

*Дж. Хединг*

**ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД ФАЗОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ  
(метод ВКБ)**

В книге исследуются асимптотические методы решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих большой параметр, в комплексной плоскости. Это — первая в мировой литературе монография, посвященная специально этим вопросам. Подробно изложен метод, который физики называют методом Цваана. В книге рассматривается в основном одномерное уравнение Шредингера. В дополнении В. Маслова рассматривается многомерный случай. Асимптотические методы применяются к задаче на собственные значения и к задаче о рассеянии.

Книга представляет интерес для математиков, специализирующихся в области дифференциальных уравнений, и для физиков-теоретиков. Она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов университетов, пединститутов и инженерно-физических вузов.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	7
Глава I. Исторический обзор проблемы	9
Глава II. ВКБ-решения	30
Глава III. Явление Стокса	52
Глава IV. Одна точка поворота	73
Глава V. Две точки поворота	99
Глава VI. Приложения к задачам физики	123
Приложение. Связь между рядами и ВКБ-решениями	149
Литература	164
Дополнение I. Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. <i>М. В. Федорюк</i>	168
Дополнение II. Метод ВКБ в многомерном случае. <i>В. П. Маслов</i>	177

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Многие задачи математики и физики сводятся к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих большой параметр. Основным толчком к построению систематической асимптотической теории таких уравнений послужило развитие квантовой механики.

Книга английского математика Дж. Хединга посвящена некоторым аспектам этой теории. Метод, который излагает Дж. Хединг, носит название метода фазовых интегралов; в русской литературе для него приняты термины «метод ВКБ»<sup>1)</sup> или «квазиклассическое приближение».

Хорошо известно, что в разных областях изменения аргумента одно и то же решение дифференциального уравнения может иметь различные асимптотические представления (явление Стокса). Основная трудность заключается не в получении асимптотических формул для различных решений, а в получении асимптотических формул для одного и того же решения, но в разных областях изменения переменной. Для решения этой задачи в случае уравнения второго порядка в настоящей книге построен некоторый алгоритм.

Книга Дж. Хединга является первой в мировой литературе попыткой систематически изложить метод ВКБ и, как всякая первая попытка, не лишена некоторых недостатков. По замыслу автора, книга предназначена в первую очередь для физиков-теоретиков, однако она представляет большой

---

<sup>1)</sup> В связи с названием «метод ВКБ» см. стр. 10 и 11.

интерес и для математиков, занимающихся дифференциальными уравнениями.

Книга печатается с некоторыми сокращениями, относящимися в основном к гл. I; в нескольких местах опущены подробности элементарных выкладок. В русское издание включены два дополнения. Первое из них, написанное переводчиком, содержит краткий обзор асимптотических методов для дифференциальных уравнений высших порядков. Второе дополнение, написанное редактором перевода, излагает другой подход к асимптотическим оценкам, позволяющий обобщить асимптотические формулы на многомерный случай.

*В. П. Маслов,  
М. В. Федорюк*

Москва, 1965 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Нужна большая смелость, чтобы написать первую (хотя бы и небольшую) книгу, посвященную исключительно методу фазовых интегралов, так как — и это просто поразительное явление в такой точной науке, как математика, — развитие этих методов в течение последних 50 лет сопровождалось огромным количеством ошибок, споров и критики. Кроме того, литература по этому предмету содержит самые разнообразные статьи — от работ, лишенных всякой строгости, до строгих и тонких работ; первые едва заслуживают упоминания, а последние не входят в теорию, которую обычно называют методом фазовых интегралов, или методом ВКБ. Поэтому, чтобы написать книгу о методе ВКБ, автор выбрал путь, лежащий между этими двумя крайностями. Автор надеется, что эта книга будет вполне понятной и полезной, поскольку метод ВКБ известен многим, но мало кто действительно владеет этим методом. Кроме того, поскольку область приложения метода ВКБ весьма обширна, автор ограничился тем, что привел несколько наиболее интересных примеров. Основное внимание в этой книге сконцентрировано не на приложениях метода, а на самом методе. Автор надеется в будущем написать более полное математическое исследование по этому же вопросу.

Книга написана с целью показать, что метод ВКБ в действительности является весьма простым и что существует набор вполне четких правил, которые позволяют свободно оперировать этим методом. Однако автору все же не удалось полностью избежать некоторых спорных вопросов,

Далее, автор без всяких колебаний вводит свои собственные обозначения для записи ВКБ-решений, чтобы посредством этого избежать нагромождения определенных интегралов, стоящих под знаком экспоненты, которыми обычно пестрят страницы статей по методам фазовых интегралов. Наконец, автор желает выразить благодарность доктору К. Баддену из лаборатории Кавендиша за множество ценных замечаний и исправлений.

Саутгемптонский университет

*Дж. Хединг*

Август 1961 г.

# Глава I

## ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ПРОБЛЕМЫ

### 1.1. Вводные замечания

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$w' + p(x)w = 0$$

(штрих означает дифференцирование по  $x$ ) легко интегрируется и имеет решение

$$w = \exp\left(-\int p(x) dx\right).$$

С другой стороны, уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$w'' + p(x)w' + q(x)w = 0 \quad (1.1)$$

нельзя так же просто решить. Поскольку многие задачи, возникающие в теоретической физике, приводят к уравнениям второго порядка, необходимо попытаться найти удовлетворительные методы решения таких уравнений.

В некоторых частных случаях, когда  $p$  и  $q$  выбраны специальным образом, уравнение (1.1) приводится к одному из хорошо изученных стандартных уравнений. Например, если  $p = 1/x$ ,  $q = 1 - v^2/x^2$ , то уравнение (1.1) является уравнением Бесселя порядка  $v$ ; если  $p = 0$ ,  $q = -x$ , то уравнение (1.1) является уравнением Эйри. Эти специальные уравнения являются исключительными, поскольку их решения можно выразить через контурные интегралы. Из интегральных представлений решений нетрудно получить решения в виде рядов по возрастающим степеням  $x$ , а также асимптотические решения при больших  $x$  в виде рядов по убывающим степеням  $x$ .

В общем случае нельзя выразить решения уравнения (1.1) через контурные интегралы и нельзя также найти точный вид коэффициентов разложения решения в ряд по степе-

ням  $x$  или в асимптотический ряд по степеням  $1/x$ . Поэтому возникает необходимость в приближенных методах. Метод фазовых интегралов (или метод WKBJ) является достаточно мощным приближенным методом решения уравнений вида (1.1). Откровенно говоря, этот метод ограничивается нахождением только первого члена асимптотического ряда. Однако даже при использовании такого простого приближения возникают значительные трудности. Необходимо их исследовать и привести в порядок с помощью серии правил, которые позволяли бы оперировать с такими приближениями без риска совершить математическую ошибку.

Методы фазового интеграла применяются к уравнению вида

$$w'' + h^2 q(x, h) w = 0, \quad (1.2)$$

где  $h$  — большой параметр, а  $q(x, h)$  — переменная функция  $x$  и  $h$ . Вещественную независимую переменную  $x$  можно заменить комплексной переменной  $z$ . При некоторых условиях на  $q$  приближенные решения этого уравнения имеют вид

$$w = q^{-1/4} \exp(\pm ih \int^z \sqrt{q} dz) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{h}\right) \right], \quad (1.3)$$

где  $O(1/h)$  равномерно по  $z$ , лежащему в некоторых определенных областях плоскости  $z$ . Нули функции  $q(z)$  называются *точками поворота*. Ясно, что формулы (1.3) перестают быть верными вблизи точки поворота из-за того, что в точке поворота эти выражения имеют особенность, так как содержат множитель  $q^{-1/4}$ , в то время как точное решение уравнения (1.2) не имеет особенности и потому конечно в точке поворота. Формулы (1.3) называются решениями, полученными методами фазовых интегралов, или WKBJ-решениями, по именам создателей метода WKBJ: Вентцель, Крамерс, Бриллюэн и Джеффрис. Бейли [2] назвал эти решения «LR-приближениями» в честь Лиувилля и Рэлея. Более того, о названии, данном этим методам, Бейли писал: «Обычай, согласно которому эти методы озаглавлены «WKBJ» или «WKBJ» (или любой другой перестановкой первых трех букв), вызван незнанием истории и неправилен, так как он приводит к вопиющей несправедливости

по отношению к истине». Джеффрис часто называл решения (1.3) «приближениями типа Грина» в честь Грина<sup>1)</sup>.

Цель методов фазовых интегралов — показать, как, зная решение в некоторой области комплексной плоскости  $z$ , продолжить его в более широкую область.

По-видимому, первое применение приближенных решений типа (1.3) принадлежит Карлини (1817 г.), ссылку на работу которого можно найти в книге Ватсона. Карлини рассмотрел некоторое специальное уравнение (которое теперь называется *уравнением Бесселя*) и получил приближенное решение этого уравнения при больших  $n$  и при  $0 < x < n$ . Лиувилль и Грин в 1837 г. построили асимптотические решения для более общих уравнений, но не строго и только в тех областях  $x$ , которые не содержат точек поворота. Грин рассматривал распространение продольных волн в канале с переменным сечением в предположении, что длина волны мала по сравнению с глубиной канала и что ширина канала мало меняется на расстояниях порядка длины волны. С помощью асимптотических решений он показал, что приливные волны в таком канале переносят энергию без потерь на отражение от берегов канала.

В этой связи следует также упомянуть имя Хорна, хотя, строго говоря, он не относится к числу создателей метода ВКБ. Его обычно считают первым, кто внес принципиальный вклад в теорию существования асимптотических решений на интервале, свободном от точек поворота. Заметим также, что, как указывает Джеффрис [1], Хорн не нашел наиболее удобной формы для главного члена ВКБ-решения.

## 1.2. Явление Стокса

Сэр Джордж Габриэль Стокс (1819—1903 гг.) был бы еще более знаменит, если бы он понял, что, не будь скачкообразных изменений произвольных постоянных, входящих в асимптотические решения некоторых дифференциальных уравнений, отражение волн от неоднородных сред (таких, как ионосфера) было бы невозможно. Стокс столкнулся с этим явлением, изучая бесселевы функции,

<sup>1)</sup> В советской литературе принят термин «метод ВКБ», который и будет употребляться нами в этой книге.— *Прим. перев.*



и, по-видимому, боролся с этой трудностью несколько лет, прежде чем наконец добрался до сути этого явления. 19 марта 1857 г. Стокс [4] писал своей знакомой: «Я делаю сейчас то, что, полагаю, Вы не позволили бы мне делать, если бы были моей женой. Я сижу до трех часов утра и упорно борюсь с математическими трудностями. Несколько лет назад я взялся за интеграл Эйри и после долгих мучений привел его к виду, который легко вычисляется. Но была одна трудность, которую я не мог преодолеть, хотя я столько трудился над ней, что почти заболел, и наконец вынужден был сдаться и признать, что ничего не могу с ней поделать. Я вернулся к этому несколько дней назад и после двух или трех дней борьбы, сидя до трех часов утра в последний день, я наконец преодолел эту трудность».

В своей первой статье по этому вопросу Стокс рассмотрел уравнение

$$w'' - 9zw = 0 \quad (1.4)$$

в комплексной плоскости  $z$ . (В настоящее время множитель 9 обычно опускают.) Он построил два линейно независимых решения этого уравнения в виде рядов по степеням  $z$ , которые при малых  $z$  можно использовать для вычисления общего решения уравнения (1.4), которое является линейной комбинацией этих рядов. Далее, Стокс получил асимптотические разложения при больших  $z$  для двух линейно независимых решений уравнения (1.4) (главные члены этих разложений пропорциональны правой части равенства (1.3) при  $q = -9z$  и  $h = 1$ ). Он заметил, что если в некоторой области изменения  $\arg z$  общее решение является линейной комбинацией двух основных асимптотических решений, то в соседней области изменения  $\arg z$  коэффициенты линейной комбинации могут быть совсем другими. Действительно, Стокс обнаружил, что коэффициенты линейной комбинации изменяются скачком при переходе через некоторые линии (являющиеся лучами  $\arg z = \text{const}$ ), которые теперь называются *линиями Стокса*. Наконец, используя интегральное представление решения уравнения (1.4) во всей комплексной плоскости  $z$ , он показал, как две фиксированные константы (возникающие при разложении точного решения в ряд по степеням  $z$ ) связаны с соответствующими

(изменяющимися) константами асимптотического решения. В приложении мы покажем с помощью простого метода (частично следуя Стоксу [3]), как все эти константы связаны друг с другом. Это может быть сделано также с помощью контурных интегралов (см., например, книгу Баддена [4], гл. XV). Явление Стокса и уравнение Эйри рассматриваются нами в гл. III.

Причина, в силу которой асимптотические формулы для непрерывного решения могут быть разрывными, заключается, коротко говоря, в том, что асимптотическая формула всегда содержит некоторую погрешность, которая в некоторой области изменения параметра может сделаться большей, чем главный член асимптотики. Асимптотические ряды, как правило, расходятся, но тем не менее при больших  $|z|$  их можно просуммировать с большой степенью точности, если учесть только первые члены ряда, такие, что каждый последующий член меньше предыдущего. Порядок ошибки равен величине первого отброшенного члена. Поэтому наиболее точный результат мы получим, если возьмем сумму членов ряда от первого до самого малого (см. Уиттекер и Ватсон, гл. VIII).

Во второй статье Стокс рассматривал константы для асимптотических разложений решений уравнения Бесселя; соответствующие результаты получены в разд. 3.6.

В нашей книге эти изменения коэффициентов асимптотических разложений учитываются с помощью некоторых простых правил, основанных на использовании множителей, называемых *постоянными Стокса*. Мы рассмотрим постоянные Стокса только для уравнений Эйри, Бесселя и Вебера; для конфлюентной гипергеометрической функции Уиттекера они были недавно найдены Хедингом [6], который в серии статей [2, 3, 4] вычислил также постоянные Стокса для уравнения  $n$ -го порядка

$$\omega^{(n)} = (-1)^n z^m \omega.$$

Следует указать также, что асимптотические разложения можно теперь суммировать с помощью более мощных методов, основанных на введении *множителей сходимости*. Эти методы можно изучить в статьях Дингля; однако и в этом современном методе явление Стокса все еще играет существенную роль.

### 1.3. Приближения ВКБ

Первые применения приближений ВКБ были весьма сумбурными и начали систематически применяться только после появления работ Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна и Джеффриса. В 1912 г. Рэлей, исследуя распространение волн в слоистой среде, фактически получил приближенное решение уравнения

$$\varphi'' + k^2(x)\varphi = 0 \quad (k'(0) = 0) \quad (1.5)$$

в виде

$$\varphi = k^{-1/2} \cos \left( pt - \int k(x) dx \right). \quad (1.6)$$

Это решение является линейной комбинацией стандартных ВКБ-решений [см. (1.3)]. При изучении колебаний мембраны Рэлею потребовалось найти приближенное решение в окрестности точки поворота  $x = 0$ , где приближение (1.6) неприменимо. Фактически он заменил  $k^2(x)$  при малых  $x$  линейной функцией и заметил, что для решения, экспоненциально убывающего в области  $k^2(x) < 0$ , имеет место полное отражение. Однако Рэлей не продолжил свои исследования и поэтому упустил возможность стать создателем аппарата для изучения эффектов, связанных с точками поворота.

По-видимому, первым систематически исследовать эти эффекты начал Ганс в 1915 г. (см. разд. 1.6) в связи с исследованием распространения света в медленно меняющейся слоистой среде. В 1920 г. Фаулер и др., изучая аэродинамику вращающегося снаряда, пришли к системе третьего порядка, состоящей из двух однородных дифференциальных уравнений. Используя метод Хорна, эти авторы построили стандартные ВКБ-решения для уравнения  $y'' + My = 0$ .

Джеффрис [1], рассматривая функции Матье в связи с изучением свободных колебаний воды в эллиптическом озере, впервые систематизировал ВКБ-решения, хотя его интересовали главным образом эффекты, связанные с точками поворота. В этой статье, как и во многих последующих своих статьях на эту тему, Джеффрис рассматривал уравнение вида

$$w'' = (h^2\chi_0 + h\chi_1 + \chi_2)w \equiv h^2qw, \quad (1.7)$$

где  $\chi_0, \chi_1, \chi_2$  — вещественные функции, а  $h$  — большой параметр. Он предлагал использовать интеграл

$$\int V\chi_0 \left( 1 + \frac{\chi_1}{2h\chi_0} \right) dx$$

вместо  $\int \sqrt{q} dx$  [см. (1.3)] и часто приводил исключительный пример уравнения (см. [3]), для которого его интеграл дает существенно лучший результат, чем более обычный интеграл  $\int \sqrt{q} dx$ . Однако в этой книге мы будем рассматривать только  $\int \sqrt{q} dx$ , ограничиваясь при этом такими функциями  $q$ , для которых условие применимости приближения (1.3) выполнено (см. разд. 2.4). Похоже, что в физических задачах это приближение всегда применимо, и нам кажется, что пример Джеффриса представляет чисто математический интерес.

Если ограничиться главным членом ВКБ-решения, то ошибка будет иметь порядок  $O(1/h)$  по сравнению с главным членом асимптотики [см. (1.3)]. Это ничего не говорит нам о численной величине ошибки, но для наших целей такой вид ошибки вполне достаточен. Олвер [3] исследовал величину ошибки для ВКБ-решений (или приближений Лиувилля — Грина, как он их называет) и применил полученные им результаты к функциям параболического цилиндра и функциям Бесселя большого порядка.

#### 1.4. Равномерная асимптотика в комплексной плоскости

Рассмотрим некоторое фиксированное ВКБ-решение, которое является экспоненциально малым (по  $h$ ) в некоторой области комплексной плоскости  $z$ . Это решение определяется заданием ветвей  $\sqrt{q}$  и  $\sqrt[4]{q}$  и пути интегрирования в формуле (1.3). Ошибка имеет при этом порядок  $O(1/h)$  по сравнению с главным членом. Будем теперь изменять  $z$ . Пока ошибка будет иметь тот же порядок, наше приближение будет применимо. Однако известно, что  $z$  может попасть в такую область, в которой ошибка по-прежнему будет иметь порядок  $O(1/h)$ , но уже по сравнению с другим ВКБ-решением. Последнее решение будет экспонен-

циально расти (по  $h$ ), и ошибка станет экспоненциально большой по сравнению с исходным решением. Другими словами, мы продолжили решение в область, в которой исходное приближение больше неприменимо. Линии, при переходе через которые происходит такая метаморфоза, называются *сопряженными линиями Стокса* <sup>1)</sup>.

В областях, ограниченных этими линиями, асимптотика решений является равномерной.

Джеффрис [3] изучил равномерную асимптотику решений в окрестности точки поворота, применяя приближение ВКБ и более точное приближение с помощью функций Эйри (см. разд. 1.11 нашей книги), но не исследовал систематически сопряженных линий Стокса. Олвер [2] рассмотрел уравнение с двумя точками поворота, точное решение которого выражается через функции Вебера. Он получил асимптотические разложения для решений, пригодные во всей комплексной области, также с помощью приближений ВКБ и приближений, использующих функции Эйри. Хединг [7] рассмотрел уравнение с произвольным числом точек поворота и изучил области, в которых асимптотика является равномерной, для приближений ВКБ и для более общих приближений.

Многие авторы, применяющие методы фазовых интегралов, не выясняют, в каких областях асимптотика решений равномерна по  $z$ , что является крупным дефектом их исследований. Например, Бадден в своем подробном обзоре по методам ВКБ в книге [3] «Радиоволны в ионосфере» указал на это слабое место, но тем не менее последовал за большинством авторов и не смог выяснить, в каких областях построенные им асимптотические приближения являются равномерными.

### 1.5. Асимптотические ряды

Работа Хорна послужила основой для математического исследования асимптотических рядов, связанных с решениями дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр. Шлезингер, Биркгоф [1], Тамаркин, Территин и другие <sup>2)</sup> построили асимптотические решения

<sup>1)</sup> В оригинале anti-Stokes lines. —Прим. перев.

<sup>2)</sup> См. также работы Вазова [4, 5].—Прим. перев.

линейных дифференциальных уравнений и однородных систем линейных дифференциальных уравнений в областях, не содержащих точек поворота. Лангер, Олвер и их современники занимались в основном уравнениями и системами, имеющими точки поворота. Подробную библиографию по этому вопросу можно найти в статье Олвера [2].

Пожалуй, нельзя все же сказать, что все эти работы образуют часть того, что обычно понимается под методом фазовых интегралов, хотя некоторые их аспекты также были разработаны для решения физических проблем, а некоторые — для чисто вычислительных целей.

### 1.6. Формулы связи

Рассмотрим уравнение (1.2), где функция  $q(x)$  вещественна при вещественных  $x$ ,  $q(0) = 0$ ,  $q'(0) \neq 0$ . Пусть  $q(x) < 0$  при  $x > 0$ . Из (1.3) следует, что при  $x > 0$  одно, из ВКБ-решений экспоненциально растет при  $h \rightarrow +\infty$ , а другое экспоненциально убывает (всюду в дальнейшем мы будем называть их соответственно *растущим* и *убывающим* решениями). При  $x < 0$  оба решения осциллируют, и физически их можно интерпретировать как волны, распространяющиеся вдоль оси  $x$ ; вместо экспонент можно использовать синус и косинус от соответствующего аргумента (который при  $x < 0$  вещественен).

Задача, которую необходимо исследовать, такова. Дана линейная комбинация двух ВКБ-решений при  $x < 0$ .

Очевидно, что при  $x = 0$  ВКБ-приближение непригодно. Каков же вид решения при  $x > 0$ ? Ответ на этот вопрос дают *формулы связи*. Оказывается, что вид решения при переходе через точку поворота  $x = 0$  существенно изменяется и синусы и косинусы гладко переходят в экспоненты.

Эта проблема с различной степенью строгости и ясности рассматривалась в ряде работ (см., например, Джеффрис и Джеффрис, «Методы математической физики», или Морс и Фешбах, «Методы теоретической физики», а также ряд книг по квантовой механике, например Кембл, «Основные принципы квантовой механики», или Бом, «Квантовая теория»<sup>1)</sup>).

<sup>1)</sup> См. также Ландау и Лифшиц, «Квантовая механика». — Прим. перев.

Частично этот вопрос затронул еще Рэлей, изучая колебания мембраны, но первым, кто серьезно занялся этим вопросом, был, по-видимому, Ганс, который исследовал распространение света в медленно меняющейся слоистой среде. Заменяя функцию  $q$  линейной в окрестности точки  $x = 0$ , Ганс выразил решения полученного уравнения через функции Бесселя порядка  $1/3$  (функции Эйри тогда еще не были стандартными). Если среда достаточно медленно меняется, то асимптотические выражения для бесселевых функций можно использовать в области, в которой линейная функция не слишком отличается от  $q$ . Ганс сшил эти асимптотические формулы с ВКБ-решениями, пригодными по разные стороны от точки поворота. При этом вследствие явления Стокса по разные стороны от точки поворота приходится брать различные комбинации двух ВКБ-решений. Такая процедура всегда приводит к полному отражению, которое, по-видимому, происходит в точке  $x = 0$ . Метод Ганса эквивалентен сшиванию трех различных асимптотических решений, пригодных в трех перекрывающихся областях  $x < 0$ ,  $x \approx 0$ ,  $x > 0$ . Эта теория не была, однако, сформулирована в форме, которая позволяла бы легко перейти к рассмотрению более общих функций  $q(x)$ .

Первые систематические формулы связи были получены Джеффрисом, который исследовал эту задачу, не зная о работах Ганса (см. разд. 4.5.).

После статьи Джеффриса первыми работами по методу ВКБ были работы, в которых исследовалось волновое уравнение Шредингера. Следует упомянуть работы Вентцеля и Крамерса. Они исследовали задачи о собственных значениях для уравнения Шредингера. Голдстейн рассмотрел формулы связи для ВКБ-решений в случае, когда  $q$  имеет кратный нуль (см. разд. 4.10). Цваан, по-видимому, был первым, кто рассмотрел уравнение в комплексной плоскости  $z$ , чтобы получить формулы связи. Он рассматривал функции  $q(x)$ , вещественные при вещественных  $x$ . Краткое изложение его диссертации можно найти в одной из статей Лангера [1]. Цваан продолжил убывающее ВКБ-решение из точек, лежащих слева от точки поворота, в точки, лежащие справа от точки поворота (на вещественной оси), обходя точку поворота по пути, лежащему в комплексной области, и получил этим методом формулы связи. Лангер

указал на некоторые недостатки такого подхода. Кембл использовал те же идеи, но более строго.

Фарри, был, по-видимому, первым, кто серьезно исследовал явление Стокса. Он попытался обойтись без приближений Экерслея (см. разд. 1.9), заявив, что «никогда не было напечатано никаких сколько-нибудь понятных и убедительных доводов, которые показывали бы пригодность этих приближений». В своей статье Фарри выяснил, что простая точка поворота — это такая точка в комплексной плоскости, из которой выходят три линии Стокса и три сопряженные линии Стокса. Он показал, что изменение коэффициента при убывающем решении должно иметь место на линиях Стокса, и немедленно получил из этого результата формулы связи Джеффриса. Однако основное правило, полученное Фарри, было плохо сформулировано. Следует заметить, что этот подход лежит в основе настоящей книги.

Керр в своей книге «Распространение коротких радиоволн» и Фрихафер использовали метод Фарри.

### 1.7. Потенциальная яма

Пусть  $q(x)$  вещественна при вещественных  $x$ , имеет два простых вещественных нуля  $x_1, x_2$  (причем  $x_1 < x_2$ ) и положительна при  $x_1 < x < x_2$ . Рассмотрим уравнение (1.2) и поставим следующие граничные условия:  $\omega(-\infty) = \omega(+\infty) = 0$ . Такая задача называется задачей о *потенциальной яме*. Эта задача имеет дискретный спектр, и собственные значения являются уровнями энергии, если уравнение (1.2) возникло из уравнения Шредингера. Если  $q(x) = a^2 - x^2$ , то решения уравнения (1.2) выражаются через функции параболического цилиндра.

Применяя формулу связи Джеффриса (см. разд. 4.5) к точкам поворота  $x_1, x_2$ , получаем

$$\exp\left(2ih \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q} dx\right) = -1, \quad (1.8)$$

или

$$2h \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q} dx = (2n + 1)\pi, \quad (1.9)$$



где  $n$  — целое число. Данхем получил этот результат с помощью метода Цваана. Но все эти методы предполагают, что ВКБ-приближение пригодно между точками  $x_1$ ,  $x_2$ . Если же это не так, то для гармонического осциллятора уравнение (1.9) все же дает правильный результат, в чем можно убедиться, если воспользоваться точным решением задачи в этом случае. Слейтер в своей книге назвал это «интересным фактом», но мало кто смог получить этот результат только с помощью методов фазовых интегралов. Биркгоф [2] исследовал этот специальный случай; более простое доказательство можно найти в настоящей книге в разд. 5.5.

Эккарт недавно получил аналог уравнения (1.9) в своей книге «Гидродинамика океанов и атмосферы». Сделав замечание, что «в последние годы возродился интерес к методу ВКБ и были получены новые, заслуживающие внимания результаты», Эккарт тем не менее получил уравнение (1.9) «с помощью очень простой идеи». Он просто подсчитал число нулей собственной функции на интервале  $(x_1, x_2)$ . Рассматривая ВКБ-решение как волну, отражающуюся от точек  $x_1$  и  $x_2$ , и подсчитывая число волн, укладывающихся на интервале  $(x_1, x_2)$ , он сразу пишет, что

$$h \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{q} dx = (n + \Delta) \pi,$$

где  $\Delta$  остается неопределенным;  $\Delta$  представляет собой сдвиг фазы после отражения. Эта «простая идея», увы, совсем не обоснована<sup>1)</sup>, так как ВКБ-решения непригодны вблизи точек  $x_1$  и  $x_2$ , и потому невозможно подсчитать число нулей  $w(x)$ . Далее Эккарт применяет ВКБ-приближения (но без множителя  $q^{-1/4}$ ) к некоторым задачам, которые возникают при исследовании термоклина и термосферы, а также в лучевой теории.

Белл рассмотрел собственные значения уравнения Шредингера с потенциалом  $|x^m|$  и сравнил полученное им приближение с точным решением для потенциала  $|x|$ . Титчмарш рассмотрел уравнение Шредингера с потенциалом  $x^4$ .

<sup>1)</sup> На наш взгляд, этот факт может быть обоснован. — Прим. перев.

Аулук и Котхари рассмотрели ограниченный гармонический осциллятор, т. е. осциллятор, колеблющийся в пространстве между двумя идеально отражающими стенками, причем точки поворота лежат между стенками. Они не пользовались методом ВКБ, поскольку в этом случае задача имеет точное решение. Но, ссылаясь на асимптотические разложения решения, приведенные Уиттекером и Ватсоном, они не поняли, что учли коэффициент при убывающем решении, рассматривая сумму растущего и убывающего решений. Необходимо с большой осторожностью учитывать этот коэффициент. Так, Аулук и Котхари потеряли множитель  $1/2$ . Эта задача рассматривается в разд. 6.3.

Фарри изучал нормировку ВКБ-решения для приближенного гармонического осциллятора, используя метод, который является усовершенствованием известных ранее методов. В нашей книге эти вопросы рассмотрены в разд. 5.6.

Первые работы по атому водорода были весьма плохими. Это произошло по той причине, что функция  $q$ , входящая в радиальное уравнение Шредингера, имеет особенность при  $r = 0$ , так как электростатический потенциал атома водорода равен  $-e^2/r$ . Лангер [2] ссылается на 6 авторов, которые использовали известное в этом случае точное решение, для того чтобы затем применить метод ВКБ и получить наилучший результат. Все это, конечно, говорит не в пользу метода. Например, Янг и Уленбек просто воспользовались уравнением (1.9), ошибочно полагая, что решение радиального уравнения Шредингера, убывающее слева от ближайшей к точке  $r = 0$  точки поворота, будет конечным при  $r = 0$ . Полученные ими результаты справедливы лишь при больших значениях орбитального момента  $l$ .

Лангер [2] нашел корректное решение этой задачи. Он показал, что необходимо прежде всего преобразовать уравнение, чтобы правильно учесть особенность при  $r = 0$ . Тогда, если применить метод ВКБ к преобразованному уравнению, мы получим правильный результат (см. разд. 6.4 нашей книги). Приближенные выражения для соответствующих волновых функций можно найти в книге Ландау и Лифшица «Квантовая механика».

### 1.8. Потенциальный барьер

Пусть  $q(x)$  вещественна при вещественных  $x$ , имеет два вещественных нуля  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) и  $q(x) < 0$  при  $x_1 < x < x_2$ . Хартри указал на этот случай, рассматривая распространение радиоволн в изотропной ионосфере. Констатируя, что метод Джеффриса [1] неприменим, когда  $q$  имеет два нуля, Хартри заметил, что если эти нули достаточно удалены друг от друга, то можно применять обычные методы, рассматривая каждый из нулей в отдельности, поскольку ВКБ-решения пригодны между нулями. Хартри, однако, не пытался математически решить эту задачу.

Кембл приводит неполное исследование этого вопроса в своей книге. Гамов [1] рассмотрел прямоугольный потенциальный барьер. В этом случае можно легко найти точное решение, а в качестве граничных условий в точках разрыва потенциала Гамов использовал непрерывность  $\psi$  и  $\psi'$ . Позже Гамов в своей книге [2] «Ядра и ядерные превращения» аналогичным способом исследовал непрерывный потенциальный барьер, применив ВКБ-решения. Об этом исследовании Б. Джеффрис писала, что это «лучший из известных расчетов, однако против него есть серьезные возражения, так как асимптотические решения используются в точках, в которых они обращаются в бесконечность». Одним словом, Гамов вывел свою формулу связи, считая, что ВКБ-решения и их производные непрерывны в точках поворота. Такой подход никак нельзя обосновать. Хотя в рассматриваемом частном случае этот метод и приводит к правильному результату, в остальных случаях он дает неверные результаты, а именно, отличающиеся от истинных некоторыми числовыми множителями. В третьем издании книги Гамова (Гамов и Критчфилд) эти ошибки повторяются, хотя Б. Джеффрис уже указывала на них.

Б. Джеффрис применила формулы связи Джеффриса к обеим точкам поворота и получила правильный ответ с некоторой степенью точности. Однако она использовала модифицированную формулу Джеффриса справа налево, и эта формула является единственной, которая при таком ее использовании дает правильный результат. Поэтому нам кажется, что правильный ответ получен чисто случайно, так как Б. Джеффрис не приводит никаких объяснений, почему

используется именно эта формула связи. Ридбек [1] независимо решил эту же задачу. В нескольких книгах авторы излагают метод Б. Джеффриса, см., например, Мотт и Снеддон, «Волновая механика и ее приложения».

### 1.9. Приложения метода ВКБ

Хартри впервые применил метод ВКБ к изучению изотропной непоглощающей ионосферы, рассмотрев две модели, в которых плотность свободных электронов является соответственно линейной и квадратичной функцией. Он решил эти задачи сначала с помощью лучевых методов, используя стандартные приближения геометрической оптики, а затем аналитически, и нашел соответствующие асимптотические формулы для больших частот. Хартри заметил, что фаза, вычисленная лучевым методом, в обоих случаях отличается на  $\pi/2$  от истинной фазы. Наконец, он исследовал обе модели с помощью формулы связи Джеффриса и получил те же результаты, что и лучевым методом, но уже с поправкой на  $\pi/2$ . По-видимому, Хартри впервые показал, что метод Джеффриса эквивалентен обычной лучевой теории, но учитывает также поправочный фазовый множитель.

Экерслей [1] расширил область применения метода ВКБ и во всех своих последующих работах отстаивал свою точку зрения. В статье, озаглавленной «О связи между лучевой теорией электромагнитных волн и динамикой», он внес нечто новое в теорию распространения волн.

К сожалению, он не привел никаких доказательств, руководствуясь просто успехом некоторых гипотез квантовой механики. Первая гипотеза Планка о движении частицы с классическим импульсом  $p$  может быть представлена в виде

$$\oint p dx = nh, \quad (1.10)$$

где  $n$  — целое число,  $h$  — постоянная Планка. Волновое уравнение Шредингера также приводит к этому результату, если продолжить ВКБ-решения от одной точки поворота  $x_1$  до другой точки поворота  $x_2$  и обратно; формула (1.10) вытекает из однозначности точного решения, если не учитывать изменения фазы при отражении от точек  $x_1$  и  $x_2$ . Экерслей воспользовался этим соображением и применил

его к распространению радиоволн между землей и ионосферой. Он утверждал, что «при вычислении собственных значений этот метод дает такую же точность, как и при использовании старого условия Бора — Зоммерфельда в волновой механике Шредингера». В следующей статье Экерслей [2] учел изменение фазы волны при отражении от ионосферы.

Позже Экерслей и Миллингтон применили методы фазовых интегралов к изучению дифракции радиоволн вокруг сферической земной поверхности. Именно, они вычислили различные виды полей, возникающие в том случае, когда дипольная антенна и приемник расположены над поверхностью земли. Они ввели фазовые множители, возникающие при отражении, сравнив найденное ими решение с точным решением задачи, полученным ранее Ватсоном, и заметили, что сложные математические методы, развитые Ватсоном, имеют реальное физическое значение. Используя формулу связи Джеффриса, они могли бы получить фазовые множители, не прибегая к точному решению.

После опубликования формул связи Джеффриса многие авторы применили их к задачам квантовой механики, но не получили ничего существенно нового. Например, Арно и Бейнс применили приближение Джеффриса и приближение Борна для приближенного вычисления фаз рассеяния электронов.

Букер и Уолкиншоу в статье, озаглавленной «Волновая теория тропосферной рефракции», рассмотрели уравнение, решение которого можно найти методом ВКБ. Хотя их работа была чисто математической, успех был достигнут с помощью физических соображений. Они взяли приближенные решения в виде (1.3) и оправдали введение множителя  $q^{-1/4}$  тем соображением, что «средний поток энергии по вертикали не зависит от высоты и потому энергия сохраняется». Отражение в точке поворота объяснялось ими на основе теории передающих линий; введенный этими авторами «импеданс» является полностью проводящим выше точки поворота и равен бесконечности в самой точке поворота. Интерпретация этого факта Букером и Уолкиншоу такова: в точке поворота имеется пограничная индуктивность, связанная с сохраняющимся полем, лежащим выше. Они замечают: «Изменение фазы на  $\pi/2$  при отра-

жении возникает всегда в том случае, когда передающая система с характеристическим импедансом  $Z$  нагружена индуктивным сопротивлением  $iZ$ . С помощью этого соображения они вводят обычный скачок фазы  $\pi/2$ , что можно оправдать с помощью формулы Джеффриса (см. разд. 4.5).

Обширную работу Бреммера по распространению радиоволн в изотропной и анизотропной ионосфере можно найти в трех статьях [1, 2, 3] и в его книге [4] «Наземные радиоволны». Фридман рассматривал каналы, которые встречаются в теории распространения электромагнитных волн в неоднородной атмосфере, а Аббот — распространение высоких приливов в каналах и реках; оба они использовали метод ВКБ. Секлер и Келлер рассматривали распространение акустических волн в неоднородной среде, используя метод ВКБ, чтобы вычислить собственные значения этой задачи. Вазов [3] рассматривал некоторую задачу адиабатической теории гамильтоновых систем, которая сводится к исследованию системы двух линейных дифференциальных уравнений. Наконец, переведенная на английский язык книга Гольдмана и Кривченкова «Сборник задач по квантовой механике» содержит много интересных примеров, в которых используется так называемое «квазиклассическое приближение». Очевидное отсутствие сколь угодно важного вклада в метод ВКБ, сделанного русскими, подтверждается при прочтении прекрасной книги Бреховских «Волны в слоистых средах» (1957)<sup>1)</sup>.

### 1.10. Следующие члены приближения

ВКБ-решения дифференциального уравнения (1.2) являются просто первыми приближениями. Бреммер [1], [5] часто подчеркивал физический смысл следующих приближений. Рассмотрим область на оси  $Ox$ , свободную от точек поворота и разделенную на большое число тонких однородных слоев (см. разд. 6.5). Тогда распространение волны сопровождается бесконечным числом отражений от границ этих тонких слоев. ВКБ-решение получается в том случае, если пренебречь повторными отражениями. Более высо-

<sup>1)</sup> См., впрочем, работы Днестровского и Костомарова; Маслова; Паташинского, Покровского и Халатникова; Покровского и Халатникова; Федорука. — *Прим. перев.*

кие приближения получаются в том случае, если мы учитываем вклады волн, отразившихся два, три или более раз. Беллман и Калаба [1, 2] и Аткинсон исследовали сходимость рядов, возникающих при учете следующих членов приближения, и показали, что в пределе, когда толщина слоев стремится к нулю, эти ряды удовлетворяют исходному уравнению (1.2).

### 1.11. Приближения, пригодные в точке поворота

Во всех наших предыдущих рассмотрениях точки поворота не входили в область применимости приближенных решений (1.3). Кроме того, формулы связи Джеффриса были получены для областей  $x > 0$  и  $x < 0$ , а в области  $x \approx 0$  использовалось специальное приближенное решение, которое позволяло связать области  $x > 0$  и  $x < 0$ . Хотя этот метод строго обоснован, он является неудовлетворительным с некоторых точек зрения. Лангер [1] в своей опубликованной лекции объяснял, что метод Джеффриса просто сшивает «вместе результаты, что дает более или менее полное представление о решении».

Поэтому Лангер подошел к этой проблеме с более фундаментальной точки зрения, именно, «чтобы сразу получить такое представление, которое было бы пригодно во всей области изменения аргумента». Лангер смог получить приближенное решение уравнения (1.2), содержащее функцию Эйри и пригодное в точке поворота, и такое, что асимптотика этого решения вдали от точки поворота совпадает с асимптотикой, получаемой методом ВКБ (см. уравнение (2.10) и пример 2 в разд. 2.7). Недавно Вазов [3] обсуждал разницу между подходами Лангера и Джеффриса.

Это представление решения, пригодное в точке поворота, является основной темой исследований современных авторов, занимающихся асимптотическими рядами (см. разд. 1.5). Приложения же к физическим задачам изменились значительно меньше, поскольку вычисление собственных значений и коэффициентов отражения не требует знания значения приближенного решения в самой точке поворота. Лангер [3] применил такие решения при исследовании распространения ультракоротких волн в атмосфере, коэффициент преломления которой зависит от высоты. Бенни в задаче

нелинейной теории колебаний в параллельном течении вывел уравнение типа (1.2), но неоднородное. Он решил это уравнение методом вариации постоянных, воспользовавшись при этом известными асимптотическими формулами для решений однородного уравнения. Следуя Лангеру, он использует вместо функций Эйри функции Ханкеля порядка  $1/3$ ; таким образом, Бенни, в сущности, вводит особенности там, где, строго говоря, они в действительности не могут существовать. Такахаси [1, 2] использовал такие же приближения при исследовании дисперсии волн Лява и волн Рэлея в сейсмической теории. Бадден [5] использовал и ВКБ-решения, и решение Лангера при исследовании вопроса о приеме радиосигналов из космоса антенной, помещенной в верхней части ионосферы.

Джеффрис [3] получил приближенное решение в окрестности точки поворота с помощью функций Эйри, но не исследовал область применимости асимптотики и поведение решения в точке поворота. Хединг [7] рассмотрел уравнение (1.2) с произвольным числом точек поворота и показал, что границами областей, в которых применимы ВКБ-решения, являются сопряженные линии Стокса. Олвер [2] исследовал решение в том случае, когда  $q$  имеет ровно два нуля, построил асимптотические ряды по функциям Эйри для решения в окрестности одной точки поворота и указал области, в которых применимы различные полученные им асимптотические представления решений.

### 1.12. Другие приближения

ВКБ-решения являются наиболее общими и наиболее простыми приближенными решениями уравнения (1.2). С другой стороны, ряд авторов внесли различные усовершенствования в этот метод. Например, Иами [1] построил лучшее приближенное решение в окрестности точки поворота, которое сводится к лангеровскому, если некоторый параметр становится большим. Позднее Иами [2] применил свой метод к задаче, связанной с переносом тепла в ламинарном пограничном слое. Йенсен использовал метод Иами при построении асимптотического решения дифференциального уравнения движения симметрично нагруженного тороидального снаряда.



Бейли [1, 2] внес новое усовершенствование, исследуя отражение волн от неоднородной среды. Он заменил ВКБ-решения приближением, пригодным в точке поворота, но не содержащим функции Эйри. Бейли вычислил коэффициенты отражения и обсудил вопрос о дальнейших приближениях, которые могут усовершенствовать его результаты, Хайнс также занимался коэффициентами отражения волн от переменной среды и развил новый метод для решения этой задачи. Моригути рассмотрел изменение фазы при отражении с помощью усовершенствованного метода ВКБ.

До того как было исследовано распространение электромагнитных волн в анизотропной ионосфере (см. разд. 1.14), Форштерлинг составил систему «взаимодействующих» уравнений, которую можно приближенно решить методом вариации постоянных. Гиббонс и Нертни [1] развили метод для решения соответствующей однородной системы таких уравнений, используя решение, аналогичное (1.3); они заменили  $q$  на  $p$ , где  $p$  выбрано таким образом, что формулы (1.3) дают точное решение уравнения. Позднее Гиббонс и Нертни [2] применили метод вариации постоянных, чтобы учесть взаимодействие, описываемое теми членами, стоящими в правой части системы уравнений, которыми они пренебрегали в работе [1].

### 1.13. Полюсы функции $q$

В предыдущих разделах мы учитывали только нули функции  $q$ . Некоторые задачи приводят к функциям  $q$ , имеющим полюсы; этому случаю до сих пор уделялось мало внимания. Гиббонс и Шраг рассмотрели задачу о сшивании ВКБ-решений, пригодных по разные стороны от полюса, в то время как Хединг [1] нашел соответствующие постоянные Стокса для некоторых функций, имеющих полюсы; см. также книгу Баддена [4] (стр. 348—352, 474—481).

### 1.14. Уравнения четвертого порядка

Распространение радиоволн в анизотропной среде описывается уравнениями четвертого порядка. Для больших частот можно пользоваться методом ВКБ, однако математическое обоснование этого метода еще нуждается в дальнейших исследованиях. Букер применил четыре ВКБ-реше-

ния в их простейшей форме при исследовании волновых пакетов и лучей; исследования Бремера по этому вопросу можно найти в его книге [4]. Экерслей [3] впервые применил свой метод фазовых интегралов. Экерслей не приводит никаких доказательств, и его исследование является неудовлетворительным; он не смог показать, что отражение действительно имеет место, поскольку в то время не было получено никаких точных решений таких задач. Ридбек [2] применяет аналогичный метод в теории «магнито-ионного триплетного расщепления»; этот вопрос исследовал также Пфистер. Бадден [1] применил ВКБ-решения в своей теории «предельной поляризации» (распространение характеристических волн к основанию ионосферы); в статье [2] он вычисляет ВКБ-решения в глубине ионосферы, чтобы получить первое приближение и затем с его помощью численно проинтегрировать дифференциальные уравнения на ЭВМ <sup>1)</sup>.

### 1.15. Другие типы уравнений

Метод фазовых интегралов стандартизован на основе уравнения Эйри, и решения, полученные этим методом, приводят к некоторым функциям сравнения, с помощью которых можно изучать точные решения исходного уравнения. Некоторые задачи приводят к более сложным уравнениям сравнения, и если удается решить эти уравнения, чаще всего с помощью контурного интегрирования, то можно исследовать исходные уравнения. Различные примеры такого типа были исследованы в гидродинамике; мы упомянем работы Гейзенберга (она написана в 1924 г. до того, как Гейзенберг всерьез занялся своей матричной теорией квантовой механики), Линь Цзя-цзяо [1], Мексина, Вазова [1, 2], Лангера [4] и Рабенштейна <sup>2)</sup>. Вазов в своей статье [2] писал, что в этих задачах возникают «гораздо более серьезные осложнения, чем в асимптотической теории дифференциальных уравнений второго порядка, встречающихся в квантовой механике». Эти исследования не входят в круг вопросов, рассматриваемых в настоящей книге.

<sup>1)</sup> См. также работы Штюкельберга, Гинзбурга. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Речь идет об уравнении Орра — Зоммерфельда. См. также книгу Линь Цзя-цзяо «Теория гидродинамической устойчивости». — *Прим. перев.*

## Глава II

### ВКБ-РЕШЕНИЯ

#### 2.1. Уравнение Рикатти

ВКБ-решения можно проще всего найти, если преобразовать исходное уравнение с помощью подходящей подстановки. Рассмотрим уравнение

$$\omega'' + h^2 q(z, h) \omega = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $h$  — большой положительный параметр, а функция  $q(z, h)$  такова, что  $\lim_{h \rightarrow +\infty} q(z, h)$  существует при любом фиксированном  $z$ . Полагая

$$\omega = \exp\left(\int^z \varphi dz\right)$$

и подставляя в (2.1), получаем

$$\varphi^2 + \varphi' + h^2 q = 0. \quad (2.2)$$

Пусть  $\varphi$  разлагается в асимптотический ряд

$$\varphi = \varphi_0(z, h)h + \varphi_1(z, h) + \varphi_2(z, h)h^{-1} + \dots, \quad (2.3)$$

где функции  $\varphi_j(z, h)$  таковы, что  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi_j(z, h)$  существует при любом фиксированном  $z$ . Подставляя (2.3) в (2.2), получаем

$$\varphi_0^2 h^2 + 2\varphi_0 \varphi_1 h + \varphi_1^2 + 2\varphi_0 \varphi_2 + \varphi_0' h + \varphi_1' + h^2 q + \dots = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при  $h^2$ ,  $h^1$ ,  $h^0$ , получаем

$$\varphi_0^2 + q = 0, \quad 2\varphi_0 \varphi_1 + \varphi_0' = 0, \quad \varphi_1^2 + 2\varphi_0 \varphi_2 + \varphi_1' = 0,$$

откуда находим

$$\varphi_0 = \pm i \sqrt{q}, \quad \varphi_1 = -\frac{\varphi_0'}{2\varphi_0}.$$

(Заметим, что этот процесс неоднозначен, поскольку функции  $\varphi_j(z, h)$  также зависят от  $h$ .) Окончательно

$$\omega \sim q^{-1/4} \exp\left(\pm ih \int_V \bar{q} dz\right).$$

Два решения

$$\begin{aligned} \omega_1 &= q^{-1/4} \exp\left(ih \int_{z_1}^z V \bar{q} dz\right), \\ \omega_2 &= q^{-1/4} \exp\left(-ih \int_{z_2}^z V \bar{q} dz\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

называются ВКБ-решениями. Чтобы указать определенный выбор ветви  $V \bar{q}$ , проведем разрезы из нулей  $q$ ; контур интегрирования не должен пересекать разрезы.

Дифференцируя (2.4) и отбрасывая члены порядка  $O(1/h)$  по сравнению с главным членом (при этом достаточно продифференцировать только экспоненту), получаем

$$\begin{aligned} \omega_1' &= ihq^{1/4} \exp\left(ih \int_{z_1}^z V \bar{q} dz\right), \\ \omega_2' &= -ihq^{1/4} \exp\left(-ih \int_{z_2}^z V \bar{q} dz\right). \end{aligned}$$

При  $z_1 = z_2$  вронскиан  $W$  решений  $\omega_1, \omega_2$ , с той же степенью точности, равен

$$W(\omega_1, \omega_2) = -2ih.$$

Хотя эти простые рассуждения позволили нам правильно найти главный член асимптотики, они ни в коей мере не являются исчерпывающими, поскольку нам ничего не известно ни о величине остаточного члена, ни об области в комплексной плоскости  $z$ , в которой асимптотика справедлива. Асимптотика (2.4) в общем случае не может быть справедлива во всей плоскости  $z$ . Действительно, в области (в односвязной. — *Перев.*), содержащей нули  $q(z)$  и не содержащей особенностей  $q(z)$ , всякое решение

уравнения (2.1) однозначно, в то время как приближенные решения, очевидно, не могут быть однозначны из-за наличия нулей  $q$ . Это показывает, что приближенные решения (2.4) могут быть пригодны лишь в некоторых определенных областях плоскости  $z$ .

## 2.2. Уравнения сравнения

Простейшая идея получения приближенных решений состоит в том, чтобы сравнить данное уравнение (2.1) с некоторыми стандартными уравнениями сравнения, решения которых известны. Мы выберем в качестве уравнения сравнения уравнение

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} - j(\xi) X = 0,$$

где  $j \equiv 1$ , если  $q(z, h)$  не имеет нулей в рассматриваемой области, и  $j \equiv \xi$ , если  $q(z, h)$  обращается в нуль, например в точке  $z=0$ .

Сделаем замену переменной  $z = z(\xi)$ ; тогда

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\omega'}{z'}, \quad \frac{d^2\omega}{dz^2} = \frac{\omega''}{z'^2} - \frac{\omega' z''}{z'^3},$$

где штрих означает дифференцирование по  $\xi$ .

Уравнение (2.1) примет вид

$$\omega'' - \frac{z''}{z'} \cdot \omega' + h^2 q z'^2 \omega = 0.$$

Чтобы исключить  $\omega'$ , положим

$$\omega = \sqrt{z'} X;$$

тогда

$$\begin{aligned} \omega' &= \sqrt{z'} X' + \frac{z''}{2\sqrt{z'}} X, \\ \omega'' &= \sqrt{z'} X'' + \frac{z''}{\sqrt{z'}} X' + \frac{z'''}{2\sqrt{z'}} X - \frac{z''^2}{4z'\sqrt{z'}} X. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X'' + h^2 q z'^2 X = \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{z''^2}{z'^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z'''}{z'} \right) X. \quad (2.5)$$

Теперь мы можем преобразовать левую часть этого уравнения таким образом, чтобы она совпадала с левой частью уравнения сравнения. Если  $q(z, h) \neq 0$  в рассматриваемой области, то положим  $1 \equiv j = -h^2 qz'^2$ , откуда

$$\xi = \pm ih \int_0^z \sqrt{q} dz.$$

Нижний предел интегрирования мы выбираем таким образом, чтобы  $q(z, h)$  обращалась в нуль на нижнем пределе; на верхнем пределе  $z$ , очевидно,  $q(z, h)$  не должна обращаться в нуль.

Если отбросить правую часть уравнения (2.5), то мы получим уравнение

$$X'' = X,$$

откуда  $X = e^{\xi}$ , и далее,

$$\omega = \sqrt{z'} X = Cq^{-1/4} \exp\left(\pm ih \int_0^z \sqrt{q} dz\right),$$

т. е. мы получили уже известные нам ВКБ-решения. Ясно, что необходимое (но не достаточное!) условие существования этих решений таково:

$$|h^2 qz'^2| = 1 \gg \left| \frac{3}{4} \cdot \frac{z''^2}{z'^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z'''}{z'} \right|. \quad (2.6)$$

Выражая правую часть (2.6) через  $q$  и ее производные по  $z$ , мы можем переписать условие (2.6) в виде

$$1 \gg \left| \frac{5}{16h^2} \cdot \frac{q'^2}{q^3} - \frac{1}{4h^2} \cdot \frac{q''}{q^2} \right|. \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что  $h$  должно быть достаточно большим, а  $q$  не должно быть близко к нулю. Позже мы покажем, что ВКБ-приближения в окрестности точки  $z=0$  пригодны лишь в некоторых вполне определенных секторах с центром в этой точке.

С другой стороны, мы можем придать левой части уравнения (2.5) тот же вид, что и левой части уравнения сравнения, положив

$$\xi \equiv j = -h^2 qz'^2,$$

откуда

$$\xi = \left( \pm \frac{3ih}{2} \int_0^z V\bar{q} dz \right)^{2/3}, \quad (2.8)$$

где  $\xi(0) = 0$  и  $q(0) = 0$ . Если отбросить правую часть уравнения (2.5), то полученное уравнение есть уравнение Эйри

$$X'' = \xi X$$

и имеет два стандартных решения  $Ai(\xi)$  и  $Bi(\xi)$ , которые мы подробно рассмотрим в гл. III и в приложении. Отсюда

$$\omega = V\bar{z}' X = Cq^{-1/4} \left( \int_0^z V\bar{q} dz \right)^{1/6} Ai \left[ \left( \frac{3ih}{2} \int_0^z V\bar{q} dz \right)^{2/3} \right]. \quad (2.9)$$

Позднее будет показано, что это приближение пригодно и в самой точке  $z = 0$ .

### 2.3. Интегральное уравнение

В этом разделе мы построим простое интегральное уравнение для  $X(\xi)$ , с помощью которого можно строго получить приближения ВКБ и оценку ошибки.

Запишем уравнение (2.5) в виде

$$X'' - jX = gX,$$

где  $j \equiv 1$  или  $j \equiv \xi$ . Обозначим через  $Z_1(\xi)$  и  $Z_2(\xi)$  два линейно независимых решения уравнения сравнения  $X'' - jX = 0$ . Решая уравнение (2.5) методом вариации постоянных, получаем интегральное уравнение для  $X(\xi)$ :

$$X(\xi) = AZ_1(\xi) + BZ_2(\xi) + \frac{1}{W} \int_0^\xi [Z_1(\xi)Z_2(t) - Z_2(\xi)Z_1(t)] g(t) X(t) dt, \quad (2.10)$$

где  $W \equiv Z_1'Z_2 - Z_1Z_2' \equiv \text{const}$ , поскольку уравнение сравнения не содержит  $X'$ , а  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Изменение нижнего предела интегрирования влечет за собой просто изменение произвольных постоянных  $A$  и  $B$ .

### 2.4. Приближенные решения интегрального уравнения

Если  $j \equiv 1$ , то

$$Z_1(\xi) = e^\xi, \quad Z_2(\xi) = e^{-\xi}, \quad W = 2,$$

и уравнение (2.12) примет вид

$$X(\xi) = Ae^\xi + Be^{-\xi} + \frac{1}{2} \int_C^{\xi} (e^{\xi-t} - e^{-\xi+t}) g(t) X(t) dt, \quad (2.11)$$

где  $C$  — некоторая точка в комплексной плоскости  $t$ .

Мы будем решать уравнение (2.11) методом последовательных приближений.

Положим вначале  $A = 1$ ,  $B = 0$ , а в качестве первого приближения возьмем  $X(\xi) = e^\xi$ .

Эта функция растет в области  $\operatorname{Re} \xi > 0$  и убывает в области  $\operatorname{Re} \xi < 0$ . Рассмотрим область  $\operatorname{Re} \xi > 0$ .

Следующее приближение мы получим, если подставим  $e^t$  вместо  $X(t)$  в правую часть (2.11), что дает нам

$$X(\xi) = e^\xi + \frac{1}{2} \int_C^{\xi} (e^\xi - e^{-\xi+2t}) g(t) dt$$

в предположении, что поправка к  $e^\xi$  мала по сравнению с  $e^\xi$ . Эта поправка меньше, чем

$$\max \frac{1}{2} |e^\xi - e^{-\xi+2t}| \cdot \int_C^{\xi} |g(t) dt|.$$

Далее, в силу (2.6)

$$|g(t) dt| = \frac{1}{h^2} \left| \left( \frac{5}{16} \cdot \frac{q'^2}{q^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{q''}{q^2} \right) \sqrt{q} h dz \right|.$$

Если  $C$  и  $\xi$  не слишком близки к нулям функции  $q$ , то

$$\int_C^{\xi} |g(t) dt| \leq \frac{M}{h},$$

где  $M$  — константа, не зависящая от  $C$ ,  $\xi$  и  $h$ . Если параметр  $h$  входит в  $q(z, h)$  так, как указано в разд. 2.1, то эта оценка может иметь место только при  $h > h_0$ .



Если все эти условия выполнены, то поправка к первому приближению по модулю не превосходит величины

$$\frac{M}{2h} \max |e^{\xi} - e^{-\xi+2t}|.$$

Рассмотрим теперь область, в которой  $C$  и  $\xi$  расположены таким образом, что  $\operatorname{Re} t$  возрастает вдоль пути, соединяющего  $C$  и  $\xi$ . Тогда

$$\begin{aligned} |e^{\xi} - e^{-\xi+2t}| &\leq e^{\operatorname{Re} \xi} + e^{-\operatorname{Re} \xi} e^{2 \operatorname{Re} t} \leq \\ &\leq e^{\operatorname{Re} \xi} + e^{-\operatorname{Re} \xi} e^{2 \operatorname{Re} \xi} = 2e^{\operatorname{Re} \xi}. \end{aligned}$$

Следовательно, поправка не превосходит по модулю величины

$$\left| M \frac{e^{\xi}}{h} \right|,$$

так что

$$X(\xi) = e^{\xi} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{h}\right) \right] \quad (2.12)$$

во всех точках  $\xi$ , в которых  $\operatorname{Re} \xi \geq \operatorname{Re} C$ . Если точка  $C$  лежит справа от точки  $\xi = 0$ , то ясно, что область применимости асимптотики будет тем больше, чем ближе точка  $C$  к точке  $\xi = 0$ . Поэтому мы выберем точку  $C$  (которая пока что была произвольной) справа от точки  $\xi = 0$  и достаточно близкую к ней, как показано на рис. 1. Границами области применимости асимптотики в плоскости  $\xi$  являются линии  $\operatorname{Re} \xi = 0$ ; в плоскости  $z$  эти линии определяются уравнением

$$\operatorname{Im} \int_0^z \sqrt{q} dz = 0$$

и называются *сопряженными линиями Стокса*. Несколько таких линий выходят из точки  $z = 0$ , которая обычно называется *точкой поворота*.

