БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

В. К. ХЕЙМАН

МНОГОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ

Перевод с английского
В. П. ХАВИНА

Под редакцией
И. Е. БАЗИЛЕВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1960

5 р. 90 к.
С 1/I 1961 г. цена 59 к.

АННОТАЦИЯ

Эта книжка посвящена одному из важных разделов теории функций комплексного переменного — теории многолистных функций.

Часть материала книги можно найти и в других монографиях по теории функций. Однако настоящая книга интересна тем, что теория многолистных функций излагается в ней систематически и притом очень подробно и ясно: для понимания книги достаточно знакомства с элементарным курсом теории функций комплексного переменного.

Поэтому книга будет особенно интересна для тех, кто впервые знакомится с теорией многолистных функций, хотя и специалисты найдут в ней ряд новых фактов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предположим, что нам дана функция $f(z)$, регулярная в единичном круге, и что уравнение $f(z)=w$ имеет там при произвольном w

(а) не более, чем одно решение,

(б) не более, чем p решений

или

(в) самое большее p решений в смысле некоторого среднего.

Тогда $f(z)$ соответственно однолистна, p-листна или p-листна в среднем в круге $|z|<1$.

Цель этой книги состоит в том, чтобы выяснить, какие заключения можно сделать о росте таких функций $f(z)$, и, в частности, получить оценки для модуля и коэффициентов $f(z)$ и связанных с ними величин. Таким образом, наша задача носит чисто количественный характер.

Классическим объектом изучения этой теории являются однолистные функции, и мы рассмотрим их в главах 1 и 6. Методы этих глав, вообще говоря, нельзя перенести на p-листные или p-листные в среднем функции. Эти два класса изучаются в главах 2, 3 и 5. В главе 4 излагается теория симметризации, которая используется далее в главе 5, но представляет и самостоятельный интерес и может быть с пользой прочитана сама по себе. Читатель, интересующийся главным образом однолистными функциями, может прочесть главу 6 сразу после главы 1. В остальном каждая глава связана с предшествующими.

Бо́льшая часть собранного здесь материала, насколько мне известно, не публиковалась до сих пор в книгах, и кое-что из него совсем новое. Однако содержание глав 1 и 6 в значительной мере заимствовано из книги Г. М. Голузина [2]. Монтель [1] также должен быть упомянут, хотя

его подход довольно сильно отличается от моего. В книге такого объема, как эта, невозможно писать с исчерпывающей полнотой. Так, я не смог найти места ни для вариационного метода Шиффера, ни для теории модулей Дженкинса, хотя эти авторы недавно добились больших успехов в изучении вопросов, затронутых в этой книге, но я старался по возможности указывать на их результаты. Вариационный метод развит в работе Шеффера и Спенсера [2], а Дженкинс в скором времени опубликует изложение своей теории в серии Ergebnisse der Mathematik [1]).

Эта книга требует предварительного знакомства с некоторыми фактами из теории функций. Бо́льшая часть этих фактов содержится в университетском курсе, который читается, например, в Кембридже. В тех случаях, когда требуется что-нибудь сверх этого, я старался давать ссылки на Альфорса [1] или Титчмарша [1] [2]). В остальном я стремился дать подробные доказательства всех теорем. В некоторых местах встречаются довольно трудные ключевые теоремы, из которых просто следует ряд приложений. Читатель может опустить доказательство такой теоремы при первом чтении, пока не убедится в значении ее на приложениях.

В заключение мне хотелось бы поблагодарить всех лиц, которые помогали мне в работе над этой книгой, и в особенности профессора Кеннеди, доктора Смисиса, доктора Кёвари, доктора Клуни и г-на Экстелла за большую и терпеливую критику, высказанную при чтении корректур и ранее, а также г-на Бэрри, который любезно составил для меня указатель. Я признателен также издателям, позволившим мне опубликовать эту книгу в Cambridge Tracts series, и издательству Кембриджского университета за их терпение и содействие на всех этапах подготовки этой книги.

В. К. Х.

Лондон, январь 1958

---

[1]) В настоящее время эта книга Дженкинса уже опубликована: J. A. Jenkins, Univalent functions and conformal mapping, Springer-Verlag, Berlin, 1958. — *Прим. перев.*

[2]) Переводчиком эти ссылки заменены ссылками на русскую литературу. Они отмечены звездочкой. — *Прим. перев.*

Глава 1

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

1.0. Введение. Областью называется открытое связное множество. Функция $f(z)$, регулярная в области D, называется *однолистной* в D, если $w=f(z)$ принимает разные значения w для разных z из D. В этом случае уравнение $f(z)=w$ имеет не больше одного корня в D при всяком комплексном w. Такие функции отображают D взаимно однозначно и конформно на некоторую область w-плоскости.

В этой главе мы получим некоторые классические результаты, указывающие границы роста функций, однолистных в единичном круге $|z|<1$. В остальном бóльшая часть брошюры посвящена обобщению этих теорем, причем соответствующие результаты доказываются для p-листных функций, т. е. для функций, обладающих тем свойством, что уравнение $f(z)=w$ имеет не более p корней в D — или для всякого комплексного w, или в смысле некоторого среднего, когда w меняется в плоскости.

Если функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ однолистна в круге $|z|<1$, то однолистны также функции $f(z)-a_0$ и $[f(z)-a_0]/a_1$, так как $a_1=f'(0)\neq 0$. Действительно, если бы a_1 равнялось нулю, то $f(z)$ принимала бы все достаточно близкие к $w=a_0$ значения по меньшей мере дважды.

Мы будем, таким образом, изучать нормированный класс S функций

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots,$$

однолистных в круге $|z|<1$.

Два эквивалентных основных результата, приводимых здесь, принадлежат Бибербаху [1] и гласят, что если $f(z)\in S$[1]), то $|a_2|\leqslant 2$ и $f(z)$ принимает всякое значение w,

[1]) Эта символическая запись означает, что $f(z)$ принадлежит классу S.

такое, что $|w| < 1/4$. Эта последняя теорема для меньшей константы была ранее доказана Кёбе [1]. Указанные оценки Бибербаха не могут быть улучшены. Сначала мы докажем эти результаты, а затем разовьем некоторые из их главных следствий.

1.1. Теорема 1.1. *Предположим, что* $f(z) \in S$. *Тогда* $|a_2| \leqslant 2$, *причем равенство имеет место только для функций*

$$f_0(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^2} = z + 2z^2e^{i\theta} + 3z^3e^{2i\theta} + \ldots . \quad (1.1)$$

Нам потребуется следующий предварительный результат.

Лемма 1.1. *Предположим, что функция* $w = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ *регулярна в области, содержащей окружность* $|z| = r$, *и что* $f(z)$ *отображает эту окружность на простую замкнутую кривую* $J(r)$, *описываемую один раз. Тогда площадь* $A(r)$, *заключенная внутри* $J(r)$, *равна* $\pi \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n |a_n|^2 r^{2n} \right|$.

Напишем $w = f(re^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$, где

$$u(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} [a_n e^{in\theta} + \bar{a}_n e^{-in\theta}] r^n,$$

$$v(\theta) = \frac{1}{2i} \sum_{-\infty}^{+\infty} [a_n e^{in\theta} - \bar{a}_n e^{-in\theta}] r^n.$$

Тогда

$$A(r) = \left| \int_0^{2\pi} u \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \left| \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} r^m (a_m e^{im\theta} + \bar{a}_m e^{-im\theta}) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n r^n (a_n e^{in\theta} + \bar{a}_n e^{-in\theta}) \right] d\theta \right| =$$

$$= \left| \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [a_n(-na_{-n} + nr^{2n}\bar{a}_n) + \bar{a}_n(nr^{2n}a_n - n\bar{a}_{-n})] \right| =$$

$$= \pi \left| \sum_{-\infty}^{+\infty} n |a_n|^2 r^{2n} \right|,$$

так как $\sum na_n a_{-n} = \sum n\bar{a}_n \bar{a}_{-n} = 0$, в чем можно убедиться, заменив n на $-n$ в этих суммах. Итак, лемма доказана.

Предположим теперь, что

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S.$$

Тогда и $F(z) = [f(z^2)]^{1/2} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + \ldots \in S$. Действительно, функция $f(z^2)$ обращается в нуль только при $z = 0$, где она имеет корень второй кратности, и если $F(z_1) = F(z_2)$, то $f(z_1^2) = f(z_2^2)$, а потому $z_1^2 = z_2^2$, т. е. $z_1 = \mp z_2$. Но $F(z)$ — нечетная функция, так что из $z_1 = -z_2$ следует $F(z_1) = -F(z_2)$. Значит, должно быть $z_1 = z_2$. Так как $f(z^2)$ имеет единственный нуль второй кратности, то $F(z)$ регулярна. Поэтому $F(z)$ однолистна.

Теперь положим

$$g(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} a_2 z + \ldots = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.$$

Тогда $g(z)$ однолистна в $0 < |z| < 1$, а поэтому $g(z)$ отображает $|z| = r$ при $0 < r < 1$ на простую замкнутую кривую. Следовательно, по лемме 1.1, величина

$$-\frac{1}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{2n} = \mp \frac{A(r)}{\pi}$$

не обращается в нуль при $0 < r < 1$. Левая часть, очевидно, отрицательна при малых положительных r, а значит, и при $0 < r < 1$. Устремляя r к единице, заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leqslant 1.$$

Отсюда имеем $|b_1| = |a_2|/2 \leqslant 1$, и равенство возможно, только если $b_n = 0$ $(n > 1)$, а в этом случае

$$g(z) = \frac{1}{z} - ze^{i\theta}, \quad F(z) = \frac{z}{1 - z^2 e^{i\theta}}, \quad f(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^2}.$$

Теорема 1.1 доказана.

Непосредственно из нее выводится

Теорема 1.2. *Предположим, что* $f(z) \in S$ *и что* $f(z) \neq w$ *в круге* $|z| < 1$. *Тогда* $|w| \geqslant 1/4$. *Равенство возможно только для функций* $f(z)$ *вида* (1.1) *и* $w = -e^{-i\theta}/4$.

Так как $f(z) \neq w$, то

$$\frac{wf(z)}{w - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + \ldots \in S.$$

Поэтому теорема 1.1 дает

$$\left|a_2 + \frac{1}{w}\right| \leqslant 2, \qquad \left|\frac{1}{w}\right| \leqslant 2 + |a_2| \leqslant 4, \qquad |w| \geqslant \frac{1}{4},$$

что и требовалось. Равенство возможно, только если $a_2 = 2e^{i\theta}$, $w^{-1} = -4e^{i\theta}$, а тогда $f(z)$ совпадает с одной из функций $f_\theta(z)$ в (1.1).

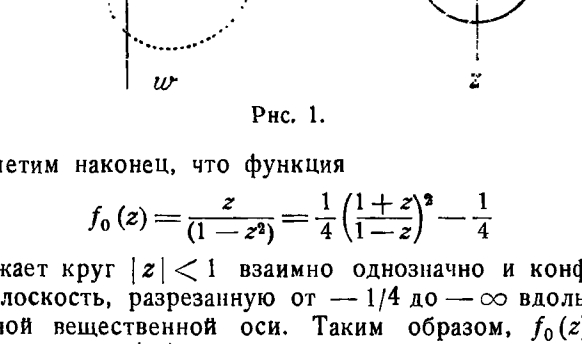

Рис. 1.

Отметим наконец, что функция

$$f_0(z) = \frac{z}{(1 - z^2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

отображает круг $|z| < 1$ взаимно однозначно и конформно на w-плоскость, разрезанную от $-1/4$ до $-\infty$ вдоль отрицательной вещественной оси. Таким образом, $f_0(z) \in S$ и $f_0(z) \neq -1/4$ в $|z| < 1$. Следовательно, функции $f_\theta(z) =$

$= e^{-i\theta} f_0(ze^{i\theta})$ в (1.1) также принадлежат S и $f_\theta(z) \neq -e^{-i\theta}/4$. Итак, оценки теорем 1.1 и 1.2 являются точными.

Мы увидим, что эти функции $f_\theta(z)$ являются в S экстремальными также и для многих других задач. Одним из самых глубоких нерешенных вопросов теории является следующий: будут ли эти функции экстремальными для n-го коэффициента, т. е. имеет ли место неравенство $|a_n| \leqslant n$ при всех $n > 1$ и $f(z) \in S$? Теорема 1.1 доказывает это для $n = 2$. В главе 6 мы дадим доказательство для $n = 3$, принадлежащее Лёвнеру [2]. Совсем недавно Гарабедян и Шиффер [2] получили этот результат для $n = 4$, но в общем случае вопрос остается открытым.

1.2. Элементарные теоремы о росте и искажении. Мы можем теперь вывести интересную группу неравенств как прямое следствие теоремы 1.1.

Теорема 1.3. *Предположим, что* $f(z) \in S$. *Тогда при* $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ *имеем* [1])

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \tag{1.2}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \tag{1.3}$$

$$\frac{1-r}{r(1+r)} \leqslant \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1+r}{r(1-r)}. \tag{1.4}$$

Во всех случаях равенство имеет место только для функций $f_\theta(z)$ *вида* (1.1).

Пусть $|z_0| < 1$, и пусть

$$\varphi(z) = f\left(\frac{z_0 + z}{1 + \bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots . \tag{1.5}$$

Тогда $\varphi(z)$, очевидно, однолистна в круге $|z| < 1$. Далее,

$$b_0 = f(z_0), \quad b_1 = \varphi'(0) = (1 - |z_0|^2) f'(z_0),$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\varphi''(0) = \frac{1}{2}(1 - |z_0|^2)^2 f''(z_0) - \bar{z}_0 (1 - |z_0|^2) f'(z_0).$$

---

[1]) Бибербах [1], Гронуолл [1], Сегё [1].

Применив теорему 1.1 к $(\varphi(z)-b_0)/b_1 \in S$, получим $|b_2| \leqslant 2|b_1|$, т. е.

$$|f''(z_0)(1-|z_0|^2)^2 - 2\bar{z}_0 f'(z_0)(1-|z_0|^2)| \leqslant \leqslant 4(1-|z_0|^2)|f'(z_0)|.$$

Положив $z_0 = \rho e^{i\theta}$, заключаем, что

$$\left| z_0 \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2\rho^2}{1-\rho^2} \right| \leqslant \frac{4\rho}{1-\rho^2}. \tag{1.6}$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(\rho e^{i\theta})| = \Re e^{i\theta} \frac{f''(\rho e^{i\theta})}{f'(\rho e^{i\theta})},$$

то мы сразу получаем

$$\frac{2\rho-4}{1-\rho^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial \rho} \log |f'(\rho e^{i\theta})| \leqslant \frac{2\rho+4}{1-\rho^2}.$$

Интегрируя эти неравенства по ρ в пределах от 0 до r, выводим (1.3).

Теперь ясно, что

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|\, d\rho \leqslant \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3}\, d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Но это — правое неравенство (1.2). Чтобы получить оценку снизу для $|f(re^{i\theta})|$, предположим, не умаляя общности, что $f(re^{i\theta}) = Re^{i\varphi}$, где $R < 1/4$, так как в противном случае нечего доказывать[1]). Из теоремы 1.2 следует тогда, что прямолинейный отрезок λ, соединяющий точки 0 и $Re^{i\varphi}$, целиком лежит в образе круга $|z| < 1$ при отображении $f(z)$. Значит, λ соответствует некоторому пути l в круге $|z| < 1$, соединяющему $z = 0$ с $re^{i\theta}$. Таким образом, если $t = |z|$, мы выводим из (1.3), что

$$R = \int_\lambda |dw| = \int_l \left|\frac{dw}{dz}\right| |dz| \geqslant \int_l \frac{(1-t)}{(1+t)^3}\, dt = \frac{r}{(1+r^2)},$$

и это завершает доказательство неравенств (1.2).

