s)$, то $\sum |c_{m,n}| < \infty$ для $m > m_1$, так что $m_0(s)$ можно заменить числом m_1, не зависящим от (s_n). См. также Rogers, *JLMS*, **21** (1946), 123—128, и примечание к § 3.6.

§ 3.5 (3). Быть может нелишне добавить замечание о *необходимых и достаточных* условиях регулярности преобразования (3.5.5), хотя рассматриваемые далее вопросы, относящиеся, по существу, к поведению функций $c(x, y)$, $s(y)$ и $t(x)$ на конечных участках изменения x и y, принадлежат скорее к теории функций действительного переменного, чем к теории расходящихся рядов и интегралов. Гораздо более полное рассмотрение их см. у Agnew в указанной выше работе. Аппарат, используемый в этих рассмотрениях, можно найти в Hobson **2**, гл. 7, и принадлежит отчасти Лебегу, отчасти самому Гобсону.

В тексте мы предполагаем, что $s(y)$ ограничена для всех y, и доказываем достаточность условий

$$\text{(А)}\ \gamma(x) = \int |c(x, y)|\, dy < H, \qquad \text{(Б)}\ \int c(x, y)\, dy \to 1,$$

$$\text{(В)}\ \int_0^Y |c(x, y)|\, dy \to 0 \text{ для каждого конечного } Y.$$

Так как существование $t(x)$ необходимо только для больших x, то ясно что условие (А) можно заменить условием

$$\text{(А}'\text{)}\ \gamma(x) < H \text{ для достаточно больших } x.$$

Можно доказать, что условия (А′), (Б) и

$$(\text{В}') \quad \int_0^Y c(x, y)\, dy \to 0 \quad \textit{для каждого конечного } Y$$

являются необходимыми условиями. Доказательство весьма схоже с проведенным в § 3.3 (в случае $\delta_n = 0$, $\delta = 1$), но, как указал мне Бозанкэ, требуется дополнительная лемма, а именно: *если*

$$\varphi(x, Y) = \int_0^Y c(x, y)\, s(y)\, dy$$

существует для каждого конечного Y *и каждой ограниченной функции* $s(y)$, *и* $\varphi(x, Y) \to 0$ *при* $x \to \infty$, *то*

$$\int_0^Y |c(x, y)|\, dy < K(Y),$$

где $K(Y)$, *для достаточно больших* x, *зависит только от* Y. Этот результат, сохраняющий силу и при ограничении непрерывными $s(y)$, является следствием из доказываемого в книге Hobson, **2**, 432 и 441—443.

Это, однако, оставляет пробел между условием (В′) и более сильным условием (В). Этот пробел исчезает при $c(x, y) \geqslant 0$; в общем же случае можно заполнить его следующим образом. Если мы для произвольного ограниченного измеримого множества E положительных y положим $s(y) = 1$ на E и $s(y) = 0$ вне E, то $s(y) \to 0$; поэтому, если преобразование регулярно, то

$$(\text{В}'') \quad \int_E c(x, y)\, dy \to 0 \quad \textit{для каждого ограниченного измеримого } E.$$

Это необходимое условие сильнее, чем (В′), но слабее, чем (В), и можно показать, что в соединении с условиями (А′) и (Б) оно также достаточно. Действительно, по другой теореме Гобсона и Лебега, из условий (А′) и (В″) следует, что

$$(\alpha) \qquad \int_0^Y c(x, y)\, s(y)\, dy \to 0$$

для каждого конечного Y и каждой ограниченной $s(y)$, а это — всё, что нужно для завершения доказательства достаточности. Упомянутую теорему, являющуюся одним из частных случаев гобсоновской „общей теоремы сходимости“, см. в книге Hobson, **2**, 431.

Таким образом, *условия* (А′), (Б) *и* (В″) *являются необходимыми и достаточными условиями регулярности преобразования* (3.5.5), если рассматривать, как в тексте, только ограниченные $s(y)$. Это доказал Hill, *BAMS*, **42** (1936), 225—228. Поскольку нас интересует в первую очередь поведение $s(y)$ при $y \to \infty$, это ограничение не стеснительно.

Накладывая на $s(y)$ немного более сильные ограничения, мы можем заменить условие (В″) более слабым условием (В′). Предположим, например, что единственные разрывы функции $s(y)$ — это скачки. Тогда согласно другому частному случаю гобсоновской теоремы сходимости (Hobson, **2**, 432) из (А′) и (В′) следует (α), так что условия (А′), (Б) и (В′) необходимы и достаточны при указанном ограничении, наложенном на $s(y)$.

Мы можем также сделать условие (В′) одним из системы необходимых и достаточных условий, накладывая ограничения не на $s(y)$, а на $c(x, y)$. Если, например, $c(x, y)$ ограничено, то, по еще одной гобсоновской теореме сходимости (Hobson, **2**, 423), из одного (В′) следует (α), и (А′), (Б) и (В′) снова необходимы и достаточны для регулярности. В этом случае $s(y)$ не обязана быть ограниченной.

Наконец, как также указал мне Бозанкэ, можно освободиться от всех этих ограничений на $s(y)$ или $c(x, y)$, всё еще используя одну из теорем Гобсона и Лебега (Hobson, **2**, 422—423 и 438—441), присоединяя при этом к условиям (А′), (Б) и (В′) еще четвертое условие, а именно:

(Г) $C(x, Y) < L(Y)$ *для каждого конечного* Y и *достаточно больших* x, *где* $C(x, Y)$ — *существенная верхняя грань* $|c(x, y)|$ *на интервале* $(0, Y)$, *т. е. верхняя грань при пренебрежении множествами меры нуль.*

В действительности (А′), (Б), (В′) и (Г) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы $t(x) \to s$ для любой функции $s(y)$, интегрируемой на каждом конечном интервале и стремящейся к s при $y \to \infty$.

Этот вопрос рассмотрели впервые Silvermann, *TAMS*, **17** (1916), 284—294, и Kojima, *TMJ*, **14** (1918), 64—79 и **18** (1920), 37—45. Кожима доказывает аналог более общей теоремы 1. И Сильверман и Кожима предполагают $s(y)$ ограниченной и накладывают на $c(x, y)$ более сильные ограничения, предполагая ее непрерывной, равномерно относительно x, на любом конечном интервале $(0, Y)$. Это предположение позволяет им заменить условие (В′) значительно более грубым условием

(В‴) $c(x, y) \to 0$ *равномерно в каждом конечном интервале* $(0, Y)$,

которое даже сильнее условия (В).

(4) Теоремы 7 и 8 в части достаточности их условий являются классическими и содержатся во всех руководствах: см., например, Bromwich, 58—60; Харди, 381. Необходимость условий этих теорем впервые доказал Hadamard, *AM*, **27** (1903), 177—183. Разумеется, имеют место соответствующие теоремы и для интегралов.

Аналогичные теоремы для двойных рядов доказали Hardy, *PCPS*, **19** (1917), 86—95, и Kojima, *TMJ*, **17** (1920), 213—220. Все эти теоремы широко обобщались в различных направлениях: см. Moore, Convergence factors, и гл. VI.

§ 3.6. Теорему 10 доказал W. A. Hurwitz, *PLMS* (2), **26** (1926), 231—248. Более сложные условия полной регулярности общего преобразования (3.1.3) нашел H. Hurwitz, *BAMS*, **46** (1940), 833—837.

Определение полной регулярности следует понимать в смысле, аналогичном разъясненному для А-метода в § 1.4. Если, например, $s_n \to \infty$, то ряд $t_m = \sum c_{m,n} s_n$ должен, для каждого $m > m_0$, где $m = m_0(s)$ может зависеть от рассматриваемой последовательности (s_n), либо сходиться, либо расходиться к ∞, и при этом значения t_m, если ряд сходится, должны стремиться к ∞ при $m \to \infty$. Х. Гурвиц показывает, что тогда $c_{m,n} \geqslant 0$ для $m > m_1$ и $n > N(m)$, т. е. что в каждой достаточно удаленной строке матрицы преобразования T может содержаться не более конечного числа отрицательных коэффициентов; но это условие (как дополнительное к условиям теоремы 2) лишь необходимо, но не достаточно. Между прочим, из него следует, что $m_0(s)$ можно заменить числом m_1, не зависящим от (s_n).

§ 3.7. Knopp, *MZ*, **31** (1930), 97—127 и 276—305.

§ 3.8. Теорема 14 принадлежит Cesàro, *Atti d. R. Accad. d. Lincei* [*Rendiconti* (4), **4** (1888), 452—457]. Она была переоткрыта Hardy, *QJM*, **38** (1907), 269—288 (271), и приписана Харди в книге Бореля (стр. 115). См. также Bromwich, 427.

Условие $\sum p_n = \infty$ не используется явно в доказательстве и в действительности вытекает из других условий. В самом деле, если выполнено условие (а), то ряд $\sum p_n$, очевидно, расходится по меньшей мере столь же быстро, как $\sum q_n$. Если же выполнены условия (б), то из расходимости ряда $\sum q_n$, по известной теореме Абеля *), следует расходимость ряда $\sum \frac{q_n}{Q_n}$, а это в силу условия (3.8.6) влечет расходимость ряда $\sum \frac{p_n}{P_n}$ и, значит, ряда $\sum p_n$.

§ 3.9. Пусть ряд $\sum a_n x^n$ сходится для $|x| < 1$ и

$$\varphi(y) = \sum a_n e^{-ny}, \quad \psi(y) = \sum a_n e^{-n^2 y} \quad (y > 0);$$

тогда из формулы

$$e^{-2ny} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-n^2y^2t^2 - \frac{1}{t^2}} \frac{dt}{t^2}$$

следует, что

$$\varphi(2y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \psi(y^2 t^2) e^{-\frac{1}{t^2}} \frac{dt}{t^2},$$

откуда легко вытекает высказанная теорема. Ср. доказательства теорем 28 и 30 (§ 4.8).

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, стр. 338 (Гостехиздат, 1948).

Глава IV

ЧАСТНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

4.1. Методы Вороного. Главной целью этой главы является перечисление некоторых наиболее зарекомендовавших себя в анализе методов суммирования и установление их регулярности с помощью теоремы 2; однако к этому добавлено довольно много дополнительного материала. Некоторые из важнейших методов, например методы Чезаро, будут значительно подробнее рассмотрены в следующих главах, и их мы коснемся здесь лишь вкратце.

(C, 1)-метод § 1.3 является простейшим из класса методов, впервые рассмотренного Г. Ф. Вороным.

Предполагая, что

$$p_n \geqslant 0, \quad p_0 > 0^{*)}, \quad P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n, \tag{4.1.1}$$

положим

$$t_m = W_m^{(p)}(s) = \frac{p_m s_0 + p_{m-1} s_1 + \ldots + p_0 s_m}{p_0 + p_1 + \ldots + p_m}. \tag{4.1.2}$$

Если $t_m \to s$ при $m \to \infty$ и $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, то мы будем писать

$$s_n \to s, \quad \sum a_n = s \quad (\mathrm{W},\ p_n). \tag{4.1.3}$$

Если $p_n = 1$ для всех n, то t_m есть (C, 1)-среднее для s_n; если

$$p_n = \binom{n+k-1}{k-1} = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(k)},$$

где $k > 0$, то t_m есть (C, k)-среднее **). Обычно, как в только что указанных случаях, ряд $\sum p_n$ будет расходящимся; однако это несущественно. Так, если $p_0 = p_1 = 1$, а все остальные p_n равны нулю, то

$$t_m = \frac{1}{2}(s_{m-1} + s_m).$$

и мы получаем средние $s_n^{(1)}$, рассмотренные на стр. 37.

---

*) Последнее условие удобно, хотя и несущественно. Если, например, $p_0 = 0$, $p_1 > 0$, то можно положить $p_n = q_{n-1}$, $t_m = u_{m-1}$, и u_m будет (W, q_n)-средним для s_n с $q_0 > 0$.

**) См. § 5.5.

4.2. Регулярность и совместность методов Вороного. Начнем с определения условий регулярности средних (4.1.2).

Теорема 16. *Условие*

$$\frac{p_n}{P_n} \to 0 \tag{4.2.1}$$

необходимо и достаточно для регулярности (W, p_n)*-метода.*

Действительно, полагая $t_m = \sum c_{m,n} s_n$, имеем

$$c_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{p_{m-n}}{P_m} & \text{при } n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } n > m, \end{cases}$$

так что $c_{m,n} \geqslant 0$ и $\sum |c_{m,n}| = \sum c_{m,n} = 1$. Таким образом, первое и третье условия теоремы 2 всегда выполнены. Второе требует, чтобы $c_{m,n} \to 0$ при фиксированном n и $m \to \infty$. Полагая, в частности, $n = 0$, получаем $\frac{p_m}{P_m} \to 0$, так что условие (4.2.1) необходимо; а так как $c_{m,n} \leqslant \frac{p_{m-n}}{P_{m-n}}$, то оно также достаточно.

Мы будем говорить, что методы P и Q *совместны*, если из $s_n \to s$ (P) и $s_n \to s'$ (Q) следует $s' = s$, т. е. если они не могут суммировать один и тот же ряд к различным суммам *).

Теорема 17. *Всякие два регулярных метода Вороного* (W, p_n) *и* (W, q_n) *совместны: если* $s_n \to s$ (W, p_n) *и* $s_n \to s'$ (W, q_n), *то* $s' = s$.

Действительно, положим $r_n = p_0 q_n + p_1 q_{n-1} + \ldots + p_n q_0$. Тогда

$$W_m^{(r)}(s) = \frac{p_0 q_0 s_m + (p_0 q_1 + p_1 q_0) s_{m-1} + \ldots + (p_0 q_m + \ldots + p_m q_0) s_0}{p_0 q_0 + (p_0 q_1 + p_1 q_0) + \ldots + (p_0 q_m + \ldots + p_m q_0)} =$$

$$= \frac{p_0 (q_0 s_m + \ldots + q_m s_0) + \ldots + p_{m-1}(q_0 s_1 + q_1 s_0) + p_m q_0 s_0}{p_0 (q_0 + \ldots + q_m) + \ldots + p_{m-1}(q_0 + q_1) + p_m q_0} =$$

$$= \frac{p_0 Q_m W_m^{(q)}(s) + \ldots + p_m Q_0 W_0^{(q)}(s)}{p_0 Q_m + \ldots + p_m Q_0} = \sum_n \gamma_{m,n} W_n^{(q)}(s),$$

где

$$\gamma_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{p_{m-n} Q_n}{\sum\limits_{\nu=0}^{m} p_{m-\nu} Q_\nu} & \text{при } n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } n > m. \end{cases}$$

*) Это — значительно более слабое утверждение, чем требование *равносильности* (§ 4.3).

Здесь $\gamma_{m,n} \geqslant 0$, $\sum |\gamma_{m,n}| = \sum \gamma_{m,n} = 1$ и

$$\gamma_{m,n} \leqslant \frac{p_{m-n}Q_n}{(p_{m-n}+p_{m-n-1}+\ldots+p_0)\,q_0} = \frac{p_{m-n}}{P_{m-n}}\frac{Q_n}{q_0} \to 0$$

при $m \to \infty$, так что средние с коэффициентами $\gamma_{m,n}$ регулярны. Поэтому из $s_n \to s'$ $(\mathrm{W},\, q_n)$ следует $s_n \to s'$ $(\mathrm{W},\, r_n)$. Аналогично, из $s_n \to s$ $(\mathrm{W},\, p_n)$ следует $s_n \to s$ $(\mathrm{W},\, r_n)$. А это и показывает, что при выполнении обоих предположений s и s' должны совпадать.

Приведем еще одно интересное доказательство той же теоремы, включающее важный принцип. Оно основывается на следующем предложении.

Теорема 18. *Если метод* $(\mathrm{W},\, p_n)$ *регулярен и* $\sum a_n = s$ $(\mathrm{W},\, p_n)$, *то ряд* $\sum a_n x^n$ *имеет положительный радиус сходимости и определяет аналитическую функцию* $a(x)$, *регулярную при* $0 \leqslant x < 1$ *и стремящуюся к* s, *когда* $x \to 1$ *по вещественным значениям, меньшим чем* 1.

Положим

$$p(x) = \sum p_n x^n, \quad P(x) = \sum P_n x^n, \quad T(x) = \sum P_n t_n x^n,$$

где t_n определено формулой (4.1.2) с $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Так как $\frac{p_n}{P_n} \to 0$, т. е. $\frac{P_{n-1}}{P_n} \to 1$, то ряд $P(x)$ сходится для $|x| < 1$, так что ряд $p(x)$ также сходится и притом к $(1-x)P(x)$. Далее, так как t_n ограничены, то $T(x)$ также сходится для $|x| < 1$. Наконец, так как $p_0 > 0$ и $p_n \geqslant 0$, то $p(x) > 0$ и $P(x) > 0$ при $0 \leqslant x < 1$.

Функция $\frac{T(x)}{p(x)}$ регулярна в начале и потому разлагается в степенной ряд $\omega(x) = \sum \omega_n x^n$, сходящийся для малых x. Так как $T(x) = p(x)\,\omega(x)$, то

$$P_n t_n = p_0\omega_n + p_1\omega_{n-1} + \ldots + p_n\omega_0$$

для всех n. Но, с другой стороны,

$$P_n t_n = p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \ldots + p_n s_0$$

для всех n. Следовательно, $\omega_n = s_n$. Поэтому $\sum s_n x^n$ и $\sum a_n x^n$ регулярны в начале. При этом

$$a(x) = \sum a_n x^n = (1-x)\sum s_n x^n = (1-x)\frac{T(x)}{p(x)} = \frac{T(x)}{P(x)},$$

и так как $T(x)$ и $p(x)$ регулярны для $|x| < 1$, то $a(x)$ регулярна для $|x| < 1$, за исключением возможных полюсов, ни один из которых, однако, не лежит на отрезке $(0,\, 1)$.

Наконец,

$$a(x) = \frac{T(x)}{P(x)} = \frac{\sum P_n t_n x^n}{P(x)} = \sum c_n(x)\, t_n,$$

где $c_n(x) = \frac{P_n x^n}{P(x)}$. Это — преобразование, переводящее t_n в $a(x)$ и, очевидно, удовлетворяющее условиям теоремы 5*). Поэтому из $t_m \to s$ следует $a(x) \to s$, что и завершает доказательство теоремы 18.

---

*) Применительно к случаю $0 \leqslant x < 1$, $x \to 1$: см. замечание на стр. 70 после доказательства теоремы 5. В дальнейшем такого рода вариации этой теоремы мы будем принимать без оговорок.

Теорема 17 является ее следствием, поскольку сумма ряда $\sum a_n$, если она существует, не зависит от частного выбора значений p_n.

Теорему 18 можно рассматривать как „теорему Абеля" для регулярного метода Вороного. Мы не можем сказать, что из $\sum a_n = s$ (W, p_n) следует $s_n \to s$ (A), поскольку ряд $\sum a_n x^n$ обычно не сходится для $0 < x < 1$; однако абелевский предел существует в обобщенном смысле. Мы можем также рассматривать теорему 18 как „лимитирующую теорему", поскольку из нее следует, что $a_n = O(e^{cn})$ для некоторого c.

4.3. Включение. Рассмотрим теперь вопросы о *включении* и *равносильности*. Мы говорим, что метод Q включает метод P, если из $s_n \to s$ (P) следует $s_n \to s$ (Q), и что эти методы равносильны, если каждый из них включает другой. Если метод Q включает метод P, но не равносилен ему, то мы будем говорить, что Q *сильнее* чем P. Здесь мы займемся тем случаем, когда P есть (W, p_n), а Q есть (W, q_n).

Если методы (W, p_n) и (W, q_n) регулярны, то ряды

$$(4.3.1)\qquad \begin{cases} p(x) = \sum p_n x^n, & P(x) = \sum P_n x^n, \\ q(x) = \sum q_n x^n, & Q(x) = \sum Q_n x^n \end{cases}$$

сходятся для $|x| < 1$. Тогда ряды

$$(4.3.2)\qquad k(x) = \sum k_n x^n = \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{Q(x)}{P(x)},$$

$$(4.3.3)\qquad l(x) = \sum l_n x^n = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

сходятся для малых x, и

$$(4.3.4)\qquad k_0 p_n + \ldots + k_n p_0 = q_n, \quad k_0 P_n + \ldots + k_n P_0 = Q_n,$$

$$(4.3.5)\qquad l_0 q_n + \ldots + l_n q_0 = p_n, \quad l_0 Q_n + \ldots + l_n Q_0 = P_n.$$

Теорема 19. *Если методы* (W, p_n) *и* (W, q_n) *регулярны, то для того, чтобы* (W, q_n) *включал* (W, p_n), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(4.3.6)\qquad |k_0| P_n + |k_1| P_{n-1} + \ldots + |k_n| P_0 \leqslant HQ_n,$$

где H не зависит от n, и чтобы

$$(4.3.7)\qquad \frac{k_n}{Q_n} \to 0.$$

Если $P_n \to \infty$, то последнее условие можно опустить.

Действительно, положим $s(x) = \sum s_n x^n$. Тогда

$$\sum Q_n W_n^{(q)}(s) x^n = \sum (q_0 s_n + \ldots + q_n s_0) x^n = q(x) s(x)$$

для малых x, и аналогично $\sum P_n W_n^{(p)}(s) = p(x)s(x)$. Поэтому

$$\sum Q_n W_n^{(q)}(s) = \sum k_n x^n \sum P_n W_n^{(p)}(s)\, x^n,$$

$$Q_n W_n^{(q)}(s) = k_n P_0 W_0^{(p)}(s) + k_{n-1} P_1 W_1^{(p)}(s) + \ldots + k_0 P_n W_n^{(p)}(s).$$

Таким образом,

$$W_n^{(q)}(s) = \sum c_{n,r} W_r^{(p)}(s),$$

где

$$c_{n,r} = \begin{cases} \dfrac{k_{n-r} P_r}{Q_n} & \text{при} \quad r \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad r > n. \end{cases}$$

Следовательно, первое условие теоремы 2 принимает здесь вид (4.3.6). Третье автоматически выполнено в силу второго из соотношений (4.3.4). Наконец, в силу теоремы 16 $Q_{n-r} \sim Q_n$ при $n \to \infty$ для каждого фиксированного r, и второе условие сводится к $\dfrac{k_{n-r}}{Q_{n-r}} \to 0$, что совпадает с (4.3.7).

Если $P_n \to \infty$, то при любом заданном G мы можем выбрать r так, чтобы $P_r > G$. Если выполнено также (4.3.6), то

$$G\,|k_{n-r}| \leqslant HQ_n, \quad \overline{\lim} \frac{|k_{n-r}|}{Q_{n-r}} \leqslant \frac{H}{G} \lim \frac{Q}{Q_{n-r}} = \frac{H}{G},$$

и (4.3.7) следует из (4.3.6). Таким образом, условие (4.3.7) при $\sum p_n = \infty$ можно отбросить.

Если $p_n = 1$, $P_n = n+1$, то

$$p(x) = \frac{1}{1-x}, \quad k(x) = (1-x)\,q(x), \quad k_0 = q_0, \quad k_n = q_n - q_{n-1} \;\; (n > 0),$$

и условие (4.3.6) принимает вид

$$(n+1)\,q_0 + n\,|q_1 - q_0| + \ldots + |q_n - q_{n-1}| \leqslant HQ_n,$$

что, очевидно, выполняется, если q_n возрастает вместе с n. Тем самым имеет место

Теорема 20. *Если* (W, q_n) — *регулярный метод Вороного с возрастающими* q_n, *то из* $s_n \to s$ $(C, 1)$ *следует* $s_n \to s$ (W, q_n).

4.4. Равносильность. Докажем теперь следующее предложение:

Теорема 21. *Для того чтобы два регулярных метода Вороного* (W, p_n) *и* (W, q_n) *были равносильны, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum |k_n| < \infty, \quad \sum |l_n| < \infty. \tag{4.4.1}$$

(1) *Условия необходимы.* Так как $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$, то $k_0 > 0$ и $l_0 > 0$. Так как метод (W, q_n) включает метод (W, p_n), то из тео-

ремы 19 следует, что $k_0 P_n \leqslant HQ_n$. Тем самым $\frac{P_n}{Q_n}$ ограничено, и аналогично $\frac{Q_n}{P_n}$ ограничено.

По теореме 19,

$$|k_0| + |k_1| \frac{P_{n-1}}{P_n} + \ldots + |k_r| \frac{P_{n-r}}{P_n} \leqslant H \frac{Q_n}{P_n}$$

для $r \leqslant n$. Фиксируя r и беря $n \to \infty$, получаем, что

$$|k_0| + |k_1| + \ldots + |k_r| \leqslant H \overline{\lim} \frac{Q_n}{P_n}.$$

Следовательно, $\sum |k_n| < \infty$, и аналогично $\sum |l_n| < \infty$.

(2) *Условия достаточны*. Если $\sum |k_n| < \infty$, то $k_n \to 0$ и $\frac{k_n}{Q_n} \to 0$. Далее,

$$P_n = Q_0 l_n + Q_1 l_{n-1} + \ldots + Q_n l_0 \leqslant Q_n \sum |l_\nu|,$$

$$P_n |k_0| + P_{n-1} |k_1| + \ldots + P_0 |k_n| \leqslant Q_n \sum |k_\nu| \sum |l_\nu|.$$

Таким образом, из условий (4.4.1) следуют условия теоремы 19 с $H = \sum |k_n| \sum |l_n|$, и метод (W, q_n) включает метод (W, p_n). Аналогично, (W, p_n) включает (W, q_n).

Ясно, что условия (4.4.1) не могут выполняться, если функции $p(x)$ и $q(x)$ рациональны и одна из них имеет внутри или на границе единичного круга нуль, не являющийся нулем другой. Если, например, $p_n = 2n + 1$, $q_n = n + 1$, то

$$p(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}, \quad q(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad l(x) = 1 + x, \quad k(x) = \frac{1}{1+x},$$

так что $\sum |k_n| = \infty$. Далее,

$$|k_0| P_n + \ldots + |k_n| P_0 = P_0 + \ldots + P_n$$

есть величина порядка n^3, так что условие (4.3.6) теоремы 19 не выполнено, и (W, q_n) не включает (W, p_n). Мы вернемся к этому примеру в § 5.16.

4.5. Еще одна теорема о включении. Применим теперь теорему 19 к доказательству более специального признака включения. Нас будут здесь прежде всего интересовать случаи, когда P_n медленно стремится к бесконечности, а p_n есть убывающая функция от n.

Мы воспользуемся следующим вспомогательным предложением, представляющим и самостоятельный интерес.

Теорема 22. *Если ряд* $p(x) = \sum p_n x^n$ *сходится для* $|x| < 1$, *и*

(4.5.1) $$p_0 = 1, \quad p_n > 0, \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \frac{p_n}{p_{n-1}} \quad (n > 0),$$

то

$$\frac{1}{p(x)} = 1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots, \tag{4.5.2}$$

где $c_n \geqslant 0$, $\sum c_n \leqslant 1$. *При этом если* $\sum p_n = \infty$, *то* $\sum c_n = 1$.

Из условий теоремы следует, что $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ с возрастанием n возрастает и стремится к пределу, который не может превышать 1. Поэтому p_n с возрастанием n убывает. Пусть, для малых x,

$$\frac{1}{p(x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots$$

Тогда $\gamma_0 = 1$, и нужно только доказать, что $c_n = -\gamma_n \geqslant 0$ для $n > 0$; остальные утверждения теоремы будут следовать отсюда, поскольку, $p(x) > 0$ при $0 \leqslant x < 1$.

При $n > 0$ имеем

$$\gamma_0 p_n + \ldots + \gamma_n p_0 = 0, \quad \gamma_0 p_{n+1} + \ldots + \gamma_{n+1} p_0 = 0. \tag{4.5.3}$$

Отсюда вытекает, что

$$p_{n+1}(\gamma_1 p_{n-1} + \ldots + \gamma_n p_0) = p_n(\gamma_1 p_n + \ldots + \gamma_{n+1} p_0),$$

так что

$$\gamma_{n+1} = a_{1,n}\gamma_1 + a_{2,n}\gamma_2 + \ldots + a_{n,n}\gamma_n,$$

где

$$a_{m,n} = \frac{p_{n+1}}{p_n}\frac{p_{n-m}}{p_0} - \frac{p_{n-m+1}}{p_0} = \frac{p_{n-m}}{p_0}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{p_{n-m+1}}{p_{n-m}}\right) \geqslant 0.$$

Если, таким образом, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ имеют одинаковые знаки, то и γ_{n+1} имеет тот же знак. Но $\gamma_1 = -\frac{\gamma_0 p_1}{p_0} = -p_1 < 0$, следовательно, $\gamma_n \leqslant 0$ для $n = 1, 2, \ldots$

В качестве побочного результата получаем, что ряд $\sum \gamma_n x^n$ в действительности абсолютно сходится для $|x| \leqslant 1$.

Теперь может быть доказана

Теорема 23. *Если* (I) (W, p_n) *и* (W, q_n) — *регулярные методы Вороного*; (II) *числа* p_n *удовлетворяют условиям* (4.5.1); (III) $q_n > 0$ *и* (IV) $\frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{q_{n-1}}$ $(n > n_0)$, *то* (W, q_n) *включает* (W, p_n).

Предположим сначала, что $n_0 = 0$, т. е. что неравенство (IV) выполнено для всех $n > 0$. Так как

$$(q_0 + q_1 x + \ldots)(1 - c_1 x - \ldots) = k_0 + k_1 x + \ldots,$$
$$(p_0 + p_1 x + \ldots)(1 - c_1 x - \ldots) = 1,$$

то $k_0 = q_0$ и

$$q_n - c_1 q_{n-1} - \ldots - c_n q_0 = k_n, \quad p_n - c_1 p_{n-1} - \ldots - c_n p_0 = 0$$

для всех $n > 0$. Поэтому

$$\frac{k_n}{q_n} = 1 - c_1 \frac{q_{n-1}}{q_n} - \ldots - c_n \frac{q_0}{q_n} \geqslant 1 - c_1 \frac{p_{n-1}}{p_n} - \ldots - c_n \frac{p_0}{p_n} = 0,$$

и $k_n \geqslant 0$ для всех n. Теперь сразу проверяется выполнение условий теоремы 19. Выполнение первого условия явствует из равенства

$$|k_0| P_n + \ldots + |k_n| P_0 = k_0 P_n + \ldots + k_n P_0 = Q_n,$$

а второго — из неравенства

$$k_n p_0 \leqslant k_0 p_n + \ldots + k_n p_0 = q_n,$$

откуда $k_n = O(q_n) = o(Q_n)$, по теореме 16. Это доказывает нашу теорему в частном случае $n_0 = 0$.

В общем случае имеем

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{q_{n-1}} \quad (n = n_0 + 1,\ n_0 + 2, \ldots).$$

Положим

$$r_n = p_n \quad (n = n_0,\ n_0 + 1, \ldots)$$

и увеличим p_{n_0-1}, если нужно, до такого значения r_{n_0-1}, чтобы

$$\frac{r_{n_0}}{r_{n_0-1}} \leqslant \frac{r_{n_0+1}}{r_{n_0}}, \quad \frac{r_{n_0}}{r_{n_0-1}} \leqslant \frac{q_{n_0}}{q_{n_0-1}},$$

затем p_{n_0-2} — до такого значения r_{n_0-2}, чтобы

$$\frac{r_{n_0-1}}{r_{n_0-2}} \leqslant \frac{r_{n_0}}{r_{n_0-1}}, \quad \frac{r_{n_0-1}}{r_{n_0-2}} \leqslant \frac{q_{n_0-1}}{q_{n_0-2}};$$

и т. д. до p_0 и r_0. Тогда будем иметь

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} \leqslant \frac{r_{n+1}}{r_n}, \quad \frac{r_n}{r_{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

для всех $n > 0$, и $\rho_n = \frac{r_n}{r_0}$ будет удовлетворять условиям

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_n > 0, \quad \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \geqslant \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \quad \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

Из ранее доказанного следует, что (W, q_n) включает (W, ρ_n) или, что то же, что (W, q_n) включает (W, r_n).

Поэтому достаточно доказать, что (W, r_n) включает (W, p_n). Положим

$$r_n = p_n + \delta_n \quad (n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1),$$

так что

$$r(x) = \sum r_n x^n = p(x) + \sum_0^{n_0-1} \delta_n x^n = p(x) + \delta(x).$$

По теореме 22,

$$\frac{1}{p(x)} = 1 - \sum c_n x^n = \sum \gamma_n x^n,$$

где $\sum |\gamma_n| \leqslant 1 + \sum c_n \leqslant 2$. Таким образом, полагая

$$k(x) = \frac{r(x)}{p(x)} = \sum k_n x^n,$$

имеем

$$\sum_0^\infty k_n x^n = 1 + \frac{\delta(x)}{p(x)} = 1 + \sum_0^{n_0-1} \delta_n x^n \sum_0^\infty \gamma_n x^n$$

и тем самым

$$\sum |k_n| \leqslant 1 + \sum \delta_n \sum |\gamma_n| \leqslant 1 + 2\sum \delta_n = H.$$

Поэтому, во-первых, $k_n = o(1) = o(R_n)$, а во-вторых,

$$|k_0| P_n + \ldots + |k_n| P_0 \leqslant HP_n \leqslant HR_n.$$

Это — не что иное, как условия теоремы 19 с заменой r на q. Следовательно, (W, r_n) включает (W, p_n).

4.6. Метод Эйлера. В § 1.3 (4) мы условились под записью $\sum a_n = s$ (E, 1) понимать утверждение, что $\sum \frac{b_n}{2^{n+1}} = s$, где

$$b_n = a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 + \ldots + a_n.$$

Здесь

$$t_m = \sum_{n=0}^m \frac{b_n}{2^{n+1}},$$

и мы можем выразить t_m через s_n следующим образом. Обозначая через E оператор, определенный формулой $Eu_n = u_{n+1}$, имеем $b_n = (1+E)^n a_0$, и

$$t_m = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^m \left(\frac{1+E}{2}\right)^n a_0.$$

Но

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^m \left(\frac{1+x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{1 - \left\{\frac{1}{2}(1+x)\right\}^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}(x+1)} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \frac{(1+1)^{m+1} - (1+x)^{m+1}}{1-x} = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{n=1}^{m+1} \binom{m+1}{n} \frac{1-x^n}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{n=1}^{m+1} \binom{m+1}{n} (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1});$$

и так как это — тождественное соотношение между многочленами, то оно остается верным и по замене x на E. Таким образом,

$$t_m = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{n=1}^{m+1} \binom{m+1}{n} (1 + E + \ldots + E^{n-1}) a_0 =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{n=1}^{m+1} \binom{m+1}{n} s_{n-1} = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} \binom{m+1}{n+1} s_n.$$

Тем самым $t_m = \sum c_{m,n} s_n$, где

$$c_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{2^{m+1}} \binom{m+1}{n+1} & \text{при } n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } n > m, \end{cases}$$

$$c_{m,n} \geqslant 0, \quad \sum |c_{m,n}| = \sum c_{m,n} = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \to 1,$$

и $c_{m,n} < \frac{(m+1)^{n+1}}{2^{m+1}} \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, условия теоремы 2 выполнены, и, следовательно, справедлива

Теорема 24. (E, 1)-*метод регулярен.*

4.7. Методы Абеля. Если

$$0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \quad \lambda_n \to \infty, \tag{4.7.1}$$

ряд $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ сходится для всех положительных x и

$$f(x) = \sum a_n e^{-\lambda_n x} \to s \tag{4.7.2}$$

при $x \to 0$, то мы говорим, что ряд $\sum a_n$ суммируем (A, λ_n), или (A, λ), к сумме s, и пишем

$$\sum a_n = s \quad (\mathrm{A}, \lambda). \tag{4.7.3}$$

В том частном случае, когда $\lambda_n = n$, (A, λ)-метод совпадает с A-методом § 1.3 (2). Вместо (A, n^k) мы будем иногда писать (A, k).

Для удобства будем рассматривать более общий метод суммирования. Пусть $(\varphi_n(x))$ — последовательность функций, определенных на интервале $0 < x \leqslant X$ и таких, что

$$\varphi_n(x) \to 1 \tag{4.7.4}$$

при $x \to 0$ для каждого n. Если ряд

$$\varphi(x) = \sum a_n \varphi_n(x) \tag{4.7.5}$$

сходится на некотором интервале $0 < x \leqslant X_1 \leqslant X$, и $\varphi(x) \to s$ при $x \to 0$, то мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (φ) к сумме s.

Теорема 25. *Для регулярности φ-метода необходимо и достаточно, чтобы на некотором интервале* $0 < x \leqslant \xi$

$$\sum |\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)| < H, \tag{4.7.6}$$

где H не зависит от x. В частности, это условие выполнено, если

$$0 \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x). \tag{4.7.7}$$

(1) *Условие достаточно.* Из соотношения (4.7.4) следует, что $|\varphi_0(x)| < H_1$ на некотором интервале $(0, \xi]$, а из условия (4.7.6) — что

$$|\varphi_n(x)| \leqslant |\varphi_0(x)| + \sum_0^{n-1} |\varphi_{\nu+1}(x) - \varphi_\nu(x)| < H + H_1$$

на некотором интервале $(0, \xi_1]$. Таким образом, система (φ_n) равномерно ограничена на интервале указанного вида.

Предположим сначала, что $s_n \to 0$. Тогда

$$\sum_0^N a_n\varphi_n = \sum_0^{N-1} s_n(\varphi_n - \varphi_{n+1}) + s_N\varphi_N. \tag{4.7.8}$$

Последний член стремится к нулю, так что

$$\varphi(x) = \sum s_n \{\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)\} = \sum c_n(x) s_n. \tag{4.7.9}$$

Из условия (4.7.4) следует, что $c_n(x) \to 0$ при $x \to 0$ для каждого n, а из условия (4.7.6) — что $\sum |c_n(x)| < H$. Поэтому $\varphi(x) \to 0$ *).

При $s_n \to s$ полагаем $a'_0 = a_0 - s$ и $a'_n = a_n$ для $n > 0$. Тогда $s'_n \to 0$ и

$$\psi(x) = \sum a'_n\varphi_n(x) = \varphi(x) - s\varphi_0(x) \to 0$$

при $x \to 0$. Поэтому в силу соотношения (4.7.4) $\varphi(x) \to s$.

(2) *Условие необходимо.* Достаточно доказать, что оно выполнено, если из $s_n \to 0$ всегда следует $\varphi(x) \to 0$. Рассмотрим сначала фиксированное малое значение x. Так как ряд $\sum a_n\varphi_n$ при $s_n \to s$ сходится, то из теоремы 7 следует, что $\sum |\varphi_n - \varphi_{n+1}| < \infty$ для каждого такого x. Поэтому последовательность $(\varphi_n(x))$ для указанного x ограничена и мы можем вывести равенство (4.7.9) как в случае (1). Тогда из теоремы 5 следует, что $\sum |c_n(x)| < H$ для малых x, а это есть условие (4.7.6).

---

*) Мы опираемся здесь на аналог теоремы 4, упомянутый на стр. 70, но явно не сформулированный. Мы не можем опираться на теорему 5, поскольку $\sum c_n(x)$ не обязательно стремится к 1.

Наконец, если функции φ_n удовлетворяют условию (4.7.7), то

$$\sum |\varphi_n - \varphi_{n+1}| = \sum (\varphi_n - \varphi_{n+1}) = \varphi_0 - \lim \varphi_n \leqslant \varphi_0 < H_1,$$

поскольку φ_0 ограничена на некотором интервале $(0, \xi]$.

Можно, очевидно, сформулировать вариант этой теоремы, заменив x целочисленным параметром m, стремящимся к бесконечности

Добавим замечание о том частном случае, когда φ_n есть положительная убывающая функция от n. Для этого случая имеет место простая, но полезная теорема, которая нам позже понадобится; доказать ее удобно здесь.

Теорема 26. *Если b_n неограниченно возрастает вместе с n и ряд Σu_n сходится, то*

(4.7.10) $V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = b_0u_0 + b_1u_1 + \ldots + b_nu_n = o(b_n)$.

В самом деле, положим $w_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$, так что $w_n \to 0$. Имеем

$$V_n = \sum_0^n b_m (w_m - w_{m+1}) = b_0w_0 + \sum_1^n (b_m - b_{m-1}) w_m - b_n w_{n+1},$$

т. е. $V_n = T_n b_n + o(b_n)$, где, по теореме 12,

$$T_n = \frac{b_0}{b_n} w_0 + \frac{b_1 - b_0}{b_n} w_1 + \ldots + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_n} w_n \to 0.$$

Из теоремы 26 следует, что разложение (4.7.9) имеет место, когда φ_n убывая, стремится при $n \to \infty$ к нулю, а ряд $\Sigma a_n\varphi_n$ сходится. Действительно, полагая в теореме 26

$$b_n = \frac{1}{\varphi_n}, \quad u_n = a_n\varphi_n, \quad v_n = a_n = b_nu_n,$$

видим, что $s_n\varphi_n \to 0$, так что (4.7.9) следует из (4.7.8).

Условия теоремы 25, очевидно, выполнены для функций $\varphi_n(x) = e^{-\lambda_n x}$. Отсюда

Теорема 27. (A, λ)-*метод регулярен. В частности*, A-*метод регулярен.*

Для абелевских средних не существует общей теоремы, соответствующей теореме 17: различные методы вполне могут суммировать один и тот же ряд к различным суммам. Так, ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ суммируем (A) к сумме $\frac{1}{2}$, и вместе с тем суммируем (A, λ), где (λ_n) — последовательность 0, 1, 3, 4, 6, 7, ..., к сумме $\frac{1}{3}$; см. § 3.9.

4.8. Теорема о включении для абелевских средних. В этом параграфе мы докажем теорему о включении для двух систем абелевских средних. Другие теоремы включения для этих средних будут доказаны в Приложении V. Как и следует ожидать после заключительного замечания § 4.7, все эти теоремы имеют весьма частный характер.

Теорема 28. *Если*

(I) $\lambda_0 \geqslant 1$, $\mu_n = \log \lambda_n$,

(II) $\sum a_n = s$ (A, λ),

(III) *ряд* $\sum a_n e^{-\mu_n y} = \sum a_n e^{-y \log \lambda_n} = \sum a_n \lambda_n^{-y}$ *сходится при* $y > 0$, *то* $\sum a_n = s$ (A, μ).

Нам потребуются две предварительные теоремы (первая из которых важна и сама по себе).

Теорема 29. *Пусть* $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$ — *последовательность функций, определенных на некотором интервале изменения* x; *пусть*

(4.8.1) $$|f_0(x)| < H,$$

(4.8.2) $$\sum |f_n(x) - f_{n+1}(x)| < K,$$

где H *и* K *не зависят от* x; *и пусть ряд* $\sum b_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum b_n f_n(x)$ *равномерно сходится.*

В частности, теорема применима, когда $f_n(x)$ монотонно изменяются вместе с n и равномерно ограничены, так как тогда

$$\sum |f_n - f_{n+1}| = |\sum (f_n - f_{n+1})| = |f_0 - \lim_{n \to \infty} f_n|.$$

Из доказательства будет видно, что в формулировке теоремы интервал можно заменить любым множеством вещественных или комплексных x.

Заметим сперва, что в силу условия (4.8.2) ряд $\sum (f_n - f_{n+1})$ сходится для каждого рассматриваемого x, так что $f_n(x)$ стремится к некоторой функции $f(x)$ при $n \to \infty$. Кроме того,

(4.8.3) $$|f_n| \leqslant |f_0| + \sum_0^{n-1} |f_\nu - f_{\nu+1}| < H + K.$$

Пусть $\sum b_n = B$. Положим

$$B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n, \quad \beta_n = B_n - B,$$

и условимся считать, что $B_{-1} = 0$, $\beta_{-1} = -B$. Тогда $\beta_n \to 0$, и мы можем выбрать N_0 так, чтобы $|\beta_n| < \varepsilon$ для $n \geqslant N_0 - 1$. Далее,

(4.8.4) $$\sum_N^{N'} b_n f_n = \sum_N^{N'} (\beta_n - \beta_{n-1}) f_n =$$

$$= -\beta_{N-1} f_N + \sum_N^{N'-1} \beta_n (f_n - f_{n+1}) + \beta_{N'} f_{N'}$$

$(N' \geqslant N \geqslant 0)$. Из (4.8.2) — (4.8.4) следует, что

$$\left|\sum_{N}^{N'} b_n f_n\right| \leqslant 2\varepsilon (H+K) + \varepsilon K = (2H+3K)\varepsilon$$

для $N' \geqslant N \geqslant N_0$ и каждого x; это и доказывает теорему.

Беря в формуле (4.8.4) $N=0$ и $N' \to \infty$, получаем

$$\sum b_n f_n = Bf_0 + \sum \beta_n (f_n - f_{n+1}) = \tag{4.8.5}$$
$$= Bf_0 + \sum (B_n - B)(f_n - f_{n+1}).$$

Так как $f_0 = f + \sum (f_n - f_{n+1})$, то имеет место также более простая формула

$$\sum b_n f_n = Bf + \sum B_n (f_n - f_{n+1}). \tag{4.8.6}$$

Но ряд, стоящий в правой ее части, обычно — не равномерно сходящийся. Пусть, например,

$$f_0 = 1, \quad f_n = x^n \quad (n > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1),$$

так что $f=0$ для $x<1$ и $f=1$ для $x=1$; пусть, далее, $b_0=1$ и $b_n=0$ для $n>0$. Тогда $B_n=1$, $\beta_n=0$ для $n \geqslant 0$ и (4.8.6) принимает вид

$$1 = f + \sum (x^n - x^{n+1}).$$

Последний ряд не сходится равномерно и не имеет непрерывной суммы, поскольку сумма его равна 1 для $x<1$ (когда $f=0$) и 0 для $x=1$ (когда $f=1$).

Очевидно, условия теоремы выполнены, когда

$$f_n(x) = e^{-\lambda_n x} \quad (x \geqslant 0) \quad \text{или} \quad e^{-\lambda_n (x-x_0)} \quad (x \geqslant x_0).$$

Если ряд $\sum b_n$ сходится, то ряд $\sum b_n e^{-\lambda_n x}$ равномерно сходится для $x \geqslant 0$; если же последний ряд сходится для $x>0$, то он равномерно сходится на любом бесконечном интервале $x \geqslant x_0 > 0$.

Наша вторая предварительная теорема такова:

Теорема 30. *Пусть* $\lambda_0 \geqslant 1$, $\varphi(w) = \sum a_n e^{-\lambda_n w}$ *и ряд* $\sum a_n \lambda_n^{-y}$ *сходится для* $y>0$. *Тогда*

$$\psi(y) = \sum a_n \lambda_n^{-y} = \frac{1}{\Gamma(y)} \int_0^\infty w^{y-1} \varphi(w)\, dw. \tag{4.8.7}$$

В самом деле, $\lambda_n^y e^{-\lambda_n w}$ при фиксированных w и y, начиная с некоторого n, убывает, так что ряд

$$\sum a_n e^{-\lambda_n w} = \sum (\lambda_n^y e^{-\lambda_n w} \cdot a_n \lambda_n^{-y})$$

сходится для $w > 0$. Поэтому он равномерно сходится на любом интервале $0 < \omega \leqslant w \leqslant W < \infty$, и

$$\int_{\omega}^{W} w^{y-1}\varphi(w)\,dw = \sum a_n \int_{\omega}^{W} w^{y-1}e^{-\lambda_n w}\,dw. \tag{4.8.8}$$

Мы хотим заменить здесь ω и W на 0 и ∞. Для этого достаточно доказать, что ряды

$$\sum a_n \int_{0}^{\omega} w^{y-1}e^{-\lambda_n w}\,dw, \qquad \sum a_n \int_{W}^{\infty} w^{y-1}e^{-\lambda_n w}\,dw \tag{4.8.9}$$

— сходящиеся и их суммы стремятся к нулю, когда $\omega \to 0$ и $W \to \infty$.

Первый из рядов (4.8.9) можно представить в виде

$$\sum \frac{a_n}{\lambda_n^y} \int_{0}^{\lambda_n\omega} u^{y-1}e^{-u}\,du = \sum \frac{a_n}{\lambda_n^y}\chi_n(\omega) = \sum b_n\chi_n(\omega).$$

Здесь ряд $\sum b_n$ сходится по предположению, а функции $\chi_n(\omega)$ положительны, возрастают вместе с n и равномерно ограничены для всех n и ω. Из теоремы 29 следует, что ряд $\sum b_n\chi_n(\omega)$ сходится равномерно относительно ω, и потому сумма его стремится к нулю, когда $\omega \to 0$. Доказательство того, что сумма второго из рядов (4.8.9) при $W \to \infty$ стремится к нулю, — аналогично.

Теперь уже легко доказать теорему 28. Мы можем считать, что $s = 0$, так что $\varphi(w) \to 0$ при $w \to 0$. Имеем

$$\psi(y) = \frac{1}{\Gamma(y)}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty}\right) w^{y-1}\varphi(w)\,dw = P + Q.$$

Так как $\varphi(w) \to 0$, то мы можем выбрать δ так, чтобы $|\varphi(w)| < \varepsilon$ при $0 < w \leqslant \delta$, и тогда

$$|P| < \frac{\varepsilon}{\Gamma(y)} \int_0^{\delta} w^{y-1}\,dw = \frac{\varepsilon\delta^y}{y\Gamma(y)} < 2\varepsilon$$

для достаточно малых y. Далее, ряд $\sum a_n e^{-(\lambda_n-\lambda_0)w}$ равномерно сходится для $w \geqslant \delta$, так что $|\varphi(w)| \leqslant He^{-\lambda_0 w}$, где H не зависит от w. Поэтому

$$|Q| \leqslant \frac{H}{\delta^{1-y}\Gamma(y)} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda_0 w}\,dw \to 0$$

при $y \to 0$, и $|\psi(y)| < 3\varepsilon$ для достаточно малых y.

Легко указать примеры рядов, суммируемых (A, $\log n$), но не суммируемых (A); так, мы увидим, что $\sum \frac{1}{n^{1+ci}}$, где $c > 0$, есть такой ряд *).

4.9. Комплексные методы. Часто в приложениях важно рассматривать предел ряда $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$, когда $z \to 0$ вдоль некоторого пути в комплексной плоскости, обычно вдоль луча, образующего острый угол с положительной вещественной полуосью.

Если $z = x + iy$, ряд $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$ сходится для $x > 0$ и

$$f(z) = \sum a_n e^{-\lambda_n z} \to s \tag{4.9.1}$$

при $z \to 0$ вдоль любого пути, заключенного в угле $|y| \leqslant x \operatorname{tg} \alpha$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, то мы будем писать

$$\sum a_n = s \quad (A, \lambda, \alpha). \tag{4.9.2}$$

Этот метод также регулярен.

Теорема 31. *Если ряд $\sum a_n$ сходится к s, то $\sum a_n e^{-\lambda_n z} \to s$ при $z \to 0$ равномерно в угле $|y| \leqslant x \operatorname{tg} \alpha$.*

Мы можем считать, что $s = 0$. Если $x > 0$, то

$$f(z) = \sum a_n e^{-\lambda_n z} = \sum s_n \left(e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}\right),$$

или $f(z) = \sum c_n(z) s_n$, где

$$c_n(z) = e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z} = \Delta e^{-\lambda_n z}.$$

Далее,

$$\sum |c_n(z)| = \sum |\Delta e^{-\lambda_n z}| = \sum \left| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} z e^{-tz}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |z| \sum \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-tx}\, dt = \frac{|z|}{x} \sum \Delta e^{-\lambda_n x} \leqslant e^{-\lambda_0 x} \sec \alpha.$$

Поэтому, выбирая $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы $|s_n| < \varepsilon$ для $x \geqslant N$, имеем

$$\left| \sum_N^{N'} c_n(z) s_n \right| < \varepsilon \sec \alpha$$

при $N' \geqslant N$, так что ряд $\sum c_n(z) s_n$ равномерно сходится. Так как $c_n(z) \to 0$ при $z \to 0$, то $f(z) \to 0$ равномерно в указанном угле.

Мы дали здесь прямое доказательство теоремы; ее можно было бы также вывести из соответствующих вариаций теоремы 5 или теоремы 29.

---

*) См. § 7.9. Говоря о суммируемости (A, $\log n$), мы предполагаем, что наш ряд начинается с члена с коэффициентом a_1, так что λ_0 заменяется на λ_1.

4.10. Суммируемость ряда $1-1+1-1+\ldots$ отдельными методами Абеля. Ряд $1-1+1-1+\ldots$ суммируем (A) к $\frac{1}{2}$. Поучительно рассмотреть его суммируемость другими методами Абеля.

Из теории эллиптических функций известно, что

$$1-2q+2q^4+2q^9+\ldots=\prod\{(1-q^{2n+1})^2(1-q^{2n+2})\} \tag{4.10.1}$$

для $|q|<1$, причем произведение в правой части, очевидно, стремится к нулю, когда $q\to 1$ по вещественным значениям. Отсюда (записывая q в виде e^{-x}) заключаем, что

$$1-e^{-x}+e^{-4x}-e^{-9x}+\ldots\to\frac{1}{2},$$

так что ряд $1-1+1-1+\ldots$ суммируем (A, n^2) к $\frac{1}{2}$. Он также суммируем (A, n^k) для любого положительного k (ср. Приложение V).

С другой стороны, если $a>1$, то

$$F(x)=x-x^a+x^{a^2}-x^{a^3}+\ldots \tag{4.10.2}$$

при $x\to 1$ не стремится ни к какому пределу. Чтобы убедиться в этом заметим, что $F(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(x)+F(x^a)=x,$$

другим решением которого служит

$$\Phi(x)=\sum\frac{(-1)^n}{n!\,(1+a^n)}\left(\log\frac{1}{x}\right)^n.$$

Поэтому $\Psi(x)=F(x)-\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению $\Psi(x)=-\Psi(x^a)$ и, следовательно, является периодической функцией от $\log\log\frac{1}{x}$ с периодом $2\log a$. Будучи, очевидно, не постоянной, она колеблется между конечными границами, когда $x\to 1$, $\log\frac{1}{x}\to 0$, $\log\log\frac{1}{x}\to-\infty$. Но при этом $\Phi(x)\to\frac{1}{2}$. Поэтому колеблется $F(x)$.

Отсюда следует, что ряд $1-1+1-1+\ldots$ не суммируем (A, λ) при $\lambda_n=a^n$ $(a>1)$.

4.11. Методы Линделёфа и Миттаг-Леффлера. Один из (A, λ)-методов особенно важен в теории аналитического продолжения, а именно метод, для которого

$$\lambda_0=0,\quad \lambda_n=n\log n\quad (n\geqslant 1). \tag{4.11.1}$$

Если при этом $\sum a_n e^{-\lambda_n x}\to s$, то мы будем писать $\sum a_n=s$ (L).

Степенной ряд $\sum a_n z^n$, сходящийся для малых z, определяет аналитическую функцию $f(z)$, с ветвью, регулярной в начале. В дальнейшем через $f(z)$ мы будем обозначать эту ветвь функции, униформизированную посредством надлежащей системы разрезов в плоскости z. „Звездой Миттаг-Леффлера“ функции $f(z)$ называется область, получающаяся из комплексной плоскости следующим образом: из начала проводятся лучи ко всем особым точкам функции $f(z)$ и по части каждого луча, расположенной за особой точкой, делается разрез. Так, звездой функции $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$ служит плоскость z, разрезанная вдоль луча $[1, \infty)$. Важность L-метода определяется тем обстоятельством, что он суммирует ряд $\sum a_n z^n$ во всей звезде функции $f(z)$. Позже (в § 8.10) мы увидим, как эта общая теорема сводится к тому ее частному случаю, когда $f(z) = \frac{1}{1-z}$; здесь же мы рассмотрим только этот частный случай. Нам будет удобнее вместо x писать δ.

Теорема 32. *Если* λ_n *определены формулами* (4.11.1), *то*

$$\sum e^{-\delta\lambda_n} z^n \to \frac{1}{1-z} \tag{4.11.2}$$

при $\delta \to 0$, *равномерно на каждой замкнутой ограниченной области* D, *не пересекающейся с лучом* $[1, \infty)$.

Обозначим через $\Delta(\eta, R)$ область в плоскости $z = re^{i\theta}$, определенную условиями

$$0 < \eta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \eta, \quad r \leqslant R. \tag{4.11.3}$$

Так как соотношение (4.11.2), очевидно, справедливо в любом круге $r \leqslant 1 - \zeta < 1$, то достаточно показать, что

$$g_\delta(z) = \sum_1^\infty z^n e^{-\delta n \log n} \to \frac{z}{1-z} = g(z) \tag{4.11.4}$$

равномерно в области Δ.

Пусть C — контур на плоскости $u = \rho e^{i\varphi}$, составленный из дуги окружности $\rho = \frac{1}{2}$, $|\varphi| \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ и пары лучей $\rho > \frac{1}{2}$, $|\varphi| = \varphi_0$. Будем предполагать, на что мы, очевидно, имеем право, φ_0 и δ_0 выбранными так, что

$$\sin\varphi_0 > \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 > \frac{4\log R}{\eta}, \quad \delta_0\varphi_0 < \frac{\eta}{2}, \tag{4.11.5}$$

и рассмотрим интеграл

$$I_\delta(z) = \int z^u e^{-\delta u \log u} \frac{du}{e^{2\pi i u} - 1}, \tag{4.11.6}$$

взятый по контуру C, причем

$$z^u = e^{u \log z}, \quad \log z = \log r + i\theta, \quad \log u = \log\rho + i\varphi$$

и C проходится так, что начало остается справа. Так как

$$|e^{-\delta u \log u}| = |\exp\{-\delta\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\log\rho + i\varphi)\}| =$$
$$= \exp(-\delta\rho\log\rho\cos\varphi + \delta\rho\varphi\sin\varphi),$$

то из теоремы Коши следует, что $I_\delta(z) = g_\delta(z)$ для $\delta > 0$ и всех z из Δ *). Докажем теперь, что $I_\delta(z)$ равномерно сходится для $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$ и всех z из Δ.

На верхнем луче контура C имеем

$$|e^{-\delta u \log u}| = \exp(-\delta\rho \log \rho \cos\varphi_0 + \delta\rho\varphi_0 \sin\varphi_0),$$

$$|z^u| = |\exp\{\rho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)(\log r + i\theta)\}| =$$

$$= \exp(\rho \log r \cos\varphi_0 - \rho\theta \sin\varphi_0) \leqslant \exp(\rho \log R \cos\varphi_0 - \rho\eta \sin\varphi_0),$$

$$\left|\frac{1}{e^{2\pi i u} - 1}\right| \leqslant \frac{1}{1 - e^{-2\pi\rho \sin\varphi_0}} < \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}}}.$$

Из этих неравенств и условий (4.11.5) следует, что подинтегральная функция в (4.11.6) мажорируется постоянным кратным выражения

$$\exp\left(\rho \log R \cos\varphi_0 - \frac{1}{2}\rho\eta \sin\varphi_0\right) < e^{-\frac{1}{4}\rho\eta \sin\varphi_0} < e^{-\frac{1}{8}\rho\eta},$$

и эта часть интеграла равномерно сходится.

Доказательство для нижнего луча аналогично **).

Так как подинтегральное выражение равномерно непрерывно относительно δ и z на любом конечном отрезке контура, а $I_\delta(z)$ регулярен в Δ для $\delta > 0$, то заключаем, что

$$I_\delta(z) \to I(z) = \int\limits_C \frac{z^u}{e^{2\pi i u} - 1}\, du$$

равномерно в Δ и что интеграл в правой части есть аналитическая функция от z, регулярная в Δ. Но он равен $g(z)$, когда $-1 < z < 0$. Следовательно, он совпадает с $g(z)$ во всей области Δ, и теорема доказана.

Имеются другие методы суммирования, не принадлежащие к числу (A, λ)-методов, но по типу аналогичные L-методу, которые обладают тем же свойством. Наиболее важным из них является метод Миттаг-Леффлера, обозначаемый нами буквой M, в котором сумма ряда $\sum a_n$ определяется как

$$\lim_{\delta \to 0} \sum \frac{a_n}{\Gamma(1 + \delta n)}.$$

Легко установить, используя примененный выше прием доказательства к выражению, в котором $e^{\delta u \log u}$ заменено на $\Gamma(1 + \delta u)$, что ряд $\sum z^n$ суммируем (M) к $\frac{1}{1 - z}$ равномерно в области Δ. Детали доказательства,

*) Подинтегральная функция мажорируется в бесконечности выражением $\exp(-\delta\rho \log \rho \cos\varphi)$.

**) $|e^{2\pi i u}| = e^{2\pi\rho \sin\varphi_0}$ велико для больших ρ; в аргументе θ заменяется на $2\pi - \theta$, а $2\pi - \theta \geqslant \eta$.

естественно, опираются на асимптотические свойства гамма-функции комплексного переменного; другое доказательство будет дано позже *). Еще одним методом, обладающим аналогичными свойствами, является метод Леруа, в котором сумма ряда $\sum a_n$ определяется как

$$\lim_{\zeta\to 1-0} \sum \frac{\Gamma(1+\zeta n)}{\Gamma(1+n)} a_n.$$

4.12. Методы суммирования, определяемые целыми функциями. Рассмотрим теперь важный класс методов, наиболее известным представителем которого является метод Бореля. Пусть $J(x)=\sum p_n x^n$ есть целая функция с неотрицательными коэффициентами p_n, не сводящаяся к многочлену. Если

$$\frac{S(x)}{J(x)} = \frac{\sum p_n s_n x^n}{\sum p_n x^n} \to s \tag{4.12.1}$$

при $x\to\infty$, то будем писать

$$\sum a_n = s \ (\mathrm{J}). \tag{4.12.2}$$

Простейшим из определений этого типа является борелевское, в котором $p_n=\frac{1}{n!}$, $J(x)=e^x$: если

$$e^{-x} S(x) = e^{-x} \sum s_n \frac{x^n}{n!} \to s \tag{4.12.3}$$

при $x\to\infty$, то мы будем писать

$$\sum a_n = s \ (\mathrm{B}). \tag{4.12.4}$$

Борель предложил и другое определение; мы рассмотрим его в § 4.13 и в гл. VIII.

Для J-метода

$$t(x)=\sum c_n(x) s_n,$$

$$c_n(x)=\frac{p_n x^n}{\sum p_n x^n} \geqslant 0, \quad c_n(x)\to 0, \quad \sum |c_n(x)| = \sum c_n(x) = 1,$$

и условия теоремы 5 очевидным образом выполнены. Отсюда

Теорема 33. *J-метод регулярен.*

J-метод доставляет удобный случай подробнее развить общий принцип, который найдет дальше много применений. Метод можно назвать „мощным", если он в состоянии суммировать быстро расходящиеся ряды. Так, метод Бореля более мощен, чем (C, 1)- или A-методы, которые не в состоянии суммировать ряд $\sum z^n$ вне его круга

*) См. стр. 247 (примечание к § 8.10).

сходимости. А метод Бореля суммирует его в полуплоскости $\Re z < 1$. Действительно, для указанного ряда $s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ и

$$\frac{S(x)}{J(x)} = e^{-x} \sum \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1 - z} - \frac{ze^{-(1-z)x}}{1 - z} \to \frac{1}{1 - z}$$

при одном лишь предположении, что $\Re z < 1$. В частности, метод Бореля суммирует рассматриваемый ряд для всех отрицательных значений z.

В этом смысле J-метод тем мощнее, чем быстрее p_n стремится к нулю. Так, метод Бореля суммирует ряд $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$ для всех положительных a, но он не суммирует ряд, для которого $s_n = (-1)^n n! a^n$, ибо $\sum (-1)^n (ax)^n$ не сходится при $ax > 1$. Но если, при этих s_n, мы возьмем $p_n = \frac{1}{(n!)^2}$, то будем иметь

$$S(x) = \sum (-1)^n \frac{(ax)^n}{n!} = e^{-ax}, \quad J(x) = \sum \frac{x^n}{(n!)^2} = I_0(2\sqrt{x})\ ^{*)},$$

и

$$\frac{S(x)}{J(x)} \to 0.$$

Однако мы увидим, что обычно *острота метода убывает при возрастании его мощности* и что весьма мощные методы, приспособленные к суммированию быстро расходящихся рядов, могут пассовать перед расходящимися рядами более слабого типа (с какими мы, например, сталкиваемся в теории рядов Фурье). Так, мы увидим в § 4.15, что J-метод с $p_n = e^{-cn^2}$ непригоден для суммирования ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

В формуле (4.12.1) предполагалось, что $J(x)$ — целая функция и $x \to \infty$. Метод допускает видоизменение, при котором радиус сходимости рядов, входящих в формулу (4.12.1), конечен. В этом случае мы можем принять его равным 1 и должны предполагать ряд $\sum p_n$ расходящимся. Определение суммируемости попрежнему выражается формулой (4.12.1), но теперь $x \to 1$ и метод похож на методы Абеля §§ 4.7—4.10. Более того, при $p_n = 1$ имеем $J(x) = \frac{1}{1 - x}$, и определение принимает вид $(1 - x) \sum s_n x^n \to s$ или $\sum a_n x^n \to s$, т. е. прямо совпадает с A-определением.

При $p_n = \frac{1}{n+1}$ определение принимает вид

$$\frac{1}{\log \frac{1}{1-x}} \sum \frac{s_n}{n+1} x^{n+1} \to s$$

или

$$\int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \sim s \log \frac{1}{1-x}, \tag{4.12.5}$$

*) $I_0(x)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента.

где $f(x)=\sum a_n x^n$. Ясно, что из $f(x)\to s$ следует (4.12.5), так что рассматриваемый метод суммирования включает А-метод.

4.13. Моментные методы. Моментами μ_n называются числа, представимые в виде

$$\mu_n=\int_0^\infty x^n\,d\chi, \tag{4.13.1}$$

где $\chi=\chi(x)$ — ограниченная возрастающая функция от x, обладающая тем свойством, что интеграл Стилтьеса (4.13.1) сходится для всех n. Обозначая через ξ нижнюю грань совокупности чисел x, для которых

$$\int_x^\infty d\chi(u)=0,$$

имеем

$$\int_{\xi+0}^\infty d\chi(u)=0, \qquad \int_x^\infty d\chi(u)>0 \qquad (x<\xi)$$

и, если ξ конечно,

$$\mu_n=\int_0^\infty x^n\,d\chi=\int_0^{\xi-0} x^n\,d\chi+\{\chi(\xi+0)-\chi(\xi-0)\}\,\xi^n.$$

Однако обычно $\xi=\infty$; в случае конечного ξ мы будем предполагать, что χ непрерывна в точке ξ *).

Пусть

$$a(x)=\sum\frac{a_n}{\mu_n}x^n. \tag{4.13.2}$$

Формальное почленное интегрирование дает

$$\int a(x)\,d\chi=\sum\frac{a_n}{\mu_n}\int x^n\,d\chi=\sum a_n,$$

и это наводит на мысль положить интеграл, стоящий слева, в основу суммирования ряда $\sum a_n$.

Мы пишем

$$\int a(x)\,d\chi=s, \tag{4.13.3}$$

если либо (I) $\xi=\infty$, ряд (4.13.2) сходится для всех x и

$$\lim_{X\to\infty}\int_0^X a(x)\,d\chi=s,$$

*) См. примечание к § 4.13 в конце главы.

либо (II) $\xi < \infty$, $\chi(\xi+0)-\chi(\xi-0)=0$, ряд (4.13.2) сходится для $0 < x < \xi$ и

$$\int_0^{\xi-0} a(x)\,d\chi = \lim_{X\to\xi-0}\int_0^X a(x)\,d\chi = s.$$

В обоих случаях пишем

$$\sum a_n = s\ (\mu_n). \tag{4.13.4}$$

Теорема 34. *Метод* (μ_n) *регулярен.*

Действительно, пусть ряд $\sum a_n$ сходится. Предполагая $0 < X < X_1 < \xi \leqslant \infty$, имеем

$$\mu_n = \int_0^\infty x^n\,d\chi \geqslant X_1^n \int_{X_1}^\infty d\chi > 0 \tag{4.13.5}$$

и ряд (4.13.2) равномерно сходится на отрезке $0 \leqslant x \leqslant X$. Далее, для $X < X_1$, а потому и для всех $X < \xi$,

$$\left|\frac{s_n}{\mu_n}\int_0^X x^n\,d\chi\right| \leqslant \frac{|s_n|\left(\frac{X}{X_1}\right)^n \int_0^\infty d\chi}{\int_{X_1}^\infty d\chi} \to 0 \tag{4.13.6}$$

при $n\to\infty$. Беря, в частности, $s_n=1$, получаем

$$\frac{1}{\mu_n}\int_0^X x^n\,d\chi \to 0. \tag{4.13.7}$$

Из равномерной сходимости ряда (4.13.2) следует, что

$$t(X) = \int_0^X \left(\sum \frac{a_n}{\mu_n} x^n\right) d\chi = \sum \frac{a_n}{\mu_n}\int_0^X x^n\,d\chi,$$

или в силу соотношения (4.13.6)

$$t(X) = \sum s_n\left(\frac{1}{\mu_n}\int_0^X x^n\,d\chi - \frac{1}{\mu_{n+1}}\int_0^X x^{n+1}\,d\chi\right) = \sum c_n(X)\,s_n. \tag{4.13.8}$$

Очевидно, $c_n(X) \to 0$ при $X \to \xi$. Далее,

$$\int\limits_0^\infty x^{n+1}\,d\chi \int\limits_0^X x^n\,d\chi - \int\limits_0^X x^{n+1}\,d\chi \int\limits_0^\infty x^n\,d\chi =$$

$$= \int\limits_X^\infty x^{n+1}\,d\chi \int\limits_0^X x^n\,d\chi - \int\limits_0^X x^{n+1}\,d\chi \int\limits_X^\infty x^n\,d\chi \geqslant$$

$$\geqslant X\Bigl(\int\limits_X^\infty x^n\,d\chi \int\limits_0^X x^n\,d\chi - \int\limits_0^X x^n\,d\chi \int\limits_X^\infty x^n\,d\chi\Bigr) = 0\,^{*)},$$

и потому $c_n(X) \geqslant 0$. Следовательно, принимая еще во внимание соотношение (4.13.7), имеем

$$\sum |c_n(X)| = \sum c_n(X) = \frac{1}{\mu_0}\int\limits_0^X d\chi - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mu_n}\int\limits_0^X x^n\,d\chi = \frac{1}{\mu_0}\int\limits_0^X d\chi,$$

так что $\sum c_n(X) \to 1$ при $X \to \xi$. Тем самым условия теоремы 5 выполнены, и рассматриваемый метод регулярен.

Самым важным является случай

$$\chi(x) = 1 - e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (\alpha > 0).$$

Тогда

$$\mu_n = \frac{1}{\alpha}\int e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} x^{\frac{1}{\alpha}-1} x^n\,dx = \int e^{-u} u^{n\alpha}\,du = \Gamma(n\alpha + 1),$$

и определение суммы ряда принимает вид

$$\int e^{-u} \sum \frac{a_n u^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}\,du = s. \tag{4.13.9}$$

В этом случае мы пишем

$$\sum a_n = s \quad (B', \alpha), \tag{4.13.10}$$

и, в частности, при $\alpha = 1$

$$\sum a_n = s \quad (B'). \tag{4.13.11}$$

В гл. VIII мы увидим, что определения (4.13.11) и (4.12.4) тесно связаны друг с другом и „почти" равносильны. Пришли мы к ним совершенно различными путями, и тесная связь их основана на особых свойствах показательной функции.

При $\alpha = 1$ и $a_n = z^n$ имеем, для $\Re z < 1$,

$$\int e^{-x} \sum \frac{(zx)^n}{n!}\,dx = \int e^{-x(1-z)}\,dx = \frac{1}{1-z}.$$

---

*) При $\xi < \infty$ верхний предел ∞ можно всюду заменить на $\xi - 0$.

Таким образом, B′-метод, как и B-метод суммирует ряд $\sum z^n$ в указанной полуплоскости.

„Мощность“ моментного метода возрастает с увеличением скорости роста моментов μ_n. Но такое увеличение мощности влечет и невыгоды. Так, если

$$d\chi = e^{-k(\log x)^2}\frac{dx}{x} \quad (k>0), \tag{4.13.12}$$

то

$$\mu_n = \int_0^\infty e^{-k(\log x)^2} x^{n-1}\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-ku^2+nu}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\,e^{\frac{n^2}{4k}}, \tag{4.13.13}$$

и определение суммы ряда принимает вид

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-ku^2}\left(\sum e^{nu-\frac{n^2}{4k}}a_n\right)du = s. \tag{4.13.14}$$

Как мы увидим в § 4.15, этот метод не будет суммировать ряд $1-1+1-1+\ldots$

Если $\xi = 1$ и

$$\chi = \begin{cases} x & \text{при } x<1, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 1, \end{cases}$$

то $\mu_n = \frac{1}{n+1}$, и определение суммы ряда принимает вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\left\{\sum (n+1)a_n x^n\right\}dx = s.$$

Очевидно, оно равносильно A-определению.

4.14. Теорема совместности. Для моментных методов не существует общей теоремы совместности: различные методы могут суммировать один и тот же ряд к различным суммам. Но иногда оказывается полезной одна теорема совместности частного типа; принимается, что $\xi = \infty$ и

$$\chi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt. \tag{4.14.1}$$

Теорема 35. *Предположим,* (I) *что* $\varphi(x)$ *положительна и убывает;* (II) *что интеграл*

$$\mu_n = \int x^n \varphi(x)\,dx$$

сходится для $n \geqslant 0$ *и* (III) *что* $\frac{\varphi(\zeta x)}{\varphi(x)}$ *для каждого фиксированного* $\zeta>1$ *есть убывающая функция от* x*; или, по крайней мере, — что условия* (I) *и* (III) *выполнены для* $x>x_0$. *Предположим, далее,* (IV) *что ряд* $\sum a_n z^n$ *сходится для малых* z *и* (V) *что*

$$\int\left(\sum \frac{a_n}{\mu_n}x^n\right)\varphi(x)\,dx = s, \tag{4.14.2}$$

так что ряд $\sum a_n$ *суммируем* (μ_n) *к* s. *Тогда ряд* $\sum a_n z^n$ *равномерно суммируем для* $0 \leqslant z \leqslant 1$ *и тем самым представляет аналитическую* *функцию $f(z)$, регулярную на отрезке* $[0, 1]$ *и стремящуюся к s, когда $z\to 1$, пробегая вещественные значения, меньшие чем* 1.

Это — теорема совместности, поскольку она показывает, что сумма s задается функцией $f(z)$ независимо от выбора функции $\varphi(x)$ и, значит, моментов μ_n, входящих в определение *).

Очевидно, достаточно доказать равномерную суммируемость ряда на любом отрезке $0<\delta\leqslant z\leqslant 1$. Ряд $g(x)=\sum \frac{a_n}{\mu_n}x^n$ сходится для всех x и согласно формуле (4.14.2)

$$\int g(x)\,\varphi(x)\,dx=s.$$

Суммой ряда $\sum a_n z^n$ служит

$$\int g(zx)\,\varphi(x)\,dx=\frac{1}{z}\int g(x)\,\varphi\left(\frac{x}{z}\right)dx, \tag{4.14.3}$$

если этот интеграл сходится. Но при $X>x_0$ в силу условия (III) имеем

$$\int\limits_X^{X'} g(x)\,\varphi\left(\frac{x}{z}\right)dx=\int\limits_X^{X'} g(x)\,\varphi(x)\frac{\varphi\left(\dfrac{x}{z}\right)}{\varphi(x)}\,dx=\frac{\varphi\left(\dfrac{X}{z}\right)}{\varphi(X)}\int\limits_X^{X''} g(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $X<X''<X'$. Множитель при интеграле справа не превосходит 1, сам же интеграл по абсолютной величине меньше ε при $X\geqslant X_0(\varepsilon)$. Поэтому интеграл (4.14.3) равномерно сходится на отрезке $0<\delta\leqslant z\leqslant 1$, и теорема доказана.

Условия теоремы выполнены, например, в случае, когда

$$\varphi(x)=e^{-Ax^\alpha}x^{a-1}, \qquad \text{где } A>0,\ \alpha>0,\ a>0.$$

В качестве применения рассмотрим ряд

$$\sum a_n z^n=1-az+\frac{a(a+1)}{2!}z^2-\dots=\frac{1}{(1+z)^a}$$

для малых z. Беря, как в методе Бореля, $\varphi(x)=e^{-x}$, получим сумму в виде интеграла

$$\int e^{-x}\left\{1-\frac{a}{(1!)^2}xz+\frac{a(a+1)}{(2!)^2}x^2z^2-\dots\right\}dx,$$

конечное выражение для которого трудно усмотреть. Значительно удобнее взять $\varphi(x)=x^{a-1}e^{-x}$; тогда $\mu_n=\Gamma(n+a)$, и мы получаем

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int e^{-x}x^{a-1}\left(1-\frac{xz}{1!}+\frac{x^2z^2}{2!}-\dots\right)dx=\frac{1}{\Gamma(a)}\int e^{-x(1+z)}x^{a-1}\,dx=\frac{1}{(1+z)^a},$$

предполагая лишь, что $\Re z>-1$.

4.15. Методы, неэффективные для ряда $1-1+1-1+\dots$. В этом параграфе мы проиллюстрируем общий принцип, сформулированный в § 4.12 на примере двух „сильных“ методов, — одного, определяемого целой функцией, и другого моментного, — недостаточных для суммирования ряда $1-1+1-1+\dots$ **)

*) Ср. второе доказательство теоремы 17 в § 4.2.

**) См. также § 4.10, содержащий пример сильного метода абелевского типа, также пассующего перед рядом $1-1+1-1+\dots$

(1) Возьмем в определении (4.12.1) $p_n = e^{-cn^2}$, где $c > 0$, и заменим, кроме того, x на e^u. Тогда, так как $s_{2m} = 1$ и $s_{2m+1} = 0$, нам нужно определить, будет ли отношение

$$\frac{\sum e^{-4cm^2+2um}}{\sum e^{-cn^2+un}}$$

стремиться к пределу при $u \to \infty$. Очевидно, это отношение можно заменить отношением $\frac{F_1(u)}{F_2(u)}$, где F_1 и F_2 — те же суммы, только взятые от $-\infty$ до ∞. Но

$$F_1(u) = \vartheta_3\left(\frac{iu}{\pi}\,\middle|\,\frac{4ic}{\pi}\right), \qquad F_2(u) = \vartheta_3\left(\frac{iu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{ic}{\pi}\right),$$

и

$$\vartheta_3(v + n\tau \mid \tau) = e^{-n^2\pi i\tau - 2n\pi i v}\vartheta_3(v \mid \tau);$$

отсюда следует, что $\frac{F_1(u)}{F_2(u)}$ имеет период $4c$. Таким образом, будучи, очевидно, непостоянным, это отношение не стремится ни к какому пределу.

(2) Пусть χ и μ_n определены как в (4.13.12) и (4.13.13). Тогда сумма ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ определяется как

$$\sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ku^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n^2}{4k}+nu}\right)du, \tag{4.15.1}$$

если этот интеграл сходится; при этом очевидно, что сходимость его не нарушится при замене нижнего предела суммирования на $-\infty$. Но

$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n^2}{4k}+nu} = \vartheta_4\left(\frac{iu}{2\pi}\,\middle|\,\frac{i}{4k\pi}\right) = \vartheta_4(v \mid \tau),$$

и легко проверить, что

$$\int_{\frac{n}{2k}}^{\frac{n}{2k}+a} e^{-ku^2}F(u)\,du = (-1)^n \int_0^a e^{-ku^2}F(u)\,du$$

для любого a. Это показывает, что интеграл (4.15.1) не сходится и, значит, ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ не суммируем рассматриваемым методом.

4.16. Нормальные средние Рисса. „Нормальные средние" М. Рисса представляют собой обобщение некоторых средних, рассматриваемых в § 5.16. Подробное рассмотрение нормальных средних Рисса более уместно в книге, специально посвященной рядам Дирихле. Поэтому здесь мы коснемся их лишь очень бегло.

Если λ_n удовлетворяют условиям (4.7.1),

$$A_\lambda(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n & \text{при } \lambda_n < x \leqslant \lambda_{n+1}, \\ 0 & \text{при } x \leqslant \lambda_0, \end{cases}$$

$\varkappa > 0$ и

$$A_\lambda^{(\varkappa)}(\omega) = \frac{\varkappa}{\omega^\varkappa} \int_0^\omega A_\lambda(x)(\omega - x)^{\varkappa-1}\,dx \to s \tag{4.16.1}$$

при $\omega \to \infty$, то мы говорим, что ряд $\sum a_n$ суммируем (R, λ, $\varkappa$) к s. Интегрируя по частям, видим, что

$$A_\lambda^{(\varkappa)}(\omega) = \frac{1}{\omega^\varkappa} \int_0^\omega (\omega - x)^\varkappa\,dA_\lambda(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant \omega} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\omega}\right)^\varkappa a_n.$$

Выражение (4.16.1) можно записать в виде

$$A_\lambda^{(\varkappa)}(\omega) = \int \varphi(x, \omega) A_\lambda(x)\,dx,$$

где

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\varkappa(\omega - x)^{\varkappa-1}}{\omega^\varkappa} & \text{при } 0 \leqslant x < \omega, \\ 0 & \text{при } x \geqslant \omega. \end{cases}$$

Здесь $\varphi \geqslant 0$, $\varphi = O\left(\frac{1}{\omega}\right)$ для больших ω, равномерно на каждом конечном интервале изменения x, и

$$\int_0^\infty |\varphi(x, \omega)|\,dx = \frac{\varkappa}{\omega^\varkappa} \int_0^\omega (\omega - x)^{\varkappa-1}\,dx = 1.$$

Поэтому в силу теоремы 6 имеет место

Теорема 36. *Нормальные средние Рисса регулярны.*

Легко проверить, что (R, n, 1)-метод равносилен (C, 1)-методу. В § 5.16 мы докажем более общее предложение.

Другой интересный случай имеем при $\lambda_n = \log(n+1)$, $\varkappa = 1$. Для него справедливо следующее предложение.

Теорема 37. *Для того чтобы ряд $\sum a_n$ был суммируем* (R, λ, 1) *с $\lambda_n = \log(n+1)$ к s, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{1}{\log(n+1)}\left(s_0 + \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{3} + \ldots + \frac{s_n}{n+1}\right) \to s. \tag{4.16.2}$$

Другими словами, рассматриваемые средние равносильны логарифмическим средним § 3.8.

Положим $\omega = \log(q+1)$, $n = [q]$. Тогда определение (4.16.1) сведется к

$$\frac{1}{\log(q+1)} \sum_0^{n-1} s_m \log\frac{m+2}{m+1} + \frac{s_n}{\log(q+1)} \log\frac{q+1}{n+1} \to s, \tag{4.16.3}$$

и нужно доказать, что это равносильно соотношению (4.16.2).

Пусть выполняется соотношение (4.16.2). Положим

$$u_n = \frac{s_n}{n+1}, \quad U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

Тогда $U_n \sim s \log n$, так что $u_n = o(\log n)$ и $s_n = o(n \log n)$. Поэтому последний член в левой части соотношения (4.16.3) стремится к нулю. Далее,

$$\log \frac{m+2}{m+1} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2(m+1)^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right),$$

так что сумма, входящая в (4.16.3), может быть представлена в виде

$$\sum_0^{n-1} u_m - \frac{1}{2} \sum_0^{n-1} \frac{u_m}{m+1} + \sum_0^{n-1} u_m O\left(\frac{1}{m^2}\right) = P_n - \frac{1}{2} Q_n + R_n.$$

Здесь

$$Q_n = \sum_0^{n-1} \frac{u_m}{m+1} = \sum_0^{n-2} \frac{U_m}{(m+1)(m+2)} + \frac{U_{n-1}}{n} = O(1),$$

ибо $U_n = O(\log n)$; а R_n, очевидно, есть $O(1)$. Поэтому (4.16.3) сводится к соотношению $P_n \sim s \log(q+1)$, очевидно, равносильному соотношению (4.16.2).

Доказательство обратного утверждения аналогично, но проще, так как можно взять $\omega = \log(n+1)$.

4.17. Методы, возникшие под влиянием теории рядов Фурье. Ряд

(4.17.1) $$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots = \sum{}' \cos n\theta \ ^{*)}$$

имеет фундаментальное значение в теории рядов Фурье. Его частичными суммами служат

(4.17.2) $$s_n(\theta) = \sum_0^{n}{}' \cos\nu\theta = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta} = D_n(\theta),$$

а их средние, определенные формулами (3.1.3) и (3.1.4), соответственно равны

(4.17.3) $$t_m(\theta) = \sum c_{m,n} D_n(\theta),$$

и

(4.17.4) $$t(x, \theta) = \sum c_n(x) D_n(\theta).$$

---

*) Штрих при знаке суммы указывает, что при члене с $n = 0$ нужно брать множитель $\frac{1}{2}$.

В частности, (C, 1)- и A-средними являются, соответственно,

$$t_m(\theta) = \frac{1}{2(m+1)} \left\{ \frac{\sin\frac{1}{2}(m+1)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \right\}^2, \tag{4.17.5}$$

$$t(r, \theta) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta+r^2)}\ ^{*)}. \tag{4.17.6}$$

$t_m(\theta)$, определенное формулой (4.17.5), обладает следующими свойствами:

$$t_m(\theta) \geqslant 0, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t_m(\theta)\,d\theta = 1$$

и $t_m(\theta) \to 0$ при $m \to \infty$ равномерно на каждом отрезке, лежащем на $[-\pi, \pi]$ и не содержащем начала; аналогичными свойствами обладает и $t(r, \theta)$ формулы (4.17.6). Именно на этих свойствах основаны применения указанных выше методов к рядам Фурье; другие способы выбора средних $t_m(\theta)$, обладающих теми же свойствами, тоже приводят к ценным методам суммирования. Так,

$$t_m(\theta) = \frac{\Gamma(m+1)\sqrt{\pi}}{2^{m+1}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}(1+\cos\theta)^m$$

обладает требуемыми свойствами. Принимая во внимание, что

$$(1+\cos\theta)^m = 2^{1-m}\frac{(2m)!}{(m!)^2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{m+1}\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}\cos 2\theta + \ldots\right\},$$

приходим к валле-пуссеновскому определению (VP)

$$\sum a_n = \lim_{m\to\infty}\left\{a_0 + \frac{m}{m+1}a_1 + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}a_2 + \ldots\right\}.$$

С помощью s_n это определение выражается так:

$$t_m = \frac{1}{m+1}s_0 + \frac{3m}{(m+1)(m+2)}s_1 + \frac{5m(m-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)}s_2 + \ldots,$$

и легко видеть, что рассматриваемый метод регулярен.

В перечисленных методах коэффициенты при s_n неотрицательны. Существуют методы, не обладающие этим свойством и имеющие

*) Вместо x здесь принято писать r, а в „римановских“ определениях h.

важное значение в теории общих тригонометрических рядов. Наиболее важным из них является метод Римана, в котором сумма ряда $\sum a_n$ определяется как

$$\lim_{h\to 0} t(h) = \lim_{h\to 0} \sum a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2,$$

причем коэффициент при a_0 здесь считается равным 1. Известно, что этот метод, обычно называемый (R, 2)-методом, регулярен. В данном случае

$$t(h, \theta) = \begin{cases} \dfrac{\pi(2h - |\theta|)}{4h^2} & \text{при } |\theta| \leqslant 2h, \\ 0 & \text{при } 2h \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

и $t(h, \theta)$ обладает свойствами, аналогичными отмеченным для (4.17.5) и (4.17.6).

Более общий метод суммирования (R, k), где k — положительное целое число, определяется условием

$$\sum a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k \to s.$$

Этот метод регулярен для $k > 1$, но не для $k = 1$.

С (R, 2)-методом тесно связан (но не равносилен ему) (R_2)-метод, определяемый преобразованием

$$t(h) = \frac{2}{\pi} \sum \frac{\sin^2 nh}{n^2 h} s_n,$$

где коэффициент при s_0 считается равным h. Этот метод также регулярен.

4.18 Общий принцип. Большинство определений, приведенных в предыдущих параграфах, можно рассматривать как иллюстрации одного общего принципа.

Пусть $F = F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ — функция нескольких параметров $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, стремящихся соответственно к пределам $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots$; пусть $A, B, C, \ldots$ обозначают соответственно операции предельного перехода $\alpha \to \alpha_0$, $\beta \to \beta_0$, $\gamma \to \gamma_0, \ldots$, и

$$PF = ABC\ldots F = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \{ \lim_{\beta\to\beta_0} (\lim_{\gamma\to\gamma_0} \ldots) \} F,$$

а $QF = A'B'C'\ldots F$, где $A', B', C', \ldots$ суть операции $A, B, C, \ldots$, взятые в другом порядке. Возникает вопрос, будет ли

$$PF = QF; \tag{4.18.1}$$

и теоремы, утверждающие справедливость этого равенства при надлежащих условиях, включают многие из важнейших теорем анализа.

Уравнение (4.18.1) можно рассматривать также с другой точки зрения. Пусть, например,

$$F = F(n, x) = \sum_0^n a_m x^m,$$

$\alpha = n$, $\beta = x$ и A, B — операции $n \to \infty$, $x \to 1$. Тогда

$$BF = \lim_{x \to 1} \sum_0^n a_m x^m = \sum_0^n a_m,$$

и

$$PF = ABF = \lim_{n \to \infty} \sum_0^n a_m = \sum_0^\infty a_m$$

тогда и только тогда, когда ряд $\sum a_m$ сходится. С другой стороны,

$$AF = \lim_{n \to \infty} \sum_0^n a_m x^m = \sum_0^\infty a_n x^n = f(x),$$

если последний ряд сходится для $x < 1$, и

$$QF = BAF = \lim f(x)$$

есть абелевский предел для ряда $\sum a_m$. Если PF существует, то QF также существует и равно PF; но QF существует и во многих случаях, когда PF не существует. При этих обстоятельствах мы можем принять QF за *определение* символа PF, и условиться писать PF, понимая под этим QF. О пользе такой фикции, разумеется, следует судить по ее результатам.

Точно так же, для J-определения § 4.12, с $p_n > 0$ для всех n,

$$F = \frac{\sum\limits_0^n p_m s_m x^m}{\sum\limits_0^n p_m x^m};$$

A есть $n \to \infty$, B есть $x \to \infty$; $BF = s_n$, $ABF = s$ тогда и только тогда, когда $s_n \to s$; а BAF есть то, что мы принимаем за предел по определению. Для моментного определения § 4.13 (с $\xi = \infty$)

$$F = \int_0^X \left(\sum_0^n \frac{a_m}{\mu_m} x^m\right) d\chi = \sum_0^n \frac{a_m}{\mu_m} \int_0^X x^m\, d\chi;$$

A есть $n \to \infty$, B есть $X \to \infty$;

$$BF = \sum_0^n \frac{a_m}{\mu_m} \int_0^\infty x^m\, d\chi = \sum_0^n a_m,$$

так что $ABF = s$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum a_n$ сходится к s, а

$$BAF = \lim_{X\to\infty} \int_0^X a(x)\, d\chi = \int_0^\infty a(x)\, d\chi.$$

Иногда можно связать операции A, B, ... с помощью каких-либо соотношений между α, β, ... Пусть, например,

$$F = F(n, p) = \sum_0^n \left(1 - \frac{m}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{p}} a_m.$$

Тогда

$$\lim_{p\to\infty} F = \sum_0^n a_m, \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{p\to\infty} F = \sum_0^\infty a_m,$$

если ряд сходится; с другой стороны, легко доказать, что $F \to \sum e^{-\frac{m}{p}} a_m$, если последний ряд сходится, так что

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} F = \lim_{p\to\infty} \sum e^{-\frac{m}{p}} a_m,$$

а это выражение, если оно существует, есть не что иное, как абелевский предел. Таким образом, обычная сумма ряда и абелевский предел соответствуют двум повторным пределам для F. Однако мы можем стремить n и p к бесконечности совместно. Так, например, если принять, что $n+1=p$, то будем иметь

$$F = \sum_0^n \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) a_m = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1},$$

и мы получим (C, 1)-определение. Если же принять, что $n+1 = kp$, то получится нечто весьма близкое к (C, k)-определению гл. V *).

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ IV

§ 4.1. Общее определение (W, p_n)-метода ввел впервые Вороной, Дневник одиннадцатого съезда русских естествоиспытателей и врачей (Петербург, 1902), 60—61. Имеется аннотированный английский перевод Тамаркина, *Annals* (2), **33** (1932), 422—428. Статья Вороного представляла собой краткую заметку в редком издании и оставалась незамеченной до тех пор, пока Тамаркин не привлек к ней внимания. Ряд частных случаев этого определения, как, например, чезаровский, разумеется, был уже известен.

Нёрлунд предложил это определение независимо в *Lunds Universitets Årsskrift* (2), **16** (1919), n° 3. Он (явно) и Вороной (неявно) принимали, что $\frac{p_n}{P_n} \to 0$, так что метод регулярен.

*) См., в частности, § 5.16.

§ 4.2. Из двух приведенных доказательств теоремы 17 первое принадлежит Нёрлунду. Второе, основывающееся на теореме 18, предложили независимо Zygmund, *Mathesis Polska*, **1** (1926), 75—85 и 119—129, и Silverman and Tamarkin, *MZ*, **29** (1928), 161—170. Вороной формулирует эту теорему, и из его кратких указаний видно, что его доказательство шло по линии, которой придерживались авторы второго доказательства.

§§ 4.3—4.4. Автором теорем 19 и 21 является M. Riesz, *PLMS* (2), **22** (1923), 412—419.

Условие (4.3.7) не нужно и в том случае, когда оба ряда $\sum p_n$ и $\sum q_n$ сходятся; но вопрос остается открытым, если $\sum p_n < \infty$, а $\sum q_n = \infty$.

§ 4.5. Теорему 22 доказал, для другой цели, Szegö, *MZ*, **25** (1926), 172—187 (177). Сеге приписывает результат Калуза. Теорема 23, повидимому, нова. Первоначально я включал дополнительное условие $p_n = o(q_n)$, однако Бозанкэ указал мне, что это условие излишне.

§§ 4.7—4.8. Теорему 26, как и ее обобщение на комплексные b_n, доказал Kronecker, *CR*, **103** (1886), 980 и **106** (1888), 835. См. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionentheorie, **1** (Лейпциг, 1916), 308—310 и 938.

Теоремы типа теорем 25 и 29 хорошо известны и обобщались многими авторами во многих направлениях. Специально по поводу теорем 25 и 29 см. Dienes, 394—397; Hardy, *PLMS* (2), **4** (1906), 247—265, и Perron, *MZ*, **6** (1920), 286—310. Можно доказать несколько более общее предложение, а именно, что условия (4.7.4) и (4.7.6) необходимы и достаточны для того, чтобы из $\sum a_n = s$ следовало $\varphi(x) \to s$.

Теоремы 28 и 30 доказал Hardy в *MM*, **39** (1910), 136—139 и *PLMS* (2), **8** (1910), 301—320 (318).

§ 4.9. Для $\lambda_n = n$: Stolz, *Zeitschrift für Math.*, **29** (1884), 127—128; см. Stolz und Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, **2** (Лейпциг, 1905), 287—288, или Bromwich, 252—255. Для общих λ_n: Cahen, *AEN* (3), **11** (1894), 75—164 (86—87); см. Landau, Handbuch, 737—738, или Hardy and Riesz, 3—4.

§ 4.10. По поводу формулы (4.10.1) см. Tannery et Molk, **2**, 10—13, или Hardy and Wright, 280—282.

Hardy, *QJM*, **38** (1907), 269—288, подробно рассматривает ряд (4.10.2) и доказывает формулу

$$e^{-y} - e^{-ay} + e^{-a^2y} - \ldots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n+1} \frac{y^n}{n!} + \frac{1}{\log a} \sum_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left\{-\frac{(2n+1)\pi i}{\log a}\right\} y^{\frac{(2n+1)\pi i}{\log a}},$$

явно обнаруживающую колебания рассматриваемой функции при $y \to 0$. Приведенное доказательство принадлежит Маклагану и Веддерберну.

§ 4.11. Надлежащие ссылки на работы Леруа, Линделёфа и Миттаг-Леффлера даны в примечании к § 8.10. Доказательство теоремы 32 принадлежит Линделёфу.

§ 4.12. Борель дал общее определение (4.12.1) в самой ранней своей работе, посвященной рассматриваемой теме; см. Borel, 95. Регулярность B-определения впервые доказал Hardy, *TCPS*, **19** (1902), 297—321 (298—300).

§ 4.13. Теорему 34 доказал Good, *JLMS*, **19** (1944), 141—143, предполагавший, однако, χ абсолютно непрерывной. Мы не рассматривали случая

$$\xi < \infty, \quad \chi(\xi + 0) - \chi(\xi - 0) = D > 0,$$

приводящего в действительности к „тривиальному" методу, т. е. методу, суммирующему лишь сходящиеся ряды. В *JLMS*, **21** (1946), 110—118, Гуд доказывает дальнейшие теоремы того же типа.

§ 4.14. Теорема 35 представляет собой исправленный вариант одной теоремы, которую предложил Bromwich (1), 301—302. Указанные им условия отчасти излишне стеснительны, а отчасти недостаточны. Пример, приведенный в конце параграфа, принадлежит Бромвичу.

Эгглестон заметил, что если интеграл в (V) абсолютно сходится, то можно отбросить условие (III).

§ 4.15. Формулы, использованные для преобразования тэта-функций, см. в Tannery et Molk, **2**, 263 (Таблица XLIII).

§ 4.16. По поводу общей теории риссовских нормальных средних см. Hardy and Riesz.

§ 4.17. Изложение общей теории суммирования рядов Фурье дают Hardy and Rogosinski, гл. 5, и Зигмунд, гл. 3.

Метод Валле-Пуссена (VP) был введен им в *Bulletin de l'Acad. Sc. de Belgique* (1908), 193—254, и применен к суммированию рядов, получающихся при последовательном дифференцировании ряда Фурье Gronwall, *JM*, **147** (1917), 16—35, доказал, что любой ряд, суммируемый (C, k), суммируем (VP). Он также доказал, что ряд $\sum z^n$ суммируем (VP) к $\frac{1}{1-z}$ внутри внешней петли улитки

$$|1+z|^2 = 4|z|, \tag{1}$$

откуда следует, что VP-метод сильнее всей совокупности (C, k)-методов.

VP-метод весьма тесно связан с (A, 2)-методом. Так, Харди (l. c. в примечании к § 2.8) доказал, что эти методы равносильны для рядов Фурье; а Hyslop, *PLMS* (2), **40** (1936), 449—467, распространил эту равносильность на все ряды, для которых $a_n = O(n^K)$. Он также заметил, что ряд $\sum z^n$ суммируем (A, 2) внутри области, ограничиваемой кривою

$$r = e^{|\theta|} \quad (|\theta| \leqslant \pi) \tag{2}$$

и содержащей кривую (1), за исключением точки $z=1$, внутри, так что существуют ряды, суммируемые (A, 2), но не суммируемые (VP). Позже Kuttner, *PLMS* (2), **44** (1938), 92—99, доказал, что (VP) $\rightarrow$ (A, 2) во всех случаях.

Другой метод с весьма похожими свойствами ввел Obrechkoff, *CR*, **182** (1926), 307—309.

Методы Римана имеют фундаментальное значение в теории тригонометрических рядов. Так, регулярность (R, 2)-метода есть „первая лемма Римана", а регулярность (R_2)-метода — вторая. В последние десятилетия много работ посвящалось связям между (R, k)- и (C, l)-методами. Так, Verblunsky, *PCPS*, **26** (1930), 34—42, доказал включение

$$(C, k-\delta) \rightarrow (R, k+1),$$

а Kuttner, *PLMS* (2), **38** (1935), 273—283, — включения $(R, 1) \rightarrow (C, 1+\delta)$ и $(R, 2) \rightarrow (C, 2+\delta)$, где δ — любое положительное число. Куттнер дает ссылки и на другие результаты.

Marcinkiewicz, *JLMS*, **10** (1935), 268—272, доказал „несравнимость" методов (R, 2) и (R_2). См. также Kuttner, *PLMS* (2), **40** (1936), 524—540; Hardy and Rogosinski, *PCPS*, **43** (1947), 10—25 (где показывается, что упомянутые методы несравнимы даже для рядов Фурье).

§ 4.18. По поводу всего этого см. Hardy and Chapman, *QJM*, **42** (1911), 181—215.

Глава V

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ (I)

5.1. Введение. Простейшим методом суммирования расходящегося ряда является первый метод § 1.3. Этот метод допускает много важных обобщений; в настоящей главе мы подвергнем некоторые из них более систематическому исследованию. Нам будет удобно несколько изменить обозначения и вместо s_n писать A_n, а вместо суммы ряда s писать A. Так, запись $\sum a_n = A$ (C, 1) будет означать, что

$$\lim \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{n+1} = A.$$

При этом мы иногда будем пользоваться буквой A для обозначения не только суммы ряда, но и самого ряда, и, например, говорить, что „A суммируем (C, 1)“ (разумеется, к сумме A).

5.2. Методы Гёльдера. Наиболее очевидное обобщение (C, 1)-метода впервые было предложено Гёльдером, введшим последовательность методов, которые мы будем называть (H, k)-методами.

(H, 1)-метод совпадает с (C, 1)-методом; таким образом,

$$1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2} \quad (\mathrm{H},\ 1).$$

Этот метод недостаточен для суммирования ряда $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$, так как здесь частичные суммы A_n равны $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ и

$$H_n^1 = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{n+1} \text{ *)}$$

равно $\frac{n+2}{2(n+1)}$ при n четном и 0 при n нечетном. Однако мы можем прийти к пределу, повторяя процесс усреднения; в самом деле, первое из найденных значений есть $\frac{1}{2} + o(1)$ и потому

$$H_n^2 = \frac{H_0^1 + H_1^1 + \ldots + H_n^1}{n+1} \to \frac{1}{4}.$$

*) Мы пишем $H_n^1, H_n^2, \ldots$ вместо $H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \ldots$ для упрощения типографского набора; верхние индексы не должны пониматься как показатели степеней.

Аналогично, три усреднения дадут для ряда $1-3+6-10+\ldots$ сумму $\frac{1}{8}$.

Мы приходим таким образом к следующему определению суммируемости (H, k) для любого натурального k. Мы определяем H_n^k, для $k=0, 1, 2, \ldots$, условиями $H_n^0=A_n$ и

$$H_n^{k+1}=\frac{H_0^r+H_1^r+\ldots+H_n^r}{n+1}. \tag{5.2.1}$$

Если $H_n^k\to A$ при $n\to\infty$, то мы говорим, что ряд $\sum a_n$ *суммируем* (H, k) *к сумме* A, и пишем

$$a_0+a_1+a_2+\ldots=A \text{ (H, } k). \tag{5.2,2}$$

Под суммируемостью (H, 0) мы понимаем обыкновенную сходимость.

5.3. Элементарные теоремы относительно суммируемости по Гёльдеру. Мы увидим, что гёльдеровские определения, хотя они и являются наиболее очевидными обобщениями (C, 1)-определения, для большинства целей — не самые удобные. Однако они имеют и некоторые преимущества. В частности, если мы будем обозначать средние H_n^k, образованные, исходя из частичных сумм A_n, через $H_n^k(A)$, а последовательность $(H_n^k(A))$—через $H^k(A)$, то, как это явствует из определений, мы будем иметь

$$H_n^k\{H^l(A)\}=H_n^l\{H^k(A)\}=H_n^{k+l}(A);$$

а это сделает доказательства некоторых теорем особенно простыми.

Теорема 38. *Если* $\sum a_n=A$ (H, k), *где* $k\geqslant 0$, *то* $\sum a_n=A$ (H, k') *для всех* $k'>k$.

Это сразу следует из определений и теоремы Коши § 1.4.

Теорема 39. *Если* $\sum a_n=A$ (H, k), *то* $A_n=o(n^k)$ *и* $a_n=o(n^k)$.

В самом деле, $H_n^k=A+o(1)$, и потому

$$H_n^{k-1}=(n+1)H_n^k-nH_{n-1}^k=o(n),$$
$$H_n^{k-2}=(n+1)H_n^{k-1}-nH_{n-1}^{k-1}=o(n^2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n=H_n^0=(n+1)H_n^1-nH_{n-1}^1=o(n^k),$$
$$a_n=A_n-A_{n-1}=o(n^k).$$

Это — „лимитирующая теорема“ для (H, k)-метода. Из нее, например, следует, что (как мы в этом непосредственно убедились в § 5.2) ряд $1-2+3-4+\ldots$ не может быть суммируем (H, 1)

Следующая теорема обнаруживает некоторые неудобства методов Гёльдера.

Теорема 40. (H, k)-*метод обладает свойствами*

$$(\alpha)\qquad \sum Ca_n = C\sum a_n,$$

$$(\beta)\qquad \sum (a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n,$$

$$(\gamma)\qquad a_0+a_1+a_2+\ldots = a_0+(a_1+a_2+\ldots),$$

$$(\delta)\qquad a_0+(a_1+a_2+\ldots) = a_0+a_1+a_2+\ldots$$

Здесь каждое равенство надо понимать следующим образом: „Если правая часть имеет значение в смысле (H, k), то и левая часть имеет значение в этом же смысле, и оба значения равны". Так, равенство (δ) означает: „Если ряд $a_0+a_1+a_2+\ldots$ суммируем к A, то ряд $a_1+a_2+\ldots$ суммируем к $A-a_0$".

Свойства (α) и (β) тривиальны (и справедливы для любого линейного метода). Далее, полагая $b_n=a_{n+1}$, имеем $B_n=A_{n+1}-a_0$, и

$$\frac{B_0+B_1+\ldots+B_n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{A_0+A_1+\ldots+A_{n+1}}{n+2}-a_0\right),$$

откуда следуют свойства (γ) и (δ) при $k=1$. Но связи между средними для a_n и b_n при высших значениях k не просты, и мы откладываем окончание доказательства до § 5.8.

5.4. Методы Чезаро. Гёльдеровские средние определялись процессом типа $\delta\sum\delta\sum\delta\sum\ldots$, где $\sum$ — суммирование от 0 до n, а δ — деление на $n+1$, примененным к A_0, A_1, ... Чезаровские же средние определяются k суммированиями, за которыми следует только одно деление.

Положим

$$(5.4.1)\qquad A_n^0=A_n=a_0+a_1+\ldots+a_n,\quad \ldots,$$
$$A_n^k=A_0^{k-1}+A_1^{k-1}+\ldots+A_n^{k-1},$$

и через E_n^k обозначим A_n^k в том частном случае, когда $a_0=1$ и $a_n=0$ при $n>0$, т. е. когда $A_n=1$ для всех n. Если

$$(5.4.2)\qquad C_n^k(A)=\frac{A_n^k}{E_n^k}\to A$$

при $n\to\infty$, то мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ *суммируем* (C, k) *к сумме* A, и писать

$$(5.4.3)\qquad a_0+a_1+a_2+\ldots=A\qquad (\mathrm{C},\ k).$$

A_n^k легко выразить явно через A_n или a_n. Имеем

$$\frac{1}{(1-x)^p}=\sum(-1)^n\binom{-p}{n}x^n=\sum\binom{n+p-1}{p-1}x^n$$

и

$$\sum A_n^k x^n=\frac{1}{1-x}\sum A_n^{k-1}x^n=\frac{1}{(1-x)^2}\sum A_n^{k-2}x^n=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{(1-x)^k}\sum A_n x^n=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\sum a_n x^n.$$

Таким образом,

$$\sum A_n^k x^n=\sum\binom{n+k-1}{k-1}x^n\sum A_n x^n$$

и

$$A_n^k=\sum\binom{n-\nu+k-1}{k-1}A_\nu=\sum\binom{\nu+k-1}{k-1}A_{n-\nu}\ ^{*}). \tag{5.4.4}$$

Аналогично,

$$A_n^k=\sum\binom{n-\nu+k}{k}a_\nu=\sum\binom{\nu+k}{k}a_{n-\nu}. \tag{5.4.5}$$

Если $a_0=1$, а остальные a_n равны нулю, то A_n^k обращается в $\binom{n+k}{k}$, так что

$$E_n^k=\binom{n+k}{k}=\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{n!}. \tag{5.4.6}$$

Далее,

$$\binom{n+k}{k}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}{k!}\sim\frac{n^k}{k!},$$

и потому суммируемость (C, k), к сумме A, можно также определить соотношением

$$\frac{k!}{n^k}A_n^k\to A. \tag{5.4.7}$$

Более обще, имеем

$$\sum A_n^{k'}x^n=\frac{1}{(1-x)^{k'-k}}\sum A_n^k x^n,\qquad \sum A_n^k x^n=(1-x)^{k'-k}\sum A_n^{k'}x^n,$$

откуда

$$A_n^{k'}=\sum\binom{\nu+k'-k-1}{k'-k-1}A_{n-\nu}^k, \tag{5.4.8}$$

$$A_n^k=\sum(-1)^\nu\binom{k'-k}{\nu}A_{n-\nu}^{k'}. \tag{5.4.9}$$

---

*) Сумма $\sum\alpha_\nu\beta_{n-\nu}$ без указания пределов суммирования распространяется на те ν, для которых ν и $n-\nu$ одновременно неотрицательны, т. е. на значения $0\leqslant\nu\leqslant n$.

Эти формулы, по существу, тождественны, поскольку

$$\binom{k'-k}{\nu}=(-1)^{\nu}\binom{\nu+k-k'-1}{k-k'-1},$$

так что (5.4.9) есть (5.4.8) с переставленными k и k'; но выписанные формы наиболее удобны при $k'>k$. Так как коэффициент в формуле (5.4.9) равен нулю, когда (k' и k целые и) $\nu>k'-k>0$, то она допускает также запись

$$A_n^k=\sum_{\nu=0}^{k'-k}(-1)^{\nu}\binom{k'-k}{\nu}A_{n-\nu}^{k'}. \tag{5.4.10}$$

Формулу (5.4.10) можно использовать для определения средних A_n^k при отрицательных k. Так, при $k=-p$ и $k'=0$ она принимает вид

$$A_n^{-p}=A_n-\binom{p}{1}A_{n-1}+\binom{p}{2}A_{n-2}-\ldots=(-1)^p\Delta^pA_{n-p}.$$

В частности,

$$A_n^{-1}=-\Delta A_{n-1}=A_n-A_{n-1}=a_n; \tag{5.4.11}$$

этой условной записью часто удобно пользоваться.

5.5. Средние нецелого порядка. До сих пор (за исключением конца последнего параграфа) мы предполагали, что k — натуральное число. Однако формулы (5.4.4) — (5.4.7) сохраняют смысл и для нецелых k и дают возможность ввести более общие определения.

Если k — отрицательное целое число и мы определим E_n^k либо формулой (5.4.6), либо как коэффициент при x^n в ряде для $(1-x)^{-k-1}$, то получим, что $E_n^k=0$ для $n>-k-1$, и определение (5.4.2) теряет смысл. Поэтому мы должны исключить эти значения k, и оказывается, что лучше всего предполагать $k>-1$. Тогда A_n^k определяем формулой (5.4.4) или (5.4.5), E_n^k — формулой (5.4.6) и суммируемость (C, k) — соотношением (5.4.2). Асимптотическая формула для E_n^k остается еще в силе, если под $k!$ понимать $\Gamma(k+1)$, и мы можем пользоваться соотношением (5.4.7) в таком его истолковании.

Чтобы убедиться в желательности ограничения $k>-1$, предположим, что

$$\sum a_nx^n=\frac{1}{(1-x)^p},$$

где p — положительное нецелое число. Тогда

$$a_n=\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\sim\frac{n^{p-1}}{\Gamma(p)},$$

так что $\sum a_n$ есть расходящийся ряд с положительными членами. Но $\sum A_n^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1+p}}$ и, в частности, $\sum A_n^{-p-1} x^n = 1$. Поэтому $A_n^{-p-1} = 0$ для $n > 0$, так что (если не накладывать ограничения на k) ряд $\sum a_n$ суммируем $(C, -p-1)$ к сумме 0. Но в большинстве случаев было бы весьма неудобно приписывать конечную сумму расходящемуся ряду, составленному из положительных членов *).

Поэтому мы вообще будем предполагать, что $k > -1$. Однако иногда будет удобно пользоваться и специальным определением суммируемости $(C, -1)$. Мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем $(C, -1)$ к сумме A, если (I) он сходится к A и (II) $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Если $A_n^k = O(n^k)$, то мы будем говорить, что A_n *ограничены* (C, k), и писать

$$A_n = O(1) \quad (C, k).$$

Более обще, под

$$A_n = o(n^l) \quad (C, k), \qquad A_n = O(n^l) \quad (C, k)$$

мы будем понимать, что

$$A_n^k = o(n^{l+k}), \quad A_n^k = O(n^{l+k}).$$

Аналогичными обозначениями мы будем пользоваться и в случае других методов суммирования, так, $\sum a_n = O(1)$ (A) будет означать, что $\sum a_n x^n = O(1)$, когда $x \to 1-0$.

В дальнейшем мы иногда будем оперировать общим k, иногда же ограничимся только его целыми значениями. Дело в том, что, хотя большинство теорем, с которыми мы будем иметь дело, справедливы для всех $k > -1$, доказательства их часто гораздо проще для целых k. Так, нам часто придется пользоваться разностью

$$\Delta^k u_n = u_n - \binom{k}{1} u_{n+1} + \binom{k}{2} u_{n+2} - \ldots$$

Если k — целое, то это — конечная сумма; но обобщение ее на нецелое k есть бесконечный ряд, и это часто приводит к серьезным усложнениям. В подобных случаях мы обычно будем предполагать k целым.

5.6. Теорема о свертках. Сумму

$$c_n = \sum_{\mu+\nu=n} a_\mu b_\nu = \sum a_\nu b_{n-\nu} = \sum a_{n-\nu} b_\nu \tag{5.6.1}$$

и интеграл

$$c(x) = \int a(t)\, b(x-t)\, dt = \int a(x-t)\, b(t)\, dt \;^{**)} \tag{5.6.2}$$

называют *свертками* коэффициентов a_n и b_n, соответственно функций $a(x)$ и $b(x)$. Нам неоднократно, особенно в гл. X, придется пользоваться двумя теоремами, относящимися к такого рода сверткам.

---

*) Хотя некоторые определения и делают это: так, $1 + 2 + 4 + \ldots = -1$ согласно $\mathfrak{E}$-определению § 1.3. См. также §§ 13.10 и 13.17.

**) Здесь мы пользуемся соглашением, аналогичным принятому в § 5.4: интегрирование производится в пределах от 0 до x.

Теорема 41. *Если* $r > -1$, $s > -1$ *и*

$$a_n \sim \binom{n+r}{r}\alpha \sim \frac{n^r}{\Gamma(r+1)}\alpha, \quad b_n \sim \binom{n+s}{s}\beta \sim \frac{n^s}{\Gamma(s+1)}\beta, \tag{5.6.3}$$

то

$$c_n \sim \binom{n+r+s+1}{r+s+1}\alpha\beta \sim \frac{n^{r+s+1}}{\Gamma(r+s+2)}\alpha\beta. \tag{5.6.4}$$

Теорема 42. *Если* $r > -1$, $s > -1$, $a(x)$ *и* $b(x)$ *интегрируемы на любом конечном интервале положительных значений* x *и*

$$a(x) \sim \alpha x^r, \quad b(x) \sim \beta x^s \tag{5.6.5}$$

при $x \to \infty$, *то*

$$c(x) \sim \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\alpha\beta x^{r+s+1}. \tag{5.6.6}$$

В этих теоремах соотношения $a_n \sim \binom{n+r}{r}\alpha, \ldots, a(x) \sim \alpha x^r, \ldots$ в случае, когда α и β равны нулю, следует понимать в том смысле, что $a_n = o(n^r), \ldots, a(x) = o(x^r), \ldots$; необходимые модификации доказательств предоставляем читателю. Справедливы также аналогичные теоремы, в предположениях и утверждениях которых O заменено на o.

Теорему 41 можно вывести из теоремы 42, положив $a(x) = a_n$ и $b(x) = b_n$ для $n \leqslant x < n+1$, причем тогда $c(n+1)$ приводятся к c_n.

При доказательстве теоремы 42 мы можем предполагать, что $\alpha = \beta = 1$. Выбираем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы

$$0 < \delta < \frac{1}{2}, \quad \delta^{r+1} < (r+1)\varepsilon, \quad \delta^{s+1} < (s+1)\varepsilon, \tag{5.6.7}$$

и

$$\gamma = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} = \int_0^1 u^r(1-u)^s\,du < \int_\delta^{1-\delta} u^r(1-u)^s\,du + \varepsilon, \tag{5.6.8}$$

и разбиваем $c(x)$ на три слагаемых:

$$c(x) = \int_0^{\delta x} + \int_{\delta x}^{(1-\delta)x} + \int_{(1-\delta)x}^{x} = c_1(x) + c_2(x) + c_3(x). \tag{5.6.9}$$

При фиксированном δ мы можем выбрать $x_0 = x_0(\delta, \varepsilon) = x_0(\varepsilon)$ так, чтобы

$$(1-\varepsilon)\int_{\delta x}^{(1-\delta)x} u^r(x-u)^s\,du < c_2(x) < (1+\varepsilon)\int_{\delta x}^{(1-\delta)x} u^r(x-u)^s\,du,$$

$$(1-\varepsilon)x^{r+s+1}\int_\delta^{1-\delta} u^r(1-u)^s\,du < c_2(x) < (1+\varepsilon)x^{r+s+1}\int_\delta^{1-\delta} u^r(1-u)^s\,du$$

для $x \geqslant x_0$. В силу (5.6.8) отсюда следует, что

$$\overline{\lim} \frac{c_2(x)}{x^{r+s+1}} \leqslant (1+\varepsilon) \int_{\delta}^{1-\delta} u^r (1-u)^s \, du \leqslant (1+\varepsilon)\gamma,$$

$$\underline{\lim} \frac{c_2(x)}{x^{r+s+1}} \geqslant (1-\varepsilon) \int_{\delta}^{1-\delta} u^r (1-u)^s \, du \geqslant (1-\varepsilon)\gamma - \varepsilon.$$

С другой стороны, существуют такие числа H и K, что для $x \geqslant H$ выполняются неравенства $|a(x)| < Kx^r$ и $|b(x)| < Kx^s$. Поэтому если, как мы вправе предполагать, $\delta x_0 > H$ и $(1-\delta) x_0 > H$, то

$$|c_1(x)| \leqslant Kx^s \int_0^{\delta x} |a(u)| \, du \leqslant Kx^s \int_0^H |a(u)| \, du + K^2 x^s \int_H^{\delta x} u^r \, du \leqslant$$

$$\leqslant Kx^s \int_0^H |a(u)| \, du + K^2 \frac{\delta^{r+1}}{r+1} x^{r+s+1}.$$

Отсюда и из неравенств (5.6.7) следует, что

$$\overline{\lim} \frac{|c_1(x)|}{x^{r+s+1}} \leqslant K^2 \frac{\delta^{r+1}}{r+1} < K^2 \varepsilon,$$

и, очевидно, аналогичное неравенство имеет место и для $|c_3(x)|$.

Соединяя наши результаты, мы видим, что

$$\overline{\lim} \frac{c(x)}{x^{r+s+1}} \leqslant \overline{\lim} \frac{c_2(x)}{x^{r+s+1}} + \overline{\lim} \frac{|c_1(x)|}{x^{r+s+1}} + \overline{\lim} \frac{|c_3(x)|}{x^{r+s+1}} <$$

$$< (1+\varepsilon)\gamma + 2K^2 \varepsilon,$$

$$\underline{\lim} \frac{c(x)}{x^{r+s+1}} \geqslant \underline{\lim} \frac{c_2(x)}{x^{r+s+1}} - \overline{\lim} \frac{|c_1(x)|}{x^{r+s+1}} - \overline{\lim} \frac{|c_3(x)|}{x^{r+s+1}} >$$

$$> (1-\varepsilon)\gamma - (1+2K^2)\varepsilon,$$

и, следовательно, $c(x) \sim \gamma x^{r+s+1}$.

Можно, конечно, аналогичным путем доказать теорему 41 непосредственно, причем роль формулы

$$\int u^r (x-u)^s \, du = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)} x^{r+s+1}$$

будет играть следующее тождество, связывающее биномиальные коэффициенты:

$$\sum \binom{\nu+r}{r} \binom{n-\nu+s}{s} = \binom{n+r+s+1}{r+s+1}. \tag{5.6.10}$$

5.7. Простейшие теоремы относительно суммируемости по Чезаро. Начнем с доказательства теорем для чезаровских средних, соответствующих теоремам 38—40.

Теорема 43. *Если* $k' > k > -1$ *и* $\sum a_n = A$ (C, k), *то*

$$\sum a_n = A \qquad (C,\ k').$$

Действительно, пусть $k' = k + \delta$; тогда в силу формулы (5.4.8)

$$A_n^{k'} = \sum \binom{\nu + \delta - 1}{\delta - 1} A_{n-\nu}^{k}.$$

С другой стороны, $A_n^k \sim \binom{n+k}{k} A$. Поэтому из теоремы 41 следует, что

$$A_n^{k'} \sim \binom{n+k+\delta}{k+\delta} A = \binom{n+k'}{k'} A.$$

В частности, беря $k = 0$ и заменяя k' на k, получаем такое предложение:

Теорема 44. $(C,\ k)$*-метод при* $k > 0$ *регулярен.*

Так как коэффициенты в $C_n^k(A)$ при $k > 0$ неотрицательны, то из теоремы 9 следует, что $(C,\ k)$-метод при $k > 0$ вполне регулярен в смысле § 3.6.

Поучительно вывести теорему 43 из теоремы 2. Выражая $C_n^{k'}(A)$ через $C_n^k(A)$ с помощью формулы (5.4.8) с $k' = k + \delta$ и переставленными ν и $n - \nu$, находим, что

$$C_n^{k'}(A) = \sum c_{n,\nu}\, C_\nu^k(A),$$

где

$$c_{n,\nu} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n-\nu+\delta-1}{\delta-1}\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} & \text{при } \nu \leqslant n, \\ 0 & \text{при } \nu > n. \end{cases}$$

Таким образом, $c_{n,\nu} \geqslant 0$, $c_{n,\nu} = O(n^{-k-1})$ при фиксированном ν и $n \to \infty$, и $\sum c_{n,\nu} = 1$ в силу формулы (5.6.10), так что условия теоремы 2 выполнены. Кроме того, так как $c_{n,\nu} \geqslant 0$, то из $C_n^k(A) \to \infty$ следует $C_n^{k'}(A) \to \infty$.

Теорема 43 сохраняет силу для $k = -1$, если пользоваться определением суммируемости $(C, -1)$, данным в § 5.5, но нуждается в другом доказательстве. В действительности можно утверждать даже больше.

Теорема 45. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится к* A *и* $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *то*

$$\sum a_n = A \qquad (C,\ -1+\delta)$$

для любого положительного δ.

Мы можем считать, что $A=0$ и $\delta<1$. Имеем

$$A_n^{-1+\delta}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\nu+\delta-1}{\delta-1}a_{n-\nu}=\sum_{0}^{N-1}+\sum_{N}^{n}=S_1+S_2, \tag{5.7.1}$$

где $N=[\omega n]$, $0<\omega<1$. Тогда

$$S_1=O\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{1}^{N-1}O(\nu^{\delta-1})\,O\left(\frac{1}{n-\nu}\right)=O\left(\frac{N^\delta}{n-N}\right)=O\left(\frac{\omega^\delta}{1-\omega}\,n^{\delta-1}\right)$$

равномерно относительно ω. Поэтому ω можно выбрать так, чтобы

$$|S_1|<\varepsilon n^{\delta-1}. \tag{5.7.2}$$

Далее, полагая $u_\nu=\binom{\nu+\delta-1}{\delta-1}$, имеем $u_\nu-u_{\nu-1}=\binom{\nu+\delta-2}{\delta-2}=$ $=O(\nu^{\delta-2})$ и

$$\begin{aligned} S_2&=u_Na_{n-N}+u_{N+1}a_{n-N-1}+\ldots+u_na_0=\\ &=A_0(u_n-u_{n-1})+A_1(u_{n-1}-u_{n-2})+\ldots\\ &\quad\ldots+A_{n-N-1}(u_{N+1}-u_N)+A_{n-N}u_N=\\ &=\sum_{\nu=0}^{n-N-1}o(1)\,O(n^{\delta-2})+o(1)\,O(n^{\delta-1})=o(n^{\delta-1}). \end{aligned} \tag{5.7.3}$$

Наконец, из формул (5.7.1)—(5.7.3) следует, что $n^{1-\delta}A_n^{-1+\delta}\to 0$, т. е. что ряд $\sum a_n$ суммируем $(C,\ -1+\delta)$ к сумме 0.

Теорема 46. *Если* $\sum a_n=A$ (C,k), *где* $k>-1$, *то* $A_n^{k'}=$ $=o(n^k)$ *для* $k'<k$.

Это — „лимитирующая теорема“. Здесь нет необходимости предполагать, что $k'>-1$; в частности, результат верен при $k'=-1$, $A_n^{k'}=a_n$.

При доказательстве можно считать $A=0$, так что $A_n^k=o(n^k)$. Полагаем $k'=k-\delta$, так что $\delta>0$. Тогда, в силу формул (5.4.8) и (5.4.9),

$$A_n^{k'}=\sum\binom{\nu-\delta-1}{-\delta-1}A_{n-\nu}^k=\sum(-1)^\nu\binom{\delta}{\nu}A_{n-\nu}^k=\sum d_\nu A_{n-\nu}^k.$$

Если δ — целое, то согласно (5.4.10) $A_n^{k'}$ есть линейная комбинация $\delta+1$ значений A_n^k с коэффициентами, меньшими по модулю, чем $(1+1)^\delta=2^\delta$; тем самым $A_n^{k'}=o(n^k)$.