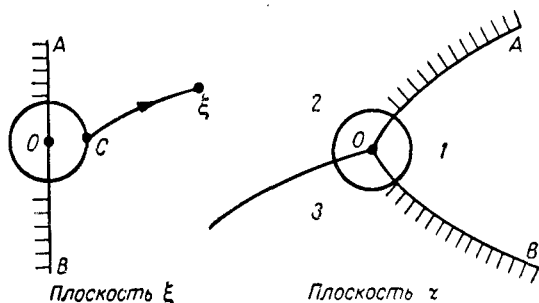
Если при малых  $z$  функция  $q$  линейна, скажем  $q \sim z$  (в общем случае  $q \sim Az$ , где  $A$  — комплексное число), то в окрестности точки  $z = 0$  сопряженные линии Стокса

определяются уравнением

$$\operatorname{Im} \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) = 0.$$

Если  $z = re^{i\theta}$ , то локально эти линии определяются уравнением  $\sin 3\theta/2 = 0$ , откуда  $\theta = 0, \pm 2\pi/3$ . Мы получаем три линии, образующие три сектора.

Следовательно, приближенное решение уравнения (2.11) имеет вид  $X = e^{\xi}$  и это приближение равномерно



Р и с. 1.

только в области 1 (см. рис. 1), т. е. в той области, где это решение растёт. Соответствующее решение  $w$  имеет вид

$$w = q^{-1/4} \exp \left( ih \int_0^z \sqrt{q} dz \right),$$

где ветвь  $\sqrt{q}$  выбрана таким образом, что экспонента растёт в области 1. Это приближение является *равномерно асимптотическим* в том смысле, что ошибка имеет порядок  $O(1/h)$  по сравнению с главным членом всюду в рассматриваемой области. Следует подчеркнуть, что приближение неприменимо на границе области и что наши рассуждения носят локальный характер. Действительно, уравнение (2.1) может иметь другие точки поворота и вдали от точки  $z = 0$  их также необходимо учитывать.

Аналогично, положим  $A=0$ ,  $B=1$  в уравнении (2.11) и рассмотрим решение  $X(\xi)=e^{-\xi}$ , которое убывает в области  $I$ , так как  $\operatorname{Re} \xi > 0$ . Тогда с учетом первой поправки получаем

$$X(\xi) = e^{-\xi} + \frac{1}{2} \int_C^{\xi} (e^{\xi-2t} - e^{-\xi}) g(t) dt, \quad (1)$$

если, конечно, первая поправка значительно меньше первого приближения  $e^{-\xi}$ . Величина поправки по модулю не превосходит величины

$$\max \frac{1}{2} |e^{\xi-2t} - e^{-\xi}| \left| \int_C^{\xi} |g(t) dt| \leq \frac{M}{2h} \max |e^{\xi-2t} - e^{-\xi}|,$$

как и ранее. Если мы выберем  $\xi$  таким образом, что существует путь, соединяющий  $C$  и  $\xi$ , вдоль которого  $\operatorname{Re} t$  убывает при движении от  $C$  к  $\xi$ , то первая поправка не будет превосходить величины

$$\frac{M}{2h} \max |e^{\operatorname{Re} \xi} e^{-2\operatorname{Re} t} + e^{-\operatorname{Re} \xi}| \leq e^{-\operatorname{Re} \xi} \cdot \frac{M}{h} = |e^{-\xi}| \cdot \frac{M}{h}.$$

Следовательно, при этих условиях решение имеет вид

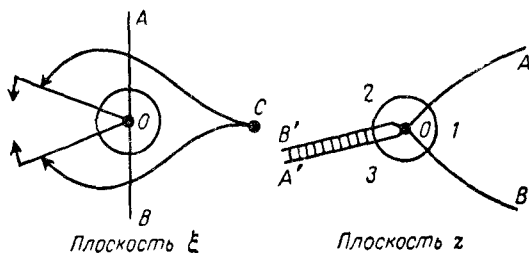
$$X(\xi) = e^{-\xi} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{h}\right) \right].$$

Выберем  $C$  таким образом, чтобы  $\operatorname{Re} C$  была максимально возможной. Тогда любую точку  $\xi$ , лежащую слева от  $C$ , можно соединить с точкой  $C$  путем, вдоль которого  $\operatorname{Re} t$  убывает (см. рис. 2). Эти пути могут пересекать линии  $OA$ ,  $OB$ , и их можно провести из любой точки  $\xi$ , такой, что  $-3\pi/2 < \arg \xi < 3\pi/2$ . Эта область ограничена в плоскости  $z$  линиями  $OA'$ ,  $OB'$ ; первая получается из линии  $OB$  поворотом на угол  $\pi$  по часовой стрелке, а вторая — из  $OA$  поворотом на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Чтобы изобразить соответствующую область в плоскости  $\xi$ , необходимо взять два экземпляра плоскости  $\xi$ .

В плоскости  $z$  линии  $OA'$ ,  $OB'$  являются сопряженными линиями Стокса:

$$\operatorname{Re} \xi = \operatorname{Im} \int_0^z \sqrt{q} dz = 0.$$

Из точки  $O$  выходят три такие линии ( $OA'$  и  $OB'$  совпадают); разрез обычно проводится вдоль линии  $A'OB'$ .



Р и с. 2.

Приближение  $X = e^{-\xi}$  равномерно в полной окрестности точки  $z = 0$ ; оно непригодно на линии  $A'OB'$  и для точек, близких к точке  $z = 0$ .

Эта теория (мы следуем Джеффрису [3] и дополняем его) не показывает, как далеко за пределы рассмотренной области можно продолжить построенные нами равномерные асимптотические решения. Наличие других нулей  $q$  сильно усложняет решение. Этот вопрос был детально исследован Хедингом [7]. Полученное выше решение

$$\omega = q^{-1/4} \exp \left( -ih \int_0^z \sqrt{q} dz \right)$$

пригодно в области  $AOB$ , в которой оно убывает, и может быть продолжено через сопряженные линии Стокса  $OA$  и  $OB$ , но окрестности других сопряженных линий Стокса необходимо удалить из области пригодности приближенного решения.

Всюду в дальнейшем мы будем опускать поправочные члены  $e^{\pm \xi} O(1/h)$ , подразумевая, что они присутствуют.

Более того, мы будем рассматривать только такие функции  $q$ , для которых условие

$$\int_C^{\xi} |g(t)| dt < \frac{M}{h}$$

выполнено для всех точек  $C$  и  $\xi$  в рассматриваемых нами областях.

Если  $j \equiv \xi$ , то исследование задачи более сложно. Детальное исследование приведено в статье Джеффриса [3] и более полно — в статье Хединга [7]. Оказывается, что решение (2.9) является равномерно асимптотическим во всей окрестности точки  $z=0$ , включая и саму эту точку.

## 2.5. Матричный метод

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка можно свести к однородной системе двух уравнений первого порядка. Если

$$w'' + h^2 q w = 0,$$

то мы можем в качестве неизвестных функций принять  $w$  и  $w'$ . Очевидно, что

$$(w)' = w', \quad (w')' = -h^2 q w;$$

записывая эту систему в матричном виде, имеем

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h^2 q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Полагая

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -h^2 q & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\mathbf{w}' = \mathbf{T}\mathbf{w}.$$

Мы преобразуем эту систему к более удобному виду, так как из системы (2.13) сразу не видно, какими должны быть приближенные решения.

Положим

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{f}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix};$$

тогда

$$\mathbf{f}' = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{R}\mathbf{f} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}'\mathbf{f},$$

если, конечно,  $\mathbf{R}$  — неособая матрица, т. е.  $\det \mathbf{R} \neq 0$ . Выберем матрицу  $\mathbf{R}$  таким образом, чтобы матрица  $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{R}$  стала диагональной.

Характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $\mathbf{T}$  являются корнями уравнения

$$\det(\mathbf{T} - \lambda\mathbf{E}) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -h^2q & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 = -h^2q.$$

Каждому корню  $ih\sqrt{q}$ ,  $-ih\sqrt{q}$  соответствует собственный вектор  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , именно,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ ih\sqrt{q} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -ih\sqrt{q} \end{pmatrix}.$$

Из элементарной теории матриц известно, что если

$$\mathbf{R} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ih\sqrt{q} & -ih\sqrt{q} \end{pmatrix},$$

то

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} ih\sqrt{q} & 0 \\ 0 & -ih\sqrt{q} \end{pmatrix} = \mathbf{D},$$

в чем можно убедиться и непосредственной проверкой. Очевидно, что матрица  $\mathbf{R}$  невырождена, если характеристические числа  $\lambda_1, \lambda_2$  различны, т. е. если  $q \neq 0$ .

Таким образом, преобразованная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ih\sqrt{q} & 0 \\ 0 & -ih\sqrt{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \frac{q'}{4q} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Мы снова получили однородную систему уравнений, однако она устроена совсем не так, как система (2.13). Рассмотрим такую область в плоскости  $z$ , в которой  $|q|$  не слишком мал; тогда элементы второй матрицы в правой части (2.14) при больших  $h$  малы по сравнению с ненулевыми элементами первой. Члены, содержащие  $f_2$  в первом уравнении системы, и члены, содержащие  $f_1$  во втором уравнении, называются *членами связи*, или *взаимодействия*, а пара уравнений — *связанными*, или *взаимодействующими уравнениями*. Обычные соображения при решении системы такого вида следующие (см., например, Бадден [3], стр. 402).

Если можно пренебречь взаимодействием, то матричное уравнение распадается на два независимых уравнения, именно,

$$f_1' = \left( ih\sqrt{q} - \frac{q'}{4q} \right) f_1, \quad f_2' = \left( -ih\sqrt{q} - \frac{q'}{4q} \right) f_2,$$

решения которых имеют вид

$$f_1 = Aq^{-1/4} \exp \left( ih \int \sqrt{q} dz \right), \quad (2.15)$$

$$f_2 = Bq^{-1/4} \exp \left( -ih \int \sqrt{q} dz \right). \quad (2.16)$$

Эти решения физически можно интерпретировать как две независимые *характеристические волны*, распространяющиеся в среде, и эти решения являются хорошими приближениями к решениям системы (2.14), если взаимодействием между ними можно пренебречь. Очевидно, что взаимодействие между ними не является малым в точках, где  $q=0$ ; в таких точках эти волны  $f_1$  и  $f_2$  не могут быть независимы. В математике такие точки называются *точками поворота*, в физике — *точками отражения* (более общо, *точками связи*, или *взаимодействия*).

Наконец, в силу выбора матрицы  $R$ ,

$$w = f_1 + f_2,$$

так что с помощью матричного метода ВКБ-решения получаются просто и непосредственно.

С другой стороны, следует указать, что простота уравнений (2.14) обманчива. Их следует решать тем же

методом, что и в разд. 2.4. Тогда мы увидим, что если  $\exp\left(ih \int \sqrt{q} dz\right)$  растет, то  $f_1$  имеет вид (2.15), а  $f_2 = 0$ . Ошибка будет иметь порядок  $q^{-1/4} \exp\left(ih \int \sqrt{q} dz\right) O(1/h)$  и для  $f_1$ , и для  $f_2$ , и убывающее выражение типа (2.16) не войдет в формулу для  $f_2$ .

Аналогично, второе убывающее решение получается при  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = q^{-1/4} \exp\left(-ih \int \sqrt{q} dz\right)$  и ошибка имеет порядок  $O(1/h)$  по сравнению с этим убывающим решением, через которое выражаются и  $f_1$ , и  $f_2$ . Только в том случае, если  $z$  лежит на линиях  $\text{Im} \int \sqrt{q} dz = 0$ , существуют и  $f_1$ , и  $f_2$ , и они имеют вид (2.15), (2.16).

## 2.6. Приближение Джеффриса

Джеффрис [3] обычно рассматривал уравнение вида

$$w'' + [h^2 q_0(z) + h q_1(z) + q_2(z)] w = 0,$$

хотя этот вид уравнения не всегда соответствует уравнениям, встречающимся в физических задачах. Уравнение (2.5) можно записать следующим образом:

$$X'' + (h^2 q_0 + h q_1) z'^2 X = \left( -q_2 z'^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{z''^2}{z'^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z'''}{z'} \right) X,$$

или так:

$$\begin{aligned} X'' + \left( h^2 q_0 + h q_1 + \frac{q_1^2}{4q_0} \right) z'^2 X = \\ = \left[ \left( \frac{q_1^2}{4q_0} - q_2 \right) z'^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{z''^2}{z'^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{z'''}{z'} \right] X. \end{aligned}$$

Джеффрис обычно полагал

$$\left( h^2 q_0 + h q_1 + \frac{q_1^2}{4q_0} \right) z'^2 = -1,$$

откуда

$$d\xi = ih \sqrt{q_0} \left( 1 + \frac{q_1}{2hq_0} \right) dz,$$

$$\xi = ih \int^z \sqrt{q_0} \left( 1 + \frac{q_1}{2hq_0} \right) dz.$$



Полученные таким образом приближенные решения  $X = e^{\pm \xi}$  являются равномерно асимптотическими в смысле разд. 2.4 и при определенных исключительных обстоятельствах им следует отдать предпочтение по сравнению с решениями разд. 2.4. Недостаток этого приближения состоит в том, что  $\xi$  выражается теперь не прямо через  $q$ , а через искаженную функцию  $q$ . Физически  $q$  связано с коэффициентом отражения среды, и всегда удобнее, если только это возможно, пользоваться самим коэффициентом отражения, а не приближением к нему.

## 2.7. Обозначения и примеры

Чтобы избежать непрерывного выписывания выражений типа (2.15), (2.16), мы введем следующие простые, но полезные обозначения.

Проведем разрезы на плоскости  $z$  таким образом, чтобы в полученной области можно было выделить однозначные ветви функций  $\sqrt{q}$  и  $\sqrt[4]{q}$ , и зафиксируем некоторые ветви этих функций. Мы используем обозначение  $(a, z)$  для записи ВКБ-решения (2.15), именно,

$$(a, z) \equiv q^{-1/4} \exp \left( ih \int_a^z \sqrt{q} dz \right), \quad (2.17)$$

путь интегрирования не пересекает разрезов. Порядок пределов интегрирования устанавливается порядком их в выражении  $(a, z)$ . Аналогично

$$(z, a) \equiv q^{-1/4} \exp \left( -ih \int_a^z \sqrt{q} dz \right), \quad (2.18)$$

так как переменная знака просто изменяет направление контура.

Если  $z$  таково, что экспонента в формуле (2.17) растет при  $h \rightarrow +\infty$ , мы вводим индекс  $d$ :  $(a, z)_d$ ; тогда решение (2.18) убывает, и мы будем обозначать его  $(z, a)_s^1$ .

<sup>1</sup> Индексы  $d$  и  $s$  происходят от слов «dominant» («растущий») и «subdominant» («убывающий»).—Прим. перев.

Наконец, если  $\text{Im} \int_a^z \sqrt{q} dz = 0$ , то обе экспоненты не являются ни растущими, ни убывающими; мы назовем их *нейтральными* и, чтобы подчеркнуть это важное физическое свойство, не будем приписывать им никакого индекса.

В ряде случаев оба предела интегрирования — постоянные числа. Мы используем квадратные скобки для того, чтобы обозначить экспоненту от такого интеграла, но без множителя  $q^{-1/4}$ , именно

$$[a, b] \equiv \exp \left( ih \int_a^b \sqrt{q} dz \right).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} [a, b] [b, a] &= 1, \\ (a, z) (z, a) &= q^{-1/2}. \end{aligned}$$

Заменяя  $a$  на  $b$  в выражении  $(a, z)_d$ , мы получаем тождество

$$q^{-1/4} \exp \left( ih \int_a^z \sqrt{q} dz \right) = q^{-1/4} \exp \left( ih \int_b^z \sqrt{q} dz + ih \int_a^b \sqrt{q} dz \right),$$

которое, очевидно, можно записать в виде

$$(a, z)_d = [a, b] (b, z)_d.$$

Это показывает, как легко оперировать с введенными нами символами. Аналогично

$$(z, a)_s = (z, b)_s [b, a].$$

Иногда изменение предела интегрирования может привести к замене индекса  $d$  на  $s$  и наоборот.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение

$$\omega'' + h^2(1 - e^{hz})\omega = 0, \quad k > 0 \quad (z = x + iy).$$

Функция  $q(z) = 1 - e^{hz}$  вещественна при вещественных  $z$ . Точки поворота находятся из уравнения

$$q \equiv 1 - e^{hz} = 0,$$

откуда

$$z = \frac{2\pi i}{k},$$

$n$  — целое число. На вещественной оси лежит только одна точка поворота  $z = 0$ .

Проведем разрез из точки  $z = 0$ , например, таким образом, чтобы он был заключен между лучами  $\arg z = 0$  и  $\arg z = -\pi/6$ , и положим  $\arg q = \pi$  при  $x > 0$  и  $\arg q = 2\pi$  при  $x < 0$ . Тогда

$$(0, x)_s = [e^{i\pi}(e^{hx} - 1)]^{-1/4} \exp\left(ih \int_0^x \sqrt{e^{i\pi}(e^{hx} - 1)} dx\right), \quad x > 0,$$

$$(0, x) = [e^{2i\pi}(1 - e^{hx})]^{-1/4} \exp\left(ih \int_0^x \sqrt{e^{2i\pi}(1 - e^{hx})} dx\right), \quad x < 0.$$

При  $x > 0$

$$\begin{aligned} -h \int_0^x \sqrt{e^{hx} - 1} dx &= -\frac{2h}{k} [V\sqrt{e^{hx} - 1} + \operatorname{arctg} V\sqrt{e^{hx} - 1}] \sim \\ &\sim -\frac{2h}{k} \left( e^{hx/2} + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

при больших положительных  $x$ . Заметим, что в ВКБ-решениях  $x$  не обязано быть большим.

Аналогично при  $x < 0$

$$\begin{aligned} -ih \int_0^x \sqrt{1 - e^{hx}} dx &= \\ &= \frac{2ih}{k} \left[ -V\sqrt{1 - e^{hx}} - \frac{kx}{2} + \ln(1 + V\sqrt{1 - e^{hx}}) \right]. \end{aligned}$$

При больших отрицательных  $x$  выражение  $e^{hx}$  мало, и этот интеграл приближенно равен

$$\frac{2ih}{k} (-1 + \ln 2) - ihx.$$

Итак, при больших  $x$

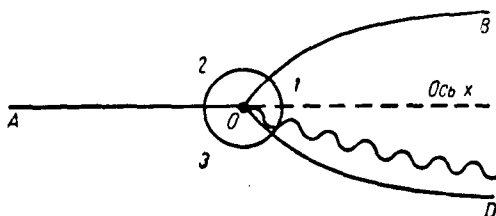
$$(0, x)_s = e^{-i\pi/4} e^{-kx/4} \exp\left[-\frac{h}{k} (2e^{hx/2} + \pi)\right], \quad x > 0,$$

$$(0, x) = -i \exp\left[\frac{2ih}{k} (-1 + \ln 2)\right] e^{-ihx}, \quad x < 0.$$

Первое решение представляет собой *затухающую* волну в очень плотной среде, второе — *движущуюся* волну в однородной среде, для которой  $q = 1$ .

Следует заметить, что эти две формулы представляют собой разные решения.

На рис. 3 разрез изображен волнистой линией, а сопряженные линии Стокса — сплошными линиями. Асимптотика решения, убывающего в области 1, справедлива также в областях 2 и 3, за исключением линии  $OA$ .



Р и с. 3.

Асимптотика решения, нейтрального на линии  $OA$  и убывающего в области 3, справедлива в областях 1 и 2, за исключением линии  $OB$ , в соответствии с правилами, установленными в разд. 2.4. Влияние разреза будет учтено нами в гл. III.

Пример 2. Получим приближенные формулы для функций Ханкеля. Положим  $u = \omega z^{-1/2}$  в уравнении для бesselевых функций порядка  $h$ :

$$u'' + \frac{u'}{z} + \left(1 - \frac{h^2}{z^2}\right)u = 0,$$

мы получим уравнение

$$\omega'' + \left(1 - \frac{H^2}{z^2}\right)\omega = 0,$$

где  $H^2 = h^2 - 1/4$ . Это уравнение имеет вид (2.1), где  $q = 1/H^2 - 1/z^2$ . Так как  $H = h[1 + O(1/h^2)]$ , мы можем заменить  $H$  на  $h$ , поскольку  $h$ , по предположению, есть большое положительное число. Выберем  $\arg(1 - h^2/z^2) = 0$  при вещественных  $x$ , лежащих справа от точки поворота  $z = h$ .

Чтобы избавиться от несущественных числовых множителей, положим

$$q = 1 - \frac{h^2}{z^2}.$$

Проведем разрез от  $-i\infty$  до  $h$  и положим

$$q = e^{i\pi} \left( \frac{h^2}{z^2} - 1 \right)$$

при  $0 < x < h$  ( $z = x + iy$ ). Вычислим  $\int \sqrt{q} dz$ :

$$i \int_h^z \sqrt{q} dz = i \left[ \sqrt{z^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{z} \right];$$

аргумент  $\sqrt{z^2 - h^2}$  определен выше,  $\arccos h/z = 0$  при  $z = h$ . При  $x \rightarrow +\infty$   $\arccos h/x \rightarrow \pi/2$ . При  $z = x$ ,  $0 < x < h$ , этот интеграл равен

$$i \int_h^z \sqrt{q} dz = -\sqrt{h^2 - z^2} + h \ln \left( \frac{h + \sqrt{h^2 - z^2}}{z} \right).$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2.9), получаем два приближенных решения уравнения Бесселя:

$$\left. \begin{aligned} u_1 \\ u_2 \end{aligned} \right\} = \omega z^{-1/2} = z^{-1/2} \left( 1 - \frac{h^2}{z^2} \right)^{-1/4} \times \\ \times \left( \sqrt{z^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{z} \right)^{1/6} \times \\ \times \text{Ai} \left[ \left( \pm \frac{3i}{2} \left( \sqrt{z^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{z} \right) \right)^{2/3} \right], \quad (2.19)$$

где для  $u_1$  берется знак плюс, для  $u_2$  — знак минус. Эти решения пригодны на всей положительной полуоси, за исключением точки  $x=0$ , но включая точку поворота  $x=h$ . Они пригодны также и в некоторой области плоскости  $z$ , содержащей внутри себя вещественную ось, но методы, развитые нами в этой главе, не дают возможности установить точные границы этой области.

Общее решение уравнения Бесселя является линейной комбинацией решений (2.19). Мы выберем такие линейные комбинации этих решений, которые при больших

вещественных  $z$ ,  $z \gg h$ , имели бы ту же асимптотику, что и функции Ханкеля  $H_h^{(1)}(z)$  и  $H_h^{(2)}(z)$ . На вещественной оси экспоненты, входящие в асимптотику функций Ханкеля и в функции Эйри, по модулю равны единице, так что здесь нет ни растущих, ни убывающих решений, обращение с которыми требует большей аккуратности.

Сравним теперь все эти функции при  $\text{Re} z = x \gg h$ . Напомним, что

$$H_h^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[ i \left( x - \frac{\pi h}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$H_h^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[ -i \left( x - \frac{\pi h}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

(см. Ватсон, гл. VII) и что

$$\text{Ai}(\xi) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{-1/4} \exp \left( -\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \quad (2.20)$$

при  $-\pi < \arg \xi < \pi$  (см. гл. III и приложение).

При  $x \gg h$  имеем

$$\sqrt{x^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{x} \sim x - \frac{\pi h}{2},$$

и, полагая в (2.19) для определенности  $\pm i = e^{\pm i\pi/2}$ , получаем

$$\arg \left[ \frac{3}{2} e^{\pm i\pi/2} \left( \sqrt{x^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{x} \right) \right]^{2/3} = \pm \frac{\pi}{3};$$

оба значения аргумента лежат в области, в которой применима асимптотика (2.20).

Следовательно,

$$\left. \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \right\} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \left( \frac{3}{2} e^{\pm i\pi/2} \right)^{-1/6} \exp \left[ -e^{\pm i\pi/2} \left( x - \frac{\pi h}{2} \right) \right].$$

Сравнивая коэффициенты при  $e^{\pm ix}$  в этом выражении с соответствующими коэффициентами асимптотических разложений функций Ханкеля, мы видим, что  $H_h^{(1)}(x)$  пропорциональна  $u_2$ , а  $H_h^{(2)}(x)$  пропорциональна  $u_1$ . Если

положить

$$H_h^{(1)}(x) = A_2 u_2, \quad H_h^{(2)}(x) = A_1 u_1,$$

то мы получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[ i \left( -\frac{\pi h}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] &= \\ &= A_2 \frac{1}{2 \sqrt{\pi}} \left( \frac{3}{2} e^{-i\pi/2} \right)^{-1/6} \exp \left( -\frac{i\pi h}{2} \right), \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left[ -i \left( -\frac{\pi h}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] &= \\ &= A_1 \frac{1}{2 \sqrt{\pi}} \left( \frac{3}{2} e^{i\pi/2} \right)^{-1/6} \exp \left( \frac{i\pi h}{2} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$A_2 = 2^{4/3} 3^{1/6} e^{-i\pi/3}, \quad A_1 = 2^{4/3} 3^{1/6} e^{i\pi/3}.$$

Следовательно, при всех  $x > 0$ , за исключением некоторой окрестности начала координат, где функции Ханкеля имеют особенности, справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} H_h^{(1)}(x) &= 2^{4/3} 3^{1/6} e^{-i\pi/3} (x^2 - h^2)^{-1/4} \times \\ &\quad \times \left( \sqrt{x^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{x} \right)^{1/6} \times \\ &\quad \times \text{Ai} \left\{ \left[ \frac{3}{2} e^{-i\pi/2} \left( \sqrt{x^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{x} \right) \right]^{2/3} \right\}, \\ H_h^{(2)}(x) &= 2^{4/3} 3^{1/6} e^{i\pi/3} (x^2 - h^2)^{-1/4} \times \\ &\quad \times \left( \sqrt{x^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{x} \right)^{1/6} \times \\ &\quad \times \text{Ai} \left\{ \left[ \frac{3}{2} e^{i\pi/2} \left( \sqrt{x^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{x} \right) \right]^{2/3} \right\}. \end{aligned}$$

Эти формулы, правда в несколько другой форме, часто использовались ранее; см., например, Бреммер, «Наземные радиоволны».

Рассмотрим, в частности, значения этих функций в точке поворота  $x = h$ . При вычислении этих выражений

заметим, что

$$\begin{aligned} (x^2 - h^2)^{-1/4} \left( \sqrt{x^2 - h^2} - h \arccos \frac{h}{x} \right)^{1/6} &= \\ &= \left[ \varepsilon^{-3} \left( \varepsilon - h \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{h} \right) \right]^{1/6} = \\ &= \left\{ \varepsilon^{-3} \left[ \varepsilon - h \left( \frac{\varepsilon}{h} - \frac{\varepsilon^3}{3h^3} + \dots \right) \right] \right\}^{1/6} \rightarrow (3h^2)^{-1/6} \end{aligned}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $\varepsilon = \sqrt{x^2 - h^2}$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} H_h^{(1)}(h) &= 2^{1/3} 3^{1/6} e^{-i\pi/3} (3h^2)^{-1/6} \operatorname{Ai}(0), \\ H_h^{(2)}(h) &= 2^{1/3} 3^{1/6} e^{i\pi/3} (3h^2)^{-1/6} \operatorname{Ai}(0), \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Ai}(0) = 3^{-2/3} \left( \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right)^{-1}$  (см. Миллер и приложение).

Найдем теперь  $J_h(h)$  (функция Бесселя порядка  $h$ ):

$$J_h(h) = \frac{1}{2} [H_h^{(1)}(h) + H_h^{(2)}(h)] = 2^{1/3} 3^{-2/3} h^{-1/3} \left( \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right)^{-1}.$$

Так как  $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 2\pi 3^{-1/2}$ , то мы получаем

$$J_h(h) \sim \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left( 2^{2/3} 3^{1/6} h^{1/3} \pi \right)^{-1} \approx 0,44731 h^{-1/3}.$$

Этот результат принадлежит Коши и приведен в книге Ватсона, гл. VIII.



Глава III  
ЯВЛЕНИЕ СТОКСА

### 3.1. Простейшее уравнение

Для уравнения

$$\omega'' - h^2\omega = 0$$

ВКБ-решения

$$(0, z) = e^{hz}, \quad (z, 0) = e^{-hz}$$

совпадают с точными решениями. Рассмотрим решение

$$\operatorname{ch} hz = \frac{1}{2} [(0, z) + (z, 0)] = \frac{1}{2} (e^{hx}e^{ihy} + e^{-hx}e^{-ihy}).$$

При больших  $|z|$  можно заменить это решение следующими приближенными выражениями:

$$\operatorname{ch} hz \sim \frac{1}{2} e^{hz}, \quad \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty,$$

$$\operatorname{ch} hz \sim \frac{1}{2} e^{-hz}, \quad \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty.$$

Если же  $\operatorname{Re} z = 0$  и  $z \rightarrow \infty$ , то ни одно из этих приближений не пригодно. Таким образом, различные приближенные формулы могут представлять одну и ту же функцию в разных областях плоскости  $z$ .

Запишем эти формулы следующим образом: при  $z \rightarrow \infty$

$$\operatorname{ch} hz \sim \frac{1}{2} e^{hz}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{ch} hz \sim \frac{1}{2} e^{-hz}, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}.$$

При  $\arg z = \pm \pi/2$  ни одно из этих приближений не годится. Эти линии определяются уравнением  $\operatorname{Re} z = 0$  и являются

сопряженными линиями Стокса функции  $\operatorname{ch} hz$ . При  $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$  решение  $e^{hz}$  растет, решение  $e^{-hz}$  убывает, а при переходе через линию Стокса они меняются ролями. Для  $\operatorname{ch} hz$  имеют место точные формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} hz &= \frac{1}{2}(0, z) + \frac{1}{2}(z, 0), & \arg z &= \frac{\pi}{2}; \\ \operatorname{ch} hz &= \frac{1}{2}(0, z)_d + \frac{1}{2}(z, 0)_s, & -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}; \\ \operatorname{ch} hz &= \frac{1}{2}(0, z) + \frac{1}{2}(z, 0), & \arg z &= -\frac{\pi}{2}; \\ \operatorname{ch} hz &= \frac{1}{2}(0, z)_s + \frac{1}{2}(z, 0)_d, & \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Чтобы получить приближенное выражение для  $\operatorname{ch} hz$  вблизи линии Стокса, необходимо удержать оба слагаемых, так как хотя функция  $|e^{-hz}|$  экспоненциально мала в области  $\operatorname{Re} z > 0$ , она довольно быстро стремится к 1, когда  $z$  приближается к сопряженной линии Стокса  $\operatorname{Re} z = 0$ . Если при замене  $\operatorname{ch} hz$  приближенным выражением мы допускаем ошибку порядка  $|e^{hz}O(1/h)|$ , то мы должны включить  $e^{-hz}/2$  в приближение для  $\operatorname{ch} hz$ , как только  $|e^{-hz}|$  станет величиной порядка ошибки. А это происходит, когда

$$e^{hx}O\left(\frac{1}{h}\right) = e^{-hx},$$

откуда

$$x = -\frac{1}{2h} \ln O\left(\frac{1}{h}\right), \quad (3.1)$$

т. е. член  $e^{-hz}/2$  необходимо учитывать в тонкой полоске, содержащей внутри себя сопряженную линию Стокса; ширина этой полоски определяется формулой (3.1). В выборе границы этой полоски содержится некоторый произвол, вызванный тем, что мы не знаем точно численной величины  $O(1/h)$ . Конечно, в этом частном случае мы могли бы уточнить величину  $O(1/h)$ , но мы не будем заниматься этим ни здесь, ни в дальнейшем, поскольку этот вопрос не входит в метод ВКБ.

## 3.2. Уравнение Эйри

Уравнение Эйри (или уравнение Стокса)

$$\omega'' = z\omega \quad (3.2)$$

не содержит большого параметра  $h$ , но тем не менее приближенный метод решения уравнений, развитый в разд. 2.4, применим и для этого уравнения. Правда, оценка ошибки будет выглядеть по-другому.

Следуя разд. 2.2, положим

$$\xi = \int_0^z \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} z^{3/2}.$$

Проведем из точки  $z=0$  некоторый разрез, не пересекающий положительной вещественной оси, и положим  $\sqrt{z} > 0$  при  $z=x > 0$ . Сделаем замену  $\omega = z^{-1/4}X$  в уравнении (3.2); тогда оно примет вид

$$X'' - X = -\frac{5}{36} \xi^{-2} X. \quad (3.3)$$

Интегральное уравнение (2.11) имеет вид

$$X(\xi) = Ae^{\xi} + Be^{-\xi} - \frac{5}{72} \int_C^{\xi} (e^{\xi-t} - e^{-\xi+t}) t^{-2} X(t) dt.$$

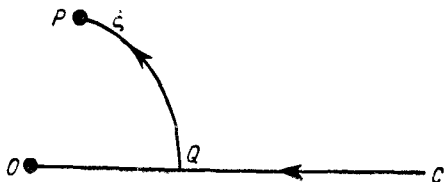
Чтобы построить убывающее приближенное решение, положим  $C = +\infty$ . Выберем путь интегрирования  $CQP$ , как показано на рис. 4, где  $OP = OQ = |\xi|$  и  $PQ$  — дуга окружности с центром в точке  $O$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_C^{\xi} \left| \frac{dt}{t^2} \right| &= \int_C^Q + \int_Q^{\xi} = \left| \int_{\infty}^{|\xi|} \frac{dt}{t^2} \right| + \frac{|PQ|}{|\xi|^2} = \\ &= \frac{1}{|\xi|} + \frac{|\xi| (\angle POQ)}{|\xi|^2} = O\left(\frac{1}{\xi}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, убывающее решение имеет вид

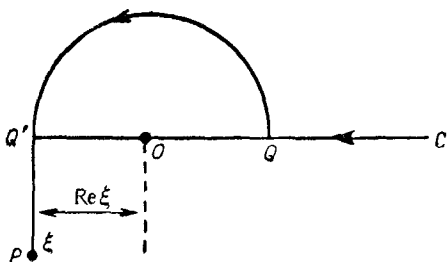
$$X(\xi) = e^{-\xi} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right) \right].$$

Эта формула пригодна при  $-\frac{3\pi}{2} < \arg \xi < \frac{3\pi}{2}$ , т. е. во всех точках  $\xi$ , которые можно соединить с точкой  $C$



Р и с. 4.

путями, вдоль которых  $\operatorname{Re} t$  убывает. Мы указали выбор пути  $CQP$  для того, чтобы обеспечить сходимость интеграла по этому пути; ясно, что если соединить  $P$  и  $C$



Р и с. 5.

очень извилистым (и столь же неестественным) путем, то интеграл может не быть абсолютно сходящимся.

При  $\arg \xi > \pi$  (или  $\arg \xi < -\pi$ ) наш метод дает более грубую оценку ошибки.

Из рис. 5 ясно, что

$$\int_c^Q + \int_Q^{Q'} + \int_{Q'}^P = O\left(\frac{1}{OQ}\right) = O\left(\frac{1}{\operatorname{Re} \xi}\right);$$

этот вклад вносят все три интеграла.

Такая трудность не возникала в разд. 2.4, так как там оценка имела вид  $O(1/h)$ .

Таким образом, наше приближение пригодно, только когда  $\xi$  лежит достаточно далеко от точки поворота, или, что то же, когда  $|z| \gg 1$ .

В этом простом случае мы можем точно вычислить первую поправку к приближению. Она имеет вид

$$-\frac{5}{72} \int_{\infty}^{\xi} (e^{\xi-2t} - e^{-\xi}) \frac{dt}{t^2}.$$

Интегрируя по частям, получаем, что первое слагаемое имеет порядок  $O(1/\xi^2)$ , второе же равно

$$-\frac{5}{72} \cdot \frac{e^{-\xi}}{\xi}.$$

Мы получили первые два члена асимптотического разложения  $X(\xi)$  (убывающего решения). Возвращаясь к  $\omega(z)$ , получаем

$$\omega(z) = z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \left(1 - \frac{5}{48z^{3/2}} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right) \quad (3.4)$$

(см. Джеффрис, Джеффрис).

Для растущего приближенного решения  $e^{\xi}$  первая поправка равна

$$-\frac{5}{72} \int_C^{\xi} (e^{\xi} - e^{-\xi+2t}) \frac{dt}{t^2}.$$

Поскольку мы ищем оценку ошибки не в виде  $O(1/h)$ , придется несколько изменить наши рассуждения. Положим  $C = +i\infty$ ; точка  $C$  лежит на одной из сопряженных линий Стокса, ограничивающих область применимости приближенного решения. Тогда, как и ранее,

$$X(\xi) = e^{\xi} \left(1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right)\right);$$

эта формула пригодна при  $-\pi/2 < \arg \xi < \pi/2$ , и в области  $\arg \xi < 0$  оценка ошибки является довольно грубой. Соответствующее решение  $\omega(z)$  имеет вид

$$\omega = z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right)\right].$$

Эти асимптотические формулы и области их применимости можно получить также методом перевала, если воспользоваться интегральными представлениями решений уравнения (3.1) (см. Джеффрис, Джеффрис и Бадден [3]).

3.3. Асимптотические решения в комплексной плоскости  $z$ 

ВКБ-решения уравнения Эйри являются линейными комбинациями выражений

$$(0, z) = z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right), \quad (z, 0) = z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right).$$

Сопряженные линии Стокса определяются уравнением  $\operatorname{Re} z^{3/2} = 0$  и являются лучами  $\arg z = \pm \pi/3, \pi$  и т. д. Выражение  $(0, z)_d$  растет в области  $-\pi/3 < \arg z < \pi/3$  и убывает в областях  $-\pi < \arg z < -\pi/3, \pi/3 < \arg z < \pi$ ; в этих областях оно должно быть записано как  $(0, z)_s$ . Выражение  $(z, 0)_s$ , наоборот, убывает в области  $-\pi/3 < \arg z < \pi/3$  и растет в двух соседних областях.

Проведем разрез  $\arg z = \delta$  так, чтобы он лежал внутри одной из указанных выше областей. Рассмотрим  $(0, z)_d$  на том берегу разреза, где  $\arg z = \delta$ ; тогда

$$z = re^{i\delta}, \quad (0, z)_d = r^{-1/4} e^{-i\delta/4} \exp\left(\frac{2}{3} e^{3i\delta/2} r^{3/2}\right).$$

На другом берегу разреза  $\arg z = \delta - 2\pi$  и  $(0, z)_d$  заменится на  $-i(z, 0)_d$ , поскольку

$$-i(z, 0)_d = r^{-1/4} e^{-i\delta/4} \exp\left(\frac{2}{3} e^{3i\delta/2} r^{3/2}\right).$$

Таким образом, мы получаем правила перехода с одной стороны разреза на другую (в положительном направлении)

$$\begin{aligned} (0, z) &\rightarrow -i(z, 0), \\ (z, 0) &\rightarrow -i(0, z). \end{aligned} \tag{3.5}$$

При этом свойство такого выражения быть растущим или убывающим сохраняется. Если обойти разрез в отрицательном направлении, то  $-i$  заменится на  $i$ .

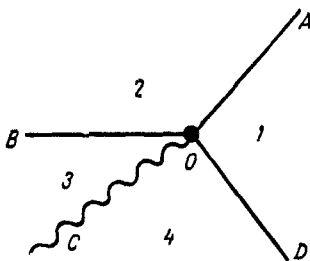
Формулы (3.5), разумеется, верны лишь с точностью до  $O(z^{-3/2})$ ; они показывают, как изменяется вид решения, но не его величина.

Тем же способом можно получить простые формулы, которые показывают, как изменяются выражения (3.5)

(которые вовсе не обязаны быть решениями уравнения) при обходе вокруг линий Стокса. Свойство такого выражения быть растущим или убывающим меняется на противоположное, что приводит к формулам

$$\begin{aligned} (0, z)_s &\rightarrow (0, z)_d, & (0, z)_d &\rightarrow (0, z)_s, \\ (z, 0)_s &\rightarrow (z, 0)_d, & (z, 0)_d &\rightarrow (z, 0)_s. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь три сопряженные линии Стокса  $OA$ ,  $OB$ ,  $OD$  и разрез  $OC$ . Выберем три решения, которые



Р и с. 6.

убывают в областях 1, 2, 3 и 4 соответственно. Если решение убывает, то его асимптотическое выражение справедливо всюду, кроме некоторой окрестности той сопряженной линии Стокса, которая не входит в границу области убывания решения.

Используя формулы (3.5), (3.6), мы получаем следующие выражения для этих трех решений.

Решение (I)

$$1: (z, 0)_s; 2: (z, 0)_d; 4: (z, 0)_d; 3: i(z, 0)_d,$$

не определено на  $OB$ .

Решение (II)

$$2: (0, z)_s; 1: (0, z)_d; 3: (0, z)_d; 4: -i(0, z)_d,$$

не определено на  $OD$ .

Решение (III)

$$3: (z, 0)_s; 4: -i(0, z)_s; 2: (z, 0)_d; 1: -i(0, z)_d,$$

не определено на  $OA$ .

Поскольку уравнение второго порядка может иметь только два линейно независимых решения, первое решение является линейной комбинацией второго и третьего. Кроме того, решения (II) и (III), очевидно, линейно независимы, что следует из того, что, скажем, в области 4 они имеют разный вид. Если  $A, B$  — коэффициенты линейной комбинации, то мы получаем

$$\begin{cases} 1: (z, 0)_s = A(0, z)_d - Bi(0, z)_d, \\ 2: (z, 0)_d = A(0, z)_s + B(z, 0)_d, \\ 3: i(0, z)_d = A(0, z)_d + B(z, 0)_s, \\ 4: (z, 0)_d = -Ai(0, z)_d - Bi(0, z)_s. \end{cases}$$

Соотношения в областях 3 и 4, конечно, тождественны.

Из соотношения 1) находим, что  $A - Bi = 0$ , поскольку слева стоит экспоненциально малая величина, а справа — экспоненциально большая. Из соотношения 2) находим, что  $B = 1$ , поскольку коэффициенты при растущих решениях должны быть равны. Аналогично находим из 3), что  $A = i$ .

Как и следовало ожидать, полученные результаты согласуются между собой.

Теперь мы можем найти вид решения (I) на линии  $OB$ , где оно пока что не определено. Это решение равно

$$A(0, z) + B(z, 0) = i(0, z) + (z, 0),$$

поскольку решение (I) выражено через решения (II) и (III), асимптотика которых на линии  $OB$  известна. Следовательно, решение (I) на  $OB$  есть просто сумма выражений, которые растут соответственно слева и справа от  $OB$ , именно,  $(z, 0)_d$  в области 2 и  $i(0, z)_d$  в области 3.

Следует подчеркнуть, что это представление решения, пригодное при всех  $\arg z$ , не дает никакой информации о значениях решения в точке  $z = 0$  или в близких к ней точках.



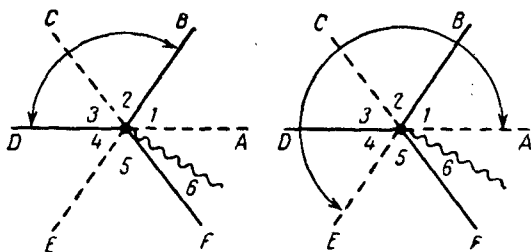
### 3.4. Постоянные Стокса

Приведенное выше построение приближенного решения для всех  $\arg z$  можно свести к серии простых правил, если ввести *линии Стокса* и *постоянные Стокса*.

*Линия Стокса* определяется уравнением

$$\operatorname{Im} z^{3/2} = 0.$$

Она состоит из лучей  $\arg z = 0, \pm 2\pi/3$  и делит пополам области, ограниченные сопряженными линиями Стокса.



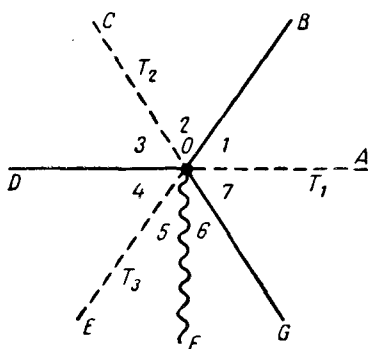
Р и с. 7.

Среди всех лучей, выходящих из начала координат, линии Стокса выделяются тем свойством, что растущее решение быстрее всего растет на линии Стокса, а убывающее — быстрее всего убывает на линии Стокса.

Выше, в области между двумя сопряженными линиями Стокса, мы учитывали только растущее решение, а на сопряженной линии Стокса решение представлялось в виде суммы двух выражений, одно из которых растет по одну сторону линии Стокса, а другое — по другую.

Теперь мы слегка изменим точку зрения. Растущее решение мы продолжим через указанную выше сопряженную линию Стокса на ближайшую линию Стокса (угол между этими линиями равен  $\pi/3$ ). Например, решение, растущее в областях 2 и 3 (см. рис. 7), мы формально продолжим в областях 1 и 4 до линий Стокса  $OA$  и  $OE$  соответственно; линии Стокса изображены пунктиром. В секторах 1 и 4 это выражение убывает, так что, поскольку решение может быть растущим, это выражение, вообще говоря, не следует

принимать во внимание. Действительно, величина выражения  $(0, z)_s$ , например, много меньше остаточного члена при растущем решении, а именно  $(0, z)_d O(z^{-3/2})$ . В областях 4 и 5, в которых это выражение убывает, коэффициент при нем необходимо изменить скачком, чтобы прийти на следующую сопряженную линию Стокса с тем же коэффициентом, что и из области 6, где оно снова растет. Разрыв



Р и с. 8.

коэффициента вовсе не означает, что решение разрывно, так как коэффициент стоит при слагаемом, меньшем, чем ошибка при растущем члене. Если в областях 4 и 5 нет растущего члена, то коэффициент при убывающем выражении не меняется. Этот скачок коэффициента при убывающем слагаемом был открыт Стоксом в 1857 г. и называется *явлением Стокса*.

Количественно это явление описывается следующим образом. Пусть убывающее слагаемое пересекает линию Стокса в положительном направлении. Обозначим  $N'_s, N_s$  — новый и старый коэффициенты при убывающем слагаемом,  $N_d$  — коэффициент при растущем слагаемом.

Тогда

$$N'_s = N_s + TN_d, \quad (3.7)$$

$T$  называется *постоянной Стокса*, связанной с данной линией Стокса.

Рассмотрим рис. 8;  $T_1, T_2, T_3$  — постоянные Стокса линий Стокса  $OA, OC, OE$  соответственно.

Запишем решение (I), убывающее в областях 1 и 7 (см. разд. 3.3), по-старому (слева) и по-новому (справа):

$$\begin{array}{ll}
 7,1: (z, 0)_s, & 7,1: (z, 0)_s, \\
 2,3: (z, 0)_d, & 2: (z, 0)_d, \\
 OD: (z, 0) + i(0, z), & 3: (z, 0)_d + i(0, z)_s, \\
 4,5: i(0, z)_d, & 4: (z, 0)_s + i(0, z)_d, \\
 6: (z, 0)_d. & 5: i(0, z)_d, \\
 & 6: (z, 0)_d.
 \end{array}$$

Добавленные в новых формулах убывающие выражения в областях 3 и 4 получены продолжением через  $OD$  решений, растущих в областях 4 и 3 соответственно. Очевидно, что  $T_2 = i$  (на линии  $OC$ ), а из (3.7) следует, что на линии Стокса  $OE$

$$0 = 1 + T_3 i,$$

так что  $T_3 = i$ . Если  $z$  пересекает линию Стокса по часовой стрелке, то постоянные Стокса меняют знак.

Нетрудно показать, что  $T_1 = T_2 = T_3 = i$  на всех линиях Стокса. Действительно, на сопряженной линии Стокса  $OB$  произвольное решение уравнения Эйри имеет вид

$$\omega = A(0, z) + B(z, 0).$$

Используя формулы (3.5) — (3.7), мы получаем формулы для одного и того же решения в различных областях:

$$\begin{array}{l}
 2: A(0, z)_s + B(z, 0)_d, \\
 3: (A + T_2 B)(0, z)_s + B(z, 0)_d
 \end{array}$$

при продолжении в положительном направлении, а при продолжении в отрицательном направлении:

$$\begin{array}{l}
 1: A(0, z)_d + B(z, 0)_s, \\
 7: A(0, z)_d + (B - T_1 A)(z, 0)_s, \\
 6: A(0, z)_s + (B - T_1 A)(z, 0)_d, \\
 5: iA(z, 0)_s + i(B - T_1 A)(0, z)_d, \\
 4: [iA - T_3 i(B - T_1 A)](z, 0)_s + i(B - T_1 A)(0, z)_d.
 \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при  $(z, 0)$  и  $(0, z)$  на сопряженной линии Стокса  $OD$ , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} B &= iA - T_3 i (B - T_1 A), \\ A + T_2 B &= i (B - T_1 A). \end{aligned}$$

Так как это справедливо для всех  $A$  и  $B$ , то мы можем приравнять соответствующие коэффициенты и получить решение

$$T_1 = T_2 = T_3 = i.$$

Более сложные постоянные Стокса были получены автором этой книги в серии статей [2, 3, 4] для уравнения  $n$ -го порядка

$$\omega^{(n)} = (-1)^n z^m \omega.$$

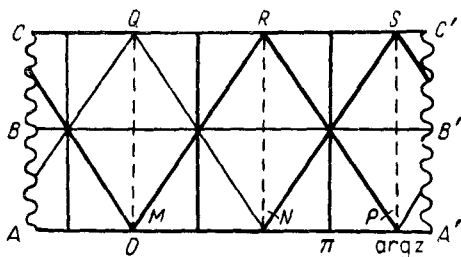
Когда растущее выражение мы продолжаем через сопряженную линию Стокса, то оно становится убывающим. Его следует сохранить в окрестности сопряженной линии Стокса, пока его величина будет не меньше, чем остаточный член при растущем слагаемом, и решение в этом случае следует записывать в виде суммы обоих слагаемых. Однако трудно, если не невозможно, определить границы области, в которой следует удерживать убывающее слагаемое. Эта трудность возникает из-за того, что остаточный член записан в несколько неясном виде, именно как  $O(z^{-3/2})$ . Для уравнения Эйри мы, конечно, можем более точно найти величину остаточного члена, именно, найти коэффициент при  $z^{-3/2}$ , но в общем случае это невозможно. Эту неопределенность необходимо признать одной из неустранимых слабостей метода ВКБ.

Стокс [1] показал, что если к ВКБ-решению добавить весь асимптотический ряд по степеням  $1/z$  и если мы хотим просуммировать эти ряды с максимальной степенью точности, то скачок коэффициента *должен иметь место на самой линии Стокса*, и в области между линией Стокса и сопряженной линией Стокса мы должны сохранить оба слагаемых. Но исследование асимптотических рядов не входит в метод ВКБ, который имеет дело только с первым членом асимптотического разложения. Поэтому коэффициент можно изменить в любом месте в области, вне которой не нужно учитывать убывающего слагаемого, о которой мы говорили

выше и границы которой являются несколько неопределенными. И только для определенности и для удобства мы говорим, что скачок коэффициента имеет место на самой линии Стокса.

### 3.5. Стандартные решения уравнения Эйри

Стокс [1] изображал величину выражений  $(0, z)$ ,  $(z, 0)$  на круговой диаграмме. Мы же воспользуемся диаграммой,



Р и с. 9.

изображенной на рис. 9, где по горизонтали (на линии  $AA'$ ) откладывается  $\arg z$ , а по вертикали — модуль функции при больших  $z$ . Эта диаграмма носит качественный характер, а именно, точки линии  $CC'$  соответствуют тем значениям  $\arg z$ , при которых функция растет быстрее всего, точки линии  $AA'$  соответствуют  $\arg z$ , при которых функция убывает быстрее всего, а точки линии  $BB'$  соответствуют тем  $\arg z$ , при которых функция осциллирует. Поясним диаграмму на примерах. Выражение  $(0, z)$ , растущее при  $\arg z = 0$ , изображается линией  $\dots QNS \dots$ , а выражение  $(z, 0)$ , убывающее при  $\arg z = 0$ , — линией  $\dots MRP \dots$ . Решение, убывающее при  $\arg z = 0$ , изображено жирными линиями. Эти линии обрываются, не доходя до точек  $N$  и  $P$ , в силу явления Стокса.

Выберем следующие стандартные решения уравнения Эйри.

**Решение (I).** Решение  $A_i(z)$ , целая функция от  $z$ , экспоненциально убывает при  $|z| \gg 1$  и  $\arg z = 0$ . При

больших положительных  $x$

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (x, 0)_s = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} x^{3/2}\right) \quad (3.8)$$

(остаточный член, как обычно, мы не выписываем). Выбор множителя  $1/2\sqrt{\pi}$  будет объяснен в приложении. С помощью рис. 8 мы получаем следующие формулы для  $\text{Ai}(z)$ :

$$1: \text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (z, 0)_s,$$

$$2: \text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (z, 0)_d,$$

$$3: \text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [(z, 0)_d + i(0, z)_s],$$

$$OD: \text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [(z, 0) + i(0, z)].$$

Пусть  $z < 0$ ,  $z = xe^{i\pi}$ ; тогда из этих формул вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[ (xe^{i\pi})^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} (xe^{i\pi})^{3/2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + i (xe^{i\pi})^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} (xe^{i\pi})^{3/2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $\text{Ai}(x)$  вещественна при вещественных  $x$ , экспоненциально убывает при  $x \rightarrow +\infty$  и осциллирует при  $x \rightarrow -\infty$ .

**Решение (II).** Решение  $\text{Vi}(z)$  мы выбираем таким образом, чтобы оно было растущим при  $\arg z = 0$ . Однако этого условия недостаточно, чтобы определить решение однозначно. Асимптотика решения позволяет однозначно определить решение только в том случае, если она задана на сопряженной линии Стокса или же на линии Стокса, причем в последнем случае асимптотика должна быть экспоненциально убывающей. Поэтому мы определим решение (II) как решение уравнения Эйри, равное решению (I),



Приравнявая нулю коэффициенты при  $z^{c-2}$ ,  $z^{c-1}$ ,  $z^c$ , ... получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} c(c-1) + c - \nu^2 &= 0, \\ a_1(c+1)c + a_1(c+1) - \nu^2 a_1 &= 0, \\ a_2(c+2)(c+1) + a_2(c+2) + 1 - \nu^2 a_2 &= 0. \\ \dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения находим  $c = \pm \nu$ , из второго —  $a_1 = 0$ . Нетрудно видеть, что  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$ , а  $a_2, a_4, \dots$  выражаются через  $c$ . Следовательно, общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$u = Az^\nu P_1(z^2) + Bz^{-\nu} P_2(z^2), \quad (3.12)$$

где ряды  $P_1(z^2)$ ,  $P_2(z^2)$  сходятся при всех  $z$  и при нецелом  $\nu$ . Если  $\nu$  — целое число, то решения строятся несколько иначе.

Рассмотрим решение, имеющее при больших  $|z|$  и при  $\arg z = 0$  вид

$$u = z^{-1/2} e^{iz}, \quad (3.13)$$

и выберем  $A$  и  $B$  таким образом, чтобы решения (3.12), (3.13) совпадали при  $\arg z = 0$ , т. е. на сопряженной линии Стокса  $\arg z = 0$ .

Решение (3.13) убывает при  $0 < \arg z < \pi$ , так что на линии Стокса  $\arg z = \pi/2$  ничего не меняется, поскольку растущее слагаемое отсутствует. Как только  $\arg z$  становится больше  $\pi$ , решение становится растущим, и после перехода через линию Стокса  $\arg z = 3\pi/2$  решение принимает вид

$$u = z^{-1/2} e^{iz} + Tz^{-1/2} e^{-iz}, \quad (3.14)$$

где  $T$  — постоянная Стокса. Оба слагаемых нейтральны на следующей сопряженной линии Стокса:  $\arg z = 2\pi$ .

Полагая  $z = x$  при  $\arg z = 0$  в формулах (3.12), (3.13), получаем

$$Ax^\nu P_1(x^2) + Bx^{-\nu} P_2(x^2) = x^{-1/2} e^{ix}.$$

Полагая  $z = xe^{i\pi}$  в формулах (3.12), (3.13), получаем

$$A(xe^{i\pi})^\nu P_1(x^2) + B(xe^{i\pi})^{-\nu} P_2(x^2) = (xe^{i\pi})^{-1/2} e^{-ix},$$

причем оба степенных ряда  $P_1(x^2)$ ,  $P_2(x^2)$  не меняются.



Наконец, полагая  $z = xe^{2i\pi}$  в формулах (3.12), (3.14), получаем

$$A(xe^{2i\pi})^\nu P_1(x^2) + B(xe^{2i\pi})^{-\nu} P_2(x^2) = \\ = (xe^{2i\pi})^{-1/2} e^{ix} + T(xe^{2i\pi})^{-1/2} e^{-ix}.$$

Исключая из этих уравнений  $Ax^\nu P_1(x^2)$ ,  $Bx^{-\nu} P_2(x^2)$ , приходим к уравнению

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x^{-1/2} e^{ix} \\ e^{i\pi\nu} & e^{-i\pi\nu} & -ix^{-1/2} e^{-ix} \\ e^{2i\pi\nu} & e^{-2i\pi\nu} & -x^{-1/2} e^{ix} - Tx^{-1/2} e^{-ix} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда (множители  $e^{\pm ix}$  сокращаются)

$$T = 2i \cos \pi\nu. \quad (3.15)$$

В дальнейшем мы покажем, что для любой линии Стокса уравнения Бесселя постоянная Стокса имеет вид (3.15). Предполагается, конечно, что в качестве ВКБ-решений выбраны функции  $z^{-1/2} e^{\pm iz}$ . Нормировка решений (как, например, в случае функций Ханкеля), конечно, влияет на  $T$ , но это влияние легко учесть.

### 3.7. Уравнение с двумя точками поворота

Рассмотрим уравнение

$$\omega'' + (z^2 - a^2)\omega = 0. \quad (3.16)$$

Точные решения этого уравнения известны и называются *функциями Вебера*, или *функциями параболического цилиндра* (см. Уиттекер и Ватсон).

Если  $a$  вещественно, то функция  $\sqrt{q} = \sqrt{z^2 - a^2}$  вещественна при  $z = x$  ( $x$  вещественно),  $|x| > |a|$  и чисто мнимая при  $|x| < |a|$ . Далее, при больших  $z$  ( $|z| \gg |a|$ ) имеем

$$i \int^z \sqrt{q} dz = i \int^z \sqrt{z^2 - a^2} dz \sim \\ \sim i \int^z z \left(1 - \frac{a^2}{2z^2}\right) dz = i \left(\frac{z^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln z\right).$$

Следовательно, ВКБ-решения можно представить в виде

$$z^{(-1 \pm ia^2)/2} \exp\left(\pm \frac{iz^2}{2}\right).$$

Нижний предел интегрирования, скажем  $k$ , в интеграле

$\int_k^z \sqrt{q} dz$  несуществен. Однако, чтобы воспользоваться обозначениями (2.17), (2.18), мы будем писать

$$\begin{aligned} (k, z) &\equiv z^{(-1-ia^2)/2} \exp\left(\frac{iz^2}{2}\right), \\ (z, k) &\equiv z^{(-1+ia^2)/2} \exp\left(-\frac{iz^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Сопряженные линии Стокса уравнения (3.16) определяются уравнением  $\operatorname{Re}(iz^2) = 0$ , т. е. совпадают с вещественной и мнимой осями. Линии Стокса определяются уравнением  $\operatorname{Im}(iz^2) = 0$ , т. е. совпадают с биссектрисами углов между вещественной и мнимой осями. В случае уравнения (3.16) не так просто разобраться в явлении Стокса, и подробно это будет сделано в приложении. Здесь же мы рассмотрим только наиболее важные результаты.