---

[1]) Действительно, если $0 < r < 1$, то $r(1+r)^{-2} < 1/4$.—*Прим. перев.*

Наконец, применим (1.2) к функции $[\varphi(z)-b_0]/b_1$, где $\varphi(z)$ определена формулой (1.5). Это дает

$$|b_1|\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant\left|f\left(\frac{z_0+z}{1+\bar{z}_0z}\right)-f(z_0)\right|\leqslant|b_1|\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Подставляя $z=-z_0$, $b_1=(1-|z_0|^2)f'(z_0)$, получаем (1.4).

Легко усмотреть, что функции $f_\theta(z)$ из (1.1) обращают в равенства правые неравенства (1.2)—(1.4) при $z=re^{-i\theta}$ и левые неравенства (1.2)—(1.4) при $z=-re^{-i\theta}$. Замечая, что по теореме 1.1 равенство в (1.6) и, значит, в последующих неравенствах возможно, только если $\varphi(z)$ совпадает с одной из функций $f_\theta(z)$, легко видеть, что никакие другие функции не могут дать равенства в теореме 1.3.

1.2.1. Теперь мы дадим другое доказательство части результатов теоремы 1.3, основанное скорее на теореме 1.2, чем на теореме 1.1. Если теорему 1.2 распространить на более общие классы функций, то предлагаемое доказательство тоже может быть обобщено. Чтобы сделать это очевидным, введем следующее

Определение. *Пусть функция* $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ *регулярна в круге* $|z|<1$. *Будем говорить, что* $f(z)\in S_0$, *если при любом* z_0, $|z_0|<1$, *и при любой функции* $\omega(\zeta)$, *однолистной и удовлетворяющей условиям* $|\omega(\zeta)|<1$, $\omega(\zeta)\neq z_0$ *в* $|\zeta|<1$, *имеем для* $\varphi(\zeta)=f[\omega(\zeta)]$:

$$|\varphi'(0)|\leqslant 4(|\varphi(0)|+|f(z_0)|).$$

Заметим, что S есть подкласс класса S_0. Действительно, если $f(z)\in S$, то функция $\varphi(\zeta)=f[\omega(\zeta)]$ однолистна в круге $|\zeta|<1$. и $\varphi(\zeta)\neq f(z_0)=w_0$. Запишем $\varphi(\zeta)=b_0+b_1\zeta+\ldots$ и применим теорему 1.2 к функции $(\varphi(\zeta)-b_0)/b_1\in S$, которая не принимает значения $(w_0-b_0)/b_1$. Мы заключаем, что

$$\left|\frac{w_0-b_0}{b_1}\right|\geqslant\frac{1}{4},$$

$$|b_1|=|\varphi'(0)|\leqslant 4|w_0-b_0|\leqslant 4[|f(z_0)|+|\varphi(0)|],$$

и, таким образом, $f(z)\in S_0$.

В главе 5 мы увидим, что в действительности класс S_0 намного шире S, и потому результаты теорем 1.4 и 1.5

применимы к значительно более общему классу функций, чем однолистные.

Теорема 1.4. *Предположим, что* $f(z)=z+a_2z^2+\ldots\in S_0$. *Тогда*

$$|a_2|\leqslant 2. \tag{1.7}$$

Далее, для $|z|=r$ $(0<r<1)$ *имеем*

$$\frac{r}{(1+r)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{r}{(1-r)^2}, \tag{1.8}$$

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1+r}{r(1-r)}\,|f(z)|\leqslant\frac{1+r}{(1-r)^3}. \tag{1.9}$$

Наконец, уравнение $f(z)=w$ *имеет в точности один корень в круге* $|z|<1$, *если* $|w|<1/4$.

Добившись большей общности, мы потеряли только левые неравенства в (1.3) и (1.4). Это неизбежно, так как производные функции из S_0 вполне могут обращаться в нуль в круге $|z|<1$.

Чтобы доказать теорему 1.4, положим

$$\frac{z}{(1-z)^2}=Z=\frac{4d\zeta}{(1-\zeta)^2},$$

где $d=r(1+r)^{-2}$ при некотором фиксированном r, удовлетворяющем неравенству $0<r<1$. Тогда круг $|z|<1$, разрезанный вдоль отрицательной вещественной оси от $-r$ до -1, конформно и взаимно однозначно отображается на Z-плоскость, разрезанную от $-d$ до $-\infty$ вдоль отрицательной вещественной оси, и, далее, на круг $|\zeta|<1$. Поэтому, если мы напишем $z=\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta)=f[\omega(\zeta)]$, то $\omega(\zeta)$ однолистна, $\omega(\zeta)\neq -r$ при $|\zeta|<1$, и ввиду того, что $f(z)\in S_0$, мы будем иметь

$$|\varphi'(0)|\leqslant 4\{|\varphi(0)|+|f(-r)|\},$$

т. е.

$$4d|f'(0)|\leqslant 4|f(-r)|.$$

Так как $f'(0)=1$, то отсюда следует неравенство $|f(-r)|\geqslant d$; применяя то же рассуждение к функции $e^{-i\theta}f(ze^{i\theta})$, принадлежащей S_0 вместе с $f(z)$, мы получаем левое неравенство в (1.8).

Из него непосредственно следует, что $f(z) \neq 0$ при $|z| < 1$, $z \neq 0$. Далее, из теоремы Руше[1]) вытекает, что если $|w| < r(1+r)^{-2}$, то $f(z)$ и $f(z) - w$ имеют одинаковое число нулей в круге $|z| < r$, т. е. в точности один нуль. Устремляя r к 1, заключаем, что при $|w| < 1/4$ уравнение $f(z) = w$ имеет в точности один корень в круге $|z| < 1$.

Теперь выберем θ так, что $a_2 e^{i\theta} = -|a_2|$. Тогда при $r \to 0$

$$|f(re^{i\theta})| = |r + a_2 e^{i\theta} r^2 + O(r^3)| = r - |a_2| r^2 + O(r^3)$$

и

$$|f(re^{i\theta})| \geqslant \frac{r}{(1+r)^2} = r - 2r^2 + O(r^3),$$

согласно левому неравенству (1.8). Отсюда ясно, что $|a_2| \leqslant 2$.

Остается доказать неравенства (1.9). Положим

$$Z = \frac{z}{(1-z)^2} = k\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2, \qquad k = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Здесь r — фиксированное положительное число, $0 < r < 1$. Тогда круг $|\zeta| < 1$ взаимно однозначно и конформно отображается на Z-плоскость, разрезанную вдоль отрицательной вещественной оси, и на круг $|z| < 1$, разрезанный вдоль вещественной оси от -1 до 0. Снова напишем $z = \omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta) = f[\omega(\zeta)]$. Тогда $\omega(\zeta) \neq 0$ в $|\zeta| < 1$, и так как $f(0) = 0$, $f(z) \in S_0$, то мы имеем

$$|\varphi'(0)| = \frac{(1-r)^3}{1+r} 4k |f'(r)| \leqslant 4 |\varphi(0)| = 4 |f(r)|.$$

Поскольку и $e^{-i\theta} f(ze^{i\theta}) \in S_0$, мы заключаем, что

$$|f'(re^{i\theta})| \leqslant \frac{1+r}{k(1-r)^3} |f(re^{i\theta})| = \frac{1+r}{r(1-r)} |f(re^{i\theta})|,$$

а это и есть левое неравенство (1.9). Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial r} \log |f(re^{i\theta})| \leqslant \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| \leqslant \frac{1+r}{r(1-r)}, \tag{1.10}$$

---

[1]) А. И. Маркушевич [1*], стр. 317. — *Прим. перев.*

и, интегрируя эти неравенства от r_1 до r_2, где $0 < r_1 < r_2 < 1$, получим

$$\log\left|\frac{f(r_2e^{i\theta})}{f(r_1e^{i\theta})}\right| \leqslant \int_{r_1}^{r_2} \frac{(1+r)\,dr}{r(1-r)} = \log\left[\frac{(1-r_1)^2 r_2}{r_1(1-r_2)^2}\right],$$

или

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}\,|f(r_2e^{i\theta})| \leqslant \frac{(1-r_1)^2}{r_1}\,|f(r_1e^{i\theta})|. \qquad (1.11)$$

Устремляя здесь r_1 к нулю, мы получим правые неравенства в (1.8) и (1.9) с $r = r_2$. Доказательство теоремы 1.4 закончено.

С точки зрения последующих приложений заслуживают быть отмеченными такие следствия неравенств (1.9):

Теорема 1.5. *Предположим, что* $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots \in S_0$, *и пусть*

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad (0 < r < 1).$$

За исключением того случая, когда $f(z) = f_\theta(z) = z(1 - ze^{i\theta})^{-2}$, *величина* $(1-r)^2 r^{-1} M(r, f)$ *строго убывает с возрастанием* r $(0 < r < 1)$ *и стремится к* $\alpha < 1$, *когда* $r \to 1$. *Следовательно, верхние границы* $|f(z)|$, $|f'(z)|$, *данные соответственно в* (1.8) *и* (1.9), *достигаются только функциями* $f_\theta(z)$.

Чтобы доказать теорему 1.5, заметим, что равенство в (1.11) может выполняться только в том случае, когда равенство имеет место в обоих неравенствах (1.10) для $r_1 < r < r_2$. Это дает

$$\Re e^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = \frac{1+r}{r(1-r)},$$

и, значит,

$$\Im e^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = 0 \quad (r_1 < r < r_2),$$

т. е.

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}$$

для $z = re^{i\theta}$ $(r_1 < r < r_2)$ и, следовательно, везде в круге $|z| < 1$, так как аналитическое продолжение единственно. В этом случае $f(z) = f_{-\theta}(z)$. ●

В прочих случаях в (1.11) имеет место строгое неравенство при $0<r_1<r_2<1$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Выберем θ так, что $|f(r_2e^{i\theta})|=M(r_2, f)$. Тогда (1.11) дает

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2}M(r_2, f)<\frac{(1-r_1)^2}{r_1}|f(r_1e^{i\theta})|\leqslant\frac{(1-r_1)^2}{r_1}M(r_1 f).$$

Следовательно, если $f(z)$ не совпадает с $f_\theta(z)$, то $\psi(r)=(1-r)^2r^{-1}M(r, f)$ строго убывает с возрастанием r $(0<r<1)$ и $\psi(r)\leqslant 1$ в силу (1.9). Таким образом, $\psi(r)<1$ $(0<r<1)$, так что верхние границы для $|f(z)|$ в (1.8) и для $|f'(z)|$ в (1.9) не достигаются, и $\lim\limits_{r\to 1}\psi(r)=\alpha<1$. Теорема 1.5 доказана.

1.3. Средние и коэффициенты. Мы уже упоминали выше о предположении Бибербаха, что неравенство $|a_n|\leqslant n$ верно для всех $f(z)\in S$ и $n\geqslant 2$. В этом направлении мы докажем сейчас неравенство $|a_n|<en$, принадлежащее Литтльвуду [1, 3].

Теорема 1.6. *Предположим, что* $f(z)=z+a_2z^2+\ldots\in S$. *Тогда*

$$I_1(r, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta<\frac{r}{1-r}\qquad(0<r<1),\ (1.12)$$

и потому

$$|a_n|<eI_1\left[\frac{n-1}{n}, f\right]<en\qquad(n\geqslant 2).\qquad(1.13)$$

Доказывая теорему 1.1, мы видели, что

$$\varphi(z)=[f(z^2)]^{1/2}=z+b_3z^3+b_5z^5+\ldots\in S;$$

по теореме 1.3, примененной к $\varphi(z)$, имеем $|\varphi(z)|\leqslant r/(1-r^2)$ при $|z|\leqslant r$. Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi'(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi'(re^{i\theta})\overline{\varphi'(re^{i\theta})}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nb_nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}m\bar{b}_mr^{m-1}e^{-i(m-1)\theta}\right)d\theta=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^2|b_n|^2r^{2n-2}.$$

Таким образом,

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{2n} = \int_0^r \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} |\varphi'(\rho e^{i\theta})|^2 \, d\theta =$$

$$= \{\text{площади образа } |z| < r \text{ при отображении } w = \varphi(z)\} <$$

$$< \pi \left(\frac{r}{1-r^2} \right)^2.$$

Действительно, площадь этого образа не больше πR^2, где R — наибольшее расстояние точек образа от $w = 0$ [1]), так как $\varphi(z)$ однолистна.

Интегрируя почленно от 0 до r, мы получим после деления на r

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 r^{2n} < \frac{r^2}{1-r^2}.$$

Но

$$I_1(r^2, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r^2 e^{i\theta})| \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}) \overline{\varphi(re^{i\theta})} \, d\theta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 r^{2n}.$$

Таким образом,

$$I_1(r^2, f) < \frac{r^2}{1-r^2}.$$

Заменяя r^2 на r, имеем (1.12). Полагая теперь $r = 1 - 1/n$,

---

[1]) Ясно, что равенство здесь невозможно.

мы получаем

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| = \frac{1}{2\pi r^n}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r^n} I_1(r, f) \leqslant \frac{1}{r^{n-1}(1-r)} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} n < en.$$

Неравенство (1.13), а с ним и теорема 1.6 доказаны.

Наиболее сильными результатами типа теоремы 1.6, известными в настоящее время, являются следующие:

$$I_1(r, f) < \frac{r}{1-r^2} + 0{,}55, \qquad |a_n| < \frac{1}{2}\,en + 1{,}51.$$

Они принадлежат Базилевичу [1]. Мы не сможем доказать их, но покажем в главе 5, что для любой фиксированной $f(z) \in S$

$$\frac{|a_n|}{n} \to \alpha, \text{ когда } n \to \infty,$$

где α — константа из теоремы 1.5. Таким образом, $|a_n| \leqslant n$ для всех больших n и фиксированной функции $f(z) \in S$.

1.4. Выпукло однолистные[1]) функции[2]). Совсем просто получить точные оценки для коэффициентов функций, принадлежащих некоторым подклассам класса S. В этом пункте мы рассмотрим функции, отображающие круг $|z| < 1$ на выпуклые области. Такие функции мы будем называть *выпукло однолистными*. Область D называется выпуклой, если прямолинейный отрезок, соединяющий любые две точки w_1 и w_2 из D, также лежит в D. Легко доказать посредством индукции, что центр тяжести

$$\frac{1}{n}(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)$$

n точек $w_1, w_2, \ldots, w_n$ из D также лежит в D.

---

[1]) В нашей литературе эти функции называют выпуклыми. — *Прим. ред.*

[2]) Результаты этого пункта принадлежат Лёвнеру [1].

Теорема 1.7. *Предположим, что функция* $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$ *выпукло однолистна и отображает круг* $|z|<1$ *на область* D. *Пусть функция* $w=h(z)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n$ *регулярна в круге* $|z|<1$ *и принимает там лишь те значения, которые лежат в* D. *Тогда* $|h_n|\leqslant|g_1|$ *и, в частности,* $|g_n|\leqslant|g_1|$ *при* $n\geqslant 1$.