Если же δ — нецелое, то $\Gamma(-\delta)\,d_n\sim n^{-\delta-1}$ и $\sum|d_n|<\infty$. Пишем тогда

$$A_n^{k'}=\Bigl(\sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}+\sum_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n}\Bigr)d_\nu A_{n-\nu}^k=S_1+S_2.$$

Здесь

$$|S_1| \leqslant \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |d_\nu| \, |A_{n-\nu}^k| = \sum_{0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} |d_\nu| \, |o(n^k)| = o\left(n^k \sum |d_\nu|\right) = o(n^k),$$

$$|S_2| \leqslant \sum_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} |d_\nu| \, |A_{n-\nu}^k| = O\left(n^{-\delta-1} \sum_{1}^{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \mu^k\right) = O(n^{k-\delta}) = o(n^k),$$

поскольку $k > -1$ и $\delta > 0$, а отсюда снова следует утверждение теоремы.

Теорема 47. (C, k)-*метод обладает свойствами* (α)—(δ) *из теоремы* 40.

Требуют доказательства только свойства (γ) и (δ). Для этого следует показать, что при $b_n = a_{n+1}$ любое из соотношений $\sum a_n = A$ (C, k) и $\sum b_n = A - a_0$ (C, k) влечет другое. Но

$$\sum A_n^k x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum a_n x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \left(a_0 + x \sum b_n x^n\right).$$

Поэтому $A_n^k = E_n^k a_0 + B_{n-1}^k$ для $n > 0$, откуда требуемое и следует.

Теорема 48. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, k), *где* $k > -1$, *то*

$$a_m = (a_m - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots \quad (C, k).$$

В силу теоремы 47 достаточно доказать это соотношение для $m = 0$. Полагая $b_n = a_n - a_{n+1}$, имеем $B_n = a_0 - a_{n+1} = a_0 - u_n$, и

$$B_n^k = \sum \binom{n-\nu+k-1}{k-1} (a_0 - u_\nu) = \binom{n+k}{k} a_0 - U_n^{k-1}.$$

Но, по теореме 47, ряд $\sum u_n$ суммируем (C, k), а по теореме 46 $U_n^{k-1} = o(n^k)$. Поэтому $B_n^k \sim \binom{n+k}{k} a_0$, и ряд $\sum b_n$ суммируем (C, k) к сумме a_0.

Теореме 48 можно придать также следующую форму: *если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, k), *то* $a_n \to 0$ (C, k); это также верно (причем тривиально) для $k = -1$.

5.8. Теорема равносильности.

Следующая теорема заметно труднее.

Теорема 49. (C, k)- *и* (H, k)-*метод равносильны: если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, k), *то он суммируем и* (H, k) *к той же сумме, и обратно.*

Разумеется, здесь k предполагается целым, поскольку гёльдеровские средние определены пока только для целых k. Мы начнем с доказательства следующего предложения.

Теорема 50. *Если*

(5.8.1) $$m_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1},$$

то предположения

(5.8.2) $$s_n \to s \ (\mathrm{C}, k) \ \text{и} \ m_n \to s \ (\mathrm{C}, k-1)$$

равносильны.

Пусть

(5.8.3) $$s_n^k = \binom{n+k}{k} C_n^k(s)$$

(так что s_n^k определено как A_n^k в § 5.4) и пусть m_n^k, $C_n^k(m)$ имеют аналогичный смысл. Суммирование по частям дает

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+p) u_\nu = (n+p) u_n^1 - \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu^1 = (n+p+1) u_n^1 - u_n^2$$

для любых p и n. Поэтому, принимая во внимание, что $s_n^1 = (n+1) m_n$, получаем последовательно

$$s_n^2 = \sum_0^n (\nu+1) m_\nu = (n+2) m_n^1 - m_n^2, \quad s_n^3 = (n+3) m_n^2 - 2m_n^3, \quad \ldots,$$

(5.8.4) $$s_n^k = (n+k) m_n^{k-1} - (k-1) m_n^k;$$

из соотношений же (5.8.3) и (5.8.4) следует, что

(5.8.5) $$C_n^k(s) = kC_n^{k-1}(m) - (k-1) C_n^k(m).$$

Так как $C_n^{k-1}(m) \to s$ влечет $C_n^k(m) \to s$, то из формулы (5.8.5) следует, что $C_n^{k-1}(m) \to s$ влечет $C_n^k(s) \to s$.

Обратно, пусть $C_n^k(s) \to s$. Так как $m_n^{k-1} = m_n^k - m_{n-1}^k$, то (5.8.4) можно записать в виде

$$s_n^k = (n+1) m_n^k - (n+k) m_{n-1}^k$$

или

(5.8.6) $$C_n^k(s) = (n+1) C_n^k(m) - nC_{n-1}^k(m).$$

Отсюда следует, что

(5.8.7) $$(n+1) C_n^k(m) = C_0^k(s) + C_1^k(s) + \ldots + C_n^k(s),$$

и значит, что $C_n^k(m) \to s$. А тогда формула (5.8.5) показывает, что $C_n^{k-1}(m) \to s$.

Тем самым теорема 50 доказана. А из нее уже легко вывести теорему 49. Действительно, применяя теорему 50 последовательно k раз, видим, что предположения

$$C_n^k(A)\to A,\ C_n^{k-1}\{H^1(A)\}\to A,\ \ldots,\ C_n^1\{H^{k-1}(A)\}\to A,\ H_n^k(A)\to A$$

— все равносильны.

Теорема 40 (§ 5.3), доказательство которой мы отложили, очевидно, непосредственно следует теперь из теорем 47 и 49.

5.9. Теорема Мерсера и доказательство Шура теоремы равносильности. Доказательство теоремы 49, предложенное Шуром, в принципе аналогично, однако лучше выявляет соотношения между различными матрицами, связанными с рассматриваемыми методами. Оно опирается на важную теорему Мерсера.

Теорема 51. *Если $\alpha>0$ и*

$$t_n=\alpha s_n+(1-\alpha)\,m_n\to s, \tag{5.9.1}$$

то $s_n\to s$.

Положим, по определению, $m_{-1}=0$. Тогда $s_n=(n+1)\,m_n-nm_{n-1}$ для $n=0,1,2,\ldots$, и

$$t_n=(\alpha n+1)\,m_n-\alpha nm_{n-1}\qquad(n=0,1,2,\ldots). \tag{5.9.2}$$

Выберем $q_0, q_1, q_2, \ldots$ так, чтобы удовлетворялись условия

$$q_0=1,\ q_0-\alpha q_1=0,\ (\alpha+1)\,q_1-2\alpha q_2=0,\ (2\alpha+1)\,q_2-3\alpha q_3=0,\ \ldots$$

Тогда

$$q_n=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha+1}{2\alpha}\cdot\frac{2\alpha+1}{3\alpha}\ \cdots\ \frac{(n-1)\alpha+1}{n\alpha}=\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(n+1)}\sim\frac{n^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)},$$

где $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$, и

$$q_0+q_1+\ \ldots\ +q_n\sim\frac{n^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\sim(\alpha n+1)\,q_n. \tag{5.9.3}$$

Умножая равенства (5.9.2) соответственно на $q_0, q_1, q_2, \ldots$, складывая и принимая во внимание соотношение (5.9.3) и теорему 12, получаем

$$m_n=\frac{q_0t_0+q_1t_1+\ldots+q_nt_n}{(\alpha n+1)\,q_n}\to s. \tag{5.9.4}$$

Тогда из (5.9.1) и (5.9.4) следует, что $s_n\to s$, и теорема 51 доказана.

Напомним теперь некоторые общепринятые обозначения и термины. Если преобразования T и U совпадают, т. е. имеют совпадающие матрицы, то пишут $\mathrm{T}=\mathrm{U}$. Если T и U имеют соответственно коэффициенты $c_{m,n}$ и $d_{m,n}$, то через $\alpha\mathrm{T}+\beta\mathrm{U}$ обозначают преобразование с коэффициентами $\alpha c_{m,n}+\beta d_{m,n}$. Если, как в § 3.1, $t=\mathrm{T}(s)$, а $u=\mathrm{U}(t)$, то пишут.

$$u=\mathrm{U}\{\mathrm{T}(s)\}=\mathrm{UT}(s).$$

Если $\mathrm{UT}=\mathrm{TU}$, то говорят, что T и U *перестановочны*. Вместо TT пишут T^2, вместо TT^2 пишут T^3 и т. д.

Если T допускает обратное преобразование, т. е. такое преобразование S, что из $t=\mathrm{T}(s)$ следует $s=\mathrm{S}(t)$ и обратно, то это преобразование S обозначают через T^{-1}. Имеем $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}=\mathrm{TT}^{-1}=\mathrm{E}$, где E — тождественное преобразование, т. е. преобразование $t_m=s_m$. Треугольное преобразование, в котором $c_{m,m}\neq 0$ для всех m, обладает обратным.

Преобразования (H, k) и (C, k) мы будем обозначать через $\mathrm{H}^{(k)}$ и $\mathrm{C}^{(k)}$; при этом вместо $\mathrm{H}^{(1)}$ и $\mathrm{C}^{(1)}$ будем писать просто H и C. Таким образом, $\mathrm{H}=\mathrm{C}$ и $\mathrm{H}^{(k)}=\mathrm{H}^k$. Если $(m+1)\,t_m=s_0+\ldots+s_m$, то $s_m=(m+1)\,t_m-mt_{m-1}$. Поэтому матрицы преобразований H и H^{-1}

$$\|\mathrm{H}\|=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},\quad \|\mathrm{H}^{-1}\|=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -2 & 3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Так как $A_n^{r-1}=A_n^r-A_{n-1}^r$ и $\binom{n+r}{r}C_n^r(A)=A_n^r$, то

$$r\,C_n^{r-1}(A)=(n+r)\,C_n^r(A)-nC_{n-1}^r(A)=$$
$$=\{(n+1)\,C_n^r(A)-nC_{n-1}^r(A)\}+(r-1)\,C_n^r(A),$$

так что

$$r\mathrm{C}^{(r-1)}=\mathrm{H}^{-1}\mathrm{C}^{(r)}+(r-1)\,\mathrm{C}^{(r)}$$

и

$$\mathrm{HC}^{(r-1)}=\rho\mathrm{C}^{(r)}+(1-\rho)\,\mathrm{HC}^{(r)}=\mathrm{S}^{(r)}\mathrm{C}^{(r)}, \tag{5.9.5}$$

где $\rho=\frac{1}{r}$ и

$$\mathrm{S}^{(r)}=\rho\mathrm{E}+(1-\rho)\mathrm{H}.$$

Поэтому $\mathrm{H}^{k-r+1}\mathrm{C}^{(r-1)}=\mathrm{H}^{k-r}\mathrm{S}^{(r)}\mathrm{C}^{(r)}$ для $0<r\leqslant k$. Но H^{k-r} перестановочно с H и E, а потому и с $\mathrm{S}^{(r)}$. Следовательно,

$$\mathrm{H}^{k-r+1}\mathrm{C}^{(r-1)}=\mathrm{S}^{(r)}\mathrm{H}^{k-r}\mathrm{C}^{(r)}\qquad (0<r\leqslant k). \tag{5.9.6}$$

Положим

$$\mathrm{T}^{(r)}=\mathrm{H}^{k-r}\mathrm{C}^{(r)}\qquad (0\leqslant r\leqslant k), \tag{5.9.7}$$

так что $\mathrm{T}^{(k)} = \mathrm{C}^{(k)}$ и $\mathrm{T}^{(0)} = \mathrm{H}^k$. Тогда (5.9.6) можно представить в виде $\mathrm{T}^{(r-1)} = \mathrm{S}^{(r)}\mathrm{T}^{(r)}$, и потому

$$t_n^{(r-1)} = \frac{1}{r} t_n^{(r)} + \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{t_0^{(r)} + t_1^{(r)} + \ldots + t_n^{(r)}}{n+1}, \tag{5.9.8}$$

где $t_n^{(r)}$ — результат применения операции A_n к $\mathrm{T}^{(r)}$. В силу теоремы 51 это показывает, что предположения $t_n^{(r)} \to A$ и $t_n^{(r-1)} \to A$ равносильны. Иными словами, $\mathrm{T}^{(r)}$ и $\mathrm{T}^{(r-1)}$ равносильны, и, следовательно, $\mathrm{T}^{(k)}$ и $\mathrm{T}^{(0)}$ равносильны.

Заметим, что здесь мы пользуемся преобразованиями $\mathrm{C}^{(k)}$, $\mathrm{HC}^{(k-1)}$, $\mathrm{H}^2\mathrm{C}^{(k-2)}, \ldots, \mathrm{H}^k$, тогда как в § 5.8 мы пользовались преобразованиями $\mathrm{C}^{(k)}$, $\mathrm{C}^{(k-1)}\mathrm{H}$, $\mathrm{C}^{(k-2)}\mathrm{H}^2, \ldots, \mathrm{H}^k$. В действительности H^p и $\mathrm{C}^{(q)}$ перестановочны для любых p и q, так что $\mathrm{H}^r\mathrm{C}^{(k-r)} = \mathrm{C}^{(k-r)}\mathrm{H}^r$, и указанные две совокупности преобразований совпадают. Это нетрудно доказать непосредственно, но по-настоящему это станет понятно лишь в §§ 11.3—11.4.

5.10. Другие доказательства теоремы Мерсера. Из множества других доказательств теоремы 51 мы выберем два.

(A) *Доказательство Кноппа.* Одно доказательство, принадлежащее Кноппу, обладает тем достоинством, что свободно от каких бы то ни было алгебраических выкладок. Без ограничения общности можно считать, что s_n вещественны, и достаточно показать, что s_n стремится к пределу.

Будем для каждого заданного $n > 0$ различать два случая: (а) $s_n < m_n$ и (б) $s_n \geqslant m_n$. Так как $s_n = (n+1)\, m_n - n m_{n-1}$, то из $s_n < m_n$ следует $m_{n-1} > m_n$ (и из $s_n > m_n$, $s_n = m_n$ следует соответственно $m_{n-1} < m_n$ и $m_{n-1} = m_n$).

(I) Допустим, что

$$\overline{\lim}\, m_n = \infty. \tag{5.10.1}$$

Тогда для любого заданного G существует такое p, что $m_p > G$. Если при $n = p$ имеет место случай (а), то $m_{p-1} > m_p > G$. Если, далее, при $p-1$ имеет место случай (а), то $m_{p-2} > m_{p-1} > G$, и т. д. Но тогда если для всех чисел $p, p-1, \ldots, 2$ имеет место случай (а), то $m_1 > G$, что для больших G невозможно. Поэтому для одного из указанных чисел должен иметь место случай (б), так что существует q, для которого $s_q \geqslant m_q > G$. Но тогда

$$t_q = \alpha s_q + (1-\alpha)\, m_q = m_q + \alpha(s_q - m_q) > G,$$

что для больших G противоречиво, поскольку t_n ограничены. Следовательно, $\overline{\lim}\, m_n$ конечен; и аналогично $\underline{\lim}\, m_n$ конечен, так что m_n ограничены.

(II) Допустим теперь, что (m_n ограничены, но)

$$l = \underline{\lim}\, m_n < \overline{\lim}\, m_n = L. \tag{5.10.2}$$

Тогда существуют такие числа h и H, что $h < H$ и каждое из неравенств $m_n < h$, $m_n > H$ выполняется для бесконечного множества значений n. Пусть, например,

$$m_p < h, \quad m_q > H, \quad q > p. \tag{5.10.3}$$

Если для q имеет место случай (а), то, как и раньше, $m_{q-1} > m_q > H$. Поэтому если для всех чисел $q, q-1, \ldots, p+1$ имеет место случай (а), то $m_p > H > h$, в противоречие с первым из неравенств (5.10.3). Следовательно, существует r, большее чем p, для которого $s_r \geqslant m_r > H$ и

$$t_r = \alpha s_r + (1-\alpha)\, m_r = m_r + \alpha(s_r - m_r) > H, \tag{5.10.4}$$

А так как p может быть сколь угодно большим, то заключаем, что неравенство (5.10.4) выполняется для бесконечного множества значений r.

Аналогично и $t_r < h$ для бесконечного множества значений r. Но это в соединении с предыдущим противоречит предположению, что t_r стремится к пределу. Следовательно, допущение (5.10.2) неверно и m_n стремится к пределу. А тогда в силу (5.9.1) и s_n стремится к пределу.

(Б) *Доказательство Харди.* Другое доказательство, предложенное Харди, дает несколько больше, в частности — распространение теоремы на комплексные α. Нам будет удобно начать с тривиального преобразования теоремы.

Полагаем

$$u_{n+1} = \alpha(s_0 + s_1 + \ldots + s_n), \quad a = \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Тогда соотношение (5.9.1), с заменой n на $n-1$, принимает вид

$$u_n - u_{n-1} - \frac{au_n}{n} \to s, \tag{5.10.5}$$

и положительным значениям α соответствуют значения a, меньшие чем 1. Теорема Мерсера утверждает, что $u_n - u_{n-1}$ и $\frac{u_n}{n}$ стремятся тогда к $\frac{s}{1-a}$. Мы докажем более общее предложение.

Теорема 52. *Если* $a = \lambda + i\beta$ *и* $\lambda \neq 1$, *то из соотношения* (5.10.5) *следует, что*

$$u_n = C\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-a)} + \frac{sn}{1-a} + o(n).$$

Если $\lambda < 1$, *то* $C = 0$.

При доказательстве можно считать, что $s = 0$. Положим

$$u_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-a)}\varphi_n = f_n\varphi_n.$$

Тогда $f_n \sim n^a$ и $f_n - f_{n-1} = \frac{af_n}{n}$. Поэтому

$$f_{n-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = f_n\varphi_n - f_{n-1}\varphi_{n-1} - (f_n - f_{n-1})\varphi_n =$$
$$= u_n - u_{n-1} - \frac{au_n}{n} = o(1),$$

так что $\varphi_n - \varphi_{n-1} = o(n^{-\lambda})$. Если $\lambda < 1$, то

$$\varphi_n = \varphi_0 + \sum_1^n (\varphi_m - \varphi_{m-1}) = \varphi_0 + \sum_1^n o(m^{-\lambda}) = o(n^{1-\lambda})$$

и $u_n = O(n^\lambda)\, o(n^{1-\lambda}) = o(n)$. Если $\lambda > 1$, то ряд $\sum(\varphi_m - \varphi_{m-1})$ сходится, φ_n стремится к некоторому пределу C,

$$\varphi_n = C - \sum_n^\infty (\varphi_{m+1} - \varphi_m) = C + \sum_n^\infty o(m^{-\lambda}) = C + o(n^{1-\lambda}),$$

и $u_n = Cf_n + o(n)$.

Теоремы такого же типа существуют и для „асимптотических дифференциальных уравнений". Одной, особенно простой из них мы в дальнейшем воспользуемся:

Теорема 53. *Если* $f(x) + f'(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$, *то* $f(x) \to 0$.

Это можно доказать непосредственно следующим образом. Если f', начиная с некоторого x, сохраняет постоянный знак, то f монотонна. Следовательно, f стремится к некоторому (возможно бесконечному) пределу l, а $f' \to -l$. Но это возможно лишь при $l = 0$. Если же f' принимает положительные и отрицательные значения для сколь угодно больших x, то $f \to 0$, когда $x \to \infty$, пробегая значения, в которых f достигает максимума или минимума, а потому и когда $x \to \infty$ произвольным образом.

5.11. Бесконечные пределы. Естественно возникает вопрос, распространяется ли теорема равносильности на случай бесконечных пределов. Ответ оказывается отрицательным.

Теорема 54. *Если $s_n \to \infty$ (C, k), то $s_n \to \infty$ (H, k). Но обратное при $k > 1$ неверно.*

Здесь k — снова целое. Из (5.9.5) следует, что

$$H = C^{(1)},\quad H^2 = HC^{(1)} = \frac{1}{2}C^{(2)} + \frac{1}{2}HC^{(2)},$$

$$H^3 = \frac{1}{2}HC^{(2)} + \frac{1}{2}H^2C^{(2)} = \frac{1}{6}C^{(3)} + \frac{1}{2}HC^{(3)} + \frac{1}{3}H^2C^{(3)},$$

и вообще

$$H^k = \sum_{p=0}^{k-1} a_{k,p} H^p C^{(k)}, \tag{5.11.1}$$

где $a_{k,p} > 0$. Отсюда

$$H_n^k(s) = \sum_{p=0}^{k-1} a_{k,p} H_n^p \{C^{(k)}(s)\}. \tag{5.11.2}$$

В свою очередь,

$$H_n^p \{C^{(k)}(s)\} = \sum_{q=0}^{n} h_{n,p,q} C_q^{(k)}(s), \tag{5.11.3}$$

где $h_{n,p,q} > 0$; а из формул (5.11.2) и (5.11.3) следует, что

$$H_n^k(s) = \sum_{q=0}^{n} b_{k,n,q} C_q^{(k)}(s), \tag{5.11.4}$$

где

$$b_{k,n,q} = \sum_{p=0}^{k-1} a_{k,p} h_{n,p,q} > 0.$$

Рассматривая случай, когда $s_n = 1$ для всех n, убеждаемся в том что $\sum b_{k,n,q} = 1$.

Теорема равносильности показывает, что преобразование (5.11.4) регулярно, и так как $b_{k,n,q} > 0$, то оно удовлетворяет условиям теоремы 9. Поэтому

$$\varliminf C_n^{(k)}(s) \leqslant \varliminf H_n^k(s) \leqslant \varlimsup H_n^k(s) \leqslant \varlimsup C_n^{(k)}(s), \tag{5.11.5}$$

так что из $s_n \to \infty$ (C, k) следует $s_n \to \infty$ (H, k). Тем самым положительная половина теоремы доказана.

Для доказательства отрицательной половины допустим, что $k > 1$ и $C_{2m}^{(k)}(s) = 2m$, $C_{2m+1}^{(k)}(s) = 0$. Эти условия определяют последовательность (s_n), для которой

$$\varliminf C_n^{(k)}(s) = 0,\quad \varlimsup C_n^{(k)}(s) = \infty,$$

и $H_n\{C^{(k)}(s)\}\to\infty$. В силу равенства (5.11.2) тогда $H_n^k(s)>a_{k,1}H_n\{C^{(k)}(s)\}\to\infty$, и, значит, $s_n\to\infty$ (H, k). Однако соотношение $s_n\to\infty$ (C, k) не имеет места.

5.12. Суммируемость по Чезаро и по Абелю. Из теоремы 43 видно, что сила (C, k)-методов возрастает вместе с k. Нижеследующие теоремы показывают, что A-метод сильней их всех.

Теорема 55. *Если* $\sum a_n = A$ (C, k) *для некоторого* k, *то* $\sum a_n = A$ (A).

Теорема 56. *Существуют ряды, суммируемые* (A), *но не суммируемые* (C, k) *ни для какого* k.

Нам потребуется вспомогательное предложение, представляющее и самостоятельный интерес.

Теорема 57. *Если* $d_n>0$, $\sum d_n=\infty$, $\sum d_nx^n$ *сходится для* $0\leqslant x<1$ *и* $c_n\sim Ad_n$, *где* $A\neq 0$, *то*

$$C(x)=\sum c_nx^n\sim AD(x)=A\sum d_nx^n$$

при $x\to 1$.

Мы можем считать c_n вещественными и $A=1$. Тогда $\frac{c_n}{d_n}$ заключено между $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$ для $n>N=N(\varepsilon)$. Поэтому, с одной стороны,

$$C(x)=\sum_0^N c_nx^n+\sum_{N+1}^{\infty} c_nx^n\leqslant(1+\varepsilon)D(x)+\sum_0^N|c_n|x^n,$$

а с другой,

$$C(x)\geqslant(1-\varepsilon)D(x)-\sum_0^N d_nx^n-\sum_0^N|c_n|x^n.$$

Так как

$$\lim D(x)\geqslant\lim\sum_0^N d_nx^n=D_N$$

для каждого N, и тем самым $D(x)\to\infty$, то заключаем, что

$$\varlimsup_{x\to 1}\frac{C(x)}{D(x)}\leqslant 1+\varepsilon,\qquad \varliminf_{x\to 1}\frac{C(x)}{D(x)}\geqslant 1-\varepsilon,$$

и, следовательно, $C(x)\sim D(x)$.

Теорема 55 получается отсюда как следствие. Мы можем считать, что $A\neq 0$. Тогда, как в § 5.4,

$$f(x)=\sum a_nx^n=\frac{\sum A_n^kx^n}{(1-x)^{-k-1}}=\frac{\sum A_n^kx^n}{\sum E_n^kx^n},$$

и так как $A_n^k\sim AE_n^k$, то $f(x)\to A$.

Для доказательства теоремы 56 определим a_n как коэффициенты степенного ряда

$$f(x)=e^{\frac{1}{1+x}}=\sum a_n x^n. \tag{5.12.1}$$

Так как $f(x)$ регулярна всюду, кроме точки $x=-1$, то этот ряд сходится для $|x|<1$; при этом $f(x)\to e^{\frac{1}{2}}$, когда $x\to 1$. С другой стороны, a_n не есть $O(n^k)$ ни для какого k. Действительно, отсюда следовало бы, что

$$f(x)=O\left(\sum n^k |x|^n\right)=O\left\{\frac{1}{(1-|x|)^{k+1}}\right\}$$

равномерно в круге $|x|<1$, тогда как $f(x)$ стремится к бесконечности как $e^{\frac{1}{1-|x|}}$, когда $x\to -1$ по вещественным значениям. В силу теоремы 46 это показывает, что ряд $\sum a_n$ не суммируем (C, k) ни для какого k.

Еще более изящным примером ряда, обладающего требуемыми свойствами, служит $\sum(-1)^n e^{c\sqrt{n}}$, где $c>0$. Коэффициенты ряда (5.12.1) — примерно такого же типа, но доказывается это довольно сложно *).

5.13. Чезаровские средние как средние Вороного. (C, k)-средние являются (W, p_n)-средними для случая

$$p_n=\binom{n+k-1}{k-1}, \quad p(x)=\sum\binom{n+k-1}{k-1}x^n=\frac{1}{(1-x)^k}.$$

(H, k)-средние не являются средними Вороного (за исключением случая $k=1$). Интересно найти примеры методов Вороного, которые были бы (а) сильнее любого чезаровского среднего или (б) слабее любого чезаровского среднего положительного порядка.

(а) Пусть k — целое. Положим

$$p_n=\binom{n+k-1}{k-1}, \quad q_n=e^{\sqrt{n}},$$

откуда $P_n=O(n^k)$, $Q_n\sim 2\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}$, и определим $\varkappa_n$ формулой

$$\varkappa(x)=\sum \varkappa_n x^n=\frac{q(x)}{p(x)}=(1-x)^k q(x) \text{ **)},$$

*) Приведенные примеры могут навести на мысль, что A-метод равносилен (C, k)-методу, если $s_n=o(n^k)$ для некоторого k, однако это неверно. (*Прим. ред.*)

**) Мы пользуемся буквой $\varkappa$ вместо k, принятого в § 4.3, поскольку k уже занято.

так что

$$\varkappa_n = (-1)^k \Delta^k e^{\sqrt{n-k}} \sim \frac{e^{\sqrt{n}}}{2^k n^{\frac{k}{2}}}$$

для $n \geqslant k$. Нам нужно показать, что суммируемость (W, p_n) влечет суммируемость (W, q_n). Для этого мы воспользуемся теоремой 19. Второе условие этой теоремы, очевидно, выполнено, и достаточно доказать, что

$$\sum e^{\sqrt{n-m}} \frac{m^k}{(n-m)^{\frac{k}{2}}} = O(\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}),$$

где суммирование распространено на значения $0 < m < n$. Но члены с $m > \frac{n}{2}$ дают в сумме $O(e^{c\sqrt{n}})$ с $c < 1$. А так как

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-m} > \frac{m}{2\sqrt{n}}, \qquad e^{\sqrt{n-m}} < e^{\sqrt{n}} e^{-\frac{m}{2\sqrt{n}}},$$

то остающиеся члены дают

$$O\left(e^{\sqrt{n}} n^{-\frac{k}{2}} \sum m^k e^{-\frac{m}{2\sqrt{n}}}\right) = O\left\{e^{\sqrt{n}} n^{-\frac{k}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right)^{-k-1}\right\} =$$

$$= O\left\{e^{\sqrt{n}} n^{-\frac{k}{2}} n^{\frac{1}{2}(k+1)}\right\} = O(\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}).$$

(б) Средние, для которых $p_n = \frac{1}{n+1}$, были названы М. Риссом „гармоническими" средними. Положим теперь $q_n = \binom{n+k-1}{k-1}$, где $k < 1$, так что (W, q_n) совпадает с (C, k). Тогда $p_n^2 < p_{n-1} p_{n+1}$, и $\frac{p_n}{p_{n-1}} < \frac{q_n}{q_{n-1}}$, если $(n+1)(n+k-1) > n^2$, т. е. если $n > \frac{1-k}{k}$. Таким образом, условия теоремы 23 выполнены, и из суммируемости (W, p_n) следует суммируемость (C, k) для любого положительного k.

5.14. Интегралы. Для интегралов определения, соответствующие данным в §§ 5.2—5.5, таковы. За нижний предел интегрирования мы принимаем 0 и, во избежание малосущественных усложнений, считаем, что $a(x)$ ограничена на каждом конечном интервале $(0, X)$ *).

Полагаем

$$H^0(x) = A(x) = \int_0^x a(t)\,dt, \qquad H^k(x) = \frac{1}{x}\int_0^x H^{k-1}(t)\,dt.$$

*) См. примечания к § 5.14 в конце главы.

Если $H^k(x) \to A$ при $x \to \infty$, то мы пишем

$$A(x) \to A \quad (\mathrm{H},\ k), \qquad \int a(x)\,dx = A \quad (\mathrm{H},\ k)^{*})$$

и говорим, что рассматриваемый интеграл суммируем (H, k) к A. Если

$$A_0(x) = A(x), \qquad A_k(x) = \int_0^x A_{k-1}(t)\,dt,$$

и

$$\frac{k!}{x^k} A_k(x) \to A,$$

то мы пишем

$$A(x) \to A \quad (\mathrm{C},\ k), \quad \int a(x)\,dx = A \quad (\mathrm{C},\ k)$$

и говорим, что рассматриваемый интеграл суммируем (C, k) к A.

Таковы определения для целых k. Но при целом k, интегрируя по частям, получаем

$$(5.14.1) \quad A_k(x) = \int_0^x A_{k-1}(t)\,dt = \int_0^x (x-t)\,A_{k-2}(t)\,dt = \ldots$$
$$\ldots = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-t)^{k-1} A(t)\,dt = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k a(t)\,dt.$$

А эти формулы подсказывают распространение наших определений и на нецелые k. Мы говорим, что интеграл $\int a(x)\,dx$ суммируем (C, k), где $k > 0$, к сумме A, если

$$(5.14.2) \quad \frac{\Gamma(k+1)}{x^k} A_k(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x (x-t)^{k-1} A(t)\,dt =$$
$$= \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k a(t)\,dt \to A.$$

Вторая форма этого определения, с $a(t)$, пригодна для всех $k > -1$.

---

*) Интегралы с неуказанными пределами берутся, как обычно, от 0 до ∞.

Если $A_k(x)$ определено формулой (5.14.2) и $k>-1$, $l>0$, то

$$\frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^x (x-t)^{l-1}A_k(t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(l)}\int_0^x (x-t)^{l-1}dt\int_0^t (t-u)^k a(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(l)}\int_0^x a(u)\,du\int_u^x (t-u)^k (x-t)^{l-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+l+1)}\int_0^x (x-u)^{k+l} a(u)\,du.$$

Таким образом,

$$A_{k+l}(x)=\frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^x (x-t)^{l-1} A_k(t)\,dt \qquad (k>-1,\ l>0). \tag{5.14.3}$$

Это — аналог формулы (5.4.8).

5.15. Теоремы о суммируемых интегралах. Для интегралов имеют место теоремы, соответствующие большей части теорем §§ 5.3—5.11, причем доказываются они обычно несколько проще, чем соответствующие теоремы для рядов. Однако имеется одно существенное различие, а именно: если ряд $\sum a_n$ сходится, то $a_n \to 0$, между тем как соответствующей теоремы для интегралов не существует. Поэтому не существует и никакой лимитирующей теоремы, подобной теореме 46, и это нарушает в некоторых отношениях аналогию.

Мы приведем здесь основные результаты, предоставляя доказательство большей частью читателю и подчеркивая только пункты различия.

Если интеграл $\int a(x)\,dx$ суммируем (C, k), где $k>-1$, то он суммируем и (C, k') для $k'>k$. Доказательство опирается на соотношение (5.14.3) и в остальном аналогично доказательству теоремы 43.

Определенные выше методы суммирования для интегралов обладают свойствами, аналогичными указанным в теореме 40. В частности,

$$\int_0^\infty a(x)\,dx=\int_0^c a(x)\,dx+\int_c^\infty a(x)\,dx \qquad (C,\ k), \tag{5.15.1}$$

если любая из частей этой формулы имеет смысл, причем последний интеграл определен как $\int a(c+y)\,dy$.

(H, k)- и (C, k)-определения равносильны. Проще всего доказать это путем модификации доказательства, проведенного в § 5.8. Нам нужно показать, что если $s_k(x)$ определено подобно $A_k(x)$ в § 5.14, а

$$C^k(x, s) = \frac{k!}{x^k} s_k(x), \qquad m(x) = \frac{1}{x} \int_0^x s(t)\, dt,$$

то утверждения

$$C^k(x, s) \to s, \qquad C^{k-1}(x, m) \to s \tag{5.15.2}$$

равносильны. Но $s_1(x) = xm(x)$, $s_2(x) = xm_1(x) - m_2(x)$, ..., где

$$m_1(x) = \int_0^x m(t)\, dt, \quad m_2(x) = \int_0^x m_1(t)\, dt, \ldots,$$

и вообще посредством повторного интегрирования по частям получаем

$$s_k(x) = xm_{k-1}(x) - (k-1)\, m_k(x), \tag{5.15.3}$$

а это равносильно соотношению

$$C^k(x, s) = kC^{k-1}(x, m) - (k-1)\, C^k(x, m). \tag{5.15.4}$$

Отсюда следует, что второе из соотношений (5.15.2) влечет первое.

С другой стороны, формула (5.15.3) показывает, что

$$\frac{s_k(x)}{x^k} = \frac{d}{dx}\left(\frac{m_k(x)}{x^{k-1}}\right), \qquad \frac{m_k(x)}{x^{k-1}} = \int_0^x \frac{s_k(t)}{t^k}\, dt,$$

так что

$$C^k(x, m) = \frac{1}{x} \int_0^x C^k(t, s)\, dt.$$

Поэтому из $C^k(x, s) \to s$ следует $C^k(x, m) \to s$, и, значит, в силу (5.15.4)

$$C^{k-1}(x, m) \to s.$$

Тем самым доказана равносильность обоих соотношений (5.15.2); доказательство основной теоремы проводится затем, как в § 5.8.

5.16. Риссовские арифметические средние. Формулы (5.14.2) подсказывают модификацию определений, данных в §§ 5.4—5.5. Если k — целое, то в обозначениях § 5.4

$$C_n^k(A) = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k}{k} a_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\nu}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\nu}{n+k}\right) a_\nu.$$

Заменив здесь все знаменатели $n+1$, $n+2$, ..., $n+k$ на n, мы получим новое среднее

$$R_n^k(A)=\sum\left(1-\frac{\nu}{n}\right)^k a_\nu, \tag{5.16.1}$$

по виду более близкое к интегральному среднему (5.14.2). Это привело М. Рисса к мысли попробовать принять соотношение

$$R_n^k(A)\to A \tag{5.16.2}$$

в качестве нового определения суммируемости. Очевидно, здесь параметр k мог бы принимать любые положительные значения, отрицательные же значения для него недопустимы.

Однако Рисс обнаружил, что это определение не дает удовлетворительных результатов: свойства средних $R_n^k(A)$ для больших значений k совершенно непохожи на свойства соответствующих чезаровских средних. Это побудило его видоизменить определение путем введения непрерывного параметра ω. Получаемые таким образом средние являются нормальными средними § 4.16 с $\lambda_n=n$.

Полагаем

$$R^k(\omega)=R^k(\omega,\ A)=\frac{T^k(\omega)}{\omega^k}=\sum_{\nu\leqslant\omega}\left(1-\frac{\nu}{\omega}\right)^k a_\nu, \tag{5.16.3}$$

где $k>0$. Если $R^k(\omega)\to A$ при $\omega\to\infty$, то мы говорим, что ряд $\sum a_n$ суммируем (R, n, k) к сумме A. Оказывается, что суммируемость (R, n, k) равносильна суммируемости (C, k). Мы ограничимся рассмотрением целых k; доказательство для произвольных k довольно сложно.

Теорема 58. *Если ряд $\sum a_n$ суммируем (C, k), где k — целое, то он суммируем (R, n, k) к той же сумме, и обратно.*

При доказательстве мы можем предполагать, что сумма ряда равна нулю. Тогда следует доказать равносильность соотношений

$$A_n^k=o(n^k) \tag{5.16.4}$$

и

$$T^k(\omega)=o(\omega^k). \tag{5.16.5}$$

Запишем ω в виде $\omega=n+\theta$, где n — целое и $0\leqslant\theta<1$.

(I) Пусть выполнено соотношение (5.16.4). Так как $T^k(\omega)=\sum(n-\nu+\theta)^k a_\nu$, то

$$\sum T^k(\omega)x^n=\sum(n+\theta)^k x^n\sum a_n x^n=g(x,\ \theta)\sum A_n^k x^n,$$

где

$$g(x,\ \theta)=(1-x)^{k+1}\sum(n+\theta)^k x^n=$$

$$=(1-x)^{k+1}x^{-\theta}\left(x\frac{d}{dx}\right)^k\frac{x^\theta}{1-x}=\sum_{j=0}^{k}c_j(\theta)x^j,$$

причем коэффициенты $c_j(\theta)$ — многочлены k-й степени по θ. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}T^k(\omega)x^n=\sum_{j=0}^{k}c_j(\theta)x^j\sum_{n=0}^{\infty}A_n^k x^n,\quad T^k(\omega)=\sum_{\nu=0}^{k}c_\nu(\theta)A_{n-\nu}^k,$$

откуда и следует (5.16.5), притом равномерно относительно θ.

(II) Пусть теперь выполнено (5.16.5). Предполагая, что $0<\theta_0<<\theta_1<\ldots<\theta_k<1$, мы можем определить $q_0,\ q_1,\ \ldots,\ q_k$ так, чтобы имело место тождество

$$\binom{n+k}{k}=\sum_{r=0}^{k}q_r(n+\theta_r)^k.$$

В самом деле, приравнивая здесь коэффициенты при различных степенях n, получаем систему уравнений относительно q_r вида

$$\sum\theta_r^j q_r=C_j\qquad(j=0,\ 1,\ \ldots,\ k),$$

определитель которой

$$|\theta_r^j|=\prod_{l>m}(\theta_l-\theta_m)\neq 0.$$

Тогда имеем

$$A_n^k=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n-\nu+k}{k}a_\nu=\sum_{r=0}^{k}q_r T^k(n+\theta_r),$$

откуда и следует (5.16.4).

Сделаем еще несколько замечаний, обнаруживающих неудовлетворительность определения (5.16.2). При $k=1$ имеем

$$C_n^1(A)=\frac{1}{n+1}\sum(n+1-\nu)a_\nu=R_{n+1}^1(A),$$

так что указанное определение равносильно чезаровскому; но равносильность уже не сохраняется для бо́льших значений k. Пусть, например, $k=2$. Тогда

$$\sum(n+1)^2R_{n+1}^2(A)x^n=\sum(n+1)^2x^n\sum a_nx^n=\frac{1+x}{(1-x)^3}\sum a_nx^n.$$

Определим a_n как коэффициенты разложения

$$\sum a_nx^n=\frac{1-x}{(1+x)^3}=\sum(-1)^n(n+1)^2x^n.$$

Тогда a_n будут порядка n^2, так что ряд $\sum a_n$ не суммируем (C, 2); однако

$$\sum (n+1)^2 R_{n+1}^2(A)\, x^n = \frac{1}{(1-x^2)^2} = 1 + 2x^2 + 3x^4 + \ldots$$

и

$$R_n^2(A) = O\left(\frac{1}{n}\right) = o(1).$$

При $k=3$ соотношение (5.16.2) не влечет суммируемости (C, k) *ни для какого* k, и даже не влечет суммируемости (A). Действительно, функция

$$\sum (n+1)^3 x^n = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$$

имеет нуль в точке $x = -2 + \sqrt{3} = \alpha$, лежащей внутри единичного круга. Если мы определим a_n как коэффициенты разложения

$$\sum a_n x^n = \frac{1-x}{\alpha - x},$$

то будем иметь $R_n^3(A) = o(1)$, однако ряд $\sum a_n x^n$ будет сходиться лишь для $|x| < \alpha < 1$.

Поучительно рассмотреть этот вопрос в свете §§ 4.3—4.4. (C, 2)-средние являются (W, q_n)-средними с $q(x) = \sum q_n x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$, а

$$T^2(n+1) = (n+1)^2 R_{n+1}^2(A)$$

есть коэффициент при x^n в произведении

$$\sum (n+1)^2 x^n \sum a_n x^n = \sum p_n x^n \sum A_n x^n,$$

где

$$p_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1, \quad p(x) = \sum p_n x^n = \frac{1+x}{(1-x)^2},$$

так что $R_{n+1}^2(A)$ есть (W, p_n)-среднее с этими p_n. В обозначениях § 4.3 мы имеем $k(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots$, так что $\sum |k_n| = \infty$. Равносильность нарушается из-за нуля функции $p(x)$ при $x = -1$, и она, естественно, еще основательнее расстраивается, когда $p(x)$ имеет нуль внутри единичного круга.

5.17. Равномерно распределенные последовательности. Мы закончим эту главу кратким экскурсом в другую область.

Пусть $0 \leqslant s_n \leqslant 1$ для всех n. Обозначим через I отрезок $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant 1$ и через n_I — количество тех чисел из последовательности $s_0, s_1, \ldots, s_n$, которые попадут в I. Если $n_I \sim nI$ *) при $n \to \infty$ для каждого I, то говорят, что последовательность (s_n) *равномерно распределена* на отрезке $[0, 1]$.

*) Мы обозначаем и интервал и его длину одним и тем же символом. В дальнейшем тексте этого параграфа интегралы с неуказанными пределами берутся от 0 до 1.

Обозначим через $I(x)$ характеристическую функцию интервала I, т. е. функцию, равную 1 в I и 0 вне I. При $f(x)=I(x)$ имеем

$$\frac{f(s_0)+f(s_1)+\ldots+f(s_n)}{n+1}=\frac{n_I}{n+1}, \qquad \int f(x)\,dx=I.$$

Таким образом, утверждение о равномерном распределении равносильно утверждению, что

$$f(s_n)\to\int f(x)\,dx \quad (C,\ 1) \tag{5.17.1}$$

для каждой функции $f(x)=I(x)$. Мы докажем теперь следующее предложение.

Теорема 59. *Если последовательность (s_n) равномерно распределена, то соотношение* (5.17.1) *имеет место для каждой функции $f(x)$, интегрируемой по Риману.*

Очевидно, при доказательстве можно предполагать, что f вещественна. Если последовательность (s_n) равномерно распределена, то соотношение (5.17.1) справедливо для всех функций вида $f(x)=I(x)$. Отсюда путем умножения и сложения следует, что оно справедливо и для любой ступенчатой функции, принимающей конечное число значений. Но для любой интегрируемой по Риману функции f существуют две такие ступенчатые функции f_1 и f_2, удовлетворяющие условиям $f_1\leqslant f\leqslant f_2$ и

$$0\leqslant\int f_2\,dx-\int f_1\,dx<\varepsilon.$$

И так как

$$\frac{1}{n+1}\sum_0^n f_1(s_m)\to\int f_1\,dx, \qquad \frac{1}{n+1}\sum_0^n f_2(s_m)\to\int f_2\,dx,$$

то

$$\varliminf\frac{1}{n+1}\sum_0^n f(s_m)\geqslant\lim\frac{1}{n+1}\sum_0^n f_1(s_m)=\int f_1\,dx>\int f(x)\,dx-\varepsilon,$$

$$\varlimsup\frac{1}{n+1}\sum_0^n f(s_m)\leqslant\lim\frac{1}{n+1}\sum_0^n f_2(s_m)=\int f_2\,dx<\int f(x)\,dx+\varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что

$$\lim\frac{1}{n+1}\sum_0^n f(s_m)=\int f(x)\,dx,$$

и теорема доказана.

К другому признаку равномерного распределения можно прийти следующим образом. Для функции

$$f(x) = e^{2k\pi i x} = e(kx),$$

где k — целое положительное число, имеем $\int f(x)\,dx = 0$. В силу теоремы 59 отсюда следует, что для равномерно распределенной последовательности (s_n) имеет место соотношение

$$(5.17.2) \qquad \sum_0^n e(ks_m) = o(n) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

или, что равносильно этому, соотношение

$$(5.17.3) \qquad \sum_0^n T(s_m) = o(n)$$

для любого тригонометрического многочлена $T(x)$ без постоянного члена. Таким образом, соотношение (5.17.2) или (5.17.3) представляет собой необходимое условие равномерной распределенности последовательности (s_n). Покажем, что это условие также достаточно.

Теорема 60. *Если соотношение* (5.17.2) *справедливо для любого натурального k, то последовательность (s_n) равномерно распределена.*

Действительно, прежде всего (5.17.3) выполняется для любого $T(x)$. Тогда для любого тригонометрического многочлена

$$\tau(x) = \frac{a_0}{2} + T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{k} (a_l \cos 2l\pi x + b_l \sin 2l\pi x),$$

очевидно,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \tau(s_m) \to \frac{a_0}{2} + \int T(x)\,dx = \int \tau(x)\,dx,$$

так что соотношение (5.17.1) выполняется для $f(x) = \tau(x)$. Далее, для любой вещественной непрерывной функции $f(x)$ существует тригонометрический многочлен τ такой, что $|f - \tau| < \varepsilon$ на всем отрезке $[0, 1]$. Полагая $\tau_1 = \tau - \varepsilon$, $\tau_2 = \tau + \varepsilon$, имеем $\tau_1 < f < \tau_2$ и $\int \tau_2\,dx - \int \tau_1\,dx < 2\varepsilon$. Отсюда вытекает, так же как в доказательстве теоремы 59, что (5.17.1) выполнено для f. Наконец, если $f(x) = I(x)$, то существуют непрерывные функции f_1 и f_2 такие, что $f_1 \leqslant f \leqslant f_2$, а интегралы $\int f_1\,dx$ и $\int f_2\,dx$ отличаются друг от друга меньше чем на ε, и повторное применение того же рассуждения показывает, что

(5.17.1) верно и для этой функции f. А это и означает, что последовательность (s_n) равномерно распределена.

Пожалуй, наиболее интересен тот случай, когда

$$s_n = n\alpha - [n\alpha] = \{n\alpha\},$$

где α — иррациональное число. Если α — рациональное число $\frac{p}{q}$, то s_n периодически пробегает в некотором порядке значения $0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}$. Поэтому естественно ожидать, что последовательность (s_n) при иррациональном α равномерно распределена. И действительно, в этом случае

$$\sum_0^n e(ks_m) = \sum_0^n e^{2km\pi\alpha i} = \frac{1 - e^{2k(n+1)\pi\alpha i}}{1 - e^{2k\pi\alpha i}} = O(1) = o(n)$$

для $k = 1, 2, 3, \ldots$, так что (s_n) равномерно распределена, и имеет место

Теорема 61. *Последовательность* $(\{n\alpha\})$, *где* α *иррационально, равномерно распределена на отрезке* $[0, 1]$.

5.18. Равномерная распределенность последовательности $\{n^2\alpha\}$. Теорема 61 допускает важные обобщения. В частности, Вейль показал, что если $P(n)$ есть многочлен

$$\alpha_0 n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-1} n,$$

имеющий, по крайней мере, один иррациональный коэффициент, то последовательность $(\{P(n)\})$ равномерно распределена. Доказательство этой теоремы довольно сложно, и мы ограничимся здесь рассмотрением одного частного случая, достаточно хорошо иллюстрирующего основную идею Вейля.

Теорема 62. *Последовательность* $(\{n^2\alpha\})$, *где* α *иррационально, равномерно распределена на отрезке* $[0, 1]$.

Нам нужно доказать соотношение (5.17.2) для $s_m = \{m^2\alpha\}$; так как $k\alpha$ иррационально одновременно с α, то достаточно доказать, что

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} e^{2m^2\pi\alpha i} = o(n).$$

Умножая S_n на комплексно сопряженную величину и заменяя затем q на $p + j$, имеем

$$|S_n|^2 = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} e^{2(q^2-p^2)\pi\alpha i} = \sum_{p=0}^{n} \sum_{j=-p}^{n-p} e^{2j(j+2p)\pi\alpha i}.$$

Обращая порядок суммирования, получаем

$$|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n} e^{2j^2\pi\alpha i} \sum_{p=0}^{n-j} e^{4pj\pi\alpha i} + \sum_{j=-n}^{-1} e^{2j^2\pi\alpha i} \sum_{p=-j}^{n} e^{4pj\pi\alpha i} = T_1 + T_2.$$

Здесь

$$|T_1| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \left| \sum_{p=0}^{n-j} e^{4pj\pi\alpha i} \right| = \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{1 - e^{4(n-j+1)j\pi\alpha i}}{1 - e^{4j\pi\alpha i}} \right| = \sum_{j=0}^{n} w_j,$$

причем w_j удовлетворяют одновременно неравенствам

$$0 \leqslant w_j \leqslant n - j + 1 \leqslant n + 1, \qquad w_j \leqslant |\operatorname{cosec} 2j\pi\alpha|.$$

Но $|\sin 2j\pi\alpha| \geqslant 2\lambda_j$, где λ_j — расстояние от $2j\alpha$ до ближайшего целого, т. е. расстояние от $\{2j\alpha\}$ до ближайшего из чисел 0 и 1. Так как числа $\{2j\alpha\}$ равномерно распределены, то число тех из них с $j \leqslant n$, для которых $\lambda_j < \eta$, т. е. которые лежат в одном из интервалов $[0, \eta)$ или $(1-\eta, 1]$, для достаточно больших n меньше чем $3\eta n$. А тогда $\omega_j \leqslant \frac{1}{2\eta}$ для более чем $n + 1 - 3\eta n$ номеров j, тогда как для остальных j во всяком случае $\omega_j \leqslant n + 1$. Поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{T_1}{n^2} \leqslant \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n+1}{2\eta n^2} + \frac{3\eta n(n+1)}{n^2} \right\} = 3\eta,$$

и $T_1 = o(n^2)$. Аналогично $T_2 = o(n^2)$. Следовательно, $S_n = o(n)$, и теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ V

§§ 5.2—5.3. См. § 1.3. Работы Фробениуса и Гёльдера были опубликованы в *JM*, **89** (1880), 262—261, и *MA*, **20** (1882), 535—549, а работа Чезаро — в *BSM* (2), **14** (1890), 114—120. Чезаро первый исследовал вопрос об умножении рядов; см. гл. X.

§ 5.5. Определения для общего k дали независимо Кнопп, *Sitzungsberichte d. Berliner Math. Ges.*, **7** (1907), 1—12 [напечатано в *Archiv d. Math.* (3), **12** (1907)] и Chapman, *PLMS* (2), **9** (1911), 369—409.

Общие изложения рассматриваемой теории имеются в руководствах Borel, Dienes, Hobson (2, гл. 1) и Кнопп, а также в монографиях Andersen, Bohr и Kogbetliantz. Очень ясное изложение основных теорем содержится в лекции Андерсена (Cesàro's Summabilitetsmetode, Копенгаген, 1919). Монография Когбетлианца наиболее полна, однако представляет собой лишь сводку результатов без доказательств.

Иногда бывает трудно указать авторов отдельных теорем, поскольку бо́льшая часть последних была найдена в процессе постепенного обобщения; и мы не будем стремиться систематически делать это, хотя и даем ссылки в наиболее ясных случаях.

§ 5.6. Теоремы этого параграфа принадлежат в основных чертах Чезаро. Более общие теоремы того же типа можно найти в работе Кнопп, *RP*, **32** (1911), 95—110.

§ 5.7. Теоремы 43 и 46, в их общем виде, принадлежат Чэпмену и Кноппу. Теорему 45 доказали Hardy и Littlewood, *PLMS* (2), **11** (1912), 411—478 (462, теорема 37).

§ 5.8. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze (Диссертация, Берлин, 1907), доказал включение $(H, k) \to (C, k)$, a Schnee, *MA*, **67** (1909), 110—125,—обратное включение. Приведенное здесь доказательство предложил Andersen, *MZ*, **28** (1928), 356—359; оно является упрощением доказательства, ранее предложенного Кноппом, там же, **19** (1924), 97—113. См. также Knopp, 481.

Теорема 49 является частным случаем теоремы, утверждающей, что соотношения

$$\text{(a) } C_n^{(\alpha)}\{C^{(\beta)}(A)\} \to A, \qquad \text{(б) } C_n^{(\beta)}\{C^{(\alpha)}(A)\} \to A, \qquad \text{(в) } C_n^{(\alpha+\beta)}(A) \to A$$

равносильны. Последняя теорема была разными способами доказана Андерсеном, Фабером, Хаусдорфом и Когбетлианцем; ссылки можно найти в указанной выше работе Андерсена. Следует заметить, что равносильность соотношения (в) с (а) и (б) лежит глубже, чем равносильность соотношений (а) и (б), поскольку преобразования $C^{(\alpha)}C^{(\beta)}$ и $C^{(\beta)}C^{(\alpha)}$ совпадают друг с другом, но не с $C^{(\alpha+\beta)}$.

Совпадение преобразований $C^{(\alpha)}C^{(\beta)}$ и $C^{(\beta)}C^{(\alpha)}$ вытекает как следствие из работы Хаусдорфа (гл. XI) и может быть также доказано непосредственно. Легко проверить, что

$$C_n^{(\alpha)}\{C^{(\beta)}(A)\} = \sum c_{n,p}A_p,$$

где $c_{n,p}$ равно нулю при $p > n$ и равно

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(p+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-p+\alpha)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(p+\beta+1)\Gamma(n-p+1)\Gamma(\alpha)}\, {}_3F_2\begin{pmatrix} p+1, & -n+p, & \beta \\ p+\beta+1, & -n+p-\alpha+1 & \end{pmatrix}$$

при $p \leqslant n$, причем аргументом гипергеометрического ряда служит 1; а из формулы (1) на стр. 21 книги Bailey следует, что это выражение симметрично относительно α и β.

§ 5.9. Mercer, *PLMS* (2), **5** (1906), 206—224; Schur, *MA*, **74** (1913), 447—458. Доказательство Шура приведено также в книге Landau, Ergebnisse, 43—51.

§ 5.10. Knopp, *MA*, **74** (1913), 459—461; Hardy, *QJM*, **43** (1912), 143—150. Харди доказывает ряд обобщений теорем 52 и 53. Приведенное здесь простое доказательство теоремы 53 принадлежит Гобсону.

Pitt [*PCPS*, **34** (1938), 510—520] и Rogosinski [там же, **38** (1942), 166—192 и 344—363], пользуясь более глубокими методами, доказали значительно более общие теоремы.

§ 5.11. Теорема 54 принадлежит Шуру, l. c. в примечании к § 5.9.

Из проведенного здесь анализа и теоремы 11 следует, что (H, k)-ядро последовательности (s_n) содержится в ее (C, k)-ядре. Кнопп, l. c. в примечании к § 3.7, дает простой пример вещественной последовательности (s_n), $(H, 2)$- и $(C, 2)$-ядрами которой служат соответственно отрезки $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ и $[0, 1]$.

Bosanquet, *JLMS*, **21** (1946), 11—15, показал, что $s_n \to \infty$ (H, 2) не влечет ни $s_n \to \infty$ (C, k) *для какого бы то ни было* k, ни $s_n \to \infty$ (A), даже когда ряд $\sum a_n x^n$ сходится для $|x| < 1$.

Basu, *PLMS* (2), **50** (1948), 447—462, доказал, что теорема 54 сохраняет силу для произвольных $k > 1$ и $-1 < k < 0$, тогда как для $0 < k < 1$ логическая зависимость рассматриваемых соотношений обращается.

§ 5.12. Автором теоремы 57 является Appell, *Archiv d. Math.*, **64** (1879), 387—392. Пример, использованный для доказательства теоремы 56, принадлежит Ландау (l. c. в примечании к § 5.9, стр. 51).

§ 5.13. По поводу „гармонических" средних см. M. Riesz, l. c. в примечании к § 4.3.

§§ 5.14 — 5.15. Теоремы, относящиеся к суммируемым интегралам, трудно снабдить удобными ссылками, поскольку эти теоремы часто просто утверждаются как „очевидные аналоги" соответствующих теорем для рядов. Теорему равносильности доказал впервые Landau, *Leipziger Berichte*, **65** (1913), 131—138. Доказательство Ландау построено по образцу доказательства Шура, приведенного в § 5.9.

M. E. Grimshaw, *JLMS*, **9** (1934), 94—102, доказал аналог теоремы 45. Некоторые дальнейшие ссылки будут даны в примечаниях к главам VI и X.

В тексте мы для простоты предполагаем, что $a(x)$ ограничена на каждом конечном интервале $[0, X]$. Рассмотрения, приведенные для гёльдеровских средних, сохраняют силу для всех интегрируемых $a(x)$. То же верно и для чезаровских средних с $k>0$, в случае же $k<0$ рассматриваемые интегралы могут иногда расходиться. Так, интеграл $\int (x-t)^k a(t)\,dt$ расходится при $x=n\pi$, если $a(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}$ и $-1<k\leqslant-\frac{2}{3}$. Здесь это неважно, поскольку средние отрицательного порядка сами интересны, лишь когда $a(x)$ стремится к пределу.

Полное исследование формулы (5.14.3) для функций $a(x)$, интегрируемых в более общем смысле Данжуа-Перрона, проведено в работе Bosanquet, *PLMS* (2), **31** (1930), 144—164.

Рассматриваемая в тексте функция $A(x)$, будучи интегралом от $a(x)$, абсолютно непрерывна. Но, очевидно, мы можем определить соотношение $A(x)\to A$ (C, k) формулой (5.14.2) и когда $A(x)$ лишь интегрируема, предполагая, что $k>0$ и соотношение (5.14.2) берется в его первой форме. С другой стороны, интегрируемость функции $A(x)$, начиная от 0, не влечет с необходимостью интегрируемости функции $H^1(x)$; так, $H^1(x)=\dfrac{1}{x\log\frac{1}{x}}$,

когда $A(x)=\dfrac{1}{x\left(\log\frac{1}{x}\right)^2}$. Поэтому приходится накладывать некоторые дополнительные ограничения на поведение $A(x)$ при малых x. Поскольку мы интересуемся главным образом большими значениями x, это — не столь серьезный недостаток.

§ 5.16. Равносильность (R, n, k)- и (C, k)-средних впервые доказал M. Riesz, *CR*, **152** (1911), 1651—1654; ход доказательства лишь вкратце намечен. Полное доказательство дает Hobson, **2**, 90—98. Ингам предложил более короткое доказательство (не опубликовано); при целом k оно сводится к доказательству, изложенному в тексте.

§ 5.17. Теорему 59 доказали независимо и примерно одновременно Боль, Серпинский и Вейль; ссылки можно найти в книге Koksma. Мы следуем Вейлю, *MA*, **77** (1916), 313—352.

„Элементарное" доказательство теоремы 61, опирающееся на простые свойства непрерывных дробей, приведено в книге Hardy and Wright, 378—380.

Вейль доказывает значительно больше и, в частности, равномерную распределенность в r-мерном пространстве точек

$$(\{P_1(n)\},\ \{P_2(n)\},\ \ldots,\ \{P_r(n)\}),$$

где $P_1(n), \ldots$ — многочлены, линейно независимые в том смысле, что никакая комбинация $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r$ с целыми λ не сравнима с постоянной по модулю 1.

Ряд частных случаев теоремы Вейля был ранее установлен Харди и Литтльвудом. Так, они установили [Proc. fifth international congress of mathematicians, **1** (Кэмбридж, 1912), 223—229 (226); *AM*, **37** (1914), 155—191 (164)], что

$$\sum_{0}^{n} e(m^p \alpha) = o(n) \tag{a}$$

для $p = 1, 2, \ldots$ и иррациональных α и что точки $\{n^p \alpha\}$ равномерно распределены. Во второй работе в *AM* (там же, 193—239) они доказали соотношение (a) для $p = 2$ специальным методом и установили более точные результаты для отдельных типов иррациональных чисел. Третья работа, которая должна была содержать доказательства их более общих утверждений, не была закончена вследствие появления более компактной и мощной вейлевской теории.

В их первой работе в *AM* Харди и Литтльвуд доказали, более элементарным путем, что точки $\{n^p \alpha\}$ плотно расположены в $[0, 1]$; разумеется, это слабее, чем равномерная распределенность. Их рассуждение упростил и обобщил Kakeya, *Science reports Tôhoku Univ.*, **4** (1915), 105—109.

Глава VI

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ (2)

6.1. Теоремы тауберова типа для методов Чезаро. В § 3.8 было отмечено, что для каждого метода суммирования должна существовать своя „лимитирующая теорема“, поскольку ни один из применимых методов не суммирует слишком быстро расходящихся рядов *). Так, для методов Чезаро лимитирующей теоремой служит теорема 46 с $k' = -1$.

Эффективность этих, как и других зарекомендовавших себя методов имеет и другую, менее очевидную границу. Никакой метод не в силах суммировать слишком быстро расходящиеся ряды. Но он не в силах суммировать и *слишком медленно расходящиеся ряды*. Теоремы, в которых осуществляется этот принцип, называют (по причинам, которые выяснятся позже) „теоремами тауберова типа“. Они утверждают, что если ряд суммируем (P) и удовлетворяет некоторому дополнительному условию K_P (меняющемуся с методом P, но всегда ограничивающему быстроту возможной расходимости), то он сходится. Для методов Чезаро наиболее типичной формой условия K_P (допускающей разнообразные обобщения) является $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 63. *Если* $\sum a_n = A$ (C, k) *для некоторого* k *и*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6.1.1}$$

то ряд $\sum a_n$ *сходится и даже суммируем* (C, $-1+\delta$) *для любого положительного* δ.

Теорема 64. *Если* a_n *вещественны*, $\sum a_n = A$ (C, k) *для некоторого* k *и*

$$na_n > -H, \tag{6.1.2}$$

то ряд $\sum a_n$ *сходится.*

Для упрощения последующих рассуждений сделаем несколько предварительных замечаний. Прежде всего в силу теоремы 43 мы можем

*) См. сноску на стр. 80. (*Прим. ред.*)

считать k целым, заменяя в противном случае k на $k' = [k] + 1$. Далее, доказательства требует только сходимость ряда, поскольку сходящийся ряд, удовлетворяющий условию (6.1.1), по теореме 45 суммируем $(C, -1+\delta)$. Наконец, мы можем считать a_n вещественными, рассматривая в противном случае вещественную и мнимую части порознь. Таким образом, достаточно доказать теорему 64 с целым k.

Доказательство будет основано на двух предварительных теоремах, представляющих и самостоятельный интерес. Положим $b_n = na_n$ и будем обозначать через B_n, B_n^1, ... суммы, образованные из b_n, как A_n, A_n^1, ... из a_n.

Теорема 65. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* $(C, r+1)$, *где* $r > -1$, *то для его суммируемости* (C, r) *необходимо и достаточно, чтобы* $B_n^r = o(n^{r+1})$.

Теорема 66. *Для того чтобы ряд* $\sum a_n$ *был суммируем* $(C, r+1)$, *где* $r+1 > -1$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} \frac{B_n^r}{n} = \sum \frac{(n-1)!}{(r+2)(r+3)\ldots(n+r+1)} B_n^r \tag{6.1.3}$$

или, что то же самое, чтобы сходился ряд $\sum \dfrac{B_n^r}{n^{r+2}}$.

Как легко проверить,

$$(n+r+1)\binom{\nu+r}{r} - (r+1)\binom{\nu+r+1}{r+1} = (n-\nu)\binom{\nu+r}{r},$$

$$n\binom{\nu+r+1}{r+1} - (n+r+1)\binom{\nu+r}{r+1} = (n-\nu)\binom{\nu+r}{r},$$

откуда (сравнивая коэффициенты при $a_{n-\nu}$ в (5.4.5))

$$(n+r+1)A_n^r - (r+1)A_n^{r+1} = B_n^r, \tag{6.1.4}$$

$$nA_n^{r+1} - (n+r+1)A_{n-1}^{r+1} = B_n^r. \tag{6.1.5}$$

Из (6.1.4) и (6.1.5) следует, что

$$\frac{1}{\binom{n+r}{r}} A_n^r - \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} A_n^{r+1} = \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} \frac{B_n^r}{r+1}, \tag{6.1.6}$$

$$\frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} A_n^{r+1} - \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} A_{n-1}^{r+1} = \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} \frac{B_n^r}{n}.$$

Полагая в последнем равенстве $n=1, 2, \ldots, N$ и складывая, получаем

$$\frac{1}{\binom{N+r+1}{r+1}} A_N^{r+1} = a_0 + \sum_1^N \frac{1}{\binom{n+r+1}{r+1}} \frac{B_n^r}{n}. \tag{6.1.7}$$

Теорема 65 есть следствие формулы (6.1.6), а теорема 66 — формулы (6.1.7). Обе формы теоремы 66 равносильны по теореме Стирлинга. При целом r ряд (6.1.3) может быть записан в другой форме:

$$\sum \frac{(r+1)!}{n(n+1)\ldots(n+r+1)} B_n^r.$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему 64; при этом мы можем считать k целым, $k=r+1$, и $H=1$. Если $B_n^r \neq o(n^{r+1})$, то существует такое положительное C, что одно из неравенств

$$B_n^r > Cn^{r+1} \tag{6.1.8}$$

или

$$B_n^r < -Cn^{r+1} \tag{6.1.9}$$

выполняется для бесконечного множества значений n. Пусть, например, (6.1.8) имеет место для бесконечного множества значений N номера n.

Если $\eta > 1$ и $N \leqslant n \leqslant \eta N$, то

$$B_n^r - B_N^r = \sum_{\nu=1}^N \left\{ \binom{n-\nu+r}{r} - \binom{N-\nu+r}{r} \right\} b_\nu + \sum_{\nu=N+1}^n \binom{n-\nu+r}{r} b_\nu. \tag{6.1.10}$$

Так как все коэффициенты положительны и $b_\nu > -1$, то отсюда следует, что

$$B_n^r - B_N^r > -\sum_{\nu=1}^N \left\{ \binom{n-\nu+r}{r} - \binom{N-\nu+r}{r} \right\} - \sum_{\nu=N+1}^n \binom{n-\nu+r}{r}.$$

Выражение, стоящее здесь в правой части, получается из правой части равенства (6.1.10), когда $b_0 = 0$ и $b_\nu = -1$ для всех $\nu > 0$. Но в этом случае

$$\sum B_n^r x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \sum b_n x^n = \frac{x}{(1-x)^{r+2}}, \quad B_n^r = -\binom{n+r}{r+1},$$

и потому

$$B_n^r - B_N^r > -\binom{n+r}{r+1} + \binom{N+r}{r+1}.$$

Так как

$$\binom{n+r}{r+1} \sim \frac{n^{r+1}}{(r+1)!}, \quad \binom{N+r}{r+1} \sim \frac{N^{r+1}}{(r+1)!},$$

то заключаем, что

$$B_n^r - B_N^r > -\frac{1}{(r+1)!}\{(1+\varepsilon)\eta^{r+1} - (1-\varepsilon)\}N^{r+1}$$

для любого положительного ε, всякого $\eta > 1$, $N \leqslant n \leqslant \eta N$ и достаточно больших N.

ε и η можно выбрать так, чтобы $B_n^r - B_N^r > -\frac{1}{2}CN^{r+1}$. Тогда, принимая во внимание (6.1.8) с $n = N$, получаем, что $B_n^r > \frac{1}{2}CN^{r+1}$ для $N \leqslant n \leqslant \eta N$, и, следовательно,

$$\sum_N^{\eta N} \frac{B_n^r}{n^{r+2}} > \frac{1}{2}CN^{r+1}\sum_N^{\eta N}\frac{1}{n^{r+2}} > \frac{1}{2}CN^{r+1}\frac{(\eta-1)N}{(\eta N)^{r+2}} = \frac{C(\eta-1)}{2\eta^{r+2}}$$

для достаточно больших N. Но если это имеет место для бесконечного множества значений N, то ряд (6.1.3) расходится и, следовательно, ряд $\sum a_n$ не суммируем $(C, r+1)$.

Таким образом, неравенство (6.1.8) не может выполняться для бесконечного множества значений n, и аналогичное рассуждение *) показывает, что то же верно и для неравенства (6.1.9). Поэтому $B_n^r = o(n^{r+1})$, и в силу теоремы 65 ряд $\sum a_n$ суммируем (C, r). Повторяя это рассуждение $r+1$ раз, видим, что ряд $\sum a_n$ сходится.

Заметим, что теорема 63 идет несколько дальше теоремы 64, утверждая суммируемость ряда для отрицательных k. Аналогичное распространение теоремы 64 невозможно, поскольку ее условия выполнены для любого ряда с положительными членами, а такой ряд Σa_n в силу теоремы 46 не может быть суммируем $(C, -l)$, если не выполнено условие $a_n = o\left(\frac{1}{n^l}\right)$.

Рассмотренные теоремы допускают обобщения на риссовские средние § 4.16. Из этих обобщений мы рассмотрим здесь только одно, которое нам позже понадобится, а именно, обобщение случая $k = 1$ теоремы 63.

Теорема 67. *Если* $0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots, \lambda_n \to \infty$,

$$a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \quad (n > 0) \tag{6.1.11}$$

и

$$\frac{1}{x}\int_0^x A(u)\,du = \frac{1}{x}\int_0^x \Big(\sum_{\lambda_n \leqslant u} a_n\Big)du \to s \text{ **}), \tag{6.1.12}$$

то ряд $\sum a_n$ *сходится к* s.

---

*) С рассмотрением интервала $(\zeta N, N)$ значений n, где $\zeta < 1$.

**) Здесь $A(u)$ эквивалентно функции $A_\lambda(u)$ § 4.16.

Мы можем считать, что $s=0$ и $|a_n|<\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ для $n>0$. Если $t>x$ и $\lambda_m\leqslant x<\lambda_{m+1}$, $\lambda_{m+r}\leqslant t<\lambda_{m+r+1}$, то

(6.1.13) $$|A(t)-A(x)|=|a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+r}|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\lambda_{m+1}-\lambda_m}{\lambda_m}+\ldots+\frac{\lambda_{m+r}-\lambda_{m+r-1}}{\lambda_{m+r}}\leqslant\frac{\lambda_{m+r}-\lambda_m}{\lambda_m}\leqslant\frac{t-\lambda_m}{\lambda_m}.$$

Если $A(x)$ не стремится к нулю, то существует такое $C>0$, что для последовательности значений X аргумента x, стремящейся к бесконечности, выполняется одно из неравенств $A(x)>C$ или $A(x)<-C$. Если, например, $A(X)>C$ и $\lambda_M\leqslant X<\lambda_{M+1}$, так что $A(X)=A(\lambda_M)$, то в силу неравенства (6.1.13)

$$A(t)>C-\frac{t-\lambda_M}{\lambda_M}>\frac{1}{2}C$$

для $\lambda_M<t<\left(1+\frac{1}{2}C\right)\lambda_M$, и потому

$$\int\limits_{\lambda_M}^{\left(1+\frac{1}{2}C\right)\lambda_M}A(t)\,dt>\frac{1}{4}C^2\lambda_M,$$

что, однако, противоречит условию (6.1.12). Аналогично ведет к противоречию и предположение, что $A(X)<-C$ для неограниченно возрастающей последовательности значений X. Следовательно, $A(x)\to 0$.

Условие (6.1.11) нельзя заменить на $a_n>-H\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ без некоторых дальнейших ограничений на λ_n либо на a_n *).

6.2. Медленно колеблющиеся и медленно убывающие функции. Функция $f(x)$, определенная для $x>0$, называется *медленно колеблющейся*, если

(6.2.1) $$f(y)-f(x)\to 0$$

при

(6.2.2) $$x\to\infty,\quad y>x,\quad \frac{y}{x}\to 1,$$

и *медленно убывающей*, если она вещественна и

(6.2.3) $$\varliminf\{f(y)-f(x)\}\geqslant 0$$

при тех же условиях (6.2.2).

*) См. примечание к этому параграфу в конце главы, а также примечание к § 7.7.

Если $f(x)$ дифференцируема и $f'(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$, то

$$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\,dt=O\left(\frac{y-x}{x}\right)\to 0$$

при условиях (6.2.2), так что $f(x)$ — медленно колеблющаяся. Так, например, медленно колеблющейся будет функция $x^{ai}=e^{ai\log x}$. Аналогично, если $f(x)$ вещественна и $f'(x)>-\frac{H}{x}$, то $f(x)$ — медленно убывающая. Так, например, медленно убывающей будет функция $x+\cos x+\cos(a\log x)$.

Мы будем говорить, что последовательность s_n — медленно колеблющаяся или медленно убывающая, если медленно колеблющейся или медленно убывающей является функция $s(x)=s_{[x]}$. Если $s_n=a_0+$ $+a_1+\ldots+a_n$, то нетрудно проверить, что s_n — медленно колеблющаяся при $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ и медленно убывающая при $a_n>-\frac{H}{n}$.

Если $f(x)$ — медленно колеблющаяся, то $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ при $y>x\geqslant X(\varepsilon)$ и $\frac{y-x}{x}\leqslant\varkappa(\varepsilon)$; если $f(x)$ — медленно убывающая, то $f(y)-f(x)>-\varepsilon$ при аналогичных условиях.

Из определения медленно убывающей функции вытекает одно простое следствие, которое нам понадобится в гл. VII: если $f(x)$ — медленно убывающая функция, то для любых фиксированных $q>0$, $p>q$ существуют такие H и X, что

$$f(px)-f(qx)>-H \tag{6.2.4}$$

при $x\geqslant X$. Действительно, существуют такие U и $\varkappa$, что

$$f(t)-f(u)>-1\qquad\left(qu\geqslant U,\quad 1<\frac{t}{u}\leqslant\varkappa\right).$$

Пусть r — целое число, удовлетворяющее условиям $\varkappa^{r-1}<\frac{p}{q}\leqslant\varkappa^r$, и

$$x_0=qx,\ x_1=\varkappa qx,\ \ldots,\ x_{r-1}=\varkappa^{r-1}qx,\ x_r=px;$$

тогда мы можем взять $t=x_{s+1}$, $u=x_s$ для $s=0, 1, \ldots, r-1$; складывая соответствующие неравенства $f(t)-f(u)>-1$, получим

$$f(px)-f(qx)=\sum_{s=0}^{r-1}\{f(x_{s+1})-f(x_s)\}>-r.$$

Таким образом, неравенство (6.2.4) выполнено при $X=\frac{U}{q}$, $H=r$. Если $f(x)$, кроме того, ограничена на каждом конечном интервале $(0, X)$, то неравенство (6.2.4) выполняется при надлежащем H для всех $x\geqslant 0$.

Теоремы 63 и 64 допускают важные обобщения, в которых условия на a_n заменяются более общим условием, что s_n медленно колеблется или медленно убывает. Эти обобщения будут содержаться в более трудных теоремах, доказываемых в гл. VII, но чтобы дать понятие о них, мы докажем здесь простейшую теорему этого рода.

Теорема 68. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, 1) *и* s_n *медленно убывает, то ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

Нам дано, что $s_n \to s$ (C, 1) и что

$$\varliminf (s_{pn} - s_n) \geqslant 0$$

при $n \to \infty$, $p > 1$ и $p \to 1$. В силу теоремы 65 достаточно доказать, что

$$u_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = o(n). \tag{6.2.5}$$

Пусть это не верно, так что, например,

$$u_n > Cn \tag{6.2.6}$$

для некоторого положительного C и бесконечного множества значений n. Так как, по условию, s_n медленно убывает, то для каждого положительного η можно выбрать N и $p > 1$ так, чтобы $s_\nu - s_n > -\eta$ для $n \geqslant N$ и $n \leqslant \nu \leqslant pn$; при этом можно считать, что $p\eta < \frac{1}{2} C$. Тогда

$$u_n = (n+1) s_n - s_0 - s_1 - \ldots - s_n,$$

$$u_\nu - u_n = (n+1)(s_\nu - s_n) + (s_\nu - s_{n+1}) + \ldots$$
$$\ldots + (s_\nu - s_{\nu-1}) \geqslant -\nu\eta \geqslant -p\eta n,$$

и

$$u_\nu = u_n + u_\nu - u_n > Cn - p\eta n > \frac{1}{2} Cn$$

для любого $n \geqslant N$, удовлетворяющего условиям (6.2.6) и $n \leqslant \nu \leqslant pn$. Тем самым

$$\sum_{\nu=n}^{[pn]} \frac{u_\nu}{\nu(\nu+1)} > \frac{1}{2} Cn \sum_{\nu=n}^{[pn]} \frac{1}{\nu(\nu+1)} =$$
$$= \frac{1}{2} Cn \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{[pn]+1} \right) > \frac{1}{2} C \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

Это показывает, что ряд $\sum \frac{u_n}{n(n+1)}$ не сходится и, следовательно, согласно теореме 66 с $r = 0$ ряд $\sum a_n$ не суммируем (C, 1).

Аналогично можно показать, что ведет к противоречию и предположение о выполнении неравенства $u_n < -Cn$ для бесконечного множества значений n. Тем самым $u_n = o(n)$, и теорема доказана.

Соответствующая теорема для функций непрерывного аргумента формулируется так:

если $f(t) \to l$ (C, 1) *и* $f(t)$ *медленно убывает, то* $f(t) \to l$ *); доказательство предоставляем читателю.

6.3. Другое условие тауберова типа. Существуют и условия других типов, позволяющие из суммируемости заключить о сходимости. В качестве примера докажем следующее предложение:

Теорема 69. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, l) *для некоторого* l *и* $\sum n^{p-1} |a_n|^p < \infty$, *где* $p \geqslant 1$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится и, более того, суммируем* (C, k) *для* $k > -\frac{p-1}{p}$.

При $p = 1$ результат тривиален. Пусть поэтому $p > 1$. В силу теоремы 65 достаточно доказать, что

$$B_n^k = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+k}{k} \nu a_\nu = o(n^{k+1}) \quad \left(k > -1 + \frac{1}{p}\right). \tag{6.3.1}$$

Но

$$B_n^k = O\left\{\sum_{\nu=0}^{n} (n-\nu+1)^k \nu |a_\nu|\right\} = O\left(\sum_{\nu=0}^{N} + \sum_{\nu=N+1}^{n}\right) = S_1 + S_2.$$

Здесь в силу неравенства Гельдера

$$|S_2| \leqslant \sum_{\nu=N+1}^{n} \nu^{\frac{p-1}{p}} |a_\nu| \cdot \nu^{\frac{1}{p}} (n-\nu+1)^k \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=N+1}^{n} \nu^{p-1} |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=N+1}^{n} \nu^{\frac{1}{p-1}} (n-\nu+1)^{\frac{kp}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Второй множитель есть $O(n^q)$, где

$$q = \left(\frac{kp}{p-1} + \frac{1}{p-1} + 1\right)\frac{p-1}{p} = k+1,$$

а первый меньше ε для $N \geqslant N_0(\varepsilon)$. Поэтому для $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ имеем $|S_2| < C\varepsilon n^{k+1}$, где C не зависит от n, а при фиксированном N, очевидно, S_1 есть $o(n^{k+1})$. Этим доказано соотношение (6.3.1), а с ним и теорема.

6.4. Теоремы о выпуклости. Если ряд $\sum a_n$ суммируем (C, k), то, по теореме 43, он суммируем (C, k') для любого $k' > k$; точно так же, если он ограничен (C, k), то ограничен и (C, k'). Но из ограниченности (C, k) не следует суммируемости (C, k') ни для какого k'. Однако верна несколько более тонкая

Теорема 70. *Если ряд* $\sum a_n$ *ограничен* (C, k_1) *и суммируем* (C, k_2), *где* $k_2 > k_1 > -1$, *то он суммируем* (C, k) *для* $k_1 < k < k_2$.

*) Это — то, что в соответствии с соглашением, устанавливаемым в гл. VII, будет называться теоремой 68а.

Здесь мы докажем это предложение лишь для целых k_1, k_2, k. Пусть, таким образом, $k_2 = k_1 + l$, $k = k_1 + m$, l и m — целые и $0 < m < l$. Достаточно доказать теорему для случая $l = 2$, $m = 1$. Действительно, предположим, что она уже доказана для этого случая, а также для $l = 3, \ldots, L-1$, и рассмотрим случай $l = L$. Тогда ряд $\sum a_n$, будучи ограничен (C, k_1), ограничен $(C, k_1 + L - 2)$ и потому (в силу предположения) суммируем $(C, k_1 + L - 1)$; а отсюда (снова в силу предположения) он суммируем $(C, k_1 + m)$ для $0 < m < L$.

Мы можем также предполагать, что (C, k_2)-сумма ряда равна нулю. Поэтому нужно доказать, что из $A_n^k = O(n^k)$ и $A_n^{k+2} = o(n^{k+2})$ следует $A_n^{k+1} = o(n^{k+1})$; или, обозначая A_n^k через B_n, что из $B_n = O(n^k)$ и $B_n^2 = o(n^{k+2})$ следует $B_n^1 = o(n^{k+1})$.

Пусть $N = [\vartheta n]$, где $0 < \vartheta < 1$. Тогда

$$\begin{aligned} B_n^2 - B_N^2 &= B_{N+1}^1 + B_{N+2}^1 + \ldots + B_n^1 = \\ &= (n-N)\, B_n^1 - \sum_{\nu=N+1}^{n} (B_n^1 - B_\nu^1) = \\ &= (n-N)\, B_n^1 - \{B_{N+2} + 2B_{N+3} + \ldots + (n-N-1)\, B_n\}, \end{aligned}$$

$$B_n^1 = \frac{B_n^2 - B_N^2}{n-N} + \frac{B_{N+2} + 2B_{N+3} + \ldots + (n-N-1)\, B_n}{n-N} = P + Q,$$

$$Q = O\left\{\frac{1}{(1-\vartheta)n} \cdot n^k \sum_{\nu \leqslant (1-\vartheta)n} \nu\right\} = O\{(1-\theta)n^{k+1}\}$$

равномерно относительно ϑ и, при фиксированном ϑ,

$$P = o\left(\frac{1}{n} \cdot n^{k+2}\right) = o(n^{k+1}).$$

Отсюда (поскольку ϑ можно взять сколь угодно близким к 1) и заключаем, что $B_n^1 = o(n^{k+1})$.

При $k_1 = -1$, $k_2 = 0$ теорема 70 обращается в теорему 45. В этом частном случае мы доказали ее и для нецелых k.

6.5. Множители сходимости. Известная теорема Абеля и Дирихле, содержащаяся в теореме 8 (§ 3.5), устанавливает, что если (I) ряд $\sum a_n$ сходится или ограничен, (II) f_n монотонно убывает и стремится к нулю, или, более обще, $f_n \to 0$ и $\sum |\Delta f_n| < \infty$, то ряд $\sum a_n f_n$ сходится. Эта теорема допускает много важных обобщений на суммируемые ряды.

Эти обобщения бывают двух типов. В обобщениях первого типа на f_n накладываются лишь естественные модификации условия (II) и из суммируемости (C, k) ряда $\sum a_n$ выводится такая же суммируемость ряда $\sum a_n f_n$. В обобщениях же второго типа на f_n накладываются более сильные условия, и отсюда выводится, что ряд $\sum a_n f_n$ суммируем (C, $k-s$) для некоторого положительного s; типичным здесь может служить случай, когда $f_n = \frac{1}{(n+1)^s}$. Теоремы обоих типов представляют значительные трудности, если на параметры не наложено дополнительных ограничений. Мы удовольствуемся здесь рассмотрением целых k и s, для которых доказательства главных теорем сравнительно просты.

Основная теорема первого типа —

Теорема 71. *Если* (I) *ряд* $\sum a_n$ *суммируем, или ограничен,* (C, k), *где* k — *целое*; (II) $f_n \to 0$, *и* (III)

$$\sum (n+1)^k |\Delta^{k+1} f_n| < \infty, \tag{6.5.1}$$

то ряд $\sum a_n f_n$ *суммируем* (C, k) *и*

$$\sum a_n f_n = \sum A_n^k \Delta^{k+1} f_n, \tag{6.5.2}$$

где последний ряд абсолютно сходится.

Нам потребуются два вспомогательных предложения.

Теорема 72. *Если последовательность* f_n *удовлетворяет условиям теоремы* 71, *то*

$$(n+1)^l \Delta^l f_n \to 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, k), \tag{6.5.3}$$

$$\sum (n+1)^l |\Delta^{l+1} f_n| < \infty \qquad (l = 0, 1, \ldots, k). \tag{6.5.4}$$

Соотношения (6.5.3) и (6.5.4) можно записать соответственно следующей равносильной форме:

$$\binom{n+l}{l} \Delta^l f_n \to 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, k), \tag{6.5.5}$$

$$\sum \binom{n+l}{l} |\Delta^{l+1} f_n| < \infty \qquad (l = 0, 1, \ldots, k). \tag{6.5.6}$$

Заданные в теореме условия — это условия (6.5.5) для $l = 0$ и (6.5.6) для $l = k$.

Так как $f_n \to 0$, то $\Delta^k f_n \to 0$, так что

$$\Delta^k f_n = \sum_n^\infty \Delta^{k+1} f_\nu,$$

$$(n+1)^k |\Delta^k f_n| \leqslant (n+1)^k \sum_n^\infty |\Delta^{k+1} f_\nu| \leqslant \sum_n^\infty (\nu+1)^k |\Delta^{k+1} f_\nu| \to 0,$$

в силу (6.5.1). Это — соотношение (6.5.3), или (6.5.5), для $l = k$.

Далее,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}|\Delta^k f_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\sum_{\nu=n}^{\infty}|\Delta^{k+1}f_\nu| =$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}|\Delta^{k+1}f_\nu|\sum_{n=0}^{\nu}\binom{n+k-1}{k-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k}{k}|\Delta^{k+1}f_\nu|<\infty.$$

Это показывает, что (6.5.6) верно для $l=k-1$. А тогда, как в предыдущем параграфе, заключаем, что (6.5.5) верно также для $l=k-1$. Повторяя то же рассуждение, заключаем, что оба соотношения справедливы для всех указанных в них значений l.

Теорема 73. *Если $b_n=a_nf_n$, то*

$$B_n^k=\sum_{j=0}^{n}A_j^k\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\binom{n-j+k-i}{k-i}\Delta^{k+1-i}f_{j+i}, \tag{6.5.7}$$

с условием, что все f_m с $m>n$, входящие в $\Delta^{k+1-i}f_{j+i}$, заменяются нулями.

Полагая $U_j=u_0+u_1+\ldots+u_j$, обычным образом определяя U_j^1, U_j^2, … и считая v_j при $j>n$ равным нулю, имеем

$$\sum_0^n u_jv_j=\sum_0^n U_j\Delta v_j=\sum_0^n U_j^1\Delta^2 v_j=\ldots=\sum_0^n U_j^k\Delta^{k+1}v_j;$$

поэтому

$$B_n^k=\sum_0^n\binom{n-j+k}{k}a_jf_j=\sum_{j=0}^{n}A_j^k\Delta^{k+1}\left\{\binom{n-j+k}{k}f_j\right\}.$$

Но

$$\Delta^{k+1}(c_jf_j)=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\Delta^i c_j\Delta^{k+1-i}f_{j+i}.$$

Так как здесь

$$\Delta^i c_j=\Delta^i\binom{n-j+k}{k}=\binom{n-j+k-i}{k-i}\quad (0\leqslant i\leqslant k),$$

а $\Delta^{k+1}c_j=0$, то мы и приходим к формуле (6.5.7).

Переходим теперь к доказательству теоремы 71. Разделим (6.5.7) на $\binom{n+k}{k}$, и пусть $n\to\infty$. Прежде всего, условие, принятое в теореме 73, можно отбросить. Действительно, оно относится только к членам с $j\geqslant n-k$; число таких членов ограничено; каждый из них есть произведение некоторого A_j^k, т. е. $O(n^k)$, некоторого f_m, т. е. $o(1)$, и ограниченного числового множителя; тем самым в своей совокупности они составляют $o(n^k)$. Таким образом, дело сводится к нахождению предела выражения

$$\frac{1}{\binom{n+k}{k}}\sum_{j=0}^{n} A_j^k \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\binom{n-j+k-i}{k-i}\Delta^{k+1-i}f_{j+i}=\sum_{i=0}^{k} S_{n,i},$$

где в $S_{n,i}$ объединены все члены, соответствующие заданному i.

Если $i>0$, то

$$S_{n,i}=O\left\{\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^k\binom{n-j+k-i}{k-i}|\Delta^{k+1-i}f_{j+i}|\right\}=O\Bigl(\sum_{j=0}^{n}u_{n,j}\Bigr),$$

где

$$|u_{n,j}|\leqslant\frac{H}{(n+1)^k}(j+1)^k(n+1)^{k-i}|\Delta^{k+1-i}f_{j+i}|=$$

$$=H\left(\frac{j+1}{n+1}\right)^i(j+1)^{k-i}|\Delta^{k+1-i}f_{j+i}|\leqslant H(j+1)^{k-i}|\Delta^{k+1-i}f_{j+i}|,$$

причем H не зависит от n. Далее, по теореме 72,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^{k-i}|\Delta^{k+1-i}f_{j+i}|<\infty.$$

Таким образом, $\sum u_{n,j}$ мажорируется сходящимся рядом, члены которого не зависят от n, а для любого фиксированного j, $u_{n,j}\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что $S_{n,i}=o(1)$ для $i=1, 2, \ldots, k$.

Остается найти предел, к которому стремится

$$S_{n,0}=\frac{1}{\binom{n+k}{k}}\sum_{j=0}^{n}A_j^k\binom{n-j+k}{k}\Delta^{k+1}f_j.$$

Это выражение мажорируется рядом

$$\sum|A_j^k||\Delta^{k+1}f_j|;$$

и так как

$$\frac{\binom{n-j+k}{k}}{\binom{n+k}{k}}\to 1$$

при $n\to\infty$ для каждого j, то

$$S_{n,0}\to\sum A_j^k\Delta^{k+1}f_j,$$

что и завершает доказательство теоремы 71.

Теорему 71 можно видоизменить, введя предположения (I′) что ряд $\sum a_n$ суммируем (C, k) и (II′) что f_n ограничены. Последнее условие, в соединении с условием (III), обеспечивает стремление f_n к какому-то пределу f, не обязательно равному нулю. Утверждение следует тогда из теоремы 71 заменой f_n на g_n+f.

Теорему 71, как и указанное сейчас ее видоизменение, можно также вывести из теорем 1 и 3; при этом можно показать, что условия теоремы 71 и ее видоизменения также необходимы, в том смысле, что при невыполнении их существуют ряды $\sum a_n$, ограниченные (C, k), или суммируемые (C, k), для которых ряд $\sum a_n f_n$ не суммируем (C, k).

Если $f_n=\dfrac{1}{(n+c)^s}$, где $c>0$, $s>0$, то $\Delta^{k+1}f_n=O\left(\dfrac{1}{n^{s+k+1}}\right)$; а если

$$f_n=c_0+\frac{c_1}{n+1}+\ldots+\frac{c_{k+1}}{(n+1)^{k+1}}+O\left\{\frac{1}{(n+1)^{k+2}}\right\}, \tag{6.5.8}$$

то $\Delta^{k+1}f_n=O\left(\dfrac{1}{n^{k+2}}\right)$. В обоих этих случаях условие (III) теоремы 71 выполнено, и имеют место такие предложения:

Теорема 74. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, k), *то и ряд* $\sum\dfrac{a_n}{(n+c)^s}$ *суммируем* (C, k).

Теорема 75. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, k), *то и ряд* $\sum a_n f_n$, *где* f_n *имеют вид* (6.5.8), *суммируем* (C, k).

В частности,

$$f_n=\frac{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\ldots(n+\alpha_l)}{(n+\beta_1)(n+\beta_2)\ldots(n+\beta_l)}, \tag{6.5.9}$$

где α и β положительны, допускает представление в виде (6.5.8), и то же верно для $\dfrac{1}{f_n}$. Тем самым суммируемость (C, k) любого из рядов

$$\sum\frac{a_n}{(n+\alpha_1)\ldots(n+\alpha_l)},\qquad \sum\frac{a_n}{(n+\beta_1)\ldots(n+\beta_l)}$$

при любом k влечет суммируемость другого. Этот частный случай теоремы 75 будет использован в следующем параграфе.

6.6. Множитель $\dfrac{1}{(n+1)^s}$. Основная теорема второго типа —

Теорема 76. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, k) *и*

$$0<s<k+1,$$

то ряды

$$\sum \frac{a_n}{\binom{n+s}{s}}, \quad \sum \frac{a_n}{(n+1)^s} \tag{6.6.1}$$

суммируемы (C, $k-s$).

Мы будем предполагать k и s целыми; для нецелых значений k и s все доказательства становятся гораздо сложнее. Сделаем несколько предварительных замечаний.

(1) Если один из рядов $a_0+a_1+a_2+\ldots$ и $0+a_0+a_1+\ldots$ (т. е. $0+b_1+b_2+\ldots$, где $b_{n+1}=a_n$) суммируем (C, k), то в силу теоремы 47 то же верно и для другого. Поэтому безразлично, установим ли мы теорему 76 для ряда $a_0+a_1+\ldots$ и рядов (6.6.1) или для ряда $a_1+a_2+\ldots$ и рядов

$$\sum \frac{a_n}{\binom{n-1+s}{s}}, \quad \sum \frac{a_n}{n^s}, \tag{6.6.2}$$

где суммирование производится от 1 до ∞. Но при таком изменении формулировки мы, очевидно, можем считать любое из чисел α или β частного случая теоремы 75, указанного в конце предыдущего параграфа, равным нулю.

(2) Далее,

$$\frac{1}{n^s}\binom{n-1+s}{s} = \frac{1}{s!}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+s-1)}{n^{s-1}}$$

допускает представление в виде (6.5.9), с заменой n на $n-1$ и с $l=s-1$. Тем самым суммируемость (C, r) любого из рядов (6.6.2) при целом r влечет суммируемость (C, r) другого.

Рассмотрим теперь второй из рядов (6.6.2) с $s=1$. Если ряд $\sum a_n$ суммируем (C, k), то, по теореме 71, и ряд $\sum \frac{a_n}{n}$ суммируем (C, k). Чтобы он был суммируемым (C, $k-1$), необходимо и достаточно согласно теореме 65, чтобы $Q_n^{k-1}=o(n^k)$, где Q_n^{k-1} образовано исходя из $q_n=n\cdot\frac{a_n}{n}=a_n$, т. е. чтобы $A_n^{k-1}=o(n^k)$. Но последнее действительно справедливо, поскольку $A_n^{k-1}=A_n^k-A_{n-1}^k$ и $\frac{A_n^k}{n^k}$ стремится к пределу.

Таким образом, ряд $\sum \frac{a_n}{n}$ суммируем (C, $k-1$). В силу теоремы 75 отсюда следует, что и ряд $\sum \frac{a_n}{n+\alpha}$, где $\alpha \geqslant 0$, суммируем (C, $k-1$). Повторяя это рассуждение еще $s-1$ раз, заключаем, что ряды (6.6.2) или (6.6.1) суммируемы (C, $k-s$).

Из теорем 71 и 76 следует, что если ряд $\sum a_n$ суммируем (C, k), то

$$(6.6.3)\qquad \sum \frac{a_n}{n+1} = \sum A_n^k \Delta^{k+1} \frac{1}{n+1} = \\ = (k+1)! \sum \frac{A_n^k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+2)},$$

где первый ряд суммируем (C, $k-1$), а последний абсолютно сходится; аналогичная формула имеет место и для суммы первого из рядов (6.6.1).

6.7. Другое условие суммируемости. Как мы видели в § 6.6 (теорема 76), суммируемость (C, k) ряда $\sum a_n$ влечет суммируемость (C, $k-1$) ряда $\sum \frac{a_n}{n+1}$. Обратное неверно. Действительно, последний ряд (абсолютно) сходится, если $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, а в этом случае согласно теореме 63 ряд $\sum a_n$ не может быть суммируем (C, k) ни для какого k, если только он не сходится. Однако существует более тонкая связь между обоими рядами.

Теорема 77. *Для того чтобы ряд $\sum a_n$ был суммируем* (C, k), *где k — целое, необходимо и достаточно, чтобы уравнения*

$$(6.7.1)\qquad a_n = (n+1)(b_n - b_{n+1}) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

допускали решение b_n, для которого ряд $\sum b_n$ суммируем (C, $k-1$). *При этом*

$$(6.7.2)\qquad b_n = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} + \ldots \qquad (C,\ k-1)$$

и оба ряда, $\sum a_n$ и $\sum b_n$, имеют одну и ту же сумму.

Прежде всего, ясно, что уравнения (6.7.1) могут быть решены рекуррентным способом; что если b_n — некоторое решение, то общим решением будет $\mathrm{b}_n = b_n - h$, где h — произвольная постоянная, и что условия теоремы могут быть удовлетворены, самое большее, одним решением.

(I) Мы начнем с доказательства того, что если b_n — некоторое решение, то

$$(6.7.3)\qquad A_n^k = (k+1) B_n^k - (n+1) B_{n+1}^{k-1} \qquad (k \geqslant 0),$$

причем здесь B_n^{-1} означает b_n.

Прежде всего при $k = 0$ имеем

$$A_n^0 = A_n = b_0 - b_1 + 2(b_1 - b_2) + \ldots \\ \ldots + (n+1)(b_n - b_{n+1}) = B_n - (n+1) b_{n+1},$$

что совпадает с (6.7.3). Далее, допуская, что формула (6.7.3) верна для некоторого заданного k, имеем

$$
\begin{aligned}
A_n^{k+1} &= (k+1)(B_0^k + B_1^k + \ldots + B_n^k) - \\
&\quad - B_1^{k-1} - 2B_2^{k-1} - \ldots - (n+1)B_{n+1}^{k-1} = \\
&= (k+1)B_n^{k+1} - (n+1)B_{n+1}^k + (n+1)B_0^{k-1} + \\
&\quad + nB_1^{k-1} + \ldots + B_n^{k-1} = (k+2)B_n^{k+1} - (n+1)B_{n+1}^k,
\end{aligned}
$$

а это — формула (6.7.3) с заменой k на $k+1$.

(II) Во-вторых, докажем, что *если ряд* $B = \sum b_n$ *суммируем* (C, $k-1$), *то ряд* $A = \sum a_n$ *суммируем* (C, k), *и* $A = B$.

Прежде всего, если $k = 0$, то $B_n \to B$ и $(n+1)b_{n+1} \to 0$, так что $A_n \to B$. Далее, если $k > 0$, то

$$B_n^{k-1} = \binom{n+k-1}{k-1}B + o(n^{k-1})$$

и, суммируя,

$$B_n^k = \binom{n+k}{k}B + o(n^k).$$

Поэтому, принимая во внимание формулу (6.7.3), имеем

$$A_n^k = \left\{(k+1)\binom{n+k}{k} - (n+1)\binom{n+k}{k-1}\right\}B + o(n^k) = \\ = \binom{n+k}{k}B + o(n^k),$$

и ряд A суммируем (C, k) к сумме B.

(III) В-третьих, докажем, что *если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (C, k), то

$$B_n^{k-1} = \binom{n+k}{k}h + \binom{n+k-1}{k-1}A + o(n^{k-1}) \qquad (k > 0), \tag{6.7.4}$$

$$b_n = h + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (k = 0), \tag{6.7.5}$$

где h — некоторая постоянная.

Без ограничения общности, можно считать, что $A = 0$ *). На основании формулы (6.7.3) и нашего предположения имеем тогда

$$(n+k+2)B_n^k - (n+1)B_{n+1}^k = \\ = (k+1)B_n^k - (n+1)B_{n+1}^{k-1} = A_n^k = o(n^k). \tag{6.7.6}$$

---

*) Если b_n — решение уравнений (6.7.1), $a_0' = a_0 - A$ и $a_n' = a_n$ для $n > 0$, то b_n', определенное условиями $b_0' = b_0 - A$, $b_n' = b_n$ для $n > 0$, есть решение системы уравнений $a_n' = (n+1)(b_n' - b_{n+1}')$. Уменьшение a_0 и b_0 на A вызывает уменьшение A_n^{k-1} и B_n^{k-1} на $\binom{n+k-1}{k-1}A$.

Положим

$$(6.7.7)\qquad (n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)\varphi_n = B_n^k;$$

тогда (6.7.6) дает

$$(n+1)(n+2)\ldots(n+k+2)(\varphi_n-\varphi_{n+1}) = A_n^k = o(n^k),$$

так что $\varphi_n-\varphi_{n+1}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Это показывает, что φ_n стремится к некоторому пределу φ, и

$$(6.7.8)\qquad \varphi_n = \varphi + \sum_n^\infty \frac{A_\nu^k}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k+2)} = \varphi + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(6.7.9)\qquad B_n^k = (n+1)(n+2)\ldots(n+k+1)\varphi + o(n^k).$$

Наконец, из (6.7.6) и (6.7.9) следует, что

$$B_{n+1}^{k-1} = \frac{k+1}{n+1}B_n^k + o(n^{k-1}) = (k+1)!\binom{n+k+1}{k}\varphi + o(n^{k-1}),$$

а это есть соотношение (6.7.4) с $A=0$, $h=(k+1)!\varphi$ и заменой n на $n+1$. Проведенное сейчас доказательство сохраняет силу и при $k=0$, приводя в этом случае к формуле (6.7.5).

(IV) Теперь легко завершить доказательство теоремы. Прежде всего согласно пункту (II) условие теоремы достаточно. Далее, если ряд $\sum a_n$ суммируем (C, k), b_n — некоторое решение уравнений (6.7.1) и $\mathfrak{b}_n = b_n - h$, где h — то же, что и в формуле (6.7.4), то $\mathfrak{b}_n$ также есть решение; при этом в силу (6.7.4) или (6.7.5)

$$\mathfrak{b}_n^{k-1} = B_n^{k-1} - \binom{n+k}{k}h = \binom{n+k-1}{k-1}A + o(n^{k-1}),$$

так что ряд $\sum \mathfrak{b}_n$ суммируем (C, $k-1$) к сумме A, причем этот результат сохраняет силу и для $k=0$, поскольку h, очевидно, не зависит от k. Следовательно, условие также необходимо.

Наконец, так как ряд $\sum \mathfrak{b}_n$ суммируем (C, $k-1$), то, по теореме 48,

$$\mathfrak{b}_n = \sum_n^\infty (\mathfrak{b}_\nu - \mathfrak{b}_{\nu+1}) = \sum_n^\infty \frac{a_\nu}{\nu+1} \qquad (\mathrm{C},\ k-1).$$

Но для случая $\mathfrak{b}_n$, h и φ, указанные в пункте (III), равны нулю, а формулы (6.7.7) и (6.7.8) дают

$$\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{B}_0^k = (k+1)!\,\varphi_0 = (k+1)!\sum \frac{A_\nu^k}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k+2)}.$$

Следовательно,

$$\sum \frac{a_n}{n+1} = (k+1)! \sum \frac{A_n^k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k+2)} \qquad (C,\ k-1),$$

т. е. мы получили формулу (6.6.3), причем данный здесь ее вывод не зависит от теорем 71 и 76.

Из теоремы 77 вытекает как следствие

Теорема 78. *Для того чтобы ряд $\sum a_n$ был суммируем* (C, k), *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая система чисел $a_{n,s}$, $s=0, 1, \ldots, k+1$, что*

$$a_{n,0} = a_n, \quad a_{n,s-1} = (n+1)(a_{n,s} - a_{n+1,s}) \qquad (s>0)$$

и что ряд

$$A_{k+1} = \sum a_{n,k+1}$$

суммируем (C, -1). *При этих условиях*

$$a_{n,s} = \frac{a_{n,s-1}}{n+1} + \frac{a_{n+1,s-1}}{n+2} + \ldots \qquad (C,\ k-s)$$

для $s=1, 2, \ldots, k+1$, и ряды $A_s = \sum a_{n,s}$ суммируемы (C, $k-s$), *притом к одной и той же сумме.*

Для доказательства нужно только $k+1$ раз последовательно применить теорему 77. Теоремы 77 и 78 можно использовать для получения поучительных доказательств теоремы равносильности (§ 5.8) и других стандартных теорем того же рода.

6.8. Интегралы. Для интегралов имеют место тауберовы теоремы, аналогичные теоремам § 6.1. Если

$$\int a(x)\,dx = A \qquad (C,\ k)\,^{*)} \tag{6.8.1}$$

для некоторого k и $a(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ для больших x, то соотношение (6.8.1) сохраняет силу для всех $k>-1$; в частности, интеграл сходится. Если соотношение (6.8.1) выполняется для некоторого k, а $a(x)$ вещественна и $xa(x) > -H$, то интеграл сходится. Аналогами предварительных теорем 65 и 66 служат следующие предложения: (I) если интеграл $\int a(x)\,dx$ суммируем (C, $r+1$), то для его суммируемости (C, r) необходимо и достаточно, чтобы $B_r(x) = o(x^{r+1})$, где $B_r(x)$ так же образовано из $b(x) = xa(x)$, как $A_r(x)$ из $a(x)$, и (II) для того чтобы интеграл $\int a(x)\,dx$ был суммируем (C, $r+1$), необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int \frac{B_r(x)}{x^{r+2}}\,dx$ сходился.

---

*) Как и в § 5.14, интегралы с неуказанными пределами интегрирования берутся от 0 до ∞.

Теорема 71 также имеет аналог: если справедливо соотношение (6.8.1), $f(x)\to 0$, k-я производная от $f(x)$ абсолютно непрерывна и

$$\int x^k\,|f^{(k+1)}(x)|\,dx<\infty,$$

то

(6.8.2) $$\int a(x)f(x)\,dx=(-1)^{k+1}\int A_k(x)f^{(k+1)}(x)\,dx \qquad (C,\,k),$$

причем последний интеграл абсолютно сходится. В частности, это имеет место для

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^s},$$

где $s>0$. С другой стороны, для теоремы 76 нет аналога; введение множителя сходимости, подобного $\frac{1}{(x+1)^s}$, не обязательно понижает порядок суммируемости. Так, если $a(x)=e^{2x}\cos e^x$, то

$$A_1(x)=-Hx+\cos 1-\cos e^x+\int_0^x \cos e^t\,dt\sim -Hx,$$

где $H=\cos 1+\sin 1$, так что

(6.8.3) $$\int e^{2x}\cos e^x\,dx=-\cos 1-\sin 1 \qquad (C,\,1).$$

Однако интеграл

$$\int \frac{e^{2x}\cos e^x}{x+1}\,dx$$

не сходится и даже не суммируем $(C,\,k)$ ни для какого $k<1$.

Если интеграл

(6.8.4) $$J(\delta)=\int e^{-\delta x}a(x)\,dx$$

сходится для $\delta>0$ и стремится к A при $\delta\to 0$, то мы будем писать

(6.8.5) $$J=\int a(x)\,dx=A \qquad (A)$$

и говорить, что J *суммируем* (A) к A. После § 5.12 было бы естественно ожидать, что из суммируемости $(C,\,k)$ следует суммируемость (A), однако здесь мы сталкиваемся с одним из пунктов, где аналогия между рядами и интегралами прекращается. Суммируемость $(C,\,k)$ интеграла J не влечет даже сходимости интеграла $J(\delta)$. Так, например, интеграл (6.8.3) суммируем (C, 1), но интеграл $\int e^{(2-\delta)x}\cos e^x\,dx$ не сходится при $\delta\leqslant 1$.

Однако если J суммируем $(C,\,k)$ и $J(\delta)$ сходится для любого положительного δ, то J суммируем (A). Действительно, тогда для любого положительного δ

$$A^\delta(x)=\int_0^x e^{-\delta t}\,a(t)\,dt=O(1),$$

и

$$A(x)=\int_0^x e^{\delta t}\,\frac{dA^\delta(t)}{dt}\,dt=e^{\delta x}A^\delta(x)-\delta\int_0^x e^{\delta t}A^\delta(t)\,dt=O(e^{\delta x}).$$

Отсюда следует, что $A_k(x) = O(e^{\delta x})$ для каждого k, и $k+1$ раз интегрируя по частям, получаем

$$(6.8.6)\qquad J(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta x} a(x)\,dx = \delta^{k+1}\int_0^\infty e^{-\delta x} A_k(x)\,dx.$$

Но $k!\dfrac{A_k(x)}{x^k} \to A$, поэтому

$$J(\delta) \sim A\frac{\delta^{k+1}}{k!}\int_0^\infty e^{-\delta x} x^k\,dx = A.$$

Можно получить и лучшую теорему. А именно, интеграл $\int x^k e^{-\delta x}\,dx$ сходится для каждого k, так что на основании (6.8.2) суммируемость (C, k) интеграла J влечет суммируемость (C, k) интеграла $J(\delta)$ и справедливость соотношения (6.8.6), где первый интеграл суммируем (C, k), а второй абсолютно сходится. Отсюда тогда следует, что $J(\delta)$, рассматриваемый как интеграл в смысле (C, k), стремится к A.

Интеграл $\int e^{aix+b\sqrt{x}}\,dx$, где $a>0$, $b>0$, суммируем (A) и не суммируем (C, k) ни для какого k.

6.9. Биномиальный ряд. В остающейся части этой главы мы исследуем суммируемость некоторых наиболее важных специальных рядов. Начнем с ряда

$$\sum a_n = \sum \binom{n+\alpha}{\alpha} z^n,$$

где

$$\alpha = \beta + i\gamma, \quad z = e^{i\theta}, \quad |\theta| \leqslant \pi.$$

Как известно, этот ряд (1) абсолютно сходится при $\beta < -1$, (2) сходится, но не абсолютно *), при $-1 \leqslant \beta < 0$ и $\theta \neq 0$, (3) расходится при $\beta \geqslant 0$, а также при $-1 \leqslant \beta < 0$ и $\theta = 0$ *); суммой же ряда, в случае его сходимости, служит

$$\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} = \exp\{-(\alpha+1)\log(1-z)\},$$

где взята главная ветвь логарифма, для которой $|\Im\log(1-z)| < \frac{1}{2}\pi$. Мы найдем условия, при которых этот ряд суммируем (C, k) для некоторого $k > -1$.

Пусть сперва

$$\beta \geqslant -1, \quad k > -1, \quad |\theta| \leqslant \pi, \quad \theta \neq 0, \quad z \neq 1.$$

*) За исключением тривиального случая $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $\alpha + 1 = 0$, когда ряд сводится к своему первому члену 1.

Тогда

$$\sum a_n u^n = \frac{1}{(1-zu)^{\alpha+1}}, \quad \sum A_n^k u^n = \frac{1}{(1-u)^{k+1}(1-zu)^{\alpha+1}},$$

$$A_n^k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{du}{(1-u)^{k+1}(1-zu)^{\alpha+1}u^{n+1}},$$

где $u=\rho e^{i\varphi}$, C есть окружность $\rho=\rho_0<1$ и взяты главные ветви степеней $1-u$ и $1-zu$. Поэтому на основании теоремы Коши

$$A_n^k = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{C_1} + \int\limits_{C_2}\right)\frac{du}{(1-u)^{k+1}(1-zu)^{\alpha+1}u^{n+1}} = J_1 + J_2,$$

где C_1 и C_2 — контуры, окружающие точки $u=1$ и $u=\frac{1}{z}=\zeta$ и уходящие в бесконечность в направлениях $\varphi=0$ и $\varphi=-\theta$ соответственно. Мы можем считать, что C_1 и C_2 составлены из окружностей с центрами $u=1$ и $u=\zeta$ и лучей под углами 0 и $-\theta$, проходимых дважды в противоположных направлениях.

Запишем J_1 в форме $J_1 = J_1^{(1)} + J_1^{(2)}$, где

$$J_1^{(1)} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}\int\limits_{C_1}\frac{du}{(1-u)^{k+1}u^{n+1}} = \binom{n+k}{k}\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}\,^{*)},$$

$$J_1^{(2)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\left\{\frac{1}{(1-uz)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}\right\}\frac{du}{(1-u)^{k+1}u^{n+1}}.$$

Предположим, что $n > \frac{1}{|1-\zeta|}$, и возьмем радиус окружности, входящей в состав контура C_1, равным $\frac{1}{n}$. Тогда на ней $\frac{1}{u^{n+1}} = O(1)$; с другой стороны,

$$\frac{1}{(1-uz)^{\alpha+1}} - \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} = (\alpha+1)z\int\limits_1^u \frac{dw}{(1-wz)^{\alpha+2}}$$

равно $O(|u-1|)$ на всем контуре C_1 и $O\left(\frac{1}{n}\right)$ на окружности. Поэтому часть интеграла $J_1^{(2)}$, соответствующая окружности, равна $O\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot n^{k+1}\right) = O(n^{k-1})$, а соответствующая остальной части кон-

*) Интеграл вычислен посредством деформации контура C_1 обратно в C

тура C_1 равна

$$O\left\{\int_{1+\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{x-1}{(x-1)^{k+1}} \frac{1}{x^{n+1}} dx\right\} = O\left\{\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} \frac{t}{t^{k+1}} \frac{dt}{(1+t)^{n+1}}\right\} =$$

$$= O\left\{n^{k+1} \int_0^{\infty} \frac{tdt}{(1+t)^{n+1}}\right\} = O\left\{\frac{n^{k+1}}{n(n-1)}\right\} = O(n^{k-1}).$$

Следовательно,

$$J_1 = \binom{n+k}{k} \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} + O(n^{k-1}).$$

Аналогично, пишем $J_2 = J_2^{(1)} + J_2^{(2)}$, где

$$J_2^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(1-\zeta)^{k+1}} \int_{C_2} \frac{du}{(1-zu)^{\alpha+1} u^{n+1}} = \binom{n+\alpha}{\alpha} \frac{z^n}{(1-\zeta)^{k+1}} =$$

$$= \binom{n+\alpha}{\alpha} \frac{e^{ni\theta}}{(1-e^{-i\theta})^{k+1}},$$

$$J_2^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \left\{\frac{1}{(1-u)^{k+1}} - \frac{1}{(1-\zeta)^{k+1}}\right\} \frac{du}{(1-zu)^{\alpha+1} u^{n+1}},$$

и рассуждение, подобное примененному к $J_1^{(2)}$, показывает, что $J_2^{(2)} = O(n^{\beta-1})$.

Соединяя наши результаты, находим, что

$$A_n^k = \binom{n+k}{k} \frac{1}{(1-e^{i\theta})^{\alpha+1}} + O(n^{k-1}) + \binom{n+\alpha}{\alpha} \frac{e^{ni\theta}}{(1-e^{-i\theta})^{k+1}} + O(n^{\beta-1}).$$

Первый член правой части является главным при $k > \beta$, третий — при $k < \beta$; оба они — одинакового порядка при $k = \beta$. Таким образом, получаем следующее предложение:

Теорема 79. *Если* $\alpha = \beta + i\gamma$, $\beta \geqslant -1$, $k > -1$, $|\theta| \leqslant \pi$ *и* $\theta \neq 0$, *то ряд* $\sum \binom{n+\alpha}{\alpha} e^{ni\theta}$ *суммируем* (C, k) *для* $k > \beta$ *к сумме* $\frac{1}{(1-e^{i\theta})^{\alpha+1}}$. *Он ограниченно колеблется* (C, k) *для* $k = \beta$ *и неограниченно — для* $k < \beta$.

Очевидно, проведенное рассуждение доказывает равномерную суммируемость в любом замкнутом интервале изменения θ, не содержащем $\theta = 0$.

При $\theta = 0$ имеем $z = 1$, $a_n = \binom{n+\alpha}{\alpha}$,

$$\sum A_n^k u^n = \frac{1}{(1-u)^{\alpha+k+2}}, \quad A_n^k = \binom{n+\alpha+k+1}{\alpha+k+1}$$

и

$$\frac{A_n^k}{\binom{n+k}{k}} \sim \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)} n^{\alpha+1}.$$

Отсюда следует

Теорема 80. *Ряд* $\sum \binom{n+\alpha}{\alpha}$ *не суммируем* (C, k) *ни для какого* k, *за исключением случая* $\beta < -1$, *когда он абсолютно сходится к нулю, и случая* $\beta = -1$, $\gamma = 0$, *когда он сводится к своему первому члену* 1.

6.10. Ряд $\sum n^\alpha e^{ni\theta}$. Из теорем 79 и 80 можно вывести соответствующие результаты для ряда $\sum n^\alpha e^{ni\theta}$ *). В этом параграфе мы будем предполагать, что $\beta > -1$, откладывая случай $\beta = -1$ до следующего параграфа.

Если $\gamma = 0$ и β целое (так что и α целое), то

$$n^\alpha = p_0\binom{n+\alpha}{\alpha} + p_1\binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} + \ldots + p_\alpha, \tag{6.10.1}$$

где $p_0, p_1, \ldots$ не зависят от n. Если α — нецелое, то

$$\binom{n+\alpha-\nu}{\alpha-\nu} = c_{\nu,\nu} n^{\alpha-\nu} + c_{\nu,\nu+1} n^{\alpha-\nu-1} + \ldots + c_{\nu,h} n^{\alpha-h} + O(n^{\beta-h-1}),$$

где h произвольно, $\nu = 0, 1, \ldots, h$ и $c_{\nu,\nu} \neq 0$. Комбинируя эти равенства, мы можем представить n^α в виде

$$n^\alpha = p_0\binom{n+\alpha}{\alpha} + p_1\binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} + \ldots \\ \ldots + p_h\binom{n+\alpha-h}{\alpha-h} + O(n^{\beta-h-1}). \tag{6.10.2}$$

Сопоставляя теорему 79 с соотношениями (6.10.1) или (6.10.2), приходим к следующей теореме:

Теорема 81. *Если* $\alpha = \beta + i\gamma$, $\beta > -1$, $k > -1$, $|\theta| \leqslant \pi$ *и* $\theta \neq 0$, *то ряд* $\sum n^\alpha e^{ni\theta}$ *суммируем* (C, k) *для* $k > \beta$, *ограниченно колеблется* (C, k) *для* $k = \beta$ *и неограниченно колеблется* (C, k) *для* $k < \beta$.

6.11. Случай $\beta = -1$. Тот случай, когда $\beta = -1$, представляет в некоторых отношениях особый интерес. Ряды

$$\sum \binom{n-1+i\gamma}{-1+i\gamma} e^{ni\theta}, \quad \sum n^{-1+i\gamma} e^{ni\theta}, \tag{6.11.1}$$

*) При $\beta \leqslant 0$ ряд начинается с $n = 1$.

где $\gamma \neq 0$, сходятся, если $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Если же $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, то они ограниченно колеблются, так как

$$\binom{n-1+i\gamma}{-1+i\gamma} = \frac{\Gamma(n+i\gamma)}{\Gamma(i\gamma)\Gamma(n+1)} = \frac{n^{-1+i\gamma}}{\Gamma(i\gamma)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sum_1^{n-1} m^{-1+i\gamma} - \frac{n^{i\gamma}-1}{i\gamma} = \sum_1^{n-1} m^{-1+i\gamma} - \int_1^n t^{-1+i\gamma}\,dt =$$

$$= \sum_1^{n-1} \int_m^{m+1} (m^{-1+i\gamma} - t^{-1+i\gamma})\,dt,$$

а общий член последней суммы есть $O\left(\frac{1}{m^2}\right)$ *). Так как ряды (6.11.1) — не сходящиеся и общие их члены равны $O\left(\frac{1}{n}\right)$, то из теоремы 63 следует, что они не суммируемы (C, k) ни для какого k.

Интересно исследовать некоторые другие свойства этих рядов и, в частности, доказать, что их частичные суммы ограничены равномерно относительно θ. Более обще мы докажем следующее:

Теорема 82. *Если*

(6.11.2) $$A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = O(1), \qquad \Delta a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

(6.11.3) $$|s_n(z)| = \left|\sum_0^n a_m z^m\right| < H$$

для $|z| \leqslant 1$, *где* H *не зависит от* z *и* n. *В частности, это имеет место, когда* $a_n = \binom{n-1+i\gamma}{-1+i\gamma}$ *или* $n^{-1+i\gamma}$ (*причем во втором случае* $a_0 = 0$).

Заметим, между прочим, что из предположений (6.11.2) вытекает, что $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. В дальнейшем мы будем рассматривать функции от n и z, и все O будут равномерны для $|z| \leqslant 1$. В силу принципа максимума модуля, достаточно доказать (6.11.3) для $z = e^{i\theta}$ и $0 < |\theta| \leqslant \pi$.

Рассмотрим случай $\theta > 0$. Положим $p = \left[\frac{\pi}{\theta}\right]$, так что $p \geqslant 1$. Если $p \geqslant n$, то

$$s_n(z) = \sum_0^n a_m e^{mi\theta} = \sum_0^{n-1} A_m \Delta e^{mi\theta} + A_n e^{ni\theta} =$$

$$= (1 - e^{i\theta}) \sum_0^{n-1} O(1) + O(1) = O(n\theta) + O(1) = O(1).$$

---

*) Можно также воспользоваться тождеством $\sum_0^n \binom{m-1+i\gamma}{-1+i\gamma} = \binom{n+i\gamma}{i\gamma}$.

Если $p < n$, то

$$s_n(z) = \sum_0^p a_m e^{mi\theta} + \sum_{p+1}^n a_m e^{mi\theta} = S_1 + S_2.$$

Так же, как и только что, убеждаемся в том, что $S_1 = O(1)$. С другой стороны, так как $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то

$$(1-e^{i\theta}) S_2 = \sum_{p+1}^n a_m \Delta e^{mi\theta} = a_{p+1} e^{(p+1)i\theta} - a_n e^{(n+1)i\theta} - \sum_{p+2}^n e^{mi\theta} \Delta a_{m-1} =$$
$$= O\left(\frac{1}{p}\right) + \sum_{p+1}^n O\left(\frac{1}{m^2}\right) = O\left(\frac{1}{p}\right) = O(\theta),$$

так что и $S_2 = O(1)$.

Из теоремы 82 следует, например, что ряд

$$\sum \frac{n^{-1+i\gamma}}{\log n} z^n \quad (n = 2, 3, \ldots, \gamma \neq 0) \tag{6.11.4}$$

равномерно, хотя и не абсолютно, сходится на единичном круге.

Доказательство следующей теоремы предоставляем читателю.

Теорема 83. *Если* $-1 < \beta < 0$, $a_n = o(1)$, $\Delta a_n = O(n^{\beta-1})$, *то*

$$|s_n(z)| < \frac{H}{|1-z|^{\beta+1}} \tag{6.11.5}$$

для $|z| \leqslant 1$. *Если* $a_n = O(1)$, $\Delta^2 a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *то* (6.11.5) *верно и для* $\beta = 0$.

6.12. Ряд $\sum \frac{e^{Ain^a}}{n^b}$. Ряд

$$\sum a_n = \sum \frac{e^{Ain^a}}{n^b}, \tag{6.12.1}$$

где

$$A > 0, \quad 0 < a < 1, \quad b = \beta + i\gamma,$$

особенно интересен и может служить для иллюстрации многих пунктов теории суммируемых рядов. При $\beta > 1$ он абсолютно сходится, и мы всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\beta \leqslant 1$.

Дифференцирование повышает порядок малости члена a_n множителем n^{a-1}, так что к рассматриваемому ряду применима формула Эйлера-Маклорена; однако исследование суммируемости ряда на этом пути довольно громоздко, и мы воспользуемся другим методом, опирающимся на прямое применение теоремы Коши.

Теорема 84. *Ряд* (6.12.1) *суммируем* (C, k), *где* $k > -1$, *в том и только в том случае, когда*

(6.12.2) $$(k+1)a+\beta>1.$$

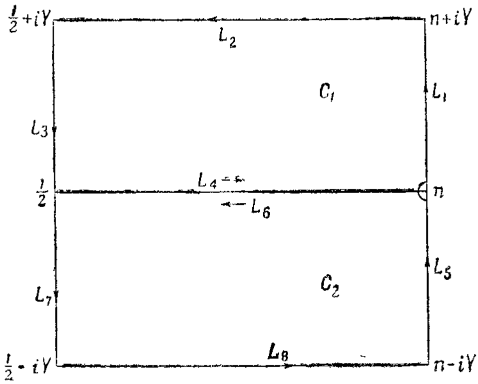
Положим

$$u(z)=\frac{e^{Aiz^a}}{z^b},\qquad u_0=0,\qquad u_n=u(n)\qquad(n>0),$$

где взяты главные ветви функций $\frac{1}{z^b}$ и z^a в полуплоскости $\Re z>0$, и

(6.12.3) $$S=\Gamma(k+1)\,U_n^k=\sum_{m=1}^{n}\frac{\Gamma(n-m+k+1)}{\Gamma(n-m+1)}\,u_m.$$

Нам нужно показать, что $\frac{S}{n^k}$ стремится к пределу тогда и только тогда, когда k удовлетворяет условию (6.12.2).