Проведем разрез  $\arg z = \delta$ . Тогда на одной стороне разреза  $z = re^{i\delta}$  и

$$(k, z) = (re^{i\delta})^{(-1-ia^2)/2} \exp\left[\frac{i}{2}(re^{i\delta})^2\right],$$

а на другой стороне разреза  $z = re^{i\delta-2\pi i}$  и

$$(k, z) = (re^{i\delta})^{(-1-ia^2)/2} (e^{-2\pi i})^{(-1-ia^2)/2} \exp\left[\frac{i}{2}(re^{i\delta})^2\right].$$

Таким образом,

$$(k, z)_+ \equiv -e^{\pi a^2} (k, z)_-, \quad (z, k)_+ \equiv -e^{-\pi a^2} (z, k)_-,$$

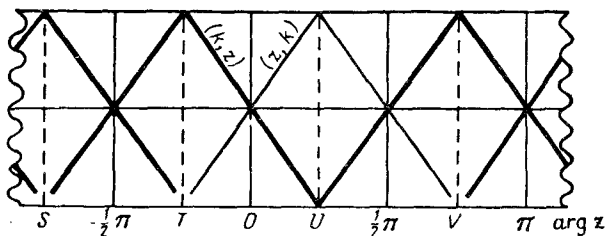
где плюс означает, что выражение рассматривается на той стороне разреза, где  $z = re^{i\delta}$ , а минус — на другой стороне разреза.

Следовательно, мы имеем следующие правила для перехода через разрез в положительном направлении:

$$\begin{aligned} (k, z) &\rightarrow -e^{\pi a^2} (k, z), \\ (z, k) &\rightarrow -e^{-\pi a^2} (z, k). \end{aligned} \quad (3.18)$$

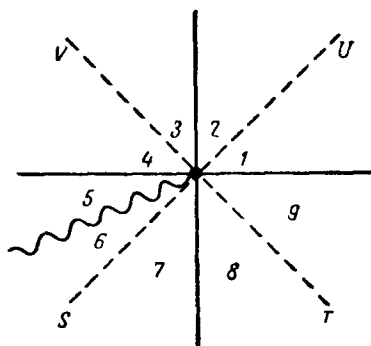
Если же перейти через разрез в отрицательном направлении, то в формулах (3.18) следует просто изменить знак перед  $\pi a^2$  на противоположный.

На рис. 10 изображены величины ВКБ-решений; разрез расположен под отрицательной вещественной осью.



Р и с. 10.

$S, T, U, V$  означают постоянные Стокса на соответствующих линиях Стокса. Жирными линиями изображено решение, которое убывает вдоль луча  $\arg z = \pi/4$ ; ясно,



Р и с. 11.

что для этой функции приходится учитывать три постоянные Стокса по числу линий Стокса, отличных от исходной линии  $\arg z = \pi/4$ .

Рассмотрим решение  $\omega = A(k, z) + B(z, k)$  на сопряженной линии Стокса  $\arg z = 0$ . Более точно, будем счи-

тать, что  $\arg z = 2r\pi$ , где  $r$  — целое число (постоянные Стокса зависят от  $p$ ).

Продолжая это решение в положительном направлении, получаем:

- 1:  $A(k, z)_s + B(z, k)_d,$
- 2:  $(A + UB)(k, z)_s + B(z, k)_d,$
- 3:  $(A + UB)(k, z)_d + B(z, k)_s,$
- 4:  $(A + UB)(k, z)_d + (B + VA + VUB)(z, k)_s,$
- 5:  $(A + UB)(k, z)_s + (B + VA + VUB)(z, k)_d,$

а продолжая его в отрицательном направлении и используя (3.18), получаем:

- 9:  $A(k, z)_d + B(z, k)_s,$
- 8:  $A(k, z)_d + (B - TA)(z, k)_s,$
- 7:  $A(k, z)_s + (B - TA)(z, k)_d,$
- 6:  $(A - SB + STA)(k, z)_s + (B - TA)(z, k)_d,$
- 5:  $-(A - SB + STA)e^{-\pi a^2}(k, z)_s -$   
 $-(B - TA)e^{\pi a^2}(z, k)_d.$

Приравнивая коэффициенты при  $(k, z)$  и  $(z, k)$ , получаем уравнения

$$\begin{aligned} A + UB &= -e^{-\pi a^2}(A - SB + STA), \\ B + VA + VUB &= -e^{\pi a^2}(B - TA), \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\begin{aligned} 1 &= -e^{-\pi a^2}(1 + ST), \\ U &= e^{-\pi a^2}S, \\ V &= e^{\pi a^2}T, \\ 1 + VU &= -e^{\pi a^2}. \end{aligned}$$

К сожалению, в отличие от уравнения Эйри из этих четырех уравнений нельзя найти постоянные Стокса, так как первое уравнение является следствием трех после-

дующих. Выражая  $S$ ,  $T$ ,  $V$  через  $U$ , находим

$$\begin{aligned} S &= e^{\pi a^2} U, \\ T &= -2e^{-\pi a^2/2} \operatorname{ch} \frac{\pi a^2}{2} \cdot U^{-1}, \\ V &= -2e^{\pi a^2/2} \operatorname{ch} \frac{\pi a^2}{2} \cdot U^{-1}. \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$U = i \sqrt{2\pi} 2^{-ia^2/2} e^{-2r\pi a^2 - \pi a^2/4} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2} \right) \right]^{-1} \quad (3.19)$$

( $\Gamma$  обозначает гамма-функцию).

Тогда

$$\begin{aligned} S &= i \sqrt{2\pi} 2^{-ia^2/2} e^{-2r\pi a^2 + 3\pi a^2/4} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2} \right) \right]^{-1}, \\ T &= i \sqrt{2\pi} 2^{ia^2/2} e^{2r\pi a^2 - \pi a^2/4} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{ia^2}{2} \right) \right]^{-1}, \\ V &= i \sqrt{2\pi} 2^{ia^2/2} e^{2r\pi a^2 + 3\pi a^2/4} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{ia^2}{2} \right) \right]^{-1}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

мы воспользовались соотношениями

$$\Gamma \left( \frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2} \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{ia^2}{2} \right) = \frac{\pi}{\sin \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2} \right)} = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{\pi a^2}{2}}.$$

Зная постоянные Стокса, мы можем найти асимптотические выражения точных решений уравнения (3.16) при всех  $\arg z$ , однако пользоваться ими надо с осторожностью. Например, если провести разрез по-другому, то постоянные Стокса необходимо соответствующим образом изменить. Именно, если линия Стокса имеет вид  $\arg z = r\pi/2 - \pi/4$ , то постоянная Стокса равна

$$i \sqrt{2\pi} 2^{-ia^2/2} e^{(\pi a^2/2)(1/2-r)} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2} \right) \right]^{-1}$$

при четном  $r$  и

$$i \sqrt{2\pi} 2^{ia^2/2} e^{(\pi a^2/2)(r-1/2)} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{ia^2}{2} \right) \right]^{-1}$$

при нечетном  $r$ .

## Глава IV

### ОДНА ТОЧКА ПОВОРОТА

#### 4.1. ВКБ-решения

В гл. II мы видели, что дифференциальное уравнение

$$\omega'' + h^2 q(z, h) \omega = 0$$

часто допускает приближенные ВКБ-решения вида

$$\begin{aligned} (a, z) &= q^{-1/4} \exp\left(ih \int_a^z \sqrt{q} dz\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{h}\right)\right], \\ (z, a) &= q^{-1/4} \exp\left(-ih \int_a^z \sqrt{q} dz\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{h}\right)\right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

в некоторых областях комплексной плоскости  $z$ .

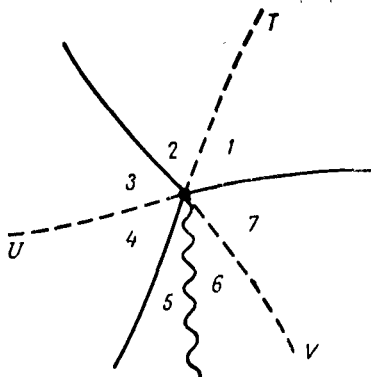
Мы постараемся теперь получить формулы для решений, которые годились бы для всех значений  $z$ . Прежде всего мы рассмотрим самый простой, но в то же время наиболее часто встречающийся случай, когда  $q$  имеет одну точку поворота и ее порядок равен единице. Мы назовем точку  $z_0$  (положим для удобства  $z_0 = 0$ ) *точкой поворота первого порядка*, если в окрестности этой точки  $q$  разлагается в ряд

$$q = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad (4.2)$$

где  $a_1 \neq 0$ . Если первый отличный от нуля коэффициент ряда (4.2) есть  $a_n z^n$ , то точка  $z = 0$  называется *точкой поворота порядка  $n$* .

Формулы (4.1) пригодны в областях, ограниченных сопряженными линиями Стокса  $\operatorname{Re}\left(i \int_0^z \sqrt{q} dz\right) = 0$ , за исключением некоторой окрестности точки поворота. Из точки поворота первого порядка выходят три сопряженные линии Стокса.

Приближения (4.1) при больших  $|z|$  могут оказаться непригодными. Наличие других нулей  $q$  и трудности, связанные с выбором пути интегрирования (мы уже встречались с ними в разд. 2.4), ограничивают области применимости приближений для больших  $|z|$ . Вопрос о том,



Р и с. 12.

в каких именно областях пригодны эти приближения, слишком сложен, чтобы рассматривать его здесь; автор исследовал этот вопрос в своей статье [7].

Следуя методам гл. III, определим линии Стокса уравнением

$$\operatorname{Im} \left( i \int_0^z \sqrt{q} dz \right) = 0.$$

В окрестности точки  $z = 0$  мы имеем, таким образом, семь линий, выходящих из точки  $z = 0$  (см. рис. 12): три сопряженные линии Стокса (сплошные линии), три линии Стокса (пунктир) и разрез (волнистая линия).

В разд. 2.2 мы построили приближение (2.10), пригодное в той части плоскости, которая изображена на рис. 12 (включая точку  $z = 0$ ). Разумеется, это приближение непригодно вблизи других нулей функции  $q$ .

Если  $z \neq 0$ , то, используя асимптотические разложения функции Эйри (см. разд. 3.3), нетрудно показать, что эти приближенные решения пропорциональны ВКБ-решениям.

Теперь мы тем же способом, что и в разд. 3.4, продолжим ВКБ-решения из областей, в которых эти решения убывают (по  $h$ ), через сопряженные линии Стокса, являющиеся границами этих областей, на соседние линии Стокса и введем постоянные Стокса  $T$ ,  $U$ ,  $V$  (см. рис. 12). При этом не следует забывать об остаточном члене, имеющем порядок  $O(1/h)$  по сравнению с главным членом ВКБ-решения, поскольку убывающие слагаемые ничтожно малы по сравнению с остаточным членом растущего решения.

При продолжении решения через разрез в положительном направлении мы, как и в разд. 3.3, заменяем их следующим образом:

$$(0, z) \rightarrow -i(z, 0), \quad (z, 0) \rightarrow -i(0, z). \quad (4.3)$$

Пусть  $\omega = A(0, z) + B(z, 0)$  — решение на сопряженной линии Стокса, разделяющей области 1 и 7, и  $(0, z)$  убывает в области 1. Тогда

$$7: A(0, z)_d + B(z, 0)_s,$$

$$1: A(0, z)_s + B(z, 0)_d,$$

$$2: (A + TB)(0, z)_s + B(z, 0)_d,$$

$$3: (A + TB)(0, z)_d + B(z, 0)_s,$$

$$4: (A + TB)(0, z)_d + (B + UA + UTB)(z, 0)_s,$$

$$5: (A + TB)(0, z)_s + (B + UA + UTB)(z, 0)_d,$$

$$6: -i(A + TB)(z, 0)_s - i(B + UA + UTB)(0, z)_d,$$

$$7: -i(A + TB + VB + VUA + VUTB)(z, 0)_s - \\ -i(B + UA + UTB)(0, z)_d.$$

Приравнивая коэффициенты при  $(0, z)_d$  и  $(z, 0)_s$  в области 7, находим, что

$$\begin{aligned} 1 &= -iU, & 0 &= -i(1 + UT), \\ 0 &= -i(1 + VU), & 1 &= -i(T + V + VUT), \end{aligned}$$

откуда  $T = U = V = i$ . Этот результат очевиден, так как  $T$ ,  $U$ ,  $V$  совпадают с константами Стокса для функции Эйри, а решение уравнения (4.1) выражается через функцию Эйри с помощью формулы (2.9), которая пригодна во всей рассматриваемой области. Этот метод был систематически развит Фарри.



## 4.2. Представление волн

Многие задачи, связанные с распространением волн в однородной или неоднородной среде, описываются уравнением в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{q(x)}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

где  $t$  — время, функция  $q(x)$  определяет свойства среды, в которой распространяются волны, а  $c$  есть скорость распространения волн, если  $q(x) \equiv 1$ .

Если частота постоянна, то  $W = \omega(x) e^{i\omega t}$ , откуда

$$\omega'' + q(x) \frac{\omega^2}{c^2} \omega = 0$$

или

$$\omega'' + h^2 q(x) \omega = 0, \quad (4.4)$$

где  $h = \omega/c$ . В ряде случаев ставится задача о нахождении решения, имеющего данную частоту, и в этом случае функцию  $q(x)$  необходимо заменить функцией  $q(x, h)$ , если некоторые свойства среды зависят от частоты. Например, такая ситуация возникает при распространении электромагнитных волн в изотропной ионизованной среде.

Если  $q(x)$  вещественна, положительна и постоянна, то в среде будут распространяться волны с фазовой скоростью  $c/\sqrt{q}$ ; если же постоянная  $q(x)$  отрицательна, то волны будут экспоненциально затухать и скорость их распространения будет равна бесконечности. В первом случае решение  $\omega$  будет линейной комбинацией экспонент с чисто мнимыми показателями, а во втором — с вещественными показателями. В первом случае среда называется *неплотной*, а во втором — *плотной*.

Если  $q$  — комплексная постоянная, то решения уравнения (4.4) имеют вид

$$\omega = \exp(\pm ih \sqrt{q} x) = \exp[\pm ih(\alpha - i\beta)x],$$

где  $q \equiv (\alpha - i\beta)^2$ . Следовательно,

$$W = e^{-ih\alpha\left(x - \frac{ct}{a}\right)} e^{-h\beta x} \quad (4.5)$$

и

$$W = e^{ih\alpha\left(x + \frac{ct}{a}\right)} e^{h\beta x}. \quad (4.6)$$

Решение (4.5) представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$  с фазовой скоростью  $c/\alpha$  и с затухающим множителем  $e^{-h\beta x}$ ; решение (4.6) представляет собой волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $x$  с той же скоростью и с затухающим множителем  $e^{h\beta x}$ . При этом существенно, чтобы  $\alpha$  и  $\beta$  были положительны, для того чтобы затухание имело место в направлении распространения волны. Поэтому число  $\sqrt{q} \equiv \alpha - i\beta$  должно лежать во втором или в четвертом квадранте.

Если  $q(x)$  не есть тождественная постоянная при условии, что сопряженные линии Стокса совпадают с вещественной осью, ВКБ-решения представляют собой волны, распространяющиеся независимо друг от друга. Если же ВКБ-решения не существуют (например, если  $h$  недостаточно велико) в некоторой области  $x$ , то тогда нельзя рассматривать волну как сумму двух невзаимодействующих волн, движущихся по оси  $x$  налево и направо.

На вещественной оси имеем

$$W = we^{i\omega t} = q^{-1/4} \exp\left(\pm ih \int^x \sqrt{q} dx\right) e^{i\omega t}.$$

Обычно, исходя из физических соображений, приходится интегрировать по контуру, лежащему в комплексной плоскости, но имеющему своим концом точку  $x$  вещественной оси. Тогда

$$W = q^{-1/4} \exp\left(\pm ih \int_a^x \sqrt{q} dz\right) e^{i\omega t}. \quad (4.7)$$

В общем случае как вещественная, так и мнимая части интеграла  $\int_a^x \sqrt{q} dz$  отличны от нуля, так что и аргумент (фаза), и модуль (амплитуда) функции  $W$  изменяются при изменении  $x$ . Этот интеграл называется обобщенным (комплексным) *фазовым множителем*.

### 4.3. Направление распространения волн

Если

$$ih \int_a^z \sqrt{q} dz \equiv u(x, y) + iv(x, y),$$

то экспонента, входящая в выражения для  $W$ , имеет вид  $\exp [u(x, y) + iv(x, y) + i\omega t]$ . Множитель  $\exp [u(x, 0)]$  есть амплитуда волны на вещественной оси, множитель  $\exp [iv(x, 0) \pm i\omega t]$  — ее фаза. Как амплитуда, так и фаза в общем случае зависят от  $x$ .

Фаза в точке  $(x + \delta x, t + \delta t)$  с точностью до членов первого порядка малости равна

$$i \left[ v(x, 0) + \delta x \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} \right] + i\omega t + i\omega \delta t.$$

Она совпадает с исходной фазой (конечно, амплитуда при этом меняется), если

$$\delta x \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} + \omega \delta t = 0,$$

откуда мы находим локальную фазовую скорость

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x}.$$

Следовательно, если  $\partial v(x, 0)/\partial x < 0$ , то волна распространяется в положительном направлении оси  $Ox$ , если же  $\partial v(x, 0)/\partial x > 0$ , то в отрицательном направлении оси  $Ox$ . Для второго ВКБ-решения направление распространения волны противоположно вышеуказанному.

Рассмотрим, в частности, случай, когда сопряженная линия Стокса совпадает с частью вещественной оси, и сформулируем правило, которое позволяет найти направление распространения волн  $(a, x)$  и  $(x, a)$ .

Рассмотрим волну  $(a, x)$ . Заметим, что на той части оси  $Ox$ , которая является сопряженной линией Стокса,  $u(x, 0) = 0$ . Функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнениям Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если  $(a, x)$  представляет собой волну, которая движется направо (т. е. направление ее распространения совпадает

с положительным направлением оси  $Ox$ ), то  $\partial v(x, 0)/\partial x < 0$  и, следовательно,  $\partial u(x, 0)/\partial y > 0$ . Тогда при  $z$ , близких к вещественной оси,

$$u(x, \delta y) = u(x, 0) + \delta y \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} + \dots = \delta y \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} + \dots,$$

так как  $u(x, 0) = 0$ . Следовательно, если  $\delta y < 0$ , то  $u(x, \delta y) < 0$ . Иначе говоря,  $(a, x)$  убывает (по  $h$ ), когда  $\delta y < 0$ , т. е. когда  $z$  лежит ниже вещественной оси.

Теперь мы в состоянии сформулировать следующее правило.

На сопряженной линии Стокса, лежащей на вещественной оси, выражение  $(a, x)$  представляет собой волну, движущуюся направо, если  $(a, z)$  убывает, когда  $z$  лежит ниже вещественной оси (вблизи сопряженной линии Стокса). Если же  $(a, x)$  представляет собой волну, движущуюся налево, то  $(a, z)$  убывает, когда  $z$  лежит выше вещественной оси. То же самое верно и для  $(x, a)$ , если всюду заменить направление распространения волны на противоположное.

Это правило называется правилом Хединга<sup>1)</sup>, так как, по-видимому, оно было впервые сформулировано автором [1]. Следует заметить, что в этом правиле при замене  $e^{i\omega t}$  на  $e^{-i\omega t}$  направление распространения волны необходимо заменить на противоположное.

#### 4.4. Сохранение потока энергии

Пусть  $q(x)$  вещественна при вещественных  $x$ . Тогда на вещественной оси

$$\omega'' + h^2 q \omega = 0,$$

$$\omega^{*''} + h^2 q \omega^* = 0,$$

где звезда означает комплексное сопряжение. Умножая первое уравнение на  $\omega^*$ , второе — на  $\omega$  и вычитая одно из другого, получаем

$$\omega'' \omega^* - \omega^{*''} \omega = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx} (\omega' \omega^* - \omega^{*'} \omega) = 0,$$

<sup>1)</sup> См. Бадден [3, стр. 442].

откуда

$$\operatorname{Im}(\omega' \omega^*) = \text{const}, \quad (4.8)$$

или

$$\operatorname{Im}(W' W^*) = \text{const}.$$

Этот закон сохранения можно интерпретировать как закон сохранения потока энергии, если, конечно, физическая размерность  $W$  такова, что  $W' W^*$  имеет размерность потока энергии. При этом сохраняется среднее по времени от потока энергии. Если  $W$  — напряженность электрического поля, а  $W'$  — напряженность магнитного поля и вектор  $W'$  ортогонален вектору  $W$  на фронте волны, то вектор  $[W' \times W^*]$  пропорционален комплексному вектору Пойнтинга.

Если функция  $q(x)$  вещественна, то среда называется средой *без потерь* (такая среда называется также непоглощающей). Если же функция  $q(x)$  комплексна на оси  $Ox$ , то закон сохранения типа (4.8) не имеет места.

Если  $q(x) > 0$  и если

$$\omega = A(a, x) + B(x, a),$$

где  $A$  и  $B$  вещественны, а  $q(a) > 0$ , то

$$\omega^* = A(x, a) + B(a, x).$$

Далее,

$$\omega' = ihA \sqrt{q}(a, x) - ihB \sqrt{q}(x, a)$$

(достаточно продифференцировать только экспоненту, чтобы найти  $\omega'$  с требуемой степенью точности). Тогда

$$\omega' \omega^* = ih(A^2 - B^2).$$

Если  $A^2 \neq B^2$ , то плотность потока энергии постоянна. Если же  $A = \pm B$ , то

$$\omega = A[(a, x) + (x, a)] = 2Aq^{-1/4} \cos\left(h \int_a^x \sqrt{q} dx\right)$$

или

$$\omega = A[(a, x) - (x, a)] = 2Aiq^{-1/4} \sin\left(h \int_a^x \sqrt{q} dx\right),$$

и решение  $\omega$  описывает стоячие волны, которые не переносят энергии.

Если  $q(x) < 0$ , то мы можем написать  $q(x) = e^{i\pi r(x)}$ ,  $r(x) > 0$ . Тогда если

$$\omega = A(a, x) + B(x, a),$$

то

$$\omega^* = Ai(a, x) + Bi(x, a).$$

Далее, как и ранее,

$$\omega' = ih A \sqrt{q}(a, x) - ihB \sqrt{q}(x, a),$$

так что

$$\omega' \omega^* = -h [A^2 \sqrt{q}(a, x)^2 - B^2 \sqrt{q}(x, a)^2].$$

Множитель  $\sqrt{q}$  сокращается, и, таким образом, произведение  $\omega' \omega^*$  вещественно, так что  $\text{Im}(\omega' \omega^*) = 0$ . Поэтому в плотной среде нет переноса энергии, если  $A$  и  $B$  вещественны.

Если же  $A$  и  $B$  комплексны, то приведенные выше рассуждения можно слегка изменить так, что они будут пригодны и в этом случае. Результаты останутся неизменными (тем не менее см. разд. 4.9).

#### 4.5. Формулы связи Джеффриса

Первоначальные формулы связи, полученные Джеффрисом [1], были сформулированы в случае, когда  $q$  вещественна при вещественных  $x$  и имеет простой нуль в точке  $x = 0$ . Джеффрис исследовал приближенные решения (с остаточным членом вида  $O(1/h)$ ) уравнения

$$\omega'' + h^2 q(x, h) \omega = 0$$

в предположении, что функция  $q(x, h)$  такова, что асимптотические решения (ВКБ-решения) пригодны и при  $x > 0$ , и при  $x < 0$ . Мы будем считать, что все эти условия выполнены, хотя мы можем получить и более общее правило, устанавливающее связь между значениями решения на линии Стокса и на сопряженной линии Стокса, являющейся ее продолжением (см. разд. 4.1, рис. 12).

Пусть  $x > 0$  — линия Стокса,  $x < 0$  — сопряженная линия Стокса, разрез лежит ниже вещественной оси (см. рис. 13).

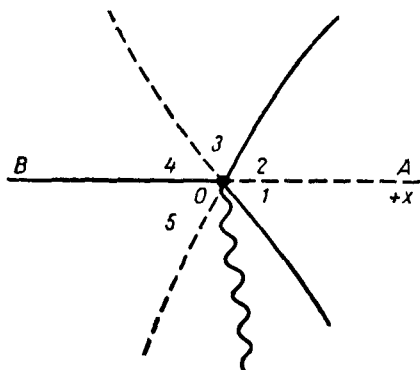
Случай (I), решение убывает на линии  $OA$ . Пусть  $(x, 0)$  убывает на  $OA$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} 1, 2: & (z, 0)_s, \\ 3: & (z, 0)_d, \\ 4: & (z, 0)_d + i(0, z)_s, \\ OB: & (x, 0) + i(0, x). \end{aligned}$$

Следуя Джеффрису, мы используем символ  $\leftrightarrow$ , чтобы обозначить эту связь. Таким образом,

$$(x, 0) + i(0, x) \leftrightarrow (x, 0)_s. \quad (4.9)$$

Согласно полученным в нашей книге результатам, мы можем единственным образом продолжить решение слева



Р и с. 13.

направо или справа налево, так как и убывающее, и нейтральное приближенное решение единственным образом определяет решение уравнения (4.1). Джеффрис, однако, не использовал символ  $\leftrightarrow$  в этом смысле. Он требовал, чтобы при всех  $x$  (включая  $x = 0$ ) существовало решение, имеющее при больших  $|x|$  такую асимптотику слева и справа от точки  $x = 0$ . Обозначения Джеффриса часто

неправильно понимались другими авторами, вследствие чего некоторые авторы получили неправильные результаты. Возможно, лучше было бы сформулировать правила Джеффриса таким образом: существует решение  $f(x)$  уравнения (4.1), такое, что

$$(x, 0) + i(0, x) \leftarrow f(x) \rightarrow (x, 0)_s.$$

Более того, первоначальные обозначения Джеффриса для убывающего решения были таковы, что некоторые авторы, не разбирая подробно его рассуждения, применяли эти обозначения к растущему решению. Другие авторы считали, что Джеффрис ошибался, особенно в случае (II), однако при более внимательном изучении его работы выяснилось, что они были неправы.

*Случай (II), решение растет на линии OA.* Решение уравнения (4.1), растущее при  $x > 0$ , не определяется единственным образом своей асимптотикой. Поэтому мы зададим его асимптотику на сопряженной линии Стокса, разделяющей области 2 и 3:

$$\omega = (0, z) + k(z, 0),$$

где  $k$  — произвольная постоянная. Тогда имеем:

$$2: (0, z)_d + k(z, 0)_s,$$

$$1: (0, z)_d + (k - i)(z, 0)_s,$$

$$3: (0, z)_s + k(z, 0)_d,$$

$$4: (1 + ik)(0, z)_s + k(z, 0)_d,$$

$$OB: (1 + ik)(0, x) + k(x, 0).$$

На линии  $OA$  имеем  $\omega = (0, x)_d$ , поскольку убывающим решением можно пренебречь, а на линии  $OB$  его необходимо учитывать. Джеффрис [1, 2] опубликовал два различных варианта своей второй формулы связи, не объясняя при этом, какому из этих вариантов надо отдать предпочтение (за исключением, правда, беглого замечания, Джеффрис [4], что если пользоваться вторым вариантом, то «нельзя получить неправильный результат»).

Рассмотрим частный случай, когда  $k = i/2$ ; тогда  $(0, x)_d$  на линии  $OA$  равно полусумме значений  $\omega$  слева и справа от  $OA$ , т. е. в областях 1 и 2.



На линии  $OB$

$$\omega = \frac{1}{2}(0, x) + \frac{i}{2}(x, 0).$$

Джеффрис обычно писал

$$\frac{1}{2}(0, x) + \frac{i}{2}(x, 0) \leftrightarrow (0, x)_d,$$

подразумевая под этим существование решения  $f(x)$  уравнения (4.1), обладающего указанными двумя асимптотическими разложениями при  $x > 0$  и при  $x < 0$ , а вовсе не то, что, продолжая это выражение справа налево, мы получаем всегда один и тот же результат. Лучше было бы написать

$$\frac{1}{2}(0, x) + \frac{i}{2}(x, 0) \leftarrow f(x) \rightarrow (0, x)_d.$$

С другой стороны, следуя современным авторам, мы можем воспользоваться стрелкой, чтобы указать направление, в котором применение формулы приводит к однозначному результату:

$$\frac{1}{2}(0, x) + \frac{i}{2}(x, 0) \rightarrow (0, x)_d. \quad (4.10)$$

Это и есть второй вариант формулы Джеффриса.

Его первый вариант можно получить, если умножить (4.9) на  $\sqrt{3}/2$  и вычесть из (4.10), что дает нам

$$\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(0, x) + \frac{1}{2}(i - \sqrt{3})(x, 0) \rightarrow (0, x)_d, \quad (4.11)$$

поскольку в правой части формулы следует оставить только растущее слагаемое. Иначе говоря, мы выбрали  $k = (i - \sqrt{3})/2$  в случае (II).

Положим  $\arg q = -\pi$  на  $OA$  и  $\arg q = 0$  на  $OB$ . Далее, при  $x > 0$  положим

$$h \int_a^x \sqrt{q} dx = -ih \int_0^x \sqrt{-q} dx = -iM$$

и пусть для определенности  $M > 0$ . Положим также при  $x < 0$

$$h \int_0^x \sqrt{q} dx = -L,$$

где, очевидно,  $L > 0$ .

Тогда формула (4.9) примет вид

$$q^{-1/4} e^{iL} + i q^{-1/4} e^{-iL} \leftrightarrow [e^{-i\pi} (-q)]^{-1/4} e^{-M},$$

или, после умножения на  $e^{-i\pi/4}$ ,

$$q^{-1/4} e^{iL - i\pi/4} + q^{-1/4} e^{-iL + i\pi/4} \leftrightarrow (-q)^{-1/4} e^{-M},$$

откуда

$$2q^{-1/4} \sin\left(L + \frac{\pi}{4}\right) \leftrightarrow (-q)^{-1/4} e^{-M}. \quad (4.12)$$

Аналогично формула (4.10) примет вид

$$\frac{1}{2} q^{-1/4} e^{-iL} + \frac{i}{2} q^{-1/4} e^{iL} \rightarrow [e^{-i\pi} (-q)]^{-1/4} e^M,$$

откуда

$$q^{-1/4} \cos\left(L + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow (-q)^{-1/4} e^M. \quad (4.13)$$

Умножая (4.12) на  $\sqrt{3}/2$  и вычитая из (4.13), получаем, что формула (4.10) примет вид

$$q^{-1/4} \cos\left(L + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} q^{-1/4} \sin\left(L + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow (-q)^{-1/4} e^M,$$

или

$$2q^{-1/4} \cos\left(L + \frac{7\pi}{12}\right) \rightarrow (-q)^{-1/4} e^M. \quad (4.14)$$

Формулы (4.9) и (4.10) полезны при исследовании решения в комплексной плоскости (но в этом случае их легко можно заново вывести в каждой задаче), формулы (4.12) и (4.13) — на вещественной оси; формулы же (4.11) и (4.14) никогда не использовались.

Следует указать, что работы Джеффриса необходимо читать с осторожностью, так как и его идеи, и его обозначения изменялись с течением времени.

Дальнейшие формулы связи можно получить с помощью постоянных Стокса. Волна, движущаяся направо

вдоль  $OB$ , убывает в области 5 и растет в области 4 в соответствии с правилом, установленным в разд. 4.3. Следовательно, соответствующее решение имеет вид

$$\begin{aligned} OB: & (x, 0), \\ 4: & (z, 0)_d, \\ 3: & (z, 0)_d - i(0, z)_s, \\ 2: & (z, 0)_s - i(0, z)_d, \end{aligned}$$

откуда следует формула связи

$$(x, 0) \rightarrow -i(0, x)_d.$$

Аналогично волна, распространяющаяся вдоль  $OB$  налево, имеет вид

$$\begin{aligned} OB: & (0, x), \\ 4: & (0, z)_s, \\ 3: & (0, z)_s, \\ 2: & (0, z)_d, \end{aligned}$$

откуда следует формула связи

$$(0, x) \rightarrow (0, x)_d.$$

#### 4.6 Коэффициенты отражения

Пусть  $q(z, h)$  обладает следующими свойствами:

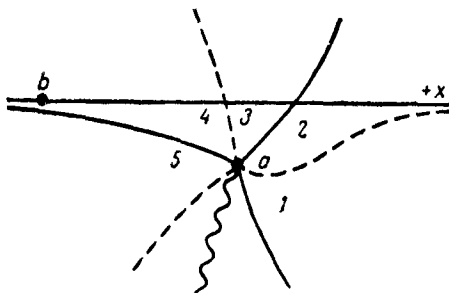
(I)  $q(z, h) \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow -\infty$ ,  $z$  вещественно (можно также считать, что  $q(z, h) \rightarrow c > 0$ );

(II)  $\operatorname{Re}[h^2 q(z, h)]$  является большой отрицательной величиной при больших положительных  $z$ .  $q(z, h)$  имеет комплексную точку поворота  $z = a$  первого порядка, и одна из сопряженных линий Стокса, выходящих из точки  $z = a$ , имеет отрицательную полуось вещественной оси своей асимптотой, а положительная полуось лежит в области, заключенной между остальными сопряженными линиями Стокса, выходящими из точки  $z = a$  (см. рис. 14).

Выберем в качестве начала отсчета фазы точку  $z = = b < 0$ , в которой  $q \approx 1$ ; тогда решения  $(b, x)$  и  $(x, b)$  представляют собой волны, движущиеся вдоль отрицательной части вещественной полуоси, и при больших отрица-

тельных  $x$  пропорциональны  $e^{\pm ihx}$ . Выберем ветвь  $\sqrt{q(z)}$  таким образом, чтобы выражение  $(b, x)$  представляло собой волну,двигающуюся налево, а  $(x, b)$  — направо.

Назовем выражение  $(x, b)$  *падающей волной* (по отношению к началу отсчета фазы, точке  $z=b$ ). Так как среда является поглощающей при  $x=+\infty$ , то из физических соображений ясно, что при  $x \rightarrow +\infty$  должно быть  $\omega(x) \rightarrow 0$ , так что решение  $\omega$  убывает при  $x \rightarrow +\infty$  (более точно, в областях 1 и 2). Пусть  $(z, b)_s$  — решение,



Р и с. 14.

убывающее в областях 1 и 2. Продолжим это решение на отрицательную полуось; при этом мы должны взять  $(z, a)$ , а не  $(z, b)$ , так как постоянная Стокса  $i$  применяется в том случае, когда фаза отсчитывается от точки поворота. Тогда мы имеем:

$$1, 2: (z, b)_s \equiv [a, b](z, a)_s,$$

$$3: [a, b](z, a)_d,$$

$$4: [a, b](z, a)_d + i[a, b](a, z)_s,$$

$$-Ox: (x, b) + i[a, b]^2(b, x),$$

где  $(x, b)$  — падающая волна, движущаяся направо, а  $(b, x)$  — отраженная волна, движущаяся налево. Коэффициент при  $(b, x)$  называется *коэффициентом отражения* и обозначается через  $r$ . Этот коэффициент равен

$$r = i[a, b]^2 = i \exp \left( 2ih \int_a^b \sqrt{q} dz \right). \quad (4.15)$$

Если  $a=0$  и функция  $q(x)$  вещественна при вещественных  $x$ , то

$$r = i [0, b]^2 = i \exp \left( -2ih \int_b^0 \sqrt{q} dz \right), \quad (4.16)$$

где  $[0, b]$  — экспонента от чисто мнимой величины. Следовательно,  $|r|=1$ .

Фактический математический процесс отражения происходит в окрестности точки  $z=a$ , где функциональный характер решения существенно изменяется. Физически процесс отражения происходит на некоторой части вещественной оси, близкой к точке  $z=a$ . То обстоятельство, что фазовый интеграл в (4.16) берется от точки  $z=0$ , привело к тому, что многие авторы считали, что волна доходит до точки  $z=0$  и отражается как бы от зеркала, поставленного в этой точке. Однако это является неправильной интерпретацией формулы (4.16). Верхний предел интегрирования  $z=0$  возникает из-за изменения начала отсчета фазы и вовсе не означает, что волна доходит до точки  $z=0$ ; на самом деле ВКБ-решения непригодны вблизи точки  $z=0$ , где необходимо воспользоваться более сложным решением (2.9). В процессе отражения убывающее решение вблизи точки поворота превращается в распространяющиеся волны.

#### 4.7. Пример

Рассмотрим уравнение

$$\omega'' + h^2(1 - e^{i\varepsilon} e^{hz}) \omega = 0, \quad (4.17)$$

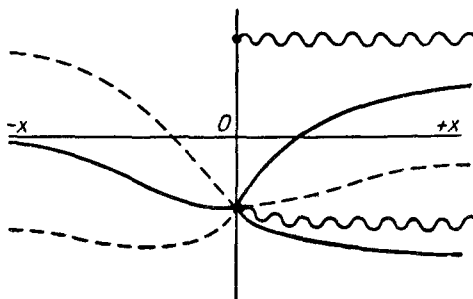
где  $0 \leq \varepsilon \leq \pi/2$ ,  $k > 0$ . Точки поворота определяются из уравнения

$$q \equiv 1 - e^{i\varepsilon} e^{hz} = 0,$$

откуда  $z = i(2n\pi - \varepsilon)/k$ ,  $n$  — любое целое число. Таким образом, на мнимой оси расположено бесконечно много точек поворота и две соседние точки поворота отстоят друг от друга на расстоянии  $2\pi i/k$ . Только одна сопряженная линия Стокса имеет своей асимптотой отрицатель-

ную вещественную полуось  $-Ox$ , и она выходит из точки  $z_0 = -i\epsilon/k$  (см. рис. 15), что нетрудно показать, исследовав сопряженные линии Стокса.

Проведем разрезы так, как показано на рис. 15. Тогда мы сможем использовать решения, построенные нами в



Р и с. 15.

разд. 2.7, пример 1; необходимо только заменить  $z$  на  $z + i\epsilon/k$ . Тогда на полуоси  $-Ox$

$$\left(-\frac{i\epsilon}{k}, x\right) = -i \exp\left[\frac{2ih}{k}(-1 + \ln 2)\right] e^{-ih(x+i\epsilon/k)} \quad (\rightarrow),$$

$$\left(x, -\frac{i\epsilon}{k}\right) = -i \exp\left[-\frac{2ih}{k}(-1 + \ln 2)\right] e^{ih(x+i\epsilon/k)} \quad (\leftarrow).$$

Из (4.15) получаем  $r = i$ , если положить  $b = z_0$ .

Используя в качестве основных волн  $e^{\pm ihx}$ , получаем следующее выражение для  $r$ :

$$r = i \exp\left[-\frac{4ih}{k}(1 + \ln 2)\right] e^{-2h\epsilon/k}. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.17) допускает точное решение. Полагая в (4.17)

$$v = \frac{2hi}{k} e^{hz/2} e^{i\epsilon/2},$$

получаем уравнение Бесселя порядка  $2hi/k$ :

$$\omega'' + \frac{\omega'}{v} + \left[1 - \left(\frac{2hi}{kv}\right)^2\right] \omega = 0.$$

Решение, которое стремится к 0 при  $z \rightarrow +\infty$ , есть

$$\omega = H_{2hi/k}^{(1)}(v).$$

Выражая функцию Ханкеля через функцию Бесселя  $J_{\pm 2hi/k}(v)$  и используя асимптотические разложения функций Бесселя, находим, что первые два члена этих рядов дают при малых  $v$  две волны  $e^{\pm ihz}$ . Тогда коэффициент отражения равен

$$r = \frac{\Gamma\left(-\frac{2hi}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2hi}{k}\right)} \left(\frac{h}{k}\right)^{4hi/k} e^{-2\epsilon h/k}.$$

При больших  $h$  или при малых  $k$  мы можем воспользоваться асимптотикой гамма-функции:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi z} e^{-zz}, \quad |\arg z| < \pi$$

(см. приложение). Тогда

$$r \sim i2^{-4hi/k} e^{4hi/h} e^{-2\epsilon h/k},$$

что совпадает с формулой (4.18), полученной методом ВКБ.

Очевидно, что  $|r| = e^{-2\epsilon h/k} < 1$ , за исключением случая  $\epsilon = 0$ , когда в среде отсутствует поглощение.

#### 4.8. Вычисление коэффициентов отражения методом фазовых интегралов

Вдохновляясь замечательными достижениями квантовой теории, Экерслея всегда использовал различные методы для нахождения отраженной волны, но он не приводил никаких доказательств применимости этих методов. По-видимому, оправдание его метода заключается в следующем.

Проведем разрез таким образом, чтобы его конец совпадал с частью  $-Ox$ , и рассмотрим падающую и отраженную волны непосредственно под разрезом (см. рис. 16). Выберем точки  $b$  и  $z$ , лежащие на разрезе. Решение

$\omega = (z, b)_s$ , убывающее в областях 1 и 2, имеет вид

$$1, 2: (z, b)_s \equiv [a, b](z, a)_s,$$

$$3: [a, b](z, a)_d,$$

$$4: [a, b](z, a)_d - i[a, b](a, z)_s \equiv \\ \equiv (z, b)_d - i[a, b]^2(b, z)_s.$$

Поскольку  $(b, z)$  есть падающая волна, мы разделим  $\omega$  на  $-i[a, b]^2$  и получим

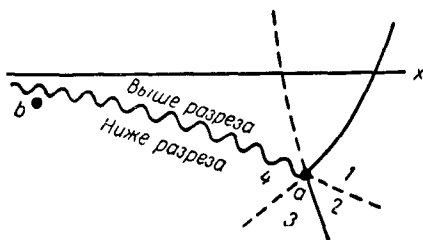
$$\omega = (b, z) + i[b, a]^2(z, b),$$

$$\omega = q^{-1/4}([b, z] + i[b, a]^2[z, b]),$$

так как в соответствии с обозначениями, введенными в разд. 2.7, мы можем написать

$$(b, z) \equiv q^{-1/4}[b, z] \text{ и } (z, b) \equiv q^{-1/4}[z, b].$$

Все интегралы вычислены по нижнему берегу разреза. С другой стороны, если  $[z, b]$  и  $[b, a]$  вычислить на верхнем



Р и с. 16.

берегу разреза (множитель  $q^{-1/4}$  при этом не меняется), то, поскольку  $\sqrt{q}$  просто изменит знак, мы получим тождества

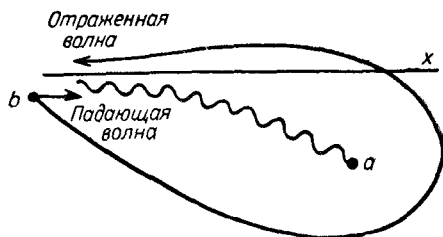
$$[z, b]_- = [b, z]_+, \quad [b, a]_- = [a, b]_+$$

(+, - означают соответственно, что интегралы берутся по верхнему и нижнему берегам разреза). Следовательно,  $\omega = q^{-1/4}([b, z]_- + i[b, a]_- [a, b]_+ [b, z]_+) = q^{-1/4}([b, z]_- + i[b, z]_+)$ , где интеграл, входящий в  $[b, z]_+$ , есть интеграл по разрезу, взятый в положительном направлении. Действительно,



$[b, a]_+ \cdot [a, b]_+ \cdot [b, z]_+$  — экспонента от интеграла от  $\sqrt{q(z)}$  по пути от  $b$  до  $z$  вдоль разреза (см. рис. 17), причем  $b$  лежит на верхнем, а  $z$  на нижнем берегах разреза.

Иначе говоря, падающая волна  $q^{-1/4}[b, z]$  преобразуется в соответствующую отраженную волну (умноженную на коэффициент отражения без фазового множителя  $i$ )



Р и с. 17.

с помощью интегрирования по разрезу; множитель  $q^{-1/4}$  при этом не меняется. Этот интеграл по разрезу называется *комплексным фазовым интегралом*, откуда и происходит название «метод фазовых интегралов».

#### 4.9. Сохранение потока энергии при переходе через точку поворота

В случае (II) разд. 4.5 мы видели, что на линии Стокса убывающее решение нельзя выделить на фоне большого решения. Однако принцип сохранения энергии в среде без поглощения дает нам возможность высказать нечто более определенное об этом убывающем слагаемом.

Пусть общее решение имеет вид

$$w = A(0, x) + B(x, 0)$$

на сопряженной линии Стокса  $OB$  (см. рис. 13); тогда

$$4: A(0, z)_s + B(z, 0)_d,$$

$$3: (A - iB)(0, z)_s + B(z, 0)_d,$$

$$2: (A - iB)(0, z)_d + B(z, 0)_s,$$

$$1: (A - iB)(0, z)_d - iA(z, 0)_s.$$

Мы постулируем, что при переходе через линию Стокса  $OA$  в положительном направлении добавляется убывающее решение, умноженное на  $Ti$  и на коэффициент при растущем решении, и постараемся найти  $T$ . Имеем на линии  $OA$ :

$$(A - iB)(0, x)_d + [B - iT(A - iB)](x, 0)_s.$$

Воспользуемся законом сохранения (4.8):

$$\text{Im}(\omega' \omega^*) = \text{const.}$$

Положим  $\arg q = -\pi$  на  $OA$  и  $\arg q = 0$  на  $OB$ . Тогда на  $OB$

$$\omega^* = A^*(x, 0) + B^*(0, x)$$

и

$$\omega' = Aih\sqrt{q}(0, x) - Bih\sqrt{q}(x, 0)$$

(при этом мы дифференцируем только экспоненты). Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega' \omega^* &= ih\sqrt{q} \{A(0, x) - B(x, 0)\} \{A^*(x, 0) + B^*(0, x)\} = \\ &= ih \{AA^* - BB^* + AB^*[0, x]^2 - BA^*[x, 0]^2\}. \end{aligned}$$

Выражения  $AB^*[0, x]^2$  и  $BA^*[x, 0]^2$  комплексно сопряжены, поэтому их разность есть чисто мнимая величина, и мы получаем

$$\text{Im}(\omega' \omega^*) = h(AA^* - BB^*). \quad (4.19)$$

На линии  $OA$ , где  $\arg q = -\pi$ , легко видеть, что

$$(0, x)_d^* = -i(0, x)_d, \quad (x, 0)_s^* = -i(x, 0)_s.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \omega' \omega^* &= ih\sqrt{q} \{(A - iB)(0, x)_d - [B - iT(A - iB)](x, 0)_s\} \times \\ &\times (-i) \{(A^* + iB^*)(0, x)_d + [B^* + iT^*(A^* + iB^*)](x, 0)_s\} = \\ &= h \{(A - iB)[0, x]_d - [B - iT(A - iB)][x, 0]_s\} \times \\ &\times \{(A^* + iB^*)[0, x]_d + [B^* + iT^*(A^* + iB^*)][x, 0]_s\} = \\ &= h \{(A - iB)[B^* + iT^*(A^* + iB^*)] - \\ &- (A^* + iB^*)[B - iT(A - iB)] + C\}, \end{aligned}$$

где  $C$  вещественно. Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\omega'\omega^*) &= 2h \operatorname{Im} \{(A - iB)[B^* + iT^*(A^* + iB^*)]\} = \\ &= 2h [\operatorname{Im}(AB^*) - BB^* + (\operatorname{Re} T)(AA^* + BB^*) - \\ &\quad - (\operatorname{Re} T) 2 \operatorname{Im}(AB^*)]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Приравнивая правые части равенств (4.19) и (4.20), получаем

$$[AA^* + BB^* - 2\operatorname{Im}(AB^*)](1 - 2\operatorname{Re} T) = 0,$$

откуда  $\operatorname{Re} T = 1/2$ , если не имеет место равенство

$$AA^* + BB^* - 2 \operatorname{Im}(AB^*) = 0.$$

Если же это равенство выполняется, то

$$(\operatorname{Re} A - \operatorname{Im} B)^2 + (\operatorname{Im} A - \operatorname{Re} B)^2 = 0,$$

т. е.

$$B = iA^*,$$

а это означает просто, что перенос энергии отсутствует, так как  $AA^* - BB^* = 0$ .

Таким образом, любая постоянная Стокса  $T$ , имеющая вид  $T = i(1/2 + ik)$ , где  $k$  — произвольное вещественное число, обеспечивает сохранение потока энергии при переходе через точку поворота. В частности, если  $k = 0$ , то  $T = i/2$ , и это простейший коэффициент Стокса, который обеспечивает сохранение потока энергии. Конечно, это не позволяет нам найти значение убывающего решения на линии Стокса. Нетрудно видеть, что значение  $T = i/2$  равно полусумме двух коэффициентов при решениях, убывающих соответственно слева и справа от линии Стокса.

Во втором варианте формулы связи Джеффриса (4.10) используется именно это значение коэффициента Стокса на линии Стокса, что мы уже видели в разд. 4.5. Следовательно, при использовании формулы Джеффриса в неправильном направлении поток энергии тем не менее сохраняется.

Это важное обстоятельство, которое, по всей видимости, ускользнуло от внимания многих авторов, занимающихся методом ВКБ, объясняет, почему Джеффрис утверждал, что применение этой формулы не может привести к непра-

вильным результатам. Дело в том, что она применялась обычно к задачам о распространении волн в среде без потерь (подробности см. в гл. V). Автор настоящей книги неоднократно указывал, что использование формулы (4.10) не в том направлении, в котором она применима (Б. Джеффрис), привело к правильному результату только благодаря счастливому совпадению.

Следует заметить, что даже в том случае, когда перенос энергии отсутствует, мы можем полагать  $T = i/2$ , однако это не обязательно.

#### 4.10. Кратные точки поворота

Если  $q$  имеет кратный нуль, то изложенная выше теория, использующая постоянную Стокса  $i$ , неприменима. Случай кратного нуля исследован Голдстейном [1]; мы исследуем этот случай, используя аппарат, развитый выше.

В качестве уравнения сравнения (см. разд. 2.2) необходимо взять уравнение

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} = \xi^n X. \quad (4.21)$$

Асимптотика решений этого уравнения вдали от точки  $\xi = 0$  совпадает с обычными ВКБ-решениями. Поэтому постоянные Стокса для уравнения (4.21) совпадают с постоянными Стокса исходного уравнения.

Полагая

$$X = \sqrt{\xi} Y, \quad \eta = \frac{2i}{n+2} \xi^{(n+2)/2},$$

сведем уравнение (4.21) к уравнению Бесселя порядка  $1/(n+2)$ :

$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dY}{d\eta} + \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2 \eta^2}\right) Y = 0.$$

Оно имеет решение

$$X = \sqrt{\xi} J_{1/(n+2)} \left( \frac{2i}{n+2} \xi^{(n+2)/2} \right),$$

постоянные Стокса для этого решения равны  $2i \cos[\pi/(n+2)]$  [см. (3.14)].

Следовательно,  $T = 2i \cos [\pi/(n+2)]$  для всех линий Стокса, выходящих из точки поворота порядка  $n$  исходного уравнения. В частности, при  $n=2$

$$T = 2i \cos \frac{\pi}{4} = i\sqrt{2}. \quad (4.22)$$

Сопряженные линии Стокса определяются уравнением

$$\operatorname{Re} \left( ih \int_0^z V \bar{q} dz \right) = 0.$$

Если  $q \sim z^n$  при малых  $z$  (постоянный множитель при  $z^n$  мы опускаем), то при малых  $z$  сопряженные линии Стокса определяются уравнением

$$\operatorname{Re} (iz^{(n+2)/2}) = 0,$$

откуда следует, что из точки поворота порядка  $n$  выходят  $n+2$  сопряженные линии Стокса. При  $n=2$  из точки поворота выходят четыре сопряженные линии Стокса.

*Правило перехода через разрез.* Пусть  $\omega = (0, z)$  и разрез проведен по лучу  $\arg z = re^{i\delta}$ . Тогда на одном берегу разреза

$$q = (re^{i\delta})^n f(z) \quad \text{и} \quad V\bar{q} = (re^{i\delta})^{n/2} V\bar{f} \quad (f(0) \neq 0),$$

откуда

$$(0, z) = (re^{i\delta})^{-n/4} f^{-1/4} \exp \left( ih \int_0^z V \overline{re^{i\delta} f} dz \right),$$

а на другом берегу разреза  $z = re^{i\delta-2\pi i}$ , так что  $(0, z)$  имеет вид

$$\begin{aligned} (ze^{2\pi i})^{-n/4} f^{-1/4} \exp \left( ih \int_0^z V \overline{ze^{2\pi i} f} dz \right) = \\ = \begin{cases} i(-1)^{(n+1)/2} (z, 0), & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (-1)^{n/2} (0, z), & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (4.23) \end{aligned}$$

Для  $(z, 0)$  имеет место аналогичное правило. Рассмотрим, в частности, функцию  $q(x)$ , которая вещественна при вещественных  $x$  и для которой точка  $x=0$  является точкой поворота порядка 2.

Случай (I). Вещественная ось является сопряженной линией Стокса.

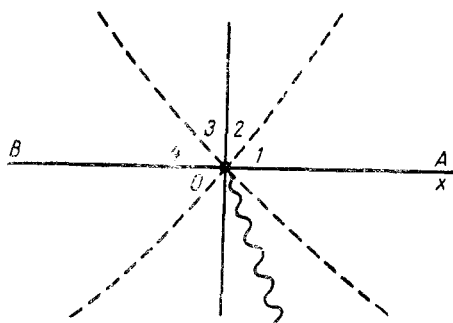


Рис. 18.

Общее решение уравнения на линии  $OA$  (см. рис. 18) имеет вид

$$\omega = C(0, x) + D(x, 0)$$

(остаточный член мы, как всегда, опускаем). Тогда

$$1: \omega = C(0, z)_s + D(z, 0)_d,$$

$$2: (C + i\sqrt{2}D)(0, z)_s + D(z, 0)_d,$$

$$3: (C + i\sqrt{2}D)(0, z)_d + D(z, 0)_s,$$

$$4: (C + i\sqrt{2}D)(0, z)_d + [D + i\sqrt{2}(C + i\sqrt{2}D)](z, 0)_s,$$

$$OB: (C + i\sqrt{2}D)(0, x) + (i\sqrt{2}C - D)(x, 0),$$

откуда следуют две формулы связи:

$$(0, x) + i\sqrt{2}(x, 0) \leftrightarrow (0, x),$$

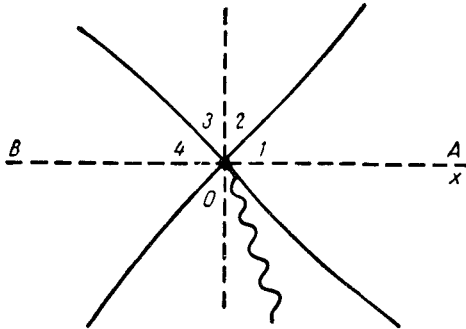
$$i\sqrt{2}(0, x) - (x, 0) \leftrightarrow (x, 0),$$

а также формулы

$$(0, x) \leftrightarrow -(0, x) - i\sqrt{2}(x, 0),$$

$$(x, 0) \leftrightarrow (x, 0) - i\sqrt{2}(0, x).$$

Для волны, движущейся направо вдоль  $+Ox$ ,  $C=0$ , так как  $(0, x)$  описывает волну, движущуюся налево (поскольку  $(0, x)$  растет ниже  $OA$ ). Следовательно, используя вторую формулу связи, мы получаем, что на  $OB$  падающая волна равна  $i\sqrt{2}(0, x)$  (убывает ниже  $OB$ ), а отраженная волна



Р и с. 19.

равна  $-(x, 0)$  (растет ниже  $OB$ ). Разделив на  $i\sqrt{2}$ , найдем, что коэффициент отражения равен  $i/\sqrt{2}$ , а коэффициент прохождения равен  $-i/\sqrt{2}$  (фазы всех трех волн отсчитываются от точки  $x=0$ ).

*Случай (II).* Вещественная ось является линией Стокса. Пусть  $(x, 0)_s$  — решение, убывающее на линии  $OA$  (см. рис. 19). Тогда

$$1: (z, 0)_s,$$

$$2: (z, 0)_d,$$

$$3: (z, 0)_d + i\sqrt{2}(0, z)_s,$$

$$4: (z, 0)_s + i\sqrt{2}(0, z)_d.$$

Следовательно, мы получаем формулу связи

$$i\sqrt{2}(0, x)_d \leftarrow (x, 0)_s.$$

Нетрудно получить и другие формулы связи.

### 5.1. Введение

Исследование уравнения

$$\omega'' + h^2 q(z, h) \omega = 0 \quad (5.1)$$

в области, в которой  $q$  имеет два комплексных нуля  $z = \pm a$ , является более трудным, чем исследование, проведенное нами в гл. IV.

Если  $q(z, h) \equiv c(z^2 - a^2)$ , то уравнение (5.1) допускает точное решение. Если же  $q$  имеет вид

$$q = (z^2 - a^2) r(z),$$

где  $r(z)$  также имеет нули, то в этом случае для исследования решений уравнения (5.1) приходится прибегать к методу фазового интеграла<sup>1)</sup>.

Как правило, мы будем считать, что функция  $q(z)$  стремится к некоторой постоянной при  $z = x \rightarrow \pm\infty$ ; следовательно, существуют сопряженные линии Стокса (или линии Стокса, если  $\lim_{x \rightarrow \infty} r(x) = c < 0$ . — *Перев.*), для которых вещественная ось является асимптотой. Мы будем предполагать, что эти линии проходят через одну из точек поворота  $z = \pm a$  или через обе эти точки. Мы постулируем также, что нули функции  $r(z)$  расположены таким образом, что они не влияют на асимптотику решений на вещественной оси.

При этом возникают различные случаи.

(1)  $q(x)$  вещественна при вещественных  $x$ , имеет два вещественных нуля  $x = \pm a$  и  $q(x) < 0$  при  $-a < x < a$  (так что среда является плотной между этими нулями), а функция  $r(x) > 0$  при вещественных  $x$ . Это задача о *плот-*

<sup>1)</sup> И даже если  $r(z)$  не имеет нулей, например  $r(z) = e^z$ . — *Прим. перев.*



ном потенциальном барьере (или задача о прохождении сквозь барьер.— Перев.).

(II)  $q(x)$  вещественна и положительна при вещественных  $x$  и имеет два комплексных нуля  $z = \pm ib$  ( $b$  вещественно), расположенных далеко от нулей функции  $r(z)$ ;  $r(x) > 0$  при вещественных  $x$ . Это задача о *неплотном потенциальном барьере* (или задача о рассеянии.— Перев.).

(III)  $q(x) \rightarrow c > 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , но  $q(z)$  комплексна на вещественной оси и имеет две комплексные точки поворота  $z = \pm a$ .

(IV)  $q(x)$  вещественна при вещественных  $x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) = -\infty$ ;  $q(x)$  имеет две вещественные точки поворота  $x = \pm a$  и  $q(x) > 0$  при  $-a < x < a$ . Эта задача называется задачей о приближенном *гармоническом осцилляторе*; она является задачей о *собственных значениях*, здесь  $h$  — спектральный параметр.

(V) И, наконец, случай, когда  $q(x)$  имеет более общий вид и порядок ее точек поворота больше единицы.

## 5.2. Задача о прохождении сквозь барьер

Этот случай был исследован Б. Джеффрис и затем Г. Джеффрисом [4] и другими авторами. На рис. 20 изображен

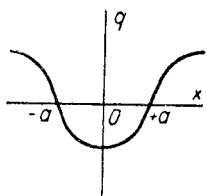


Рис. 20.

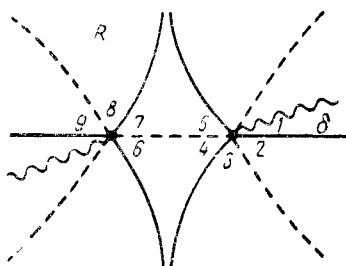


Рис. 21.

график функции  $q(x)$ . Ясно, что в интервале  $-a < x < a$  существуют экспоненциально малые ВКБ-решения. Построим в комплексной плоскости  $z$  линии Стокса и сопряженные линии Стокса, выходящие из точек  $z = a$  и  $z = -a$  (см. рис. 21); очевидно, что отрезок, соединяющий эти точки

поворота, является линией Стокса. На поведение этих линий в целом влияют другие нули функции  $q(z)$  и рис. 21 показывает только локальную структуру этих линий; поэтому мы будем предполагать, что функция  $q(z)$  такова, что в областях, указанных на рис. 21, асимптотика ВКБ-решений является равномерной в смысле гл. II. Разрезы из точек  $z = \pm a$  можно, конечно, провести любым способом, но для удобства мы сделаем симметричные разрезы. А именно, из точки  $z = a$  проведем разрез, образующий малый угол  $\delta$  с полуосью  $+Ox$ , а из точки  $z = -a$  проведем разрез, образующий малый угол  $\delta$  с полуосью  $-Ox$ .