Рассмотрим

$$\psi(z)=g^{-1}[h(z)]=\frac{h_1}{g_1}z+\ldots.$$

Функция $\psi(z)$ регулярна в круге $|z|<1$ и удовлетворяет там неравенству $|\psi(z)|<1$; $\psi(0)=0$. Тогда, по лемме Шварца[1]), имеем $|h_1/g_1|\leqslant 1$, т. е. $|h_1|\leqslant|g_1|$.

Теперь пусть η_k $(1\leqslant k\leqslant m)$ — корни m-й степени из единицы; рассмотрим

$$H(z)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} h(\eta_k z^{1/m})=h_m z+h_{2m}z^2+\ldots$$

вместо $h(z)$. Так как область D выпукла, а $h(z)$ принимает значения только из D, то этим свойством обладает и $H(z)$, и мы видим, что $|h_m|\leqslant|g_1|$ $(m=2, 3, \ldots)$. Это доказывает теорему 1.7.

Мы видим, что если функция $g(z)=z+g_2z^2+\ldots$ выпукло однолистна, то $|g_n|\leqslant 1$ при $n\geqslant 1$. Эти неравенства точны при каждом n, как показывает пример функции

$$w=g(z)=\frac{z}{1-z}=z+z^2+\ldots,$$

отображающей круг $|z|<1$ на полуплоскость $\Re w>-1/2$.

Мы можем также уточнить теоремы 1.2 и 1.3 для функций $g(z)$. В каждом случае функция $z/(1-z)$ экстремальна.

Теорема 1.8. *Предположим, что функция* $w=f(z)=z+\ldots$ *выпукло однолистна. Тогда* $f(z)$ *принимает всякое значение из круга* $|w|<1/2$.

---

[1]) См. А. И. Маркушевич [1*], стр. 137. — *Прим. перев.*

Пусть D — образ круга $|z|<1$ при отображении $f(z)$, и пусть $w_0=re^{i\theta}$ — точка с наименьшим модулем, лежащая вне D. Рассматривая, если нужно, $-e^{-i\theta}f(-ze^{i\theta})$ вместо $f(z)$, можем считать, что $w_0=-r$. Тогда $\Re w>-r$ в D. Действительно, предположим противное, т. е. пусть D содержит такую точку w_1, что $\Re w_1<-r$. Пусть L — отрезок прямой, проходящей через w_0 и w_1, отложенный от w_0 в направлении, противоположном w_1. Тогда ввиду выпуклости D отрезок L целиком лежит вне D. Но L содержит точки с модулем, меньшим r, что невозможно.

Теперь заметим, что функция

$$w=g(z)=\frac{2rz}{1-z}=2rz+\ldots$$

отображает круг $|z|<1$ на $D_0=\{w:\Re w>-r\}$. Так как функция $f(z)=z+\ldots$ принимает значения только из D_0, то теорема 1.7, примененная к $f(z)$ вместо $h(z)$, приводит к неравенству $2r\geqslant 1$. Теорема 1.8 доказана.

Наконец, имеет место

Теорема 1.9. *Предположим, что функция* $w=f(z)=z+\ldots$ *выпукло однолистна. Тогда при* $|z|=r$ $(0<r<1)$ *имеем*

$$\frac{r}{1+r}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{r}{1-r},$$

$$\frac{1}{(1+r)^2}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-r)^2},$$

$$\frac{1}{r(1+r)}\leqslant\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1}{r(1-r)}.$$

Все эти неравенства точны, причем равенство имеет место, когда $f(z)=z/(1-z)$ и $z=\pm r$. Мы опускаем доказательство, вполне аналогичное доказательству теоремы 1.3, но опирающееся на неравенство $|a_2|\leqslant 1$, которое следует из теоремы 1.7, вместо неравенства $|a_2|\leqslant 2$.

1.5. Типично вещественные функции[1]. Следуя Рогозинскому, мы будем называть функцию $f(z)$ *типично*

[1]) Рогозинский [1]. См. также Дьедонне [1] и Сас [1] по поводу приводимого доказательства.

вещественной, если она регулярна в круге $|z|<1$ и вещественна там тогда и только тогда, когда z вещественно. Имеет место

Теорема 1.10. *Предположим, что* $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ *типично вещественна. В этом случае, и в частности если* $f(z)\in S$ *и имеет вещественные коэффициенты, выполняются неравенства* $|a_n|\leqslant n$ $(n=2,\ 3,\ \ldots)$.

Пусть $f(z)=u+iv$, и предположим, что $f(z)$ типично вещественна. Тогда $f(z)$ вещественна на вещественной оси и потому имеет вещественные коэффициенты. Таким образом,

$$v(re^{i\theta})=\sum_1^\infty a_nr^n\sin n\theta.$$

Кроме того, $v(re^{i\theta})$ сохраняет знак при $0<\theta<\pi$, и потому

$$|a_nr^n|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi v(re^{i\theta})\sin n\theta\,d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2n}{\pi}\int_0^\pi|v(re^{i\theta})\sin\theta|\,d\theta=nr\qquad(0<r<1),$$

так как $|\sin n\theta|\leqslant n\sin\theta$. Устремляя r к 1, получим $|a_n|\leqslant n$.

Если $f(z)$ имеет вещественные коэффициенты, то $\overline{f(z)}=f(\bar z)$. Таким образом, если $f(z)$ имеет вещественные коэффициенты и вещественна при некотором комплексном z_0, мы имеем $f(z_0)=f(\bar z_0)$, что невозможно для однолистной $f(z)$. Поэтому, если $f(z)\in S$ и имеет вещественные коэффициенты, то $f(z)$ типично вещественна и применимо приведенное рассуждение.

1.6. Звездно однолистные функции[1]. Область D в w-плоскости называется *звездной* (или звездообразной) относительно фиксированной точки O из D, если для всякой точки P в D прямолинейный отрезок OP тоже лежит в D.

---

[1]) Неванлинна [1]. Относительно обобщения теоремы 1.11 на функции, отображающие круг $|z|<1$ на области более обширного класса, введенного Капланом [1], см. Рид [1].

Если $f(z)\in S$ и отображает круг $|z|<1$ на область, звездную относительно $w=0$, то мы будем называть $f(z)$ ***звездно однолистной***. Имеет место

Теорема 1.11. *Если функция* $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ *звездно однолистна, то*

$$|a_n|\leqslant n \quad (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Пусть G — образ круга $|z|<1$, G_r — образ круга $|z|<r$ при отображении $f(z)$. Сначала покажем, что область G_r звездна относительно $w=0$ при $0<r<1$. Действительно, если $w\in G$, то $tw\in G$ при $0<t<1$, и потому функция

$$\psi(z)=f^{-1}[tf(z)]$$

регулярна в $|z|<1$ и удовлетворяет там условиям $|\psi(z)|<1$ и $\psi(0)=0$. Значит, по лемме Шварца, имеем $|\psi(z)|\leqslant|z|$ в $|z|<1$.

Предположим теперь, что $w_1\in G_r$. Тогда $w_1=f(z_1)$, где $|z_1|<r$. Следовательно,

$$|f^{-1}(tw_1)|=|\psi(z_1)|\leqslant|z_1|<r.$$

Таким образом, $tw_1=f(z_2)$, где $|z_2|<r$, и потому $tw_1\in G_r$ при $0<t<1$. Значит, G_r звездна.

Границей области G_r является кривая $w=f(re^{i\theta})$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$. Так как G_r звездна, то радиус-вектор из $w=0$ в $f(re^{i\theta})$ лежит в G_r и потому $\arg f(re^{i\theta})$ возрастает вместе с θ. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})=\Re\left[\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right]\geqslant0 \qquad (1.14)$$

$$(0<r<1,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi).$$

Напишем теперь

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=1+\sum_{m=1}^{\infty}a_mz^m.$$

Тогда из (1.14) следует, что функция

$$w=h(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}-1=\sum_{m=1}^{\infty}a_mz^m$$

принимает только те значения, которые лежат в выпуклой области

$$D_0 = \{w : \Re w > -1\}.$$

Кроме того, функция

$$w = g(z) = \frac{2z}{1-z} = 2z + 2z^2 + \dots$$

отображает круг $|z| < 1$ на D_0. Значит, по теореме 1.7, $|\alpha_m| \leqslant 2$ $(m = 1, 2, \dots)$. С другой стороны, имеем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m z^m\right) = \sum_{1}^{\infty} n a_n z^n$$

и, приравнивая коэффициенты, получаем

$$n a_n = a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}.$$

Таким образом,

$$(n-1)|a_n| = |\alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}| \leqslant$$
$$\leqslant 2(1 + |a_2| + \dots + |a_{n-1}|).$$

Если мы предположим, что $|a_k| \leqslant k$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$, то будем иметь

$$(n-1)|a_n| \leqslant n(n-1),$$

и доказательство теоремы 1.11 завершается индукцией.

Наконец, заметим, что функция

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

одновременно звездно однолистна и типично вещественна, так что неравенства теорем 1.10 и 1.11 точны.

Глава 2

РОСТ КОНЕЧНОЛИСТНЫХ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИЙ

2.0. Введение. Мы видели в предыдущей главе, что предположение об однолистности функции $f(z)$ в круге $|z|<1$ налагает ряд ограничений на рост $f(z)$, таких, как доказанные в теоремах 1.3, 1.5 и 1.6. В этой и следующей главах мы увидим, какие результаты можно получить при более общем предположении, что уравнение $f(z)=w$ имеет не больше p корней в смысле некоторого среднего, когда w изменяется в плоскости.

В настоящей главе мы ограничимся получением оценок для $|f(z)|$. Пусть

$$M(r,\ f)=\max_{|z|=r}|f(z)| \qquad (0<r<1). \tag{2.1}$$

Мы покажем, что при выполнении надлежащих условий, касающихся некоторых средних,

$$M(r,\ f)=O(1-r)^{-2p} \qquad (r\to 1). \tag{2.2}$$

Первый результат этого типа принадлежит Картрайт [1], которая доказала (2.2) в случае, когда p — положительное целое число и уравнение $f(z)=w$ имеет не больше p корней в круге $|z|<1$ при любом w. Такие функции называются p-листными. Ее метод, основанный на теореме Альфорса об искажении [1], был распространен Спенсером [3] на более общий случай.

Доказательство (2.2) сильно упрощается, если предположить, что $f(z)\neq 0$ при $|z|<1$. Мы получим результат в этом частном случае, прежде чем браться за общий случай. Если $f(z)=a_0+a_1z+\ldots$ имеет q нулей в круге $|z|<1$, то оценки для $M(r,\ f)$ оказываются зависящими от

$$\mu_q=\max_{0\leqslant\nu\leqslant q}|a_\nu|.$$

Эта зависимость обусловлена существом дела. Действительно, всякий полином степени p p-листен и имеет не более p нулей в круге $|z|<1$; при этом оценки для $M(r)$ должны, очевидно, зависеть от всех коэффициентов.

Наконец, мы увидим, что наш метод приводит также к ряду теорем, показывающих, что $f(z)$ не может расти слишком быстро вблизи нескольких точек окружности $|z|=1$ одновременно; в частности, если $M(r)$ растет как $(1-r)^{-2p}$, то величина $|f(re^{i\theta})|$ имеет эту скорость роста для единственного фиксированного значения θ и совсем мала для других постоянных θ, когда $r\to 1$. Для получения результатов такого типа приходится в полной мере использовать методы этой главы даже для однолистных функций; эти результаты впервые были доказаны Спенсером [3].

2.1. Принцип длины и площади. Пусть функция $f(z)$ регулярна в открытом множестве Δ, и пусть $n(w)$ — число корней уравнения $f(z)=w$, лежащих в Δ. Положим

$$p(R)=p(R,\Delta,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})\,d\varphi. \qquad (2.3)$$

Интеграл существует как конечный или бесконечный интеграл Лебега, так как $n(w)\geqslant 0$ [1]).

Функция $p(R)$ будет играть в дальнейшем важную роль. Ясно, что $p(R)$, как и $n(w)$, возрастает с расширением области Δ. Далее, если $z=t(\zeta)$ отображает Δ_1 взаимно однозначно и конформно на Δ, то $p(R,\Delta)=p(R,\Delta_1)$, где $p(R,\Delta_1)$ соответствует $f[t(\zeta)]$.

Мы могли бы сделать такое предположение о средних $p(R)$:

$$p(R)\leqslant p \qquad (0<R<\infty).$$

Это условие заведомо выполнено, если p — положительное целое, а функция $f(z)$ p-листна в круге $|z|<1$. Мы рассмотрим это предположение в главе 5; пока для нас достаточны и более слабые предположения.

---

[1]) При доказательстве леммы 5.2 будет установлено, что множества $n(w)\geqslant K$ открыты в конечной плоскости. Таким образом, функция $n(Re^{i\varphi})$ измерима.

Наши результаты основываются на одном неравенстве, относящемся к площадям и длинам. Результат такого типа был впервые доказан Альфорсом [1], а на возможность использовать его в настоящем контексте указала Картрайт [1]. Недавно обнаружено, что подобный результат является сильным орудием в теории конформных и квазиконформных отображений (см. Лелон-Ферран [1]).

Теорема 2.1. *Предположим, что функция $f(z)$ регулярна в открытом множестве Δ и что $p(R)=p(R, \Delta)$ определено формулой* (2.3). *Пусть $l(R)$ — суммарная длина кривых в Δ, на которых $|f(z)|=R$, и A — площадь Δ, которую предположим конечной. Тогда*

$$\int_0^\infty \frac{l(R)^2\,dR}{Rp(R)} \leqslant 2\pi A,$$

где подинтегральное выражение следует считать равным нулю, если $l(R)=0$ или $p(R)=+\infty$. В частности, $l(R)<+\infty$ для почти всех R, при которых $p(R)<+\infty$.

2.1.1. Сначала докажем теорему 2.1 в случае, когда Δ — открытый прямоугольник, а функция $f(z)$ однолистна и не обращается в нуль в некоторой области, содержащей Δ вместе с его сторонами. Итак, $f(z)$ однолистна и не обращается в нуль на Δ. Значит, всякая фиксированная ветвь функции

$$s(z)=\log f(z)=\sigma+i\tau$$

также однолистна на Δ и отображает Δ на некоторую область Ω s-плоскости. Граница Ω есть образ границы Δ при отображении $s(z)$ и представляет собой кусочно-аналитическую кривую Жордана. Пусть θ_σ — пересечение Ω с прямой $\sigma=\text{const}$. Тогда θ_σ состоит из конечного числа прямолинейных отрезков

$$\tau_1<\tau<\tau_1', \quad \tau_2<\tau<\tau_2', \ldots.$$

Когда $s=\sigma+i\tau$ описывает θ_σ, $z=x+iy$ описывает множество γ_σ в Δ, на котором $|f(z)|=e^\sigma$.