Фиг. 1

Пусть C — прямоугольник $\left(\frac{1}{2}-iY,\ n-iY,\ n+iY,\frac{1}{2}+iY\right)$, изображенный на фиг. 1, а C_1 и C_2 — прямоугольники $L_1L_2L_3L_4$ и $L_5L_6L_7L_8$. Если

$$f(z)=\frac{\Gamma(n-z+k+1)}{\Gamma(n-z+1)}\,u(z),$$

то в силу теоремы Коши

(6.12.4) $$S'=S-\frac{1}{2}f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \pi\operatorname{ctg}\pi z f(z)\,dz,$$

где интеграл вдоль отрезка $(n-iY,\ n+iY)$ берется в смысле главного значения *). С другой стороны,

$$(6.12.5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\pi i f(z)\,dz=0,\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}(-\pi i)\,f(z)\,dz=0.$$

Комбинируя формулы (6.12.4) и (6.12.5), получаем

$$(6.12.6)\quad S'=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\psi(z)\,f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_8}\psi(z)f(z)\,dz+$$
$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{n}f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_3+L_7}\psi(z)f(z)\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_5+L_1}\psi(z)f(z)\,dz,$$

где

$$\psi(z)=\pi(\operatorname{ctg}\pi z\pm i)$$

соответственно тому, положительно или отрицательно $y=\Im z$; при этом интеграл вдоль L_5+L_1 понимается в смысле главного значения.

Но

$$\psi(z)=O\left(e^{-2\pi|y|}\right),\qquad \frac{\Gamma(n-z+k+1)}{\Gamma(n-z+1)}=O(|y|^k),\qquad e^{Aiz^a}=O\left(e^{A|y|^a}\right)$$

для фиксированного n, $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant n$ и больших $|y|$. Поэтому интегралы вдоль L_2 и L_8 при $Y\to\infty$ стремятся к нулю, и формула (6.12.6) дает

$$(6.12.7)\quad S'=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{n}f(z)\,dz-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{1}{2}+iy\right)f\left(\frac{1}{2}+iy\right)dy+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(n+iy)f(n+iy)\,dy=J-J_1+J_2,$$

где последний интеграл понимается в смысле главного значения.

Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^k}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+k-iy\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-iy\right)}\right\}u\left(\frac{1}{2}+iy\right)\psi\left(\frac{1}{2}+iy\right)dy$$

*) Мы применяем теорему Коши к контуру C, вдавленному полукругом у точки $z=n$, а затем стремим радиус вмятины к нулю.

мажорируется интегралом, подинтегральная функция которого не зависит от n, а выражение в фигурных скобках при $n \to \infty$ стремится к 1 для каждого y. Поэтому

$$(6.12.8)\qquad \frac{J_1}{n^k} \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u\left(\frac{1}{2}+iy\right)\psi\left(\frac{1}{2}+iy\right)dy =$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{Ai\left(\frac{1}{2}+iy\right)^a}}{\left(\frac{1}{2}+iy\right)^b}\,\frac{\operatorname{sign} y}{e^{2\pi|y|}+1}\,dy = il.$$

Что же касается J_2, то имеем

$$\psi(n+iy) = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{1-e^{2\pi y}} & \text{при } y>0,\\[2mm] -\dfrac{2\pi i}{1-e^{-2\pi y}} & \text{при } y<0,\end{cases}$$

так что

$$(6.12.9)\qquad J_2 = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1-iy)}{\Gamma(1-iy)}\,u(n+iy)\,\frac{\operatorname{sign} y}{e^{2\pi|y|}-1}\,dy =$$

$$= -i\int_0^{\infty}\left\{\frac{\Gamma(k+1-iy)}{\Gamma(1-iy)}\,u(n+iy) - \frac{\Gamma(k+1+iy)}{\Gamma(1+iy)}\,u(n-iy)\right\}\frac{dy}{e^{2\pi y}-1},$$

причем последний интеграл абсолютно сходится. Отсюда следует, что

$$J_2 = O(n^{-\beta})\ ^{*)},$$

а тогда из (6.12.7) и (6.12.8) — что

$$(6.12.10)\qquad S' = -in^k l + o(n^k) + J + O(n^{-\beta}).$$

---

*) Разбиваем область интегрирования на части $(0, \delta)$ и (δ, ∞), где $0<\delta<1$. На основании „мажорированной сходимости" ясно, что часть рассматриваемого интеграла, распространенная на (δ, ∞), есть $O(n^{-\beta})$. На интервале же $(0, \delta)$ мы можем разложить функции

$$n^b u(n+iy),\qquad \frac{\Gamma(k+1-iy)}{\Gamma(1-iy)},\qquad \frac{y}{e^{2\pi y}-1}$$

в равномерно сходящиеся ряды $P\left(\frac{y}{n}\right)$, $Q(y)$, $R(y)$, а тогда очевидно, что

$$\frac{1}{n^b}\int_0^{\delta}\frac{1}{y}\left\{P\left(\frac{y}{n}\right)Q(y) - P\left(-\frac{y}{n}\right)Q(-y)\right\}R(y)\,dy = O(n^{-\beta}).$$

Далее,

$$J=\int_{\frac{1}{2}}^{n}\frac{\Gamma(n-z+k+1)}{\Gamma(n-z+1)}u(z)\,dz=\int_{M_1}-\int_{M_2}=I_1-I_2, \tag{6.12.11}$$

где M_1 и M_2 — отрезки, проходящие соответственно через точки $\frac{1}{2}$ и n параллельно положительному направлению мнимой оси. На M_1 имеем $z=re^{i\theta}$, где $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$ и $\theta\to\frac{1}{2}\pi$, а $|e^{Aiz^a}|=e^{-Ar^a\sin a\theta}$. Следовательно *),

$$I_1\sim in^k\int\frac{e^{Ai\left(\frac{1}{2}+iy\right)^a}}{\left(\frac{1}{2}+iy\right)^b}\,dy=in^kI^*. \tag{6.12.12}$$

Зафиксируем теперь (малое) δ и положим

$$I_2=i\int_0^\infty\frac{\Gamma(k+1-iy)}{\Gamma(1-iy)}u(n+iy)\,dy=i\int_0^{\delta n}+i\int_{\delta n}^\infty=I_3+I_4. \tag{6.12.13}$$

В I_4 имеем $y>\delta n$ и $z=n+iy=re^{i\theta}$, где $0<\omega<\theta<\frac{1}{2}\pi$ и ω зависит только от δ. Поэтому

$$|e^{Aiz^a}|=e^{-Ar^a\sin a\theta}<e^{-Br^a},$$

$$|z^{-b}|=r^{-\beta}e^{\gamma\theta}<Cr^{-\beta},\quad dy=\operatorname{cosec}\theta\,dr<D\,dr$$

и

$$I_4=O\left(\int_{\delta n}^\infty r^{k-\beta}e^{-Br^a}\,dr\right)=O\left(e^{-En^a}\right), \tag{6.12.14}$$

где B, C, D и E — положительные функции от δ. Так как при $0<y<\delta n$

$$e^{Ai(n+iy)^a}=e^{Ain^a-Aan^{a-1}y+\dots}=O\left(e^{-Fn^{a-1}y}\right),$$

где F — положительная функция от δ, то, принимая во внимание, что $(k+1)(1-a)>0$, имеем

$$I_3=O\left\{n^{-\beta}\left(\int_0^1 e^{-Fn^{a-1}y}\,dy+\int_1^{\delta n}y^ke^{-Fn^{a-1}y}\,dy\right)\right\}= \tag{6.12.15}$$

$$=O(n^{-\beta})+O\left(n^{-\beta}\int_0^\infty y^ke^{-Fn^{a-1}y}\,dy\right)=O\left\{n^{-\beta+(k+1)(1-a)}\right\}.$$

*) Снова с помощью простого рассуждения, основанного на мажорировании.

Наконец, S и S' отличаются на $\frac{1}{2}f(n) = O(n^{-\beta})$. Поэтому, соединяя наши результаты (6.12.10) — (6.12.15) и снова принимая во внимание, что $(k+1)(1-a) > 0$, получаем

$$S = in^k(I^* - I) + o(n^k) + O\{n^{-\beta+(k+1)(1-a)}\}.$$

Если теперь k удовлетворяет условию (6.12.2), то

$$-\beta + (k+1)(1-a) < k$$

и $\frac{S}{n^k} \to i(I^* - I)$, так что ряд (6.12.1) суммируем (C, k), к сумме $i(I^* - I)$.

Для доказательства отрицательного утверждения теоремы нам нужно оценить I_2 более точно. Заменяя $\frac{1}{(n+iy)^b}$ на $\frac{1}{n^b}$ и $Ai(n+iy)^a$ на $Ain^a - Aan^{a-1}y$, получаем

$$i\frac{e^{Ain^a}}{n^b}\int \frac{\Gamma(k+1-iy)}{\Gamma(1-iy)} e^{-Aan^{a-1}y}\,dy.$$

n^{a-1} мало при большом n, так что в интеграле преобладает часть, соответствующая большим y; поэтому отношение гамма-функций можно заменить на $(-iy)^k$. Это приводит к заключению, что

$$-I_2 \sim -i\frac{e^{Ain^a}}{n^b}\int (-iy)^k e^{-Aan^{a-1}y}\,dy =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(k+1)\pi i}\frac{\Gamma(k+1)}{(Aa)^{k+1}} n^{-b+(k+1)(1-a)} e^{Ain^a}.$$

Строгое обоснование этого заключения не представляет никаких специальных трудностей и мы его опускаем. Полученное соотношение показывает, что при $(k+1)a + \beta \leqslant 1$ в S входит колеблющийся член порядка не ниже n^k, так что рассматриваемый ряд не суммируем.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ VI

§ 6.1. Теорему 63 доказал Hardy, *PLMS* (2), **8** (1910), 301 — 320, за исключением пункта относительно суммируемости средними отрицательного порядка, добавленного Харди и Литтльвудом (l. c. в примечании к § 5.7); а теорему 64 доказал Landau, *PMF*, **21** (1910), 97 — 177 (103 — 113). Принятый здесь метод доказательства, основанный на теоремах 65 и 66, принадлежит Харди. Было предложено также значительное число других доказательств, особенно для частного случая $k = 1$, важного в теории рядов Фурье. См., например, Bromwich, 423 — 426; Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых (М.-Л., 1933, т. II, стр. 145 — 146); Kloosterman, *JLMS*, **15** (1940), 91 — 96; Mordell, *JLMS*, **3** (1928), 86 — 89, 119 — 121, 170 — 172.

Теорема 67 была найдена Hardy, *PLMS* (2), **12** (1913), 174 — 180, в более общей форме, предполагающей, что ряд $\sum a_n$ суммируем риссовскими средними *какого-то* порядка. Доказательство Харди содержало пробел, который восполнил Ananda Rau, *PLMS* (2), **17** (1918), 334 — 336. Принята здесь форма доказательства для случая $k = 1$ принадлежит Бозанкэ.

Харди ошибочно утверждал достаточность условия $a_n > -H\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}$; эту ошибку исправил Ananda Rau, *PLMS* (2), **30** (1930), 367 — 372. С другой стороны, одновременное выполнение условий

$$(1)\quad a_n > -H\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}, \quad (2)\quad \lim a_n \geqslant 0$$

уже достаточно: в этом случае $A(x)$ медленно колеблется в смысле § 6.2. Эта теорема содержится в одной теореме, которую доказал Szász, *Münchener Sitzungsberichte* (1929), 325 — 340; см. примечание к § 7.7. Если $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$, то условие (1) влечет условие (2), так что достаточно одного условия (1).

§ 6.2. Определения медленно колеблющихся и медленно убывающих функций ввел R. Schmidt, *MZ*, **22** (1924), 89 — 152 (127 — 142). Мы пользуемся двумя формами этих определений: одной, относящейся к интервалу $(0, \infty)$, и другой — к $(-\infty, \infty)$: см. § 12.2; здесь рассматривается первая форма.

§ 6.3. Hardy and Littlewood, *MM*, **43** (1914), 134 — 147. В действительности сходимость ряда $\sum n^{p-1}|a_n|^p$ является достаточным условием и для соответствующей теоремы относительно суммируемости (A).

§ 6.4. Теорему 70, для целых значений параметров, доказали (хотя и не вполне явно) Hardy and Littlewood, *PLMS* (2), **11** (1913), 411 — 478 (437). Эта теорема представляет собой случай $\beta = 0$ их теоремы 19 с „ограниченным $(C, r-k)$, суммируемым (C, r)" в ее условиях Харди и Литтльвуд сформулировали свой результат только для $\beta > 0$, но доказательство сохраняет силу и для $\beta = 0$.

По поводу теоремы с общими значениями параметра k и ее обобщений, важных для теории рядов Дирихле, имеется обширная литература. См., например, Ananda Rau, *PLMS* (2), **34** (1932). 414 — 440; Andersen, Studier, 55 и след.; Bosanquet, *JLMS*, **18** (1943), 239 — 248. M. Riesz, *MTE*, **29** (1911), 283 — 301, и *AUH*, **1** (1923), 104 — 113; Zygmund, *MZ*, **25** (1926), 291 — 296. Дальнейшие литературные указания см. в работе Бозанкэ.

§§ 6.5 — 6.6. Теорему 71 независимо друг от друга доказали Bohr [*CR*, **148** (1909), 75 — 80; Bidrag, 61 — 69] и Hardy, [*PLMS* (2), **6** (1908), 255 — 264; и **8** (1910), 277 — 294 (278 — 281), где исправлена ошибка, допущенная в первой работе]. Ряд частных случаев этой теоремы доказали ранее различные авторы, в частности, Bromwich, *MA*, **65** (1908), 350 — 369, и Hardy [*PLMS* (2), **4** (1906), 247 — 265, и *MA*, **64** (1907), 77 — 94].

На общие значения k теорему распространил Andersen, Studier, 44 — 55. Упрощенные доказательства теоремы для общих значений k, а также дальнейшие ее обобщения дали Andersen, *PLMS* (2), **27** (1928), 39 — 71, и Bosanquet, *JLMS*, **17** (1942), 166 — 173.

Необходимость условий (в смысле, разъясненном на стр. 168) доказал для целых k Fekete, *MTE*, **35** (1917), 309 — 324, а для общих k — Bosanquet в только что указанной работе.

Имеется ряд теорем, содержащих обе теоремы 71 и 76, особенно для целых параметров. Так, Bosanquet, *PLMS* (2), **50** (1948), 295 — 304, доказал, что *если k и l целые, $-1 \leqslant l \leqslant k$ и p — любое вещественное число, то для того, чтобы ряд $\sum a_n f_n$ был суммируем* (C, l), *когда* $A_n^k = O(n^{k+p})$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_n = o(n^{l-p-k}), \quad \sum n^{p+k}|\Delta^{k+1} f_n| < \infty.$$

Если, например, $p = 0$, то получаем необходимые и достаточные условия для того, чтобы ряд $\sum a_n f_n$ был суммируем (C, l), когда ряд $\sum a_n$ суммируем или ограничен (C, k). Этот случай теоремы сформулировал без доказательства Schur, *JM*, **151** (1921), 79—111 (106), и доказал Bosanquet, *JLMS*, **20** (1945), 39—48. При $l=k$ он сводится к теореме 71; имеется также вариант, когда ряд $\sum a_n$ суммируем (C, k), а $f_n = O(n^{l-k})$.

Частный случай $l=0$, $p=0$ значительно старше. Необходимость условий теоремы в этом случае доказал Bromwich в указанной выше работе для целого k и Chapman, l. c. в примечании к § 5.5, для общего k, а достаточность — Kojima, *TMJ*, **12** (1917), 291—326. См. Moore, Convergence factors, 45—46.

Позже Bosanquet, *PLMS* (2), **50** (1949), 482—496, распространил свою теорему с немного более узкими условиями $0 \leqslant l \leqslant k$, $p \geqslant 0$, на нецелые k и l.

Теорему 76 сформулировал (во всяком случае для целых k) M. Riesz, *CR*, **148** (1909), 1658—1660, и доказал, для общих k и целых s, Chapman, l. c. в примечании к § 5.5, 388—389. Доказательство для общих k и s дал Zygmund, *BAP* (1927), 309—331; доказательство Ananda Rau в его работе, указанной в примечании к § 6.4, содержало пробел, который восполнил Minakshisundaram, *JIMS* (2), **2** (1936), 147—155.

Имеются аналоги этих теорем для „абсолютной суммируемости". Ряд $\sum a_n$ называют абсолютно суммируемым (C, k), или суммируемым $|C, k|$, если

$$\sum |C_n^k(A) - C_{n-1}^k(A)| < \infty.$$

В частности, суммируемость $|C, 0|$ есть абсолютная сходимость. Определение абсолютной суммируемости принадлежит Фекете. В этой книге абсолютная суммируемость не будет рассматриваться; укажем лишь, что теоремы о ней, соответствующие теореме 71, а также другим теоремам этих параграфов, доказали Бозанкэ, Фекете и Когбетлианц. Литературные ссылки можно найти в книге Kogbetliantz, а также в указанных выше работах Бозанкэ.

Сделаем еще следующее замечание. Мы выводили теорему 76 (для целых k и s) из теорем 47, 71 и 65. Но можно было бы вывести ее и из теорем 47 и 66. Действительно, для $k=0$ это тривиально. Если же $k>0$, то для того, чтобы ряд $\sum \frac{a_n}{n}$ был суммируем (C, $k-1$), необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum \frac{A_n^{k-2}}{n^k}$ сходился, а это легко доказывается суммированием по частям. Доказательство сохраняет силу и для нецелых k.

Можно также видоизменить доказательство так, чтобы избежать обращения к теореме 47.

§ 6.7. Теоремы 77 и 78 доказали Hardy and Littlewood, *MZ*, **19** (1924), 67—96; они тесно связаны с другими теоремами, которые независимо доказал Knopp, там же, 97—113. Позже Andersen, *PLMS* (2), **27** (1928), 39—71, и Hardy and Littlewood, там же, 327—348, видоизменили и обобщили их в различных направлениях. См. Kogbetliantz, 33.

§ 6.8. Как обычно, трудно дать точные литературные указания относительно интегральных теорем. По поводу теоремы равносильности см. Landau, *Leipziger Sitzungsberichte*, **65** (1913), 131—138; по поводу аналога теоремы 71 — Hardy, *MM*, **40** (1910), 108—112; по поводу вопросов, затронутых в конце параграфа, — M. E. Grimshaw, *JLMS*, **9** (1934), 94—102.

§§ 6.9—6.10. Излагаемые здесь результаты принадлежат в основном Чэпмену и Кноппу, l. c. в примечании к § 5.5.

§ 6.11. Ограниченную сходимость ряда (6.11.1) и равномерную сходимость ряда (6.11.4) доказал, не столь прямым путем, Hardy, *QJM*, **44** (1913), 147—160. См. также Landau, Ergebnisse, 68—69.

Наиболее интересный случай теоремы 83, когда $\sum a_n z^n = \frac{1}{(1-z)^{\beta+1}}$, равносилен одной теореме, которую доказал M. Riesz, *AUH*, **1** (1923), 114—126. В более явном виде ее сформулировал Fejér, *MZ*, **24** (1925), 267—284 (269). Szegö, *MZ*, **25** (1926), 172—187, дает другое доказательство, основанное на теореме 22 Калузы, а также обобщение на случай $\beta > 0$.

Доказательство теоремы 83 при $\beta = 0$ несколько сложнее, чем при $\beta < 0$. Для случая $a_n = n^{i\gamma}$ его подробно провели Hardy and Rogosinski, *OQJ*, **16** (1945), 49—58.

§ 6.12. Основной результат принадлежит Hardy, *PLMS* (2), **9** (1911), 126—144; но принятое там изложение не вполне удовлетворительно для наших теперешних целей, поскольку оно основано на оперировании риссовскими средними § 5.16, в которых ω принимает только целые значения. Нетрудно видоизменить рассуждение так, чтобы были приняты во внимание и нецелые ω, и доказать, что ряд суммируем (R, n, k) при $(k+1)\alpha + \beta > 1$; но тогда для установления суммируемости (C, k) нам потребуется сложно доказываемая теорема 58 (установленная в § 5.16 лишь для целых k).

Глава VII

ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

7.1. Теоремы абелева и тауберова типов. В этой главе мы займемся классом теорем, обычно именуемых теоремами „тауберова“ типа, или „тауберовами“ теоремами. В § 6.1 мы уже пользовались этим термином и вкратце разъяснили характер тауберовых теорем. Но доказываемые здесь теоремы более трудны, а их изложение более систематично, так что будет лучше начать с более точного определения смысла термина „тауберовы“, равно как и противополагаемого ему термина „абелевы“. Нам будет удобно пользоваться обозначениями, несколько отличными от применявшихся до сих пор.

Мы будем обозначать ряд и интеграл

$$\sum a_n, \quad \int a(t)\,dt \tag{7.1.1}$$

через S и J, а их значения в случае сходимости через s и j (так что, например, $S=s$ будет означать, что ряд $\sum a_n$ сходится к s). Мы будем писать

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad j(t) = \int_0^t a(u)\,du,$$

а также

$$S(y) = \sum a_n e^{-ny}, \quad J(y) = \int a(t)\,e^{-yt}\,dt,$$

когда ряд и интеграл сходятся для $y > 0$. Запись $S=s$ (A) или $J=j$ (A) будет означать, что $S(y) \to s$ или $J(y) \to j$ при $y \to 0$, а запись $S=s$ (C) или $J=j$ (C) — что ряд или интеграл (7.1.1) суммируем (C, 1) к s или j; суммируемость по Чезаро какого-либо другого порядка нам не встретится. Предположения

$$S=s,\ J=j,\ S=s\ \text{(A)},\ J=j\ \text{(A)},\ S=s\ \text{(C)},\ J=j\ \text{(C)}$$

будут кратко обозначаться символами

$$K,\ K',\ K_A,\ K'_A,\ K_C,\ K'_C$$

соответственно.

Теорема „абелева“ типа есть, грубо говоря, теорема, утверждающая, что из правильного поведения последовательности функций вытекает правильное поведение некоторых средних от членов этой последовательности. Так, теоремами абелева типа являются предложения: „если $s_n \to s$, то

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \to s\text{“}$$

или „K влечет K_C“, равно как и их интегральный аналог „K' влечет K'_C“. Теорема Абеля о непрерывности степенного ряда есть также теорема абелева типа (отсюда и пошло это наименование). В самом деле,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \frac{s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots}{1 + x + x^2 + \ldots},$$

если $0 < x < 1$ и ряды сходятся; правая часть представляет собой определенное среднее от s_n; и теорема Абеля утверждает, что если s_n стремится к s, то и это среднее стремится к s, когда $x \to 1$. Более обще, всякая теорема, устанавливающая регулярность (§ 3.2) некоторого метода суммирования, есть теорема абелева типа.

Прямое обращение теоремы абелева типа обычно оказывается неверным. Так, например, ясно, что если теорема регулярности для какого-либо метода суммирования обратима, то этот метод тривиален, в том смысле, что он суммирует лишь сходящиеся ряды. Однако существует много важных теорем, которые можно было бы назвать *исправленными обращениями теорем абелева типа*. Так, мы видели в § 6.1, что неверная теорема „$\sigma_n \to s$ влечет $s_n \to s$“ или „K_C влечет K“ становится верной, если подчинить s_n надлежащему дополнительному условию, как, например, $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Такие теоремы называют теоремами „тауберова“ типа, или „тауберовыми“, по имени А. Таубера, впервые доказавшего одну из простейших таких теорем; а дополнительное условие называют „тауберовым условием“.

Наиболее важными из тауберовых условий, с которыми мы будем иметь дело, являются

$$(o) \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (O) \quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (O_L) \quad a_n > -\frac{H}{n},$$

$$(O_R) \quad a_n < \frac{H}{n}$$

и их интегральные аналоги

$$(o') \quad a(t) = o\left(\frac{1}{t}\right), \qquad (O') \quad a(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \qquad (O'_L) \quad a(t) > -\frac{H}{t},$$

$$(O'_R) \quad a(t) < \frac{H}{t}.$$

Здесь H — положительная постоянная, а условия, наложенные на $a(t)$, предполагаются выполненными для достаточно больших значений t. Поведение функции $a(t)$ для *малых* t несущественно; мы будем обычно предполагать только, что она интегрируема на конечных интервалах $(0, T)$.

Мы будем также пользоваться двумя обобщениями условий (o) и (o'), а именно

$$(\omega) \qquad a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = o(n)$$

и

$$(\omega') \qquad \int_0^t ua(u)\,du = o(t).$$

7.2. Первая теорема Таубера. Первой теоремой Таубера была

Теорема 85. *Если* $\sum a_n = s$ (A) *и* $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится к* s,

или „K_A и (o) влекут K“. Интегральный аналог есть „K'_A и (o') влекут K'“. Мы будем именовать это теоремой 85а и таким же образом будем обозначать интегральный аналог любой другой теоремы тауберова типа о рядах приписыванием к ее номеру буквы „а“.

Мы начнем с доказательства теоремы 85а, теорему же 85 выведем как ее следствие; впрочем, можно было бы также доказать теорему 85 непосредственно, путем рассуждения, параллельного применяемому в доказательстве теоремы 85а.

Очевидно, (o') влечет абсолютную сходимость интеграла $J(y)$ для $y > 0$. Далее,

$$j\left(\frac{1}{y}\right) - J(y) = \int_0^{\frac{1}{y}} a(t)\,dt - \int_0^{\infty} e^{-yt}a(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{y}} (1 - e^{-yt})\,a(t)\,dt - \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yt}a(t)\,dt = P - Q.$$

Так как $0 \leqslant 1 - e^{-yt} \leqslant yt$, то

$$P = \int_1^{\frac{1}{y}} O(yt)\,o\left(\frac{1}{t}\right)dt = y\int_0^{\frac{1}{y}} o(1)\,dt = o(1).$$

С другой стороны,

$$Q = \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yt}o\left(\frac{1}{t}\right)dt = o\left(y\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} e^{-yt}\,dt\right) = o\left(\int_1^{\infty} e^{-u}\,du\right) = o(1).$$

Поэтому $j\left(\frac{1}{y}\right) = J(y) + o(1) \to j$ при $y \to 0$, т. е. $j(t) \to j$ при $t \to \infty$.

Чтобы вывести отсюда теорему 85, положим $a(t) = a_n$ для $n \leqslant t < n+1$. Тогда

$$J(y) = \sum a_n \int\limits_n^{n+1} e^{-yt}\,dt = \frac{1}{y} \sum a_n \{e^{-ny} - e^{-(n+1)y}\} =$$

$$= \frac{1-e^{-y}}{y} \sum a_n e^{-ny} = \frac{1-e^{-y}}{y} S(y),$$

так что $S(y) \to s$ влечет $J(y) \to s$. Но $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ влечет $a(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$; тем самым теорема 85 есть следствие теоремы 85а.

7.3. Вторая теорема Таубера. Во второй теореме Таубера предположение (o) заменено на (ω). Это изменяет характер теоремы, поскольку из сходимости ряда S в силу теоремы 26 *следует* (ω), так что (ω) есть *необходимое* условие для K.

Теорема 86. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (A) *к* s, *то* (ω) *является необходимым и достаточным условием сходимости его к* s.

Интегральный аналог гласит: „*Если верно* K'_A, *то* (ω') *необходимо и достаточно для* K'". Здесь, как и в дальнейшем, будет удобно доказывать основную теорему и ее интегральный аналог одновременно, как частные случаи соответствующей теоремы об интегралах Стилтьеса. Мы будем считать известными определения и элементарные свойства „интеграла Римана-Стилтьеса"

$$\int\limits_a^T f(t)\,d\alpha(t)$$

с конечным интервалом интегрирования (a, T). В частности, мы будем опираться на то, что этот интеграл существует, когда одна из функций $f(t)$ или $\alpha(t)$ непрерывна, а другая имеет ограниченное изменение, и что

$$(7.3.1)\qquad \int\limits_a^T f(t)\,d\alpha(t) = f(T)\,\alpha(T) - f(a)\,\alpha(a) - \int\limits_a^T \alpha(t)\,df(t).$$

Всюду далее будет предполагаться, что $\alpha(t)$ — функция с ограниченным изменением, причем $\alpha(0) = 0$. Мы будем также пользоваться равенством

$$(7.3.2)\qquad \int\limits_a^T f(t)\,d\alpha(t) = \int\limits_a^T \frac{f(t)}{g(t)}\,d\beta(t),$$

где $\beta(t) = \int\limits_a^t g(u)\,d\alpha(u)$, f и g непрерывны и $g > 0$.

Интеграл Стилтьеса от a до ∞ определяется формулой

$$\int_a^\infty f(t)\,d\alpha(t) = \lim_{T\to\infty}\int_a^T f(t)\,d\alpha(t).$$

Мы будем иметь дело с интегралами вида

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yt}\,d\alpha(t). \tag{7.3.3}$$

Всюду будет предполагаться, что $I(y)$ сходится для всех положительных y; в этом случае $\alpha(t) = o(e^{yt})$ для всякого $y>0$. Если $\alpha(t)$ абсолютно непрерывна и $\alpha'(t) = a(t)$, то $I(y)$ приводится к $J(y)$. Если $\alpha(t)$ — ступенчатая функция со скачками a_n в точках $t = n$ *), то $I(y)$ приводится к $S(y)$. Следовательно, каждая теорема абелева или тауберова типа, относящаяся к $I(y)$, будет содержать соответствующие теоремы для $J(y)$ и $S(y)$.

Теорема 87. *Если $\alpha(t)\to l$ при $t\to\infty$, то $I(y)$ сходится для $y>0$ и $I(y)\to l$ при $y\to 0$.*

Действительно,

$$I(y) = \lim_{T\to\infty}\left\{\int_0^T e^{-yt}\,d\alpha(t)\right\} = \lim_{T\to\infty}\left\{e^{-yT}\alpha(T) + y\int_0^T e^{-yt}\alpha(t)\,dt\right\} =$$

$$= y\int_0^\infty e^{-yt}\alpha(t)\,dt,$$

так что

$$I(y) \to \lim_{y\to 0} ly\int_0^\infty e^{-yt}\,dt = l.$$

Докажем теперь теорему, содержащую теоремы 86 и 86а.

Теорема 88. *Если $I(y)$ сходится для $y>0$ и $I(y)\to l$ при $y\to 0$, то для того, чтобы $\int d\alpha(t) = l$, т. е. чтобы $\alpha(t)\to l$ при $t\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\beta(t) = \int_0^t u\,d\alpha(u) = o(t) \tag{7.3.4}$$

при $t\to\infty$.

---

*) И $\alpha(+0) - \alpha(0) = \alpha(+0) = a_0$.

Прежде всего, условие *необходимо*, поскольку

$$\beta(t) = t\alpha(t) - \int_0^t \alpha(u)\,du,$$

и потому

$$\frac{\beta(t)}{t} = \alpha(t) - \frac{1}{t}\int_0^t \alpha(u)\,du \to l - l = 0,$$

когда $\alpha(t) \to l$.

С другой стороны, если условие (7.3.4) выполнено, то, принимая во внимание формулу (7.3.2), имеем

$$\alpha(t) - \alpha(1) = \int_1^t d\alpha(u) = \int_1^t \frac{d\beta(u)}{u} = \frac{\beta(t)}{t} - \beta(1) + \int_1^t \frac{\beta(u)}{u^2}\,du =$$

$$= o(1) + O(1) + o\left(\int_1^t \frac{du}{u}\right) = o(\log t) = o(t),$$

так что

$$\gamma(t) = \int_0^t (u+1)\,d\alpha(u) = \beta(t) + \alpha(t) = o(t).$$

Далее,

$$\int e^{-yt}\,d\alpha(t) = \int \frac{e^{-yt}}{t+1}\,d\gamma(t) = y\int \frac{\gamma(t)}{t+1}\,e^{-yt}\,dt + \int \frac{\gamma(t)}{(t+1)^2}\,e^{-yt}\,dt,$$

и так как первый член справа есть $o\left(y\int e^{-yt}\,dt\right) = o(1)$, то

$$\int \delta(t)\,e^{-yt}\,dt = \int \frac{\gamma(t)}{(t+1)^2}\,e^{-yt}\,dt \to l.$$

Но $\delta(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ и потому в силу теоремы 85а $\int \delta(t)\,dt$ сходится к l. Наконец,

$$\int d\alpha(t) = \int \frac{d\gamma(t)}{t+1} = \int \frac{\gamma(t)}{(t+1)^2}\,dt = \int \delta(t)\,dt = l.$$

Тем самым условие (7.3.4) не только необходимо, но и достаточно. Специализируя $\alpha(t)$, как указано выше, получаем теоремы 86 и 86а.

7.4. Применения к общим рядам Дирихле. (1) Если $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_{n+1} > \lambda_n$, $\lambda_n \to \infty$ и $\alpha(t)$ — ступенчатая функция со скачками a_n в точках λ_n, то

(7.4.1) $$I(y) = \sum a_n e^{-y\lambda_n}.$$

Тем самым такая специализация функции $\alpha(t)$ в любой из наших теорем приводит к соответствующей теореме о рядах Дирихле. Так, теорема 87 приводит к теореме регулярности для (A, λ)-метода суммирования. Не рассматривая сколько-нибудь подробно свойства общего ряда (7.4.1), мы ограничимся иллюстрацией наших замечаний доказательством теоремы тауберова типа для рядов Дирихле, соответствующей теореме 85.

Теорема 89. *Если* $S(y)=\sum a_n e^{-\lambda_n y}$ *сходится для* $y>0$, $S(y)\to s$ *при* $y\to 0$ *и*

$$a_n = o\left(\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \tag{7.4.2}$$

то ряд $\sum a_n$ *сходится к* s.

Применим теорему 88, взяв в ней

$$\alpha(t)=\sum_{\lambda_n<t} a_n.$$

Тогда $I(y)=S(y)\to s$. Далее, если λ_ν — последнее λ_n, меньшее чем t, то

$$\beta(t)=\int_0^t u\,d\alpha(u)=\sum_{\lambda_n<t}\lambda_n a_n=$$
$$=\lambda_0 a_0+\sum_1^\nu o(\lambda_n-\lambda_{n-1})=o(\lambda_\nu)=o(t).$$

Тем самым условия теоремы 88 выполнены, и $\alpha(t)\to s$, т. е. $\sum a_n=s$.

(2) Условие (7.4.2), грубо говоря, тем сильнее, чем медленнее λ_n стремится к бесконечности; так, оно принимает вид $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, если $\lambda_n=n$, и $a_n=o\left(\frac{1}{n\log n}\right)$, если $\lambda_n=\log n$. Расходящийся ряд, удовлетворяющий первому условию, в силу теоремы 85 не может быть суммируемым (A); но он вполне может быть суммируемым $(A, \log n)$. Последний метод не так „мощен“ (пользуясь языком §§ 3.8 и 4.12), как A-метод, ибо он применим только к таким рядам $\sum a_n$, для которых $\sum \frac{a_n}{n^y}$ сходится при всех положительных y. Так, он не применим к ряду $1-2+3-\ldots$; однако, как показывает теорема 28 (§ 4.8), в границах своей применимости он, по меньшей мере, столь же эффективен; а пример ряда $\sum \frac{1}{n^{1+ic}}$ показывает, что в некоторых случаях он даже эффективней (см. § 7.9).

7.5. Более глубокие теоремы тауберова типа. Мы переходим теперь к ряду более трудных теорем, из которых наиболее известной и в некоторых отношениях наиболее типичной является

Теорема 90. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (A) *к сумме* s *и* $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *то* $\sum a_n$ *сходится к* s.

Иными словами, „K_A и (O) влекут K". Эта теорема представляет собой непосредственное обобщение теоремы Таубера 85: условие (o) этой теоремы заменено на (O). Сделаем несколько замечаний вводного характера.

(1) Если ряд $\sum a_n$ суммируем (C, k) для какого-либо k, то, по теореме 55, он суммируем (A). Поэтому теорема 90 содержит теорему 63 гл. VI. Вообще, любая теорема тауберова типа для суммируемости (A) содержит теорему для суммируемости (C, k); впрочем, независимое доказательство последних теорем обычно легче.

(2) Теоремы §§ 7.2—7.4 можно естественным образом варьировать, заменив „o" на „O" *и в предположениях и в заключениях*, причем доказательство каждой полученной так „O"-теоремы будет представлять собой тривиальную вариацию доказательства соответствующей „o"-теоремы. Так, теорема 85 имеет своим вариантом следующую теорему:

„*Если* $s_n = O(1)$ (A), *т. е. если* $S(y)$ *ограничено при* $y \to 0$, *и* $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *то* $s_n = O(1)$";

доказательство ее представляет собой слегка упрощенный вариант доказательства теоремы 85. Иногда мы будем *пользоваться* такими теоремами, не считая их требующими особого доказательства; для обозначения их мы будем приписывать к номеру соответствующей „o"-теоремы [O]; например, только что сформулированная теорема будет называться теоремой 85 [O]. Заметим, что из теорем, излагаемых в следующих параграфах, действительно важными будут те, в которых, как в теореме 90, в одном из предположений стоит O, а в заключении — o.

Аналогично и интегральный аналог, теорема Xa, будет иметь свою „O"-форму, теорему Xa [O].

(3) Иногда мы будем пользоваться односторонними условиями типа $a_n > -H\varphi(n)$ или $a_n < H\varphi(n)$, где a_n вещественны, а H и $\varphi(n)$ положительны. Мы будем употреблять для них символическую запись $a_n = O_L\{\varphi(n)\}$ или соответственно $a_n = O_R\{\varphi(n)\}$. Так, $a_n > -\frac{H}{n}$ или $a_n = O_L\left(\frac{1}{n}\right)$ есть условие O_L из § 7.1. Фактически наши теоремы будут содержать только условия типа O_L, поскольку каждую теорему с O_R можно получить из соответствующей теоремы с O_L простым обращением знака.

Сформулируем теперь ряд теорем, которые мы будем рассматривать одновременно с теоремой 90.

Теорема 91. *Если* $\sum a_n = s$ (A), a_n *вещественны и* $a_n = O_L\left(\frac{1}{n}\right)$, *то* $\sum a_n = s$.

Теорема 92. *Если* $\sum a_n = s$ (A) *и* $s_n = O(1)$, *то* $\sum a_n = s$ (C, 1).

Теорема 93. *Если* $\sum a_n = s$ (A) *и* $s_n \geqslant 0$, *то* $\sum a_n = s$ (C, 1).

Теорема 94. *Если* $\sum a_n = s$ (A), a_n *вещественны и* $s_n = O_L(1)$, *то* $\sum a_n = s$ (C, 1).

Теорема 95. *Если при* $x \to 1$

$$f(x) = \sum a_n x^n \sim \frac{C}{1-x}, \tag{7.5.1}$$

а $a_n = O(1)$, *то* $s_n \sim Cn$.

Теорема 96. *Если имеет место соотношение* (7.5.1) *и* $a_n \geqslant 0$, *то* $s_n \sim Cn$.

Теорема 97. *Если имеет место соотношение* (7.5.1), a_n *вещественны и* $a_n = O_L(1)$, *то* $s_n \sim Cn$.

В последних трех теоремах соотношения (7.5.1) и $s_n \sim Cn$ при $C = 0$ следует понимать в том смысле, что $(1-x)f(x) \to 0$, соответственно $s_n = o(n)$. Так как $1 - e^{-y} \sim y$ при $y \to 0$, то (7.5.1) равносильно соотношению $S(y) \sim \frac{C}{y}$.

Все эти теоремы — одинакового уровня трудности и каждую из них сравнительно нетрудно вывести из любой другой; наиболее интересные из этих дедукций будут даны в §§ 7.7 и 7.8. В некоторых случаях такие дедукции совершенно тривиальны. Так, теорема 93 есть, очевидно, частный случай теоремы 94, а теорема 96 — теоремы 97. Теоремы 90, 92 и 95 при вещественных a_n являются соответственно частными случаями теорем 91, 94 и 97, а при произвольных a_n могут быть сведены к частным случаям этих теорем путем отделения вещественных и мнимых частей. Таким образом, в доказательстве нуждаются только теоремы 91, 94 и 97.

Но теорема 94 есть следствие теоремы 97. Действительно, если условия теоремы 94 выполнены, то

$$\sum s_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum a_n x^n \sim \frac{s}{1-x}$$

и $s_n = O_L(1)$. Поэтому, принимая, что теорема 97 справедлива, и применяя ее к ряду $\sum s_n x^n$, получаем

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_n \sim sn$$

или $\sum a_n = s$ (C, 1).

Наконец, хотя теорема 96 является частным случаем теоремы 97, последняя есть следствие первой. Действительно, если условия теоремы 97 выполнены и $a_n > -H$, то $b_n = a_n + H > 0$, и

$$\sum b_n x^n = \sum a_n x^n + \frac{H}{1-x} \sim \frac{C+H}{1-x}.$$

Отсюда (допуская справедливость теоремы 96) заключаем, что

$$b_0+b_1+\ldots+b_n \sim (C+H)\,n,$$

и, следовательно, $s_n \sim Cn$.

Итак, достаточно доказать теоремы 91 и 96. Интегральные аналоги рассматриваемых теорем таким же образом сводятся к теоремам 91а и 96а. Теоремы 96 и 96а мы докажем непосредственно, а теоремы 91 и 91а выведем из них.

7.6. Доказательство теорем 96 и 96а. Мы докажем теоремы 96 и 96а как частные случаи соответствующей теоремы о стилтьесовских интегралах.

Теорема 98. *Если $\alpha(t)$ — возрастающая функция,*

$$I(y)=\int e^{-yt}\,d\alpha(t)$$

сходится для $y>0$ и $I(y)\sim \frac{C}{y}$ при $y\to 0$, где $C\geqslant 0$, то $\alpha(t)\sim Ct$.

Нам понадобятся две вспомогательные теоремы.

Теорема 99. *Для каждой вещественной функции $g(x)$, интегрируемой по Риману на интервале $(0, 1)$, существуют многочлены $p(x)$ и $P(x)$ такие, что $p(x)<g(x)<P(x)$ и*

$$\int_0^1 \{P(x)-p(x)\}\,dx=\int_0^\infty e^{-t}\{P(e^{-t})-p(e^{-t})\}\,dt<\varepsilon.$$

(I) Пусть сначала g равна 1 на интервале (α, β), где $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$, и 0 вне его. Очевидно, можно найти непрерывную функцию h *) такую, что

$$g\leqslant h,\quad \int (h-g)\,dx<\varepsilon.$$

По теореме Вейерштрасса, существует многочлен Q такой, что $|h-Q|<\varepsilon$. Полагая $P=Q+\varepsilon$, имеем тогда $g\leqslant h<P$ и

$$\int (P-g)\,dx\leqslant\int (P-Q)\,dx+\int |Q-h|\,dx+\int (h-g)\,dx<3\varepsilon.$$

Аналогично убеждаемся в существовании многочлена p такого, что $p<g$ и $\int (g-p)\,dx<3\varepsilon$. Многочлены p и P удовлетворяют требованиям теоремы (с заменой 6ε на ε). Тем самым теорема справедлива для рассмотренной функции g.

*) Которая на (α, β) может совпадать с g. Всюду в дальнейшем интегралы по x с неуказанными пределами интеграции берутся от 0 до 1, а интегралы по t — от 0 до ∞.

(II) Умножением на постоянные и сложением получаем, что теорема справедлива для любой ступенчатой функции с конечным числом скачков.

(III) Пусть теперь g — любая интегрируемая по Риману функция. Тогда существуют ступенчатые функции g_1 и g_2 с конечным числом скачков такие, что

$$g_1 \leqslant g \leqslant g_2, \quad \int (g_2 - g_1)\, dx < \varepsilon.$$

Для этих функций, по доказанному, существуют соответственно многочлены p_1, P_1 и p_2, P_2, обладающие описанными в теореме свойствами. Тогда $p_1 < g < P_2$,

$$\int (P_2 - g_2)\, dx < \varepsilon, \quad \int (g_1 - p_1)\, dx < \varepsilon$$

и

$$\int (P_2 - p_1)\, dx = \int \{(P_2 - g_2) + (g_2 - g_1) + (g_1 - p_1)\}\, dx < 3\varepsilon.$$

Тем самым теорема доказана.

Наша вторая вспомогательная теорема требует несколько бóльших сведений об интеграле Стилтьеса, чем до сих пор предполагалось. Мы будем считать известным, что если f и g — функции с ограниченным изменением, заданные на конечном интервале, не имеющие общих точек разрыва, то каждая из них интегрируема относительно другой. Формула интегрирования по частям сохраняет и здесь силу, но она нам не понадобится. Интегралы с верхним пределом интегрирования ∞ определяются так же, как в § 7.3.

Теорема 100. *Пусть $\alpha(t)$ — возрастающая функция от t, $I(y)$ сходится для $y > 0$, $I(y) \sim \frac{C}{y}$ и $g(x)$ — функция с ограниченным изменением на отрезке* $[0, 1]$. *Тогда*

$$\chi(y) = \int e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t)$$

существует для всех положительных значений y, за исключением значений $\frac{\tau}{\omega}$, где ω — точки разрыва для α, а τ — для $g(e^{-t})$, и

$$\chi(y) \sim \frac{C}{y} \int e^{-t} g(e^{-t})\, dt, \tag{7.6.1}$$

когда $y \to 0$ по любой последовательности положительных чисел, не содержащей указанных исключительных значений.

Исключительные значения y — это общие точки разрыва функций $g(e^{-yt})$ и $\alpha(t)$: для них $\chi(y)$ не определена. Поскольку точек ω и τ, самое большее, — счетное множество, то мы исключили не более счетного множества значений y_k аргумента y.

Так как функции с ограниченным изменением интегрируемы по Риману, то в силу теоремы 99 мы можем выбрать многочлены p и P так, чтобы

$$p<g<P, \qquad \int e^{-t}\{P(e^{-t})-p(e^{-t})\}\,dt<\varepsilon.$$

Тогда

$$\int e^{-t}p(e^{-t})\,dt<\int e^{-t}g(e^{-t})\,dt<\int e^{-t}P(e^{-t})\,dt;$$

так как $\alpha(t)$ — возрастающая функция, то также

$$\int e^{-yt}p(e^{-yt})\,d\alpha(t)\leqslant\int e^{-yt}g(e^{-yt})\,d\alpha(t)\leqslant\int e^{-yt}P(e^{-yt})\,d\alpha(t)$$

для $y\neq y_k$. Но

$$\int e^{-yt}e^{-nyt}\,d\alpha(t)=\int e^{-(n+1)yt}\,d\alpha(t)\sim\frac{C}{(n+1)y}=\frac{C}{y}\int e^{-t}e^{-nt}\,dt,$$

и, следовательно,

$$\int e^{-yt}P(e^{-yt})\,d\alpha(t)\sim\frac{C}{y}\int e^{-t}P(e^{-t})\,dt.$$

Поэтому, когда $y\to 0$ по любой последовательности, не содержащей значений y_k, имеем

$$\overline{\lim_{y\to 0}}\; y\int e^{-yt}g(e^{-yt})\,d\alpha(t)\leqslant\overline{\lim_{y\to 0}}\; y\int e^{-yt}P(e^{-yt})\,d\alpha(t)=$$
$$=C\int e^{-t}P(e^{-t})\,dt<C\int e^{-t}g(e^{-t})\,dt+C\varepsilon. \tag{7.6.2}$$

Аналогично, беря p вместо P, получаем

$$\underline{\lim_{y\to 0}}\; y\int e^{-yt}g(e^{-yt})\,d\alpha(t)>C\int e^{-t}g(e^{-t})\,dt-C\varepsilon. \tag{7.6.3}$$

Из (7.6.2) и (7.6.3) и следует утверждаемое соотношение (7.6.1).

Мы можем теперь доказать теорему 98. Как обычно, мы принимаем, что $\alpha(0)=0$. Положим

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{при } \dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant 1,\\[2mm] 0 & \text{при } 0\leqslant x<\dfrac{1}{e},\end{cases}$$

так что

$$g(e^{-t})=\begin{cases}e^{t} & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } t>1.\end{cases}$$

Тогда

$$\chi(y)=\int_0^\infty e^{-yt}g(e^{-yt})\,d\alpha(t)=\int_0^{\frac{1}{y}}d\alpha\; =\alpha\left(\frac{1}{y}\right).$$

Далее,

$$\int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t})\, dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Поэтому в силу теоремы 100 $\alpha\left(\frac{1}{y}\right) \sim \frac{C}{y}$ при $y \to 0$, т. е. $\alpha(t) \sim Ct$ при $t \to \infty$, причем в обоих случаях пропускается некоторое не более чем счетное множество значений аргумента. В рассматриваемом случае имеется точно одно τ, а именно 1, и исключенными значениями аргумента t являются точки разрыва функции $\alpha(t)$. Таким образом, $\alpha(t) \sim Ct$, когда $t \to \infty$, пробегая точки непрерывности функции $\alpha(t)$. Наконец, в силу возрастания $\alpha(t)$ это соотношение справедливо без всяких ограничений.

Теорема 98 содержит как теорему 96, так и ее интегральный аналог — теорему 96а. Действительно, если $\alpha(t)$ — ступенчатая функция со скачками $a_n \geqslant 0$ в точках $t = n$, то

$$I(y) = S(y) = \sum a_n e^{-ny},$$

и $S(y) \sim \frac{C}{y}$ влечет $s_n \sim Cn$. Это — теорема 96. Аналогично, если $\alpha(t)$ абсолютно непрерывна, и $\alpha'(t) = a(t)$, то получаем теорему 96а.

7.7. Доказательство теорем 91 и 91а. Мы можем теперь доказать теорему, содержащую теоремы 91 и 91а. Для этого нам потребуются еще две вспомогательные теоремы.

Теорема 101. *Если $f(y)$ дважды дифференцируема для положительных значений y и*

(7.7.1) $$f(y) \to l,$$

(7.7.2) $$f''(y) > -\frac{K}{y^2}$$

при $y \to 0$, то $yf'(y) \to 0$.

Это — теорема важного типа, и будет поучительно дать два ее доказательства.

(1) Если y и $y + \eta$ положительны, то

(7.7.3) $$f(y+\eta) - f(y) = \eta f'(y) + \frac{1}{2}\eta^2 f''(y + \theta\eta),$$

где $0 < \theta < 1$; отсюда

(7.7.4) $$f'(y) = \frac{f(y+\eta) - f(y)}{\eta} - \frac{1}{2}\eta f''(y + \theta\eta).$$

Выберем δ так, чтобы $0 < \delta < 1$ и

(7.7.5) $$\frac{K\delta}{2(1-\delta)^2} < \varepsilon,$$

и применим формулу (7.7.4) к $\eta = \delta y$ и $\eta = -\delta y$.

Возьмем сначала $\eta = \delta y$. Тогда соотношения (7.7.1), (7.7.2), (7.7.4) и (7.7.5) дают

$$f'(y) \leqslant o\left(\frac{1}{\delta y}\right) + \frac{K\delta y}{2(y+\theta\delta y)^2} \leqslant o\left(\frac{1}{\delta y}\right) + \frac{K\delta}{2y} \leqslant o\left(\frac{1}{\delta y}\right) + \frac{\varepsilon}{y},$$

и, значит,

$$\overline{\lim}\, yf'(y) \leqslant \varepsilon.$$

С другой стороны, при $\eta = -\delta y$ они дают

$$f'(y) \geqslant o\left(\frac{1}{\delta y}\right) - \frac{K\delta y}{2(y-\theta\delta y)^2} \geqslant o\left(\frac{1}{\delta y}\right) - \frac{K\delta}{2(1-\delta)^2 y} \geqslant o\left(\frac{1}{\delta y}\right) - \frac{\varepsilon}{y},$$

так что

$$\underline{\lim}\, yf'(y) \geqslant -\varepsilon.$$

Следовательно, $yf'(y) \to 0$.

(2) Заметим сперва, что если $\varphi(y) = f'(y) - \frac{K}{y}$, то

$$\varphi'(y) = f''(y) + \frac{K}{y^2} > 0.$$

Таким образом, φ есть возрастающая функция, имеющая конечную производную φ' для каждого y, и потому φ есть интеграл от φ' *). А в таком случае f' есть интеграл от f''.

Если $yf'(y)$ не стремится к нулю, то для некоторого положительного H и последовательности значений y, стремящейся к нулю, выполняется одно из неравенств

$$f'(y) > \frac{H}{y} \quad \text{или} \quad f'(y) < -\frac{H}{y}. \tag{7.7.6}$$

Пусть, например, выполняется первое из этих неравенств для значений $y = Y$. Если тогда

$$\delta = \frac{H}{2K}, \quad Y \leqslant y \leqslant Y + \delta Y,$$

то

$$f'(y) = f'(Y) + \int_Y^y f''(u)\,du \geqslant \frac{H}{Y} - K\int_Y^y \frac{du}{u^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{H}{Y} - K\int_Y^{Y+\delta Y} \frac{du}{Y^2} = \frac{H}{Y} - \frac{K\delta}{Y} = \frac{H}{2Y},$$

откуда

$$f(Y+\delta Y) - f(Y) = \int_Y^{Y+\delta Y} f'(u)\,du \geqslant \frac{H}{2Y}\delta Y = \frac{H^2}{4K},$$

*) См., например, Титчмарш, Теория функций, стр. 411.

в противоречие с соотношением (7.7.1). Аналогично, взяв интервал

$$Y-\delta Y \leqslant y \leqslant Y,$$

получим противоречие, отправляясь от второго из неравенств (7.7.6). Следовательно, $f'(y)=o\left(\frac{1}{y}\right)$.

Теперь мы можем доказать следующее предложение.

Теорема 102. *Пусть* (I) $I(y)$ *сходится для* $y>0$ *и* $I(y)\to l$ *при* $y\to 0$; (II) *существует такая функция* $\beta(t)$, *что* $\beta(0)=0$, $\beta(t)\sim t$, *и*

$$\gamma(t)=L\beta(t)+\int_0^t u\,d\alpha(u) \tag{7.7.7}$$

для некоторого положительного L *есть возрастающая функция от* t. *Тогда* $\alpha(t)\to l$.

Из определения функции $\beta(t)$ следует, что она представляет собой разность двух ограниченных возрастающих функций и потому имеет ограниченное изменение на каждом конечном интервале $(0, T)$.

Заметим сначала, что

$$\int e^{-yt}\,d\beta(t)=y\int e^{-yt}\beta(t)\,dt\sim y\int te^{-yt}\,dt=\frac{1}{y}, \tag{7.7.8}$$

$$\int e^{-yt}\,d\beta(t)=\int e^{-yt}(yt-1)\,\beta(t)\,dt\sim \tag{7.7.9}$$

$$\sim y\int t^2e^{-yt}\,dt-\int te^{-yt}\,dt=\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{y^2}$$

и

$$I'(y)=-\int te^{-yt}\,d\alpha(t),\quad I''(y)=\int t^2e^{-yt}\,d\alpha(t).$$

Отсюда, прежде всего,

$$I''(y)=\int te^{-yt}\,d\gamma(t)-L\int te^{-yt}\,d\beta(t)\geqslant -L\int te^{-yt}\,d\beta(t)>-\frac{M}{y^2}$$

для некоторого M. В силу теоремы 101 отсюда следует, что

$$I'(y)=o\left(\frac{1}{y}\right).$$

Но

$$I'(y)=-\int e^{-yt}\,d\gamma(t)+L\int e^{-yt}\,d\beta(t);$$

поэтому в силу соотношения (7.7.8)

$$\int e^{-yt}\,d\gamma(t)\sim\frac{L}{y}. \tag{7.7.10}$$

Так как $\gamma(t)$ возрастает, то из соотношения (7.7.10) и теоремы 98 следует, что $\gamma(t) \sim Lt$, и, значит,

$$\int_0^t u\,d\alpha(u) = \gamma(t) - L\beta(t) = o(t). \tag{7.7.11}$$

Наконец, из соотношения (7.7.11) в силу теоремы 88 заключаем, что $\alpha(t) \to l$.

Теорема 102 доказана. Если $\alpha(t)$ — ступенчатая функция, определенная в § 7.4 (1), с $\lambda_n = n$ и $na_n > -H$, то мы можем взять

$$\beta(t) = \sum_{n<} 1.$$

Тогда

$$\gamma(t) = L\beta(t) + \sum_{n<t} na_n = \sum_{n<t} (na_n + L)$$

есть возрастающая функция при $L > H$, и мы получаем теорему 91. Если $\alpha(t)$ абсолютно непрерывна, $\alpha'(t) = a(t)$ и $ta(t) > -H$, то мы можем взять $\beta(t) = t$ и аналогично получим теорему 91a.

Рассмотрим еще одну специализацию теоремы 102. Пусть $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, $\lambda_n \to \infty$ и

$$\lambda_{n+1} \sim \lambda_n; \tag{7.7.12}$$

пусть, далее, $\alpha(t)$ — ступенчатая функция, определенная в § 7.4 (1), причем

$$a_n > -H\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}. \tag{7.7.13}$$

Возьмем

$$\beta(t) = \sum_{\lambda_n < t} (\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

(с $\lambda_{-1} = 0$) и $L > H$. Тогда

$$\gamma(t) = L\beta(t) + \int_0^t u\,d\alpha(u) = \sum_{\lambda_n < t} \{L(\lambda_n - \lambda_{n-1}) + \lambda_n a_n\}$$

будет возрастающей функцией от t. С другой стороны, $\beta(t) \sim \lambda_N$, где N — наибольший номер n, для которого $\lambda_n < t$; а тогда соотношение (7.7.12) показывает, что $\beta(t) \sim t$. Тем самым условия теоремы 102 выполнены, и мы получаем следующую теорему:

Теорема 103. *Если λ_n неограниченно возрастают, причем выполняется соотношение* (7.7.12), *далее, a_n удовлетворяют условию* (7.7.13) *и $S(y) = \sum a_n e^{-\lambda_n y} \to s$ при $y \to 0$, то ряд $\sum a_n$ сходится к s.*

Эта теорема соответствует теореме 91 таким же образом, как теорема 89 соответствует теореме 85; но при этом на λ_n наложено дополнительное условие, а именно (7.7.12). Это ограничение существенно; без него доказательство теряет силу, поскольку тогда уже неверно, что $\beta(t)\sim t$; да и сама теорема становится неверной. Пусть, например,

$$\lambda_{2m}=2^m+\frac{1}{2^{m+2}},\qquad \lambda_{2m+1}=2^{m+1}$$

и $a_n=(-1)^n$. Тогда $a_n>0$ для четных n. Далее,

$$\frac{\lambda_{2m+1}-\lambda_{2m}}{\lambda_{2m+1}}=\frac{2^{m+1}-2^m-\frac{1}{2^{m+2}}}{2^{m+1}}\geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}>\frac{1}{4},$$

так что

$$a_{2m+1}=-1>-4\frac{\lambda_{2m+1}-\lambda_{2m}}{\lambda_{2m+1}}.$$

Тем самым условие (7.7.13) выполнено с $H=4$. При этом

$$S(y)=e^{-\frac{5}{4}y}-\sum e^{-2^{m+1}y}(1-e^{-2^{-m-3}y})=$$
$$=e^{-\frac{5}{4}y}+O(y\sum 2^{-m-3})=1+O(y)\to 1,$$

и, однако, ряд $\sum a_n$ не сходится.

В этом отношении имеется различие между теоремой 103 и следующим, более непосредственным обобщением теоремы 90.

Теорема 104. *Если* $S(y)=\sum a_n e^{-\lambda_n y}\to s$ *и* $a_n=O\left(\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$, *то ряд* $\sum a_n$ *сходится к* s.

Здесь уже нет надобности накладывать условие (7.7.12) *).

7.8. Дальнейшие замечания о связях между теоремами § 7.5. Существуют различные методы доказательства теорем § 7.5; простейший из них — метод Карамата, которому мы здесь следовали. Первоначальный метод Харди и Литтльвуда опирается на технику кратного дифференцирования, о которой мы скажем в § 7.12. Имеется также метод Винера, наиболее мощный и общий, но вместе с тем и наиболее трудный, поскольку он опирается на глубокие теоремы из теории преобразований Фурье. Рассмотрение его мы отложим до гл. XII.

Каждый метод содержит некоторую главную идею, приводящую к одной из теорем, из которой остальные получаются уже более элементарными средствами. Так, идея Карамата воплощена в теореме 100, а теоремой тауберова типа, к которой она естественно приводит, является теорема 96. Метод Харди и Литтльвуда приводит к теореме 90 или теореме 96, смотря по способу его применения; метод же Винера наиболее естественно приводит к теореме 92.

*) См. примечание к этому параграфу в конце главы.

Поэтому интересно ближе исследовать связи между рассматриваемыми теоремами. Мы покажем здесь, (I) как вывести теорему 92 из теоремы 90 и (II) как вывести теорему 96 из теоремы 92.

(I) *Вывод теоремы* 92 *из теоремы* 90. Пусть выполнены условия теоремы 92 и пусть, кроме того, $a_0=0$ и $s=0$ (что можно принять без ограничения общности). Положим

$$w_0=0, \quad w_n=a_1+2a_2+\ldots+na_n \ (n>0), \quad v_n=\frac{w_n}{n(n+1)},$$

так что

$$w_n=(n+1)s_n-s_0-s_1-\ldots-s_n=O(n), \quad v_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Пусть, далее,

$$f(x)=\sum a_n x^n, \quad g(x)=\sum v_n x^{n+1}.$$

Тогда

$$g(x)+(1-x)g'(x)=\sum\frac{w_n}{n(n+1)}x^{n+1}+\sum\frac{w_n}{n}x^n-\sum\frac{w_n}{n}x^{n+1}=$$

$$=\sum\frac{w_n}{n}x^n-\sum\frac{w_n}{n+1}x^{n+1}=\sum\frac{w_n-w_{n-1}}{n}x^n=f(x)\ ^{*}).$$

Отсюда

$$g(x)+(1-x)g'(x)=o(1), \quad \frac{d}{dx}\left\{\frac{g(x)}{1-x}\right\}=o\left\{\frac{1}{(1-x)^2}\right\}$$

и интегрирование дает

$$\frac{g(x)}{1-x}=o\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad g(x)=o(1).$$

Так как $g(x)=\sum v_n x^{n+1}=o(1)$ и $v_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, то из теоремы 90 следует, что ряд $\sum v_n$ сходится к нулю. Но

$$\sum_1^N v_n=\sum_1^N\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)w_n=\sum_1^N\frac{w_n-w_{n-1}}{n}-\frac{w_N}{N+1}=$$

$$=s_N-\frac{w_N}{N+1}=\frac{s_0+s_1+\ldots+s_N}{N+1}.$$

Поэтому $s_0+s_1+\ldots+s_N=o(N)$, т. е. $\sum a_n=0$ (C, 1).

(II) *Вывод теоремы* 96 *из теоремы* 92. Пусть выполнены условия теоремы 96. Тогда при $n>1$ имеем

$$s_n\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\sum_0^n a_m\left(1-\frac{1}{n}\right)^m\leqslant 4f\left(1-\frac{1}{n}\right)=O(n).$$

*) Суммирование производится в пределах от 1 до ∞.

Пусть $t_n = \frac{s_n}{n+1}$, так что $t_n = O(1)$. Тогда, полагая

$$b_n = t_{n+1} - t_n = \frac{s_{n+1}}{n+2} - \frac{s_n}{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+2} - \frac{s_n}{(n+1)(n+2)},$$

имеем

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_n = t_{n+1} - s_0 = O(1) \tag{7.8.1}$$

и

$$b_n \geqslant -\frac{s_n}{(n+1)(n+2)} > -\frac{H}{n} \tag{7.8.2}$$

для некоторого H. С другой стороны,

$$\sum t_n x^n = \sum \frac{s_n}{n+1} x^n = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\sum s_n t^n\right) dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1-t}\left(\sum a_n t^n\right) dt =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \sim C\int_0^x \frac{dt}{(1-t)^2} \sim \frac{C}{1-x},$$

так что

$$\sum b_n x^n = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1)x + (t_3 - t_2)x^2 + \ldots = \tag{7.8.3}$$

$$= -\frac{t_0}{x} + \frac{1-x}{x}\sum t_n x^n \to C - t_0.$$

Из (7.8.3), (7.8.1) и теоремы 92 следует, что $\sum b_n = C - t_0$ (C, 1), т. е.

$$t_n = t_0 + \sum_0^{n-1} b_m \to C \quad (C,\ 1). \tag{7.8.4}$$

Наконец, из (7.8.4), (7.8.2) и теоремы 64 следует, что $t_n \to C$, т. е. что $s_n \sim Cn$.

7.9. Ряд $\sum \frac{1}{n^{1+ic}}$. В § 6.11 мы видели, что ряд $\sum \frac{1}{n^{1+ic}}$, где c вещественно и отлично от нуля, не сходится, и что, точнее,

$$s_n = -\frac{n^{-ic}}{ic} + l + o(1),$$

где l не зависит от n *). Так как $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то из теоремы 90 следует, что ряд $\sum a_n$ не суммируем (A); то, что он не суммируем (C), следовало из теоремы 63. Однако этот ряд суммируем (A, $\log n$), поскольку

$$\sum \frac{1}{n^{1+y+ic}} = \zeta(1+y+ic) \to \zeta(1+ic).$$

*) В гл. XIII мы увидим, что это l равно $\zeta(1+ic)$.

Теоремы 63 и 90, равно как и другие теоремы § 7.5, имеют много применений в теории рядов Фурье. Так, например, известно, что ряд Фурье любой интегрируемой функции $f(t)$ суммируем (A), или (C, 1), в любой точке непрерывности или скачка этой функции. Если $f(t)$ есть функция с ограниченным изменением, то ее коэффициенты Фурье равны $O\left(\frac{1}{n}\right)$; а тогда из теоремы 90 или 63 следует, что ряд сходится для всех t.

7.10. Медленно колеблющиеся и медленно убывающие функции. Используя идеи, развитые в § 6.2, можно еще дальше обобщить теорему 91.

Теорема 105. *Пусть* (I) $I(y)=\int e^{-yt}\,d\alpha(t)$ *сходится для* $y>0$ *и* $I(y)\to l$ *при* $y\to 0$; (II) $\alpha(t)$ — *медленно колеблющаяся функция. Тогда* $\alpha(t)\to l$ *при* $t\to\infty$.

Теорема 106. *Если* $\sum a_n = s$ (A) *и* s_n — *медленно колеблющаяся последовательность, то* $\sum a_n = s$.

Очевидно, мы вправе предполагать, что $\alpha(t)=0$ на некотором интервале $(0, \tau)$. Нам потребуется следующее вспомогательное предложение:

Теорема 107. *Пусть* $\alpha(t)$ *равна нулю на некотором интервале* $(0, \tau)$ *и имеет ограниченное изменение на любом интервале* $(0, T)$, *и пусть* $I(y)$ *сходится для* $y>0$. *Тогда при* $p>q>0$ *имеет место равенство*

$$\int_0^\infty \frac{\alpha(pt)-\alpha(qt)}{t}\,e^{-yt}\,dt=\int_{\frac{y}{p}}^{\frac{y}{q}} \frac{I(u)}{u}\,du.$$

Интеграл, представляющий $I(u)$, равномерно сходится на любом интервале $0<v\leqslant u\leqslant U$, а $\alpha(t)=o(e^{\varepsilon t})$ для любого положительного ε. При $0<v<U$ имеем

$$\int_v^U \frac{I(u)}{u}\,du=\int_v^U \frac{du}{u}\int_0^\infty e^{-ut}\,d\alpha(t)=$$

$$=\int_0^\infty d\alpha(t)\int_v^U \frac{e^{-ut}}{u}\,du-\int_0^\infty \alpha(t)\left(\frac{d}{dt}\int_v^U \frac{e^{-ut}}{u}\,du\right)dt=$$

$$=\int_0^\infty \alpha(t)\,dt\int_v^U e^{-u}\,du=\int_0^\infty \frac{e^{-vt}-e^{-Ut}}{t}\,\alpha(t)\,dt.$$

Наконец, беря $v = \frac{y}{p}$, $U = \frac{y}{q}$, получаем

$$\int \frac{e^{-\frac{yt}{p}}}{t} \alpha(t)\,dt - \int \frac{e^{-\frac{yt}{q}}}{t} \alpha(t)\,dt =$$

$$= \int \frac{e^{-yt}}{t} \alpha(pt)\,dt - \int \frac{e^{-yt}}{t} \alpha(qt)\,dt = \int \frac{\alpha(pt) - \alpha(qt)}{t} e^{-yt}\,dt.$$

Переходим к доказательству теоремы 105. Мы можем принять, что $l = 0$. Так как $\alpha(t)$ — медленно колеблющаяся функция, ограниченная на каждом конечном интервале положительных значений t, то

$$\frac{\alpha(pt) - \alpha(qt)}{t} > -\frac{H}{t} \tag{7.10.1}$$

для любых фиксированных p и q с $0 < q < p$ и некоторого H *). Так как $I(y) \to 0$, то

$$\int_0^\infty \frac{\alpha(pt) - \alpha(qt)}{t} e^{-yt}\,dt = \int_{\frac{y}{p}}^{\frac{y}{q}} \frac{I(u)}{u}\,du = o\left(\log \frac{p}{q}\right) = o(1) \tag{7.10.2}$$

для любых фиксированных p и q с $0 < q < p$. В силу теоремы 91a из (7.10.1) и (7.10.2) следует, что

$$\int \frac{\alpha(pt) - \alpha(qt)}{t}\,dt = 0.$$

Поэтому

$$\int_{qT}^{pT} \frac{\alpha(u)}{u}\,du = \int_0^T \frac{\alpha(pt) - \alpha(qt)}{t}\,dt \to 0 \tag{7.10.3}$$

при $T \to \infty$.

Если $\alpha(t)$ не стремится к нулю, то существует такое положительное M, что для последовательности значений $t = T$, стремящейся к ∞, выполняется одно из неравенств $\alpha(T) > M$ или $\alpha(T) < -M$. Пусть, например, выполняется первое неравенство. Возьмем $q = 1$ и выберем $p > 1$ так, чтобы $\alpha(u) - \alpha(v) > -\frac{1}{2}M$ для $v > v_0$, $v \leqslant u \leqslant pv$. Тогда, для достаточно больших $t = T$, будем иметь

$$\alpha(u) > \alpha(T) - \frac{1}{2}M > \frac{1}{2}M \qquad (T \leqslant u \leqslant pT),$$

*) См. § 6.2.

откуда

$$\int_T^{pT} \frac{\alpha(u)}{u}\,du > \frac{1}{2} M \log p,$$

в противоречие с соотношением (7.10.3).

Аналогично (рассматривая интервал влево от T) придем к противоречию, предполагая, что $\alpha(T) < -M$. Тем самым теорема доказана. Наконец, мы получим теорему 106, принимая за $\alpha(t)$ надлежащим образом выбранную ступенчатую функцию.

7.11. Другое обобщение теоремы 98. До сих пор мы доказывали наши теоремы в их простейшей форме, игнорируя многие обобщения, содержащие дополнительные функции или параметры. Теперь мы проиллюстрируем их на примере одного важного обобщения теоремы 98. Мы будем предполагать в этом параграфе, что $\varphi(x)$ положительна и возрастает при $x \geqslant x_0$ и стремится к бесконечности вместе с x, причем

$$\varphi(x) = x^{\sigma} L(x), \tag{7.11.1}$$

где $\sigma \geqslant 0$, и

$$L(cx) \sim L(x) \tag{7.11.2}$$

для каждого положительного c. Этим условиям удовлетворяет, например, функция $x^{\sigma}(\log x)^{\tau}$ при $x > 2$, если $\sigma > 0$, τ вещественно, или $\sigma = 0$, $\tau > 0$.

Теорема 108. *Если $\alpha(t)$ — возрастающая функция,*

$$I(y) = \int e^{-yt}\,d\alpha(t)$$

сходится для $y > 0$ и

$$I(y) \sim \varphi\left(\frac{1}{y}\right) \tag{7.11.3}$$

при $y \to 0$, то

$$\alpha(t) \sim \frac{\varphi(t)}{\Gamma(\sigma+1)} \tag{7.11.4}$$

при $t \to \infty$.

Пусть сперва $\sigma > 0$. В этом случае доказательство теоремы 108 является простым обобщением доказательства теоремы 98. Полагаем

$$\rho(x) = \left(\log\frac{1}{x}\right)^{\sigma-1} \qquad (0 < x < 1)$$

и устанавливаем следующие два вспомогательных предложения.

Теорема 109. *Если g удовлетворяет условиям теоремы* 99 *и* $\sigma > 0$, *то существуют многочлены p и P такие, что* $p<g<P$ *и*

$$\int \{ P(x) - p(x) \} \rho(x)\, dx = \tag{7.11.5}$$

$$= \int e^{-t} t^{\sigma-1} \{ P(e^{-t}) - p(e^{-t}) \}\, dt < \varepsilon\Gamma(\sigma)\ ^{*)}.$$

Теорема 110. *Если $\alpha(t)$ и $l(y)$ удовлетворяют условиям теоремы* 108, *а $g(x)$ — функция с ограниченным изменением на интервале* $(0, 1)$, *то*

$$\chi(y) = \int e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) \tag{7.11.6}$$

существует для всех положительных значений y, кроме оговоренных в теореме 100, *и*

$$\chi(y) \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \varphi\left(\frac{1}{y}\right) \int e^{-t} t^{\sigma-1} g(e^{-t})\, dt, \tag{7.11.7}$$

когда $y \to 0$ по любой последовательности, не содержащей указанных исключительных значений.

Доказательство теоремы 109 представляет собой прямое обобщение доказательства теоремы 99; изменения, вызываемые наличием веса $\rho(x)$, почти тривиальны. Если g равна 1 на интервале (α, β) и 0 вне его, то существуют непрерывная функция h такая, что

$$g \leqslant h, \qquad \int (h-g) \rho\, dx < \varepsilon \int \rho\, dx = \varepsilon\Gamma(\sigma),$$

и многочлен Q такой, что $|Q-h| < \varepsilon$. Полагая $P = Q + \varepsilon$, имеем $g \leqslant h < P$ и

$$\int (P-g)\rho\, dx \leqslant \int (P-Q)\rho\, dx + \int |Q-h| \rho\, dx +$$

$$+ \int (h-g)\rho\, dx < 3\varepsilon\Gamma(\sigma).$$

Аналогично можно найти многочлен p такой, что $p < g$ и

$$\int (g-p)\rho\, dx < 3\varepsilon\Gamma(\sigma).$$

Тем самым неравенство (7.11.5) (с заменой ε на 6ε) доказано для функций g рассмотренного вида, а следовательно, и для любой ступенчатой функции с конечным числом скачков.

Заключительный этап доказательства требует несколько больше выкладок. Положим $M = \max|g|$ и определим ξ и ξ' так, чтобы

*) Как и в § 7.6, интегралы по x с неуказанными пределами интеграции берутся от 0 до 1, а интегралы по t — от 0 до ∞.

$0<\xi<\xi'<1$ и

$$2M\int_0^{\xi}\rho\,dx<\varepsilon\Gamma(\sigma),\quad 2M\int_{\xi'}^{1}\rho\,dx<\varepsilon\Gamma(\sigma). \tag{7.11.8}$$

Тогда можно найти такие ступенчатые функции g_1 и g_2 с конечным числом скачков, что

$$-M\leqslant g_1\leqslant g\leqslant g_2\leqslant M$$

на интервале $(\xi,\ \xi')$ и

$$\int_{\xi}^{\xi'}(g_2-g_1)\,dx<\frac{\varepsilon\Gamma(\sigma)}{\max\{\rho(\xi),\rho(\xi')\}},$$

откуда

$$\int_{\xi}^{\xi'}(g_2-g_1)\,\rho\,dx<\varepsilon\Gamma(\sigma)\,^{*}). \tag{7.11.9}$$

Полагая на интервалах $(0,\ \xi)$ и $(\xi',\ 1)$ g_1 равным $-M$, а g_2 равным M, будем иметь $g_1\leqslant g\leqslant g_2$ на всем интервале $(0,\ 1)$, $g_2-g_1\leqslant 2M$ и в силу неравенств (7.11.8) и (7.11.9)

$$\int(g_2-g_1)\,\rho\,dx<3\varepsilon\Gamma(\sigma). \tag{7.11.10}$$

Наконец, так как g_1 и g_2 — ступенчатые функции с конечным числом скачков, то существуют такие многочлены p и P, что $p<g_1\leqslant g\leqslant g_2<P$ и

$$\int(P-g_2)\,\rho\,dx<\varepsilon\Gamma(\sigma),\quad \int(g_1-p)\,\rho\,dx<\varepsilon\Gamma(\sigma).$$

Тогда из (7.11.10) следует, что

$$\int(P-p)\,\rho\,dx<5\varepsilon\Gamma(\sigma),$$

что и завершает доказательство теоремы 109.

Переходим к теореме 110. При $y\to 0$ имеем

$$\int e^{-yt}e^{-nyt}\,d\alpha(t)=\int e^{-(n+1)yt}\,d\alpha(t)\sim\varphi\left(\frac{1}{(n+1)y}\right)=$$
$$=\frac{1}{(n+1)^{\sigma}y^{\sigma}}L\left(\frac{1}{(n+1)y}\right)\sim\frac{1}{(n+1)^{\sigma}y^{\sigma}}L\left(\frac{1}{y}\right)=$$
$$=\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\varphi\left(\frac{1}{y}\right)\int e^{-t}e^{-nt}t^{\sigma-1}\,dt$$

*) ρ монотонна на интервале $(0,1)$ и стремится к бесконечности при приближении к одному из его концов, кроме случая $\sigma=1$.

для каждого фиксированного n. Отсюда следует, что

$$\int e^{-yt} Q(e^{-yt})\, d\alpha(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \varphi\left(\frac{1}{y}\right) \int e^{-t} t^{\sigma-1} Q(e^{-t})\, dt \tag{7.11.11}$$

для каждого многочлена Q.

Но в силу теоремы 109 существуют многочлены p и P такие, что

$$p < g < P, \qquad \int e^{-t} t^{\sigma-1} \{P(e^{-t}) - p(e^{-t})\}\, dt < \varepsilon\Gamma(\sigma),$$

и тем более

$$\int e^{-t} t^{\sigma-1} \{P(e^{-t}) - g(e^{-t})\}\, dt < \varepsilon\Gamma(\sigma).$$

Поэтому когда $y \to \infty$ с соблюдением условия, оговоренного в теоремах 100 и 110, то

$$\overline{\lim} \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} \int e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) \leqslant \lim \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} \int e^{-yt} P(e^{-yt})\, d\alpha(t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int e^{-t} t^{\sigma-1} P(e^{-t})\, dt < \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int e^{-t} t^{\sigma-1} g(e^{-t})\, dt + \varepsilon.$$

Аналогично

$$\underline{\lim} \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)} \int e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) > \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int e^{-t} t^{\sigma-1} g(e^{-t})\, dt - \varepsilon.$$

Оба эти неравенства в совокупности и доказывают соотношение (7.11.7).

Мы можем теперь доказать теорему 108 (для $\sigma > 0$). Выбирая g, как в доказательстве теоремы 98, получаем

$$\int_0^\infty e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) = \int_0^{\frac{1}{y}} d\alpha(t) = \alpha\left(\frac{1}{y}\right),$$

$$\frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} g(e^{-t})\, dt = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 t^{\sigma-1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\sigma+1)},$$

и принимая во внимание, что $\alpha(t)$ — возрастающая функция, мы видим, что теорема 108 следует из теоремы 110.

Проведенное рассуждение теряет силу, когда $\sigma = 0$ и $\varphi\left(\frac{1}{y}\right) = L\left(\frac{1}{y}\right) \to \infty$. В этом случае теорему 110 заменяет

Теорема 111. *Если $\alpha(t)$ — возрастающая функция,*

$$I(y) = \int e^{-yt}\, d\alpha(t) \sim L\left(\frac{1}{y}\right)$$

и $g(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, *то*

$$\chi(y)=\int e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) \sim L\left(\frac{1}{y}\right) g(1).$$

Здесь

$$\int e^{-yt} e^{-nyt}\, d\alpha(t) \sim L\left(\frac{1}{(n+1)y}\right) \sim L\left(\frac{1}{y}\right),$$

и значит

$$\int e^{-yt} Q(e^{-yt})\, d\alpha(t) \sim L\left(\frac{1}{y}\right) Q(1)$$

для каждого многочлена Q. Так как g непрерывна, то существуют такие многочлены p и P, что $p<g<P<p+\varepsilon$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$\int e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) \leqslant \int e^{-yt} P(e^{-yt})\, d\alpha(t),$$

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{L\left(\frac{1}{y}\right)} \int e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) \leqslant$$

$$\leqslant \lim \frac{1}{L\left(\frac{1}{y}\right)} \int e^{-yt} P(e^{-yt})\, d\alpha(t) = P(1) < g(1)+\varepsilon,$$

и аналогично

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{L\left(\frac{1}{y}\right)} \int e^{-yt} g(e^{-yt})\, d\alpha(t) > g(1)-\varepsilon.$$

Это доказывает теорему 111. Переходим к доказательству теоремы 108 для случая $\sigma=0$. Мы не можем теперь выбрать g, как в доказательстве теоремы 98, ибо для применимости теоремы 111 g должна быть непрерывной. Возьмем

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\left(1-\log\frac{1}{x}\right) & \text{при } \frac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{e}, \end{cases}$$

так что $e^{-t} g(e^{-t})$ есть $1-t$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и 0 для $t>1$. Эта функция g непрерывна, так что в силу теоремы 111

$$y\int_0^{\frac{1}{y}} \alpha(t)\, dt=\int_0^{\frac{1}{y}} (1-yt)\, d\alpha(t) \sim L\left(\frac{1}{y}\right),$$

$$\int_0^x \alpha(t)\, dt \sim xL(x). \tag{7.11.12}$$

Из (7.11.12) следует, что при $\delta > 0$

$$\int_0^{x+\delta x} \alpha(t)\,dt \sim (x+\delta x)\,L(x+\delta x) \sim (x+\delta x)\,L(x),$$

$$\int_0^{x+\delta x} \alpha(t)\,dt \sim \delta x\,L(x), \qquad \int_x^{x+\delta x} \alpha(t)\,dt = \delta x\,L(x) + o\{xL(x)\}.$$

Так как $\alpha(t)$ возрастает вместе с t, то

$$\delta x\alpha(x) \leqslant \delta x L(x) + o\{xL(x)\},$$

$$\overline{\lim}\,\frac{\alpha(x)}{L(x)} \leqslant 1. \tag{7.11.13}$$

Аналогично

$$\int_x^{x+\delta x} \alpha(t)\,dt \sim \delta x\,L(x+\delta x),$$

$$\delta x\,\alpha(x+\delta x) \geqslant \delta x\,L(x+\delta x) + o\{xL(x+\delta x)\},$$

$$\underline{\lim}\,\frac{\alpha(x+\delta x)}{L(x+\delta x)} \geqslant 1. \tag{7.11.14}$$

Соотношения (7.11.13) и (7.11.14) в совокупности показывают, что $\alpha(x) \sim L(x)$.

7.12. Метод Харди и Литтльвуда. Добавим еще краткий очерк метода, которым Харди и Литтльвуд впервые доказали теорему 96. Этот метод менее прост, чем метод Карамата, которому мы следовали в § 7.6; однако идеи, на которых он основывается, представляют самостоятельный интерес. Мы начнем с доказательства следующего предложения:

Теорема 112. *Если $g(x)$ дифференцируема для $0 \leqslant x < 1$, $g(x) \sim \dfrac{C}{(1-x)^\alpha}$ при $x \to 1$, где $C > 0$, $\alpha > 0$, и $g'(x)$ возрастает вместе с x, то*

$$g'(x) \sim \frac{C\alpha}{(1-x)^{\alpha+1}}.$$

Положим $x = 1 - y$, $g(x) = G(y)$; тогда $G(y) \sim \dfrac{C}{y^\alpha}$ и $-G'(y)$ возрастает при убывании y. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$(1-\varepsilon)\,\delta\alpha < 1 - \frac{1}{(1+\delta)^\alpha} < (1+\varepsilon)\,\delta\alpha.$$

Тогда

$$G(y) - G(y+\delta y) \sim C\,\frac{1 - \dfrac{1}{(1+\delta)^\alpha}}{y^\alpha},$$

и потому для достаточно малых y

$$G(y)-G(y+\delta y)>C\frac{(1-\varepsilon)\left(1-\frac{1}{(1+\delta)^{\alpha}}\right)}{y^{\alpha}}>C\frac{(1-\varepsilon)^{2}\alpha\delta}{y^{\alpha}}.$$

Но так как $-G'(y)$ возрастает при убывании y, то

$$-\delta yG'(y)>\int_{y}^{y+\delta y}\{-G'(t)\}\,dt=G(y)-G(y+\delta y).$$

Поэтому для достаточно малых y

$$-\delta yG'(y)>C\frac{(1-\varepsilon)^{2}\alpha\delta}{y^{\alpha}},$$

и

$$\varliminf\{-y^{\alpha+1}G'(y)\}\geqslant C\alpha(1-\varepsilon)^{2}.$$

Аналогично верхний предел не превосходит $C\alpha(1+\varepsilon)^{2}$, и теорема доказана.

Из нее, в качестве простого следствия, вытекает

Теорема 113. *Если* $c_n\geqslant 0$ *и*

$$g(x)=\sum c_n x^n\sim\frac{C}{(1-x)^{\alpha}}\qquad(C>0,\ \alpha>0),$$

то

$$g^{(p)}(x)\sim\frac{C\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}{(1-x)^{\alpha+p}}$$

для каждого натурального p.

Действительно, $g'(x)$, очевидно, возрастает вместе с x, так что в силу теоремы 112 $g'(x)\sim\frac{C\alpha}{(1-x)^{\alpha+1}}$, и это рассуждение можно повторить применительно к $g'(x)$ и т. д.

Начиная с этого места, мы дадим лишь описание общего хода доказательства. Следующее предварительное замечание сделает его более понятным. Из соотношения (7.5.1) простым приемом, примененным в начале § 7.8 (II), получается, что $s_n=O(n)$; однако этот прием окажется бессильным, если мы захотим получить более точный результат. Главная причина этого — та, что последовательность (x^n) или (e^{-ny}) не имеет такого „пика", наличие которого давало бы возможность утверждать, что преобладающую роль в рассматриваемом ряде играют члены, близкие к максимальному. Однако мы можем создать такой пик искусственно, p-кратным дифференцированием по y. В результате этой операции e^{-ny} превратится (с точностью до знака) в $n^p e^{-ny}$, что достигает максимума при n, приближенно равном

$N=\frac{p}{y}$. Этот максимум приближенно равен $\left(\frac{p}{ey}\right)^p$ и быстро растет при возрастании p, так что при большом p имеется резко выраженный пик. Таким образом, основной идеей нашего доказательства будет идея *многократного дифференцирования.*

Переходя к более подробному описанию, примем $C=1$, так что

$$\sum s_n e^{-ny}=\sum s_n x^n=\frac{1}{1-x}\sum a_n x^n\sim\frac{1}{(1-x)^2}\sim\frac{1}{y^2}.$$

В силу теоремы 113 это соотношение можно дифференцировать по y любое число раз. Таким образом,

$$\sum n^p s_n e^{-ny}\sim\frac{(p+1)!}{y^{p+2}} \tag{7.12.1}$$

для каждого p. Но

$$\sum n^p e^{-ny}\sim\frac{p!}{y^{p+1}}. \tag{7.12.2}$$

Члены этого ряда имеют пик около $n=N$, а в обе стороны от него достаточно быстро убывают. Поэтому естественно предположить (и легко проверить), что можно выбрать сперва большое p, а затем M, зависящее от p и y, так, чтобы $M=o(N)$ и

$$\left(\sum_{n<N-M}+\sum_{n>N+M}\right)n^p e^{-ny}<\varepsilon\frac{p!}{y^{p+1}} \tag{7.12.3}$$

для малых y. Так как, с другой стороны, $s_n=O(n)$, то наличие множителей s_n не может существенно изменить картину, и потому естественно предположить, что аналогичным образом можно поступить и с рядом (7.12.1).

В таком случае можно выбрать сначала $p=p(\varepsilon)$, а затем $y_0=y_0(p,\varepsilon)=y_0(\varepsilon)$ так, чтобы

$$(1-\varepsilon)\sum_{N-M}^{N+M}n^p s_n e^{-ny}<\frac{(p+1)!}{y^{p+2}}<(1+\varepsilon)\sum_{N-M}^{N+M}n^p s_n e^{-ny}$$

для $y\leqslant y_0(\varepsilon)$. Так как s_n возрастает вместе с n, то мы тем более будем иметь

$$(1-\varepsilon)s_{N-M}\sum_{N-M}^{N+M}n^p e^{-ny}<\frac{(p+1)!}{y^{p+2}}<(1+\varepsilon)s_{N+M}\sum_{N-M}^{N+M}n^p e^{-ny}.$$

Тогда из (7.12.2) и (7.12.3) следует, что

$$(1-2\varepsilon)s_{N-M}<\frac{p+1}{y}<(1+2\varepsilon)s_{N+M}$$

для достаточно больших p и достаточно малых y. Наконец, так как

$$N \pm M \sim N \sim \frac{p}{y},$$

то заключаем, что $s_N \sim N$.

Мы здесь опустили много деталей, впрочем, большей частью шаблонных; и хотя доказательство Карамата общепризнанно считается более простым, описанное сейчас доказательство не покажется трудным тому, кто усвоил лежащие в его основе идеи.

7.13. Теорема о „больших показателях“. Если $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$ или, что то же самое,

(7.13.1) $$\mu_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} \to 0,$$

и если

(7.13.2) $$a_n = O(\mu_n)$$

и $S(y) = \sum a_n e^{-\lambda_n y} \to s$, то $\sum a_n = s$. Это — частный случай теоремы 103, причем мы установили в теореме 104, что результат сохраняет силу и без ограничения (7.13.1).

Особенно интересен случай, когда λ_n возрастают столь быстро и правильно, что

(7.13.3) $$\lambda_{n+1} > c\lambda_n,$$

где $c > 1$ (что имеет место, например, когда $\lambda_n = 2^n$). Тогда μ_n заключено между $\frac{c-1}{c}$ и 1, так что условие (7.13.2) сводится к $a_n = O(1)$. Таким образом, в этом случае теорема утверждает, что ряд сходится, когда его члены ограничены. Однако это утверждение не исчерпывает всей истины, состоящей в том, что если λ_n удовлетворяют условию (7.13.3), то на a_n не требуется накладывать *никаких* ограничений.

Теорема 114. *Если λ_n удовлетворяют условию* (7.13.3) *и $S(y) \to s$, то ряд $\sum a_n$ сходится к s.*

Мы можем принять, что $\lambda_0 > 0$. Ядро доказательства заключено в следующем вспомогательном предложении:

Теорема 115. *Если λ_n удовлетворяют условию* (7.13.3), $\lambda_0 > 0$,

$$f(y) = f_N(y) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n y}$$

и $|f(y)| \leqslant H$ для $y > 0$, то

$$|a_n| \leqslant CH,$$

где $C = C(c)$ зависит только от c.

Пусть

$$P(y)=\sum_{r=0}^{R} p_r e^{-\nu_r y},$$

где ν_r положительны и возрастают вместе с r. Тогда

$$F(y)=\sum_{n=0}^{N} a_n P(\lambda_n y)=\sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{r=0}^{R} p_r e^{-\nu_r \lambda_n y}=\sum_{r=0}^{R} p_r f(\nu_r y),$$

и потому

$$|F(y)| \leqslant H \sum_{r=0}^{R} |p_r|. \tag{7.13.4}$$

Возьмем, в частности,

$$P(y)=\{p(y)\}^R=\left\{4\left(\frac{1}{2^y}-\frac{1}{2^{2y}}\right)\right\}^R.$$

Здесь $p(y)$ равно нулю при $y=0$, возрастает до достижения максимума, равного единице, при $y=1$, а затем убывает и стремится к нулю. $p(y)$ равно $O(y)$ для малых и $O\left(\frac{1}{y}\right)$ для больших y, так что ряды

$$S=\sum_{\varkappa=1}^{\infty} p(c^{-\varkappa}), \quad S'=\sum_{\varkappa=1}^{\infty} p(c^{\varkappa})$$

сходятся. Далее,

$$\sum_{r=0}^{R} |p_r|=\{4(1+1)\}^R=8^R. \tag{7.13.5}$$

Пусть теперь a_m — наибольшее по модулю a_n (или одно из таких a_n, если их несколько). Тогда, принимая во внимание, что $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant c$ и $p(y)$ убывает при удалении от $y=1$ в обе стороны, имеем

$$\left|F\left(\frac{1}{\lambda_m}\right)\right|=\left|\sum_{n=0}^{N} a_n P\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right)\right|= \tag{7.13.6}$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{N} a_n \left\{p\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right)\right\}^R\right| \geqslant |a_m|-|a_m| \sum_{n \neq m} \left\{p\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right)\right\}^R \geqslant$$

$$\geqslant |a_m|\left(1-\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \{p(c^{-\varkappa})\}^R-\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \{p(c^{\varkappa})\}^R\right).$$

Далее,

$$\sum \{p(c^{-\varkappa})\}^R \leqslant \{p(c^{-1})\}^{R-1} S, \quad \sum \{p(c^{\varkappa})\}^R \leqslant \{p(c)\}^{R-1} S',$$

причем оба выражения в правых частях убывают при возрастании R и стремятся к нулю, когда $R \to \infty$. Мы можем поэтому выбрать $R = R(c)$ так, чтобы $\sum \{p(c^{-\varkappa})\}^R < \frac{1}{4}$, $\sum \{p(c^{\varkappa})\}^R < \frac{1}{4}$, и тогда

$$\left|F\left(\frac{1}{\lambda_m}\right)\right| \geqslant |a_m|\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}|a_m|. \tag{7.13.7}$$

Из (7.13.4), (7.13.5) и (7.13.7) следует, что

$$|a_m| \leqslant 2 \cdot 8^R H.$$

Тем самым теорема 115 доказана. Остается распространить ее на бесконечные ряды.

Теорема 116. *Утверждение теоремы* 115 *сохраняет силу для бесконечного ряда* $f(y) = \sum a_n e^{-\lambda_n y}$, *сходящегося для всех положительных* y.

Возьмем какое-нибудь значение n, скажем $n = m$, и какое-нибудь положительное ε. Ряд для $f(y+\varepsilon)$ равномерно сходится для всех $y > 0$, и мы можем выбрать $N = N(m, \varepsilon) > m$ так, чтобы

$$\left|\sum_{n=}^{N} a_n e^{-\lambda_n \varepsilon} e^{-\lambda_n y}\right| < |f(y+\varepsilon)| + \varepsilon \leqslant H + \varepsilon$$

для всех $y \geqslant 0$. Поэтому $|a_m e^{-\lambda_m \varepsilon}| \leqslant C(H+\varepsilon)$, и, беря $\varepsilon \to 0$, мы приходим к требуемому результату.

Теперь легко доказать теорему 114. Так как $S(y) \to s$ при $y \to 0$, то существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что $|S(y) - S(y')| < \varepsilon$, когда y и y' лежат на интервале $(0, 2\delta)$. Так как $S(y)$ непрерывна при $y > \delta$ и $S(y) \to 0$ при $y \to \infty$, то существует такое $\eta = \eta(\varepsilon, \delta) = \eta(\varepsilon)$, что $0 < \eta < \delta$ и

$$|S(y) - S(y+\eta)| < \varepsilon \tag{7.13.8}$$

для $y \geqslant \delta$; это же неравенство верно также при $0 < y < \delta$, поскольку тогда y и $y+\eta$ лежат на интервале $(0, 2\delta)$. Таким образом, неравенство (7.13.8) справедливо для всех $y > 0$. Так как

$$S(y) - S(y+\eta) = \sum a_n (1 - e^{-\lambda_n \eta}) e^{-\lambda_n y},$$

то из теоремы 116 следует, что

$$|a_n|(1 - e^{-\lambda_n \eta}) \leqslant C\varepsilon$$

для всех n, так что $|a_n| \leqslant 2C\varepsilon$ для больших n. Тем самым $a_n = o(1)$. Но тогда в силу условия (7.13.3) $a_n = o(\mu_n)$, и утверждение теоремы 114 следует из теоремы 89.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ VII

§ 7.1. В течение последних тридцати с лишним лет о теоремах тауберова типа было очень много написано; в этой литературе легко заблудиться, поскольку почти каждая теорема обросла рядом вариантов, аналогов и обобщений, так что часто трудно найти доказательство или даже точную формулировку той или иной нужной теоремы. Мы ограничились здесь теоремами „типа степенных рядов", т. е. связанными с показательным ядром e^{-xy}, притом простейшими и наиболее важными из них.

Принятый в этой главе способ изложения основан главным образом на работах Харди и Литтльвуда и Карамата. В гл. XII мы вернемся к рассматриваемой теме, став на более общую точку зрения Винера. Ясное изложение фундаментальных теорем можно найти в монографии Widder, гл. 5. Можно рекомендовать также следующий список работ:

Ananda Rau [1] *JLMS*, **3** (1928), 200—205; [2] *PLMS* (2), **30** (1930), 367—372; [3] *RP*, **54** (1929), 455—461;

Bosanquet [4] *JLMS*, **19** (1944), 161—168;

Doetsch [5] *MA*, **82** (1921), 68—82;

Hardy and Littlewood [6] *PLMS* (2), **11** (1912), 411—478; [7] там же, **13** (1913), 174—191; [8] там же, **25** (1926), 219—236; [9] там же, **30** (1930), 23—37; [10] *MM*, **43** (1914), 134—147;

Ingham [11] *OQJ*, **8** (1937), 1—7;

Karamata [12] *MZ*, **32** (1930), 319—320; [13] там же, **33** (1931), 294—300; [14] *JM*, **164** (1931), 27—40;

Landau [15] *Monatshefte für Math.*, **18** (1907), 8—28; [16] *RP*, **35** (1913), 265—276;

Littlewood [17] *PLMS* (2), **9** (1910), 434—448;

Rajagopal [18] *Math. Gazette*, **30** (1946), 272—276;

R. Schmidt [19] *MZ*, **22** (1925), 89—152;

Szász [20] *Münchener Sitzungsberichte* (1929), 325—340; [21] *TAMS*, **39** (1936), 117—130;

Tauber [22] *Monatshefte für Math.*, **8** (1897), 273—277;

Titchmarsh [23] *PLMS* (2), **26** (1927), 182—200;

Vijayaraghavan [24] *JLMS*, **1** (1926), 113—120; [25] там же, **2** (1927), 215—222.

Этот список не полон и притом вовсе не включает работ, основанных на идеях Винера.

§ 7.2. Tauber [22]. Интегральный аналог для более общего интеграла $\int \varphi(yt)\, a(t)\, dt$, где $\varphi'(t)$ ограничена, $\varphi(0) = 1$ и $\int |\varphi(t)|\, dt$ сходится, доказал Hardy, *TCPS*, **21** (1910), 427—451 (432).

§ 7.3. Tauber [22]. Теорему 88 в изложенной здесь форме, с интегралами Стилтьеса, доказал Widder, 187, теорема 3*b*.

§ 7.4. Теорему 89 доказал Landau [15].

§ 7.5. Теорему 90 доказал, а теорему 92 сформулировал Littlewood [17]. Авторы остальных теорем — Hardy and Littlewood [7]; все эти теоремы доказаны здесь в более общем виде. В [10] даны их обобщения на ряды Дирихле $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$.

§ 7.6. Теорему 98 доказал Szász [20]; она представляет собой случай $\gamma = 1$ виддеровской теоремы 4.3 (192). Изложенное здесь доказательство, основанное на теоремах 99 и 100, в существенных чертах совпадает с данным Карамата [14]. Теорему 96a в явной форме впервые доказал (с другим независимым переменным) Doetsch [5]; см. также Hardy and Littlewood [9] и Titchmarsh [23]. Детч доказал также теоремы, равносильные теоремам 91a и 94a.

§ 7.7. Первое доказательство теоремы 101, в той же, что и здесь, форме, дал, повидимому, Landau, Ergebnisse, 58. Теорему сформулировали и применили Hardy and Littlewood, [7] и [10]. Менее общая форма этой теоремы с $f''(y) = O\left(\frac{1}{y^2}\right)$ содержится в теореме 2 работы [6] (420).

Теорема 102 представляет собой небольшое обобщение виддеровской теоремы 4.5 (195): у него $\beta(t) = t$.

Теорему 103 доказали Hardy and Littlewood [10]. Пример, показывающий необходимость условия (7.7.12), принадлежит Ananda Rau [2].

Теорема 104 с λ_n, удовлетворяющими условию (7.7.12), есть основная теорема работы [17]. Литтльвуд указывает там, что она справедлива и без ограничения (7.7.12), однако доказательство этого опубликовал впервые Ananda Rau [1]. Теорему 104 можно доказать следующим образом.

Мы можем считать, что $a_0 = 0$. Если

(1) $$a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right),$$

то

(2) $$\sum_{m=1}^{n} \lambda_m a_m = O\left\{ \sum_{m=1}^{n} (\lambda_m - \lambda_{m-1}) \right\} = \quad (\lambda_n).$$

Далее, по теореме 88 [O] и из соотношений (2) и $S(y) \to s$ следует, что

$$A(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} a_n = O(1).$$

Но, принимая во внимание, что $A(0) = 0$, имеем

$$S(y) = \sum a_n e^{-\lambda_n y} = \int e^{-yt}\, dA(t) = y \int A(t) e^{-yt}\, dt,$$

откуда

$$\int \{A(t) + H\} e^{-yt}\, dy \sim \frac{s+H}{y}$$

для каждого H. Выбирая H так, чтобы $A(t) + H > 0$, и применяя теорему 96а, получаем, что

$$\int_0^t \{A(u) + H\}\, du \sim (s+H)\, t, \qquad \int_0^t A(u)\, du \sim st.$$

Утверждаемый результат вытекает теперь из теоремы 67. Эта форма доказательства принадлежит Бозанкэ.

Szász [20, 21] доказал, что если $S(y) \to s$ и a_n удовлетворяют условиям (7.7.13) и (а) $\underline{\lim}\, a_n \geqslant 0$, то ряд $\sum a_n$ сходится к s. Эта теорема содержит теорему 103, поскольку (7.7.13) влечет (а), когда λ_n удовлетворяют условию (7.7.12), а также теорему, упомянутую в примечании к § 6.1.

Как указал мне (следуя идее Ингама) Бозанкэ, из (7.7.13) и $S(y) \to s$ вытекает, что

$$\sum a_n = s \quad (\mathrm{R}, \lambda, \varkappa)$$

для каждого положительного $\varkappa$; Rajagopal [18] доказал это в явном виде для $\varkappa = 1$. Как Бозанкэ, так и Раджагопал опираются на один результат, который получил Szász [20], причем Бозанкэ пользуется также соответствующей теореме 70 теоремой Рисса для суммируемости (R, λ, $\varkappa$).

Szász [20] и Ananda Rau [3] доказали, что если $\sum a_n e^{-\lambda_n y} \sim \frac{1}{y^\alpha}$, где $\alpha > 0$ и $a_n \geqslant 0$, то λ_n необходимо удовлетворяют условию (7.7.12).

§ 7.10. Теорему 105 доказал Szász [21]; она содержит его теорему, упомянутую в предыдущем замечании. В этом параграфе принят метод, указанный в конце работы Харди и Литтльвуда [9].

§ 7.11. Доказательство в основном принадлежит Karamata [14].

§ 7.12. Техника кратного дифференцирования была впервые применена Литтльвудом в [17].

§ 7.13. Теорема 114 была высказана в качестве предположения Литтльвудом в [17] и доказана Харди и Литтльвудом в [8]. Изложенное здесь значительно более короткое доказательство предложил Ingham [11]. Ингам доказывает гораздо больше, в частности, что если $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to \infty$, то пределы колебания s_n при $n \to \infty$ те же, что и у $S(y)$ при $y \to 0$.

Bosanquet [4] доказал теорему, содержащую одновременно теоремы 104 и 114, а именно, что из $S(y) \to s$ и

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \operatorname*{Max}_{\lambda_n < \lambda_m < (1+\delta)\lambda_n} |a_{n+1} + \ldots + a_m| = 0$$

следует $\sum a_n = s$. Szász [21] доказал соответствующую теорему для суммируемости $(R, \lambda, 1)$.

Глава VIII

МЕТОДЫ ЭЙЛЕРА И БОРЕЛЯ (I)

8.1. Введение. В этой и следующей главах мы подвергнем более систематическому изучению группу методов, важнейшими из которых являются E- и B-методы, определенные в §§ 1.3, 4.6 и 4.12—4.13. Рассматриваемые нами определения значительно различаются по форме, и на первый взгляд могло бы показаться, что вряд ли они могут иметь много общего; однако связи между ними окажутся значительно более тесными, чем можно было бы ожидать. В частности, связанные с ними теоремы тауберова типа, по существу, совпадают.

8.2. (E, q)-метод. Мы начнем с обобщения определения, данного в §§ 1.3 и 4.6. Пусть ряд $\sum a_n x^{n+1}$ сходится для малых x к $f(x)$, $q>0$ и

$$x=\frac{y}{1-qy}, \quad y=\frac{x}{1+qx}, \tag{8.2.1}$$

так что $y=\frac{1}{1+q}$ при $x=1$. Тогда для малых x и y

$$f(x)=\sum_0^\infty a_n\left(\frac{y}{1-qy}\right)^{n+1}=\sum_{n=0}^\infty a_n\sum_{m=n}^\infty \binom{m}{n} q^{m-n}y^{m+1}= \tag{8.2.2}$$

$$=\sum_{m=0}^\infty y^{m+1}\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^{m-n}a_n=\sum_0^\infty a_m^{(q)}\{(q+1)y\}^{m+1},$$

где

$$a_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\sum_{n=0}^\infty \binom{m}{n} q^{m-n}a_n. \tag{8.2.3}$$

Если

$$\sum a_m^{(q)}=A, \tag{8.2.4}$$

то мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (E, q) к сумме A. При $q=1$ это определение сводится к эйлеровскому определению, данному в §§ 1.3 и 4.6, а при $q=0$ — к определению обычной сходимости.

Если $a_n = z^n$, то

$$a_m^{(q)} = \frac{(q+z)^m}{(q+1)^{m+1}}$$

и

$$\sum a_m^{(q)} = \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{q+z}{q+1}} = \frac{1}{1-z}$$

тогда и только тогда, когда $|q+z| < q+1$. Таким образом, ряд $\sum z^n$ суммируем (E, q) в круге с центром $-q$ и радиусом $q+1$. При возрастании q этот круг увеличивается и при $q \to \infty$ стремится к полуплоскости $\Re z < 1$. Как мы видели в §§ 4.12—4.13, это есть область B- или B′-суммируемости рассматриваемого ряда.

Равенство (8.2.3) можно записать в форме

$$(8.2.5) \qquad (q+1)^{m+1} a_m^{(q)} = (q+E)^m a_0,$$

где E определено как в § 4.6. Далее,

$$\frac{1}{q+1} + \frac{q+x}{(q+1)^2} + \ldots + \frac{(q+x)^m}{(q+1)^{m+1}} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \frac{(q+1)^{m+1} - (q+x)^{m+1}}{1-x} =$$

$$= \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \sum_{n=1}^{m+1} \binom{m+1}{n} q^{m+1-n} (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}).$$

Поэтому, заменяя x на E и замечая, что

$$(1 + E + \ldots + E^{n-1}) a_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = A_{n-1},$$

получаем

$$(8.2.6) \quad A_m^{(q)} = \sum_{n=0}^{m} a_n^{(q)} = \left\{ \frac{1}{q+1} + \frac{q+E}{(q+1)^2} + \ldots + \frac{(q+E)^m}{(q+1)^{m+1}} \right\} a_0 =$$

$$= \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \left\{ \binom{m+1}{1} q^m A_0 + \binom{m+1}{2} q^{m-1} A_1 + \ldots + A_m \right\}.$$

Некоторый недостаток симметрии в этой формуле, представляющий неудобство, побудит нас преобразовать ее в § 8.3.

Мы будем называть ряд $A^{(q)} = \sum a_n^{(q)}$ *q-й эйлеровой трансформацией* ряда $A = \sum a_n$. Формальная связь между обоими рядами устанавливается формулами

$$\sum a_n x^{n+1} = \sum a_n^{(q)} \{(q+1)y\}^{n+1} = \sum a_n^{(q)} z^{n+1}, \qquad x = \frac{z}{1+q-qz}.$$

8.3. Простые свойства (E, q)-метода. Мы должны сперва доказать, что имеет место

Теорема 117. *(E, q)-метод регулярен.*

Действительно, в обозначениях § 3.2,

$$c_{m,n}=\begin{cases}\dfrac{1}{(q+1)^{m+1}}\dbinom{m+1}{n+1}q^{m-n}>0 & \text{при} \quad n\leqslant m,\\ 0 & \text{при} \quad n>m,\end{cases}$$

$$c_{m,n}\to 0 \quad \text{и} \quad \sum c_{m,n}=1-\frac{q^{m+1}}{(q+1)^{m+1}}\to 1 \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Теорема 117 содержится как частный случай $q'=0$ в следующей теореме:

Теорема 118. *Если ряд суммируем* (E, q'), *то он суммируем* (E, q) *к той же сумме для каждого* $q>q'$.

А эта теорема, очевидно, вытекает из теоремы 117 и следующего предложения:

Теорема 119. *r-я эйлерова трансформация q-й эйлеровой трансформации заданного ряда есть $(q+r+qr)$-я эйлерова трансформация этого ряда.*

Действительно, если $x=\dfrac{z}{1+q-qz}$, а $z=\dfrac{w}{1+r-rw}$, то

$$x=\frac{w}{1+s-sw}, \quad \text{где} \quad s=q+r+qr.$$

Из теоремы 118 следует, что (E, q)-методы с увеличивающимся q образуют шкалу возрастающей мощности *).

Теорема 120. (E, q)-*метод обладает свойствами* (α) — (δ), *указанными в теореме* 40.

Рассмотрения требуют только свойства (γ) и (δ). Нужно доказать равносильность утверждений

(8.3.1) $$\sum a_n^{(q)}=A$$

и

(8.3.2) $$\sum b_n^{(q)}=A-a_0,$$

где $b_n=a_{n+1}$. Мы можем считать $a_0=0$, так что $B_n=A_{n+1}$. Тогда в силу формулы (8.2.6)

$$B_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1}q^mA_1+\binom{m+1}{2}q^{m-1}A_2+\ldots+A_{m+1}\right\},$$

*) Пример ряда $\sum z^n$ показывает, что никакие два (E, q)-метода не равносильны.

откуда

$$(8.3.3)\quad B_m^{(q)}-A_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{\binom{m+1}{1}q^m a_1+\ldots+a_{m+1}\right\}=$$
$$=(q+1)a_{m+1}^{(q)}.$$

(I) Если справедливо (8.3.1), то $a_{m+1}^{(q)}\to 0$, и (8.3.2) следует из (8.3.3).

(II) Равенство (8.3.3) можно записать в форме

$$B_m^{(q)}=(q+1)A_{m+1}^{(q)}-qA_m^{(q)},$$

откуда, принимая во внимание, что $A_0^{(q)}=0$, следует, что

$$(q+1)A_{m+1}^{(q)}=B_m^{(q)}+\frac{q}{q+1}B_{m-1}^{(q)}+\ldots+\left(\frac{q}{q+1}\right)^m B_0^{(q)}.$$

Это — преобразование

$$A_{m+1}^{(q)}=\sum c_{m,n}B_n^{(q)}$$

с

$$c_{m,n}=\begin{cases} q^{m-n}(q+1)^{-m+n-1} & \text{при } n\leqslant m,\\ 0 & \text{при } n>m,\end{cases}$$

и выполнение условий теоремы 2 здесь сразу проверяется. Поэтому (8.3.2) и (8.3.3) влекут $A_{m+1}^{(q)}\to A$, т. е. (8.3.1).

Из теоремы 120 следует, что соотношение $A_n\to A$ (E, q) равносильно соотношению $A_{n+1}\to A$ (E, q) и тем самым соотношению

$$\frac{1}{(q+1)^{m+1}}\left\{q^{m+1}A_0+\binom{m+1}{1}q^m A_1+\ldots+A_{m+1}\right\}\to A.$$

Поэтому, подставляя здесь m вместо $m+1$, мы можем заменить $A_m^{(q)}\to A$ на

$$\mathrm{A}_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^m}\left\{q^m A_0+\binom{m}{1}q^{m-1}A_1+\ldots+A_m\right\}\to A.$$

Обычно удобнее всего и определять „эйлеровы средние" для A_n таким способом, т. е. мы можем говорить, что $A_n\to A$ (E, q), если

$$(8.3.4)\qquad \mathrm{A}_m^{(q)}=\frac{1}{(q+1)^m}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}q^{m-n}A_n=\left(\frac{q+E}{q+1}\right)^m A_0\to A.$$

Подставляя тогда s_n и t_n вместо A_n и $\mathrm{A}_n^{(q)}$, получаем

$$(8.3.5)\qquad \Delta^m t_0=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}t_n=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\left(\frac{q+E}{q+1}\right)^n s_0=$$
$$=\left(1-\frac{q+E}{q+1}\right)^m s_0=\left(\frac{1-E}{q+1}\right)^m s_0=\frac{1}{(q+1)^m}\Delta^m s_0.$$

Значение этого равенства в полной мере выявится в гл. XI.

Теорема 121. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (E, q), *то* $a_n = o\{(2q+1)^n\}$.

Из (8.2.4) следует, что $(q+1)a_m^{(q)} = o(1)$; таким образом, в силу (8.2.5)

$$(q+E)^m a_0 = o\{(q+1)^m\}.$$

Но $a_n = E^n a_0 = (E+q-q)^n a_0$. Следовательно,

$$a_n = o\left\{(q+1)^n + \binom{n}{1} q(q+1)^{n-1} + \ldots + q^n\right\} = o\{(2q+1)^n\}.$$

Пример ряда $\sum z^n$, суммируемого (E, q) для $-2q-1 < z < 1$, показывает, что $2q+1$ нельзя заменить никаким меньшим числом.

8.4. Формальные связи между методами Эйлера и Бореля. В § 8.2 мы видели, что область (E, q)-суммируемости ряда $\sum z^n$ при $q \to \infty$ стремится к области его суммируемости по Борелю. Это наводит на мысль, что метод Бореля можно рассматривать как, в некотором смысле, предельный случай методов Эйлера. Мы придадим этой связи более точную форму позже (теорема 128); но нелишне уже здесь показать, как она гармонирует с формальными идеями §§ 4.18 и 8.3.

Подставляя в (8.3.4) $\frac{m}{x}$ вместо q, получаем

$$A_m^{(q)} = \frac{1}{\left(1+\frac{m}{x}\right)^m}\left\{\left(\frac{m}{x}\right)^m A_0 + \binom{m}{1}\left(\frac{m}{x}\right)^{m-1} A_1 + \right.$$
$$\left. + \binom{m}{2}\left(\frac{m}{x}\right)^{m-2} A_2 + \ldots + A_m\right\} =$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{x}{m}\right)^m}\left\{A_0 + xA_1 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2!}A_2 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{x^3}{3!}A_3 + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}A_m\right\} = \varphi(m, x).$$

Отсюда

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{x\to\infty}\varphi(m, x) = \lim_{m\to\infty} A_m,$$
$$\lim_{x\to\infty}\lim_{m\to\infty}\varphi(m, x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum\frac{x^n}{n!}A_n.$$

Первый способ перехода к пределу приводит к обычной сходимости, а второй — к экспоненциальному методу суммирования Бореля (§ 4.12). Различные же методы Эйлера соответствуют предельному переходу $m = qx \to \infty$.

8.5. Методы Бореля. Экспоненциальный и интегральный методы Бореля были определены в §§ 4.12—4.13. Если

$$e^{-x}\sum A_n \frac{x^n}{n!} \to A,$$

то мы пишем $A_n \to A$ (B), если же

$$\int_0^\infty e^{-x}\sum_0^\infty a_n \frac{x^n}{n!}\,dx = \lim_{X\to\infty}\int_0^X e^{-x}\sum_0^\infty a_n \frac{x^n}{n!}\,dx = A,$$

то мы пишем $A_n \to A$ (B′). Эти методы принадлежат к совершенно различным типам: первый есть J-метод § 4.12 с $J(x)=e^x$, а второй — „моментный метод“ в смысле § 4.13 с $\mu_n = n!$, $\chi(x) = 1 - e^{-x}$. Однако специальные свойства показательной функции делают их почти равносильными. Заметим, однако, сперва, что имеет место

Теорема 122. B- *и* B′-*методы регулярны.*

Это — следствие теоремы 33 (для B) и теоремы 34 (для B′).

Рассмотрим теперь связи между обоими методами; мы найдем, что эти методы хотя и не полностью, но все же почти равносильны. Положим

$$a(x) = \sum a_n \frac{x^n}{n!}, \qquad A(x) = \sum A_n \frac{x^n}{n!}. \tag{8.5.1}$$

Если один из этих рядов сходится для всех x, то то же верно и для другого. Далее,

$$a'(x) = \sum a_{n+1}\frac{x^n}{n!}, \qquad A'(x) = \sum A_{n+1}\frac{x^n}{n!}, \tag{8.5.2}$$

$$\int_0^x e^{-t}a'(t)\,dt = e^{-x}a(x) - a_0 + \int_0^x e^{-t}a(t)\,dt, \tag{8.5.3}$$

$$e^{-x}A(x) - a_0 = \int_0^x \frac{d}{dt}\{e^{-t}A(t)\}\,dt = \int_0^x e^{-t}\{A'(t) - A(t)\}\,dt = \tag{8.5.4}$$

$$= \int_0^x e^{-t}\sum_0^\infty (A_{n+1} - A_n)\frac{t^n}{n!}\,dt = \int_0^x e^{-t}\sum_0^\infty a_{n+1}\frac{t^n}{n!}\,dt = \int_0^x e^{-t}a'(t)\,dt.$$

Сравнивая (8.5.3) и (8.5.4), получаем

$$e^{-x}A(x) = e^{-x}a(x) + \int_0^x e^{-t}a(t)\,dt. \tag{8.5.5}$$

Из последнего равенства следует

Теорема 123. B- *и* B′-*методы равносильны тогда и только тогда, когда* $e^{-x}a(x) \to 0$.

Можно, однако, пойти дальше. Из равенства (8.5.5), полагая

$$\int_0^x e^{-t} a(t)\, dt = \varphi(x),$$

имеем $e^{-x} A(x) = \varphi(x) + \varphi'(x)$. Но если $\varphi + \varphi' \to A$, то, по теореме 53, $\varphi' \to 0$ и $\varphi \to A$. Отсюда следует

Теорема 124. *Ряд, суммируемый* (B), *суммируем* (B$'$) *к той же сумме.*

Обратное утверждение неверно. Если

$$a_n = \sum \frac{(-1)^p (2p+2)^n}{(2p+1)!},$$

то

$$a(x) = \sum \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} e^{(2p+2)x} = e^x \sin e^x,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} a(x)\, dx = \int_0^\infty \sin e^x\, dx = \int_1^\infty \frac{\sin u}{u}\, du,$$

но $e^{-x} a(x)$ не стремится к нулю, так что ряд $\sum a_n$ не суммируем (B). Таким образом, имеет место

Теорема 125. *Существуют ряды, суммируемые* (B$'$), *но не суммируемые* (B).

Отметим, далее, следующие предложения:

Теорема 126. *Утверждения*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = A \quad (\mathrm{B}), \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = A - a_0 \quad (\mathrm{B}')$$

равносильны.

Теорема 127. B- *и* B$'$-*методы обладают свойствами* (α), (β) *и* (γ), *указанными в теореме* 40, *но не обладают свойством* (δ).

Теорема 126 вытекает из (8.5.4), а теорема 127 — из теорем 124, 125 и 126.

В заключение этого параграфа докажем теорему, о которой мы упоминали в § 8.4.

Теорема 128. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (E, q), *то он суммируем* (B) *и* (B$'$) *к той же сумме.*

Действительно,

$$e^{qx} \sum A_n \frac{x^n}{n!} = \sum \frac{(qx)^n}{n!} \sum A_n \frac{x^n}{n!} = \sum c_n \frac{x^n}{n!},$$

где

$$\frac{c_n}{n!} = \frac{A_n}{n!} + \frac{qA_{n-1}}{(n-1)!\,1!} + \frac{q^2 A_{n-2}}{(n-2)!\,2!} + \ldots + \frac{q^n A_0}{n!},$$

так что, пользуясь обозначением, принятым в формуле (8.3.4), имеем $c_n = (q+1)^n \mathrm{A}_n^{(q)}$. Отсюда

$$e^{-x}A(x) = e^{-x}\sum A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-(q+1)x}\sum \mathrm{A}_n^{(q)} \frac{\{(q+1)x\}^n}{n!}.$$

Если ряд $\sum a_n$ суммируем (E, q) к A, то $\mathrm{A}_n^{(q)} \to A$, так что, по теореме 122, $e^{-x}A(x) \to A$. Таким образом, рассматриваемый ряд суммируем (B) и тем более суммируем (B').

8.6. Нормальная, абсолютная и регулярная суммируемость. Если ряд

$$a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots$$

суммируем (B) для каждого p, то, по теореме 124, он также суммируем (B') для каждого p; в силу теоремы 126 верно также обратное. В этом случае мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ *нормально* суммируем. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum a_n$ был суммируемым и

$$e^{-x}a^{(p)}(x) = e^{-x}\sum a_{n+p}\frac{x^n}{n!} \to 0.$$

Если интеграл Бореля абсолютно сходится, то мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ *абсолютно* суммируем. Наконец, если ряд $a_p + a_{p+1} + \ldots$ абсолютно суммируем для каждого p, т. е. если $\int e^{-x}|a^{(p)}(x)|\,dx < \infty$ для каждого p, то мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ *регулярно* суммируем. Наша терминология отличается от терминологии Бореля, который называл абсолютной суммируемостью то, что мы назвали регулярной. Впрочем, приведенные определения не будут играть существенной роли.

Ряд

$$\sum \frac{(1+i)^{n+1}}{n+1}$$

суммируем нормально, но не абсолютно. Суммой его служит

$$\int_0^\infty e^{-t}a(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\,dt + i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\pi i.$$

8.7. Теоремы абелева типа для метода суммирования Бореля. Наши ближайшие теоремы будут теоремами абелева типа, олицетворяемого теоремой Абеля о непрерывности степенного ряда. Здесь и до конца главы мы будем рассматривать главным образом суммируемость (B'); переход к суммируемости (B) при желании легко осуществить с помощью теоремы 126.

Теорема 129. *Если степенной ряд* $\sum a_n z^n$ *суммируем* (B′) *в точке* P, *то он суммируем и в каждой точке отрезка* OP, *соединяющего начало* O *с* P. *При этом для каждой точки* Q *отрезка* OP, *лежащей между* O *и* P, *ряд равномерно суммируем на отрезке* QP.

Сходимость ряда где-нибудь кроме точки O не предполагается. Мы можем считать (произведя, если нужно, тривиальное преобразование), что точкой P служит $z=1$. Тогда интеграл

$$J(z)=\int e^{-t}a(zt)\,dt \tag{8.7.1}$$

сходится для $z=1$, и нужно доказать, что он сходится для $0<z\leqslant 1$, притом равномерно для $0<\delta\leqslant z\leqslant 1$.

Но при $0<z\leqslant 1$ имеем

$$J(z)=\frac{1}{z}\int e^{-\frac{t}{z}}a(t)\,dt=\frac{K(z)}{z}, \tag{8.7.2}$$

где

$$K(z)=\int e^{-st}e^{-t}a(t)\,dt=k(s),\quad s=\frac{1}{z}-1. \tag{8.7.3}$$

Последний интеграл равномерно сходится для $s\geqslant 0$, т. е. для $0<z\leqslant 1$; тем самым сходится и $J(z)$, и теорема доказана.

Теорема 129 не дает полной истины. На самом деле $J(z)$ равномерно сходится для $0\leqslant z\leqslant 1$. Проведенное рассуждение непригодно для доказательства этого факта из-за наличия множителя $\frac{1}{z}$ в формуле (8.7.2).

Теорема 130. *Если ряд* $\sum a_n z^n$ *суммируем* (B′) *в точке* P, *то он равномерно суммируем на отрезке* OP.

Мы снова можем предполагать, что точкой P служит $z=1$. Удобно также, на что мы, очевидно, имеем право, считать коэффициенты a_n вещественными. Нужно доказать, что

$$|I|=|I(z,H,H')|=\left|\int_H^{H'} e^{-t}a(zt)\,dt\right|<\varepsilon \tag{8.7.4}$$

для $H'>H\geqslant H_0(\varepsilon)$ и $0\leqslant z\leqslant 1$. Поскольку теоремой 129 установлена равномерная сходимость на отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$, мы можем считать, что $0<z\leqslant\frac{1}{2}$. Далее приходится рассматривать отдельно три случая, соответственно тому, будет ли (а) $H'z\leqslant 1$, (б) $Hz<1<H'z$ или (в) $Hz\geqslant 1$. Мы проведем доказательство только для случая (б), поскольку доказательства для остальных двух случаев являются простыми его вариантами. Мы можем считать, что $H>2$.

Положим

$$M = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |a(t)|, \qquad N = \max_{T > 1} \left| \int_1^T e^{-t} a(t)\, dt \right|.$$

Тогда

(8.7.5) $$I = \int_H^{\frac{1}{z}} e^{-t} a(zt)\, dt + \int_{\frac{1}{z}}^{H'} e^{-t} a(zt)\, dt = I_1 + I_2,$$

(8.7.6) $$|I_1| \leqslant M \int_H^{\infty} e^{-t}\, dt = Me^{-H}$$

и

$$I_2 = \frac{1}{z} \int_1^{H'z} e^{-\frac{t}{z}} a(t)\, dt = \frac{1}{z} \int_1^{H'z} e^{-st} e^{-t} a(t)\, dt = \frac{e^{-s}}{z} \int_1^{T} e^{-t} a(t)\, dt,$$

где $s = \frac{1}{z} - 1$ и $1 < T < H'z$. Так как $0 < z \leqslant \frac{1}{2}$, $2 \leqslant H \leqslant \frac{1}{z}$ и $ue^{-\frac{1}{2}u}$ убывает при $u > 2$, то

(8.7.7) $$|I_2| \leqslant \frac{N}{z} \exp\left(1 - \frac{1}{z}\right) \leqslant \frac{N}{z} e^{-\frac{1}{2z}} \leqslant NHe^{-\frac{1}{2}H}.$$

Из (8.7.5) — (8.7.7) и следует, что

$$|I| \leqslant Me^{-H} + NHe^{-\frac{1}{2}H} < \varepsilon$$

для $H \geqslant H_0(\varepsilon)$.