На полуоси  $+Ox$  волна, движущаяся направо, имеет вид  $(z, a)$  (фаза отсчитывается от точки  $x = a$ ); это решение убывает в области 2. Продолжая это решение, получаем

$$2: (z, a)_s,$$

$$3: (z, a)_s,$$

$$4: (z, a)_d.$$

В областях 4 и 5 нельзя выделить единственное убывающее решение, поэтому очень важно удачно выбрать убывающее решение. Если отсчитывать фазу от точки  $z = -a$ , то решение  $(z, a)_d$  примет вид  $(z, -a)_s [-a, a]$ , где решение  $(z, -a)_s$  убывает, а решение  $(-a, z)_d$  растет в областях 6 и 7. Это следует из того, что  $(z, a)_d$  растет в области 5 и в области  $R$  (см. рис. 21). Следовательно,  $(z, -a)_d [-a, a]$  также растет в области  $R$ , так что  $(z, -a)_s$  убывает в области 7. Множитель  $[-a, a]$  можно назвать множителем, меняющим характер решения; он является большим вещественным числом.

Решение этой задачи трудно продвинуть дальше, за исключением того случая, когда поток энергии сохраняется. Возьмем на линии Стокса, разделяющей области 4 и 5, решение

$$4-5: w = (z, a)_d - \frac{i}{2} (a, z)_s$$

(мы воспользовались правилом, установленным в разд. 4.9). Тогда

$$6-7: w = (z, -a)_s [-a, a] - \frac{i}{2} [a, -a] (-a, z)_d,$$

где  $[-a, a]$  велико. Отсюда единственным образом определяется коэффициент при растущем решении, он равен  $-(i/2)[a, -a]$ . Коэффициент при убывающем решении в области 7 должен быть равен

$$[-a, a] + \frac{i}{2} \left( -\frac{1}{2} i [a, -a] \right)$$

(мы использовали постоянную Стокса  $i/2$  при продолжении асимптотики с линии Стокса в соседнюю область). Следовательно,

$$7: \left\{ [-a, a] + \frac{1}{4} [a, -a] \right\} (z, -a)_s - \frac{i}{2} [a, -a] (-a, z)_d,$$

$$8: \left\{ [-a, a] + \frac{1}{4} [a, -a] \right\} (z, -a)_d - \frac{i}{2} [a, -a] (-a, z)_s,$$

$$9: \left\{ [-a, a] + \frac{1}{4} [a, -a] \right\} (z, -a)_d + \\ + i \left\{ [-a, a] - \frac{1}{4} [a, -a] \right\} (-a, z)_s.$$

Таким образом, падающая волна имеет вид

$$\left\{ [-a, a] + \frac{1}{4} [a, -a] \right\} (x, -a),$$

а отраженная волна имеет вид

$$i \left\{ [-a, a] - \frac{1}{4} [a, -a] \right\} (-a, x),$$

где фаза отсчитывается от точки  $x = -a$ . Следовательно, коэффициент отражения  $r$  равен

$$r = i \frac{[-a, a] - \frac{1}{4} [a, -a]}{[-a, a] + \frac{1}{4} [a, -a]} = i \left\{ 1 - \frac{1}{2} [a, -a]^2 \right\}, \quad (5.2)$$

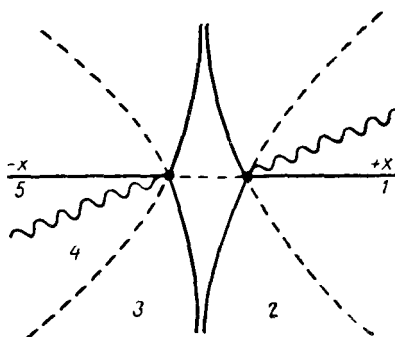
так как величина  $[a, -a]$  вещественна и мала, а коэффициент отражения  $t$  равен

$$t = \frac{1}{[-a, a] + \frac{1}{4} [a, -a]} = [a, -a]; \quad (5.3)$$

обе формулы справедливы с точностью до  $O([a, -a]^2)$ .

Этот метод эквивалентен применению второй формулы связи Джеффриса (4.12). Однако мы не вполне корректно применили эту формулу, что приводит к правильному ответу только в том случае, когда поток энергии сохраняется. Джеффрис же, как нам кажется, даже в своих последних статьях [4] считает вопреки очевидности это доказательство вполне корректным.

Можно вычислить  $|r|$  и  $|t|$  более точно и записать их в таком виде, который не будет зависеть от того, будут ли ВКБ-решения пригодными на интервале между точками



Р и с. 22.

поворота или нет. Допустим, что нули  $q$ , отличные от точек  $z = \pm a$ , не изменяют картины сопряженных линий Стокса, выходящих из этих точек (см. рис. 22).

Будем рассматривать не каждую точку поворота в отдельности, а пару точек  $z = \pm a$ . Если указанные выше предположения не выполнены, то, конечно, излагаемая ниже теория неверна. Более точно, мы будем предполагать, что во всей области, изображенной на рис. 22 (включая точки  $z = \pm a$ ), существуют равномерные асимптотические решения уравнения (5.1), которые выражаются через функции параболического цилиндра (функции Вебера).

Волна, движущаяся направо вдоль  $+Ox$ , имеет вид  $w = (z, a)_s$  в области 1. Сделанные выше предположения позволяют нам продолжить это решение с  $+Ox$  на  $-Ox$  по некоторой большой полуокружности, лежащей ниже оси  $Ox$ .

Обозначим через  $T$  постоянную Стокса для линии Стокса, разделяющей области 3 и 4. Тогда

$$\begin{aligned} 1: & \omega = (z, a)_s, \\ 2: & (z, a)_s, \\ 3: & (z, a)_d \equiv [-a, a] (z, -a)_d, \\ 4: & [-a, a] (z, -a)_d - T [-a, a] (-a, z)_s, \\ 5: & i [-a, a] (-a, z)_d - iT [-a, a] (-a, z)_s. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое представляет собой падающую волну, так что

$$r = \frac{1}{T}, \quad t = \frac{i}{T[-a, a]}.$$

Так как выражение  $[-a, a]$  вещественно при вещественных  $x$ , получаем

$$|r|^2 = \frac{1}{T T^*}, \quad |t|^2 = \frac{[a, -a]^2}{T T^*}. \quad (5.4)$$

Чтобы найти  $T T^*$ , мы воспользуемся уравнением (4.8), которое позволяет установить связь между решениями на  $+Ox$  и на  $-Ox$ . Именно,

$$\begin{aligned} \omega &= (x, a), & \text{если } x \gg a, \\ \omega &= i [-a, a] \{(-a, x) - T(x, -a)\}, & \text{если } x \ll -a. \end{aligned}$$

Если разрез проведен так, как указано на рис. 22, то мы можем положить  $\arg q = 0$  при  $x > a$  и при  $x < -a$ ; следовательно, при  $x \gg a$  получаем

$$(x, a)^* = \left[ q^{-1/4} \exp \left( ih \int_x^a \sqrt{q} dx \right) \right]^* = (a, x)$$

и

$$(x, a)' = -ih \sqrt{q}(x, a).$$

Поскольку все формулы пишутся с точностью до множителя  $1 + O(1/h)$ , то мы дифференцируем только экспоненту. Поэтому мы пренебрегаем слагаемым, содержащим  $q'$ , что вполне оправдано, например, в том случае, если при  $x \rightarrow \infty$ ,  $q(x)$  стремится к постоянной.

Аналогично при  $x \ll -a$  получаем

$$(-a, x)^* = (x, -a), \quad (-a, x)' = ih \sqrt{\bar{q}}(-a, x).$$

Следовательно, из уравнения (4.8) получаем (при  $[-a, a]$  вещественном)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{i[-a, a] [ih \sqrt{\bar{q}}(-a, x) + iTih \sqrt{\bar{q}}(x, -a)] \times \\ \times (-i) [-a, a] [(x, -a) - T^*(-a, x)]\} = \\ = \operatorname{Im} \{-ih \sqrt{\bar{q}}(x, a)(a, x)\}. \end{aligned}$$

Далее,

$$(x, \pm a)(\pm a, x) \sqrt{\bar{q}} = 1,$$

так что

$$\begin{aligned} [-a, a]^2 \operatorname{Im} \{i[-iT T^* - iT^*] \sqrt{\bar{q}}(-a, x)^2 + \\ + iT \sqrt{\bar{q}}(x, -a)^2\} = \operatorname{Im}(-i). \end{aligned}$$

Так как величины

$$-iT^* \sqrt{\bar{q}}(-a, x)^2, \quad iT \sqrt{\bar{q}}(x, -a)^2$$

комплексно сопряжены, то мы получаем

$$[-a, a]^2 (1 - TT^*) = -1,$$

откуда следует

$$TT^* = 1 + [a, -a]^2.$$

Если точки  $-a$  и  $a$  не слишком близки, то величина  $[a, -a]^2$  мала. Таким образом, из (5.4) вытекает, что

$$\begin{aligned} |r| &= \frac{1}{\sqrt{1 + [a, -a]^2}}, \\ |t| &= \frac{[a, -a]}{\sqrt{1 + [a, -a]^2}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

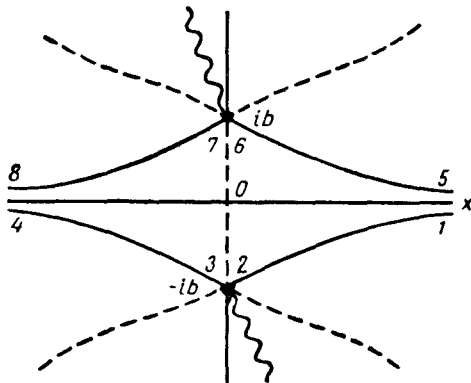
Если разложить формулы (5.5) в ряд по степеням  $[a, -a]$ , то первые члены этих разложений совпадают со значениями  $|r|$  и  $|t|$ , найденными выше [см. (5.2) и (5.3)]. Что касается значения  $r$ , то фазовый множитель  $i$ , входящий в формулу (5.2), получается в том

случае, если мы с помощью правил, установленных в разд. 4.6, обойдем только одну точку поворота  $z = -a$ .

Если положить  $a = 0$  в формуле (5.5), то получим  $|r| = |t| = 1/\sqrt{2}$ , что совпадает с результатами, полученными в разд. 4.10.

### 5.3. Задача о рассеянии

Потенциальный барьер  $q = (x^2 + b^2)r(x)$  ( $q(x) > 0$ ) при всех вещественных  $x$  имеет две важные комплексные



Р и с. 23.

точки поворота  $z = \pm ib$ . Линии Стокса и сопряженные линии Стокса изображены на рис. 23 ( $b > 0$ ).

Рассмотрим вначале верхнюю точку поворота  $z = ib$ . Существует решение, асимптотика которого имеет вид, аналогичный (2.9), и равномерна в областях 5, 6, 7, 8; соответствующие постоянные Стокса равны  $i$ . В качестве волны, движущейся направо вдоль  $+Ox$ , можно взять  $(x, 0)$ ; фаза отсчитывается от точки  $x = 0$ . Тогда решение  $(z, 0)_d$  растет в области 5, и мы имеем

$$5: \quad \omega = [ib, 0](z, ib)_d,$$

$$6: \quad [ib, 0](z, ib)_s,$$

$$7: \quad [ib, 0](z, ib)_s,$$

$$8: \quad [ib, 0](z, ib)_d \equiv (z, 0)_d.$$

Последнее решение есть падающая волна. Следовательно,  $r=0$ ,  $t=1$ , что означает, что барьер полностью прозрачен. Обычная лучевая теория на оси также приводит к этому результату, так как показатель преломления вдоль луча нигде не обращается в нуль.

Мы получим гораздо более точный ответ, если рассмотрим нижнюю точку поворота  $z = -ib$ . Так как равномерная асимптотика типа (2.9) существует в окрестности точки  $z = -ib$  в областях 1, 2, 3, 4, то мы имеем

$$\begin{aligned} 1: \quad \omega &= [-ib, 0](z, -ib)_s, \\ 2: \quad &[-ib, 0](z, -ib)_d, \\ 3: \quad &[-ib, 0](z, -ib)_d + i[-ib, 0](-ib, z)_s, \\ 4: \quad &[-ib, 0](z, -ib)_s + i[-ib, 0](-ib, z)_d \equiv \\ &\equiv (z, 0)_s + i[-ib, 0]^2(0, z)_d. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последнем равенстве есть падающая волна. Следовательно,

$$r = i[-ib, 0]^2, \quad t = 1.$$

Как правило,  $[-ib, 0] \approx [0, ib]$ , так что  $r = i[-ib, ib]$ , величина  $[-ib, ib]$  вещественна и мала.

Если мы рассмотрим пару точек поворота  $\pm ib$  аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, то мы получим более точный результат, именно,

$$r = i[-ib, ib], \quad t = 1 - \frac{1}{2}[-ib, ib]^2.$$

Более того, так как поток энергии сохраняется, то тем же способом, что и в предыдущем разделе, можно более точно найти  $|r|$  и  $|t|$ :

$$\begin{aligned} |r| &= \frac{[-ib, ib]}{\sqrt{1 + [-ib, ib]^2}}, \\ |t| &= \frac{1}{\sqrt{1 + [-ib, ib]^2}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Эти формулы пригодны и при малых  $b$ , что вытекает из их вывода.



#### 5.4. Комплексный потенциальный барьер

Если  $q = (z^2 - a^2)r(z)$ , где  $a$  комплексно и  $0 \leq \arg a \leq \leq \pi/2$ , то методы, развитые нами в разд. 5.2 и 5.3, в этом случае неприменимы, и только подход к решению задачи остается тем же самым. Мы будем предполагать, что существует область, содержащая точки поворота  $z = \pm a$  и аналогичная изображенной на рис. 22 (точки поворота в нашем случае комплексны), в которой существуют равномерные асимптотические решения, выраженные через функции Вэбера (функции параболического цилиндра).

Сопряженные линии Стокса при  $|z| \gg |a|$  уходят в бесконечность и имеют своими асимптотами лучи  $\arg z = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . Поэтому мы можем воспользоваться постоянными Стокса, полученными в разд. 3.7. Однако придется внести некоторые изменения, поскольку необходимо будет уточнить выбор начала отсчета фазы, который пока что является неопределенным. Это необходимо сделать очень точно, что приводит к появлению некоторых постоянных комплексных множителей; в этой книге они не выводятся.

Если провести разрезы из точки  $z = a$  по лучу  $\arg(z - a) = \delta$  и из точки  $z = -a$  по лучу  $\arg(z + a) = = \pi + \delta$  ( $\delta > 0$  мы выберем достаточно малым) и если  $\arg q = 0$  при больших положительных  $x$ , то можно показать, что подходящие формулы связи имеют вид

$$(x, -a) \dagger r(-a, x) \leftrightarrow t(x, a), \quad (5.7)$$

$$t(-a, x) \leftrightarrow (a, x) \dagger r(x, a), \quad (5.8)$$

где для волн на  $-Ox$  фаза отсчитывается от точки  $z = -a$ , а для волн на  $+Ox$  — от точки  $z = a$ . Мы получаем

$$r = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ia^2h}{2}\right) \exp\left(-\frac{ia^2h}{2}\right) \exp\left(\frac{\pi a^2h}{4}\right) \times \\ \times \left(\frac{a^2h}{2}\right)^{ia^2h/2}, \quad (5.9)$$

$$t = -ir \exp\left(-\frac{\pi a^2h}{2}\right). \quad (5.10)$$

Легко видеть, что главный член асимптотики  $r$  при больших  $|a^2h|$  есть просто  $i$ . Этот результат получается с помощью метода ВКБ, если учитывать только точку поворота  $z = -a$ . Формула (5.9) применима не только для больших, но и для малых  $|a^2h|$ . В частности, полагая  $a = 0$ , получаем

$$r = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Этот результат аналогичен результатам, полученным нами в разд. 4.10 (следует иметь в виду, что разрезы сейчас проведены по-другому).

Вычислим  $|r|$  при  $\arg a = 0$ :

$$|r| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ia^2h}{2}\right) \right| \exp\left(\frac{\pi a^2h}{4}\right),$$

или

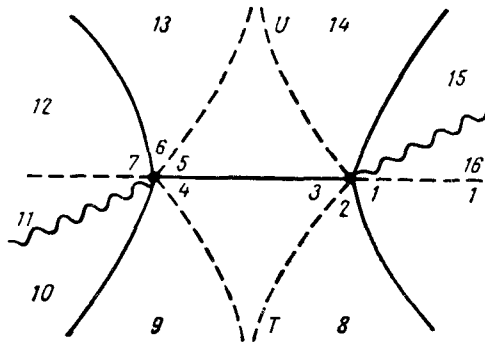
$$\begin{aligned} |r|^2 &= \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ia^2h}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ia^2h}{2}\right) \exp\left(\frac{\pi a^2h}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi \exp\left(\frac{\pi a^2h}{2}\right)}{\sin\left[\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{ia^2h}{2}\right)\right]} = \frac{1}{1 + \exp(-\pi a^2h)}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (5.5).

## 5.5. Приближенный гармонический осциллятор

Пусть функция  $q(x)$  вещественна при вещественных  $x$ , имеет две вещественные точки поворота  $x = \pm a$  и при  $-a < x < a$  положительна. Если остальные нули функции  $q(z)$  лежат вдали от точек  $z = \pm a$ , то линии Стокса и сопряженные линии Стокса имеют вид, изображенный на рис. 24. Отрезок  $[-a, a]$  является сопряженной линией Стокса. Можно поставить задачу об отыскании собственных значений  $h$  с граничными условиями  $\psi(\pm\infty) = 0$ , поскольку существуют решения, убывающие при  $x \rightarrow +\infty$ , и решения, убывающие при  $x \rightarrow -\infty$ . Можно также решать обратную задачу: фиксировать  $h$  и отыскивать собственные значения  $a$ .

Предположим, что ВКБ-решения пригодны в интервале между нулями  $x = \pm a$ , тогда мы можем действовать следующим образом.



Р и с. 24.

Решение дифференциального уравнения

$$w'' + h^2(a^2 - z^2)r(z)w = 0,$$

убывающее в области 1, имеет вид  $w = (a, x)_s$ , если  $\arg q = 0$  при  $-a < x < a$  и  $\arg q = \pi$  при  $x > a$ . Продолжая это решение в комплексную плоскость, получаем

$$1: (a, z)_s, \quad (5.11)$$

$$2: (a, z)_d,$$

$$3: (a, z)_d - i(z, a)_s, \quad (5.12)$$

$$5: [a, -a](-a, z)_s - i[-a, a](z, -a)_d,$$

$$6: ([a, -a] + [-a, a])(-a, z)_s - i[-a, a](z, -a)_d,$$

$$7: ([a, -a] + [-a, a])(-a, z)_d - i[-a, a](z, -a)_s.$$

Это решение убывает на отрицательной части вещественной оси, если

$$[a, -a] + [-a, a] = 0,$$

или

$$[-a, a]^2 = -1. \quad (5.13)$$

Отсюда находим

$$\exp\left(2ih \int_{-a}^a \sqrt{q} dx\right) = -1,$$

или

$$2ih \int_{-a}^a \sqrt{q} dx = i(2n\pi + \pi),$$

так что

$$h = \frac{\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\int_{-a}^a \sqrt{q} dx}, \quad (5.14)$$

где  $n$  — большое целое положительное число. В случае точного гармонического осциллятора ( $q \equiv a^2 - x^2$ ) имеем

$$h = \frac{2n+1}{a^2},$$

что совпадает с известными собственными значениями в этом случае.

С другой стороны, если во всей области, изображенной на рис. 24, существуют равномерные асимптотические решения (пригодные и в точках поворота), мы можем продолжить решения, обходя обе точки поворота, в области 8, 9, ..., 16. Это позволит нам решить задачу и в том случае, когда ВКБ-решения неприменимы в области, лежащей между такими точками поворота. Обозначим через  $T$  и  $U$  постоянные Стокса (фаза отсчитывается от точки  $z = a$ ) для линий Стокса 8, 9 и 13, 14 соответственно. Тогда

$$1: \quad \omega = (a, z)_s,$$

$$8: \quad (a, z)_d,$$

$$9: \quad (a, z)_d - T(z, a)_s \equiv \\ \equiv [a, -a](-a, z)_d - T[-a, a](z, -a)_s,$$

$$10: \quad [a, -a](-a, z)_s - T[-a, a](z, -a)_d,$$

$$11: \quad i[a, -a](z, -a)_s - iT[-a, a](-a, z)_d$$

и

16:  $(a, z)_s,$

15:  $-i(z, a)_s,$

14:  $-i(z, a)_d,$

13:  $-i(z, a)_d - iU(a, z)_s,$

12:  $-i[-a, a](z, -a)_s - iU[a, -a](-a, z)_d.$

Потребуем, чтобы решение убывало в областях 11 и 12, тогда

$$T = U = 0, \quad [a, -a] = -[-a, a].$$

Последнее уравнение совпадает с (5.13), но теперь оно получено при более общих предположениях, а именно, точки поворота  $z = \pm a$  могут быть сколь угодно близки. Это означает, что в формуле (5.14)  $n$  может быть любым целым положительным числом.

### 5.6. Нормировка решений

Если  $h$  является собственным значением, то соответствующая собственная функция  $\omega$  нормируется обычно условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} r\omega\omega^* dx = 1. \quad (5.15)$$

Чтобы найти нормировочный множитель (с точностью до фазового множителя) для  $\omega$ , мы должны вычислить интеграл (5.15).

Приведем обычное элементарное вычисление (мы следуем, например, Паули), которое является крайне неудовлетворительным. Поскольку при  $x < -a$  и  $x > a$  решение экспоненциально мало, то вкладами этих участков в интеграл обычно пренебрегают. На интервале  $-a < x < a$  квадрат синуса, стоящего под знаком интеграла, сильно осциллирует при больших  $n$ , и поэтому его заменяют средним по интервалу, равным  $1/2$ . Кроме того, при таком способе вычисления ВКБ-приближения распространяют на весь интервал  $(-a, a)$ , так как интеграл (5.15) сходится в точках поворота.

Из (5.12) находим, что

$$\omega = (a, x) - i(x, a),$$

где  $\arg q = 0$ . Следовательно,

$$\omega^* = (x, a) + i(a, x)$$

и

$$\begin{aligned} \omega\omega^* &= \frac{2}{\sqrt{q}} + i[(a, x)^2 - (x, a)^2] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{q}} + \frac{i}{\sqrt{q}} \left[ \exp\left(2ih \int_a^x \sqrt{q} dx\right) - \right. \\ &\left. - \exp\left(-2ih \int_a^x \sqrt{q} dx\right) \right] = \frac{2}{\sqrt{q}} - \frac{2}{\sqrt{q}} \sin\left(2h \int_a^x \sqrt{q} dx\right) = \\ &= \frac{4}{\sqrt{q}} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - h \int_a^x \sqrt{q} dx\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} r\omega\omega^* dx &\sim \int_{-a}^a \frac{4r}{\sqrt{q}} \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - h \int_a^x \sqrt{q} dx\right) dx \sim \\ &\sim \int_{-a}^a \frac{2r}{\sqrt{q}} dx. \quad (5.16) \end{aligned}$$

(Мы пользуемся тем, что среднее от квадрата синуса равно 1/2.) Для гармонического осциллятора мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega\omega^* dx \sim \int_{-a}^a \frac{2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\pi.$$

Приводимое ниже вычисление, принадлежащее Фарри, свободно от недостатков изложенного выше метода.

Пусть  $\omega$  — решение, соответствующее собственному значению  $h$ . Построим два новых решения с тем же значением  $h$ , но с несколько другими значениями  $a$ . Пусть первое из них получается при замене  $a$  на  $a_1$ ,

оно убывает при  $x \rightarrow -\infty$  и стремится к  $\omega$  при  $a_1 \rightarrow a$ ; второе получается при замене  $a$  на  $a_2$ , оно убывает при  $x \rightarrow +\infty$  и стремится к  $\omega$  при  $a_2 \rightarrow a$ .

$\omega$  и  $\omega_1$  удовлетворяют уравнениям

$$\omega''\omega_1^* + h^2(a^2 - x^2)r(x)\omega\omega_1^* = 0,$$

$$\omega_1^{*''}\omega + h^2(a_1^2 - x^2)r(x)\omega_1^*\omega = 0.$$

Вычитая, получаем

$$\omega''\omega_1^* - \omega_1^{*''}\omega + h^2(a^2 - a_1^2)r(x)\omega\omega_1^* = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx}(\omega'\omega_1^* - \omega_1^{*'}\omega) = h^2(a_1^2 - a^2)r(x)\omega\omega_1^*.$$

Интегрируя, получаем

$$[\omega'\omega_1^* - \omega_1^{*'}\omega]_{-\infty}^X = h^2(a_1^2 - a^2) \int_{-\infty}^X r\omega\omega_1^* dx,$$

где  $-a < X < a$ .

На нижнем пределе интегрирования  $\omega = 0$  и  $\omega_1^* = 0$ , так что

$$\omega'(X)\omega_1^*(X) - \omega_1^{*'}(X)\omega(X) = h^2(a_1^2 - a^2) \int_{-\infty}^X r\omega\omega_1^* dx.$$

Дифференцируя по  $a_1$ , получаем

$$\begin{aligned} \omega'(X) \frac{\partial}{\partial a_1} \omega_1^*(X) - \omega(X) \frac{\partial}{\partial a_1} \omega_1^{*'}(X) = \\ = 2h^2 a_1 \int_{-\infty}^X r\omega\omega_1^* dx + \dots, \end{aligned}$$

что при  $a_1 = a$  дает

$$\omega'(X) \frac{\partial}{\partial a} \omega_1^*(X) - \omega(X) \frac{\partial}{\partial a} \omega_1^{*'}(X) = 2h^2 a \int_{-\infty}^X r\omega\omega_1^* dx.$$

Аналогично

$$\omega'(X) \frac{\partial}{\partial a} \omega_2^*(X) - \omega(X) \frac{\partial}{\partial a} \omega_2^{*'}(X) = -2h^2 a \int_X^{\infty} r \omega \omega^* dx,$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} r \omega \omega^* dx = \frac{1}{2h^2 a} \left\{ \omega'(X) \frac{\partial}{\partial a} [\omega_1^*(X) - \omega_2^*(X)] - \right. \\ \left. - \omega(X) \frac{\partial}{\partial a} [\omega_1^{*'}(X) - \omega_2^{*'}(X)] \right\}. \quad (5.17)$$

Меняя порядок дифференцирования в последней скобке, мы можем записать ее в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial a_1} \omega_1^*(x) - \frac{\partial}{\partial a_2} \omega_2^*(x) \right]_{a_1=a_2=a} \right\}_{x=X}.$$

Из уравнения (5.12) находим, что между точками поворота

$$\omega = (a, x) - i(x, a)$$

и

$$\omega_2 = (a_2, x) - i(x, a_2);$$

значение  $\omega_2$  при  $x \gg a_2$  стремится к  $(a, x) \equiv \omega$ , когда  $a_2 \rightarrow a$ .

Воспользуемся формулами для  $\omega_1$  в области 7; мы получим

$$7: \omega_1 = -i[-a_1, a_1](z, -a_1)_s,$$

$$6: \quad -i[-a_1, a_1](z, -a_1)_d,$$

$$5: \quad -[-a_1, a_1](-a_1, z)_s - i[-a_1, a_1](z, -a_1)_d,$$

так что при  $-a_2 < x < a_2$

$$\omega_1 = -[-a_1, a_1]^2 (a_1, x) - i(x, a_1).$$

Следовательно,

$$\omega_1 - \omega_2 = -[-a_1, a_1]^2 (a_1, x) - (a_2, x) - i(x, a_1) + i(x, a_2),$$

$$\omega_1^* - \omega_2^* = -[-a_1, a_1]^2 (x, a_1) - (x, a_2) + i(a_1, x) - i(a_2, x).$$

Далее, выражение  $[\partial \omega_1^* / \partial a_1 - \partial \omega_2^* / \partial a_2]_{a_1=a_2=a}$  содержит много членов, которые сокращаются, если учесть, что



$[a, -a]^2 = -1$ . Остается только выражение

$$-(x, a) \left\{ \frac{\partial}{\partial a_1} [a_1, -a_1]^2 \right\}_{a_1=a} = -2(x, a) [a, -a] \frac{\partial}{\partial a} [a, -a].$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} [a, -a] &= \frac{\partial}{\partial a} \exp \left( -ih \int_{-a}^a V \bar{q} dx \right) = \\ &= [a, -a] \left( -ih \int_{-a}^a \frac{\partial V \bar{q}}{\partial a} dx \right), \end{aligned}$$

так как  $q(\pm a) = 0$ . Следовательно,

$$\frac{\partial \omega_1^*}{\partial a} - \frac{\partial \omega_2^*}{\partial a} = -2ih(x, a) \int_{-a}^a \frac{\partial V \bar{q}}{\partial a} dx.$$

Таким образом, формула (5.17) примет вид

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} r \omega \omega^* dx = \\ &= \frac{1}{2h^2 a} \left\{ \frac{d}{dx} [(a, x) - i(x, a)] \left[ -2ih(x, a) \int_{-a}^a \frac{\partial V \bar{q}}{\partial a} dx \right] - \right. \\ &- \left. [(a, x) - i(x, a)] \frac{d}{dx} \left[ -2ih(x, a) \int_{-a}^a \frac{\partial V \bar{q}}{\partial a} dx \right] \right\}_{x=X} = \\ &= \frac{i}{ah} [- (a, x)'(x, a) + (a, x)(x, a)']_{x=X} \int_{-a}^a \frac{\partial V \bar{q}}{\partial a} dx = \\ &= \frac{i}{ah} \left[ - \left( ih V \bar{q} - \frac{q'}{4q} \right) \frac{1}{V \bar{q}} + \right. \\ &+ \left. \left( -ih V \bar{q} - \frac{q'}{4q} \right) \frac{1}{V \bar{q}} \right]_{x=X} \int_{-a}^a \frac{\partial V \bar{q}}{\partial a} dx = \\ &= \frac{2}{a} \int_{-a}^a \frac{\partial V \bar{q}}{\partial a} dx = 2 \int_{-a}^a \frac{r}{V \bar{q}} dx, \end{aligned}$$

что совпадает с полученным ранее результатом [см. (5.16)].

При малых  $|a^2 h|$  изложенный выше метод неприменим, так как ВКБ-решения будут непригодны в интервале

между точками поворота. Можно получить более глубокую формулу с помощью полиномов Эрмита, но недостаток места не позволяет нам включить ее в эту книгу.

Иногда вместо функции  $q = (x^2 - a^2)r(x)$  приходится рассматривать функцию  $q = f(x) - \lambda$ , которая по-прежнему имеет два нуля  $x = \pm a$ . В этом случае весовой множитель  $r$  в интеграле (5.15) нужно опустить, и выкладки, аналогичные проведенным выше, снова приводят к формуле (5.16), где следует положить  $r = 1$ .

### 5.7. Кратные точки поворота

Пример 1. Пусть  $q(x)$  имеет двойной нуль в точке  $x = a$  и простой нуль в точке  $x = b > a$ , причем  $q(x) > 0$  при  $x < a$  и при  $a < x < b$  (см. рис. 25). Волны распространяются в областях  $x < a$  и  $a < x < b$ , где среда является неплотной, но при  $x > b$  среда плотна.

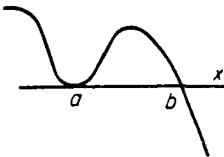


Рис. 25.

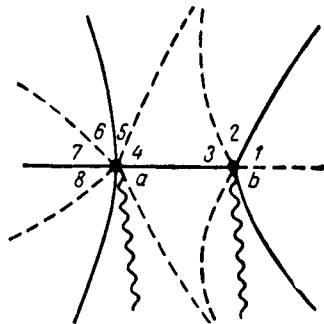


Рис. 26.

Мы хотим найти коэффициент отражения в области  $x < a$  для решения, убывающего при  $x > b$ .

Мы будем предполагать, что остальные нули  $q$  не меняют структуры линий, изображенных на рис. 26. В области 1 имеем  $\omega = (z, b)_s$ . Следовательно, продолжая решение в область 7, получаем (используя постоянные Стокса  $i$  и  $i\sqrt{2}$  соответственно для точек поворота  $b$  и  $a$ )

$$2: (z, b)_a,$$

$$3: (z, b)_a + i(b, z)_s,$$

$$4: (z, a)_a [a, b] + i[b, a](a, z)_s,$$

где  $[a, b]$  есть экспонента от чисто мнимой величины, и

$$5: [a, b](z, a)_d + \{i[b, a] + i\sqrt{2}[a, b]\}(a, z)_s,$$

$$6: [a, b](z, a)_s + \{i[b, a] + i\sqrt{2}[a, b]\}(a, z)_d,$$

$$7: \{-\sqrt{2}[b, a] - [a, b]\}(z, a)_s + \{i[b, a] + i\sqrt{2}[a, b]\}(a, z)_d.$$

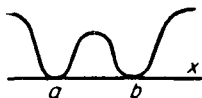
Первое слагаемое в последнем равенстве представляет собой волну, движущуюся налево, последнее — направо, фаза отсчитывается от точки  $x = a$ . Следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{2}[b, a] + [a, b]}{i\{[b, a] + \sqrt{2}[a, b]\}} = i \frac{\sqrt{2} + [a, b]^2}{1 + \sqrt{2}[a, b]^2}.$$

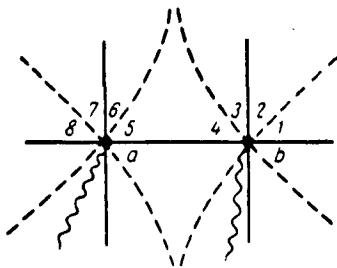
Очевидно, что  $|r| = 1$ , поскольку при вещественных  $\theta$

$$\left| \frac{\sqrt{2} + e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}\sqrt{2}} \right| = 1.$$

Этот результат справедлив даже при  $a = b$ , т. е. когда  $[a, b] = 1$ , а точка  $z = a$  есть точка поворота третьего порядка. Используя постоянную



Р и с. 27.



Р и с. 28.

Стокса  $T = 2i \cos \pi/5$  (см. разд. 4.10), мы получаем тот же результат:

$$r = T + \frac{1}{T} = i.$$

Пример 2. Пусть  $q(x) \geq 0$  при всех  $x$  и имеет два двойных нуля в точках  $z = a$  и  $z = b$ . Падающая слева волна частично пройдет дальше и частично отразится. Положим  $\arg q = 0$  при  $x > b$ ; тогда  $\arg q = 2\pi$  при  $a < x < b$  и  $\arg q = 4\pi$  при  $x < a$ , если разрезы выбраны так, как показано на рис. 28. Постоянные Стокса равны

$i\sqrt{2}$  на всех линиях Стокса; мы предполагаем, что остальные нули  $q$  расположены таким образом, что они допускают существование равномерных асимптотических решений в областях, изображенных на рис. 28.

Тогда для волны, движущейся направо при  $x > b$ , получаем

- 1:  $\omega = (z, b)_d$ ,
- 2:  $(z, b)_d + i\sqrt{2} (b, z)_s$ ,
- 3:  $(z, b)_s + i\sqrt{2} (b, z)_d$ ,
- 4:  $-(z, b)_s + i\sqrt{2} (b, z)_d$ ,
- 5:  $-[a, b](z, a)_s + i\sqrt{2} [b, a](a, z)_d$ ,
- 6:  $- \{[a, b] + 2[b, a]\} (z, a)_s + i\sqrt{2} [b, a](a, z)_d$ ,
- 7:  $- \{[a, b] + 2[b, a]\} (z, a)_d + i\sqrt{2} [b, a](a, z)_s$ ,
- 8:  $- \{[a, b] + 2[b, a]\} (z, a)_d - i\sqrt{2} \{[a, b] + [b, a]\} (a, z)_s$ .

Первое слагаемое в последнем равенстве представляет собой волну, падающую слева, последнее — отраженную волну.

Разделив на коэффициент при падающей волне, найдем коэффициенты отражения и прохождения

$$r = i\sqrt{2} \frac{[a, b] + [b, a]}{[a, b] + 2[b, a]}, \quad t = \frac{-1}{[a, b] + 2[b, a]}.$$

Простая выкладка показывает, что  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ , это следует из сохранения потока энергии. При этом для волн при  $x < a$  мы отсчитываем фазу от точки  $x = a$ , а для прошедшей волны — от точки  $x = b$ .

При  $a < x < b$  мы имеем  $q = e^{2\pi i} |q|$ . Следовательно,

$$[a, b] = \exp\left(-ih \int_a^b V|q| dx\right).$$

Полагая  $\theta = h \int_a^b V|q| dx$ , получаем

$$r = i\sqrt{2} \frac{2 \cos \theta}{3 \cos \theta + i \sin \theta},$$

$$t = -\frac{1}{3 \cos \theta + i \sin \theta},$$

откуда следует, что

$$|r| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8 + \sec^2 \theta}},$$

$$|t| = \frac{1}{\sqrt{8 \cos^2 \theta + 1}}.$$

При  $\cos \theta = 0$  отражение отсутствует и среда полностью прозрачна. Это имеет место, когда

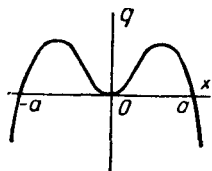
$$h \int_a^b \sqrt{|q|} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

или

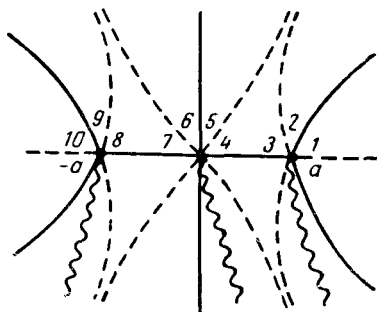
$$h = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}{\int_a^b \sqrt{|q|} dx}.$$

При этих дискретных больших значениях  $h$  среда ведет себя как «окно».

Пример 3. Рассмотрим еще случай  $q = x^2(a^2 - x^2)$ ; будем искать собственные значения  $h$ , при которых решение убывает и при  $x > a$ , и при  $x < -a$ . Точки  $x = \pm a$  являются точками поворота первого порядка,  $x = 0$  —



Р и с. 29.



Р и с. 30.

второго, отрезок  $-a < x < a$  — сопряженной линией Стокса. График  $q(x)$  и расположение сопряженных линий Стокса и линий Стокса изображены соответственно на рис. 29 и 30.

В области  $I$  имеется убывающее решение  $(z, a)_s$ . Положим  $\arg q = -\pi$  при  $x > a$ ,  $\arg q = 0$  при  $0 < x < a$ ,  $\arg q = 2\pi$  при  $-a < x < a$  и  $\arg q = 3\pi$  при  $x < -a$ . Продолжим это решение, используя постоянные Стокса  $i$  и  $i\sqrt{2}$ ; мы получим

- 1:  $\omega = (z, a)_s$ ,
- 2:  $(z, a)_d$ ,
- 3:  $(z, a)_d + i(a, z)_s$ ,
- 4:  $[0, a](z, 0)_d + i[a, 0](0, z)_s$ ,
- 5:  $[0, a](z, 0)_d + i\{[a, 0] + \sqrt{2}[0, a]\}(0, z)_s$ ,
- 6:  $[0, a](z, 0)_s + i\{[a, 0] + \sqrt{2}[0, a]\}(0, z)_d$ ,
- 7:  $-\{\sqrt{2}[a, 0] + [0, a]\}(z, 0)_s +$   
 $+ i\{[a, 0] + \sqrt{2}[0, a]\}(0, z)_d$ ,
- 8:  $-\{\sqrt{2}[a, 0] + [0, a]\}[-a, 0](z, -a)_s +$   
 $+ i\{[a, 0] + \sqrt{2}[0, a]\}[0, -a](-a, z)_d$ .

В области  $9$  убывающее решение должно отсутствовать, ибо оно растет в области  $10$  и при  $x < -a$ . Следовательно,

$$-\{\sqrt{2}[a, 0] + [0, a]\}[-a, 0] - \\ -\{[a, 0] + \sqrt{2}[0, a]\}[0, -a] = 0.$$

Это уравнение определяет (большие) собственные значения  $h$ .

Если  $0 < x < a$ , то  $q = x^2(a^2 - x^2)$  и  $\sqrt{q} = x\sqrt{a^2 - x^2}$ , так что

$$[0, a] = \exp\left(ih \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx\right) = \exp\left(\frac{iha^3}{3}\right).$$

Если же  $-a < x < 0$ , то  $q = e^{2\pi i} |x^2(a^2 - x^2)|$  и

$$\sqrt{q} = x\sqrt{a^2 - x^2},$$

так как  $x < 0$ . Следовательно,

$$[-a, 0] = \exp\left(ih \int_{-a}^0 x\sqrt{a^2 - x^2} dx\right) = \exp\left(-\frac{iha^3}{3}\right).$$

Если мы теперь положим  $\theta = iha^3/3$ , то уравнение для собственных значений примет вид

$$-(\sqrt{2} e^{-i\theta} + e^{i\theta}) e^{-i\theta} - (e^{-i\theta} + \sqrt{2} e^{i\theta}) e^{i\theta} = 0,$$

или

$$\cos 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$\frac{2}{3} ha^3 = 2n\pi + \pi \pm \frac{\pi}{4},$$

где  $n > 0$  — большое целое число. Собственные значения  $h$  имеют вид

$$h = \frac{3\pi}{2a^3} \left( 2n + 1 \pm \frac{1}{4} \right).$$

## Глава VI

### ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ФИЗИКИ

#### 6.1. Уравнение Шредингера и переход из квантовой механики в классическую

Мы рассмотрим одномерное уравнение Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} (H - V) \psi = 0, \quad (6.1)$$

или

$$\psi'' + \frac{8\pi^2m}{h^2} q\psi = 0, \quad (6.2)$$

где  $V(x)$  — потенциальная энергия,  $H$  — полная энергия частицы. Метод ВКБ дает нам возможность показать, как при  $h \rightarrow 0$  квантовая механика переходит в классическую, поскольку  $8\pi^2m/h^2$  можно рассматривать как большой параметр.

Рассмотрим частицу, которая по законам классической механики находится в ограниченной области  $a < x < b$ , т. е.  $H - V(x) > 0$  при  $a < x < b$ . Мы поставим следующие граничные условия:  $\psi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ .

Решения такого типа получены нами в разд. 5.5. Между точками поворота  $x = a$  и  $x = b$  решение уравнения (6.2) имеет вид [см. (5.12)]

$$\psi = (b, x) - i(x, b),$$

причем в силу (5.13)  $[a, b]^2 = -1$ , что дает нам собственные значения энергии  $H$ . В разд. 5.13 мы показали, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi\psi^* dx = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{q}} = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{H-V}}.$$

Если функция  $\psi$  нормирована, то  $\psi\psi^*$  интерпретируется как плотность вероятности, т. е.  $\psi(x)\psi^*(x)dx$  — вероятность того, что частица находится в интервале



бесконечно малой длины  $dx$  с центром в точке  $x$ . Используя ненормированную функцию  $\psi$ , найденную выше, имеем

$$\begin{aligned} \psi\psi^* &= [(b, x) - i(x, b)] [(x, b) + i(b, x)] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{q}} + i(b, x)^2 - i(x, b)^2 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{q}} \left[ 1 - \sin \left( 2 \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}} \int_b^x \sqrt{H-V} dx \right) \right] = \\ &= \frac{4}{\sqrt{q}} \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}} \int_b^x \sqrt{H-V} dx \right). \end{aligned}$$

Так как это выражение быстро осциллирует при малых  $h$  даже на малом интервале  $\delta x$ , мы заменим квадрат синуса его средним значением  $1/2$  и найдем вероятность того, что частица находится на интервале длины  $\delta x$ :

$$\frac{\int_x^{x+\delta x} \psi\psi^* dx}{2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{H-V}}} = \frac{\delta x}{\sqrt{q} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{H-V}}}.$$

В классической механике уравнение энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} + V(x) = H,$$

откуда

$$\delta t = \frac{2\delta x}{m \sqrt{H-V}}.$$

Следовательно, время, которое частица проводит на элементе  $\delta x$ , деленное на величину периода колебаний, равно

$$\frac{\delta x}{\sqrt{H-V}} \cdot \frac{1}{\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{H-V}}},$$

что совпадает с вероятностью, найденной выше. Этот факт подтверждает теоретико-вероятностную интерпретацию  $\psi\psi^*$ . Разумеется, в случаях, в которых ВКБ-решения неприменимы, предсказания, получаемые из уравнения

Шредингера, резко отличаются от предсказаний, получаемых с помощью классической механики.

Из условия  $[a, b]^2 = -1$  следует, что

$$\exp\left(2i \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}} \int_a^b \sqrt{H-V} dx\right) = -1,$$

или

$$2i \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}} \int_a^b \sqrt{H-V} dx = 2\pi ni + \pi i,$$

где  $n$  — целое число. Следовательно,

$$2 \sqrt{2m} \int_a^b \sqrt{H-V} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) h,$$

что дает нам уравнение для собственных значений энергии  $H$ .

Импульс классической частицы равен  $p = \pm mv = \pm \sqrt{2m(H-V)}$ , так что уравнение для собственных значений  $H$  можно записать в виде

$$2 \int_a^b p dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) h$$

или

$$\oint p dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) h.$$

Этот интеграл есть фазовый интеграл, вычисленный по полному периоду.

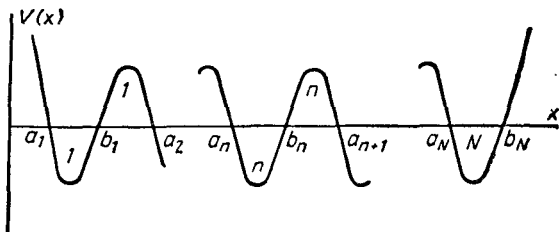
Исторически первое квантовое условие имело вид

$$\oint p dx = nh \quad (6.3)$$

(условие Бора. — *Перев.*) и было сформулировано только на основе эмпирических соображений и подкреплялось экспериментом. С точки зрения классической механики нельзя было привести никакого рационального объяснения этого правила. Условие (6.3) было лишь догадкой; строгий вывод этого условия потребовал дальнейшего развития математического аппарата.

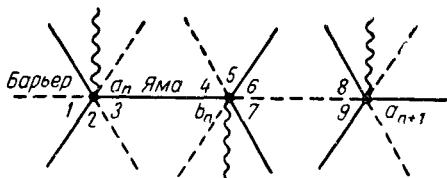
## 6.2. Периодический потенциал

Пусть потенциал  $V(x)$  состоит из  $N$  одинаковых потенциальных ям  $a_1 < x < b_1, \dots, a_n < x < b_n, \dots, a_N <$



Р и с. 31.

$< x < b_N$ , разделенных  $N-1$  равными потенциальными барьерами  $b_1 < x < a_2, \dots$ . Найдем приближенный вид уровней энергии<sup>1)</sup>. Так как функция  $q$  вещественна при



Р и с. 32.

вещественных  $x$ , мы можем воспользоваться формулами связи Джеффриса (4.13) и (4.14); в частности, мы можем использовать формулу связи (4.14) «наоборот» в силу причин, изложенных в разд. 4.9. Мы можем последовательно продолжить решения вокруг точек поворота  $a_n$  и  $b_n$ , используя постоянную Стокса  $i$  (или  $i/2$ ) на линиях Стокса, выходящих из точек поворота порядка 1. Разрезы проведены так, как показано на рис. 32, чтобы слева от каждой ямы волновые функции выглядели одинаково.

<sup>1)</sup> Много других интересных примеров такого типа содержатся в книге Гольдмана и Кривченкова «Сборник задач по квантовой механике».

Общее решение на линии Стокса  $x < a_n$  имеет вид

$$\psi = A_n(a_n, x)_s + B_n(x, a_n)_d$$

(в смысле разд. 4.9). Продолжая это решение, получаем

$$\begin{aligned} 1: & \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) (a_n, z)_s + B_n(z, a_n)_d, \\ 2: & \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) (a_n, z)_d + B_n(z, a_n)_s, \\ 3: & \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) (a_n, z)_d + \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) (z, a_n)_s, \\ 4: & \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) [a_n, b_n] (b_n, z)_s + \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) [b_n, a_n] \times \\ & \times (z, b_n)_d \equiv \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P(b_n, z)_s + \\ & + \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1}(z, b_n)_d, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P \equiv [a_1, b_1] = \dots = [a_N, b_N] = \exp \left( i \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}} \times \right. \\ \left. \times \int_{a_n}^{b_n} \sqrt{H - V} dx \right) \equiv \exp \left( \frac{2\pi i}{h} \int_{a_n}^{b_n} p dx \right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} 5: & \left[ \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P - i \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1} \right] (b_n, z)_s + \\ & + \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1}(z, b_n)_d, \\ 6: & \left[ \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P - i \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1} \right] (b_n, z)_d + \\ & + \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1}(z, b_n)_s. \end{aligned}$$

На линиях Стокса 6—7 и 8—9 соответственно

$$\begin{aligned} & \left[ \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P - i \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1} \right] (b_n, z)_d + \\ & + \left[ -\frac{i}{2} \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P + \frac{1}{2} \left( iA_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1} \right] (z, b_n)_s \end{aligned}$$

и

$$\left[ \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P - i \left( i A_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1} \right] S^{-1} (a_{n+1} z)_s + \\ + \left[ -\frac{i}{2} \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P + \frac{1}{2} \left( i A_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1} \right] S(z, a_{n+1})_d,$$

где

$$S \equiv [a_{n+1}, b_n] = [a_2, b_1] = \dots = \exp \left( -\frac{2\pi}{h} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx \right) \ll 1.$$

Если мы запишем решение при  $x < a_{n+1}$  в виде

$$\psi = A_{n+1} (a_{n+1}, x)_s + B_{n+1} (x, a_{n+1})_d,$$

то получим, что

$$A_{n+1} = \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P S^{-1} - i \left( i A_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1} S^{-1}, \\ B_{n+1} = -\frac{i}{2} \left( A_n + \frac{i}{2} B_n \right) P S + \frac{1}{2} \left( i A_n + \frac{1}{2} B_n \right) P^{-1} S,$$

или

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P S^{-1} + P^{-1} S^{-1} & \frac{i}{2} P S^{-1} - \frac{i}{2} P^{-1} S^{-1} \\ -\frac{i}{2} P S + \frac{i}{2} P^{-1} S & \frac{1}{4} P S + \frac{1}{4} P^{-1} S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^{-u} \sin v & \frac{1}{2} e^{-u} \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix},$$

где

$$u = \frac{2\pi}{h} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx, \quad v = \frac{2\pi}{h} \int_{a_n}^{b_n} p dx.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^u \cos v & -e^u \sin v \\ e^{-u} \sin v & \frac{1}{2} e^{-u} \cos v \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}.$$

Решение, убывающее при  $x < a_1$ , существует, если  $B_1 = 0$ , а при  $x > b_N$  — если  $A_{N+1} = 0$  (что вытекает из рассмотре-

ния решений на линии Стокса 6—7 при  $n = N$ ). Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ B_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{\nu} \cos \nu & -e^{\nu} \sin \nu \\ e^{-\nu} \sin \nu & \frac{1}{2} e^{-\nu} \cos \nu \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е. элемент, стоящий в левом верхнем углу  $N$ -й степени матрицы второго порядка, должен обратиться в нуль. Из этого уравнения мы получаем условия на собственные значения.

Если эту матрицу записать сокращенно в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и обозначить через  $\lambda$  и  $\mu$  ее собственные значения, то ее собственными векторами будут соответственно

$$\begin{pmatrix} d - \lambda \\ -c \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} d - \mu \\ -c \end{pmatrix}.$$

Из линейной алгебры известно, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d - \lambda & d - \mu \\ -c & -c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d - \lambda & d - \mu \\ -c & -c \end{pmatrix},$$

так что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} d - \lambda & d - \mu \\ -c & -c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^N & 0 \\ 0 & \mu^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d - \lambda & d - \mu \\ -c & -c \end{pmatrix},$$

и элемент, стоящий в левом верхнем углу матрицы  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^N$ , пропорционален выражению

$$(-c, -d + \mu) \begin{pmatrix} \lambda^N & 0 \\ 0 & \mu^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d - \lambda \\ -c \end{pmatrix},$$

откуда

$$-c\lambda^N(d - \lambda) - c\mu^N(-d + \mu) = 0,$$

или

$$(\lambda^N - \mu^N)d = \lambda^{N+1} - \mu^{N+1}. \quad (6.4)$$

Собственные значения матрицы находятся из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - (2e^u \cos v + \frac{1}{2} e^{-u} \cos v) \lambda + 1 = 0.$$

Обозначим выражение в круглых скобках через  $2 \cos \varphi$ :

$$2e^u \cos v + \frac{1}{2} e^{-u} \cos v = 2 \cos \varphi. \quad (6.5)$$

Тогда корни характеристического уравнения равны  $e^{\pm i\varphi}$  т. е.

$$\lambda, \mu = e^{\pm i\varphi}.$$

Уравнение (6.4) принимает вид

$$\frac{1}{2} e^{-u} \cos v \sin N\varphi = \sin(N+1)\varphi. \quad (6.6)$$

Исключая  $\cos v$  из уравнений (6.5) и (6.6), после элементарных преобразований получаем

$$4e^{2u} = \frac{\sin(N-1)\varphi}{\sin(N+1)\varphi}.$$

Так как  $e^{2u}$  велико, то это уравнение можно приближенно решить, полагая

$$\sin(N+1)\varphi = 0,$$

при условии, что  $\sin(N-1)\varphi \neq 0$ . Следовательно,

$$\varphi = \frac{n\pi}{N+1},$$

где  $n$  — целое число, значения  $\varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$  исключаем. Таким образом, мы получаем  $N$  различных значений  $\cos \varphi$ , а именно  $\cos n\pi/(N+1)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Уравнение (6.5) примет вид

$$\left(2e^u + \frac{1}{2} e^{-u}\right) \cos v = 2 \cos \frac{n\pi}{N+1},$$

или

$$\cos v \sim e^{-u} \cos \frac{n\pi}{N+1},$$

откуда

$$\begin{aligned} v &= \pi \left( m + \frac{1}{2} \right) - (-1)^m \arcsin \left( e^{-u} \cos \frac{n\pi}{N+1} \right) = \\ &= \pi \left( m + \frac{1}{2} \right) - (-1)^m e^{-u} \cos \frac{n\pi}{N+1}, \end{aligned}$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , и  $n = 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, уровни энергии определяются из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{h} \int_{a_n}^{b_n} p dx &= \pi \left( m + \frac{1}{2} \right) - \\ &- (-1)^m \exp \left( -\frac{2\pi}{h} \int_{b_n}^{a_{n+1}} |p| dx \right) \cos \frac{n\pi}{N+1}. \end{aligned}$$

Если отбросить второе слагаемое, то мы получаем результат, совпадающий с полученным нами ранее результатом для потенциальной ямы. Второе слагаемое в этой формуле показывает, что каждый уровень расщепляется на  $N$  подуровней<sup>1)</sup>.

### 6.3. Ограниченный гармонический осциллятор

Если мы положим  $V(x) = kx^2/2$  и потребуем, чтобы  $\psi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ , то получим задачу о гармоническом осцилляторе. В разд. 5.5 мы видели, что уровни энергии (точные) находятся из уравнения

$$[-a, a]^2 = -1,$$

где  $\pm a$  — нули функции  $H - kx^2/2$ . Отсюда следует, что

$$\frac{2\pi \sqrt{2m}}{h} \int_{-a}^a \sqrt{H - \frac{1}{2} kx^2} dx = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi,$$

<sup>1)</sup> Приведенная здесь формула не имеет смысла, так как первое слагаемое само получено с точностью до  $O(h)$ . На самом деле имеет смысл лишь асимптотика разности между расщепленными подуровнями. —Прим. ред.



или

$$\frac{2\pi}{h} \sqrt{\frac{m}{k}} H = n + \frac{1}{2}.$$

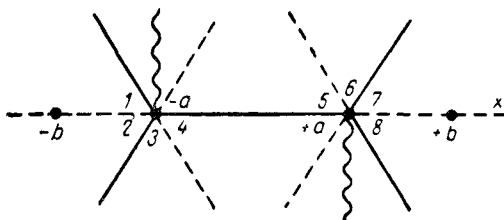
Уравнение движения классической частицы имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx,$$

так что частота колебаний равна  $\nu = \sqrt{k/m} \cdot (2\pi)^{-1}$ . Исключая  $\sqrt{m/k}$ , находим, что

$$H = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu,$$

что дает нам дискретный набор допустимых уровней энергии для гармонического осциллятора.



Р и с. 33

Если мы теперь заменим условие  $\psi(\pm\infty) = 0$  условием  $\psi(\pm b) = 0$  (т. е. осциллятор помещен в ящик с бесконечно высокими стенками в точках  $x = \pm b$ ), то мы получим задачу об ограниченном гармоническом осцилляторе. На рис. 33 стенки  $x = \pm b$  фиксированы, но точки поворота  $\pm a$  могут меняться дискретным образом в зависимости от выбора уровня энергии. Мы ограничимся случаем, когда ВКБ-решения применимы в областях

$$-b < x < -a, \quad -a < x < a, \quad a < x < b.$$

Общее решение уравнения на сопряженной линии Стокса, соединяющей две точки поворота, можно записать в виде

$$\psi = A(x, a) + B(a, x).$$

Ветвь корня выбрана таким образом, что  $(x, a)$  представляет волну, движущуюся направо. Продолжая решение в комплексную плоскость с помощью методов разд. 4.9, получаем

$$\begin{aligned} 5: & A(z, a)_d + B(a, z)_s, \\ 6: & A(z, a)_d + (B - iA)(a, z)_s, \\ 7: & A(z, a)_s + (B - iA)(a, z)_d. \end{aligned}$$

На линии Стокса 7—8:

$$\frac{1}{2}(A - iB)(x, a)_s + (B - iA)(a, x)_d.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} 4: & A[-a, a](z, -a)_s + B[a, -a](-a, z)_d, \\ 3: & \{A[-a, a] - iB[a, -a]\}(z, -a)_s + \\ & + B[a, -a](-a, z)_d, \\ 2: & \{A[-a, a] - iB[a, -a]\}(z, -a)_d + \\ & + B[a, -a](-a, z)_s. \end{aligned}$$

На линии Стокса 1—2:

$$\begin{aligned} & \{A[-a, a] - iB[a, -a]\}(x, -a)_d + \\ & + \left\{ -\frac{i}{2}A[-a, a] + \frac{1}{2}B[a, -a] \right\}(-a, x)_s. \end{aligned}$$

Далее,  $\psi = 0$  при  $x = \pm b$ ; следовательно,

$$\frac{1}{2}(A - iB)(b, a)_s + (B - iA)(a, b)_d = 0,$$

$$\begin{aligned} & \{A[-a, a] - iB[a, -a]\}(-b, -a)_d + \\ & + \left\{ -\frac{i}{2}A[-a, a] + \frac{1}{2}B[a, -a] \right\}(-a, b)_s = 0. \end{aligned}$$

Положим  $\arg q = -\pi, 0, -\pi$  соответственно в областях  $x > a$ ,  $-a < x < a$ ,  $x < -a$  и обозначим

$$[a, b]_d = [-b, -a]_d = L, \quad [-a, a] = P.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A - iB)L^{-1} + (B - iA)L = 0, \\ & (AP - iBP^{-1})L + \left( -\frac{i}{2}AP + \frac{1}{2}BP^{-1} \right)L^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Исключая  $A$  и  $B$ , получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} L^{-1} - iL & -\frac{i}{2} L^{-1} + L \\ PL - \frac{i}{2} PL^{-1} & -iP^{-1}L + \frac{1}{2} P^{-1}L^{-1} \end{vmatrix} = 0$$

и после упрощений

$$P^2 = -1 - 2iL^{-2}$$

(с точностью до членов второго порядка по  $L^{-2}$ ).