Так как функция $f(z) = e^{g(z)}$ однолистна, то $\tau'_\nu - \tau_\nu \leqslant \leqslant 2\pi$. На дуге кривой γ_σ, соответствующей сегменту $\tau_\nu < \tau < \tau'_\nu$, уравнение

$$f(z) = e^{\sigma + i\tau_0}$$

не имеет корней, если $\tau'_\nu < \tau_0 < \tau_\nu + 2\pi$, и имеет один корень, если $\tau_\nu < \tau_0 < \tau'_\nu$. Таким образом, соответствующая часть $p(e^\sigma, \Delta)$ в точности равна $(\tau'_\nu - \tau_\nu)/2\pi$. Обозначая через $\theta(\sigma)$ полную меру θ_σ и складывая, мы видим, что

$$p(e^\sigma, \Delta) = \frac{1}{2\pi} \sum (\tau'_\nu - \tau_\nu) = \frac{\theta(\sigma)}{2\pi}.$$

Теперь имеем, используя неравенство Шварца [1]),

$$l(e^\sigma, \Delta)^2 = \left[\int_{\theta_\sigma} \left|\frac{dz}{ds}\right| d\tau\right]^2 \leqslant \int_{\theta_\sigma} d\tau \int_{\theta_\sigma} \left|\frac{dz}{ds}\right|^2 d\tau =$$

$$= \theta(\sigma) \int_{\theta_\sigma} \left|\frac{dz}{ds}\right|^2 d\tau = 2\pi p(e^\sigma, \Delta) \int_{\theta_\sigma} \left|\frac{dz}{ds}\right|^2 d\tau.$$

Если σ_1, σ_2 — точная нижняя и верхняя грани σ на Ω, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l(e^\sigma, \Delta)^2}{p(e^\sigma, \Delta)} d\sigma = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{l(e^\sigma, \Delta)^2}{p(e^\sigma, \Delta)} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \int_{\theta_\sigma} \left|\frac{dz}{ds}\right|^2 d\tau = 2\pi A,$$

где A — площадь Δ. Полагая $e^\sigma = R$, имеем

$$\int_0^\infty \frac{l(R, \Delta)^2}{p(R, \Delta)} \frac{dR}{R} \leqslant 2\pi A, \tag{2.4}$$

что и требовалось.

---

[1]) $\left|\sum ab\right|^2 \leqslant \sum |a|^2 \sum |b|^2$ или $\left|\int fg\,dx\right|^2 \leqslant \int |f|^2 dx \int |g|^2 dx$.

Относительно доказательства см., например, Г. М. Фихтенгольц, [1*], т. 1, стр. 389; т. 2, стр. 601.

2.1.2. Для того чтобы распространить наш результат на общий случай, нам потребуется теория интеграла Лебега. Мы можем предположить, не умаляя общности, что $f(z)$ регулярна и $f(z) \neq 0, f'(z) \neq 0$ в Δ. Действительно, в противном случае можно рассматривать $f(z)$ в множестве Δ_0, полученном из Δ удалением нулей $f(z)$ и $f'(z)$; при этом ни одно из значений $p(R)$, $l(R)$ и A в теореме 2.1 не изменится. Представим Δ в виде объединения счетного множества попарно не пересекающихся прямоугольников Δ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$)[1]. В каждой точке z_0 такого прямоугольника $f'(z_0) \neq 0$, а потому существует окрестность z_0, в которой $f(z)$ однолистна. Значит, мы можем разбить каждый прямоугольник Δ_ν на конечное число меньших прямоугольников, на каждом из которых $f(z)$ однолистна. Поэтому, не умаляя общности, предположим, что $f(z)$ однолистна и $f(z) \neq 0$ на каждом Δ_ν.

Множество кривых γ_R, на которых $|f(z)| = R$, пересекает сторону каждого прямоугольника Δ_ν лишь в конечном числе точек, если только $|f(z)|$ не равняется тождественно R на этой стороне. Таким образом, если не рассматривать конечное или счетное множество значений R, при которых $|f(z)| \equiv R$ на стороне одного из прямоугольников Δ_ν, то мы имеем

$$p(R, \Delta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p(R, \Delta_\nu)^2), \tag{2.5}$$

$$l(R, \Delta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} l(R, \Delta_\nu)^3), \tag{2.6}$$

так как стороны прямоугольников Δ_ν не влияют тогда на величину $p(R, \Delta)$ или $l(R, \Delta)$. Если A_ν и A — площади Δ_ν и Δ соответственно, то

$$A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu{}^4).$$

---

[1]) И. П. Натансон [1*], стр. 265.

[2]) Это следует из (2.3). См. также И. П. Натансон [1*], стр. 127.

[3]) Беркилл [1], стр. 35.

[4]) См. И. П. Натансон [1*], стр. 269.

Теперь в неравенстве Шварца $\left(\sum a_\nu b_\nu\right)^2 \leqslant \sum a_\nu^2 \sum b_\nu^2$ положим

$$a_\nu^2 = \frac{l(R, \Delta_\nu)^2}{p(R, \Delta_\nu)}, \qquad b_\nu^2 = p(R, \Delta_\nu)$$

и просуммируем по тем значениям ν, для которых $p(R, \Delta_\nu)$, $l(R, \Delta_\nu)$ отличны от нуля. Используя (2.5) и (2.6), получим

$$\frac{l(R, \Delta)^2}{p(R, \Delta)} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{l(R, \Delta_\nu)^2}{p(R, \Delta_\nu)},$$

где неопределенные члены следует считать равными нулю. Теперь проинтегрируем от 0 до ∞ и получим, используя неравенство (2.4), примененное к каждому Δ_ν:

$$\int_0^\infty \frac{l(R, \Delta)^2}{p(R, \Delta)} \frac{dR}{R} \leqslant \int_0^\infty \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{l(R, \Delta_\nu)^2}{p(R, \Delta_\nu)}\right] \frac{dR}{R} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{l(R, \Delta_\nu)^2}{p(R, \Delta_\nu)} \frac{dR}{R} \leqslant 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = 2\pi A.$$

Перестановка интегрирования и суммирования законна, так как слагаемые неотрицательны[1]). Этим доказательство теоремы 2.1 завершается.

2.2. Функции, не обращающиеся в нуль. Теперь мы можем доказать основной результат, связывающий рост функции $f(z)$ с величиной $p(R)$.

Теорема 2.2. *Предположим, что $f(z)$ регулярна и не обращается в нуль в Δ: $|z| < 1$, и пусть $|f(0)| = R_1$, $|f(re^{i\theta})| = R_2$, где $0 < r < 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$.* Тогда

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R, \Delta)} \right| \leqslant 2\left[\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) + \pi\right],$$

где $p(R, \Delta)$ определяется формулой (2.3).

[1]) См. И. П. Натансон [1*], стр. 127.

Предположим для определенности, что $R_1 < R_2$. Если $R_1 > R_2$, так что интеграл отрицателен, то доказательство проводится аналогично. Напишем

$$\zeta = \xi + i\eta = \log \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} \tag{2.7}$$

и положим

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \log \frac{1+r}{1-r}.$$

Рассмотрим $f[z(\zeta)]$ как функцию от ζ, заданную в прямоугольнике

$$D = \left\{ \zeta : \quad \xi_1 - \frac{1}{2}\pi < \xi < \xi_2 + \frac{1}{2}\pi, \quad |\eta| < \frac{1}{2}\pi \right\}.$$

Тогда при преобразовании (2.7) D является образом некоторого подмножества множества Δ, и потому $p(R, D) \leqslant p(R, \Delta)$. Кроме того, $|f|$ изменяется непрерывно от R_1 до R_2, когда $\zeta = \xi + 0i$ возрастает от ξ_1 до ξ_2. Таким образом, для $R_1 < R < R_2$ существует по крайней мере одна точка ζ сегмента $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$ вещественной оси, такая, что $|f(\zeta)| = R$.

Образуем линию уровня γ_R, на которой $|f(z)| = R$, проходящую через такую точку. Тогда γ_R может быть продолжена как аналитическая дуга в обоих направлениях, пока $f[z(\zeta)]$ продолжает быть регулярной и локально однолистной, т. е. пока $f[z(\zeta)]$ регулярна и $f' \neq 0$. Если исключить счетное множество значений R, при которых γ_R проходит через нуль функции f', то γ_R или идет к границе D в обоих направлениях, или пересекает себя.

Этот второй случай, однако, невозможен ввиду того, что $|f(z)| \neq 0$. Действительно, в этом случае мы бы имели подобласть D_0 области D, ограниченную целиком кривой γ_R, на которой $|f| = R$. Применяя принцип максимума модуля к f и $1/f$, мы должны были бы заключить, что f постоянна; этот тривиальный случай мы исключаем.

Таким образом, γ_R идет в обоих направлениях к границе для всех значений R, за исключением счетного множества значений, а сегмент $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$ отстоит по крайней мере на $\pi/2$ от каждой точки границы области D. Следо-

вательно, $l(R) \geqslant \pi$ для всех этих значений R, и теорема 2.1 дает

$$\pi^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R, \Delta)} \leqslant \int_{R_1}^{R_2} \frac{l(R, D)^2\, dR}{Rp(R, D)} \leqslant 2\pi \cdot \pi [\xi_2 - \xi_1 + \pi].$$

Теорема 2.2 доказана.

2.3. Некоторые предположения о средних $p(R)$. Если

$$p(R) \leqslant p \quad (0 < R < +\infty), \tag{2.8}$$

то из теоремы 2.2 мы сразу усматриваем, что

$$\frac{1}{p} \left| \log \frac{R_1}{R_2} \right| < 2 \log \left(e^{\pi} \frac{1+r}{1-r} \right),$$

$$|f(0)| \left(e^{-\pi} \frac{1-r}{1+r} \right)^{2p} < |f(re^{i\theta})| < |f(0)| \left(e^{\pi} \frac{1+r}{1-r} \right)^{2p}.$$

Это и есть результат, который мы имели в виду получить. Следуя Спенсеру [2,3], мы покажем в этом пункте, как можно ослабить (2.8). Положим

$$p(R) = p + h(R),$$

$$W(R) = \int_0^R p(\rho)\, d(\rho^2) = pR^2 + \int_0^R h(\rho)\, d(\rho^2) = pR^2 + H(R).$$

Справедливо следующее неравенство:

Лемма 2.1. *В указанных обозначениях*

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho p(\rho)} \geqslant \frac{1}{p} \left\{ \log \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} - \frac{H(R_2)}{2pR_2^2} - \frac{1}{p} \int_{R_1}^{R_2} \frac{H(\rho)\, d\rho}{\rho^3} \right\}.$$

Имеем

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho p(\rho)} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho [p + h(\rho)]} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} \left[\frac{1}{p} - \frac{h(\rho)}{p^3} + \frac{h^2(\rho)}{p^2 [p + h(\rho)]} \right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{p} \log \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{p^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{h(\rho)\, d\rho}{\rho}.$$

Кроме того,

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{h(\rho)\,d\rho}{\rho} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dH(\rho)}{2\rho^2} = \frac{H(R_2)}{2R_2^2} - \frac{H(R_1)}{2R_1^2} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{H(\rho)\,d\rho}{\rho^3}.$$

Но величина $W(R)$ необходимо положительна, и потому $H(R_1) \geqslant -pR_1^2$. Это и доказывает лемму 2.1.

Следуя Спенсеру, мы будем в этой и следующей главе называть функцию $f(z)$ *p-листной в среднем* в области Δ, если $f(z)$ регулярна в Δ, p — положительное число и

$$W(R) \leqslant pR^2 \qquad (0 < R < \infty).$$

Используя определение (2.3), мы видим, что

$$W(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R n(\rho e^{i\psi})\,\rho\,d\rho\,d\psi,$$

и потому p-листность в среднем означает, что среднее число корней уравнения $f(z) = w$, лежащих в Δ, не превосходит p, когда w изменяется в любом круге $|w| < R$. Теперь может быть доказана

Теорема 2.3. *Предположим, что функция* $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ *p-листна в среднем и не обращается в нуль в круге* $|z| < 1$. *Тогда при* $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ *имеем*

$$\frac{|a_0|}{C}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{2p} < |f(z)| < |a_0|\,C\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2p},$$

где $C = e^{2\pi p + 1/2}$.

Пусть $|a_0| = R_1$, $|f(re^{i\theta})| = R_2$; предположим, например, что $R_2 > R_1$. Тогда теорема 2.2 и лемма 2.1 дают

$$2\left\{\log\frac{1+r}{1-r} + \pi\right\} \geqslant \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} \geqslant \frac{1}{p}\left\{\log\frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2}\right\},$$

так как $H(R) \leqslant 0$ по предположению. Поэтому

$$R_2 < e^{1/2} R_1 \left\{e^{\pi}\frac{1+r}{1-r}\right\}^{2p},$$

что и требовалось. Если $R_1 > R_2$, то аналогичным образом получим

$$R_1 < e^{1/2} R_2 \left\{ e^{\pi} \frac{1+r}{1-r} \right\}^{2p},$$

и теорема 2.3 доказана.

2.3.1. Заметим, что для доказательства соотношения

$$M(r, f) = O(1-r)^{-2p} \qquad (r \to 1)$$

нам потребовалось такое соотношение:

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} > \frac{1}{p} \log \frac{R_2}{R_1} - O(1) \qquad (R_2 \to \infty).$$

Оно выполняется, если

$$\frac{H(R_2)}{R_2^2} \quad \text{и} \quad \int_{R_1}^{R_2} \frac{H(R)\,dR}{R^3}$$

ограничены, когда $R_2 \to \infty$. Это вытекает из леммы 2.1. Эти последние условия, в отличие от условий p-листности в среднем, как легко видеть, не зависят от выбора начала в w-плоскости. Другое, еще более слабое условие подобного типа таково:

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{W(R)}{R^2} \leqslant p, \quad \text{т. е.} \quad \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{H(R)}{R^2} \leqslant 0;$$

но из него вытекает только, что

$$M(r, f) = O(1-r)^{-2p-\varepsilon} \qquad (r \to 1)$$

при каждом положительном ε. Отметив возможность таких обобщений, мы для простоты ограничимся пока p-листными в среднем функциями.

Порядок оценок в теореме 2.3 не может быть улучшен, как показывает пример функции

$$w = f(z) = a_0 \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{2p},$$

отображающей круг $|z|<1$ на сектор (возможно, с самопересечениями) w-плоскости:

$$\left\{w: \left|\arg\frac{w}{a_0}\right|<p\pi \quad (0<|w|<\infty)\right\}.$$

Для этой функции

$$p(R)=p, \quad W(R)=pR^2 \qquad (0<R<\infty).$$

Если p — положительное целое, то $f(z)$ p-листна. В связи с этим примером возникает вопрос, можно ли константу C в теореме 2.3 заменить единицей. Мы увидим в главе 5, что это действительно так, если заменить p-листность в среднем более сильным предположением (2.8).

2.4. Функции, обращающиеся в нуль. Теперь постараемся освободиться в теореме 2.3 от неудобного условия $f(z)\neq 0$. Предположим, что $f(z)$ p-листна в среднем и имеет q нулей (с учетом кратности) в области Δ. Вблизи нуля кратности h функция $f(z)$ принимает всякое достаточно малое значение ровно h раз. Следовательно, для малых положительных R

$$p(R)\geqslant q, \qquad W(R)\geqslant qR^2,$$

и так как $f(z)$ p-листна в среднем, то должно выполняться неравенство $q\leqslant p$. В частности, $f(z)$ может иметь нули, только если $p\geqslant 1$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots,$$

регулярную в $|z|<1$, и напишем

$$\mu_q=\max_{0<\nu<q}|a_\nu|.$$

Будем обозначать через $A(p)$, $A(p, q)$ и т. д. константы, зависящие соответственно только от p или от p и q.

Теперь мы можем доказать следующее обобщение теоремы 2.2:

Теорема 2.4. *Предположим, что функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$ и имеет там не больше q нулей, из которых не более h лежат в круге $|z|<1/2$. Пусть*

$$R_1=(h+2)\,2^{h-1}\mu_h, \qquad R_2=M(r, f) \qquad (0<r<1).$$

Тогда в обозначениях (2.1) *и* (2.3) *имеем*

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} < 2\log\frac{1}{1-r} + A(q).$$

2.4.1. Несколько запутанное доказательство теоремы 2.4 мы разобьем на несколько этапов.