В качестве применения теоремы 130 докажем следующее предложение.

Теорема 131. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (B′) *и*

(8.7.8) $$c_n = \int_0^1 x^n\, d\chi(x),$$

где $\chi(x)$ — *ограниченная возрастающая функция, то ряд* $\sum c_n a_n$ *суммируем* (B′).

Действительно, полагая $b_n = c_n a_n$, имеем

$$b(t) = \sum b_n \frac{t^n}{n!} = \sum a_n \frac{t^n}{n!} \int_0^1 x^n\, d\chi = \int_0^1 a(tx)\, d\chi$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-t} b(t)\, dt = \int_0^1 d\chi \int_0^{\infty} e^{-t} a(tx)\, dt,$$

поскольку внутренний интеграл справа равномерно сходится для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Теорема 132. *Если ряд* $\sum a_n z^n$ *суммируем* (B′) *в точке* P, *то его сумма на* OP *есть аналитическая функция от* z, *регулярная внутри окружности* C *с диаметром* OP.

Мы снова можем предполагать, что точкой P служит $z=1$. Рассматриваемый ряд суммируем на отрезке OP, причем его сумма, для $0<z<1$, выражается формулой (8.7.2). Достаточно доказать, что $K(z)$ равномерно сходится в области D, ограниченной любыми двумя круговыми дугами, соединяющими O и P и образующими с OP острые углы η. Положим

$$z = re^{i\theta}, \quad s = \frac{1}{z} - 1 = \rho e^{i\varphi}$$

и воспользуемся формулой (8.7.3). Так как интеграл $k(s)$ сходится для $s=0$, то он равномерно сходится в угле $|\varphi| \leqslant \eta$. Стороны этого угла соответствуют круговым дугам, ограничивающим D, а его внутренность — внутренности области D. Следовательно, $K(z)$ равномерно сходится в D.

Следует заметить, что преобразование интеграла (8.7.1) в (8.7.2) предполагает вещественность z. Таким образом, хотя мы и доказали, что функция $J(z)$ регулярна внутри C, мы не доказали суммируемости ряда вне отрезка OP. Позже (в § 8.9) мы увидим, что он может и не быть суммируемым ни в каких других точках внутри C.

8.8. Аналитическое продолжение функции, регулярной в начале; многоугольник суммируемости. Если ряд $\sum a_n z^n$ имеет круг сходимости, то он определяет функцию, регулярную в начале, и интегралы $J(z)$ и $K(z)$ § 8.7 можно использовать для нахождения представлений этой функции, сохраняющих силу и вне указанного круга.

Оказывается, что область сходимости интеграла $J(z)$ вполне определяется особенностями рассматриваемой функции.

Функция

$$f(z) = \frac{1}{c-z} = \sum \frac{z^n}{c^{n+1}}$$

регулярна всюду, кроме точки $z=c$, которую мы примем за P, а кругом сходимости представляющего ее ряда служит $|z|<|c|$. В этом случае

$$J(z) = \frac{1}{c} \int e^{-t\left(1-\frac{z}{c}\right)} dt$$

сходится в том и только в том случае, когда $\Re \frac{z}{c} < 1$, т. е. когда O и z лежат по одну и ту же сторону от прямой L_P, проведенной через P перпендикулярно к OP.

Если

$$f(z)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\gamma_m}{c_m-z} \tag{8.8.1}$$

и $z=c_m$ принять за P_m, то O и z должны лежать по одну и ту же сторону от всех прямых L_{P_m}. Определяемая этим область есть внутренность выпуклого многоугольника, который может быть замкнутым или открытым или даже сводиться к углу, полосе или полуплоскости. Ряд суммируем „внутри“ этого многоугольника. Интегральная формула Коши, являющаяся обобщением формулы (8.8.1), наводит на мысль, что соответствующий результат должен иметь место для произвольной аналитической функции, регулярной в начале.

Пусть функция $f(z)=\sum a_n z^n$ регулярна в O и S — совокупность всех ее особых точек P. Обозначим через Π или $\Pi(f)$ совокупность всех точек Q, лежащих с O по одну и ту же сторону от каждой прямой L_P, через Γ — совокупность граничных точек множества Π и через Π^* — часть плоскости, дополнительную к $\Pi+\Gamma$. Будем называть Γ *многоугольником Бореля* функции f, Π — его внутренней и Π^* — внешней областями. Мы докажем, что Π есть область суммируемости ряда $\sum a_n z^n$, в том смысле, что этот ряд суммируем во всех точках области Π и не суммируем ни в какой точке области Π^*.

Если $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$, то Γ образована парой прямых $x=\pm 1$ и Π есть полоса, заключенная между ними. Если окружность круга сходимости есть естественная граница функции, то Γ совпадает с этой окружностью. Если естественной границей функции $f(z)$ служит прямая $x=d>0$, причем $f(z)$ регулярна слева от этой прямой, то Γ есть парабола с фокусом O, касающаяся этой прямой в точке d.

Из теоремы 132 сразу следует, что ряд $\sum a_n z^n$ не суммируем ни в какой точке Q из Π^*. Действительно, если Q принадлежит области Π^*, то существует прямая L_P, проходящая между O и Q, и P лежит внутри окружности C с диаметром OQ. Остается доказать суммируемость рассматриваемого ряда в точках области Π.

Предположим, что $f(u)$ регулярна на замкнутом контуре K, окружающем нулевую точку u-плоскости, и внутри него, и пусть

$$\Re\frac{z}{u}\leqslant 1-\delta<1 \tag{8.8.2}$$

для всех точек u этого контура K (так что z необходимо лежит внутри K). Тогда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(u)}{u-z}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(u)}{u}\,du\int e^{-t+\frac{tz}{u}}\,dt. \tag{8.8.3}$$

Повторный интеграл в правой части мажорируется интегралом

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_K \frac{|f(u)|\,|du|}{|u|}\int e^{-\delta t}\,dt.$$

Поэтому мы можем обратить порядок интегрирования и получаем

$$(8.8.4)\qquad f(z)=\int e^{-t}\,dt\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \frac{f(u)}{u}\,e^{\frac{tz}{u}}\,du=\int e^{-t}I(t,\ z)\,dt.$$

Так как $f(u)$ регулярна внутри K, а $e^{\frac{tz}{u}}$ регулярна всюду, кроме точки $u=0$, то мы можем при вычислении $I(t,\ z)$ стянуть K в контур K', лежащий внутри круга сходимости степенного ряда для $f(u)$ и окружающий точку $u=0$. Так как этот ряд и степенной ряд для $e^{\frac{tz}{u}}$ равномерно сходятся на K', то получаем

$$I(t,\ z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K'}\sum a_n u^n\sum\frac{1}{n!}\left(\frac{tz}{u}\right)^n\frac{du}{u}=\sum a_n\frac{(tz)^n}{n!}=a(tz).$$

Следовательно,

$$f(z)=\int e^{-t}a(tz)\,dt,$$

т. е. ряд $\sum a_n z^n$ суммируем к $f(z)$.

Остается показать, что для каждой точки z, принадлежащей области Π, существует контур K, удовлетворяющий указанным условиям. Если Q — точка из Π, то $f(z)$ регулярна внутри окружности C с диаметром OQ; действительно, если бы внутри C имелась особая точка P, то соответствующая прямая L_P проходила бы между O и Q. Далее, так как в Π существуют точки Q', лежащие на луче OQ за точкой Q, а $f(z)$ регулярна в O, то она регулярна и внутри некоторой чуть большей окружности C', концентрической с C; пусть C' пересекает прямую OQ в точках O' и Q'. Если z находится в Q, а u — в какой-либо точке A окружности C', то $\mathfrak{R}\frac{z}{u}<1$, когда Q и O лежат по одну и ту же сторону от перпендикуляра, проведенного в точке A к OA. Когда A обегает окружность C', эти перпендикуляры огибают эллипс с фокусами O и Q и большой осью $O'Q'$. Этот эллипс тем более вытянут, чем ближе O' к O, но всегда содержит OQ внутри. Для всех u на C' мы имеем $\mathfrak{R}\frac{z}{u}<1$, и так как $\mathfrak{R}\frac{z}{u}$ непрерывно, то при некотором δ неравенство (8.8.2) выполнено для всех u, лежащих на C'. Это показывает, что если z лежит в Q, то в качестве контура K можно взять C', и, следовательно, рассматриваемый ряд суммируем в Q. Тем самым он суммируем в любой точке области Π.

Фактически мы доказали даже больше. Так как повторный интеграл (8.8.3) абсолютно сходится, то абсолютно сходится и интеграл (8.8.4), так что рассматриваемый ряд абсолютно суммируем в Q. А поскольку все функции $f_p(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots$ удовлетворяют тем же условиям регулярности, что и $f(z)$, то все ряды $a_p z^p + \ldots$ абсолютно суммируемы. Тем самым ряд $\sum a_n z^n$ регулярно суммируем в Q.

Ясно также, что полученные результаты равномерны относительно z в любой замкнутой области, содержащейся внутри Π, так что ряд равномерно суммируем в каждой такой области.

В итоге, нами доказана

Теорема 133. *Степенной ряд, представляющий функцию, регулярную в начале, суммируем* (B′) *внутри многоугольника Бореля этой функции, притом регулярно, а в каждой замкнутой области, содержащейся внутри указанного многоугольника, и равномерно; ни в одной же точке, лежащей вне многоугольника Бореля, ряд не суммируем* (B′).

В частности, верна

Теорема 134. *Степенной ряд суммируем* (B′) *в каждой регулярной точке границы его круга сходимости и притом равномерно суммируем в некоторой окрестности всякой такой точки.*

Очевидно, в этих теоремах можно заменить (B′) на (B).

8.9. Ряды, представляющие функции с особенностью в начале. Рассмотрения § 8.8 основываются всюду на предположении, что ряд $\sum a_n z^n$ сходится для малых z. Если это неверно, то ряд все же может быть суммируемым для определенных значений z, доставляя полное или частичное представление некоторой аналитической функции; однако область или области его суммируемости могут иметь весьма различный характер, а сумма ряда в разных областях может представлять разные функции. Но в силу теоремы 130 область суммируемости, содержащая точку P, во всяком случае должна содержать и весь отрезок OP.

Рассмотрим два интересных примера.

(1) Если рассматриваемый ряд есть

$$1 + 0 - \frac{2!}{1!} z^2 + 0 + \frac{4!}{2!} z^4 + 0 - \ldots,$$

то $a(zt) = e^{-z^2 t^2}$, и суммой служит

$$J(z) = \int e^{-t - z^2 t^2} dt. \tag{8.9.1}$$

Положим $z = re^{i\theta}$; тогда интеграл (8.9.1) сходится в квадранте $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$

и квадранте, симметричном с ним относительно начала. Если $z=x=\frac{1}{\xi}>0$, то

$$J(z)=\xi\int_0^\infty e^{-\xi u-u^2}\,du=\xi e^{\frac{1}{4}\xi^2}\int_{\frac{1}{2}\xi}^\infty e^{-v^2}\,dv=$$

$$=\xi e^{\frac{1}{4}\xi^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}-\int_0^{\frac{1}{2}\xi} e^{-v^2}\,dv\right)=F(\xi),$$

что есть целая функция от ξ. Таким образом, $J(z)=F\left(\frac{1}{z}\right)$ для $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$. Так как, далее, $J(z)$ есть четная функция, то в противоположном квадранте $J(z)=F\left(-\frac{1}{z}\right)$. Но эти две функции разнятся на $\sqrt{\pi}\,\frac{e^{\frac{1}{4z^2}}}{z}$. Тем самым рассматриваемый ряд представляет в двух своих областях суммируемости различные аналитические функции.

(2) Пусть теперь

$$a_n=\sum\frac{(-1)^p}{p!}\,p^n c^p,$$

где $c>0$. Тогда

$$a(zt)=\sum\frac{(zt)^n}{n!}\sum\frac{(-1)^p}{p!}\,p^n c^p=$$

$$=\sum\frac{(-1)^p c^p}{p!}\sum\frac{(pzt)^n}{n!}=\sum\frac{(-1)^p c^p}{p!}\,e^{pzt}=e^{-ce^{zt}},$$

и

$$J(z)=\int e^{-t-ce^{zt}}\,dt=\int e^{-t-ce^{xt}(\cos yt+i\sin yt)}\,dt.$$

Если $x\leqslant 0$, то $J(z)$ сходится для всех y; но если $x>0$, то этот интеграл сходится только для $y=0$. Таким образом, рассматриваемый ряд суммируем (1) в полуплоскости $x\leqslant 0$ и (2) на положительной вещественной полуоси.

Предположим сначала, что z вещественно. Тогда

$$J(z)=\int_0^\infty e^{-t-ce^{zt}}dt=\int_1^\infty e^{-cu^z}\frac{du}{u^2}.$$

Полагая $u^z=v$ и $Z=-\frac{1}{z}$, получаем, что $J(z)$ равно $P(Z)$ или $Q(Z)$, где

$$P(Z)=-Z\int_1^\infty e^{-cv}\,v^{Z-1}\,dv,\quad Q(Z)=Z\int_0^1 e^{-cv}\,v^{Z-1}\,dv,$$

смотря по тому, будет ли $z>0$ или $z<0$. Здесь $P(Z)$ есть целая функция от Z, а

$$Q(Z)=\Gamma(Z+1)\,c^{-Z}+P(Z)$$

при $\Re Z>0$, так что $Q(Z)$ мероморфна. Эти функции $P(Z)$ и $Q(Z)$, представляемые рассматриваемым рядом, разнятся на $\Gamma(Z+1)\,c^{-Z}$.

Этот пример особенно интересен как иллюстрация к теоремам 130 и 132. Если P — точка положительной вещественной полуоси, то наш ряд равномерно суммируем на OP и представляет там функцию, регулярную внутри круга, ограничиваемого окружностью C теоремы 132; однако он не суммируем ни в какой точке этого круга, кроме точек отрезка OP. В этом смысле теорема 130 является наилучшей из возможных.

8.10. Аналитическое продолжение другими методами. Принципы, лежащие в основе наших рассмотрений в § 8.8, применимы и к другим методам суммирования. Наиболее интересны в этом отношении те методы, которые, подобно методам Линделёфа и Миттаг-Леффлера, изложенным в § 4.11, суммируют ряд $\sum z^n$ в его звезде Миттаг-Леффлера. Более обще, мы рассмотрим метод P суммирования, определяющий $\sum a_n$ как

$$\lim_{\delta \to 0} \sum A_n(\delta)\, a_n, \tag{8.10.1}$$

где $A_n(\delta) \to 1$ при $\delta \to 0$ для каждого n. Так, для метода Линделёфа

$$A_0(\delta) = 1,\quad A_n(\delta) = e^{-\delta n \log n} \quad (n > 0),$$

а для метода Миттаг-Леффлера

$$A_n(\delta) = \frac{1}{\Gamma(1+\delta n)}.$$

Теорема 135. *Пусть* (I) $\sum A_n(\delta) z^n$ *для каждого положительного* δ *есть целая функция от* z; (II) *при* $\delta \to 0$

$$\varphi_\delta(z) = \sum A_n(\delta)\, z^n \to \frac{1}{1-z}$$

равномерно в каждой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек луча $[1, \infty)$; (III) $f(z)$ *есть главная ветвь аналитической функции, регулярной в* O *и представляемой рядом* $\sum a_n z^n$ *для малых* z. *Тогда*

$$\sum A_n(\delta)\, a_n z^n \to f(z)$$

равномерно в любой замкнутой ограниченной области Δ, *содержащейся внутри звезды Миттаг-Леффлера функции* $f(z)$.

Мы можем предполагать, что область Δ звездообразна, т. е. вместе с каждой своей точкой P содержит и весь отрезок OP. Δ можно расширить во все стороны от O в некотором отношении $\rho > 1$ до области Δ', всё еще содержащейся в звезде функции $f(z)$. Пусть K — граница области Δ'. Для каждой точки z, внутренней к Δ, $\dfrac{z}{u}$ не принадлежит лучу $[1, \infty)$ ни для какого u из K, и

$$\varphi_\delta\left(\frac{z}{u}\right) \to \frac{u}{u-z}$$

равномерно на K. Поэтому

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \frac{f(u)}{u-z}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \left\{\lim_{\delta\to 0}\varphi_\delta\left(\frac{z}{u}\right)\right\} f(u)\,\frac{du}{u}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \varphi_\delta\left(\frac{z}{u}\right) f(u)\,\frac{du}{u}=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \sum A_n(\delta)\left(\frac{z}{u}\right)^n f(u)\,\frac{du}{u}.$$

Стягивая (как в § 8.8) K в контур, лежащий внутри круга сходимости степенного ряда для $f(u)$, подставляя вместо $f(u)$ этот степенной ряд и интегрируя почленно, получаем

$$f(z)=\lim_{\delta\to 0}\sum A_n(\delta)\,a_n z^n.$$

Ясно, что это будет иметь место равномерно для всех z из Δ. Методы, удовлетворяющие условиям (I) и (II) теоремы 135, приводят к лучшим результатам, чем метод Бореля, однако последний значительно удобнее, благодаря простым формальным свойствам показательной функции и показательного ряда.

8.11. Суммируемость некоторых асимптотических рядов. Борель и Карлеман доказали, что произвольному асимптотическому ряду соответствуют аналитические функции (§ 2.5). Более точно, для любой последовательности (a_n) и любого положительного α существуют функции $f(z)=f(re^{i\theta})$ такие, что

$$f(z)\sim a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots$$

при $r\to\infty$, равномерно в угле $|\theta|<\alpha\pi$. Если $B>0$ и $2k\alpha<1$, то $r^n e^{-Bz^k}\to 0$ равномерно в указанном угле для каждого n. Тем самым все функции $f(z)+Ae^{-Bz^k}$ имеют в этом угле одно и то же асимптотическое разложение.

Положение меняется, если предъявить более точные требования к остаточному члену рассматриваемого разложения. Тогда при некоторых условиях может оказаться, что поставленным условиям удовлетворяет, самое большее, одна функция $f(z)$ и что $f(z)$ есть в некотором, например борелевском, смысле сумма данного ряда. Как раз так будет обстоять дело в доказываемой ниже теореме Ватсона.

Обозначим область

$$r\geqslant k>0,\qquad -\frac{1}{2}\pi-\mu\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi+\lambda,$$

где $0<\lambda<\frac{1}{2}\pi$, $0<\mu<\frac{1}{2}\pi$, через $D(\lambda,\mu,k)$, а ее границу через $C(\lambda,\mu,k)$; последняя образована дугою окружности с центром в O и концами в отрицательной полуплоскости и исходящими из них лучами, направленными от O в бесконечность. λ и μ будут обычно совпадать.

Теорема 136. *Пусть $f(z)$ регулярна в заданной области $D(\lambda, \lambda, k)$, $\sigma > 0$ и*

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + R_n(z), \tag{8.11.1}$$

где

$$a_n = O(n!\,\sigma^n), \quad R_n = O\left\{(n+1)!\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{n+1}\right\} \tag{8.11.2}$$

равномерно для всех n и всех z из $D(\lambda, \lambda, k)$. Тогда

(I) *ряд*

$$\sum a_n \frac{t^n}{n!} = a(t), \tag{8.11.3}$$

где $t = \rho e^{i\varphi}$, сходится для $\rho < \frac{1}{\sigma}$;

(II) *функция $a(t)$ регулярна в любом угле $|\varphi| \leqslant \delta < \lambda$;*

(III) $$a(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f\left(\frac{u}{t}\right)\frac{e^u}{u}\,du,$$

где L — контур $C(\nu, \nu, l)$ с $0 < \nu < \lambda$ и $l > \frac{k}{\sigma}$, описываемый против часовой стрелки, и

(IV) $$f(z) = \int\limits_0^\infty e^{-w} a\left(\frac{w}{z}\right) dw$$

для $r > k$, $|\theta| \leqslant \delta$.

Последнее утверждение этой теоремы означает, что ряд $\sum \frac{a_n}{z^n}$ суммируем к $f(z)$ следующим методом, обобщающим метод Бореля и часто полезным. Если (а) ряд (8.11.3) сходится для малых t, (б) функция $a(t)$, определенная этим рядом, регулярна на луче $(0, \infty)$ и (в) $\int e^{-t} a(t)\,dt = s$, то мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (B*) к s. Таким образом, в рассматриваемом сейчас случае ряд $\sum \frac{a_n}{z^n}$ суммируем (B*) к $f(z)$.

Приведем еще пример. Если $a_n = (-1)^n n! z^n$, где z не является отрицательным вещественным числом, то $a(t) = \frac{1}{1+zt}$ и

$$1 - 1!\,z + 2!\,z^2 - \ldots = \int \frac{e^{-t}}{1+zt} \quad (\mathrm{B}^*).$$

Эта сумма была найдена эвристическим путем в § 2.4.

Если оценки (8.11.2) справедливы для каждого положительного σ, то $a(t)$ есть целая функция, и B* приводится к B'.

Переходим к доказательству теоремы 136. Утверждение (I) очевидным образом следует из условий (8.11.2). Далее, пусть $t = \rho e^{i\varphi}$, $\rho < \frac{1}{\sigma}$. Тогда, заменяя $f\left(\frac{u}{t}\right)$ ее асимптотическим разложением, имеем, формально,

$$(8.11.4)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f\left(\frac{u}{t}\right)\frac{e^u}{u}\,du = \sum a_m t^m \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^u}{u^{m+1}}\,du = \sum a_m \frac{t^m}{m!},$$

и нужно только обосновать законность почленного интегрирования. Когда u описывает контур L, то $\frac{u}{t}$ описывает контур

$$C\left(\nu-\varphi,\ \nu+\varphi,\ \frac{l}{\rho}\right),$$

который лежит внутри $D(\lambda, \lambda, k)$, если

$$(8.11.5)\qquad l > \frac{k}{\sigma} > k\rho, \quad |\varphi| < \lambda - \nu.$$

Тогда $f\left(\frac{u}{t}\right)$ ограничена на L, и интегралы, входящие в формулу (8.11.4), сходятся.

Запишем теперь интеграл (8.11.4) в форме

$$(8.11.6)\quad \sum_{m=0}^{n} a_m t^m \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^u}{u^{m+1}}\,du + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L R_n\left(\frac{u}{t}\right)\frac{e^u}{u}\,du = \sum_{m=0}^{n} a_m \frac{t^m}{m!} + P_n$$

и оценим $|P_n|$ сверху для больших n. Мы можем считать, что $n > l > \frac{k}{\sigma}$. Так как $R_n(z)$ регулярно внутри $D(\lambda, \lambda, k)$, то радиус круговой части контура L можно увеличить от l до n. Тогда доля этой круговой части в рассматриваемом интеграле будет

$$O\{(n+1)!\,(\sigma\rho)^{n+1} e^n n^{-n-1}\} = O\{n^{-\frac{1}{2}}(\sigma\rho)^{n+1}\},$$

а доля прямолинейных частей контура L будет

$$O\left\{(n+1)!\,(\sigma\rho)^{n+1}\int\limits_n^\infty \frac{e^{-r\sin\nu}}{r^{n+2}}\,dr\right\} = O\{(n+1)!\,(\sigma\rho)^{n+1} n^{-n-2}\}\int\limits_0^\infty e^{-r\sin\nu}\,dr =$$

$$= O\left\{\frac{(n+1)!\,(\sigma\rho)^{n+1}}{n^{n+2}\sin\nu}\right\} = O\{n^{-\frac{1}{2}} e^{-n}(\sigma\rho)^{n+1}\}.$$

Таким образом $P_n \to 0$, и (8.11.6) дает (8.11.4) при условиях (8.11.5).

Пусть теперь t изменяется в любой области T вида $|\varphi| \leqslant \delta < \lambda$, $0 < \rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$. Тогда ν и l можно выбрать так, чтобы условия (8.11.5) выполнялись для всех t из T, и интеграл (8.11.4) будет равномерно сходиться в T, определяя регулярную там функцию $a(t)$. Тем самым утверждения (II) и (III) доказаны.

Если w положительно, $z=re^{i\theta}$, $r>k$, $|\theta|\leqslant\delta$ и $t=\frac{w}{z}=\rho e^{i\varphi}$, то $|\varphi|\leqslant\delta$, так что

$$a\left(\frac{w}{z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} f\left(\frac{uz}{w}\right)\frac{e^u}{u}\,du.$$

Когда u описывает L, то $v=\frac{uz}{w}$ описывает $C\left(\nu+\theta,\ \nu-\theta,\ \frac{l}{\rho}\right)$ или L', и

$$a\left(\frac{w}{z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L'} f(v)\frac{e^{\frac{wv}{z}}}{v}\,dv.$$

Выберем r_1 так, чтобы $k<r_1<r$. Так как $\frac{l}{\rho}>\frac{k}{\sigma\rho}>k$, то L' можно заменить на

$$L_1=C(\nu+\theta,\ \nu-\theta,\ r_1).$$

Тогда получаем

$$\int e^{-w}a\left(\frac{w}{z}\right)dw=\int e^{-w}\,dw\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f(v)\frac{e^{\frac{wv}{z}}}{v}\,dv=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{f(v)}{v}\,dv\int e^{-w\left(1-\frac{v}{z}\right)}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f(v)\frac{z\,dv}{v(z-v)}=f(z),$$

в предположении, что обращение порядка интегрирования законно; а это во всяком случае так, если двойной интеграл абсолютно сходится. Рассмотрим круговую и прямолинейные части контура L_1 порознь. На круговой части

$$\Re\left(1-\frac{v}{z}\right)\geqslant 1-\frac{r_1}{r}>0,$$

так что ее доля мажорируется, с точностью до постоянного множителя, интегралом $\int\frac{|dv|}{|v|}$, который меньше 2π. На верхней прямолинейной части

$$\operatorname{am}\frac{wv}{z}=\operatorname{am}u=\frac{1}{2}\pi+\nu,\qquad \Re\left(\frac{wv}{z}\right)=-w\left|\frac{v}{z}\right|\sin\nu,$$

так что ее доля мажорируется, с точностью до постоянного множителя, интегралом

$$\int e^{-w}\,dw\int e^{-w\left|\frac{v}{z}\right|\sin\nu}\frac{|dv|}{|v|}=\int\frac{1}{|v|}\,\frac{|z|\,|dv|}{|z|+|v|\sin\nu}<\infty;$$

аналогичное верно и для нижней прямолинейной части контура L_1. Тем самым двойной интеграл абсолютно сходится, чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема 136, между прочим, показывает, что условиям (8.11.1) и (8.11.2) может удовлетворять не более одной функции $f(z)$. Но если нас интересует только единственность функции $f(z)$, то можно доказать большее и притом не пользуясь теорией суммируемости. Достаточно предположить, что $f(z)$ удовлетворяет условиям (8.11.1) и (8.11.2) в угле $|\theta| \leqslant \frac{1}{2}\pi$, а не более широкой области, рассматриваемой в теореме 136. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ одновременно удовлетворяют условиям (8.11.1) и (8.11.2) для $|\theta| \leqslant \frac{1}{2}\pi$, то, полагая $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$, имеем

$$|g(z)| = O\left\{(n+1)!\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{n+1}\right\}$$

равномерно относительно n и θ. Беря $n = \left[\frac{r}{\sigma}\right]$, мы простым применением теоремы Стирлинга убеждаемся в том, что $|g(z)| = O\{e^{-\frac{(1-\delta)r}{\sigma}}\}$ для каждого положительного δ и $|\theta| \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Из известных теорем фрагмен-линделёфова типа следует теперь, что $g(z) = 0$.

Карлеман пошел значительно дальше и нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы из неравенств

$$|g(z)| \leqslant \frac{\alpha_n^n}{r^n} \qquad \left(r \geqslant r_0 > 0,\ |\theta| \leqslant \frac{1}{2}\pi\right)$$

следовало, что $g(z) = 0$. Для достаточно правильно изменяющихся α_n этим условием является расходимость ряда $\sum \frac{1}{\alpha_n}$. В нашем случае это, фактически, гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$.

Заметим, что мы доказали суммируемость рассматриваемого ряда в угле, меньшем (на π) того угла, в котором мы предположили $f(z)$ асимптотически представимой этим рядом. Пример § 8.9 (1), с заменой z на $\frac{1}{z}$, показывает, что это ограничение диктуется самой природой вопроса, В этом примере $a(t) = e^{-t^2}$, и интеграл

$$f(z) = \int e^{-t-\frac{t^2}{z^2}}\, dt$$

сходится при $|\theta| \leqslant \frac{1}{4}\pi$, но не при $\frac{1}{4}\pi < |\theta| < \frac{3}{4}\pi$. Если z положительно, то

$$f(z) = z\int e^{-uz-u^2}du = \sum \frac{(-1)^p z^{p+1}}{p!}\int e^{-u^2}u^p\, du =$$

$$= \frac{1}{2}z\sqrt{\pi}\sum \frac{\left(-\frac{1}{2}z\right)^p}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}p\right)} = \frac{1}{2}z\sqrt{\pi}E_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}z\right),$$

где $E_{\frac{1}{2}}(z)$ — функция Миттаг-Леффлера. Как известно, $f(z)$ имеет тогда для $|\theta| < \frac{3}{4}\pi$ асимптотическое разложение

$$1 - \frac{2!}{1!}\frac{1}{z^2} + \frac{4!}{2!}\frac{1}{z^4} - \ldots,$$

так что этот ряд является асимптотическим в угле, превосходящем на π угол, в котором он суммируем. Угол, в котором справедливо интегральное представление функции $f(z)$, можно было бы увеличить, взяв интеграл по прямой, наклоненной к вещественной оси.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ VIII

§§ 8.2—8.4. Первое систематическое изложение теории (E, q)-методов дал Кпорр, *MZ*, **15** (1922), 226—253, и **18** (1923), 125—156; многие рассуждения в этих параграфах заимствованы оттуда. В частности, теоремы 117—121 принадлежат Кноппу.

(E, 1)-метод и методы, получающиеся путем повторного его применения, использовались часто и раньше, особенно при числовых расчетах. По поводу примеров см. Bromwich, 62—66 и 196—198.

Отдельные места в первом издании книги Бромвича (стр. 302—310) могут на первый взгляд показаться противоречащими некоторым утверждениям, содержащимся здесь и в § 8.5. Это объясняется тем, что, применяя метод Эйлера к степенным рядам, Бромвич не пользуется правильным определением. Согласно нашему определению $\sum a_n z^n$ определяется как

$$\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{4}(a_0 + a_1 z) + \frac{1}{8}(a_0 + 2a_1 z + a_2 z^2) + \ldots$$

Бромвич же, на самом деле, пользуется тождеством

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = a_0\frac{1}{1+z} + (a_0 + a_1)\frac{z}{(1+z)^2} + \\ + (a_0 + 2a_1 + a_2)\frac{z^2}{(1+z)^3} + \ldots,$$

справедливым для малых z, а затем определяет первую сумму посредством второй. Это — определение совершенно другого типа, например, уже тем, что оно не линейно относительно $a_0, a_1 z, a_2 z^2, \ldots$; а странные результаты, к которым оно приводит, показывают, что его нельзя считать удачным. Так, Бромвич показывает, что ряд $\sum 3^n z^n$ суммируем внутри круга с диаметром $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$, однако ряд $\sum \frac{z^n}{2^n}$ суммируем *вне* круга с диаметром $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$, так что область суммируемости не содержит всего круга сходимости.

Сделаем еще замечание о вычислениях Эйлера и Лакруа, упомянутых в § 2.6. Ни один из рядов, в которые Эйлер преобразует ряд $1 - 1! + 2! - 3! + \ldots$, не сходится, и может показаться замечательным, что этот метод удалось успешно применить к таким рядам. Однако успех Эйлера можно объяснить следующим образом. Если положить $a_n = (-1)^n n! = (-1)^n A_n$ и

$$A_n = \sum_p a_{n,p}, \qquad a_{n,0} = \int_0^2 e^{-t} t^n dt, \quad a_{n,p} = \int_{2^p + 2^{p-1} - 1}^{2^{p+1} + 2^p - 1} e^{-t} t^n\, dt \quad (p > 0),$$

то легко проверить, что ряд $\sum (-1)^n a_{n,p}$ суммируем (E, $2^{p+1}-1$) к

$$\int_0^2 \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt, \qquad \int_{2^p+2^{p-1}-1}^{2^{p+1}+2^p-1} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$$

соответственно для $p=0$ и $p>0$; складывая же результаты, мы получим

$$\int \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt,$$

в согласии с B*-суммой, найденной в § 8.11.

$(N+1)$-е остаточные члены в надлежащих преобразованных рядах Эйлера равны

$$\frac{1}{2^{N+1}}\int_0^2 e^{-t}\frac{(1-t)^{N+1}}{1+t}\,dt, \quad \frac{1}{2^{(p+1)(N+1)}}\int_{2^p+2^{p-1}-1}^{2^{p+1}+2^p-1} e^{-t}\frac{(2^{p+1}-1-t)^{N+1}}{1+t}\,dt,$$

т. е. соответственно $O\left(\frac{1}{2^{N+1}}\right)$ и $O\left(\frac{1}{e^{2^p}2^{N+1}}\right)$, а эйлеровы суммы этих рядов суть $O\left(\frac{2^p}{e^{2^p}}\right)$. Таким образом, ошибка, получающаяся при отбрасывании в первых P рядах всех членов, следующих за $(N+1)$-м, равна

$$O\left(\frac{1}{2^{N+1}}\right)+O\left(\frac{1}{e^{2^{P+1}}2^{P+1}}\right).$$

Если, например, взять $N=10$, $P=2$, то, как легко доказать, ошибка будет меньше 0,001.

Это, разумеется, не совсем то, что Эйлер делает, и не было бы удобным способом; но эйлеровский способ повторного преобразования примерно равносилен.

§ 8.5. Ранние работы Бореля о расходящихся рядах: „Mémoire sur les séries divergentes" [*AEN* (3), **16** (1899), 9—136] и первое издание его книги содержат ряд недосмотров, исправленных позже Харди [*TCPS*, **19** (1903), 297—321, и *QJM*, **35** (1903), 22—66]. Здесь Харди доказывает теоремы 122—127, которые затем переоткрыл, с более короткими доказательствами, Perron, *MZ*, **6** (1920), 158—160 и 286—310. Sannia, *RP*, **42** (1917), 303—322, распространил эти теоремы в различных направлениях.

Кнопп, l. c. в примечании к § 3.7, замечает, что, поскольку

$$e^{-x}\left(A_0x+A_1\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)=\int_0^x e^{-(x-y)}e^{-y}(A_0+A_1y+\ldots)\,dy,$$

B-ядро ряда $0+a_0+a_1+\ldots$ содержится в B-ядре ряда $a_0+a_1+\ldots$ Дальнейшее обобщение дается им в *RP*, **54** (1930), 331—334.

Теорема 128 принадлежит Кноппу, l. c. в примечании к §§ 8.2—8.4.

§ 8.6. Харди, l. c. в примечании к § 8.5, дает пример сходящегося, но не абсолютно суммируемого ряда,

§§ 8.7—8.8. Содержание этих параграфов, за исключением теоремы 130 и являющейся ее следствием теоремы 131, принадлежит в основном Борелю. Теорема 130 была доказана Hardy, *MM*, **40** (1911), 161—165; приведенное здесь доказательство принадлежит Landau, *AM*, **42** (1920), 95—98.

Область (E, q)-суммируемости функции $f(z)=\sum a_n z^n$ можно определить аналогичным образом. Она представляет собой совокупность точек, внутренних ко всем кругам C_ζ, где ζ — первая особая точка функции $f(z)$ на радиусе, исходящем из O, а C_ζ — круг

$$|q\zeta+z|<(q+1)|\zeta|.$$

При $q\to\infty$ эта область стремится к многоугольнику Бореля П. В частности, (1) ряд $\sum a_n z^n$ суммируем (E, q), для некоторого q, в каждой внутренней точке многоугольника П, и (2) он суммируем (E, q), для всех $q>0$, в любой регулярной точке границы круга сходимости. По поводу всего этого см. Кнопп, l. c., и Rademacher, *Sitzungsberichte d. Berliner Math. Ges.*, **21** (1922), 16—24.

Perron, *MZ*, **18** (1923), 157—172, следующим образом обобщил метод Эйлера. Если

$$\gamma_m\geqslant 0,\quad \sum\gamma_m=1,\quad F(z)=\sum\gamma_m z^{m+1},$$

$\sum b_m z^{m+1}$ есть разложение для $\sum a_n\{F(z)\}^{n+1}$ по степеням z и $\sum b_m$ сходится к A, то будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (F) к A. Этот метод регулярен и применим во всех регулярных точках границы круга сходимости. (E, q)-метод соответствует выбору

$$F(z)=\frac{z}{q+1-qz}.$$

§ 8.9. Hardy, *MM*, **43** (1913), 22—24.

§ 8.10. Наиболее изящны следующие три представления для функции $\frac{1}{1-z}$ в ее звезде Миттаг-Леффлера:

$$\text{(а)}\ \lim_{\zeta\to1}\sum\frac{\Gamma(1+\zeta n)}{\Gamma(1+n)}z^n,\quad \text{(б)}\ 1+\lim_{\delta\to0}\sum_1^\infty e^{-\delta n\log n}z^n,\quad \text{(в)}\ \lim_{\delta\to0}\sum\frac{z^n}{\Gamma(1+\delta n)}.$$

Все они, по теореме 135, приводят к представлениям для общей аналитической функции $f(z)$. Первое предложил Le Roy, *AT* (2), **2** (1900), 317—430 (323), второе — Lindelöf, *J. de M.* (5), **9** (1903), 213—221. Третье упоминает Миттаг-Леффлер в своей речи на четвертом международном математическом съезде (Рим, 1908; см. Atti del IV Congresso Internaz., **1**, 67—85). В ряде работ, опубликованных в *AM* между 1899 и 1904 гг., он пользуется представлением

$$\text{(г)}\ \frac{1}{1-z}=\int e^{-t}\sum\frac{(t^\alpha z)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}\,dt=\int e^{-t}E_\alpha(t^\alpha z)\,dt,$$

справедливым в открытой области, содержащей начало и ограниченной кривою

$$r=\left(\sec\frac{\theta}{\alpha}\right)^\alpha,$$

где $-\frac{1}{2}\alpha\pi < \theta < \frac{1}{2}\alpha\pi$, если $0 < \alpha \leqslant 2$, и $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, если $\alpha > 2$. Доказательство опирается на асимптотические свойства функции $E_\alpha(z)$. Эта область при $\alpha \to 0$ стремится к звезде функции $\frac{1}{1-z}$, но Миттаг-Леффлер в указанных работах не дает какой-либо простой формулы, справедливой во всей этой звезде.

Поведение функции Миттаг-Леффлера

$$f(z) = E_\alpha(z) = \sum \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$$

для больших $z = re^{i\theta}$, где $-\pi < \theta \leqslant \pi$, можно определить следующим образом. Имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha n + 1)} = \frac{1}{2\pi i}\int e^u u^{-\alpha n - 1}\,du,$$

где $u = \rho e^{i\varphi}$, $u^{-\alpha n} = e^{-\alpha n \log u}$, причем взята главная ветвь логарифма, и контур C, огибая нулевую точку справа, уходит своими концами в бесконечность в левую полуплоскость. Рассмотрим два таких контура: первый, C_0, образованный из круговой дуги $\rho = 1$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2} + \delta$ $(\delta > 0)$ и лучей $|\varphi| = \frac{\pi}{2} + \delta$, $\rho > 1$, и второй, C_1, все точки которого удалены от начала больше чем на $(2r)^{\frac{1}{\alpha}}$, так что все нули функции $u^\alpha - z$ лежат влево от этого контура. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^u}{u} \sum \left(\frac{z}{u^\alpha}\right)^n du = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{e^u u^{\alpha-1}}{u^\alpha - z}\,du,$$

и, следовательно, по теореме Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} \frac{e^u u^{\alpha-1}}{u^\alpha - z}\,du + \sum R_k = I(z) + \sum R_k,$$

где R_k — вычеты подинтегрального выражения в его полюсах, лежащих между C_0 и C_1 (если таковые имеются). Если δ выбрано так, что ни один полюс не лежит на C_0, и достаточно мало́, то эти полюсы определяются формулой $u = r^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{\theta + 2k\pi}{\alpha}}$, где k пробегает целые значения, удовлетворяющие неравенствам

$$-\frac{1}{2}\alpha\pi \leqslant \theta + 2k\pi \leqslant \frac{1}{2}\alpha\pi, \tag{1}$$

и

$$\alpha R_k = \exp\{r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{\alpha}}\}$$

есть одно из значений $e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}$. Но

$$I(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\left\{\frac{1}{z}+\frac{u^\alpha}{z^2}+\ldots+\frac{u^{(p-1)\alpha}}{z^p}-\frac{u^{p\alpha}}{z^p(u^\alpha-z)}\right\}u^{\alpha-1}e^u\,du =$$

$$= -\sum_{m=1}^{p}\frac{z^{-m}}{\Gamma(1-m\alpha)}+R_p(z),$$

где

$$R_p(z) = \frac{1}{2\pi i z^p}\int\limits_{C_0}\frac{u^{p\alpha+\alpha-1}e^u}{u^\alpha-z}\,du = O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right)$$

для больших z. Тем самым $I(z)$ обладает асимптотическим разложением

$$I(z) \sim -\frac{z^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}-\frac{z^{-2}}{\Gamma(1-2\alpha)}-\ldots \tag{2}$$

Мы должны теперь рассмотреть отдельно случаи $\alpha < 2$ и $\alpha > 2$. Если $\alpha = 2$, то $f(z) = \operatorname{ch}\sqrt{z}$ и стремится к бесконечности в любом направлении, отличном от направления отрицательной вещественной оси.

(1) Если $0 < \alpha < 2$ и $\frac{1}{2}\alpha\pi < |\theta| \leqslant \pi$, то неравенствам (1) не удовлетворяет ни одно k. В этом случае $E_\alpha(z)$ обладает асимптотическим разложением (2). Если, с другой стороны, $|\theta| \leqslant \frac{1}{2}\alpha\pi$, то мы должны принять в расчет экспоненциальный член R_0, и

$$\alpha E_\alpha(z) \sim e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{3}$$

когда $z \to \infty$, оставаясь в угле $|\theta| \leqslant \frac{1}{2}\alpha\pi$.

(2) Если $\alpha > 2$, то всегда приходится принимать в расчет, по крайней мере, один экспоненциальный член. Модуль такого члена равен

$$\frac{1}{2}\exp\left(r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\theta+2k\pi}{\alpha}\right),$$

что при $k = 0$ больше, чем при любом другом из допустимых значений k, за исключением случая $\theta = \pi$. Таким образом, соотношение (3) справедливо для всех θ, кроме $\theta = \pi$. При $\theta = \pi$ имеется пара одинаковых наибольших членов. В соединении они дают

$$\frac{1}{\alpha}\left\{\exp\left(r^{\frac{1}{\alpha}}e^{\frac{i\pi}{\alpha}}\right)+\exp\left(r^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\frac{i\pi}{\alpha}}\right)\right\} = \frac{2}{\alpha}\exp\left(r^{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)\cos\left(r^{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{\pi}{\alpha}\right), \tag{4}$$

и $E_\alpha(z)$ ведет себя приближенно как эта функция.

Wiman, *AM*, **29** (1905), 217—234, показал, что функция $E_\alpha(z)$ может иметь только конечное число невещественных нулей, причем если $\alpha \geqslant 2$, то все ее нули вещественны.

Интегральное представление функции $E_\alpha(z)$ можно также использовать для доказательства установленного в § 4.11 факта, что ряд $\sum z^n$ суммируем (M) к функции $\frac{1}{1-z}$ во всей ее звезде Миттаг-Леффлера. В самом деле, если $0<|\theta|\leqslant\pi$ и α достаточно малò, то $|\theta+2k\pi|>\frac{1}{2}\alpha\pi$ для всех целых k. Поэтому

$$E_\alpha(z)-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^u}{u}\left(\frac{u^\alpha}{u^\alpha-z}-\frac{1}{1-z}\right)du=\frac{1}{2\pi i}\frac{z}{1-z}\int\frac{e^u}{u}\frac{1-u^\alpha}{u^\alpha-z}du,$$

где интегралы взяты вдоль C_0. Но последнее выражение стремится к нулю вместе с α для всех точек z указанной звезды, и притом равномерно в любой содержащейся в ней замкнутой ограниченной области.

§ 8.11. Watson, *PTRS* (A), **211** (1912), 279—313. См. также F. Nevanlinna, *ASF*, **12** (1916), n° 3, и Carleman, Les fonctions quasi-analytiques (Париж, 1926), гл. 5. Требуемые теоремы „фрагмен-линделёфова“ типа можно найти в книге Титчмарш, Теория функций, 203 и сл.

Глава IX

МЕТОДЫ ЭЙЛЕРА И БОРЕЛЯ (2)

9.1. Элементарные леммы. В этой главе будут рассматриваться главным образом теоремы тауберова типа для методов суммирования Эйлера и Бореля. Мы начнем с трех элементарных теорем, относящихся к показательному и биномиальному рядам; на эти теоремы, содержание которых хорошо известно, будет опираться значительная часть наших последующих рассмотрений.

Теорема 137. *Пусть* $x > 0$ *и*

(9.1.1) $$u_m = u_m(x) = e^{-x}\frac{x^m}{m!} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

так что $\sum u_m = 1$. *Тогда:*

(1) *наибольшим из* u_m *является* u_M, *где*

(9.1.2) $$M = [x];$$

при целом x *имеется два наибольших члена,* u_{M-1} *и* u_M;

(2) *если*

(9.1.3) $$m = M + h$$

и $0 < \delta < 1$, *то*

(9.1.4) $$\sum_{|h| > \delta x} u_m = O(e^{-\gamma x}),$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$;

(3) *если*

(9.1.5) $$\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3},$$

то

(9.1.6) $$\sum_{|h| > x^{\zeta}} u_m = O(e^{-x^{\eta}}),$$

где η — *любое число, меньшее чем* $2\zeta - 1$;

(4) *если* $\lambda > 0$, *то*

(9.1.7) $$\sum_{|h| > \lambda\sqrt{x}} u_m < \varepsilon$$

для $x > x_0(\varepsilon)$, $\lambda > \lambda_0(\varepsilon)$;

(5) *если* $|h| \leqslant x^{\gamma}$, *то*

(9.1.8) $$u_m = \sqrt{\frac{c}{\pi M}}\, e^{-\frac{ch^2}{M}} \left\{1 + O\left(\frac{|h|+1}{x}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{x^2}\right)\right\},$$

где

(9.1.9) $$c = \frac{1}{2};$$

(6) *оценки* (9.1.4) *и* (9.1.6) *остаются в силе при умножении* u_m *на любую фиксированную степень* m.

Теорема 138. *Пусть* $q > 0$ *и*

(9.1.10) $$u_m = u_m(n) = \frac{1}{(q+1)^n}\binom{n}{m} q^{n-m} \qquad (0 \leqslant m \leqslant n),$$

так что $\sum u_m = \frac{1}{(q+1)^n}\sum \binom{n}{m} q^{n-m} = 1$. *Тогда:*

(1) *наибольшим из* u_m *является* u_M, *где*

(9.1.11) $$M = \left[\frac{n+1}{q+1}\right];$$

когда $\frac{n+1}{q+1}$ — *целое, имеется два наибольших члена,* u_{M-1} *и* u_M;

(2) *верны утверждения* (2) — (6) *теоремы* 137, *с некоторым положительным* $\gamma = \gamma(q, \delta)$ *в* (2) *), *с*

(9.1.12) $$c = \frac{q+1}{2q}$$

в (5) *и с заменой всюду* x *на* n.

Теорема 139. *Пусть* $0 < k < 1$ *и*

(9.1.13) $$u_m = u_m(n) = k^{n+1}\binom{m}{n}(1-k)^{m-n} \qquad (m \geqslant n),$$

так что

$$\sum u_m = k^{n+1}\left\{1 + (n+1)(1-k) + \frac{(n+1)(n+2)}{2!}(1-k)^2 + \ldots\right\} = 1.$$

Тогда:

(1) *наибольшим из* u_m *является* u_M, *где*

(9.1.14) $$M = \left[\frac{n}{k}\right];$$

когда $\frac{n}{k}$ — *целое, имеется два наибольших члена,* u_{M-1} *и* u_M;

*) В этом случае мы не приписываем γ какого-либо фиксированного значения.

(2) *верны утверждения* (2) — (6) *теоремы* 137, *с некоторым положительным* $\gamma = \gamma(k, \delta)$ *в* (2), *с*

(9.1.15) $$c = \frac{k}{2(1-k)}$$

(5) *и с заменой всюду* x *на* n.

Мы докажем теоремы 137 и 139, наиболее важные для наших теперешних целей. Теорема 138 доказывается подобно теореме 139, но несколько проще.

9.2. Доказательство теоремы 137. Первое утверждение теоремы очевидно, поскольку $\frac{u_m}{u_{m-1}} = \frac{x}{m}$.

Предполагая, далее, x столь большим, что $x^\zeta < \delta x$, разобьем $\sum u_m = \sum u_{M+h}$ на следующие пять частей:

(9.2.1) $$\sum_{-M \leqslant h < -\delta x} + \sum_{-\delta x \leqslant h < -x^\zeta} + \sum_{|h| \leqslant x^\zeta} + \sum_{x^\zeta < h \leqslant \delta x} + \sum_{h > \delta x} = \sum_{m=0}^{M_1-1} + \sum_{m=M_1}^{M_2-1} + \sum_{m=M_2}^{M_3} + \sum_{m=M_3+1}^{M_4} + \sum_{m=M_4+1}^{\infty} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5.$$

Тогда

(9.2.2) $$\begin{cases} M_1 = [x] - [\delta x], & M_2 = [x] - [x^\zeta], \\ M_3 = [x] + [x^\zeta], & M_4 = [x] + [\delta x]. \end{cases}$$

Очевидно,

(9.2.3) $$S_1 = O(xu_{M_1}), \quad S_2 = O(xu_{M_2}), \quad S_4 = O(xu_{M_3}).$$

Далее, $M_4 + 2 > x + \delta x$, так что

(9.2.4) $$S_5 = u_{M_4+1}\left\{1 + \frac{x}{M_4+2} + \frac{x^2}{(M_4+2)(M_4+3)} + \dots\right\} < \\ < u_{M_4}\left\{1 + \frac{1}{1+\delta} + \frac{1}{(1+\delta)^2} + \dots\right\} = O(u_{M_4}).$$

Поэтому для доказательства утверждения (2) теоремы достаточно установить, что

(9.2.5) $$u_{M_1} = O(e^{-\gamma x}), \quad u_{M_4} = O(e^{-\gamma x}).$$

Но

$$u_{M_1} = e^{-x}\frac{x^{M_1}}{M_1!} < e^{-x+M_1}\left(\frac{x}{M_1}\right)^{M_1}$$

и

$$x - \delta x - 1 < M_1 = [x] - [\delta x] < x - \delta x + 1.$$

Поэтому

$$(9.2.6)\qquad u_{M_1} = O\left\{e^{-\delta x}\left(\frac{x}{x-\delta x-1}\right)^{x-\delta x+1}\right\} = $$
$$= O\left\{e^{-\delta x}\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{x-\delta x}\right\} = O\left(e^{-\Delta x}\right),$$

где

$$(9.2.7)\qquad \Delta = \delta - (1-\delta)\log\frac{1}{1-\delta} = \frac{\delta^2}{1\cdot 2} + \frac{\delta^3}{2\cdot 3} + \frac{\delta^4}{3\cdot 4} + \ldots > \frac{\delta^2}{2}.$$

Аналогично

$$(9.2.8)\qquad u_{M_4} = O\left\{e^{\delta x}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{x+\delta x}\right\} = O\left(e^{-\Delta' x}\right),$$

где

$$(9.2.9)\qquad \Delta' = -\delta + (1+\delta)\log(1+\delta) = \frac{\delta^2}{1\cdot 2} - \frac{\delta^3}{2\cdot 3} + \frac{\delta^4}{3\cdot 4} - \ldots > \frac{\delta^2}{3}.$$

Из (9.2.6)—(9.2.9) следует справедливость оценки (9.2.5) с $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$. Тем самым доказано и (9.1.4).

Аналогично можно было бы доказать и оценку (9.1.6), но проще вывести ее из формулы (9.1.8), которую нам все равно нужно доказать. Для этого положим

$$x = M + f \quad (0 \leqslant f < 1), \quad m = M + h,$$
$$\log u_m = -x + (M+h)\log x - \log\Gamma(M+h+1),$$

и аппроксимируем $\log\Gamma(M+h+1)$ по формуле

$$\log\Gamma(y+1) = \left(y+\frac{1}{2}\right)\log y - y + \frac{1}{2}\log 2\pi + O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Простой подсчет дает тогда:

$$\log u_m = -\frac{1}{2}\log 2\pi M - \frac{h^2}{2M} + O\left(\frac{|h|+1}{x}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{x^2}\right)^{*)}.$$

Так как $|h| = o(x)$ и $|h|^3 = o(x^2)$, то это равносильно оценке (9.1.8). Далее, так как

$$\frac{1}{\sqrt{M}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right),$$
$$\exp\left(\frac{h^2}{2M} - \frac{h^2}{2x}\right) = \exp\left\{O\left(\frac{h^2}{x^2}\right)\right\} = 1 + O\left(\frac{h^2}{x^2}\right),$$

то в (9.1.8) при желании можно заменить M на x.

---

*) Чтобы охватить и случай $h = 0$, мы должны в первом из остаточных членов вместо $|h|$ писать $|h| + 1$.

Из (9.1.8) явствует, что и u_{M_2} и u_{M_3} есть $O(e^{-x^\eta})$, где η может быть любым числом, меньшим чем $2\zeta - 1$. Отсюда следует, что и S_2 и S_4 есть $O(e^{-x^\eta})$, чем доказано и утверждение (3) теоремы.

Что касается утверждения (4), то рассматриваемая там сумма есть

$$O\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\lambda\sqrt{x} < h \leqslant x^\zeta} e^{-\frac{h^2}{2x}}\left(1 + \frac{h}{x} + \frac{h^3}{x^2}\right)\right\} + O(e^{-x^\eta}),$$

где первый член есть

$$O\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\lambda\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2x}}\,dt + \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_{\lambda\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2x}}\,t\,dt + \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \int_{\lambda\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2x}}\,t^3\,dt\right\}.$$

Каждый из последних двух интегралов есть $O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, а первый

$$O\left(\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2}\,dw\right),$$

что для больших λ мало́.

Остается еще доказать утверждение (6). Ясно, что при замене u_m на $m^K u_m$ в наших оценках для S_1, S_2 и S_4 изменится только степень x, так что требуемые порядки этих сумм еще сохранятся. То же верно и для u_{M_4}. А

$$\begin{aligned} S_5 &= (M_4+1)^K u_{M_4+1} + (M_4+2)^K u_{M_4+2} + \ldots \leqslant \\ &\leqslant (2M_4)^K u_{M_4+1}\left\{1^K + \frac{2^K x}{M_4+2} + \frac{3^K x^2}{(M_4+2)(M_4+3)} + \ldots\right\} \leqslant \\ &\leqslant (2M_4)^K u_{M_4}\left\{1^K + \frac{2^K}{1+\delta} + \frac{3^K}{(1+\delta)^2} + \ldots\right\} = O(x^K u_{M_4}). \end{aligned}$$

Тем самым S_5 также есть величина требуемого порядка, чем и завершается доказательство.

9.3. Доказательство теоремы 139. Первое утверждение теоремы следует из равенства

$$\frac{u_m}{u_{m-1}} = \frac{m}{m-n}(1-k).$$

Остальная часть доказательства проводится по тому же плану, что и соответствующая часть доказательства теоремы 137, хотя и требует несколько более сложных выкладок.

Мы снова разбиваем $\sum u_m$ на пять частей, причем $M_1, \ldots$ теперь таковы:

$$M_1 = \left[\frac{n}{k}\right] - [\delta n], \quad M_2 = \left[\frac{n}{k}\right] - [n^\zeta], \quad M_3 = \left[\frac{n}{k}\right] + [n^\zeta],$$

$$M_4 = \left[\frac{n}{k}\right] + [\delta n]$$

(мы можем предполагать, что $\delta < \frac{1}{k} - 1$). Как и в § 9.2,

$$S_1 = O(nu_{M_1}), \quad S_2 = O(nu_{M_2}), \quad S_4 = O(nu_{M_3}).$$

Далее, $M_4 + 2 > n\left(\frac{1}{k} + \delta\right)$, так что при $m > M_4 + 1$ имеем

$$\frac{u_m}{u_{m-1}} = \frac{m}{m-n}(1-k) < \frac{1+k\delta}{1-k+k\delta}(1-k) = 1 - \frac{k^2\delta}{1-k+k\delta} = 1 - \delta_1,$$

и

$$S_5 < u_{M_4}\{1 + (1-\delta_1) + (1-\delta_1)^2 + \ldots\} = O(u_{M_4}).$$

Таким образом, как и в § 9.2, остается доказать, что каждое из u_{M_1} и u_{M_4} есть $O(e^{-\gamma n})$, а каждое из u_{M_2} и u_{M_3} есть $O(e^{-n^{\eta}})$.

Для каждого l между 0 и 1 имеем

$$l^{n+1} \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} (1-l)^{m-n} = 1,$$

так что

$$u_m = k^{n+1} \binom{m}{n} (1-k)^{m-n} < \left(\frac{k}{l}\right)^{n+1} \left(\frac{1-k}{1-l}\right)^{m-n}.$$

Если $m = M \pm [\delta n]$, то эта величина равна $O(\theta^n)$, где

$$\theta = \theta(l) = \frac{k}{l}\left(\frac{1-k}{1-l}\right)^{\frac{1}{k} - 1 \pm \delta}$$

Но $\theta(l)$ равно 1 при $l = k$, стремится к бесконечности при $l \to 0$ или $l \to 1$ и обладает единственным минимумом, достигаемым при $l = \frac{k}{1 \pm k\delta}$. Далее,

$$\theta'(k) = \pm \frac{\delta}{1-k} \neq 0.$$

Отсюда следует, что $\theta(l)$ принимает значения, меньшие чем 1, для значений l, лежащих по одну из сторон от $l = k$ (по какую именно — зависит от того, какой из знаков $\pm$ имеет место). Поэтому мы во всяком случае можем выбрать l так, чтобы $\theta < 1$, и тем самым каждое из u_{M_1} и u_{M_4} есть $O(e^{-\gamma n})$.

Это решает вопрос об S_1 и S_4. Допустим теперь, что $|h| \leqslant n^{\zeta}$, положим

$$M = \left[\frac{n}{k}\right] = \frac{n}{k} - f \quad (0 \leqslant f < 1), \quad m = M + h,$$

$$\log u_m = (n+1)\log k + (m-n)\log(1-k) + \log\Gamma(m+1) -$$
$$- \log\Gamma(n+1) - \log\Gamma(m-n+1),$$

и, снова применяя теорему Стирлинга, получим, что

$$\log u_m = -\frac{1}{2}\log 2\pi n + \log k - \frac{1}{2}\log(1-k) - \frac{h^2k^2}{2(1-k)n} + \\ + O\left(\frac{|h|+1}{n}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{n^2}\right).$$

Но это равносильно оценке (9.1.8), с c и M, определяемыми соответственно по формулам (9.1.15) и (9.1.14). Остальная часть доказательства ничем существенно не отличается от соответствующей части доказательства теоремы 137.

9.4. Еще одна элементарная лемма. Нам понадобится еще одна элементарная лемма. Суммы с неуказанными пределами суммирования будут браться по h от $-\infty$ до $+\infty$.

Теорема 140. *При* $n \to \infty$

$$\sum e^{-\frac{ch^2}{n}} = \sqrt{\frac{n\pi}{c}} + O(1)$$

равномерно на каждом конечном интервале положительных значений c.

Действительно, рассматриваемый ряд равен $1+2S$, где

$$S = \sum_1^\infty e^{-\frac{ch^2}{n}} = \int_1^\infty e^{-\frac{ct^2}{n}}\,dt + \sum_1^\infty \int_h^{h+1} \left(e^{-\frac{ch^2}{n}} - e^{-\frac{ct^2}{n}}\right) dt = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n\pi}{c}} - \int_0^1 e^{-\frac{ct^2}{n}}\,dt + T.$$

Последний интеграл здесь меньше 1. Далее,

$$e^{-\frac{ch^2}{n}} - e^{-\frac{ct^2}{n}} = \frac{2c}{n}\int_h^t ue^{-\frac{cu^2}{n}}\,du < \frac{4c}{n}(t-1)\,e^{-\frac{c(t-1)^2}{n}}$$

для $2 \leqslant h < t < h+1$, что всегда меньше 1; следовательно,

$$T < 1 + \frac{4c}{n}\int_1^\infty (t-1)\,e^{-\frac{c(t-1)^2}{n}}\,dt = 3.$$

Применяя формулу

$$\sum e^{-\frac{ch^2}{n}} = \sqrt{\frac{n\pi}{c}} \sum e^{-\frac{\pi^2h^2n}{c}},$$

мы могли бы получить значительно более точный результат.

17 Зак. 2499. Г. Харди

9.5. Теорема Островского о сверхсходимости. Известная теорема Адамара утверждает, что если $\sum b_m x^{\varphi(m)}$ — степенной ряд с целыми показателями, имеющий конечный радиус сходимости, и если при этом $\varphi(m+1) > c\varphi(m)$, где $c > 1$, то каждая граничная точка круга сходимости есть особая точка функции, представляемой этим рядом. Условия, наложенные на $\varphi(m)$, широко обобщались; так, Фабри показал, что достаточно предположения $\frac{\varphi(m)}{m} \to \infty$. Однако здесь мы займемся принадлежащим Островскому обобщением теоремы Адамара в другом направлении. Как показал Зигмунд, оно может быть выведено из теорем, относящихся к суммируемости по Борелю.

Мы будем говорить, что степенной ряд $\sum a_n z^n$ имеет *пропуск* (n_k, n'_k), если $a_n = 0$ для $n_k < n < n'_k$.

Теорема 141. *Пусть* $\lambda > 0$. *Тогда существует такое число* $\delta = \delta(\lambda) > 0$, *что если*

(I) *ряд* $\sum a_n z^n$ *имеет бесконечное множество пропусков* (n_k, n'_k), *для которых*

$$\frac{n'_k}{n_k} \geqslant 1 + \lambda > 1, \tag{9.5.1}$$

$$A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = O\{(1+\delta)^n\}, \tag{II}$$

и

$$\sum a_n = A \quad (B), \tag{III}$$

то

$$A_{n_k} \to A.$$

При заданном λ можно выбрать $\xi > 0$ так, чтобы

$$1 - \xi > \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}, \quad 1 + \xi < \sqrt{1+\lambda}, \tag{9.5.2}$$

а затем δ так, чтобы

$$0 \leqslant \delta < \xi, \quad \delta - \frac{(\xi \pm \delta)^2}{3(1+\delta)} < 0. \tag{9.5.3}$$

Представим $e^{(1+\delta)x}$ в виде

$$e^{(1+\delta)x} = \Bigl(\sum_{n<(1-\xi)x} + \sum_{(1-\xi)x}^{(1+\xi)x} + \sum_{n>(1+\xi)x}\Bigr)\frac{(1+\delta)^n x^n}{n!} = e^x(P+Q+R),$$

где $P = P(\xi, \delta)$, ... Полагая

$$y = (1+\delta)x, \quad \eta = \frac{\xi+\delta}{1+\delta} < 1, \quad (1-\eta)(1+\delta) = 1 - \xi,$$

и применяя оценку (9.1.4) из теоремы 137, имеем

$$P(\xi, \delta) = e^{\delta x} e^{-x-\delta x} \sum_{n < (1-\xi)x} \frac{(1+\delta)^n x^n}{n!} = e^{\delta x} e^{-y} \sum_{n < (1-\eta)y} \frac{y^n}{n!} =$$

$$= O\left(e^{\delta x - \frac{1}{3}\eta^2 y}\right) = O\left(\exp\left\{\delta x - \frac{(\xi+\delta)^2}{3(1+\delta)} x\right\}\right).$$

Аналогичная оценка, с заменой $\xi + \delta$ на $\xi - \delta$, имеет место и для $R(\xi, \delta)$. Если поэтому ξ и δ удовлетворяют условиям (9.5.3), то P и R стремятся к нулю. В частности, это верно при $\delta = 0$; а так как

$$P(\xi, 0) + Q(\xi, 0) + R(\xi, 0) = 1,$$

то заключаем, что

$$Q(\xi, 0) \to 1. \tag{9.5.4}$$

Зафиксируем теперь ξ и $\delta > 0$, удовлетворяющие условиям (9.5.2) и (9.5.3), так что $\xi = \xi(\lambda)$, $\delta = \delta(\lambda)$, возьмем

$$x = \sqrt{n_k n_k'}, \tag{9.5.5}$$

представим $e^{-x} A(x) = e^{-x} \sum A_n \frac{x^n}{n!}$ в виде

$$e^{-x} \left\{ \sum_{n < (1-\xi)x} + \sum_{(1-\xi)x}^{(1+\xi)x} + \sum_{n > (1+\xi)x} \right\} = P' + Q' + R'$$

и допустим, что условие (II) выполнено при нашем выборе δ. Тогда P' и R' будут мажорироваться, с точностью до постоянных множителей, выражениями P и R, так что $P' \to 0$, $R' \to 0$, а потому в силу условия (III)

$$Q' \to \lim e^{-x} A(x) = A. \tag{9.5.6}$$

Но в силу (9.5.1), (9.5.2) и (9.5.5)

$$(1-\xi)x > \sqrt{\frac{n_k n_k'}{1+\lambda}} > n_k, \qquad (1+\xi)x < \sqrt{(1+\lambda) n_k n_k'} < n_k',$$

так что все A_n из Q' равны A_{n_k}. Таким образом, (9.5.6) приводится к $A_{n_k} Q(\xi, 0) \to A$, и, следовательно, в силу (9.5.4) $A_{n_k} \to A$.

Отсюда легко вытекают теоремы Островского и Адамара.

Теорема 142. *Если ряд $\sum a_n z^n$ имеет бесконечное множество пропусков, удовлетворяющих условию* (9.5.1), *а его сумма регулярна в некоторой граничной точке z_0 круга сходимости, то частичные суммы $s_{n_k}(z)$ сходятся в точке $z = z_0$ и притом равномерно в некоторой окрестности этой точки.*

Мы можем считать, что $z_0 = 1$. Тогда $A_n = O\{(1+\delta)^n\}$ для любого положительного δ. Далее, по теореме 134, ряд $\sum a_n z^n$ суммируем (В) в точке $z = 1$ и равномерно суммируем в некоторой окрестности этой точки, так что соотношение (9.5.6) выполняется равномерно в этой окрестности. А тогда утверждение теоремы следует из теоремы 141.

Теорема Адамара есть следствие теоремы Островского. Мы можем считать радиус сходимости равным 1, и достаточно доказать, что $z = 1$ есть особая точка. Запишем рассматриваемый ряд в виде $\sum a_n z^n$. Тогда $a_n = 0$ для всех n, кроме номеров $n = \varphi(m)$, и каждый член с ненулевым коэффициентом есть начало и конец пропуска, удовлетворяющего условию (9.5.1). Если бы точка $z = 1$ была регулярной, то в силу теоремы 142 ряд сходился бы в точках, лежащих вне круга сходимости. Следовательно, $z = 1$ есть особая точка.

9.6. Теоремы тауберова типа для метода Бореля. Переходим к основной теме настоящей главы. Главной целью этого и следующего параграфов является доказательство следующей тауберовой теоремы для метода Бореля, соответствующей теореме 85.

Теорема 143. *Если* $\sum a_n = A$ (B) *и*

(9.6.1) $$a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

то ряд $\sum a_n$ *сходится к* A.

Фактически мы докажем значительно больше. Позже (в § 9.13) мы покажем, что o в (9.6.1) можно заменить на O; но эта теорема (теорема 156) — значительно труднее. В силу теоремы 128 все наши заключения будут тем более справедливы, если ряд $\sum a_n$ суммируем (E, q). Нам потребуется три леммы.

Теорема 144. *Пусть*

(9.6.2) $$\alpha \geqslant -1, \quad 0 < \beta \leqslant 1, \quad \rho > -1, \quad 0 < H < 1,$$

A_n^k *определены как в* §§ 5.4—5.5 *), *и*

(9.6.3) $$A_n^\alpha = o(n^\rho).$$

Тогда

(9.6.4) $$A_n^{\alpha+\beta} = o(n^{\rho+\beta})$$

и

(9.6.5) $$A_m^{\alpha+\beta} - A_n^{\alpha+\beta} = o(|m-n|^\beta n^\rho)$$

равномерно для $0 < (1-H)n \leqslant m \leqslant (1+H)n$.

*) Причем $A_n^{-1} = a_n$, как в § 5.4.

(9.6.4) было уже доказано в § 5.7 *). Для доказательства соотношения (9.6.5) воспользуемся формулой

(9.6.6) $$A_n^{\alpha+\beta}=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{p=0}^{n}\frac{\Gamma(n-p+\beta)}{\Gamma(n-p+1)}A_p^{\alpha} \text{ **)}.$$

Возможны два случая, соответственно тому, будет ли $m>n$ или $m<n$, но между доказательствами для них имеются только тривиальные различия. Мы разберем случай $m>n$. Тогда

$$\Gamma(\beta)\left(A_m^{\alpha+\beta}-A_n^{\alpha+\beta}\right)=\sum_{p=n+1}^{m}\frac{\Gamma(m-p+\beta)}{\Gamma(m-p+1)}A_p^{\alpha}+$$
$$+\sum_{p=0}^{n}\left\{\frac{\Gamma(m-p+\beta)}{\Gamma(m-p+1)}-\frac{\Gamma(n-p+\beta)}{\Gamma(n-p+1)}\right\}A_p^{\alpha}=S_1+S_2.$$

Прежде всего, здесь

$$S_1=o\left\{n^{\rho}\sum_{n+1}^{m}(m-p+1)^{\beta-1}\right\}=o\left\{(m-n)^{\beta}n^{\rho}\right\}.$$

При $\beta=1$ имеем $S_2=0$. Если $\beta<1$, то коэффициенты при A_p^{α} в S_2 отрицательны, и

$$S_2=\sum_{p=0}^{n}\left\{\frac{\Gamma(n-p+\beta)}{\Gamma(n-p+1)}-\frac{\Gamma(m-p+\beta)}{\Gamma(m-p+1)}\right\}o(p^{\rho})=S_3+S_4,$$

где суммы S_3 и S_4 распространяются соответственно на интервалы $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$ и $\frac{1}{2}n<p\leqslant n$.

В S_4 можно заменить p^{ρ} на n^{ρ} и затем суммировать по всему интервалу $0\leqslant p\leqslant n$. Таким образом,

$$S_4=o\left(n^{\rho}\sum_{p=0}^{n}\left\{\frac{\Gamma(n-p+\beta)}{\Gamma(n-p+1)}-\frac{\Gamma(m-p+\beta)}{\Gamma(m-p+1)}\right\}\right)=$$
$$=o\left\{n^{\rho}\left(\sum_{q=0}^{n}-\sum_{q=m-n}^{m}\right)\frac{\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(q+1)}\right\}=o\left\{n^{\rho}\left(\sum_{q=0}^{m-n-1}-\sum_{q=n+1}^{m}\right)\frac{\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(q+1)}\right\}\text{***)}=$$
$$=o\left\{n^{\rho}\sum_{q=0}^{m-n}\frac{\Gamma(q+\beta)}{\Gamma(q+1)}\right\}=o\left\{n^{\rho}\sum_{q=0}^{m-n}(q+1)^{\beta-1}\right\}=o\left\{(m-n)^{\beta}n^{\rho}\right\}.$$

*) Строго говоря, для $\rho=\alpha$; однако доказательство для произвольного ρ, по существу, то же.

**) (9.6.6) есть (5.4.8), распространенное, как в § 5.5, на любые вещественные k и k'.

***) Поскольку $0<m-n\leqslant Hn<n$.

Наконец, в S_3

$$\frac{\Gamma(n-p+\beta)}{\Gamma(n-p+1)}-\frac{\Gamma(m-p+\beta)}{\Gamma(m-p+1)}=(n-p)^{\beta-1}-(m-p)^{\beta-1}+O(n^{\beta-2})=$$
$$=O\{(m-n)\,n^{\beta-2}\}+O(n^{\beta-2})=O\{(m-n)\,n^{\beta-2}\}.$$

Поэтому

$$S_3=o\Big\{(m-n)\,n^{\beta-2}\sum_{p\leqslant\frac{1}{2}n}p^{\rho}\Big\}=o\{(m-n)\,n^{\beta+\rho-1}\}=$$
$$=o\left\{\left(\frac{m-n}{n}\right)^{1-\beta}(m-n)^{\beta}n^{\rho}\right\}=o\{(m-n)^{\beta}n^{\rho}\}.$$

Теорема 145. *Если $k>0$, то $e^{-x}\sum\frac{x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}\to 1$ при $x\to\infty$.*

Действительно, этот ряд равен

$$\frac{e^{-x}}{\Gamma(k)}\sum\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^{k-1}t^n\,dt=\frac{e^{-x}}{\Gamma(k)}\int_0^x(x-t)^{k-1}e^t\,dt=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x u^{k-1}e^{-u}\,du\to 1.$$

Теорема 146. *Если $k>0$ и ряд $\sum a_n\frac{t^n}{n!}$ сходится для всех t, то*

$$(9.6.7)\qquad e^{-x}\sum A_n^k\frac{x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x(x-t)^{k-1}e^{-t}\sum A_n\frac{t^n}{n!}\,dt.$$

Заменим t на $x-u$ и умножим результат на e^x; тогда утверждаемое тождество примет вид

$$(9.6.8)\qquad \sum A_n^k\frac{x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x u^{k-1}e^u\sum A_n\frac{(x-u)^n}{n!}\,du.$$

Левая его часть равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}\sum_{p=0}^{n}\frac{\Gamma(n-p+k)}{\Gamma(k)\,\Gamma(n-p+1)}A_p=$$
$$=\frac{x^k}{\Gamma(k)}\sum_{p=0}^{\infty}A_p\sum_{n=p}^{\infty}\frac{\Gamma(n-p+k)}{\Gamma(n+k+1)\,\Gamma(n-p+1)}x^n,$$

коэффициентом же при A_p в правой части служит

$$\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(p+1)}\int_0^x u^{k-1}(x-u)^p e^u\,du=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(p+1)}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\int_0^x u^{k+q-1}(x-u)^p\,du=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k)}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\Gamma(q+k)}{\Gamma(q+p+k+1)\Gamma(q+1)}x^{q+p+k}=$$

$$=\frac{x^k}{\Gamma(k)}\sum_{n=p}^{\infty}\frac{\Gamma(n-p+k)}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(n-p+1)}x^n.$$

Это тождество можно рассматривать с другой точки зрения, значение которой в полном объеме выяснится в гл. XI. Так как, вообще,

$$e^{-x}\sum u_n\frac{x^n}{n!}=\sum(-1)^n\Delta^n u_0\frac{x^n}{n!},$$

то рассматриваемое тождество можно представить в виде

$$x^k\sum(-1)^n\Delta^n B_0\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x(x-t)^{k-1}\left\{\sum(-1)^n\Delta^n A_0\frac{t^n}{n!}\right\}dt,$$

где

$$B_n=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+k)}A_n^k=\frac{C_n^k}{\Gamma(k+1)},$$

а C_n^k являются k-ми чезаровскими средними для ряда $\sum a_n$, или же в виде

$$\sum(-1)^n\frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)}\Delta^n B_0\frac{x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}=\sum(-1)^n\Delta^n A_0\frac{x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}.$$

Тем самым рассматриваемое тождество равносильно тождеству

(9.6.9) $$\Delta^n C_0^k=\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+1)}\Delta^n A_0.$$

9.7. Теоремы тауберова типа (продолжение). Теперь может быть доказана

Теорема 147. *Если*

(9.7.1) $$a_n=o(n^\rho),$$

где $\rho\geqslant-\frac{1}{2}$, *и ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (B) *к* A, *то он также суммируем* (C, $2\rho+1$) *к* A.

Эта теорема показывает, что ряд конечного порядка (т. е. такой, что $a_n = O(n^K)$ для некоторого K), суммируемый (B), необходимо суммируем (C, k) для достаточно больших k. Теорема 143 есть частный случай теоремы 147, соответствующий $\rho = -\frac{1}{2}$.

Мы допустим, прежде всего, что

$$A_n^{k-\beta} = o(n^\rho), \tag{9.7.2}$$

где

$$k \geqslant 0, \quad 0 < \beta \leqslant 1, \quad \rho > -1, \quad \rho + \beta > 0;$$

при $k = 0$, $\beta = 1$ это сводится к условию (9.7.1). По теореме 144,

$$A_m^k = \begin{cases} o(n^{\rho+\beta}) & \text{при} \quad m \leqslant n, \\ o(m^{\rho+\beta}) & \text{при} \quad m \geqslant n, \end{cases} \tag{9.7.3}$$

и

$$A_m^k - A_n^k = o(|m-n|^\beta n^\rho) \quad \text{при} \quad |m-n| < Hn. \tag{9.7.4}$$

Мы можем принять $A = 0$. Тогда, по теореме 146, с $x = n$ и n вместо m,

$$S = e^{-n} \sum A_m^k \frac{n^m}{\Gamma(m+k+1)} = o\left\{\frac{1}{n^k} \int_0^n (n-t)^{k-1}\, dt\right\} = o(1). \tag{9.7.5}$$

Положим

$$S = e^{-n} A_n^k \sum \frac{n^m}{\Gamma(m+k+1)} + \\ + e^{-n} \sum (A_m^k - A_n^k) \frac{n^m}{\Gamma(m+k+1)} = S_1 + S_2, \tag{9.7.6}$$

$$S_2 = e^{-n}\Bigl(\sum_{m < n - n^\zeta} + \sum_{n-n^\zeta}^{n+n^\zeta} + \sum_{m > n+n^\zeta}\Bigr) = S_2^{(1)} + S_2^{(2)} + S_2^{(3)}, \tag{9.7.7}$$

где $\frac{1}{2} < \zeta < \frac{2}{3}$. Тогда (9.7.5) принимает вид

$$S_1 + S_2^{(1)} + S_2^{(2)} + S_2^{(3)} = o(1). \tag{9.7.8}$$

Во-первых, по теореме 145, здесь

$$S_1 = \frac{1}{n^k} A_n^k \{1 + o(1)\}.$$

Во-вторых, в силу (9.7.3) и теоремы 137 (3),

$$S_2^{(1)} = O\Bigl(e^{-n} n^{\rho+\beta} \sum_{m < n - n^\zeta} \frac{n^m}{m!}\Bigr) = O(e^{-n^\eta}),$$

где $\eta = \eta(\zeta) > 0$. В-третьих, в силу (9.7.3) и теоремы 137 (3) и (6),

$$S_2^{(3)} = O\left(e^{-n} \sum_{m > n+n^\zeta} m^{\rho+\beta} \frac{n^m}{\Gamma(m+k+1)}\right) =$$
$$= O\left(e^{-n} \sum_{m > n+n^\zeta} m^{\rho+\beta-k} \frac{n^m}{\Gamma(m+1)}\right) = O(e^{-n^\eta}).$$

Теперь из (9.7.8) следует, что

$$\frac{1}{n^k} A_n^k \{1 + o(1)\} + S_2^{(2)} = o(1). \tag{9.7.9}$$

Остается рассмотреть $S_2^{(2)}$. Здесь мы применим (9.7.4) и теорему 137 (5), которые дают

$$S_2^{(2)} = o\left\{e^{-n} n^\rho \sum_{n-n^\zeta}^{n+n^\zeta} |m-n|^\beta \frac{n^m}{\Gamma(m+k+1)}\right\} =$$
$$= o\left(e^{-n} n^{\rho-k} \sum_{n-n^\zeta}^{n+n^\zeta} |m-n|^\beta \frac{n^m}{m!}\right) =$$
$$= o\left(e^{-n} n^{\rho-k} \sum_{|r| \leqslant n^\zeta} |r|^\beta \frac{n^{n+r}}{(n+r)!}\right) = o\left(n^{\rho-k-\frac{1}{2}} \sum_{|r| \leqslant n^\zeta} |r|^\beta e^{-\frac{r^2}{2n}}\right) =$$
$$= o\left(n^{\rho-k-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\beta e^{-\frac{t^2}{2n}} dt\right) = o\left(n^{\rho-k+\frac{1}{2}\beta}\right).$$

Тем самым, наконец, (9.7.9) превращается в

$$\frac{1}{n^k} A_n^k \{1 + o(1)\} + o\left(n^{\rho-k+\frac{1}{2}\beta}\right) = o(1), \tag{9.7.10}$$

т. е.

$$A_n^k = o(n^k) + o\left(n^{\rho+\frac{1}{2}\beta}\right). \tag{9.7.11}$$

Беря в (9.7.2) и (9.7.11) $k = 0$, $\beta = 1$, так что $a_n = o(n^\rho)$, получаем

$$A_n = o(1) + o\left(n^{\rho+\frac{1}{2}}\right) = o\left(n^{\rho+\frac{1}{2}}\right). \tag{9.7.12}$$

Пусть теперь $\nu\beta = 2\rho + 1$, где ν — целое и $\beta \leqslant 1$. Докажем, что

$$A_n^{r\beta} = o\left(n^{\rho+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r\beta}\right) \tag{9.7.13}$$

для $0 \leqslant r \leqslant \nu$. Прежде всего, в силу (9.7.12) утверждаемое соотношение (9.7.13) верно для $r = 0$. Допустим, что оно верно для $r = s < \nu$, и воспользуемся соотношениями (9.7.2) и (9.7.11) с $k = (s+1)\beta$ и заменой ρ на $\rho + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\beta$. Тогда (9.7.11) дает

$$A_n^{(s+1)\beta} = o\{n^{(s+1)\beta}\} + o\{n^{\rho+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(s+1)\beta}\} = o\{n^{\rho+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(s+1)\beta}\},$$

поскольку

$$\frac{1}{2}(s+1)\beta \leqslant \frac{1}{2}\nu\beta = \rho + \frac{1}{2},$$

а это есть (9.7.13) с $r = s+1$.

Тем самым (9.7.13) верно для всех указанных значений r. Наконец, беря $r = \nu$, получаем, что

$$A_n^{2\rho+1} = o(n^{2\rho+1}),$$

т. е. что ряд $\sum a_n$ суммируем (C, $2\rho+1$) к нулю.

Мы установили эту теорему для суммируемости (B); но она равным образом справедлива и при несколько более слабом предположении суммируемости (B′). В самом деле, если ряд $\sum a_n$ суммируем (B′), то, по теореме 126, ряд $0 + a_0 + a_1 + \ldots$ суммируем (B). Но члены этого ряда — того же порядка, что и члены исходного ряда. Поэтому второй ряд суммируем (C, $2\rho+1$), а тогда, по теореме 47, и исходный ряд суммируем (C, $2\rho+1$).

Попутно нами доказана

Теорема 148. *Если* $a_n = o(1)$ *и ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (B), *то* $A_n = o(\sqrt{n})$.

Эта теорема нам позже понадобится.

9.8. Примеры рядов, не суммируемых (B). Теорема 147 показывает, что никакой ряд конечного порядка не может быть суммируемым (B), если он не суммируем (C). С другой стороны, существуют примеры рядов, суммируемых (C) (и тем самым являющихся рядами конечного порядка), но не суммируемых (B).

(I) Ряд $\sum \frac{e^{Ain^\alpha}}{n^{1-\alpha}}$, где $0 < \alpha < 1$, $A > 0$, по теореме 84 суммируем (C, k) для каждого положительного k, но не сходится. Если $\alpha < \frac{1}{2}$, то общий член ряда равен $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ и потому в силу теоремы 143 ряд не суммируем (B). По теореме 128, он тем более не суммируем (E, q) ни для какого q.

(II) Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то общий член равен не $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, а $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Заключения предыдущего пункта сохраняют еще силу, но (не имея возможности вдаваться в непосредственное исследование) мы должны опереться на более трудную теорему 156, которую нам еще предстоит доказать.

(III) Пусть $A_n = (-1)^m m$, если $n = m^2$, и $A_n = 0$, если n — не квадрат; в этом случае наш ряд можно получить из ряда

$$-x(1-x) + 2x^4(1-x) - 3x^9(1-x) + \ldots,$$

расположив его по степеням x и подставив затем $x = 1$. Если $N^2 \leqslant n < (N+1)^2$ то

$$C_n^1(A) = \frac{1}{n+1}\{-1+2-3+\ldots+(-1)^N N\} = O\left(\frac{N}{n}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

так что рассматриваемый ряд суммируем (С, 1) к нулю. Но он не суммируем (В). Действительно, если в

$$S(x) = e^{-x}\sum (-1)^m m \frac{x^{m^2}}{m^2!}$$

взять $x = N^2$ и $m = N + \mu$, то с помощью оценок теоремы 137 легко показать, что преобладающую роль в $S(N^2)$ играют члены с $|\mu| < N^\beta$, где $0<\beta<\frac{1}{3}$, и что

$$S(N^2) = \frac{(-1)^N}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\mu|<N^\beta} (-1)^\mu e^{-2\mu^2} + o(1)$$

при $N \to \infty$ принимает попеременно положительные и отрицательные значения, превосходящие $\frac{1}{4}$ по абсолютной величине.

9.9. Теорема противоположного характера. Примеры, приведенные в предыдущем параграфе, показывают, что из суммируемости (С), вообще говоря, не следует суммируемость (В) и тем более суммируемость (Е, q) для какого бы то ни было q. Естественно задаться вопросом, как нужно усилить предположения, чтобы такого рода заключение все же оказалось справедливым. Простейшей теоремой в этом направлении является

Теорема 149. *Если*

$$C_n^1(A) = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{n+1} = A + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{9.9.1}$$

то ряд $\sum a_n$ *суммируем* (Е, q) *к* A *для любого положительного* q *и, значит, тем более суммируем* (В).

Мы можем принять, что $A = 0$. Тогда согласно (8.3.4) нужно показать, что

$$A_n^1 = A_0 + A_1 + \ldots + A_n = o(\sqrt{n})$$

влечет

$$\mathrm{A}_n^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} q^{n-m} A_m = \sum_{m=0}^{n} v_m A_m = o(1);$$

здесь $v_m = v_m(n)$. Наибольшим из v_m является v_M, номер которого M определяется формулой (9.1.11), и, по теореме 138 (2),

$$v_m \leqslant v_M < \frac{H}{\sqrt{n}}, \tag{9.9.2}$$

где H не зависит от n и m. Выберем μ так, чтобы

$$|A_p + A_{p+1} + \ldots + A_r| < \varepsilon \sqrt{r} \tag{9.9.3}$$

для $r \geqslant p \geqslant \mu$, и предположим, что n столь велико, что $M > \mu$. Тогда мы можем написать

$$\mathrm{A}_n^{(q)} = \left(\sum_0^{\mu-1} + \sum_{\mu}^{M} + \sum_{M+1}^{n}\right) v_m A_m = S_1 + S_2 + S_3.$$

Так как v_m убывает в обе стороны от $m = M$, то в силу (9.9.2) и (9.9.3)

$$|S_2| \leqslant v_M \cdot \varepsilon \sqrt{M} \leqslant H\varepsilon, \quad |S_3| \leqslant v_M \cdot \varepsilon \sqrt{n} \leqslant H\varepsilon.$$

При фиксированном же μ и $n \to \infty$ имеем $S_1 \to 0$. Поэтому $|\mathrm{A}_n^{(q)}| \leqslant 3H\varepsilon$ для достаточно больших n.

В соотношении (9.9.1) нельзя заменить o на O. Это показывает пример ряда § 9.8 (III): мы видели, что для него

$$C_n^1(A) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

и, однако, он не суммируем (B).

9.10. Метод суммирования (e, c). Главной целью остающейся части этой главы является доказательство теоремы 156, обобщающей теорему 143 заменой o на O. Довольно трудное доказательство этой теоремы будет значительно облегчено предварительным исследованием некоторых других методов суммирования. Эти методы, появляющиеся здесь как вспомогательные средства, представляют и некоторый самостоятельный интерес.

Мы будем рассматривать главным образом слабо расходящиеся ряды, среди которых выделим три класса: класс $\mathfrak{P}$, для которого

$$a_n = o(1), \tag{9.10.1}$$

класс $\mathfrak{Q}$, для которого

$$A_n = o(\sqrt{n}), \tag{9.10.2}$$

и класс $\mathfrak{R}$, для которого

$$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{9.10.3}$$

Очевидно, $\mathfrak{P}$ включает $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$ же не включает $\mathfrak{R}$ (и тем более не включает $\mathfrak{P}$). Однако мы увидим, что все ряды класса $\mathfrak{P}$, суммируемые каким-нибудь из рассматриваемых нами методов, принадлежат классу $\mathfrak{Q}$. Мы уже видели *), что это верно для рядов, суммируемых (B).

В наших рассмотрениях часто будет фигурировать число ζ, заключенное, как в §§ 9.1—9.3, между $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$. Как и там, мы будем иметь дело с суммами по h или интегралами по t, в которых доля частей, распространенных на $|h| > n^{\zeta}$ или $|t| > x^{\zeta}$, равна $O(e^{-n^{\eta}})$ или $O(e^{-x^{\eta}})$ с $\eta = \eta(\zeta) > 0$. Эти „хвосты“ рассматриваемых сумм или интегралов будут поэтому несущественны, и мы будем считать себя вправе отбрасывать либо сохранять их, смотря по тому, что удобней.

Первоначальное определение *суммируемости* (e, c) таково:

$$\sum a_n = A \quad (\mathrm{e}, c) \tag{9.10.4}$$

означает, что при $n \to \infty$

$$\sqrt{\frac{c}{\pi n}} \sum e^{-\frac{ch^2}{n}} A_{n+h} \to A. \tag{9.10.5}$$

Здесь $c > 0$, индекс суммирования h изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, причем A_m для $m < 0$ считается равным нулю. Однако обычно оказывается удобным видоизменить это определение, введя непрерывный параметр x. А именно, мы говорим, что ряд $\sum a_n$ суммируем (e, c) к A, если при x, непрерывно стремящемся к бесконечности,

$$\sqrt{\frac{c}{\pi x}} \int e^{-\frac{ct^2}{x}} A(x+t)\, dt \to A \text{ **)}, \tag{9.10.6}$$

где $A(t)$ равно A_n при $n \leqslant t < n+1$.

Начнем с доказательства следующего предложения:

Теорема 150. *Если* $a_n = o(1)$ *и ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (B), (E, q) *или* (e, c) *в любом из смыслов* (9.10.5) *или* (9.10.6), *то* $A_n = o(\sqrt{n})$.

Для суммируемости B это было доказано в § 9.7 ***). В силу теоремы 128 это тем более верно для суммируемости (E, q). Таким образом, остается только доказать утверждение теоремы для рядов, суммируемых (e, c). При этом мы будем придерживаться первой

*) См. конец § 9.7.
**) Интеграл берется от $-\infty$ до $+\infty$.
***) Теорема 148.

формы определения суммируемости (e, c); доказательство для второй формы аналогично.

В силу теоремы 140

$$A_n \sqrt{\frac{c}{\pi n}} \sum e^{-\frac{ch^2}{n}} = A_n \{1 + o(1)\}.$$

Поэтому при выполнении условия (9.10.5) имеем

$$(9.10.7) \qquad \sqrt{\frac{c}{\pi n}} \sum (A_{n+h} - A_n) e^{-\frac{ch^2}{n}} = A + o(1) - A_n\{1 + o(1)\}.$$

Так как $A_n = o(n)$, $A_{n+h} = o(n + |h|)$, то мы можем пренебречь членами, для которых $|h| > n^{\zeta}$; для остающихся же членов $A_{n+h} - A_n = o(|h|)$. Поэтому левая часть формулы (9.10.7) равна

$$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum |h| e^{-\frac{ch^2}{n}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int |t| e^{-\frac{ct^2}{n}} dt\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n\right) = o(\sqrt{n})$$

и, следовательно, $A_n = o(\sqrt{n})$.

Докажем теперь, что верна

Теорема 151. *Если* $A_n = o(\sqrt{n})$, *то суммируемость* (B) *равносильна суммируемости* $\left(e, \frac{1}{2}\right)$ *в любом из смыслов* (9.10.5) *или* (9.10.6).

Мы проведем доказательство только для утверждения, что B влечет $\left(e, \frac{1}{2}\right)$; наши рассуждения будут очевидным образом обратимы.

Мы можем считать, что $A = 0$.

(1) Докажем сперва, что из

$$(9.10.8) \qquad e^{-n} \sum A_m \frac{n^m}{m!} = o(1)$$

следует

$$(9.10.9) \qquad \sum e^{-\frac{h^2}{2n}} A_{n+h} = o(\sqrt{n})$$

(при $n \to \infty$ по целым значениям).

Мы можем в этих суммах пренебречь их „хвостами“, для которых $m = n + h$, $|h| > n^{\zeta}$, а к остальным членам первой суммы применить оценку (9.1.8). Тогда формула (9.10.8) примет вид

$$(9.10.10) \qquad \sum e^{-\frac{h^2}{2n}} \left\{1 + O\left(\frac{|h|+1}{n}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{n^2}\right)\right\} A_{n+h} = o(\sqrt{n}).$$

Так как, кроме того (для сохраненных членов), $A_{n+h} = o(\sqrt{n})$, то O-члены в (9.10.10) дадут соответственно

$$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int e^{-\frac{t^2}{2n}} (|t|+1)\, dt\right), \qquad o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \int e^{-\frac{t^2}{2n}} |t^3|\, dt\right).$$

Поскольку и то и другое равно $o(\sqrt{n})$, мы и получаем соотношение (9.10.9).

(2) Покажем далее, что (9.10.9) можно заменить на

$$\int e^{-\frac{t^2}{2n}} A(n+t)\, dt = o(\sqrt{n}). \tag{9.10.11}$$

Разность левых частей равна

$$\sum \int_h^{h+1} \left(e^{-\frac{h^2}{2n}} - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right) A(n+t)\, dt, \tag{9.10.12}$$

где снова можно пренебречь „хвостами“ и считать, что $A(n+t) = o(\sqrt{n})$. Так как каждая часть суммы (9.10.12) с ограниченными h, очевидно, равна $o(\sqrt{n})$, то мы можем предполагать h и t большими. Тогда

$$e^{-\frac{h^2}{2n}} - e^{-\frac{t^2}{2n}} = O\left(\frac{|t|}{n} e^{-\frac{t^2}{3n}}\right),$$

и (9.10.12) дает

$$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int e^{-\frac{t^2}{3n}} |t|\, dt\right) = o(\sqrt{n}).$$

Тем самым (9.10.11) доказано.

(3) Наконец, покажем, что в (9.10.11) можно целые n заменить непрерывным x. Если $x = n + f$, где $0 < f < 1$, то интеграл в (9.10.6), с $c = \frac{1}{2}$, равен

$$\int e^{-\frac{t^2}{2(n+f)}} A(n+f+t)\, dt = \int e^{-\frac{(t-f)^2}{2(n+f)}} A(n+t)\, dt,$$

так что нужно показать, что

$$\int \left\{ e^{-\frac{(t-f)^2}{2(n+f)}} - e^{-\frac{t^2}{2n}} \right\} A(n+t)\, dt = o(\sqrt{n}).$$

Мы снова можем пренебречь „хвостами“, заменить $A(n+t)$ на $o(\sqrt{n})$ и предположить t большим. Имеем

$$e^{-\frac{(t-f)^2}{2(n+f)}} - e^{-\frac{t^2}{2n}} = f \frac{d}{dw} \left\{ e^{-\frac{(t-w)^2}{2(n+w)}} \right\},$$

где $0<w<1$; но последнее выражение равно

$$O\left(e^{-\frac{(t-w)^2}{2(n+w)}}\left\{\frac{|t-w|}{n+w}+\frac{(t-w)^2}{2(n+w)^2}\right\}\right)=O\left\{\left(\frac{|t|}{n}+\frac{t^2}{n^2}\right)e^{-\frac{t^2}{3n}}\right\}.$$

Поэтому ошибка при замене n на x равна

$$o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\int e^{-\frac{t^2}{3n}}|t|\,dt\right)+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\int e^{-\frac{t^2}{3n}}|t|^2\,dt\right)=$$
$$=o(\sqrt{n})+o(1)=o(\sqrt{n}),$$

чем и завершается доказательство.

Если $a_n=o(1)$ и ряд суммируем, то, по теореме 150, $A_n=o(\sqrt{n})$, и, значит, утверждения теоремы 151 справедливы. На протяжении оставшейся части этой главы мы будем предполагать, что $a_n=o(1)$, не беспокоясь о том, существенно ли это предположение; но в одном месте гл. XII (§ 12.15) будет существенно, что теорема 151 доказана без него.

Теорема 152. *Если $a_n=o(1)$ и ряд $\sum a_n$ суммируем* (E, q), *то он суммируем* (e, c), *где $c=\frac{q+1}{2q}$, к той же сумме, и обратно.*

Положим

$$M=\left[\frac{n+1}{q+1}\right],\quad m=M+h,\quad r=\frac{1}{q+1},\quad r'=\frac{q}{q+1}.$$

Тогда эйлеровы средние для A_n можно заменить на

$$\chi_n=\frac{1}{(q+1)^n}\sum_{|h|<n^{\zeta}}\binom{n}{M+h}q^{n-M-h}A_{M+h}.$$

В силу теоремы 138 здесь

$$\frac{1}{(q+1)^n}\binom{n}{M+h}q^{n-M-h}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi rr'n}}e^{-\frac{h^2}{2rr'n}}\left\{1+O\left(\frac{|h|+1}{n}\right)+O\left(\frac{|h^3|}{n^2}\right)\right\},$$

откуда, как при доказательстве теоремы 151, следует, что $\chi_n\to A$ равносильно соотношению

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi rr'n}}\sum e^{-\frac{h^2}{2rr'n}}A_{M+h}\to A.$$

Но это есть (9.10.5) с $c=\frac{q+1}{2q}$ и заменой n на M.

Теорема 151, с $a_n=o(1)$, соответствует случаю $q=\infty$.

Если $c=\frac{q+1}{2q}$, то при возрастании q от 0 до ∞ c убывает от ∞ до $\frac{1}{2}$. Предполагая $a_n=o(1)$ и сопоставляя теоремы 152 и 118, мы видим, что *если* $a_n=o(1)$ *и* $\frac{1}{2}<c'<c$, *то суммируемость* (e, c) *влечет суммируемость* (e, c'). Однако в § 9.11 мы увидим, что эта теорема неполна, поскольку на самом деле утверждение ее верно и для $0<c'<c$.

9.11. Суммируемость (γ, k). Мы будем говорить, что

$$\sum a_n=A \quad (\gamma, k), \tag{9.11.1}$$

где $0<k<1$, если (I) ряд $\sum a_n x^n$ сходится для $|x|<1$ и (II) ряд Тэйлора для $f(1-k+ky)$, т. е.

$$\sum \frac{f^{(n)}(1-k)}{n!}(ky)^n=\sum b_n y^n, \tag{9.11.2}$$

сходится при $y=1$.

$B_m=b_0+b_1+\ldots+b_m$ есть коэффициент при y^m в разложении функции $\frac{f(1-k+ky)}{1-y}$, где $|y|<1$, по степеням y. Если $x=1-k+ky$, то $1-x=k(1-y)$, так что

$$B_m=\left[\frac{k}{1-x}f(x)\right]_{y^m}=\left[\frac{k}{1-x}\sum a_n x^n\right]_{y^m}=$$
$$=k\left[\sum A_n x^n\right]_{y^m}=k\left[\sum A_n(1-k+ky)^n\right]_{y^m}.$$

Так как y^m входит в $k(1-k+ky)^n$ лишь при $n\geqslant m$, и тогда с коэффициентом $\binom{n}{m}k^{m+1}(1-k)^{n-m}$, то заключаем, что

$$B_m=k^{m+1}\Big\{A_m+(m+1)(1-k)A_{m+1}+ \\ +\frac{(m+1)(m+2)}{2!}(1-k)^2A_{m+2}+\ldots\Big\}. \tag{9.11.3}$$

Сразу проверяется, что рассматриваемый метод регулярен и что b_m и a_n связаны соотношением

$$b_m=k^m\Big\{a_m+(m+1)(1-k)a_{m+1}+ \\ +\frac{(m+1)(m+2)}{2!}(1-k)^2a_{m+2}+\ldots\Big\}. \tag{9.11.4}$$

Эти формулы были получены в предположении, что радиус сходимости ряда $\sum a_n x^n$ равен 1; но мы можем откинуть это предположение и говорить просто, что ряд $\sum a_n$ суммируем (γ, k), к сумме A, если B_m, определенное формулой (9.11.3), существует для всех m и стремится к A. Однако для нашей теперешней цели удобнее будет сохранить указанное ограничение; последующие теоремы будут на него опираться.

Теорема 153. *Если ряд $\sum a_n$ суммируем (γ, k), то он суммируем (γ, l) к той же сумме для всех положительных $l < k$.*

Полагаем

$$x = 1 - k + ky = 1 - l + lz, \quad y = 1 - \frac{l}{k} + \frac{l}{k} z,$$

$$f(x) = \sum a_n x^n = \sum b_n y^n = \sum c_n z^n$$

и обозначаем ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$ и $\sum c_n$ соответственно через A, B и C. Если A суммируем (γ, k), то B сходится и потому суммируем $\left(\gamma, \frac{l}{k}\right)$. Но это означает, что C сходится, т. е. что A суммируем (γ, l).

Для (γ, k)-метода имеют место теоремы, соответствующие теоремам 151 и 152.

Теорема 154. *Если $a_n = o(1)$ и ряд $\sum a_n$ суммируем (γ, k), то он суммируем и* (e, c), *где*

$$c = \frac{k}{2(1-k)}, \tag{9.11.5}$$

к той же самой сумме, и обратно.

(γ, k)-среднее с номером n равно

$$B_n = k^{n+1} \sum_{p=n}^{\infty} \binom{p}{n} (1-k)^{p-n} A_p = \sum_{h=-\infty}^{\infty} u_{m+h} A_{m+h},$$

где

$$u_p = \begin{cases} \binom{p}{n} k^{n+1} (1-k)^{p-n} & \text{при } p \geqslant n, \\ 0 & \text{при } p < n, \end{cases}$$

и $m = \left[\frac{n}{k}\right]$. В силу теоремы 139 мы можем пренебречь членами с $|h| > n^{\zeta}$, а остающиеся члены представить в виде

$$u_{m+h} = \sqrt{\frac{c}{\pi m}}\, e^{-\frac{ch^2}{m}} \left\{1 + O\left(\frac{|h|+1}{m}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{m^2}\right)\right\},$$

где c определяется формулой (9.11.5). Утверждение теоремы получается тогда, как в доказательствах теорем 151 и 152.

Когда k возрастает от 0 до 1, то c возрастает от 0 до ∞. Поэтому из теорем 153 и 154 следует

Теорема 155. *Если* $a_n = o(1)$ *и ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (e, c), *то он суммируем* (e, c'), *к той же сумме, для всех положительных* $c' < c$.

Эта теорема будет играть существенную роль в доказательстве теоремы 156.

9.12. Дальнейшие замечания о теоремах 150—155. На протяжении §§ 9.10—9.11 (кроме теорем 151 и 153) мы предполагали, что $\sum a_n$ есть ряд класса $\mathfrak{P}$; но доказательства теорем 152, 154 и 155, подобно доказательству теоремы 151, требовали лишь, чтобы он принадлежал классу $\mathfrak{Q}$ (как показывает теорема 150, для интересующих нас целей $\mathfrak{P}$ есть подкласс класса $\mathfrak{Q}$).

Теоремы 151, 152, 154 и 155 в действительности справедливы для значительно более широких классов рядов. Нам они нужны только как средство для доказательства теоремы 156, для чего нет необходимости рассматривать, как далеко эти теоремы можно обобщить; но доказанное в них еще весьма далеко от окончательной истины. Так, Хислоп доказал, что методы B и $\left(e, \frac{1}{2}\right)$ равносильны, когда $a_n = O(n^K)$ для какого-то K, и аналогично можно распространить содержание теорем 152 и 154. Отсюда вытекает, что и теорема 155 верна для всех рядов конечного порядка.

Привлекая на помощь другие методы, можно было бы еще дальше расширить область применимости этой теоремы. Рассмотрим, для удобства, ее континуальный аналог. Мы будем говорить, что $f(x) \to l$ (e, c), если

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{c}{\pi x}} \int e^{-\frac{ct^2}{x}} f(x+t)\, dt \to l, \tag{9.12.1}$$

где интеграл понимается в лебеговском смысле. Можно доказать, что

$$f_b(x) = \sqrt{\frac{ab}{\pi}} \int\limits_0^{\frac{ax}{b}} \frac{(a-b)x}{(ax-bt)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{ab(t-x)^2}{ax-bt}\right\} f_a(t)\, dt, \tag{9.12.2}$$

когда $0 < b < a$ и интеграл (9.12.1) сходится для $c = b$, и вывести, что, уже при одном только последнем условии,

$$f(x) \to l \ (\mathrm{e},\ a) \quad \text{влечет} \quad f(x) \to l \ (\mathrm{e},\ b).$$

Это — еще одна иллюстрация принципа, сформулированного в § 4.12.

9.13. Основная теорема тауберова типа. Теперь мы в состоянии доказать нашу основную теорему.

Теорема 156. *Если* $\sum a_n = A$ (B) *и*

$$a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{9.13.1}$$

то ряд $\sum a_n$ *сходится к* A.

Докажем сначала, что $A_n = O(1)$. Из теорем 150 и 151 следует, что

$$\sqrt{\frac{c}{\pi n}} \sum^{\bullet} e^{-\frac{ch^2}{n}} A_{n+h} = A + o(1) \tag{9.13.2}$$

для $c = \frac{1}{2}$. Так как, по теореме 140,

$$\sqrt{\frac{c}{\pi n}} \sum e^{-\frac{ch^2}{n}} = 1 + o(1),$$

то

$$A_n \{1 + o(1)\} = \sqrt{\frac{c}{\pi n}} A_n \sum e^{-\frac{ch^2}{n}} = \tag{9.13.3}$$

$$= \sqrt{\frac{c}{\pi n}} \sum e^{-\frac{ch^2}{n}} (A_n - A_{n+h}) + A + o(1).$$

Сумму мы можем считать распространенной только на члены с $|h| < n^{\zeta}$. Тогда $A_{n+h} - A_n = O\left(\frac{|h|}{\sqrt{n}}\right)$, и наша сумма равна

$$O\left(\frac{1}{n} \sum_{|h| < n^{\zeta}} e^{-\frac{ch^2}{n}} |h|\right) = O\left(\frac{1}{n} \int e^{-\frac{ct^2}{n}} |t|\, dt\right) = O(1).$$

Поэтому $A_n \{1 + o(1)\} = O(1)$, и, значит, $A_n = O(1)$.

Следующий (и притом решающий) шаг доказательства основывается на „теореме Витали“. Пусть D — открытая связная область на плоскости z, $\varphi_n(z)$ для каждого n есть аналитическая функция от z, регулярная в D, $\varphi_n(z)$ равномерно ограничены в D и $\varphi_n(z_k)$ стремится к пределу $\varphi(z_k)$ для каждой из точек z_k некоторого множества, обладающего, по крайней мере, одной предельной точкой в D. Тогда существует аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi_n(z) \to \varphi(z)$ равномерно в каждой ограниченной замкнутой области R, содержащейся в D.

Мы применим эту теорему при следующих условиях.

Пусть c — комплексное, $c = \gamma + i\delta$; выберем δ_0, γ_0, γ_1 так, чтобы $\delta_0 > 0$, $0 < \gamma_0 < \frac{1}{2} < \gamma_1$; пусть D будет областью $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$, $|\delta| < \delta_0$ и положим

$$\varphi_n(c) = \sqrt{\frac{c}{\pi n}} \sum e^{-\frac{ch^2}{n}} A_{n+h}.$$

Мы можем предполагать, что $|a_n| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ для больших n.

Так как (как уже доказано) $A_n = O(1)$, то $\varphi_n(c)$ есть для каждого n аналитическая функция от c, регулярная в D. Далее,

$$|\varphi_n(c)| = O\left\{\sqrt{\frac{|c|}{n}} \sum e^{-\frac{\gamma h^2}{n}}\right\} = O\left\{\sqrt{\frac{\gamma}{n}} \int e^{-\frac{\gamma t^2}{n}} dt\right\} = O(1),$$

равномерно для c из D и всех n. В силу теорем 151 и 155 $\varphi_n(c) \to A$ для каждой точки c отрезка $\left[\gamma_0, \frac{1}{2}\right]$ вещественной оси. Из теоремы Витали следует тогда, что $\varphi_n(c) \to A$ для всех c из D. Так как $\gamma_0 > 0$ и γ_1 произвольны, то, в частности, $\sum a_n = A$ (e, c) для всех положительных c.

Таким образом, (9.13.2) верно для всех положительных c. При этом мы можем сохранить в сумме только члены с $|h| < n^{\zeta}$, а тогда

$$|A_{n+h} - A_n| \leqslant \frac{|h|}{\sqrt{n}}$$

для больших n. Поэтому

$$\sqrt{\frac{c}{\pi n}} \left| \sum_{|h| < n^{\zeta}} e^{-\frac{ch^2}{n}} (A_n - A_{n+h}) \right| \leqslant \frac{1}{n} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \sum e^{-\frac{ch^2}{n}} |h| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ct^2}{n}} |t|\, dt + \sqrt{\frac{2n}{ec}} \right\} < \frac{1}{\sqrt{c\pi}} + o(1)\ ^*).$$

Тогда из (9.13.3) следует, что

$$\overline{\lim} |A_n - A| \leqslant \frac{1}{\sqrt{c\pi}},$$

откуда, ввиду произвольности c, $A_n \to A$. Теорема доказана.

Очевидно, нами доказана также

Теорема 157. *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем к* A *каким-либо из методов* (E, q), (e, c) *или* (γ, k), *и* $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, *то* $\sum a_n$ *сходится к* A.

9.14. Обобщения. Все эти теоремы могут быть распространены на обобщения методов Бореля, подобные встретившемуся нам в § 4.13. Там мы определили суммируемость (B′, α) формулой

$$\int e^{-t} \sum \frac{a_n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}\, dt = A,$$

и мы можем определить суммируемость (B, α) формулой

$$e^{-x} \sum A\left(\frac{n}{\alpha}\right) \frac{x^n}{n!} \to A.$$

Так, при целом $\alpha = k$ эти формулы равносильны утверждениям, что ряд

$$a_0 + 0 + \ldots + a_1 + 0 + \ldots + a_2 + \ldots,$$

---

*) $e^{-\frac{ct^2}{n}} |t|$ имеет максимум $\sqrt{\frac{n}{2ec}}$ при $t = \pm \sqrt{\frac{n}{2c}}$.

где между каждыми двумя членами a_n и a_{n+1} стоит $k-1$ нулей, суммируем (B′) или соответственно (B).

Предоставляем читателю доказать, что справедливы такие предложения:

Теорема 158. *Если* $a_n = o(1)$, *то методы* (B, α), (B′, α) *и* $\left(e, \frac{1}{2}\alpha\right)$ *равносильны.*

Теорема 159. *Если параметры c, α, q, k связаны соотношениями*

$$c = \frac{1}{2}\alpha = \frac{k}{2(1-k)} = \frac{1+q}{2q}$$

(*где q рассматривается только при* $c > \frac{1}{2}$) *и* $a_n = o(1)$, *то суммируемость ряда* $\sum a_n$ *каким-либо из методов* (e, c), (B, α), (B′, α), (E, q), (γ, k) *влечет его суммируемость к той же сумме любым другим из этих методов. При этом суммируемость для какого-либо частного значения c, α, k или q влечет суммируемость для всех меньших положительных c, α или k или всех бо́льших q.*

После сказанного в § 9.12 следует ожидать, что последнее утверждение теоремы 159, с ограничением $a_n = o(1)$, далеко не исчерпывает истины ни для одного из рассматриваемых методов. Так, в силу теорем 118 и 153, то, что (E, q) влечет (E, q') для $q' > q$ и (γ, k) влечет (γ, k') для $0 < k' < k$, верно без всяких оговорок; и можно доказать, что (B′, α) влечет (B′, β) для $0 < \beta < \alpha$, если ряд $\sum a_n \frac{t^{\beta n}}{\Gamma(\beta n + 1)}$ сходится для всех t.

9.15. Ряд $\sum z^n$. Много света на связи между этими методами проливает их применение к геометрическому ряду. Приведем краткий перечень получающихся здесь результатов.

(1) *Метод* (E, q). Ряд $\sum z^n$ суммируем внутри окружности

$$(x+q)^2 + y^2 = (q+1)^2$$

или

$$r = \sqrt{1 + 2q + q^2\cos^2\theta} - q\cos\theta \qquad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

См. § 8.2.

(2) *Методы* (B, α) *и* (B′, α). Применимость этих методов опирается на формулу (г) стр. 247*). Границей области суммируемости служит линия $r = \left(\sec\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\alpha}$. Эта область при $\alpha > 0$ ограничена, а при $0 < \alpha \leqslant 2$ простирается в бесконечность и при $\alpha \to 0$ стремится к звезде Миттаг-Леффлера функции $\frac{1}{1-z}$. При $\alpha = 2$ она совпадает с внутренностью параболы $y^2 = 4(1-x)$.

*) См. примечание к § 8.10.

(3) *Метод* (e, c). Этот метод применим, когда

$$\sqrt{\frac{c}{\pi n}}\sum \frac{1-z^{n+h}}{1-z}e^{-\frac{ch^2}{n}} \to \frac{1}{1-z}$$

(где $h \geqslant -n$); вопрос об области, где это имеет место, легко решается с помощью формул для линейного преобразования тэта-функций. Оказывается, что областью суммируемости служит

$$r < e^{\sqrt{\theta^2+4c^2}-2c} \qquad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

(4) *Метод* (γ, k). Собираясь применить этот метод к ряду $\sum z^n$ при $|z|>1$, мы должны отбросить ограничение, принятое в определении этого метода в § 9.11. Это лишает силы доказательство теоремы 153, справедливость которой вообще нарушается. Область суммируемости определяется двумя неравенствами

$$|(1-k)z|<1, \quad |kz|<|1-(1-k)z|$$

и уменьшается до внутренности единичного круга, когда k стремится к нулю либо к единице.

Оказывается, что между всеми этими областями, вблизи $z=1$, имеется теснейшая связь, если параметры связаны, как в теореме 159.

9.16. Методы Валирона. Валирон ввел и использовал более широкое обобщение метода Бореля. Общее определение суммирования (J), введенное в § 4.12, было таково: $A_n \to A$ (J), если

$$\frac{1}{J(x)}\sum c_n A_n x^n = \frac{\sum c_n A_n x^n}{\sum c_n x^n} \to A, \tag{9.16.1}$$

где $J(x)$ есть целая функция с неотрицательными коэффициентами c_n, не сводящаяся к многочлену. Предположим теперь, что $c_n = e^{-G(n)}$, где

$$G(n) \to \infty, \quad G'(n) \to \infty, \quad G''(n) \to 0$$

с большой правильностью. Типичными случаями являются

$$G(n) = Cn^k \qquad (C>0, \quad 1<k<2) \tag{9.16.2}$$

и $G(n) = n\log n - n$; в последнем случае метод практически совпадает с борелевским. Будем обозначать $G''(n)$ через $H(n)$, так что в указанных двух типичных случаях соответственно

$$H(n) = Ck(k-1)\,n^{k-2}, \quad \frac{1}{n}.$$

Обобщая рассуждения, примененные Харди и Литтльвудом к методу Бореля, Валирон доказал, что при некоторых требованиях правильности, наложенных на $G(n)$, $A_n \to A$ (J) равносильно соотношению

$$\sqrt{\frac{H(n)}{2\pi}} \sum e^{-\frac{1}{2}h^2 H(n)} A_{n+h} \to A \tag{9.16.3}$$

при

$$A_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{H(n)}}\right) \tag{9.16.4}$$

и что это, в частности, верно при $a_n = o(1)$.

Мы будем выражать (9.16.3) записью $A_n \to A$ (V, H). Главный интерес метода заключается в связанных с ним теоремах тауберова типа. Если ряд $\sum a_n$ суммируем (V, H) и

$$a_n = O(\sqrt{H(n)}), \tag{9.16.5}$$

то $\sum a_n$ сходится. При $G(n) = Cn^k$ условие (9.16.5) сводится к

$$a_n = O(n^{\frac{1}{2}k-1}). \tag{9.16.6}$$

Мы ограничимся здесь (легким) доказательством того, что из соотношения (9.16.3) с $H(n) = cn^{k-2}$ $(1 < k < 2)$ и

$$a_n = o(n^{\frac{1}{2}k-1}) \tag{9.16.7}$$

следует сходимость ряда. Очевидно, для этого достаточно доказать, что

$$n^{\frac{1}{2}k-1} \sum_{|h| < n^{\zeta}} e^{-\frac{1}{2}ch^2 n^{k-2}} (A_{n+h} - A_n) \to 0,$$

где ζ теперь уже число, заключенное между $1 - \frac{1}{2}k$ и 1; но левая часть равна

$$o(n^{k-2} \sum e^{-\frac{1}{2}ch^2 n^{k-2}} |h|) = o(1).$$

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ IX

§§ 9.1—9.3. Содержание теорем 137—139 можно найти во многих книгах, особенно по теории вероятностей.

§ 9.5. Доказательство теоремы Адамара было впервые опубликовано в *J. de M.* (4), **8** (1892), 101—186 (118), а обобщение Фабри — в *AEN* (3), **13** (1896), 367—399. Сравнительно простые доказательства имеются в книге Landau, Ergebnisse, 76—86. Теорема Островского была доказана в *BS* (1921), 557—565; см. также *JLMS*, **1** (1926), 251—263, где даны более полные литературные указания. Особенно простое доказательство теоремы Адамара дал Mordell, *JLMS*, **2** (1927), 146—148; а Estermann, там же, **7** (1932), 19—20, видоизменив метод Морделя, доказал теорему Островского. Автором изложенного здесь доказательства является Zygmund, *JLMS*, **6** (1931), 162—163. См. также Dienes, гл. 11.

§§ 9.6 - 9.7. Hardy and Littlewood, *PLMS* (2), **11** (1913), 1—16. Прямое доказательство теоремы для суммируемости по Эйлеру, соответствующей теореме 143, предложил Knopp, *MZ*, **18** (1923), 125—156 (136—139).

Харди и Литтльвуд формулируют теорему 147, но дают полное доказательство лишь для того случая, когда $2\rho+1$ — целое. См. также Lord, *PLMS* (2), **38** (1935), 241—256.

§ 9.8. Харди и Литтльвуд в работе, указанной в предыдущем примечании, показывают, что ряд

$$\sum \frac{e^{Ain^a}}{n^s} \qquad (A>0)$$

суммируем (B) для всех s, если $\frac{1}{2}<a<1$, и суммируем лишь при его сходимости, если $0<a\leqslant\frac{1}{2}$. У них $A=1$, а доказательство местами только намечено.

Другим примером обыкновенного ряда Дирихле, суммируемого (B) лишь в случае его сходимости и вместе с тем суммируемого (C, k) для некоторого k на всей плоскости s, служит ряд

$$\frac{1}{1^s}+0+0+\ldots-\frac{1}{8^s}+0+0+\ldots+\frac{1}{27^s}+0+\ldots$$

См. Hardy, *PLMS* (2), **8** (1909), 277—294 (286—289).

Ряды типа (III) рассматривал Hardy, *QJM*, **35** (1904), 22—63. В частности, Харди показал, что сходящийся ряд $\sum a_n$, в котором

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m}{m} & \text{при } n=m^2,\\ 0 & \text{при } n\neq m^2,\end{cases}$$

не абсолютно суммируем.

§ 9.9. Аналог теоремы 149 для B-суммируемости доказал Харди (см. указанную только что работу, 37—42), а теорему 149 — Кнопп (l. c. в примечании к § 9.6, 150—151). Hardy and Littlewood [*RP*, **41** (1916), 36—53 (46—47)] и Knopp (l. c., 151—152) обобщили эти теоремы.

§§ 9.10. 9.11. Методы (e, c) и (γ, k) ввели Харди и Литтльвуд в их работе в *RP*; содержание большинства доказываемых здесь теорем можно найти там или в позднейшей их работе в *JLMS*, **18** (1943), 194—200. Кнопп рассматривает связи между суммируемостью по Эйлеру и суммируемостью (e, c), но не формулирует теорему 152 явно.

§ 9.12. Работу Хислопа см. в *PLMS* (2), **41** (1936), 243—256.

§ 9.13. Метод доказательства заимствован из работы Харди и Литтльвуда от 1943 г. По поводу теоремы Витали см. Littlewood, 117, или Титчмарш, Теория функций, 194.

Теорему 156 впервые доказали Харди и Литтльвуд в их работе в *RP*. Условие (9.13.1) впоследствии обобщили дальше Valiron [*RP*, **42** (1917), 267—284] и R. Schmidt [*Schriften d. Königsberger gelehrten Ges.*, **1** (1925), 205—256]. Наиболее общая форма рассматриваемого условия (предложенная Р. Шмидтом) такова:

$$\underline{\lim}\,(A_n-A_m)\geqslant 0$$

при $m\to\infty$, $n>m$, $\frac{n-m}{\sqrt{m}}\to 0$; это условие, в частности, выполняется при $a_n>-\frac{H}{\sqrt{n}}$. Доказательство упростил Vijayaraghavan, *PLMS* (2), **27** (1927), 316—326.

Имеется и другой метод доказательства, посредством „общих тауберовых теорем“ Винера; см. гл. XII, в частности, § 12.15.

§ 9.14. Теорему, упомянутую в конце параграфа, можно найти в работах Hardy, *JLMS*, **9** (1934), 153—157, и Good, *PCPS*, **38** (1942), 144—165. Харди доказывает утверждение теоремы лишь для $\beta = \frac{1}{2}\alpha$, а Гуд — для общего случая. Таким образом, Харди доказывает, что если

$$a_0 + 0 + a_1 + 0 + a_2 + 0 + \ldots = s \quad (\mathrm{B}', \alpha)$$

и ряд

$$\text{(a)} \qquad a_\alpha(t) = \sum a_n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

сходится для всех t, то

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = s \quad (\mathrm{B}', \alpha).$$

Фактически доказывается несколько больше, а именно, что если ряд (a) сходится для малых t и $a_\alpha(t)$ регулярна для всех положительных t, то

$$\int e^{-t} a_\alpha(t)\, dt = s.$$

Это — обобщение метода (B', α), аналогичное обобщению метода B', изложенному в § 8.11.

Если $q = 1$, то $\alpha = 2$. Таким образом, (B', α)-методом, наиболее тесно связанным с обычным эйлеровым методом, является $(\mathrm{B}', 2)$.

§ 9.15. Основной результат пункта (2) принадлежит Миттаг-Леффлеру, l. с. в примечании к § 8.10.

Область для метода (e, c) определил Хислоп, l. с. в примечании к § 9.12; у него $c = \frac{1}{2}$.

§ 9.16. По поводу всего этого см. работу Валирона, указанную в примечании к § 9.13. При $k = 2$

$$G''(n) = H(n) = Ck(k-1) \neq 0,$$

а (9.16.6) приводится к $a_n = O(1)$. В этом случае метод Валирона не в силах суммировать ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ (§ 4.15).

Глава X

УМНОЖЕНИЕ РЯДОВ

10.1. Формальные правила умножения рядов. На протяжении этой главы нам будет удобно пользоваться одной и той же буквой для обозначения и ряда и его суммы (понимаемой в обычном либо каком-нибудь обобщенном смысле).

Если ряды $\sum a_m = A$ и $\sum b_n = B$ абсолютно сходятся, то двойной ряд $\sum\sum a_m b_n$ абсолютно сходится и имеет сумму AB, как бы ни располагать его члены. Если же хоть один из рядов A, B — не абсолютно сходящийся, то сходимость, или суммируемость, двойного ряда зависит от выбора правила расположения его членов, так что различные правила приводят к различным определениям „произведения" рядов A и B. Наибольшей известностью пользуется правило умножения Коши, согласно которому двойной ряд суммируется „по диагоналям", путем объединения членов с одним и тем же значением $m+n$. Мы тогда пишем

$$c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n = \sum a_m b_{p-m} = \sum a_{p-n} b_n \text{ *)} \tag{10.1.1}$$

и определяем произведение C рядов A и B как

$$C = \sum c_p. \tag{10.1.2}$$

Это правило умножения подсказывается формулой

$$\sum a_m x^m \sum b_n x^n = \sum c_p x^p$$

перемножения двух степенных рядов.

Другое правило умножения рядов имеет важное значение в теории „обыкновенных" рядов Дирихле. Мы полагаем $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ и объединяем члены, у которых mn имеет фиксированное значение p, так что

$$c_p = \sum_{mn=p} a_m b_n = \sum_{d\mid p} a_d b_{\frac{p}{d}} = \sum_{d\mid p} a_{\frac{p}{d}} b_d, \tag{10.1.3}$$

где суммирование в последних двух суммах распространяется на все делители числа p. Это правило умножения подсказывается формулой

$$\sum \frac{a_m}{m^s} \sum \frac{b_n}{n^s} = \sum \frac{c_p}{p^s}$$

---

*) Здесь, как большей частью и в дальнейщем, мы пользуемся соглашением, принятым в § 5.4.