Теперь,

$$P^2 = \exp\left(2 \cdot \frac{2\pi i \sqrt{2m}}{h} \int_{-a}^a \sqrt{H - \frac{1}{2} kx^2} dx\right) = \exp\left(\frac{2\pi i H}{h\nu}\right),$$

как и ранее. Кроме того, интегрируя по частям, получаем

$$L^{-2} = \exp\left[-\frac{4\pi \sqrt{mk}}{h} \left(\frac{b}{2} \sqrt{b^2 - \frac{2H}{k}} - \frac{H}{k} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - \frac{2H}{k}}}{\sqrt{\frac{2H}{k}}}\right)\right].$$

Если  $b^2 \gg 2H/k$  то

$$\begin{aligned} L^{-2} &= \exp\left(-\frac{2\pi \sqrt{mk}}{h} \left(b^2 - \frac{H}{k} - \frac{H}{k} \ln \frac{2b^2k}{H}\right)\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi \sqrt{mk} b^2}{h}\right) \exp\left(\frac{H}{h\nu}\right) \left(\frac{2b^2k}{H}\right)^{H/h\nu}. \end{aligned}$$

Уравнение для  $H$  принимает вид

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{2\pi i H}{h\nu}\right) &= \\ &= -1 - 2i \exp\left(-\frac{2\pi \sqrt{mk} b^2}{h}\right) \exp\left(\frac{H}{h\nu}\right) \left(\frac{2b^2k}{H}\right)^{H/h\nu}. \end{aligned}$$

Первое приближение, очевидно, равно

$$\frac{2\pi H}{h\nu} = (2n + 1) \pi,$$

или

$$H = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu.$$

Чтобы найти второе приближение, положим  $H = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu + \epsilon$ ; тогда

$$\begin{aligned} \exp \left[ 2\pi i \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\epsilon}{h\nu} \right] &= \\ &= -\exp \left( \frac{2\pi i \epsilon}{h\nu} \right) \sim - \left( 1 + \frac{2\pi i \epsilon}{h\nu} \right), \end{aligned}$$

так что

$$\epsilon = \frac{h\nu}{\pi} \exp \left( -\frac{2\pi \sqrt{mk} b^2}{h} \right) \exp \left( \frac{H}{h\nu} \right) \left( \frac{2b^2k}{H} \right)^{H/h\nu},$$

где  $H$  полагаем равным первому приближению. Следовательно,

$$\begin{aligned} H = \left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu + \frac{h\nu}{\pi} \exp \left( -\frac{2\pi \sqrt{mk} b^2}{h} \right) \times \\ \times \exp \left( n + \frac{1}{2} \right) \left[ \frac{2b^2k}{\left( n + \frac{1}{2} \right) h\nu} \right]^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Необходимое условие применимости ВКБ-решений между точками поворота дается неравенством (2.8). В данной задаче надо заменить  $h^2$  на  $8\pi^2m/h^2$  и  $q$  на  $H - kx^2/2$ , что дает нам

$$\frac{8\pi^2m}{h^2} \gg \left| \frac{5}{16} \cdot \frac{k^2x^2}{\left( H - \frac{1}{2} kx^2 \right)^3} + \frac{k}{4 \left( H - \frac{1}{2} kx^2 \right)^2} \right|.$$

При  $x=0$  это условие принимает вид  $2\sqrt{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \gg 1$ , т. е. наши вычисления позволяют найти только высокие уровни энергии.

Этот результат согласуется с результатами, полученными другим способом Аулуком и Котхари. Однако найденный ими поправочный член в два раза больше найденного нами. Причина этого состоит в том, что Аулук и Котхари

в своей статье <sup>1)</sup> случайно пропустили множитель 2, выписывая асимптотические разложения функций параболического цилиндра. Обычные методы, приведенные в разд. 4.9, не получили еще признания в то время, когда была написана их работа.

#### 6.4. Атом водорода

Трехмерное уравнение Шредингера для атома водорода имеет вид

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \left( H + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа в полярных координатах. Потенциальная энергия системы, состоящей из расположенного в центре ядра и одного орбитального электрона, равна  $-e^2/r$ , где  $-e$  — заряд электрона.

В любой книге по квантовой механике показано, что это уравнение допускает разделение переменных в координатах  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и что уравнение для радиальной волновой функции  $R(r)$  имеет вид

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left[ \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \left( H + \frac{e^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0.$$

Здесь  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ; эти целые числа возникают при решении уравнения, зависящего только от  $\theta$ . Собственные значения энергии  $H$  необходимо найти из радиального волнового уравнения; граничные условия требуют, чтобы  $R \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$  и чтобы  $R$  оставалась конечной при  $r \rightarrow 0$ .

Полагая  $R = S/r$ , получаем

$$S'' + \left[ \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \left( H + \frac{e^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] S = 0.$$

Мы потребуем, чтобы  $S \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$  и при  $r \rightarrow 0$ .

Это уравнение можно записать в более привычной форме:

$$S'' + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} qS = 0,$$

<sup>1)</sup> Автор благодарит профессора Ф. К. Аулука (Дели) за сообщение, что на эту ошибку указано в работах Сингх и Байджал; Хал и Джулиус; Сингх.

где

$$q = \left( Hr^2 + e^2 r - \frac{h^2 l(l+1)}{8\pi^2 m} \right) r^{-2}.$$

Так как решение должно убывать при  $r \rightarrow +\infty$ , то ясно, что  $H < 0$ , так что  $q < 0$ . Положим  $H = -W$ .

В этом случае  $q$  имеет два нуля  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ):

$$r_{1,2} = \frac{1}{2W} \left[ e^2 \pm \sqrt{e^4 - \frac{Wh^2 l(l+1)}{2\pi^2 m}} \right] > 0.$$

Поэтому создается впечатление, что среда между нулями является неплотной и что решения, которые стремятся к нулю (по  $r$ ), убывают (по  $h$ ) по обе стороны от нулей. Тогда собственные значения  $W$  удовлетворяют уравнению  $[r_1, r_2]^2 = -1$ .

К несчастью, собственные функции  $\psi$ , вычисленные при этих предположениях, не совпадают с асимптотическими разложениями точных решений задачи об атоме водорода, найденными другими методами.

Чтобы преодолеть эту трудность, многие авторы просто заменяют  $l(l+1)$  на  $(l+1/2)^2$  без всякого обсуждения; Лангер [2] (в конце стр. 674) приводит 6 ссылок на такие работы. Даже сравнительно недавно Ландау и Лифшиц (стр. 207 их книги) сделали такую же замену, просто сравнивая ВКБ-решения с точными решениями. Это является некоторой слабостью приближенного метода и наводит на мысль, что метод ВКБ сам не всегда позволяет получить требуемый результат (ср. дополнение II, § 5, пример. — *Ред.*), если не сравнивать его с результатами, полученными более точно с помощью других методов. Однако Лангер [2] показал, что ошибка связана не с методом ВКБ, а с его применением. Причина состоит в том, что ВКБ-решение при  $r < r_1$  не может быть пригодно вплоть до точки  $r = 0$ , в которой поставлено граничное условие для  $S$ . Действительно, решение, убывающее (по  $h$ ) слева от  $r_1$ , обращается в бесконечность в точке  $r = 0$ . Лангер показал, как обойти эту трудность.

Положим  $r = e^x$  и  $R = e^{-x/2} U$  в радиальном волновом уравнении, независимое переменное  $x$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тогда мы получим уравнение

$$U'' + \left[ \frac{8\pi^2 m}{h^2} (He^{2x} + e^2 e^x) - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] U = 0,$$

ВКБ-решения которого пригодны в точке  $x = -\infty$  (т. е. в точке  $r = 0$ ). Вследствие сделанной нами замены к выражению  $l(l+1)$  добавилось слагаемое  $1/4$ .

Нули функции

$$q = -We^{2x} + e^2 e^x - \frac{h^2 \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{8\pi^2 m},$$

т. е. точки  $x_1, x_2$ , находятся из уравнения

$$e^x = \frac{1}{2W} \left[ -e^2 \pm \sqrt{e^4 - \frac{Wh^2 \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{2\pi^2 m}} \right].$$

Следовательно, собственные значения  $W$ , при которых решение убывает при  $x \rightarrow \pm \infty$ , удовлетворяют уравнению  $[x_1, x_2]^2 = -1$ , т. е.

$$2 \sqrt{\frac{8\pi^2 m W}{h^2}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{-e^{2x} + \frac{e^2}{W} e^x - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 h^2}{8\pi^2 m W}} dx = (2n + 1) \pi.$$

Полагая  $y = e^x$ , получаем

$$\sqrt{\frac{8\pi^2 m W}{h^2}} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{-y^2 + \frac{e^2}{W} y - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 h^2}{8\pi^2 m W} \frac{dy}{y}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi.$$

Задача о собственных значениях для термосферы (атмосферы, температура которой неограниченно возрастает с возрастанием высоты), которая приводит к вычислению аналогичного фазового интеграла, была рассмотрена Эккартом (стр. 214 его книги).

В любой таблице неопределенных интегралов можно найти, что

$$\int \frac{\sqrt{-ay^2 + by - c}}{y} dy = \sqrt{-ay^2 + by - c} - \frac{b}{2\sqrt{a}} \arcsin \frac{b-2ay}{\sqrt{b^2-4ac}} - \sqrt{c} \arcsin \frac{by-2c}{y\sqrt{b^2-4ac}},$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  положительны и  $y$  заключено между двумя вещественными нулями функции  $-ay^2 + by - c$ ; значения арксинуса заключены в интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Если взять пределы интегрирования

$$y_{1,2} = \frac{1}{2a} (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}),$$

то значения интеграла на верхнем и нижнем пределах равны

$$-\frac{b}{2\sqrt{a}} \arcsin(\mp 1) - \sqrt{c} \arcsin(\pm 1),$$

так что определенный интеграл равен

$$\frac{b\pi}{2\sqrt{a-c}}.$$

Подставляя в эту формулу

$$a = 1, \quad b = \frac{e^2}{W}, \quad c = \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 h^2}{8\pi^2 m W},$$

получаем

$$\sqrt{\frac{8\pi^2 m W}{h^2}} \left( \frac{e^2}{2W} - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right) h}{\sqrt{8\pi^2 m W}} \right) = n + \frac{1}{2},$$

или

$$\sqrt{\frac{8\pi^2 m W}{h^2}} \frac{e^2}{2W} = \left(n - \frac{1}{2}\right) + \left(l + \frac{1}{2}\right) = p,$$

где  $p$  — целое число. Следовательно,

$$W = -H = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2 p^2}.$$

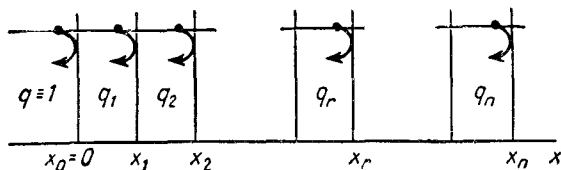
Этот результат был получен нами только в том случае, если ВКБ-решения пригодны в интервале между точками поворота, но точная теория атома водорода показывает, что уровни энергии всегда имеют такой вид. Выражение для радиальной волновой функции  $R(r)$  приведено в книге Ландау и Лифшица.

### 6.5. Интерпретация ВКБ-решений Бреммером

Пусть  $q \equiv 1$  слева от точки  $x=0$ , а справа от точки  $x=0$  среда разделена на тонкие слои точками  $x_1, x_2, \dots$



...,  $x_r$ , ...,  $x_n$ . Пусть  $q = q_r = \text{const}$  в интервале  $x_{r-1} < x < x_r$  и величина  $q$  медленно меняется при переходе от слоя к слою. Бреммер [5] рассматривает первичную волну, падающую слева. В точке  $x=0$  небольшая часть падающей волны отражается, но большая ее часть проходит дальше. Аналогично в точке  $x=x_1$  снова часть волны отражается, а большая ее часть движется дальше. Несмотря



Р и с. 34.

на однократные и многократные отражения, волна проходит сквозь среду, и можно найти ее значение в точке  $x = x_n$ ; после этого мы можем перейти к пределу, устремляя толщину слоев к нулю, т. е. переходя к непрерывной среде.

Положим

$$\omega = A_r e^{-ihQ_r x} + B_r e^{ihQ_r x}$$

в интервале, лежащем слева от точки  $x_r$ , и

$$\omega = C_r e^{-ihQ_{r+1} x}$$

в интервале, лежащем справа от  $x_r$ . Здесь  $Q_r = \sqrt{q_r}$ , причем ветвь корня выбрана таким образом, что его отрицательное значение соответствует волне, движущейся направо. Условие непрерывности  $\omega$  и  $\omega'$  в точке  $x = x_r$  дает два уравнения:

$$A_r e^{-ihQ_r x_r} + B_r e^{ihQ_r x_r} = C_r e^{-ihQ_{r+1} x_r}$$

и

$$-Q_r A_r e^{-ihQ_r x_r} + Q_r B_r e^{ihQ_r x_r} = -Q_{r+1} C_r e^{-ihQ_{r+1} x_r}.$$

Исключая  $B_r$ , получаем

$$C_r = 2A_r Q_r (Q_r + Q_{r+1})^{-1} e^{-ih(Q_r - Q_{r+1})x_r},$$

где  $Q_0 = 1$ ,  $x_0 = 0$  и  $A_0 = 1$ , если падающая волна равна  $e^{-ihx}$ .

Таким образом, используя эти условия при  $r = 0, 1, 2, \dots, n$ , мы можем найти прошедшую волну в точке  $x = x_n$ :

$$\omega_0 = C_{n+1} e^{-ihQ_{n+1}x_n} = \frac{2Q_0}{Q_0+Q_1} \cdot \frac{2Q_1}{Q_1+Q_2} \cdots \frac{2Q_n}{Q_n+Q_{n+1}} \times \\ \times e^{-ih(Q_0-Q_1)x_0} e^{-ih(Q_1-Q_2)x_1} \cdots e^{-ih(Q_n-Q_{n+1})x_n} e^{-ihQ_{n+1}x_n}.$$

Далее,

$$\frac{2Q_0}{Q_0+Q_1} = \frac{2Q_0}{2Q_0+(Q_1-Q_0)} \sim 1 - \frac{Q_1-Q_0}{2Q_0} \sim \exp\left(-\frac{Q_1-Q_0}{2Q_0}\right),$$

откуда

$$\omega_0 = \exp\left(-\frac{Q_1-Q_0}{2Q_0} - \frac{Q_2-Q_1}{2Q_1} - \cdots - \frac{Q_{n+1}-Q_n}{2Q_n}\right) \times \\ \times \exp[-ihQ_0x_0 - ihQ_1(x_1-x_0) - \cdots - ihQ_n(x_n-x_{n-1})] = \\ = \exp\left(-\sum \frac{\delta Q}{2Q} - ih \sum Q \delta x\right).$$

Переходя к пределу и формально заменяя суммирование интегрированием, получаем

$$\omega_0 = \exp\left(-\int_0^x \frac{dQ}{2Q} - ih \int_0^x Q dx\right) = \\ = Q^{-1/2} \exp\left(-ih \int_0^x Q dx\right) = q^{-1/4} \exp\left(-ih \int_0^x |q| dx\right).$$

Мы получили ВКБ-решение, представляющее собой волну, движущуюся направо.

Таким образом, это частное ВКБ-решение возникает в том случае, если пренебречь всеми отражениями падающей волны; мы пренебрегаем также всеми многократными отражениями, которые дают волны, движущиеся направо. Очевидно, что при таком подходе мы не можем рассмотреть области, в которых  $q = 0$ .

Далее Бреммер показывает, что для получения первой поправки необходимо учесть все однократно отраженные

волны, и находит для этой поправки формулу

$$\omega_1(x) = -\frac{1}{4} q^{-1/4}(x) \int_x^{\infty} \left[ q'(s) q^{-3/4}(s) \omega_0(s) \times \right. \\ \left. \times \exp\left( ih \int_x^s \sqrt{q(\sigma)} d\sigma \right) \right] ds.$$

Следующие приближения были рассмотрены Беллманом и Калаба [1, 2], которые исследовали сходимость этих рядов и показали, что сумма ряда действительно удовлетворяет исходному волновому уравнению.

### 6.6. Лучевая теория в изотропной ионосфере

Распространение электромагнитных волн в ионизированной среде обусловлено наличием свободных электронов, столкновениями этих электронов с более тяжелыми частицами, что вызывает потерю энергии, и существованием магнитного поля земли, которое делает ионосферу *анизотропной* или *двойкопреломляющей*, т. е. приводит к появлению двух показателей преломления вместо одного. Мы рассмотрим только эффекты, связанные с плотностью ионизации. Полную теорию анизотропной ионосферы можно найти в книге Баддена [3] (гл. XIII) и аналогичное, хотя менее полное, исследование гидродинамики слоистой атмосферы и океанов — у Эккарта (гл. XI). В этой связи следует также упомянуть работу Букера.

Уравнения Максвелла с учетом плотности потока  $\mathbf{j}$ , обусловленным движением свободных электронов, имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Если  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}$  содержат временной множитель  $e^{ipt}$ , то уравнения имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -ik\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = ik\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

где  $k = p/c$ . Исключая  $\mathbf{H}$ , получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} - \frac{4\pi ik}{c} \mathbf{j}.$$

Если  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор элемента объема  $\delta V$  в положении равновесия и если  $N$  и  $m$  означают соответственно плотность электронов и массу электрона, то уравнение движения элемента объема под действием электрического поля имеет вид

$$Nm\delta V \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -Ne\delta V\mathbf{E},$$

или

$$mp^2\mathbf{r} = e\mathbf{E}.$$

Плотность потока  $\mathbf{j}$  имеет вид

$$\mathbf{j} = \varrho \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -Neip\mathbf{r} = Neip \frac{e\mathbf{E}}{mp^2}.$$

Следовательно,

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \left( k^2 - \frac{4\pi k}{c} \frac{Ne^2p}{mp^2} \right) \mathbf{E} = k^2(1 - X)\mathbf{E}, \quad (6.7)$$

где  $X = 4\pi Ne^2/mp^2 \equiv k_p^2/k^2$ . Уравнение (6.7) есть дифференциальное уравнение для электрического поля в ионизированной среде.

Выберем прямоугольную систему координат  $Oxyz$ , где ось  $Oz$  проходит через центр земли. Пусть  $N$  является функцией только высоты  $z$ , причем  $N=0$  при  $z < 0$ , т. е. плоскость  $Oxy$  является основанием ионизированного слоя. Мы потребуем, чтобы все функции поля имели вид  $e^{-ikx \sin \theta} f(z)$  ( $\sin \theta$  будет интерпретирован ниже).

Имеем

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = (-ik \sin \theta E'_z + E''_x, \\ -E''_y + k^2 \sin^2 \theta E_y, k^2 \sin^2 \theta E_z - ik E'_x \sin \theta),$$

где штрих означает дифференцирование по  $z$ .

Проекция вектора  $\text{rot rot } \mathbf{E}$  на ось  $Oy$  равна

$$k^2 \sin^2 \theta E_y - E''_y,$$

так что для этой проекции уравнение (6.7) имеет вид

$$k^2 \sin^2 \theta E_y - E''_y = k^2(1 - X) E_y,$$

или

$$E''_y + k^2(\cos^2 \theta - X) E_y = 0.$$

К уравнениям такого типа при больших частотах можно применять метод ВКБ.

В свободном пространстве (при  $z < 0$ ) мы имеем  $X = 0$ , так что  $E_y = e^{\pm ikz \cos \theta}$ , если не учитывать зависимости  $E_y$  от  $t$  и  $x$ . С учетом этой зависимости получаем

$$E_y = \exp[-ik(x \sin \theta \pm z \cos \theta) + ipt].$$

Это—плоская волна, падающая под углом  $\theta$  к вертикали или отраженная под углом  $\theta$  от вертикали.

В ионизованной среде (при  $z > 0$ ) имеем

$$E'' + k^2 q E = 0,$$

где индекс  $y$  опущен, а  $q = \cos^2 \theta - X$ . В лучевой теории обычно используется менее точный вид ВКБ-решений. Предположим, что  $E$  имеет вид

$$E = \exp\{ik[ct - x \sin \theta - \varphi(z)]\},$$

где  $\varphi(z) = \cos \varphi z$  в случае свободного пространства. Менее точный вид ВКБ-решения мы получим, если при дифференцировании выражения

$$E' = -ik\varphi'(z) \exp\{ik[ct - x \sin \theta - \varphi(z)]\}$$

будем дифференцировать только экспоненту.

Тогда

$$E'' \sim -k^2(\varphi')^2 \exp\{ik[ct - x \sin \theta - \varphi(z)]\}$$

и, подставляя это в уравнение для  $E$ , получаем

$$-k^2(\varphi')^2 + k^2 q = 0.$$

Это простейший вариант уравнения Гамильтона—Якоби, которое обычно возникает при исследовании решений уравнений Максвелла при больших  $k$ . Очевидно, что

$$\varphi = \int_0^z \sqrt{q} dz$$

—это типичное первое приближение для уравнения Рикати, рассмотренного в разд. 2.1. Мы получаем следующее приближенное решение:

$$E = \exp\left[ ik \left( ct - Sx - \int_0^z \sqrt{q} dz \right) \right] \equiv \exp(iP),$$

где  $S \equiv \sin \theta$ .

Рассмотрим *волновой пакет*, т. е. суперпозицию волн  $E_s$ , зависящих от  $S$  и  $k$ , помноженных на амплитуды  $A(S, k)$ , причем  $A(S, k)$  имеет резко выраженный максимум в некоторой точке  $(S, k)$ :

$$E_s = \iint A \exp(iP) dS dk.$$

Фиксируем  $x, z$  и  $t$ . Тогда в силу осцилляции подинтегрального выражения основной вклад в интеграл вносит окрестность стационарной точки функции  $P^1$ ). В этой точке

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial S} &\equiv k \left( -x - \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right) = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial k} &\equiv ct - Sx - \varphi - k \frac{\partial \varphi}{\partial k} = 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение описывает движение волнового пакета или луча:

$$\begin{aligned} x = -\frac{\partial \varphi}{\partial S} &= -\frac{\partial}{\partial S} \int_0^z \sqrt{q} dz = \\ &= -\frac{\partial}{\partial S} \int_0^z \sqrt{1 - S^2 - X} dz = S \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{q}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Если две точки  $(x, z, t)$  и  $(x + \delta x, z + \delta z, t + \delta t)$  лежат на одном луче, то

$$\begin{aligned} \delta x + \delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right) &= 0, \\ c\delta t = S\delta x + \delta \varphi + k\delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial k} \right), \end{aligned}$$

где

$$\delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} (\sqrt{q}) \delta z = \frac{\partial}{\partial S} (\sqrt{1 - S^2 - X}) \delta z = -\frac{S}{\sqrt{q}} \delta z$$

и

$$\delta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial k} \right) = \frac{\partial}{\partial k} (\sqrt{q}) \delta z = \frac{\partial}{\partial k} \left( \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{k_0^2}{k^2}} \right) \delta z = \frac{k_0^2}{k^3 \sqrt{q}} \delta z,$$

1) Автор применяет метод стационарной фазы; см., например, Фокке и дополнение II. — *Прим. перев.*

откуда

$$\delta x = \frac{S}{\sqrt{q}} \delta z, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} c\delta t &= S\delta x + \sqrt{\cos^2\theta - X} \delta z + \frac{k_0^2}{k^2 \sqrt{\cos^2\theta - X}} \delta z = \\ &= S\delta x + \frac{\cos^2\theta \delta z}{\sqrt{\cos^2\theta - X}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Скорость  $v$  волнового пакета называется *групповой скоростью*. Ее величина определяется из формулы

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{S^2}{q} + 1\right) \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

что следует из уравнения (6.9). Исключая  $\delta x$  из уравнений (6.9) и (6.10), получаем

$$c\delta t = \frac{S^2\delta z + \cos^2\theta \delta z}{\sqrt{q}} = \frac{\delta z}{\sqrt{q}},$$

откуда

$$v^2 = \left(\frac{S^2}{q} + 1\right) c^2 q = c^2 (S^2 + q) = c^2 (1 - X)$$

и

$$v = c\sqrt{1 - X}.$$

Эта величина всегда вещественна, так как  $\cos^2\theta - X \geq 0$ .

Из уравнения (6.9) можно найти градиент луча, именно

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{q}}{\sin\theta}. \quad (6.11)$$

Это выражение обращается в нуль, если  $q=0$ , именно когда  $\cos^2\theta = X$ , т. е. когда  $z$  достигает максимального значения вдоль луча. В связи с этим следует напомнить, что ВКБ-приближения теряют смысл в точках, в которых  $q=0$ . Действительно, ВКБ-решения не позволяют определить понятие луча в непосредственной окрестности точки, в которой  $q=0$ .

В качестве примера рассмотрим линейно растущую электронную плотность, имеющую вид  $X = az/k^2$ . Путь

луча (6.9) определяется уравнением

$$x = \sin \theta \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\cos^2 \theta - \frac{az}{k^2}}} = \frac{2k^2}{a} \sin \theta \left( \cos \theta - \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{az}{k^2}} \right).$$

Это — парабола с вершиной, в которой  $z = (k^2 \cos^2 \theta)/a$ .

*Комплексный вектор Пойнтинга*, описывающий поток энергии, пропорционален выражению

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{H} = A(\mathbf{E}^* \times \text{rot } \mathbf{E}),$$

что равно

$$(0, E_y^*, 0) \times \text{rot } (0, E_y, 0) = (-ik \sin \theta E_y E_y^*, 0, E_y^* E_y').$$

Его направляющий вектор равен

$$\frac{E^* E_y'}{-ik \sin \theta E_y E_y^*} = \frac{-ik \varphi'}{-ik \sin \theta} = \frac{\sqrt{q}}{\sin \theta},$$

что совпадает с (6.11) и показывает, что направление потока энергии совпадает с направлением луча.

## 6.7. Обобщение на случай анизотропной ионосферы

Читатель мог заметить, что в теоретических главах настоящей книги мы рассматривали только один тип уравнений, именно,

$$\omega'' + h^2 q \omega = 0. \quad (6.12)$$

ВКБ-решения были найдены нами в областях, содержащих точки поворота, т. е. нули функции  $q$ . Мы вывели формулы связи при вещественных  $x$ , тогда как коэффициенты отражения мы вычислили с помощью метода ВКБ.

Можно обобщить эти результаты в двух направлениях. Мы можем рассмотреть то же уравнение, но с более сложными функциями  $q$ , например имеющими изолированные полюсы, или же уравнения более высокого порядка. Об этом коротко было сказано в гл. I.

Уравнения, описывающие распространение волн в анизотропной ионосфере, имеют четвертый порядок. Это про-



исходит потому, что в уравнении движения свободных электронов мы учитываем силы, возникающие при взаимодействии электронов с магнитным полем земли. Эти уравнения четвертого порядка могут быть записаны в виде системы четырех уравнений первого порядка (аналогичной системе разд. 2.5), содержащих неизвестные функции  $E_x, E_y, H_x, H_y$  (см. Клеммов и Хединг). Преобразуя эту систему, мы можем получить четыре ВКБ-решения, которые будут неприменимы в окрестности точек поворота. В этих точках совпадают корни некоторого уравнения четвертого порядка, причем обычно совпадают два корня.

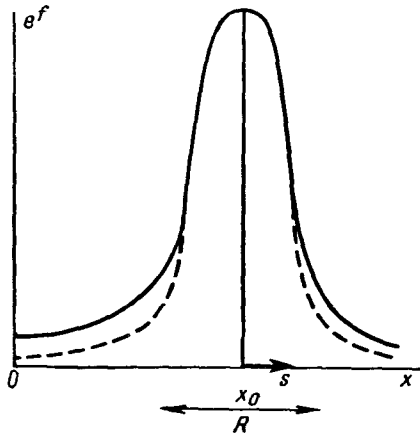
В окрестности такой точки  $z_0$  два ВКБ-решения не меняются при продолжении по пути, обходящему  $z_0$ , а два ВКБ-решения изменяются в соответствии с правилами, установленными в гл. IV (см. Хединг [5]). Из этого делается заключение, что теорию, развитую в нашей книге, можно непосредственно применить к исследованию взаимодействия между двумя волнами. Бадден в своей книге [3] «Радиоволны в ионосфере» очень полно исследовал эти вопросы и рассмотрел много задач, в которых используется этот метод. Однако совершенно очевидно, что математическая теория этих методов еще далека от завершения.

## Приложение

### СВЯЗЬ МЕЖДУ РЯДАМИ И ВКБ-РЕШЕНИЯМИ

#### П.1. Приближенное вычисление площади

Пусть задана функция  $y = g(x) e^{f(x, h)} > 0$ , определенная при  $x > 0$  и такая, что при больших  $h$  функция  $e^f$  принимает большие значения в некоторой области  $R$  и мала



Р и с. 35.

при остальных значениях  $x$ , причем функция  $g(x)$  медленно меняется в области  $R$ . На рис. 35 изображен график такой функции (сплошная линия). Мы найдем приближенное значение интеграла

$$I = \int_0^{\infty} g e^f dx$$

в предположении, что интеграл сходится.

В окрестности максимума мы заменим функцию  $ge^f$ , для которой интеграл  $I$  обычно не вычисляется, более простой функцией. Пусть  $f(x)$  достигает максимума в точке  $x = x_0$ . Разложим  $f(x)$  в ряд Тейлора в точке  $x_0$  и оставим первые два ненулевых члена разложения:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0).$$

Пусть  $f''(x_0) \neq 0$ ; тогда  $f''(x_0) < 0$ . Если обозначить  $x - x_0 = s$  и заменить  $g(x)$  на  $g(x_0)$  в области  $R$ , то приближенно

$$I \sim g(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ f(x_0) + \frac{s^2}{2} f''(x_0) \right] ds,$$

где пределы интегрирования  $\pm \infty$  выбраны для того, чтобы облегчить интегрирование. Пунктирная линия на рис. 35 изображает кривую, площадь под которой мы вычисляем.

Обозначая  $f''(x_0) s^2/2$  через  $-u^2$ , получаем

$$I \sim \frac{g(x_0) \exp [f(x_0)]}{\sqrt{-\frac{1}{2} f''(x_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \\ = \sqrt{-\frac{2\pi}{f''(x_0)}} g(x_0) e^{f(x_0)}, \quad (\text{П1})$$

поскольку  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ .

Этот метод является простейшим вариантом метода наискорейшего спуска<sup>1)</sup>.

## П.2. Гамма-функция

Если  $h$  вещественно и положительно, то

$$\Gamma(h) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{h-1} dx = \int_0^{\infty} \exp[-x + (h-1) \ln x] dx.$$

<sup>1)</sup> Или метода перевала. Подробнее этот метод изложен в книгах М. А. Евграфова и де Брейна. — *Прим. перев.*

График подинтегральной функции при больших  $h$  имеет узкий высокий пик. Интегрируя по частям, получаем

$$\Gamma(h+1) = h\Gamma(h),$$

так что

$$\Gamma(h) = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} \exp(-x + h \ln x) dx.$$

Применяя метод, развитый в П.1, получаем

$$f(x) = -x + h \ln x, \quad f'(x) = -1 + \frac{h}{x}, \quad f''(x) = -\frac{h}{x^2}.$$

Так как  $f'(h) = 0$ , то

$$f(h) = -h + h \ln h, \quad f''(h) = -\frac{1}{h};$$

третьей производной при больших  $h$  можно пренебречь. Формула (П1) дает нам

$$\Gamma(h) \sim \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\pi}{h}} e^{-h+h \ln h} = \sqrt{\frac{2\pi}{h}} e^{-h} h^h. \quad (\text{П2})$$

Это приближение обычно называется *формулой Стирлинга*.

При комплексных  $h$  необходимо более точно определить функцию  $\Gamma(h)$ . Приближение (П2) пригодно и для комплексных  $h$ , лежащих внутри сектора  $-\pi + \varepsilon < \arg h < \pi - \varepsilon$ , где  $\varepsilon (> 0)$  сколь угодно мало.

### П.3. Уравнение Эйри

Дифференциальное уравнение  $\omega'' = z\omega$  имеет два простых решения в виде степенных рядов. Эти решения однозначны, и ряды сходятся при всех  $z$ . Находим эти ряды, последовательно вычисляя коэффициенты:

$$\omega_1 = 1 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} z^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} z^9 + \dots,$$

$$\omega_2 = z + \frac{2}{4!} z^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} z^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} z^{10} + \dots = z\nu_2.$$

Общее решение имеет вид  $\omega = A\omega_1 + B\omega_2$ .

Чтобы исследовать поведение этих рядов при больших  $|z|$ , необходимо преобразовать эти ряды к другому виду. При  $z = h$ , где  $h$  — большое вещественное положи-

тельное число, все члены ряда  $\omega_1$  положительны, и можно приближенно найти сумму этого ряда (мы следуем Стоксу [3]), заменяя дискретный индекс суммирования непрерывным переменным. Член, содержащий  $h^{3n}$ , имеет вид

$$\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2) h^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{3} \dots \left(n - \frac{2}{3}\right) h^{3n} 3^n = \\ = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) h^{3n} 3^n}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma(3n+1)}.$$

Поэтому мы рассмотрим непрерывную кривую

$$y = \frac{\Gamma\left(x + \frac{1}{3}\right) h^{3x} 3^x}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma(3x+1)},$$

площадь под которой при положительных  $x$  приближенно равна сумме ряда  $\omega_1$ . Члены ряда  $\omega_1$  (а стало быть, и функция  $y$ ) вначале возрастают и имеют максимум для некоторого большого значения  $n$  (или  $x$ ). Поэтому мы будем искать площадь под кривой с помощью метода, развитого в П.1.

Применяя формулу (П2) при больших  $x$ , получаем

$$y \sim \frac{x^{-2/3}}{\sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \exp(-2x \ln x - 2x \ln 3 + 3x \ln h + 2x),$$

где  $x^{-2/3}$  — медленно меняющаяся функция (по сравнению с функцией, стоящей под знаком экспоненты). Полагая

$$f = -2x \ln x - 2x \ln 3 + 3x \ln h + 2x,$$

находим

$$f' = -2 \ln x - 2 \ln 3 + 3 \ln h, \quad f'' = -\frac{2}{x};$$

$f'$  обращается в нуль при  $x = (1/3)h^{3/2}$ , в этой точке

$$f = \frac{2}{3} h^{3/2}, \quad f'' = -6h^{-3/2}.$$

Следовательно, применяя формулу (П1), получаем

$$\begin{aligned} \omega_1 &\sim \left( \sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right)^{-1} \left( \frac{1}{3} h^{3/2} \right)^{-2/3} \sqrt{\frac{2\pi}{6h^{-3/2}}} \exp\left(\frac{2}{3} h^{3/2}\right) = \\ &= \frac{3^{-1/3} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} h^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} h^{3/2}\right). \quad (\text{П3}) \end{aligned}$$

Эта функция возрастает при  $h \rightarrow +\infty$ . Мы получили одно из ВКБ-решений уравнения Эйри.

Аналогично мы заменим  $\omega_2$  интегралом

$$\omega_2(h) = hv_2 \sim h \int_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(x + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma(3x+2)} h^{3x} 3^x dx,$$

где  $h$  снова является большим вещественным положительным числом. Как и ранее, подинтегральная функция достигает максимума в точке  $x = (1/3)h^{3/2}$ , откуда

$$\omega_2 \sim \frac{3^{-2/3} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} h^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} h^{3/2}\right). \quad (\text{П4})$$

В качестве двух стандартных и табулированных решений уравнения Эйри выбираются решения (см. Миллер):

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} 3^{-1/6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \omega_1 - \frac{1}{2\pi} 3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \omega_2, \quad (\text{П5})$$

$$\text{Bi}(z) = \frac{1}{2\pi} 3^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \omega_1 + \frac{1}{2\pi} 3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \omega_2 \quad (\text{П6})$$

в силу причин, которые мы сейчас выясним.

Если подставить (П3) и (П4) в (П5), то мы получим, что в разложении  $\text{Ai}(h)$  главный член обратится в нуль. Это указывает на то, что решение (П5) должно убывать вдоль положительной полуоси. Однако этот метод не позволяет найти вид убывающего решения.

Аналогично, подставляя (П3) и (П4) в (П6), после упрощений получаем

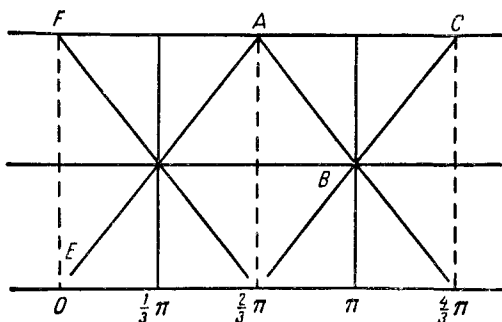
$$\text{Bi}(h) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} h^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} h^{3/2}\right). \quad (\text{П7})$$

Это решение растет вдоль положительной полуоси.

При больших вещественных и отрицательных  $z$  нельзя заменить суммирование интегрированием, поскольку оба

ряда являются знакопеременными. Поэтому мы приведем доказательство, основанное на явлении Стокса, которое мы обсудили в гл. III.

При  $z = he^{2\pi i/3}$  все члены рядов  $\omega_1$  и  $v_2$  совпадают с членами тех же рядов при  $z = h$ , так что их суммы



Р и с. 36.

определяются формулами (ПЗ) и (П4). Заменяя  $h$  на  $ze^{-2\pi i/3}$ , получаем

$$\omega_1 \sim \frac{3^{-1/3} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} e^{\pi i/6} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad (\text{П8})$$

и

$$\omega_2 = zv_2 \sim \frac{3^{-2/3} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{5\pi i/6} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right). \quad (\text{П9})$$

Эти выражения растут в окрестности линии Стокса, соответствующей точке  $A$  (см. рис. 36).

При  $z = he^{4\pi i/3}$  мы проведем аналогичные рассуждения. Заменяя  $h$  на  $ze^{-4\pi i/3}$ , мы получим асимптотические формулы для решений в окрестности линии Стокса, соответствующей точке  $C$ :

$$\omega_1 \sim \frac{3^{-1/3} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} e^{\pi i/3} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right), \quad (\text{П10})$$

$$\omega_2 \sim zv_2 \sim \frac{3^{-2/3} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} e^{5\pi i/3} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right). \quad (\text{П11})$$

Эти две пары формул являются асимптотическими выражениями для рядов  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  на участках от  $A$  до  $B$  и от  $C$  до  $B$  соответственно, но в точке  $B$  (на сопряженной линии Стокса  $\arg z = \pi$ ) решение равно сумме выражений, которые растут соответственно слева и справа от этой линии.

При  $\arg z = \pi$  имеем

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &\sim \frac{1}{2\pi} 3^{-1/6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) [(\text{П8}) + (\text{П10})] - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} 3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) [(\text{П9}) + (\text{П11})] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt[3]{\pi}} z^{-1/4} \left[ i \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) + \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Полагая  $z = he^{i\pi}$ , получаем

$$\text{Ai}(-h) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} h^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} h^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (\text{П12})$$

Итак, мы показали для  $\text{Ai}(z)$ , что это решение не является растущим на линии, соответствующей точке  $F$ , где  $\arg z = 0$ . Решение, убывающее на линии, соответствующей точке  $E$ , имеет поэтому то же аналитическое выражение, что и на линии  $A$ , именно,

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &\sim \frac{1}{2\pi} 3^{-1/6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) (\text{П8}) - \frac{1}{2\pi} 3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (\text{П9}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt[3]{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right), \end{aligned}$$

так что

$$\text{Ai}(h) \sim \frac{1}{2\sqrt[3]{\pi}} h^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} h^{3/2}\right). \quad (\text{П13})$$

Это решение убывает при  $h \rightarrow +\infty$ . Таким образом, формулы (П12) и (П13) устанавливают связь между значениями функций Эйри на отрицательной и на положительной полуосях; тем самым установлена связь с решением в виде ряда (П5).



Наконец, можно найти  $\text{Vi}(z)$  при  $z = he^{i\pi}$ ; на линии, соответствующей точке  $B$ , мы имеем

$$\text{Vi}(z) \sim \frac{1}{2\pi} 3^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) [(\text{П8}) + (\text{П10})] + \\ + \frac{1}{2\pi} 3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) [(\text{П9}) + (\text{П11})],$$

$$\text{Vi}(-h) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} h^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3} h^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{П14})$$

фаза  $\text{Vi}(-h)$  отличается при этом на  $\pi/2$  от фазы  $\text{Ai}(-h)$ .

#### П.4. Уравнение Вебера

Аналогичные методы можно применить при вычислении постоянных Стокса для уравнения с двумя точками поворота. В соответствии с разд. 3.7 мы запишем это уравнение в виде

$$\omega'' + (z^2 - a^2)\omega = 0,$$

где  $a^2$  — большое положительное число, хотя приводимые ниже рассуждения пригодны также и для комплексных значений  $a$ . Чтобы упростить это уравнение, положим

$$\omega = e^{-iz^2/2} u,$$

что дает нам

$$u'' - 2izu' - iu - a^2u = 0.$$

Мы можем найти два линейно независимых решения этого уравнения в виде сходящихся рядов вида

$$u = z^c (1 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \dots).$$

Проверка показывает, что все степени одночленов отличаются друг от друга на четное число. Подставляя этот ряд в уравнение и приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $z$ , получаем

$$c(c-1) = 0, \\ (c+2)(c+1)a_1 = 2ic + i + a^2, \\ (c+4)(c+3)a_2 = [2i(c+2) + i + a^2]a_1, \\ (c+6)(c+5)a_3 = [2i(c+4) + i + a^2]a_2.$$

При  $c = 0$  имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{i+a^2}{2!}, \\ a_2 &= \frac{(5i+a^2)(i+a^2)}{4!}, \\ a_3 &= \frac{(9i+a^2)(5i+a^2)(i+a^2)}{6!}, \\ &\dots \end{aligned}$$

а при  $c = 1$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3i+a^2}{3!}, \\ a_2 &= \frac{(7i+a^2)(3i+a^2)}{5!}, \\ a_3 &= \frac{(11i+a^2)(7i+a^2)(3i+a^2)}{7!}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Общее решение уравнения:

$$\begin{aligned} \omega &= Ae^{-iz^2/2} \left( 1 + \frac{i+a^2}{2!} z^2 + \frac{(5i+a^2)(i+a^2)}{4!} z^4 + \dots \right) + \\ &+ Be^{-iz^2/2} z \left( 1 + \frac{3i+a^2}{3!} z^2 + \frac{(7i+a^2)(3i+a^2)}{5!} z^4 + \dots \right) \equiv \\ &\equiv Ae^{-iz^2/2} v_1 + Be^{-iz^2/2} z v_2. \quad (\text{П.15}) \end{aligned}$$

Аналогично, полагая  $\omega = e^{iz^2/2} \cdot \rho$ , получаем

$$\rho'' + 2iz\rho' + i\rho - a^2\rho = 0.$$

Это уравнение имеет общее решение:

$$\begin{aligned} \omega &= Ce^{iz^2/2} \left( 1 - \frac{i-a^2}{2!} z^2 + \frac{(5i-a^2)(i-a^2)}{4!} z^4 - \dots \right) + \\ &+ De^{iz^2/2} z \left( 1 - \frac{3i-a^2}{3!} z^2 + \frac{(7i-a^2)(3i-a^2)}{5!} z^4 - \dots \right) \equiv \\ &\equiv Ce^{iz^2/2} q_1 + De^{iz^2/2} z q_2. \quad (\text{П.16}) \end{aligned}$$

Оба ряда являются теперь знакопеременными.

Приравняем решения (П.15) и (П.16). Полагая  $z = 0$ , находим, что  $A = C$ ; дифференцируя по  $z$  и затем полагая  $z = 0$ , находим, что  $B = D$ .

Мы найдем теперь асимптотические выражения решения на линиях Стокса:

$$\omega = e^{-iz^2/2} v_1 \equiv e^{iz^2/2} q_1.$$

При  $z = e^{-i\pi/4} h$  или  $z = e^{3i\pi/4} h$  (разрез проведен вдоль линии  $\arg z = \pi + \delta$ , как показано на рис. 11) имеем

$$v_1 = 1 + \frac{i+a^2}{2!} (-i) h^2 + \frac{(5i+a^2)(i+a^2)}{4!} (-i)^2 h^4 + \dots$$

Общий член этого ряда равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n)!} [(4n-3)i+a^2] \dots (i+a^2) (-i)^n h^{2n} = \\ = \frac{1}{(2n)!} \left( n - \frac{3}{4} - \frac{ia^2}{4} \right) \dots \left( \frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4} \right) 4^n h^{2n} = \\ = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4}\right) 4^n h^{2n}}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4}\right) \Gamma(2n+1)}. \quad (\text{П17}) \end{aligned}$$

Из формулы (П2) следует, что при больших  $n$

$$\Gamma(n+\delta) \sim \Gamma(n) n^\delta,$$

так что выражение (П17) приближенно равно

$$\frac{\Gamma(n) n^{1/4-ia^2/4} 4^n h^{2n}}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4}\right) 2n \Gamma(2n)}.$$

Применяя формулу (П2), получаем

$$\frac{n^{-3/4-ia^2/4} e^{in-n} h^{2n}}{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4}\right)}.$$

Мы заменим теперь суммирование интегрированием. Однако в данном случае мы получим интеграл от незначительной функции. Но эта незначительность вызвана наличием множителя, который медленно меняется по сравнению с экспонентой, и мы можем заменить его постоянной величиной. Полагая

$$f = x - x \ln x + 2x \ln h,$$

имеем

$$f' = -\ln x + 2 \ln h, \quad f'' = -\frac{1}{x}$$

и  $f' = 0$  при  $x = x_0 = h^2$ ,  $f''(x_0) = -\frac{1}{h^2}$ .

Тогда

$$v_1 \sim \frac{x_0^{-3/4 - ia^2/4}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4}\right)} \int_0^\infty e^f dx.$$

Из формулы (П1) получаем

$$v_1 \sim \frac{h^{-3/2 - ia^2/2} \sqrt{2\pi h^2} e^{h^2}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4}\right)},$$

так что

$$\omega = e^{-iz^2/2} v_1 \sim \frac{\sqrt{\pi} h^{-1/2 - ia^2/2} e^{h^2/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4}\right)}$$

при  $z = e^{-i\pi/4} h$  или  $z = e^{i3\pi/4} h$ .

При  $z = e^{i\pi/4} h$  или  $z = e^{-i3\pi/4} h$  мы воспользуемся рядом  $q_1$  вместо знакопеременного ряда  $v_1$ . Исследование ряда  $q_1$  показывает, что при этих значениях  $z$  его сумма является величиной, комплексно сопряженной с суммой ряда  $v_1$ , так что

$$\omega \sim \frac{\sqrt{\pi} h^{-1/2 + ia^2/2} e^{h^2/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{ia^2}{4}\right)}.$$

Теперь мы можем найти постоянные Стокса. Выражая  $h$  через  $z$ , получаем

$$\omega \sim \frac{\sqrt{\pi} \exp\left[\frac{3i\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} + \frac{ia^2}{2}\right)\right]}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{ia^2}{4}\right)} z^{-1/2 + ia^2/2} e^{-iz^2/2},$$

$$\arg z = -\frac{3\pi}{4},$$

$$\omega \sim \frac{V\sqrt{\pi} \exp \left[ \frac{i\pi}{4} \left( -\frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2} \right) \right]}{\Gamma \left( \frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4} \right)} z^{-1/2 - ia^2/2} e^{iz^2/2},$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{4},$$

$$\omega \sim \frac{V\sqrt{\pi} \exp \left[ -\frac{i\pi}{4} \left( -\frac{1}{2} + \frac{ia^2}{2} \right) \right]}{\Gamma \left( \frac{1}{4} + \frac{ia^2}{4} \right)} z^{-1/2 + ia^2/2} e^{-iz^2/2},$$

$$\arg z = \frac{\pi}{4},$$

$$\omega \sim \frac{V\sqrt{\pi} \exp \left[ -\frac{3i\pi}{4} \left( -\frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2} \right) \right]}{\Gamma \left( \frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4} \right)} z^{-1/2 - ia^2/2} e^{iz^2/2},$$

$$\arg z = \frac{3\pi}{4}.$$

Пусть  $U$  — постоянная Стокса на линии  $\arg z = \pi/4$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  — коэффициенты при растущих выражениях соответственно для  $\arg z = 3\pi/4$ ,  $\arg z = -\pi/4$  и  $S$  — коэффициент при убывающем выражении для  $\arg z = \pi/4$ . Тогда

$$d_1 = d_2 + US.$$

Следовательно,

$$U = \frac{\Gamma \left( \frac{1}{4} + \frac{ia^2}{4} \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4} \right)} \times$$

$$\times \frac{\exp \left[ \frac{3\pi i}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{ia^2}{2} \right) \right] - \exp \left[ -\frac{i\pi}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{ia^2}{2} \right) \right]}{\exp \left[ \frac{i\pi}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2} \right) \right]} =$$

$$= \frac{\Gamma \left( \frac{1}{4} + \frac{ia^2}{4} \right)}{\Gamma \left( \frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4} \right)} e^{-\pi a^2/4} 2i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{i\pi a^2}{4} \right) =$$

$$= \frac{2\pi i e^{-\pi a^2/4}}{\Gamma \left( \frac{1}{4} - \frac{ia^2}{4} \right) \Gamma \left( \frac{3}{4} - \frac{ia^2}{4} \right)}.$$

При этом мы воспользовались формулой

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Наконец, используя формулу удвоения для  $\Gamma$ -функции

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2z)}{2^{2z-1}},$$

получаем

$$U = \frac{\Gamma\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) 2^{-ia^2/2} e^{-\pi a^2/4}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ia^2}{2}\right)},$$

т. е. мы получили формулу (3.17). Аналогично мы можем найти другие постоянные Стокса [см. формулу (3.18)].

### П.5. Таблицы функций Эйри

Автор глубоко благодарен председателю комитета по математическим таблицам Королевского общества и составителю таблиц доктору Дж. К. П. Миллеру за любезное разрешение поместить в этой книге приведенную ниже небольшую выдержку из принадлежащих Британской ассоциации таблиц функций Эйри. Эта таблица включена в книгу для того, чтобы читатель смог получить представление о том, как изменяются функции  $Ai(x)$ ,  $Ai'(x)$ ,  $Bi(x)$ ,  $Bi'(x)$  в окрестности точки поворота  $x=0$ . Таблицы даны с тремя десятичными знаками для значений функции; шаг таблицы равен 0,2 при  $-5,0 < x < -1,0$  и  $+1,0 < x < +2,0$  и 0,1 при  $-1,0 < x < +1,0$ . Новые таблицы составлены недавно Смирновым.

Таблица функций Эйри

$x$	$Ai(x)$	$Ai'(x)$	$Bi(x)$	$Bi'(x)$
-5,0	+0,351	+0,327	-0,138	+0,778
-4,8	+0,380	-0,037	+0,026	+0,835
-4,6	+0,337	-0,380	+0,185	+0,735
-4,4	+0,234	-0,641	+0,311	+0,509

Продолжение

$x$	$A_i(x)$	$A_i'(x)$	$B_i(x)$	$B_i'(x)$
-4,2	+0,089	-0,782	+0,383	+0,206
-4,0	-0,070	-0,791	+0,392	-0,117
-3,8	-0,219	-0,677	+0,339	-0,406
-3,6	-0,335	-0,470	+0,235	-0,621
-3,4	-0,403	-0,208	+0,097	-0,739
-3,2	-0,417	+0,065	-0,054	-0,754
-3,0	-0,379	+0,315	-0,198	-0,676
-2,8	-0,295	+0,512	-0,319	-0,524
-2,6	-0,178	+0,642	-0,405	-0,327
-2,4	-0,043	+0,698	-0,449	-0,112
-2,2	+0,096	+0,686	-0,450	+0,096
-2,0	+0,227	+0,618	-0,412	+0,279
-1,8	+0,341	+0,510	-0,341	+0,423
-1,6	+0,430	+0,379	-0,246	+0,524
-1,4	+0,492	+0,240	-0,135	+0,582
-1,2	+0,526	+0,107	-0,016	+0,602
-1,0	+0,536	-0,010	+0,104	+0,592
-0,9	+0,532	-0,061	+0,163	+0,580
-0,8	+0,524	-0,106	+0,220	+0,564
-0,7	+0,511	-0,145	+0,275	+0,545
-0,6	+0,495	-0,177	+0,329	+0,525
-0,5	+0,476	-0,204	+0,380	+0,506
-0,4	+0,454	-0,225	+0,430	+0,488
-0,3	+0,431	-0,241	+0,478	+0,472
-0,2	+0,406	-0,251	+0,524	+0,459
-0,1	+0,381	-0,257	+0,570	+0,451
0,0	+0,355	-0,259	+0,615	+0,448
0,1	+0,329	-0,257	+0,660	+0,452
0,2	+0,304	-0,252	+0,705	+0,462
0,3	+0,279	-0,245	+0,752	+0,480
0,4	+0,255	-0,236	+0,802	+0,507
0,5	+0,232	-0,225	+0,854	+0,545
0,6	+0,210	-0,213	+0,911	+0,593

Продолжение

$x$	$A_i(x)$	$A_i'(x)$	$B_i(x)$	$B_i'(x)$
0,7	+0,189	-0,200	+0,973	+0,654
0,8	+0,170	-0,186	+1,042	+0,730
0,9	+0,152	-0,173	+1,120	+0,822
1,0	+0,135	-0,159	+1,207	+0,932
1,2	+0,106	-0,133	+1,421	+1,221
1,4	+0,082	-0,108	+1,704	+1,627
1,6	+0,063	-0,087	+2,082	+2,193
1,8	+0,047	-0,069	+2,596	+2,986
2,0	+0,035	-0,053	+3,298	+4,101



## Л И Т Е Р А Т У Р А <sup>1)</sup>

- А б б о т (А b b o t t M. R.), *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **52** (1956), 344—362.
- А й н с Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.
- А р н о, Б е й н с (А r n o t F. L., B a i n e s G. O.), *Proc. Roy. Soc.*, **A 146** (1934), 651—662.
- А т к и н с о н (А t k i n s o n F. V.), *J. Math. Anal. and Applns.*, **1** (1960), 255—276.
- А у л у к, К о т х а р и (А u l u c k F. C., K o t h a r i D. S.), *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **41** (1945), 175—179.
- Б а д д е н (B u d d e n K. G.)
1. *Proc. Roy. Soc.*, **A 215** (1952), 215—233.
  2. *Proc. Roy. Soc.*, **A 227** (1955), 516—537.
  3. *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge, 1961.
  4. *Proc. Roy. Soc.*, **A 263** (1961), 552—566.
  5. *The Wave-guide Mode Theory of Wave Propagation*, Prentice-Hall, 1961.
- Б е й л и (B a i l e y V. A.)
1. *Phys. Rev.*, **96** (1954), 865—868.
  2. Scientific Report № 67, Ionospheric Research Laboratory, Pennsylvania State University, 1954.
- Б е л л (B e l l R. P.), *Philos. Mag.*, **35**, № 7 (1944), 582—588.
- Б е л л м а н, К а л а б а (B e l l m a n R., K a l a b a R.)
1. *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, **44** (1958), 317—319.
  2. *J. Math. Mech.*, **8** (1959), 683—704.
- Б е н н и (B e n n e y D. J.), *J. Fluid Mech.*, **10** (1961), 209—236.
- Б и р к г о ф (B i r k h o f f G. D.)
1. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 219—231.
  2. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 681—700.
- Б о м, Квацтовая теория, Физматгиз, М., 1961.
- \*Б р е й н д е, Асимптотические методы в анализе, ИЛ, М., 1961.
- Б р е м м е р (B r e m m e r H.)
1. *Physica*, **15** (1949), 593—608.
  2. *Philips Res. Repts*, **4** (1949), 1—19.
  3. *Philips Res. Repts*, **4** (1949), 189—205.
  4. *Terrestrial Radio Waves*, Elsevier Pub. Co. Inc., 1949.
  5. *Communs Pure and Appl. Maths.*, **4** (1951), 105—115.

---

<sup>1)</sup> Литература, отмеченная звездочкой, добавлена переводчиком. — Прим. перев.

- Бреховских Л. М., Волны в слонстых средах, Изд. АН СССР, 1957.
- Бриллюэн (Brillouin L.), *C. R. Acad. Sci. Paris*, **183** (1926), 24—26.
- Букер (Booker H. G.), *Philos. Trans. Roy. Soc.*, **A 237** (1938), 411—451.
- Букер, Уолкиншоу (Booker H. G., Walkinshaw W.), *Meteorological Factors in Radio-wave Propagation*, 80—127. The Physical Society, 1946.
- Вазов (Wasow W.)
1. *Ann. Maths.*, **52** (1950), 350—361.
  2. *Ann. Maths.*, **58** (1953), 222—252.
  3. *J. Math. and Phys.*, **38** (1960), 257—278.
  - 4\*. *Communs Pure and Appl. Math.*, **14**, № 3 (1961), 657—673.
  - 5\*. *Communs Pure and Appl. Math.*, **15**, № 2 (1962), 173—187.
- Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.
- Вентцель (Wentzel G.), *Z. Phys.*, **38** (1926), 518.
- Гамов (Gamow G.)
1. *Z. Phys.*, **51** (1928), 204—212.
  2. *Atomic Nuclei and Nuclear Transformations*, Oxford, 1937.
- Гамов, Критчфилд (Gamow G., Critchfield C. L.), *Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources*, Oxford, 1949.
- Ганс (Gans R.), *Ann. Phys. Lpz.*, **47**, № 3 (1915), 709—736.
- Гейзенберг (Heisenberg W.), *Ann. Phys.*, **74** (1924), 577.
- Гиббонс, Нертни (Gibbons J. J., Nertney R. J.)
1. *J. Geophys. Res.*, **56** (1951), 355—371.
  2. *J. Geophys. Res.*, **57** (1952), 323—338.
- Гиббонс, Шраг (Gibbons J. J., Schrag R. L.), *J. Appl. Phys.*, **23** (1952), 1139—1142.
- \*Гинзбург В. А., Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
- Гольдман И. И., Кривченков В. Д., Сборник задач по квантовой механике, ГТТИ, М., 1957.
- Голдстейн (Goldstein S.)
1. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **28** (1928), 81—90.
  2. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **33** (1931), 246—252.
- Грин (Green G.), *Camb. Philos. Trans.*, **6** (1837), 457—462.
- Данхем (Dunham J. L.), *Phys. Rev.*, **41** (1932), 721—731.
- Джеффрис Б. (Jeffreys B.), *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **38** (1942), 401—405.
- Джеффрис Г. (Jeffreys H.)
1. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **23**, № 2 (1923), 428—436.
  2. *Philos. Mag.*, **33**, № 7 (1942), 451—456.
  3. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **49** (1953), 601—611.
  4. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **52** (1956), 61—66.
  5. *Asymptotic Approximations*, Oxford, 1962.