Наша первая задача — найти вблизи начала точку, не слишком близкую к нулям $f(z)$, в которой $|f(z)| \leqslant R_1$.

Лемма 2.2. *Предположим, что функция* $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ *регулярна в круге* $|z| \leqslant \rho$, *где* $0 < \rho \leqslant 1$, *и имеет там не больше* h *нулей. Тогда*

$$P = \min_{|z|=\rho} |f(z)| \leqslant (h+2)\, 2^{h-1} \mu_h.$$

Этот результат очевиден, если $h = 0$, так как в этом случае функция $1/f(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant \rho$ и имеет максимум $1/P$ на окружности $|z| = \rho$. Поэтому теорема о максимуме модуля дает $1/P \geqslant 1/|a_0|$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $h > 0$ и $P > 0$, так как в противном случае нечего доказывать. Предположим также, что $\rho = 1$. Действительно, доказав лемму для этого случая, мы можем при $\rho < 1$ рассмотреть функцию $\varphi(z) = f(\rho z)$ вместо $f(z)$. Тогда результат получится и для $f(z)$, так как коэффициенты $\varphi(z)$ имеют модули, не превосходящие модулей соответствующих коэффициентов $f(z)$.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_h$ — нули функции $f(z)$ в $|z| \leqslant 1$, а значит, в $|z| < 1$; определим функцию $g(z)$ равенством

$$\prod_{n=1}^{h} (z - z_n) = \prod_{n=1}^{h} (1 - \bar{z}_n z) f(z)\, g(z). \tag{2.9}$$

Тогда $g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu$ регулярна в круге $|z| \leqslant 1$. Кроме того, на окружности $|z| = 1$ имеем

$$|g(z)| = \left|\frac{1}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{P}.$$

Неравенства Коши дают

$$|g_\nu| \leqslant \frac{1}{P}.$$

Следовательно, коэффициенты функции в правой части равенства (2.9) не превосходят соответствующих коэффициентов функции

$$(1+z)^h \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| z^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} P^{-1} z^\nu.$$

Так как коэффициент при z^h в левой части равенства (2.9) есть единица, то, сравнивая коэффициенты при z^h в (2.9), получаем

$$1 \leqslant P^{-1} \sum_{r=0}^{h} \binom{h}{r} \sum_{\nu=0}^{h-r} |a_\nu| \leqslant P^{-1} \sum_{r=0}^{h} (h-r+1) \binom{h}{r} \mu_h = \\ = (h+2)\, 2^{h-1} P^{-1} \mu_h.$$

Лемма доказана.

2.4.2. Проведем теперь наше доказательство с помощью последовательного применения теоремы 2.2, двигаясь вдоль цепи кругов так, чтобы избежать нулей $f(z)$.

Лемма 2.3. *Предположим, что $f(z)$ регулярна в $\Delta: |z|<1$ и имеет там не более q нулей. Пусть z_1, z_2 — две такие точки, что круги $|z-z_1|<\delta$, $|z-z_2|<\delta$ лежат в круге $|z|<1$ и не содержат нулей функции $f(z)$, причем $|z_1-z_2|<C\delta$, где C, δ положительны. Если $p(R)=p(R, \Delta)$ определено формулой* (2.3) *и $R_1=|f(z_1)|$, $R_2=|f(z_2)|$, то*

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} < A(C, q).$$

В приложениях C будет константой, зависящей лишь от q, так что $A(C, q)$ тоже будет зависеть только от q.

Приступая к доказательству леммы 2.3, обозначим точки z_1, z_2 через P и Q. Положим $P_0=P$, и пусть $1 \leqslant n \leqslant q$. Проведем отрезок PP_n длины $n\delta/(2q)$ так, чтобы угол P_nPQ был прямым, описываемым в положительном направлении. Пусть $Q=Q_0$, а отрезок QQ_n равен и параллелен PP_n.

Тогда каждый отрезок P_nQ_n при $0 \leqslant n \leqslant q$ имеет длину не больше $C\delta$, и никакая точка не может отстоять меньше чем на $\delta/(4q)$ более чем от одной из этих линий. Значит, по

крайней мере один из этих отрезков отстоит по крайней мере на $\delta/(4q)$ от всех нулей функции $f(z)$. Если P_nQ_n — такой отрезок, то рассмотрим ломаную Г: PP_nQ_nQ. Так как все углы Г лежат в круге $|z| \leqslant 1 - \delta/2$, то и вся Г лежит там же. Далее, эта ломаная по построению и по предположению отстоит по крайней мере на $\delta/(4q)$ от каждого нуля функции $f(z)$.

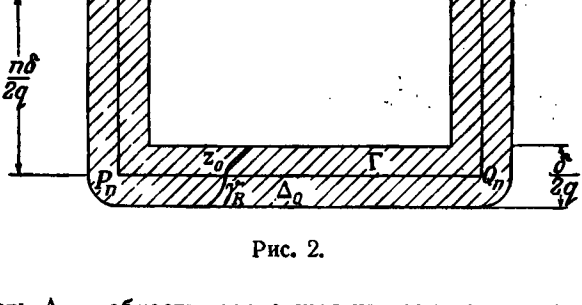

Рис. 2.

Пусть Δ_0 — область, состоящая из всех точек, расстояние которых от Г не превосходит $\delta/(4q)$. Площадь A области Δ_0 не превосходит $\frac{\delta}{2q}\left[l + \frac{\delta}{2q}\right]$, где l — длина Г, и потому

$$A \leqslant (C+2)\frac{\delta^2}{2q}.$$

Кроме того, при $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$ на Г имеется точка z_0, такая, что $|f(z_0)| = R$. Так как $f(z) \neq 0$ в Δ_0, то мы видим, как при доказательстве теоремы 2.2, что линия уровня γ_R: $|f(z)| = R$, проходящая через z_0, не может иметь петель внутри Δ_0, ибо такая петля должна была бы охватывать нуль функции $f(z)$. Таким образом, γ_R должна вытягиваться к границе области Δ_0 в обоих направлениях, за исключением конечного числа значений R, при которых γ_R может встретить нуль $f'(z)$.

Поэтому к функции $f(z)$ в области Δ_0 можно применить теорему 2.1 с

$$l(R, \Delta_0) \geqslant \frac{\delta}{2q}$$

при всех значениях R из интервала $R_1 \leqslant R \leqslant R_2$, за исключением конечного числа значений, и это дает

$$\left(\frac{\delta}{2q}\right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R, \Delta_0)} \leqslant 2\pi A \leqslant 2\pi (C+2)\frac{\delta^2}{2q}.$$

Лемма 2.3 доказана, так как $p(R, \Delta) \geqslant p(R, \Delta_0)$.

2.4.3. Нам понадобится также

Лемма 2.4. *Предположим, что функция* $f(z)$ *регулярна в* Δ: $|z|<1$ *и не имеет нулей в кольце* $2r_1 - 1 < |z| < \frac{1}{2}(1+r_2)$, *где* $\frac{1}{2} \leqslant r_1 < r_2 < 1$. *Напишем* $z_1 = r_1 e^{i\theta}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta}$, $|f(z_1)| = R_1$, $|f(z_2)| = R_2$ *и определим* $p(R) = p(R, \Delta, f)$ *формулой* (2.3). *Тогда*

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} < 2 \log \frac{1-r_1}{1-r_2} + 10.$$

Положим

$$z = z_1 + \delta\zeta, \quad \varphi(\zeta) = f(z_1 + \delta\zeta),$$

где $\delta = \frac{1}{2}(1+r_2) - r_1$. Тогда круг C_0: $|\zeta|<1$ соответствует некоторому кругу, лежащему в кольце $r_1 - \delta < |z| < r_1 + \delta$ и, значит, в $2r_1 - 1 < |z| < \frac{1}{2}(1+r_2)$, так как $\frac{1}{2}(1+r_2) < 1$. Таким образом, $\varphi(\zeta) \neq 0$ в C_0 и

$$p(R, C_0, \varphi) \leqslant p(R, \Delta, f) = p(R).$$

Если определить ζ из равенства $z_1 + \delta\zeta = z_2$, то теорема 2.2, примененная к $\varphi(\zeta)$, дает

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} \leqslant 2\left[\log\left(\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\right) + \pi\right] < 2\left[\log\left(\frac{2}{1-|\zeta|}\right) + \pi\right] =$$

$$= 2\left[\log\frac{2\delta}{\delta - (r_2 - r_1)} + \pi\right] < 2\left[\log\frac{4(1-r_1)}{1-r_2} + \pi\right].$$

Лемма доказана.

2.4.4. Окончание доказательства теоремы 2.4. Пусть теперь выполнены предположения теоремы 2.4. Так как в круге

$|z| < 1/2$ находится не более $h \leqslant q$ нулей, то хотя бы одно из колец

$$\nu/[2(q+1)] < |z| < (\nu+1)/[2(q+1)], \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant q,$$

не содержит нулей $f(z)$. Если ν — тот номер, при котором это выполняется, то положим

$$r_1 = \frac{\nu + 1/2}{2(q+1)}.$$

Тогда по лемме 2.2 мы сможем найти z_1 так, что $|z_1| = r_1$ и $|f(z_1)| \leqslant R_1$, где R_1 определяется, как в теореме 2.4. Далее, круг $|z - z_1| < [4(q+1)]^{-1}$ лежит в круге $|z| < 1/2$ и не содержит нулей функции $f(z)$.

Теперь окружим каждый из нулей ζ_μ функции $f(z)$, лежащих в кольце $3/4 \leqslant |z| < 1$, кольцом

$$2|\zeta_\mu| - 1 < |z| < \frac{1}{2}(1 + |\zeta_\mu|).$$

Если два или более таких кольца перекрываются, то мы их объединим так, чтобы они вместе образовывали единое кольцо. Таким образом, мы получим не более q неперекрывающихся колец, которые назовем „черными" кольцами. Если $\rho < |z| < \rho'$ — одно из черных колец, то

$$1 - \rho < 4^q(1 - \rho'). \tag{2.10}$$

В теореме 2.4 можно считать, что $r \geqslant 3/4$, так как если теорема верна при $r \geqslant 3/4$, то она и вообще верна. Пусть r_2 — наименьшее из чисел, таких, что $r_2 \geqslant r$ и окружность $|z| = r_2$ не лежит в черном кольце. Тогда, согласно (2.10),

$$(1 - r_2) \geqslant 4^{-q}(1 - r). \tag{2.11}$$

Кроме того, $M(r_2, f) \geqslant M(r, f)$, и потому можно найти $z_2 = r_2 e^{i\theta}$ так, чтобы

$$|f(z_2)| \geqslant R_2 = M(r, f).$$

Пусть ρ_0' — нижняя грань всех таких чисел, что $\rho_0' \geqslant 3/4$ и окружность $|z| = \rho_0'$ не лежит в черном кольце. Тогда, согласно (2.10),

$$\rho_0' < 1 - 4^{-(q+1)}, \tag{2.12}$$

и, кроме того, $3/4 \leqslant \rho_0' \leqslant r_2$. Пусть

$$\rho_1 < |z| < \rho_1', \quad \rho_2 < |z| < \rho_2', \quad \ldots, \quad \rho_k < |z| < \rho_k'$$

— черные кольца, разделяющие окружности $|z| = \rho_0'$ и $|z| = r_2$ и упорядоченные так, что

$$\rho_0' \leqslant \rho_1 < \rho_1' \leqslant \rho_2 < \rho_2' \leqslant \ldots \leqslant \rho_k < \rho_k' \leqslant r_2.$$

Положим

$$\zeta_\nu = \rho_\nu e^{i\theta} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant k), \qquad \zeta_\nu' = \rho_\nu' e^{i\theta} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant k),$$
$$|f(\zeta_\nu)| = R_{(\nu)}, \qquad |f(\zeta_\nu')| = R_{(\nu)}'.$$

Тогда точки ζ_ν, ζ_ν' лежат вне черных колец при $1 \leqslant \nu \leqslant k$, и потому круги

$$|z - \zeta_\nu| < \frac{1}{2}(1 - \rho_\nu), \qquad |z - \zeta_\nu'| < \frac{1}{2}(1 - \rho_\nu')$$

не содержат нулей функции $f(z)$. В силу (2.10) имеем

$$|\zeta_\nu' - \zeta_\nu| < 1 - \rho_\nu < 4^q(1 - \rho_\nu').$$

Таким образом, можно применить лемму 2.3 с $\delta = (1 - \rho_\nu')/2$, $C = 2 \cdot 4^q$; получим

$$\int_{R_{(\nu)}}^{R_{(\nu)}'} \frac{dR}{Rp(R)} < A(q) < A(q) + 2\log\left(\frac{1 - \rho_\nu}{1 - \rho_\nu'}\right) \quad (1 \leqslant \nu \leqslant k). \tag{2.13}$$

Подобным образом круги

$$|z - z_1| < \frac{1}{4(q+1)}, \qquad |z - \zeta_0'| < \frac{1}{2}(1 - \rho_0')$$

не содержат нулей, и ввиду (2.12) можно применить лемму 2.3, которая дает

$$\int_{R_1}^{R_{(0)}'} \frac{dR}{Rp(R)} < A(q). \tag{2.14}$$

Наконец, ни один из нулей не лежит в кольцах

$$2\rho'_\nu - 1 < |z| < \frac{1}{2}(1+\rho_{\nu+1}) \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant k-1),$$

или

$$2\rho'_k - 1 < |z| < \frac{1}{2}(1+r_2),$$

и потому можно применить лемму 2.4 и получить

$$\int_{R'_{(\nu)}}^{R_{(\nu+1)}} \frac{dR}{Rp(R)} < 2\log\frac{1-\rho'_\nu}{1-\rho_{\nu+1}} + 10 \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant k-1) \quad (2.15)$$

и, кроме того,

$$\int_{R'_{(k)}}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} < 2\log\frac{1-r_2}{1-\rho'_k} + 10. \qquad (2.16)$$

Складывая неравенства (2.13) — (2.16), получим, в силу (2.11),

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} < 2\log\frac{1-\rho'_0}{1-r_2} + [10 + A(q)](k+1) <$$

$$< 2\log\frac{1}{1-r} + A(q),$$

так как $k \leqslant q$. Теорема 2.4 доказана.

2.5. Теорема Картрайт и Спенсера. Теперь в теореме 2.3 можно также избавиться от предположения, что $f(z) \neq 0$; покажем, что верна

Теорема 2.5. *Пусть функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

p-листна в среднем в круге $|z| < 1$. *Тогда*

$$M(r, f) < A(p)\mu_p(1-r)^{-2p} \qquad (0 < r < 1).$$

Этот результат был доказан Картрайт [1] для p-листных функций. В приведенном здесь виде он принадлежит Спенсеру [3].

Заметим, что $f(z)$ в круге $|z|<1$ имеет $q \leqslant p$ нулей, так как $f(z)$ p-листна в среднем. Теперь теорема 2.4 дает

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} < 2\log\frac{1}{1-r} + A(q),$$

и так как $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$, то в лемме 2.1 $H(R) \leqslant 0$, и из этой леммы получаем

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} \geqslant \frac{1}{p}\log\frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы находим, что

$$\log\frac{R_2}{R_1} < 2p\log\frac{1}{1-r} + \frac{p}{2} + pA(q),$$

и, учитывая определения R_1 и R_2 в теореме 2.4 и неравенства $0 \leqslant h \leqslant q \leqslant p$, получаем

$$M(r, f) < A(p)\nu_h(1-r)^{-2p} \leqslant A(p)\nu_p(1-r)^{-2p},$$

что и требовалось.