перемножения двух обыкновенных рядов Дирихле. Рассмотрение рядов Дирихле $\sum a_m e^{-\lambda_m s}$ более общих типов приводит и к другим правилам умножения.

В этой главе наше внимание будет сосредоточено главным образом на правиле умножения Коши, которое мы подвергнем весьма тщательному рассмотрению; различных же способов умножения по Дирихле мы коснемся лишь в самых общих чертах. Мы также остановимся немного на соответствующих вопросах, относящихся к рядам, бесконечным в обоих направлениях.

10.2. Классические теоремы об умножении по правилу Коши. Для умножения рядов по правилу Коши известны три классические теоремы, принадлежащие соответственно Коши, Мертенсу и Абелю.

Теорема 160. *Если A и B абсолютно сходятся, то C также абсолютно сходится и $C = AB$.*

Это предложение является следствием абсолютной сходимости двойного ряда $\sum\sum a_m b_n$.

Теорема 161. *Если A абсолютно сходится и B сходится, то C сходится и $AB = C$.*

Действительно, полагая, как обычно, $A_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$ и аналогично для других букв, имеем

$$C_p = \sum_{q \leqslant p} \sum_{m+n=q} a_m b_n = \sum_{m+n \leqslant p} a_m b_n = \sum a_m B_{p-m}. \tag{10.2.1}$$

Это можно записать в виде $\sum a_m \beta_{m,p}$, где

$$\beta_{m,p} = \begin{cases} B_{p-m} & \text{при} \quad m \leqslant p, \\ 0 & \text{при} \quad m > p. \end{cases}$$

Так как $\beta_{m,p}$ равномерно ограничены, а A абсолютно сходится, то ряд $\sum a_m \beta_{m,p}$ сходится равномерно относительно p. Но тогда

$$\lim_{p \to \infty} \sum a_m \beta_{m,p} = \sum a_m \lim_{p \to \infty} \beta_{m,p} = B \sum a_m = AB.$$

Заметим, что если A сходится не абсолютно, то существуют сходящиеся B, для которых C расходится. Действительно, если бы $C_p = a_0 B_p + \ldots + a_p B_0$ стремилось к пределу всякий раз, когда B_n стремится к пределу, то, по теореме 1, мы имели бы $\sum |a_n| < H$.

Теорема 162. *Если все три ряда A, B и C сходятся, то $C = AB$.*

Действительно, степенные ряды $a(x) = \sum a_n x^n, \ldots$ абсолютно сходятся для $0 < x < 1$, и, по теореме 160, $a(x)\, b(x) = c(x)$. Беря $x \to 1$, заключаем тогда из теоремы 55, что $AB = C$.

10.3. Умножение суммируемых рядов. Предыдущие теоремы допускают важные обобщения на ряды, суммируемые (C, k). Основной здесь является теорема 164, принадлежащая Чезаро; но мы приведем сначала следующее предложение:

Теорема 163. *Если все три ряда A, B и C суммируемы* (C, k) *для некоторого k, то $C = AB$.*

Действительно, из доказательства теоремы 162 видно, что $C = AB$, даже если все три ряда суммируемы (A).

Теорема 164. *Если A суммируем* (C, r) *и B суммируем* (C, s), *где $r > -1$ и $s > -1$, то C суммируем* (C, $r + s + 1$) *и $C = AB$.*

Имеем для $|x| < 1$

$$\frac{c(x)}{(1-x)^{r+s+2}} = \frac{a(x)}{(1-x)^{r+1}} \cdot \frac{b(x)}{(1-x)^{s+1}},$$

откуда в обозначениях § 5.4

$$\sum C_p^{r+s+1} x^p = \sum A_m^r x^m \sum B_n^s x^n.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$C_p^{r+s+1} = A_0^r B_p^s + A_1^r B_{p-1}^s + \ldots + A_p^r B_0^s. \tag{10.3.1}$$

Так как

$$A_m^r \sim A\binom{m+r}{r}, \quad B_N^s \sim B\binom{n+s}{s},$$

то из равенства (10.3.1) и теоремы 41 следует, что

$$C_p^{r+s+1} \sim AB\binom{p+r+s+1}{r+s+1},$$

т. е. что C суммируем (C, $r+s+1$) к AB.

Разумеется, равенство (10.3.1) можно доказать и без помощи степенных рядов. Так как

$$A_k^r = \sum_{m=0}^{k} \binom{k-m+r}{r} a_m, \quad B_{p-k}^s = \sum_{n=0}^{p-k} \binom{p-k-n+s}{s} b_n,$$

то коэффициент при $a_m b_n$ в правой части равенства (10.3.1) в силу формулы (5.6.10) равен

$$\sum_{\nu=m}^{p-n} \binom{\nu-m+r}{r}\binom{p-n-\nu+s}{s} = \sum_{k=0}^{p-m-n} \binom{k+r}{r}\binom{p-m-n-k+s}{s} =$$
$$= \binom{p-m-n+r+s+1}{r+s+1},$$

а последнее выражение есть как раз соответствующий коэффициент в C_p^{r+s+1}.

В частности, при $r = s = 0$ равенство (10.3.1) принимает вид

$$C_p^1 = A_0B_p + A_1B_{p-1} + \ldots + A_pB_0.$$

Легко проверить справедливость последнего равенства непосредственно и вывести из него, не опираясь на теорему 41 в ее общем виде, что $A_m \to A$ и $B_n \to B$ влекут $C_p^1 \sim ABp$. Это показывает, что когда A и B сходятся, то C суммируем (C, 1), к сумме $C = AB$, и, значит, если C также сходится, его сумма необходимо равна AB. Таким образом, мы получаем простое доказательство теоремы 162, не зависящее от теории степенных рядов.

Приведем еще две теоремы отрицательного характера, показывающие, что теорему 164 в известном смысле нельзя дальше усилить.

Теорема 165. *Предположения теоремы* 164 *не влекут суммируемости* (C, k) *ряда* C *ни для какого* $k < r + s + 1$.

Действительно, положим

$$a_m = (-1)^m (m+1)^\rho, \quad b_n = (-1)^n (n+1)^\sigma,$$

где $\rho = r - \delta$, $\sigma = s - \delta$ и δ — малое положительное число. В силу теоремы 81 A и B соответственно суммируемы (C, r) и (C, s). Но, по теореме 41,

$$(-1)^p c_p = \sum (m+1)^\rho (p-m+1)^\sigma \sim \frac{\Gamma(\rho+1)\,\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\rho+\sigma+2)} p^{\rho+\sigma+1},$$

следовательно, в силу теоремы 46 C не суммируем (C, $\rho+\sigma+1$), т. е. (C, $r+s+1-2\delta$).

Теорема 166. *Утверждение теоремы* 164 *неверно при* $r = -1$, $s \geqslant -1$.

Действительно, пусть

$$a_m = \frac{(-1)^m}{(m+2)\{\log(m+2)\}^\alpha}, \quad b_n = \frac{(-1)^n (n+2)^s}{\{\log(n+2)\}^\beta},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$. Тогда A суммируем (C, -1), а B суммируем (C, s). Но при больших p

$$(-1)^p c_p = \sum_{m=0}^{p} \frac{1}{(m+2)\{\log(m+2)\}^\alpha} \frac{(p-m+2)^s}{\{\log(p-m+2)\}^\beta} >$$

$$> \frac{Mp^s}{(\log p)^\beta} \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}p} \frac{1}{(m+2)\{\log(m+2)\}^\alpha} > Np^s (\log p)^{1-\alpha-\beta}$$

для некоторых постоянных M и N. Тем самым $c_p \neq o(p^s)$ и, значит, C не суммируем (C, s).

Следующая наша теорема является обобщением теоремы Мертенса 161 и сводится к ней при $r = 0$.

Теорема 167. *Если A абсолютно сходится, а B суммируем* (C, r), *где* $r > 0$, *то C суммируем* (C, r).

Имеем здесь $a(x)\dfrac{b(x)}{(1-x)^{r+1}} = \dfrac{c(x)}{(1-x)^{r+1}}$, так что

$$C_p^r = a_0B_p^r + a_1B_{p-1}^r + \ldots + a_pB_0^r.$$

Это можно представить в виде

$$\frac{C_p^r}{\binom{p+r}{r}} = \sum a_m \beta_{m,p},$$

где

$$\beta_{m,p} = \begin{cases} \dfrac{B_{p-m}^r}{\binom{p+r}{r}} & \text{при } m \leqslant p, \\ 0 & \text{при } m > p. \end{cases}$$

Так как для $m \leqslant p$

$$|\beta_{m,p}| \leqslant \frac{|B_{p-m}^r|}{\binom{p-m+r}{r}},$$

то $\beta_{m,p}$ равномерно ограничены, так что ряд $\sum a_m \beta_{m,p}$ сходится равномерно относительно p. Принимая во внимание, что

$$\binom{p-m+r}{r} \sim \binom{p+r}{r}$$

при $p \to \infty$ для каждого m, заключаем, что

$$\sum a_m \beta_{m,p} \to \sum a_m \lim \beta_{m,p} = B \sum a_m = AB.$$

Теорема 168. *Утверждение теоремы* 167 *неверно для* $r < 0$.

Действительно, пусть

$$a_m = (-1)^m \alpha_m, \quad b_n = (-1)^n \beta_n,$$

где α_m и β_n положительны и $\sum \alpha_m < \infty$. Тогда

$$|c_p| = \sum \alpha_m \beta_{p-m} > \alpha_p \beta_0 \quad (p > 0),$$

и при $c_p = o(p^r)$ мы имели бы $\alpha_p = o(p^r)$, что, однако, не следует из сходимости ряда $\sum \alpha_p$ ни для какого отрицательного r.

10.4. Другие теоремы о сходимости произведения рядов. Мы рассмотрим теперь группу теорем, простейшим представителем которой является

Теорема 169. *Если A и B сходятся и*

$$a_m = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{10.4.1}$$

то C сходится (и $C = AB$).

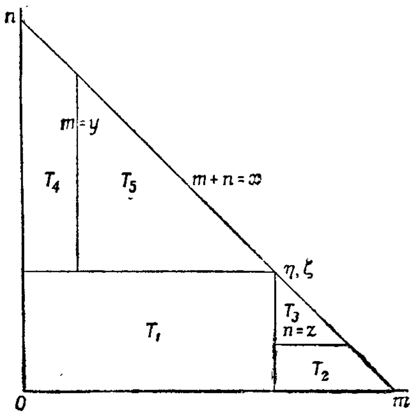
Действительно, по теореме 45, A и B суммируемы $(C, -1+\delta)$ для любого положительного δ; поэтому в силу теоремы 164 ряд C суммируем $(C, -1+2\delta)$ и, значит, тем более сходится.

Теорема 170. *Если A и B сходятся и*

$$\sum_{\eta(x)}^{x} |a_m| = O(1), \quad \sum_{\zeta(x)}^{x} |b_n| = O(1) \tag{10.4.2}$$

для каких-нибудь положительных функций $\eta(x)$ и $\zeta(x)$, стремящихся к бесконечности вместе с x и образующих в сумме x, то C сходится (и $C = AB$) *).

Пусть $0 < y < \eta$, $0 < z < \zeta$. Разобьем треугольник T плоскости (m, n), определяемый условием $m + n \leqslant x$, на области T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, как указано на фиг. 2. Мы можем считать x, η, ζ, y и z нецелыми, так что на линиях, разделяющих эти области, нет целых точек. Обозначая через $A(x)$, ... сумматорные функции для рядов A, ... и через Σ_1, ... суммы членов ряда $\sum\sum a_m b_n$, попадающих в области T_1, ..., имеем



Фиг. 2

$$C(x) = \\ = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5.$$

Далее,

$$\Sigma_1 = \sum_{m<\eta} a_m \sum_{n<\zeta} b_n = \\ = A(\eta)\,B(\zeta) \to AB.$$

Поэтому достаточно доказать, что при надлежащем выборе y и z $\Sigma_2 + \Sigma_3 \to 0$ и $\Sigma_4 + \Sigma_5 \to 0$.

Выберем z так, чтобы

$$\left|\sum_{n=\nu_1}^{\nu_2} b_n\right| < \varepsilon \quad (\nu_2 > \nu_1 > z).$$

Тогда в силу первого из условий (10.4.2)

$$|\Sigma_3| = \left|\sum_{m=\eta}^{x-z} a_m \sum_{n=z}^{x-m} b_n\right| \leqslant \sum_{m=\eta}^{x-z} |a_m| \left|\sum_{n=z}^{x-m} b_n\right| \leqslant \varepsilon \sum_{m=\eta}^{x} |a_m| < K\varepsilon$$

для некоторого постоянного K. А

$$|\Sigma_2| = \left|\sum_{n=0}^{z} b_n \sum_{m=\eta}^{x-n} a_m\right| \leqslant \sum_{n=0}^{z} |b_n| \left|\sum_{m=\eta}^{x-n} a_m\right| \to 0$$

*) Если η или ζ не стремится к бесконечности, то один из рассматриваемых рядов абсолютно сходится, и утверждение теоремы содержится в теореме 161.

при фиксированном z и стремящихся к бесконечности x и η. Следовательно, $\Sigma_2 + \Sigma_3 \to 0$. Аналогично докажем, что и $\Sigma_4 + \Sigma_5 \to 0$.

При выполнении условий теоремы 169 можно взять $\eta = \zeta = \frac{1}{2}x$, поскольку тогда

$$\sum_{\frac{1}{2}x \leqslant m \leqslant x} |a_m| = O\Big(\sum_{\frac{1}{2}x \leqslant m \leqslant x} \frac{1}{m}\Big) = O(1).$$

Можно указать и другие интересные частные случаи.

Теорема 171. *Если A и B сходятся и*

$$a_m = O\left(\frac{1}{m^\delta}\right) \ (\delta > 0), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n \log n}\right), \tag{10.4.3}$$

то C сходится.

Очевидно, мы можем считать $\delta < 1$. Положим $\eta = x - x^\delta$, $\zeta = x^\delta$. Тогда

$$\sum_{\eta}^{x} |a_m| = O\left(x^\delta \cdot \frac{1}{x^\delta}\right) = O(1),$$

$$\sum_{\zeta}^{x} |b_n| = O\Big(\sum_{x^\delta}^{x} \frac{1}{n \log n}\Big) = O(\log\log x - \log\log x^\delta) = O(1).$$

10.5. Дальнейшие применения теоремы 170. (1) Теорема 170 позволяет доказать „одностороннее" обобщение теоремы 169.

Теорема 172. *Если a_m и b_n вещественны, A и B сходятся и $a_m > -\frac{K}{m}$, $b_n > -\frac{L}{n}$ с постоянными K и L, то C сходится.*

Пусть a_m^+ и a_m^- обозначают соответственно положительные и отрицательные a_m, и

$$A(x) = \sum_{m \leqslant x} a_m, \qquad A^+(x) = \sum_{m \leqslant x} a_m^+, \qquad A^-(x) = \sum_{m \leqslant x} a_m^-.$$

Тогда

$$A(x) = A^+(x) + A^-(x),$$

$$\sum_{m \leqslant x} |a_m| = A^+(x) - A^-(x) = A(x) - 2A^-(x),$$

$$\sum_{\frac{1}{2}x < m \leqslant x} |a_m| = A(x) - A\left(\frac{1}{2}x\right) - 2\left\{A^-(x) - A^-\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}.$$

Но $A(x)=O(1)$ и

$$A^{-}(x)-A^{-}\left(\frac{1}{2}x\right)=\sum_{\frac{1}{2}x<m\leqslant x} a_m^{-}>-K\sum_{\frac{1}{2}x<m\leqslant x}\frac{1}{m},$$

что ограничено; следовательно, a_m удовлетворяют условию (10.4.2). То же рассуждение применимо и к b_n. Тем самым теорема доказана.

(2) В качестве другого приложения теоремы 170, докажем следующую теорему.

Теорема 173. *Если A и B сходятся, $p>1$, $q>1$ и*

$$\sum m^{p-1}|a_m|^p<\infty,\qquad \sum n^{q-1}|b_n|^q<\infty,$$

то C сходится.

Действительно, полагая $p'=\dfrac{p}{p-1}$ и применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\sum|a_m|=\sum m^{\frac{1}{p'}}|a_m|\frac{1}{m^{\frac{1}{p'}}}\leqslant\left(\sum m^{p-1}|a_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{p'}}=O(1),$$

где все суммирования распространяются на интервал $\left(\frac{1}{2}x,\ x\right)$. Аналогично найдем, что и $\sum|b_n|=O(1)$.

10.6. Знакочередующиеся ряды. В этом параграфе мы докажем одну более элементарную теорему, относящуюся к знакочередующимся рядам.

Теорема 174. *Пусть $A=\sum(-1)^m\alpha_m$, $B=\sum(-1)^n\beta_n$, где α_m и β_n положительны и монотонно стремятся к нулю. Тогда для сходимости ряда C*

(I) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\gamma_p=\alpha_0\beta_p+\alpha_1\beta_{p-1}+\ldots+\alpha_p\beta_0\to 0; \tag{10.6.1}$$

(II) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_p)\beta_p\to 0,\quad(\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_p)\alpha_p\to 0; \tag{10.6.2}$$

(III) *достаточно, чтобы $\sum\alpha_p\beta_p<\infty$;*

(IV) *необходимо, чтобы $\sum(\alpha_p\beta_p)^{1+\delta}<\infty$ для каждого положительного δ.*

(I) Положим

$$A=A_m+(-1)^{m+1}\rho_m,\qquad B=B_n+(-1)^{n+1}\sigma_n.$$

Тогда $0\leqslant\rho_m\leqslant\alpha_m$, $0\leqslant\sigma_n\leqslant\beta_n$. Далее,

$$C_p=\sum a_mB_{p-m}=BA_p+(-1)^p\sum\alpha_m\sigma_{p-m}=BA_p+R_p,$$

где $|R_p|\leqslant\sum\alpha_m\beta_{p-m}=\gamma_p$. Поэтому условие (10.6.1) достаточно; необходимость же его очевидна.

(II) Имеем

$$\gamma_p \geqslant (\alpha_0 + \ldots + \alpha_p)\,\beta_p, \qquad \gamma_p \geqslant (\beta_0 + \ldots + \beta_p)\,\alpha_p,$$

так что условия (10.6.2) необходимы. А так как

$$\gamma_p \leqslant (\alpha_0 + \ldots + \alpha_q)\,\beta_q + (\beta_0 + \ldots + \beta_q)\,\alpha_q,$$

где $q = \left[\frac{1}{2} p\right]$, то они также достаточны.

(III) При $0 < q < p$ имеем

$$\alpha_p(\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_p) \leqslant \alpha_p(\beta_0 + \ldots + \beta_q) + \\ + \alpha_{q+1}\beta_{q+1} + \ldots + \alpha_p\beta_p = S_1 + S_2.$$

Если $\sum \alpha_p\beta_p < \infty$, то мы можем выбрать q так, чтобы $S_2 < \varepsilon$ для всех $p > q$; но $S_1 \to 0$ при фиксированном q и $p \to \infty$. Поэтому $\alpha_p(\beta_0 + \ldots + \beta_p) \to 0$ и аналогично $\beta_p(\alpha_0 + \ldots + \alpha_p) \to 0$. Тем самым условие достаточно. Что оно не необходимо, показывает пример $\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n \log n}}$ $(n \geqslant 2)$: в этом случае $\gamma_n \to 0$, так что C сходится.

(IV) Наконец,

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p)\,\beta_p \geqslant p\alpha_p\beta_p.$$

Если C сходится, то, согласно доказанному утверждению (II), левая часть стремится к нулю и, значит, $\alpha_p\beta_p = o\left(\frac{1}{p}\right)$, откуда $\sum (\alpha_p\beta_p)^{1+\delta} < \infty$. Пример $\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ показывает, что условие не является достаточным.

10.7. Формальное перемножение рядов. Во всех предыдущих теоремах предполагалось, что оба ряда A и B сходятся или суммируемы. Существуют теоремы другого типа, особенно важные в теории тригонометрических рядов. В этих теоремах один из рядов, скажем A, почти произволен, но зато другой подчинен строгому ограничению; утверждение же состоит в том, что поведение C_p „весьма похоже" на поведение BA_p.

Если

$$C_p - BA_p \to 0 \tag{10.7.1}$$

при $p \to \infty$, то мы будем говорить, что ряд C — *равносходящийся* с $B(A)$. В этом случае из сходимости или суммируемости ряда A следует то же для C (с суммой AB).

Теорема 175. *Если $a_m = o(1)$ и $\sum n\,|b_n| < \infty$, то ряд C — равносходящийся с $B(A)$.*

Мы воспользуемся следующей леммой:

Теорема 176. *Если* $a_m = o(1)$ *и* $\sum |\rho_n| < \infty$, *то*

$$\sigma_p = a_0\rho_p + a_1\rho_{p-1} + \ldots + a_p\rho_0 = o(1).$$

Это тривиально. Действительно, мы можем выбрать P так, чтобы

$$|a_m| < \varepsilon \text{ для } m \geqslant \frac{1}{2}P, \quad \sum_{n \geqslant \frac{1}{2}P} |\rho_n| < \varepsilon,$$

и, значит,

$$|\sigma_p| \leqslant \max_{m \leqslant \frac{1}{2}p} |a_m| \sum_{\frac{1}{2}p}^{p} |\rho_n| + \max_{\frac{1}{2}p < m \leqslant p} |a_m| \sum_{0}^{\frac{1}{2}p} |\rho_n| \leqslant \varepsilon(\operatorname{Max}|a_m| + \sum |\rho_n|)$$

для $p \geqslant P$.

Переходя к доказательству теоремы 175, положим $B = B_n + \beta_n$, так что

$$C_p = a_0B_p + a_1B_{p-1} + \ldots + a_pB_0 = BA_p - a_0\beta_p - \ldots - a_p\beta_0,$$

где

$$\beta_p = \sum_{n > p} b_n, \quad |\beta_p| \leqslant \sum_{n > p} |b_n|, \quad \sum |\beta_p| \leqslant \sum_{p} \sum_{n > p} |b_n| = \sum n|b_n|.$$

Тогда в силу теоремы 176

$$a_0\beta_p + a_1\beta_{p-1} + \ldots + a_p\beta_0 \to 0, \quad C_p - BA_p \to 0.$$

Ясно, что если a_m и b_n являются функциями от переменного x, a_m равномерно стремится к нулю и ряд $\sum n|b_n|$ равномерно сходится, то $C_p - BA_p$ равномерно стремится к нулю.

Теорема 175 допускает (несколько более сложные по виду) обобщения на случай суммируемости (C, k). Одно из них предоставим доказать читателю:

Теорема 177. *Если* $a_m = o(m)$ *и* $\sum n^2|b_n| < \infty$, *то*

$$C_p^1 - BA_p^1 + B^*A_p = o(p),$$

где $B^* = \sum nb_n$. *Если также* $A_m = o(m)$ *и, в частности, если* $a_m = o(1)$, *то* $C_p^1 - BA_p^1 = o(p)$, *т. е.* C *и* $B(A)$ *равносуммируемы* (C, 1).

10.8. Умножение интегралов. Сформулируем теперь теоремы для интегралов, соответствующие наиболее важным из теорем 160—170. Доказательства их следуют тому же плану, так что мы, не входя в подробности, отметим только пункты существенного различия. Последние возникают из-за отсутствия „лимитирующей теоремы“, которая бы соответствовала теореме 46. В частности, сходимость интеграла $A = \int a(x)\,dx$ не влечет сходимости интеграла $\int e^{-\delta x}|a(x)|\,dx$ ни для какого положительного δ.

Мы определим C как $C = \int c(x)\,dx$, где

$$c(x) = \int a(t)\,b(x-t)\,dt = \int a(x-t)\,b(t)\,dt \tag{10.8.1}$$

(с соглашением о пределах интеграции, принятым в § 5.6).

Теорема 178. *Если A и B абсолютно сходятся, то C также абсолютно сходится и $C = AB$.*

Теорема 179. *Если A абсолютно сходится и B сходится, то C сходится и $C = AB$.*

Теорема 180. *Если все три интеграла A, B и C сходятся, то $C = AB$.*

Теорема 181. *Если A суммируем (C, r) и B суммируем (C, s), где $r > -1$ и $s > -1$, то C суммируем $(C, r+s+1)$ и $C = AB$.*

Теорема 182. *Если A абсолютно сходится и B суммируем (C, r), где $r > 0$, то C суммируем (C, r) и $C = AB$.*

Теорема 183. *Если A и B сходятся и*

$$\int_{\eta}^{x} |a(t)|\,dt = O(1), \qquad \int_{\zeta}^{x} |b(t)|\,dt = O(1), \tag{10.8.2}$$

где η и ζ удовлетворяют условиям теоремы 170, то C сходится и $C = AB$.

Нужно сделать лишь следующие замечания.

(I) Теорему 180 следует вывести из теоремы 181 с $r = s = 0$, а не пытаться копировать рассуждение, проведенное в § 10.2.

(II) Доказательство теоремы 181 опирается на тождество

$$C_{r+s+1}(x) = \int A_r(t)\,B_s(x-t)\,dt, \tag{10.8.3}$$

где, например,

$$A_r(x) = \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int (x-t)^r a(t)\,dt,$$

а доказательство теоремы 182 — на тождество

$$C_r(x) = \int a(t)\,B_r(x-t)\,dt. \tag{10.8.4}$$

Для доказательства тождества (10.8.3) заметим, что

$$\int_0^x A_r(t)\,B_s(x-t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)} \int_0^x dt \int_0^t a(u)(t-u)^r\,du \int_0^{x-t} b(v)(x-t-v)^s\,dv,$$

где $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant x$, $0 \leqslant v \leqslant x-t \leqslant x$. При фиксированных u и v, t изменяется от u до $x-v$; при фиксированном u, v изменяется от 0 до $x-u$. Поэтому тройной интеграл справа равен

$$\frac{1}{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}\int_0^x a(u)\,du\int_0^{x-u} b(v)\,dv\int_u^{x-v}(t-u)^r(x-t-v)^s\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(r+s+2)}\int_0^x a(u)\,du\int_0^{x-u}(x-u-v)^{r+s+1}\,b(v)\,dv=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(r+s+2)}\int_0^x a(u)\,du\int_u^x (x-w)^{r+s+1}\,b(w-u)\,dw=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(r+s+2)}\int_0^x (x-w)^{r+s+1}\,dw\int_0^w a(u)\,b(w-u)\,du=C_{r+s+1}(x).$$

При $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ этот вывод в силу теоремы Фубини имеет силу для всех интегрируемых функций $a(x)$ и $b(x)$. Если $a(x)$ и $b(x)$ ограничены на каждом конечном интервале $(0, X)$, то он сохраняет силу и для $r > -1$, $s > -1$; в остальных случаях требуются некоторые оговорки *).

Доказательство тождества (10.8.4) аналогично, но несколько проще.

10.9. Суммируемость по Эйлеру. Переходим к рассмотрению вопроса об умножении рядов, суммируемых методами Эйлера или Бореля. Напомним определение суммируемости (E, q): если, для малых x и y,

$$f(x)=\sum a_n x^{n+1}=\sum a_n\left(\frac{y}{1-qy}\right)^{n+1}=\sum a_m^{(q)}\{(q+1)y\}^{m+1}$$

и $\sum a_n^{(q)}=A$, то ряд $\sum a_n$ суммируем (E, q) к сумме A. Мы теперь присоединим к этому еще следующее определение: если ряд $\sum a_n^{(q)}$ суммируем (C, k), то мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (E, q; C, k).

Теорема 184. *Если* $\sum a_m=A$ (E, q) *и* $\sum b_n=B$ (E, q), *то*

$$\sum c_p=AB \quad (\text{E},\ q;\ \text{C},\ 1).$$

Ряды

$$f(x)=\sum a_m^{(q)}(q+1)^{m+1}y^{m+1},\quad g(x)=\sum b_n^{(q)}(q+1)^{n+1}y^{n+1},$$

$$h(x)=\sum c_p^{(q)}(q+1)^{p+1}y^{p+1}$$

абсолютно сходятся для малых x и y, и $f(x)\,g(x)=xh(x)$. Поэтому

$$\sum c_p^{(q)}(q+1)^p y^p=(q+1)(1-qy)\sum a_m^{(q)}(q+1)^m y^m\sum b_n^{(q)}(q+1)^n y^n$$

*) Ср. примечание к §§ 5.14—5.15.

и

$$(10.9.1)\quad \sum c_p^{(q)} Y^p = (q+1) \sum a_m^{(q)} Y^m \sum b_n^{(q)} Y^n - qY \sum a_m^{(q)} Y^m \sum b_n^{(q)} Y^n,$$

где $Y = (q+1)y$. Отсюда

$$c_p^{(q)} = (q+1) \sum_{m+n=p} a_m^{(q)} b_n^{(q)} - q \sum_{m+n=p-1} a_m^{(q)} b_n^{(q)} = (q+1) G_p - qG_{p-1}$$

(с $G_{-1}=0$). Так как $\sum a_m^{(p)} = A$, $\sum b_n^{(q)} = B$, то из теоремы 164 следует, что $\sum G_p = AB$ (C, 1), а из теоремы 47, — что

$$\sum G_{p-1} = 0 + G_0 + \ldots = AB \quad (C,\ 1).$$

Поэтому

$$\sum c_p^{(q)} = (q+1-q) AB = AB \quad (C,\ 1).$$

Ясно, что если вместо теоремы Чезаро применить теорему Мертенса, то получится

Теорема 185. *Если* $\sum a_m = A$ $(|E, q|)$, *т. е. ряд* $\sum a_m^{(q)}$ *абсолютно сходится к* A, *и* $\sum b_n = B$ (E, q), *то* $\sum c_p = AB$ (E, q).

С другой стороны, если предположить, что все три ряда A, B, C суммируемы (E, q), и взять в (10.9.1) $Y \to 1$, то получим, что

$$C = \sum c_p^{(q)} = AB.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 186. *Если все три ряда A, B и C суммируемы* (E, q), *то* $C = AB$.

10.10. Суммируемость по Борелю. Для суммируемости по Борелю дело обстоит несколько сложнее; объясняется это тем, что, во-первых, для этой суммируемости имеются два определения и, во-вторых, поведение рядов $a_0 + a_1 + \ldots$ и $a_1 + a_2 + \ldots$ не обязательно одинаково. Мы сформулируем наши результаты в терминах интегрального определения, предоставляя их варианты для „экспоненциального" определения читателю.

Если интеграл Бореля суммируем (C, k) в смысле § 5.14, то мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (B′; C, k). Докажем прежде всего, что из

$$(10.10.1)\qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = A \qquad (B';\ C,\ k)$$

следует

$$(10.10.2)\qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = A - a_0 \qquad (B';\ C,\ k+1).$$

Действительно, полагая $a(t)=\sum a_n\frac{t^n}{n!}$, имеем

$$(10.10.3)\qquad \int_0^t\left(1-\frac{u}{t}\right)^{k+1}e^{-u}\left(a_1+a_2\frac{u}{1!}+\ldots\right)du=$$

$$=\int_0^t\left(1-\frac{u}{t}\right)^{k+1}e^{-u}a'(u)\,du=-a_0+\int_0^t\left(1-\frac{u}{t}\right)^{k+1}e^{-u}a(u)\,du+$$

$$+\frac{k+1}{t}\int_0^t\left(1-\frac{u}{t}\right)^{k}e^{-u}a(u)\,du.$$

Но из (10.10.1) следует, что

$$a_0+a_1+a_2+\ldots=A\qquad (B';\ C,\ k+1).$$

Поэтому последний член в правой части формулы (10.10.3) стремится к A, тогда как средний равен $O\left(\frac{1}{t}\right)$; тем самым (10.10.2) доказано.

Теперь может быть доказана

Теорема 187. *Если ряды* $\sum a_m$ *и* $\sum b_n$ *суммируемы* (B′) *соответственно к* A *и* B, *то*

$$(10.10.4)\qquad 0+c_0+c_1+c_2+\ldots=AB\qquad (B';\ C,\ 1)$$

и

$$(10.10.5)\qquad c_0+c_1+c_2+\ldots=AB\qquad (B';\ C,\ 2).$$

По теореме 181, с $r=s=0$,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx\int_0^x a(t)\,b(x-t)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty dx\left\{\int_0^x e^{-t}a(t)\cdot e^{-x+t}b(x-t)\,dt\right\}=AB\quad (C,\ 1).$$

Но внутренний интеграл в левой части равен

$$\sum_m\sum_n\frac{a_m b_n}{m!\,n!}\int_0^x t^m(x-t)^n\,dt=\sum_m\sum_n\frac{a_m b_n}{(m+n+1)!}x^{m+n+1}=\sum_p c_p\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Поэтому

$$\int e^{-x}\sum c_p\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\,dx=AB\qquad (C,\ 1),$$

что совпадает с утверждением (10.10.4); а (10.10.5) является его следствием в силу теоремы 186.

Ясно, что если вместо теоремы 181 применить соответственно теоремы 179 и 180, то получатся следующие предложения:

Теорема 188. *Если (в дополнение к предположениям теоремы 187)* $\int e^{-t}|a(t)|\,dt<\infty$ *(т. е. A абсолютно суммируем), то*

$$0+c_0+c_1+\ldots=AB\ (\mathrm{B}'),\quad c_0+c_1+c_2+\ldots=AB\qquad (\mathrm{B}';\mathrm{C},1)$$

Теорема 189. *Если все три ряда* $\sum a_m, \sum b_n$ *и* $\sum c_p$ *суммируемы* (B'), *то* $C=AB$.

10.11. Правило умножения Дирихле. Пусть $\lambda_0\geqslant 0$, $\mu_0\geqslant 0$ и последовательности (λ_m) и (μ_n) строго возрастают до ∞; пусть, далее, (ν_p) есть последовательность $(\lambda_m+\mu_n)$, расположенная в возрастающем порядке, причем все равные суммы $\lambda_m+\mu_n$ считаются за одно ν_p, и

$$c_p=\sum_{\lambda_m+\mu_n=\nu_p} a_m b_n.$$

Тогда мы будем называть ряд $C=\sum c_p$ произведением рядов A и B по общему правилу Дирихле. При $\lambda_m=m$, $\mu_n=n$ это приводит к определению Коши, а при $\lambda_m=\log m$, $\mu_n=\log n$ — к правилу умножения, определяемому формулой (10.1.3) и имеющему многочисленные применения в теории чисел. Общая теория умножения по правилу Дирихле требует подробного изучения риссовских средних, определенных в § 4.16. Мы ограничимся здесь обобщением теоремы Мертенса.

Теорема 190. *Если A абсолютно сходится и B сходится, то произведение C рядов A и B по правилу Дирихле сходится и $C=AB$.*

Действительно,

$$C_P=\sum_{p\leqslant P} c_p=\sum_{\lambda_m+\mu_n\leqslant\nu_P} a_m b_n=\sum_{\lambda_m\leqslant\nu_P-\mu_0} a_m\sum_{\mu_n\leqslant\nu_P-\lambda_m} b_n=$$
$$=\sum_{\lambda_m\leqslant\nu_P-\mu_0} a_m B_N,$$

где $N=N(m,\,p)$ — наибольшее n, для которого $\mu_n\leqslant\nu_P-\lambda_m$, т. е.

$$C_P=\sum a_m\beta_{m,P},\tag{10.11.1}$$

где

$$\beta_{m,P}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\mu_n\leqslant\nu_P-\lambda_m} b_m & \text{при } \lambda_m\leqslant\nu_P,\\ 0 & \text{при } \lambda_m>\nu_P.\end{cases}$$

В таком случае $\beta_{m,P}$ равномерно ограничены, (10.11.1) равномерно сходится и

$$C_P\to\sum a_m\lim\beta_{m,P}=B\sum a_m=AB.$$

10.12. Ряды, бесконечные в обоих направлениях. Мы заключим эту главу кратким рассмотрением проблемы умножения для рядов, бесконечных в обоих направлениях. Для них эта проблема значительно труднее, чем для обыкновенных рядов, поскольку общий член ряда-произведения обычно сам является бесконечным рядом. Нам придется рассматривать два различных определения для суммы ряда, простирающегося от $-\infty$ до $+\infty$, и два различных правила умножения. При этом окажется удобным изменить наши прежние соглашения о суммах с неуказанными пределами суммирования. Теперь $\sum a_n$ будет распространяться на все целые n, суммы же отдельно по положительным и отрицательным значениям n мы будем обозначать соответственно через $\sum^+ a_n$ и $\sum^- a_n$, так что

$$\sum a_n = a_0 + \sum^+ a_n + \sum^- a_n,$$

если эти ряды сходятся.

Если

$$A_{N,N'} = \sum_{-N' \leqslant n \leqslant N} a_n \to A, \tag{10.12.1}$$

когда N и N' независимо друг от друга стремятся к ∞, то мы будем говорить, что A *неограниченно* сходится. В этом случае каждый из рядов $\sum^+ a_n$ и $\sum^- a_n$ в отдельности сходится, и $a_n \to 0$ при $|n| \to \infty$.

Если

$$A_N = A_{N,N} \to A \tag{10.12.2}$$

при $N \to \infty$, то мы будем говорить, что A *ограниченно* сходится. В этом случае $\sum^+ (a_n + a_{-n})$ сходится, и $a_n + a_{-n} \to 0$; однако порядки членов a_n и a_{-n} в отдельности ничем не ограничены.

Мы определим произведение двух рядов A и B одним из следующих двух способов.

(1) *Умножение Лорана.* Формальное произведение двух рядов Лорана

$$A(x) = \sum a_m x^m, \quad B(x) = \sum b_n x^n,$$

расположенное по степеням x, равно

$$C(x) = \sum c_p x^p,$$

где

$$c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n = \sum a_m b_{p-m} = \sum a_{p-n} b_n \text{ *)}. \tag{10.12.3}$$

Правило Лорана умножения рядов A и B получаем, полагая здесь $x = 1$, так что $C = \sum c_p$.

*) Все эти суммы берутся от $-\infty$ до $+\infty$: мы больше не пользуемся соглашением, принятым в § 5.4.

(2) *Умножение Фурье.* Другое правило умножения особенно пригодно для ограниченно сходящихся рядов (и только для таких рядов и будет нами применяться). Полагая

$$
(10.12.4)\qquad \begin{cases} A(\theta)=\sum a_m\cos m\theta=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum^{+}\alpha_m\cos m\theta,\\ B(\theta)=\sum b_n\cos n\theta=\frac{1}{2}\beta_0+\sum^{+}\beta_n\cos n\theta,\end{cases}
$$

где

$$
(10.12.5)\qquad \alpha_m=a_m+a_{-m},\quad \beta_n=b_n+b_{-n}
$$

(так что $\alpha_0=2a_0$, $\beta_0=2b_0$ и α_m, β_n — четные функции от n), формально перемножая $A(\theta)$ и $B(\theta)$ и пользуясь формулами сложения для косинусов, получаем

$$
(10.12.6)\qquad C(\theta)=\sum c_p\cos p\theta=\frac{1}{2}\gamma_0+\sum^{+}\gamma_p\cos p\theta,
$$

где

$$
c_p=\frac{1}{2}\sum_{m\pm n=p}a_mb_n\,{}^{*)},
$$

$$
(10.12.7)\qquad \gamma_0=2c_0=\sum_{m\pm n=0}a_mb_n,\quad \gamma_p=c_p+c_{-p}=\frac{1}{2}\sum_{m\pm n\pm p=0}a_mb_n\quad (p>0).
$$

Таким образом, γ_0 есть сумма произведений a_mb_n по паре прямых $m\pm n=0$, а γ_p для $p>0$ есть половина суммы таких произведений по четверке прямых $m\pm n\pm p=0$, считая точки пересечения этих прямых всегда дважды.

Правило умножения Фурье получаем, полагая в $A(\theta)$, $B(\theta)$ и $C(\theta)$ $\theta=0$. Таким образом,

$$
(10.12.8)\qquad A=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum^{+}\alpha_m,\quad B=\frac{1}{2}\beta_0+\sum^{+}\beta_n,\quad C=\frac{1}{2}\gamma_0+\sum^{+}\gamma_p,
$$

где

$$
(10.12.9)\qquad \gamma_p=\frac{1}{2}\alpha_0\beta_p+\frac{1}{2}\sum^{+}\alpha_m(\beta_{m-p}+\beta_{m+p})=
$$

$$
=\frac{1}{2}\beta_0\alpha_p+\frac{1}{2}\sum^{+}\beta_n(\alpha_{n-p}+\alpha_{n+p}),
$$

и, в частности,

$$
(10.12.10)\qquad \gamma_0=\frac{1}{2}\alpha_0\beta_0+\sum^{+}\alpha_m\beta_m.
$$

До сих пор мы действовали чисто формально. Какое бы из этих определений перемножения рядов ни принять, c_p или γ_p будут опре-

---

*) Было бы одинаково естественно определить c_p как сумму с $m\pm n=-p$; впрочем, c_p и c_{-p} будут всюду группироваться вместе.

деляться с помощью бесконечного ряда, который может и не сходиться. Так, например, если

$$a_0 = b_0 = 0, \quad a_m = b_m = \frac{(-1)^m}{\sqrt{|m|}} \qquad (m \neq 0),$$

то определение (10.12.3) дает

$$c_p = (-1)^p {\sum}' \frac{1}{\sqrt{|m|}\sqrt{|p-m|}}$$

(где штрих при знаке суммы указывает, что члены с $m=0$ и $m=p$ должны быть опущены), а этот ряд расходится для каждого p.

10.13. Аналоги теорем Коши и Мертенса. Очевидно, теорема Коши о произведении абсолютно сходящихся рядов остается в силе при любом законе умножения, так что в рассмотрении нуждается только аналог теоремы Мертенса. Здесь нам придется различать два случая, в зависимости от характера сходимости второго ряда и принятого в связи с этим закона умножения.

Теорема 191. *Если A абсолютно, а B неограниченно сходится, то произведение Лорана C неограниченно сходится и $C = AB$.*

Прежде всего, поскольку A абсолютно сходится, а b_n ограничены, ясно, что ряд для каждого c_p (абсолютно) сходится. Далее,

$$C_{P,P'} = \sum_{p=-P'}^{P} c_p = \sum_{p=-P'}^{P} \sum_{m+n=p} a_m b_n =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \sum_{n=-P'-m}^{P-m} b_n = \sum a_m \beta_{m,P,P'}.$$

Так как $\beta_{m,P,P'}$ равномерно ограничены, то этот ряд равномерно сходится, и

$$C_{P,P'} \to \sum a_m \lim \beta_{m,P,P'} = B \sum a_m = AB.$$

Теорема становится неверной, если заменить в ее предположении и утверждении „неограниченно" на „ограниченно": предположений не будет достаточно даже для существования c_p. Так, если

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{при } m \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{m^2} & \text{при } m > 0, \end{cases} \qquad b_0 = 0, \quad b_n = -b_{-n} = 2^n \quad (n > 0),$$

то A абсолютно сходится к $\frac{1}{6}\pi^2$ и B ограниченно сходится к 0, но

$$c_0 = -\sum{}^{+} \frac{2^n}{n^2} = -\infty.$$

Соответствующей теоремой для ограниченно сходящихся рядов будет

Теорема 192. *Если A абсолютно, а B — ограниченно сходится, то их произведение Фурье C сходится и $C = AB$.*

В этом случае

$$(10.13.1)\qquad C_P = \sum_{-P}^{P} c_p = \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_{1}^{P} \gamma_p = \frac{1}{2}\sum_{D}\sum a_m b_n,$$

где D — бесконечный крест, определяемый неравенством $|m \pm n| \leqslant P$, причем произведения, соответствующие точкам квадрата $|m| + |n| \leqslant P$, считаются дважды. Положим

$$u_m = \frac{1}{2}\alpha_m, \quad v_n = \frac{1}{2}\beta_n, \quad U = \sum u_m, \quad V = \sum v_n.$$

Тогда U абсолютно, а V неограниченно сходится, так что, по теореме 191, их произведение Лорана $W = \sum w_p$ (неограниченно) сходится и $W = UV$. Но

$$(10.13.2)\qquad W_P = \sum_{-P}^{P} w_p = \sum_{|m+n| \leqslant P}\sum u_m v_n = \frac{1}{4}\sum_{|m+n| \leqslant P}\sum (a_m + a_{-m})(b_n + b_{-n}),$$

и простое рассмотрение показывает, что $C_P = W_P$. Поэтому

$$C_P \to UV = AB.$$

10.14. Дальнейшие теоремы. Для умножения Лорана имеется теорема, соответствующая теореме 175, а именно:

Теорема 193. *Если $a_n = o(1)$ при $|n| \to \infty$, а $\sum |nb_n| < \infty$, то $C_{P,P'} - BA_{P,P'} \to 0$. В частности, если A неограниченно (ограниченно) сходится, то C неограниченно (ограниченно) сходится к AB.*

Верна также аналогичная теорема для умножения Фурье ограниченно сходящихся рядов; мы предоставляем ее читателю.

Аналог теоремы 169 требует более тщательного рассмотрения. Он получает наиболее удовлетворительную формулировку в терминах умножения Фурье.

Теорема 194. *Если $\alpha_m = O\left(\frac{1}{|m|}\right)$, $\beta_n = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$, а A и B ограниченно сходятся, то произведение Фурье этих рядов сходится к AB.*

Прежде всего в силу формулы (10.12.9) γ_p есть сумма двух рядов типа

$$\sum O\left(\frac{1}{|m|+1}\,\frac{1}{|m-p|+1}\right).$$

Они абсолютно сходятся и их суммы при $p\to\infty$ стремятся к нулю.

Далее, в силу формул (10.13.1) и (10.13.2)

$$C_P=\frac{1}{4}\sum_{|m+n|\leqslant P}\sum \alpha_m\beta_n=\frac{1}{4}(T_1+T_2+T_3),$$

где T_1, T_2 и T_3 распространяются на области D_1, D_2, D_3, определяемые соответственно условиями

$$|m|+|n|\leqslant P;$$

$$|m+n|\leqslant P,\quad m-n>P;$$

$$|m+n|\leqslant P,\quad m-n<-P.$$

Но

$$\frac{1}{4}T_1=\sum_{D_1^+}\sum \alpha_m\beta_n,$$

где D_1^+ есть положительная четверть квадрата D_1, причем члены, лежащие на осях, умножаются на $\frac{1}{2}$, а член $\alpha_0\beta_0$ — на $\frac{1}{4}$. Эта сумма есть частичная сумма произведения Коши рядов $\frac{1}{2}\alpha_0+\sum^+\alpha_m$ и $\frac{1}{2}\beta_0+\sum^+\beta_n$, и, значит, в силу теоремы 169 $\frac{1}{4}T_1\to AB$. Поэтому достаточно доказать, что T_2 и T_3 стремятся к нулю.

Рассмотрим T_2. Имеем

$$T_2=\sum_{m=1}^{P}\alpha_m\sum_{n=-P-m}^{m-P-1}\beta_n+\sum_{m=P+1}^{\infty}\alpha_m\sum_{n=-P-m}^{P-m}\beta_n=$$

$$=\sum_{m=1}^{P}\alpha_m\sum_{n=P-m+1}^{P+m}\beta_n+\sum_{m=P+1}^{\infty}\alpha_m\sum_{n=m-P}^{m+P}\beta_n=V_1+V_2.$$

Здесь

$$V_1=\left(\sum_{m=1}^{\delta P}+\sum_{\delta P}^{P-\eta}+\sum_{P-\eta}^{P}\right)\alpha_m\sum_{n=P-m+1}^{P+m}\beta_n=V_1^{(1)}+V_1^{(2)}+V_1^{(3)},$$

где $0<\delta<\frac{1}{2}$ и η взято столь большим, что

$$\left|\sum_{n_1}^{n_2}\beta_n\right|<\zeta$$

для $n_2 > n_1 \geqslant \eta$; мы предположим также, что δP и η нецелые, причем $\delta P < P - \eta$. Тогда

$$V_1^{(1)} = O\left(\sum_{m=1}^{\delta P} \frac{1}{m+1} \sum_{n=P-m+1}^{P+m} \frac{1}{n+1}\right) = O\left(\sum_{m=1}^{\delta P} \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{P}\right) = O(\delta)$$

$$V_1^{(2)} = O\left(\sum_{\delta P}^{P-\eta} \frac{\zeta}{m+1}\right) = O\left(\zeta \log \frac{1}{\delta}\right)$$

равномерно относительно P, а

$$V_1^{(3)} = O\left(\sum_{P-\eta}^{P} \frac{1}{m+1}\right) = O\left(\frac{\eta}{P}\right).$$

Надлежащим выбором чисел δ, ζ и η можно сделать $V_1^{(1)}$ и $V_1^{(2)}$ сколь угодно малыми; а при фиксированных δ, ζ и η, $V_1^{(3)} \to 0$. Следовательно, $V_1 \to 0$.

С V_2 поступаем аналогичным образом. Пишем

$$V_2 = \left(\sum_{m=P+1}^{P+\eta} + \sum_{P+\eta}^{\Delta P} + \sum_{\Delta P}^{\infty}\right) \alpha_m \sum_{n=m-P}^{m+P} \beta_n = V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + V_2^{(3)},$$

где $\Delta > 2$. Здесь

$$V_2^{(3)} = O\left(\sum_{\Delta P}^{\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=m-P}^{m+P} \frac{1}{n+1}\right) = O\left(P \sum_{\Delta P}^{\infty} \frac{1}{m^2}\right) = O\left(\frac{1}{\Delta}\right),$$

равномерно относительно P, а для $V_2^{(1)}$ и $V_2^{(2)}$ верно полученное выше соответственно, для $V_1^{(3)}$ и $V_1^{(2)}$. Следовательно, $V_2 \to 0$, чем доказательство и завершается.

После § 10.12 ясно, что и для произведений Лорана имеется соответствующая теорема; а именно: *если* $a_m = O\left(\frac{1}{|m|}\right)$, $b_n = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$, *а* A *и* B *неограниченно сходятся, то произведение Лорана* C *этих рядов ограниченно сходится к* AB. Это утверждение станет неверным, если „неограниченно" или „ограниченно" поместить одновременно и в предположении и в заключении. Так, если

$$a_m = \frac{1}{(m+2)^{1-ic}\{\log(m+2)\}^{\rho}}, \quad b_n = \frac{1}{(2-n)^{1+ic}\{\log(2-n)\}^{\rho}},$$

где $c > 0$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$, при $m \geqslant 0$ и $n \leqslant 0$, и $a_m = b_n = 0$ при $m < 0$ и $n > 0$, то предположения выполняются с „неограниченно", но $|C_{P,0}| > H(\log P)^{1-2\rho}$, так что C не будет неограниченно сходящимся. Если же $a_0 = b_0 = 0$ и $a_m = b_m = \frac{1}{m}$ для $m \neq 0$, то предположения выполнены для „ограниченно" и $A=B=0$; однако $c_0=-\frac{1}{3}\pi^2$ и $c_p=c_{-p}=-\frac{2}{p^2}$ для $p\neq 0$, так что C сходится (абсолютно) к $-\pi^2\neq AB$.

Имеется также теорема, аналогичная теореме 173; а именно

Теорема 195. *Если A и B ограниченно сходятся и*

$$p>1,\quad q>1,\quad \sum |m|^{p-1}|a_m|^p<\infty,\quad \sum |n|^{q-1}|b_n|^q<\infty,$$

то произведение Фурье C сходится к AB.

Доказательство предоставляем читателю.

10.15. Аналог теоремы Абеля. Естественно задаться вопросом, имеется ли аналог абелевой теоремы 162, т. е.

(1) будет ли из неограниченной сходимости рядов A, B и их произведения Лорана C необходимо следовать, что $C=AB$ *);

(2) будет ли из ограниченной сходимости рядов A, B и сходимости их произведения Фурье C следовать, что $C=AB$.

Однако С. М. Эдмондс построила пример, показывающий, что оба вопроса решаются отрицательно **). В этом примере

$$a_m=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi\sqrt{m}}{m^{\frac{3}{4}}} & \text{при } m>0,\\ 0 & \text{при } m\leqslant 0,\end{cases}\qquad b_n=a_{-n},$$

так что $A=B=\sum^{+}\dfrac{\sin\pi\sqrt{m}}{m^{\frac{3}{4}}}$; произведение Лорана сходится к A^2+2, а произведение Фурье — к A^2+1.

Никаких действительно простых аналогов теоремы Чезаро, даже для $r=s=0$, не существует.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ X

§ 10.2. Теорему 160 впервые явно сформулировал и удовлетворительно доказал Коши, l. c. в примечании к § 1.1, 147.

Теорему 161 доказал Мертенс, *JM*, 79 (1875), 182—184. Замечание отрицательного характера, следующее за доказательством, принадлежит Шуру (l. c. в примечании к § 3.2). Я провел доказательство способом, подсказанным мне С. М. Эдмондс, и по аналогичному плану построил доказательства теорем 167, 190 и 191.

Теорема 162 содержится в мемуаре Абеля о биномиальном ряде, *JM*, 1 (1826), 311—339 (317—318) [(*Oeuvres* (1), изд. 2 (1881), 219—250 (226)].

*) Второй пример § 10.14 показывает, что когда A и B только ограниченно сходятся, то их произведение Лорана C может сходиться, и даже абсолютно, к сумме, отличной от AB.

**) Она рассматривала только произведения Лорана; однако утверждение относительно произведений Фурье вытекает отсюда как простое следствие.

§ 10.3. Cesàro, *BSM* (2), **14** (1890), 114—120, доказал теорему 164 для целых r и s. На остальные значения r и s эту теорему распространили независимо друг от друга Кнопп и Чэпмен (l. c. в примечании к § 5.5).

Теорему 167 доказали, для целых r, Hardy and Littlewood, *PLMS* (2), **11** (1912), 411—478 (теорема 35), и для общих r Hardy and Riesz, 65 (где она распространена на умножение Дирихле). Теорема для целых r содержится в более общей теореме, несколько раньше опубликованной Fekete, *MTE*, **29** (1911), 719—726, и утверждающей, что если r и s целые, A абсолютно суммируем (C, r) и B суммируем (C, s), то C суммируем $(C, r+s)$. В свою очередь, эту теорему распространил на общие r и s Kogbetliantz, *BSM* (2), **49** (1925), 234—256; см. также Winn, *PEMS* (2), **3** (1933), 173—178. По поводу понятия абсолютной суммируемости см. примечание к §§ 6.5—6.6.

§ 10.4. Теорема 169 была впервые доказана Hardy, *PLMS* (2), **6** (1908), 410—423; с тех пор она обобщалась и ее доказательство упрощалось рядом авторов.

Автором теоремы 170 является Neder, там же, **23** (1923), 172—184 (только у Недера было $\eta = \zeta = \frac{1}{2}x$). Изложенное здесь доказательство следует Hardy, *PCPS*, **40** (1944), 251—252. Вспомогательные теоремы, а также обобщения в различных направлениях можно найти в следующих работах:

Hardy, *PLMS* (2), **10** (1912), 396—405, и *JLMS*, **2** (1927), 169—171;
Rosenblatt, *BAP* (1913), 603—631, и *DMV*, **23** (1914), 80—84;
Landau, *DMV*, **29** (1920), 238;
Broderick, *PLMS* (2), **19** (1921), 57—74, и **22** (1923), 468—482.

Некоторые из обобщений, содержащихся в этих работах, относятся к умножению Дирихле (§ 10.11).

В первой из указанных двух работ Розенблат доказывает, что если A суммируем (C, r) и B суммируем (C, s), где $r > 0$, $s > 0$, и

$$A_m^{r-1} = O(m^{r-1}), \quad B_n^{s-1} = O(n^{s-1}),$$

то C суммируем $(C, r+s)$. Это утверждение при $r = s = 0$ приводится к утверждению теоремы 169, причем A_m^{-1} и B_n^{-1} нужно истолковывать как a_m и b_n. Однако это (как подсказывается доказательством теоремы 169 в нашем тексте) не есть еще наилучший результат. Действительно, A, будучи ограниченным $(C, r-1)$ и суммируемым (C, r), по теореме 70 суммируем $(C, r-1+\delta)$, и аналогично B суммируем $(C, s-1+\delta)$. Следовательно, в силу теоремы 164 C суммируем $(C, r+s-1+2\delta)$, т. е. во всяком случае чезаровскими средними любого порядка, большего чем $r+s-1$.

Харди и Литтльвуд, l. c. в примечании к § 10.3 (464—466), показали, что для любых чисел α и β, меньших чем 1, существуют сходящиеся ряды A и B с $a_m = O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right)$ и $b_n = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, произведение которых расходится.

§ 10.5. Теорему 173 (с обобщением на умножение Дирихле) доказали Hardy and Littlewood, *MM*, **43** (1914), 134—147 (137).

§ 10.6. Pringsheim, *MA*, **21** (1883), 327—378 (360—371). Изложенное здесь доказательство, более простое, чем прингсгеймовское, предложил Харди в первой из работ, упомянутых в примечании к § 10.4. См. также Bromwich, 94—95.

§ 10.7. Теоремы этого рода впервые рассматривал Rajchmann, *Comptes rendus Soc. Sc. de Varsovie*, **11** (1918), 115—152; см. Zygmund, *MZ*, **24** (1926), 47—104 (особенно 48—65). Мы усилили условия. Райхман и Зигмунд рассматривают ряды, бесконечные в обоих направлениях; см. § 10.14.

§ 10.8. Bohr, Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger (1908), 213—232, доказал теоремы 178, 179 и 180, а также случай $r = s = 0$ теоремы 181. Чэпмен, l. c. в примечании к § 5.5, доказал теорему 181 в общем виде.

§ 10.9. Knopp, *MZ*, **18** (1923), 125—156 (130—131), доказывает теорему, которая в соединении с его теоремами, приведенными в § 8.3, дает содержание рассматриваемых здесь теорем.

§ 10.10. Borel, 131—135, доказывает, что произведение двух рядов, абсолютно суммируемых в его смысле (т. е. регулярно суммируемых по терминологии, принятой нами в § 8.6), абсолютно суммируемо. Hardy, *QJM*, **35** (1903), 22—66, доказывает теорему 189 и часть теоремы 188, а именно, что C суммируем, если A абсолютно суммируем в смысле Бореля.

Автором теоремы 187, по существу, является Doetsch, Dissertation, Гёттинген, 1920. Дэтш работает в терминах „экспоненциального" определения, говоря, что A суммируем (B, k), если $e^{-x}A(x) \to A$ (C, k), и доказывает, что из $\sum a_m = A$ (B, r) и $\sum b_n = B$ (B, s) следует $\sum c_p = AB$ (B, $r+s+1$). В частности, суммируемость (B) рядов A и B влечет суммируемость (B, 1) произведения C. Легко доказать, что утверждения

$$a_0 + a_1 + \ldots = A \ (\mathrm{B},\ 1) \text{ и } a_1 + a_2 + \ldots = A - a_0 \ (\mathrm{B}';\ \mathrm{C},\ 1)$$

равносильны, и вывести отсюда, что теорема 187 равносильна случаю $r = s = 0$ Дэтша.

Sannia, *RP*, **42** (1917), 303—322, обобщает эти определения в различных направлениях; но его заключения об умножении рядов не верны.

§ 10.11. Автором теоремы 190 является Stieltjes, *NA* (3), **6** (1887), 210—215. Много примеров применения этой теоремы можно найти у Landau, Handbuch, 673 и след.; см. также Ramanujan, *TCPS*, **22** (1918), 259—276 (Collected papers, no. 21).

Более полные сведения об умножении Дирихле можно найти в книге Hardy and Riesz, гл. 8; Landau, *RP*, **24** (1907), 81—160, и Handbuch, 750—767; а также в работах, указанных в примечании к § 10.4.

Особенно замечательна теорема, что если $\lambda_m = \log m$, $\mu_n = \log n$, $\nu_p = \log p$, то сходимость рядов A и B влечет сходимость ряда $\sum \frac{c_p}{\sqrt{p}}$. Ее формулировал без доказательства Стилтьес и доказал Ландау, l. c. выше. Landau, *RP*, **26** (1908), 169—302 (265—266) доказал, что ряд $\sum \frac{c_p}{p^s}$ не обязан сходиться для всех положительных s, а Bohr, *WS*, **119** (1910), 1391—1397, — что показатель $s = \frac{1}{2}$ нельзя заменить никаким меньшим числом.

§§ 10.12—10.13. Вопрос об умножении рядов, бесконечных в обоих направлениях, впервые рассматривал Chapman, *QJM*, **44** (1913), 219—233 (для умножения Лорана). Он доказывает теорему 191.

§ 10.14. Первыми теоремами типа теоремы 193 были теоремы Райхмана и Зигмунда: см. примечание к § 10.7. Остальные теоремы этого параграфа упоминаются у С. М. Эдмондс, l. c. ниже, но до этого нигде не публиковались.

§ 10.15. S. M. Edmonds, *JLMS*, **17** (1942), 65—70.

Глава XI

ХАУСДОРФОВСКИЕ СРЕДНИЕ

11.1. Преобразование δ. В этой главе мы будем рассматривать класс преобразований, охватывающий ряд преобразований, изученных в прежних главах, и, в частности, преобразования Чезаро, Гёльдера и Эйлера. Теория этих преобразований будет опираться на свойства специального преобразования

$$t_m = \Delta^m s_0 = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} s_n, \tag{11.1.1}$$

или, в символической записи,

$$t = \delta s. \tag{11.1.2}$$

Матрицу этого преобразования

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{11.1.3}$$

мы будем обозначать через $|\delta|$.

Теорема 196. *δ обратно самому себе: если $t = \delta s$, то $s = \delta t$.*

Таким образом, $\delta\delta = \mathrm{I}$, где I — тождественное преобразование $t_m = s_m$.

Действительно, если t_m определено формулой (11.1.1), то, принимая во внимание, что

$$\binom{m}{n}\binom{n}{p} = \binom{m}{p}\binom{m-p}{n-p} \quad (0 \leqslant p \leqslant n \leqslant m),$$

имеем

$$\Delta^m t_0 = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} t_n = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \binom{m}{n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} s_p =$$
$$= \sum_{p=0}^{m} (-1)^p s_p \sum_{n=p}^{m} (-1)^n \binom{m}{n}\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \binom{m}{p} s_p \sum_{n=p}^{m} (-1)^n \binom{m-p}{n-p} =$$
$$= \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} s_p \sum_{q=0}^{m-p} (-1)^q \binom{m-p}{q} = s_m,$$

поскольку внутренняя сумма в последней строке равна 1 при $p=m$ и 0 при $p \neq m$ *).

Из формул § 1.3 (4) **) вытекает, что если

$$x=-\frac{y}{1-y}, \quad y=-\frac{x}{1-x}, \quad s(x)=\sum s_n x^n, \quad t(x)=\sum t_n x^n,$$

то

$$(1-x)\,s(x)=t(y).$$

Как показывает теорема 196, отсюда следует, что (как можно проверить и непосредственно) $(1-x)\,t(x)=s(y)$. Мы видели в § 9.6 также, что если

$$S(x)=\sum \frac{s_n x^n}{n!}, \quad T(x)=\sum \frac{t_n x^n}{n!},$$

то $e^{-x} S(x)=T(-x)$; а тогда теорема 196 показывает, что это равносильно тождеству $e^{-x} T(x)=S(-x)$ (которое снова можно непосредственно проверить).

11.2. Выражение преобразований (E, q) и (C, 1) через δ. (E, q)-средние от s_n были определены формулой

$$t_m=\frac{1}{(q+1)^m}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n} q^{m-n} s_n,$$

а согласно формуле (8.3.5)

$$\Delta^n t_0=\frac{\Delta^n s_0}{(q+1)^n}.$$

Поэтому, полагая $\Delta^n s_0=u_n$, $\Delta^n t_0=v_n$ и обозначая диагональное преобразование $t'_m=\mu_m s_m$ через μ, будем иметь $t=\delta v$, $v=\mu u$, $u=\delta s$ и, следовательно,

(11.2.1) $$t=\lambda s,$$

где

(11.2.2) $$\lambda=\delta\mu\delta,$$

(11.2.3) $$\mu_n=\frac{1}{(q+1)^n}.$$

Пусть теперь t_m есть (C, 1)-среднее от s_n, так что

$$t_m=\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} s_n.$$

---

*) Символически: $t_n=(1-E)^n s_0$, $\Delta^m t_0=\{1-(1-E)\}^m s_0=E^m s_0=s_m$.

**) Если в них переменить знак у x и заменить a_n и b_n соответственно на $(-1)^n s_n$ и t_n.

Тогда

$$\Delta^n t_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} s_l = \sum_{l=0}^{n} \varphi_l s_l,$$

где

$$\varphi_l = \sum_{k=l}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}.$$

Но эта сумма, расположенная от $l=n$ в обратном порядке, равна

$$\frac{(-1)^n}{n+1}\left\{1-\binom{n}{1}\frac{n+1}{n}+\binom{n}{2}\frac{n+1}{n-1}-\ldots\right\}=$$
$$=\frac{(-1)^n}{n+1}\left\{1-\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}-\ldots\right\},$$

где ряд справа обрывается на $(n-l+1)$-м члене. Поэтому

$$\varphi_l = \frac{(-1)^l}{n+1}\binom{n}{l} \text{*)}.$$

Таким образом,

$$\Delta^n t_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} s_l = \frac{1}{n+1} \Delta^n s_0,$$

и мы снова видим, что рассматриваемое преобразование может быть представлено в виде (11.2.2), где, однако, теперь

(11.2.4) $$\mu_n = \frac{1}{n+1}.$$

11.3. Общее хаусдорфовское преобразование. Мы будем называть преобразование

(11.3.1) $$t = (\delta\mu\delta)s = \lambda s,$$

где μ — произвольное диагональное преобразование, хаусдорфовским или $\mathfrak{H}$-преобразованием, а его матрицу — $\mathfrak{H}$-матрицей. Таким образом, преобразования (E, q) и (C, 1) являются $\mathfrak{H}$-преобразованиями. $\mathfrak{H}$ или ($\mathfrak{H}$, μ) будет в дальнейшем обозначать преобразование, а $|\mathfrak{H}|$ или $|\mathfrak{H}, \mu|$ — его матрицу.

Если $\mathfrak{H} = \delta\mu\delta$ и $\mathfrak{H}' = \delta\mu'\delta$, то

$$\mathfrak{H}\mathfrak{H}' = \delta\mu\delta\delta\mu'\delta = \delta\mu\mu'\delta = \delta\mu'\mu\delta = \mathfrak{H}'\mathfrak{H}.$$

*) Сумма первых p коэффициентов в разложении для $(1-x)^{n+1}$ равна p-му коэффициенту в разложении для $(1-x)^n$.

Итак:

Теорема 197. *Любые два $\mathfrak{H}$-преобразования перестановочны.*

Обратно, пусть $\gamma=\delta\mu\delta$—какое-нибудь заданное $\mathfrak{H}$-преобразование, у которого все числа μ_n различны, и λ — любое преобразование, перестановочное с γ. Если $\omega=\delta\lambda\delta$, то $\lambda=\delta\omega\delta$. Точно так же и $\mu=\delta\gamma\delta$. Поэтому

$$\omega\mu=\delta\lambda\delta\,\delta\gamma\delta=\delta\lambda\gamma\delta,\quad \mu\omega=\delta\gamma\delta\,\delta\lambda\delta=\delta\gamma\lambda\delta;$$

и так как, по предположению $\lambda\gamma=\gamma\lambda$, то

$$\omega\mu=\mu\omega. \tag{11.3.2}$$

Пусть теперь преобразование ω имеет вид

$$t_m=\sum c_{m,n}s_n.$$

Тогда из (11.3.2) следует, что

$$\sum c_{m,n}\mu_n s_n=\mu_m\sum c_{m,n}s_n$$

при любом выборе чисел s_n; а так как $\mu_m\neq\mu_n$ при $m\neq n$, то это означает, что $c_{m,n}=0$ при $m\neq n$. Таким образом, ω есть диагональное преобразование, и, значит, $\lambda=\delta\omega\delta$ есть $\mathfrak{H}$-преобразование.

Преобразование (C, 1) удовлетворяет условиям, наложенным на γ. Отсюда

Теорема 198. *Класс $\mathfrak{H}$-преобразований совпадает с классом всех преобразований, перестановочных с преобразованием* (C, 1) (*или любым другим $\mathfrak{H}$-преобразованием, у которого все μ_n различны*).

Коэффициенты любого $\mathfrak{H}$-преобразования легко выражаются через его числа μ_n. Действительно, полагая, как в § 11.2, $\Delta^n s_0=u_n$, $\Delta^n t_0=v_n$, имеем $t=\delta v$, т. е.

$$t_m=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\Delta^n t_0=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\mu_n\Delta^n s_0=$$
$$=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\mu_n\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}s_p=\sum_{p=0}^{m}\varphi_{m,p}s_p,$$

где

$$\varphi_{m,p}=(-1)^p\sum_{n=p}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\binom{n}{p}\mu_n=(-1)^p\binom{m}{p}\sum_{n=p}^{m}(-1)^n\binom{m-p}{n-p}\mu_n=$$
$$=\binom{m}{p}\sum_{k=0}^{m-p}(-1)^k\binom{m-p}{k}\mu_{p+k}=\binom{m}{p}\Delta^{m-p}\mu_p.$$

Таким образом, заменяя n на $-p$, получаем

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \Delta^{m-n}\mu_n \cdot s_n.$$

Итак:

Теорема 199. *Общее $\mathfrak{H}$-преобразование есть преобразование вида*

(11.3.3) $$t_m = \sum \lambda_{m,n} s_n,$$

где

(11.3.4) $$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \binom{m}{n} \Delta^{m-n}\mu_n & \text{при } n \leqslant m, \\ 0 & \text{при } n > m. \end{cases}$$

Мы будем пользоваться дальше обозначением

(11.3.5) $$\mu_{n,p} = \Delta^p \mu_n;$$

таким образом,

(11.3.6) $$\lambda_{m,n} = \binom{m}{n} \mu_{n,m-n} \qquad (0 \leqslant n \leqslant m).$$

11.4. Общие гёльдеровские и чезаровские преобразования, как $\mathfrak{H}$-преобразования. Будем обозначать преобразования (H, k) и (C, k), как в § 5.9, через $H^{(k)}$ и $C^{(k)}$, причем вместо $H^{(1)}$ и $C^{(1)}$ будем писать H и C; пока что $H^{(k)}$ определено только для $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем $H^{(k)} = H^k$, т. е. $H^{(k)}$ есть результат k-кратного применения преобразования H.

Если $\lambda = \delta\mu\delta$ и $\lambda' = \delta\mu'\delta$, то

$$\lambda\lambda' = \delta\mu\delta\delta\mu'\delta = \delta\mu\mu'\delta;$$

это показывает, что $H^{(k)}$ есть $\mathfrak{H}$-преобразование, для которого

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)^k}.$$

С другой стороны, вовсе не очевидно, что $C^{(k)}$ есть $\mathfrak{H}$-преобразование даже для целого k. Покажем, что это, тем не менеее, так, и найдем соответствующие μ_n.

Действительно, в этом случае

$$t_m = \frac{1}{\binom{m+k}{k}} \sum_{n=0}^{m} \binom{m-n+k-1}{k-1} s_n$$

и

$$\Delta^n t_0 = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} t_p =$$

$$= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{1}{\binom{p+k}{k}} \binom{n}{p} \sum_{q=0}^{p} \binom{p-q+k-1}{k-1} s_q = \sum_{q=0}^{n} \varphi_{n,q} s_q,$$

где

$$\varphi_{n,q} = \sum_{p=q}^{n} (-1)^p \frac{1}{\binom{p+k}{k}} \binom{n}{p} \binom{p-q+k-1}{k-1} =$$

$$= k\Gamma(n+1) \sum_{p=q}^{n} (-1)^p \frac{\Gamma(p-q+k)}{\Gamma(n-p+1)\Gamma(p-q+1)\Gamma(p+k+1)} =$$

$$= (-1)^n k\Gamma(n+1) \frac{\Gamma(n-q+k)}{\Gamma(n-q+1)\Gamma(n+k+1)} \left\{1 - \frac{(n-q)(n+k)}{1\cdot(n-q+k-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-q)(n-q-1)(n+k)(n+k-1)}{1\cdot 2(n-q+k-1)(n-q+k-2)} - \ldots \right\} =$$

$$= (-1)^n k\Gamma(n+1) \frac{\Gamma(n-q+k)}{\Gamma(n-q+1)\Gamma(n+k+1)} \frac{\Gamma(-n+q-k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(-k+1)\Gamma(q+1)} =$$

$$= (-1)^q \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \binom{n}{q}^{*)}.$$

Поэтому

$$\Delta^n t_0 = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \binom{n}{q} s_q = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \Delta^n s_0 \,^{**)},$$

т. е. рассматриваемое преобразование есть $\mathfrak{H}$-преобразование с

$$\mu_n = \frac{1}{\binom{n+k}{k}}.$$

Итак:

Теорема 200. *Преобразования* $\mathrm{H}^{(k)}$ *и* $\mathrm{C}^{(k)}$ *являются* $\mathfrak{H}$-*преобразованиями соответственно с*

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)^k}, \qquad \mu_n = \frac{1}{\binom{n+k}{k}}. \tag{11.4.1}$$

---

*) В силу формулы Гаусса для суммы гипергеометрического ряда $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ и тождества $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi \operatorname{cosec} \pi x$. При этих вычислениях удобно предполагать k нецелым.

**) Это — формула (9.6.9); но данное там доказательство было не столь непосредственным.

Теорема 200 доказана для всех k, для которых были определены гёльдеровские и чезаровские средние, т. е. для $k=0, 1, 2, \ldots$ в первом случае и $k>-1$ во втором. Она естественно подсказывает определение $H^{(k)}$ для нецелых k, как $\mathfrak{H}$-преобразования с $\mu_n = \frac{1}{(n+1)^k}$. Мы увидим позже (§ 11.11), что рассматриваемые две системы средних будут тогда равносильны для всех $k>-1$.

11.5. Условия регулярности вещественных хаусдорфовских преобразований. Для регулярности преобразования

$$t_m = \sum c_{m,n} s_n \tag{11.5.1}$$

согласно теореме 2 необходимо и достаточно, (1) чтобы

$$\gamma_m = \sum_n |c_{m,n}| < K, \tag{11.5.2}$$

где K не зависит от m; (2) чтобы

$$c_{m,n} \to 0 \tag{11.5.3}$$

при $m \to \infty$ для каждого n и (3) чтобы

$$c_m = \sum_n c_{m,n} \to 1 \tag{11.5.4}$$

при $m \to \infty$. Нам нужно теперь перевести эти условия для $\mathfrak{H}$-преобразования на язык чисел μ_n. Мы будем предполагать μ_n вещественными.

Если $s_n = 1$ для всех n, то $u_n = \Delta^n s_0$ и $v_n = \mu_n u_n$ равны соответственно 1 и μ_0 для $n=0$ и 0 для $n>0$, так что $t_n = \Delta^n v_0 = \mu_0$ для всех n. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \mu_{n,m-n} = \mu_0 \tag{11.5.5}$$

(что, конечно, можно проверить и непосредственно)*), и (11.5.4) приводится к

$$\mu_0 = 1. \tag{11.5.6}$$

*) Например:

$$\sum \binom{m}{n} \Delta^{m-n}\mu_n = \sum \binom{m}{n} \Delta^{m-n} E^n \mu_0 = (\Delta + E)^m \mu_0 = \mu_0.$$

Таким образом, условия (11.5.2), (11.5.3) и (11.5.4) сводятся к следующим:

(11.5.7) $$M_m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} |\mu_{n,m-n}| < K,$$

(11.5.8) $$\binom{m}{n} \mu_{n,m-n} \to 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

(11.5.9) $$\mu_0 = 1.$$

Перейдем теперь к выяснению смысла условия (11.5.7). Мы покажем, что при его выполнении условию (11.5.8) можно придать более простой вид.

11.6. Абсолютно монотонные последовательности. В этом и последующих параграфах мы будем рассматривать только вещественные последовательности. Последовательность (φ_n) будем называть *абсолютно монотонной* *), если

(11.6.1) $$\Delta^p \varphi_n \geqslant 0$$

для $n = 0, 1, \ldots$ и $p = 0, 1, \ldots$ Так,

$$\Delta^p \frac{1}{n+1} = \frac{p!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)} > 0,$$

и, значит, числа μ_n, соответствующие преобразованию (C, 1), образуют абсолютно монотонную последовательность. Если μ_n — абсолютно монотонная последовательность, то $\mu_{n,m-n} = \Delta^{m-n}\mu_n \geqslant 0$, и в силу равенства (11.5.5)

(11.6.2) $$M_m = \sum \binom{m}{n} \mu_{n,m-n} = \mu_0,$$

так что условие (11.5.7) заведомо выполнено. Аналогия с теорией функций или последовательностей с ограниченным изменением (которая окажется более тесной, чем представляется на первый взгляд) подсказывает тогда, что должна быть справедлива

Теорема 201. *Для того чтобы вещественная последовательность* μ_n *удовлетворяла условию* (11.5.7), *необходимо и достаточно, чтобы*

(11.6.3) $$\mu_n = \alpha_n - \beta_n,$$

где α_n *и* β_n *— абсолютно монотонные последовательности.*

Из сказанного выше очевидно, что условие достаточно. Таким образом, остается доказать его необходимость.

---

*) Быть может, точнее было бы говорить „абсолютно убывающей". Последовательность же вроде $(\varphi_n) = (e^n)$, для которой $\Delta^p\varphi_n$ имеет знак $(-1)^p$, можно было бы назвать „абсолютно возрастающей".

Будем писать ($Eu_n = u_{n+1}$) и

$$E_1 u_{n,p} = u_{n+1,p}, \quad E_2 u_{n,p} = u_{n,p+1}.$$

Тогда

$$\mu_{n,p} = \Delta^p \mu_n = (E + \Delta)\,\Delta^p \mu_n = \Delta^p \mu_{n+1} + \Delta^{p+1}\mu_n = \\ = \mu_{n+1,p} + \mu_{n,p+1} = (E_1 + E_2)\,\mu_{n,p} \tag{11.6.4}$$

и

$$|\mu_{n,p}| \leqslant |\mu_{n+1,p}| + |\mu_{n,p+1}| = (E_1 + E_2)\,|\mu_{n,p}|. \tag{11.6.5}$$

Полагая

$$\mu_{n,p,m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \mu_{n+r,p+m-r}, \quad \mu^*_{n,p,m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} |\mu_{n+r,p+m-r}| \tag{11.6.6}$$

и принимая во внимание (11.6.4) и (11.6.5), имеем

$$\mu_{n,p,m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} E_1^r E_2^{m-r}\,\mu_{n,p} = (E_1 + E_2)^m \mu_{n,p} = \mu_{n,p}, \tag{11.6.7}$$

$$\mu^*_{n,p,m} = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} E_1^r E_2^{m-r}\,|\mu_{n,p}| = (E_1 + E_2)^m\,|\mu_{n,p}| \geqslant |\mu_{n,p}|. \tag{11.6.8}$$

Далее, в силу условия (11.5.7)

$$\mu^*_{0,0,m} = M_m < K. \tag{11.6.9}$$

Но в силу (11.6.5)

$$\mu^*_{n,p,m} = (E_1 + E_2)^m\,|\mu_{n,p}| \leqslant (E_1 + E_2)^{m+1}\,|\mu_{n,p}| = \mu^*_{n,p,m+1},$$

так что $\mu^*_{n,p,m}$ возрастает вместе с m. Далее,

$$\mu^*_{n,p,m} = (E_1 + E_2)^m\,|\mu_{n,p}| = (E_1 + E_2)^m E_1^n E_2^p\,|\mu_{0,0}| \leqslant \\ \leqslant \binom{n+p}{p} (E_1 + E_2)^m E_1^n E_2^p\,|\mu_{0,0}| \leqslant \\ \leqslant (E_1 + E_2)^m \sum_{r=0}^{n+p} \binom{n+p}{r} E_1^{n+p-r} E_2^r\,|\mu_{0,0}| = \\ = (E_1 + E_2)^m (E_1 + E_2)^{n+p}\,|\mu_{0,0}| = (E_1 + E_2)^{n+p+m}\,|\mu_{0,0}| = \\ = \mu^*_{0,0,n+p+m} = M_{n+p+m} < K$$

в силу условия (11.5.7). Следовательно, $\mu^*_{n,p,m}$ при $m \to \infty$ стремится к пределу

$$\mu^*_{n,p,m} \to \lim_{m \to \infty} \mu^*_{n,p,m} = \mu^*_{n,p}. \tag{11.6.10}$$

Но согласно (11.6.7) и (11.6.8) $|\mu_{n,p}| = |\mu_{n,p,m}| \leqslant \mu^*_{n,p,m}$; следовательно,

$$\mu_{n,p} \leqslant \mu^*_{n,p} \tag{11.6.11}$$

В частности,

$$|\mu_n| = |\mu_{n,0}| \leqslant \mu^*_{n,0} = \mu^*_n. \tag{11.6.12}$$

Далее, согласно (11.6.8)

$$\mu^*_{n,p,m+1} = (E_1 + E_2)^{m+1} |\mu_{n,p}| = (E_1 + E_2)\, \mu^*_{n,p,m},$$

и, значит,

$$\mu^*_{n,p+1,m} = \mu^*_{n,p,m+1} - \mu^*_{n+1,p,m}.$$

Отсюда в пределе при $m \to \infty$

$$\mu^*_{n,p+1} = \mu^*_{n,p} - \mu^*_{n+1,p} = \Delta\mu^*_{n,p},$$

и, значит, $\mu^*_{n,p} = \Delta^p \mu^*_{n,0} = \Delta^p \mu^*_n$. Таким образом,

$$|\Delta^p \mu_n| = |\mu_{n,p}| \leqslant \mu^*_{n,p} = \Delta^p \mu^*_n.$$

Окончательно, полагая

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(\mu^*_n + \mu_n), \quad \beta_n = \frac{1}{2}(\mu^*_n - \mu_n),$$

имеем

$$\mu_n = \alpha_n - \beta_n, \quad \Delta^p \alpha_n \geqslant 0, \quad \Delta^p \beta_n \geqslant 0,$$

и теорема доказана.

11.7. Окончательный вид условий регулярности. Примем теперь, что условие (11.5.7) выполнено, и используем его для упрощения условия (11.5.8). Мы докажем, что при $n > 0$ (11.5.7) влечет (11.5.8). Если же $n = 0$, то (11.5.8) принимает вид

$$\Delta^m \mu_0 \to 0; \tag{11.7.1}$$

и это соотношение, не вытекающее из (11.5.7), следует сохранить в качестве отдельного условия.

Как мы видели, последовательность, удовлетворяющая условию (11.5.7), есть разность двух абсолютно монотонных последовательностей. Поэтому достаточно доказать, что

$$\lambda_{m,n} = \binom{m}{n} \mu_{n,m-n} \to 0, \tag{11.7.2}$$

когда $n > 0$ и (μ_n) абсолютно монотонна (так что $\lambda_{m,n} \geqslant 0$). Из (11.3.5) и (11.3.6) следует, что

$$\mu_{n,m-n} = \mu_{n,m-n+1} + \mu_{n+1,m-n},$$

$$(m+1)\lambda_{m,n} = (m-n+1)\lambda_{m+1,n} + (n+1)\lambda_{m+1,n+1},$$

или

$$(m+1)(\lambda_{m,n}-\lambda_{m+1,n})=(n+1)\lambda_{m+1,n+1}-n\lambda_{m+1,n}.$$

Суммируя по n и полагая

$$\Lambda_{m,n}=\lambda_{m,0}+\lambda_{m,1}+\ldots+\lambda_{m,n},$$

получаем

$$(11.7.3)\qquad (m+1)(\Lambda_{m,n}-\Lambda_{m+1,n})=(n+1)\lambda_{m+1,n+1}\geqslant 0.$$

Следовательно, $\Lambda_{m,n}$ при возрастании m убывает и при $m\to\infty$ стремится к пределу. Поэтому и $\lambda_{m,n}=\Lambda_{m,n}-\Lambda_{m,n-1}$ стремится к некоторому пределу l_n. В частности, $\lambda_{m,0}=\Lambda_{m,0}\to l_0$. Далее, в силу (11.7.3) при $n\geqslant 0$ и $m\to\infty$ имеем

$$\rho_m=\Lambda_{m,n}-\Lambda_{m+1,n}\sim\frac{n+1}{m+1}l_{n+1},$$

и так как ряд $\sum\rho_m$ сходится, то $l_{n+1}=0$. Итак, мы показали, что

$$(11.7.4)\qquad \lambda_{m,0}\to l_0,$$

$$(11.7.5)\qquad \lambda_{m,n}\to 0\quad (n>0).$$

Таким образом, соотношение (11.7.5), совпадающее с (11.5.8) для $n>0$, есть следствие условия (11.5.7). Однако из (11.5.7) не вытекает еще, что $l_0=0$, и это условие, т. е. условие (11.7.1), необходимо сохранить. Например, последовательность 1, 0, 0, ... абсолютно монотонна, но у нее $\Delta^m\mu_0=1$ для всех m.

В итоге, нами доказана

Теорема 202. *Для регулярности преобразования* $(\mathfrak{H},\mu)$ *необходимо и достаточно, чтобы* (μ_n) *была разностью двух абсолютно монотонных последовательностей, чтобы*

$$(11.7.6)\qquad \Delta^m\mu_0\to 0$$

и чтобы

$$(11.7.7)\qquad \mu_0=1.$$

Важно выделить, чтó здесь вытекает из одного главного условия (11.5.7), без двух дополнительных „нормирующих" условий. Мы имеем тогда

$$c_{m,0}=\lambda_{m,0}\to l_0,\quad c_{m,n}=\lambda_{m,n}\to 0\qquad (n>0),$$

и $\sum c_{m,n}=\mu_0$ для всех m. Таким образом, выполнены условия теоремы 1 с

$$\delta_0=l_0,\quad \delta_n=0\quad (n>0),\quad \delta=\mu_0.$$

Преобразование сохраняет сходимость (принадлежит классу $\mathfrak{T}_c$), и

$$t_m\to\mu_0 s+l_0(s_0-s),$$

когда $s_n\to s$.

Условие $l_0 = 0$ исключает, например, последовательность 1, 0, 0, ..., тогда как условие $\mu_0 = 1$ исключает последовательность 2, 2, 2, ... Оба исключают последовательность 2, 1, 1, ... Преобразование, определенное второю из этих последовательностей, становится регулярным (а именно тождественным), если все μ_n поделить на 2. Для третьей $\Delta^m \mu_0$ равно 2 при $m = 0$ и 1 при $m > 0$; преобразование становится регулярным, если μ_0 уменьшить на 1. Значение указанных дополнительных условий станет яснее после теоремы Хаусдорфа об интегральном представлении для μ_n.

11.8. Моменты. Мы называем

$$\mu_n = \int_0^1 x^n d\chi \text{ *)}, \tag{11.8.1}$$

где $\chi = \chi(x)$ есть вещественная функция с ограниченным изменением на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, *моментом*, порядка n, функции χ. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$\chi(0) = 0. \tag{11.8.2}$$

Если также

$$\chi(1) = 1 \tag{11.8.3}$$

и

$$\chi(+0) = \chi(0) = 0, \tag{11.8.4}$$

так что $\chi(x)$ непрерывна в начале, то мы будет называть μ_n *регулярным* моментом.

Если $\chi(x)$ — возрастающая функция, то

$$\mu_{n,p} = \Delta^p \mu_n = \int x^n (1-x)^p d\chi \geqslant 0 \text{ **)},$$

так что μ_n образуют абсолютно монотонную последовательность. Вообще, обозначая через $P(x)$ и $N(x)$ положительное и отрицательное изменения функции $\chi(t)$ на отрезке $[0, x]$, имеем $\chi(x) = P(x) - N(x)$ и

$$\mu_n = \int x^n dP - \int x^n dN = \alpha_n - \beta_n,$$

где (α_n) и (β_n) абсолютно монотонны.

Функция $\chi(x)$ может обладать счетным множеством точек разрыва. Но значение интеграла (11.8.1) не меняется ни при каком изменении

---

*) Для сохранения непрерывности функция x^0 при $x = 0$ считается равной 1. Таким образом, $\mu_0 = \int_0^1 d\chi$.

**) Здесь интегралы с неуказанными пределами берутся от 0 до 1.

значения $\chi(x)$ в любой точке разрыва, лежащей внутри интервала (0, 1). Поэтому можно, в частности, предполагать, что

$$\chi(x)=\frac{1}{2}\{\chi(x-0)+\chi(x+0)\} \tag{11.8.5}$$

для $0<x<1$; в этом случае мы будем говорить, что функция $\chi(x)$ имеет только *нормальные* разрывы. Тогда выражение чисел μ_n в виде моментов, если оно возможно, будет единственным. Это вытекает из следующего предложения:

Теорема 203. *Если*

$$\mu_n=\int x^n\,d\chi_1=\int x^n\,d\chi_2,$$

где χ_1 и χ_2 — функции с ограниченным изменением, обращающиеся в начале в нуль и имеющие лишь нормальные разрывы, то $\chi_1=\chi_2$ для всех x.

Достаточно показать, что если

$$\int x^n\,d\chi=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{11.8.6}$$

$\chi(0)=0$ и $\chi(x)$ удовлетворяет условию (11.8.5), то $\chi(x)=0$ для всех x. Из (11.8.6) при $n=0$ следует, что $\chi(1)=0$. Поэтому, интегрируя по частям, получаем

$$n\int x^{n-1}\chi(x)\,dx=0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

так что $\int x^n\chi(x)\,dx=0$ для всех $n\geqslant 0$. А положив

$$\psi(x)=\int\limits_0^x \chi(t)\,dt$$

и проинтегрировав по частям, мы получим, что

$$\int x^n\psi(x)\,dx=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{11.8.7}$$

Так как $\psi(x)$ непрерывна, то существует такой многочлен $Q(x)$, что $|\psi-Q|<\varepsilon$ для $0\leqslant x\leqslant 1$. Тогда в силу (11.8.7)

$$\int\psi^2\,dx=\int\psi Q\,dx+\int\psi(\psi-Q)\,dx=\int\psi(\psi-Q)\,dx\leqslant\varepsilon\int|\psi|\,dx,$$

и, значит, ввиду произвольности ε, $\int\psi^2\,dx=0$. Отсюда $\psi=0$ для всех x и, следовательно, $\chi=0$ во всех своих точках непрерывности. Так как эти точки плотны на интервале (0, 1), а $\chi(x-0)$ и $\chi(x+0)$ существуют для каждого x, то заключаем, что $\chi(x-0)=\chi(x+0)=0$. А тогда в силу (11.8.5) и $\chi(x)=0$.

Переведем теперь условия (11.8.3) и (11.8.4) на язык чисел μ_n. Прежде всего ясно, что (11.8.3) равносильно условию $\mu_0 = 1$, т. е. (11.7.7). Далее,

$$\Delta^m \alpha_0 = \int (1-x)^m dP, \qquad \Delta^m \beta_0 = \int (1-x)^m dN$$

неотрицательны и при возрастании m убывают, так что

$$\Delta^m \alpha_0 \to a \geqslant 0, \quad \Delta^m \beta_0 \to b \geqslant 0, \quad \Delta^m \mu_0 \to a - b.$$

Выберем η так, чтобы $0 < \eta < 1$ и $P(\eta) < P(+0) + \varepsilon$. Тогда

$$\Delta^m \alpha_0 \leqslant \int_0^\eta dP + (1-\eta)^m \int_\eta^1 dP \leqslant P(\eta) + (1-\eta)^m P(1) < P(+0) + 2\varepsilon$$

для достаточно больших m, так что $a \leqslant P(+0)$.

Так как, с другой стороны,

$$\Delta^m \alpha_0 \geqslant (1-\eta)^m \int_0^\eta dP = (1-\eta)^m P(\eta) > P(+0) - \varepsilon$$

для $\eta < \eta(\varepsilon, m)$, то $\Delta^m \alpha_0 \geqslant P(+0)$, и, следовательно, $a \geqslant P(+0)$.

Таким образом, $a = P(+0)$, и аналогично $b = N(+0)$. Отсюда следует, что

$$\Delta^m \mu_0 \to P(+0) - N(+0) = \chi(+0);$$

в частности, условие (11.8.4) равносильно условию (11.7.6).

В итоге мы доказали следующее:

Теорема 204. *Каждая последовательность моментов μ_n является разностью двух абсолютно монотонных последовательностей. При этом моменты возрастающей функции χ абсолютно монотонны.*

Теорема 205. *Для того чтобы моменты μ_n удовлетворяли условиям теоремы* 202 *и тем самым определяли регулярное $\mathfrak{H}$-преобразование $(\mathfrak{H}, \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы они были регулярны.*

11.9. Теорема Хаусдорфа. Мы докажем теперь фундаментальную теорему Хаусдорфа, показывающую, что утверждения теоремы 204 обратимы.

Теорема 206. *Если (μ_n) есть разность двух абсолютно монотонных последовательностей (α_n) и (β_n), то μ_n есть момент.*

После сказанного в § 11.8, очевидно, достаточно доказать следующее предложение:

Теорема 207. *Если* (μ_n) *абсолютно монотонна, то* $\mu_n = \int x^n\, d\chi$, *где* $\chi(x)$ — *возрастающая ограниченная функция от* x.

Доказательство опирается на следующую важную общую теорему Хелли: если $\chi_q(x)$ есть последовательность возрастающих функций от x, равномерно ограниченная на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, то существуют ограниченная возрастающая функция $\chi(x)$ и подпоследовательность (q_i) значений q такие, что $\chi_q(x) \to \chi(x)$, когда $q \to \infty$, пробегая (q_i).

Определим функцию $\chi_q(x)$ так:

$$\chi_q(0) = 0, \quad \chi_q(x) = \sum_{0 \leqslant s \leqslant qx} \lambda_{q,s} = \sum_{0 \leqslant s \leqslant qx} \binom{q}{s} \mu_{s,q-s} \qquad (0 < x \leqslant 1).$$

Тогда $\chi_q(x)$ возрастает вместе с x, и так как формула (11.5.5) показывает, что $\chi_q(1) = \mu_0$, то $\chi_q(x)$ равномерно ограничены.

Имеем

$$\mu_0 = \chi_q(1) - \chi_q(0) = \lim\{\chi_{q_i}(1) - \chi_{q_i}(0)\} = \chi(1) - \chi(0) = \int d\chi.$$

Далее, при $n > 0$

$$\mu_n = \mu_{n,0} = \mu_{n,1} + \mu_{n+1,0} = \mu_{n,2} + 2\mu_{n+1,1} + \mu_{n+2,0} = \ldots$$
$$\ldots = \sum_{k=0}^{q-n} \binom{q-n}{k} \mu_{n+k,q-n-k}$$

для всех $q \geqslant n$. Последнее выражение можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{q-n} \frac{(q-n)!}{k!\,(q-n-k)!} \frac{(n+k)!\,(q-n-k)!}{q!} \binom{q}{n+k} \mu_{n+k,q-n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{q-n} \frac{(q-n)!\,(n+k)!}{k!\,q!} \binom{q}{n+k} \mu_{n+k,q-n-k} =$$
$$= \sum_{s=n}^{q} \frac{(q-n)!\,s!}{q!\,(s-n)!} \binom{q}{s} \mu_{s,q-s} =$$
$$= \sum_{s=n}^{q} \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \binom{q}{s} \mu_{s,q-s} =$$
$$= \sum_{s=0}^{q} \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \binom{q}{s} \mu_{s,q-s}$$

(все добавочные члены равны нулю).

Разобьем отрезок $[0, 1]$ точками $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r = 1$, будем считать q столь большим, что $qx_1 > n$, и положим

$$S_l^{(q)} = \sum_{qx_l < s \leqslant qx_{l+1}} \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \binom{q}{s} \mu_{s, q-s},$$

так что

$$\mu_n = \sum_{l=0}^{r-1} S_l^{(q)}.$$

Так как

$$\chi_q(x_1) - \chi_q(x_0) = \sum_{0 \leqslant s \leqslant qx_1} \binom{q}{s} \mu_{s, q-s},$$

$$\chi_q(x_{l+1}) - \chi_q(x_l) = \sum_{qx_l < s \leqslant qx_{l+1}} \binom{q}{s} \mu_{s, q-s} \qquad (l > 0),$$

то

$$(11.9.1) \quad \frac{x_l q(x_l q - 1)\ldots(x_l q - n + 1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \{\chi_q(x_{l+1}) - \chi_q(x_l)\} \leqslant S_l^{(q)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x_{l+1} q(x_{l+1} q - 1)\ldots(x_{l+1} q - n + 1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \{\chi_q(x_{l+1}) - \chi_q(x_l)\} \text{ *)}.$$

Следовательно, прежде всего,

$$\mu_n = \sum_{l=0}^{r-1} S_l^{(q)} \leqslant \sum_{l=0}^{r-1} \frac{x_{l+1} q(x_{l+1} q - 1)\ldots(x_{l+1} q - n + 1)}{q(q-1)\ldots(q-n+1)} \{\chi_q(x_{l+1}) - \chi_q(x_l)\}.$$

Отсюда, беря $q \to \infty$ по надлежащим образом выбранной последовательности (q_i), получаем

$$\mu_n \leqslant \varlimsup_{q = q_i \to \infty} \sum_{l=0}^{r-1} S_l^{(q)} \leqslant \sum_{l=0}^{r-1} x_{l+1}^n \{\chi(x_{l+1}) - \chi(x_l)\}.$$

Нижнюю границу для μ_n даст аналогичным образом первое из неравенств (11.9.1); таким образом,

$$(11.9.2) \qquad \sum_{l=0}^{r-1} x_l^n \{\chi(x_{l+1}) - \chi(x_l)\} \leqslant \mu_n \leqslant \sum_{l=0}^{r-1} x_{l+1}^n \{\chi(x_{l+1}) - \chi(x_l)\}.$$

Но при стремлении r к бесконечности и длины наибольшего из интервалов (x_l, x_{l+1}) к нулю обе суммы, входящие в (11.9.2), имеют своим пределом интеграл Стильтьеса $\int x^n \, d\chi$. Следовательно, $\mu_n = \int x^n \, d\chi$.

---

*) При $l > 0$ это очевидно. Если же $l = 0$, то первое выражение в (11.9.1) равно нулю, тогда как члены, образующие второе выражение, при $s \leqslant n - 1$ равны нулю, а при $s > n - 1$ неотрицательны и не превосходят соответствующих членов третьего выражения, остальные члены которого также неотрицательны.

Этот интеграл не меняется ни при каком изменении значений функции χ в ее точках разрыва, лежащих внутри интервала (0, 1). Поэтому мы можем предполагать их выбранными так, чтобы все эти разрывы были нормальными.

Наши результаты можно теперь резюмировать следующим образом:

Теорема 208. (I) *Для того чтобы преобразование* $(\mathfrak{H}, \mu)$ *было регулярным* $\mathfrak{H}$*-преобразованием, необходимо и достаточно, чтобы* μ_n *были регулярными моментами.* (II) *Для того чтобы преобразование* $(\mathfrak{H}, \mu)$ *сохраняло сходимость, необходимо и достаточно, чтобы* μ_n *были моментами.*

В общем случае изменение функции $\chi_q(t)$ на отрезке $[0, x]$ выражается так:

$$V_q(0) = 0, \quad V_q(x) = \sum_{0 \leqslant s \leqslant qx} \binom{q}{s} |\mu_{s, q-s}| \qquad (0 < x \leqslant 1),$$

а изменением функции $\chi(t) = \lim \chi_{q_i}(t)$ на отрезке $[0, x]$ служит $V(x) = \lim V_{q_i}(x)$. В самом деле, легко показать, что при $0 \leqslant a < b \leqslant 1$

$$\int_a^b |d\chi| \leqslant \varliminf \int_a^b |d\chi_{q_i}|.$$

С другой же стороны,

$$\int_0^1 |d\chi_q| = \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} |\mu_{s, q-s}| = \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} \left| \int_0^1 x^s (1-x)^{q-s} d\chi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left\{ \sum_{s=0}^{q} \binom{q}{s} x^s (1-x)^{q-s} \right\} |d\chi| = \int_0^1 |d\chi|.$$

Функции V_q и V образованы из $|\mu_{s, q-s}|$ так же, как χ_q и χ образованы из $\mu_{s, q-s}$. Таким образом, V соответствует числам μ_n^* из § 11.6, а χ — числам μ_n, и

$$\mu_n^* = \int x^n \, dV = \int x^n \, dP + \int x^n \, dN = \alpha_n + \beta_n.$$

Любое выражение функции χ в виде разности $\chi = \theta - \varphi$ двух возрастающих функций соответствует выражению чисел μ_n в виде разностей $\mu_n = \rho_n - \sigma_n$ чисел, образующих две абсолютно монотонные последовательности. Разложение $\chi = P - N$ есть „наименьшее" в том смысле, что $\theta = P + \omega$, $\varphi = N + \omega$, где ω — возрастающая функция. Разложение же $\mu_n = \alpha_n - \beta_n$ есть также „наименьшее" — в том смысле, что компоненты ρ_n и σ_n любого другого разложения представимы в виде $\rho_n = \alpha_n + \zeta_n$, $\sigma_n = \beta_n + \zeta_n$, где ζ_n — абсолютно монотонная последовательность.

Поучительно рассмотреть, как строятся функции χ, на нескольких простых примерах.

(I) Если $\mu_n = 1$ для всех n, то $\lambda_{p,s} = 0$ для $s<p$ и 1 для $s=p$; тогда $\chi_q = 0$ для $0 \leqslant x < 1$ и 1 при $x=1$ для каждого q; значит, и χ есть та же функция.

(II) Если $\mu_n = \dfrac{1}{n+1}$, то

$$\lambda_{p,s} = \frac{p!}{s!\,(p-s)!}\Delta^{p-s}\frac{1}{s+1} = \frac{p!}{s!\,(p-s)!}\,\frac{(p-s)!\,s!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}$$

для $0 \leqslant s \leqslant p$, и

$$\chi_q(0) = 0, \quad \chi_q(x) = \frac{r+1}{q+1} \qquad \left(\frac{r}{q} \leqslant x < \frac{r+1}{q}, \quad x > 0\right).$$

Предельная функция χ равна x.

(III) Если

$$\mu_n = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} = \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+1)},$$

где $k>0$, то прямое вычисление дает:

$$\binom{q+k}{k}\sum_{s \leqslant qx}\lambda_{q,s} = \sum_{s \leqslant [qx]}\binom{q-s+k-1}{k-1} = \binom{q+k}{k} - \binom{q-[qx]+k-1}{k},$$

$$\sum_{s \leqslant qx}\lambda_{q,s} = 1 - \frac{1}{\binom{q+k}{k}}\binom{q-[qx]+k-1}{k} \to 1-(1-x)^k,$$

и

$$\mu_n = \int x^n\,d\chi = k\int x^n(1-x)^{k-1}\,dx.$$

(IV) Если $\mu_n = a^n$, где $0<a<1$, то

$$\chi_q(0) = 0, \quad \chi_q(x) = \sum_{0 \leqslant s \leqslant qx}\binom{q}{s}a^s(1-a)^{q-s} \qquad (0 < x \leqslant 1).$$

Из теоремы 138 следует, что $\chi = 0$ для $0 \leqslant x < a$ и 1 для $a < x \leqslant 1$.

Иногда оказывается удобным *) чуть изменить определение функций $\chi_q(x)$. Мы определяли $\chi_q(x)$ как ступенчатую функцию, имеющую скачок $\lambda_{q,r}$ в точке $x = \dfrac{r}{q}$. Исключим теперь разрывы, соединяя вершины графика прямолинейными отрезками. Это даст функцию $X_q(x)$, непрерывную всюду, кроме, возможно, точки $x=0$, где она имеет скачок $\lambda_{q,0}$, и обладающую для $\dfrac{r-1}{q} < x < \dfrac{r}{q}$ производной $q\lambda_{q,r}$. Очевидно, и $X_{q_i}(x) \to \chi(x)$.

11.10. Включение и равносильность $\mathfrak{H}$-методов. Общий вопрос о включении или „относительной мощности" двух $\mathfrak{H}$-методов труден; его решение, выполненное почти всецело Рогозинским и Фуксом, опирается на исследование связанного с рассматриваемыми методами

*) См., например, § 11.16.

„преобразования Меллина" $M(z)=\int t^z d\chi(t)$ для комплексных z. Вопрос значительно упрощается, если моменты μ_n и μ'_n для рассматриваемых методов не обращаются в нуль ни для какого n. Мы и ограничимся этим случаем, в котором решение может быть очень просто сформулировано в терминах самих μ_n и μ'_n *).

Итак, во всем дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\mu_n \neq 0, \quad \mu'_n \neq 0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{11.10.1}$$

Пусть $\lambda=\delta\mu\delta$, $\lambda'=\delta\mu'\delta$ — наши преобразования. Тогда

$$\delta\frac{1}{\mu}\delta\cdot\lambda=\delta\frac{1}{\mu}\delta\cdot\delta\mu\delta=\delta\frac{1}{\mu}\mu\delta=\delta\delta=\mathrm{I}.$$

Таким образом,

$$\lambda^{-1}=\delta\frac{1}{\mu}\delta,\quad \lambda'=\delta\mu'\delta,\quad \lambda'\lambda^{-1}=\delta\mu'\delta\cdot\delta\frac{1}{\mu}\delta=\delta\frac{\mu'}{\mu}\delta,$$

так что $\lambda'\lambda^{-1}$ есть $\mathfrak{H}$-преобразование, с числами $\frac{\mu'_n}{\mu_n}$. Но для того, чтобы $(\mathfrak{H},\ \mu')$ включало $(\mathfrak{H},\ \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы из $\lambda s\to l$ следовало $\lambda' s=\lambda'\lambda^{-1}(\lambda s)\to l$, т. е. чтобы метод $\lambda'\lambda^{-1}$ был регулярен. А это имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{\mu'_n}{\mu_n}$ есть регулярный момент. Итак:

Теорема 209. *Пусть $(\mathfrak{H},\ \mu)$ и $(\mathfrak{H},\ \mu')$ — два регулярных $\mathfrak{H}$-метода, удовлетворяющих условию* (11.10.1). *Тогда для того, чтобы $(\mathfrak{H},\ \mu')$ включал $(\mathfrak{H},\ \mu)$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\mu'_n}{\mu_n}$ был регулярным моментом. Для того же, чтобы эти методы были равносильны, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\mu'_n}{\mu_n}$ и $\frac{\mu_n}{\mu'_n}$ были регулярными моментами. В частности, для того чтобы метод $(\mathfrak{H},\mu)$ был равносилен тождественному, необходимо и достаточно, чтобы μ_n и $\frac{1}{\mu_n}$ одновременно были регулярными моментами.*

*) Если регулярные методы $(\mathfrak{H},\ \mu)$ и $(\mathfrak{H},\ \mu')$ оба суммируют данный ряд, то суммы необходимо совпадают. В самом деле, если $t_m=\mathfrak{H}s_n$, $t'_m=\mathfrak{H}'s_n$ являются средними для s_n, соответствующими рассматриваемым двум методам, и $t_m\to s$, $t'_m\to s'$, то, по теореме 197, $\mathfrak{H}'t_m=\mathfrak{H}t'_m$. Но вследствие регулярности этих методов $\mathfrak{H}'t_m\to s$ и $\mathfrak{H}t'_m\to s'$. Следовательно, $s=s'$. Таким образом, любые два регулярных $\mathfrak{H}$-метода „совместны" в смысле § 4.2.

В следующем параграфе мы применим теорему 209 к некоторым важным частным случаям. При этом мы неоднократно будем опираться на следующую простую теорему:

Теорема 210. *Суммы, разности и произведения моментов снова являются моментами. Произведение двух регулярных моментов есть регулярный момент.*

Утверждение относительно сумм и разностей очевидно, так что нужно рассмотреть только произведения. Прежде всего

$$\Delta(\mu_n\mu_n') = \mu_n\,\Delta\mu_n' + \Delta\mu_n\cdot\mu_{n+1}',$$
$$\Delta^2(\mu_n\mu_n') = \mu_n\,\Delta^2\mu_n' + 2\Delta\mu_n\,\Delta\mu_{n+1}' + \Delta^2\mu_n\cdot\mu_{n+2}',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

так что из $\Delta^p\mu_n \geqslant 0$ и $\Delta^p\mu_n' \geqslant 0$ вытекает $\Delta^p(\mu_n\mu_n') \geqslant 0$. Следовательно, произведение двух абсолютно монотонных μ_n абсолютно монотонно.

Но если μ_n и μ_n' — моменты, то

$$\mu_n\mu_n' = \alpha_n\alpha_n' + \beta_n\beta_n' - \alpha_n\beta_n' - \alpha_n'\beta_n,$$

где $\alpha_n, \dots$ абсолютно монотонны. Следовательно, произведение двух моментов есть момент.

Далее, если $\mu_0 = 1$ и $\mu_0' = 1$, то $\mu_0\mu_0' = 1$.

Наконец, нам нужно еще показать, что из $\Delta^m\mu_0 \to 0$ и $\Delta^m\mu_0' \to 0$ следует $\Delta^m(\mu_0\mu_0') \to 0$, причем, очевидно, достаточно доказать это для абсолютно монотонных μ_n и μ_n'. Но

$$\Delta^m(\mu_0\mu_0') = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\Delta^r\mu_0\,\Delta^{m-r}\mu_r' = \sum_{r=0}^{R} + \sum_{r=R+1}^{m} = S_1 + S_2.$$

Мы можем выбрать R так, чтобы для $r > R$ было $\Delta^r\mu_0 < \varepsilon$, и, значит, согласно (11.5.5)

$$S_2 \leqslant \varepsilon\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\Delta^{m-r}\mu_r' = \varepsilon\mu_0';$$

а при фиксированном R и $m \to \infty$ имеем $S_1 \to 0$. Следовательно, $\Delta^m(\mu_0\mu_0') \to 0$, чем и завершается доказательство теоремы *).

11.11. Теорема Мерсера и равносильность гёльдеровских и чезаровских средних. $\lambda \equiv \lambda'$ будет обозначать, что λ и λ' — равносильные $\mathfrak{H}$-методы $(\mathfrak{H}, \mu)$ и $(\mathfrak{H}, \mu')$. В частности, $\lambda \equiv \mathrm{I}$ будет обо-

*) Можно было бы также воспользоваться теоремой 208.

значать, что метод λ равносилен тождественному. Очевидно, если $\lambda^{(s)} \equiv I$ для $s = 1, 2, \ldots, r$, то и $\lambda^{(1)}\lambda^{(2)} \ldots \lambda^{(r)} \equiv I$.

Если

$$\mu_n = \frac{\alpha n + 1}{\beta n + 1} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta - \alpha}{\beta} \frac{1}{\beta n + 1}, \tag{11.11.1}$$

где α и β положительны, то либо μ_n, либо $\frac{\alpha}{\beta} - \mu_n$ образуют абсолютно монотонную последовательность, $\mu_0 = 1$ и $\Delta^m \mu_0 \to 0$, так что μ_n — регулярный момент. Так как то же верно и для $\frac{1}{\mu_n}$, то $\lambda \equiv I$. Но преобразование

$$t_m = \alpha s_m + (1 - \alpha) \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_m}{m + 1}$$

§ 5.9 есть $\mathfrak{H}$-преобразование, для которого

$$\mu_n = \alpha + \frac{1 - \alpha}{n + 1} = \frac{\alpha n + 1}{n + 1},$$

так что μ_n и $\frac{1}{\mu_n}$ являются регулярными моментами. Тем самым мы получили новое доказательство теоремы Мерсера 51.

Если $\mu_n \neq 0$ для всех n, а μ_n' есть конечное произведение

$$\mu_n' = \mu_n \prod \frac{\alpha_s n + 1}{\beta_s n + 1} = \mu_n \prod \mu_n^{(s)},$$

где α и β все положительны, так что $\lambda^{(s)} \equiv I$, то и $\frac{\mu_n'}{\mu_n}$ и $\frac{\mu_n}{\mu_n'}$ есть регулярный момент, и $\lambda' \equiv \lambda$. В частности, если

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)^k}, \quad \mu_n' = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} = \frac{k!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)},$$

где k — положительное целое число, то

$$\frac{\mu_n'}{\mu_n} = \frac{2n+2}{n+2} \cdot \frac{3n+3}{n+3} \cdots \frac{kn+k}{n+k},$$

и так как каждый множитель имеет вид (11.11.1), то $\lambda' \equiv \lambda$. Это дает новое доказательство теоремы равносильности (теоремы 49).

В §§ 11.4 мы определили гёльдеровские средние нецелого порядка; естественно возникает вопрос, можно ли соответственно распространить и теорему равносильности.

Теорема 211. *Средние* (C, k) *и* (H, k) *для* $k > -1$ *равносильны.*

Нам нужно доказать, что

$$\rho_n^{(k)} = \frac{(n+1)^k}{\binom{n+k}{k}} \quad \text{и} \quad \sigma_n^{(k)} = \frac{1}{\rho_n^{(k)}} = \frac{\binom{n+k}{k}}{(n+1)^k}$$

являются регулярными моментами. Так как

$$\frac{\rho_n^{(k)}}{\rho_n^{(k+1)}} = \frac{n+k+1}{(k+1)n+k+1},$$

то достаточно доказать это для некоторого интервала $s < k \leqslant s+1$ значений k, где $s \geqslant -1$; и так как для целых значений k утверждение теоремы уже доказано, то можно считать, что $0 < k < 1$. Но

$$(11.11.2) \qquad \rho_n^{(k)} = (n+1)^{k-1} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+k+1)} = \Gamma(k+1) + (n+1)^{k-1} u_n,$$

где

$$u_n = \Gamma(k+1)\left\{\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+k+1)} - (n+1)^{1-k}\right\} =$$
$$= k(k-1)\int x^n \left\{x(1-x)^{k-2} - \left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-2}\right\} dx,$$

так что u_n есть момент. Так как $(n+1)^{k-1}$ также есть момент, то из (11.11.2) и теоремы 210 следует, что и $\rho_n^{(k)}$ является моментом.

Далее, $\rho_0^{(k)} = 1$. Наконец, u_n есть момент абсолютно непрерывной функции χ, так что $\chi(+0) = 0$ и $\Delta^m u_0 \to 0$; и то же верно для $(n+1)^{k-1}$. Поэтому $\Delta^m \rho_0^{(k)} \to 0$, и $\rho_n^{(k)}$ есть регулярный момент. Доказательство для $\sigma_n^{(k)}$ аналогично.

Аналогичным образом можно доказать, что методы (C, k) и (H, k) равносильны $\mathfrak{H}$-методам соответственно с

$$\mu_n = \frac{\Gamma(k+a)\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)\Gamma(n+k+a)} \quad \text{или} \quad \mu_n = \left(\frac{a}{n+a}\right)^k$$

для любых положительных k и a. Можно доказать также, что

$$\frac{\binom{n+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}{\binom{n+\alpha}{\alpha}\binom{n+\beta}{\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}$$

и обратные к ним величины являются регулярными моментами, и тем самым завершить доказательство теоремы, приведенной в примечании к § 5.8.

Небезинтересно также вычислить явные выражения для $\rho_n^{(k)}$ и $\sigma_n^{(k)}$ как моментов. Пусть, например, k — целое. Тогда формальным решением уравнения

$$(11.11.3) \qquad \rho_n^{(k)} = k!\frac{(n+1)^k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} = \int_0^1 x^n \, d\chi = \int_0^\infty e^{-nt} \, d\varphi$$

служит интеграл

$$\varphi(x)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(s+1)^k}{(s+1)(s+2)\ldots(s+k)}\frac{e^{xs}}{s}\,ds,$$

который можно вычислить как сумму вычетов. В итоге получаем

$$(11.11.4)\quad \varphi(0)=0,\qquad \varphi(+0)=k!,\qquad \varphi(t)=e^{-t}\left(\frac{d}{dt}\right)^k\{e^t(1-e^{-t})^k\}\quad (t>0),$$

правильность чего можно непосредственно проверить.

Аналогично найдем, что $\sigma_n^{(k)}$ представимо таким же интегралом с

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi(+0)=\frac{1}{k!},\qquad \varphi'(t)=\frac{1}{k!(k-1)!}\left[\left(\frac{d}{dw}\right)^k(w\log w)^{k-1}\right]_{w=e^t}.$$

При надлежащем истолковании операции дифференцирования эти формулы сохраняют силу и для нецелых k. Так, формула (11.11.4) верна и для $0<k<1$, если заменить $k!$ на $\Gamma(k+1)$ и понимать производные в смысле Римана-Лиувилля.

Наконец, заметим, что мы доказали равносильность гёльдеровских и чезаровских средних в области $-1<k<0$, где ни те, ни другие не регулярны.

11.12. Некоторые частные случаи. (1) Для метода (H, k), с $k>0$,

$$\mu_n=\frac{1}{(n+1)^k}=\frac{1}{\Gamma(k)}\int x^n\left(\log\frac{1}{x}\right)^{k-1}dx=\int x^n\varphi(x)\,dx.$$

Здесь χ, как интеграл от φ, есть абсолютно непрерывная функция.

(2) Для метода (C, k) с $k>0$

$$\mu_n=\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+k+1)}=k\int x^n(1-x)^{k-1}dx,$$

и $\chi(x)=1-(1-x)^k$ снова абсолютно непрерывна.

(3) Эти примеры наводят на предположение, что „мощность“ $\mathfrak{H}$-метода зависит от „малости“ чисел μ_n, возрастая при их уменьшении. Однако, хотя этот принцип до сих пор и оправдывался, его не следует понимать буквально, поскольку связи между моментами, определяющие их сравнительную мощность, имеют более тонкий характер *).

Так, $\mu_n=a^n$, где $0<a<1$, соответствует методу (E, q) с $q=\frac{1-a}{a}$ и стремится к нулю быстрее всякого $\frac{1}{(n+1)^k}$; и, однако, (E, q) не включает (C, k) даже при больших q и малых k. Эти два метода в действительности „несравнимы“. Пусть, например, $k=1$. Легко проверить, что для $\mu_n=\frac{1}{n+1}$ и $\mu_n'=a^n$ ни $\rho_n=\frac{\mu_n}{\mu_n'}$, ни

*) См. начало § 11.10 и примечания в конце главы.

$\sigma'_n = \dfrac{\mu'_n}{\mu_n}$ не является моментом. Для ρ_n это очевидно, поскольку $\rho_n \to \infty$, так что проверка требуется только для σ_n.

Но если бы $\sigma_n = (n+1)a^n$ было моментом, то (поскольку a^n есть момент) мы для $n > 0$ имели бы

$$na^n = \int x^n d\chi = \chi(1) - n\int x^{n-1}\chi(x)\,dx = n\int x^{n-1}\{\chi(1) - \chi(x)\}\,dx.$$

Деля на n и заменяя затем n на $n+1$, мы получили бы

$$a^n = \frac{1}{a}\int x^n\{\chi(1) - \chi(x)\}\,dx = \int x^n d\chi_1 \qquad (n \geqslant 0),$$

где χ_1 абсолютно непрерывна. Однако $a^n = \int x^n\,d\chi_2$, где $\chi_2 = 0$ в $(0, a)$ и 1 в $(a, 1)$, а двоякое представление для a^n противоречит теореме 203. Мы видим, таким образом, что (как это было непосредственно доказано в § 9.8 указанием примера) должны существовать ряды, суммируемые (C, 1), но не суммируемые (E, q) ни для какого q. Проведенное рассуждение легко переделать так, чтобы оно годилось для любого положительного k.

(4) Если $\mu_n \to 0$ слишком быстро, то μ_n не может быть регулярным моментом. Это показывает

Теорема 212. *Не существует регулярных моментов μ_n таких, что $c^n\mu_n \to 0$ для каждого c.*

Если μ_n — момент, то

$$\begin{aligned}(11.12.1)\qquad \mu_{n+2} &= \int x^{n+2}d\chi = \chi(1) - (n+2)\int x^{n+1}\chi\,dx = \\ &= \chi(1) - (n+2)\chi_1(1) + (n+2)(n+1)\int x^n\chi_1\,dx = \\ &= (n+2)(n+1)\int x^n\varphi\,dx,\end{aligned}$$

где

$$(11.12.2)\qquad \varphi(x) = \chi_1(x) - \chi_1(1) + (1-x)\chi(1), \qquad \chi_1(x) = \int_0^x \chi(t)\,dt,$$

так что $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна. Рассмотрим функцию

$$f(w) = \int \frac{\varphi(x)}{w-x}\,dx$$

комплексного переменного $w = u + iv$. Для больших w имеем

$$f(w) = \int \varphi(x)\sum \frac{x^n}{w^{n+1}}\,dx = \sum \frac{\mu_{n+2}}{(n+2)(n+1)}\,\frac{1}{w^{n+1}},$$

и так как в силу предположения теоремы этот ряд сходится для всех $w \neq 0$, то $f(w)$ есть целая функция от $\frac{1}{w}$. В частности, $f(w)$ регулярна для $0 < w < 1$. Но если $0 < u < 1$, то

$$(11.12.3)\qquad \frac{1}{2\pi i}\{f(u-iv)-f(u+iv)\}=\frac{1}{\pi}\int\frac{v\varphi(x)}{(x-u)^2+v^2}\,dx \to \varphi(u)$$

при $v \to +0$. Отсюда следует, что $\varphi(u)=0$ и $\mu_n=0$ для $n \geqslant 2$.

Так как и $\varphi'(x)=0$ для $0<x<1$, то в силу (11.12.2)

$$\chi(x)-\chi(1)=0$$

почти для всех x, так что

$$\mu_1=\int x\,d\chi=\chi(1)-\int\chi\,dx=0.$$

Таким образом, последовательность (μ_n) имеет вид μ_0, 0, 0, ...; но последняя не регулярна ни при $\mu_0=0$, ни при $\mu_0 \neq 0$, поскольку нарушается либо условие (11.7.7), либо условие (11.7.6).

Из теоремы 212 вытекает, что $\mu_n=\frac{1}{n!}$ не является моментом. Легко проверить, что

$$\Delta^p\frac{1}{0!}=\frac{(-1)^p}{p!}\left\{1-\frac{p^2}{1!}+\frac{p^2(p-1)^2}{2!}-\ldots\right\}=L_p(1),$$

где $L_p(x)$ — многочлен Лагерра. Но, как известно,

$$L_p(1)=\sqrt{\frac{e}{\pi}}\,\frac{\cos\left(2\sqrt{p}-\frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt[4]{p}}+O\left(p^{-\frac{3}{4}}\right)$$

для больших p, так что $\Delta^p\mu_0$ действительно не сохраняет постоянного знака.

Проще доказывается, что абсолютно монотонное μ_n, удовлетворяющее условию теоремы 212, должно обращаться в нуль для $n \geqslant 1$. Действительно, если $\mu_n=\int x^n\,d\chi$ и χ — возрастающая функция, не постоянная на интервале $0<x\leqslant 1$, то в $(0, 1)$ содержится интервал (a, b) такой, что $a>0$ и $\chi(b)-\chi(a)=\omega>0$; а тогда $\mu_n \geqslant \omega a^n$.

11.13. Логарифмические случаи. Рассмотрим теперь $\mathfrak{H}$-метод, который содержится во всех методах (C, k) положительного порядка и слабее каждого из них. Пусть $a>1$, $l>0$; тогда

$$\frac{1}{\{\log(n+a)\}^l}=\frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^\infty t^{l-1}e^{-t\log(n+a)}\,dt=\frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^\infty\frac{t^{l-1}}{(n+a)^t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^\infty\frac{t^{l-1}\,dt}{\Gamma(t)}\int_0^\infty u^{t-1}e^{-(n+a)u}\,du=$$

$$=\int_0^\infty e^{-(n+1)u}\psi(u)\,du=\int_0^1 x^n\varphi(x)\,dx,$$

где

$$\varphi(x)=\psi\left(\log\frac{1}{x}\right),\quad \psi(u)=\frac{e^{(1-a)u}}{u\Gamma(l)}\int\limits_0^\infty\frac{t^{l-1}u^t}{\Gamma(t)}\,dt.$$

Обращения порядка интегрирования законны, поскольку все рассматриваемые функции положительны. Мы видим отсюда, что

$$(11.13.1)\qquad \mu_n=\left\{\frac{\log a}{\log(n+a)}\right\}^l\qquad (a>1,\quad l>0)$$

есть регулярный момент.

Нетрудно доказать, что соответствующие методы слабее метода (C, k) или (H, k) для каждого положительного k, но подробное проведение доказательства было бы довольно утомительно. Мы предположим для простоты, что $l=1$, и примем за известное, что, как утверждалось в начале текста, напечатанного мелким шрифтом в § 11.11, метод (H, k) равносилен $\mathfrak{H}$-методу с

$$(11.13.2)\qquad \mu_n'=\left(\frac{a}{n+a}\right)^k.$$

Тогда нам нужно показать, что если μ_n и μ_n' определены соответственно формулами (11.13.1) с $l=1$ и (11.13.2), то $\frac{\mu_n'}{\mu_n}$ является регулярным моментом, а $\frac{\mu_n}{\mu_n'}$ — нет. Второе утверждение очевидно, поскольку $\frac{\mu_n}{\mu_n'}\to\infty$. С другой стороны,

$$\frac{\log N}{N^k}=-\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{N^k}\right)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_0^\infty e^{-Nt}t^{k-1}\left\{\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)}-\log t\right\}dt,$$

и, полагая в этой формуле $N=n+a$, мы видим, что $\frac{\log(n+a)}{(n+a)^k}$ является моментом. Таким образом, $\frac{\mu_n'}{\mu_n}$ есть момент, и притом, очевидно, регулярный.

Так как $\mu_n\to 0$, то $\frac{1}{\mu_n}$ не является моментом. Это показывает, что рассматриваемый метод суммирует и некоторые расходящиеся ряды.