- Джеффрис Б., Джеффрис Г. (Jeffreys B., Jeffreys H.), *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge, 1956.
- Дингл (Dingle R. B.)
1. *Proc. Roy. Soc., A* **244** (1957), 456—475.
  2. *Proc. Roy. Soc., A* **249** (1958), 270—283.
- \*Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., *ДАН СССР*, **152**, № 1 (1963), 28—30.
- \*Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, М., 1962.
- Иами (Iami I.)
1. *Phys. Rev.*, **74** (1948), 113.
  2. *Quart. Appl. Math.*, **16** (1958), 33—45.
- Йенсен (Jenssen O.), *J. Math. and Phys.*, **39** (1960), 1—17.
- Кембл (Kemble E. C.), *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1937.
- Керр (Kerr O. E.), *Propagation of Short Radio Waves*, Rad. Lab. Series, 1951.
- Клеммов, Хединг (Clemmow P. C., Heading J.), *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **50** (1954), 319—333.
- Крамерс (Kramers H. A.), *Z. Phys.*, **39** (1926), 828—840.
- Лангер (Langer R. E.)
1. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40**, № 2 (1934), 545—582.
  2. *Phys. Rev.*, **51** (1937), 669—676.
  3. *Communs Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 427—438.
  4. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 144—191.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Квантовая механика*, ГТТИ, М.—Л., 1948.
- Линь Цзя-цзяо (Lin C. C.)
1. *Quart. Appl. Math.*, **3** (1945), 117—142.
  - 2\*. Теория гидродинамической устойчивости, ИЛ, М., 1958.
- Лиувилль (Liouville J.), *J. math. pures et appl.*, **2** (1837), 16—35.
- \*Маслов В. П., *ДАН СССР*, **151**, № 2 (1963), 300—303; **111**, № 5 (1956), 977—980; *УМН*, **15**, № 4 (1960), 220—221.
- Мексин (Meksyn D.), *Proc. Roy. Soc.*, **A187** (1946), 492—504.
- Миллер (Miller J. C. P.), *The Airy Integral*, British Association Tables, Part-volume B, 1946.
- Моригучи (Moriguchi H.), *Prog. Theoret. Phys.*, **23** (1960), 750—752.
- Морс Ф. М., Фешбах Г.
1. *Методы теоретической физики*, т. I, ИЛ, М., 1958.
  2. Там же, т. II, 1960.
- Мотт Н. (Mott N. F.), *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **24** (1928), 76—79.
- Мотт Н., Месси Г., *Теория атомных столкновений*, ИЛ, 1951.
- Мотт, Снеддон (Mott N. F., Sneddon I. N.), *Wave Mechanics and its Applications*, Oxford, 1948.
- Нертни (Nertney R. J.), *J. Geophys. Res.*, **57** (1952), 423—425.

- Олвер (Olver F. W. J.)  
 1. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 7 (1959), 306—310.  
 2. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, B63 (1959), 131—169.  
 3. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 57 (1961), 790—810.
- \*Паташинский А. Э., Покровский В. Л., Халатников И. М., *ЖЭТФ*, 45, вып. 3 (9) (1963), 760—771.
- Паули (Pauli W.), *Handbuch der Physik*, 5, № 1 (1958), 94.
- \*Покровский В. Л., Халатников И. М., *ЖЭТФ*, 40 (1961), 1713.
- Пфистер (Pfister W.), *J. Geophys. Res.*, 58 (1953), 29—40.
- Рабенштейн (Rabenstein A. L.), *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 1 (1958), 418—435.
- Ридбек (Rydbeck O. E. H.)  
 1. *Trans. Chalmers. Univ.*, Sweden, 74 (1948).  
 2. *Communs Pure and Appl. Math.*, 4 (1951), 129—160.
- Рэлей (Rayleigh), *Proc. Roy. Soc.*, A 86 (1912), 207—226.
- Секлер, Келлер (Seckler B. D., Keller J. B.), *J. Acoust. Soc. America*, 31 (1959), 206—216.
- Симс (Symth J. B.)  
 1. *J. Geophys. Res.*, 57 (1952), 423.  
 2. *J. Geophys. Res.*, 57 (1952), 425—426.
- Сингх (Singh K. K.), *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, A25 (1959), 295.
- Сингх, Байджал (Singh K. K., Baijal J. S.), *Prog. Theoret. Phys.*, 14 (1955), 214.
- Слейтер (Slater J. L.), *Quantum Theory of Matter*, McGraw-Hill, 1951.
- Смирнов (Smirnov A. D.), *Tables of Airy Integrals and Special Confluent Hypergeometric Functions*. Pergamon Press, 1960.
- Стокс (Stokes G. G.)  
 1. *Trans. Camb. Philos. Soc.*, 10 (1857), 106—128.  
 2. *Trans. Camb. Philos. Soc.*, 11 (1871), 412—425.  
 3. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 6 (1889), 362—366.  
 4. *Memoirs and Scientific Correspondence*, Cambridge, v. 1, 1907, 62.
- Такахаси (Takahashi T.)  
 1. *Bull. Earthquake Res. Inst.*, 33 (1955), 287—296.  
 2. *Bull. Earthquake Res. Inst.*, 35 (1957), 297—308.
- Тамаркин (Tamarin J.), *Math. Z.*, 27 (1928), 1—51.
- Территин (Turrittin H. L.), *Amer. J. Maths.*, 58 (1936), 364—376.
- Титчмарш Э. Ч., *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, т. I, ИЛ, М., 1960.
- Technology*, 5 (1961), 193.
- Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., *Курс современного анализа*, Физматгиз, М., 1963.

- Фарри (Furry W. H.), *Phys. Rev.*, **71** (1947), 360—371.
- Фaulер и др. (Fowler R. H. et al.), *Philos. Trans. Roy. Soc.*, **A 221** (1920), 337—339.
- \*Федорюк М. В., *ДАН СССР*, **158**, № 3 (1964), 540—542.
- \*Фокке (Focke J.), *Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss., Leipzig*, **101**, № 3 (1954), 19.
- Форштерлинг (Försterling K.), *Hochfrequenztech. und Elektroakust.*, **59** (1942), 10.
- Фридман (Friedman B.), *Communs Pure and Appl. Math.*, **4** (1951), 317—350.
- Хайнс (Hines C. O.), *Quart. Appl. Math.*, **11** (1953), 9—31.
- Хал, Джулиус (Hull T. E., Julius R. S.) *Can. J. Phys.*, **34** (1956), 914—919.
- Хартри (Hartree D. R.), *Proc. Roy. Soc.*, **A131** (1931), 428.
- Хеддинг (Heading J.)  
 1. Theoretical Ionospheric Radio Propagation. Thesis, Cambridge, 1953.  
 2. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **53** (1957), 399—418.  
 3. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **53** (1957), 419—441.  
 4. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **56** (1960), 329—341.  
 5. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **D65** (1961), 595—616.  
 6. *J. Lond. Math. Soc.*, **37**, № 2 (1962), 195—208.  
 7. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, **15**, № 2 (1962), 215—241.  
 8. *Math. Gaz.*, 1962.
- Хорн (Horn J.), *Math. Ann.*, **52** (1899), 271—292.
- Цваан (Zwaan A.), *Intensitäten im Ca-Funkenspektrum*. Thesis, Utrecht, 1929.
- Шлезингер (Schlesinger L.), *Math. Ann.*, **63** (1907), 277—300.
- \*Штюкельберг (Stuekelberg F. C. G.), *Helv. Phys. Acta*, **5** (1932), 369.
- Щелкунов (Schelkunoff S. A.), *Communs Pure and Appl. Math.*, **4** (1951), 117—128.
- Эккерслей (Eckersley T. L.)  
 1. *Proc. Roy. Soc.*, **A132** (1931), 53.  
 2. *Proc. Roy. Soc.*, **A136** (1932), 499.  
 3. *Proc. Phys. Soc.*, **B63** (1950), 49.
- Эккерслей, Миллингтон (Eckersley T. L., Millington G.), *Philos. Trans. Roy. Soc.*, **A237** (1938), 273.
- Эккарт (Eckart C.), *Hydrodynamics of Oceans and Atmospheres*. Pergamon Press, 1960.
- Янг, Уленбек (Young L. A., Uhlenbeck G. E.), *Phys. Rev.*, **36** (1930), 1154—1167.

## Дополнение I

### АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $n$ -ГО ПОРЯДКА

*М. В. Федорюк*

А. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon^n y^{(n)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k q_k(x) y^{(k)}(x) = 0, \quad (1)$$

где  $q_k(x)$  — комплекснозначные функции, а  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. Обозначим через  $\lambda_j(x)$  корни уравнения

$$f(\lambda, x) = \lambda^n - \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) \lambda^k = 0. \quad (2)$$

Покажем (мы ограничимся чисто формальным выводом), что при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  уравнение (1) имеет  $n$  линейно независимых решений  $y_j(x)$ , для которых при  $\varepsilon \rightarrow +0$  пригодны асимптотические формулы

$$y_j(x) = \exp \left\{ \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^x \lambda_j(t) dt - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left[ \lambda_j'(t) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \ln \frac{\partial f(\lambda, t)}{\partial \lambda} \right) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_j(t)} dt \right\} \times (1 + O(\varepsilon)). \quad (3)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x [\varepsilon^{-1} h_0(t) + h_1(t) + \varepsilon h_2(t) + \dots] dt \right\}, \quad (4)$$

где в экспоненте стоит ряд по степеням  $\varepsilon$  (как правило, этот ряд является не сходящимся, а асимптотическим). Проводя индукцию по  $k$ , легко доказать, что справед-

лива формула

$$y^{(k)}(x) = \varepsilon^{-k} [h_0^k + \varepsilon (C_k^1 h_1 h_0^{k-1} + C_k^2 h_0^{k-2} h_0') + \dots] y(x), \quad (5)$$

где многоточие обозначает члены более высокого порядка по  $\varepsilon$ . Подставляя (5) в (1) и сокращая на  $\varepsilon^{-k} y(x)$ , получаем уравнение

$$h_0^n - \sum_{k=0}^{n-1} q_k h_0^k + \varepsilon h_1 [n h_0^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k q_k h_0^{k-1}] + \\ + \varepsilon h_0' (C_n^2 h_0^{n-2} - \sum_{k=2}^{n-1} C_k^2 q_k h_0^{k-2}) + \dots = 0.$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях  $\varepsilon$ . Из условия равенства нулю коэффициента при  $\varepsilon^0$  получаем, что  $h_0$  удовлетворяет уравнению (2), т. е.  $h_0(x) = = \lambda_j(x)$ . Коэффициент при  $\varepsilon$  равен

$$\left[ h_1 \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda} + \frac{\lambda'(x)}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(\lambda, x)}{\partial \lambda^2} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_j(x)},$$

так что

$$h_1(x) = -\frac{1}{2} \left[ \lambda'(x) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \ln \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda} \right) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_j(x)}.$$

Подставляя в (4) найденные нами выражения для  $h_0(x)$  и  $h_1(x)$ , получаем формулу (3). Дифференцируя затем формально формулу (3) с учетом (5), имеем

$$y_j^{(k)}(x) = \varepsilon^{-k} \lambda_j^k(x) y_j(x) (1 + O(\varepsilon)). \quad (6)$$

Наш вывод носит чисто формальный характер, однако в ряде случаев его можно обосновать. Приведем два вида условий, при которых существование решений  $y_j(x)$  вида (3) строго доказано.

1°. Пусть  $[a, b]$  — конечный интервал, функции  $q_k''(x)$  непрерывны, и пусть при всех  $x \in [a, b]$  и при всех  $i \neq j$   $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$  и либо  $\operatorname{Re} \lambda_i(x) \neq \operatorname{Re} \lambda_j(x)$ , либо  $\operatorname{Re} \lambda_i(x) \equiv \equiv \operatorname{Re} \lambda_j(x)$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0$  достаточно мало) уравнение (1) имеет  $n$  линейно независимых решений  $y_j(x)$ ,

для которых при  $\varepsilon \rightarrow +0$  пригодны асимптотические формулы (3). При этом  $|O(\varepsilon)| \leq C\varepsilon$ , где  $C$  не зависит от  $x$  и  $\varepsilon$ .

2°. Рассмотрим уравнение (1) на бесконечном интервале  $[0, \infty)$ . Пусть выполнены следующие условия:

1) пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q_k(x) q_0^{-(n-k)/n}(x) = c_k$$

существуют и конечны;

2) уравнение

$$g(\xi) = \xi^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \xi^k = 0 \tag{7}$$

не имеет кратных корней;

3)  $f_{ij}(x) = \operatorname{Re} [(\xi_i - \xi_j) q_0^{1/n}(x)] \neq 0$

при  $i \neq j$  и при достаточно больших  $x$  и  $\int_0^\infty f_{ij} dx = \infty$ , а

$\xi_j$  — корни уравнения (7);

4) функции  $q_k'' q_0^{-2+(2k-1)/n}$  и  $q_k'' q_0^{-1+(k-1)/n}$  суммируемы в интервале  $[0, \infty)$ ;

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} q_k' q_0^{-1+(2k-1)/n} = 0$ .

Тогда при достаточно большом  $x_0 > 0$  уравнение (1) на интервале  $[x_0, \infty)$  имеет  $n$  линейно независимых решений  $y_j(x)$ , для которых пригодны асимптотические формулы (3). При этом  $|O(\varepsilon)| \leq \varepsilon \varphi(x)$ , где  $\varphi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Таким образом, формулы (3) пригодны и при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , и при  $x \rightarrow \infty$ .

Заметим, что при этом  $\lambda_j(x) \sim \xi_j q_0^{1/n}(x)$ , т. е.  $\lambda_j(x)$  имеют одинаковый порядок роста на бесконечности. Случай, когда уравнение (2) имеет два или более корней  $\lambda_j(x)$ , растущих при  $x \rightarrow \infty$  медленнее, чем все остальные, в некотором смысле аналогичен случаю, когда уравнение (7) имеет кратный корень, равный нулю. Такой случай не исследован.

Фактически формула (3) содержится в работе Хединга <sup>1)</sup> [5], однако доказательство формулы в этой статье отсутст-

<sup>1)</sup> Библиография дополнения I совпадает с библиографией книги.



вует. В условиях 1° доказательство формулы (3) следует из работы Вазова [5], в условиях 2° формула (3) доказана автором<sup>1)</sup>.

Точками поворота для уравнения (1) являются точки, в которых совпадают две или более функций  $\lambda_j(x)$  [т. е. эти точки удовлетворяют уравнению  $D(x) = 0$ , где  $D(x)$  — дискриминант уравнения (2)].

В этих точках формула (3) неприменима. К сожалению, асимптотическая теория уравнений вида (1) порядка  $n > 2$  в настоящее время слабо разработана и сколько-нибудь четких правил продолжения асимптотики (3) через точки поворота, аналогичных правилам для уравнений второго порядка, которые изложены в настоящей книге, не существует. Из работ, относящихся к данной области, наибольший интерес, на взгляд автора, представляют работы Штюкельберга и Вазова [5] (см. также дополнение II. — *Ред.*)

Рассмотрим некоторые примеры.

**П р и м е р 1.** Пусть  $q_1(x) \equiv 0$ ,  $q_0(x) = q(x)$ ,  $\varepsilon = h^{-1}$ . Тогда уравнение (1) совпадает с исследованным в настоящей книге уравнением

$$y'' - h^2 q(x) y = 0.$$

В этом случае

$$f(\lambda, x) = \lambda^2 - q(x), \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 2\lambda,$$

так что

$$\lambda_{1,2}(x) = \pm \sqrt{q(x)}, \quad \int_{x_0}^x \left[ \lambda' \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \ln \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_j(x)} dx = \\ = \frac{1}{2} \ln q(x) + C, \quad j = 1, 2.$$

Из формулы (3) получаем

$$y_{1,2}(x) = C' [q(x)]^{-1/4} \exp \left[ \pm h \int_{x_0}^x \sqrt{q} dx \right] (1 + O(h^{-1})),$$

т. е. формулу (2.3) для ВКБ-решений, доказанную в разд. 2.1 настоящей книги.

<sup>1)</sup> Ф е д о р ю к М. В., Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР (в печати).

Пример 2. Рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$\varepsilon^4 y^{(4)}(x) - 2\varepsilon^2 p(x) y''(x) + q(x) y(x) = 0. \quad (8)$$

В данном случае

$$f(\lambda, x) = \lambda^4 - 2p\lambda^2 + q, \quad (9)$$

так что

$$\lambda_j(x) = \pm \sqrt{p(x) \pm \sqrt{D(x)}}, \quad D(x) = p^2(x) - q(x). \quad (10)$$

Далее, при  $\lambda = \lambda_j(x)$

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda'}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \ln \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{(\lambda^3 - p\lambda)'}{\lambda^3 - p\lambda} + \frac{p'}{\lambda^2 - p} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{D'}{2D} \pm \frac{p'}{\sqrt{D}} \right). \end{aligned}$$

Подставляя в (3), получаем

$$\begin{aligned} y_j(x) &= \lambda_j^{-1/2}(x) D^{-1/4}(x) \times \\ &\times \exp \left[ \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^x \lambda_j(t) dt \mp \frac{1}{2} \int_{x_0}^x p'(t) D^{-1/2}(t) dt \right] (1 + O(\varepsilon)), \quad (11) \end{aligned}$$

причем знаки в формуле (11) согласованы со знаками под радикалом в (10).

**Б.** Рассмотрим уравнение порядка  $2n$ , записанное в самосопряженной форме:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon^{2k} \frac{d^k}{dx^k} \left( p_{n-k}(x) \frac{d^k y}{dx^k} \right) = 0, \quad (12)$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $p_j(x)$  — комплекснозначные функции и  $p_0(x) \neq 0$ . Обозначим через  $\lambda_j(x)$  решения уравнения

$$F(\lambda, x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k p_{n-k}(x) \lambda^{2k} = 0. \quad (13)$$

Покажем, что при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  уравнение (12) имеет  $2n$  линейно независимых решений  $y_j(x)$ , для кото-

рых при  $\varepsilon \rightarrow +0$  пригодны асимптотические формулы

$$y_j(x) = \left[ \frac{\partial F(\lambda_j(x), x)}{\partial \lambda} \right]^{-1/2} \exp \left[ \varepsilon^{-1} \int_{x_0}^x \lambda_j(t) dt \right] (1 + O(\varepsilon)). \quad (14)$$

При этом мы ограничимся чисто формальным выводом.

Будем снова искать  $y(x)$  в виде (4). Покажем, что

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k} \left[ f(x) y^{(k)}(x) \right] = \varepsilon^{-2k} \left[ fh_0^{2k} + \varepsilon (2kfh_0^{2k-1}h_1 + \right. \\ \left. + C_{2k}^2 h_0^{2k-2} h_0' + kf'h_0^{2k-1}) + \dots \right] y(x), \quad (15) \end{aligned}$$

где многоточие означает члены более высокого порядка по  $\varepsilon$ . Имеем (из формулы Лейбница)

$$\frac{d^k}{dx^k} (fy^{(k)}) = fy^{(2k)} + kf'y^{(2k-1)} + \dots$$

В этой сумме, как следует из (5), только первые два слагаемых содержат члены порядка  $\varepsilon^{-2k}$  и  $\varepsilon^{-2k+1}$ . Подставляя в эту формулу выражения для  $y^{(m)}(x)$  из (5), получаем (15).

Подставим (15) в (12) и сократим на  $\varepsilon^{-2k}y(x)$ . Тогда уравнение (12) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k p_{n-k} h_0^{2k} + \varepsilon (h_1 \sum_{k=0}^n (-1)^k 2k p_{n-k} h_0^{2k-1} + \\ + h_0' \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2k}^2 h_0^{2k-2} + \sum_{k=0}^n (-1)^k k p'_{n-k} h_0^{2k-1}) + \dots = 0. \end{aligned}$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях  $\varepsilon$ . Из условия равенства нулю коэффициента при  $\varepsilon^0$  получаем, что  $h_0$  является корнем уравнения (13), т. е.  $h_0(x) = \lambda_j(x)$ .

Далее, коэффициент при  $\varepsilon^1$  равен

$$\begin{aligned} h_1 \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \left( \lambda' \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_j} = \\ = h_1 \frac{\partial F(\lambda, x)}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F(\lambda, x)}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_j} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$h_1 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( 1 \pi \frac{\partial F(\lambda, x)}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_j(x)}$$

Подставляя найденные нами выражения для  $h_0$  и  $h_1$  в (4), получаем формулу (14).

Формулу (14) можно строго обосновать, если выполнены условия 1° из А или в следующем случае.

2°. Рассмотрим уравнение (12) на интервале  $[0, \infty)$ . Пусть выполнены условия:

1) пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_k p_0^{-1+k/n} p_n^{-k/n} = c_k$$

существуют и конечны;

2) уравнение

$$G(\xi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k \xi^{2n-2k} = 0 \tag{16}$$

не имеет кратных корней;

3)  $F_{ij}(x) = \operatorname{Re} [(\xi_i - \xi_j) (p_n p_0^{-1})^{1/2n}] \neq 0$

при  $i \neq j$  и при достаточно больших  $x$  и

$$\int_0^{\infty} F_{ij}(x) dx = \infty,$$

где  $\xi_j$  — корни уравнения (16);

4) функции

$$p_k' p_0^{-2} (p_0 p_n^{-1})^{(4k-1)/2n}$$

и

$$p_k'' p_0^{-1} (p_0 p_n^{-1})^{(2k+1)/2n}$$

суммируемы в интервале  $[0, \infty)$ ;

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} p_k' p_0^{-1} (p_0 p_n^{-1})^{(2k+1)/2n} = 0.$

Тогда при достаточно большом  $x_0 > 0$  на интервале  $[x_0, \infty)$  уравнение (12) имеет  $2n$  линейно независимых решений  $y_j(x)$ , для которых пригодны асимптотические формулы (4). При этом  $|O(\epsilon)| \leq \epsilon \varphi(x)$ , где  $\varphi(x) \rightarrow 0$  при

$x \rightarrow \infty$ , т. е. асимптотика (14) пригодна и при  $x \rightarrow \infty$ , и при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Заметим еще, что  $\lambda_j(x) \sim \xi_j (p_n p_0^{-1})^{1/2n}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Для двучленного уравнения

$$\varepsilon^{2n} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[ p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} \right] + p_n(x) y = 0$$

и при  $\varepsilon = 1$  формула (14) принимает вид ( $x \rightarrow \infty$ )

$$y_j(x) = q^{-(2n-1)/2} p_0^{-1/2} e^{\varepsilon_j \xi} [1 + o(1)], \quad (17)$$

$$q = \sqrt[2n]{(-1)^{n+1} \frac{p_n}{p_0}}, \quad \xi = \int_{x_0}^x q dx,$$

$\varepsilon_j$  — корни степени  $2n$  из единицы. Формула (17) для двучленного уравнения, для уравнений, близких к двучленному при больших  $x$ , и для случая, когда  $p_h(x)$  стремится к постоянным при  $x \rightarrow \infty$ , доказана в книгах И. М. Рапопорта «О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений» и М. А. Наймарка «Линейные дифференциальные операторы». Формула (15), по-видимому, публикуется впервые и доказана автором в предположениях 1°, 2° (см. примечание на стр. 172).

## Дополнение II

### МЕТОД ВКБ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

*В. П. Маслов*

В книге Дж. Хединга изучается асимптотическое поведение решений уравнения

$$-h^2 y'' + [u(x) - \lambda] y = 0 \quad (1)$$

при  $h \rightarrow 0$ . Основная задача заключается в том, чтобы «сшить» асимптотику решения в областях  $u(x) > \lambda$  и  $u(x) < \lambda$ . Важной задачей, не рассмотренной в книге, является изучение асимптотического поведения решения в окрестности нулей функции  $u(x) - \lambda$  (точек «поворота»).

Метод, изложенный в книге, существенно одномерный и не переносится на многомерный случай. Роль точек поворота в многомерном случае играют фокальные точки (по другим терминологиям «каустические», «сопряженные», «точки Якоби», точки на огибающих) решений некоторой системы уравнений Гамильтона. К проблеме изучения поведения решения уравнения в частных производных вблизи таких точек и вдали от них приводит широкий класс математических и физических задач: поведение разрывов решений гиперболических уравнений в целом, задачи коротковолновой дифракции и рефракции, асимптотика решения задачи Коши для гиперболических систем с осциллирующими начальными данными, полуклассическая асимптотика задач квантовой механики, асимптотика собственных функций и собственных значений эллиптических операторов и т. д.

В настоящем добавлении приведена асимптотика решений многомерного аналога уравнения (1). Полученная асимптотика равномерна по  $x$  и, следовательно, пригодна как вблизи фокальных точек, так и вдали от них.

Основные результаты требуют для своей формулировки введения некоторых предварительных понятий. Эти результаты изложены в теоремах 4 и 5.

Метод, которым мы действуем, сводит нахождение многомерной асимптотики к простой топологической задаче о некоторых индексах пересечения одномерных путей на  $n$ -мерных поверхностях в  $2n$ -мерном евклидовом пространстве. Существенную роль играют так называемые индексы по Морсу. План этого приложения состоит в следующем: вначале мы изложим одномерный метод ВКБ (который рассмотрен в книге Хединга) в терминах, удобных для обобщений на многомерный случай. Сама по себе эта формулировка уже приводит к некоторой новой точке зрения на задачу о нахождении асимптотики даже в одномерном случае. Затем будет изложен общий случай, когда размерность произвольна.

Основные теоремы приводятся в таком виде, чтобы они охватывали уравнения квантовой механики для многих частиц во внешнем электромагнитном поле с общим взаимодействием (в том числе и магнитным) в случае, когда часть частиц — тяжелые (квазиклассические), а часть частиц — легкие (квантовые).

### § 1. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Мы будем действовать по следующему плану.

Для построения асимптотических формул, равномерных по  $x$  на всей оси  $x$ , нам придется вначале сконструировать некоторый оператор, зависящий от параметра  $\hbar$ , отображающий пространство функций на заданной кривой  $\Gamma$  в фазовой плоскости  $p, q$  в пространство функций на прямой  $q$ . Для конструкции этого оператора, названного каноническим, вводится понятие индекса пути на кривой, и кривая покрывается интервалами, взаимно однозначно проектируемыми<sup>1)</sup> на одну из координатных осей ( $p$  или  $q$ ). Вначале канонический оператор определяется локально — для каждого из таких интервалов, а затем с помощью разбиения единицы строится оператор для всей кривой  $\Gamma$ . Канонический оператор, вообще говоря, зависит от способа покрытия кривой  $\Gamma$  интервалами и от способа разбиения единицы. Оказывается, од-

<sup>1)</sup> Под этим понимается, что проекция является диффеоморфизмом (гладким взаимно однозначным отображением с невырожденным якобианом).

нако, что если кривая не замкнута, то эта зависимость проявляется лишь на величинах первого порядка малости относительно параметра  $h$ . То же справедливо и для замкнутой кривой при условии, что площадь, ограниченная кривой, удовлетворяет некоторому соотношению, которое в физической литературе называется условием квантования Бора. При помощи канонического оператора мы выразим известную асимптотику собственной функции стационарного уравнения Шредингера, а также асимптотику решения задачи Коши для временного уравнения Шредингера. Приводимые в этом параграфе теоремы являются частным случаем более общих теорем (когда число измерений произвольно). Общие теоремы формулируются и доказываются в § 2—4. В этом параграфе все теоремы приводятся без доказательств.

## 1. Топологические предложения

Рассмотрим ограниченную гладкую несамопересекающуюся кривую  $\Gamma$  (не обязательно замкнутую) на фазовой плоскости<sup>1)</sup>, определяемую уравнениями  $q = q(\alpha)$ ,  $p = p(\alpha)$ . Параметр  $\alpha$  можно считать, например, длиной дуги, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки. Точку кривой  $\Gamma$  с координатами  $q(\alpha)$ ,  $p(\alpha)$  будем также обозначать  $\alpha$ . Назовем точки кривой  $\Gamma$ , в которых выполняется условие  $dq/d\alpha \neq 0$ , *неособыми* или, более подробно, *неособыми* относительно операции проектирования кривой  $\Gamma$  на координатную ось  $q$  параллельно оси  $p$ . Остальные точки назовем *особыми*.

Предположим вначале, что множество  $M$  особых точек конечно и что особые точки таковы, что при переходе через них производная  $dq/dp$  вдоль  $\Gamma$  меняет знак. Сопоставим каждой точке  $\alpha \in M$  единичный касательный вектор  $e_\alpha$  в направлении возрастания  $dq/dp$  (т. е. в сторону положительного значения  $dq/dp$ ).

Определим индекс пути  $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$  с началом в неособой точке  $\alpha^1$  и концом в неособой точке  $\alpha^2$  следующим образом: если путь проходит особую точку  $\alpha$  в нап-

<sup>1)</sup> Точнее, одномерное гладкое подмногообразие (возможно, открытое).



равлении вектора  $e_\alpha$ , то к индексу прибавляется 1, если в противоположном направлении — то вычитается 1. Индекс пути  $l[\alpha^1, \alpha^2]$  обозначается символом  $\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2]$ .

Мы определили, таким образом, индекс пути при некоторых ограничениях, наложенных на множество  $M$  и на точки  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ , которые выполняются, когда кривая и путь находятся «в общем положении» [1].

Определим индекс произвольного пути на произвольной кривой  $\Gamma$ , приведя ее и путь в общее положение малым поворотом осей по часовой стрелке. Имеет место следующая важная теорема, доказательство которой почти очевидно из наглядных соображений.

*Теорема. Индекс замкнутого пути (цикла), проходящего в направлении часовой стрелки, является инвариантом относительно диффеоморфизмов.*

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q}, \quad (1.1)$$

где  $H(q, p, t)$  — достаточно гладкая функция. Пусть  $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$  — несамопересекающаяся гладкая кривая  $\Gamma$  в фазовой плоскости, а  $Q(\alpha, t) = q(t)$ ,  $P(\alpha, t) = p(t)$  — решение системы (1.1) с начальными данными  $q^0(\alpha)$ ,  $p^0(\alpha)$ , лежащими на нашей кривой. Функции  $Q(\alpha, t)$ ,  $P(\alpha, t)$  задают отображение  $U_t$  кривой  $\Gamma$  на некоторую кривую  $\Gamma_t$ :  $U_t\Gamma = \Gamma_t$ . Всякий путь  $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$  переходит при этом в некоторый путь  $U_t l[\alpha^1, \alpha^2] = l_t[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma_t$ . Спрашивается, как выражается  $\text{Ind } l_t[\alpha^1, \alpha^2]$  через  $\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2]$ ? Для того чтобы ответить на этот вопрос, напомним некоторые определения, относящиеся к решению системы (1.1).

1) Множество точек  $Q(\alpha^0, \tau)$  при  $\tau$ , меняющемся от 0 до  $t$ , называется траекторией и обозначается  $Q(\alpha^0; 0, t)$ .

2) Точка  $Q(\alpha^0, \tau)$  на траектории  $Q(\alpha^0; 0, t)$  называется фокальной, если  $\partial Q(\alpha^0, \tau)/\partial \alpha^0 = 0$ .

3) Пусть  $\partial^2 H/\partial p^2 > 0$ . Индексом траектории  $\text{Ind } Q(\alpha^0; 0, t)$  назовем число фокальных точек на полуинтервале  $0 < \tau \leq t$  (так называемый индекс по Морсу [2]).

Имеет место следующее важное соотношение, которое решает вопрос о том, как изменяется индекс пути при

отображении  $U_t$ :

$$\text{Ind } l[\alpha^1, \alpha^2] + \text{Ind } Q(\alpha^2; 0, t) = \text{Ind } l_t[\alpha^1, \alpha^2] + \\ + \text{Ind } Q(\alpha^1; 0, t). \quad (1.2)$$

В случае  $H = p^2/2$  этот факт имеет простое геометрическое истолкование. Относительно доказательства в общем случае см. примечание на стр. 197.

## 2. Канонический оператор

Рассмотрим пространство  $L_2[\Gamma]$  функций с интегрируемым квадратом по мере  $da$  на кривой  $\Gamma$  и пространство  $L_2[R^1]$  функций от  $x$  с интегрируемым квадратом на прямой  $-\infty \leq x \leq \infty$ , зависящих от параметра  $h$ . Параметр  $h$  есть элемент некоторого подмножества  $\mathfrak{B}$  интервала  $(0, 1)$ , причем нуль является предельной точкой  $\mathfrak{B}$ .

Нас будут интересовать значения функций из  $L_2[\Gamma]$  лишь с точностью до  $O(h)$ . Под  $O(h)$  мы будем понимать функции вида  $hF(\alpha, h)$ , где  $F(\alpha, h)$  — некоторая непрерывная по  $\alpha$  и равномерно ограниченная при  $h \rightarrow 0$  функция, причем  $|h \frac{\partial F}{\partial \alpha}|$  и  $\int F^2(\alpha, h) da$  также ограничены константой, не зависящей от  $h$ . Это обозначение сохранится и в многомерном случае при  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Мы будем рассматривать семейство линейных операторов, зависящих от параметра  $h \in \mathfrak{B}$ , с областью определения в  $L_2[\Gamma]$  и областью значений в  $L_2[R^1]$ .

Рассмотрим случай, когда кривая  $\Gamma$  взаимно однозначно проектируется на ось  $q$ . Таким образом, из уравнения  $q = q(\alpha)$  находится  $\alpha = \alpha(q)$ . Обозначим через  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  линейный оператор, определенный на финитных функциях (см. [3]) из  $L_2[\Gamma]$ , действующий на функцию  $\varphi(\alpha)$  следующим образом:

$$(K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi)(x) = K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) = \left\{ e^{i\gamma} \left| \frac{dq(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(q)}^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \frac{i}{h} \int_{\alpha^0}^{\alpha(q)} p dq \right] \varphi[\alpha(q)] \right\}_{q=x}, \quad (1.3)$$

где  $\gamma$  — некоторая константа, не зависящая от  $\alpha$ ;  $\alpha^0$  — некоторая точка на кривой  $\Gamma$ .

Пусть теперь кривая  $\Gamma$  не проектируется взаимно однозначно на прямую  $q$ , но зато взаимно однозначно проектируется на прямую  $p$ . Таким образом, из  $p = p(\alpha)$  следует  $\alpha = \alpha(p)$ . В этом случае обозначим через  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  оператор из  $L_2[\Gamma]$  в  $L_2[R^1]$ , действующий на  $\varphi(\alpha)$  следующим образом:

$$K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) = \frac{e^{i(\gamma - \pi/4)}}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{ipx/h} \left| \frac{dp(\alpha)}{d\alpha} \right|^{-1/2} \Big|_{\alpha = \alpha(p)} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{i}{h} \int_{\alpha^0}^{\alpha(p)} q dp \right] \varphi[\alpha(p)] dp, \quad (1.4)$$

где  $\gamma$  — некоторая константа, а  $\alpha^0$  — некоторая точка на  $\Gamma$ , в которой  $dq(\alpha)/d\alpha = 0$ . Интеграл берется по отрезку, на котором  $\varphi[\alpha(p)]$  отлична от нуля. Если  $x$  лежит вне отрезка  $d$  оси  $q$ , на который проектируется носитель  $\varphi(\alpha)$ , то

$$(K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi)(x) = O(h^{\infty}). \quad (1.4)'$$

Этот факт следует из того, что производная фазы интеграла (1.4) при  $x \notin d$  не обращается в нуль, и мы можем проинтегрировать (1.4) по частям.

Теперь рассмотрим произвольную кривую  $\Gamma$  описанного выше типа. Покроем кривую  $\Gamma$  конечным числом открытых интервалов  $\Omega^i$  так, чтобы в каждом интервале  $\Omega^i$  выполнялось одно из неравенств: либо  $dq(\alpha)/d\alpha \neq 0$  для всех точек интервала, либо  $dq(\alpha)/d\alpha = 0$  в некоторой точке, а  $dp(\alpha)/d\alpha$  всюду в интервале отлична от нуля. Области первого типа назовем неособыми; области второго типа — особыми. В неособой области зададим в качестве локальных координат  $q(\alpha)$ , в особой области —  $p(\alpha)$ . Обозначим через  $\Omega_0^j$  неособую область  $\Omega^j$  с введенными в ней координатами  $q(\alpha)$  (неособая локальная карта), а через  $\Omega_1^h$  — особую область  $\Omega^h$  с введенными в ней координатами  $p(\alpha)$  (особая локальная карта). Пусть  $\Omega_1^j$  ( $j = j_1, \dots, j_n, \dots$ ) — совокупность всех особых карт,  $\Omega_0^j$  ( $j = j_1', \dots, j_n', \dots$ ) — совокупность всех неособых карт. Одну из точек  $\alpha^j$ , принадлежащую особой области  $\Omega_1^j$ , в которой  $dq(\alpha)/d\alpha = 0$ , назовем центральной точкой осо-

бой карты. Центральной точкой неособой карты  $\Omega_0^{j'}$  назовем произвольную точку  $\alpha^{j'}$  этой карты. Совокупность карт  $\{\Omega_j^i\}, \{\Omega_0^{j'}\}$  образует атлас  $\mathbb{H}$  кривой (см. [4]). Сопоставим действительное число  $\gamma^0$  центральной точке одной из карт атласа  $\mathbb{H}$ , эту точку назовем начальной и обозначим  $\alpha^0$ .

Пусть носитель  $R$  функции  $\varphi(\alpha) \in C^\infty$  лежит в области  $\Omega^k$ . Определим действие канонического оператора на функцию  $\varphi(\alpha)$  формулой (1.3), если  $\Omega^k$  — неособая, и формулой (1.4), если  $\Omega^k$  — особая, положив там  $\gamma = \gamma^0 - \frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^k]$ , где  $\gamma^0$  — не зависящее от  $k$  число,  $\alpha^k$  — центральная точка карты, а  $l[\alpha^0, \alpha^k]$  — некоторый путь из  $\alpha^0$  в  $\alpha^k$ .

В общем случае можно определить канонический оператор с помощью разложения единицы по локальным картам. Обозначим через  $e^i(\alpha)$ ,  $i=0, \dots, N$ , разложение единицы, отвечающее покрытию  $\{\Omega^i\}$  отрезка  $R$ . Это означает, что  $e^i(\alpha)$  удовлетворяет условиям: 1)  $e^i(\alpha) \in C^\infty$  и равно нулю вне  $\Omega^i$ ; 2)  $\sum_{i=0}^N e^i(\alpha) = 1$ , если  $\alpha \in R$  (см. [3]).

Для финитной функции  $\varphi(\alpha)$  имеем  $\varphi(\alpha) = \sum_{i=0}^N e^i(\alpha) \varphi(\alpha)$ .

Носитель каждого члена суммы принадлежит лишь одной локальной карте, а на таких функциях канонический оператор определен формулами (1.3) и (1.4). В силу линейности и при учете (1.4)' отсюда можно получить общий вид канонического оператора, действующего на финитную функцию  $\varphi(\alpha)$ . Покажем, как это сделать.

Пусть  $j(x)$  — совокупность номеров всех тех карт атласа  $\mathbb{H}$ , которые содержат множество точек, являющихся пересечением прямой  $q=x$  и отрезка  $R \subset \Gamma$ . Отрезок  $R \subset \Gamma$  покрывается конечным числом карт атласа  $\mathbb{H}$ :  $\Omega^0, \dots, \Omega^N$ . В общем случае канонический оператор  $K_\Gamma^{\gamma, \alpha^0}$  имеет вид

$$K_\Gamma^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) = e^{i\gamma} \sum_{j, j' \in j(x)} \left[ e^{-\frac{i\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^{j'}]} e^{j'}[\alpha(q)] \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{dq}{d\alpha}[\alpha(q)] \right|^{-1/2} e^{\frac{i}{h} \int_{l[\alpha^0, \alpha(q)]} p dq} \varphi[\alpha(q)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-\frac{i\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^j]} \frac{e^{+i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} \int e^{ipq/h} e^j [\alpha(p)] \times \\
& \times \left[ \frac{dp}{d\alpha} [\alpha(p)] \right]^{-1/2} e^{-\frac{i}{h} l[\alpha^0, \alpha(p)]} \varphi[\alpha(p)] dp \Big|_{q=x}, \quad (1.5)
\end{aligned}$$

где  $l[\alpha^0, \alpha^k]$  — некоторые пути из  $\alpha^0$  в  $\alpha^k$ .

Рассмотрим пример, когда  $\Gamma$  — окружность:

$$p = a \sin \alpha, \quad q = a \cos \alpha, \quad -5\pi/2 \leq \alpha \leq -\pi/2,$$

концевые значения  $\alpha$  отождествлены, а  $\varphi(\alpha) = 1$ . Пусть  $\alpha^0 = -\pi/2$ ,  $\gamma = 0$ ,  $l[\alpha^0, \alpha]$  — дуга меньше  $2\pi$ , взятая в направлении часовой стрелки от точки  $-\pi/2$  до точки  $\alpha$ . Возьмем карты  $\Omega^i$ , изображенные на рис. 1. Центральные точки карт будут  $\alpha^0 = -\pi/2$ ,  $\alpha^1 = -\pi$ ,  $\alpha^2 = -3\pi/2$ ,  $\alpha^3 = -2\pi$ . По определению  $\text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^1] = 0$ ,  $\text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^2] = 1$ ,  $\text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^3] = 1$ .

Разложение единицы  $e_i(\alpha)$  по этим областям имеет вид, изображенный на рис. 2. Канонический оператор, примененный к 1, в данном случае при  $x_2 < x < x_3$  равен

$$\begin{aligned}
& K_{p,2}^{\alpha^0, -\pi/2} \Big|_{q^2=a^2} \cdot 1 = (a^2 - x^2)^{-1/4} \times \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ -\frac{a^2}{2} \arccos \frac{|x|}{a} + \frac{1}{2} |x| \sqrt{a^2 - x^2} \right] \right\} \times \\
& \quad \times e^{i\pi a^2/4h} + i(a^2 - x^2)^{-1/4} \times \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ \frac{a^2}{2} \arccos \frac{|x|}{a} - \frac{1}{2} |x| \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{\pi a^2}{4} \right] \right\}, \\
& \quad 0 < \arccos \frac{|x|}{a} < \frac{\pi}{2}. \quad (1.6)
\end{aligned}$$

**Замечание** В случае если  $\Gamma$  — неограниченная кривая, то, заменяя в формуле (1.5)  $\varphi(\alpha)$  на  $\xi(\alpha, h)\varphi(\alpha)$ , где  $\xi(\alpha, h)$  — функция-регуляризатор, равная единице с точностью до  $O(h^\infty)$  в любой ограниченной области и достаточно быстро стремящаяся к нулю при  $\alpha \rightarrow \infty$  (например,  $\xi(\alpha, h) = \exp\{-\alpha^2 \exp(-1/h)\}$ ), мы получим, что ряды в (1.5) сходятся для любой ограниченной функции  $\varphi(\alpha)$ . Нетрудно убедиться, что для определенного таким образом канонического оператора в любой ограниченной области будут справедливы при некоторых условиях все результаты сформулированных ниже теорем. Аналогичное утверждение справедливо и в многомерном случае.

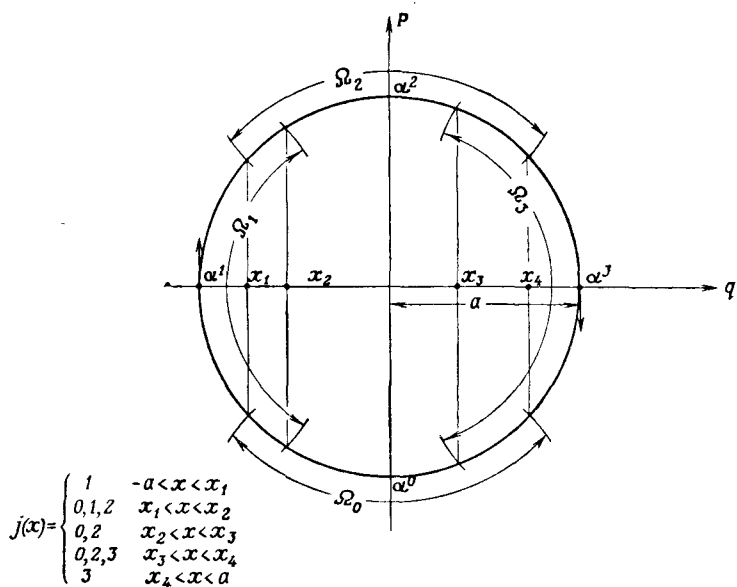


Рис. 1. Атлас  $H$  окружности  $q = a \cos \alpha$ ,  $p = a \sin \alpha$ ;  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  — карты.

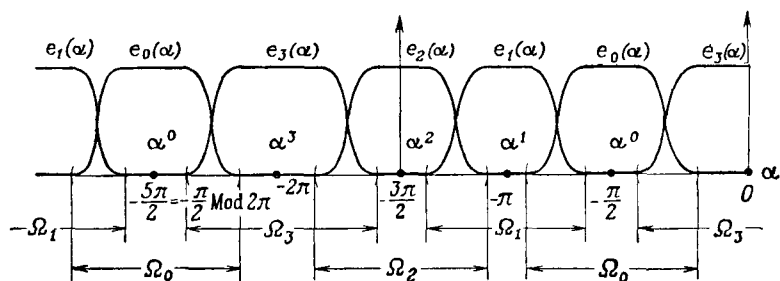


Рис. 2. Разложение единицы по атласу  $H$ :

$$\sum_{i=0}^3 e_i(\alpha) \equiv 1, \quad e_i(\alpha) \in C^\infty, \quad e_i(\alpha) \equiv 0 \text{ при } \alpha \notin \bar{\Omega}_i.$$

### 3. Инвариантность канонического оператора

Пусть кривая  $\Gamma$  не замкнута. Тогда канонический оператор  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  не зависит от вида атласа и от способа разбиения единицы с точностью до  $O(h)$ , т. е. выражения  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha)$  для различных атласов и разбиений единицы отличаются лишь на функции вида  $hK_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} F(\alpha, h)$ , где  $F(\alpha, h)$  удовлетворяют поставленным в начале п. 2 условиям. Подразумевается, что точка  $\alpha^0$  при новом разбиении осталась начальной точкой атласа, а значит, осталась центральной точкой некоторой карты. Если же точка  $\alpha = \alpha^0$  не осталась при новом разбиении центральной точкой карты, а стала принадлежать карте с центральной точкой  $\alpha_1^0$ , то в качестве начальной точки нового атласа должна быть взята какая-либо другая точка, например  $\alpha_1^0$ . Тогда прежний канонический оператор при таком новом разбиении равен (с точностью до  $O(h)$ )  $K_{\Gamma}^{\tilde{\gamma}, \alpha_1^0}$ , где

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi i}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_1^0] + \frac{1}{h} \int_{l[\alpha^0, \alpha_1^0]} pdq.$$

Если кривая  $\Gamma$  замкнута, то канонический оператор  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  с точностью до  $O(h)$  не зависит от способа разбиения единицы, но зависит, вообще говоря, от выбора путей  $l[\alpha^0, \alpha^k]$  из начальной точки в центральные точки карт.

В этом случае для того, чтобы канонический оператор  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  не зависел от выбора канонического атласа и путей  $l[\alpha^0, \alpha^k]$  с точностью до  $O(h)$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого  $h \in \mathcal{U}$  нашлось такое целое  $n$ , что

$$\oint pdq = (2n + 1)\pi h + O(h^2). \quad (1.7)$$

Заметим, что эта формула совпадает по форме с известной в физической литературе формулой квантования Бора.

Замечание относительно начальной точки атласа остается в силе и для случая замкнутой кривой.

Условие (1.7), а следовательно, и инвариантность канонического оператора сохраняются при преобразовании, не меняющем площадь (каноническом преобразовании).

#### 4. Квазиклассическая асимптотика собственных функций и собственных значений

Напомним, что собственные значения уравнения (1) при  $u(x) = x^2$  и условии  $\int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx < \infty$  (осциллятор) имеют вид  $\lambda_n = (n + 1/2)h$ . Можно доказать, что в этом случае выражение (1.6) является асимптотикой при  $h \rightarrow 0$  собственных функций уравнения (1).

В общем случае при произвольном  $u(x) \in C^\infty$ , но таком, что  $u(\pm \infty) = \infty$ , имеет место следующее предложение.

Пусть  $\Gamma_n = \{q_n(\alpha), p_n(\alpha)\}$  — последовательность замкнутых кривых, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{dp_n(\alpha)}{d\alpha} = -\frac{\partial u(q_n)}{\partial q_n}, \quad \frac{dq_n(\alpha)}{d\alpha} = p_n, \quad \frac{p_n^2}{2} + u(q_n) = E_n,$$

где  $\{E_n\} \subset [\alpha, \beta]$  ( $\alpha > 0$ ) — зависящее от  $h$  множество, определяемое условием  $\oint p_n dq_n = 2\pi(n + 1/2)h$ . Существует зависящий от  $h$  набор таких собственных значений  $\lambda = \lambda_n$  уравнения (1) в пространстве  $L_2$  на прямой, что

$$\lambda_n - E_n = O(h^2), \quad \|\psi_n - K_{\Gamma_n}^{0, \alpha^0} \cdot 1\| = O(h),$$

где  $\psi_n$  — собственные функции, отвечающие  $\lambda_n$ .

#### 5. Асимптотические ряды

Поскольку в дальнейшем будет речь всегда идти об асимптотических рядах, то и знак равенства мы условимся понимать в некотором «асимптотическом» смысле, который мы сейчас определим.

Мы будем говорить, что функция  $F(x, \tau, h)$  эквивалентна нулю, если для любых целых  $N_1, N_2$  и  $N_3$  функция  $h^{-N_1+N_2+N_3} \frac{\partial^{N_2+N_3} F(x, \tau, h)}{\partial x^{N_2} \partial \tau^{N_3}}$  ограничена равномерно по  $h \in \mathfrak{D}$ ,  $x \in R^n$  и  $\tau \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ . Мы отождествим между собой функции, разность между которыми эквивалентна нулю.

Таким образом, функции от  $x$  и  $h$  факторизуются по подпространству функций, имеющих бесконечное число



ограниченных при  $h \rightarrow 0$  производных и имеющих порядок  $O(h^\infty)$ . Мы будем рассматривать также функции со значениями в банаховом или в счетно-нормированном пространстве. И в этом случае осуществляется такая же факторизация, т. е. функции, имеющие порядок  $O(h^N)$  при любом  $N$  и бесконечно дифференцируемые (равномерно при  $h \rightarrow 0$ ), полагаются эквивалентными нулю.

*Запомним, что все равенства, которые в дальнейшем будут написаны для функций от  $x$  со значениями в банаховом или в счетно-нормированном пространстве, справедливы лишь с точностью до функций, эквивалентных нулю.*

Далее, если мы говорим, что функция  $f(x, t, h)$   $N$  раз дифференцируема, то это значит, что все ее  $N$  производных по  $x, t$  ограничены при  $h \rightarrow 0$ . Если  $f(x, t, h)$  — функция со значениями в банаховом (или счетно-нормированном) пространстве, то  $N$ -кратная дифференцируемость функции означает, что ее  $N$  производных ограничены по норме в этом пространстве (или соответственно ограничены все нормы счетно-нормированного пространства) равномерно по  $h$  при  $h \rightarrow 0$ .

Рассмотрим функцию  $e^i(\alpha, h)$ ,  $\alpha \in \Gamma$ , в окрестности точки  $h = 0$  принадлежащую  $C^\infty(\alpha, h)$ . Иначе говоря,

$$\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^i(\alpha, h) = \sum_{j=0}^{\infty} h^j \frac{\partial^j}{\partial \alpha^j} e_j^i(\alpha) + O(h^\infty). \quad (1.8)$$

Слагаемое  $O(h)$  означает, что написанные ряды — асимптотические при  $h \rightarrow 0$ . Пусть далее  $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , где  $e^i(\alpha)$  принадлежит разложению единицы по атласу II. Заменим теперь в выражении  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha)$  функцию  $e^i(\alpha)$  на  $e^i(\alpha, h)$ . Получается семейство операторов, зависящих от  $e^i(\alpha, h)$ . Мы будем их обозначать через  $K_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$ ,  $\tilde{K}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$ ,  $\tilde{\tilde{K}}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$ . Таким образом, запись  $K_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha)$  не определяет вида  $e^i(\alpha, h)$  при  $h \neq 0$ . Заметим, что два члена указанного семейства равны, вообще говоря, лишь с точностью до  $O(h)$ :

$$\tilde{\tilde{K}}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) = \tilde{K}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) [1 + O(h)].$$

### 6. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши

Пусть  $v(x, t) \in C^\infty$ ,  $\varphi(\alpha) \in C^\infty$ , и пусть  $\varphi(\alpha)$  финитна, а решение  $\psi(x, t)$  уравнения Шредингера (см. [5])

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v(x, t) \right] \psi = \hat{H}\psi \quad (1.9)$$

удовлетворяет начальному условию

$$\psi(x, 0) = K_{\Gamma, \hbar}^{\gamma^0, \alpha^0} \varphi(\alpha). \quad (1.9)'$$

Тогда решение  $\psi(x, t)$  представимо в виде

$$\psi(x, t) = \tilde{K}_{\Gamma, \hbar}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha), \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma = & \gamma^0 - \frac{\pi}{2} \text{Ind } Q(\alpha^0; 0, t) + \\ & + \frac{1}{\hbar} \int_0^t \left[ \frac{P^2(\alpha^0, \tau)}{2\mu} - v(Q(\alpha^0, \tau), \tau) \right] d\tau. \end{aligned}$$

**Примеры.** Покажем теперь, какой вид имеет в конкретных случаях выписанная выше асимптотика решения уравнения Шредингера.

Предположим, что начальное условие для уравнения  $ih \partial \psi / \partial t = \hat{H}\psi$  имеет вид

$$\psi(x, 0) = \varphi(x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} f(x) \right], \quad (1.11)$$

где  $\varphi(x)$  — финитная функция с носителем  $[-1, 1]$ ,  $f(x) \in C^2$ ,  $f(0) = 0$ . Начальное условие (1.11) есть условие вида (1.9)' при  $\Gamma = \{q(\alpha) = \alpha, p(\alpha) = f'(\alpha)\}$ ,  $\alpha \in [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha^0 = 0$ ,  $\gamma^0 = 0$ . Канонический атлас состоит из одной неособой карты,  $e^i(\alpha, \hbar) = 1$  при  $-1 \leq \alpha \leq 1$ .

Пусть пересечение прямой  $q = x$  с кривой  $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$  при всех  $x \in (x' - \delta, x' + \delta)$  не содержит особых точек, тогда оно состоит лишь из конечного числа точек  $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ , т. е.  $\alpha^i = \alpha^i(x, t)$ . Пусть  $\gamma^j$  — индекс пути  $Q(\alpha^j; 0, t)$ , т. е. число нулей функции  $\partial Q(\alpha^j, \tau) / \partial \alpha^j$  при  $0 < \tau \leq t$ ;  $S(\alpha^j, t)$  — решение уравнения

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\mu \dot{Q}^2}{2} - v(Q, t),$$

удовлетворяющее условию  $S(\alpha^j, 0) = f(\alpha^j)$ . Поскольку

$$f(\alpha) = \int_{l[0, \alpha]} p dq \text{ и}$$

$$S(\alpha, t) = \int_{l[0, \alpha]} p dq + \int_0^t \left\{ \frac{P^2(\alpha, \tau)}{2\mu} - v[Q(\alpha, \tau), \tau] \right\} d\tau =$$

$$= \int_0^t \left\{ \frac{P^2(0, \tau)}{2\mu} - v[Q(0, \tau), \tau] \right\} d\tau + \int_{l_t[0, \alpha]} p dq,$$

то решение можно записать в виде

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^k e^{-\frac{i\pi}{2} \gamma^j} \varphi[\alpha^j(x, t)] \left| \frac{\partial Q}{\partial \alpha^j}[\alpha^j(x, t), t] \right|^{-1/2} \times$$

$$\times e^{iS[\alpha^j(x, t), t]/h} + h\Phi(x, t, h), \quad (1.12)$$

где  $\Phi(x, t, h)$  ограничена при  $h \rightarrow 0$  в окрестности точки  $x = x'$ .

**З а м е ч а н и е.** Функция Грина  $\mathcal{G}(x, \xi, t)$  (фундаментальное решение уравнения Шредингера) удовлетворяет, очевидно, начальному условию (1.9)' при  $\Gamma = \{q(\alpha) = \xi, p(\alpha) = \alpha\}$  и  $\varphi(\alpha) = 1$ . Вместе с тем, как известно, функция Грина может быть представлена в виде фейнмановского континуального интеграла (см. [6]), который формально представляется в виде  $\Phi = \int \exp \left\{ \frac{i}{h} \theta \right\} Dq(\tau)$ , где

$$\theta = \int_0^t L(\dot{q}, q, \tau) dt, \quad q = q(\tau),$$

$$q(0) = \xi, \quad q(t) = x, \quad (a)$$

$$L = \frac{\mu \dot{q}^2}{2} - v(q).$$

Аналогично предыдущему примеру нетрудно убедиться, что если уравнение  $\delta\theta = 0$  при условии (a) имеет конечное число решений  $q^k = q^k(\tau, t, x, \xi)$ ,  $k = 1, \dots, k_0$ , а вторая вариация  $\delta^2\theta$  при  $q = q^k$  не имеет нулевого собственного значения, то

$$\Phi = \mathcal{G}(x, \xi, t) = (2\pi i h)^{-n/2} \sum_{k=1}^{k_0} |D(q^k)|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{i\pi \gamma_k}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{h} \int_0^t L(\dot{q}^k, q^k, \tau) d\tau \right\},$$

где  $\gamma_k$  — число отрицательных собственных значений второй вариации для экстремали  $q^k$ , а  $D(q^k) = (Dp^k(0)/Dx)^{-1}$ , где  $p^k(0)$  — начальный импульс экстремали  $q^k$ . Эта формула является континуальным аналогом метода стационарной фазы для интеграла  $I = \int \exp\left\{\frac{i}{h} F(x)\right\} dx$ ,  $x \in R^n$ , который при некоторых условиях представляется при  $h \rightarrow 0$  формулой

$$I \approx (2\pi i h)^{n/2} \sum_{k=1}^{k_0} |D(x^k)|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{i\pi\gamma_k}{2} + \frac{i}{h} F(x^k)\right\},$$

если число решений  $x^k$  уравнения  $dF=0$  конечно, а матрица  $A$  формы  $d^2F$  не имеет при  $x=x^k$  нулевого собственного значения. Здесь  $\gamma_k$  — число отрицательных собственных значений матрицы  $A$ , а  $D(x) = \det A$  (см. [7]).

Пусть теперь пересечение прямой  $q=x'$  и кривой  $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$  есть отрезок  $p' \leq p \leq p''$ . Следовательно, для  $p \in \{p' - \varepsilon, p'' + \varepsilon\}$  из  $P(\alpha, t) = p$  получаем  $\alpha = \alpha(p, t)$ . Тогда решение  $\psi(x, t)$  представимо в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \frac{e^{-\frac{i\pi}{2} \left[\gamma - \frac{1}{2}\right]}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{p' - \varepsilon}^{p'' + \varepsilon} F(p) \exp\left\{\frac{ip}{h} [x - Q(\alpha(p, t), t)]\right\} \times \\ & \times \left| \frac{\partial P}{\partial \alpha} [\alpha(p, t), t] \right|^{-1/2} \exp\left\{\frac{i}{h} S[\alpha(p, t), t]\right\} dp + \\ & + \sqrt{h} \Phi(x, t, h), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $F(p)$  — гладкая функция, равная 1 при  $p' \leq p \leq p''$  и нулю вне  $p' - \varepsilon \leq p \leq p'' + \varepsilon$ ,  $\gamma$  равно числу фокальных точек на какой-либо траектории  $Q(\alpha(p, t); 0, t)$  при  $p \in [p', p'']$ , а  $\Phi(x, t, h)$  равномерно ограничена при  $h \rightarrow 0$  в окрестности точки  $x=x'$ .

Заметим, что если  $p' = p''$ , а точка  $q=x'$  — особая, то интеграл (1.13) можно легко упростить, разложив подинтегральное выражение в ряд в окрестности точки  $p=p'$  и ограничившись первыми членами (см. [10]).

## § 2. МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Многомерный случай мы будем исследовать по тому же плану, что и одномерный.

1) Как известно,  $\gamma_k$  равно индексу по Морсу [2].

## 1. Топологические предложения

Рассмотрим вначале два конкретных случая.