2.6. Одновременный рост вблизи различных граничных точек[1]. Мы видели, что p-листная в среднем в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$|f(z)| = O(1-r)^{-2p} \qquad (|z|=r).$$

Однако функция может быть такой большой только на одной довольно малой дуге $|z|=r$. Мы заключим эту главу изучением следующего вопроса: каким образом $f(z)$ может становиться большой вблизи нескольких различных точек окружности $|z|=r$. Основным нашим результатом является

Теорема 2.6. *Пусть функция $f(z)$ p-листна в среднем в области Δ, содержащей k попарно не пересекающихся*

[1]) Читатель может при желании отложить ознакомление с остальными результатами этой главы до тех пор, пока они не потребуются в главах 3 и 5.

кругов $|z-z_n|<r_n$ $(1\leqslant n\leqslant k)$. *Предположим, далее, что* $|f(z_n)|\leqslant R_1$, $|f(z_n')|\geqslant R_2>eR_1$, *где*

$$\delta_n=\frac{r_n-|z_n'-z_n|}{r_n}>0,$$

и что $f(z)\neq 0$ *при* $|z-z_n|<r_n/2$ $(1\leqslant n\leqslant k)$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{k}\left[\log\frac{A(p)}{\delta_n}\right]^{-1}<\frac{2p}{\log(R_2/R_1)-1}.$$

Пусть Δ_n — круг $|z-z_n|<r_n$, и пусть величина

$$p_n(R)=p(R,\ \Delta_n,\ f)$$

определяется формулой (2.3). Рассмотрим

$$\varphi(\zeta)=f(z_n+r_n\zeta).$$

Тогда $p_n(R)$ соответствует $\varphi(\zeta)$ и $|\zeta|<1$. Выберем ζ_n так, что

$$z_n+r_n\zeta_n=z_n',\quad \zeta_n=\frac{z_n'-z_n}{r_n}.$$

Тогда $|\varphi(0)|\leqslant R_1$, $|\varphi(\zeta_n)|\geqslant R_2$, $\varphi(\zeta)\neq 0$ при $|\zeta|<1/2$ и $\varphi(\zeta)$ имеет не больше p нулей в круге $|\zeta|<1$. Таким образом, теорема 2.4 дает

$$\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{Rp_n(R)}<2\log\frac{A(p)}{1-|\zeta_n|}=2\log\frac{A(p)}{\delta_n}.$$

Теперь с помощью неравенства Шварца получаем

$$\left(\log\frac{R_2}{R_1}\right)^2=\left(\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R}\right)^2\leqslant\int_{R_1}^{R_2}\frac{p_n(R)\,dR}{R}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{Rp_n(R)},$$

и потому

$$\frac{1}{\log\left(\frac{A(p)}{\delta_n}\right)}\leqslant\frac{2}{\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{Rp_n(R)}}\leqslant\frac{2}{\left(\log\frac{R_2}{R_1}\right)^2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{p_n(R)\,dR}{R}.$$

Складывая, заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{k}\left[\log\frac{A(p)}{\delta_n}\right]^{-1}\leqslant\frac{2}{[\log(R_2/R_1)]^2}\int_{R_1}^{R_2}\left[\sum_{n=1}^{k}p_n(R)\right]\frac{dR}{R}. \quad (2.17)$$

Теперь

$$\sum_{n=1}^{k}p_n(R)=\sum_{n=1}^{k}p(R,\ \Delta_n)\leqslant p(R,\ \Delta)=p(R). \quad (2.18)$$

Используя обозначения § 2.3 и учитывая, что функция $f(z)$ p-листна в среднем в Δ, имеем

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{R_2}p(R)\frac{dR}{R}&=p\log\frac{R_2}{R_1}+\int_{R_1}^{R_2}h(R)\frac{dR}{R}=\\&=p\log\frac{R_2}{R_1}+\frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dH(R)}{R^2}=\\&=p\log\frac{R_2}{R_1}+\frac{H(R_2)}{2R_2^2}-\frac{H(R_1)}{2R_1^2}+\int_{R_1}^{R_2}\frac{H(R)\,dR}{R^3}\leqslant\\&\leqslant p\left[\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)+\frac{1}{2}\right],\end{aligned}$$

так как $-pR^2\leqslant H(R)\leqslant 0$. Используя (2.17) и (2.18), заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{k}\left[\log\left(\frac{A(p)}{\delta_n}\right)^{-1}\right]\leqslant\frac{2p}{[\log(R_2/R_1)]}+\frac{p}{[\log(R_2/R_1)]^2}<$$

$$<\frac{2p}{\log(R_2/R_1)-1},$$

а это и доказывает теорему 2.6.

2.7. Мы дадим два приложения теоремы 2.6. Сначала мы используем ее для того, чтобы получить представление о порядке роста p-листной в среднем функции вблизи граничной точки.

Предположим, что функция $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$ и что для $\zeta=e^{i\theta}$ имеются путь $\gamma(\theta)$, лежащий

целиком в круге $|z|<1$, за исключением своей конечной точки, и такое положительное число δ, что

$$\varliminf (1-|z|)^{\delta}|f(z)|>0,$$

когда $z\to\zeta$ вдоль $\gamma(\theta)$. *Порядком* $\alpha(\zeta)$ функции $f(z)$ в точке ζ назовем точную верхнюю грань всех [1]) таких δ. Если не существует пути $\gamma(\theta)$ и положительного числа δ, удовлетворяющих указанному условию, то мы положим $\alpha(\zeta)=0$. Теперь мы можем доказать следующий результат Спенсера [3]:

Теорема 2.7. *Если $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$, то множество E различных ζ на окружности $|\zeta|=1$, таких, что $\alpha(\zeta)>0$, не более чем счетно и выполняется неравенство* $\sum\limits_{E}\alpha(\zeta)\leqslant 2p$.

Достаточно доказать, что если $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ — различные точки окружности $|\zeta|=1$, то

$$\sum_{n=1}^{k}\alpha(\zeta_n)\leqslant 2p.$$

Действительно, тогда множество E_N точек ζ, таких, что $|\zeta|=1$ и $\alpha(\zeta)>N^{-1}$, конечно для $N=1, 2, 3, \ldots$, и потому объединение E всех E_N счетно. Взяв $k\to\infty$ в последнем неравенстве, получим $\sum\alpha(\zeta)\leqslant 2p$, что и требовалось.

Предположим, что теорема 2.7 неверна. Тогда, согласно приведенному выше замечанию, можно найти конечное число точек $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ и $\varepsilon>0$ так, что

$$\sum_{n=1}^{k}\alpha(\zeta_n)=2(p+k\varepsilon).$$

Для каждого ζ_n существует путь γ_n, лежащий в круге $|z|<1$ и оканчивающийся в ζ_n, на котором

$$(1-|z|)^{\eta_n}|f(z)|>1,$$

[1]) С учетом всех путей $\gamma(\theta)$, ведущих в точку ζ; т. е. верхняя грань чисел δ берется на множестве всех пар $[\gamma(\theta), \delta]$, для которых $\varliminf(1-|z|)^{\delta}|f(z)|>0$ вдоль $\gamma(\theta)$. — *Прим. ред.*

где $\eta_n = \alpha(\zeta_n) - \varepsilon$, и потому

$$\sum_{n=1}^{k} \eta_n > 2p. \tag{2.19}$$

Значит, существует $R_0 > 0$, такое, что для $R_2 > R_0$ можно найти точку $z_n' = r_n e^{i\theta_n}$ на γ_n, в которой

$$|f(z_n')| = R_2 > \left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\eta_n} \qquad (1 \leqslant n \leqslant k). \tag{2.20}$$

Выберем теперь δ столь малым, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) $f(z)$ отлично от нуля для $1 - 2\delta < |z| < 1$,

(ii) $$4\delta < \min_{1 \leqslant m < n \leqslant k} |\zeta_m - \zeta_n|,$$

и пусть $r_0 = 1 - \delta$. Тогда при достаточно большом R_2

$$|z_m' - z_n'| > 4\delta \qquad (1 \leqslant m < n \leqslant k),$$

так как $z_n' \to \zeta_n$ при $R_2 \to \infty$. Если положить $z_n = r_0 e^{i\theta_n}$, то круги $|z - z_n| < \delta$ попарно не пересекаются. Кроме того,

$$|f(z_n)| \leqslant R_1 = M(r_0, f) \quad \text{и} \quad |f(z_n')| = R_2,$$

причем можно считать, что $R_2 > eR_1$. Таким образом, применима теорема 2.6 с

$$\delta_n = \frac{\delta - (r_n - r_0)}{\delta} = \frac{1 - r_n}{\delta};$$

мы получаем

$$\sum_{n=1}^{k} \left[\log\left(\frac{A(p)\delta}{1-r_n}\right)\right]^{-1} \leqslant \frac{2p}{\log(R_2/eR_1)}.$$

Ввиду (2.20) заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{k} \left[\log\left(A(p)\delta R_2^{1/\eta_n}\right)\right]^{-1} \leqslant \frac{2p}{\log R_2 - \log(eR_1)},$$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{\eta_n}{\eta_n \log[A(p)\delta] + \log R_2} \leqslant \frac{2p}{\log R_2 - \log(eR_1)}.$$

При $R_2 \to \infty$ обе части этого неравенства асимптотически равны

$$\frac{\sum \eta_n}{\log R_2} \quad \text{и} \quad \frac{2p}{\log R_2}$$

соответственно, и мы получаем противоречие с (2.19). Этим теорема 2.7 доказана.

2.7.1. Один пример. Неравенство теоремы 2.7 не может быть улучшено. Действительно, пусть α_n — любая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая равенству

$$\sum \alpha_n = 2,$$

где $1 \leqslant n < k$, а k может быть конечным или бесконечным. Пусть $S_0 = 0$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n$ $(1 \leqslant N < k)$, и пусть D — область,

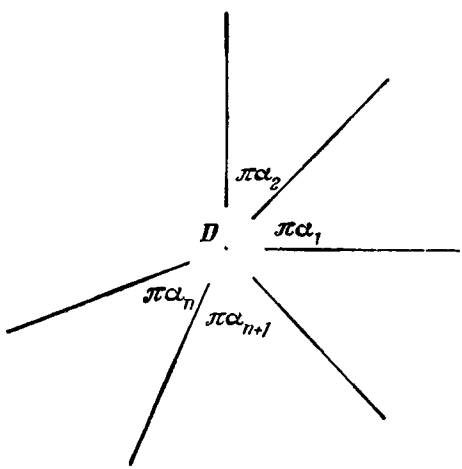

Рис. 3.

являющаяся w-плоскостью с разрезами от $|w| = 1$ до ∞ вдоль линий

$$\arg w = \pi S_N \qquad (0 \leqslant N < k).$$

По теореме Римана об отображении [1]) можно найти функцию $z=\varphi(w)$, отображающую область D взаимно однозначно и конформно на круг $|z|<1$.

Когда w движется вдоль границы той части D_N области D, которая лежит в угле $\pi S_{N-1}<\arg w<\pi S_N$, z движется вдоль некоторой дуги единичной окружности. Одновременно с этим $W=w^{-1/\alpha_n}$ движется вдоль прямолинейного отрезка, проходящего через начало, а потому, согласно принципу симметрии Шварца [2]), z можно продолжить как регулярную функцию от W в окрестность $W=0$. Обратно, если $z=z_n$ соответствует $W=0$, то W оказывается регулярной функцией от z в окрестности z_n. Таким образом, в окрестности $z=z_n$

$$W=c_1(z-z_n)+c_2(z-z_n)^2+\ldots,$$

где $c_1\neq 0$. Это дает

$$w\sim[c_1(z-z_n)]^{-\alpha_n}\qquad(z\to z_n).$$

Значит, функция $w=f(z)=\varphi^{-1}(z)$, отображающая круг $|z|<1$ на область D, однолистна и имеет порядок α_n в точке z_n при $1\leqslant n\leqslant k$; α_n — произвольные числа, подчиненные условию $\sum\alpha_n=2$. При каждом положительном p функция $[f(z)-1]^p$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$ и имеет порядки $p\alpha_n$ в точках z_n, где теперь $p\alpha_n$ — любая последовательность, удовлетворяющая условию $\sum p\alpha_n=2p$.

2.8. Функции максимального роста. Мы видели, что если $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$, то

$$M(r,f)=O(1-r)^{-2p}\qquad(r\to 1).$$

Мы завершим эту главу более подробным исследованием тех функций, для которых этот порядок роста действительно достигается, так что

$$\alpha=\overline{\lim_{r\to 1}}(1-r)^{2p}M(r,f)>0. \tag{2.21}$$

---

[1]) См., например, А. И. Маркушевич, [1*], стр. 376.
[2]) Там же, стр. 673.

Мы покажем, что $f(z)$ достигает такого роста на некотором радиусе и что $|f(z)|$ совсем мал вне окрестности этого радиуса.

Теорема 2.8. *Предположим, что функция $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$ и что выполняется условие* (2.21). *Тогда существует такое* θ_0 $(0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$, *что*

$$\alpha_0 = \varlimsup_{r \to 1} (1-r)^{2p} |f(re^{i\theta_0})| \geqslant \frac{\alpha}{A(p)}.$$

Мы можем предположить, что $f(z) \neq 0$ при $1-2\delta < |z| < 1$, где $\delta > 0$, так как $f(z)$ имеет лишь конечное число нулей в круге $|z|<1$. Положим $r_0 = 1-\delta$. Тогда существует последовательность $\zeta_n = r_n e^{i\theta_n}$, где $r_0 < r_n < 1$, $0 \leqslant \theta_n \leqslant 2\pi$, такая, что $r_n \to 1$ $(n \to \infty)$ и $|f(\zeta_n)| > \alpha(1-r_n)^{-2p}/2$.

Положим $z_1 = re^{i\theta_n}$, где $r_0 < r < r_n$, $z_2 = r_n e^{i\theta_n} = \zeta_n$, $R_1 = |f(z_1)|$, $R_2 = |f(z_2)|$ и применим лемму 2.4. Это даст

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} < 2 \log \frac{1-r}{1-r_n} + 10.$$

Так как функция $f(z)$ p-листна в среднем, то из леммы 2.1 имеем

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{Rp(R)} \geqslant \frac{1}{p}\left\{\log \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2}\right\}.$$

Значит,

$$|f(re^{i\theta_n})|(1-r)^{2p} = R_1(1-r)^{2p} > \frac{2R_2(1-r_n)^{2p}}{A(p)} > \frac{\alpha}{A(p)}$$
$$(r_0 < r < r_n).$$

Пусть θ_0 — предельная точка последовательности θ_n. Тогда

$$|f(re^{i\theta_0})|(1-r)^{2p} \geqslant \frac{\alpha}{A(p)} \qquad (r_0 \leqslant r < 1),$$

так как $r_n \to 1$ $(n \to \infty)$, и теорема 2.8 доказана.

В главе 5 мы сможем показать, что при более сильном предположении (2.8) имеет место равенство $\alpha = \alpha_0$, так что оба эти числа являются пределами.