11.14. Экспоненциальный случай. Интересно также определить регулярный метод ($\mathfrak{H}$, μ), который был бы сильнее любого метода (C, k). В таком случае μ_n должны стремиться к нулю быстрее любой степени n; но, с другой стороны, мы видели в § 11.12, что они не должны стремиться к нулю слишком быстро. После примеров § 11.12 естественно рассмотреть случай $\mu_n = e^{-An^\alpha}$, где $A > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 213. *$\mu_n = e^{-An^\alpha}$ при $A > 0$ и $0 < \alpha < 1$ есть регулярный момент, соответствующий возрастающей функции χ.*

Пусть $\mu(y) = e^{-Ay^\alpha} = e^{-\nu(y)}$. Тогда $\nu' > 0$, $\nu'' < 0$, $\nu''' > 0, \ldots$, и, следовательно,

$$\mu' = -e^{-\nu}\nu' < 0, \quad \mu'' = e^{-\nu}(\nu'^2 - \nu'') > 0,$$
$$\mu''' = -e^{-\nu}(\nu'^3 - 3\nu'\nu'' + \nu''') < 0, \ldots,$$

так что последовательные производные от μ попеременно положительны и отрицательны. Отсюда следует, что μ_n образуют абсолютно монотонную последовательность, и

$$\mu_n = \int t^n \, d\chi, \tag{11.14.1}$$

где χ — возрастающая функция от t. Далее, $\chi(1) = \mu_0 = 1$. Поэтому для завершения доказательства теоремы остается показать, что $\Delta^m \mu_0 \to 0$ или, что равносильно этому, что $\chi(+0) = \chi(0)$.

Так как последовательность $\mu^{(1)}(n) = \mu\left(\frac{1}{2}n\right)$ также абсолютно монотонна, то

$$\mu\left(\frac{1}{2}n\right) = \mu^{(1)}(n) = \int u^n \, d\chi^{(1)}(u) = \int t^{\frac{n}{2}} \, d\chi^{(1)}(\sqrt{t})$$

с некоторой возрастающей $\chi^{(1)}$, так что

$$\mu(n) = \int t^n \, d\chi^{(1)}(\sqrt{t}) \tag{11.14.2}$$

для $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ Функции χ и $\chi^{(1)}$ можно считать нормированными, а тогда, сравнивая (11.14.1) и (11.14.2) и вспоминая теорему 203, мы видим, что $\chi^{(1)}(\sqrt{t}) = \chi(t)$. Следовательно, формула (11.14.1) с $\mu_n = \mu(n)$ может служить и для кратных $\frac{1}{2}$. Повторно применяя это рассуждение, мы видим, что

$$\mu(y) = \int t^y \, d\chi(t), \tag{11.14.3}$$

когда y есть целое кратное от $\frac{1}{2}$, от $\frac{1}{4}$, от $\frac{1}{8}, \ldots$ По непрерывности заключаем отсюда, что формула (11.14.3) верна для всех положительных y. Наконец,

$$\mu(0) - \mu(y) = \left(\int_0^\delta + \int_\delta^1\right)(1 - t^y)\, d\chi \geqslant (1 - \delta^y)\{\chi(\delta) - \chi(0)\}$$

для $0<\delta<1$, и, беря здесь $\delta\to 0$, получаем, что

$$\chi(+0)-\chi(0)\leqslant \mu(0)-\mu(y).$$

Так как $\mu(y)$ непрерывна, то, беря $y\to 0$, заключаем, что

$$\chi(+0)=\chi(0)=0,$$

чем и завершается доказательство нашей теоремы.

Функция $\chi(t)$ абсолютно непрерывна; таким образом,

$$\mu(y)=\int_0^1 t^y\varphi(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-yu}\psi(u)\,du,$$

и нахождение явных аналитических выражений для $\psi(u)$ и $\varphi(t)$ не представляет труда. Так, при $\alpha=\frac{1}{2}$ имеем

$$\varphi(t)=\frac{A}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{A^2}{4\log\frac{1}{t}}}.$$

При $\alpha=\frac{1}{3}$, опираясь на формулу Лиувилля

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v-\frac{n}{uv}}\frac{du\,dv}{u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-3n^{\frac{1}{3}}},$$

можно показать, что

$$\varphi(t)=\frac{\psi\left(\log\frac{1}{t}\right)}{t},\qquad \psi(u)=\frac{A^{\frac{3}{2}}}{3\pi u^{\frac{3}{2}}}K_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2A^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}u^{\frac{1}{2}}}\right),$$

где K_ν есть вещественная цилиндрическая функция третьего рода. Вообще, применяя формулу обращения для преобразования Лапласа, получаем, что

$$\psi(u)=\sum\frac{(-A)^p}{p!}\frac{u^{-\alpha p-1}}{\Gamma(-\alpha p)}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\sum(-A)^p\frac{\sin\alpha p\pi\,\Gamma(1+\alpha p)}{p!}u^{-\alpha p-1}=\frac{W\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)}{u},$$

где W — целая функция.

Мы заключим этот параграф следующим предложением.

Теорема 214. *Метод* $(\mathfrak{H},\mu)$ *теоремы* 213 *включает все методы* (C,k).

Для упрощения формул примем, что $A=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$; на существенных моментах доказательства это не отразится. Докажем сначала, что

$$\rho_n=\left(\frac{n+a}{a}\right)^k e^{-\sqrt{n}}$$

для каждого целого k и достаточно больших $a = a(k)$ есть регулярный момент. Положим

$$\rho(t) = \left(\frac{t+a}{a}\right)^k e^{-\sqrt{t}} = e^{-\nu(t)}, \quad \nu(t) = \sqrt{t} - k \log \frac{t+a}{a}.$$

Тогда

$$(-1)^{p-1}\nu^{(p)}(t) = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-3)}{2^p} t^{-p+\frac{1}{2}} - \frac{k(p-1)!}{(t+a)^p},$$

где под $1 \cdot 3 \ldots (2p-3)$ при $p = 1$ следует понимать 1. Правая часть будет положительна для $p = 1, 2, \ldots$ и всех положительных t, если

$$\frac{(t+a)^{2p}}{t^{2p-1}} > \left\{2k\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(p-\frac{1}{2}\right)}\right\}^2.$$

Выражение в левой части, как функции от t, имеет минимум $\dfrac{(2p)^{2p}a}{(2p-1)^{2p-1}} > 2pa$ тогда как правая часть для больших p ведет себя как $4k^2\pi p$. Следовательно, если a достаточно велико, то $(-1)^{p-1}\nu^{(p)}(t) > 0$ для $p = 1, 2, \ldots$ и всех $t > 0$. Отсюда, рассуждая совершенно так же, как при доказательстве теоремы 213, выводим, что ρ_n абсолютно монотонна. Далее, $\rho_0 = 1$, и можно, как и там, доказать, что $\Delta^m \rho_0 \to 0$. Следовательно, метод $(\mathfrak{H}, \rho)$ при достаточно большом a есть регулярный $\mathfrak{H}$-метод.

Наконец, как в § 11.11,

$$\sigma_n = \left(\frac{an+a}{n+a}\right)^k$$

определяет метод $(\mathfrak{H}, \sigma)$, равносильный тождественному. Поэтому

$$\tau_n = \rho_n \sigma_n = (n+1)^k e^{-\sqrt{n}}$$

есть момент некоторого регулярного $\mathfrak{H}$-метода. А это показывает, что метод $(\mathfrak{H}, \mu)$ с $\mu_n = e^{-\sqrt{n}}$ включает все методы (C, k).

11.15. Ряд Лежандра для $\chi(x)$. Возвратимся к § 11.9, в котором $\chi(x)$ строится как предел некоторой последовательности ступенчатых функций $\chi_q(x)$. Желательно иметь другие аналитические выражения для функции $\chi(x)$, и одним из наиболее естественных является ее разложение в ряд по многочленам Лежандра. Мы будем предполагать, что μ_n есть регулярный момент, так что $\chi(0) = \chi(+0) = 0$ и $\chi(1) = 1$. Положим

$$t = \frac{1}{2}(1+x), \quad \chi(t) = \theta(x),$$

так что $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и

$$\mu_n = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n d\theta.$$

Тогда θ есть функция с ограниченным изменением, непрерывная в точке $x = -1$; ее разложение в ряд Лежандра $\sum c_m P_m(x)$ сходится к $\frac{1}{2}\{\theta(x-0)+\theta(x+0)\}$ для $-1<x<1$, к нулю для $x=-1$ и к $\theta(1-0)$ для $x=1$.

Коэффициенты c_m задаются формулой

$$c_m=\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}\theta(x)P_m(x)\,dx=$$
$$=\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega_m(1)-\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}\omega_m(x)\,d\theta,$$

где

$$\omega_m(x)=\int_{-1}^{x}P_m(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$c_0=1-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+x)\,d\theta=1-\int_{0}^{1}t\,d\chi=\mu_0-\mu_1, \tag{11.15.1}$$

и

$$c_m=-\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}\omega_m(x)\,d\theta=-\left(m+\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{1}\omega_m(2t-1)\,d\chi \tag{11.15.2}$$

для $m>0$. Но

$$\omega_m(2t-1)=\int_{-1}^{2t-1}P_m(u)\,du=2\int_{0}^{t}P_m(2w-1)\,dw \tag{11.15.3}$$

и

$$P_m(2w-1)=$$
$$=(-1)^m\left\{1-\frac{m+1}{1}\frac{m}{1}w+\frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}w^2-\ldots\right\}.$$

Подставляя в (11.15.1) — (11.15.3), получаем

$$\chi(t)=\sum c_mP_m(2t-1),$$

где $c_0=\mu_0-\mu_1$ и

$$c_m=2(-1)^{m-1}\left(m+\frac{1}{2}\right)\left\{\mu_1-\frac{m+1}{1}\frac{m}{1}\frac{\mu_2}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{\mu_3}{3}-\ldots\right\}$$

для $m>0$.

Если χ абсолютно непрерывна, $\chi' = \varphi$ и $\psi(x) = \varphi\left\{\frac{1}{2}(1+x)\right\}$, то рядом Лежандра для $\psi(x)$ служит $\sum a_m P_m(x)$, где

$$\frac{a_m}{2m+1} = (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+k}{k}\binom{m}{k}\mu_k =$$
$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{(m+k)!}{(m-k)!}\frac{\mu_k}{(k!)^2}.$$

11.16. Моменты для функций специальных классов. Естественно поставить вопрос, при каких условиях χ будет функцией какого-либо заданного класса; например, когда она будет абсолютно непрерывна, когда она будет интегралом от функции лебеговского класса L^r и т. д. Мы ограничимся здесь одной просто доказываемой теоремой.

Теорема 215. *Для того чтобы*

$$\mu_n = \int x^n \varphi(x)\, dx, \tag{11.16.1}$$

где функция $\varphi(x)$ *принадлежит классу* L^r *с* $r > 1$ *на отрезке* $[0, 1]$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(p+1)^{r-1} \sum_{s=0}^{p} |\lambda_{p,s}|^r < H^r, \tag{11.16.2}$$

где $\lambda_{p,s}$ *определятся формулой* (11.3.4), *а* H *не зависит от* p.

Заметим, что в силу неравенства Гёльдера из (11.16.2) следует

$$\sum |\lambda_{p,s}| < H,$$

так что μ_n, удовлетворяющее условию (11.16.2), во всяком случае является моментом.

(a) *Условие необходимо.* Действительно,

$$\lambda_{p,s} = \binom{p}{s} \int x^s (1-x)^{p-s} \varphi(x)\, dx = \int \rho_{p,s}(x)\varphi(x)\, dx,$$

где $\rho_{p,s}(x) = \binom{p}{s} x^s (1-x)^{p-s}$, так что $\sum_{s=0}^{p} \rho_{p,s}(x) = 1$ и

$$\int \rho_{p,s}(x)\, dx = \binom{p}{s} \frac{s!\,(p-s)!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}.$$

Следовательно, снова в силу неравенства Гёльдера,

$$|\lambda_{p,s}|^r \leqslant \left\{\int \rho_{p,s}(x)\,dx\right\}^{r-1}\int \rho_{p,s}(x)\,|\varphi(x)|^r\,dx,$$

$$(p+1)^{r-1}|\lambda_{p,s}|^r \leqslant \int \rho_{p,s}(x)\,|\varphi(x)|^r\,dx,$$

$$(p+1)^{r-1}\sum_{s=0}^{p}|\lambda_{p,s}|^r \leqslant \int |\varphi(x)|^r\left\{\sum_{s=0}^{p}\rho_{p,s}(x)\right\}dx = \int |\varphi(x)|^r\,dx.$$

(б) *Условие достаточно.* Определим $\chi_p(x)$, как в § 11.9, но с изменением, указанным в конце этого параграфа*). Тогда

$$\chi_p'(x) = p\lambda_{p,s} \quad \left(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ \frac{s-1}{p} < x < \frac{s}{p}\right),$$

и в силу (11.16.2)

$$\int |\chi_p'(x)|^r\,dx = p^{r-1}\sum_{s=1}^{p}|\lambda_{p,s}|^r < H^r.$$

Отсюда следует существование последовательности значений p и функции φ из L^r таких, что по этой последовательности χ_p' слабо стремится к φ и

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = \lim \int_0^x \chi_p'(t)\,dt = \lim\{\chi_p(x) - \chi_p(+0)\} = \chi(x) - \lim \lambda_{p,0}.$$

Но $(p+1)^{r-1}|\lambda_{p,0}|^r < H$, так как $\lambda_{p,0} \to 0$ и

$$\chi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt, \quad \mu_n = \int_0^1 t^n\varphi(t)\,dt.$$

Изложенное доказательство действительно, с надлежащими видоизменениями, и для предельного случая $r=\infty$ и дает $(p+1)|\lambda_{p,s}| < H$ в качестве необходимого и достаточного условия того, чтобы χ была интегралом ограниченной функции. Никакого столь же простого результата для случая $r=1$ не существует.

11.17. Одно неравенство для хаусдорфовских средних. В этом параграфе мы докажем одно неравенство, содержащее большое число частных неравенств, играющих важную роль в теории функций классов L^r. Мы будем предполагать, что χ возрастает, $\chi(1)=1$ и $\chi(0)=\chi(+0)=0$, так что последовательность (μ_n) абсолютно

*) Однако пользуясь, по-старому, буквой χ, а не Χ.

монотонна и метод $(\mathfrak{H}, \mu)$ регулярен, а также, что

$$t_m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \mu_{n, m-n} s_n \tag{11.17.1}$$

есть хаусдорфовское среднее положительной последовательности (s_n).

Теорема 216. *Если* $s_n \geqslant 0$ *и* $r > 1$, *то*

$$\sum t_m^r < \left(\int x^{-\frac{1}{r}} d\chi \right)^r \sum s_n^r = H(r) \sum s_n^r, \tag{11.17.2}$$

за исключением того случая, когда $s_n = 0$ *для всех* n, *или же тождественности рассматриваемого преобразования.*

Здесь, естественно, предполагается, что $\sum s_n^r$ и $\int x^{-\frac{1}{r}} d\chi$ конечны. Последний интеграл не есть интеграл Римана-Стилтьеса, поскольку $x^{-\frac{1}{r}}$ не ограничена; таким образом, здесь требуется некоторое обобщение определения интеграла. Мы можем определить рассматриваемый интеграл либо как интеграл в общем смысле „Лебега-Стилтьеса", либо как предел интегралов Римана-Стилтьеса по интервалам $(\varepsilon, 1)$. Вторая точка зрения более элементарна; однако для достижения большей краткости мы предпочтем первую. Постоянная $H(r)$, стоящая в формуле (11.17.2), является наилучшей, но мы не будем здесь доказывать этого. Положим

$$e_m = e_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n (1-x)^{m-n} s_n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n y^{m-n} s_n, \tag{11.17.3}$$

где $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $y = 1 - x$. Тогда в силу неравенства Гёльдера

$$e_m^r \leqslant \sum \binom{m}{n} x^n y^{m-n} s_n^r \left\{ \sum \binom{m}{n} x^n y^{m-n} \right\}^{r-1} = \tag{11.17.4}$$

$$= \sum \binom{m}{n} x^n y^{m-n} s_n^r,$$

и, значит,

$$\sum_m e_m^r \leqslant \sum_m \sum_{n \leqslant m} \binom{m}{n} x^n y^{m-n} s_n^r = \tag{11.17.5}$$

$$= \sum_n x^n s_n^r \sum_{m \geqslant n} \binom{m}{n} y^{m-n} = \frac{1}{1-y} \sum_n s_n^r = \frac{1}{x} \sum_n s_n^r$$

для $0 < x \leqslant 1$. Но

$$t_m = \int \left\{ \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n (1-x)^{m-n} s_n \right\} d\chi = \int e_m(x)\, d\chi. \tag{11.17.6}$$

Следовательно, в силу формул (11.17.5)—(11.17.6) и надлежащей формы неравенства Минковского

$$(11.17.7)\qquad (\sum t_m^r)^{\frac{1}{r}} \leqslant \int (\sum e_m^r)^{\frac{1}{r}}\, d\chi \leqslant \{H(r)\sum s_n^r\}^{\frac{1}{r}}.$$

Это — неравенства (11.17.2), но с $\leqslant$ вместо $<$.

В первом из неравенств (11.17.7) равенство достигается лишь если

$$e_m(x) = K_m\varphi(x)$$

для всех x, кроме принадлежащих множеству S, на котором изменение функции χ равно 0. Здесь следует различать два случая, в зависимости от того, будет ли дополнительное множество S' (а) бесконечным или (б) только конечным точечным множеством. В случае (а) $e_m(x) = K_m\varphi(x)$ для всех m и бесконечного множества значений x; в случае (б) χ есть ступенчатая функция.

(а) В этом случае записываем $e_m(x)$ в виде

$$e_m(x) = (1 - x + xE)^m s_0 = (1 - x\Delta)^m s_0 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} x^k \Delta^k s_0.$$

Пусть s_l — первое s_n, отличное от нуля; тогда $e_m(x) = 0$ для $m < l$, и

$$e_l(x) = (-1)^l x^l \Delta^l s_0 = s_l x^l,$$
$$e_{l+1}(x) = (-1)^l (l+1)\, x^l \Delta^l s_0 + (-1)^{l+1} x^{l+1} \Delta^{l+1} s_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Но на S' имеем $e_l(x) = K_l\varphi(x)$, $e_{l+1}(x) = K_{l+1}\varphi(x)$, так что $K_l \neq 0$, $K_{l+1} \neq 0$; и так как многочлены $K_{l+1}e_l(x)$ и $K_l e_{l+1}(x)$ равны для бесконечного множества значений x, то отсюда следует, что $\varphi(x)$ кратно x^l, и $\Delta^m s_0 = 0$ для $m > l$. Следовательно, s_n есть многочлен относительно n. В силу же предполагаемой сходимости ряда $\sum s_n^r$ он должен быть равен нулю.

(б) Если χ — ступенчатая функция со скачками α_k в точках $x = x_k$, то $x_k \neq 0$ (поскольку метод регулярен) и $t_m = \sum \alpha_k e_m(x_k)$. Далее, в силу (11.17.7) и (11.17.5)

$$(11.17.8)\qquad (\sum_m t_m^r)^{\frac{1}{r}} \leqslant \sum_k \alpha_k \{\sum_m e_m^r(x_k)\}^{\frac{1}{r}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k x_k^{-\frac{1}{r}} \alpha_k (\sum_n s_n^r)^{\frac{1}{r}} = (\sum s_n^r)^{\frac{1}{r}} \int x^{-\frac{1}{r}}\, d\chi.$$

Но в (11.17.4) достигается равенство лишь когда все s_n имеют одно и то же значение c, либо когда x есть 0 или 1. Так как $x_k \neq 0$

и $\sum s_n^r$ сходится, то заключаем, что в (11.17.8) будет достигаться равенство лишь когда все $s_n = 0$, либо когда все $x_k = 1$. Но во втором случае $\chi(x) = 0$ для $0 \leqslant x < 1$ и 1 для $x = 1$, и преобразование сводится к тождественному..

Примеры. (1) Если $\chi = 0$ для $0 \leqslant x < a < 1$ и 1 для $a \leqslant x \leqslant 1$, то $t_m = e_m(a)$, т. е. t_m есть эйлеровское среднее от s_n порядка $q = \frac{1-a}{a}$. Таким образом, если t_m есть (E, q)-среднее от s_n и не все s_n равны нулю, то

$$\sum t_m^r < (q+1) \sum s_n^r.$$

Это равносильно формуле (11.17.5) со строгим неравенством.

(2) Взяв $\chi = t$, получим

$$\sum \left(\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \right)^r < \left(\frac{r}{r-1} \right)^r \sum s_n^r.$$

Более обще, если мы возьмем $\chi = 1 - (1-t)^k$, где $k > 0$, то t_m будет (C, k)-средним от s_n, и

$$\sum t_m^r < \left\{ \frac{\Gamma(1+k)\,\Gamma\left(1 - \frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1 + k - \frac{1}{r}\right)} \right\}^r \sum s_n^r.$$

11.18. Непрерывные преобразования. Преобразования, аналогичные $\mathfrak{H}$-преобразованиям, рассмотренным в предыдущих параграфах, имеются и для функций непрерывного переменного. К ним естественно прийти следующим образом. Наше регулярное $\mathfrak{H}$-преобразование было определено формулой

(11.18.1) $$\Delta^n t_0 = \mu_n \Delta^n s_0,$$

где μ_n — регулярный момент. Предположим теперь, что $f(x)$ есть функция от x, регулярная на неотрицательной вещественной оси и, значит, представимая в виде

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum a_n x^n$$

для малых x. Тогда естественным аналогом формулы (11.18.1) служит

(11.18.2) $$g^{(n)}(0) = \mu_n f^{(n)}(0),$$

где теперь

$$g(x) = \sum \mu_n a_n x^n = \int \sum a_n (xt)^n \, d\chi = \int f(xt)\, d\chi,$$

во всяком случае для малых x.

Мы приходим таким образом к рассмотрению преобразования

$$g(x)=\int f(xt)\,d\chi(t) \tag{11.18.3}$$

и можем теперь забыть о соображениях, приведших нас к этой формуле. Мы будем предполагать, что $f(x)$ непрерывна для всякого $x\geqslant 0$; но интересовать нас будет только поведение $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to\infty$.

Если $\chi(t)=1-(1-t)^k$, где $k>0$, то

$$g(x)=k\int_0^1 f(xt)(1-t)^{k-1}\,dt=\frac{k}{x^k}\int_0^x (x-u)^{k-1}f(u)\,du$$

есть (C, k)-среднее функции $f(x)$ в смысле § 5.14. Если $\chi(t)=0$ для $0\leqslant t<a<1$ и 1 для $a\leqslant t\leqslant 1$, то $g(x)=f(ax)$. Это — аналог эйлеровского преобразования; но в отличие от соответствующего преобразования для s_n оно тривиально, поскольку соотношения $f(x)\to l$ и $g(x)\to l$ равносильны.

Мы докажем лишь одну теорему. При этом мы будем предполагать (без ущерба для общности), что $\chi(0)=0$.

Теорема 217. *Для того чтобы преобразование* (11.18.3) *было регулярным, т. е. чтобы из $f(x)\to l$ следовало $g(x)\to l$, необходимо и достаточно, чтобы $\chi(1)=1$ и $\chi(+0)=\chi(0)=0$.*

Если $f(x)=1$ для всех x, то $g(x)=\int d\chi=\chi(1)$. Следовательно, условие $\chi(1)=1$ необходимо.

Если $f(x)=1$ для $0\leqslant x\leqslant\delta$, где $\delta>0$, и $f(x)=0$ для $x>\delta$, то $f(x)\to 0$. Далее,

$$g(x)=\int_0^{\frac{\delta}{x}} d\chi=\chi\left(\frac{\delta}{x}\right)-\chi(0).$$

Но если наше преобразование регулярно, то $g(x)\to 0$; поэтому $\chi\left(\frac{\delta}{x}\right)\to\chi(0)$, т. е. $\chi(+0)=\chi(0)=0$.

Остается доказать достаточность условий теоремы. Так как $f=l$ дает $g=l$, то достаточно доказать, что из $f\to 0$ следует $g\to 0$. Далее, так как χ есть разность двух ограниченных возрастающих функций, непрерывных в точке $x=0$, то достаточно доказать последнее утверждение для случая возрастающей функции χ. Но действительно, выбирая X так, чтобы $|f|<\varepsilon$ для $x\geqslant X$, и обозначая через $M(X)$ верхнюю грань $|f|$ для $x \leqslant X$, имеем для достаточно больших x

$$|g(x)| \leqslant \int_0^1 |f(xt)|\,d\chi \leqslant \int_0^{\frac{X}{x}} |f(xt)|\,d\chi + \varepsilon \int_{\frac{X}{x}}^1 d\chi \leqslant$$
$$\leqslant M(X)\left\{\chi\left(\frac{X}{x}\right) - \chi(0)\right\} + \varepsilon \int d\chi < 2\varepsilon \int d\chi = 2\varepsilon.$$

В случае монотонной χ и $f \geqslant 0$ для $g(x)$ имеется неравенство, аналогичное (11.17.2), а именно

$$\int_0^\infty g^r(x)\,dx < \left(\int_0^1 x^{-\frac{1}{r}}\,d\chi\right)^r \int_0^\infty f^r(x)\,dx. \tag{11.18.4}$$

Доказательство аналогично проведенному в § 11.17, но несколько проще, благодаря тривиальности эйлеровского преобразования. В частном случае $\chi = t$ это неравенство превращается в

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du\right\}^r dx < \left(\frac{r}{r-1}\right)^r \int_0^\infty f^r(x)\,dx. \tag{11.18.5}$$

11.19. Квази-хаусдорфовские преобразования. Теория $\mathfrak{H}$-преобразований опирается на свойства преобразования δ § 11.1. Имеется другое очень похожее преобразование, также порождающее интересные преобразования. Мы имеем в виду преобразование δ^* с матрицей

$$|\delta^*| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . \\ 0 & -1 & -2 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

получаемой из матрицы $|\delta|$ перестановкой строк и столбцов.

Теорема 218. δ^* *обратно самому себе*: *если* $t = \delta^* s$, *то* $s = \delta^* t$.

Здесь следует сделать одно предварительное замечание. Теорема утверждает, что если

$$t_m = (-1)^m \sum_{n=m}^\infty \binom{n}{m} s_n = \tag{11.19.1}$$
$$= (-1)^m \left\{s_m + (m+1)\,s_{m+1} + \frac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}\,s_{m+2} + \ldots\right\},$$

то s_m аналогичным образом выражается через t_n. Но ряды, входящие в формулу (11.19.1) и обратную ей, бесконечны и не обязаны сходиться. Однако можно избежать рассмотрений, связанных со сходимостью, предположив, что $s_n = 0$ для $n > N$; в этом случае и $t_m = 0$ для $m > N$. Будем понимать теорему 218 в этом смысле.

Доказательство ее аналогично доказательству теоремы 196. Имеем

$$(11.19.2)\quad u_m = (-1)^m \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} t_n = (-1)^m \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{m} \sum_{p=n}^{\infty} \binom{p}{n} s_p =$$
$$= (-1)^m \sum_{p=m}^{\infty} s_p \sum_{n=m}^{p} (-1)^n \binom{n}{m}\binom{p}{n} =$$
$$= \sum_{p=m}^{\infty} \binom{p}{m} s_p \sum_{n=m}^{p} (-1)^{n-m} \binom{p-m}{n-m},$$

и так как внутренняя сумма в последней строке равна 1 при $p = m$ и 0 при $p \neq m$, то $u_m = s_m$.

Сходимость ряда (11.19.1) не обязательно влечет сходимость обратного ряда. Так, при $s_n = a^n$, где $0 < a < 1$, получаем $t_m = \dfrac{(-a)^m}{(1-a)^{m+1}}$, и обратный ряд сходится лишь если $a < \frac{1}{2}$. Двойной ряд в (11.19.2) сходится, если

$$\sum_{p=m}^{\infty} \binom{p}{m} |s_p| \sum_{n=m}^{p} \binom{p-m}{n-m} = \sum_{p=m}^{\infty} \binom{p}{m} 2^{p-m} |s_p| < \infty,$$

что, например, имеет место, когда $s_n = O(a^n)$, где $a < \frac{1}{2}$.

Определим теперь преобразование $(\mathfrak{H}^*, \mu)$ формулой $\lambda^* = \delta^* \mu \delta^*$, где μ, как и в § 11.3, — диагональное преобразование. Тогда, формально, будем иметь

$$t^m = (-1)^m \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{m} \mu_n \sum_{p=n}^{\infty} \binom{p}{n} s_p =$$
$$= (-1)^m \sum_{p=m}^{\infty} s_p \sum_{n=m}^{p} (-1)^n \binom{n}{m}\binom{p}{n} \mu_n =$$
$$= (-1)^m \sum_{p=m}^{\infty} \binom{p}{m} s_p \sum_{n=m}^{p} (-1)^n \binom{p-m}{n-m} \mu_n = \sum_{p=m}^{\infty} \binom{p}{m} \Delta^{p-m}\mu^m \cdot s_p.$$

Таким образом, заменяя p на n, получаем, что наше преобразование определяется формулой

$$(11.19.3)\qquad t_m = \sum \lambda^*_{m,n} s_n,$$

где

$$\lambda^*_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < m, \\ \binom{n}{m}\Delta^{n-m}\mu_m & \text{при } n \geqslant m. \end{cases} \tag{11.19.4}$$

11.20. Регулярность квази-хаусдорфовского преобразования. Выясним теперь, когда преобразование $(\mathfrak{H}^*, m)$ будет регулярным. При этом мы будем считать, что μ_n есть момент.

Предположим сначала, что последовательность (μ_n) абсолютно монотонна, так что χ — возрастающая функция от t. Тогда $\lambda^*_{m,n} \geqslant 0$ и

$$\sum_n \lambda^*_{m,n} = \sum_{n \geqslant m} \binom{n}{m} \int t^m (1-t)^{n-m}\, d\chi = \int \frac{t^m}{\{1-(1-t)\}^{m+1}}\, d\chi = \int \frac{d\chi}{t}.$$

Условия (11.5.2) и (11.5.4) будут выполнены тогда и только тогда, когда этот интеграл сходится и имеет значение 1. Условие (11.5.3) выполнено автоматически, поскольку $\lambda^*_{m,n} = 0$ при $m > n$. Таким образом, необходимым и достаточным условием регулярности будет выполнение равенства

$$\mu_{-1} = \int \frac{d\chi}{t} = 1. \tag{11.20.1}$$

В общем случае ясно, что

$$\sum_n |\lambda^*_{m,n}| \leqslant \int \frac{|d\chi|}{t}.$$

С другой стороны, всякий раз, когда $\sum\limits_n |\lambda^*_{m,n}|$ ограничены, функция

$$X(t) = \int_0^t \frac{d\chi(u)}{u}$$

(надлежащим образом исправленная в ее точках разрыва) может быть получена как предел функций

$$X_q(t) = \sum_{n \geqslant \frac{q}{t}} \lambda^*_{q,n}$$

при стремлении q к бесконечности по надлежащим образом выбранной подпоследовательности q_i, а

$$W(t) = \int_0^t \frac{|d\chi(u)|}{u}$$

получается тогда из $|\lambda^*_{m,n}|$, как $X(t)$ из $\lambda_{m,n}$. Таким образом, нами получена

Теорема 219. *Если μ_n — регулярный момент, соответствующий функции χ, то условия*

(11.20.2) $$\int \frac{|d\chi|}{t} < \infty, \quad \int \frac{d\chi}{t} = 1$$

необходимы и достаточны для регулярности метода $(\mathfrak{H}^*, \mu)$.

11.21. Примеры. (1) Если $\chi(t) = 0$ для $0 \leqslant t < a < 1$ и a для $a \leqslant t \leqslant 1$, то условие (11.20.1), очевидно, выполнено, и

$$\mu_n = a^{n+1}, \qquad \Delta^{n-m}\mu_m = a^{m+1}(1-a)^{n-m}.$$

В этом случае

$$t_m = a^{m+1} \sum_{n \geqslant m} \binom{n}{m} (1-a)^{n-m} s_n =$$

$$= a^{m+1} \left\{ s_m + (m+1)(1-a) s_{m+1} + \frac{(m+1)(m+2)}{2!} (1-a)^2 s_{m+2} + \ldots \right\}.$$

Тем самым мы приходим к методу (γ, a) § 9.11.

(2) Если $\chi = t$, так что $\mu_n = \dfrac{1}{n+1}$, то

$$\binom{n}{m} \Delta^{n-m}\mu_m = \binom{n}{m} \frac{(n-m)!}{(m+1)(m+2)\ldots(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, наше преобразование будет

$$t_m = \frac{s_m}{m+1} + \frac{s_{m+1}}{m+2} + \frac{s_{m+2}}{m+3} + \ldots;$$

очевидно, оно не регулярно. Интеграл (11.20.1) расходится.

(3) Если $\chi = \dfrac{l t^{l+1}}{l+1}$, где $l > 0$, то

$$\mu_n = l \int t^{n+l}\, dt = \frac{l}{n+l+1}.$$

Условие (11.20.1) выполнено, и преобразование регулярно. В этом случае

(11.21.1) $$t_m = l \left\{ \frac{s_m}{m+l+1} + \frac{(m+1) s_{m+1}}{(m+l+1)(m+l+2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(m+1)(m+2) s_{m+2}}{(m+l+1)(m+l+2)(m+l+3)} + \ldots \right\}.$$

В частности, при $l = 1$ получаем преобразование

(11.21.2) $$t_m = (m+1) \left\{ \frac{s_m}{(m+1)(m+2)} + \frac{s_{m+1}}{(m+2)(m+3)} + \ldots \right\}.$$

Можно показать, что преобразования, соответствующие различным значениям l, все равносильны (друг другу и) преобразованию $(C, 1)$. Для каждого $k > 0$ имеются преобразования, аналогичным образом связанные с (C, k).

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ XI

§§ 11.1—11.3. Класс преобразований $\lambda=\delta\mu\delta$ впервые исследовали Hurwitz and Silverman, *TAMS*, **18** (1917), 1—20, как класс преобразований, перестановочных с H. Они рассматривали главным образом преобразования

$$\alpha_0 I+\alpha_1 H+\alpha_2 H^2+\ldots,$$

где I — тождественное преобразование и $f(z)=\sum \alpha_n z^n$ — аналитическая функция, регулярная в начале, и доказали, что такое преобразование регулярно, если $f(z)$ регулярна для $\left|z-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$ и $f(1)=1$. В частности, они доказали, что преобразования (H, k) и (C, k) являются регулярными преобразованиями типа λ.

Hausdorff [(A), *MZ*, **9** (1921), 74—109] переоткрыл класс λ и развил изложенную здесь более общую теорию, связывающую этот класс с „проблемой моментов для конечного интервала". В частности, он доказал фундаментальную теорему 206. Доказательства, изложенные в этой главе, преимущественно извлечены либо из этой, либо из более поздней его работы [Hausdorff (B)] в *MZ*, **16** (1923), 220—248. Промежуточная работа Хаусдорфа, в *MZ*, **9** (1921), 280—299, посвящена различным обобщениям. Краткое изложение этой теории можно найти в книге Widder, гл. 3.

§ 11.4. Теорему 200 доказали Гурвиц и Сильверман, l. c. выше.

§§ 11.6—11.7. Hausdorff (A). Хаусдорф приписывает определение вполне монотонной последовательности Шуру. Доказательство теоремы 201 я строил, следуя советам Бозанке.

§ 11.8. Теорема 203 представляет собой обобщение известной теоремы, гласящей, что система 1, x, x^2,... „полна в $L(0,1)$".

§ 11.9. Hausdorff (A, B) дал несколько доказательств теоремы 206. Изложенное здесь доказательство в основном совпадает с первым из доказательств в (B), которое предложил также, но немного в другой форме, Widder, 101—104. Принятый здесь способ подсказан Аронсайном и Бозанкэ.

По поводу доказательства теоремы Хелли см. Widder, 28—29 *).

Работа Хаусдорфа тесно связана с работами С. Бернштейна и Виддера об абсолютно монотонных функциях. Говорят, что $f(x)$ абсолютно монотонна на интервале $(0,\infty)$, если $(-1)^p f^{(p)}(x)\geqslant 0$ для всех $x>0$; так, e^{-x} абсолютно монотонна. С. Бернштейн доказал, что для абсолютной монотонности функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\,d\chi(t),$$

где $\chi(t)$ — возрастающая ограниченная функция. Это легко выводится из теоремы Хаусдорфа, однако работа Бернштейна была выполнена независимо и другим методом. Можно также (хотя и не столь же просто) вывести теорему Хаусдорфа из теоремы Бернштейна. Более подробные сведения и литературные ссылки по этому вопросу см. Widder, гл. 4.

§ 11.10. Основной результат Рогозинского и Фукса можно найти в работах Rogosinski, *PCPS*, **38** (1942), 166—192, и Fuchs, *OQJ*, **16** (1945), 64—77. Если T и T′ — *регулярные* $\mathfrak{H}$-методы, то для того, чтобы T′ включал T, необходимо и достаточно, чтобы $T'=\Theta T$, где Θ — регулярный $\mathfrak{H}$-метод. Если T′ и T — *любые* $\mathfrak{H}$-методы, T′ включает T и $\mu_n\neq 0$, за исключением последовательности (n_k)

*) См. также И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, 1950, стр. 195—196.

значений n, для которой $\sum \frac{1}{n_k} < \infty$, то $T' = \Theta T$, где Θ — регулярный $\mathfrak{H}$-метод. Является ли условие, наложенное здесь на последовательность (n_k), наилучшим из возможных, — неизвестно, однако Fuchs, *PCPS*, **40** (1944), 189—196, показал, что сформулированная выше теорема о регулярных методах становится неверной, если отбросить предположение о регулярности, ничем его не заменяя.

Hille and Tamarkin, *PNAS*, **19** (1933), 573—577, устанавливают большое число теорем более специального характера, относящихся к включению $\mathfrak{H}$-методов.

§ 11.11. Равносильность методов (H, k) и (C, k) для общего $k > -1$ впервые доказал Hausdorff (A), 89—90.

Аккуратное рассмотрение формул обращения, упомянутых в конце параграфа, проводит Burkill, *PLMS* (2), **25** (1926), 513—524; см. также Widder, гл. 2. Для наших целей достаточно вычислить $\rho_n^{(k)}$ и $\sigma_n^{(k)}$ формально, а затем независимым путем проверить полученные результаты. Для целых k это легко, но для общего k гораздо затруднительней.

§ 11.12. По поводу формулы (11.12.3) см. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, 43, или Widder, 338—341.

Полное изложение теории многочленов Лагерра можно найти в книге Szegö, Orthogonal polynomials (Нью-Йорк, 1939), гл. 5 и 8.

§§ 11.13—11.14. Более полное рассмотрение этих логарифмических и экспоненциальных форм для μ_n можно найти в работе Hausdorff (A).

§ 11.15. См. Hausdorff (B), 227—231. У Хаусдорфа несколько другая точка зрения.

По поводу разложения для $P_n(2w-1)$ по степеням w („формула Мэрфи") см. Hobson, Spherical and ellipsoidal harmonics (Кэмбридж, 1931), 22, или Уиттекер и Ватсон, 2, 102—103.

Обратной к последней формуле этого параграфа служит формула

$$\mu_m = \frac{a_0}{m+1} + \frac{m a_1}{(m+1)(m+2)} + \frac{m(m-1)a_2}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \ldots$$

§ 11.16. Более полное рассмотрение теоремы 215 и связанных с нею теорем см. в работе Hausdorff (B), 233—240, и книге Widder, 109—113. По поводу „слабой сходимости" (идея применения которой принадлежит Ф. Риссу) см. Littlewood, 45—49.

§ 11.17. Hardy, *JLMS*, **18** (1943), 46—50. Харди доказывает, что $H(r)$ есть наилучшая из возможных постоянных.

Полное изложение теории интеграла Лебега-Стилтьеса можно найти в книге С. Сакс, Теория интеграла (М.—Л., ГИИЛ, 1949), гл. 3. Свойства, использованные в этом параграфе, сформулированы в книге Г. Харди, Д. Литтльвуд и Г. Полиа, Неравенства (М.—Л., ГИИЛ, 1948), 184—189. Требуемая форма неравенства Минковского есть теорема 201 „Неравенств", переформулированная для интегралов Стилтьеса в согласии со сказанным там на стр. 187—188.

§ 11.18. По поводу общей теории непрерывных хаусдорфовских преобразований см. Rogosinski, *PCPS*, **38** (1942), 344—363, и Fuchs and Rogosinski, *OQJ*, **14** (1943), 27—48.

Для доказательства неравенства (11.18.4) следует применить теорему 202 „Неравенств" (снова переформулированную для интегралов Стилтьеса).

§ 11.20. Интеграл $\int \frac{d\chi}{t}$ снова нужно рассматривать либо как интеграл Лебега-Стилтьеса, либо как предел интеграла, взятого от ε до 1. Мы опираемся на ту теорему, что

$$\sum \int a_n(x)\, d\chi = \int \left\{ \sum a_n(x) \right\} d\chi,$$

если χ — возрастающая функция, $a_n(x) \geqslant 0$ и одна из частей равенства конечна. Это — весьма частный случай одной теоремы, доказанной у Сакса (l. с. в примечании к § 11.17, 50—51). Здесь $a_n(x)$ непрерывна для каждого n, а ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на любом интервале $(\varepsilon, 1)$, так что приведенное выше равенство легко доказать и на основе более элементарного определения.

§ 11.21. Hardy, *PCPS*, **20** (1921), 304—307, доказывает, что преобразование (11.21.2) равносильно (C, 1), но эта теорема фактически представляет собой частный случай одной теоремы, ранее доказанной Кноппом. По поводу обобщений см. работы Харди и Литтльвуда и Кноппа, указанные в примечании к § 6.7.

Глава XII

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ВИНЕРА

12.1. Введение. В этой главе мы возвращаемся к теоремам „тауберова" типа, общий характер которых был разъяснен в § 7.1. Мы уже доказали большое число таких теорем, например, в §§ 6.1 — 6.3 гл. VII (почти заполненной ими), в §§ 9.6 — 9.7 и в § 9.13. Но методы доказательства менялись от теоремы к теореме, и на первый взгляд могло бы показаться, что между ними очень мало общего. Теперь мы изложим общую теорию, принадлежащую главным образом Винеру, которая даст нам возможность представить большинство этих частных теорем как части стройного целого.

Мы начнем с теоремы 92, а именно:

(*A*) *если* $s_n \to s$ (A) *и* $s_n = O(1)$, *то* $s_n \to s$ (C, 1).

Это — типичная „тауберова" теорема, вполне пригодная в качестве отправного пункта наших вступительных замечаний. Но нам будет удобнее воспользоваться ее интегральным аналогом. Первое из предположений теоремы (*A*) можно представить в любой из следующих равносильных форм:

$$\sum a_n r^n \to s, \quad (1-r)\sum s_n r^n \to s, \quad y\sum s_n e^{-ny} \to s, \quad \frac{1}{x}\sum s_n e^{-\frac{n}{x}} \to s,$$

где $r \to 1$, $y \to 0$, $x \to \infty$; ее утверждением является

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leqslant x} s_n \to s.$$

Интегральным аналогом служит

(*Б*) *если*

$$\frac{1}{x}\int e^{-\frac{t}{x}} F(t)\,dt \to l \tag{12.1.1}$$

и $F(t) = O(1)$, *то*

$$\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,dt \to l; \tag{12.1.2}$$

эту теорему мы и изберем предметом нашего рассмотрения.

Будет небесполезно сделать здесь два замечания, содержание которых почти очевидно после гл. VII; см., в частности, § 7.1.

(I) Теорема (*Б*) является „исправленным обращением" теоремы „абелева типа"

„($Б'$) (12.1.2) *влечет* (12.1.1)",

причем здесь уже не требуется дополнительных ограничений на $F(t)$. Эта последняя теорема доказывается просто. Примем, что мы вправе сделать, $l=0$; тогда имеем

$$F_1(t)=\int_0^t F(u)\,du=o(t),$$

а отсюда

$$\int e^{-\frac{t}{x}} F(t)\,dt=\frac{1}{x}\int e^{-\frac{t}{x}} F_1(t)\,dt=o\left(\frac{1}{x}\int e^{-\frac{t}{x}}\,t\,dt\right)=o(x).$$

(II) Теорема (A) представляет собой тривиальное следствие теоремы ($Б$). Действительно, считая теорему ($Б$) доказанной и беря $F(t)=s_n$ для $n\leqslant t<n+1$, получаем

$$\frac{1}{x}\int e^{-\frac{t}{x}} F(t)\,dt=\frac{1}{x}\sum s_n\int_n^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}\,dt=\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)\sum s_n e^{-\frac{n}{x}},$$

откуда явствует, что первые предположения теорем (A) и ($Б$) равносильны. А так как вторые предположения, а также утверждения очевидно равносильны, то (A) следует из ($Б$). Это рассуждение в основном совпадает с проведенным в § 7.2.

И первое предположение и заключение теоремы ($Б$) имеют вид

$$P_G(F):\quad \frac{1}{x}\int G\left(\frac{t}{x}\right)F(t)\,dt\to l\int G(t)\,dt. \tag{12.1.3}$$

При этом в предположении

$$G(t)=G_1(t)=e^{-t},\quad \int G_1(t)\,dt=1,$$

а в заключении

$$G(t)=G_2(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } t>1,\end{cases}\qquad \int G_2(t)\,dt=1.$$

Таким образом, теорема ($Б$) может быть сформулирована в виде

$$\text{из } P_{G_1}(F) \text{ и } F(t)=O(1) \text{ следует } P_{G_2}(F); \tag{12.1.4}$$

и представляется вероятным, что любая теорема этого вида будет иметь важные следствия тауберова типа.

Производя преобразования

$$t=e^{\tau},\quad x=e^{\xi},\quad F(e^{\tau})=f(\tau),\quad e^{\tau}G(e^{\tau})=g(-\tau),$$

получаем

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty G\left(\frac{t}{x}\right)F(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau-\xi}G(e^{\tau-\xi})\,F(e^{\tau})\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_0^\infty G(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} g(-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, по замене ξ и τ на x и t, условие (12.1.3) превращается в

$$(12.1.5)\qquad P_g(f):\qquad \int g(x-t)f(t)\,dt \to l\int g(t)\,dt,$$

где интегралы берутся теперь от $-\infty$ до $+\infty$; а (12.1.4) превращается в

$$(12.1.6)\qquad \text{из } P_{g_1}(f) \text{ и } f(t)=O(1) \text{ следует } P_{g_2}(f),$$

с соответствующими g_1 и g_2 *). Мы приходим таким образом к вопросу об общих условиях, которым должны подчиняться g_1 и g_2, чтобы была справедлива теорема (12.1.6) или аналогичная теорема с каким-нибудь другим условием, наложенным на f. Фундаментальное открытие Винера состояло в нахождении такого условия $W(g_1)$ на g_1 (приводимого в следующем параграфе), которое позволило обойтись почти без всяких условий на g_2. Его „ключевая теорема", в любой из ее форм, есть теорема типа

$$(12.1.7)\qquad \text{из } W(g_1),\ P_{g_1}(f) \text{ и } R(f) \text{ следует } P_{g_2}(f),$$

где $R(f)$ есть „тауберово" условие на f, а заключение справедливо не для какой-либо специальной функции g_2 или функций, подчиненных тому же условию, что и g_1, а для „всех разумных" g_2. При этом, вообще говоря, не требуется, чтобы

$$P_{g_2}(f) \text{ влекло } P_{g_1}(f),$$

так что предложения (12.1.7) при различном выборе функций g_1, g_2 не всегда будут исправленными обращениями теорем абелева типа, хотя они и остаются еще „тауберовыми" в более широком смысле. Мы уже встретились с результатом такого типа в теореме 147.

12.2. Условие Винера. Форма условия $W(g_1)$ подсказывается теорией преобразований Фурье функций класса $L(-\infty,\infty)$ **). Ясно, что $P_g(f)$ влечет $P_h(f)$ для всех функций h вида

$$h(t)=\sum_{m=1}^{n} r_m g(t-a_m).$$

Это наводит на мысль, что то же заключение должно распространяться, с надлежащими предосторожностями, и на функции $h(t)$ вида

$$(12.2.1)\qquad h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int r(u)\,g(t-u)\,du\ ^{***}).$$

*) А именно с $g_1(t)=e^{-t}e^{-e^{-t}}$, $g_2(t)=\begin{cases} e^{-t} & \text{при } t\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } t<0.\end{cases}$

**) А не более симметричной планшерелевской теорией для функций класса $L^2(-\infty,\infty)$.

***) Здесь и до § 12.7 включительно интегралы с неуказанными пределами берутся от $-\infty$ до $+\infty$.

Мы приходим, таким образом, к вопросу, можно ли при заданной функции g из L выразить произвольную функцию h из L в виде (12.2.1), где ядро r также принадлежит классу L.

Преобразование Фурье функции $r(t)$ из $L(-\infty, \infty)$ определяется формулой

$$R(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int r(u)\,e^{itu}\,du \tag{12.2.2}$$

(и аналогично для других букв взамен r и R). Хорошо известно*), что если g и r принадлежат классу L, то и h, определенная формулой (12.2.1), принадлежит классу L, причем $H(t)=R(t)\,G(t)$. Таким образом, если g и h заданы и мы хотим выразить h в форме (12.2.1), то нам подсказывается следующий путь: сначала найти $R(t)$ по формуле

$$R(t)=\frac{H(t)}{G(t)}, \tag{12.2.3}$$

а затем $r(t)$ — по определенной в каком-то смысле обратной формуле Фурье

$$r(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int R(t)\,e^{-itu}\,du. \tag{12.2.4}$$

Представляется существенным, что для успешности этого решения нужно, чтобы

$$G(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(u)\,e^{itu}\,du\neq 0, \tag{12.2.5}$$

т. е. чтобы преобразование Фурье функции $g(t)$ не обращалось в нуль.

Мы обозначим через W класс функций, которые (I) принадлежат классу $L(-\infty, \infty)$ и (II) имеют преобразование Фурье, не обращающееся в нуль ни для какого t, и предположим, что g_1 принадлежит этому классу W. Мы получим тогда, (а) что всякая функция h из L может быть представлена в виде (12.2.1) с ядром r из L[1]) и (б) что $P_g(f)$ влечет $P_h(f)$ для любой ограниченной f. Появление здесь класса W, как мы видели, совершенно естественно. Но поразительно то, что столь простого предположения, как „g принадлежит классу W", оказывается достаточным для такого общего заключения: ведь естественно было бы ожидать, что любая теорема этого рода должна обременяться более сложными ограничениями на g, особенно относительно поведения G в бесконечности.

---

*) Нужные нам теоремы о преобразованиях Фурье будут более точно сформулированы в § 12.3.

[1]) На самом деле автор доказывает представимость в виде (12.2.1) с ядром r из L только для тех функций h из L, преобразование Фурье которых обращается в нуль вне некоторого интервала. В столь же общей форме, как в тексте, утверждение автора неверно. (*Прим. перев.*)

Нашей главной задачей теперь будет доказать „ключевую теорему“ Винера, в следующей ее форме:

Теорема 220. *Если* (I) g *принадлежит классу* W, (II) h *принадлежит классу* L *и* (III) f *ограничена, то* $P_g(f)$ *влечет* $P_h(f)$, *т. е.*

$$\int g(x-t)f(t)\,dt \to l\int g(t)\,dt \tag{12.2.6}$$

влечет

$$\int h(x-t)f(t)\,dt \to l\int h(t)\,dt. \tag{12.2.7}$$

Теорему 220 мы выведем из следующей теоремы Питта:

Теорема 221. *Если* (I) g *принадлежит классу* W, (II) f *ограничена и медленно колеблется, или вещественна, ограничена и медленно убывает, и* (III) *выполняется условие* $P_g(f)$, *т. е.* (12.2.6), *то* $f(x) \to l$ *при* $x \to \infty$.

Здесь термины „медленно колеблется“ и „медленно убывает“ употребляются не как в § 6.2, а в упомянутом в примечании к § 6.2 смысле, соответствующем интервалу $(-\infty, \infty)$; связь между обоими смыслами выяснится в § 12.8. А именно, теперь мы будем говорить, что $f(x)$ „медленно колеблется“, если

$$f(y)-f(x) \to 0, \tag{12.2.8}$$

когда

$$y>x, \quad x\to\infty, \quad y-x\to 0, \tag{12.2.9}$$

и „медленно убывает“, если она вещественна и

$$\underline{\lim}\,\{f(y)-f(x)\} \geqslant 0 \tag{12.2.10}$$

при тех же условиях. Так, $f(x)$ при $f'(x)=O(1)$ медленно колеблется, а при $f'(x) > -H$ медленно убывает. Очевидно, достаточно будет доказать теорему 221 для вещественных и медленно убывающих f.

12.3. Леммы о преобразованиях Фурье. Мы будем опираться на следующие теоремы о преобразованиях Фурье функций из L; доказательства первых трех из них можно найти в любой книге, посвященной интегралам Фурье. Символическая запись $G \sim g$ будет выражать, что „G есть преобразование Фурье для g“.

Теорема 222. *Если* g *принадлежит классу* L *и* $G\sim g$, *то* G *непрерывна и ограничена.*

Теорема 223. *Если* g *принадлежит классу* L *и* $G\sim g$, *то*

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int G(u)\,e^{-itu}\,du \qquad (C,\ 1),$$

т. е.

$$g(t)=\lim_{U\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-U}^{U}\left(1-\frac{|u|}{U}\right)G(u)\,e^{-itu}\,du$$

для почти всех t. В частности, если G — тождественный нуль, то и g равно нулю.

Эта формула обращения будет фактически нужна нам только ради ее следствия, сформулированного в последней фразе.

Теорема 224. *Если g и r принадлежат классу L, то*

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int r(u)\,g(t-u)\,du$$

также принадлежит классу L, и

$$H(t)=R(t)\,G(t).$$

Теорема 225. *Если $P\sim p$ и $Q\sim q$, то*

$$P(t-c)\sim e^{-ict}p(t), \tag{12.3.1}$$

$$P(t-c)\,Q(t)\sim\frac{e^{-ict}}{\sqrt{2\pi}}\int p(t-u)\,q(u)\,e^{icu}\,du \tag{12.3.2}$$

и

$$P(t-c)\{Q(t)-Q(c)\}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\{p(t-u)-p(t)\}\,q(u)\,e^{ic(u-t)}\,du. \tag{12.3.3}$$

Из последних трех формул формула (12.3.1) очевидна, а (12.3.2) следует из (12.3.1) и теоремы 224. Что касается формулы (12.3.3), то в силу (12.3.1)

$$P(t-c)\,Q(c)=\frac{P(t-c)}{\sqrt{2\pi}}\int q(u)\,e^{icu}\,du\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int p(t)\,q(u)\,e^{ic(u-t)}\,du,$$

и (12.3.3) следует отсюда и из (12.3.2).

12.4. Леммы относительно класса U. Класс преобразований Фурье функций из L мы будем обозначать через U. Если

$$G(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(u)\,e^{itu}\,du,$$

где g принадлежит классу L, то мы будем писать

$$U(G)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int|g(u)|\,du.$$

Очевидно, $|G(t)|\leqslant U(G)$ для всех вещественных t.

Теорема 226. *Если G_1 и G_2 принадлежат классу U, то также G_1+G_2 и G_1G_2 принадлежат классу U, причем*

$$U(G_1+G_2)\leqslant U(G_1)+U(G_2), \quad U(G_1G_2)\leqslant U(G_1)\,U(G_2).$$

Для G_1+G_2 это очевидно. Что же касается произведения G_1G_2, то, по теореме 224, оно служит преобразованием Фурье для

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g_1(t-u)\,g_2(u)\,du,$$

так что

$$U(G_1G_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int|h(t)|\,dt\leqslant\frac{1}{2\pi}\int dt\int|g_1(t-u)|\,|g_2(u)|\,du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int|g_2(u)|\,du\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int|g_1(t-u)|\,du=U(G_1)\,U(G_2).$$

Теорема 227. *Если G_1 и G_2 принадлежат классу U и $U(G_2)=d<1$, то $H=\frac{G_1}{1+G_2}$ принадлежит классу U, и*

$$U(H)\leqslant\frac{U(G_1)}{1-d}.$$

Так как $|G_2|\leqslant U(G_2)=d<1$, то

$$H=\sum(-1)^nG_1G_2^n=\sum(-1)^nH_n,$$

где H_n в силу теоремы 226 принадлежат классу U. Если H_n есть преобразование Фурье для h_n, то

$$\sum_M^N(-1)^nH_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\sum_M^N(-1)^n\,h_n(u)\,e^{itu}\,du.$$

Но так как в силу теоремы 226

$$U(H_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int|h_n|\,du\leqslant U(G_1)\,\{U(G_2)\}^n=d^nU(G_1),$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left|\sum_M^N(-1)^n\,h_n\right|du\leqslant\sum_M^N U(H_n)\leqslant U(G_1)\sum_M^N d^n\to 0,$$

когда M и N стремятся к бесконечности. Отсюда следует (по теории „сильной сходимости“ функций из L) существование функции h из L такой, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left|h-\sum_0^N(-1)^n\,h_n\right|du\to 0,$$

а тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int he^{itu}\,du=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\sum_{0}^{N}(-1)^n h_n e^{itu}\,du=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{0}^{N}(-1)^n G_1 G_2^n=\frac{G_1}{1+G_2}=H.$$

Таким образом, H принадлежит классу U. Наконец,

$$U(H)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left|\sum_{0}^{N}(-1)^n h_n\right|du\leqslant U(G_1)\sum d^n=\frac{U(G_1)}{1-d}.$$

Последняя наша лемма будет относиться к функциям специального вида, которые будут играть важную роль в доказательстве теоремы 221. Положим

$$p(t)=\begin{cases}1-|t| & \text{при } |t|\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } |t|>1.\end{cases}$$

Тогда

$$P(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1-|u|)\,e^{itu}\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}t}\right)^2.$$

$p(t)$ и $P(t)$ принадлежат классу L, и каждая из них служит преобразованием Фурье для другой, так что принадлежит классу U. Положим еще

(12.4.1) $$k_\lambda(t)=p\left(\frac{t}{2\lambda}\right),\quad K_\lambda(t)=2\lambda P(2\lambda t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin^2\lambda t}{\lambda t^2}$$

для каждого положительного λ. Тогда K_λ и k_λ будут служить друг для друга преобразованиями Фурье и, значит, обе будут принадлежать классу U.

Теорема 228. *Преобразованием Фурье функции*

(12.4.2) $$q_\varepsilon(t)=\begin{cases}1 & \text{при } |t|\leqslant\varepsilon,\\ 2-\frac{|t|}{\varepsilon} & \text{при } \varepsilon\leqslant|t|\leqslant 2\varepsilon,\\ 0 & \text{при } |t|\geqslant 2\varepsilon\end{cases}$$

служит

(12.4.3) $$Q_\varepsilon(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\varepsilon t-\cos 2\varepsilon t}{\varepsilon t^2},$$

При этом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int |Q_\varepsilon(t)|\,dt \leqslant 3$$

(*так что* q_ε *принадлежит* U), *а*

$$\int |Q_\varepsilon(t-y)-Q_\varepsilon(t)|\,dt \to 0$$

при фиксированном y *и* $\varepsilon \to 0$.

Здесь $q_\varepsilon(t)$ есть „трапецоидальная" функция, график которой дан на фиг. 3, и $q_\varepsilon(t)=2k_\varepsilon(t)-k_{\frac{1}{2}\varepsilon}(t)$, откуда непосредственно следует (12.4.3). Далее,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int |Q_\varepsilon(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\int \frac{1-\cos 2\varepsilon t}{\varepsilon t^2}\,dt+\int \frac{1-\cos\varepsilon t}{\varepsilon t^2}\,dt\right)=$$

$$=\frac{3}{\pi}\int \frac{1-\cos u}{u^2}\,du=3.$$

Наконец, полагая

$$C(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos t-\cos 2t}{t^2},$$

имеем $Q_\varepsilon(t)=\varepsilon C(\varepsilon t)$, C принадлежит классу L, и

$$\int |Q_\varepsilon(t-y)-Q_\varepsilon(t)|\,dt=\varepsilon\int |C(\varepsilon t-\varepsilon y)-C(\varepsilon t)|\,dt=$$

$$=\int |C(u-\varepsilon y)-C(u)|\,du,$$

что при $\varepsilon\to 0$ стремится к нулю.

12.5. Заключительные леммы. Наши последние две леммы (первая из которых является теоремой, представляющей и самостоятельный интерес) составляют ядро доказательства теорем 221 и 220.

Теорема 229. *Если* g *принадлежит классу* W, h — *классу* L *и* $H(t)=0$ *для* $|t|>2\lambda$, *то* $\frac{H(t)}{G(t)}$ *принадлежит классу* U. *В частности, это верно для* $H(t)=k_\lambda(t)$.

Иными словами, если G и H являются преобразованиями Фурье функций из L, причем G не обращается в нуль ни для одного t, а H равно нулю для всех t вне некоторого конечного интервала, то $\frac{H}{G}$ есть преобразование Фурье некоторой функции из L.

Разобьем отрезок $[-2\lambda, 2\lambda]$ на N равных частей точками

$$t_0=-2\lambda,\quad t_1=-2\lambda+3\varepsilon,\ \ldots,\quad t_n=-2\lambda+3n\varepsilon,\ \ldots,\quad t_N=2\lambda,$$

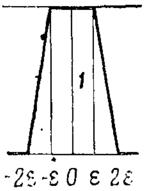
где ε выбрано так, что $3N\varepsilon = 4\lambda$. Тогда (как видно из фиг. 4, в которой вертикали проведены на одинаковых расстояниях ε) для $|t| \leqslant 2\lambda$ имеет место равенство

$$\sum_0^N q_\varepsilon(t - t_n) = 1.$$

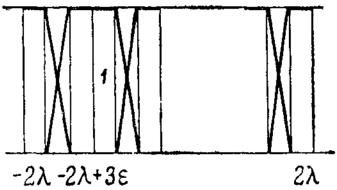
Поэтому, для $|t| \leqslant 2\lambda$,

$$\frac{H(t)}{G(t)} = \sum_{n=0}^{N} \frac{q_\varepsilon(t-t_n)H(t)}{G(t)} = \sum_{n=0}^{N} \chi_n(t). \tag{12.5.1}$$

Так как $G(t) \neq 0$, а $H(t) = 0$ для $|t| > 2\lambda$, то это равенство справедливо для всех t, и в силу теоремы 226 достаточно доказать,



Фиг. 3



Фиг. 4

что каждая из функций χ_n принадлежит классу U. Покажем, что это действительно имеет место для достаточно малых ε.

При $|t - t_n| \leqslant 2\varepsilon$

$$G(t) = G(t_n) + \{G(t) - G(t_n)\} q_{2\varepsilon}(t - t_n),$$

поскольку тогда $q_{2\varepsilon}(t - t_n) = 1$; а при $|t - t_n| > 2\varepsilon$

$$q_\varepsilon(t - t_n) H(t) = 0.$$

Поэтому

$$\chi_n(t) = \frac{q_\varepsilon(t-t_n)H(t)}{G(t_n) + \{G(t) - G(t_n)\} q_{2\varepsilon}(t-t_n)} = \frac{G_1G_2}{1+G_3},$$

где

$$G_1(t) = \frac{q_\varepsilon(t-t_n)}{G(t_n)}, \quad G_2(t) = H(t), \quad G_3(t) = \frac{G(t) - G(t_n)}{G(t_n)} q_{2\varepsilon}(t - t_n).$$

В силу теорем 226 и 228 G_1, G_2 и G_3 принадлежат классу U, и потому на основании теоремы 227 достаточно доказать, что при малых ε

$$U(G_3) = \frac{1}{|G(t_n)|} U\{[G(t) - G(t_n)] q_{2\varepsilon}(t - t_n)\} < 1. \tag{12.5.2}$$

Но

$$\gamma(t) = \{G(t) - G(t_n)\}\, q_{2\varepsilon}(t - t_n),$$

по теореме 225 (12.3.3), есть преобразование Фурье для

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \{Q_{2\varepsilon}(t-u) - Q_{2\varepsilon}(t)\}\, g(u)\, e^{it_n(u-t)}\, du.$$

Поэтому

$$U(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int dt \left| \int \{Q_{2\varepsilon}(t-u) - Q_{2\varepsilon}(t)\}\, g(u)\, e^{\ \ n(u-t)}\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int dt \int |\, Q_{2\varepsilon}(t-u) - Q_{2\varepsilon}(t)\,|\,|\, g(u)\,|\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int |\, g(u)\,|\, du \int |\, Q_{2\varepsilon}(t-u) - Q_{2\varepsilon}(t)\,|\, dt.$$

Внутренний интеграл в последней строке ограничен и для каждого фиксированного u стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$; а g принадлежит классу L. Отсюда следует, что $U(\gamma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. С другой стороны, так как $G(t)$ непрерывна и не обращается в нуль, то $|\,G(t)\,|$ имеет на отрезке $[-2\lambda, 2\lambda]$ положительную нижнюю грань μ. Поэтому $U(G_\delta) \leqslant \frac{U(\gamma)}{\mu} \to 0$. Отсюда следует, что для достаточно малых ε выполнено неравенство (12.5.2), чем и завершается доказательство теоремы.

Теорема 230. *Если, при* $x \to \infty$,

$$(12.5.3) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int K_\lambda(x-t) f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin^2 \lambda (x-t)}{\lambda (x-t)^2} f(t)\, dt \to l$$

для всех положительных λ, *или некоторых произвольно больших* λ, *а* $f(t)$ *ограничена и медленно колеблется, или вещественна, ограничена и медленно убывает, то* $f(x) \to l$.

Мы можем считать $f(t)$ вещественной и медленно убывающей, а $l = 0$. Если $f(x)$ не стремится к нулю, то существует такое положительное δ, что для произвольно больших значений x выполняется одно из неравенств $f(x) > \delta$ или $f(x) < -\delta$, пусть, например, первое. Так как $\varliminf \{f(y) - f(x)\} \geqslant 0$, когда $x \to \infty$, $y > x$ и $y - x \to 0$, то тогда существуют сколь угодно большое $x_0 = x_0(\delta)$ и некоторое $\eta = \eta(\delta)$ такие, что

$$f(t) \geqslant \frac{1}{2}\delta \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant t \leqslant x + 2\eta).$$

Полагая $\xi = x + \eta$ и обозначая через M верхнюю грань для $|f|$, получаем тогда

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{\sin^2\lambda(\xi-t)}{\lambda(\xi-t)^2} f(t)\,dt \geqslant \frac{\delta}{2\pi}\int\limits_{\xi-\eta}^{\xi+\eta} \frac{\sin^2\lambda(\xi-t)}{\lambda(\xi-t)^2}\,dt -$$

$$-\frac{M}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\xi-\eta} + \int\limits_{\xi+\eta}^{\infty}\right)\frac{\sin^2\lambda(\xi-t)}{\lambda(\xi-t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{\delta}{\pi}\int\limits_0^{\eta} \frac{\sin^2\lambda u}{\lambda u^2}\,du - \frac{2M}{\pi}\int\limits_{\eta}^{\infty} \frac{\sin^2\lambda u}{\lambda u^2}\,du.$$

При $\lambda \to \infty$ первый из интегралов в правой части стремится к $\frac{1}{2}\pi$, а второй — к нулю. Поэтому для достаточно больших λ и произвольно больших ξ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{\sin^2\lambda(\xi-t)}{\lambda(\xi-t)^2} f(t)\,dt > \frac{1}{4}\delta$$

и

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{1}{\pi}\int \frac{\sin^2\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^2} f(t)\,dt > 0,$$

в противоречие с условием (12.5.3). Аналогично устанавливается, что к противоречию приводит и предположение $f(x) < -\delta$. Тем самым теорема доказана.

Требование, чтобы условие (12.5.3) выполнялось для произвольно больших λ, существенно. Так, преобразование Фурье $k_\lambda(t)$ функции $K_\lambda(t)$ равно нулю для $|t| > 2\lambda$, так что

$$\int K_\lambda(x-t)\,e^{ict}\,dt = 0$$

для $c > 2\lambda$. Тем самым условие (12.5.3) выполнено (с $l = 0$), когда $f(t) = e^{ict}$ и $c > 2\lambda$; при этом f медленно колеблется. И, однако, f не стремится к нулю.

12.6. Доказательство теорем 221 и 220. Теперь уже легко доказать теорему 221. Мы можем считать при этом $f(t)$ вещественной и медленно убывающей, а $l = 0$.

В силу теоремы 229 $\frac{k_\lambda}{G}$ принадлежит U, т. е.

$$\frac{k_\lambda(t)}{G(t)} \sim r_\lambda(t),$$

где r_λ принадлежит L. Поэтому согласно теореме 224

$$k_\lambda(t) = \frac{k_\lambda(t)}{G(t)}\,G(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(t-u)\,r_\lambda(u)\,du,$$

так что согласно теореме 223

$$K_\lambda(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int g(x-u)\,r_\lambda(u)\,du$$

для почти всех x. Отсюда

$$\rho(x)=\int K_\lambda(x-t)f(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)\,dt\int g(x-t-u)\,r_\lambda(u)\,du=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int r_\lambda(u)\,du\int g(x-t-u)f(t)\,dt,$$

где обращение порядка интегрирования законно в силу теоремы Фубини. Но внутренний интеграл справа ограничен (поскольку g принадлежит классу L, а f ограничена) и, по предположению, при каждом фиксированном u стремится к нулю, когда $x\to\infty$. А r_λ принадлежит классу L. Отсюда следует, что $\rho(x)\to 0$ для каждого λ, и, значит, в силу теоремы 230 $f(x)\to 0$.

Теперь легко доказать теорему 220; при этом мы снова можем предполагать, что $l=0$. Нам дано, что g принадлежит классу W, h — классу L и f ограничена. Положим

$$m(x)=\int h(x-t)f(t)\,dt.$$

Очевидно, m ограничена. Далее,

$$m(y)-m(x)=\int\{h(y-t)-h(x-t)\}f(t)\,dt,$$

и

$$|m(y)-m(x)|\leqslant M\int|h(y-t)-h(x-t)|\,dt=$$
$$=M\int|h(y-x-u)-h(-u)|\,du,$$

где M снова означает верхнюю грань для $|f|$. Отсюда следует, что $m(y)-m(x)\to 0$, когда $x\to\infty$ и $y-x\to 0$, т. е. что $m(x)$ медленно колеблется.

Далее,

$$\int g(x-t)\,m(t)\,dt=\int g(x-t)\,dt\int h(t-u)f(u)\,du=$$
$$=\int f(u)\,du\int g(x-t)\,h(t-u)\,dt=$$
$$=\int f(u)\,du\int g(x-u-w)\,h(w)\,dw=$$
$$=\int h(w)\,dw\int f(u)\,g(x-u-w)\,du$$

(где обращения порядка интегрирования снова законны на основании теоремы Фубини). Но последний внутренний интеграл ограничен (поскольку g принадлежит классу L, а f ограничена) и, согласно предположению, для каждого фиксированного w стремится к нулю при $x \to \infty$. Так как, с другой стороны, h принадлежит классу L, то заключаем, что

$$\int g(x-t)\, m(t)\, dt \to 0.$$

Но $m(x)$ — ограниченная медленно колеблющаяся функция; следовательно, по теореме 221, $m(x) \to 0$, а это и есть утверждение (12.2.7) теоремы 220.

Мы вывели теорему 220 из теоремы 221. Легко также, обратно, вывести теорему 221 из теоремы 220; но нам будет удобнее доказать это в § 12.8, после преобразования этих теорем к виду, приспособленному к интервалу $(0, \infty)$.

Условие $G(t) \neq 0$ является в некотором смысле *необходимым* условием в обеих теоремах. Если $G(c) = 0$, $H(c) \neq 0$ и $f(t) = e^{-ict}$, то

$$\int g(x-t) f(t)\, dt = \int g(u) f(x-u)\, du = e^{-icx} \int g(u)\, e^{icu}\, du = 0$$

для каждого x и, однако,

$$\int h(x-t) f(t)\, dt = e^{-icx} H(c)$$

не стремится к нулю. Таким образом, это условие в теореме 220 необходимо. А так как e^{-ict} вместе с тем медленно колеблется, то тот же выбор функций g и f показывает, что условие $G(t) \neq 0$ необходимо и в теореме 221.

12.7. Вторая теорема Винера. Винеру принадлежит и другая теорема, об интегралах Стилтьеса, также вытекающая из теоремы 221. Мы будем пользоваться ею меньше, чем теоремой 220, однако она имеет важное теоретическое значение, будучи непосредственно применимой к бесконечным рядам. Мы должны начать с определения нового класса функций, содержащегося в классе L, но более узкого.

Мы будем говорить, что функция $g(t)$ принадлежит классу M, если она непрерывна и

$$(12.7.1) \qquad \sum \max_{n \leqslant t \leqslant n+1} |g(t)| < \infty$$

(где сумма берется от $-\infty$ до $+\infty$). Очевидно, что каждая функция g из M принадлежит классу L и что условие (12.7.1) равносильно условию

$$(12.7.2) \qquad \sum \max_{an+b \leqslant t \leqslant a(n+1)+b} |g(t)| < \infty$$

для любых фиксированных $a\ (\neq 0)$ и b. Если G принадлежит классу M, а ее преобразование Фурье G не обращается в нуль ни для какого t, то мы будем говорить, что g принадлежит W^*; таким образом, W^* есть подкласс класса W.

Наконец, мы будем рассматривать интегралы Стилтьеса вида $\int \varphi(t)\,d\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ имеет ограниченное изменение на каждом конечном интервале значений t, причем

$$\int_t^{t+1} |d\alpha(u)| < H. \tag{12.7.3}$$

Теорема 231. *Если* (I) g *принадлежит классу* W^*, (II) h *принадлежит классу* M, (III) α *удовлетворяет условию* (12.7.3) *и*

$$\int g(x-t)\,d\alpha(t) \to l\int g(t)\,dt, \tag{12.7.4}$$

то

$$\int h(x-t)\,d\alpha(t) \to l\int h(t)\,dt. \tag{12.7.5}$$

Мы снова предполагаем, что $l=0$, и полагаем теперь

$$m(x) = \int h(x-t)\,d\alpha(t).$$

Так как

$$\int |h(x-t)|\,|d\alpha(t)| = \int |h(u)|\,|d\alpha(x-u)| =$$

$$= \sum \int_n^{n+1} |h(u)|\,|d\alpha(x-u)| \leqslant \sum \max_{n\leqslant u\leqslant n+1} |h(u)| \int_n^{n+1} |d\alpha(x-u)| \leqslant$$

$$\leqslant H \sum \max_{n\leqslant u\leqslant n+1} |h(u)|,$$

то $m(x)$ ограничена. Далее,

$$m(y)-m(x) = \int \{h(y-t)-h(x-t)\}\,d\alpha(t) =$$

$$= \int \{h(y-x+t)-h(t)\}\,d\alpha(x-t),$$

$$|m(y)-m(x)| \leqslant \sum \int_n^{n+1} |h(y-x+t)-h(t)|\,|d\alpha(x-t)| \leqslant$$

$$\leqslant H \sum \max_{n\leqslant t\leqslant n+1} |h(y-x+t)-h(t)|.$$

Но последний ряд равномерно сходится для $|y-x|\leqslant 1$ в силу равномерной сходимости ряда

$$\sum \max_{n\leqslant t\leqslant n+1} |h(t+\tau)|$$

для $|\tau| \leqslant 1$; вследствие же непрерывности функции $h(t)$, каждый его член стремится к нулю при $x \to \infty$, $y > x$ и $y - x \to \infty$. Следовательно, при указанных сейчас условиях $m(y) - m(x) \to 0$, так что $m(x)$ медленно колеблется. Наконец,

$$\int g(x-t)\, m(t)\, dt = \int g(x-t)\, dt \int h(t-u)\, d\alpha(u) =$$
$$= \int d\alpha(u) \int g(x-t)\, h(t-u)\, dt,$$

где обращение порядка интегрирования законно вследствие сходимости интеграла

$$\int |g(x-t)|\, dt \int |h(t-u)|\, |d\alpha(u)|.$$

Но последнее равенство можно представить в виде

$$\int d\alpha(u) \int g(x-u-w)\, h(w)\, dw = \int h(w)\, dw \int g(x-u-w)\, d\alpha(u).$$

Так как внутренний интеграл ограничен и при $x \to \infty$ стремится к нулю для каждого w, а h принадлежит классу M и, значит, тем более классу L, то заключаем, что

$$\int g(x-t)\, m(t)\, dt \to 0.$$

А тогда из теоремы 221 (так же, как при доказательстве теоремы 220) следует, что $m(x) \to 0$.

Хотя теорема 231 и обладает преимуществом, указанным в начале этого параграфа, мы будем пользоваться ею сравнительно редко. Обычно удобнее будет с помощью предварительных преобразований приводить интересующие нас вопросы к виду, приспособленному для применения теоремы 220 или 221.

12.8. Теоремы для интервала $(0, \infty)$. Произведем теперь в доказанных нами фундаментальных теоремах экспоненциальное преобразование. В результате они превратятся в теоремы о функциях, определенных на интервале $(0, \infty)$; именно в этой форме они обычно наиболее удобны для приложения.

Положим сначала *)

$$e^x = \xi, \qquad e^t = \tau, \qquad f(t) = F(e^t) = F(\tau), \qquad g(-t) = e^t G(e^t) = \tau G(\tau),$$

так что интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)\, f(t)\, dt, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{ixt}\, dt$$

*) Отказываясь от использования прописных букв только для преобразований Фурье.

перейдут в

$$\int_0^\infty G(\tau)\,d\tau, \quad \frac{1}{\xi}\int_0^\infty G\left(\frac{\tau}{\xi}\right)F(\tau)\,d\tau, \quad \int_0^\infty G(\tau)\,\tau^{-ix}\,d\tau,$$

а затем заменим ξ, τ, F и G на x, t, f и g. В результате класс $L(-\infty, \infty)$ превратится в класс $L(0, \infty)$. Класс W превратится в подкласс функций из $L(0, \infty)$, для которых

$$\int_0^\infty g(t)\,t^{-ix}\,dt \neq 0 \tag{12.8.1}$$

для всех вещественных x; мы будем обозначать его попрежнему через W. Класс медленно колеблющихся (убывающих) функций f превратится в класс функций, медленно колеблющихся (убывающих) в смысле § 6.2, т. е. в класс функций f, для которых

$$\lim\{f(y)-f(x)\}=0 \qquad [\underline{\lim}\{f(y)-f(x)\}\geqslant 0]$$

при

$$x\to\infty, \quad y>x, \quad \frac{y}{x}\to 1.$$

Таким образом, теоремы 220 и 221 преобразуются в следующие:

Теорема 232. *Если g принадлежит классу W, h — классу L, f ограничена и*

$$\frac{1}{x}\int g\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt \to l\int g(t)\,dt, \tag{12.8.2}$$

то

$$\frac{1}{x}\int h\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt \to l\int h(t)\,dt. \tag{12.8.3}$$

Теорема 233. *Если g принадлежит классу W, f ограничена и медленно колеблется, либо вещественна, ограничена и медленно убывает, в смысле* § 6.2, *и выполняется соотношение* (12.8.2), *то* $f(x)\to l$.

Интегралы берутся здесь от 0 до ∞. Вообще интегралы с неуказанными пределами будут браться от $-\infty$ до $+\infty$, если в них входит $x-t$ или e^{ixt}, и от 0 до ∞, если в них входит $\frac{t}{x}$ или t^{-ix}.

Для получения аналога теоремы 231 полагаем

$$\int e^t\,d\alpha(t) = \mathrm{A}(e^t)$$

и заменяем затем A снова на α, так что условие (2.7.3) превращается в

$$(12.8.4)\qquad \int_{t}^{et} \frac{|d\alpha(u)|}{u} < H.$$

Класс M превращается в класс непрерывных функций G, для которых

$$\sum \max_{e^n \leqslant t \leqslant e^{n+1}} |tG(t)| < \infty.$$

Понимая M в этом и W^* в соответствующем смысле, получаем следующее предложение:

Теорема 234. *Если* (I) g *принадлежит классу* W^*, (II) h *принадлежит классу* M, (III) α *удовлетворяет условию* (12.8.4), *и*

$$(12.8.5)\qquad \frac{1}{x}\int g\left(\frac{t}{x}\right) d\alpha(t) \to l \int g(t)\,dt,$$

то

$$(12.8.6)\qquad \frac{1}{x}\int h\left(\frac{t}{x}\right) d\alpha(t) \to l \int h(t)\,dt.$$

Наконец, заметим, что если

$$x = \frac{1}{\xi}, \qquad t = \frac{1}{\tau}, \qquad f(t) = F(\tau), \qquad g(t) = \tau^2 G(\tau),$$

то

$$\int g(t)\,dt = \int G(\tau)\,d\tau, \qquad \frac{1}{x}\int g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt = \frac{1}{\xi}\int G\left(\frac{\tau}{\xi}\right) F(\tau)\,d\tau,$$

а классы функций, участвующие в рассмотренных теоремах, не изменяются. Отсюда

Теорема 235. *Теоремы* 232 *и* 233 *сохраняют силу, если и в предположениях и в заключении* x *стремится не к* ∞, *а к* 0.

В § 12.6 утверждалось, что теорему 221 можно вывести из теоремы 220. Теперь мы можем показать, как это делается. Требуемый вывод равносилен выводу теоремы 233 из теоремы 232. Если $f(t)$ ограничена и мы положим

$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 \text{ при } t > 1, \end{cases}$$

то из теоремы 232 будет следовать, что

$$(12.8.7)\qquad \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \to l.$$

Если, кроме того, $f(t)$ медленно убывает, то из интегрального аналога теоремы 68 (§ 6.2) будет тогда следовать, что $f(x) \to l$.

12.9. Некоторые специальные ядра. Особенно важную роль играют следующие функции $g(t)$ — первая для $(-\infty, \infty)$, остальные для $(0, \infty)$:

(1) $g(t)=e^{-ct^2}$ $(c>0)$: $\quad \int g(t)\,e^{ixt}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{c}}\,e^{-\frac{x^2}{4c}}\neq 0.$

(2) $g(t)=e^{-t}$: $\quad \int g(t)\,t^{-ix}\,dt=\Gamma(1-ix)\neq 0.$

(3) $g(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant t<1,\\ 0 & \text{при } t>1:\end{cases} \quad \int g(t)\,t^{-ix}\,dt=\frac{1}{1-ix}\neq 0.$

(4) $g(t)=\begin{cases}k(1-t)^{k-1} & \text{при } 0\leqslant t<1,\\ 0 & \text{при } t>1;\end{cases} \quad k>0:$

$$\int g(t)\,t^{-ix}\,dt=k\int_0^1(1-t)^{k-1}\,t^{-ix}\,dt=\frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(1-ix)}{\Gamma(k+1-ix)}\neq 0.$$

(5) $g(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$:

$$\int g(t)\,t^{-ix}\,dt=i2^{ix}\,\Gamma(-1-ix)\operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi x\neq 0\ ^{*}).$$

(6) $g(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$:

$$\int g(t)\,t^{-ix}\,dt=ix\,2^{1+ix}\,\Gamma(-2-ix)\operatorname{ch}\frac{1}{2}\pi x\neq 0\ ^{*}).$$

(7) Если

$$g(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}\right),$$

то

$$\int g(t)\,t^{-ix+\delta}\,dt=(ix-\delta)\int\frac{t^{-ix+\delta}}{e^t-1}\,dt=$$
$$=(ix-\delta)\,\Gamma(1-ix+\delta)\,\zeta(1-ix+\delta)$$

для $\delta>0$, $x\neq 0$, откуда, беря $\delta\to 0$, получаем

$$\int g(t)\,t^{-ix}\,dt=ix\,\Gamma(1-ix)\,\zeta(1-ix)$$

для $x\neq 0$. При $x=0$ левая часть принимает значение -1. Таким образом, утверждение, что $g(t)$ принадлежит классу W, равносильно теореме, что $\zeta(1-ix)\neq 0$.

(8) Наконец, полагаем $g_0(t)=\left[\frac{1}{t}\right]$ и

$$g(t)=2g_0(t)-ag_0(at)-bg_0(bt),$$

*) В случаях (5) и (6) при $x=0$ следует брать соответственно предельные значения $\frac{1}{2}\pi$ и -1.

где a и b положительны и $\frac{\log a}{\log b}$ иррационален. Так как $tg_0(t) \to 1$ при $t \to 0$, то ядро $g_0(t)$ не принадлежит классу L. Но

$$g(t) = \frac{2}{t} - \frac{a}{at} - \frac{b}{bt} + O(1) = O(1)$$

для малых t и $g(t) = 0$ для больших t, так что $g(t)$ уже принадлежит L. Если $\Re s > 0$, то

$$\gamma_0(s) = \int g_0(t)\, t^s\, dt = \int \left[\frac{1}{t}\right] t^s\, dt - \int [u] \frac{du}{u^{s+2}} =$$
$$= \frac{1}{s+1}\left\{\left(\frac{1}{1^{s+1}} - \frac{1}{2^{s+1}}\right) + 2\left(\frac{1}{2^{s+1}} - \frac{1}{3^{s+1}}\right) + \ldots\right\} = \frac{\zeta(1+s)}{1+s},$$

и

$$\gamma(s) = \int g(t)\, t^s\, dt = \left(2 - \frac{1}{a^s} - \frac{1}{b^s}\right)\frac{\zeta(1+s)}{1+s}.$$

Последнее равенство доказано для $\Re s > 0$; но поскольку обе его части регулярны для $\Re s > -1$, оно сохраняет силу для всех таких s, и, в частности, для $s = -ix$, где x вещественно. Наконец, так как отношение $\frac{\log a}{\log b}$ иррационально и $\zeta(1-ix) \neq 0$, то $\gamma(0) = \log a + \log b \neq 0$, и

$$\gamma(-ix) = (2 - e^{ix\log a} - e^{ix\log b})\frac{\zeta(1-ix)}{1-ix} \neq 0$$

для $x \neq 0$. Таким образом, $g(t)$ принадлежит классу W.

Мы видим, что в последних двух примерах утверждение о принадлежности функции $g(t)$ классу W равносильно теореме, что $\zeta(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma = \Re s = 1$. Это естественно наводит на мысль, что наши теоремы с этими функциями $g(t)$ должны играть важную роль в теории распределения простых чисел.

Функции (1) — (7), очевидно, принадлежат классу L, и, значит, функции (1)—(8) все принадлежат классу W. Ясно также, что функция (1) принадлежит классу M. Наконец, если g непрерывна и для больших t есть $O\left(\frac{1}{t^{1+\delta}}\right)$, где $\delta > 0$, то

$$\sum_{-\infty}^{-1} \max_{e^n \leqslant t \leqslant e^{n+1}} |tg(t)| < H \sum_{-\infty}^{-1} e^n < \infty,$$
$$\sum_{0}^{\infty} \max_{e^n \leqslant t \leqslant e^{n+1}} |tg(t)| < H \sum_{0}^{\infty} e^{-\delta n} < \infty.$$

Следовательно, функции (1), (2) и (5) — (7) принадлежат классу M, а (4) принадлежит ему при $k > 1$ и не принадлежит при $k \leqslant 1$, поскольку в последнем случае она разрывна.

12.1.0 Применение общих теорем к некоторым специальным ядрам. Применим теперь наши теоремы к некоторым из ядер, рассмотренных в § 12.9.

(1) Если

$$g(t) = e^{-t}, \quad h(t) = \begin{cases} k(1-t)^{k-1} & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ 0 & \text{при } t > 1 \end{cases}$$

и $k > 0$, то теорема 232 дает:

если

$$\frac{1}{x}\int e^{-\frac{t}{x}} f(t)\,dt \to l \text{ и } f(t) = O(1),$$

то

$$\frac{k}{x^k}\int_0^x (x-t)^{k-1} f(t)\,dt \to l,$$

т. е.

если $f(t) \to l$ (A) и $f(t) = O(1)$, то $f(t) \to l$ (C, k).

Частный случай $k = 1$ совпадает с теоремой 92a. В гл. VII мы видели, как из теоремы 92 можно вывести все теоремы § 7.5, частью являющиеся ее прямыми обобщениями. Это приводит нас к вопросу, допускают ли и общие теоремы Винера соответствующее распространение. В частности, возможно ли (несомненно, ценою дальнейших ограничений на g) заменить условие ограниченности функции $f(t)$ односторонним условием $f(t) > -H$? К этому вопросу мы вернемся в § 12.12.

Беря $g = k(1-t)^{k-1}$ и $h = \varkappa(1-t)^{\varkappa-1}$, где $0 < \varkappa < k$, для $t < 1$, и $g = h = 0$ для $t \geqslant 1$, получаем:

если $f(t) \to l$ (C, k) и $f(t) = O(1)$, то $f(t) \to l$ (C, $\varkappa$).

Если $\varkappa > k$, то это заключение имеет абелевский характер и никакого дополнительного условия на f не нужно. Легко показать, что если $-1 < k_1 < k < k_2$, то

$f(x) = O(1)$ (C, k_1) и $f(x) \to l$ (C, k_2) влекут $f(x) \to l$ (C, k); это — вид, принимаемый теоремой 70 для функций непрерывного переменного.

(2) Беря в теореме 233 $g(t) = e^{-t}$, получаем, что *если $f(t) \to l$ (A) и f — ограниченная медленно убывающая функция, то $f \to l$.* Это — несовершенная (хотя и никоим образом не тривиальная) теорема, поскольку согласно теореме 105 условие ограниченности функции f ненужно. Это приводит нас к вопросу, нельзя ли (возможно, снова ценою некоторых ограничений на g) отказаться в теореме 233 от условия ограниченности.

В этой связи небезинтересно рассмотреть, почему в теореме 106a не нужно условие ограниченности. Эта теорема увенчивала в гл. VII довольно сложную цепь рассуждений; здесь мы рассмотрим только простейший ее случай, когда $f'(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$. В этом случае простое рассуждение, аналогичное проведенному в § 7.2, показывает, что

$$\text{если } f = O(1) \ (\mathrm{A}) \text{ и } f' = O\left(\frac{1}{t}\right), \text{ то } f = O(1),$$

и этим сразу обнаруживается, что условие „f ограничена" есть довольно тривиальное следствие других предположений.

Мы не можем надеяться столь же легко решить поставленный выше вопрос при общем g и менее сильных ограничениях на f; однако в § 12.13 мы докажем теорему, дающую ответ на него при весьма общих условиях.

(3) Беря в теореме 234

$$g(t) = e^{-t}, \qquad h(t) = \begin{cases} k(1-t)^{k-1} & \text{при } t < 1, \\ 0 & \text{при } t \geqslant 1, \end{cases}$$

где $k > 1$, получаем:

$$\text{если } \frac{1}{x}\int e^{-\frac{t}{x}}\, d\alpha(t) \to l \text{ и } \int\limits_t^{et} \frac{|d\alpha(u)|}{u} < H, \text{ то } \frac{k}{x^k}\int\limits_0^x (x-t)^{k-1}\, d\alpha(t) \to l.$$

Мы не могли взять $k = 1$, поскольку тогда h, будучи разрывной, не принадлежала бы классу M. Если теперь $\alpha(t) = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$ для $n \leqslant t < n+1$, то получаем:

$$\text{если } s_n \to l \ (\mathrm{A}) \text{ и } \sum_t^{et} \frac{|s_n|}{n} < H, \text{ то } s_n \to l \ (\mathrm{C}, k)$$

для $k > 1$. В частности, второе предположение выполняется для ограниченных s_n. Таким образом, мы пришли к теореме о рядах, в одном отношении несколько более общей, чем теорема 92, но зато более слабой в том отношении, что в ней утверждается суммируемость только для $k > 1$, а не для $k = 1$. Комбинируя эту теорему с теоремой 70 и предполагая s_n ограниченными, мы можем доказать суммируемость (C, 1) и даже суммируемость (C, k) для любых положительных k. В этом случае применение теоремы 234 вместо теоремы 232 не представляет никакого особого преимущества; однако для других g переход от интегралов к рядам может оказаться не столь прямым.

(4) По примеру § 4.17 (где мы имеем дело с аналогичными определениями для рядов) естественно принять для предположений, что при $y \to 0$

$$\frac{2}{\pi y}\int \frac{\sin^2 yt}{t^2} f(t)\, dt \to l \tag{12.10.1}$$

или

$$\int \left(\frac{\sin yt}{yt}\right)^2 f(t)\, dt \to l, \tag{12.10.2}$$

соответственно символическую запись

$$f(t) \to l \ (\mathrm{R}_2),$$
$$\int f(t)\,dt = l \quad (\mathrm{R},\ 2).$$

Выбирая $g(t)$ как в § 12.9 (5), получаем:

$$\text{если } f(t) \to l\ (\mathrm{R}_2) \text{ и } f(t) = O(1), \text{ то } f(t) \to l\ (\mathrm{C},\ k)$$

для любого $k > 0$. Обратное заключение, получающееся путем перестановки R_2 и (C, k), также справедливо: методы R_2 и (C, k) для ограниченных f равносильны. В § 12.12 мы увидим, что при $k = 1$ условие ограниченности можно заменить односторонним условием $f > -H$.

Теорема 233 дает:

„Если $f \to l$ (R_2) и f ограничена и медленно колеблется, то $f \to l$“;

то же получается и путем комбинации только что доказанного с теоремой 68а (§ 6.2). В § 12.14 мы увидим, что условие ограниченности может быть отброшено.

Теорема 234 дает:

$$\text{(12.10.3)} \qquad \text{если } s_n \to s\ (\mathrm{R}_2) \text{ и } s_n = O(1), \text{ то } s_n \to s\ (\mathrm{C},\ k)$$

для $k > 1$. С помощью теоремы 70 можно, как и в случае (3), освободиться от ограничения $k > 1$.

Заметим, что ни в одном из этих случаев непосредственное применение одной из „ключевых теорем“ не позволяет еще исчерпать всей истины: всегда требуется дополнительное рассуждение, опирающееся на существенно более простые теоремы. Притом все эти результаты могут быть получены и другими методами. Так, Сас, опираясь на теорему 94, но без помощи какой бы то ни было из винеровских теорем, доказал, что

$$\text{если } \lim_{\theta \to 0} \frac{4}{\pi\theta} \sum \frac{b_n}{n} \sin^2 \frac{1}{2} n\theta = l \text{ и } nb_n > -H, \text{ то } \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} nb_n = l,$$

а затем Харди и Рогозинский доказали это, а также обратное заключение, еще более простым способом. Заменяя θ на $2y$ и nb_n на s_n, получаем (12.10.3) с обобщением на одностороннюю ограниченность.

Далее, в Приложении III мы увидим, что суммируемость (R_2) влечет суммируемость (A), без каких бы то ни было дополнительных ограничений на рассматриваемую последовательность или функцию. Тогда мы будем в состоянии вывести любую из этих теорем тауберова типа для R_2 из ее аналога для A.

(5) Предположение (12.10.2) в своей непосредственной форме не есть предположение винеровского типа. Если, однако,

$$F(t) = \int_0^t f(u)\,du = o(t^2)$$

для больших t, то интегрирование по частям дает

$$\int \left(\frac{\sin yt}{yt}\right)^2 f(t)\,dt = y \int g(yt)\,F(t)\,dt,$$

где $g(t)$ есть, с точностью до знака, функция из § 12.9 (6). В Приложении III мы увидим, что сходимость ряда $\sum \frac{\sin^2 ny}{n^2} a_n$ для всех малых y влечет сходимость ряда $\sum \frac{a_n}{n^2}$ и тем более оценку $s_n = o(n^2)$. Если принять это и соответствующую теорему для интегралов за известное, то теорема 232 дает:

$$\text{если } f \to l\ (\mathrm{R},\ 2) \text{ и } f = O(1), \text{ то } f \to l\ (\mathrm{C},\ k),$$

и возникают аналогичные вопросы о возможных обобщениях. Как мы увидим в § 12.16, для этой функции $g(t)$ они менее просты благодаря непостоянству ее знака. Однако в Приложении III мы докажем, что суммируемость (R, 2) всегда влечет суммируемость (A), так что теоремы тауберова типа для (R, 2), подобно аналогичным теоремам для R_2, можно вывести из соответствующих теорем для A.

В заключение этого параграфа сделаем два замечания общего характера.

(а) Часто случается, что результат, доставляемый винеровскими теоремами, может быть проще получен другими методами: это верно, например, для всех теорем гл. VII, а также для теорем, приведенных выше в пункте (4). Достоинства винеровского метода заключаются в его большой мощности и общности, равно как и в том свете, который он проливает на весь предмет в целом, но отнюдь не в простоте.

(б) С каждым отдельным ядром $g(t)$ связан комплекс теорем тауберова типа, находящихся во взаимных отношениях разной степени трудности. Одна из винеровских теорем для g „выпадает на карту" в некотором пункте, но не всегда именно в том, который нам нужен. Обычно из одного пункта карты возможен переход в другой с помощью сравнительно простых рассуждений; и обычно легче сделать это, чем тратить энергию на видоизменение общих теорем, хотя подобные видоизменения часто и представляют значительный самостоятельный интерес.

12.11. Применения к теории простых чисел. Одним из наиболее выдающихся применений винеровских теорем является применение их к теории простых чисел. Уже давно было известно, что „асимптотический закон распределения простых чисел"

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{12.11.1}$$

„примерно равносилен" теореме (впервые доказанной Адамаром и Валле-Пуссеном), что

$$\zeta(1+i\tau) \neq 0 \tag{12.11.2}$$

для всех вещественных τ. Винеровские теоремы позволяют придать этому утверждению значительно более точную форму, чем это было раньше возможно. Все предшествующие доказательства асимптотического закона распределения простых чисел заимствовали из теории функции $\zeta(s)$ не просто свойство (12.11.2), но и какое-либо более сильное утверждение, например, что

$$|\zeta(1+i\tau)| > \frac{H}{(\log|\tau|)^K}$$

для больших $|\tau|$.

Известно, что асимптотический закон распределения простых чисел равносилен соотношению

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \sim x \tag{12.11.3}$$

или также (хотя доказательство этого менее известно) соотношению

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x)\ ^{*}). \tag{12.11.4}$$

Мы сейчас выведем соотношение (12.11.4) из теоремы 233 и условия (12.11.2). Выберем $g(t)$, как в § 12.9(8), и положим

$$f(t) = \frac{M(t)}{t}. \tag{12.11.5}$$

Как мы видели в § 12.9, g принадлежит классу W. Ограниченность функции f очевидна. Поэтому если мы сможем доказать, (I) что f медленно колеблется и (II) что f и g удовлетворяют условию (12.8.2) с $l=0$, то (12.11.4) будет следовать из теоремы 233. Но

$$f(y)-f(x) = \frac{M(y)}{y} - \frac{M(x)}{x} = \frac{M(y)-M(x)}{x} + M(y)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{x<n\leqslant y} \mu(n) - \frac{y-x}{x}\,\frac{M(y)}{y} = O\left(\frac{y-x}{x}\right) = o(1),$$

---

*) По поводу определения функций $\Lambda(n)$ и $\mu(n)$ см. Hardy and Wright, гл. 16—17, или Ингам, Распределение простых чисел, гл. 1. Вывод соотношения (12.11.3) из (12.11.4) будет дан в Приложении IV.

когда $x \to \infty$ и $\frac{y}{x} \to 1$. Таким образом, f медленно колеблется. Наконец,

$$\int g_0\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = \int_1^x \left[\frac{x}{t}\right] \frac{M(t)}{t}\, dt = \int_1^x \Bigl\{ \sum_{m \leqslant \frac{x}{t}} 1 \sum_{n \leqslant t} \mu(n) \Bigr\} \frac{dt}{t} =$$

$$= \sum_{mn \leqslant x} \mu(n) \int_n^{\frac{x}{m}} \frac{dt}{t} = \sum_{mn \leqslant x} \mu(n) \log \frac{x}{mn} = \sum_{q \leqslant x} \log \frac{x}{q} \sum_{n \mid q} \mu(n) =$$

$$= \log x = o(x),$$

поскольку последняя внутренняя сумма равна 0 для всех q, кроме $q = 1$, для которого она равна 1. Следовательно,

$$\int g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = 2 \int g_0\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt - a \int g_0\left(\frac{at}{x}\right) f(t)\, dt -$$
$$- b \int g_0\left(\frac{bt}{x}\right) f(t)\, dt = o(x),$$

что есть (12.8.2) с $l = 0$. Тем самым мы доказали соотношение (12.11.4), а с ним и асимптотический закон распределения простых чисел.

12.12. Односторонние условия. В этом параграфе мы покажем, каким образом оказывается возможным заменить условие ограниченности функции $f(t)$ теоремы 232 более общим условием

$$f(t) > -H. \tag{12.12.1}$$

Для простоты мы ограничимся тем наиболее важным частным случаем, когда $h(t)$ есть функция $g(t)$ § 12.9 (3); на нашу же теперешнюю функцию $g(t)$ придется наложить дополнительные условия.

Теорема 236. *Если* (I) g *принадлежит классу* W, (II) $g \geqslant 0$ *для всех* t, (III) *существуют такие положительные числа* c *и* K, *что*

$$g(t) \geqslant K \tag{12.12.2}$$

для $0 \leqslant t \leqslant c$, (IV) f *удовлетворяет условию* (12.12.1) *и* (V) *для* f *и* g *выполнено условие* (12.8.2), *то*

$$f(x) \to l \quad (C,\ 1).$$

Мы можем предполагать (добавив H к f), что $f \geqslant 0$, а также, что $\int g(t)\, dt = 1$. Положим

$$\sigma(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt, \tag{12.12.3}$$

так что

$$\sigma'(x)=\frac{f(x)-\sigma(x)}{x} \tag{12.12.4}$$

для почти всех x. Тогда

$$\frac{1}{x}\int g\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt\geqslant\frac{K}{x}\int_0^{cx}f(t)\,dt=Kc\sigma(cx)\geqslant 0.$$

Левая часть стремится к пределу при $x\to\infty$ и потому ограничена для больших x. Таким образом, $\sigma(x)$ ограничена для больших x, а потому и для $x\geqslant 1$.

Пусть $\sigma(x)\leqslant\mu$ для $x\geqslant 1$. Тогда в силу (12.12.4)

$$\sigma'(x)\geqslant-\frac{\sigma(x)}{x}\geqslant-\frac{\mu}{x}$$

для почти всех $x\geqslant 1$. Следовательно, $\sigma(x)$ есть медленно убывающая функция. Далее,

$$\int g(u)f(xu)\,du\to l$$

и, значит,

$$\frac{1}{x}\int_0^x dy\int g(u)f(yu)\,du\to l.$$

Но левая часть равна

$$\frac{1}{x}\int g(u)\,du\int_0^x f(yu)\,dy=\int g(u)\left\{\frac{1}{xu}\int_0^{xu}f(w)\,dw\right\}du=$$

$$=\int g(u)\sigma(xu)\,du=\frac{1}{x}\int g\left(\frac{t}{x}\right)\sigma(t)\,dt.$$

Следовательно, последний интеграл стремится к l. Применяя теорему 233, с σ вместо f, заключаем, что $\sigma(x)\to l$, т. е. $f(x)\to l$ (C, 1).

Условия теоремы выполнены, например, для $g(t)$, равной e^{-t} или $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$. В первом случае получается теорема 94а, тогда как во втором —

Теорема 237. *Если* $f(t)\to l$ (R_2) *и* $f(t)>-H$, *то* $f(t)\to l$ (C, 1).

Это в соединении с результатом, получающимся, если переставить здесь R_2 и (C, 1), есть теорема Винера, упомянутая в § 12.10 (4) и доказанная другим способом Харди и Рогозинским. Условия теоремы 236 не удовлетворяются, когда $g(t)$ есть ядро § 12.9 (6), связанное с суммируемостью (R, 2), поскольку это $g(t)$ не сохраняет постоянного знака.

Теорема 236, в отличие от теоремы 232 или 233, есть теорема со специализированной функцией h; но это не является серьезным недостатком, поскольку обычно из существования (C, 1)-предела можно вывести (12.8.3) для любой требуемой h. Эта теорема не может быть верной для всех g из W без исключения: *какое-то* дополнительное условие на g должно налагаться. Пусть, например,

$$g(t)=\begin{cases} 1-2\log\frac{1}{t} & \text{при } 0<t<1, \\ 0 & \text{при } t\geqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, g принадлежит классу L, и так как

$$\int g(t)\,t^{-ix}\,dt=\frac{1}{1-ix}-\frac{2}{(1-ix)^2}=-\frac{1+ix}{(1-ix)^2}\neq 0,$$

то g принадлежит классу W. Но если $f(t)=t$, то $f\geqslant 0$ и

$$\frac{1}{x}\int g\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt=\frac{1}{x}\int_0^x\left(1-2\log\frac{x}{t}\right)t\,dt=x\int_0^1\left(1-2\log\frac{1}{u}\right)u\,du=0,$$

и, однако, $f(x)\to\infty$ (C, 1).

12.13. Теорема Виджаярагавана. Следующая наша теорема принадлежит к другому типу и не опирается на теорию преобразований Фурье.

К ней приводит замечание о применениях теорем 232 и 233, сделанное нами в § 12.10 (2). Эти теоремы основываются на предположении, что $f(t)$ ограничена; но в приложениях оно часто стеснительно. Поэтому важно получить другие теоремы, в которых ограниченность функции $f(t)$ выступала бы как утверждение, а не предположение. Такая теорема должна была бы иметь вид: „Если $g(t)$ принадлежит классу L и удовлетворяет, скажем, условиям (α), а $f(t)$, или s_n, удовлетворяет условиям (β), и

$$\frac{1}{x}\int g\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt\to l\int g(t)\,dt\quad\left[\text{или } \frac{1}{x}\sum g\left(\frac{n}{x}\right)s_n\to l\int g(t)\,dt\right],$$

или, по крайней мере, указанные интеграл или сумма ограничены, то $f(t)$, или s_n, ограничена“. При этом условия (β) не должны сами влечь ограниченности, а условия (α) не должны включать винеровских. Этот и следующий параграфы будут посвящены доказательству теоремы этого типа, принадлежащей в основном Виджаярагавану. Нам будет удобно, следуя самому Виджаярагавану, оперировать не с интегралами, а с рядами, и притом немного обобщить его условия.

Итак, мы будем теперь иметь дело с некоторым методом суммирования, определяемым формулой

$$\tau(x)=\sum c_n(x)\,s_n\to s. \tag{12.13.1}$$

При этом мы будем предполагать, что

$$c_n(x) \geqslant 0, \quad c_n(x) \to 0 \quad (x \to \infty), \quad \sum c_n(x) = 1, \tag{12.13.2}$$

так что наш метод будет вполне регулярен.

Теорема 238. *Пусть выполнены следующие условия:*

(I) $\varphi(u)$ *положительна и дифференцируема для* $u \geqslant 1$, *причем*

$$\varphi \to \infty, \quad 0 < \varphi' < K, \tag{12.13.3}$$

где K *не зависит от* u, *и*

$$\Phi(u) = \int_1^u \frac{dt}{\varphi(t)} \tag{12.13.4}$$

так что $\Phi \to \infty$ *вместе с* u).

(II) *Коэффициенты* c_n *в дополнение к уже сформулированным свойствам обладают еще следующими:*

$$\sum_{n=0}^{M} c_n(x) \to 0 \tag{12.13.5}$$

при $M \to \infty$, $x \to \infty$ *и* $\Phi(x) - \Phi(M) \to \infty$;

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n(x) \to 0 \tag{12.13.6}$$

и

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n(x) \{\Phi(n) - \Phi(N)\} \to 0 \tag{12.13.7}$$

при $N \to \infty$, $x \to \infty$ *и* $\Phi(N) - \Phi(x) \to \infty$ *).

(III) *Функция* $s(t) = s_n$ *для* $n \leqslant t < n+1$ *такова, что*

$$\underline{\lim} \{ s(t) - s(u) \} \geqslant 0, \tag{12.13.8}$$

когда

$$u \to \infty, \quad t > u, \quad \frac{t-u}{\varphi(u)} \to 0.$$

(IV) $\tau(x) = \sum c_n(x) s_n$ *ограничено.*

Тогда s_n *ограничены.*

Нам потребуется следующая лемма.

---

*) То-есть

$$\sum_0^M c_n(x) < \varepsilon, \quad \sum_N^\infty c_n(x) < \varepsilon, \quad \sum_N^\infty c_n(x) \{\Phi(n) - \Phi(N)\} < \varepsilon,$$

когда x, M, N, $\Phi(x) - \Phi(M)$ и $\Phi(N) - \Phi(x)$ все превосходят некоторые числа, зависящие от ε. В приложениях x, M и N будут функциями параметра H, стремящегося к ∞. Мы не используем в полной мере условий, наложенных нами на $\varphi(u)$ и c_n, довольствуясь установлением теоремы в форме, достаточно общей для приложений.

Теорема 239. *Если* $s(t)$ *удовлетворяет условию* (III), *а* $\varphi(u)$ — *условию* (I) *теоремы* 238, *то существуют такие положительные числа* a *и* b, *что*

$$s(q)-s(p)>-a\int\limits_p^q \frac{du}{\varphi(u)}-b=-a\{\Phi(q)-\Phi(p)\}-b \tag{12.13.9}$$

для $q\geqslant p\geqslant 1$.

Из условия (III) следует существование таких U и δ, что

$$s(t)-s(u)>-1, \tag{12.13.10}$$

когда

$$t\geqslant u\geqslant U,\quad \frac{t-u}{\varphi(u)}\leqslant\delta. \tag{12.13.11}$$

С другой стороны, при условиях $u<U$ и $t\leqslant U+\delta\varphi(U)$, $s(t)-s(u)$ имеет нижнюю грань, зависящую только от U. Отсюда следует существование таких чисел γ и δ, что

$$s(t)-s(u)>-\gamma \tag{12.13.12}$$

для всех t и u, удовлетворяющих неравенствам

$$0<t-u\leqslant\delta\varphi(u). \tag{12.13.13}$$

Положим

$$p_0=p,\ p_1=p_0+\delta\varphi(p_0),\ \ldots,\ p_{k+1}=p_k+\delta\varphi(p_k),\ \ldots \tag{12.13.14}$$

и пусть $p_r\leqslant q<p_{r+1}$. Тогда в силу (12.13.12)

$$s(q)-s(p)=\sum_{k=0}^{r-1}\{s(p_{k+1})-s(p_k)\}+ \\ +s(q)-s(p_r)>-(r+1)\gamma, \tag{12.13.15}$$

и

$$\delta r=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{p_{k+1}-p_k}{\varphi(p_k)}. \tag{12.13.16}$$

Но

$$\varphi(p_{k+1})=\varphi(p_k)+(p_{k+1}-p_k)\varphi'(\xi)\quad (p_k<\xi<p_{k+1}),$$
$$\varphi(p_{k+1})=\varphi(p_k)\{1+\delta\varphi'(\xi)\}\leqslant(1+\delta K)\varphi(p_k),$$

и

$$\delta r\leqslant(1+\delta K)\sum_{k=0}^{r-1}\frac{p_{k+1}-p_k}{\varphi(p_{k+1})}\leqslant(1+\delta K)\int\limits_{p_0}^{p_r}\frac{du}{\varphi(u)}\leqslant \\ \leqslant(1+\delta K)\int\limits_p^q\frac{du}{\varphi(u)}. \tag{12.13.17}$$

Из неравенств (12.13.15) и (12.13.17) следует тогда, что

$$s(q)-s(p)>-\gamma\left(\frac{1}{\delta}+K\right)\int\limits_{p}^{q}\frac{du}{\varphi(u)}-\gamma,$$

а это и есть (12.13.9).

12.14. Доказательство теоремы 238. Нам нужно доказать, что s_n ограничены. Если бы s_n стремилось к $+\infty$ или $-\infty$, то (поскольку наше преобразование вполне регулярно) то же имело бы место и для $\tau(x)$. Поэтому достаточно доказать, что предположения

(а) $\tau(x)=O(1)$,

(б) $\overline{\lim}\,|s_n|=\infty$ и

(в) s_n не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$,

приводят к противоречию.

Положим

$$\sigma_1(t)=\max_{n\leqslant t} s_n,\quad \sigma_2(t)=\max_{n\leqslant t}(-s_n). \tag{12.14.1}$$

Ясно, что $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ являются возрастающими функциями от t, что, по крайней мере, одна из них стремится к ∞ и что имеются две возможности: либо (α) $\sigma_1(n)\geqslant\sigma_2(n)$ для бесконечного множества значений n, либо (β) $\sigma_1(n)<\sigma_2(n)$ для всех достаточно больших n. Мы рассмотрим каждую из этих двух возможностей и покажем, что и та и другая ведет к противоречию.

Случай (α). Ясно, что в этом случае $\sigma_1(t)\to\infty$ и что для каждого заданного H существует такое M, что

$$s_M=\sigma_1(M)>2H,\quad \sigma_1(M)\geqslant\sigma_2(M). \tag{12.14.2}$$

Возьмем наименьшее $M=M(H)$, удовлетворяющее этим условиям, а затем наименьшее $N=N(H)>M$ такое, что

$$s_N\leqslant\frac{1}{2}s_M; \tag{12.14.3}$$

такие N наверняка имеются для больших H, поскольку в противном случае s_n стремилось бы к $+\infty$.

Так как

$$s_N-s_M>-a\{\Phi(N)-\Phi(M)\}-b,$$

то

$$a\{\Phi(N)-\Phi(M)\}>s_M-s_N-b\geqslant\frac{1}{2}s_M-b>H-b,$$

и, значит,

$$\Phi(N)-\Phi(M)\to\infty,$$

когда $H\to\infty$. Поэтому, если x таково, что

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\{\Phi(M)+\Phi(N)\}, \tag{12.14.4}$$

то

(12.14.5) $$\Phi(x)-\Phi(M)\to\infty,\quad \Phi(N)-\Phi(x)\to\infty.$$

Представим $\tau(x)$ в виде

(12.14.6) $$\tau(x)=\Big(\sum_{n=0}^{M-1}+\sum_{n=M}^{N-1}+\sum_{n=N}^{\infty}\Big)c_n(x)\,s_n=\tau_1(x)+\tau_2(x)+\tau_3(x)$$

и оценим по порядку τ_1, τ_2 и τ_3, обозначая вообще через $\delta(H)$ функцию от H, стремящуюся к нулю при $H\to\infty$. Во-первых, в силу (12.14.1), (12.14.2) и (12.13.5) имеем

(12.14.7) $$\tau_1(x)\geqslant-\sigma_2(M)\sum_0^{M-1}c_n\geqslant-\sigma_1(M)\sum_0^{M}c_n\geqslant-\delta(H)\,\sigma_1(M).$$

Во-вторых, так как N есть первое n, большее чем M и удовлетворяющее неравенству (12.14.3), то в силу (12.14.2), (12.13.5) и (12.13.6)

(12.14.8) $$\tau_2(x)>\frac{1}{2}\sigma_1(M)\sum_{M+1}^{N-1}c_n=\frac{1}{2}\sigma_1(M)\Big(1-\sum_0^{M}c_n-\sum_N^{\infty}c_n\Big)>$$
$$>\Big\{\frac{1}{2}-\delta(H)\Big\}\sigma_1(M).$$

В третьих, если $n\geqslant N$, то в силу (12.13.9)

(12.14.9) $$s_n-s_{N-1}>-a\{\Phi(n)-\Phi(N-1)\}-b.$$

Далее, $s_{N-1}>\frac{1}{2}s_M>H>b+1$ для больших H, и

$$\Phi(N)-\Phi(N-1)=\int_{N-1}^{N}\frac{du}{\varphi(u)}\to 0,$$

так что $a\Phi(N)<a\Phi(N-1)+1$ для больших H. Поэтому из (12.14.9) следует, что для больших H

$$s_n>-a\{\Phi(n)-\Phi(N-1)\}+1>-a\{\Phi(n)-\Phi(N)\}$$

и в силу (12.13.7)

(12.14.10) $$\tau_3(x)>-a\sum_N^{\infty}c_n\{\Phi(n)-\Phi(N)\}>-\delta(H).$$

Соединяя теперь (12.14.7), (12.14.8) и (12.14.10), получаем

$$\tau(x)>-\delta(H)\,\sigma_1(M)+\Big\{\frac{1}{2}-\delta(H)\Big\}\sigma_1(M)-\delta(H).$$

Но правая часть стремится к бесконечности вместе с H, а это противоречит предположенной ограниченности функции $\tau(x)$. Таким образом, случай (α) приводит к противоречию.

Случай (β). В этом случае $\sigma_2(n) > \sigma_1(n)$ для всех достаточно больших n, и $\sigma_2(n) \to \infty$. Выбираем наименьшее $N = N(H)$ такое, что

$$(12.14.11) \qquad \sigma_2(n) > \sigma_1(n) \quad (n \geqslant N), \quad s_N = -\sigma_2(N) < -2H,$$

а затем наименьшее $M = M(H) < N$, для которого $s_M \geqslant \frac{1}{2} s_N = -\frac{1}{2}\sigma_2(N)$; такое M при большом H наверняка имеется, так как в противном случае s_n стремилось бы к $-\infty$. Таким образом,

$$(12.14.12) \qquad s_M \geqslant -\frac{1}{2}\sigma_2(N), \quad s_n < -\frac{1}{2}\sigma_2(N) \quad (M < n \leqslant N).$$

Тогда в силу (12.13.9)

$$(12.14.13) \qquad s_N - s_M > -a\{\Phi(N) - \Phi(M)\} - b,$$

и так как $s_N - s_M \leqslant \frac{1}{2} s_N < -H$, то

$$a\{\Phi(N) - \Phi(M)\} > H - b,$$

так что $\Phi(N) - \Phi(M) \to \infty$, когда $H \to \infty$. Следовательно, для x, определенного формулой (12.14.4), еще имеют место соотношения (12.14.5).

Представим теперь $\tau(x)$ в виде

$$(12.14.14) \qquad \tau(x) = \Big(\sum_{m=0}^{M} + \sum_{n=M+1}^{N} + \sum_{N+1}^{\infty}\Big) c_n(x) s_n = \\ = \tau_1(x) + \tau_2(x) + \tau_3(x)$$

и оценим τ_1, τ_2 и τ_3. Во-первых, в силу (12.14.1), (12.14.11) и (12.13.5)

$$(12.14.15) \qquad \tau_1(x) \leqslant \sigma_1(M) \sum_0^M c_n \leqslant \sigma_1(N) \sum_0^M c_n \leqslant \\ \leqslant \sigma_2(N) \sum_0^M c_n \leqslant \delta(H)\,\sigma_2(N).$$

Во-вторых, в силу (12.14.12), (12.13.5) и (12.13.6)

$$(12.14.16) \qquad \tau_2(x) = \sum_{M+1}^{N} c_n s_n < -\frac{1}{2}\sigma_2(N) \sum_{M+1}^{N} c_n = \\ = -\frac{1}{2}\sigma_2(N)\Big(1 - \sum_0^M c_n - \sum_{N+1}^{\infty} c_n\Big) \leqslant -\Big\{\frac{1}{2} - \delta(H)\Big\}\sigma_2(N).$$

В третьих,

$$(12.14.17)\quad \tau_3(x)=\sum_{N+1}^{\infty} c_n s_n \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} c_n \sigma_1(n) \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} c_n \sigma_2(n) = \\ = \sum_{N+1}^{\infty} c_n \{\sigma_2(N)+\sigma_2(n)-\sigma_2(N)\}.$$

Но в силу (12.13.9)

$$(12.14.18)\quad -s_n-\sigma_2(N)=-s_n+s_N< a\{\Phi(n)-\Phi(N)\}+b$$

для $n>N$, и потому

$$(12.14.19)\quad \sigma_2(n)-\sigma_2(N)< a\{\Phi(n)-\Phi(N)\}+b\ ^{*)}.$$

Следовательно, в силу (12.14.17), (12.13.6) и (12.13.7)

$$(12.14.20)\quad \tau_3(x)\leqslant \sigma_2(N)\sum_{N+1}^{\infty} c_n + a\sum_{N+1}^{\infty} c_n\{\Phi(n)-\Phi(N)\}+ \\ +b\sum_{N+1}^{\infty} c_n \leqslant \delta(H)\sigma_2(N).$$

Теперь из (12.14.15), (12.14.16) и (12.14.20) следует, что

$$\tau(x)\leqslant -\left\{\frac{1}{2}-\delta(H)\right\}\sigma_2(N),$$

и, значит, $\tau(x)\to-\infty$, когда $H\to\infty$. Но это снова противоречит предположению. Тем самым отпадает и случай (β), и теорема доказана.

Пусть, в частности,

$$c_n=\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)e^{-\frac{n}{x}},\quad \varphi(u)=u,\quad \Phi(u)=\log u.$$

В таком случае

$$\sum_0^M c_n=\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)\sum_0^M e^{-\frac{n}{x}}=1-e^{-\frac{M+1}{x}}<\frac{M+1}{x}\to 0,$$

когда $\frac{M}{x}\to 0$, т. е. $\log x-\log M\to\infty$; и

$$\sum_N^{\infty} c_n=\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)\sum_N^{\infty} e^{-\frac{n}{x}}=e^{-\frac{N}{x}}\to 0,$$

---

*) $\sigma_2(n)=\max\limits_{\nu\leqslant n}(-s_\nu)=\max\{\sigma_2(N),\ -s_{N+1},\ \ldots,\ -s_n\}$. Если бы этот максимум равнялся $\sigma_2(N)$, то неравенство (12.14.19) было бы тривиально. Если же он равен одному из $-s_{N+1},\ \ldots,\ -s_n$, то (12.14.19) следует из (12.14.18).

когда $\frac{N}{x}\to\infty$, т. е. $\log N-\log x\to\infty$. Наконец,

$$\sum_{n=N}^{\infty}c_n\log\frac{n}{N}=(1-e^{-\frac{1}{x}})\sum_{\nu=0}^{\infty}\log\left(1+\frac{\nu}{N}\right)e^{-\frac{N+\nu}{x}}<$$

$$<\frac{e^{-\frac{N}{x}}}{Nx}\sum \nu e^{-\frac{\nu}{x}}<\frac{1}{x^2(1-e^{-\frac{1}{x}})^2}\,\frac{x}{N}e^{-\frac{N}{x}},$$

что стремится к нулю, когда $x\to\infty$ и $\log N-\log x\to\infty$.

Таким образом, условия (I) и (II) теоремы 238 выполнены, тогда как условие (III) утверждает, что s_n медленно убывает в смысле § 6.2. Поэтому заключаем, что *если* $s_n=O(1)$ (A) *и* s_n *медленно убывает, то* $s_n=O(1)$. Теперь из теоремы 233 можно вывести, что *если* $s_n\to s$ (A) *и* s_n *медленно убывает, то* $s_n\to s$, т. е. теорему 106. Таким образом, теорема 106 есть следствие теорем 233 и 238, не будучи, однако, как мы видели в § 12.10 (2), следствием одной только теоремы 233.

В качестве второго примера возьмем

$$c_n(x)=\frac{1}{x}g\left(\frac{n}{x}\right),\qquad g(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$

(с теми же φ и Φ). Тогда (12.13.1) равносильно соотношению $s_n\to s$ (R_2). В этом случае

$$x\sum_{1}^{M}\frac{\sin^2\frac{n}{x}}{n^2}=O\left(x\sum_{1}^{M}\frac{1}{x^2}\right)=O\left(\frac{M}{x}\right)\to 0,$$

$$x\sum_{N}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n}{x}}{n^2}=O\left(x\sum_{N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{x}{N}\right)\to 0,$$

$$x\sum_{N}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n}{x}}{n^2}\log\frac{n}{N}=O\left(x\sum_{N}^{\infty}\frac{1}{n^2}\log\frac{n}{N}\right)=$$

$$=O\left(x\int_{N}^{\infty}\frac{1}{t^2}\log\frac{t}{N}\,dt\right)=O\left(\frac{x}{N}\int_{1}^{\infty}\frac{\log u}{u^2}\,du\right)\to 0,$$

когда $\frac{x}{M}\to\infty$ и $\frac{N}{x}\to\infty$, так что условия теоремы 238 выполнены. Таким образом, комбинируя ее с теоремами 234, 70 и 68*), получаем:

Теорема 240. *Если* $s_n\to s$ (R_2) *и* s_n *вещественны и медленно убывают, то* $s_n\to s$.

12.15. Суммируемость по Борелю. В § 9.13 мы доказали, что *если* $s_n\to s$ (B) *и* $a_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, *то* $s_n\to s$. Теперь нашей целью будет доказательство следующего предложения:

*) См. § 12.10 (4).

Теорема 241. *Если* $s_n \to s$ (B) *и*

$$\underline{\lim}\,(s_n - s_m) \geqslant 0, \tag{12.15.1}$$

когда

$$m \to \infty, \quad n > m, \quad \frac{n-m}{\sqrt{m}} \to 0, \tag{12.15.2}$$

то $s_n \to s$.

Эта теорема, впервые доказанная Р. Шмидтом и Виджаярагаваном, является наиболее общей теоремой тауберова типа, относящейся к суммируемости (B).

Имеются различные методы доказательства этой теоремы. Можно комбинировать теорему 238 с идеями, использованными Харди и Литтльвудом в их первоначальном доказательстве теоремы 156: это — метод, которому следовал Виджаярагаван. С другой стороны, можно комбинировать ее с теоремами, примененными в §§ 9.10—9.13 *). Но наиболее естественным здесь будет комбинировать теорему 238 с одной теоремой винеровского типа.

Заметим сперва, что здесь нет необходимости делать различие между суммируемостями (B) и (B′). В самом деле, согласно теореме 126 $s_n \to s$ (B′) равносильно $s_{n-1} \to s$ (B), но условие (12.15.1), очевидно, не изменится от замены m и n на $m-1$ и $n-1$.