Пусть  $p(x)$  — потенциальное векторное поле в пространстве  $x \in R^n$  (конфигурационном пространстве); ему отвечает, например, пучок частиц с импульсом  $p(x)$ . Можно сказать, что в  $2n$ -мерном (фазовом) пространстве  $p, q$  задана  $n$ -мерная поверхность уравнением  $p = p(q)$ , или в параметрической форме  $q = q(\alpha)$   $\alpha, p = p(\alpha)$ , удовлетворяющая условию

$$\sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial q_{\sigma}}{\partial \alpha_i} \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial q_{\sigma}}{\partial \alpha_j} \frac{\partial p_{\sigma}}{\partial \alpha_i} \right) = 0, \quad (2.1)$$

т. е. скобки Лагранжа от  $p(\alpha), q(\alpha)$  равны нулю. Рассмотрим другой случай. Пусть пучок частиц испускается со всевозможными импульсами из точки  $x = 0$ . Это значит, что в фазовом пространстве  $p, q$  рассматривается  $n$ -мерная плоскость  $q = 0$ , которая удовлетворяет, очевидно, условию (2.1).

Напомним, что каноническим преобразованием называется преобразование, оставляющее инвариантным условие (2.1). Каноническим преобразованием является, например, сдвиг вдоль траектории некоторой гамильтоновой системы. Очевидно, что каноническое преобразование, вообще говоря, не сохраняет однозначной зависимости от  $q$  точек на поверхности, которая имела место в первом случае, или от  $p$  — во втором случае. Поэтому мы будем рассматривать гладкую  $n$ -мерную поверхность  $q = q(\alpha), p = p(\alpha), \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$  в  $2n$ -мерном фазовом пространстве  $q, p$  или, точнее, гладкое  $n$ -мерное подмногообразие (возможно, открытое)  $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$   $2n$ -мерного евклидова пространства, для которого выполняется условие (2.1). Такую поверхность мы будем называть лагранжевым подмногообразием  $\Gamma$ . Условие (2.1) означает, что  $\int p dq$  на  $\Gamma$  локально не зависит от пути.

Множество  $M$  точек многообразия  $\Gamma$ , удовлетворяющих условию  $Dq/D\alpha = 0$  (как обычно,  $Dq/D\alpha$  означает  $\det \|\partial q_i / \partial \alpha_j\|$ ), называется *особым*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Относительно проектирования на плоскость  $p = 0$  (см. [1]).

Лагранжево подмногообразие  $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$  обладает замечательным свойством, которое позволяет обобщить понятие канонического оператора на многомерный случай. Это свойство выражается следующей леммой о локальных координатах.

*Лемма 1. Для любой точки  $\alpha^0$  на лагранжевом подмногообразии  $\Gamma$  существует такой поворот осей  $\tilde{q} = Aq$ ,  $\tilde{p} = Ap$ , что некоторая окрестность точки  $\alpha^0$  взаимно однозначно проектируется (т. е. проекция окрестности есть диффеоморфизм) на одну из  $n$ -мерных координатных плоскостей вида  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ .*

Заметим, что преобразование вида  $\tilde{q} = Aq$ ,  $\tilde{p} = Ap$ , где  $A$  — унитарная матрица, является каноническим.

Лемму о локальных координатах мы сформулируем в виде двух лемм 1а и 1б.

*Лемма 1а. Пусть в точке  $\alpha = \alpha^0$  матрица  $B = \left\| \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{\substack{i \leq n \\ j \leq n}}$  имеет ранг  $r < n$ . Тогда существует такая ортогональная  $n \times n$ -матрица  $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$ , что при каноническом преобразовании*

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(\alpha^0) q_j(\alpha), \\ \tilde{p}_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(\alpha^0) p_j(\alpha) \end{aligned} \quad (2.2)$$

*равенство*

$$\frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \alpha_j}(\alpha^0) = 0$$

*выполняется для всех  $1 \leq j \leq n$ ,  $1 \leq \sigma \leq k$ , где  $k = n - r$ .*

*Доказательство.* Существуют такие ортогональные матрицы  $C_1 = C_1(\alpha^0)$  и  $C_2 = C_2(\alpha^0)$ , что матрица  $B_1 = C_1 B C_2$  диагональна при  $\alpha = \alpha^0$  (см. [9]), причем ее первые  $k$  строк состоят из нулей. Очевидно, что первые  $k$  строк матрицы  $B_2 = B_1 C_2^* = C_1 B$  тоже равны нулю.

Докажем, что  $C_1 = C_1(\alpha^0)$  и есть искомая ортогональная матрица  $\|\beta_{ij}(\alpha^0)\|$ . Положив  $\tilde{q}(\alpha) = C_1 q(\alpha)$ , получим

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} = C_1 \frac{\partial q}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} = C_1 B = B_2.$$

Отсюда следует, что  $(\partial \tilde{q}_\sigma / \partial \alpha)_{\alpha=\alpha^0} = 0$ ,  $\sigma = 1, \dots, k$ . Преобразование (2.2) оставляет инвариантными скобки Лагранжа. Лемма доказана.

Лемма 16. Если ранг матрицы  $\left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{\alpha=\alpha^0}$  равен  $r$ ,  $k = n - r$ , и  $\partial \tilde{q}_\sigma / \partial \alpha_j(\alpha^0) = 0$  при  $\sigma \leq k$ ,  $1 \leq j \leq n$ , то матрица  $\tilde{D}_k = \|\partial(\tilde{y}_k)_i / \partial \alpha_j\|_{i, j \leq n}$ , где

$$(\tilde{y}_k)_i = \begin{cases} \tilde{p}_i(\alpha) & \text{при } i \leq k, \\ \tilde{q}_i(\alpha) & \text{при } i > k, \end{cases} \quad (2.3)$$

невырождена при  $\alpha = \alpha^0$ .

Доказательство. Умножение матрицы  $B_2$  справа на  $C_2$  эквивалентно ортогональному преобразованию координат  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  вида  $\tilde{\alpha} = C_2^* \alpha$ . Поэтому  $B_1 = B_2 C_2 = \|\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_j\|$ .

Поскольку в матрице  $B_1$  при  $\alpha = \alpha^0$  отличны от нуля лишь члены  $(\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_i)_{\alpha=\alpha^0}$  при  $i > k$ , то из условия (2.1) следует, что

$$\left( \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right)_{\alpha=\alpha^0} = 0 \quad \text{при } i > k \text{ и } j \leq k. \quad (2.4)$$

Докажем, что при  $\alpha = \alpha^0$   $J = \det \|\partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\alpha}_j\|_{i, j \leq k} \neq 0$ . В противном случае в силу (2.4) ранг прямоугольной матрицы  $A = \|\partial \tilde{p}_i / \partial \tilde{\alpha}_j\|_{\substack{i \leq n \\ j \leq k}}$  при  $\alpha = \alpha^0$  меньше  $k$ . Прямоугольная же матрица  $\|\partial \tilde{q}_\sigma / \partial \tilde{\alpha}_j\|_{\alpha=\alpha^0}$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $1 \leq \sigma \leq n$ , равна нулю. Отсюда следует, что ранг прямоугольной матрицы вида

$$\left\| \begin{array}{c} \frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \\ \frac{\partial \tilde{p}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \end{array} \right\|_{\alpha=\alpha^0} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} k \quad r \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \\ \hline A & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

меньше  $n$ , что невозможно, поскольку  $\{q(\alpha), p(\alpha)\}$  —  $n$ -мерное подмногообразие. Полученное противоречие доказывает, что

$$\det \tilde{D}_k|_{\alpha=\alpha^0} = \prod_{i=k+1}^n \left( \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{\alpha}_i} \right)_{\alpha=\alpha^0} J|_{\alpha=\alpha^0} \neq 0,$$

что и требовалось.

Координаты точки  $\alpha^0$  вида  $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$  ( $k = n - r$ ) будем называть фокальными координатами точки  $\alpha^0$ , а соответствующую плоскость — фокальной плоскостью.

Эта лемма может быть использована при выборе локальных координат (локальных карт лагранжева подмногообразия). Действительно, поскольку матрица  $\tilde{D}_k$  невырождена, мы можем в качестве локальной системы координат всегда вместо  $\alpha$  брать  $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ . Для произвольного подмногообразия так делать нельзя. Всякий компакт  $R$  на подмногообразии  $\Gamma$  мы сможем покрыть конечным числом областей  $\Omega^i$ , в каждой из которых невырождена какая-нибудь матрица вида  $\tilde{D}_k$  и существует точка  $\alpha_k^i$ , в которой  $\partial \tilde{q}_1 / \partial \alpha = \dots = \partial \tilde{q}_n / \partial \alpha = 0$ . (При  $k = 0$  это любая точка области.) Примем  $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ ,  $\alpha = \alpha^i(\tilde{y}_k)$  в качестве локальных координат в такой области и будем называть эту область локальной картой  $\Omega_k^i$ , а точку  $\alpha_k^i$  — центром локальной карты. Система локальных карт такого вида, покрывающих компакт  $R$ , составляет канонический атлас  $\Pi$  компакта  $R$ . Множество центральных точек мы будем обозначать буквой  $\mathcal{X}$ .

Назовем точки, в которых  $Dq/D\alpha \neq 0$ , и карты, у которых  $k = 0$ , неособыми. Остальные точки и карты назовем особыми.

Введем индекс пути  $l[\alpha', \alpha'']$  на лагранжевом многообразии. Мы дадим определение индекса пути, которое использует тот факт, что в общем положении размерность  $M$  не превосходит  $n - 1$ . Пусть точки  $\alpha'$  и  $\alpha''$ , принадлежащие одной и той же карте  $\tilde{\Omega}_k^i$ , являются неособыми. Определим индекс пути  $l[\alpha', \alpha''] \subset \tilde{\Omega}_k^i$  как раз-



ность индексов инерции матрицы<sup>1)</sup>  $\tilde{B}_k = \|\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{p}_j\|_{i, j \leq k}$  в точках  $\alpha'$  и  $\alpha''$ . Индекс пути  $l[\alpha', \alpha'']$ , если  $\alpha''$  — центральная точка карты  $\tilde{\Omega}_k^i$ , а  $\alpha'$  — неособая точка этой карты, равен индексу инерции матрицы  $\tilde{B}_k$  в точке  $\alpha'$ .

**Теорема 1.** *Ind  $l[\alpha', \alpha'']$ , где  $l[\alpha', \alpha''] \subset \tilde{\Omega}_{k_1}^i$ , не зависит от карты  $\tilde{\Omega}_{k_1}^i$ , т. е. если  $l[\alpha', \alpha'']$  принадлежит в то же время и  $\tilde{\Omega}_{k_2}^i$ , а  $\alpha', \alpha''$  — неособые, то*

$$\text{Ind } \tilde{B}_{k_1}(\alpha') - \text{Ind } \tilde{B}_{k_1}(\alpha'') = \text{Ind } \tilde{B}_{k_2}(\alpha') - \text{Ind } \tilde{B}_{k_2}(\alpha''). \quad (2.5)$$

Произвольный путь  $l[\alpha', \alpha'']$  можно покрыть картами. В каждой карте определен индекс отрезка пути<sup>2)</sup>. Индекс  $l[\alpha', \alpha'']$  определяется в силу аддитивности индекса. Из теоремы 1 следует, что  $\text{Ind } l[\alpha', \alpha'']$  не зависит от покрытия и не меняется при непрерывной деформации пути  $l[\alpha', \alpha'']$  в путь  $\tilde{l}[\alpha', \alpha'']$ , т. е.  $\text{Ind } l[\alpha', \alpha'']$  является гомотопическим инвариантом (см. [4]).

**Теорема 2.** *Индекс одномерного цикла есть целочисленный инвариант инфинитезимальных канонических преобразований.*

Пусть  $q(t), p(t)$  — решение системы Гамильтона  $\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q$ , удовлетворяющее условию  $q(0) = q^0(\alpha), p(0) = p^0(\alpha)$ , где  $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$  определяют лагранжево подмногообразие  $\Gamma$ . Обозначим  $q(t) = Q(\alpha, t), p(t) = P(\alpha, t)$ . Подмногообразие  $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$ , где  $t$  фиксировано, является лагранжевым подмногообразием фазового пространства. Всякий путь  $l[\alpha', \alpha'']$  отобразится на путь  $l_t[\alpha', \alpha''] \subset \Gamma_t$ . Определим индекс траектории  $Q(\alpha; 0, t)$ .

Предположим вначале, что форма  $\sum_{i, j=1}^n H_{p_i p_j} z_i z_j$  строго положительна. Известно, что в этом случае число нулей якобиана  $DQ(\alpha, \tau)/D\alpha$  при  $0 < \tau \leq t$  с учетом их кратности

1) Которая, как будет доказано ниже, симметрична.

2) При условии, что подмногообразие особенностей имеет размерность, меньшую, чем  $n$ , например многообразие  $\Gamma$  находится в общем положении по отношению к проекции. Этого достаточно, поскольку общего положения можно достичь сколь угодно малым каноническим поворотом.

конечно. Это число мы будем называть *индексом траектории*  $Q(\alpha; 0, t)$  (индекс по Морсу). Введем индекс пути и для произвольного гамильтониана  $H$ , не удовлетворяющего условию  $\sum_{i,j=1}^n H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$  при  $z \neq 0$ . В  $(2n+1)$ -мерном пространстве  $q, p, t$  рассмотрим  $(n+1)$ -мерную пленку  $R_t$ , являющуюся объединением семейства  $n$ -мерных многообразий  $\Gamma_\tau$  при  $\tau$ , меняющемся от 0 до  $t$ . В силу леммы 1б в каждой точке пленки  $R_t$  невырождена некоторая матрица типа  $\tilde{D}_h$ . Поэтому мы можем покрыть пленку  $R_t$  каноническими картами  $\tilde{\Omega}_h$  размерности  $n+1$ . Определим индекс одномерного пути, лежащего в пленке, в том числе и индекс траектории  $Q(\alpha; 0, t)$ . Рассмотрим отрезок пути  $l[\alpha', \alpha''] \in R_t$ , целиком принадлежащий одной канонической карте  $\tilde{\Omega}_h$  с локальными каноническими координатами  $\tilde{y}_h, t$ , концы которого являются неособыми точками. Аналогично тому как это было сделано для лагранжева многообразия, определим индекс пути  $l[\alpha', \alpha'']$  как разность индексов инерции матрицы  $\tilde{B}_h$ , взятых последовательно в точках  $\alpha'$  и  $\alpha''$ . Аналогично предыдущему определяется центральная точка карты и индекс пути  $l[\alpha', \alpha'']$ , где  $\alpha', \alpha'' \in \tilde{\Omega}_h$ ,  $\alpha'$  — неособая точка и  $\alpha''$  — центральная точка, как индекс инерции матрицы  $\tilde{B}_h$  в точке  $\alpha'$ .

Доказательство теорем об инвариантности будет дано в следующем параграфе. Там же мы определим индекс пути, соединяющего произвольные две точки из  $\tilde{\Omega}_h \subset R_t$ . Для пленки имеет место аналог теоремы 1, а индекс любого пути в  $R_t$  определяется в силу аддитивности. Можно доказать, что в случае, когда путь есть траектория  $Q(\alpha; 0, t)$  и условие  $\sum_{i,j=1}^n H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$  при  $z \neq 0$  выполнено, так определенный индекс совпадает с индексом по Морсу<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Это утверждение не будет здесь доказано. Заметим лишь, что основная идея доказательства заключается в следующем. Рассматривая изменения индекса за малое время  $t$ , мы ограничиваемся линейными членами по  $t$  решения уравнений Гамильтона. Деформацию сдвига по  $t$  мы разбиваем на две последовательные деформации:

## 2. Определение канонического оператора

Пусть на лагранжевом многообразии  $\Gamma$  задана финитная функция  $\varphi(\alpha)$ , носитель которой есть некоторый компакт  $R$ . Обозначим через  $\mathbb{H}$  канонический атлас, отвечающий конечному покрытию  $\{\Omega^i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , компакта  $R$ , а через  $e^i(\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , — разложение единицы, отвечающее покрытию  $\{\Omega^i\}$  ( $e^i(\alpha) \in C^\infty$ ,  $\sum_1^N e^i(\alpha) = 1$  при  $\alpha \in R$ ,  $e^i(\alpha) = 0$  при  $\alpha \notin \Omega^i$ ). Напомним, что локальной карте  $\tilde{\Omega}_k^i$  отвечает  $\alpha = a^i(\tilde{y}_k)$ , где  $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ . Обозначим через  $\sigma(\alpha)$  некоторую меру на многообразии  $\Gamma$ , а через  $D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k$  — производную от нее по мере  $d\tilde{p}_1 \dots \dots d\tilde{p}_k d\tilde{q}_{k+1} \dots d\tilde{q}_n$ . В частности, если на  $\Gamma$  можно ввести глобальные координаты  $\alpha$ , то можно положить, например,

$$d\sigma(\alpha) = da_1 \dots da_n \text{ и } \frac{D\sigma(\alpha)}{D\tilde{y}_k} = \frac{Da}{D\tilde{y}_k} = \det \left\| \frac{\partial a_i}{\partial (\tilde{y}_k)_j} \right\|.$$

Обозначим через  $j(x)$  совокупность номеров всех тех карт атласа  $\mathbb{H}$ , которые содержат точки плоскости  $q = x$ . Каноническим оператором  $K_{\Gamma}^{Y, \alpha^0}$  называется оператор вида

$$\begin{aligned} K_{\Gamma}^{Y, \alpha^0} \varphi(\alpha) &= e^{i\gamma} \sum_{j \in j(x)} e^{-i(\pi/2) \text{Ind} l[\alpha^0, \alpha_k^j]} \times \\ &\times \Phi^{\tilde{p}_k} e^j(a^j(\tilde{y}_k)) \cdot \left| \frac{D\sigma(\alpha)}{D\tilde{y}_k} \right|^{1/2} \varphi(a^j(\tilde{y}_k)) \times \\ &\times e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ \int_{[\alpha^0, a^j(\tilde{y}_k)]} p dq - \sum_{i=1}^k \tilde{p}_i \tilde{q}_i(a^j(\tilde{y}_k)) \right\}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

при  $q = x$ , где  $\Phi^{\tilde{p}_k}$  — преобразование Фурье по первым  $k$  переменным функции  $\psi(\tilde{y}_k)$ , финитной по этим перемен-

а) при постоянном начальном импульсе  $p$ ; б) при постоянной конечной координате  $q$ . Утверждение доказывается для первой деформации алгебраическим путем. Далее из топологических соображений доказывается, что вторая деформация не изменяет значения индекса.

ным с носителем  $\omega$ , т. е.

$$\Phi^{\tilde{p}_k} \psi(\tilde{y}_k) = \frac{e^{i\pi k/4}}{(2\pi\hbar)^{k/2}} \int_{\omega} e^{(i/\hbar) \sum_{i=1}^k \tilde{p}_i \tilde{q}_i} \psi(\tilde{y}_k) d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_k. \quad (2.7)$$

Канонический оператор определен на финитных функциях в пространстве непрерывных функций на многообразии  $\Gamma$ . Область его значений лежит в пространстве  $L_2[R^n]$ .

*Замечание.* Канонический оператор здесь определен для  $\hbar > 0$ . В случае  $\hbar < 0$  нужно брать все индексы со знаком минус.

*Теорема 3.* Для того чтобы канонический оператор  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  не зависел с точностью до  $O(\hbar)$  от выбора канонического атласа, путей  $l[\alpha^0, \alpha]$  и от способа разбиения единицы, необходимо и достаточно, чтобы для  $\hbar \in \mathcal{C}$  выполнялись соотношения

$$\frac{2}{\pi\hbar} \oint_k p dq = l_k \pmod{4} + O(\hbar), \quad k = 1, \dots, k_0, \quad (2.8)$$

где интеграл берется по  $k$ -му базисному циклу многообразия  $\Gamma$ ,  $l_k$  — индекс этого цикла,  $k_0$  — число Бетти многообразия  $\Gamma$ .

Заметим, что условия (2.8) накладывают ограничения на значения величин  $l_k = \oint_k p dq$ . При  $k_0 = 2$  для существования такого  $\mathcal{C}$ , чтобы выполнялось (2.8), достаточна несоизмеримость  $l_1$  и  $l_2$ .

Поскольку  $\oint_k p dq$  и  $l_k$  инвариантны относительно канонических преобразований, то, очевидно, указанное свойство оператора  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  также сохраняется при канонических преобразованиях.

В дальнейшем мы всегда будем полагать, что условия (2.8) на лагранжевом подмногообразии выполнены и все рассматриваемые канонические операторы инвариантны.

*Замечание.* Для получения значений выражения  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha)$  в окрестности точки  $x = \bar{x}$  удобно пользоваться следующим специ-

альным атласом  $H(\bar{x})$ . Пусть пересечение плоскости  $q = \bar{x}$  и  $\Gamma$  состоит из конечного числа точек  $\alpha^i(\bar{x})$ ,  $i = 1, \dots, i_0$ . Выберем атлас  $H(\bar{x})$  так, чтобы каждая из этих точек была центральной точкой некоторой карты  $\tilde{\Omega}_h^i(\bar{x})$ . Канонический оператор, отвечающий атласу  $H(\bar{x})$ , в окрестности точки  $x = \bar{x}$  будет состоять из суммы  $i_0$  членов. Мы будем его обозначать для удобства через  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}(\bar{x})$ .

Пусть теперь  $\varphi(\alpha, h)$ ,  $\alpha \in \Gamma$ ,  $h \in [0, 1)$ , является бесконечно дифференцируемой (при  $h = 0$ ) функцией аргументов  $\alpha$  и  $h$  со значениями в некотором счетно-нормированном пространстве.

Рассмотрим линейные непрерывные операторы  $e^i(\alpha, h)$ ,  $\alpha \in \Gamma$ ,  $h \in [0, 1)$ , в этом пространстве, зависящие от параметров  $\alpha$  и  $h$ , а также от пути  $l[\alpha^0, \alpha]$ , и бесконечно дифференцируемые по  $\alpha$  и  $h$  при  $h = 0$ , т. е. предположим, что выполняются соотношения вида (1.8). Пусть при  $h = 0$  эти операторы обращаются в финитные числовые функции  $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha)$ , которые являются элементами разложения единицы по атласу  $H$ .

Подобно тому как это было сделано в п. 5 § 1, заменим в операторе  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  функции  $e^i(\alpha)$  на  $e^i(\alpha, h)$ . Мы получим семейство операторов  $K_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$ ,  $\tilde{K}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$ ,  $\tilde{\tilde{K}}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}, \dots$ , зависящих от  $e^i(\alpha, h)$ .

**Теорема За.** Пусть лагранжу подмногообразию  $\Gamma$  сопоставлен канонический атлас  $H$  с начальной точкой  $\alpha_0$  и некоторый оператор  $K_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$ . Пусть  $\Pi$  — другой канонический атлас подмногообразия  $\Gamma$  с начальной точкой  $\tilde{\alpha}^0$ . Тогда существует единственный оператор вида  $\tilde{K}_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$ , равный  $K_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$  на функциях вида  $\varphi(\alpha, h)$ . При этом

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0] + \frac{1}{h} \int_{l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0]} p dq.$$

### § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ

Мы докажем здесь инвариантность индексов по модулю 4, поскольку для определения канонического оператора достаточно знать лишь такие индексы. В дальнейшем нам понадобится асимптотика интеграла

$$I = \left[ 2\pi h \exp \frac{i\pi}{2} \right]^{-n/2} \int \varphi(x) \exp \left[ \frac{i}{h} f(x) \right] dx,$$

где  $\varphi(x)$  — финитная бесконечно дифференцируемая функция со значениями в счетно-нормированном пространстве  $B^\infty$  и носителем  $\Omega$ , а  $f(x) \in C^\infty$ . Предположим, что уравнение  $df(x) = 0$  при  $x \in \Omega$  имеет единственное решение  $x = x^0$  (стационарную точку).

1) Пусть форма  $d^2f(x)$  невырождена при  $x = x^0$ , ее индекс инерции равен  $\gamma$ , а  $J$  — дискриминант этой формы. Тогда

$$I = |J|^{-1/2} \left[ \varphi(x^0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} h^\nu C_\nu \right] \exp \left\{ \frac{i}{h} f(x^0) - \frac{i\pi\gamma}{2} \right\},$$

где  $C_\nu$  — линейная комбинация  $\varphi(x)$  и ее производных до  $2\nu$ -го порядка в точке  $x = x^0$  с коэффициентами, зависящими от производных  $f(x)$  в точке  $x = x^0$ .

2) Пусть  $\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} |I| < \infty$  для любой финитной  $\varphi(x)$ , тогда форма  $d^2f(x^0)$  невырождена и справедливо утверждение 1).

Доказательство этого утверждения (так называемый «метод стационарной фазы»), известное для случая, когда  $\varphi(x)$  — числовая функция ([7], [10]), переносится автоматически на случай функции со значениями в  $B^\infty$ .

Если некоторая область  $\Omega \subset \Gamma$  взаимно однозначно проектируется на плоскость  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_{h_1} = \tilde{p}_{h_1+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ , то будем писать  $\Omega \subset \tilde{\Omega}_{h_1}$ , а если одновременно проектируется взаимно однозначно и на плоскость  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_{h_2} = \tilde{p}_{h_2+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ , то будем сокращенно писать  $\Omega \subset \tilde{\Omega}_{h_1} \cap \tilde{\Omega}_{h_2}$ . Если точка  $\alpha$  принадлежит элементу покрытия  $\mathbb{H}$ , отвечающему карте  $\tilde{\Omega}_h$ , то будем писать  $\alpha \in \tilde{\Omega}_h$ .

Точки  $\alpha \in \tilde{\Omega}_h$  поставлены во взаимно однозначное соответствие со своими проекциями  $\tilde{y}_h$  на плоскость  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_h = \tilde{p}_{h+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ , так что можно писать  $\tilde{y}_h = \tilde{y}_h(\alpha)$  и  $\alpha = \alpha(\tilde{y}_h)$ . Последняя функция определена лишь на проекции  $\tilde{\mathcal{U}}_h$  области, отвечающей  $\tilde{\Omega}_h$ , на указанную плоскость. Обозначим  $\tilde{J}_h = D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_h$ ,  $\tilde{\gamma}_h = \text{Ind } \tilde{B}_h$ . Пусть  $S(\alpha)$  — некоторая функция, удовлетворяю-

щая уравнению  $\partial S(\alpha)/\partial \alpha_j = p \, dq/\partial \alpha_j$ . Обозначим

$$\tilde{I}_k = \tilde{I}_k(\tilde{y}_k) = \left[ |\tilde{J}_k|^{1/2} \varphi(\alpha) \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ S(\alpha) - \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\alpha) \right] \right\} \right]_{\alpha=\alpha(\tilde{y}_k)},$$

где  $\varphi(\alpha)$  — некоторая гладкая функция с носителем  $\Omega \subset \tilde{\Omega}_k$ . Соответствующие величины, отвечающие  $\tilde{\Omega}_k$  будем покрывать двумя волнами. Обозначим через  $\Phi^{qk}$  обратное преобразование Фурье:

$$\Phi^{qk} \tilde{\psi} = \frac{e^{-i\pi k/4}}{(2\pi h)^{k/2}} \int e^{-\frac{i}{h} \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j \tilde{q}_j} \psi(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_k) d\tilde{q}_1 \dots d\tilde{q}_k. \quad (3.1)$$

В случае когда носитель функции  $\psi(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_k)$  равен  $R$ , интеграл нужно брать по  $R$ .

Доказательству трех сформулированных теорем мы предпошлим несколько лемм. Заранее условимся, что все равенства в леммах 1—4 и доказательстве теоремы 3 мы будем понимать с точностью до  $O(h)$  в указанном выше (§ 1, п. 2) смысле.

*Лемма 2.* Пусть носитель  $\Omega$  финитной функции  $\varphi(\alpha)$  принадлежит лагранжеву многообразию  $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$  и проектируется взаимно однозначно на координатную плоскость  $q$  и на плоскость  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ , а  $\tilde{\mathfrak{U}}_k$  — его проекция на плоскость  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$ . Тогда выражение  $\Phi^{qk} I_0(\tilde{q})$  равно  $\tilde{I}_{ke}^{-i(\pi, 2)\tilde{y}_k}$  при  $\tilde{y}_k \in \tilde{\mathfrak{U}}_k$  и равно нулю при  $\tilde{y}_k \notin \tilde{\mathfrak{U}}_k$ .

*Доказательство.* Для вычисления интеграла  $\Phi^{qk} I_0(\tilde{q})$  применяем метод стационарной фазы. Стационарные точки  $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i^0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , определяются из системы

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i} = \tilde{p}_i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

Положим в (3.2)

$$\tilde{p}_j = \tilde{p}_j(\bar{\alpha}), \quad \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\bar{\alpha}), \quad i = k+1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.3)$$

Поскольку

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}} = \tilde{p}(\alpha(\tilde{q})) \text{ и } \alpha(\tilde{q}(\bar{\alpha})) = \bar{\alpha} \text{ при } \bar{\alpha} \in \tilde{\Omega}_0,$$

то система (3.2) удовлетворяется при  $\tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i(\bar{\alpha}), i = 1, \dots, k$ . Положим в системе (3.3)  $\bar{\alpha} = \alpha(\tilde{y}_k)(\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n)$ . Получим, что  $\tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i[\alpha(\tilde{y}_k)], i = 1, \dots, k$ , являются решениями системы (3.2) при произвольных  $\tilde{y}_k \in \mathfrak{B}_k$ , поскольку

$$\tilde{p}_j[\alpha(\tilde{y}_k)] \equiv \tilde{p}_j, \quad j = 1, \dots, k, \quad \tilde{q}_i[\alpha(\tilde{y}_k)] \equiv \tilde{q}_i, \quad i = k+1, \dots, n.$$

Если  $\tilde{y}_k \in \mathfrak{B}_k$ , то стационарные точки  $\tilde{q}_i^0, i = 1, \dots, k$ , не принадлежат области, в которой подинтегральная функция отлична от нуля.

Единственность решения системы (3.2) в области  $\tilde{y}_k \in \mathfrak{B}_k$  следует из того факта, что

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i \partial \tilde{q}_j} \right\|_{i,j=1,\dots,k} = \det \tilde{B}_k^{-1} = \frac{D\sigma(\alpha)/D\tilde{q}}{D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k} \neq 0, \quad \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\bar{\alpha}). \quad (3.4)$$

Условия применимости метода стационарной фазы выполнены, откуда следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. Пусть носитель функции  $\Phi(\alpha)$  принадлежит пересечению  $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ , тогда в точках  $\tilde{y}_{k_2} \in \mathfrak{B}_{k_2}$ , таких, что  $\alpha(\tilde{y}_{k_2})$  является неособой, имеет место равенство<sup>1)</sup>

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = e^{i\pi/2 \cdot (\tilde{y}_{k_1} - \tilde{y}_{k_2})} \tilde{I}_{k_2}. \quad (3.5)$$

1) Здесь  $\Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} \equiv \Phi^{\tilde{q}_{k_2}} [\Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1}]_{\tilde{q}=\tilde{q}(\tilde{q})}$ .



Доказательство. В силу леммы 2 в неособых точках

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_1}} \tilde{I}_0 = e^{-i\tilde{y}_{k_1}\pi/2} I_{k_1}. \quad (3.6)$$

Отсюда 168

$$\tilde{I}_0 = e^{-i\tilde{y}_{k_1}\pi/2} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1}. \quad (3.7)$$

Поэтому в силу леммы 2

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = e^{i\pi/2 \cdot \tilde{y}_{k_1}} \Phi^{\tilde{q}_{k_2}} I_0 = e^{i\pi/2 \cdot (\tilde{y}_{k_1} - \tilde{y}_{k_2})} \tilde{I}_{k_2}, \quad (3.8)$$

что и требовалось.

Лемма 4. Пусть носитель  $\varphi(\alpha)$  принадлежит  $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ , тогда имеет место соотношение

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = e^{-i\pi m/2} \tilde{I}_{k_2},$$

где  $m$  — некоторое целое число, не зависящее от  $\tilde{y}_{k_2}$ .

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I(\tilde{y}_{k_2}) = \Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1},$$

имеющий вид

$$\begin{aligned} I(\tilde{y}_{k_2}) &= \frac{e^{i\pi/4 \cdot (k_1 - k_2)}}{(2\pi h)^{(k_1 + k_2)/2}} \cdot \int \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ S(\bar{\alpha}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j (\tilde{q}_j(\bar{\alpha}) - \tilde{q}_j) \right] \right\} \exp \left[ -\frac{i}{h} \sum_{j=1}^{k_2} \tilde{p}_j \tilde{q}_j \right] \times \\ &\quad \times \left| \frac{D\sigma(\alpha)}{Dy_{k_1}} \right|^{1/2} \cdot \varphi(\bar{\alpha}) d\tilde{p}_1 \dots d\tilde{p}_{k_1} d\tilde{q}_1 \dots d\tilde{q}_{k_2}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{q}_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \tilde{q}_j, \quad \det \|\beta_{ij}\| = 1,$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tilde{y}_{k_1}) = \bar{\alpha}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{k_1}, \sum_{j=1}^n \beta_{k_1+1, j} \tilde{q}_j, \dots, \sum_{j=1}^n \beta_{n, j} \tilde{q}_j).$$

Для вычисления интеграла (3.9) применяем метод стационарной фазы. Стационарные точки  $\tilde{q}_i^0, \tilde{p}_j^0, i = 1, \dots, k_2, j = 1, \dots, k_1$ , определяются из системы

$$\frac{\partial [S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})]}{\partial \tilde{p}_j} = -\tilde{q}_j, \quad j = 1, \dots, k_1, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial [S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})]}{\partial \tilde{q}_v} + \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \beta_{jv} - \tilde{p}_v = 0, \quad v = 1, \dots, k_2. \quad (3.11)$$

Как известно,

$$\frac{\partial [S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})]}{\partial \tilde{p}_j} = -\tilde{q}_j(\bar{\alpha}), \quad j = 1, \dots, k_1, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial [S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})]}{\partial \tilde{q}_v} = \tilde{p}_v(\bar{\alpha}), \quad v = k_1 + 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial [S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})]}{\partial \tilde{q}_v} &= \sum_{l=k_1+1}^n \frac{\partial [S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha})]}{\partial \tilde{q}_l} \beta_{lv} = \\ &= \sum_{l=k_1+1}^n \tilde{p}_l(\bar{\alpha}) \beta_{lv}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В силу (3.12), (3.14) систему (3.10), (3.11) можно переписать в виде

$$\tilde{q}_j(\bar{\alpha}) = \tilde{q}_j, \quad j = 1, \dots, k_1, \quad (3.10)'$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{p}_j(\bar{\alpha}) \beta_{jv} = \tilde{p}_v, \quad v = 1, \dots, k_2. \quad (3.11)'$$

Можно убедиться, что система (3.10), (3.11) имеет решение  $\tilde{p} = \tilde{p}_j^0 = \tilde{p}_j^0(\bar{\alpha}), \tilde{q}_i = \tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i^0(\bar{\alpha})$ , где  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tilde{y}_{k_2})$  — реше-

ние системы  $\tilde{p}_j(\alpha) = \tilde{p}_j$  ( $j = 1, \dots, k_2$ ),  $\tilde{q}_i(\alpha) = \tilde{q}_i$  ( $i = k_2 + 1, \dots, n$ ). Пусть далее  $D_{k_1 k_2}(\bar{\alpha})$  — определитель матрицы  $A(\bar{\alpha})$  вторых производных фазы интеграла (3.9). Из формулы (3.8) следует, что при  $\tilde{y}_{k_2}$ , таком, что  $\alpha(\tilde{y}_{k_2})$  — неособая точка,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi^{\tilde{q}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} < \infty.$$

Следовательно (см. утверждение 2 на стр. 201),  $D_{k_1 k_2}(\alpha(\tilde{y}_{k_2})) \neq 0$  и метод стационарной фазы применим. Отсюда и из соотношения (3.8) следует, что в неособых точках  $\bar{\alpha}$

$$|D_{k_1 k_2}(\bar{\alpha})| = \left| \frac{\tilde{I}_{k_2}(\bar{\alpha})}{\tilde{I}_{k_1}(\bar{\alpha})} \right|. \quad (3.15)$$

Отсюда по непрерывности получаем, что это равенство сохраняется и в особых точках  $\bar{\alpha} \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ . Значит,  $D_{k_1 k_2}(\bar{\alpha}) \neq 0$  при  $\bar{\alpha} \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ . С помощью метода стационарной фазы получаем

$$I(\tilde{y}_{k_2}) = e^{-i\pi m/2} \tilde{I}_{k_2},$$

где  $m = \text{Ind } A(\bar{\alpha}) - k_2$ . Из (3.15) следует, что  $D_{k_1 k_2}(\bar{\alpha})$  не обращается в нуль на пересечении карт  $\tilde{\Omega}_{k_1}$  и  $\tilde{\Omega}_{k_2}$ . Следовательно,  $\text{Ind } A(\alpha)$  не меняется при  $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ . Лемма доказана.

*Следствие.* Разность  $\tilde{\gamma}_{k_1} - \tilde{\gamma}_{k_2}$  равна  $m$  для всех неособых  $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ .

Отсюда, поскольку  $m$  не зависит от  $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ , то  $[\tilde{\gamma}_{k_2} - \tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha^1) = [\tilde{\gamma}_{k_2} - \tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha^2)$  для любых неособых точек  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ , принадлежащих пересечению  $\tilde{\Omega}_{k_1}$  и  $\tilde{\Omega}_{k_2}$ .

Следовательно,

$$\tilde{\gamma}_{k_2}(\alpha^1) - \tilde{\gamma}_{k_2}(\alpha^2) = \tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha^1) - \tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha^2) = \text{Inv}.$$

Мы доказали, что индекс пути из  $\alpha^1$  в  $\alpha^2$  является инвариантом, не зависящим от того, в какую карту попали точки  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ . Отсюда следует теорема 1 о гомотопической инвариантности индекса пути<sup>1)</sup>.

Доказательство теоремы 3. Обозначим через  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}, \mathbb{H}, \{e^j\}, \{l^j\}]$  канонический оператор вида (2.6), зависящий от покрытия  $\mathbb{H}$ , совокупности центров  $\mathcal{X}$ , разбиения единицы  $\{e^j\}$  и путей  $\{l^j\}$ . Нетрудно убедиться, что в силу гомотопической инвариантности в малом  $\int p dq$  и  $\text{Ind } l[\alpha^0, \alpha]$  выполнение условий (2.8) необходимо и достаточно для того, чтобы с точностью  $O(\hbar)$  оператор  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  однозначным образом определялся данным атласом  $\mathbb{H}$ , центрами  $\mathcal{X}$  и данным разбиением единицы. Таким образом,

$$K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}, \mathbb{H}, \{e^j\}, \{l^j\}] \sim K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}, \mathbb{H}, \{e^j\}, \{\tilde{l}^j\}],$$

и мы можем оператор (2.6) обозначить через  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}, \mathbb{H}, \{e^j\}]$ .

Прежде чем переходить к доказательству независимости канонического оператора от разбиения единицы, докажем лемму.

*Лемма 5. Пусть области  $\Omega^i = \Omega^i(\beta)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , (элементы покрытия  $\mathbb{H}(\beta)$  с совокупностью центров  $\mathcal{X}(\beta)$ ) и  $\tilde{e}^i(\alpha) = \tilde{e}^i(\alpha, \beta)$  (элементы разложения единицы) зависят от некоторого параметра  $\beta \in [0, \varepsilon]$  так, что каждая область  $\Omega^i(\beta)$  при всех  $\beta \in [0, \varepsilon]$  взаимно однозначно проектируется на одну и ту же плоскость  $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ , а  $\tilde{e}^i(\alpha, \beta)$  дважды дифференцируема по  $\beta$ . Тогда*

$$\frac{\partial}{\partial \beta} K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \{ \mathcal{X}(\beta), \mathbb{H}(\beta), \{ \tilde{e}^i(\alpha, \beta) \} \} \varphi(\alpha) = 0.$$

1) По определению,  $\text{Ind } l[\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\alpha}_{k_2}] = m$ , где  $\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\alpha}_{k_2}$  — центральные точки карт  $\tilde{\Omega}_{k_1}, \tilde{\Omega}_{k_2}$ .

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы для точки  $\beta = 0$ . Пусть  $\tilde{e}_k^j(\alpha, \beta)$  — элемент разложения единицы, отвечающий некоторой карте  $\tilde{\Omega}_k^j(\beta)$ , и пусть карта  $\tilde{\Omega}_k^j(\beta)$  пересекается только с  $l$  картами  $\tilde{\Omega}_{k_i}^i(\beta)$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Рассмотрим

$$K_{\Gamma}^{Y, \alpha^0} \varphi(\alpha) = K_{\Gamma}^{Y, \alpha^0} \sum_{j=1}^N \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \varphi(\alpha). \quad (3.16)$$

Докажем, что  $\left[ \frac{\partial}{\partial \beta} K_{\Gamma}^{Y, \alpha^0} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \varphi(\alpha) \right]_{\beta=0} = 0$ .

Имеем

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} K_{\Gamma}^{Y, \alpha^0} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \varphi(\alpha) \right]_{\beta=0} = \left\{ \Phi^{\tilde{p}_k} e^{-i\tilde{y}^j \pi / 2} I_k \frac{\partial \tilde{e}_k^j(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \right. \\ & \left. + \sum_{v=1}^l \Phi^{\tilde{p}_{k_v}} e^{-i\tilde{y}^v \pi / 2} \tilde{I}_{k_v} \frac{\partial \tilde{e}^v(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right\} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0). \quad (3.17) \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{e}^v$  и  $\tilde{I}_{k_v}$  отвечают картам  $\tilde{\Omega}_{k_v}^v(\beta)$ , а

$$\Phi^{\tilde{p}_{k_v}} f(\alpha) = \Phi^{\tilde{p}_{k_v}} f[\alpha(\tilde{y}_{k_v})].$$

В силу лемм 3 и 4

$$\begin{aligned} & \Phi^{\tilde{p}_k} \exp\left(-i \frac{\tilde{y}_k \pi}{2}\right) \tilde{I}_k \left[ \frac{\partial \tilde{e}^v(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \right] \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) = \\ & = \exp\left(-i \frac{\tilde{y}_{k_v} \pi}{2}\right) \Phi^{\tilde{p}_{k_v}} I_{k_v} \left[ \frac{\partial \tilde{e}^v(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0} \right] \tilde{e}_k^j(\alpha, 0), \\ & \quad v = 1, \dots, l. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Поскольку  $\tilde{e}_k^j(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^l \tilde{e}_k^i(\alpha, \beta) = 1$  при  $\alpha \in \tilde{\Omega}_k^j(\beta) \cap R$ , то  $\partial [\tilde{e}_k^j(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^l \tilde{e}_k^i(\alpha, \beta)] / \partial \beta = 0$  в указанных точках. Отсюда, из (3.17) и (3.18) следует утверждение леммы.

Пусть  $\tilde{N}$  и  $\bar{N}$  — атласы с одной и той же совокупностью центров  $\mathcal{X}$ , т. е. одной центральной точке  $\sigma^i$

отвечают области  $\bar{\Omega}^i \in \bar{H}$  и  $\bar{\bar{\Omega}}^i \in \bar{\bar{H}}$ . Рассмотрим атлас  $H$  с центрами  $\mathcal{X}$  и областями  $\Omega^i = \bar{\Omega}^i \cup \bar{\bar{\Omega}}^i$ . Им отвечают разложения единицы  $\{e^i(\alpha)\}$ ,  $\{\bar{e}^i(\alpha)\}$  и  $\{\bar{\bar{e}}^i(\alpha)\}$ . Рассмотрим разложение единицы  $\{e^i(\alpha, \beta)\}$ , где  $e^i(\alpha, \beta) = [e^i(\alpha) + \beta \bar{e}^i(\alpha)](1 + \beta)^{-1}$ , отвечающее покрытию  $\Omega^i(\beta)$ , где  $\Omega^i(\beta) = \Omega^i$  при  $\beta \in (0, 1]$  и  $\Omega^i(0) = \bar{\Omega}^i$ . В силу леммы 5 получаем, что канонический оператор не меняется (с точностью до  $O(h)$ ) от замены атласа  $H$  на  $\bar{H}$ . Аналогичное утверждение справедливо, очевидно, и относительно атласа  $\bar{\bar{H}}$ . Следовательно, замена атласа  $\bar{H}$  на  $\bar{\bar{H}}$  сказывается в каноническом операторе лишь на величинах порядка  $O(h)$ . Поэтому мы можем записать  $K_{\Gamma}^{Y, a_0}[\mathcal{X}, H, \{e^i\}] = K_{\Gamma}^{Y, a_0}(\mathcal{X})$ .

Пусть теперь дан атлас  $H$ . Возьмем некоторую точку  $\bar{\alpha} \in R$ ,  $\bar{\alpha} \notin \mathcal{X}$ . Изменим покрытие  $H$  (сохраняя его центры  $\mathcal{X}$ ) так, чтобы точка  $\bar{\alpha}$  принадлежала только одной карте  $\bar{\Omega}_k^{i_0}$  нового атласа  $H'$  с теми же самыми центрами  $\mathcal{X}$ . По доказанному эта процедура оставляет  $K_{\Gamma}^{Y, a_0}$  инвариантным. Окружим точку  $\bar{\alpha}$  такой областью, которая пересекается только с  $\bar{\Omega}_k^{i_0}$  и целиком проектируется на фокальную плоскость, отвечающую  $\bar{\alpha}$ . Таким образом, мы построим новую карту с центром в точке  $\bar{\alpha}$ , обозначим ее через  $\tilde{\bar{\Omega}}_k^{\omega}$ , а дополненный этой картой атлас  $H'$  и дополненное точкой  $\bar{\alpha}$  множество  $\mathcal{X}'$  соответственно обозначим  $H''$  и  $\mathcal{X}''$ . Пусть  $\{e_{(1)}^i(\alpha)\}$  — разбиение единицы по атласу  $H'$ , тогда можно построить следующее разбиение единицы  $\{e_{(2)}^i(\alpha)\}$  по атласу  $H''$ :

$$\begin{cases} e_{(2)}^i(\alpha) \equiv e_{(1)}^i(\alpha) & \text{при } i \neq i_0, \\ e_{(1)}^{i_0}(\alpha) = e_{(2)}^{i_0}(\alpha) + e_{(2)}^{\omega}(\alpha). \end{cases}$$

Рассмотрим разность выражений  $K_{\Gamma}^{Y, a_0} \varphi(\alpha)$ , соответствующих атласам  $H'$  и  $H''$  с разбиениями единицы  $e_{(1)}^i$ ,

и  $e_{(2)}^i$  соответственно. Очевидно, что

$$\begin{aligned} & K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}(\mathcal{X})\varphi(\alpha) - K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}(\mathcal{X}'')\varphi(\alpha) = \\ & = \exp\left(i\gamma - \frac{i\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^{i_0}]\right) \Phi^{\tilde{D}_k} [e_{(1)}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}^{i_0}(\alpha)] \tilde{I}_k - \\ & - \exp\left\{i\gamma - \frac{i\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha^\omega]\right\} \Phi^{\tilde{D}_{k'}} e_{(2)}^\omega(\alpha) \tilde{I}_{k'}. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Так как  $e_{(1)}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}^{i_0}(\alpha) = e_{(2)}^\omega(\alpha)$  и носитель  $e_{(2)}^\omega \in \tilde{\Omega}_k^{i_0} \cap \tilde{\Omega}_{k'}^\omega$ , то в силу лемм 3 и 4 разность (3.19) эквивалентна нулю. Следовательно, к центрам  $\mathcal{X}$  атласа  $\Pi$  можно добавить новые центральные точки и от этого оператор  $K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$  изменится на  $O(h)$ . Пусть даны канонические атласы  $\mathbf{H}'$  и  $\mathbf{H}''$  с совокупностями центров  $\mathcal{X}'$  и  $\mathcal{X}''$ . Рассмотрим атлас  $\mathbf{H}$  с совокупностью центров  $\mathcal{X} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$ . По доказанному

$$K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}'] \sim K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}] \text{ и } K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}'] \sim K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}],$$

следовательно,

$$K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}'] \sim K_{\Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{X}'],$$

что и требовалось.

Теорема 3а доказывается аналогично, при учете, что в леммах 2—4 метод стационарной фазы дает асимптотические ряды по степеням  $h$ .

Доказательство теоремы 2. Пусть  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_t$  — лагранжевы многообразия, причем  $\Gamma_0$  может быть непрерывно деформировано в  $\Gamma_t$ , так что они включаются в однопараметрическое семейство  $\Gamma_\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , где  $\Gamma_\tau$  — лагранжево многообразие при любом  $\tau$ .

Пусть, как обычно,  $\mathbf{H}_0$  — канонический атлас начального лагранжева подмногообразия  $\Gamma_0 = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ . Обозначим через  $U_{\tau_1, \tau_2}$  отображение подмногообразия  $\Gamma_{\tau_1}$  на  $\Gamma_{\tau_2}$ :  $U_{\tau_1, \tau_2} \Gamma_{\tau_1} = \Gamma_{\tau_2}$ , через  $\mathbf{H}_\tau$  — канонический атлас подмногообразия  $\Gamma_\tau$ .

Пусть  $\Omega^j$  отвечает карте  $\tilde{\Omega}_k^j \subset \mathbf{H}_0$ . По определению карты  $\tilde{\Omega}_k^j$  область  $\Omega^j$  взаимно однозначно проектируется на плоскость  $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ . Положим  $\Omega_{\tau_0}^j =$

$= U_{0, \tau_0} \Omega^j$ . Очевидно, что при  $\tau_0 < \varepsilon$  область  $\Omega_{\tau_0}^j$  также будет взаимно однозначно проектироваться на ту же плоскость. Поскольку областей  $\Omega^j$  конечное число, то найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что при  $\tau_0 < \varepsilon$  во всех областях  $\Omega_{\tau_0}^j$  можно ввести те же локальные координаты  $\tilde{y}_k$ , что и в их прообразах  $\Omega^j$ . Таким образом, в качестве атласа  $\Pi_{\tau_0}$  на  $\Gamma_{\tau_0}$  можно взять совокупность локальных карт  $(\tilde{\Omega}_{\tau_0}^i)_k = U_{0, \tau_0} \tilde{\Omega}_k^i$ , отвечающих областям  $\Omega_{\tau_0}^i$  и координатам  $\tilde{y}_k = p_1, \dots, p_k, q_{k+1}, \dots, q_n$ , так, что при  $\tau_0 \leq \varepsilon$  можно, по определению, писать  $\Pi_{\tau_0} = U_{0, \tau_0} \Pi_0$ .

В силу леммы Бореля конечный интервал  $[0, t]$  мы можем разбить (точками  $0 = \tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n = t$ ) на конечное число интервалов длины  $\Delta$ , обладающих следующим свойством: на  $\Gamma_{\tau_i}$  может быть выбран такой атлас  $\Pi_{\tau_i}^i$ , что  $\Pi_{\tau}^i = U_{\tau_i, \tau} \Pi_{\tau_i}^i$  — атлас при  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ . В свою очередь на  $\Gamma_{\tau_{i+1}}$  может быть выбран такой атлас  $\Pi_{\tau_{i+1}}^{i+1}$ , вообще говоря, отличный от атласа  $\Pi_{\tau_{i+1}}^i = U_{\tau_i, \tau_{i+1}} \Pi_{\tau_i}^i$ , что  $\Pi_{\tau}^{i+1} = U_{\tau_{i+1}, \tau} \Pi_{\tau_{i+1}}^{i+1}$  — атлас того же типа при  $\tau_{i+1} \leq \tau \leq \tau_{i+2}$ .

Рассмотрим цикл  $\gamma_{\tau_i}$  на подмногообразии  $\Gamma_{\tau_i}$ . Докажем инвариантность  $\text{Ind } \gamma_{\tau_i}$  относительно деформации  $\Gamma_{\tau_i} \rightarrow \Gamma_{\tau_{i+1}}$ , т. е. докажем, что при этой деформации  $\text{Ind } \gamma_{\tau_i} = \text{Ind } \gamma_{\tau_{i+1}}$ , где  $\gamma_{\tau_{i+1}} = U_{\tau_i, \tau_{i+1}} \gamma_{\tau_i}$ . Поскольку мы доказали инвариантность  $\text{Ind } \gamma$  при переходе от одного атласа к другому, то тем самым будет доказана инвариантность индекса любого цикла относительно деформации  $\Gamma \rightarrow \Gamma_t$ .

Вначале допустим, что цикл  $\gamma_{\tau_i}$  можно деформировать на  $\Gamma_{\tau_i}$  таким образом, чтобы он не проходил подряд через две особые карты атласа  $\Pi_{\tau_i}^i$ . Рассмотрим отрезок  $l_{\tau_i} = l_{\tau_i}[\alpha^1, \alpha^2]$  цикла  $\gamma_{\tau_i}$ , лежащий целиком в трех картах  $\Omega^1, \tilde{\Omega}_k, \Omega^2$ , где  $\tilde{\Omega}_k$  — особая,  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$  — неособые карты. Карты  $U_{\tau_i, \tau} \Omega^\sigma$  ( $\sigma = 1, 2$ ),  $U_{\tau_i, \tau} \tilde{\Omega}_k$  при  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$  мы будем обозначать снова через  $\Omega^\sigma$  ( $\sigma = 1, 2$ ),  $\tilde{\Omega}_k$  соответственно.

Рассмотрим отрезок  $U_{\tau_i, \tau_{i+1}} l_{\tau_i} = l_{\tau_{i+1}} \subset \gamma_{\tau_{i+1}}$ . Докажем, что  $\text{Ind } l_{\tau_i} = \text{Ind } l_{\tau_{i+1}}$ . Тем самым будет доказана инвариантность  $\text{Ind } \gamma_{\tau_i}$ , поскольку по построению величина



индекса может изменяться лишь при переходе через особые точки. В силу этого замечания, не уменьшая общности, мы можем предположить, что  $\alpha^1, \alpha^2 \in \tilde{\Omega}_h$ , т. е.  $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_h \cap \Omega^1$ , а  $\alpha^2 \in \tilde{\Omega}_h \cap \Omega^2$ . На каждом из пересечений  $\tilde{\Omega}_h \cap \Omega^1$ ,  $\tilde{\Omega}_h \cap \Omega^2$  якобиан  $D\tilde{y}_0/D\tilde{y}_h$ , по определению карт  $\Omega^\sigma$  и  $\tilde{\Omega}_h$ , не обращается в нуль. По построению он отличен от нуля и в точках  $U_{\tau_j, \tau} \alpha^\sigma$  ( $\sigma = 1, 2$ ),  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ . Следовательно, и равный ему детерминант матрицы  $\tilde{B}_h = \|\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{p}_j\|_{i, j \leq h}$  отличен от нуля в этих точках. Поэтому индекс инерции матрицы  $\tilde{B}_h$  не меняется при переходе от  $\alpha^\sigma \in \Gamma_{\tau_i}$  к  $U_{\tau_j, \tau} \alpha^\sigma \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ . Следовательно,  $\text{Ind } l_{\tau_i} = \text{Ind } l_{\tau_{i+1}}$ , что и требовалось.

Рассмотрим теперь общий случай. Деформируем цикл  $\gamma_{\tau_i}$  и цикл  $\gamma_{\tau_{i+1}}$  таким образом, чтобы они проходили через центральные точки всех карт, которые эти циклы пересекают. Рассмотрим отрезок цикла  $\gamma_{\tau_i}$ , проходящий из центральной точки  $\tilde{\alpha}_{h_1}$  карты  $\tilde{\Omega}_{h_1}$  в центральную точку  $\tilde{\alpha}_{h_2}$  карты  $\tilde{\Omega}_{h_2}$  на многообразии  $\Gamma_{\tau_i}$ . Рассмотрим соответствующий отрезок пути цикла  $\gamma_{\tau_{i+1}}$  из центральной точки  $\tilde{\alpha}'_{h_1} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$  карты  $\tilde{\Omega}'_{h_1} = U_{\tau_i, \tau_{i+1}} \tilde{\Omega}_{h_1}$  в центральную точку  $\tilde{\alpha}'_{h_2} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$  карты  $\tilde{\Omega}'_{h_2} = U_{\tau_i, \tau_{i+1}} \tilde{\Omega}_{h_2}$ . Докажем, что индексы этих путей совпадают. Отсюда, очевидно, будет следовать, что индекс цикла  $\gamma_{\tau_i}$  равен индексу цикла  $\gamma_{\tau_{i+1}}$ .

Напомним, что мы определили индекс пути из неособой точки  $\alpha^1$  карты  $\tilde{\Omega}_h$  в центральную точку  $\tilde{\alpha}_h$  этой же карты как индекс инерции матрицы  $\tilde{B}_h$  в точке  $\alpha^1$ .

Пусть  $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_{h_1} \cap \tilde{\Omega}_{h_2}$  и является неособой,  $\tilde{\alpha}_{h_1}$  и  $\tilde{\alpha}_{h_2}$  — центральные точки карт  $\tilde{\Omega}_{h_1}$  и  $\tilde{\Omega}_{h_2}$  соответственно. Очевидно, что  $\text{Ind } l[\tilde{\alpha}_{h_1}, \tilde{\alpha}_{h_2}] = -\text{Ind } l[\alpha^1, \tilde{\alpha}_{h_1}] + \text{Ind } l[\alpha^1, \tilde{\alpha}_{h_2}]$ . Таким образом, индекс пути из  $\tilde{\alpha}_{h_1}$  в  $\tilde{\alpha}_{h_2}$  равен разности индексов инерции матриц  $\tilde{B}_{h_1}$  и  $\tilde{B}_{h_2}$ , взятых в точке

$\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ . По доказанному в лемме 4 эта разность равна индексу инерции матрицы  $A(\alpha^1)$ .

Заметим, что мы всегда можем считать, что многообразие  $\Gamma_{\tau_i}$  и  $\Gamma_{\tau_{i+1}}$  находятся в общем положении. Однако при некоторых  $\tau \in \{\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}\}$  многообразие может и не находиться в общем положении.

Пусть  $\alpha^0 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$  и лежит на  $\gamma_{\tau_i}$ , а  $\alpha_1^0 = U_{\tau_i, \tau_{i+1}} \alpha^0$  лежит на  $\gamma_{\tau_{i+1}}$ , причем точки  $\alpha^0$  и  $\alpha_1^0$  неособые. Докажем, что индексы инерции матрицы  $A(\alpha)$  в точках  $\alpha^0$  и  $\alpha_1^0$  совпадают. Этим и в силу сказанного выше будет исчерпано доказательство инвариантности индекса цикла  $\gamma_{\tau_i}$ .

Равенство (3.15), доказанное для случая, когда многообразие особенностей  $M$  имеет размерность не более чем  $n-1$ , по непрерывности продолжается на общий случай. Поэтому  $\det A(\alpha)$  не обращается в нуль на пересечении карт  $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$ , а также вдоль пути  $U_{\tau_i, \tau_{i+1}}$  при  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_{i+1}$ . Следовательно, вдоль этого пути индекс инерции матрицы  $A(\alpha)$  не изменяется (в противном случае  $\det A(\alpha)$  обратился бы в нуль), что и требовалось. Отсюда следует и аналог теоремы 1 для пленки.

#### § 4. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

##### 1. Формулировка теоремы

Мы остановимся на наиболее общей и наиболее актуальной с точки зрения квантовой химии и физики задаче, когда в линейном уравнении с частными производными малый параметр стоит лишь при производных по некоторым выделенным переменным. Этому случаю отвечает задача, связанная с взаимодействием тяжелых и легких частиц, которая, например, имеет место в квантовой теории молекул или в теории столкновений.