2.8.1. Из теоремы 2.7 следует, что функция $f(z)$ должна иметь нулевой порядок во всех точках окружности $|z| = 1$, отличных от $e^{i\theta_0}$, так что точка $e^{i\theta_0}$ в теореме 2.8 непременно единственна. Однако можно доказать и более сильное утверждение.

Теорема 2.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8. *Тогда по заданному* ε, $0 < \varepsilon < 2p$, *можно найти положительную постоянную* C *и* $r_0 < 1$ *так, что*

$$|f(re^{i\theta})| < \frac{1}{(1-r)^{\varepsilon}\,|\theta-\theta_0|^{2p-\varepsilon}} \tag{2.22}$$

при $r_0 < r < 1$, $C(1-r) \leqslant |\theta-\theta_0| \leqslant \pi$. *Далее, при* $r \to 1$

$$\log|f(re^{i\theta})| < O\left[\log\frac{1}{1-r}\right]^{1/2} \tag{2.23}$$

равномерно относительно θ, *удовлетворяющих неравенствам* $\varepsilon \leqslant |\theta-\theta_0| \leqslant \pi$.

Мы видим, что (2.23) выполняется, в частности, когда $re^{i\theta}$ стремится к любой точке окружности $|z| = 1$, отличной от $e^{i\theta_0}$. Это гораздо более сильное утверждение, чем утверждение о том, что функция имеет нулевой порядок.

Пусть теперь функция $f(z)$ p-листна в среднем, $f(z) \neq 0$ при $1 - 2\delta < |z| < 1$, и пусть

$$|f(re^{i\theta_0})| \geqslant \frac{1}{2}\,\alpha_0(1-r)^{-2p} \qquad (1-\delta < r < 1). \tag{2.24}$$

Эти предположения выполняются при всех достаточно малых δ. Напишем также

$$R_1 = M(1-\delta, f) = \max_{|z|=1-\delta} |f(z)|,$$

$$z_1 = (1-\delta)e^{i\theta_0}, \qquad z_2 = (1-\delta)e^{i\theta}$$

и предположим, что $4\delta \leqslant |\theta-\theta_0| \leqslant \pi$. Тогда круги $|z-z_1| < \delta$, $|z-z_2| < \delta$ не пересекаются.

Теперь допустим, что

$$|f(r_2e^{i\theta})| = R_2 > eR_1, \tag{2.25}$$

где $1-\delta<r_2<1$, и положим $z_2'=r_2e^{i\theta}$, $z_1'=r_1e^{i\theta_0}$, где r_1 — наименьшее число, такое, что

$$|f(z_1')|=|f(r_1e^{i\theta_0})|=R_2.$$

Такое число существует в силу (2.25) и теоремы 2.8. Тогда $r_1>1-\delta$ по определению R_1.

Применив теперь теорему 2.6 с

$$\delta_1=\frac{\delta-[r_1-(1-\delta)]}{\delta}=\frac{1-r_1}{\delta},\qquad \delta_2=\frac{1-r_2}{\delta},$$

получим

$$\left[\log\left(\frac{A(p)\delta}{1-r_2}\right)\right]^{-1}\leqslant\frac{2p}{\log(R_2/R_1)-1}-\left[\log\left(\frac{A(p)\delta}{1-r_1}\right)\right]^{-1}. \quad (2.26)$$

Далее, согласно (2.24),

$$R_2\geqslant\frac{1}{2}a_0(1-r_1)^{-2p},$$

и по теореме 2.5

$$R_1\leqslant A(p)\mu_p\delta^{-2p}.$$

Таким образом,

$$\frac{R_2}{R_1}\geqslant C_1\left(\frac{\delta}{1-r_1}\right)^{2p},$$

где C_1, C_2, ... — константы, зависящие лишь от p и $f(z)$. Отсюда и из (2.25) заключаем, что

$$\left[\log\frac{A(p)\delta}{1-r_2}\right]^{-1}\leqslant\frac{2p}{\log(R_2/R_1)-1}-\frac{2p}{\log(R_2/R_1)+C_2},$$

а это дает

$$\log\left(\frac{A(p)\delta}{1-r_2}\right)\geqslant C_3\left\{\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)-1\right\}^2.$$

Таким образом,

$$\log\frac{R_2}{R_1}\leqslant 1+C_4\left[\log\left(\frac{C_5\delta}{1-r_2}\right)\right]^{1/2}. \quad (2.27)$$

Фиксируя δ и R_1 и считая, что выполняется (2.25), выводим (2.23); если (2.25) не выполнено, то доказываемое неравенство тривиально.

Остается доказать (2.22). Снова предположим, не умаляя общности, что выполняется (2.25). Тогда (2.27) дает при условии, что $\delta = \frac{1}{4}|\theta - \theta_0| \geqslant 1 - r_2$,

$$R_2 < R_1 \exp\left\{1 + C_4\left[\log \frac{C_5\delta}{(1-r_2)}\right]^{1/2}\right\} <$$
$$< C_6 |\theta - \theta_0|^{-2p} \exp\left\{C_4\left[\log \frac{C_5\delta}{1-r_2}\right]^{1/2}\right\} <$$
$$< \frac{1}{|\theta - \theta_0|^{2p-\varepsilon}(1-r_2)^{\varepsilon}},$$

если

$$\left(\frac{|\theta - \theta_0|}{1-r_2}\right)^{\varepsilon} > C_6 \exp\left\{C_4\left(\log\left[\frac{C_5|\theta - \theta_0|}{4(1-r_2)}\right]\right)^{1/2}\right\},$$

что верно при $|\theta - \theta_0| \geqslant C(1-r_2)$, где C зависит лишь от p, ε и $f(z)$. Это доказывает неравенство (2.22), а с ним и теорему 2.9.

Некоторые дальнейшие приложения теоремы 2.6 будут даны в следующих главах.

Глава 3

СРЕДНИЕ И КОЭФФИЦИЕНТЫ

3.0. Введение. В предыдущей главе мы исследовали рост функции

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n,$$

p-листной в среднем в круге $|z|<1$. В теореме 2.5 мы показали, что максимум модуля $M(r, f)$ удовлетворяет неравенству

$$M(r, f)<A(p)\mu_p(1-r)^{-2p} \qquad (0<r<1). \tag{3.1}$$

В этой главе мы оценим порядок величин коэффициентов a_n и покажем, что для всякой функции $f(z)$, p-листной в среднем в круге $|z|<1$, и постоянных $C>0$ и $\alpha>1/2$ неравенство

$$M(r, f)<C(1-r)^\alpha \qquad (0<r<1) \tag{3.2}$$

влечет

$$|a_n|<A(p, \alpha)C(1+n)^{\alpha-1} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{3.3}$$

Из этого сразу следует, что если $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$, так что выполняется (3.1), то

$$|a_n|<A(p)\mu_p n^{2p-1} \qquad (n\geqslant 1) \tag{3.4}$$

при условии, что $p>1/4$. Пример функции

$$f(z)=(1-z)^{-2p}=\sum_0^\infty b_{n,\,p}z^n, \tag{3.5}$$

p-листной в среднем в круге $|z|<1$, для которой

$$b_{n,\,p}=\frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(2p)\Gamma(n+1)}\sim\frac{n^{2p-1}}{\Gamma(2p)} \qquad (n\to\infty), \tag{3.6}$$

показывает, что порядок величин в оценках (3.4) точен.

Метод, использованный Литтльвудом [1] для доказательства теоремы 1.6, достаточен, чтобы показать, что из (3.2) следует (3.3), если $f(z)$ однолистна и $\alpha > 1$. Идея обобщения этого факта на случай $\alpha > 1/2$ впервые появилась в совместной работе Литтльвуда и Палея [1]. Их рассуждения были распространены на случай p-листных функций Бернацким [1] и на случай p-листных в среднем функций Спенсером [2].

Далее мы покажем с помощью одного примера Спенсера [3], что, вообще говоря, из (3.2) не следует (3.3) для p-листных в среднем функций $f(z)$, если $\alpha < 1/2$, и что оценка (3.4) в общем случае неверна, если $p < 1/4$.

В заключительных пунктах этой главы мы дадим некоторые дальнейшие приложения наших главных результатов, оценив коэффициенты p-листных в среднем функций, принадлежащих некоторым классам, для которых могут быть найдены более точные границы, чем (3.1).

3.1. Тождества Харди—Штейна—Спенсера. Предположим теперь, что функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и, далее, что $\lambda > 0$ и $0 < r < 1$. Пусть $n(r, w)$ — число корней уравнения $f(z) = w$ в круге $|z| < r$; положим

$$p(r, R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(r, Re^{i\psi})\, d\psi.$$

Таким образом, $p(R) = p(r, R)$ определяется как в (2.3), если Δ есть область $|z| < r$. Пусть, кроме того,

$$I_\lambda(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda\, d\theta.$$

Тогда справедливо следующее замечательное тройное тождество [1]).

---

[1]) Первое равенство принадлежит Харди [1] и Штейну [1], а второе — Спенсеру [1].

Теорема 3.1. *Во введенных выше обозначениях*

$$r\frac{d}{dr}I_\lambda(r)=\frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^r \rho\,d\rho\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,d\theta=$$

$$=\lambda^2\int_0^\infty p(r,R)R^{\lambda-1}dR.$$

Предположим сначала, что функция $f(z)$ не обращается в нуль при $|z|=r$, и пусть

$$f(re^{i\theta})=Re^{i\Phi}.$$

Тогда в окрестности фиксированной точки окружности $|z|=r$

$$\log f=\log R+i\Phi,\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial r},$$

в силу уравнений Коши—Римана. Таким образом,

$$r\frac{d}{dr}\int_{-\pi}^{+\pi}|f(re^{i\theta})|^\lambda\,d\theta=\lambda\int_{|z|=r}R^{\lambda-1}r\frac{\partial R}{\partial r}\,d\theta=\lambda\int_{|z|=r}R^\lambda\,d\Phi. \quad (3.7)$$

Сделаем теперь преобразование (не конформное), положив при $w=Re^{i\Phi}$

$$P=R^{\lambda/2},\qquad \psi=\Phi,\qquad W=Pe^{i\psi}.$$

Тогда правая часть равенства (3.7) оказывается равной

$$\lambda\int_{|z|=r}P^2d\Phi.$$

Но $\frac{1}{2}P^2\,d\Phi$ — это элемент площади в W-плоскости, и потому правая часть (3.7) равняется умноженной на 2λ площади части W-плоскости, соответствующей $|z|<r$, причем точки считаются с учетом кратности. Это совершенно очевидно, если $f(z)$ однолистна в круге $|z|\leqslant r$, так что площадь есть внутренность простой замкнутой кривой Жордана, являющейся образом окружности $|z|=r$. В общем случае можно доказать наше утверждение, разбивая круг на конечное число областей, в каждой из которых $f(z)$ однолистна, и замечая, что интеграл

$$\int P^2\,d\Phi,$$

взятый по границе области, аддитивен и, таким образом, есть площадь в W-плоскости.

Но площадь в W-плоскости равна

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \nu(Pe^{i\psi})\,P\,dP\,d\psi,$$

где $\nu(Pe^{i\psi})$ — число точек в круге $|z|<r$, соответствующих $W=Pe^{i\psi}$. Таким образом,

$$\nu(Pe^{i\psi}) = n\left(r,\ P^{2/\lambda}e^{i\psi}\right),$$

и мы получаем

$$\lambda\int_{|z|=r} R^{\lambda}\,d\Phi = \lambda\int_0^{\infty} d(P^2)\int_0^{2\pi}\nu(Pe^{i\psi})\,d\psi =$$

$$= \lambda\int_{R=0}^{\infty}\left(dR^{\lambda}\right)\int_0^{2\pi} n(r,\ Re^{i\psi})\,d\psi = 2\pi\lambda^2\int_0^{\infty} p(r,\ R)\,R^{\lambda-1}\,dR;$$

комбинируя это с (3.7), мы видим, что первый член тождества теоремы 3.1 равен третьему.

Но $|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,\rho\,d\rho\,d\theta$ тоже есть площадь образа малой элементарной области $\rho<|z|<\rho+d\rho$, $\theta<\arg z<\theta+d\theta$ при отображении $w=f(z)$, и потому

$$\int_0^{r}\rho d\rho\int_0^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,|f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2}d\theta = \int_0^{\infty} RdR\int_0^{2\pi} R^{\lambda-2}\,n(r,\ Re^{i\psi})\,d\psi.$$

Действительно, обе части этого равенства выражают полную массу w-плоскости, если масса распределена с плотностью $|w|^{\lambda-2}$ на образе круга $|z|<r$ при отображении $w=f(z)$. Правая часть равна

$$2\pi\int_0^{\infty} p(r,\ R)\,R^{\lambda-1}\,dR,$$

и потому второй и третий члены тождества теоремы 3.1 равны; этим теорема доказана в предположении, что $f(z)$ не имеет нулей на окружности $|z|=r$.

В общем случае результат может быть получен из соображений непрерывности. Действительно, непрерывная функция $I_\lambda(r)$ имеет непрерывную производную

$$\frac{S_\lambda(r)}{r} = \frac{\lambda^2}{2\pi r}\int_0^r \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2} |f'(\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta,$$

если исключить некоторые изолированные значения r. При этих значениях r_0 величина $I_\lambda(r)$, очевидно, остается непрерывной, и равенство

$$r\frac{d}{dr} I_\lambda(r) = S_\lambda(r)$$

остается верным, в чем легко убедиться, используя теорему о среднем значении,

$$I_\lambda(r_1) - I_\lambda(r_0) = (\log r_1 - \log r_0)\, S_\lambda(\rho),$$

и устремляя r_1 к r_0 справа или слева.

3.2. Оцеики средних $I_\lambda(r)$ [1]. Предположим снова, что функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

регулярна в круге $|z| < 1$. Тогда при $0 < r < 1$

$$n|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f'(z)\,dz}{z^n}\right| \leqslant \frac{I_1(r, f')}{r^{n-1}}.$$

Взяв $r = n/(n+1)$ при $n \geqslant 1$, так что

$$r^{-(n-1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} < e,$$

заключаем, что

$$|a_n| < \frac{e}{n} I_1\left(\frac{n}{n+1}, f'\right) \quad (n \geqslant 1). \tag{3.8}$$

Таким образом, важно уметь оценивать $I_1(r, f')$. Для этого мы используем теорему 3.1. Из этой теоремы следует, что

[1] Дальнейшие результаты до § 3.5 включительно принадлежат главным образом Спенсеру [2].