Проверим, далее, что метод (B) удовлетворяет условиям теоремы 238, с $\varphi(u) = 2\sqrt{u}$, $\Phi(u) = \sqrt{u} - 1$. Нам нужно показать, что

$$e^{-x} \sum_0^M \frac{x^n}{n!} \to 0, \tag{12.15.3}$$

$$e^{-x} \sum_N^\infty \frac{x^n}{n!} \to 0, \tag{12.15.4}$$

$$e^{-x} \sum_N^\infty (\sqrt{n} - \sqrt{N}) \frac{x^n}{n!} \to 0, \tag{12.15.5}$$

когда

$$\sqrt{x} - \sqrt{M} \to \infty, \quad \sqrt{N} - \sqrt{x} \to \infty. \tag{12.15.6}$$

Но если $0 \leqslant \sqrt{x} - \sqrt{M} = \mu$, то $M = \sqrt{M}(\sqrt{x} - \mu) \leqslant x - \mu\sqrt{x}$, и если $0 \leqslant \sqrt{N} - \sqrt{x} = \nu$, то $N \geqslant x + 2\nu\sqrt{x} \geqslant x + \nu\sqrt{x}$. Поэтому

*) При этом некоторые места рассуждений §§ 9.10—9.13, в которых в полном объеме использовано предположение $a_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, придется видоизменить, но требуемые изменения не трудны.

соотношения (12.15.3) и (12.15.4) будут следовать из

$$\lim_{\substack{\mu \leqslant \sqrt{x} \\ \mu \to \infty}} \left(e^{-x} \sum_{n=0}^{x-\mu\sqrt{x}} \frac{x^n}{n!}\right) = 0, \qquad \lim_{\substack{x \to \infty \\ \nu \to \infty}} \left(e^{-x} \sum_{x+\nu\sqrt{x}} \frac{x^n}{n!}\right) = 0;$$

последние же верны в силу теоремы 137 (4). Что же касается соотношения (12.15.5), то имеем

$$e^{-x} \sum_{n=N}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{N}) \frac{x^n}{n!} < \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sum_{n=N}^{\infty} (n-N) \frac{x^n}{n!} \leqslant \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sum_{x+\nu\sqrt{x}}^{\infty} (n-x) \frac{x^n}{n!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sum_{\xi+\nu\sqrt{\xi}}^{\infty} (n-\xi) \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sum_{\nu\sqrt{\xi}}^{\infty} m \frac{x^{\xi+m}}{(\xi+m)!},$$

где $\xi = [x]$. Но из теоремы 137 *) следует, что

$$O\left(\frac{1}{x} \sum_{\nu\sqrt{\xi}}^{\infty} m e^{-\frac{m^2}{2\xi}}\right) = O\left(\frac{1}{x} \int_{\nu\sqrt{\xi}}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\xi}} dt\right) = O\left(\int_{\frac{1}{2}\nu}^{\infty} u e^{-u^2} du\right) = o(1).$$

Таким образом, условия (I) и (II) теоремы 238 выполнены. Следовательно (при выполнении условий теоремы 241), s_n ограничены.

Для того чтобы использовать винеровские теоремы, мы должны представить суммируемость (B) в виде интегрального соотношения винеровского типа. После всего предшествующего мы можем предполагать, что s_n ограничены, и, кроме того, можем принять $s = 0$, так что $s_n \to 0$ (B). Но мы доказали в § 9.10 (теорема 151), что в таком случае

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} s(t)\, dt \to 0,$$

когда $x \to \infty$ **), т. е. что

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{(u^2-y^2)^2}{2y^2}\right\} \frac{u}{y} s(u^2)\, du \to 0, \tag{12.15.7}$$

когда $y \to \infty$. Мы заменим теперь это более простой формулой

$$\int e^{-2(u-y)^2} s(u^2)\, du \to 0. \tag{12.15.8}$$

---

*) Применяя (9.1.8) на интервале $(\nu\sqrt{\xi}, \xi^{\zeta})$ и (9.1.6) на интервале (ξ^{ζ}, ∞) См. сделанное в § 9.10 замечание о тривиальности „хвостов“ таких сумм.

**) Фактически мы предполагали только, что $s_n = o(\sqrt{n})$.

Очевидно, (12.15.8) будет следовать из (12.15.7), когда $s(t)$ ограничена, если

$$(12.15.9)\qquad \int \left| e^{-2(u-y)^2} - \frac{u}{y}\exp\left\{-\frac{(u^2-y^2)^2}{2y^2}\right\}\right| du \to 0,$$

т. е. если

$$(12.15.10)\qquad J = \int_{-y}^{\infty} |\varphi(w, y)|\, dw \to 0,$$

где

$$\varphi(w, y) = e^{-2w^2} - \frac{y+w}{y}\exp\left\{-2w^2\left(\frac{2y+w}{2y}\right)^2\right\}.$$

Разобьем J на две части J_1 и J_2, взятые соответственно для $|w| \geqslant y^\alpha$ и $|w| \leqslant y^\alpha$, где $0 < 3\alpha < 1$. В J_1, для больших y,

$$0 < \frac{y+w}{y} < |w|, \qquad \frac{2y+w}{2y} > \frac{1}{2},$$

и $\varphi = O\left(|w|\, e^{-\frac{1}{2}w^2}\right)$, так что $J_1 \to 0$. В J_2 имеем $w = O(y^\alpha)$,

$$\frac{y+w}{y} = 1 + O(y^{\alpha-1}), \qquad \left(\frac{2y+w}{2y}\right)^2 = 1 + O(y^{\alpha-1}),$$

$$\exp\left\{-2w^2\left(\frac{2y+w}{2y}\right)^2\right\} = \exp\{-2w^2 + O(y^{3\alpha-1})\} = e^{-2w^2}\{1 + O(y^{3\alpha-1})\},$$

так что

$$J_2 = O(y^{3\alpha-1})\int e^{-2w^2}\, dw \to 0.$$

Этим доказано (12.15.9), а тем самым и (12.15.8).

Возьмем теперь

$$g(t) = e^{-2t^2} \quad \text{и} \quad f(t) = \begin{cases} s(t^2) & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда g принадлежит к классу W (§ 12.9 (1)). Далее, если $t > u$, $u \to \infty$, $t - u \to 0$, $\tau = t^2$, $\upsilon = u^2$, то

$$\frac{\tau - \upsilon}{\sqrt{\upsilon}} = \frac{t^2 - u^2}{t} < 2(t-u) \to 0,$$

так что

$$\varliminf \{f(t) - f(u)\} = \varliminf \{s(\tau) - s(\upsilon)\} \geqslant 0.$$

Таким образом, $f(t)$ — медленно убывающая функция (§ 12.2). И так как мы уже доказали ее ограниченность, то из теоремы 221 следует, что $f(t) \to 0$, т. е. что $s_n \to 0$.

12.16. Суммируемость (R, 2). Мы заключим эту главу доказательством следующей теоремы для суммируемости (R, 2), соответствующей теоремам 106 и 240.

Теорема 242. *Если* $s_n \to s$ (R, 2), *т. е. если*

$$\chi(\theta)=\sum a_n\left(\frac{\sin n\theta}{n\theta}\right)^2 \to s$$

при $\theta \to 0$, *и если* s_n *медленно убывает, то* $\sum a_n = s$.

Эта теорема, и ее аналог для $f(t)$, представляет дополнительные трудности, поскольку, как мы видели в §§ 12.10 (5) и 12.12, функция $g(t)$, с которой мы теперь имеем дело, не положительна. Если бы мы знали, что s_n ограничены, то мы могли бы доказать эту теорему по плану, намеченному в § 12.10, выведя сначала из наших общих теорем суммируемость (C, k), а затем перейдя с помощью теорем 70 и 68 к сходимости. Но так как мы не можем ссылаться на последующие теоремы, то проще всего будет применить другие методы.

Положим

$$\overset{+}{a}_n=\begin{cases} a_n & \text{при } a_n \geqslant 0,\\ 0 & \text{при } a_n<0;\end{cases} \qquad \overset{-}{a}_n=\begin{cases} a_n & \text{при } a_n \leqslant 0,\\ 0 & \text{при } a_n>0,\end{cases}$$

так что $a_n=\overset{+}{a}_n+\overset{-}{a}_n$, $|a_n|=\overset{+}{a}_n-\overset{-}{a}_n$. Нам дано, что $\underline{\lim}(s_n-s_m)\geqslant 0$ при $n>m$, $m\to\infty$ и $\frac{n-m}{m}\to 0$. Полагая $m=n-1$, получаем отсюда, что $\overset{-}{a}_n \to 0$, и ряд $\sum \frac{\overset{-}{a}_n}{n^2}$ (абсолютно) сходится.

Далее, ряд $\sum \frac{a_n}{n^2}\sin^2 n\theta$ (по предположению) сходится для малых θ. Отсюда следует тогда, что и ряд $\sum \frac{\overset{+}{a}_n}{n^2}\sin^2 n\theta$ сходится для малых θ и, значит, по теореме Егорова, равномерно сходится на некотором множестве E положительной меры mE. Следовательно,

$$\sum \frac{\overset{+}{a}_n}{n^2}\int\limits_E \sin^2 n\theta\, d\theta<\infty.$$

Но при $n\to\infty$

$$\int\limits_E \sin^2 n\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\int\limits_E (1-\cos 2n\theta)\, d\theta \to \frac{1}{2}mE.$$

Поэтому ряд $\sum \frac{\overset{+}{a}_n}{n^2}$ сходится, и, значит, ряд $\sum \frac{a_n}{n^2}$ абсолютно сходится.

Мы вправе предполагать, что $s=0$. Тогда ряд для $\theta^2\chi(\theta)$ сходится абсолютно и равномерно для всех положительных θ, и $\chi(\theta)=o(1)$ при $\theta\to 0$. Тогда при $\delta>0$

$$\int \frac{\delta\theta^2\chi(\theta)}{\delta^2+\theta^2}\,d\theta=\frac{1}{2}\sum\frac{a_n}{n^2}\int(1-\cos 2n\theta)\frac{\delta\, d\theta}{\delta^2+\theta^2}=\frac{\pi}{4}\sum\frac{a_n}{n^2}(1-e^{-2n\delta}),$$

где почленное интегрирование законно, поскольку

$$\sum \frac{|a_n|}{n^2} \int \frac{\delta\, d\theta}{\delta^2+\theta^2} < \infty.$$

Дифференцируя дважды по δ, получаем

$$\sum a_n e^{-2n\delta} = -\frac{1}{\pi} \int \theta^2 \chi(\theta) \frac{\partial^2}{\partial\delta^2}\left(\frac{\delta}{\delta^2+\theta^2}\right) d\theta = -\frac{2}{\pi} \int \theta^2 \chi(\theta) \frac{\delta(\delta^2-3\theta^2)}{(\delta^2+\theta^2)^3}\, d\theta.$$

Но так как $\chi(\theta) = o(1)$, то этот интеграл равен

$$o\left\{\int \frac{\delta\theta^2\,|\delta^2-3\theta^2|}{(\delta^2+\theta^2)^3}\, d\theta\right\} = o\left\{\int \frac{t^2\,|1-3t^2|}{(1+t^2)^3}\, dt\right\} = o(1)$$

при $\delta \to 0$. Таким образом, $\sum a_n e^{-2n\delta} \to 0$, т. е. $s_n \to s$ (A). Утверждение теоремы вытекает теперь из теоремы 106.

Мы доказали, что *если* $s_n \to s$ (R, 2) *и* s_n *медленно убывает* *), *то* $s_n \to s$ (A); и для наших целей это достаточно. Однако это — несовершенная теорема, поскольку, как мы указывали в § 12.10 (5) и докажем в Приложении III, из $s_n \to s$ (R, 2) следует $s_n \to s$ (A) без всяких ограничений на s_n. Если бы это было уже установлено, то теорема 242, разумеется, была бы непосредственным следствием теоремы 106.

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ XII

§ 12.1. Оригинальные исследования Винера изложены в его книге The Fourier integral и работе „Tauberian theorems", *Annals* (2), **33** (1932), 1—100; последняя содержит подробную библиографию более ранних работ. С тех пор другие авторы, особенно Pitt, *PLMS* (2), **44** (1938), 243—288, предложили много обобщений и упрощений. Важное значение имеет также следующая промежуточная работа: Bochner, *BS* (1933), 126—144; Бохнер показывает, что рассуждения Винера можно значительно упростить, если проявить готовность наложить довольно сильные ограничения на ядра g.

Очень ясное изложение винеровской теории дает Widder, гл. 5; как и изложение, принятое в §§ 12.1—12.8, оно в значительной мере основано на работах Питта.

§ 12.3. Теоремы, принятые без доказательства в этом параграфе, можно найти в книге: Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье.

§ 12.4. По поводу „сильной сходимости" см. Титчмарш, Теория функций, 430 и сл.; Littlewood, 45 и сл. [1]).

§ 12.9. Все эти ядра, кроме ядра (8), которое ввел Ingham, *JLMS*, **20** (1945), 171—180, встречаются в работе Винера.

§ 12.10. Теоремы, приводимые в этом параграфе, были доказаны с различной степенью общности различными авторами, и мы не будем давать здесь подробных ссылок. В основном результаты, указанные в пунктах (1) — (3), были известны и до Винера, так что его вклад состоял лишь во включении

*) Фактически мы использовали гораздо меньше, а именно, только что $\underline{\lim}\, a_n \geqslant 0$.

[1]) См. также И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, гл. VII. (*Прим. перев.*)

их в его общую теорию; результаты же пунктов (4) и (5) принадлежат главным образом ему.

Упомянутые результаты Саса и Харди — Рагозинского содержатся в их работах в *AM*, **61** (1933), 185—201, и *JLMS*, **18** (1943), 50—57.

§ 12.11. Мы изложили ингамовское доказательство асимптотического закона распределения простых чисел, l. c. в примечании к § 12.9. Винеровское доказательство использует ядро (7) § 12.9. См. Widder, 224—233. Доказательство того, что $\zeta(1+i\tau)\neq 0$, а также все нужные арифметические теоремы[1]) содержатся в этой же книге Виддера. Винер и Виддер доказывают непосредственно (12.11.3). Если, как в нашем тексте, предпочесть работать с $\mu(n)$, то удобно в качестве непосредственной цели поставить доказательство того, что

(a) $\sum \frac{\mu(n)}{n}$ *сходится к нулю*;

(12.11.4) будет следовать отсюда в силу теоремы 26 (§ 4.7). Функция

$$f(t)=\sum_{n\leqslant t}\frac{\mu(n)}{n},$$

как сумматорная функция ряда, общий член которого есть $O\left(\frac{1}{n}\right)$, медленно колеблется. Далее, при $t\geqslant 1$

$$\sum_{n\leqslant t}\mu(n)\left[\frac{t}{n}\right]=\sum_{n\leqslant t}\mu(n)\sum_{m\leqslant \frac{t}{n}}1=\sum_{mn\leqslant t}\mu(n)=\sum_{q\leqslant t}\sum_{n\mid q}\mu(n)=1.$$

Поэтому для $t\geqslant 1$

$$t\sum_{n\leqslant t}\frac{\mu(n)}{n}=1+\sum_{n\leqslant t}\mu(n)\left(\frac{t}{n}-\left[\frac{t}{n}\right]\right)=O(1),$$

так что $f(t)$ (при $t<1$ равная нулю) ограничена. Таким образом, $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 233, и достаточно доказать (12.8.2) с этой функцией f и g, определенной в § 12.9 (7).

Положим

$$F(y)=\sum\mu(n)\frac{e^{-ny}}{1-e^{-ny}}.$$

Тогда, с одной стороны,

$$F(y)=\sum_{n}\mu(n)\sum_{m}e^{-mny}=\sum_{q}e^{-qy}\sum_{n\mid q}\mu(n)=e^{-y}=O(1)=o\left(\frac{1}{y}\right)$$

при $y\to 0$, а, с другой стороны,

$$F(y)=\frac{1}{y}\sum\frac{\mu(n)}{n}\,\frac{nye^{-ny}}{1-e^{-ny}}=\frac{1}{y}\sum f(n)\,\Delta\frac{nye^{-ny}}{1-e^{-ny}}=$$

$$=\frac{1}{y}\sum f(n)\int_{n}^{n+1}\frac{d}{dt}\left(\frac{yte^{-yt}}{1-e^{-yt}}\right)dt=\int_{0}^{\infty}f(t)\,g(yt)\,dt.$$

[1]) См. также А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, гл. I и II. (*Прим. перев.*)

Таким образом, последний интеграл есть $o\left(\frac{1}{y}\right)$, чем (12.8.2) и доказано.

На винеровских идеях, развитых Икеара, основано еще одно, совершенно отличное от изложенных, доказательство асимптотического закона распределения простых чисел. По этому поводу см. Widder, 233 и сл. Это доказательство привел к простейшему виду Landau, *BS* (1932), 514—521 [1]). См. также Bochner, *MZ*, **37** (1933), 1—9; Heilbronn and Landau, там же, 10—16, 17 и 18—21; Karamata, *MZ*, **38** (1934), 701—708.

§ 12.12. Теорема 236, повидимому, нова. Взамен ее мы могли бы использовать одну теорему Питта [*DMJ*, **4** (1938), 437—440], доказанную в Widder, 215—221. Она накладывает меньшие ограничения на *g*, но доказательство ее более трудно, а для наших теперешних целей достаточно теоремы 236.

§§ 12.13—12.14. Vijayaraghavan, *JLMS*, **1** (1926), 113—120, и *PLMS* (2), **27** (1928), 316—326, доказал два случая теоремы 238, нужные для А- и В-суммируемости. Рассуждения, проводимые им для этих случаев, содержат все существенные моменты доказательства общей теоремы. См. также Karamata, *MZ*, **34** (1932), 737—740, и **37** (1933), 582—588.

§ 12.15. Теорему 241 в этом виде впервые доказал R. Schmidt, *Schriften d. Königsberger gelehrten Gesellschaft*, **1** (1925), 205—256; другие доказательства предложили Виджаярагаван, l. c. выше, и Винер (l. c. в примечании к § 12.1). Изложенное здесь доказательство представляет собой в основных чертах упрощение винеровского.

§ 12.16. По поводу теоремы Егорова см. Титчмарш, Теория функций, 379, или Littlewood, 30—31 *).

---

[1]) Изложение этой работы Ландау дано в виде приложения к книге А. Е. Ингама „Распределение простых чисел". (*Прим. перев.*)

[2]) См. также П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного (ГТТИ, 1933), 195—197, и И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, 90—91. (*Прим. перев.*)

Глава XIII

ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА-МАКЛОРЕНА

13.1. Введение. „Формула Эйлера-Маклорена"

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) \sim \int_{a}^{n} f(x)\,dx + C + \frac{1}{2} f(n) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{B_r}{(2r)!} f^{(2r-1)}(n) \tag{13.1.1}$$

выражает конечную сумму, стоящую слева, через интеграл и производные от $f(x)$. Строгая теория этой формулы относится больше к теории асимптотических, чем суммируемых рядов; однако формула Эйлера-Маклорена играет столь важную роль во многих отраслях анализа, что мы должны подвергнуть ее здесь серьезному рассмотрению.

Начнем с рассмотрения двух особенно простых случаев. Ясно, что формула (13.1.1) будет наиболее применимой, когда $f(x)$ правильно изменяется при больших x, а порядок k-й производной $f^{(k)}(x)$, рассматриваемой как функция от x, при возрастании k убывает.

Примем сначала, что $0 < a \leqslant 1$, $f'(x)$ непрерывна для $x \geqslant a$, $f > 0$, $f' < 0$ и $f \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда при $x \to \infty$

$$\int_{1}^{x} |f'(t)|\,dt = -\int_{1}^{x} f'(t)\,dt = f(1) - f(x) \to f(1),$$

так что

$$\int_{1}^{\infty} |f'(t)|\,dt = f(1) < \infty.$$

Пусть $y = x - [x]$, так что $y = x - m + 1$ для $m - 1 \leqslant x < m$. Тогда $0 \leqslant y < 1$ и интеграл

$$J = \int_{1}^{\infty} y f'(x)\,dx$$

абсолютно сходится. Далее,

$$j_m = f(m) - \int_{m-1}^{m} f(x)\,dx = \int_{m-1}^{m} \{f(m) - f(x)\}\,dx =$$

$$= \int_{m-1}^{m} \{f(m) - f(x)\}\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{m-1}^{m} yf'(x)\,dx,$$

$$\sum_{m=2}^{n} f(m) - \int_{1}^{n} f(x)\,dx = \sum_{m=2}^{n} j_m = \int_{1}^{n} (x - [x])\,f'(x)\,dx.$$

Полагая

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt, \tag{13.1.2}$$

заключаем отсюда, что

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) - F(n) \to f(1) - F(1) + J \tag{13.1.3}$$

при $n \to \infty$. Если наши условия выполнены для каждого $a > 0$ и $f(x)$ интегрируема от 0 *), то в формулах (13.1.2) и (13.1.3) можно брать $a = 0$.

Примем теперь, что $f''(x)$ непрерывна для $x \geqslant a$, $f' > 0$, $f'' < 0$ и $f' \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда

$$\int_{1}^{x} |f''(t)|\,dt = -\int_{1}^{x} f''(t)\,dt = f'(1) - f'(x) \to f'(1)$$

и $|f''|$ интегрируема до ∞. Тем самым интеграл

$$J' = \frac{1}{2}\int_{1}^{\infty} (y^2 - y)\,f''(x)\,dx$$

абсолютно сходится. Полагая

$$j'_m = \frac{1}{2}\{f(m-1) + f(m)\} - \int_{m-1}^{m} f(x)\,dx =$$

$$= f(m) - \int_{m-1}^{m} \left\{f(x) + \frac{1}{2}f'(x)\right\} dx = j_m - \frac{1}{2}\int_{m-1}^{m} f'(x)\,dx$$

---

*) В этом случае $xf \to 0$ при $x \to 0$ и xf' также интегрируемо от 0.

и принимая во внимание, что $y^2 - y \to 0$, когда $x \to m-1+0$ или $x \to m-0$, получаем

$$J'_m = \int_{m-1}^{m} \left(y - \frac{1}{2}\right) f'(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{m-1}^{m} f'(x) \frac{d(y^2-y)}{dx}\,dx = -\frac{1}{2} \int_{m-1}^{m} (y^2-y) f''(x)\,dx.$$

Суммирование по m от $m=2$ до $m=n$ дает

$$\frac{1}{2} f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^n (y^2-y) f''(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$(13.1.4) \qquad \sum_{m=1}^{n} f(m) - F(n) - \frac{1}{2} f(n) \to \frac{1}{2} f(1) - F(1) - J'.$$

Формулы (13.1.3) и (13.1.4) можно рассматривать как два простейших случая формулы (13.1.1) соответственно с

$$C = f(1) - F(1) + J, \qquad C = \frac{1}{2} f(1) - F(1) - J'.$$

Если, например, $f(x) = \log x$ и $a = 1$, то наша вторая группа условий выполнена, и мы получаем, что

$$\log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n \to A = 1 + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{y^2 - y}{x^2}\,dx,$$

или

$$n! \sim e^A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Это (отвлекаясь от вычисления постоянной A, которая окажется равной $\frac{1}{2} \log 2\pi$) есть простейшая форма теоремы Стирлинга, и естественно ожидать, что более подробное изучение формулы (13.1.1) приведет к полному асимптотическому разложению для $\log n!$.

13.2. Числа Бернулли и многочлены Бернулли. Формула Эйлера-Маклорена будет исследована в этой главе двумя различными методами: средствами вещественного анализа в §§ 13.5—13.7 и с помощью теоремы Коши в §§ 13.14—13.16; разумеется, второй метод потребует значительно более сильных ограничений на $f(x)$. Наш первый метод будет опираться на свойства многочленов Бернулли $B_n(x)$.

Числа Бернулли B_n и многочлены Бернулли $B_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ определяются формулами

(13.2.1) $$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{1}{2}t+B_1\frac{t^2}{2!}-B_2\frac{t^4}{4!}+\ldots=$$
$$=1-\frac{1}{2}t+\sum(-1)^{n-1}B_n\frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

(13.2.2) $$t\frac{e^{xt}}{e^t-1}=1+\sum B_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

(13.2.3) $$t\frac{e^{xt}-1}{e^t-1}=\sum\varphi_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Здесь и до конца главы суммы с неуказанными пределами берутся от 1 до ∞. Так как левая часть формулы (13.2.3) равна нулю при $x=0$ и равна t при $x=1$, то

(13.2.4) $$\varphi_n(0)=0,$$

(13.2.5) $$\varphi_1(1)=1, \quad \varphi_n(1)=0 \quad (n>1).$$

Ряды (13.2.1)—(13.2.3) сходятся для $|t|<2\pi$. Первыми B_n служат

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\ \ldots$$

Очевидно, что

$$B_1(x)=\varphi_1(x)-\frac{1}{2}=x-\frac{1}{2},\qquad B_2(x)=\varphi_2(x)+\frac{1}{6},$$
$$B_3(x)=\varphi_3(x),\qquad B_4(x)=\varphi_4(x)-B_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и вообще

(13.2.6) $$B_{2r}(x)=\varphi_{2r}(x)+(-1)^{r-1}B_r,\quad B_{2r+1}(x)=\varphi_{2r+1}(x)\quad (r>0).$$

В частности,

(13.2.7) $$B_{2r}(0)=B_{2r}(1)=(-1)^{r-1}B_r,\ B_{2r+1}(0)=B_{2r+1}(1)=0\ (r>0).$$

Как хорошо известно,

(13.2.8) $$B_n=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\sum\frac{1}{m^{2n}}$$

(так что B_n быстро возрастает для больших n).

Первыми $\varphi_n(x)$ служат x, x^2-x, $x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$, ... Записывая формулу (13.2.3) в виде

$$\sum\varphi_n(x)\frac{t^n}{n!}=\left(1-\frac{1}{2}t+B_1\frac{t^2}{2!}-\ldots\right)\sum\frac{x^nt^n}{n!}$$

и приравнивая соответственные коэффициенты, получаем, что

$$\varphi_n(x) = x^n - \frac{1}{2} n x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 x^{n-4} + \ldots, \tag{13.2.9}$$

где знакопеременная сумма кончается на члене, содержащем x или x^2.

Тождество

$$t\,\frac{e^{(x+1)t}-1}{e^t-1} - t\,\frac{e^{xt}-1}{e^t-1} = te^{xt}$$

показывает, что

$$\varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) = nx^{n-1}, \tag{13.2.10}$$

откуда, принимая во внимание (13.2.4), следует, что

$$1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + N^{n-1} = \frac{\varphi_n(N+1)}{n} \quad (n > 1). \tag{13.2.11}$$

Дифференцируя обе части формулы (13.2.2) по x, получаем

$$\sum B_n'(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t^2e^{xt}}{e^t-1} = t + \sum B_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!},$$

и приравнивание коэффициентов дает

$$B_1'(x) = 1, \quad B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \quad (n > 1). \tag{13.2.12}$$

Соответствующие уравнения для функций $\varphi_n(x)$ таковы:

$$\varphi_1'(x) = 1, \quad \varphi_2'(x) = 2\left\{\varphi_1(x) - \frac{1}{2}\right\}, \quad \varphi_3'(x) = 3\{\varphi_2(x) - B_1\}, \ldots$$

и вообще

$$\begin{aligned} \varphi_{2m}'(x) &= 2m\varphi_{2m-1}(x), \\ \varphi_{2m+1}'(x) &= (2m+1)\{\varphi_{2m}(x) + (-1)^{m-1}B_m\}, \end{aligned} \tag{13.2.13}$$

причем первое уравнение справедливо для $m = 2, 3, \ldots$, второе — для $m = 1, 2, \ldots$.

13.3. Ассоциированные периодические функции. Определим теперь $\mathrm{B}_n(x)$ и $\psi_n(x)$ как периодические функции с периодом 1, равные соответственно $B_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ для $0 \leqslant x < 1$. Из формул (13.2.4)—(13.2.6) следует, что $\mathrm{B}_n(x)$ и $\psi_n(x)$ при $n > 1$ непрерывны для всех x, тогда как $\mathrm{B}_1(x)$ и $\psi_1(x)$ имеют скачок -1 для каждого целого x.

Как мы знаем,

$$\frac{1}{\pi}\sum \frac{\sin 2m\pi x}{m} = \frac{1}{2} - x = -\left\{\varphi_1(x) - \frac{1}{2}\right\}$$

для $0 < x < 1$, причем ряд ограниченно сходится. Интегрируя почленно, получаем

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum\frac{1-\cos 2m\pi x}{m^2}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}\varphi_2(x),$$

и, значит,

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum\frac{\cos 2m\pi x}{m^2}=\frac{1}{2}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\{\varphi_2(x)+B_1\}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi^2}\sum\frac{\cos 2m\pi x}{m^2}=\frac{1}{2}\{\psi_2(x)+B_1\}=\frac{1}{2}\mathrm{B}_2(x) \tag{13.3.1}$$

для всех x. Вообще,

$$\frac{1}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\sum\frac{\cos 2m\pi x}{m^{2k}}= \tag{13.3.2}$$
$$=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}\{\psi_{2k}(x)+(-1)^{k-1}B_k\}=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}\mathrm{B}_{2k}(x)$$

и

$$\frac{1}{2^{2k}\pi^{2k+1}}\sum\frac{\sin 2m\pi x}{m^{2k+1}}=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!}\psi_{2k+1}(x)=\frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!}\mathrm{B}_{2k+1}(x) \tag{13.3.3}$$

для $k=1, 2, \ldots$ и всех x. Действительно, равенства (13.2.7) показывают, что эти формулы верны для $x=0$; далее, (13.3.2) получается формальным дифференцированием формулы (13.3.3), а (13.3.3), с заменой k на $k-1$ и обращением знака, — формальным дифференцированием формулы (13.3.2); наконец, формула (13.3.3) с $k=0$ и заменой $\psi_1(x)$ на $\psi_1^*(x)=\psi_1(x)-\frac{1}{2}$ верна для нецелых x.

13.4. Знаки функций $\varphi_n(x)$. Согласно равенствам (13.2.4) и (13.2.5) все φ_n после φ_1 обращаются в точках $x=0$ и $x=1$ в нуль. Докажем теперь следующее предложение.

Теорема 243. *Функции $\varphi_2, \varphi_4, \varphi_6, \ldots$ сохраняют на интервале $(0, 1)$ постоянные знаки, а именно φ_{2k} — знак $(-1)^k$; функции же $\varphi_3, \varphi_5, \ldots$ обращаются в нуль также при $x=\frac{1}{2}$, причем φ_{2k+1} имеет на интервалах $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ соответственно знаки $(-1)^{k-1}$ и $(-1)^k$.*

Прежде всего,

$$\sum\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right)\frac{t^n}{n!}-\sum\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(-t)^n}{n!}=\frac{t}{e^{\frac{1}{2}t}+1}+\frac{t}{e^{-\frac{1}{2}t}+1}=t,$$

так что $\varphi_3\left(\frac{1}{2}\right)=\varphi_5\left(\frac{1}{2}\right)= \ldots =0$. Таким образом, $\varphi_{2k+1}(x)$ имеет нули $0, \frac{1}{2}, 1$.

Далее, наше утверждение верно для

$$\varphi_2(x)=x(x-1), \quad \varphi_3(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1).$$

Допустим, что оно верно вплоть до φ_{2m-1}, и покажем его справедливость для φ_{2m} и φ_{2m+1}. Так как $\varphi'_{2m}=2m\varphi_{2m-1}$ обращается в нуль только в точках $0, \frac{1}{2}$ и 1, то φ_{2m} сохраняет на интервале $(0, 1)$ постоянный знак; а формула (13.2.9) для малых x показывает, что этим знаком служит $(-1)^m$. Далее, φ_{2m} монотонна на интервалах $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, так что

$$\varphi'_{2m+1}(x)=(2m+1)\{\varphi_{2m}(x)+(-1)^{m-1}B_m\}$$

на каждом из этих интервалов может обращаться в нуль не более одного раза. Следовательно, φ_{2m+1}, обращающаяся в точках $0, \frac{1}{2}$ и 1 в нуль, сохраняет на интервалах $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ постоянный знак, которым на первом из этих интервалов, как показывает формула (13.2.9), служит $(-1)^{m-1}$, а на втором, поскольку $\varphi'_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$, служит $(-1)^m$.

Мы будем также пользоваться свойствами

$$B_{2m-1}(x)=-B_{2m-1}(1-x), \quad B_{2m}(x)=B_{2m}(1-x) \quad (0<x<1;\ m=1, 2, \ldots). \tag{13.4.1}$$

Они следуют из тригонометрических разложений § 13.3 либо из того, что

$$t\frac{e^{xt}+e^{(1-x)t}}{e^t-1}=t\frac{\operatorname{ch}\left(x-\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}t}, \quad t\frac{e^{xt}-e^{(1-x)t}}{e^t-1}=t\frac{\operatorname{sh}\left(x-\frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}t}$$

являются соответственно четными и нечетными функциями от t.

13.5. Формула суммирования Эйлера-Маклорена. В дальнейшем мы будем предполагать, что все встречающиеся производные от $f(x)$ непрерывны для $x>0$; в точке $x=0$ функция $f(x)$ обычно будет иметь особенность. $F(x)$ будет определяться формулой (13.1.2), при этом для функций $f(x)$, интегрируемых до 0, a будет обычно приниматься равным нулю.

Предположим сначала, что $0 \leqslant x \leqslant 1$ и что $f(x)$ со своими производными непрерывна на этом замкнутом интервале. Рассмотрим интеграл

$$\rho_r = \rho_r(x) = -\frac{1}{r!}\int_0^1 \mathrm{B}_r(x-t) f^{(r)}(t)\,dt, \tag{13.5.1}$$

где $r \geqslant 1$. Нам придется различать случаи $r > 1$ и $r = 1$.

Если $r > 1$, то $\mathrm{B}_r(u)$ непрерывна, и в силу (13.2.12)

$$\frac{d\mathrm{B}_r(x-t)}{dt} = -r\mathrm{B}_{r-1}(x-t).$$

Далее, $\mathrm{B}_r(x-1) = \mathrm{B}_r(x) = B_r(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\rho_r &= -\frac{\mathrm{B}_r(x)}{r!}\{f^{(r-1)}(1) - f^{(r-1)}(0)\} - \\ &\quad - \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1 \mathrm{B}_{r-1}(x-t) f^{(r-1)}(t)\,dt = \\ &= -\frac{B_r(x)}{r!}\{f^{(r-1)}(1) - f^{(r-1)}(0)\} + \rho_{r-1} \qquad (r > 1).\end{aligned} \tag{13.5.2}$$

Пусть теперь $r = 1$. Предположим сначала, что $0 < x < 1$. В этом случае $\mathrm{B}_r(u)$ имеет в целых точках u скачки -1, а в остальных точках — производную, равную 1, так что

$$\mathrm{B}_1(-0) - \mathrm{B}_1(+0) = 1, \quad \frac{d\mathrm{B}_1(x-t)}{dt} = -1.$$

Поэтому

$$f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt = \{\mathrm{B}_1(-0) - \mathrm{B}_1(+0)\} f(x) + \int_0^1 \frac{d\mathrm{B}_1(x-t)}{dt} f(t)\,dt.$$

Далее,

$$\int_0^x \frac{d\mathrm{B}_1(x-t)}{dt} f(t)\,dt = \mathrm{B}_1(+0) f(x) - \mathrm{B}_1(x) f(0) - \int_0^x \mathrm{B}_1(x-t) f'(t)\,dt,$$

$$\int_x^1 \frac{d\mathrm{B}_1(x-t)}{dt} f(t)\,dt = \mathrm{B}_1(x-1) f(1) - \mathrm{B}_1(-0) f(x) - \int_x^1 \mathrm{B}_1(x-t) f'(t)\,dt,$$

и $\mathrm{B}_1(x-1) = \mathrm{B}_1(x) = B_1(x)$. Комбинируя последние три равенства, получаем

$$\begin{aligned}f(x) - \int_0^1 f(t)\,dt &= B_1(x)\{f(1) - f(0)\} - \int_0^1 \mathrm{B}_1(x-t) f'(t)\,dt = \\ &= B_1(x)\{f(1) - f(0)\} + \rho_1.\end{aligned} \tag{13.5.3}$$

Мы доказали это для $0 < x < 1$; но, по непрерывности, то же верно для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Предполагая теперь, что $l > 1$, и комбинируя (13.5.3) с (13.5.2) при $r = 2, 3, \ldots, l$, получаем

$$f(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \sum_{r=1}^{l} \frac{B_r(x)}{r!}\{f^{(r-1)}(1) - f^{(r-1)}(0)\} + \rho_l \tag{13.5.4}$$

для $0 \leqslant x \leqslant 1$. При $l = 1$ это равенство сводится к (13.5.3), так что оно верно для $l \geqslant 1$.

Заменяя теперь $f(x)$ на $f(x+m-1)$, где m — положительное целое число, получаем

$$f(x+m-1) = \int_{m-1}^{m} f(t)\,dt + \sum_{r=1}^{l} \frac{B_r(x)}{r!}\{f^{(r-1)}(m) - f^{(r-1)}(m-1)\} + \rho_{l,m},$$

где

$$\rho_{l,m} = -\frac{1}{l!}\int_{m-1}^{m} \mathrm{B}_l(x-t) f^{(l)}(t)\,dt.$$

В частности, беря $x = 1$, $l = 2k+1$, замечая, что согласно (13.2.7) и (13.4.1)

$$B_1(1) = \frac{1}{2}, \quad B_{2s-1}(1) = 0 \quad (s > 1), \quad B_{2s}(1) = (-1)^{s-1}B_s,$$
$$\mathrm{B}_{2k+1}(1-t) = -\mathrm{B}_{2k+1}(t) = -\psi_{2k+1}(t),$$

и заменяя затем s на r, получаем

$$f(m) = \int_{m-1}^{m} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\{f(m) - f(m-1)\} + S_k(m) - S_k(m-1) + \sigma_{k,m}$$

или

$$\frac{1}{2}\{f(m-1) + f(m)\} = \int_{m-1}^{m} f(t)\,dt + S_k(m) - S_k(m-1) + \sigma_{k,m}, \tag{13.5.5}$$

где

$$S_k(m) = \sum_{r=1}^{k} \frac{(-1)^{r-1}B_r}{(2r)!} f^{(2r-1)}(m), \tag{13.5.6}$$

и

$$\sigma_{k,m} = \frac{1}{(2k+1)!}\int_{m-1}^{m} \psi_{2k+1}(t) f^{(2k+1)}(t)\,dt = \tag{13.5.7}$$
$$= -\frac{1}{(2k+2)!}\int_{m-1}^{m} \psi_{2k+2}(t) f^{(2k+2)}(t)\,dt;$$

последнее равенство получится интегрированием по частям, если принять во внимание, что $\psi_{2k+2}(0)=\psi_{2k+2}(1)=0$. При $k=0$ члены $S_k(m)$ и $S_k(m-1)$ в формуле (13.5.5) отсутствуют.

Суммируя (13.5.5) для $m=2, 3, \ldots, n$ и прибавляя $\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(n)$, получаем

$$\sum_1^n f(m)=F(n)+\frac{1}{2}f(n)+S_k(n)+P_k+U_{k,n}, \tag{13.5.8}$$

$$P_k=-F(1)+\frac{1}{2}f(1)-S_k(1), \tag{13.5.9}$$

$$U_{k,n}=-\frac{1}{(2k+2)!}\int_1^n \psi_{2k+2}(t)f^{(2k+2)}(t)\,dt. \tag{13.5.10}$$

Полагая

$$\chi_{2k+2}(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\pi t}{m^{2k+2}}= \tag{13.5.11}$$

$$=(-1)^k\frac{2^{2k+1}\pi^{2k+2}}{(2k+2)!}\{\psi_{2k+2}(t)+(-1)^k B_{k+1}\},$$

имеем

$$U_{k,n}=\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}\pi^{2k+2}}\int_1^n \chi_{2k+2}(t)f^{(2k+2)}(t)\,dt+\frac{(-1)^k B_{k+1}}{(2k+2)!}\int_1^n f^{(2k+2)}(t)\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}\pi^{2k+2}}\int_1^n \chi_{2k+2}(t)f^{(2k+2)}(t)\,dt+$$

$$+\frac{(-1)^k B_{k+1}}{(2k+2)!}\{f^{(2k+1)}(n)-f^{(2k+1)}(1)\}.$$

Поэтому формулы (13.5.8)—(13.5.10) можно записать и так:

$$\sum_1^n f(m)=F(n)+\frac{1}{2}f(n)+S_{k+1}(n)+Q_k+V_{k,n}, \tag{13.5.12}$$

$$Q_k=-F(1)+\frac{1}{2}f(1)-S_{k+1}(1), \tag{13.5.13}$$

$$V_{k,n}=\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}\pi^{2k+2}}\int_1^n \chi_{2k+2}(t)f^{(2k+2)}(t)\,dt. \tag{13.5.14}$$

Когда $f(x)$ — многочлен, то $S_k(n)$ — также многочлен, и $U_{k,n}$ равно нулю для достаточно больших k. Например, если $f(x)=x^l$, то мы можем взять k равным $\frac{1}{2}l$ или $\frac{1}{2}(l-1)$. Легко проверить, что в этом случае (13.5.8) приводится к (13.2.11).

13.6. Пределы при $n \to \infty$. До сих пор никаких вопросов о сходимости не возникало. Введем теперь предположения, что

$$\int^{\infty} |f^{(2k+2)}(x)|\,dx < \infty \tag{13.6.1}$$

и

$$f^{(2k+1)}(x) \to 0 \tag{13.6.2}$$

при $x \to \infty$, и запишем интегралы по интервалам $(1, n)$ как разности интегралов по интервалам $(1, \infty)$ и (n, ∞). Мы получим тогда

$$\sum_{1}^{n} f(m) = F(n) + \frac{1}{2} f(n) + S_k(n) + C_k + R_{k,n}, \tag{13.6.3}$$

$$C_k = -F(1) + \frac{1}{2} f(1) - S_k(1) - \tag{13.6.4}$$

$$-\frac{1}{(2k+2)!} \int_1^{\infty} \psi_{2k+2}(t) f^{(2k+2)}(t)\,dt,$$

$$R_{k,n} = \frac{1}{(2k+2)!} \int_n^{\infty} \psi_{2k+2}(t) f^{(2k+2)}(t)\,dt. \tag{13.6.5}$$

Аналогичные формулы получатся и из формул (13.5.12) — (13.5.14).

Так как $\psi_{2k+2}(t) = O(1)$, то ясно, что $R_{k,n} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому из формулы (13.6.3) следует, что

$$\sum_{1}^{n} f(m) - F(n) - \frac{1}{2} f(n) - S_k(n) \to C_k. \tag{13.6.6}$$

Наиболее интересен тот случай, когда (13.6.1) и (13.6.2) выполняются для всех k, начиная с некоторого K. Тогда (13.6.6) справедливо для $k = K$ и $k = K + 1$, и

$$S_{K+1}(n) - S_K(n) = \frac{(-1)^K B_{K+1}}{(2K+2)!} f^{(2K+1)}(n) \to 0.$$

Отсюда следует, что $C_{K+1} = C_K$, так что C_k не зависит от k для $k \geqslant K$. Это легко проверяется и непосредственно, поскольку, дважды интегрируя по частям, имеем

$$-\frac{1}{(2k+2)!} \int_1^{\infty} \psi_{2k+2}(t) f^{(2k+2)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} B_k f^{(2k-1)}(1) - \frac{1}{(2k)!} \int_1^{\infty} \psi_{2k}(t) f^{(2k)}(t)\,dt.$$

Итак, C_k для $k \geqslant K$ не зависит от (n и) k, так что $C = C_k$ есть число, зависящее только от $f(x)$ и $F(x)$, т. е. от $f(x)$ и нижнего предела a в интеграле (13.1.2). Мы называем C *постоянной Эйлера-Маклорена* для f (и F). Мы будем также называть C ($\mathfrak{R}$, a)-суммой ряда $\sum f(n)$ и писать

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(x) + \ldots = C \qquad (\mathfrak{R},\ a). \tag{13.6.7}$$

Таким образом, мы получили еще одно определение суммы расходящегося ряда; оно принадлежит к совершенно другому типу, чем большинство из рассматривавшихся ранее, и приспособлено главным образом к рядам с положительными членами, таким, как $1 + 1 + 1 + \ldots$ или $\log 2 + \log 3 + \log 4 + \ldots$

Буква $\mathfrak{R}$ поставлена в честь Рамануджана, который оперировал с расходящимися рядами, основываясь главным образом на этом определении. Оно неявно содержится в большей части рассмотрений Эйлера. Сумма, приписываемая ряду этим определением, зависит от выбранного значения a. Однако мы увидим, что обычно в каждом частном случае имеется только одно естественное значение a.

Мы будем называть (13.5.8), (13.6.3), либо тот или иной из их вариантов, смотря по контексту, „формулой суммирования Эйлера-Маклорена“.

13.7. Знак и величина остаточного члена. Мы теперь усилим наши предположения, допустив, что производные от $f(x)$, начиная с некоторого места, сохраняют постоянные знаки. Для определенности примем, что выполнены условия (13.6.1) и (13.6.2) и что $f^{(2k+2)}(x) \leqslant 0$ для $k \geqslant K$ и $x \geqslant 1$ *). Если теперь $k > K$, то в силу теоремы 243 $R_{k,n}$ имеет знак $(-1)^k$, а $R_{k-1,n}$ — знак $(-1)^{k-1}$, так что $|R_{k,n}| \leqslant |R_{k-1,n} - R_{k,n}|$. Но

$$R_{k,n} = -\frac{1}{(2k+2)!}\int f^{(2k+1)}\psi'_{2k+2}\,dt = -\frac{1}{(2k+1)!}\int f^{(2k+1)}\psi_{2k+1}\,dt =$$
$$= \frac{1}{(2k+1)!}\int f^{(2k)}\psi'_{2k+1}\,dt = \frac{1}{(2k)!}\int \{\psi_{2k} + (-1)^{k-1}B_k\} f^{(2k)}\,dt$$

(где все интегралы берутся от n до ∞); значит,

$$R_{k-1,n} - R_{k,n} = \frac{(-1)^{k-1}B_k}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n),$$

что совпадает с последним членом в $S_k(n)$. Таким образом, мы получили следующее предложение:

*) В этом случае $f^{(2k+1)}(x)$ неотрицательна для $k \geqslant K$ и $f^{(n)}(x) \to 0$ для $n \geqslant 2K + 1$.

Теорема 244. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям* (13.6.1) *и* (13.6.2), *а* $f^{(2k+2)}(x)$ *при* $k \geqslant K$ *сохраняют постоянные знаки, то ошибка в формуле*

$$\sum_{1}^{n} f(m) = F(n) + \frac{1}{2} f(n) + S_k(n) + C$$

при каждом увеличении k *на единицу, начиная с* $K+1$, *меняет знак и не превосходит по абсолютной величине последнего сохраненного члена ряда; и ряд* (13.6.4) *для* $C_k = C$ *обладает теми же свойствами.*

Ряды

$$S(n) = \sum \frac{(-1)^{r-1} B_r}{(2r)!} f^{(2r-1)}(n) \tag{13.7.1}$$

и $S(1)$, получающиеся из $S_k(n)$ и $S_k(1)$ при $k \to \infty$, обычно расходятся вследствие быстрого возрастания чисел B_r для больших r. Однако эти ряды часто можно эффективно использовать для численных расчетов. Если

(I) a_r вещественны,

(II) $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_r + R_r$ для каждого r, и

(III) R_r знакопеременно,

то мы будем говорить, что ряд $\sum a_r$ *обвертывает* s; при желании можно предполагать, что условие (III) выполнено только для $r \geqslant r_0$. Ясно, что

$$|R_r| \leqslant |a_r|$$

(для $r > 1$ или $r > r_0$). Это определение не задает числа s однозначным образом; если, например, $R_{2r-1} < 0$, $R_{2r} > 0$ и

$$\rho_1 = \min_r |R_{2r}|, \quad \rho_2 = \min_r |R_{2r-1}|,$$

то ряд $\sum a_r$ обвертывает также любое число интервала $(s - \rho_1, s + \rho_2)$ *).

Важное значение имеет тот случай, когда a_r, R_r и s суть функции некоторого параметра x, причем

$$|R_r(x)| \to 0$$

при $x \to \infty$ (для $r > 1$ или $r > r_0$), как, например, когда

$$\sum a_r(x) = c_1 + \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{x^2} + \ldots$$

есть расходящийся асимптотический ряд для некоторой функции $g(x)$. Если $\sum a_r(x)$ в только что разъясненном смысле обвертывает функ-

*) Так, все наши условия выполнены для ряда $1 - 2 + 2 - 2 + \ldots$ с $s = 0$. Здесь R_r принимает попеременно значения -1 и 1, и ряд обвертывает любое число интервала $(-1, 1)$.

цию $g(x)$, то мы будем говорить, что $\sum a_r(x)$ есть *полусходящийся ряд для* $g(x)$. Так, при условиях теоремы 244 наши условия выполнены с $x=n$ для ряда (13.7.1).

При заданном r, $|R_r(x)|\to 0$, когда $x\to\infty$. При заданном x, $|R_r(x)|$ будет обычно стремиться к бесконечности, когда $r\to\infty$. Однако, вообще говоря, для заданного x, $|R_r(x)|$ оказывается достаточно малым для надлежащим образом выбранного r, например для r, при котором $|a_r(x)|$ достигает своего минимума m_r; и тогда рассматриваемый ряд может быть использован для вычисления функции $g(x)$. При этом результат вычисления будет тем точнее, чем больше x.

При этих условиях естественно говорить, что $\sum c_r = \sum a_r(1)$ есть полусходящийся ряд для $s=g(1)$. Мы не можем назвать s „суммой“ этого ряда, поскольку он обвертывает любое число из некоторого интервала $(s-\rho_1,\ s+\rho_2)$; однако s часто будет являться суммой этого ряда в каком-либо другом смысле *). Далее, если $\sum a_r(x)$ есть полусходящийся ряд для $g(x)-h(x)$, то мы можем говорить, что $h(x)+\sum a_r(x)$ есть полусходящийся ряд для $g(x)$.

Например, возвращаясь к ряду (13.7.1), предположим, что $f(x)=\log x$ и $a=0$, так что $F(x)=x\log x - x$. Тогда наши условия выполнены для $r\geqslant 1$, и мы приходим к формулам

$$\log n! = \sum_{1}^{n}\log m = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{n} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{n^3} + \frac{B_6}{5\cdot 6}\frac{1}{n^5} - \ldots, \tag{13.7.2}$$

$$C = 1 - \frac{B_1}{1\cdot 2} + \frac{B_2}{3\cdot 4} - \frac{B_3}{5\cdot 6} + \frac{B_4}{7\cdot 8} - \ldots \tag{13.7.3}$$

Эти ряды — полусходящиеся и могут служить для вычисления $\log n!$ и C. Позже мы увидим, что $C=\frac{1}{2}\log 2\pi$.

Формула (13.7.3) не дает возможности вычислить C с большой точностью, поскольку $n=1$ слишком мало. Наименьшим является последний из выписанных членов, равный $-0{,}00059$; обрывая на нем ряд, получаем $C=0{,}919\ldots$ с точностью до третьего знака. Использование этого значения для C в формуле (13.7.2) дает тогда довольно точное значение для $\log n!$ при больших n. С другой стороны, C можно было бы вычислить со значительно большей точностью, воспользовавшись формулой (13.7.2) с достаточно большим n и вычислив $\log n!$ независимым путем.

На практике постоянную C для заданной функции f следует вычислять, представляя $\sum f(n)$ в виде

$$\sum f(n) = f(1) + \ldots + f(N) + \sum f(n+N)$$

и применяя наши формулы к последнему ряду, для которого они будут тем эффективнее, чем больше N. Разумным выбором N можно добиться практичности и высокой точности нашего вычисления.

*) См., например, §§ 13.15—13.16.

Этот метод можно применять и к сходящимся рядам, когда их сходимость чересчур медленна. В этом случае мы должны принять $a=\infty$, так что $F(n)\to 0$, и C есть сумма нашего ряда. Так, Эйлер, взяв $f(x)=\frac{1}{(x+9)^2}$, вычислил

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{9^2}+\sum\frac{1}{(n+9)^2}$$

с точностью до 18-го десятичного знака.

13.8. Пуассоновское доказательство формулы Эйлера-Маклорена. В своем исследовании формулы Эйлера-Маклорена Пуассон исходит из теории рядов Фурье.

Пусть $f(x)$ неограниченно дифференцируема для $x>0$ и $0<a<b<\infty$. Тогда согласно обычной теории рядов Фурье для $a<x<b$ имеем

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int f(t)\,dt+\frac{2}{b-a}\sum\int f(t)\cos\frac{2\pi r(t-x)}{b-a}\,dt, \tag{13.8.1}$$

где интегралы берутся от a до b. Для $x=a$ или $x=b$ эта сумма равна $\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}$. Беря $n\omega=b-a$, подставляя значения

$$x=a,\ a+\omega,\ a+2\omega,\ \ldots,\ a+(n-1)\omega$$

в формулу (13.8.1) и складывая результаты, получаем

$$\frac{1}{2}f(a)+f(a+\omega)+\ldots+f(a+(n-1)\omega)+\frac{1}{2}f(b)= \tag{13.8.2}$$
$$=\frac{n}{b-a}\int f(t)\,dt+\frac{2}{b-a}\sum_{r=1}^{\infty}\int f(t)\sum_{s=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi r(t-a-s\omega)}{b-a}\,dt.$$

Сумма, стоящая под знаком интеграла, равна

$$\Re\left\{\exp\frac{2\pi ir(t-a)}{b-a}\sum_{s=0}^{n-1}\exp\left(-\frac{2\pi irs}{n}\right)\right\};$$

сумма же, входящая в последнее выражение, отлична от нуля лишь при $r=ln$, где l — положительное целое, причем равна тогда n. Поэтому формула (13.8.2) приводится к

$$\frac{1}{2}f(a)+f(a+\omega)+\ldots+\frac{1}{2}f(b)= \tag{13.8.3}$$
$$=\frac{1}{\omega}\int f(t)\,dt+\frac{2}{\omega}\sum_{l=1}^{\infty}\int f(t)\cos\frac{2\pi l(t-a)}{\omega}\,dt.$$

Но, повторно интегрируя по частям, имеем

$$\int f(t)\cos\frac{2\pi l(t-a)}{\omega}\,dt = -\frac{\omega}{2l\pi}\int f'(t)\sin\frac{2\pi l(t-a)}{\omega}\,dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\left(\frac{\omega}{2l\pi}\right)^{2r}\{f^{(2r-1)}(b)-f^{(2r-1)}(a)\}+$$

$$+(-1)^k\left(\frac{\omega}{2l\pi}\right)^{2k}\int f^{(2k)}(t)\cos\frac{2\pi l(t-a)}{\omega}\,dt.$$

Подставляя это в (13.8.3) и используя формулу (13.2.8), находим

$$(13.8.4)\qquad \frac{1}{2}f(a)+f(a+\omega)+\ldots+\frac{1}{2}f(b)=$$

$$=\frac{1}{\omega}\int f(t)\,dt+\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\omega^{2r-1}\frac{B_r}{(2r)!}\{f^{(2r-1)}(b)-f^{(2r-1)}(a)\}+W_k,$$

где

$$W_k=(-1)^k\frac{\omega^{2k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\int f^{(2k)}(t)\sum\frac{1}{l^{2k}}\cos\frac{2\pi l(t-a)}{\omega}\,dt.$$

В частности, при $a=1$, $\omega=1$, $b=n+1$ формула (13.8.4) принимает вид

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n+1)=F(n+1)-F(1)+\frac{1}{2}f(n+1)+$$

$$+\frac{1}{2}f(1)+\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{B_r}{(2r)!}\{f^{(2r-1)}(n+1)-f^{(2r-1)}(1)\}+$$

$$+\frac{(-1)^k}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\int_1^{n+1}f^{(2k)}(t)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi lt}{l^{2k}}\,dt,$$

что равносильно формуле (13.5.12) с заменой n на $n+1$ и k на $k-1$.

13.9. Об одной формуле Фурье. Теперь мы в состоянии обосновать формулу Фурье (2.9.2), т. е. формулу

$$(13.9.1)\qquad \frac{1}{2}\pi f(x)=\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h f^{(2h)}(\pi)\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2^{2h+1}}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{2^{2h}\pi^{2h+1}}{(2h+1)!}f^{(2h)}(\pi)\,B_{2h+1}\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right),$$

где $f(x)$ — нечетная функция и $-\pi<x<\pi$. Если положить

$$\frac{x+\pi}{2\pi}=y,\quad x=2\pi\left(y-\frac{1}{2}\right),\quad f(x)=f\left(2\pi\left(y-\frac{1}{2}\right)\right)=g(y),$$

так что $0<y<1$, то эта формула примет вид

$$(13.9.2)\qquad g(y)=2\sum_{h=0}^{\infty}\frac{g^{(2h)}(1)}{(2h+1)!}B_{2h+1}(y).$$

Но формула (13.5.4) при допущении, что $\rho_l\to 0$, дает

$$(13.9.3)\quad g(y)=\int_0^1 g(t)\,dt+\sum_1^{\infty}\frac{B_\nu(y)}{\nu!}\{g^{(\nu-1)}(1)-g^{(\nu-1)}(0)\}.$$

Так как, кроме того, $f(x)$ — нечетная, то $g(1-y)=-g(y)$, и потому

$$\int_0^1 g(t)\,dt=0,\ g^{(2h-1)}(1)-g^{(2h-1)}(0)=0,\ g^{(2h)}(1)-g^{(2h)}(0)=2g^{(2h)}(1).$$

Тем самым (13.9.3) приводится к (13.9.2).

Пусть, например, $f(x)$ — целая функция экспоненциального типа, меньшего чем 1, так что $g(y)$ — типа, меньшего чем 2π. Тогда $g^{(l)}(y)=O(c^l)$, где $0<c<2\pi$, равномерно на отрезке $[0,\ 1]$, а $B_l(y)=O\left\{\frac{l!}{(2\pi)^l}\right\}$ в силу (13.3.2) и (13.3.3) снова равномерно на том же отрезке. Следовательно, $\rho_l\to 0$, и формула Фурье справедлива.

13.10. Случай $f(x)=\frac{1}{x^s}$ и дзета-функция Римана. Рассмотрим теперь подробнее тот случай, когда $f(x)=\frac{1}{x^s}$ и $a=1$, так что

$$(13.10.1)\quad F(x)=F(x,s)=\int_1^x\frac{dt}{t^s}=\begin{cases}\dfrac{x^{1-s}-1}{1-s} & \text{при } s\neq 1,\\ \log x & \text{при } s=1,\end{cases}$$

и $F(x,s)$ есть целая функция от s.

Пусть сперва s вещественно и $s\geqslant S$, где $S\leqslant 0$. Тогда для $2k>-S-1$ выполняются условия (13.6.1) и (13.6.2). Поэтому, обозначая $s(s+1)\ldots(s+p)$ через $s^{(p)}$, получаем при $s\neq 1$ и $2k>-S-1$

$$(13.10.2)\quad \sum_1^n\frac{1}{m^s}-\frac{n^{1-s}-1}{1-s}-\frac{1}{2n^s}+$$
$$+\sum_1^k(-1)^{r-1}s^{(2r-2)}\frac{B_r}{(2r)!}\frac{1}{n^{s+2r-1}}\to C(s),$$

где

$$C(s)=\frac{1}{2}+\sum_{1}^{k}(-1)^{r-1}s^{(2r-2)}\frac{B_r}{(2r)!}-\frac{s^{(2k+1)}}{(2k+2)!}\int_{1}^{\infty}\psi_{2k+2}(t)\frac{dt}{t^{s+2k+2}}. \tag{13.10.3}$$

Но

$$R_{k,n}=\frac{s^{(2k+1)}}{(2k+2)!}\int_{n}^{\infty}\psi_{2k+2}(t)\frac{dt}{t^{s+2k+2}}=O\left(\frac{1}{n^{s+2k+1}}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{m^s}-\frac{n^{1-s}-1}{1-s}\sim C(s)+\frac{1}{2n^s}-\sum(-1)^{r-1}s^{(2r-2)}\frac{B_r}{(2r)!}\frac{1}{n^{s+2r-1}} \tag{13.10.4}$$

в смысле § 2.5 $\left(\text{с заменой } x \text{ на } \frac{1}{n}\right)$.

Мы приняли, что $s\neq 1$; однако наши формулы с $F(n)=\log n$ сохраняют силу и для $s=1$. В частности,

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\to C(1),$$

так что $C(1)$ есть постоянная Эйлера γ. Таким образом, получаем формулы

$$\gamma=\frac{1}{2}+\sum_{1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{B_r}{2r}-\int_{1}^{\infty}\psi_{2k+2}(t)\frac{dt}{t^{2k+3}} \tag{13.10.5}$$

и

$$\gamma=\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}-\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{6}-\ldots, \tag{13.10.6}$$

где последний ряд является полусходящимся в смысле § 13.7.

Рассмотрим теперь комплексные s. В этом случае понятие полусходимости теряет смысл. Но если $s=\sigma+i\tau$, то $R_{k,n}=O\left(\frac{1}{n^{\sigma+2k+1}}\right)$, равномерно относительно τ, и остальные наши заключения остаются в силе с заменой в соответствующих местах s на σ. Далее, соотношение (13.10.2) выполняется равномерно в любой замкнутой ограниченной области D, целиком лежащей правее прямой $\sigma=S$, так что $C(s)$ есть аналитическая функция от s, регулярная в D, и так как S может быть любым отрицательным числом, то заключаем, что $C(s)$ есть целая функция. Наконец, при $\sigma > 1$

$$C(s) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n \frac{1}{m^s} - \frac{n^{1-s}-1}{1-s}\right) = \sum \frac{1}{m^s} - \frac{1}{s-1} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 245. *$\zeta(s)$ есть аналитическая функция от s, регулярная на всей комплексной плоскости за исключением простого полюса в точке $s=1$, где она ведет себя, как* $\frac{1}{s-1} + \gamma + \ldots$

Одновременно нами получен ряд аналитических представлений для $\zeta(s)$, как

$$(13.10.7)\qquad \zeta(s) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_1^n \frac{1}{m^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2n^s}\right\} \quad (\sigma > -1),$$

$$(13.10.8)\qquad \zeta(s) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_1^n \frac{1}{m^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2n^s} + \frac{s}{12n^{s+1}}\right\} \quad (\sigma > -3),$$

$$(13.10.9)\qquad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - \frac{s(s+1)}{2}\int_1^\infty \frac{\psi_2(t)}{t^{s+2}}\,dt \quad (\sigma > -1),$$

и т. д.; при $s=1$ эти формулы требуют некоторых видоизменений; так, в формуле (13.10.9) $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ следует заменить на γ.

При $s=0$ и $s=-1$ формулы (13.10.7) и (13.10.8) соответственно дают

$$\sum_1^n 1 - n - \frac{1}{2} \to \zeta(0), \qquad \sum_1^n m - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{12} \to \zeta(-1),$$

т. е. показывают, что

$$(13.10.10)\qquad \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(-1) = -\frac{1}{12},$$

$$(13.10.11)\qquad 1+1+1+\ldots = -\frac{1}{2},\ 1+2+3+\ldots = -\frac{1}{12} \quad (\mathfrak{R}, 0).$$

13.11. Случай $f(x) = \log(x+c)$ и теорема Стирлинга. Аналогичные рассмотрения можно провести и для функции $f(x) = \frac{\log x}{x^s}$, причем ясно, что результаты, к которым приведут эти рассмотрения, можно будет получить и путем формального дифференцирования по s соответствующих результатов для $\frac{1}{x^s}$. Так, например,

$$\sum_{1}^{n}\frac{\log m}{m^s}-\frac{n^{1-s}\log n}{1-s}+\frac{n^{1-s}}{(1-s)^2}-\frac{\log n}{2n^s}\to-\zeta'(s) \tag{13.11.1}$$

для $\sigma>-1$. Беря здесь $s=0$, получаем одну из форм теоремы Стирлинга для $\log n!$; однако этот случай столь важен, что лучше будет рассмотреть его независимо.

Чтобы получить общую формулу для $\log\Gamma(x+1)$, не ограниченную целыми значениями x, берем

$$f(x)=\log(x+c)\quad (c>-1),\quad a=-c,$$

и затем вместо $n+c$ пишем x. В результате получаем

$$\log\Gamma(x+1)=\sum_{1}^{n}\log(m+c)+\log\Gamma(1+c)= \tag{13.11.2}$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+C+S_k(n)+R_{k,n},$$

где

$$C=\log\Gamma(1+c)-\left(\frac{1}{2}+c\right)\log(1+c)+1+c-S_k(1)-R_{k,1}, \tag{13.11.3}$$

$$S_k(n)=\sum_{1}^{k}\frac{(-1)^{r-1}B_r}{(2r-1)2r}\frac{1}{x^{2r-1}}, \tag{13.11.4}$$

$$R_{k,n}=-\frac{1}{2k+2}\int_{n}^{\infty}\frac{\psi_{2k+2}(t)}{(t+c)^{2k+2}}\,dt=O\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right). \tag{13.11.5}$$

В частности, при $k=0$ это дает

$$\log\Gamma(x+1)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x+x\to C, \tag{13.11.6}$$

где

$$C=\log\Gamma(1+c)-\left(\frac{1}{2}+c\right)\log(1+c)+1+c+ \tag{13.11.7}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{\psi_2(t)}{(t+c)^2}\,dt.$$

Здесь C, на первый взгляд, есть функция $C(c)$ от c. Однако в действительности C не зависит от c, но для доказательства этого, разумеется, требуется несколько большего знания свойств функции $\Gamma(x)$, чем до сих пор предполагалось в этой главе. Так, из формулы Гаусса

$$\Gamma(1+c)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^c}{(1+c)(2+c)\ldots(n+c)}$$

следует, что

$$\log \Gamma(n+1+c) - \log \Gamma(n+1) - c \log n \to 0$$

и, значит, в силу (13.11.6)

$$C(c) - C(0) = \lim \left\{ c \log n - \left(n + c + \frac{1}{2}\right) \log (n+c) + \right.$$
$$\left. + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + c \right\} = 0.$$

Таким образом, C не зависит от c и определяется формулой (13.11.7) с любым c.

Имеется много способов вычисления C в конечной форме. Наиболее обычный из них основывается на применении „формулы Валлиса“ для π (получающейся как следствие представления $\sin \pi x$ в виде произведения). Для нас здесь естественнее применить теорию ζ-функции, поскольку из (13.11.1) следует, что

$$C = -\zeta'(0). \tag{13.11.8}$$

Беря в функциональном уравнении Римана (2.2.2) $s = 1 + \varepsilon$, развертывая обе части по степеням ε и приравнивая соответственные первые коэффициенты, находим, что $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$ (в согласии с (13.10.10)) и $\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi$. Таким образом,

$$C = \frac{1}{2} \log 2\pi, \tag{13.11.9}$$

и мы приходим к обычной форме теоремы Стирлинга.

C можно также вычислить по формуле (13.11.7). Беря в ней, например, $c = 0$, получаем

$$C = 1 + \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{\psi_2(t)}{t^2} dt = 1 + \frac{1}{2} \sum \int_n^{n+1} \frac{(t-n)(t-n-1)}{t^2} dt =$$
$$= 1 + \sum \left\{ 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+1}{n} \right\}. \tag{13.11.10}$$

Но

$$-1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+1}{n} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2\, dt}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - t^2}.$$

Подставляя это и производя суммирование под знаком интеграла, получаем

$$C = 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\pi t \operatorname{tg} \pi t - \frac{2t^2}{\frac{1}{4} - t^2}\right) dt = \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

В заключение отметим формулы

$$(13.11.11) \qquad \log 1 + \log 2 + \ldots = \frac{1}{2} \log 2\pi \qquad (\mathfrak{R},\ 0)$$

и

$$(13.11.12) \qquad \frac{1}{2} \log 2\pi = 1 - \frac{B_1}{1 \cdot 2} + \frac{B_2}{3 \cdot 4} - \frac{B_3}{5 \cdot 6} + \ldots,$$

где последний ряд — полусходящийся.

13.12. Обобщение формулы Эйлера-Маклорена. Рассмотрим одно обобщение формулы Эйлера-Маклорена, важное для исчисления конечных разностей. Его формальное происхождение таково: если писать

$$Df(x) = f'(x), \quad e^{hD} f(x) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) + \ldots = f(x+h),$$

а под $D^{-1} f(x)$ понимать $F(x)$, то

$$\begin{aligned} f(x+y) &+ f(x+y+1) + \ldots + f(x+y+n-2) = \\ &= \{e^{yD} + e^{(y+1)D} + \ldots + e^{(y+n-2)D}\} f(x) = \\ &= \frac{e^{(y+n-1)D} - e^{yD}}{e^D - 1} f(x) = \frac{e^{yD}}{e^D - 1} \{f(x+n-1) - f(x)\} = \\ &= \left\{\frac{1}{D} + \left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{B_2(y)}{2!} D + \ldots\right\} \{f(x+n-1) - f(x)\}, \end{aligned}$$

что можно записать в виде $\Phi(n) - \Phi(1)$, где

$$\Phi(n) = F(x+n-1) + \left(y - \frac{1}{2}\right) f(x+n-1) + \frac{B_2(y)}{2!} f'(x+n-1) + \ldots$$

Беря, в частности, $x = 1$, получаем

$$(13.12.1) \qquad \begin{aligned} f(y+1) &+ f(y+2) + \ldots + f(y+n-1) = \\ &= F(n) + C(y) + \left(y - \frac{1}{2}\right) f(n) + \frac{B_2(y)}{2!} f'(n) + \ldots, \end{aligned}$$

где

$$(13.12.2) \qquad C(y) = -F(1) - \left(y - \frac{1}{2}\right) f(1) - \frac{B_2(y)}{2!} f'(1) - \ldots$$

При $y = 0$ эти формулы согласуются с полученными в §§ 13.5—13.6.

Например, для $f(x) = \log x$ и $a = 0$ получаем

$$\log\Gamma(n+y) = n\log n - n + \left(y - \frac{1}{2}\right)\log n + \\ + C + \frac{B_2(y)}{1\cdot 2}\frac{1}{n} - \frac{B_3(y)}{2\cdot 3}\frac{1}{n^2} + \ldots, \tag{13.12.3}$$

где

$$C = \log\Gamma(1+y) + 1 - \frac{B_2(y)}{1\cdot 2} + \frac{B_3(y)}{2\cdot 3} - \ldots, \tag{13.12.4}$$

и сравнение формулы (13.12.3) с теоремой Стирлинга показывает, что

$$C = \frac{1}{2}\log 2\pi,$$

независимо от y. Беря $y = 0$ или дифференцируя по y и затем полагая $y = 0$, получаем соответственно формулы (13.11.12) и (13.10.6).

Все эти рассмотрения носят формальный характер. Полученные формулы можно обосновать с помощью методов §§ 13.5—13.7 или комплексного метода, который будет развит в § 13.14. Заметим, что мы пришли здесь к асимптотическому разложению $\log\Gamma(n+y)$ по степеням $\frac{1}{n}$, тогда как рассмотрения в § 13.11 приводят к асимптотическому разложению по степеням $\frac{1}{n-1+y}$.

13.13. Другие формулы для *C*. Существуют и другие формулы для C, интересные сами по себе и естественно приводящие к рассмотрениям § 13.14.

Заметим сперва, что для $t > 0$

$$\int_1^\infty \psi_2(w)\, e^{-tw}\, dt = \frac{2}{t}\int_1^\infty \left\{\psi_1(w) - \frac{1}{2}\right\} e^{-tw}\, dt = \\ = \frac{2}{t}\sum_1^\infty \int_0^1 \left(u - \frac{1}{2}\right) e^{-t(u+n)}\, du,$$

поскольку $\psi_2' = 2\psi_1 - 1$, а ψ_1 равно $w - n$ на интервале $(n, n+1)$. Простое вычисление дает тогда

$$J(t) = \int_1^\infty \psi_2(w)\, e^{-tw}\, dw = \frac{2}{t^2 e^t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^t - 1}\right). \tag{13.13.1}$$

Пусть теперь

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\chi(t), \tag{13.13.2}$$

где интеграл абсолютно сходится для $x > 0$. Тогда, принимая во внимание (13.13.1), имеем

$$(13.13.3)\quad \int_1^\infty \psi_2(w) f''(w)\,dw = \int_1^\infty \psi_2(w)\,dw \int_0^\infty t^2 e^{-wt}\,d\chi(t) =$$
$$= \int_0^\infty t^2 J(t)\,d\chi(t) = -2\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) d\chi(t).$$

Так как, далее, условия (13.6.1) и (13.6.2) выполнены для $k \geqslant 0$, то можно воспользоваться формулой (13.6.4) с $k=0$. В итоге получаем

$$(13.13.4)\quad C = -F(1) + \frac{1}{2}f(1) + \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) d\chi(t).$$

Так например, взяв (как в § 13.10)

$$d\chi = \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\,dt,\quad f(x) = \frac{1}{x^s},\quad \sigma > 0,\quad a = 1,\quad C = \zeta(s) - \frac{1}{s-1},$$

получим

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) t^{s-1}\,dt$$

(формулу, в действительности справедливую и для $\sigma > -1$). При $s = 1$ она дает

$$(13.13.5)\quad \gamma = \frac{1}{2} + \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right) dt =$$
$$= 1 + \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right) dt.$$

Рассуждение, приводящее к формуле (13.13.4), сохраняет силу и в том предположении, что

$$f'(x) = -\int_0^\infty t e^{-xt}\,d\chi(t)$$

абсолютно сходится для $x \geqslant 1$, даже если интеграл (13.13.2) не существует. Так, если $d\chi = e^{-ct}\frac{dt}{t}$, где $c > -1$, то $f''(x) = \frac{1}{(x+c)^2}$ и

$$\int_1^\infty \frac{\psi_2(w)}{(w+c)^2}\,dw = -2\int_0^\infty e^{-(1+c)t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{dt}{t}.$$

Комбинируя это с формулами (13.11.7) и (13.11.9), находим

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = \log\Gamma(1+c) - \left(\frac{1}{2}+c\right)\log(1+c) + 1 + c -$$
$$-\int_0^\infty e^{-(1+c)t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{dt}{t}.$$

В частности, при $c = 0$

(13.13.6) $$\frac{1}{2}\log 2\pi = 1 - \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\frac{dt}{t}.$$

Далее, дифференцируя по c и заменяя затем c на $c-1$, получаем

(13.13.7) $$\log c - \frac{\Gamma'(1+c)}{\Gamma(1+c)} = \int_0^\infty e^{-ct}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)dt$$

для $c > 0$ (или комплексных c с $\Re c > 0$).

Формулы другого типа предложили Абель и Плана. Возвращаясь к интегралу (13.13.2), замечаем, что $f(z)$ есть аналитическая функция от z, регулярная для $x = \Re z > 0$, а

(13.13.8) $$q(\xi, \eta) = \frac{1}{2i}\{f(\xi + i\eta) - f(\xi - i\eta)\} = -\int e^{-\xi t}\sin\eta t\, d\chi(t)$$

для $\xi > 0$ *). Далее, на основании известной формулы

$$\int \frac{q(\xi,\eta)}{e^{2\pi\eta}-1}d\eta = -\int e^{-\xi t}d\chi\int\frac{\sin\eta t}{e^{2\pi\eta}-1}d\eta =$$
$$= -\frac{1}{2}\int e^{-\xi t}\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)d\chi.$$

Полагая здесь $\xi = 1$ и принимая во внимание формулу (13.13.4), находим

(13.13.9) $$C = -F(1) + \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{i}\int\frac{f(1+i\eta) - f(1-i\eta)}{e^{2\pi\eta}-1}d\eta.$$

В частности, имеем

(13.13.10) $$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{i}\int\frac{(1+i\eta)^{-s} - (1-i\eta)^{-s}}{e^{2\pi\eta}-1}d\eta,$$

*) Мы возвращаемся к соглашению, что интегралы с неуказанными пределами берутся от 0 до ∞.

сначала для $\sigma > 0$, а затем, путем аналитического продолжения, для всех s; далее,

$$\gamma = \frac{1}{2} + 2\int \frac{\eta}{1+\eta^2}\frac{d\eta}{e^{2\pi\eta}-1}, \tag{13.13.11}$$

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = 1 - 2\int \frac{\operatorname{arctg}\eta}{e^{2\pi\eta}-1}\,d\eta. \tag{13.13.12}$$

Последняя формула соответствует случаю $f(x) = \log x$, когда $f(x)$ на самом деле не представляется формулой (13.13.2).

В следующем параграфе мы дадим доказательство формулы (13.13.9), не зависящее от какого-либо специального интегрального представления для $f(x)$. Ясно, что справедливость этой формулы должна основываться на предположениях о поведении $f(x)$ в комплексной плоскости; это приведет нас в следующем параграфе к исследованию формулы Эйлера-Маклорена с совершенно другой точки зрения. Последнему будет полезно предпослать одно замечание формального характера. Если написать

$$\frac{1}{i}\{f(1+i\eta) - f(1-i\eta)\} = 2\sum (-1)^{r-1}\frac{f^{(2r-1)}(1)}{(2r-1)!}\eta^{2r-1},$$

вставить это разложение в (13.13.9), формально проинтегрировать почленно и заметить, что

$$\int \frac{\eta^{2r-1}}{e^{2\pi\eta}-1}\,d\eta = \frac{B_r}{4r}, \tag{13.13.13}$$

то мы вновь придем к ряду

$$C = -F(1) + \frac{1}{2}f(1) - \sum \frac{(-1)^{r-1}B_r}{(2r)!}f^{(2r-1)}(1),$$

связав тем самым формулу (13.13.9) с нашими предыдущими рассмотрениями.

13.14. Исследование формулы Эйлера-Маклорена посредством комплексного интегрирования. Будем предполагать теперь, что $f(z)$ есть аналитическая функция от $z = x + iy$, регулярная для $x \geqslant \xi$, где $\xi < 1$, и

$$e^{-2\pi|y|}\,|f(x+iy)| \to 0 \tag{13.14.1}$$

при $|y| \to \infty$, равномерно на любом конечном интервале (ξ, X) изменения x. Обозначим прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 1$, $x = n$ и $y = \pm Y$, с полукруглыми вмятинами радиуса ρ у точек 1 и n, через $C(\rho)$, а совокупность обеих этих вмятин — через $I(\rho)$. Определим C как предел $C(\rho) - I(\rho)$ при $\rho \to 0$, а C_1 и C_2 — как части контура C, лежащие соответственно выше и ниже вещественной оси.

По теореме Коши,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \pi \operatorname{ctg} \pi z f(z)\, dz = \sum_{m=1}^{n}{}' f(m),$$

где интегралы вдоль вертикальных сторон контура C понимаются как главные значения, а штрих при знаке суммы указывает, что к ее крайним членам следует приписать множитель $\frac{1}{2}$. Но

$$\int\limits_{C_1} \pi i f(z)\, dz = -\pi i \int\limits_1^n f(x)\, dx, \quad \int\limits_{C_2} \{-\pi i f(z)\}\, dz = -\pi i \int\limits_1^n f(x)\, dx;$$

значит,

$$(13.14.2)\quad \sum_1^n f(m) = \int\limits_1^n f(x)\, dx + \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2i}\int\limits_C \psi(z) f(z)\, dz,$$

где

$$\psi(z) = \operatorname{ctg} \pi z + i = \frac{2i}{1 - e^{-2\pi i z}}, \quad \psi(z) = \operatorname{ctg} \pi z - i = \frac{2i}{e^{2\pi i z} - 1}$$

соответственно на C_1 и C_2.

Из условия (13.14.1) следует, что интегралы вдоль горизонтальных сторон контура C стремятся к нулю при $Y \to \infty$; поэтому (13.14.2) приводится к

$$(13.14.3)\quad \sum_{m=1}^{n} f(m) - \int\limits_1^n f(x)\, dx - \frac{1}{2} f(n) - \frac{1}{2} f(1) = Q(n) - Q(1),$$

где

$$Q(c) = \frac{1}{2i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \psi(z) f(z)\, dz,$$

причем $Q(n)$ и $Q(1)$ понимаются как главные значения соответственно при $z = n$ и $z = 1$. Но

$$\psi(1 + iy) = \begin{cases} \dfrac{2i}{1 - e^{2\pi y}} & \text{при } y > 0, \\ \dfrac{2i}{e^{2\pi |y|} - 1} & \text{при } y < 0, \end{cases}$$

и те же значения имеет $\psi(n + iy)$. Поэтому, подставляя эти значения в $Q(n)$ и $Q(1)$ и объединяя части интеграла, соответствующие положительным и отрицательным y, получаем

$$(13.14.4)\quad Q(1) = 2\int \frac{q(1, y)}{e^{2\pi y} - 1}\, dy, \quad Q(n) = 2\int \frac{q(n, y)}{e^{2\pi y} - 1}\, dy,$$

где $q(x, y)$ определено формулой (13.13.8). Здесь интегралы сходятся уже в обычном смысле, поскольку $q(x, y)$ есть $O(|y|)$ для малых y. Если f вещественна для вещественных z, то $q(x, y)$ есть ее мнимая часть.

Представим теперь $q(n, y)$ по формуле Тэйлора в виде

$$q(n, y) = yf'(n) - \frac{y^3}{3!}f'''(n) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-1}\frac{y^{2k-1}}{(2k-1)!}f^{(2k-1)}(n) + q_{2k+1}(n, y), \tag{13.14.5}$$

подставим это разложение в интеграл для $Q(n)$ и воспользуемся формулой (13.13.13). В результате мы получим

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) - \int_1^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}f(n) - \\ - \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}\frac{B^r}{(2r)!}f^{(2r-1)}(n) = \frac{1}{2}f(1) - 2\int\frac{q(1, y)}{e^{2\pi y}-1}\,dy + R_k(n), \tag{13.14.6}$$

где

$$R_k(n) = 2\int\frac{q_{2k+1}(n, y)}{e^{2\pi y}-1}\,dy.$$

Последняя сумма в левой части формулы (13.14.6) есть $S_k(n)$ § 13.5. Если мы сможем показать, что $R_k(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то получим, что

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) - \int_1^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}f(n) - S_k(n) \to \\ \to \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{i}\int\frac{f(1+iy) - f(1-iy)}{e^{2\pi y}-1}\,dy,$$

в согласии с формулой (13.13.9), поскольку $F(1) = 0$, когда $a = 1$. Это и есть формула Абеля-Плана.

Для доказательства того, что $R_k(n) \to 0$, мы должны, разумеется, наложить на $f(z)$ значительно более сильные ограничения. Мы будем предполагать, что для каждого r

$$f^{(r)}(z) = O(|z|^{c-r}) \tag{13.14.7}$$

с фиксированным c, когда $z \to \infty$ в полуплоскости $x \geqslant \xi$. Будем также предполагать, что $2k + 1 > c$. Тогда, пользуясь разложением (13.14.5) и формулой

$$g(y) = g(0) + yg'(0) + \ldots + \frac{y^{2k}}{(2k)!}g^{(2k)}(0) + \\ + \frac{y^{2k+1}}{(2k)!}\int_0^1 (1-u)^{2k} g^{(2k+1)}(yu)\,du$$

для $g(y)=q(n, y)$, находим, что

$$q_{2k+1}(n, y)=$$
$$=\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{2(2k)!}\int\limits_0^1 (1-u)^{2k}\{f^{(2k+1)}(n+iyu)+f^{(2k+1)}(n-iyu)\}\,du.$$

Так как $|n+iy|\geqslant n$ и $2k+1>c$, то из условия (13.14.7) следует, что

$$q_{2k+1}(n, y)=O(|y|^{2k+1}n^{c-2k-1})$$

равномерно относительно y и, значит, что

$$R_k(n)=O(n^{c-2k-1})\int\frac{y^{2k+1}}{e^{2\pi y}-1}\,dy=O(n^{c-2k-1})\to 0$$

при $n\to\infty$; этим и завершается доказательство.

Указанные условия выполнены, например, для $f(x)=\frac{1}{x^s}$ или $f(x)=\log x$, и таким образом мы вновь получаем многие результаты §§ 13.10—13.13. Разумеется, нельзя рассчитывать, что этим способом можно получить столь точные результаты, как в § 13.7.

13.15. Суммируемость ряда Эйлера-Маклорена. Мы будем называть ряд

$$\mathfrak{S}(n)=\frac{1}{2}f(n)+\frac{B_1}{2!}f'(n)+0-\frac{B_2}{4!}f'''(n)+0+\ldots=\sum_0^\infty a_r, \tag{13.15.1}$$

где

$$a_0=\frac{1}{2}f(n),\quad a_{2r-1}=\frac{(-1)^{r-1}B_r}{(2r)!}f^{(2r-1)}(n)\quad (r\geqslant 1),\quad a_{2r}=0\quad (r\geqslant 1), \tag{13.15.2}$$

„рядом Эйлера-Маклорена" для $f(n)$. Мы видели, что при известных условиях он служит асимптотическим рядом для

$$\Phi(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)-\int\limits_a^n f(x)\,dx-C, \tag{13.15.3}$$

но остался невыясненным вопрос, суммируем ли он каким-либо из методов, изложенных в предыдущих главах. Так как рассматриваемый ряд обычно быстро расходится, то для этой цели требуется довольно сильно действующий метод. Мы покажем, что в известных случаях, охватывающих, в частности, все рассмотренные в предыдущих параграфах, этот ряд суммируем методом (B*) § 8.11.

Примем сначала, что $0 < \delta < 1$, $s > 0$ и

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z|^s}\right), \tag{13.15.4}$$

равномерно в полуплоскости $x \geqslant \delta$. Тогда

$$f^{(2r-1)}(n) = \frac{(2r-1)!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(u)}{(u-n)^{2r}}\, du,$$

где C есть прямая $(\delta + i\infty,\ \delta - i\infty)$, и потому

$$\begin{aligned} a(t) = \sum_0^\infty a_k \frac{t^k}{k!} &= \frac{1}{2} f(n) + \frac{B_1}{1!\,2!} t f'(n) - \frac{B_2}{3!\,4!} t^3 f'''(n) + \ldots = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(u)}{u-n} \left\{\frac{1}{2} + \frac{B_1}{2!} \frac{t}{u-n} - \frac{B_2}{4!} \left(\frac{t}{u-n}\right)^3 + \ldots\right\} du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(u)}{n-u} \left(\frac{1}{e^w - 1} - \frac{1}{w}\right) du = \\ &= \frac{1}{2\pi i t} \int\limits_C f(u) \left(\frac{w}{e^w - 1} - 1\right) du, \end{aligned} \tag{13.15.5}$$

где $w = \dfrac{t}{n-u}$. Почленное интегрирование законно для малых t, поскольку $|w| \leqslant \dfrac{|t|}{n-\delta}$,

$$\frac{B_1}{2!}|w| + \frac{B_2}{4!}|w|^3 + \ldots = \frac{1}{|w|} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}|w|$$

ограничено для $|w| < \pi$ и

$$\int\limits_C \left|\frac{f(u)}{n-u}\right| |du| < \infty.$$

Таким образом, формула

$$a(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int\limits_C f(u) \left(\frac{w}{e^w - 1} - 1\right) du$$

верна для малых t.

Примем пока без доказательства, что функция $a(t)$, определенная рядом (13.15.5), равна

$$\frac{1}{2\pi i t} \int\limits_C f(u) \left(\frac{w}{e^w - 1} - 1\right) du$$

для всех положительных t. Тогда

$$\int e^{-t}a(t)\,dt=\int \frac{e^{-t}}{t}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\left(\frac{w}{e^w-1}-1\right)du\right\}dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\left\{\int \frac{e^{-t}}{t}\left(\frac{w}{e^w-1}-1\right)dt\right\}du,$$

в предположении законности обращения порядка интегрирования, что мы тоже примем пока без доказательства. Внутренний интеграл в последней строке равен

$$J=\int e^{-t}\left(\frac{\omega}{e^{\omega t}-1}-\frac{1}{t}\right)dt,$$

где

$$\omega=\frac{w}{t}=\frac{1}{n-u}=\frac{1}{n-\delta-iy}=\rho e^{i\varphi},$$

причем $|\varphi|<\frac{1}{2}\pi$. Применяя теорему Коши к сектору, ограниченному вещественной осью t и лучом $\arg t=-\varphi$, и принимая во внимание формулу (13.13.7), получаем

$$J=\int e^{-re^{-i\varphi}}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}}{e^{\rho r}-1}-\frac{e^{i\varphi}}{r}\right)e^{-i\varphi}\,dr=\int e^{-\frac{R}{\omega}}\left(\frac{1}{e^R-1}-\frac{1}{R}\right)dR=$$
$$=\int e^{-R(n-u)}\left(\frac{1}{e^R-1}-\frac{1}{R}\right)dR=\log(n-u)-\frac{\Gamma'(1+n-u)}{\Gamma(1+n-u)},$$

где взята ветвь логарифма, вещественная при $u=\delta$. Таким образом,

$$\int e^{-t}a(t)\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\left\{\log(n-u)-\frac{\Gamma'(1+n-u)}{\Gamma(1+n-u)}\right\}du. \tag{13.15.6}$$

Мы видим, что (если отвлечься от недоказанности некоторых наших допущений) ряд $\mathfrak{S}(n)$ суммируем (B*) к сумме (13.15.6), а разность $\mathfrak{S}(n)-\mathfrak{S}(1)$ суммируема (B*) к сумме

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\left\{\log\frac{n-u}{1-u}-\frac{\Gamma'(1+n-u)}{\Gamma(1+n-u)}+\frac{\Gamma'(2-u)}{\Gamma(2-u)}\right\}du=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\log\frac{n-u}{1-u}\,du-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\left(\frac{1}{2-u}+\frac{1}{3-u}+\ldots+\frac{1}{n-u}\right)du=$$
$$=f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\log\frac{n-u}{1-u}\,du.$$

Наконец,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\log\frac{n-u}{1-u}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} f(u)\left\{\log(n-u)-\log(1-u)\right\}du,$$

где C' есть разрез по отрезку $[\delta, n]$, проходимый дважды в противоположных направлениях, причем особые точки $u=1$ и $u=n$ обходятся обычным способом посредством полуокружностей, радиусы которых стремятся к нулю. $i\mathfrak{J}\{\log(n-u)-\log(1-u)\}$ имеет значение 0 на $(\delta, 1)$, $-\pi i$ на $(1, n)$, πi на $(n, 1)$ и 0 на $(1, \delta)$, и, значит,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(u)\log\frac{n-u}{1-u}\,du=-\int\limits_1^n f(u)\,du,$$

$$\mathfrak{S}(n)-\mathfrak{S}(1)=f(2)+f(3)+\ldots+f(n)-\int\limits_1^n f(u)\,du, \tag{13.15.7}$$

$$\mathfrak{S}(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)-\int\limits_1^n f(u)\,du-C=\Phi(n), \tag{13.15.8}$$

где ряд суммируем (B*), а $C=f(1)-\mathfrak{S}(1)$ есть постоянная Эйлера-Маклорена функции $f(x)$ для $a=1$ *).

Остается обосновать допущения, принятые нами без доказательства. Для этого достаточно доказать (а) что интеграл

$$I=I(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(u)}{n-u}\left(\frac{1}{e^w-1}-\frac{1}{w}\right)du \qquad \left(w=\frac{t}{n-u}\right)$$

равномерно сходится в некоторой области, содержащей отрезок $[t_0, t_1]$ $(0<t_0<t_1)$ вещественной оси плоскости переменного t, и (б) что двойной интеграл

$$K=\int\limits_C |f(u)|\,|du|\int\frac{e^{-t}}{t}\left|\frac{w}{e^w-1}-1\right|dt=$$
$$=\int\limits_C\frac{|f(u)|}{|n-u|}\,du\int e^{-t}\left|\frac{1}{e^w-1}-\frac{1}{w}\right|dt$$

сходится. Прежде всего ясно, что эти условия будут выполнены, если соответственно

$$\left|\frac{1}{e^w-1}-\frac{1}{w}\right|<H, \quad \left|\frac{1}{e^w-1}-\frac{1}{w}\right|<H(1+t) \tag{13.15.9}$$

для всех надлежащих значений t и u. Действительно, тогда интегралы I и K мажорируются соответственно с точностью до постоян-

*) Полученные формулы согласуются с формулами (13.6.3) — (13.6.5) для $a=1$, $k=\infty$, поскольку тогда $F(1)=0$ и $\frac{1}{2}f(n)+S_k(n)$ обращается в $\mathfrak{S}(n)$.

ных множителей интегралами

$$\int\limits_C \frac{|f(u)|}{|n-u|}\,|du|, \quad \int\limits_C \frac{|f(u)|}{|n-u|}\,|du| \int (1+t)e^{-t}dt = 2\int\limits_C \frac{|f(u)|}{|n-u|}|du|. \tag{13.15.10}$$

Ясно также, что достаточно рассмотреть верхнюю половину контура C.

(а) Пусть $t = re^{i\theta}$, где

$$0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad |\theta| \leqslant \alpha.$$

Первое из условий (13.15.9) заведомо выполнено, если выполнено одно из условий

$$|w| \leqslant \lambda < 2\pi, \quad p = \Re w \geqslant \xi > 0 \tag{13.15.11}$$

для некоторого λ или ξ и всех рассматриваемых t и u. Но если $u = \delta + iy$, где $y = (n-\delta)\operatorname{tg}\varphi > 0$, то $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ и

$$w = \frac{t}{n-\delta-iy} = \frac{re^{i\theta}}{(n-\delta)(1-i\operatorname{tg}\varphi)} = \frac{r\cos\varphi}{n-\delta}e^{i(\theta+\varphi)},$$

$$|w| = \frac{r\cos\varphi}{n-\delta}, \quad p = \frac{r\cos\varphi}{n-\delta}\cos(\theta+\varphi).$$

Если $\varphi \geqslant \frac{1}{2}\pi - 2\alpha$, то $\cos\varphi \leqslant \sin 2\alpha$, и

$$|w| \leqslant \frac{r_2}{n-\delta}\sin 2\alpha = \lambda.$$

Если $0 < \varphi \leqslant \frac{1}{2}\pi - 2\alpha$, то $\cos(\theta+\varphi) \geqslant \sin\alpha$, $\cos\varphi \geqslant \sin 2\alpha$, и

$$p \geqslant \frac{r_1}{n-\delta}\sin\alpha\sin 2\alpha = \xi.$$

Мы видим, что если выбрать α так, чтобы $\lambda < 2\pi$, то для всех надлежащих t и u действительно будет выполнено одно из условий (13.15.11).

(б) В этом случае t вещественно и положительно, и второе из условий (13.15.9) выполнено, если выполнено одно из условий

$$|w| \leqslant \lambda < 2\pi, \quad \Re w \geqslant \frac{\xi}{t} \quad (\xi > 0) \tag{13.15.12}$$

для всех надлежащих t и u.

Но либо (I) $t \leqslant \lambda|n-u|$, где $0 < \lambda < 2\pi$, и в этом случае $|w| \leqslant \lambda$, либо (II) $t > \lambda|n-u|$, и в этом случае

$$\Re w = \Re\left(\frac{t}{n-\delta-iy}\right) = \frac{t(n-\delta)}{|n-u|^2} > \frac{\lambda^2(n-\delta)}{t} = \frac{\xi}{t}.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 246. *Если $f(z)$ регулярна и равна $O\left(\frac{1}{|z|^s}\right)$, где $s>0$, в полуплоскости $x=\Re z \geqslant \delta$, где $\delta<1$, то ряд Эйлера-Маклорена функции $f(z)$ суммируем* (B*) *к сумме* (13.15.3); *в частности,*

$$C=-F(1)+\frac{1}{2}f(1)-\frac{B_1}{2!}f'(1)+0+\frac{B_2}{4!}f'''(1)+0-\ldots \quad (\mathrm{B}^*).$$

13.16. Дополнительные замечания. (1) Мы предположили, что функция $f(z)$ удовлетворяет условию (13.15.4), так что интегралы (13.15.10) сходятся. Если предположить только, что $|f(z)|=O(|z|^c)$ для некоторого c, то интеграл

$$\int \frac{|f(u)|}{|n-u|^{2r}}|du|$$

будет сходиться для $r>\frac{1}{2}(c+1)$, и мы все еще будем в состоянии доказать суммируемость ряда

$$\mathfrak{S}^{(r)}(n)=0+0+\ldots+0+\frac{(-1)^{r-1}}{(2r)!}B_r f^{(2r-1)}(n)+0+\\+\frac{(-1)^r}{(2r+2)!}B_{r+1}f^{(2r+1)}(n)+\ldots$$

Тогда мы сможем перейти к $\mathfrak{S}(n)$, добавляя конечное число членов, и основное содержание наших заключений останется в силе. Так, при $f(u)=u^{-s}$, где $-1<s<0$, или $f(u)=\log u$, мы можем взять $r=1$.

(2) Мы применили метод (B*), включающий понятие аналитического продолжения функции $a(t)$. Если (как фактически оказывается в большинстве важных случаев) $a(t)$ регулярна для $\Re t>0$, то многоугольник Бореля функции $a(t)$ содержит положительную полуось t, и ряд для $a(t)$ суммируем (B). В этом случае можно сказать, что ряд $\mathfrak{S}(n)$ суммируем (B²), т. е. повторным применением интегрального метода Бореля.

Пусть, например, $f(z)$ удовлетворяет условию (13.15.4) равномерно в любом секторе с вершиной δ, не содержащем отрицательную полуось. Тогда, модифицируя рассуждения § 13.15, нетрудно показать, что $a(t)$ регулярна для $\Re t>0$, так что ряд $\mathfrak{S}(n)$ суммируем (B²). Можно также комбинировать это замечание с обобщением, указанным в пункте (1). В частности, ряды

(13.16.1) $$\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2}+0-\frac{B_2}{4}+0+\frac{B_3}{6}-\ldots$$

и

(13.16.2) $$1-\frac{B_1}{1\cdot 2}+0+\frac{B_2}{3\cdot 4}+0-\frac{B_3}{5\cdot 6}+\ldots$$

суммируемы (B²) соответственно к суммам γ и $\frac{1}{2}\log 2\pi$.

Последние утверждения легко также проверить непосредственно. Так, в случае (13.16.1) имеем

$$a(t)=\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2!}t-\frac{B_2}{4!}t^3+\frac{B_3}{6!}t^5-\ldots=\frac{1}{t}\left(\frac{t}{e^t-1}-1+t\right),$$

где ряд сходится для $0\leqslant t<2\pi$ и суммируем (B) для всех положительных t; и $\int e^{-t}a(t)\,dt$ сходится к γ согласно (13.13.5).

13.17. $\mathfrak{R}$-определение суммы расходящегося ряда. Формулы (13.10.11) дают примеры $\mathfrak{R}$-суммируемости расходящихся рядов с положительными членами. Подобные равенства можно, следуя Эйлеру и Рамануджану, использовать и для определения сумм рядов более обычного типа, как $1-1+1-1+\ldots$. Однако получающиеся таким образом определения суммы имеют узкую область действия и требуют при своем применении большой осторожности.

Так, после формул (13.10.11) естественно писать

$$(13.17.1)\qquad 2+4+6+\ldots=2(1+2+3+\ldots)=2\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{6},$$

$$(13.17.2)\qquad 1+3+5+\ldots=2+4+6+\ldots-(1+1+1+\ldots)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$(13.17.3)\qquad 1+2+3+4+\ldots=(1+3+\ldots)+(2+4+\ldots)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6},$$

$$(13.17.4)\qquad 1-2+3-4+\ldots=(1+3+\ldots)-(2+4+\ldots)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

Последнее из этих равенств противоречит формуле (1.2.17); а суммой, которую согласно принципу Эйлера, приведенному в § 1.3, естественно приписать ряду $1+2+3+\ldots$, является либо ∞, „значение $\frac{1}{(1-x)^2}$ при $x=1$“, либо $-\frac{1}{12}$, значение $\zeta(s)=\sum\frac{1}{n^s}$ при $s=-1$.

Числа $-\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{3}$ в формулах (13.17.1) и (13.17.2) представляют собой в действительности значения C для $f(x)=2x$ и $f(x)=2x-1$ (с $a=0$). Но ряды $1+3+\ldots$ и $2+4+\ldots$ в формулах (13.17.3) и (13.17.4) не могут истолковываться аналогичным образом. Их следует рассматривать скорее как $1+0+3+0+\ldots$ и $0+2+0+4+\ldots$, а тогда не существует функции $f(x)$ достаточно правильного типа, которая принимала бы нужные нам значения. В действительности, если мы хотим, чтобы наши результаты были совместными, мы должны истолковывать $1+0+3+0+\ldots$ и $0+2+0+4+\ldots$ как значения, принимаемые рядами

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s),\quad \frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots=\frac{1}{2^s}\zeta(s)$$

при $s=-1$. Этими значениями служат $(-1)\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}$ и $2\left(-\frac{1}{12}\right)=-\frac{1}{6}$; а $\frac{1}{12}\pm\left(-\frac{1}{6}\right)$ есть $-\frac{1}{12}$ или $\frac{1}{4}$.

Согласно этим принципам суммой ряда $\log 1-\log 2+\log 3-\ldots$ будет значение ряда

$$\frac{\log 1}{1^s}-\frac{\log 2}{2^s}+\frac{\log 3}{3^s}-\ldots=(2^{1-s}-1)\zeta'(s)-2^{1-s}\log 2\cdot\zeta(s)$$

для $s=0$, в согласии с (A, λ)-суммой § 4.7 с $\lambda_n=\log(n+1)$. Таким образом,

$$(13.17.5)\qquad \log 1-\log 2+\log 3-\ldots=\zeta'(0)-2\log 2\cdot\zeta(0)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\pi.$$

Легко проверить, что это будет также (C, 1)-суммой рассматриваемого ряда. В самом деле, здесь

$$s_{2p}=\log\frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2\cdot 4\ldots 2p}=\log\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}=-\frac{1}{2}\log p-\frac{1}{2}\log\pi+o(1),$$

$$s_{2p-1}=s_{2p}+\log 2p=\frac{1}{2}\log p-\frac{1}{2}\log\pi+\log 2+o(1),$$

и, значит,

$$\frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}\to-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\pi.$$

ПРИМЕЧАНИЯ К ГЛАВЕ XIII

§ 13.1. Эта глава не претендует на систематическое изучение формулы Эйлера-Маклорена и ее приложений, подобное даваемому в книгах по исчислению конечных разностей. Наше внимание сосредоточено на тех сторонах этой формулы, которые наиболее тесно связаны с содержанием предыдущих глав. Разумеется, мы существенно использовали основные учебные руководства, и, в частности, книги

Jordan, Calculus of finite differences (Будапешт, 1939);

Milne-Thomson, The calculus of finite differences (Лондон, 1933);

Nörlund, Vorlesungen über Differenzrechnung (Берлин, 1924);

Steffensen, Interpolation (Балтимора, 1927)[1];

Whittaker and Robinson, The calculus of observations (Лондон, 1924)[2],

а также краткие изложения в книгах Bromwich, Ford и Lindelöf. Единственным местом этой главы, отличающимся некоторой новизной содержания, являются §§ 13.15—13.16 о суммируемости ряда Эйлера-Маклорена.

Мы не ставили своей целью давать подробные литературные указания по поводу содержащихся здесь специальных формул, в частности, связанных с дзета-функцией и гамма-функцией.

§ 13.2. Обозначения, применяемые различными авторами, значительно отличаются друг от друга. Наши B_n и $\varphi_n(x)$ совпадают с B_n и $\varphi_n(x)$ Бромвича и Уиттекера-Робинсона, а наши $B_n(x)$ — с нёрлундовскими. Но Нёрлунд пишет

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum B_n\frac{t^n}{n!},$$

так что его B_{2m+1} для $m>0$ есть 0, а его B_{2m} есть наше $(-1)^{m-1}B_m$; и ему следуют Жордан и Милн-Томсон. Это обозначение имеет то преимущество, что $B_n(0)=B_n$.

§ 13.5. Рассматриваемую формулу суммирования нашли независимо Euler, *Comm. Petropol.*, **6** (1732—1733, опубликовано в 1738), 68—97, Opera (1), **14**, 42—72, и Maclaurin, *Treatise of fluxions* (1742), 672. См. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, **3**, 663, и *Enzykl. d. Math. Wiss.*, IA3 (§ 38) и IE (§ 11). Первое серьезное исследование остаточного члена предпринял Poisson, *Mémoires de l'Institut*, **6** (1823), 571—602, первое же совершенно строгое — Jacobi, *JM*, **12** (1834), 263—272 (Werke, **6**, 64—75).

§ 13.6. Представление о характере подхода Рамануджана к расходящимся рядам можно составить по отдельным местам из его писем и записных книжек.

[1]) Есть русский перевод: И. Ф. Стефенсен, Теория интерполяции, ОНТИ, 1935. (*Прим. ред.*)

[2]) Есть русский перевод: Э. Уиттекер и Г. Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933. (*Прим. ред.*)

§ 13.8. Пуассон, l. c. в примечании к § 13.5.

§ 13.9. Фурье, l. c. в примечании к § 2.8.

§§ 13.10 — 13.11. Значительную часть формул, полученных здесь и в § 13.13, можно найти в книге Bromwich, Приложение III.

Наиболее естественный и простой метод аналитического продолжения функции $\zeta(s)$ дан в книге Landau, Handbuch, 270 — 272; идеи, лежащие в основе этого рассуждения, — те же, что и у нас, но изложены в индуктивной форме. Методы Римана, также излагаемые Ландау, изящнее и более известны.

По поводу последнего способа вычисления C в § 13.11 см. Bromwich, *MM*, **36** (1907), 81 — 85.

§ 13.12. По поводу подробностей см. Milne-Thomson, гл. 8, или Nörlund, гл. 3.

§ 13.14. Изложение в основных чертах заимствовано из книг Форда и Линделёфа.

§§ 13.15 — 13.16. Основные результаты этих параграфов, повидимому, новы. В работе Barnes, *QJM*, **35** (1904), 175 — 188, изучается суммируемость ряда Эйлера-Маклорена (в более общей форме § 13.12) методами борелевского типа; но рассмотрения автора неубедительны.

Легко проверить, что ряд сходится, если $f(x)$ есть целая функция порядка 1 и типа, меньшего чем 2π.

§ 13.17. По поводу (C, 1)-суммы ряда $\log 1 - \log 2 + \log 3 - \ldots$ см. Bromwich (изд. 1-е), 351.

Приложение I

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1. В § 1.2 мы привели ряд примеров на применение формальных вычислений с расходящимися рядами, главным образом к нахождению значений определенных интегралов. Здесь мы покажем как эти и подобные им вычисления можно обосновать.

Заметим прежде всего, что все обычные теоремы относительно непрерывности, интегрирования или дифференцирования сумм сходящихся рядов имеют аналоги для любого линейного метода суммирования T, определенного формулой вида (3.1.3) или (3.1.4). Мы будем формулировать их применительно к методу (3.1.3), причем ограничимся наиболее очевидными аналогами классических признаков, относящихся к непрерывным функциям и равномерно сходящимся рядам. В дальнейшем мы будем предполагать, что ряд $\sum a_n(x)$ суммируем (T) к $s(x)$, т. е. $s_n(x)=\sum\limits_{m=0}^{n} a_m(x) \to s(x)$ (T).

Теорема 247. *Если* (I) *функция* $a_n(x)$ *для каждого* n *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *),

(II) *ряд* $t_m(x)=\sum c_{m,n}s_n(x)$ *для каждого* m *равномерно сходится на* $[a, b]$,

(III) *ряд* $\sum a_n(x)$ *равномерно суммируем на* $[a, b]$ *к сумме* $s(x)$, — *то* $s(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$.

Действительно, в силу условия (II) $t_m(x)$ непрерывна для каждого m, а тогда утверждение теоремы следует из условия (III). Если метод — конечно-строчный, например если T есть (C, k), то условие (II) отпадает.

Теорема 248. *При тех же условиях*

$$\sum \int_a^b a_n(x)\,dx = \int_a^b s(x)\,dx \quad (\mathrm{T}).$$

---

*) С обычной оговоркой (утверждением непрерывности лишь справа или слева) для концов интервала.

Действительно, по определению, левая часть равна

$$\lim_{m} \sum c_{m,n} \int_a^b s_n(x)\,dx = \lim_{m} \int_a^b \sum c_{m,n}\, s_n(x)\,dx = \lim_{m} \int_a^b t_m(x)\,dx,$$

и утверждение теоремы снова следует из условия (III).

Теорема 249. *Если* (I) *функция* $a_n'(x)$ *для каждого* n *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *),

(II) *ряд* $\sum c_{m,n} s_n'(x)$ *для каждого* m *равномерно сходится на* $[a, b]$,

(III) *ряд* $\sum a_n'(x)$ *равномерно суммируем на* $[a, b]$,

(IV) *ряд* $\sum a_n(x)$ *суммируем на* $[a, b]$, *к* $s(x)$,

— *то* $s'(x)$ *существует и непрерывна на интервале* $a < x < b$, *и*

$$\sum a_n'(x) = s'(x) \quad (\mathrm{T}).$$

Это — тривиальное следствие теорем 247 и 248. Действительно, $f(x)$, сумма ряда $\sum a_n'(x)$, непрерывна на $[a, b]$, и

$$s(x) - s(a) = \sum \{a_n(x) - a_n(a)\} = \sum \int_a^x a_n'(y)\,dy =$$

$$= \int_a^x \sum a_n'(y)\,dy = \int_a^x f(y)\,dy,$$

где все суммы берутся в T-смысле. А отсюда следует, что $s'(x) = f(x)$ на интервале $a < x < b$.

2. Переходим к обоснованию результатов, полученных в пунктах (1), (2), (3), (5) и (6) § 1.2 **). Если пользоваться C-определениями, то преобразования, проведенные в пунктах (1) и (2), подходят под действие теорем 247 и 249, поскольку все ряды, получающиеся путем дифференцирования, равномерно суммируемы (C, l) для достаточно больших l в соответствующих интервалах. Можно было бы также воспользоваться и A-определением. Первое интегрирование в пункте (3) подходит под действие теоремы 248.

Рассуждение, проведенное в пункте (5), требует более подробного рассмотрения. Пусть $0 < \varphi < \pi$. Тогда

$$\frac{\cos m\theta - \cos m\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi} = 2 \sum \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \cos n\theta\,(\cos m\theta - \cos m\varphi) = \sum a_n \quad (C, 1),$$

*) С такой же оговоркой, как в теореме 247.

**) По поводу пункта (4) см. примечания к гл. I.

где суммы берутся от 1 до ∞ и $0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \varphi$. Так как ряд $\sum a_n$ равномерно суммируем на отрезках $[0, \varphi - \varepsilon]$ и $[\varphi + \varepsilon, \pi]$, то

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right)\left(\int_0^{\pi} - \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\right) a_n d\theta =$$

$$= \left(\int_0^{\pi} - \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\right)\left\{\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) a_n\right\} d\theta =$$

$$= \left(\int_0^{\pi} - \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon}\right) \frac{\cos m\theta - \cos m\varphi}{\cos\theta - \cos\varphi}\, d\theta.$$

Поскольку правая часть при $\varepsilon \to 0$ стремится к интегралу (1.2.26), достаточно доказать, что

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} a_n\, d\theta$$

существует для каждого ε и стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Тем более достаточно доказать, что этими свойствами обладает

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} a_n\, d\theta.$$

Но легко проверить, что

$$\int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} a_n\, d\theta = 2\, \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \left\{ \frac{\sin(m-n)\varepsilon}{m-n} \cos(m-n)\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(m+n)\varepsilon}{m+n} \cos(m+n)\varphi - 2\cos m\varphi \cos n\varphi \frac{\sin n\varepsilon}{n} \right\},$$

где m фиксировано и под $\frac{\sin(m-n)\varepsilon}{m-n}$ при $n = m$ следует понимать ε. Поэтому достаточно показать, что ряды

$$A = \sum_{n=m+1}^{\infty} \sin n\varphi \cos(n-m)\varphi\, \frac{\sin(n-m)\varphi}{n-m},$$

$$B = \sum_{n=-m+1}^{\infty} \sin n\varphi \cos(m+n)\varphi\, \frac{\sin(m+n)\varepsilon}{m+n},$$

$$C = -2\cos m\varphi \sum_{1}^{\infty} \sin n\varphi \cos n\varphi\, \frac{\sin n\varepsilon}{n}$$

сходятся (что очевидно), и их сумма при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю *). Но

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(m+k)\varphi \cos k\varphi \frac{\sin k\varepsilon}{k},$$

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k-m)\varphi \cos k\varphi \frac{\sin k\varepsilon}{k},$$

$$A+B = 2\cos m\varphi \sum_{1}^{\infty} \sin k\varphi \cos k\varphi \frac{\sin k\varepsilon}{k} = -C,$$

так что $A+B+C=0$.

Переходя к пункту (6) § 1.2, ограничимся рассмотрением формулы (1.2.28). Так как

$$\sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 6\theta + \ldots = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta \ (C, 1)$$

равномерно на интервале $\left(\varepsilon, \frac{1}{2}\pi\right)$, то

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} \theta \sin 2n\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi} \theta \operatorname{ctg}\theta\, d\theta,$$

и достаточно доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \int_{0}^{\varepsilon} \theta \sin 2n\theta\, d\theta \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$; и тем более достаточно доказать, что

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{0}^{\varepsilon} \theta \sin 2n\theta\, d\theta \to 0.$$

Но этот ряд равен

$$\sum \frac{1}{4n^2}(\sin 2n\varepsilon - 2n\varepsilon \cos 2n\varepsilon) = \frac{1}{4}\sum \frac{\sin 2n\varepsilon}{n^2} + \frac{1}{2}\varepsilon \log(2\sin\varepsilon)$$

и, очевидно, стремится к нулю.

*) Мы отбросили в A члены, соответствующие значениям $n = 1, 2, \ldots, m$, и присоединили к B члены, соответствующие значениям $n = 0, -1, \ldots, -m+1$. Очевидно, все они стремятся к нулю.

Аналогичным образом могут быть вычислены и многие другие интегралы, как, например,

$$\int_0^\pi \frac{\theta(\pi-\theta)}{\sin\theta}\,d\theta = 8\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^3}, \qquad \int_0^\pi \left\{\frac{\theta(\pi-\theta)}{\sin\theta}\right\}^2 d\theta = 6\pi\sum_1^\infty \frac{1}{n^3},$$

$$\int_0^\pi \theta\sec\theta\,d\theta = -4\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, \qquad \int_0^\pi \frac{\theta\sin\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}\,d\theta = 2\pi\log\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right).$$

Последние два интеграла понимаются в смысле главных значений, причем во втором из них $0<\varphi<\pi$.

3. Формулы предыдущего параграфа можно вывести, в значительно более общем виде, из теории рядов, сопряженных к рядам Фурье. Рядом, сопряженным к

$$f(\theta) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum (a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) = \frac{1}{2}A_0(\theta) + \sum A_n(\theta),$$

называют ряд

$$\sum (b_n\cos n\theta - a_n\sin n\theta) = \sum B_n(\theta).$$

Как известно, при выполнении надлежащих условий

$$\sum B_n(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(t-\theta)\,dt, \tag{3.1}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения при $t=\theta$. Так, сопряженный ряд сходится к этому значению, если интеграл (3.1) существует, а $f(t)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки $t=\theta$. Но формула (3.1) получается, если написать

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(t-\theta) = \sin(t-\theta) + \sin 2(t-\theta) + \ldots$$

и, умножив всё на $f(t)$, почленно проинтегрировать. В частности,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt = \sum b_n.$$

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСХОДЯЩИХСЯ ИНТЕГРАЛОВ

4. Рассмотрим теперь формулы § 1.5. Предложения, аналогичные теоремам § 1, имеют место и для расходящихся интегралов; формулировать их нет необходимости. Сразу проверяется, что интегралы (1.5.8) и (1.5.9) суммируемы (A) к указанным значениям, притом равномерно на каждом интервале (m_0, m_1) положительных значений аргумента m. Они также суммируемы (C, k) для достаточно больших k, поскольку легко доказать, что

$$\int x^k e^{-aix}\,dx = \frac{\Gamma(k+1)\,e^{-\frac{1}{2}(k+1)\pi i}}{a^{k+1}} \qquad (C,\ l)$$

для $k > -1$, $a > 0$, $l > k$. Действительно, беря интеграл

$$\int \left(1-\frac{z}{X}\right)^l z^k e^{-aiz}\,dz$$

по прямоугольнику $(0,\ X,\ X-i\infty,\ +i\infty)$ с надлежащими прогибами у точек 0 и X, получаем

$$\int\limits_0^X \left(1-\frac{x}{X}\right)^l x^k e^{-aix}\,dx = e^{-\frac{1}{2}(k+1)\pi i}\int\left(1+\frac{iy}{X}\right)^l y^k e^{-ay}\,dy + \\ + \frac{e^{\frac{1}{2}(l+1)\pi i}\,e^{-aiX}}{X^l}\int y^l (X-iy)^k e^{-ay}\,dy.$$

При $X\to\infty$ первый член справа стремится к

$$e^{-\frac{1}{2}(k+1)\pi i}\int y^k e^{-ay}\,dy = \frac{\Gamma(k+1)\,e^{-\frac{1}{2}(k+1)\pi i}}{a^{k+1}},$$

а второй — к нулю.

Докажем теперь две теоремы относительно формул (1.5.10) и (1.5.11).

Теорема 250. *Если* (I) $F(x)=\sum a_n x^n$,

(II) $m>0$, $\mu>-1$,

(III) *ряд* $\sum n!\,a_n x^n$ *имеет радиус сходимости* $R>\frac{1}{m}$,

(IV) *интеграл* $\int e^{-(\tau+mi)x}x^{\mu}F(x)\,dx$ *сходится для* $\tau>0$,

— то

$$\int x^{\mu} e^{-mix}F(x)\,dx = \sum \frac{\Gamma(n+\mu+1)\,e^{-\frac{1}{2}(n+\mu+1)\pi i}}{m^{n+\mu+1}}\,a_n, \tag{4.1}$$

где интеграл взят в A-смысле. Условие (III) *можно заменить любым из следующих более общих условий:*

(III′) $\sum \frac{n!\,|a_n|}{m^n}<\infty$,

(III″) $\sum \frac{n!\,\sqrt{n}\,a_n}{(im)^n}$ *сходится.*

Теорема 251. *Если* (I) $\varphi(x) = O(e^{\varepsilon x})$ *для каждого* $\varepsilon > 0$, *так что*

$$\psi(\tau) = \int e^{-\tau x} \varphi(x)\, dx$$

сходится для $\tau > 0$,

(II) *функция* $\psi(\tau)$ *регулярна для* $|\tau| < m$,

(III) *ряд* $\sum n! a_n x^n$ *имеет радиус сходимости* $R > \frac{1}{m}$,

(IV) *интеграл* $\int e^{-\tau x} \varphi(x) F(x)\, dx$ *сходится для* $\tau > 0$,

— то

$$\int \varphi(x) F(x)\, dx = \sum a_n \int x^n \varphi(x)\, dx, \tag{4.2}$$

где $F(x) = \sum a_n x^n$, *причем все интегралы в этой формуле взяты в* А-*смысле.*

Если $\varphi(x) = x^{\mu} e^{-mix}$, то $\psi(\tau) = \dfrac{\Gamma(\mu+1)}{(\tau+mi)^{\mu+1}}$, и условия (I) и (II) выполнены. Таким образом, теорема 251 содержит основное утверждение теоремы 250.

Доказательство теоремы 250. Равенства

$$\chi(\tau) = \int e^{-\tau x} \varphi(x) F(x)\, dx = \int e^{-(\tau+mi)x} x^{\mu} F(x)\, dx = \tag{4.3}$$
$$= \sum a_n \int e^{-(\tau+mi)x} x^{n+\mu}\, dx = \sum \frac{\Gamma(n+\mu+1)\, a_n}{(\tau+mi)^{n+\mu+1}}$$

заведомо справедливы, если

$$\int e^{-\tau x} \sum |a_n|\, x^{n+\mu}\, dx = \sum \frac{\Gamma(n+\mu+1)\, |a_n|}{\tau^{n+\mu+1}} < \infty,$$

следовательно, во всяком случае для $\tau > m$, последний же ряд в (4.3) равномерно сходится на каждом интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$. Поэтому $\chi(\tau)$ есть аналитическая функция от τ, регулярная для $\tau > 0$, и

$$\chi(\tau) \to \sum \frac{\Gamma(n+\mu+1)\, a_n}{(mi)^{n+\mu+1}} = \sum \frac{\Gamma(n+\mu+1)\, e^{-\frac{1}{2}(n+\mu+1)\pi i}\, a_n}{m^{n+\mu+1}}$$

при $\tau \to 0$. Это — формула (4.1). Ясно, что это доказательство так же справедливо и при условии (III′).

Что же касается условия (III″), то имеем

$$\sum \frac{\Gamma(n+\mu+1)\, a_n}{(\tau+mi)^{n+\mu+1}} = \sum \frac{\Gamma(n+\mu+1)\, a_n}{(mi)^{n+\mu+1}} z^{n+\mu+1},$$

где

$$z = \frac{mi}{\tau+mi} = x + iy$$

и

$$x = \frac{m^2}{\tau^2+m^2}, \quad 1 - x = \frac{\tau^2}{\tau^2+m^2} \sim \frac{\tau^2}{m^2}, \quad y = \frac{\tau m}{\tau^2+m^2} \sim \frac{\tau}{m}$$

при $\tau \to 0$. Таким образом, $1 - x \sim y^2$, и $z \to 1$ вдоль пути, имеющего с единичной окружностью соприкосновение первого порядка. Но известно *), что если $f(z) = \sum c_n z^n$ и $\sum \sqrt{n} c_n$ сходятся, то $f(z) \to \sum c_n$, когда $z \to 1$ вдоль такого пути. Тем самым теорема полностью доказана.

Доказательство теоремы 251. Имеем $|\varphi(x)| < He^{\varepsilon x}$ для каждого положительного ε и надлежащего H. Следовательно,

$$\int e^{-\tau x} |\varphi(x)| \sum |a_n| x^n \, dx \leqslant H \sum |a_n| \int e^{-(\tau-\varepsilon)x} x^n \, dx =$$
$$= H \sum \frac{n! \, |a_n|}{(\tau - \varepsilon)^{n+1}} < \infty,$$

если $\tau - \varepsilon > \frac{1}{R}$. Отсюда

$$\int e^{-\tau x} \varphi(x) F(x) \, dx = \sum a_n \int e^{-\tau x} \varphi(x) x^n \, dx = \tag{4.4}$$
$$= \sum (-1)^n a_n \psi^{(n)}(\tau),$$

если $\tau > m$.

Если $\tau > 0$, то $\psi(u)$ регулярна внутри круга с центром $u = \tau$ и радиусом $\sqrt{m^2 + \tau^2}$. Тогда, по неравенству Коши,

$$|\psi^{(n)}(\tau)| \leqslant \frac{n! \, M(\eta)}{\{\sqrt{m^2 + \tau^2} - \eta\}^n}$$

для любого $\eta > 0$ и соответствующего $M(\eta)$. Таким образом,

$$\sum |a_n| \, |\psi^{(n)}(\tau)| \leqslant M(\eta) \sum \frac{n! \, |a_n|}{\{\sqrt{m^2 + \tau^2} - \eta\}^n}.$$

Так как $m > \frac{1}{R}$, то мы можем выбрать η так, чтобы неравенство

$$\sqrt{m^2 + \tau^2} - \eta > \frac{1}{R}$$

выполнялось на любом интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ изменения τ, и, значит, ряд, стоящий в правой части формулы (4.4), равномерно сходится на этом интервале. Следовательно, функция

$$\chi(\tau) = \int e^{-\tau x} \varphi(x) F(x) \, dx$$

регулярна для $\Re\tau > 0$, и

$$\int e^{-\tau x} \varphi(x) F(x) \, dx \to \sum (-1)^n a_n \psi^{(n)}(0) = \sum a_n \lim_{\tau \to 0} \int e^{-\tau x} \varphi(x) x^n \, dx,$$

когда $\tau \to 0$. Это — формула (4.2).

*) См. Hardy and Littlewood, *PLMS* (2), **11** (1912), 411—478 (475, теорема 40).

5. Примеры. (I) Для иллюстрации теоремы 250 возьмем

$$F(x) = J_0(x),$$

$$\sum n!\, a_n x^n = \sum \frac{(-1)^k (2k)!}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum (-1)^k \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k} x^{2k}$$

(так что $R = 1$), и $\mu = 0$. Мы получим

$$\int J_0(x)\cos mx\, dx = 0 + 0 + 0\ldots = 0,$$

$$\int J_0(x)\sin mx\, dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\frac{1}{m^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{m^5} + \ldots = \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$$

для $m > 1$. И то и другое равенство становится неверным при $m < 1$, поскольку интегралы в левых частях принимают тогда соответственно значения $\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$ и 0 *).

(II) Теорему 251 можно иллюстрировать интегралом

$$I(c) = \int J_\alpha(x) J_{\alpha+1}(cx)\, dx,$$

где $c > 0$, $\alpha > -1$. Прежде всего замечаем, что

$$\int e^{-\tau x} x^{\nu+1} J_\nu(x)\, dx = \frac{2^{\nu+1}\tau\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(\tau^2+1)^{\nu+\frac{3}{2}}} \tag{5.1}$$

для $\tau > 0$, $\nu > -1$ **), откуда следует, что

$$\int x^{\nu+1+2m} J_\nu(x)\, dx = 0 \quad (A) \tag{5.2}$$

для $m = 0, 1, 2, \ldots$. С другой стороны,

$$\int x^{\nu-1} J_\nu(x)\, dx = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) \quad (A) \tag{5.3}$$

для $\nu > 0$ ***).