Таким образом, наш дифференциальный оператор будет зависеть от двух систем переменных. Пусть малый параметр стоит при производных по  $n$  переменным (например, описывающим систему тяжелых частиц). Относительно зависимости оператора от остальных переменных (число

которых, в частности, может быть и равно нулю) и производных по ним нам понадобятся лишь настолько общие сведения, что мы можем для простоты записи написать дифференциальное уравнение от  $n$  выделенных переменных с операторными коэффициентами, зависящими от этих переменных как от параметров.

Например, уравнение

$$-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2m_2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + v(x_1, x_2) \psi = \lambda \psi,$$

где  $m_1 \gg m_2$ , мы представим в виде

$$-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + A(x_1) \psi = \lambda \psi,$$

где  $A(x_1)$  — оператор

$$-\frac{1}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + v(x_1, x_2),$$

зависящий от  $x_1$  как от параметра. Оператор  $A(x_1)$  неограничен в  $L_2$ . В случае если  $v(x_1, x_2) \in C^\infty$ , мы можем сказать, что он переводит пространство  $W_2^k[R^1]$  функций от  $x_2$  в пространство  $W_2^{k-2}[R^1]$ . Таким образом, если рассмотреть счетно-нормированное пространство <sup>1)</sup>  $W_2^\infty[R^1]$ , то очевидно, что оператор  $A(x_1)$  переводит это пространство в себя.

Функция  $\psi(x_1, x_2)$  может быть рассмотрена как функция  $x_1$  со значениями в пространстве  $W_2^\infty[R^1]$  функций от  $x_2$ .

В общем случае мы не будем конкретизировать счетно-нормированного пространства, в котором действуют операторные коэффициенты, но во всех приложениях это пространство есть пространство  $W_2^\infty[R^s]$ , где  $s$  — некоторое целое число.

Рассмотрим в качестве примера еще одну задачу:

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left[ h^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - v(x_1, x_2) \right] \psi = F(x_1, x_2, t, h),$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2, h). \quad (4.1)$$

<sup>1)</sup> То есть пространство функций от  $x_2$ , принадлежащих  $W_2^k[R^1]$  при  $k=1, 2, \dots$  (см. [3]).

Предположим, что все заданные функции — бесконечно дифференцируемые по всем аргументам, а величины

$$\max_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 \leq h \leq 1}} \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^2 \int \left| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} F(x_1, x_2, t, h) \right|^2 dx_1 dx_2, \quad (4.2)$$

$$\max_{0 \leq h \leq 1} \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^2 \int \left| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} \Psi_0(x_1, x_2, h) \right|^2 dx_1 dx_2 \quad (4.3)$$

ограничены при  $k = 1, 2, \dots$ . Это означает, что  $F(x_1, x_2, t, h)$  как функция аргументов  $x_1$  и  $x_2$  принадлежит  $W_2^\infty[R^2]$  и непрерывна по  $t$  и  $h$ . Пространство функций со счетным числом норм вида (4.2) или (4.3) мы будем обозначать соответственно  $W_2^\infty[R^2, C_2]$  и  $W_2^\infty[R^2, C_1]$ .

Можно убедиться, что решение  $\psi(x_1, x_2, t, h)$  задачи (4.1) удовлетворяет условию  $h\psi(x_1, x_2, t, h) \in W_2^\infty[R^2, C_2]$ . Иначе говоря, найдется такое  $N$ , что если  $F \in W_2^N[R^2, C_2]$  и  $\Psi_0 \in W_2^N[R^2, C_1]$ , то  $h\psi(x_1, x_2, t, h) \in W_2^{m(N)}[R^2, C_2]$ , причем  $\lim_{N \rightarrow \infty} m(N) = \infty$ . Мы здесь не выделяли переменных  $t$  и  $x_1$ , при производных по которым стоит малый параметр  $h$ . Однако мы можем рассматривать, кроме пространства  $W_2^N[R^2, C_2]$ , пространство  $W_2^N\{R^1, C_2, W_2^N[R^1]\}$  функций от  $x_1, t, h$  со значениями в пространстве  $W_2^N[R^1]$  функций от  $x_2$ . При этом  $W_2^N\{R^1, C_2, W_2^N[R^1]\}$  вкладывается в  $W_2^N[R^2, C_2]$ . Пусть  $\{B^N\}$  — некоторая последовательность банаховых пространств  $B^{N+1} \subset B^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ , определяющая счетно-нормированное пространство  $B^\infty$ . В общем случае мы будем рассматривать пространство функций от  $x_1, \dots, x_n, t, h$ , принадлежащих  $W_2^\infty[R^n, C_2]$ , со значениями в некотором абстрактном счетно-нормированном пространстве  $B^\infty$ . Это пространство функций, которое мы обозначим через  $W_2^\infty[R^n, C_2, B^\infty]$ , имеет счетное число норм вида

$$\max_{\substack{0 \leq t \leq t_0 \\ 0 \leq h \leq 1}} \left( \sum_{\substack{i \leq n \\ k \leq N}} \int \left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} F(x_1, \dots, x_n, t, h) \right\|_{B^N}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Канонический оператор  $K_{\Gamma, h}^{\gamma, \alpha_0}$ , переводящий функцию из  $W_2^\infty[\Gamma, C_2, B^\infty]$  со значениями в  $B^\infty$  в некоторую функцию  $x \in R^n$  со значениями в  $B^\infty$ , определяется обычным образом, причем  $e^i(a, h)$  — непрерывные по  $a, h$  линейные операторы на многообразии  $\Gamma$ , при  $h=0$  обращающиеся в числовые функции  $e^i(a)$  ( $e^i(a)$  — элементы разложения единицы по атласу  $H$ ).

Мы будем изучать асимптотику решения задачи Коши для уравнения

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{L} \left( x_1, x_2, \dots, x_n, -ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, h \right) \psi, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L} \left( x_1, \dots, x_n, t, -ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, h \right) \psi = \\ = \hat{L}(x, t, \hat{p}, h) \psi = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i1x/h} dp \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} L(x, t, p, h) e^{-i1\xi/h} \psi(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

1) Пусть  $B^1$  — гильбертово пространство, а оператор  $L(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n, t)$ , зависящий от  $2n+2$  параметров  $p_1, \dots, p_n \in \tilde{\Sigma} \subset R^n, x_1, \dots, x_n \in \Sigma \subset R^n, t, h$ , отображает  $B^\infty$  в себя. Пусть оператор  $L$  бесконечно дифференцируем по всем этим параметрам и все его частные производные отображают  $B^\infty$  в себя. Предположим, что  $L(x, t, p, 0)$  самосопряжен в  $B^1$  и что существует изолированное собственное значение  $H(x, t, p)$  этого оператора, зависящее от параметров  $x, t, p$ . Будем его называть *гамильтониачом* оператора  $\hat{L}$ . Рассмотрим случай, когда кратность этого собственного значения конечна и не зависит от параметров при  $p \in \tilde{\Sigma}, x \in \Sigma$ . (Случай  $L(x, t, p, 0) \equiv \equiv H(x, t, p, 0)$  может быть рассмотрен аналогичным образом.) Пусть собственные функции  $\chi^1(x, t, p), \chi^2(x, t, p), \dots, \chi^r(x, t, p)$ , отвечающие  $H(x, t, p)$  при  $p \in \tilde{\Sigma}, x \in \Sigma$ , при-

надлежат  $B^\infty$ . Обозначим через  $P_H$  проекционный оператор на собственное подпространство, отвечающее  $H(x, t, p)$ .

Предположим, что оператор

$$T = \{[L(x, t, p, 0) - H(x, t, p)] [1 - P_H]\}^{-1} [1 - P_H]$$

существует при  $p \in \tilde{\Sigma}$ ,  $x \in \Sigma$  и определен всюду в  $B^\infty$ .

2) Наконец, предположим, что решение  $\psi \in W_2^\infty [R^n, C_2, B^\infty]$  задачи

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hat{L}\psi = h^s F(x, t, h), \quad \psi|_{t=0} = h^s \psi_0(x, h),$$

где  $l$  и  $s$  — некоторые фиксированные числа, а  $F(x, t, h)$  и  $\psi_0(x, h)$  — произвольные заданные элементы из  $W_2^\infty [R^n, C_2, B^\infty]$  и  $W_2^\infty [R^n, C_1, B^\infty]$ , существует и единственно.

Заметим, что из этих условий практически в конкретных квантовомеханических задачах нужно проверять лишь условие постоянной кратности и изолированности точки  $H(x, t, p)$ . Из остальных условий нетривиальными для дифференциальных операторов являются: а) принадлежность собственных функций пространству  $B^\infty$ , б) существование решения  $\chi \in B^\infty$  уравнения

$$[L(x, t, p, 0) - H(x, t, p)] \chi = F,$$

где  $F \in B^\infty$ , в) существование и единственность решения уравнения (4.4). Эти условия проверяются для уравнений квантовой механики с помощью энергетических неравенств. Заметим, что если  $B^1$  есть  $n$ -мерное векторное пространство, а  $B^i = B^1$ ,  $i = 2, 3, \dots, N, \dots$ , то  $L(x, t, p, h)$  есть  $n \times n$ -матрица. Если, кроме того,  $L(x, t, p, h)$  линейно зависит от  $p$ , то уравнение (4.4) есть система первого порядка. В частности, если  $L(x, t, p, h) = L^0(x, t, p) + ihL^1(x, t)$ , где  $L^0(x, t, 0) = 0$ , то уравнение (4.4) есть произвольная симметрическая гиперболическая система первого порядка, не зависящая от  $h$  (параметр  $h$  сокращается). При этом от параметра  $h$  зависят лишь начальные данные (осциллирующие начальные условия). Если совершить в приведенной ниже формуле (4.8) преобразование Фурье по  $\omega = 1/h$ , то мы получим решение задачи о распространении разрыва в большом для гиперболической системы [14].

При высказанных предположениях справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** Пусть  $\Gamma_0 = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$  — лагранжево подмногообразие,  $\alpha^0$  — его начальная точка. Пусть при

$0 \leq t \leq T$  существует решение  $Q(\alpha, t) \in \Sigma$ ,  $P(\alpha, t) \in \tilde{\Sigma}$  системы<sup>1)</sup>

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}, \quad H = H(Q, t, P), \quad (4.6)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$Q|_{t=0} = q^0(\alpha), \quad P|_{t=0} = p^0(\alpha), \quad (4.7)$$

и бесконечно дифференцируемое по  $\alpha$  и  $t$ . Для каждой финитной вектор-функции

$$\varphi^0(\alpha, h) = \{\varphi^{01}(\alpha, h), \dots, \varphi^{0r}(\alpha, h)\},$$

бесконечно дифференцируемой по  $\alpha$  и ограниченной при  $0 \leq h \leq 1$  вместе со всеми производными, существует решение задачи

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{L}\psi, \quad (4.4)$$

$$\psi|_{t=0} = K_{\Gamma_t, h}^{\alpha_t^0, \alpha_0^0} \sum_{i=1}^r \varphi^{0i} \chi^i(q^0(\alpha), 0, p^0(\alpha)), \quad (4.4a)$$

являющееся функцией от  $x, t, h$  со значениями в  $B^\infty$ , представимое в виде

$$\psi = K_{\Gamma_t, h}^{\alpha_t^0, \alpha_0^0} \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu(\alpha, t, h) \chi^\nu[Q(\alpha, t), t, P(\alpha, t)], \quad (4.8)$$

где

$$\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\};$$

$\alpha_t^0$  — начальная точка на многообразии  $\Gamma_t$ ;

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha_0^0, \alpha_t^0] + \frac{1}{\hbar} \int_{l[\alpha_0^0, \alpha_t^0]} \left\{ -H dt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i \right\};$$

$a \varphi(\alpha, t, h) = \{\varphi_1(\alpha, t, h), \varphi_2(\alpha, t, h), \dots, \varphi_r(\alpha, t, h)\}$  удов-

<sup>1)</sup> Для уравнений квантовой механики решение (4.6), (4.7) существует при любом  $T$ .

летворяет уравнению<sup>1)</sup>

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left\| - \left( \chi^\nu, \frac{d\chi^\mu}{dt} \right) - \sum_{i=1}^{n+1} \left( \chi^\nu, \left( \frac{\partial L}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \frac{\partial \chi^\mu}{\partial x_i} \right)_{h=0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} \delta_{\mu\nu} - i \left( \chi^\nu, \frac{\partial L}{\partial h} \chi^\mu \right)_{h=0} \right\|_{\substack{p=P(\alpha, t) \\ x=Q(\alpha, t)}} \varphi \quad (4.9)$$

и начальному условию

$$\varphi \Big|_{t=0} = \varphi^0(\alpha, h). \quad (4.10)$$

В конкретных примерах из формулы (4.8) можно получить столь же простые выражения, как и в одномерном случае (см. § 1, п. 6). Для этого асимптотику в окрестности точки  $x = \bar{x}$  нужно выразить с помощью оператора  $K_{\Gamma}^{Y, \alpha^0}(\bar{x})$ .

Доказательство теоремы мы разобьем на 4 пункта, снабженные заголовками. Первые два пункта посвящены доказательству вспомогательных лемм, далее рассматривается локальный случай малого времени  $T$  и, наконец, в последнем пункте завершается доказательство теоремы.

## 2. Разложение оператора по степеням малого параметра.

Пусть  $\psi = \psi(y_k, t, h) = \varphi \exp [iS/h]$ , где  $S = S(y_k, t) \in C^\infty$ ,  $y_k = (p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ , а  $\varphi = \varphi(y_k, t, h)$  — бесконечно дифференцируемая ограниченная функция при  $0 \leq h \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq a$  и финитная функция аргументов  $y_k$  со значениями в счетно-нормированном пространстве  $B^\infty$ . В формулах (4.4) и (4.5) переобозначим  $(p_{k+1}, \dots, p_n)$  через  $\xi = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ , а  $(x_1, \dots, x_k)$  — через  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ ; соответственно  $\hat{p}_i = \hat{\xi}_i$  при  $i = k+1, \dots, n$ . Теперь мы можем записать

$$L(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n, h) = L(\eta, x, t, p, \xi, h).$$

Обозначим через  $F_x$  частную производную  $\partial F / \partial x$ ; например,  $L_h = \partial L / \partial h$ ,  $L_{p_i} = \partial L / \partial p_i$ . Положим  $\eta^0 = -S_p$ ,  $\xi^0 = S_x$ ,  $L^0 = L(\eta, x, t, p, \xi, 0)$ ,  $L_h^0 = \partial L / \partial h \Big|_{h=0}$ . Условимся, что

<sup>1)</sup> Скалярные произведения в (4.9) берутся в  $B^1$ , а символ  $\| \|$  означает матрицу.



повторение индексов  $\nu, \mu$  означает суммирование по всем возможным значениям  $\nu, \mu$ , например

$$\eta_\nu p_\nu = \sum_{i=1}^k \eta_i p_i, \quad x_\nu \xi_\nu = \sum_{i=k+1}^n x_i \xi_i.$$

Лемма 6. Имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \left[ -ih \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}(\eta, x, t, \hat{p}, \hat{\xi}, h) \right] \Phi^{p_h} \psi = \\ & = \Phi^{p_h} e^{iS/h} \left\{ [L^0 + S_t] \varphi + ih \left[ L_{\eta_\nu}^0 \varphi_{p_\nu} - L_{\xi_\nu}^0 \varphi_{x_\nu} - \varphi_t - \right. \right. \\ & - \left( \frac{1}{2} S_{p_\nu p_\mu} L_{\eta_\nu \eta_\mu}^0 + \frac{1}{2} S_{x_\nu x_\mu} L_{\xi_\nu \xi_\mu}^0 - S_{p_\nu x_\mu} L_{\eta_\nu \xi_\mu}^0 - L_{\eta_\nu p_\nu} \right) \varphi - \\ & \left. \left. - iL_h^0 \varphi \right] \right\}_{\substack{\eta = \eta^0 \\ \xi = \xi^0}} + \sum_{i=2}^N h^i P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta}) \varphi \} + h^{N+1} z(\eta, x, t, h), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})$  — полиномы  $2i$ -го порядка по  $\hat{\eta}, \hat{\xi}$ , а  $h^m z(\eta, x, t, h) \in W_2^m [R^n, C_2, B^\infty]$ ,  $m = 0, 1, \dots$

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} I_1(\eta, x, t, \xi, h) &= \int \exp \left[ \frac{i}{h} (\eta_\nu p'_\nu - \xi_\nu x'_\nu) \right] \times \\ & \times L(\eta, x, t, p', \xi, h) \exp \left[ \frac{i}{h} S(p', x', t) \right] \varphi(p', x', t, h) dx' dp', \\ I_2(x, t, p, h) &= (2\pi h)^{-n} \int \exp \left[ \frac{i}{h} (\xi_\nu x_\nu - \eta_\nu p_\nu) \right] \times \\ & \times I_1(\eta, x, t, \xi, h) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\hat{L} \Phi^{p_h} \psi = \Phi^{p_h} I_2. \quad (4.12)$$

Пусть  $\Omega$  — носитель функции  $\varphi(p', x', t, h)$ . Обозначим  $\Omega_{\xi^0} = S_{x'}(\Omega)$ ,  $\Omega_{\eta^0} = -S_{p'}(\Omega)$ . Возьмем финитную функцию  $\Phi(\eta, \xi)$ , носитель которой содержит область  $\Omega^0 = \Omega_{\eta^0} \times \times \Omega_{\xi^0}$ , причем  $\Phi(\eta, \xi) = 1$  при  $(\eta, \xi) \in \Omega^0$ . Обозначим

$$\begin{aligned} I_3(x, t, p, h) &= \int (1 - \Phi(\eta, \xi)) \exp \left[ \frac{i}{h} (\xi_\nu x_\nu - \eta_\nu p_\nu) \right] \times \\ & \times I_1(\eta, x, t, \xi, h) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Из определения  $\Phi(\eta, \xi)$  следует, что  $I_3(x, t, p, h)$  отличен от нуля лишь при  $(\eta, \xi) \in \Omega^0$ , т. е. при  $\xi \neq S_{x'}(p', x', t)$ ,  $\eta \neq -S_{p'}(p', x', t)$ . Если  $(\eta, \xi) \in \Omega^0$ , то фаза подинтегрального выражения интеграла  $I_1(\eta, x, t, \xi, h)$  не имеет стационарных точек. Поэтому  $I_3(x, t, p, h) = h^{Nz}(x, t, p, h)$ , где  $N$  — любое целое число, а  $h^{Nz}(x, t, p, h) \in W_2^i[R^n, C_2, B^\infty]$ . Отсюда

$$I_2(x, t, p, h) = I_4(x, t, p, h) + h^{Nz}(x, t, p, h), \quad (4.13)$$

где

$$I_4(x, t, p, h) = (2\pi h)^{-n} \int \Phi(\eta, \xi) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{h} [\xi_v(x_v - x'_v) + \eta_v(p_v - p'_v)] \right\} \varphi(p', x', t, h) \times \\ \times \exp \left[ \frac{i}{h} S(p', x', t) \right] d\xi d\eta dx' dp'.$$

Стационарными точками  $\xi^0, x'^0, p'^0, \eta^0$  являются решения системы

$$x'_j{}^0 = x_j, \quad \frac{\partial S(p'^0, x'^0, t)}{\partial x_j{}^0} = \xi_j^0, \quad j = k+1, \dots, n, \\ \frac{\partial S(p'^0, x'^0, t)}{\partial p_i{}^0} = -\eta_i^0, \quad p_i^0 = p_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Эта система, очевидно, имеет единственное решение

$$\xi^0 = S_x, \quad x'^0 = x, \quad \eta^0 = -S_p, \quad p'^0 = p,$$

а ее функциональный определитель равен единице. Применяя метод стационарной фазы для вычисления интеграла  $I_4(x, t, p, h)$  и учитывая (4.13), получаем

$$I_2(x, t, p, h) = e^{iS/h} \left[ L^0 \varphi + \sum_{i=1}^N h^i P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta}) \varphi + \right. \\ \left. + h^{N+1} \tilde{z}(x, t, p, h) \right], \quad (4.14)$$

где  $h^i \tilde{z}(x, t, p, h) \in W_2^i[R^n, C_2, B^\infty]$ , а  $P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta}) \varphi$  есть линейная комбинация производных  $L^0$  по  $\eta, \xi, p, h$  до  $2i$ -го порядка при  $\eta = \eta^0, \xi = \xi^0$  с коэффициентами<sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Эти коэффициенты сами являются линейными комбинациями производных от  $\varphi$  до  $2i$ -го порядка. Поэтому  $P_i(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})$  — полином  $2i$ -й степени относительно  $\hat{\xi}$  и  $\hat{\eta}$ .

не зависящими от вида  $L$ . Используя это свойство, определим эти коэффициенты в  $P_1 = P_1(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})\varphi$  следующим образом. Положим вначале  $L = C_0 = \text{const}$ , тогда, очевидно,

$$I_2 \equiv C_0\varphi \exp\left(\frac{i}{h}S\right).$$

Значит, в формуле (4.14) в этом случае  $P_1(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})\varphi = 0$  и, следовательно, коэффициент при  $L^0$  в  $P_1$  равен нулю. Затем положим  $L = \eta_j$ . Тогда интеграл  $I_2$  в силу известного свойства преобразования Фурье может быть представлен в виде  $I_2 = ih \partial \{\varphi \exp(iS/h)\} / \partial p_j$ , т. е.

$$I_2 = [-\varphi S_{p_j} + ih\varphi_{p_j}] \exp\left(\frac{i}{h}S\right).$$

Поскольку в данном случае  $L_{\eta_i} = \delta_{ij}$ , а остальные производные от  $L$  равны нулю, то мы получаем, что коэффициенты при  $L_{\eta_\nu}$  в  $P_1$  равны  $i\varphi_{p_\nu}$ . Аналогично, полагая  $L = \xi_j + p_\nu$ ,  $L = \eta_i \eta_j + \xi_l + \xi_m$ ,  $L = \eta_l \xi_m + p_\nu \xi_l$ , находим все коэффициенты полинома  $P_1(x, \hat{\xi}, t, p, \hat{\eta})$ . В силу (4.12) и при учете того, что  $h^m z(\eta, x, t, h) = \Phi^{pk} h^m \tilde{z}(x, t, p, h) \in \mathcal{W}_2^m[R^n, C_2, B^\infty]$ , получаем утверждение леммы.

### 3. Лемма абстрактной теории возмущений

*Лемма 7. Пусть  $A, U_i, i = 1, \dots, N$ , — линейные операторы с областями определения и областями значений, лежащими в счетно-нормированном пространстве  $B^\infty$ ;  $h$  — некоторая константа; сужение  $\tilde{A}$  оператора  $A$  имеет обратный<sup>1)</sup>. Предположим, что существуют такие решения  $\chi^0, \dots, \chi^{N_1}$  уравнения  $A\chi = 0$ , что*

$$f_k = \chi^k + \tilde{A}^{-1} \sum_{i=1}^k U_i f_{k-i} \quad (k = 1, \dots, N_1), \quad f_0 = \chi^0 \quad (4.14)'$$

<sup>1)</sup> То есть уравнение  $Ax = 0$  при  $x \in D(A)$  может иметь и нетривиальное решение, а при  $x \in D(\tilde{A})$  имеет лишь тривиальное решение.

принадлежат области определения  $D(B)$  оператора

$$B = \sum_{i=1}^N h^{i-1} U_i. \text{ Тогда}$$

$$\left[ A - \sum_{i=1}^N h^i U_i \right] \sum_{k=0}^{N_1} h^k f_k = h^{N_1+1} g,$$

где  $g$  — некоторый элемент из  $B^\infty$ .

**Доказательство.** Подействуем оператором  $A - \sum_{i=1}^N h^i U_i$  на элемент  $\psi = \sum_{k=0}^{N_1} h^k f_k$ . Поскольку  $A\tilde{A}^{-1}B = B$

и  $A\chi^j = 0$ , то  $Af_k = \sum_{i=1}^k U_i f_{k-i}$ . Следовательно,

$$A\psi = \sum_{n=1}^{N_1} h^n \sum_{i=1}^n U_i f_{n-i} = \sum_{k=0}^{N_1-1} h^{k+1} \sum_{j=0}^k U_{j+1} f_{k-j}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^N h^j U_j \psi = h \sum_{i=0}^{N-1} h^i U_{i+1} \psi = \sum_{k=0}^{N_1+N-1} h^{k+1} \sum_{i=0}^k U_{i+1} f_{k-i}.$$

(Мы полагаем  $U_i = 0$  при  $i > N$ .) Поэтому

$$\left( A - \sum_{i=1}^N h^i U_i \right) \psi = \sum_{k=N_1}^{N_1+N-1} h^{k+1} \sum_{i=0}^k U_{i+1} f_{k-i} = h^{N_1+1} g.$$

Лемма доказана.

#### 4. Асимптотика решения в малом

Пусть  $\chi^1, \dots, \chi^r$  — ортонормированная система собственных векторов оператора  $L^0 = L(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n, 0)$ , соответствующих собственному значению  $H(x, t, p)$ :

$$\begin{aligned} L^0 \chi^i &= H \chi^i \quad (i = 1, \dots, r), \\ \chi^i &= \chi^i(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n), \\ H &= H(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Дифференцируя (4.15) по  $p_\nu$  и обозначая  $\partial L^0 / \partial p_\nu = L_{p_\nu}^0$ ,

$\partial\chi^i/\partial p_\nu = \chi_{p_\nu}$ , получаем

$$L_{p_\nu}^0 \chi^i + L^0 \chi_{p_\nu}^i = H_{p_\nu} \chi^i + H \chi_{p_\nu}^i. \quad (4.16)$$

Умножая скалярно это тождество на  $\chi^j$  и учитывая (4.15), получаем

$$(\chi^j, L_{p_\nu}^0 \chi^i) = H_{p_\nu} \delta_{ij}.$$

Аналогично получаем

$$(\chi^j, L_{x_\nu}^0 \chi^i) = H_{x_\nu} \delta_{ij}. \quad (4.16')$$

Продифференцируем теперь (4.16) по  $p_\mu$ . Умножая полученное равенство скалярно на  $\chi^j$ , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &(\chi^j, L_{p_\nu p_\mu}^0 \chi^i) - H_{p_\nu p_\mu} \delta_{ij} + \\ &+ (\chi^j, [L_{p_\mu}^0 - H_{p_\mu}] \chi_{p_\nu}^i) + (\chi^j, [L_{p_\nu}^0 - H_{p_\nu}] \chi_{p_\mu}^i) = 0, \end{aligned} \quad (4.16a)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} &(\chi^j, L_{p_\nu x_\mu}^0 \chi^i) - H_{p_\nu x_\mu} \delta_{ij} + (\chi^j, [L_{x_\mu}^0 - H_{x_\mu}] \chi_{p_\nu}^i) + \\ &+ (\chi^j, [L_{p_\nu}^0 - H_{p_\nu}] \chi_{x_\mu}^i) = 0. \end{aligned} \quad (4.16б)$$

Обозначим через  $R$  оператор, стоящий в правой части равенства (4.11) в фигурных скобках, так что равенство (4.11) переписывается в виде

$$\left[ -ih \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L} \right] \Phi^{p_h} \psi = \Phi^{p_h} e^{\frac{i}{h} S(p, x, t)} R \Phi + h^{N+1} z(x, t, h). \quad (4.17)$$

Представим  $R$  в виде

$$R = A + \sum_{i=1}^N h^i U_i = A + hB,$$

где  $A$  и  $U_i$  не зависят от  $h$ . Пусть  $S(p, x, t)$  удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\eta^0, x, t, p, \xi^0) = 0,$$

т. е. является действием, причем  $P(\alpha, t)$ ,  $Q(\alpha, t)$  — характеристики этого уравнения. Тогда в силу (4.15) уравнение

$$A\chi = \left[ L^0 + \frac{\partial S}{\partial t} \right] \chi = [L^0 - H] \chi \Big|_{\substack{p=P(\alpha, t) \\ x=Q(\alpha, t)}} = 0$$

имеет решение, если  $\chi$  принадлежит подпространству собственных векторов оператора  $L^0$ . Таким образом, в этом случае  $AP_H = 0$ , где  $P_H$  — оператор проектирования на подпространство собственных векторов оператора  $L^0$ , соответствующих собственному значению  $H$ .

Из условия 1) следует, что оператор  $\tilde{A} = A(1 - P_H)$  имеет обратный в  $B^\infty$ , а оператор  $[A(1 - P_H)]^{-1}(1 - P_H)$  определен на всем  $B^\infty$  ( $\tilde{A}$  есть сужение оператора  $A$  на подпространство  $(1 - P_H)B^\infty$ , имеющее обратный).

Для того чтобы можно было применить лемму 7 и найти такое  $\varphi$ , чтобы

$$R\varphi = h^{N+1}z(y_h, t, h) \quad (h^i z(y_h, t, h) \in W_2^i[R^n, C_2, B^\infty]), \quad (4.17)'$$

достаточно потребовать существования  $N$  членов вида (4.14)'.

Пользуясь обозначениями леммы 7 и обозначая через  $\varphi^{kj}$  коэффициент разложения  $f_h$  по базису  $\{\chi^j\}$  в подпространстве собственных функций оператора  $L^0$ , можно следующим образом сформулировать условие существования первого члена вида (4.14)' в этой лемме:

$$U_1 \left( \sum_{j=1}^r \varphi^{0j} \chi^j \right) \in D(\tilde{A}^{-1}). \quad (4.18)$$

Это означает, что

$$P_H U_1 \sum_{j=1}^r \varphi^{0j} \chi^j = 0, \quad (4.19)$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^r (\chi^i U_1 \chi^j) \varphi^{0j} = 0.$$

Скалярное произведение здесь и далее берется в  $B^1$ , поэтому выражение  $(\chi^i, U_1 \chi^j)$  содержит операторы дифференцирования по  $x, p, t$ .

В силу леммы 7 для вычисления  $k$ -го члена вида (4.14)' мы должны потребовать, чтобы  $P_H \sum_{i=1}^k U_i f_{h+1-i} = 0$ . Отсюда будет следовать, что

$$\sum_{j=1}^r (\chi^i, U_1 \chi^j) \varphi^{kj} = F, \quad (4.20)$$

где  $F$  зависит лишь от  $\varphi^{lj}$  при  $l < k$ , и мы получим рекуррентную последовательность уравнений для определения  $\varphi^{kj} = \varphi^{kj}(y_k, t)$ .

Итак, задача сводится к отысканию дифференциального оператора  $L = (\chi^i, U_1 \chi^j)$  в пространстве  $C^\infty$  и доказательству существования решений  $\varphi$  уравнений

$$L\varphi = 0 \quad \text{и} \quad L\varphi = F, \quad (4.21)$$

где  $\varphi \in C^\infty$  и  $F \in C^\infty$ .

Заметим, что оператор  $U_1$  есть сумма вида

$$U_1 = i \sum_{\nu=1}^k L_{\eta_\nu}^0 \frac{\partial}{\partial p_\nu} - i \sum_{\mu=k+1}^n L_{\xi_\mu}^0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} + R_1 - i \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.22)$$

при  $\eta = \eta^0$ ,  $\xi = \xi^0$ , где  $R_1$  не содержит операторов дифференцирования, а является оператором в  $B^\infty$ , зависящим от параметров  $y_k, t$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^r (\chi^j, U_1 \chi^\alpha) \varphi^{l\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^r i \left\{ \sum_{\nu=1}^k (\chi^j, L_{\eta_\nu}^0 \chi^\alpha) \varphi_{p_\nu}^{l\alpha} - \right. \\ &\left. - \sum_{\mu=k+1}^n (\chi^j, L_{\xi_\mu}^0 \chi^\alpha) \varphi_{x_\mu}^{l\alpha} \right\} + \sum_{i=1}^r a_{ij} \varphi^{li} - i \sum_{\alpha=1}^r (\chi^i, \chi^\alpha) \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{l\alpha} \end{aligned}$$

при  $\eta = \eta^0$ ,  $\xi = \xi^0$ , где  $a_{ij}$  — известные функции параметров  $y_k, t$ . В силу тождества (4.16)' имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^r (\chi^j, U_1 \chi^\alpha) \varphi^{l\alpha} &= i \sum_{\nu=1}^k H_{x_\nu} \varphi_{p_\nu}^{lj} - i \sum_{\nu=k+1}^n H_{p_\nu} \varphi_{x_\nu}^{lj} - \\ &- i \varphi_t^{lj} + \sum_{i=1}^r a_{ij} \varphi^{li} = -i \frac{d\varphi^{lj}}{dt} + \sum_{i=1}^r a_{ij} \varphi^{li}. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что решения уравнений (4.21) в силу (4.23) при  $t \leq t_0$  существуют и бесконечно дифференцируемы при достаточно малом  $t \leq t_0$ , а значит, принадлежат  $D(U_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Условия леммы 7 выполнены;

следовательно, выражения вида <sup>1)</sup>

$$u_N = \sum_{n=0}^N (-h)^n f_n$$

удовлетворяют уравнению

$$Au_N + hBu_N = h^{N+1} z(x, t, p, h),$$

где

$$h^i z(x, t, p, h) \in W_2^i [R^n, C_2, B^\infty].$$

Отсюда следует, что, поскольку  $h^i \Phi^{pk} z(x, p, t, h) \in W_2^i [R^n, C_2, B^\infty]$ , то

$$\begin{aligned} \hat{L} \Phi^{pk} e^{iS(p, x, t)/h} u_N &= h^{N+1} \Phi^{pk} e^{iS(p, x, t)/h} z(x, p, t, h) = \\ &= h^{N+1} \tilde{z}(x, t, h), \end{aligned}$$

где  $h^m \tilde{z}(x, t, h) \in W_2^m [R^n, C_2, B^\infty]$ .

По условию 2) (см. § 4, п. 1) существует решение  $\omega \in W_2^{l(m)} [R^n, C_2, B^{l(m)}]$ , где  $l(m) \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow \infty$ , уравнения

$$h^{-l} \hat{L} \omega = h^m \tilde{z}(x, t, h).$$

Поэтому

$$\hat{L} (\Phi^{pk} e^{iS/h} u_N - h^{N+1-l-m} \omega) = 0.$$

Поскольку  $N$  сколь угодно велико, то отсюда следует, что при  $t \leq t_0$  существует решение уравнения (4.4), представимое в виде

$$\Phi^{pk} e^{iS/h} u_M + h^M z_1(x, t, h),$$

где  $h^i z_1(x, t, h) \in W_2^i [R^n, C_2, B^\infty]$ , а  $M$  сколь угодно велико. Нам, однако, еще нужно получить решение уравнения в «явном виде», т. е. выписать матрицу  $(a_{ij})$ . Для этого мы воспользуемся тождествами (4.1б), (4.16а), (4.16б).

<sup>1)</sup> Напомним, что  $f_k$  выражается через  $k$  произвольных решений уравнения  $A\chi = 0$  (см. § 4, п. 3).



Заметим прежде всего, что

$$\sum_{\mu=1}^r (\chi^j, U_1 \chi^\mu) = -i \frac{d}{dt} + i \sum_{\mu=1}^r \left\{ \sum_{\nu=1}^k \left( \chi^j, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\delta \chi^\mu}{\delta p_\nu} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{i=k+1}^n \left( \chi^j, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_i^0} \frac{\delta \chi^\mu}{\delta x_i} \right) - \left( \chi^i, \frac{\delta \chi^\mu}{\delta t} \right) \right\} + (\chi^j, R_1 \chi^\mu), \quad (4.24)$$

где  $\delta/\delta p_\nu$ ,  $\delta/\delta x_i$  и  $\delta/\delta t$  означают полные частные производные по независимым переменным  $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t$ ; например,

$$\frac{\delta \chi^\mu}{\delta p_\nu} = \frac{\partial \chi^\mu}{\partial p_\nu} - \sum_{j=1}^k \frac{\partial \chi^\mu}{\partial \eta_j^0} \frac{\partial^2 S}{\partial p_j \partial p_\nu} + \sum_{j=k+1}^n \frac{\partial \chi^\mu}{\partial \xi_j^0} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial p_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Положим  $\varphi^{0j} = u_{0j}/\sqrt{J}$ , где  $J = Dy_k/Da$  отличен от нуля при  $t \leq t_0$ . В силу леммы Соболева (см. [11])

$$\frac{d}{dt} \ln J = - \sum_{i=1}^k H_{\eta_i^0 p_i} + \sum_{i,j=1}^k H_{\eta_i^0 \eta_j^0} S_{p_i p_j} + \sum_{i,j=k+1}^n H_{\xi_j^0 \xi_i^0} S_{x_i x_j} - \\ - 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n H_{\eta_i^0 \xi_j^0} S_{p_i x_j} + \sum_{j=k+1}^n H_{x_j \xi_j^0}.$$

Подставляя

$$\frac{d\varphi^{0j}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{J}} \left( \frac{du_{0j}}{dt} - \frac{1}{2} u_{0j} \frac{d}{dt} \ln J \right)$$

в выражение для оператора  $U_1$  (см. 4.24) и учитывая тождества (4.16а), (4.16б), получаем следующее уравнение для вектора  $\mathbf{u} = (u_{01}, \dots, u_{0r})$ :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + G\mathbf{u} = 0,$$

где  $G$  — матрица вида

$$G = \left\| \left( \chi^\nu, \frac{d\chi^\mu}{dt} \right) + \sum_{i=1}^n \left( \chi^\nu, \left( \frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \frac{\delta \chi^\mu}{\delta x_i} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} \delta_{\mu\nu} + i \left( \chi^\nu, \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0} \chi^\mu \right) \right\|. \quad (4.25)$$

Оператор  $\sqrt{J}(\chi^\nu, U_1 \chi^\mu)(1/\sqrt{J})$  имеет вид  $d/dt + G$ .

Окончательно получаем, что при высказанных предположениях существует решение уравнения  $ih(\partial\psi/\partial t) = \hat{L}\psi$ , представимое в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \Phi^{p_h} e^{iS(p, x, t)/h} \left\{ \frac{1}{V|J|} \sum_{v=1}^r \varphi^{0v}(p, x, t) \times \right. \\ & \left. \times \chi^v(x, \eta^0, t, p, \xi^0) + \sum_{h=1}^N h^k f_h(x, p, t) \right\} + h^{N+1} z(x, t, h), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где  $f_h(x, p, t)$  — некоторые бесконечно дифференцируемые функции, финитные по  $p$  и  $x$ , со значениями в  $B^\infty$ , а  $h^k z(x, t, h) \in W_2^k[R^n, C_2, B^\infty]$ , причем  $\varphi^0(\tilde{y}_h, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi^0}{dt} + G\varphi^0 = 0 \quad (\varphi^0 = \varphi^{01}, \dots, \varphi^{0r}).$$

Мы получили асимптотику в малом решения уравнения (4.4). Перейдем к выводу асимптотической формулы (4.8).

## 5. Асимптотика решения в большом

Прежде всего покажем, что теорема 4 непосредственно следует из утверждений, доказанных в предыдущем пункте, при условии, что время  $t$  достаточно мало (т. е. теорема 4 справедлива в малом). Для этого получим из формулы (4.26) формулу (4.8). Предположим, что носитель вектор-функции  $\varphi^0(\alpha, h)$  [см. (4.10)] принадлежит области  $\Omega^t$ . В силу (4.9) носитель вектор-функции  $\varphi(\alpha, t, h)$  будет принадлежать  $\Omega_t^i$ . Поэтому выражение (4.8) в этом случае в силу определения канонического оператора может быть записано в форме (4.26) при учете равенства

$$\begin{aligned} S(p, x, t) = & \int_{[\alpha^0, \alpha_t^0]} \{-H dt + p dq\} + \int_{[\alpha_t^0, \alpha_t(\tilde{y}_h)]} \tilde{p} d\tilde{q} - \\ & - \sum_{i=1}^k \tilde{p}_i \tilde{q}_i [\alpha_t(\tilde{y}_h)]. \end{aligned}$$

Но формула (4.26) получена в предположении, что

$$D[\tilde{P}_1(\alpha, t), \dots, \tilde{P}_h(\alpha, t), \tilde{Q}_{h+1}(\alpha, t), \dots, \tilde{Q}_n(\alpha, t)]/D\alpha$$

не обращается в нуль, т. е. при  $t \leq \varepsilon$ . Поскольку канонический оператор может быть разложен на конечную сумму выражений вида (4.26), то мы получаем утверждение теоремы 4 при  $t \leq \varepsilon$ . Все эти рассуждения, разумеется, могут быть отнесены к произвольному начальному моменту  $t_0$ . Решение  $Q(\alpha, t)$ ,  $P(\alpha, t)$  задачи (4.6), (4.7) задает отображение  $U_{0,t}$  подмногообразия  $\Gamma_0$  на подмногообразии  $\Gamma_t$ .

Применим к отображению  $U_{0,T}$  построение, приведенное в начале доказательства теоремы 2 (см. § 3), и разобьем отрезок  $[0, T]$  на интервалы  $t=0, t_1, t_2, \dots, T$ . Мы сохраним введенные там обозначения:  $H_t^0 = U_{0,t}H^0$  при  $t \leq t_1$ ;  $H_t^i = U_{t_i, t}H_{t_i}^i$  при  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Пусть при  $t=0$  решение уравнения (4.4) удовлетворяет (4.4a). По доказанному, при  $t \leq t_1$  это решение можно представить в виде (4.8), где  $\alpha_t^0 = \alpha^0$ ,  $\text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_t^0] = 0$ ,  $\tilde{H}[\Gamma_t] = H_t^0$ :

$$\psi(x, t) = K_{\Gamma_t, h}^{\gamma, \alpha^0} [H_t^0] \sum_{v=1}^r \varphi_v \chi^v.$$

Заметим, что из условий теоремы 4 следует, что решение уравнения (4.4), удовлетворяющее начальному условию, эквивалентно нулю, эквивалентно нулю.

Для решения уравнения (4.4) вновь поставим начальное условие вида

$$\psi(x, t_1) = K_{\Gamma_{t_1}, h}^{\gamma, \alpha^0} [H_{t_1}^0] \sum_{v=1}^r \varphi_v \chi^v \quad (4.27)$$

при  $t = t_1$ . В силу единственности решения [см. условие 2) § 4 п. 1] получим при  $t \geq t_1$  решение  $\psi(x, t)$  задачи (4.4), (4.4a).

Перейдя в условии (4.27) к атласу  $H_{t_1}^1$ , мы получим с точностью до функции, эквивалентной нулю, что

$$\psi(x, t_1) = K_{\Gamma_{t_1}, h}^{\tilde{\gamma}, \alpha_1^0} [H_{t_1}^1] \sum_{v=1}^r \varphi_v \chi^v,$$

где  $\alpha_1^0$  — начальная точка  $H_{t_1}^1$ , а  $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2} \text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_1^0] + \frac{1}{h} \int_{l[\alpha^0, \alpha_1^0]} pdq$ . Как было замечено, решение уравнения

при  $t > t_1$  от этого не изменится с точностью до функции, эквивалентной нулю. Поэтому получим при  $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\psi(x, t) = K_{\Gamma, h}^{\tilde{\gamma}, \alpha_0^0} [H_t] \sum_{\nu=1}^r \varphi_{\nu} \chi^{\nu}.$$

Продолжая этот процесс по индукции, придем к утверждению теоремы 4.

## § 5. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим пространство  $B^{\infty}$ , где  $B^1$  — гильбертово. Рассмотрим оператор

$$\hat{L} = L \left( x_1, \dots, x_n, -ih \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -ih \frac{\partial}{\partial x_n}, h \right),$$

определенный по формуле (4.5). Дополнительно полагаем, что этот оператор не зависит от  $t$ , самосопряжен в гильбертовом пространстве  $L_2[B^1] = W_2^0[R^n, B^1]$  функций от  $x_1, \dots, x_n$  со значениями в  $B^1$  и что условия 1), наложенные на этот оператор в § 4, выполнены. Пусть, кроме того, спектр оператора  $\hat{L}$  не является предельным при  $\lambda = E^0$ . Предположим, что существует такое семейство компактных замкнутых лагранжевых многообразий  $\Gamma(E)$  без края при  $E \in \mathcal{E} = (E^0 - \varepsilon, E^0 + \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ), что 1)  $\Gamma(E)$  непрерывно зависит от  $E$ ; 2)  $H(p(\alpha), q(\alpha)) = E$  при  $\alpha \in \Gamma(E)$  ( $H(p, q)$  — гамильтониан оператора  $\hat{L}$ ); 3)  $U_{0, i} \Gamma(E) = \Gamma_t(E) = \Gamma(E)$ .

В качестве меры  $\sigma(\alpha)$  на многообразии  $\Gamma(E)$  возьмем меру, инвариантную относительно сдвигов вдоль траекторий гамильтоновой системы. В пространстве функций на  $\Gamma(E)$  с интегрируемым квадратом по этой мере оператор

$$\begin{aligned} R = & i \frac{d}{dt} + i \left\| \left( \chi^{\nu}, \frac{d\chi^{\mu}}{dt} \right) + \right. \\ & + \left( \chi^{\nu}, \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \chi^{\mu}}{\partial p_i} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i} \delta_{\mu\nu} + \\ & \left. + i \left( \chi^{\nu}, \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0} \chi^{\mu} \right) \right\|_{\substack{p=P(\alpha, t) \\ x=Q(\alpha, t)}} \end{aligned}$$

самосопряжен<sup>1)</sup>. Пусть  $\mu(E)$  — его собственное значение, а  $\xi(\alpha)$  — соответствующая ему собственная функция.

**Теорема 5.** Пусть  $\{E^i\} \subset \mathcal{E}$ ,  $i = 1, \dots, i_0$ , — зависящее от  $h$  множество из  $\mathcal{E}$ , такое, что на  $\Gamma(E^i)$  выполняется система соотношений

$$\frac{2}{\pi h} \oint_k p(\alpha) dq(\alpha) = l_k \pmod{4} + O(h), \quad 1 \leq k \leq k_0, \quad (5.0)$$

где  $\oint_k$  обозначает интеграл по  $k$ -му базисному циклу многообразия  $\Gamma(E^i)$ ,  $l_k$  — индекс этого цикла,  $k_0$  — одномерное число Бетти многообразия  $\Gamma(E^i)$ . Тогда существует такой зависящий от  $h$  набор собственных значений  $\lambda^i$  оператора  $\hat{L}$ , что

$$\lambda^i = E^i - h\mu(E^i) + O(h^2).$$

**Доказательство.** Сохраняя обозначения, введенные в доказательстве теоремы 4 (§ 4, п. 5), рассмотрим

$$K_{\Gamma_t(E^i)}^{\tilde{\gamma}_t, \alpha_t^0} [H_t^0] \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu(\alpha, t) \chi^\nu(\alpha) \text{ при } t \leq t_1, \text{ где}$$

$$\alpha_t^0 = U_{0,t}^{-1} \alpha^0, \quad \tilde{\gamma}_t = \int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} p dq - H dt, \quad \varphi_\nu(\alpha, t) = \xi_\nu(\alpha) e^{i\mu t}, \quad \mu = \mu(E^i).$$

В силу (4.17), (4.17)' при  $N=1$ ,  $i=0$  (см. также замечание в начале п. 5 § 4), поскольку  $\text{Ind } l[\alpha^0, \alpha_t^0] = 0$  по построению, имеем

$$\left( -ih \frac{\partial}{\partial t} + \hat{L} \right) K_{\Gamma_t(E^j)}^{\tilde{\gamma}_t, \alpha_t^0} (H_t^0) \sum_{\nu=1}^r \varphi_\nu(\alpha, t) \chi^\nu(\alpha) = h^2 z(x, t, h),$$

где  $z(x, t, h)$  принадлежит  $L_2(B^1, C_2)$  — пространству непрерывных по  $t$  и  $h$  и квадратично интегрируемых функций  $x \in R^u$  со значениями в  $B^1$ . В дальнейшем функции из  $L_2[B^1, C_2]$  мы будем обозначать буквами  $z_1, z_2, z_3, \dots$ .

Очевидно, что

$$K_{\Gamma_t(E^j)}^{\tilde{\gamma}_t, \alpha_t^0} (H_t^0) = e^{-iE^j t/h} K_{\Gamma(E^j)}^0, \alpha^0 (H_t^0),$$

<sup>1)</sup> Напомним, что скалярные произведения здесь берутся в  $B^1$ .

поскольку  $\Gamma_t(E^j) = \Gamma(E^j)$ ,  $H = E^j$ , точка  $\alpha_t^0$  на подмногообразии  $\Gamma_t(E^j)$  совпадает с точкой  $\alpha^0$  на подмногообразии  $\Gamma$  в объемлющем евклидовом пространстве, и, следовательно,  $\tilde{\gamma}_t = -\frac{1}{h} \int_{\Gamma[\alpha^0, \alpha_t^0]} H dt = -\frac{1}{h} E^j t$ . Поскольку условия теоремы 3 в силу (5.0) выполнены, мы можем применить лемму 5 и на основании ее получить

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{\Gamma(E^j)}^{0, \alpha^0} (H_t^0) \varphi(\alpha) = h z_1(x, t, h).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & -ih \frac{\partial}{\partial t} K_{\Gamma_t(E^i)}^{v, \alpha_t^0} (H_t^0) \sum_{v=1}^r \varphi_v(\alpha, t) \chi^v(\alpha) = \\ & = -ih \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{-iE^i t/h} K_{\Gamma(E^i)}^{0, \alpha^0} (H_t^0) \sum_{v=1}^r \xi_v(\alpha) \chi^v(\alpha) e^{i\mu t} \right\} = \\ & -(-E^i + h\mu) e^{i(\mu - \frac{E^i}{h})t} K_{\Gamma(E^i)}^{0, \alpha^0} (H_t^0) \sum_{v=1}^r \xi_v(\alpha) \chi^v(\alpha) = h^2 z_2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$[\hat{L} - E^i + h\mu] K_{\Gamma(E^i)}^{0, \alpha^0} (H_t^0) \sum_{v=1}^r \xi_v(\alpha) \chi^v(\alpha) = h^2 z_3, \quad (5.1)$$

причем либо  $E^i - h\mu(E^i)$  является точкой спектра оператора  $\hat{L}$ , либо

$$\begin{aligned} & \| K_{\Gamma(E^i)}^{0, \alpha^0} (H_t^0) \sum_{v=1}^r \xi_v(\alpha) \chi^v(\alpha) \|_{L_2} = \\ & = h^2 \| [\hat{L} - E^i + h\mu]^{-1} z_3 \|_{L_2} \leq h^2 \| [\hat{L} - E^i + h\mu]^{-1} \|_{L_2} \| z_3 \|, \end{aligned}$$

где  $\| \cdot \|_{L_2}$  — норма в  $L_2[B^1]$ . Поскольку  $\| (\hat{L} - E^i + h\mu)^{-1} \|_{L_2} \leq 1/d$ , где  $d$  — расстояние от точки  $E^i - h\mu$  до спектра оператора  $\hat{L}$ , то отсюда получаем, что  $d \leq O(h^2)$ , что и требовалось.

Заметим, что соотношение (5.1) приводит также с помощью простой леммы теории возмущений к асимптотике

спектральной функции  $E_{\Delta\lambda}$  интервала  $\Delta\lambda \sim o(h)$  оператора  $\hat{L}$ , а именно:

$$\| [1 - E_{\Delta\lambda}] K_{\Gamma(E^i)}^{\gamma, \alpha^0} \sum_{\nu=1}^r \xi_{\nu}(\alpha) \chi^{\nu}(\alpha) \|_{L_2[B^1]} = O(h), \quad (5.2)$$

где  $\Delta\lambda = \{E^i - o(h), E^i + o(h)\}$ .

Изложенный метод позволяет найти приближения собственных значений с точностью до  $o(h^N)$ , где  $N$  — любое целое число, и сузить в соотношении (5.2) интервал  $\Delta\lambda$  до величины  $o(h^N)$ . Таким образом, если точка  $\lambda^i$  простая и интервал  $\lambda^i \pm o(h^N)$  не содержит других точек спектра, то получается асимптотика собственной функции  $\psi^i$  оператора  $\hat{L}$ , отвечающей точке  $\lambda^i$ .

Заметим далее, что в случае, когда  $r=1$ , а  $\chi(x, p)$  действительна, матрица  $G=0$ , и задача сводится к отысканию собственных функций и собственных значений оператора сдвига вдоль гамильтоновой системы (или оператора  $id/dt$ ) на многообразии  $\Gamma$ . Эта задача широко изучена. Кроме того, мы можем взять в этом случае  $\mu=0$ ,  $\xi(\alpha)=1$ .

В качестве примера рассмотрим оператор Гамильтона вида

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2M} \Delta_2 + \frac{e^2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + \hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|), \quad (5.3)$$

где  $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $\Delta_i = (\partial/\partial x_i)^2 + (\partial/\partial y_i)^2 + (\partial/\partial z_i)^2$  ( $i=1, 2$ ),  $e$  — заряд, а  $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  — оператор Гамильтона общего вида для системы  $N$  электронов в поле двух неподвижных протонов (см., например, [5]). Оператор Гамильтона  $\hat{H}$  отвечает двухатомной молекуле.

Пусть  $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  — некоторое собственное значение оператора  $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  (так называемый электронный терм). Мы предположим, что функция

$$u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) = \frac{e^2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$$

имеет минимум (терм  $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  устойчивый). Для простоты будем полагать, как это обычно имеет место, что этот минимум единствен (это условие не существенно).

Будем искать асимптотику собственных значений оператора  $\hat{H}$ , расположенных вблизи точки  $\lambda^0$ , лежащей между минимумом и абсолютным максимумом функции  $u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ . В этом промежутке спектр  $\hat{H}$  дискретен (см. [13]).

Мы предположим, что кратность собственного значения  $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  остается постоянной в области  $\Omega \ni |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|$ , для которой  $u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) \leq \lambda^0$ , т. е. что в этой области терм  $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  не пересекается ни с каким другим. Пусть эта кратность равна 1. Нетрудно доказать, что при этих ограничениях оператор  $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$  удовлетворяет условиям 1) (см. § 4, п. 1), если в качестве  $V$  взять  $W_2^\infty[R^{3N}]$ , а оператор  $\hat{H}$  — условиям теоремы 5.

Обозначим через  $a$  линейные размеры молекулы.

Перейдем в (5.3) к безразмерным переменным. Положим  $\bar{q}_1 = \bar{r}_1/a$ ,  $\bar{q}_2 = \bar{r}_2/a$  и разделим (5.3) на  $V_0 = \min_{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| \in \Omega} E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ . Получим оператор

$$\hat{H} = -\frac{v^2}{2} \Delta_1 - \frac{v^2}{2} \Delta_2 + \frac{\alpha_1}{|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|} + \hat{H}_N(|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|, \alpha_1, \alpha_2),$$

где

$$v = \frac{h}{a\sqrt{MV_0}}, \quad \alpha_1 = \frac{e^2}{aV_0}, \quad \alpha_2 = \frac{h}{a\sqrt{mV_0}}$$

( $m$  — масса электрона). Здесь  $\sum_{i=1}^3 \partial^2 / \partial q_{\sigma i}^2$  ( $\sigma = 1, 2$ ) снова обозначена через  $\Delta$ . Поскольку для реальных молекул  $v \sim 10^{-1} \div 10^{-3}$ , а  $\alpha_1 \sim 1$  и  $\alpha_2 \sim 1$ , то можно рассматривать  $v$  как малый параметр и искать асимптотику уравнения  $\hat{H}\psi_n = \lambda_n\psi_n$  при  $v \rightarrow 0$ . Гамильтониан оператора  $\hat{H}$  имеет вид

$$\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\alpha_1}{|\bar{q}_2 - \bar{q}_1|} + \frac{E(a|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|)}{V_0}.$$

Ему отвечает следующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\left\{ \frac{1}{2} (\nabla_1 S)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_2 S)^2 \right\} + \frac{\alpha_1}{|\bar{q}_1 - \bar{q}_2|} + \frac{E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)}{V_0} = \lambda^0. \quad (5.4)$$

Введем новые переменные

$$\bar{r} = \bar{q}_1 - \bar{q}_2, \quad \bar{R} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2.$$



Обозначая через  $\nabla_{\bar{R}}$  и  $\nabla_{\bar{r}}$  операторы  $\nabla$  по переменным  $\bar{R}$  и  $\bar{r}$  соответственно, получаем

$$\frac{1}{2} \{(\nabla_{\bar{R}} S)^2 + (\nabla_{\bar{r}} S)^2\} + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{E(r)}{V_0} = \lambda^0.$$

Полагая  $S = S(\bar{r})$ , получаем

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{2\alpha_1}{r} + \frac{2E(r)}{V_0} = 2\lambda^0.$$

Нетрудно убедиться, что условия (5.0) в данном случае будут иметь вид

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = 2\pi m v,$$

$$2\pi p_\theta = \pi(2l + 1)v,$$

$$\oint p_r dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2 \left( \lambda_n^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(r)}{V_0} \right) - \frac{p_\theta^2}{r^2}} dr = \pi(2n + 1)v,$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — нули подкоренного выражения.

Таким образом,  $\lambda_k = \lambda_k^0 + O(v^2)$ , где  $\lambda_k^0$  удовлетворяет уравнению

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\lambda_k^0 - \frac{2\alpha_1}{r} - \frac{2E(r)}{V_0} - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 v^2}{r^2}} dr = \pi \left(k + \frac{1}{2}\right) v.$$

Заметим, что известный метод Борна — Опенгеймера (адиабатический метод) может быть применен к решению поставленной задачи лишь при дополнительном условии:  $k \sim 1$  (см. [5]).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, *Труды МИАН*, 45 (1955), 1—140.
2. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А., Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, ОНТИ, М., 1933.
3. Гельфанд И. М. и Шолов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958.

4. де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.
5. Шифф Л., Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.
6. Фейнман Р., Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике; сб. «Вопросы причинности в квантовой механике», ИЛ, М., 1955, стр. 167—207.
7. Федорюк М. В., Метод стационарной фазы для многомерных интегралов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2, № 1 (1962), 145—150.
8. Голдстейн Г., Классическая механика, ГИТТЛ, 1957.
9. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, ГИТТЛ, 1953.
10. Федорюк М. В., Метод стационарной фазы. Близкие седловые точки в многомерном случае, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 4, № 4 (1964), 671—682.
11. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, М., ГИТТЛ, 1951.
12. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
13. Виленкин Н. Я. и др., Функциональный анализ, изд-во «Наука», М., 1964.
14. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, изд-во МГУ, 1965.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
Глава I. Исторический обзор проблемы . . . . .	9
Глава II. ВКБ-решения . . . . .	30
Глава III. Явление Стокса . . . . .	52
Глава IV. Одна точка поворота . . . . .	73
Глава V. Две точки поворота . . . . .	99
Глава VI. Приложения к задачам физики . . . . .	123
Приложение. Связь между рядами и ВКБ-решениями . . .	149
Литература . . . . .	164
Дополнение I. Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений $n$ -го порядка. <i>М. В. Федорюк</i> . . . . .	168
Дополнение II. Метод ВКБ в многомерном случае. <i>В. П. Маслов</i>	177

---

Д ж. Х е д н н г  
ВВЕДЕНИЕ В МЕТОД ФАЗОВОГО ИНТЕГРАЛА

### ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
35	4 св.	уравнение (2.12)	уравнение (2.10)
154	1 сн.	$\omega_2 \sim z\nu_2 \sim$	$\omega_2 = z\nu_2 \sim$
187	13 св.	$[\alpha, \beta] (\alpha > 0)$	$[a, b] (a > 0)$
213	2 св.	$A(\alpha^1)$ .	$A(\alpha^1)$ минус $k_2$ .
216	14 сн.	$L(x_1, \dots, x_n, t,$ $p_1, \dots, p_n, t)$	$L(x_1, \dots, x_n, t,$ $p_1, \dots, p_n, h)$
225	8 сн.	$\sum_{j=1}^r (\chi^i U_1 \chi^j) \varphi^{0j} = 0.$	$\sum_{j=1} (\chi^i, U_1 \chi^j) \varphi^{0j} = 0.$
231	2 сн.	$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \chi^i}{\partial p_i}$	$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \right] \times$ $\times \frac{\partial \chi^i}{\partial t}$