При $c < 1$ берем

$$F(x) = \frac{J_{\alpha+1}(cx)}{x^{\alpha+1}} = a_0 + a_2 x^2 + \ldots, \quad \varphi(x) = x^{\alpha+1} J_\alpha(x).$$

Тогда $R = \frac{1}{c} > 1$, и $\psi(\tau)$ в силу (5.1) регулярна для $|\tau| < 1$. Условия теоремы 251 выполнены, и в силу (5.2)

$$I(c) = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

*) Ватсон, 444.

**) Там же, 422.

***) Там же, 428. Интеграл сходится, если $0 < \nu < \frac{3}{2}$.

С другой стороны, при $c > 1$ берем

$$F(x) = \frac{J_\alpha(x)}{x^\alpha} = a_0 + a_2x^2 + \ldots, \qquad \varphi(x) = x^\alpha J_{\alpha+1}(cx).$$

Тогда $R = 1$, и

$$\psi(\tau) = \int e^{-\tau x} x^\alpha J_{\alpha+1}(cx)\, dx$$

регулярна для $|\tau| < c$ *). Условия теоремы снова выполнены, и в силу (5.3)

$$I(c) = a_0 \int x^\alpha J_{\alpha+1}(cx)\, dx + 0 + 0 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\, 2^\alpha c^{\alpha+1}} \int x^\alpha J_{\alpha+1}(x)\, dx = \frac{1}{c^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, $I(c) = 0$, если $c < 1$, и $I(c) = \frac{1}{c^{\alpha+1}}$, если $c > 1$ **).

6. В заключение этого Приложения рассмотрим некоторые интегралы, объединяющие в себе особенности интегралов, встретившихся нам в §§ 2 и 4.

Из разложений

$$\operatorname{tg} x = 2(\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x - \ldots),$$
$$\sec x = 2(\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \ldots)$$

выводим формально

$$(6.1) \qquad \begin{cases} \int f(x) \operatorname{tg} x\, dx = 2(v_2 - v_4 + v_6 - \ldots), \\ \int f(x) \sec x\, dx = 2(u_1 - u_3 + u_5 - \ldots), \end{cases}$$

где

$$u_n = \int f(x) \cos nx\, dx, \qquad v_n = \int f(x) \sin nx\, dx.$$

Интегралы, стоящие в формулах (6.1) слева, обычно будут главными значениями при $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, ... (и могут требовать дополнительных соглашений), интегралы же справа могут как сходиться, так и расходиться. Так, при $\lambda > 0$

$$(6.2) \qquad \begin{cases} \int e^{-\lambda x} \operatorname{tg} x\, dx = 2\left(\frac{2}{2^2+\lambda^2} - \frac{4}{4^2+\lambda^2} + \ldots\right), \\ \int e^{-\lambda x} \sec x\, dx = 2\left(\frac{\lambda}{1^2+\lambda^2} - \frac{\lambda}{3^2+\lambda^2} + \ldots\right); \end{cases}$$

*) $\psi''(\tau)$ есть интеграл типа (5.1).

**) Ватсон, 444. Наши теоремы не дают значения для $I(c)$ в предельв этом случае все u_n и v_n сходятся, а интегралы слева могут быть определены как пределы интегралов от 0 до X, когда $X \to \infty$, надлежащим образом обходя полюсы подинтегральных выражений. С другой стороны,

$$
(6.3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int \cos \lambda x \operatorname{tg} x \, dx = 2\left(\frac{2}{2^2-\lambda^2} - \frac{4}{4^2-\lambda^2} + \ldots\right), \\ &\int \sin \lambda x \operatorname{tg} x \, dx = 0, \end{aligned} \right.
$$

если $\lambda \neq 2n$, и

$$
(6.4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int \cos \lambda x \sec x \, dx = 0, \\ &\int \sin \lambda x \sec x \, dx = -2\left(\frac{\lambda}{1^2-\lambda^2} - \frac{\lambda}{3^2-\lambda^2} + \ldots\right), \end{aligned} \right.
$$

если $\lambda \neq 2n+1$. В этом случае u_n и v_n являются А-интегралами, а интегралы слева, в дополнение к соглашениям, вызываемым наличием полюсов, требуется еще понимать в А-смысле.

Рассмотрим эти формулы немного ближе. Начнем с доказательства следующего предложения:

Теорема 252. *Если $f(x)$ положительна и при $x \to \infty$ монотонно стремится к нулю, $f'(x)$ непрерывна и существует несобственный интеграл*

$$
\int_0^\infty f(x) \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{N \to \infty} \int_0^{N\pi} f(x) \operatorname{tg} x \, dx,
$$

где интеграл справа понимается в смысле главного значения при $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots,$ то

$$
\int f(x) \operatorname{tg} x \, dx = 2\left(\int f(x) \sin 2x \, dx - \int f(x) \sin 4x \, dx + \ldots\right).
$$

Нам потребуются два предварительных замечания.

(а) Интегрированием по частям получаем *), что

$$
\int_0^{N\pi} f(x) \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{N\pi} f'(x) \log \cos^2 x \, dx.
$$

*) Несмотря на обращения подинтегрального выражения в бесконечность, интегрирование по частям не доставляет действительных трудностей. См. Hardy, *PLMS* (1), **34** (1902), 17—40 (21).

Так как $f'(x) \leqslant 0$ и $\log \cos^2 x \leqslant 0$, то для существования предела при $N \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int f'(x) \log \cos^2 x \, dx < \infty.$$

$N\pi$ можно заменить любой последовательностью x_N, сохраняющей дистанцию δ от полюсов $\operatorname{tg} x$.

(б) Так как

$$v_{2n} = \int f(x) \sin 2nx \, dx = -\frac{1}{2n} \int f'(x)(1 - \cos 2nx) \, dx = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то ряд $v_2 - v_4 + \ldots$ будет сходиться, если он суммируем (A). Поэтому достаточно доказать, что

$$2(v_2 r^2 - v_4 r^4 + \ldots) \to \frac{1}{2} \int f'(x) \log \cos^2 x \, dx$$

(предполагаемому конечным), когда $r \to 1$. Но

$$2(v_2 r^2 - v_4 r^4 + \ldots) = 2 \sum_1^\infty (-1)^{n-1} r^{2n} \int f(x) \sin 2nx \, dx =$$

$$= -\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{r^{2n}}{n} \int f'(x)(1 - \cos 2nx) \, dx$$

и

$$\sum \frac{r^{2n}}{n} \int |f'(x)| (1 - \cos 2nx) \, dx < 2 \sum \frac{r^{2n}}{n} \int |f'(x)| \, dx < \infty$$

при $r < 1$. Поэтому

$$2(v_2 r^2 - v_4 r^4 + \ldots) = -\int f'(x) \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} r^{2n}}{n} (1 - \cos 2nx) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int f'(x) \log \frac{(1 + r^2)^2}{1 + 2r^2 \cos 2x + r^4} \, dx,$$

и достаточно доказать, что

$$J(r) = -\int f'(x) \log \frac{(1 + r^2)^2}{1 + 2r^2 \cos 2x + r^4} \, dx \to \int f'(x) \log \cos^2 x \, dx,$$

когда $r \to 1$. Но, как легко проверить,

$$0 \leqslant \log \frac{(1 + r^2)^2}{1 + 2r^2 \cos 2x + r^4} \leqslant \log \frac{1}{\cos^2 x}$$

для $0 \leqslant r \leqslant 1$, $\cos^2 x \neq 0$. Отсюда следует, что $J(r)$ равномерно сходится для $0 \leqslant r \leqslant 1$ и значит $J(r) \to J(1)$. Этим теорема 252 доказана. Ее условия удовлетворяются функцией $f(x) = e^{-\lambda x}$, и это приводит к первой из формул (6.2).

Доказательство второй формулы аналогично.

Для доказательства формул (6.3) заметим сперва, что

$$\int e^{-sx} \log \cos^2 x \, dx$$

сходится и представляет для $\Re s > 0$ регулярную функцию от s. То же верно и для

$$\int e^{-sx} \operatorname{tg} x \, dx = -\frac{1}{2} s \int e^{-sx} \log \cos^2 x \, dx,$$

где интеграл слева определен как в пункте (a). Полагая $s = \sigma + i\lambda$ и беря $\sigma \to 0$, мы и получаем формулы (6.3). Аналогично можно доказать и формулы (6.4).

Приложение II

ЯДРА ФУРЬЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

1. Как известно, суммируемость ряда Фурье

$$\frac{1}{2}a_0+\sum(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$$

методом T с

$$\tau_m=\sum c_{m,n}s_n \qquad \left[\text{или}\quad \tau(x)=\sum c_n(x)\,s_n\right]\ *)$$

зависит от свойств „ядра"

$$K_m(t)=\sum c_{m,n}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

$$\left[\text{или } K(x,t)=\sum c_n(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\right].$$

В частности, если T есть „регулярный K-метод", в смысле Харди и Рогозинского **), т. е. если он регулярен и

$$\sum n\,|c_{m,n}|<\infty \qquad \left[\text{или}\sum n\,|c_n(x)|<\infty\right]$$

для каждого m [или x], то для суммируемости, к сумме c, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^\delta g_c(t)\,K_m(t)\,dt\to 0 \quad \left[\text{или}\quad \int_0^\delta g_c(t)\,K(x,t)\,dt\to 0\right],$$

где

$$g_c(t)=\frac{1}{2}\{f(\theta+t)+f(\theta-t)-2c\},$$

для любого $\delta>0$ ***).

---

*) Вместо буквы t, которой мы пользовались в § 3.1, мы пишем теперь τ; буква t понадобится для других целей.

**) *Fourier series*, гл. 5 (в дальнейшем будет кратко цитироваться как *HR*).

***) *HR*, теорема 69.

Будем для условий

$$g_c(t) \to 0, \tag{1.1}$$

$$\int_0^t g_c(u)\,du = o(t), \tag{1.2}$$

$$\int_0^t |g_c(u)|\,du = o(t) \tag{1.3}$$

пользоваться соответственно обозначениями k_c, l_c и L_c. Для регулярных К-методов имеют место следующие три фундаментальные теоремы, принадлежащие в существенных чертах Лебегу *).

А. *Если*

$$\int_0^\pi |K_m(t)|\,dt < H, \tag{1.4}$$

где H не зависит от m, то k_c является достаточным условием суммируемости к c.

Б. *Если*

$$\int_0^\pi t\,|K'_m(t)|\,dt < H, \tag{1.5}$$

то l_c есть достаточное условие.

В. *Если $|K_m(t)| \leqslant K^*_m(t)$, где $K^*_m(t)$ абсолютно непрерывна, за исключением, быть может, начала, и*

$$\int_0^\pi t\,|K^{*\prime}_m(t)|\,dt < H, \quad |K^*_m(\pi)| < H, \tag{1.6}$$

то L_c есть достаточное условие.

Ясно, что k_c влечет L_c, а L_c влечет l_c; с другой стороны, (1.5) влечет (1.6), а (1.6) влечет (1.4). Условие L_c и, тем более, l_c выполнено с $c = f(\theta)$ для почти всех θ; значит, метод суммирования, удовлетворяющий условиям (1.6) и, тем более, условию (1.5), „F-эффективен", т. е. суммирует любой ряд Фурье почти всюду к порождающей его функции.

---

*) См. *HR*, теоремы 70, 71, 72. В теореме 72 первое из условий (5.6.5) есть следствие второго, в предположении, что $K^*_m(\pi) = O(1)$. Видоизменения для непрерывного параметра тривиальны.

Если T есть (C, 0), (C, 1), A, то $K_m(t)$, или $K(r, t)$ *), есть соответственно

$$D_m(t)=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t},\quad F_m(t)=\frac{1}{2(m+1)}\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}(m+1)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right\}^2,$$

$$P(r, t)=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}.$$

Последнее ядро удовлетворяет условию (1.5); второе удовлетворяет условиям (1.6) и, тем более, условию (1.4), но не (1.5); первое же не удовлетворяет даже условию (1.4). Таким образом, методы A и (C, 1) F-эффективны, тогда как классическая сходимость — нет **).

Мы рассмотрим здесь ядра методов (C, k), (A, 2), (VP), (B) и (E, q).

2. Ядро метода (C, k). Докажем следующее предложение.

Теорема 253. *Ядро метода* (C, k) *удовлетворяет условиям теоремы* B, *и тем более* A, *для каждого положительного* k. *Оно удовлетворяет условиям теоремы* Б, *если* $k>1$, *и не удовлетворяет им, если* $0<k\leqslant 1$.

Отсюда как следствие вытекает, что метод (C, k) F-эффективен для каждого положительного k.

Пишем

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots=c_0+c_1+c_2+\ldots=\sum c_n$$

и обозначаем через C_n^k k раз итерированную n-ю частичную сумму ряда $\sum c_n$ ***). Тогда

$$K_m(t)=\frac{C_m^k}{\binom{m+k}{k}}.$$

Очевидно, можно предполагать $m>2$.

(1) Оценим $K_m(t)$ для $0<t\leqslant\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{m}<t\leqslant\pi$. Если $0<t\leqslant\frac{1}{m}$, то $c_m=O(1)$, $C_m=O(m)$, $C_m^k=O(m^{k+1})$, и $K_m=O(m)$, равномерно относительно t; так что для надлежаще выбранного H

$$|K_m|\leqslant K_m^*=Hm\quad\left(0<t\leqslant\frac{1}{m}\right). \tag{2.1}$$

*) Здесь удобно вместо x писать r.

**) *HR*, 70 (теорема 79).

***) Так что C_n^k соответствует A_n^k гл. V.

При $t > \frac{1}{m}$ воспользуемся формулами

$$\sum c_m u^m = \frac{1}{2}\,\frac{1-u^2}{1-2u\cos t+u^2},$$

$$\sum C_m^k u^m = \frac{1}{2}\,\frac{1-u^2}{1-2u\cos t+u^2}\,\frac{1}{(1-u)^{k+1}},$$

$$C_m^k = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_C \frac{1-u^2}{1-2u\cos t+u^2}\,\frac{du}{(1-u)^{k+1}u^{m+1}}, \tag{2.2}$$

где C есть маленькая окружность с центром в начале. Предполагая учтенными вычеты в полюсах $u = e^{\pm it}$, можно деформировать C в разрез C_1, образованный окружностью $|u-1| = \rho$, где $\rho < |1-e^{it}|$, и лучом $(1+\rho, \infty)$, проходимым дважды в противоположных направлениях. Вычисляя эти вычеты, находим:

$$K_m(t) = \Omega(m) + W(m), \tag{2.3}$$

$$\Omega(m) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+k+1)}\,\frac{\sin\left\{\left(m+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\right)t - \frac{1}{2}k\pi\right\}}{\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)^{k+1}}, \tag{2.4}$$

$$W(m) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+k+1)}\,\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{1-u^2}{1-2u\cos t+u^2}\,\frac{du}{(1-u)^{k+1}u^{m+1}} \tag{2.5}$$

Ясно, что

$$\Omega(m) = O\left(\frac{1}{m^k t^{k+1}}\right) \tag{2.6}$$

равномерно, и нужно только оценить $W(m)$.

Берем $\rho = \frac{1}{2m}$. Тогда (принимая во внимание, что $t > \frac{1}{m}$) имеем, для некоторого положительного H,

$$|1-ue^{\pm it}| = |u-e^{\mp it}| > Ht$$

на круговой части контура C_1 и, тем более, на его прямолинейных частях. Далее, $\frac{1}{|u|^{m+1}}$ ограничено на круговой части. Поэтому доля круговой части составляет

$$O\left(\frac{1}{m^k}\cdot\frac{\frac{1}{m}}{t^2}\cdot\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m^{k+1}}}\right) = O\left(\frac{1}{mt^2}\right),$$

а доли прямолинейных частей будут

$$O\left(\frac{1}{m^k}\frac{1}{t^2\frac{1}{m^k}}\int\limits_{1+\frac{1}{2m}}^{\infty}\frac{du}{u^m}\right)=O\left\{\frac{1}{t^2(m-1)}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{m-1}}\right\}=O\left(\frac{1}{mt^2}\right).$$

Из формул (2.3) — (2.6) следует теперь, что

$$K_m(t)=O\left(\frac{1}{m^k t^{k+1}}\right)+O\left(\frac{1}{mt^2}\right), \tag{2.7}$$

$$|K_m(t)|\leqslant K_m^*(t)=\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{m^k t^{k+1}}+\frac{1}{mt^2}\right)\quad\left(\frac{1}{m}<t\leqslant\pi\right), \tag{2.8}$$

где H можно предполагать тем же, что и в (2.1). Функция K_m^*, определенная формулами (2.1) и (2.8), абсолютно непрерывна, $K_m^*(\pi)=O(1)$ и

$$\int\limits_0^{\pi}t\,|K_m^{*\prime}|\,dt=\frac{1}{2}H\left\{\frac{k+1}{m^k}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dt}{t^{k+1}}+\frac{2}{m}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\right\}\leqslant\frac{3k+1}{2k}H.$$

Этим доказано первое утверждение теоремы 253.

(2) Предполагая теперь, что $k>1$, оценим $K_m'(t)$. Так как K_m' получается из $0-\sin t-2\sin 2t-\ldots$, как K_m из $\frac{1}{2}+\cos t+$ $+\cos 2t+\ldots$, то имеем $K_m'(t)=O(m^2)$ и

$$\int\limits_0^{\frac{1}{m}}t\,|K_m'(t)|\,dt=O\left(m^2\int\limits_0^{\frac{1}{m}}t\,dt\right)=O(1). \tag{2.9}$$

При $t>\frac{1}{m}$ имеем $K_m'=\Omega'+W'$, где Ω' и W' суть производные от Ω и W по t. Таким образом, прежде всего

$$\Omega'(m)=O\left(\frac{1}{m^k}\cdot m\cdot\frac{1}{t^{k+1}}\right)+O\left(\frac{1}{m^k t^{k+2}}\right)=O\left(\frac{1}{m^{k-1}t^{k+1}}\right).$$

Далее,

$$W'(m)=-\frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+k+1)}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(1-u^2)\,u\sin t}{(1-2u\cos t+u^2)^2}\frac{du}{(1-u)^{k+1}u^{m+1}}.$$

Отсюда, поступая с $W'(m)$ как с $W(m)$ в пункте (1), получаем два члена, первый из которых есть

$$O\left(\frac{1}{m^k}\cdot\frac{\frac{t}{m}}{t^4}\cdot\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m^{k+1}}}\right)=O\left(\frac{1}{mt^3}\right),\quad .$$

а второй

$$O\left(\frac{1}{m^k}\frac{t}{t^4\frac{1}{m^k}}\int\limits_{1+\frac{1}{2m}}^{\infty}\frac{du}{u^{m-1}}\right)=O\left\{\frac{1}{t^3(m-2)}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{m-2}}\right\}=O\left(\frac{1}{mt^3}\right).$$

Отсюда

$$W'(m)=O\left(\frac{1}{mt^3}\right),\quad K_m'(t)=O\left(\frac{1}{m^{k-1}t^{k+1}}\right)+O\left(\frac{1}{mt^3}\right),$$

и

$$(2.10)\qquad \int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}t\,|K_m'|\,dt=O\left(\frac{1}{m^{k-1}}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dt}{t^k}\right)+O\left(\frac{1}{m}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\right)=O(1),$$

поскольку $k>1$. В соединении с (2.9) это показывает, что K_m удовлетворяет условию (1.5).

Проведенное доказательство теряет силу, когда $k\leqslant 1$, поскольку тогда первый член в левой части формулы (2.10) не есть $O(1)$; и метод (C, 1) действительно не удовлетворяет условию (1.5) *). При $k<0$ метод (C, k) не регулярен и (поскольку суммируемость влечет тогда сходимость) не F-эффективен. Kogbetliantz [*AEN* (3), **40** (1923), 259—323 (276)] доказал, что *если* $-1<k\leqslant 1$, *то*

$$K_m(t)=O(m)$$

и

$$K_m(t)=\Omega(m)+O\left(\frac{1}{mt^2}\right)$$

равномерно для $0<t\leqslant\pi$. Доказательство можно провести по плану доказательства теоремы 253.

3. Ядра методов (A, 2) и (VP). Для метода (A, 2)

$$K(r,t)=\frac{1}{2}+r\cos t+r^4\cos 2t+r^9\cos 3t+\ldots$$

Если

$$r=e^{-\eta^2\pi^2}\quad(\eta>0),$$

то для $0<t<\pi$

$$(3.1)\qquad K=\frac{1}{2}+\sum_1^{\infty}e^{-(n\eta\pi)^2}\cos nt=\frac{1}{2\eta\sqrt{\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(2m\pi-t)^2}{4\eta^2\pi^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\eta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4\pi^2\eta^2}}+O\left(e^{-\frac{H}{\eta^2}}\right)$$

*) См. *HR*, 62.

равномерно относительно t. Для суммируемости к c необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\eta}\int_0^{\delta} g_c(t)\, e^{-\frac{t^2}{4\pi^2\eta^2}}\, dt \to 0$$

при $\eta \to 0$. Таким образом, ядро K имитирует ядро

$$L = \frac{1}{2\eta\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{4\pi^2\eta^2}},$$

а его производные — производные от L. Но

$$\int_0^{\pi} t\,|L'(t)|\,dt = O\left(\frac{1}{\eta}\int_0^{\infty} t\cdot\frac{t}{\eta^2}\, e^{-\frac{t^2}{4\pi^2\eta^2}}\, dt\right) = O\left(\frac{1}{\eta^3}\int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{4\pi^2\eta^2}}\, dt\right) = O(1).$$

Таким образом, метод (A, 2) удовлетворяет условию (1.5). Легко проверить, что он удовлетворяет условию

$$\int_0^{\pi} t^p\,|K^{(p)}(t)|\,dt = O(1) \tag{3.2}$$

для каждого p. Следовательно, подобно A-методу, он суммирует ряд, получающийся путем дифференцирования ряда Фурье, в точках, где порождающая функция имеет обыкновенную или обобщенную производную надлежащего порядка *).

В Приложении V мы докажем, что метод (A, k) F-эффективен для каждого положительного k.

Представлялось интересным найти конечно-строчный метод, обладающий аналогичными свойствами; пример такого метода предложил Валле-Пуссен. У него

$$K_m(t) = \frac{1}{2} + \frac{m}{m+1}\cos t + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}\cos 2t + \ldots = A_m\left(\cos\frac{1}{2}t\right)^{2m},$$

где

$$A_m = 2^{2m-1}\frac{(m!)^2}{(2m)!} \sim \frac{1}{2}\sqrt{m\pi}.$$

Так как $\cos x < e^{-\frac{1}{2}x^2}$ для $0 < x \leqslant \frac{1}{2}\pi$, то

$$\int_0^{\pi} t\,|K_m'(t)|\,dt = O\left\{m^{\frac{3}{2}}\int_0^{\pi} t\sin\frac{1}{2}t\left(\cos\frac{1}{2}t\right)^{2m-1} dt\right\} =$$

$$= O\left(m^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{8}mt^2}\, dt\right) = O(1).$$

*) См. *HR*, 68—69, или Зигмунд, гл. 10 (где изложение гораздо полнее).

Таким образом, ядро $K_m(t)$ удовлетворяет условию (1.5), и можно проверить, что оно удовлетворяет условию (3.2) для всякого p.

4. Ядра методов B и E. Поскольку a_n и b_n стремятся к нулю, несущественно, какую форму борелевского определения выбрать. Беря экспоненциальное определение, имеем

$$K(x, t) = e^{-x} \sum \frac{x^n}{n!} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} = \frac{e^{-x(1-\cos t)}}{2\sin\frac{1}{2}t} \sin\left(x\sin t + \frac{1}{2}t\right),$$

что можно заменить, с тривиальной ошибкой, на

$$\frac{1}{t} e^{-x(1-\cos t)} \sin(x \sin t).$$

Рассматриваемое ядро не удовлетворяет условию (1.4). В самом деле, так как $e^{-x(1-\cos t)} > H$ для $0 < t < \frac{1}{\sqrt{x}}$ и

$$|\sin(x\sin t)| > H|\sin xt| + O(xt^3),$$

то

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} |K|\,dt > H\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{|\sin xt|}{t}\,dt + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) > H\int_0^{\sqrt{x}} \frac{|\sin u|}{u}\,du \to \infty$$

при $x \to \infty$. В действительности этот метод не является F-эффективным и не суммирует всех рядов Фурье в точках непрерывности.

Ядро метода (E, q) ведет себя аналогичным образом. Будем предполагать, что $q = 1$, поскольку лишь в этом случае для $K_m(t)$ получается простая формула. Тогда

$$K_m(t) = \frac{1}{2^m} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t} = \frac{\left(\cos\frac{1}{2}t\right)^m}{2\sin\frac{1}{2}t} \sin\frac{m+1}{2}t.$$

Легко проверить, что $\int |K_m(t)|\,dt$ не ограничен.

Приложение III

О СУММИРУЕМОСТИ ПО РИМАНУ И ПО АБЕЛЮ

1. Мы докажем здесь три теоремы, упоминавшиеся в гл. IV и XII; их можно коротко сформулировать следующим образом:

Теорема 254. (R,2) *влечет* (A).

Теорема 255. (R,1) *влечет* (R,2).

Теорема 256. (R_2) *влечет* (A).

В каждой из этих теорем утверждается полное включение. Так, теорема 254 говорит, что если ряд суммируем (R, 2), то он суммируем (A) к той же сумме.

Эти теоремы допускают различные доказательства. Мы будем следовать Кутнеру, впервые доказавшему теорему 254 в полной ее общности. Метод доказательства посредством „формального перемножения“ тригонометрических рядов придумал Райхман и развил Зигмунд. Он не похож ни на один из использованных нами до сих пор методов, однако опирается на теоремы, доказанные в гл. X.

В гл. X мы определили „произведение Лорана“ двух рядов, бесконечных в обоих направлениях. Здесь мы будем рассматривать тригонометрические ряды. Пусть

$$A = \sum a_m e^{mix}, \quad B = \sum b_n e^{nix}$$

и

$$C = \sum c_p e^{pix},$$

где

$$c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n.$$

Если a_m и b_n четны и

$$a_m + a_{-m} = 2a_m = \alpha_m, \quad b_n + b_{-n} = 2b_n = \beta_n,$$

то c_p также четно, $c_p + c_{-p} = 2c_p = \gamma_p$ и

$$\left(\frac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \ldots\right)\left(\frac{1}{2}\beta_0 + \beta_1 \cos x + \ldots\right) = \frac{1}{2}\gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \ldots,$$

где

$$\gamma_p = \frac{1}{2} \sum_{m+n=p} \alpha_m \beta_n.$$

Это — формальное правило умножения рядов по косинусам *). В наших приложениях все ряды, определяющие γ_p, будут абсолютно сходящимися. Произведение двух рядов по синусам также является рядом по косинусам, произведение же ряда по косинусам на ряд по синусам есть ряд по синусам. Выписывать формулы для этих произведений нет необходимости.

Теорема 193 показывает, что если $a_n = o(1)$, $\sum |n||b_n| < \infty$ и

$$\sum b_n e^{nix} = B(x),$$

то

$$\sum_{-N}^{N} c_n e^{nix} - B(x) \sum_{-N}^{N} a_n e^{nix} \to 0$$

равномерно относительно x **). В переводе на язык рядов по косинусам получается

Теорема 257. *Если*

$$\alpha_n = o(1), \quad \sum n|\beta_n| < \infty, \quad \frac{1}{2}\beta_0 + \sum \beta_n \cos nx = B(x)$$

и

$$\gamma_p = \frac{1}{2}\sum_{m+n=p} \alpha_m\beta_n = \frac{1}{2}(\alpha_0\beta_p + \alpha_1\beta_{p-1} + \ldots + \alpha_p\beta_0) +$$
$$+ (\alpha_{p+1}\beta_1 + \alpha_{p+2}\beta_2 + \ldots + \alpha_1\beta_{p+1} + \alpha_2\beta_{p+2} + \ldots) \text{ ***)},$$

то

$$\frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_{1}^{N} \gamma_n \cos nx - B(x)\left(\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{1}^{N} \alpha_n \cos nx\right) \to 0$$

равномерно относительно x.

Разумеется, соответствующие теоремы имеются и для произведения ряда по косинусам на ряд по синусам или двух рядов по синусам.

2. Нам потребуется следующая подготовительная лемма:

Теорема 258. *Если ряд* $\sum c_n(1 - \cos nx)$ *сходится для всех* x *из некоторого интервала* (α, β), *то ряд* $\sum c_n$ *сходится.*

Мы воспользуемся формулой

$$(2.1) \quad \frac{1}{2}\pi \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos nx) \sin \pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\, dx = \beta - \alpha + (\cos n\alpha + \cos n\beta) Q_n,$$

*) Эти формулы согласуются с формулами „умножения Фурье" в § 10.12; в частности, формула для γ_p согласуется с формулами (10.12.8) — (10.12.10), если принять во внимание, что α_m и β_n четны.

**) См. замечание о равномерности на стр. 292.

***) Принимая во внимание, что $\alpha_{-m} = \alpha_m$, $\beta_{-n} = \beta_n$.

где

(2.2) $$Q_n = \frac{\pi H}{2(n^2 - H^2)}, \qquad H = \frac{\pi}{\beta - \alpha}.$$

Очевидно,

(2.3) $$0 < Q_n < \frac{\pi H}{n^2} \qquad (n^2 > 2H^2).$$

Так как $c_n \sin^2 \frac{1}{2} nx \to 0$ на множестве положительной меры, то $c_n \to 0$ и $\sum \frac{|c_n|}{n^2} < \infty$ *).

Допустим, что, в противоречие с предположением теоремы, ряд $\sum c_n$ расходится. Тогда существует такое положительное δ, что

(2.4) $$\left|\sum_{\mu}^{\nu} c_n\right| > \delta$$

для пар μ, ν, стремящихся к бесконечности. Поэтому можно найти такие μ_1 и ν_1, что

(2.5) $$\mu_1^2 > 2H^2, \quad \nu_1 > \mu_1, \quad \left|\sum_{\mu_1}^{\nu_1} c_n\right| > \delta, \quad \sum_{\mu_1}^{\nu_1} \frac{|c_n|}{n^2} < \frac{(\beta-\alpha)\delta}{4\pi H};$$

а тогда в силу (2.1)—(2.5)

$$\left|\frac{1}{2}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{\mu_1}^{\nu_1} c_n (1 - \cos nx) \sin \pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\, dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{\mu_1}^{\nu_1} c_n \{\beta - \alpha + (\cos n\alpha + \cos n\beta) Q_n\}\right| \geqslant$$

$$\geqslant (\beta-\alpha)\left|\sum_{\mu_1}^{\nu_1} c_n\right| - 2\sum_{\mu_1}^{\nu_1} |c_n| Q_n \geqslant (\beta-\alpha)\delta - 2\pi H \sum_{\mu_1}^{\nu_1} \frac{|c_n|}{n^2} > \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\delta.$$

Отсюда следует, что

(2.6) $$\left|\sum_{\mu_1}^{\nu_1} c_n (1 - \cos nx)\right| > \sin \pi \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \left|\sum_{\mu_1}^{\nu_1} c_n (1 - \cos nx)\right| > \frac{\delta}{\pi}$$

в некоторой точке интервала (α, β), и, значит, на некотором интервале (α_1, β_1), внутреннем к (α, β).

Теперь можно выбрать вторую пару μ_2, ν_2 $(\mu_2 > \nu_1)$, для которой выполняются неравенства (2.4) и (2.5), и таким же образом вывести, что на некотором интервале (α_2, β_2), внутреннем к (α_1, β_1), выпол-

*) См., например, *HR*, 84.

няется (2.6) с заменой μ_1, ν_1, α, β на μ_2, ν_2, α_1, β_1. Так как это рассуждение можно неограниченно повторять, то получается такая последовательность пар μ_k, ν_k, стремящихся к бесконечности вместе с k, и такая последовательность вложенных друг внутрь друга интервалов (α_k, β_k), что

$$\left|\sum_{\mu_k}^{\nu_k} c_n (1-\cos nx)\right| > \frac{\delta}{\pi} \tag{2.7}$$

на интервале (α_k, β_k). Но существует, по крайней мере, одно x, содержащееся во всех этих интервалах, и мы получаем, что наш ряд расходится для этого x, что, однако, противоречит условию теоремы. Тем самым теорема доказана.

3. Теперь мы докажем теорему 254. Это — важнейшая из теорем этого приложения, и мы изложим доказательство полностью, а затем вкратце укажем пункты различия в доказательствах теорем 255 и 256.

Нам дано, что $\sum a_n = s$ (R, 2); при этом мы можем предполагать, (изменяя, в случае необходимости, два члена ряда), что $a_0 = 0$, $s = 0$. Тогда

$$F(h) = \sum \frac{a_n}{n^2} \sin^2 \frac{1}{2} nh$$

сходится для малых h, и $F(h) = o(h^2)$; а требуется доказать, что $\sum a_n r^n \to 0$, когда $r \to 1$. Доказательство распадается на две части; сначала мы докажем, что справедливость теоремы в рассматриваемых далее двух частных случаях влечет ее общую справедливость, а затем докажем ее для этих двух случаев. Первая часть доказательства будет опираться на теорему 257.

Поскольку ряд $\sum \frac{a_n}{n^2}$ в силу теоремы 258 сходится, мы можем записать наш ряд в виде

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum \alpha_n \cos nh, \tag{3.1}$$

где

$$\alpha_n = -\frac{a_n}{2n^2} \quad (n > 0), \qquad \alpha_0 = -2\sum \alpha_n = \sum \frac{a_n}{n^2}\,^{*)}. \tag{3.2}$$

Ряд (3.1) сходится к $F(h)$ для малых h. Двумя частными случаями, рассматриваемыми в доказательстве, будут случай (*А*), когда ряд (3.1) есть ряд Фурье, и (*Б*), когда ряд (3.1) равномерно сходится к нулю на некотором интервале значений h, содержащем начало.

4. Начнем с доказательства того, что если теорема 254 верна в случаях (*А*) и (*Б*), то она верна вообще.

---

*) Используемые здесь обозначения отличны от принятых в § 1.

Пусть ряд (3.1) сходится и его сумма ограничена для $|h| \leqslant \delta$. Выберем положительное η, меньшее чем $\frac{\delta}{2}$, и пусть $\lambda(h)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим условиям: (I) $\lambda(h)$ четна и периодична и обладает тремя непрерывными производными, (II) $\lambda(h)=1$ для $|h| \leqslant \eta$, (III) $\lambda(h)=0$ для $2\eta \leqslant |h| \leqslant \pi$. Если

$$\lambda(h) \sim \frac{1}{2}\beta_0 + \sum \beta_n \cos nh, \tag{4.1}$$

то $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и $\sum n|\beta_n| < \infty$. С другой стороны, $\alpha_n = o(1)$. Поэтому из теоремы 257 следует, что если

$$\frac{1}{2}\gamma_0 + \sum \gamma_n \cos nh \tag{4.2}$$

есть формальное произведение рядов (3.1) и (4.1), то

$$\frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_1^N \gamma_n \cos nh - \lambda(h)\left\{\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^N \alpha_n \cos nh\right\} \to 0 \tag{4.3}$$

равномерно относительно h. Так как ряд (3.1) сходится к $F(h)$ для $|h| \leqslant 2\eta < \delta$, а $\lambda(h)=0$ для $2\eta \leqslant |h| \leqslant \pi$, то из соотношения (4.3) следует, что ряд (4.2) сходится для всех h к сумме

$$F^*(h) = \begin{cases} F(h) & \text{при } |h| \leqslant \eta, \\ \lambda(h) F(h) & \text{при } \eta \leqslant |h| \leqslant 2\eta, \\ 0 & \text{при } 2\eta \leqslant |h| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Поскольку функция $F^*(h)$ ограничена, (4.2) есть ее ряд Фурье *).

Положим

$$\gamma_n = -\frac{c_n}{2n^2} \quad (n>0), \quad \gamma_0 = -2\sum \gamma_n = \sum \frac{c_n}{n^2}.$$

Тогда (4.2) связан с рядом $\sum c_n$ точно так же, как (3.1) с рядом $\sum a_n$. Так как

$$F^*(h) = F(h) = o(h^2)$$

для малых h, то ряд $\sum c_n$ суммируем (R, 2) к нулю. Отсюда и из предположенной справедливости теоремы в случае (A) следует, что ряд $\sum c_n$ суммируем (A) к нулю.

С другой стороны, так как $\lambda(h)=1$ для $|h| \leqslant \eta$, то из соотношения (4.3) следует, что ряд

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 - \alpha_0) + \sum (\gamma_n - \alpha_n) \cos nh$$

*) См., например, *HR*, 89.

равномерно сходится к нулю для $|h| \leqslant \eta$, а ряд $\sum (c_n - a_n)$ суммируем (R, 2) к нулю. Отсюда и из предположенной справедливости теоремы в случае (*Б*) следует, что ряд $\sum (c_n - a_n)$ суммируем (A) к нулю. Наконец, так как $a_n = c_n - (c_n - a_n)$, то заключаем, что ряд $\sum a_n$ суммируем (A) к нулю.

5. Остается доказать нашу теорему для двух указанных выше случаев.

(*А*) В этом случае (3.1) есть ряд Фурье некоторой функции $\varphi(h)$. Так как этот ряд для малых h сходится к $F(h)$, то $\varphi(h) = F(h)$ для почти всех таких h, и мы можем считать, что это имеет место для всех таких h без исключения. Отсюда $\varphi(h) = o(h^2)$. Но для $r < 1$

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum \alpha_n \cos nh\, r^n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-h)+r^2}\varphi(\theta)\,d\theta,$$

где интегрирование производится от $-\pi$ до π. Дважды дифференцируя по h и полагая затем $h = 0$, получаем

$$\sum a_n r^n = -2\sum n^2 \alpha_n r^n = -\frac{2}{\pi}\int \frac{r(1-r^2)Q}{P^3}\varphi(\theta)\,d\theta,$$

где

(5.1) $P = 1 - 2r\cos\theta + r^2, \quad Q = (1+r^2)\cos\theta - 2r(1+\sin^2\theta).$

Но

$$|Q| \leqslant H_1\{(1-r)^2 + \theta^2\}, \quad P \geqslant H_2\{(1-r)^2+\theta^2\}$$

для надлежаще выбранных H_1 и H_2, а $\varphi(\theta) = o(\theta^2)$. Следовательно,

$$\sum a_n r^n = o\left(\int \frac{(1-r)\theta^2}{\{(1-r)^2+\theta^2\}^2}d\theta\right) = o\left(\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}\right) = o(1)$$

при $r \to 1$. Это доказывает нашу теорему в случае (*А*).

6. Переходя к случаю (*Б*), будем исходить из формул

$$r^n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{1-r^2}{P}\cos n\theta\,d\theta = \frac{1-r^2}{2\pi n^2}\int (1-\cos n\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{P}\right)d\theta =$$
$$= -\frac{r(1-r^2)}{\pi n^2}\int (1-\cos n\theta)\frac{Q}{P^3}d\theta,$$

где P и Q определены формулами (5.1). Отсюда

$$\sum a_n r^n = -\frac{r(1-r^2)}{\pi}\sum \frac{a_n}{n^2}\int (1-\cos n\theta)\frac{Q}{P^3}d\theta.$$

Но, по предположению, ряд

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum \alpha_n \cos n\theta = \frac{1}{2}\sum \frac{a_n}{n^2} - \frac{1}{2}\sum \frac{a_n}{n^2}\cos n\theta = \frac{1}{2}\sum \frac{a_n}{n^2}(1-\cos n\theta)$$

равномерно сходится к нулю для малых θ, скажем, для $|\theta| \leqslant \zeta$, так что доля интервала $(-\zeta, \zeta)$ в интеграле $\int \sum \frac{a_n}{n^2}(1-\cos n\theta)\frac{Q}{P^3}\,d\theta$ равна нулю. Таким образом, достаточно доказать, что

$$\sum \frac{a_n}{n^2}\int\limits_{\zeta}^{\pi}(1-\cos n\theta)\frac{Q}{P^3}\,d\theta = o\left(\frac{1}{1-r}\right) \tag{6.1}$$

для любого фиксированного положительного ζ (и тем более, что это выражение ограничено). Но

$$\left(\sum \frac{a_n}{n^2}\right)\left(\int\limits_{\zeta}^{\pi}\frac{Q}{P^3}\,d\theta\right),$$

очевидно, ограничено. Далее, $\frac{Q}{P^3}$ и его две первые производные равномерно ограничены на интервале (ζ, π), и повторное интегрирование по частям дает

$$j_n = \int\limits_{\zeta}^{\pi}\cos n\theta\,\frac{Q}{P^3}\,d\theta = -\frac{\sin n\zeta}{n}\,\frac{Q(\zeta)}{P^3(\zeta)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

кроме того, $a_n = o(n^2)$. Поэтому

$$\sum \frac{a_n j_n}{n^2} = -\sum \frac{a_n \sin n\zeta}{n^3}\,\frac{Q(\zeta)}{P^3(\zeta)} + \sum O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{6.2}$$

Так как ряд $\sum \frac{a_n}{n^2}\cos n\theta$ равномерно сходится для $|\theta| \leqslant \zeta$, то ряд $\sum \frac{a_n}{n^3}\sin n\zeta$ сходится. Следовательно, (6.2), а значит и (6.1), ограничено, чем и завершается доказательство теоремы 254.

7. О теоремах 255 и 256 нужно сказать только несколько слов. В обоих случаях первая часть доказательства проводится как для теоремы 254. В теореме 255 мы имеем дело с рядом $\sum \frac{a_n}{n}\sin nh$ и должны пользоваться формой, принимаемой теоремой 257, когда A есть ряд по синусам, а B — ряд по косинусам. В этом случае вторая часть доказательства тривиальна. Если

$$\sum \frac{a_n}{n}\sin nh = F(h) = o(h) \tag{7.1}$$

и этот ряд есть ряд Фурье, то

$$\sum \frac{a_n}{n^2}(1-\cos nh) = \int\limits_0^h F(t)\,dt = o(h^2), \tag{7.2}$$

поскольку ряд Фурье можно почленно интегрировать. А если (7.1) равномерно сходится к нулю для малых h, то (7.2) есть нуль для малых h.

В теореме 256 нам дано (снова принимая $s=0$), что ряд

$$\sum \frac{s_n}{n^2} \sin^2 \frac{1}{2} nh \tag{7.3}$$

для малых h сходится к $F(h)=o(h)$, и требуется доказать, что $\sum a_n r^n \to 0$, т. е. что $(1-r) \sum s_n r^n \to 0$. Мы записываем (7.3) в виде (3.1) с

$$\alpha_n = -\frac{s_n}{2n^2} \quad (n>0), \quad \alpha_0 = \sum \frac{s_n}{n^2}$$

и рассуждаем как в доказательстве теоремы 254. Рассуждение проводится почти в точности как в §§ 4—6, с тем отличием, что $\varphi(\theta)$ есть теперь $o(\theta)$, а не $o(\theta^2)$, и что в результате мы получаем

$$\sum n^2 \alpha_n r^n = o\left(\frac{1}{1-r}\right),$$

а не $o(1)$.

8. Укажем в заключение, что Кутнер*) доказал более сильные теоремы, а именно, что (R, 2) влечет (C, $2+\delta$) и (R, 1) влечет (C, $1+\delta$) для каждого положительного δ. Имеются также теоремы противоположного характера. Так, Харди и Литтльвуд**) доказали, что (C, $-\delta$) влечет (R, 1), а Бозанкэ, Палей и Верблюнский***) доказали теоремы, включающие как эти, так и то, что (C, $1-\delta$) влечет (R, 2). Частные случаи: (C, 0) влечет (R, 2) и (C, -1) влечет (R, 1) — хорошо известны: первый из них (принадлежащий Риману) представляет собой теорему регулярности для суммируемости (R, 2), а второй — одну теорему Фату, обобщенную Харди и Литтльвудом****), доказавшими, что $\sum a_n = s$ (R, 1), когда $\sum a_n$ сходится к s и $a_n > -\frac{H}{n}$.

*) *PLMS* (2), **38** (1935), 273—283.

) *PLMS* (2), **28 (1928), 301—311 (305).

***) Bosanquet, *PLMS* (2), **31** (1930), 144—164; Paley, *PCPS*, **26** (1930), 173—203; Verblunsky, там же, 34—42.

****) *JLMS*, **1** (1926), 19—25.

Приложение IV

О СУММИРУЕМОСТИ ПО ЛАМБЕРТУ И ПО ИНГАМУ

1. Мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (L) к s, и писать

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \to s \quad (\mathrm{L}),$$

если

$$F(y) = \sum a_n \frac{nye^{-ny}}{1-e^{-ny}} \to s \tag{1.1}$$

при $y \to +0$ *). Если ряд, стоящий в формуле (1.1), сходится для $y > 0$, то

$$F(y) = \sum s_n \Delta \frac{nye^{-ny}}{1-e^{-ny}} = -\sum s_n \int_n^{n+1} \frac{d}{dt}\left(\frac{yte^{-yt}}{1-e^{-yt}}\right) dt =$$

$$= y \int s(t) g(yt)\, dt = \frac{1}{x} \int g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt,$$

где

$$g(t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}\right), \quad s(t) = \sum_{n \leqslant t} a_n, \quad x = \frac{1}{y} \to \infty,$$

и мы можем записать (1.1) также в форме

$$\frac{1}{x} \int g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt \to s. \tag{1.2}$$

В § 12.9 (7) мы видели, что $g(t)$ принадлежит к классу W. Поэтому в качестве следствия теоремы 233 получаем: (*A*) *Если ряд* $\sum a_n$ *суммируем* (L) *к* s, *а* s_n *ограничены и медленно колеблются, или вещественны и медленно убывают, то ряд* $\sum a_n$ *сходится к* s. Эта теорема с $a_n = \frac{\mu(n)}{n}$ и используется в доказательстве асимптотического закона распределения простых чисел, намеченном в при-

*) Это наименование ввел Ananda Rau, *PLMS* (2), **19** (1919), 1—20 Здесь удобно начинать ряд с a_1, и в этом приложении $\sum$ будет означать всюду $\sum\limits_1^\infty$.

мечании к § 12.11. Предложение (*A*) оказывается достаточным для этой цели, и уже одно это обнаруживает важность метода суммирования Ламберта, но в приведенном выше виде оно еще несовершенно, и мы не выделяем его в виде формальной теоремы. Как мы скоро увидим, в действительности условие „s_n ограничены" не нужно, будучи следствием остальных предположений.

2. Имеются две теоремы включения, связывающие метод Ламберта с более известными методами суммирования.

Теорема 259. *Если* $\sum a_n = s$ (C, k) *для некоторого* k, *то* $\sum a_n = s$ (L).

Таким образом, (C, k) влечет (L). В частности, метод (L) регулярен. Доказательство не содержит тонких моментов *), и мы его подробно проводить не будем. Оно опирается на следующую теорему о „множителях сходимости". *Пусть*

$$\sum a_n = s \quad (C, k);$$

$f_n(y)$ *непрерывна и* $f_n(0) = 1$ *для каждого* n; *далее, пусть* $n^k f_n(y) \to 0$ *при* $y > 0$ *и* $n \to \infty$; *и пусть* $\sum n^k |\Delta^{k+1} f_n(y)| < H$, *где* H *не зависит от* y. *Тогда* $\sum a_n f_n(y) \to s$ *при* $y \to 0$. В частности, это верно, когда

$$f_n(y) = f(ny), \quad f(0) = 1, \quad f(t) = o\left(\frac{1}{t^k}\right)$$

для больших t и каждого k и

$$\int t^k |f^{(k+1)}(t)|\, dt < \infty$$

для каждого k. В нашем случае полагаем $f(t) = \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

Вторая теорема труднее.

Теорема 260. *Если* $\sum a_n = s$ (L), *то* $\sum a_n = s$ (A) **). Таким образом,

$$(C, k) \to (L) \to (A).$$

Ясно, что теорема 260 позволяет нам из любой теоремы тауберова типа, относящейся к суммируемости (A), вывести соответствующую теорему тауберова типа для суммируемости (L). В частности, из теоремы 106 следует

*) Теорема доказана Hardy, *PLMS* (2), **13** (1913), 192—198. Его доказательство можно упростить, если воспользоваться приводимой ниже теоремой, автором которой является Bromwich, *MA*, **65** (1908), 350—369 (358—359).

) Hardy and Littlewood, *PLMS* (2), **19 (1919), 21—29.

Теорема 261. *Если* $\sum a_n = s$ (L) *и* s_n *медленно колеблются, либо вещественны и медленно убывают, то ряд* $\sum a_n$ *сходится к* s.

Это и есть предложение (A) § 1, освобожденное от излишнего предположения, что s_n ограничены.

Хотя теорема 260 и является чисто абелевской, она лежит глубже предложения (A), поскольку доказательство ее требует принятия асимптотического закона распределения простых чисел и даже несколько большего. Таким образом, несмотря на то, что (A) следует из теоремы 261, а асимптотический закон распределения простых чисел, в свою очередь, следует из (A), мы не можем базировать доказательство асимптотического закона распределения простых чисел на теореме 261. Мы положим

$$N(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \tag{2.1}$$

и примем, что

$$\sum \frac{|N(n)|}{n} < \infty. \tag{2.2}$$

Справедливость этого следует из того факта, что

$$N(x) = O\left\{\frac{1}{(\log x)^2}\right\} \text{*)} . \tag{2.3}$$

Будем считать, что $s = 0$, и положим, для $y > 0$,

$$f(y) = \sum a_n e^{-ny}, \quad g(y) = \sum a_n \frac{nye^{-ny}}{1 - e^{-ny}}. \tag{2.4}$$

Тогда

$$g(y) = \sum_n nya_n \sum_m e^{-mny} = y \sum_m \sum_n na_n e^{-mny} = -y \sum_m f'(my), \tag{2.5}$$

---

*) В действительности $N(x) = O\left\{\frac{1}{(\log x)^k}\right\}$ для всякого k; см. Landau, Handbuch, 570, 593–597.

Очевидно, утверждение (2.3) сильнее, чем (а) $N(x) = o(1)$, и, значит (как мы увидим в § 6), сильнее асимптотического закона распределения простых чисел; но несколько менее очевидно, что и (2.2) влечет эти следствия. Однако легко проверить, что (а) является следствием не только условия (2.2), но и любого из следующих двух более слабых предположений:

$$\text{(б) ряд } \sum \frac{N(n)}{n} \text{ сходится, (в) } \sum_{n \leqslant x} N(n) = o(x),$$

второе из которых следует из первого в силу теоремы 26. В самом деле, (в) означает, что $N(n) \to 0$ (C, 1), а $N(n)$, как частичная сумма ряда с членами $O\left(\frac{1}{n}\right)$, медленно колеблется. Следовательно, в силу теоремы 68 $N(n) \to 0$.

где обращение порядка суммирования законно вследствие абсолютной сходимости. Отсюда

$$-f'(y)=\sum \mu(m)\frac{g(my)}{my}=\frac{1}{y}\frac{\mu(m)}{m}g(my)\text{ *)},$$

$$f(y)=-\int_y^\infty f'(t)\,dt=\sum\frac{\mu(m)}{m}\int_y^\infty\frac{g(mt)}{t}\,dt=\sum\frac{\mu(m)}{m}\int_{my}^\infty\frac{g(u)}{u}\,du=$$

$$=\sum N(m)\int_{my}^{(m+1)y}\frac{g(u)}{u}\,du=\sum_{m\leqslant\frac{1}{\sqrt{y}}}+\sum_{m>\frac{1}{\sqrt{y}}}=S_1+S_2.$$

Но $g(u)=O(1)$, и $g(u)=o(1)$ для малых u. Следовательно,

$$S_1=o\left\{\sum_{m\leqslant\frac{1}{\sqrt{y}}}|N(m)|\int_{my}^{(m+1)y}\frac{du}{u}\right\}=o\left\{\sum\frac{|N(m)|}{m}\right\}=o(1),$$

$$S_2=O\left\{\sum_{m>\frac{1}{\sqrt{y}}}|N(m)|\int_{my}^{(m+1)y}\frac{du}{u}\right\}=O\left\{\sum_{m>\frac{1}{\sqrt{y}}}\frac{|N(m)|}{m}\right\}=o(1),$$

и $f(y)\to 0$.

3. Теоремы 259 и 260 являются теоремами абелева типа, устанавливающими отношения чистого включения. Естественно поставить вопрос, когда суммируемость (L) может быть выведена из суммируемости (A); теоремы этого вида носят тауберов характер. Условием тауберова типа будет здесь дополнительное условие на $f(y)$.

Теорема 262 **). *Если* $\sum a_n=s$ (A), $f(y)$ *определена формулой* (2.4) *и*

$$f''(y)>-\frac{H}{y^2}, \tag{3.1}$$

то $\sum a_n=s$ (L).

Будем считать, что $s=0$. Имеем

$$f(y)=-\int_y^\infty f'(t)\,dt,\quad g(y)=-y\sum_{m=1}^\infty f'(my)$$

*) В силу одной из формул обращения Мёбиуса; см., например, Hardy and Wright, 237.

) Hardy and Littlewood, *PLMS* (2), **41 (1936), 257—270 (258—260).

согласно (2.5). Поэтому

$$S(y)=f(y)-g(y)=\sum\int_{my}^{(m+1)y}\{f'(my)-f'(t)\}\,dt=\sum u_m(y). \tag{3.2}$$

Далее,

$$yf'(y)=y\sum\{f'(my)-f'((m+1)y\}=\sum\int_{my}^{(m+1)y}\{f'(my)-f'((m+1)y)\}\,dt,$$

$$T(y)=f(y)-yf'(y)-g(y)=\sum\int_{my}^{(m+1)y}\{f'((m+1)y)-f'(t)\}\,dt=\sum v_m(y). \tag{3.3}$$

Но так как $f(y)\to 0$ и $f''(y)>-\frac{H}{y^2}$, то, по теореме 101, $yf'(y)\to 0$. Поэтому для доказательства того, что $g(y)\to 0$, достаточно доказать, что

$$\overline{\lim}\, S(y)\leqslant 0, \tag{3.4}$$

$$\underline{\lim}\, T(y)\geqslant 0. \tag{3.5}$$

Представляем $S(y)$ в виде

$$S(y)=\Big(\sum_{m=1}^{M}+\sum_{m=M+1}^{\infty}\Big)u_m(y)=S_1(y)+S_2(y) \tag{3.6}$$

и выбираем M так, чтобы $\frac{H}{M}<\varepsilon$. Так как при $my\leqslant t\leqslant(m+1)y$ мы имеем

$$f'(my)-f'(t)=-(t-my)f''(\tau),$$

где τ заключено в тех же границах, то

$$f'(my)-f'(t)\leqslant\frac{H}{m^2y},$$

и, следовательно,

$$S_2(y)\leqslant\sum_{m>M}\frac{H}{m^2}<\frac{H}{M}<\varepsilon. \tag{3.7}$$

С другой стороны, так как $yf'(y)\to 0$ при $y\to 0$ и $u_m(y)=o\left(y\cdot\frac{1}{y}\right)=o(1)$ для каждого m, то $S_1(y)\to 0$ при фиксированном M. Соединяя это с (3.7), получаем

$$\overline{\lim}\, S(y)\leqslant\varepsilon.$$

В силу произвольности ε это есть (3.4).

Чтобы доказать (3.5), проводим аналогичное рассуждение с $T(y)$ и $v_m(y)$. В этом случае мы при $my \leqslant t \leqslant (m+1)y$ имеем

$$f'((m+1)y) - f'(t) = \{(m+1)y - t\} f''(\tau) \geqslant -\frac{H}{m^2 y},$$

и остающаяся часть доказательства проводится как выше.

Если $a_n > -\frac{H}{n}$, то

$$f''(y) = \sum n^2 a_n e^{-ny} > -H \sum n e^{-ny} > -\frac{H}{y^2},$$

так что условие теоремы 262 заведомо выполнено.

Второй теоремой в этом направлении является

Теорема 263 *). *Если* $\sum a_n = s$ (A) *и* $|f'(y)| < \varphi(y)$, *где* $\varphi(y)$ — *положительная убывающая функция, интегрируемая вплоть до* 0, *то* $\sum a_n = s$ (L).

МЕТОД ИНГАМА

4. Ингам **) ввел метод суммирования, относящийся к его доказательству асимптотического закона распределения простых чисел (§ 12.11) примерно как метод Ламберта относится к винеровскому. Мы будем говорить, что ряд $\sum a_n$ суммируем (I) к s, если

$$t(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{n}{x}\left[\frac{x}{n}\right] a_n \to s \tag{4.1}$$

при $x \to \infty$. Этот метод не регулярен, однако его связи с методами Чезаро представляют интерес. В частности, Ингам доказал, что

$$(C, -\delta) \to (I) \to (C, \delta)$$

для каждого положительного δ. Здесь мы докажем только следующее:

Теорема 264. *Если* $\sum a_n = s$ (I), *то* $\sum a_n = s$ (C, 1) ***).

Теорема 265. *Если* $\sum a_n = s$ (I), *то* $a_n = o(\log\log n)$.

Будем считать, что $s = 0$, и положим

$$b_n = na_n, \quad B(x) = \sum_{n \leqslant x} b_n, \quad F(x) = xt(x) = o(x). \tag{4.2}$$

---

*) Ananda Rau, l. c. (теорема 22). Его условие (II) излишне, будучи следствием условия (I). Краткое доказательство, предложенное Харди и Литтльвудом, l. c. 259, ошибочно.

**) L. c. в примечании к § 12.9.

***) В § 6 мы увидим, что утверждение „(C, —1) влечет (I)“ есть следствие „теоремы Аксера“.

Тогда будем иметь

$$F(x)=\sum_{n\leqslant x} b_n \sum_{m\leqslant \frac{x}{n}} 1 = \sum_{m\leqslant x}\ \sum_{n\leqslant \frac{x}{m}} b_n = \sum_{m\leqslant x} B\left(\frac{x}{m}\right) \tag{4.3}$$

и, значит, по одной из формул Мёбиуса *),

$$B(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\,F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Но

$$A^{(1)}(x)=\sum_{n\leqslant x}(x-n)\,a_n=\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{x}{n}-1\right)b_n= \tag{4.4}$$

$$=\int_0^x\left(\frac{x}{u}-1\right)dB(u)=-\int_0^x B(u)\,d\left(\frac{x}{u}-1\right)=x\int_1^x\frac{B(u)}{u^2}\,du,$$

$$\int_1^x\frac{B(u)}{u^2}\,du=\int_1^x\left\{\sum_{n\leqslant u}\mu(n)\,F\left(\frac{u}{n}\right)\right\}\frac{du}{u^2}=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\int_n^x F\left(\frac{u}{n}\right)\frac{du}{u^2}=$$

$$=\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\int_1^{\frac{x}{n}}F(v)\frac{dv}{v^2}=\int_1^x\frac{F(v)}{v^2}\left\{\sum_{n\leqslant\frac{x}{v}}\frac{\mu(n)}{n}\right\}dv=\int_1^x\frac{F(v)}{v^2}N\left(\frac{x}{v}\right)dv,$$

где $N(x)$ определено как в § 2, причем мы делаем относительно $N(x)$ то же предположение, что и там. Отсюда

$$\int_1^x\frac{B(u)}{u^2}\,du=\frac{1}{x}\int_1^x F\left(\frac{x}{w}\right)N(w)\,dw=\frac{1}{x}\left(\int_1^{\sqrt{x}}+\int_{\sqrt{x}}^x\right),$$

что в силу условия $F(x)=o(x)$ (4.2) равно

$$\frac{1}{x}\int_1^{\sqrt{x}} o\left(\frac{x}{w}\right)|N(w)|\,dw+\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x O\left(\frac{x}{w}\right)|N(w)|\,dw=$$

$$=o\left\{\int_1^{\sqrt{x}}\frac{|N(w)|}{w}\,dw\right\}+O\left\{\int_{\sqrt{x}}^x\frac{|N(w)|}{w}\,dw\right\}=o(1).$$

Таким образом, в силу (4.4) $A^{(1)}(x)=o(x)$, т. е. $\sum a_n=0$ (C, 1).

*) Hardy and Wright, 236.

Это доказывает теорему 264, и мы можем теперь переносить теоремы тауберова типа для суммируемости (C) на суммируемость (I). В частности, имеем:

Теорема 266. *Если* $\sum a_n = s$ (I) *и* s_n *медленно колеблются, либо вещественны и медленно убывают, то ряд* $\sum a_n$ *сходится к* s.

Для доказательства теоремы 265 представляем $F(x)$ в виде

$$F(x) = \sum_{mn \leqslant x} b_n = \sum_{q \leqslant x} \sum_{n|q} b_n = \sum_{q \leqslant x} \beta_q.$$

Так как $F(x) = o(x)$, то $\beta_q = o(q)$. Поэтому на основании наиболее известных из формул Мёбиуса *)

$$qa_q = b_q = \sum_{d|q} \mu\left(\frac{q}{d}\right) \beta_d = o\Bigl(\sum_{d|q} d\Bigr) = o\{\sigma(q)\},$$

где $\sigma(q)$ есть сумма делителей числа q. Но $\sigma(q) = O(q \log\log q)$ **); следовательно, $a_q = o(\log\log q)$.

ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ИЗ СООТНОШЕНИЯ (12.11.4)

5. В § 12.11 и других местах мы считали известным, что асимптотический закон распределения простых чисел можно вывести из соотношения (12.11.4) элементарным путем. Этот факт был доказан Ландау в 1911 г. ***), однако доказательство не изложено ни в одной книге. Оно опирается на важную элементарную теорему, которую мы будем называть „теоремой Аксера" ****).

Теорема 267. *Если* (а) $\chi(x)$ *имеет ограниченное изменение на каждом конечном интервале* $1 \leqslant x \leqslant X$,

$$\text{(б)} \qquad \sum_{n \leqslant x} a_n = o(x)$$

и выполнены два условия: либо

$$\text{(в 1)} \quad \chi(x) = O(1), \qquad \text{(г 1)} \quad \sum_{n \leqslant x} |a_n| = O(x),$$

*) Hardy and Wright, 235.

**) Там же, 264.

***) *WS*, **120** (1911), 973—988. По поводу обратного вывода см. Landau, Handbuch, 588—590.

****) Фактически Axer [*PMF*, **21** (1910), 65—95] доказал теорему 267 с $\chi(x) = x - [x]$ и a_n, подчиненными условиям (б) и (г 1). В нашем случае наиболее важна вторая форма теоремы с условиями (в 2) и (г 2). Порядок доказательства принадлежит Ингаму.

либо

$$\text{(в 2)}\quad \chi(x)=O(x^\alpha)\quad (0<\alpha<1),\quad \text{(г 2)}\quad a_n=O(1),$$

то

$$\sum_{n\leqslant x} a_n\chi\left(\frac{x}{n}\right)=o(x).$$

Пусть $0<\delta<1$. Имеем

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x} a_n\chi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant \delta x}+\sum_{\delta x<n\leqslant x}=S_1+S_2. \tag{5.1}$$

Полагая $A_0=0$, $a_1+a_2+\ldots+a_n=A_n$, получаем тогда

$$S_2=\sum_{\delta x<n\leqslant x}(A_n-A_{n-1})\chi\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n=[\delta x]+1}^{[x]}(A_n-A_{n-1})\chi\left(\frac{x}{n}\right)=$$

$$=-A_{[\delta x]}\chi\left(\frac{x}{[\delta x]+1}\right)+A_{[x]}\chi\left(\frac{x}{[x]}\right)+\sum_{n=[\delta x]+1}^{[x]-1}A_n\left\{\chi\left(\frac{x}{n}\right)-\chi\left(\frac{x}{n+1}\right)\right\}.$$

Но в силу условия (а)

$$\sum_{[\delta x]+1}^{[x]-1}\left|\chi\left(\frac{x}{n}\right)-\chi\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|,\quad \left|\chi\left(\frac{x}{[\delta x]+1}\right)\right|,\quad \left|\chi\left(\frac{x}{[x]}\right)\right|$$

мажорируются функциями одного только δ. Следовательно,

$$|S_2|\leqslant o(x)P(\delta), \tag{5.2}$$

где $P(\delta)$ зависит только от δ.

Если выполнены условия (в 1) и (г 1), то

$$|S_1|\leqslant H\sum_{n\leqslant\delta x}|a_n|\leqslant H\delta x$$

для некоторого фиксированного H. Если выполнены условия (в 2) и (г 2), то

$$|S_1|\leqslant H\sum_{n\leqslant\delta x}\left(\frac{x}{n}\right)^\alpha\leqslant Hx^\alpha(\delta x)^{1-\alpha}=H\delta^{1-\alpha}x.$$

В том и другом случае мы можем выбрать $\delta(\varepsilon)$ так, чтобы $|S_1|<\varepsilon x$, а затем в силу (5.2) выбрать $x_0=x_0(\delta,\varepsilon)=x_0(\varepsilon)$ так, чтобы $|S_2|<\varepsilon x$ для $x\geqslant x_0$. Следовательно, $S(x)=o(x)$.

6. Асимптотический закон распределения простых чисел равносилен соотношению $\psi(x) \sim x$, где

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) = \sum_{p^m \leqslant x} \log p. \tag{6.1}$$

Но

$$\sum \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

для $\Re s > 1$ *). Таким образом, полагая

$$H(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) + 2\gamma = \sum \frac{c_n}{n^s},$$

имеем

$$c_1 = 2\gamma - 1, \quad c_n = \Lambda(n) - 1 \quad (n > 1),$$

$$C(x) = \sum_{n \leqslant x} c_n = \sum_{n \leqslant x} \{\Lambda(n) - 1\} + 2\gamma = \psi(x) - [x] + 2\gamma,$$

и асимптотический закон распределения простых чисел равносилен соотношению $C(x) = o(x)$. Далее,

$$H(s) = \frac{1}{\zeta(s)} \{-\zeta'(s) - \zeta^2(s) + 2\gamma\zeta(s)\} = F(s)\,G(s),$$

где

$$F(s) = \frac{1}{\zeta(s)} = \sum \frac{a_n}{n^s}, \quad a_n = \mu(n), \tag{6.2}$$

$$G(s) = -\zeta'(s) - \zeta^2(s) + 2\gamma\zeta(s) = \sum \frac{b_n}{n^s}, \tag{6.3}$$

так что $b_n = \log n - d(n) + 2\gamma$, где $d(n)$ есть число делителей числа n **). Таким образом, принимая соотношение (12.11.4), имеем

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = M(x) = o(x), \tag{6.4}$$

$$B(x) = \sum_{n \leqslant x} b_n = \sum_{n \leqslant x} \log n - \sum_{n \leqslant x} d(n) + 2\gamma \sum_{n \leqslant x} 1.$$

Первая входящая в $B(x)$ сумма есть $x \log x - x + O(\log x)$; вторая согласно известному результату, относящемуся к „проблеме Дирихле о делителях" ***), равна

$$x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x});$$

*) См. Hardy and Wright, 252, 344 и сл,

**) Там же, 249.

***) Там же, 262.

третья же есть $x+O(1)$. Следовательно,

$$B(x)=O(\sqrt{x}). \tag{6.5}$$

Но из равенства $H(s)=F(s)\,G(s)$, т. е. $\sum \frac{c_n}{n^s}=\sum \frac{a_n}{n^s}\sum \frac{b_n}{n^s}$, следует, что

$$C(x)=\sum_{n\leqslant x} c_n=\sum_{mn\leqslant x} a_m b_n=\sum_{m\leqslant x} a_m \sum_{n\leqslant \frac{x}{m}} b_n=\sum_{m\leqslant x} a_m B\left(\frac{x}{m}\right).$$

Здесь (1) $B(x)$ имеет ограниченное изменение на каждом конечном интервале $(1, X)$; (2) $A(x)=o(x)$ (в силу (6.4)); (3) $B(x)=O(\sqrt{x})$ (в силу (6.5)); наконец, (4) $a_m=O(1)$. Тем самым выполнены условия (а), (б), (в 2) и (г 2) теоремы 267, и, значит, $C(x)=o(x)$. Таким образом, асимптотический закон распределения простых чисел есть следствие соотношения (6.4) и тем более — сходимости ряда $\sum \frac{\mu(n)}{n}$ *).

Здесь мы воспользовались второй формой теоремы 267. В качестве примера на применение теоремы Аксера в ее первоначальной форме докажем, что из (C, —1) следует (I). Несколько более обще мы докажем следующее:

Теорема 268. *Если ряд $\sum a_n$ сходится к s и $na_n>-H$, то он суммируем* (I) *к* s.

Действительно, тогда (принимая $s=0$)

$$\sum_{n\leqslant x} na_n=o(x), \quad \sum_{n\leqslant x} n\,|a_n|=\sum_{n\leqslant x} na_n-2\sum_{n\leqslant x} na_n^-=O(x) \tag{6.6}$$

и, следовательно, по теореме 267,

$$\sum_{n\leqslant x} na_n\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)=o(x), \tag{6.7}$$

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{n}{x}\left[\frac{x}{n}\right]a_n=\sum_{n\leqslant x} a_n+o(1)=o(1).$$

В качестве второго примера рассмотрим тот случай, когда $a_n=\frac{\mu(n)}{n}$. Тогда первое из соотношений (6.6) совпадает с (6.4), а второе тривиально,

---

*) См. сноску на стр. 460. В свою очередь, из асимптотического закона распределения простых чисел следует, что $\sum \frac{\mu(n)}{n}=0$; Landau, Handbuch, 591—593.

так что на основании теоремы 267 получаем (6.7). Но

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{mn \leqslant x} \mu(n) = \sum_{q \leqslant x} \sum_{n \mid q} \mu(n) = 1,$$

поскольку внутренняя сумма равна 1 при $q = 1$ и 0 при $q \neq 1$. Поэтому из (6.7) следует, что

$$x \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = o(x),$$

т. е. что ряд $\sum \frac{\mu(n)}{n}$ сходится к нулю. Таким образом, этот факт является элементарным следствием соотношения (6.4).

Приложение V

ДВЕ ТЕОРЕМЫ КАРТРАЙТ *)

1. Если $\sum a_n = s$ (A, p), т. е. если

$$\sum a_n e^{-yn^p} \to s \tag{1.1}$$

при $y \to 0$, то $\sum a_n = s$ (A, q), т. е.

$$\sum a_n e^{-yn^q} \to s \tag{1.2}$$

для всякого положительного $q < p$, для которого ряд (1.2) сходится при $y > 0$. Здесь мы докажем это, притом в более полной форме и в сопровождении теоремы противоположного характера.

Если $y = re^{i\theta}$ и соотношение (1.1) выполняется равномерно в угле

$$-\frac{1}{2}\pi < \alpha_1 \leqslant \theta \leqslant \alpha_2 < \frac{1}{2}\pi, \tag{1.3}$$

то будем писать

$$\sum a_n = s \quad (\mathrm{A},\ p,\ \alpha_1,\ \alpha_2). \tag{1.4}$$

Мы докажем следующие предложения.

Теорема 269. *Если*

$$p > 0, \quad q = kp, \quad 0 < k < 1, \tag{1.5}$$

выполняется соотношение (1.4) *и ряд* $\sum a_n e^{-yn^q}$ *сходится для* $y > 0$, *то*

$$\sum a_n = s \quad (\mathrm{A},\ q,\ \beta_1,\ \beta_2) \tag{1.6}$$

для

$$-\frac{1}{2}\pi + k\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha_1\right) < \beta_1 < \beta_2 < \frac{1}{2}\pi - k\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha_2\right). \tag{1.7}$$

---

*) M. L. Cartwright, *PLMS* (2), **31** (1930), 81—96 (в этой работе принят другой метод доказательства).

Теорема 270. *Если*

$$p > 0, \quad q = kp, \quad k > 1, \tag{1.8}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > \pi\left(1 - \frac{1}{k}\right) \tag{1.9}$$

и выполняется соотношение (1.4), *то при условиях* (1.7) *выполняется также* (1.6).

Сделаем несколько предварительных замечаний.

(1) В теореме 269 $0 < q < p$, причем она содержит как частный случай теорему, приведенную в начале параграфа. Сходимость ряда $\sum a_n e^{-yn^q}$ для $y > 0$ приходится здесь требовать. В теореме же 270 $q > p$. Сходимость ряда $\sum a_n e^{-yn^p}$ для $y > 0$, подразумеваемая в соотношении (1.1), влечет сходимость ряда $\sum a_n e^{-yn^q}$, так что последнюю не нужно требовать в виде особого предположения.

(2) Очевидно, область (β_1, β_2), предписываемая неравенствами (1.7), всегда заключена внутри $\left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$. При $k < 1$ имеем

$$-\frac{1}{2}\pi + k\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha_1\right) - \alpha_1 = -(1-k)\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha_1\right) < 0,$$

так что $-\frac{1}{2}\pi + k\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha_1\right) < \alpha_1$, и, аналогично, $\frac{1}{2}\pi - k\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha_2\right) > \alpha_2$. Таким образом, (β_1, β_2) может простираться за пределы интервала (α_1, α_2) в обе стороны: угол суммируемости в заключении теоремы шире, чем в предположении. Если принять $\alpha_1 = \alpha_2$, то предположение теоремы будет требовать выполнения соотношения (1.1) лишь вдоль одного луча.

Если же $k > 1$, то

$$-\frac{1}{2}\pi + k\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha_1\right) > \alpha_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\pi - k\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha_2\right) < \alpha_2,$$

так что (β_1, β_2) лежит строго внутри (α_1, α_2), и угол суммируемости в заключении теоремы меньше, чем в предположении. Условие (1.9) равносильно требованию выполнения неравенства

$$-\frac{1}{2}\pi + k\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha_1\right) < \frac{1}{2}\pi - k\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha_2\right)$$

и существенно для справедливости заключения. Все это находится в согласии с общим принципом, высказанным в § 4.12. Если $q < p$, то метод (A, q) менее мощен, чем метод (A, p), и потому его „применимость“ менее вероятна; но если он все же применим, то оказывается более эффективным.

2. Нам потребуется лемма относительно преобразования Фурье функции e^{-x^k}.

Теорема 271. *Пусть* $k>0$, $\frac{\pi}{2k}=\lambda$, $x=re^{i\theta}$ *и*

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-t^k}\cos xt\,dt$$

для положительных x. *Тогда* (1) *аналитическая функция, определяемая этим интегралом, регулярна для* $|\theta|<\lambda$, (2) $F(x)=O(1)$ *для малых* x *и* (3) $F(x)=O\left(\frac{1}{r^{1+k}}\right)$ *для больших* x, *причем и* (2) *и* (3) *равномерны в любом угле* $|\theta|\leqslant\lambda-\varepsilon<\lambda$.

Если $k>1$, то $F(x)$ есть целая функция и утверждения (1) и (2) тривиальны. Если $k=1$, то $F(x)=\frac{1}{1+x^2}$, причем интеграл сходится для $|\mathfrak{J}(x)|<1$. Наконец, если $k<1$, то интеграл для $F(x)$ сходится лишь при вещественных x. Однако во всех этих случаях мы имеем

$$F(x)=\frac{1}{x}\int e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^k}\cos t\,dt,$$

сперва для положительных x, а затем при $\cos k\theta>0$, т. е. для $|\theta|<\lambda$. Отсюда

$$|F(x)|\leqslant\frac{1}{r}\int e^{-\left(\frac{t}{r}\right)^k\cos k(\lambda-\varepsilon)}dt$$

для $|\theta|\leqslant\lambda-\varepsilon$, так что утверждение (2) справедливо для $k>0$.

Далее, для положительных x

$$xF(x)=x\int e^{-t^k}\cos xt\,dt=k\int e^{-t^k}t^{k-1}\sin xt\,dt=$$

$$=\frac{k}{2i}\int e^{-t^k}t^{k-1}e^{ixt}\,dt-\frac{k}{2i}\int e^{-t^k}t^{k-1}e^{-ixt}\,dt=xF_1(x)-xF_2(x).$$

Предполагая еще, что x положительно, имеем

$$xF_1(x)=\frac{k}{2ix^k}\int e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^k}t^{k-1}e^{it}\,dt;$$

интеграл в правой части можно брать вдоль луча $t=\rho e^{i\varphi}$, с малым положительным φ. Тогда он сходится абсолютно и равномерно для x, заключенных в любом угле $|\theta|\leqslant\lambda-\varphi-\eta<\lambda-\varphi$, и, следовательно, представляет $xF_1(x)$ в угле $|\theta|<\lambda-\varphi$. Отсюда

$$x^{k+1}F_1(x)\to\frac{k}{2i}\int_0^{\infty e^{i\varphi}}t^{k-1}e^{it}\,dt=\frac{\Gamma(1+k)}{2i}e^{\frac{1}{2}k\pi i},$$

когда x стремится к бесконечности, равномерно в каждом угле $|\theta| \leqslant \lambda - \varphi - \eta$. Аналогично, интегрируя по лучу, проходящему ниже вещественной оси, получим, что

$$2ix^{k+1}F_2(x) \to \Gamma(1+k)\, e^{-\frac{1}{2}k\pi i},$$

равномерно в тех же углах. Следовательно, справедливо и утверждение (3).

3. Переходим к доказательству теорем 269 и 270. Имеем

$$(3.1)\qquad e^{-yn^q} = \frac{2}{\pi}\int F(t)\cos\left(y^{\frac{1}{k}}n^p t\right)dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int F(t)\,e^{iYt}\,dt + \frac{1}{\pi}\int F(t)\,e^{-iYt}\,dt,$$

где $y > 0$ и $Y = y^{\frac{1}{k}}n^p$. Если $t = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi$ и $-\pi \leqslant \varphi_2 \leqslant 0$, то $\arg(-iYt)$ и $\arg(iYt)$ заключены между $-\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi$ соответственно для $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$ и $\varphi_2 \leqslant \varphi \leqslant 0$. Если также

$$(3.2)\qquad |\varphi_1| < \lambda - \varepsilon, \quad |\varphi_2| < \lambda - \varepsilon,$$

то из теоремы 271 и теоремы Коши следует, что (3.1) можно заменить на

$$(3.3)\qquad e^{-yn^q} = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} F(t)\,e^{iYt}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{C_2} F(t)\,e^{-iYt}\,dt,$$

где C_1 и C_2 обозначают соответственно лучи $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$. При этом равенство (3.3), доказанное пока лишь для $y > 0$, оказывается справедливым для комплексных $y = re^{i\theta}$ и φ_1, φ_2, удовлетворяющих условиям (3.2), и

$$(3.4)\qquad -\frac{1}{2}\pi \leqslant -\frac{1}{2}\pi + \frac{\theta}{k} + \varphi_1 \leqslant \frac{1}{2}\pi, \quad -\frac{1}{2}\pi \leqslant \frac{1}{2}\pi + \frac{\theta}{k} + \varphi_2 \leqslant \frac{1}{2}\pi$$

(вместо $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant \varphi_2 \leqslant 0$). Тем более оно верно, если

$$(3.5)\qquad \alpha_1 \leqslant -\frac{1}{2}\pi + \frac{\theta}{k} + \varphi_1 \leqslant \alpha_2, \quad \alpha_1 \leqslant \frac{1}{2}\pi + \frac{\theta}{k} + \varphi_2 \leqslant \alpha_2,$$

а φ_1 и φ_2 удовлетворяют условиям (3.2).

Примем пока без доказательства, что при $\beta_1 \leqslant \theta \leqslant \beta_2$ можно выбрать $\varphi_1 = \varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(\theta)$ так, чтобы выполнялись условия (3.2).

и (3.5). Пусть $\tau = \exp\left\{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) i\right\}$ и $\delta > 0$. Тогда

(3.6)
$$\sum a_n e^{-yn^q - \delta\tau n^p} = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \sum a_n e^{-n^p z_1} F(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{C_2} \sum a_n e^{-n^p z_2} F(t)\, dt = \chi_1 + \chi_2,$$

где

$$z_1 = \delta\tau - i y^{\frac{1}{k}} t, \quad z_2 = \delta\tau + i y^{\frac{1}{k}} t,$$

в предположении, что суммирование под знаками интегралов законно.

Положим $z_1 = \delta\tau + Z_1$. Тогда $\arg Z_1$ заключен в (α_1, α_2) и z_1 заключено в угле $D(\delta)$ с вершиной $\delta\tau$ и сторонами, образующими с положительной вещественной полуосью углы α_1 и α_2. Таким образом, при фиксированных δ и y ряд $\sum a_n e^{-n^p z_1}$ равномерно сходится на луче $t = \varphi_1$, и

$$\int_{C_1} |F(t)|\, dt$$

сходится. Это показывает, что почленное интегрирование в χ_1 законно, и так же может быть обосновано почленное интегрирование в χ_2.

Далее, функция $f_p(z) = \sum a_n e^{-n^p z}$, по предположению, равномерно непрерывна в $D(0)$, и потому в силу теоремы 31

$$f_q(y) = \sum a_n e^{-yn^q} = \lim_{\delta \to 0} \sum a_n e^{-yn^q - \delta\tau n^p} = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} f_p(-i y^{\frac{1}{k}} t) F(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{C_2} f_p(i y^{\frac{1}{k}} t) F(t)\, dt,$$

если ряд $\sum a_n e^{-yn^q}$ сходится (что, как было отмечено в § 1, приходится специально требовать лишь если $q < p$ и $k < 1$).

Наконец, $f_p(-i y^{\frac{1}{k}} t)$ и $f_p(i y^{\frac{1}{k}} t)$ равномерно стремятся к s, когда $y \to 0$ в угле $\beta_1 \leqslant \theta \leqslant \beta_2$, а $|t|$ ограничено, и равномерно ограничены в этом угле для всех $|t|$; интегралы же

$$\int_{C_1} |F(t)|\, dt, \quad \int_{C_2} |F(t)|\, dt$$

ограничены и равномерно сходятся для φ_1 и φ_2, удовлетворяющих условиям (3.2). Следовательно,

$$f_q(y) \to \frac{s}{\pi}\left(\int_{C_1} + \int_{C_2}\right) F(t)\, dt = \frac{2s}{\pi} \int_0^\infty F(t)\, dt = s$$

равномерно для $\beta_1 \leqslant \theta \leqslant \beta_2$.

Остается обосновать наше допущение о возможности выбрать φ_1 и φ_2 так, чтобы выполнялись условия (3.2) и (3.5); при этом можно принять $\varepsilon=0$. Относительно $\varphi_1=\varphi_1(\theta)$ нам нужно показать, что его можно выбрать так, чтобы

$$-\frac{\pi}{2k}<\varphi_1<\frac{\pi}{2k}, \quad \alpha_1+\frac{1}{2}\pi-\frac{\theta}{k}\leqslant\varphi_1\leqslant\alpha_2+\frac{1}{2}\pi-\frac{\theta}{k}.$$

Но это заведомо возможно, если

$$\alpha_1+\frac{1}{2}\pi-\frac{\theta}{k}<\frac{\pi}{2k}, \quad -\frac{\pi}{2k}<\alpha_2+\frac{1}{2}\pi-\frac{\theta}{k},$$

т. е.

$$-\frac{1}{2}\pi+k\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha_1\right)<\theta<\frac{1}{2}\pi+k\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha_2\right),$$

и, тем более, если $\beta_1\leqslant\theta\leqslant\beta_2$. Таким образом, φ_1, и аналогично φ_2, действительно может быть выбрано надлежащим образом.

4. Небесполезно привести еще краткий перечень основных свойств функции $F(x)$; теорема 271 содержит лишь минимум, необходимый для доказательства теорем 269 и 270. При $k>1$

$$F(x)=\frac{1}{k}\sum\frac{(-1)^m}{(2m)!}\Gamma\left(\frac{2m+1}{k}\right)x^{2m} \tag{4.1}$$

есть целая функция. Она обладает асимптотическим разложением

$$\sum\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\Gamma(mk+1)\sin\frac{1}{2}mk\pi\cdot\frac{1}{x^{mk+1}}, \tag{4.2}$$

применимым в секторах $|\arg x|<\lambda$ и $|\arg(-x)|<\lambda$. При $k=2$, 4, 6, ... этот ряд тождественно обращается в нуль, и $F(x)$ для больших x в указанных секторах экспоненциально мала, а ее нули все вещественны. В остающихся секторах она во всех случаях экспоненциально велика. Экспоненциальные приближения можно найти методом перевала.

При $k<1$ интеграл для $F(x)$ сходится лишь при вещественных x; однако ряд (4.2) сходится, и $F(x)=\frac{1}{x}G\left(\frac{1}{x^k}\right)$, где $G(w)$ — целая функция. В этом случае ряд (4.1), теперь расходящийся, асимптотически представляет функцию $F(x)$ для малых x с $|\arg x|<\lambda$.

Если $0<k\leqslant 2$, то $F(x)>0$ для положительных x.

Более полные сведения, а также литературные ссылки можно найти в работах: Pólya, *MM*, **52** (1923), 185—188; Wright, *JLMS*, **10** (1935), 286—293, и *PTRS*, **238** (1940), 423—451, и **239** (1946), 217—232.

5. В заключение, несколько слов о применении метода (A, q) к рядам Фурье. Основной здесь является

Теорема 272. *Метод* (A, q) F-*эффективен для каждого* q.

Доказательство основывается на следующем обобщении обычной теоремы о суммируемости (A) или (A, 1):

Теорема 273. *Если* $f(t)$ *удовлетворяет условию* l_c *для* $t=\theta$ *) *и* $-\frac{1}{2}\pi<\alpha_1<\alpha_2<\frac{1}{2}\pi$, *то ряд Фурье функции* $f(t)$ *для* $t=\theta$ *суммируем* $(A, 1, \alpha_1, \alpha_2)$ *к* c. *В частности, это верно, с* $c=f(\theta)$, *для почти всех* θ.

Доказательство, аналогичное обычному доказательству суммируемости (A), мы предоставляем читателю **). Теорема 272 вытекает отсюда как следствие. Мы можем выбрать α так, чтобы

$$0<\frac{1}{2}\pi-q\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)<\frac{1}{2}\pi$$

(для чего нужно только взять α достаточно близким к $\frac{1}{2}\pi$). Тогда рассматриваемый ряд Фурье, по теореме 273, суммируем $(A, 1, -\alpha, \alpha)$, следовательно, по теореме 269, он суммируем $(A, q, -\beta, \beta)$, где

$$0<\beta<\frac{1}{2}\pi-q\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right).$$

В частности, он суммируем (A, q).

*) То есть условию (1.2) Приложения II.

**) Нужно только показать, что если

$$K(y, t)=\frac{1}{2}+\sum e^{-ny}\cos nt=\frac{1-e^{-2y}}{2(1-2e^{-y}\cos t+e^{-2y})},$$

$$y=u+iv, \quad v=u\operatorname{tg}\chi, \quad |\chi|\leqslant\chi_0<\frac{1}{2}\pi,$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|t\frac{\partial K}{\partial t}\right|dt<H,$$

где H зависит лишь от χ_0. См. Приложение II.

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ РЕДАКТОРА

С. Б. Стечкин

МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ С. Н. БЕРНШТЕЙНА И В. РОГОЗИНСКОГО

1. Введение.

В Приложении II рассмотрены некоторые применения теории суммирования расходящихся рядов к теории рядов Фурье. Однако для ряда методов суммирования исторический процесс был обратным. Эти методы сперва были определены и изучены как методы суммирования *рядов Фурье*, а затем уже были рассмотрены их свойства, как методов суммирования *произвольных числовых рядов*. К числу таких методов можно отнести методы Римана, Валле-Пуссена и отчасти Абеля-Пуассона. Имеется целый ряд других методов суммирования, возникших аналогичным образом. Среди них по простоте и изяществу выделяются методы, впервые рассмотренные В. Рогозинским и С. Н. Бернштейном.

Пусть $f(t)$ — суммируемая функция с периодом 2π и

$$T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt+b_n\sin nt=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)$$

— ее ряд Фурье. Положим

$$s_n(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kt+b_k\sin kt \quad (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

так что $s_n(t)$ представляют собой частичные суммы ряда Фурье $T(t)$.

Рассмотрим простейшие линейные комбинации сумм $s_n(t)$ с одним и тем же номером n и с различными аргументами. Именно, зададим последовательность положительных и стремящихся к нулю чисел $\{\alpha_n\}$ и положим

$$p_n(t,\ \alpha_n)=\frac{1}{2}\{s_n(t+\alpha_n)+s_n(t-\alpha_n)\}. \tag{1.1}$$

Это определение доставляет нам метод суммирования рядов Фурье, который будем называть методом Бернштейна-Рогозинского. Свойства такого метода суммирования всецело зависят от выбора определяющей его последовательности $\{\alpha_n\}$. Оказывается, что при надлежащем выборе чисел $\{\alpha_n\}$:

а) последовательность $p_n(t,\ \alpha_n)$ сходится при $n\to\infty$ почти всюду к $f(t)$ для любой $f\in L$ (иными словами, рассматриваемый метод F-эффективен [1]);

[1]) См. стр. 443.

б) последовательность $p_n(t, \alpha_n)$ равномерно сходится к $f(t)$, если эта функция непрерывна.

В. Рогозинский изучал сначала методы (1.1) для случая

$$\alpha_n = \frac{q\pi}{2n}, \tag{1.2}$$

где q — целое нечетное число. Затем он обобщил некоторые свои результаты на методы (1.1), для которых

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.3}$$

С. Н. Бернштейн рассмотрел случай

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2n+1}, \tag{1.4}$$

а также общий случай (1.3).

2. Определение методов (БР, α_n). Как нетрудно подсчитать, имеем

$$p_n(t, \alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} A_n(t) \cos k\alpha_n. \tag{2.1}$$

Эта формула позволяет перенести данное выше определение методов суммирования Бернштейна-Рогозинского на произвольные числовые ряды. Именно, будем говорить, что *ряд $\sum u_n$ суммируем методом* (БР, α_n) *к значению s, если последовательность*

$$p_n(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} u_k \cos k\alpha_n \tag{2.2}$$

при $n \to \infty$ сходится и имеет пределом s. При выполнении этих условий будем писать

$$\sum u_n = s \quad (\text{БР}, \alpha_n). \tag{2.3}$$

Методы (БР, α_n) принадлежат к общему классу методов суммирования, определяемых формулой

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \varphi(k\alpha_n), \tag{2.4}$$

где $\varphi(n)$ — заданная функция. В тех случаях, где это представляется возможным, мы будем доказывать теоремы для общих преобразований вида (2.4) и получать отсюда результаты для методов (БР, α_n) как следствия.

3. Регулярность методов (БР, α_n). Прежде всего возникает вопрос, при каких ограничениях на последовательность $\{\alpha_n\}$ соответствующий метод (БР, α_n) регулярен. Мы начнем с рассмотрения этого вопроса для общих преобразований вида (2.4).

Теорема I. *Пусть функция $\varphi(u)$ определена для всех $u \geqslant 0$ и удовлетворяет условию Липшица:*

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| \leqslant K |u_1 - u_2|. \tag{3.1}$$

Если ряд $\sum u_n$ *сходится и имеет сумму* s,

$$\alpha_n \geqslant 0, \quad \alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.2}$$

и t_n *определяется формулой* (2.4), *то*

$$t_n \to s\varphi(0). \tag{3.3}$$

Здесь и в дальнейшем мы будем обозначать через s_n частичные суммы ряда $\sum u_n$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Положим для $k < n$

$$\Delta_k(n) = \varphi(k\alpha_n) - \varphi((k+1)\alpha_n). \tag{3.4}$$

Применяя к (2.4) преобразование Абеля, получаем

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} s_k \Delta_k(n) + s_n \varphi(n\alpha_n). \tag{3.5}$$

В силу (3.1) и (3.2)

$$|\Delta_k(n)| \leqslant K|\alpha_n| = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.6}$$

равномерно для $k < n$. Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta_k(n)| + |\varphi(n\alpha_n)| = \sum_{k=0}^{n-1} O\left(\frac{1}{n}\right) + O(1) = O(1). \tag{3.7}$$

Кроме того, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k(n) + \varphi(n\alpha_n) = \varphi(0). \tag{3.8}$$

Соотношения (3.6), (3.7) и (3.8) показывают, что выполняются все условия теоремы 1*) с $\delta_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $\delta = \varphi(0)$, откуда и следует (3.3).

Итак, при выполнении условий (3.1), (3.2) и

$$\varphi(0) = 1 \tag{3.9}$$

преобразование (2.4) определяет регулярный метод суммирования. Для методов (БР, α_n) можно получить более полный результат.

Теорема II. *Для того чтобы метод* (БР, A_n) *был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы* A_n *имели вид*

$$A_n = 2\pi Q_n + \alpha_n, \tag{3.10}$$

где Q_n — *целые числа и* $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

*) Номера в ссылках на теоремы основного текста книги даны арабскими цифрами.

Достаточность этих условий сразу вытекает из теоремы I, так как $\cos k\,A_n = \cos k\alpha_n$ и функция $\varphi(u) = \cos u$ удовлетворяет условиям (3.1) и (3.9).

Остается обнаружить их необходимость. Для этого запишем $p_n(\alpha_n)$ в форме, аналогичной (3.5):

$$p_n(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n-1} s_k \{\cos k\,A_n - \cos(k+1)\,A_n\} + s_n \cos n\,A_n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} s_k.$$

В силу теоремы 2 для регулярности метода необходимо прежде всего, чтобы $c_{n,0} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е.

$$\cos A_n \to 1.$$

Отсюда вытекает, что числа A_n имеют вид (3.10) и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее,

$$(3.11) \qquad \sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n-1} |\cos k\,A_n - \cos(k+1)\,A_n| + |\cos n\,A_n|,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\cos k\alpha_n - \cos(k+1)\,\alpha_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\sin(k+\theta_k)\,\alpha_n| \cdot |\alpha_n| \quad (0<\theta_k<1).$$

Это выражение представляет собой интегральную сумму Римана для функции $|\sin u\alpha_n|$ на интервале $(0, n\alpha_n)$. Поэтому при $n \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\sin(k+\theta_k)\,\alpha_n|\,|\alpha_n| \sim \int_0^{n\alpha_n} |\sin u|\,du.$$

Отсюда видно, что если $n\alpha_n \neq O(1)$, то суммы (3.11) не ограничены в совокупности, и метод (БР, α_n) не регулярен. Теорема доказана.

Таким образом, в силу периодичности и четности функции $\cos u$ представляют интерес лишь те методы (БР, α_n), для которых

$$\alpha_n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \alpha_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

В дальнейшем мы всегда предполагаем эти условия выполнёнными.

4. Суммируемость (БР, α_n) и сходимость. При каких ограничениях на последовательность $\{\alpha_n\}$ метод (БР, α_n) эквивалентен сходимости (т. е. суммирует те и только те ряды, которые сходятся)? Частичный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема III. *Пусть*

$$(4.1) \qquad 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{K}{n},$$

где $K < \frac{\pi}{3}$. *Тогда метод* (БР, α_n) *эквивалентен сходимости.*

Как будет видно из доказательства, это предложение является теоремой типа Мерсера (ср. §§ 5.9, 5.10 основного текста книги). Установим предварительно следующее общее предложение:

Теорема IV. *Пусть треугольная матрица*

$$\|c_{n,k}\| \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

определяет регулярный метод суммирования (T):

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} s_k,$$

для которого выполняются условия

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = 1 \tag{4.2}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} |c_{n,k}| \leqslant \gamma |c_{n,n}| \tag{4.3}$$

для всех достаточно больших n, где $\gamma < 1$.

Тогда метод (T) *эквивалентен сходимости.*

В силу (4.2) достаточно показать, что из $\tau_n \to 0\ (n \to \infty)$ следует $s_n \to 0\ (n \to \infty)$.

Мы разобьем доказательство на 2 этапа: 1) доказательство ограниченности чисел s_n и 2) доказательство соотношения $s_n \to 0\ (n \to \infty)$.

1) Положим

$$K_n = \max_{k=0,1,\ldots,n-1} |s_n|.$$

Тогда в силу условия $\tau_n \to 0\ (n \to \infty)$

$$|\tau_n| \leqslant \frac{1-\gamma}{2} K_n |c_{n,n}|\ ^{*)} \tag{4.4}$$

для всех достаточно больших n.

Имеем

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} s_k + c_{n,n} s_n,$$

откуда

$$s_n = -\frac{1}{c_{n,n}} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} s_k + \frac{\tau_n}{c_{n,n}}. \tag{4.5}$$

---

*) Заметим, что в силу (4.2) и (4.3)

$$1 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| \leqslant (1+\gamma) |c_{n,n}|.$$

Поэтому для всех номеров n, для которых одновременно выполняются условия (4.3) и (4.4), и, в частности, для всех достаточно больших n

$$|s_n| \leqslant \frac{1}{|c_{n,n}|} \sum_{k=0}^{n-1} |c_{n,k}| K_n + \frac{|\tau_n|}{|c_{n,n}|} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma K_n + \frac{1-\gamma}{2} K_n = \frac{1+\gamma}{2} K_n < K_n.$$

Отсюда для $n \geqslant n_0$

$$K_{n+1} = K_n,$$

т. е. последовательность $\{s_n\}$ ограничена.

2) Положим

$$M_n = \sup_{k>n} |s_k|$$

и зафиксируем номер ν. Тогда в силу (4.5) для всех достаточно больших n

$$|s_n| \leqslant \frac{1}{|c_{n,n}|} \sum_{k=1}^{\nu} |c_{n,k}| K_\nu + \frac{1}{|c_{n,n}|} \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |c_{n,k}| M_\nu + \frac{|\tau_n|}{|c_{n,n}|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1-\gamma}{4} M_\nu + \gamma M_\nu + \frac{1-\gamma}{4} M_\nu = \frac{1+\gamma}{2} M_\nu,$$

так как в силу регулярности метода (T) $c_{n,k} \to 0$, если $n \to \infty$ и k фиксировано, $\tau_n \to 0$ $(n \to \infty)$ и $|c_{n,n}| \geqslant \frac{1}{1+\gamma}$. Итак,

$$M_n \leqslant \frac{1+\gamma}{2} M_\nu,$$

для $n \geqslant n_0(\nu)$, откуда следует, что $M_n \to 0$ $(n \to \infty)$, т. е. $s_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Теорема доказана.

Теорема III является частным случаем только что установленного предложения. В самом деле, нуждается в проверке лишь условие (4.3). Но если $K < \frac{\pi}{3}$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} |c_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n-1} |\cos k\alpha_n - \cos(k+1)\alpha_n| =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \{\cos k\alpha_n - \cos(k+1)\alpha_n\} = 1 - \cos n\alpha_n$$

и

$$|c_{n,n}| = \cos n\alpha_n.$$

Поэтому

$$\frac{1}{|c_{n,n}|} \sum_{k=0}^{n-1} |c_{n,k}| = \frac{1-\cos n\alpha_n}{\cos n\alpha_n} \leqslant \frac{1-\cos K}{\cos K} < \frac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = 1,$$

и, следовательно, условие (4.3) выполнено.

Как показывает более обстоятельное рассмотрение, теорема III справедлива для всех $K < \frac{\pi}{2}$ и уже несправедлива для $K = \frac{\pi}{2}$.

5. Суммируемость (БР, α_n) и суммируемость (C, 1). Исследуем теперь зависимости между методами (БР, α_n) и суммируемостью (C, 1). Как и в п. 3, мы начнем с доказательства общих предложений для средних вида (2.4).

Теорема V. *Пусть функция $\varphi(u)$ определена для всех $u \geqslant 0$ и имеет производную $\varphi'(u)$, удовлетворяющую условию Липшица. Если*

$$\sum u_n = s \quad (C,\ 1), \tag{5.1}$$

$$\alpha_n \geqslant 0, \quad \alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{5.2}$$

и

$$T_n = t_n - (s_n - s)\,\varphi(n\alpha_n), \tag{5.3}$$

где t_n определяется с помощью (2.4), *то*

$$T_n \to s\varphi(0). \tag{5.4}$$

В дополнение к обозначению (3.4) положим

$$\Delta_k^2(n) = \Delta_k(n) - \Delta_{k+1}(n) \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-2).$$

С помощью теоремы о среднем значении непосредственно убеждаемся, что

$$\Delta_k(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ и } \Delta_k^2(n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{5.5}$$

равномерно для $k < n$.

Дважды применяя преобразование Абеля, получаем

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,\sigma_k \Delta_k^2(n) + n\sigma_{n-1}\Delta_{n-1}(n) + s_n \varphi(n\alpha_n), \tag{5.6}$$

где σ_k — средние арифметические частных сумм ряда $\sum u_n$. Положим в этой формуле $u_0 = 1$, $u_k = 0$ для $k > 0$. Тогда $s_k \equiv 1$ и $\sigma_k \equiv 1$, и (5.6) принимает вид

$$\varphi(0) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,\Delta_k^2(n) + n\Delta_{n-1}(n) + \varphi(n\alpha_n). \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7)

$$T_n - s\varphi(0) = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,\Delta_k^2(n)\,(\sigma_k - s) + n\Delta_{n-1}(n)\,(\sigma_{n-1} - s).$$

Проверим, что для этого преобразования выполнены все условия теоремы 4. В силу (5.5) достаточно установить, что

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\,|\Delta_k^2(n)|+n\,|\Delta_{n-1}(n)|\leqslant C.$$

И действительно, согласно (5.5)

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\,|\Delta_k^2(n)|+n\,|\Delta_{n-1}(n)|\leqslant H\left\{\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k+1}{n^2}+\frac{n}{n}\right\}\leqslant 2H.$$

Таким образом, $T_n-s\varphi(0)\to 0$, и теорема доказана.

Теорема VI. *Пусть выполнены все условия теоремы* V *и, кроме того,*

$$s_n=O(\lambda_n),\quad \varphi(n\alpha_n)=o\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

или

$$s_n=o(\lambda_n),\quad \varphi(n\alpha_n)=O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right),$$

где $\lambda_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$.

Тогда $t_n\to s$.

Достаточно заметить, что при выполнении условий этой теоремы

$$(s_n-s)\,\varphi(n\alpha_n)=o(1).$$

Итак, если выполняются условия теорем V и VI, то метод (2.4) не слабее метода (C, 1).

Для всякого ряда $\sum u_n$ суммируемого (C, 1), выполняется соотношение $s_n=o(n)$ (см. теорему 46). Поэтому, в частности, справедлива

Теорема VII. *Пусть выполнены все условия теоремы V и, кроме того,*

$$\varphi(n\alpha_n)=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.8}$$

Тогда $t_n\to s\varphi(0)$, *т. е. метод* (2.4) *не слабее метода* (*C*, 1).

Для методов (БР, α_n) можно получить более полный результат. Именно, имеет место следующая

Теорема VIII. *Для того чтобы метод* (БР, α_n), *где* $\alpha_n\to 0$, *был не слабее метода* (C, 1), *необходимо и достаточно, чтобы* α_n *имели вид*

$$\alpha_n=\frac{q_n\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{5.9}$$

где q_n — *целые нечетные числа и* $q_n=O(1)$.

Необходимость. Если метод (БР, α_n) не слабее метода (C, 1),то он и подавно регулярен, откуда в силу теоремы II и условия $\alpha_n \to 0$ следует, что $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Покажем теперь, что если метод (БР, α_n) не слабее метода (C, 1), то

$$\cos n\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.10}$$

Заметим, что оценку $s_n = o(n)$ для всего класса рядов, суммируемых (C, 1), нельзя улучшить. Иными словами, какова бы ни была дана последовательность $\{\lambda_n\}$, для которой $\lambda_n \neq O\left(\frac{1}{n}\right)$, найдется ряд $\sum u_n$, суммируемый (C, 1) и такой, что

$$\lim_{n\to\infty} |s_n \lambda_n| = \infty. \tag{5.11}$$

Допустим, что условие (5.10) не выполняется, и положим $\lambda_n = \cos n\alpha_n$. Тогда, согласно только что сделанному замечанию, найдется ряд $\sum u_n$, суммируемый (C, 1), для которого выполняется соотношение (5.11). Покажем, что этот ряд не суммируется (БР, α_n). Действительно, согласно теореме V,

$$p_n(\alpha_n) = (s_n - s)\cos n\alpha_n + s + O(1) = s_n \cos n\alpha_n + O(1) = \\ = s_n\lambda_n + O(1).$$

Здесь s — (C, 1)-сумма ряда $\sum u_n$. Но в силу (5.11)

$$p_n(\alpha_n) \neq O(1),$$

откуда и вытекает, что рассматриваемый ряд не суммируется (БР, α_n). Итак, условие (5.10) необходимо.

Остается только заметить, что из необходимости условий $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ и (5.10) немедленно следует необходимость всех условий теоремы. Именно, (5.10) показывает, что α_n имеют вид

$$\alpha_n = \frac{q_n\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где q_n — целые нечётные числа, а условие $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ влечет $q_n = O(1)$.

Достаточность условий очевидна в силу теоремы VII, и наша теорема полностью доказана.

Можно также указать условия, при которых метод (БР, α_n) не сильнее метода (C, 1). Мы ограничимся доказательством простейшей теоремы такого рода.

Теорема IX. *Метод* $\left(БР, \frac{\pi}{2n}\right)$ *эквивалентен методу* (С, 1).

В силу предшествующей теоремы достаточно установить, что суммируемость $\left(БР, \frac{\pi}{2n}\right)$ влечет суммируемость (С, 1). Для этого запишем $p_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ согласно (5.6) в форме

$$p_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\sigma_k \Delta_k^2(n) + n\sigma_{n-1}\Delta_{n-1}(n),$$

где теперь

$$\Delta_k(n) = \cos\frac{k\pi}{2n} - \cos\frac{(k+1)\pi}{2n}, \quad \Delta_{n-1}(n) = \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

и

$$\Delta_k^2(n) = \Delta_k(n) - \Delta_{k+1}(n).$$

Убедимся, что для этого преобразования выполняются условия теоремы IV. Нуждается в проверке лишь условие (4.3). Имеем согласно (5.7)

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\Delta_k^2(n) = 1 - n\Delta_{n-1}(n) = 1 - n\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Отсюда, так как $\Delta_k^2(n) < 0$,

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\,|\,\Delta_k^2(n)\,| = n\sin\frac{\pi}{2n} - 1.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{n\Delta_{n-1}(n)}\sum_{k=0}^{n=2}(k+1)\,|\,\Delta_k^2(n)\,| = \frac{n\sin\frac{\pi}{2n} - 1}{n\sin\frac{\pi}{2}} \to \frac{\frac{\pi}{2}-1}{\frac{\pi}{2}} < 1.$$

Итак, применима теорема IV, которая показывает, что $\sigma_n \to 0$, если $p_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \to 0$, а это и нужно было доказать.

Любопытно отметить, что малейшее изменение последовательности $\{\alpha_n\}$ нарушает эквивалентность методов (БР, α_n) и (С, 1). Например, справедлива такая

Теорема X. *Метод* $\left(БР, \frac{\pi}{2n+1}\right)$ *сильнее метода* (С, 1).

Для доказательства достаточно построить ряд, суммируемый $\left(БР, \frac{\pi}{2n+1}\right)$ и не суммируемый (С, 1). Как показывает несложный подсчет, в качестве такого ряда может служить $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n \cdot n$.

6. Применения методов (БР, α_n) к рядам Фурье. Установленные выше предложения позволяют исследовать ряд вопросов о суммировании рядов Фурье методами (БР, α_n). Мы начнем с установления достаточных условий F-эффективности этих методов в смысле Приложения II.

Теорема XI. *Если*

$$\alpha_n = \frac{q_n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n \log n}\right), \tag{6.1}$$

где q_n — *целые нечетные числа и* $q_n = O(1)$, *то метод* (БР, α_n) F-*эффективен.*

Как известно, для любой суммируемой функции $f(t)$ почти всюду

$$s_n(t) = o(\log n) \text{ *)}. \tag{6.2}$$

Далее, так как в силу теоремы VI для всех t, для которых выполняется условие (6.2), метод (БР, α_n), удовлетворяющий условиям теоремы, не слабее метода (C, 1) и метод (C, 1) F-эффективен, то условия теоремы достаточны для F-эффективности.

Переходим к изучению суммируемости (БР, α_n) рядов Фурье от непрерывных функций. Введем следующее определение. Будем говорить, что некоторый метод суммирования (T) *перманентен*, если он конечнострочный и преобразованные суммы ряда Фурье равномерно сходятся к $f(t)$ для любой непрерывной функции $f(t)$. Стоит отметить, что понятие регулярности метода не совпадает с понятием перманентности. Метод суммирования может быть регулярным, но не перманентным, и наоборот.

Теорема XII. *При выполнении всех условий теоремы* XI *метод* (БР, α_n) *перманентен.*

Это вытекает из того, что для непрерывной функции $f(t)$ условие (6.2) выполняется равномерно относительно t и что для такой функции ее ряд Фурье равномерно суммируем (C, 1). В самом деле, как нетрудно проверить, если для ряда $\sum u_n(t)$ все условия теоремы VI выполняются равномерно относительно t, то этот ряд равномерно суммируется (БР, α_n).

Можно показать, что условия теоремы и необходимы для перманентности метода (БР, α_n).

7. Приближение функций с помощью сумм Бернштейна-Рогозинского. Рассмотрим вопрос о зависимости между наилучшими приближениями непрерывных функций посредством тригонометрических полиномов и их приближениями с помощью сумм Бернштейна-Рогозинского.

*) См., например, Зигмунд, § 2.73.

Через $E_n = E_n(f)$ будем обозначать наилучшее приближение непрерывной периодической функции $f(t)$ посредством тригонометрических полиномов порядка n, а через $R_n(f, \alpha_n)$ — отклонение этой функции от ее суммы Бернштейна-Рогозинского. Иными словами, мы полагаем

$$E_n(f) = \min_{T_n} \max_t |f(t) - T_n(t)|$$

и

$$R_n(f, \alpha_n) = \max_t |f(t) - p_n(t, \alpha_n)|.$$

Кроме того, как обычно, $\omega_2(\delta, f)$ есть модуль гладкости функции $f(t)$, т. е.

$$\omega_2(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_t |\Delta_h^2 f(t)|,$$

где $\Delta_h^2 f(t)$ — вторая конечная разность функции $f(t)$ с шагом h.

Теорема XIII. *Пусть числа α_n имеют вид*

(7.1) $$\alpha_n = \frac{q_n \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n \log n}\right),$$

где q_n — целые нечетные числа и $q_n = O(1)$.
Тогда

(7.2) $$R_n(f, \alpha_n) \leqslant C_1 E_n(f) + \omega_2(\alpha_n, f).$$

Прежде всего заметим, что при выполнении условий теоремы метод (БР, α_n) перманентен (теорема XII). Отсюда вытекает *), что

(7.3) $$\max_t |p_n(t, \alpha_n)| \leqslant K \max_t |f(t)|.$$

Чтобы подчеркнуть зависимость полинома $p_n(t, \alpha_n)$ от функции $f(t)$, мы будем далее писать $p_n(t, \alpha_n; f)$. Очевидно,

(7.4) $$p_n(t, \alpha_n, f_1 + f_2) = p_n(t, \alpha_n, f_1) + p_n(t, \alpha_n; f_2).$$

Пусть тригонометрический полином $T_n^*(t)$ наименее уклоняется от функции $f(t)$ среди всех полиномов порядка n:

(7.5) $$|f(t) - T_n^*(t)| \leqslant E_n.$$

Имеем, используя (7.4),

$$R_n(f) = \max_t |f(t) - p_n(t, \alpha_n; f)| = \max_t |f(t) - p_n(t, \alpha_n; T_n^*) + p_n(t, \alpha_n; f - T_n^*)| \leqslant \max_t |f(t) - p_n(t, \alpha_n; T_n^*)| + \max_t |p_n(t, \alpha n; f - T_n^*)|.$$

*) См., например, Зигмунд, гл. VIII.

Но согласно определению сумм $p_n(t, \alpha_n)$

$$p_n(t, \alpha^n, T_n^*) = \frac{1}{2}\{T_n(t+\alpha_n) - T_n(t-\alpha_n)\};$$

кроме того, согласно (7.3) и (7.4)

$$\max_t |p_n(t, \alpha_n; f - T_n^*)| \leqslant KE_n(f).$$

Отсюда

$$R_n(f) \leqslant KE_n(f) + \max_t |f(t) - T_n^*(t)| + \max_t |\Delta^2_{\alpha_n}(f - T_n^*)| +$$
$$+ \max_t |\Delta^2_{\alpha_n} f| \leqslant C_1 E_n(f) + \omega_2(\alpha_n, f),$$

и теорема доказана.

Эта теорема показывает, что суммы Бернштейна-Рогозинского достаточно хорошо аппроксимируют непрерывные функции. В частности, так как

$$E_n(f) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) \tag{7.6}$$

и, при выполнении условий теоремы XIII,

$$\omega_2(\alpha_n, f) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right), \tag{7.7}$$

то

$$R_n(f) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

ПРИМЕЧАНИЯ

§ 1. Список литературы по методу Бернштейна-Рогозинского приложен в конце примечаний. В. Рогозинский рассмотрел метод $\left(\text{БР}, \frac{\pi}{2n}\right)$ в 1924 г. [10] и общий метод (БР, α_n) в 1925 г. [11]. Первая работа С. Н. Бернштейна [1] появилась в 1930 г.

§ 2. Рассматривались также методы суммирования, для которых $\varphi(n) = (\cos n)^{\varkappa}$ [9, 14].

§ 3. Теорема I доказана Рогозинским. См. [14].

§ 4. Теорема III принадлежит Fekete. См. [11].

Условия теоремы VI слишком ограничительны, однако эта теорема достаточна для наших ближайших целей.

Относительно замечания в конце n° 4 см. [11, 12] и теорему IX.

§ 5. Теорема V принадлежит Рогозинскому [14]. Частный случай $\varphi(n) = \cos u$ установлен Фейером. См. [11].

Теорема VIII (в части достаточности условий) получена Fekete. См. [11].

Теорема IX доказана Рогозинским [11].

Теорема X доказана Ф. И. Харшиладзе [17, 19]. В работе И. Карамата [5] имеется более полный результат. Эта работа содержит ошибки.

§ 6. Теорему XI можно также вывести из теоремы XII, принадлежащей А. Ф. Тиману [15]. Этот автор установил также необходимость условий теоремы.

7. Теорема XIII является обобщением более частного предложения С. Н. Бернштейна [1].

Доказательство оценок (7.6) и (7.7) можно найти в работе С. Б. Стечкина „О порядке наилучших приближений непрерывных функций", *Изв. АН СССР*, сер. матем., **15** (1951), *n*° 3, 219—242.

Рассматривалось также суммирование методом $\left(\text{БР}, \frac{\pi}{2n+1}\right)$ интерполяционных полиномов с равноотстоящими узлами. См. [2] и [18].

ЛИТЕРАТУРА ПО МЕТОДАМ СУММИРОВАНИЯ БЕРНШТЕЙНА-РОГОЗИНСКОГО

1. S. Bernstein, Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques. *C. R. Ac. Sc.*, **191** (1930), стр. 976—979.
2. С. Н. Бернштейн, О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов. *ДАН СССР*, **4** (1934), стр. 1—8.
3. В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций. ГТТИ. М. — Л. (1934), стр. 239—244.
4. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды. ГОНТИ, М. — Л. (1939), § 8.6.
5. И. Карамата, О суммируемости методом С. Н. Бернштейна и некоторых процессах суммирования, связанных с этим методом. *Мат. сб.* **21** (1947), стр. 13—24.
6. И. П. Натансон, О суммировании рядов Фурье по методу С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского. *Труды Ленинградского индустриального института*, № 4, *раздел физ.-мат. наук, вып.* 2 (1937), стр. 39—44.
7. И. П. Натансон, К теории бернштейновского способа суммирования рядов Фурье. *Труды Ленинградского института точной механики и оптики*, **1**, *вып.* 3 (1940), стр. 197—206.
8. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций. ГИТТЛ, М. — Л. (1949), стр. 269—273.
9. И. И. Огиевецкий, О методе суммирования С. Н. Бернштейна. *ДАН СССР*, **76** (1951), стр. 635—638.
10. W. Rogosinski, Über die Abschnitte der Fourierreihen. *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung*, **33**, H 9—12, 2. Abt. (1925), стр. *87—88*.
11. W. Rogosinski, Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen. *M. A.*, **95** (1926), стр. 110—134.
12. W. Rogosinski, Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen. *M. Z.*, **25** (1926), стр. 132—149.
13. W. Rogosinski, Fouriersche Reihen. Samml. Göschen, Berlin — Leipzig, 1930.
14. W. Rogosinski, Abschnittsverhalten bei trigonometrischen und insbesondere Fourierschen Reihen. *M. Z.*, **41** (1936), стр. 75—136.
15. А. Ф. Тиман, Об одном методе приближения непрерывных функций тригонометрическими полиномами. *Изв. АН СССР*, сер. матем. **11** (1947), стр. 263—282.
16. G. H. Hardy and W. W. Rogosinski, *Fourier Series*. (Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, n° 38, Cambr. (1944), § 6.6 — 6.7).
17. Ф. И. Харшиладзе, О методе суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского. *ДАН СССР*, **30** (1941), стр. 692 — 695.
18. Ф. И. Харшиладзе, Об одной теореме акад. С. Н. Бернштейна из теории интерполяций. *Труды института точной механики и оптики*, *вып.* 3 (1940), стр. 207—212.
19. Ф. И. Харшиладзе, О методе суммирования С. Н. Бернштейна. *Мат. сб.* **11** (1942), стр. 121—148.

УКАЗАТЕЛЬ КНИГ

[При цитировании книг, не включенных в этот указатель, приводится их полное название.]

Сокращенное название	Полное название	Первая ссылка
Andersen, Studier	A. F. Andersen, Studier over Cesàro's Summabilitets-methode (Диссертация, Копенгаген, 1921).	стр. 152, § 5.5
Bailey	W. N. Bailey, Generalized hypergeometric series, Кэмбридж, 1935 (Cambridge tracts in mathematics, № 32).	стр. 153, § 5.8
Bohr, Bidrag	H. Bohr, Bidrag til de Diriclet'ske Raekkers Theori (Диссертация, Копенгаген, 1921).	стр. 152, § 5.5
Borel	E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, изд. 2-е, Париж, 1928.	стр. 59, § 2.5
Bromwich	T. J. I'A. Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, изд. 2-е, Кэмбридж, 1926. (При эпизодических ссылках на первое издание 1906 г. пишем: Bromwich (1).)	стр. 36, § 1.1
Dienes	P. Dienes, The Taylor Series, Oxford, 1931.	стр. 84, § 3.2
Ford, Studies	W. B. Ford, Studies on divergent series and summability (University of Michigan Science Series, Нью-Йорк, 1916).	стр. 59, § 2.5
Харди	Г. Х. Харди, Курс чистой математики (перевод с английского), ГИИЛ, Москва, 1949.	стр. 36, § 1.1
Hardy and Riesz	G. H. Hardy and M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Кэмбридж, 1915 (Cambridge tracts in mathematics, № 18).	стр. 121, § 4.9
Hardy and Rogosinski, *HR*.	G. H. Hardy and W. W. Rogosinski, Fourier series, Кэмбридж, 1944 (Cambridge tracts in mathematics, № 38).	стр. 59, § 2.7
Hardy and Wright	G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, изд. 2-е, Оксфорд, 1945.	стр. 121, § 4.10

Продолжение

Сокращенное название	Полное название	Первая ссылка
Hobson, 1 и 2	E. W. Hobson, The Theory of functions of a real variable and the theory of Fourier series, т. 1, изд. 3-е, Кэмбридж, 1927, и т. 2, изд. 2-е, 1926.	стр. 36, § 1.1
Неравенства	Г. Х. Харди, Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа, Неравенства (перевод с английского), ГИИЛ, Москва, 1948.	стр. 348, § 11.17
Ингам	А. Е. Ингам, Распределение простых чисел (перевод с английского), ОНТИ, Москва, 1936.	стр. 58, § 2.2
Knopp	K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, изд. 2-е, Берлин, 1924.	стр. 59, § 2.5
Kogbetliantz	E. Kogbetliantz, Summation des séries et intégrales divergentes par les moyennes arithmétiques et typiques, Париж, 1931 (Mémorial des sciences mathématiques, № 51).	стр. 152, § 5.5
Koksma	J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Берлин, 1936 (Ergebnisse der Mathematik 4, Heft 4).	стр. 154, § 5.17
Landau, Ergebnisse	E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, изд. 2-е, Берлин, 1929.	стр. 153, § 5.9
Landau, Handbuch	E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Лейпциг, 1909 (два тома со сквозной нумерацией страниц).	стр. 58, § 2.2
Lindelöf	E. Lindelöf, Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Париж, 1905.	стр. 427, § 13.1
Littlewood	J. E. Littlewood, Lectures on the theory of functions, Оксфорд, 1943.	стр. 281, § 9.13
Moore, Convergence factors	C. N. Moore, Summable series and convergence factors, Нью-Йорк, 1938 (American Mathematical Society Colloquium Publications, № 22).	стр. 86, § 3.5
Полиа и Сеге	Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа (перевод с немецкого), в двух частях, ОНТИ, Москва, 1937—1938.	стр. 60, § 2.13
Tannery et Molk	J. Tannery et J. Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, в четырех томах, Париж, 1893—1902.	стр. 121, § 4.10

Окончание

Сокращенное название	Полное название	Первая ссылка
Титчмарш, Интегралы Фурье	Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье (перевод с английского), Гостехиздат, Москва, 1948.	стр. 348, § 11.12
Титчмарш, Теория функций	Е. Титчмарш, Теория функций (перевод со второго английского издания), Гостехиздат, Москва, 1951.	стр. 202, сноска
Ватсон	Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций (перевод со второго английского издания), в двух частях, ГИИЛ, Москва, 1949.	стр. 437, сноска
Уиттекер и Ватсон	Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа (перевод с четвертого английского издания), в двух частях, ГТТИ, Ленинград, 1933—1934.	стр. 84, § 2.2
Widder	D. V. Widder, The Laplace transform, Принстон, 1941.	стр. 121, § 4.13
Wiener, The Fourier integral	N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Кэмбридж, 1933.	стр. 389, § 12.1
Зигмунд	А. Зигмунд, Тригонометрические ряды (перевод с английского), ГОНТИ, Москва, 1939.	стр. 59, § 2.7

УКАЗАТЕЛЬ ЖУРНАЛОВ

[При цитировании журналов, не включенных в этот указатель, приводится их полное название.]

Сокращенное название	Полное название	Первая ссылка
AEN	Annales scientifiques de l'École normale supérieure	стр. 84, § 2.2
AM	Acta Mathematica	стр. 59, § 2.5
Annals	Annals of Mathematics	стр. 59, § 2.8
ASF	Acta Societatis sci. Fennicae	стр. 250, § 8.11
AT	Annales de la Faculté des sciences de Toulouse	стр. 247, § 8.10
AUH	Acta litt. ac sci. Univ. Hungaricae (Сегед)	стр. 186, § 6.4
BAMS	Bulletin of the American Mathematical Society	стр. 84, § 3.4
BAP	Bulletin international de L'Académie polonaise (Краков)	стр. 187, §§ 6.5—6.6
BS	Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften (Берлин)	стр. 280, § 9.5
BSM	Bulletin des sciences mathématiques	стр. 152, §§ 5.2—5.3
CR	Comptes rendus de l'Académie des sciences (Париж)	стр. 121, §§ 4.7—4.8
DMJ	Duke Mathematical Journal	стр. 391, § 12.12
DMV	Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung	стр. 305, § 10.4
J de M.	Journal de mathématiques	стр. 247, § 8.10
JIMS	Journal of the Indian Mathematical Society	стр. 187, §§ 6.5—6.6
JLMS	Journal of the London Mathematical Society	стр. 60, § 2.12
JM	Journal für die reine und angewandte Mathematik	стр. 84, § 3.2
MA	Mathematische Annalen	стр. 36, § 1.1
MM	Messenger of Mathematics	стр. 121, §§ 4.7—4.8

Окончание

Сокращенное название	Полное название	Первая ссылка
MTE	Mathematikai és Termész. Értesítö (Будапешт)	стр. 186, § 6.4
MZ	Mathematische Zeitschrift	стр. 86, § 3.7
NA	Nouvelles Annales de Mathématiques	стр. 306, § 10.11
OQJ	Quarterly Journal of Mathematics (Оксфорд)	стр. 187, § 6.11
PCPS	Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	стр. 59, § 2.4
PEMS	Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society	стр. 305, § 10.3
PLMS	Proceedings of the London Mathematical Society	стр. 59, § 2.10 (2)
PMF	Prace matematyczno-fizyczne (Варшава)	стр. 84, § 3.2
PNAS	Proceedings of the National Academy of Science (Вашингтон)	стр. 348, § 11.10
PTRS	Philosophical Transactions of the Royal Society	стр. 59, § 2.5
QJM	Quarterly Journal of Mathematics	стр. 86, § 3.8
RP	Rendiconti del Circolo matematico di Palermo	стр. 152, § 5.6
TAMS	Transactions of the American Mathematical Society	стр. 86, § 3.5 (3)
TCPS	Transactions of the Cambridge Philosophical Society	стр. 37, § 1.5
TMJ	Tôhoku Mathematical Journal	стр. 84, § 3.2
WS	Wiener Sitzungsberichte	стр. 306, § 10.11

32 Зак. 2499. Г. Харди.

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *С. Б. Стечкин* Техн. редакторы *А. Н. Никифорова* и *Е. С. Герасимова*
Корректор *А. Н. Окорокова*

Сдано в производство 10/IV 1951 г. Подписано к печати 17/VII 1951 г. А-06539.
Бумага 60×92$^1/_{16}$=15,8 бум. л.— 31,6 печ. л. Уч.-издат. л. 35,7. Изд. № 1/994.
Цена 29 р. 50 к. Зак. 2499.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
84	4 св.	Картрайту	Картрайт
92	16 св.	$\frac{Q}{Q_{n-r}}$	$\frac{Q_n}{Q_{n-r}}$
152	12 и 13 св.	ω_j	w_j
200	1 сн.	$\int\limits_0^{\frac{1}{y}} d\alpha$	$\int\limits_0^{\frac{1}{y}} d\alpha\,(t)$
300	7 сн.	предположений	новых предположений
492	3 сн.	*вып.* 3	**1**, *вып.* 3

Зак. 2499.