$I_\lambda(r, f)$ — возрастающая выпуклая функция от $\log r$, когда $\lambda > 0$. Кроме того, верна

Теорема 3.2. *Предположим, что функция* $f(z)$ *p-листна в среднем в круге* $|z|<1$, *и пусть* $\Lambda=\max(\lambda, \lambda^2/2)$, *где* $\lambda > 0$. *Тогда*

$$S_\lambda(r, f) = r\frac{d}{dr} I_\lambda(r, f) \leqslant p\Lambda M(r, f)^\lambda \quad (0 < r < 1) \tag{3.9}$$

и

$$I_\lambda(r, f) \leqslant M(r_0, f)^\lambda + p\Lambda \int_{r_0}^{r} \frac{M(t, f)^\lambda\, dt}{t} \qquad (0 < r_0 < r < 1). \tag{3.10}$$

По теореме 3.1 имеем

$$S_\lambda(r) = \lambda^2 \int_0^\infty p(r, R) R^{\lambda-1}\, dR = \lambda^2 \int_0^{M(r, f)} p(r, R) R^{\lambda-1}\, dR.$$

Ввиду того, что функция $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$ и тем более в круге $|z|<r$, имеем, используя обозначения § 2.3,

$$W(R) = \int_0^R p(r, \rho)\, d(\rho^2) \leqslant pR^2 \quad (0 < R < \infty).$$

Значит, положив $M = M(r, f)$, получим

$$\int_0^M p(r, R) R^{\lambda-1}\, dR = \frac{1}{2} \int_0^M R^{\lambda-2}\, dW(R) =$$

$$= \frac{1}{2} M^{\lambda-2} W(M) - \frac{\lambda-2}{2} \int_0^M R^{\lambda-3} W(R)\, dR.$$

Рассмотрим теперь два случая. Если $\lambda > 2$, то ясно, что

$$\int^M p(r, R) R^{\lambda-1}\, dR \leqslant \frac{1}{2} M^{\lambda-2} W(M) \leqslant \frac{p}{2} M^\lambda = \frac{p}{2} M(r, f)^\lambda,$$

так как $W(R) \geqslant 0$. Если $0 < \lambda \leqslant 2$, то

$$\int_0^M p(r, R) R^{\lambda-1} dR \leqslant \frac{1}{2} M^{\lambda-2} p M^2 + \frac{2-\lambda}{2} \int_0^M R^{\lambda-3} pR^2 dR =$$

$$= \frac{p}{2} M^\lambda + \frac{p(2-\lambda)}{2\lambda} M^\lambda = \frac{p}{\lambda} M(r, f)^\lambda.$$

Отсюда имеем (3.9). Кроме того,

$$I_\lambda(r, f) = I_\lambda(r_0, f) + \int_{r_0}^r S_\lambda(t, f) \frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant M(r_0, f)^\lambda + p\Lambda \int_{r_0}^r M(t, f)^\lambda \frac{dt}{t},$$

а это и есть (3.10).

3.3. Оценки коэффициентов. Теперь докажем наш основной результат.

Теорема 3.3. *Предположим, что функция* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *p-листна в среднем в круге* $|z| < 1$ *и что*

$$M(r, f) \leqslant C(1-r)^{-\alpha} \qquad (0 < r < 1), \tag{3.11}$$

где $C > 0$ *и* $\alpha > 1/2$. *Тогда*

$$|a_n| \leqslant A(p, \alpha) C n^{\alpha-1} \qquad (n \geqslant 1). \tag{3.12}$$

Нам понадобится следующий предварительный результат

Лемма 3.1. *Предположим, что* $f(z)$ *p-листна в среднем в круге* $|z| < 1$ *и что* $1/2 \leqslant r < 1$; $0 < \lambda \leqslant 2$. *Тогда существует такое* ρ, *что* $2r - 1 \leqslant \rho \leqslant r$ *и*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 |f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2} d\theta \leqslant \frac{4pM(r, f)^\lambda}{\lambda(1-r)}. \tag{3.13}$$

Из теорем 3.1 и 3.2 заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2r-1}^{r}\rho\,d\rho\int_{0}^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,|f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2}\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^2}S_\lambda(r)\leqslant\frac{p}{\lambda}M(r,\,f)^\lambda.$$

Значит, можно выбрать ρ так, что $2r-1<\rho<r$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,|f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2}\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{pM(r,\,f)^\lambda}{\frac{1}{2}\lambda\,[r^2-(2r-1)^2]}\leqslant\frac{4pM(r,\,f)^\lambda}{\lambda(1-r)}.$$

Лемма 3.1 доказана.

Теперь предположим, что $r\geqslant 1/2$ и что (3.11) выполняется с $C=1$ и $\alpha>1/2$. Положим $\lambda=(2\alpha-1)/(2\alpha)$, так что $\alpha(2-\lambda)>1$, и выберем ρ так, чтобы выполнялось неравенство (3.13). Тогда

$$I_1(\rho,\,f')=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,|f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2}\,d\theta\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^{2-\lambda}\,d\theta\right)^{1/2},\tag{3.14}$$

в силу неравенства Шварца. Возьмем теперь в (3.10) $r_0=1/2$. Замечая, что $r\geqslant 1/2$, $r\geqslant\rho$, заключаем, что

$$I_{2-\lambda}(\rho,\,f)\leqslant I_{2-\lambda}(r,\,f)\leqslant(1-r_0)^{-\alpha(2-\lambda)}+$$

$$+\frac{p\Lambda}{r_0}\int_{0}^{r}(1-t)^{-\alpha(2-\lambda)}\,dt<A(p,\,\alpha)(1-r)^{1-\alpha(2-\lambda)},$$

так как λ зависит от α. Отсюда, полагая $r_1=2r-1$, так что $r_1\leqslant\rho<r$, на основании неравенств (3.13) и (3.14) заключаем, что

$$I_1(r_1,\,f')\leqslant I_1(\rho,\,f')\leqslant A(p,\,\alpha)(1-r)^{-[1+\alpha\lambda-1+\alpha(2-\lambda)]/2}=$$

$$=A(p,\,\alpha)(1-r)^{-\alpha}=2^\alpha A(p,\,\alpha)(1-r_1)^{-\alpha}.$$

Здесь r_1 может быть любым положительным числом, меньшим единицы. Теперь (3.12) следует из (3.8). Теорема 3.3 доказана, если $C=1$. В общем случае мы рассматриваем $f(z)/C$ вместо $f(z)$.

3.3.1. Случай $\alpha \leqslant 1/2$. Если $\alpha \leqslant 1/2$ в (3.11), то мы не можем доказать (3.12), и, как мы увидим, (3.12) вообще неверно при $\alpha < 1/2$, даже если $f(z)$ ограничена. Заметим, что если условие (3.11) выполняется при некотором $\alpha \leqslant 1/2$, то оно тем более выполняется при любом $\alpha > 1/2$, и потому из (3.12) получаем $|a_n| = O(n^{-1/2+\varepsilon})$ при всяком $\varepsilon > 0$. Можно, однако, несколько уточнить этот результат следующим образом.

Теорема 3.4. *Предположим, что функция* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *p-листна в среднем в круге* $|z|<1$ *и удовлетворяет условию* (3.11). *Тогда, если* $\alpha = 1/2$, *то*

$$|a_n| < A(p) C n^{-1/2} \log(n+1) \qquad (n \geqslant 1). \tag{3.15}$$

Если же $\alpha < 1/2$, *то*

$$|a_n| < A(p, \alpha) C n^{-1/2} [\log(n+1)]^{1/2} \qquad (n \geqslant 1). \tag{3.16}$$

Пусть снова $C=1$. Если в (3.11) заменить r на $(1+r)/2$, то видно, что по заданным λ $(0<\lambda\leqslant 2)$ и r $(0<r<1)$ можно найти ρ так, что $r<\rho<(1+r)/2$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 |f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p}{\lambda} 2^{\alpha\lambda+3} (1-r)^{-1-\alpha\lambda} \leqslant \frac{16p}{\lambda}(1-r)^{-1-\alpha\lambda}.$$

Выбирая $1/\lambda = \max\{\alpha \log 1/(1-r), 1/2\}$, так что $(1-r)^{-\alpha\lambda} \leqslant e$, заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 |f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2} d\theta \leqslant \frac{8pe}{1-r}\left[\log\frac{1}{1-r}+1\right].$$

Положим в (3.10) $r_0 = 1/2$. При $1/2 < \rho < 1$ получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^{2-\lambda}\, d\theta \leqslant 2^{\alpha(2-\lambda)} + 2p(2-\lambda)\int_{1/2}^{\rho}(1-t)^{-\alpha(2-\lambda)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 + 2p(2-\lambda)\int_{1/2}^{\rho}(1-t)^{-2\alpha}\, dt.$$

Правая часть меньше $A(p, \alpha)$, если $\alpha < 1/2$, и в этом случае (3.14) дает

$$I_1(r, f') \leqslant I_1(\rho, f') \leqslant A(p, \alpha)\left[\frac{1}{1-r}\log\frac{1}{1-r}\right]^{1/2}\left(\frac{1}{2} \leqslant r < 1\right).$$

Полагая $r = n/(n+1)$, получаем (3.16) из (3.8).

Если $\alpha = 1/2$, то

$$\int_{1/2}^{\rho}(1-t)^{-2\alpha}\, dt = \log\left[\frac{1}{2(1-\rho)}\right] \leqslant \log\frac{1}{1-r} \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant r < 1\right),$$

поэтому из (3.14) получаем

$$I_1(r, f') = \frac{A(p, \alpha)}{(1-r)^{1/2}}\left(\log\frac{1}{1-r}\right) \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant r < 1\right),$$

и снова (3.15) следует из (3.8).

3.4. Контрпример. Результаты теоремы 3.4 — сильнейшие из известных, даже для однолистных функций, хотя, вероятно, эти результаты могут быть улучшены. Однако даже если функция $f(z)$ p-листна в среднем при сколь угодно малом p и непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$, то всякое утверждение, более сильное, чем

$$|a_n| = o(n^{-1/2}), \tag{3.17}$$

вообще говоря, неверно. Чтобы убедиться в этом, возьмем быстро возрастающую последовательность целых чисел n_k и положим

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

где $a_n = \varepsilon 2^{-k} n^{-1/2}$, если $n = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и $a_n = 0$ в противном случае.

Пусть λ_n — какая-нибудь заранее заданная последовательность положительных чисел, медленно стремящаяся к нулю при $n \to \infty$; выберем последовательность n_k столь быстро стремящейся к бесконечности вместе с k, что

$$\lambda_{n_k} < \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда для бесконечной последовательности значений n, а именно для $n = n_k$, имеем

$$a_n > \frac{\lambda_n}{n^{1/2}}. \tag{3.18}$$

С другой стороны, при $|z| \leqslant 1$ имеем

$$|f(z) - 1| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \varepsilon,$$

так что ряд для $f(z)$ равномерно сходится и $f(z)$ непрерывна в круге $|z| \leqslant 1$. Кроме того, площадь образа круга $|z| < 1$ при отображении $f(z)$ с должным учетом кратности равна

$$\int_0^1 r\,dr \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2\,d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^2 2^{-2k} = \frac{\pi\varepsilon^2}{3}$$

(см. § 1.3). Если $\pi W(R)$ обозначает площадь части образа, лежащей над $|w| < R$, то $W(R) = 0$ при $R < 1 - \varepsilon$ и $W(R) < \pi\varepsilon^2/3$ в противном случае. Если выбрать $\varepsilon < 1/2$, то мы получим, что

$$\frac{W(R)}{\pi R^2} < \frac{\pi\varepsilon^2}{3\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4\varepsilon^2}{3} \qquad (0 < R < \infty),$$

и правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора ε. Таким образом, непрерывная в круге $|z| \leqslant 1$ функция $f(z)$ может быть сделана там p-листной в среднем со сколь угодно малым p. Ясно, что для всякой ограниченной и p-листной в среднем в круге $|z| < 1$ функции $f(z)$ ряд $\sum_1^{\infty} n\,|a_n|^2$ сходится, и потому выполняется (3.17). Однако (3.18) показывает, что никакое более сильное утверждение не верно.

Уместно спросить, не имеет ли место что-либо более ильное, чем (3.17), например, для ограниченных однолистных функций. Ответ на этот вопрос неизвестен, но Литтльвуд [2] построил довольно трудный пример такой функции, которая не удовлетворяет условию

$$|a_n| = O(n^{-1+A}) \qquad (n \to \infty),$$

де A — положительная абсолютная постоянная. Таким образом, вывести (3.12) из (3.11) нельзя даже для однолистных функций, если $\alpha \leqslant A$.

3.5. Коэффициенты произвольных p-листных в среднем функций. Из теорем 2.5, 3.3 и 3.4 непосредственно следует

Теорема 3.5. *Предположим, что функция* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *p-листна в среднем в круге* $|z| < 1$. *Тогда при* $1 \leqslant n < \infty$

$$|a_n| < A(p)\mu_p n^{2p-1} \quad (p > 1/4), \tag{3.19}$$

$$|a_n| < A|a_0| n^{-1/2} \log(n+1) \qquad (p = 1/4), \tag{3.20}$$

$$|a_n| < A(p)|a_0| \left[\frac{\log(n+1)}{n}\right]^{1/2} \qquad (0 < p < 1/4), \tag{3.21}$$

де $A(p)$ зависит только от p, а $\mu_p = \max\limits_{\nu \leqslant p} |a_\nu|$.

Действительно, по теореме 2.5 можно положить в теоремах 3.3 и 3.4 $C = A(p)\mu_p$, $\alpha = 2p$. Порядок величин (3.19), установленный Бернацким [1] для p-листных функций и Спенсером [2] для p-листных в среднем функций, может быть улучшен. Пример, приведенный в предыдущем разделе, показывает, что во всяком случае правые части неравенств (3.20) и (3.21) не могут быть заменены на $\varepsilon_n n^{-1/2}$, где ε_n — фиксированная последовательность, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$.

3.6. Рост и исключительные значения. Теперь мы видим одно приложение теоремы 3.4 к задаче, поставленной Дворецким [1]. Мы покажем, что если однолистная функция $f(z)$ не принимает ни одного значения из некоторого

достаточно плотного на плоскости множества, то это сказывается на коэффициентах почти так же, как если бы $f(z)$ была ограниченной [1]).

Теорема 3.6. *Пусть функция* $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ *однолистна в круге* $|z|<1$ *и отображает его взаимно однозначно и конформно на область* D w*-плоскости. Пусть* $d(R)$ *обозначает радиус самого большого круга* $|w-w_0|<\rho$, *центр которого лежит на окружности* $|w_0|=R$ *и который целиком содержится в* D. *Если при некотором постоянном* $\alpha<1/4$

$$d(R)\leqslant \alpha R \qquad (0<R<\infty), \tag{3.22}$$

то

$$|a_n|<A(\alpha)|a_0|\left[\frac{\log(n+1)}{n}\right]^{1/2} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.23}$$

Пусть $z_0=re^{i\theta}$ и

$$\varphi(z)=f\left(\frac{z_0+z}{1+\bar{z}_0 z}\right)=b_0+b_1 z+\ \ldots\ .$$

Тогда $\varphi(z)$ однолистна в круге $|z|<1$ и отображает его на D. Значит, существует такое w_1 вне D, что

$$|w_1-b_0|\leqslant \alpha|b_0|.$$

Таким образом, функция

$$(\varphi(z)-b_0)/b_1=z+\ \ldots$$

однолистна в круге $|z|<1$ и не принимает значения $(w_1-b_0)/b_1$. Теперь, по теореме 1.2,

$$\left|\frac{w_1-b_0}{b_1}\right|\geqslant 1/4,$$

и потому $|b_1|\leqslant 4\alpha|b_0|$, т. е.

$$(1-r^2)|f'(re^{i\theta})|\leqslant 4\alpha|f(re^{i\theta})|.$$

Отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\theta})|\leqslant \frac{4\alpha}{1-r^2} \qquad (0<r<1),$$

---

[1]) Относительно обобщений на p-листные в среднем и другие функции см. Хейман [3].

интегрируя по r, получаем

$$\left|\frac{f(re^{i\theta})}{f(0)}\right| \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{2\alpha}.$$

Так как $\alpha < 1/4$, это дает

$$M(r, f) < \sqrt{2}\,|a_0|(1-r)^{-2\alpha} \qquad (0 < r < 1),$$

и теперь теорема 3.6 следует из теоремы 3.4, где α нужно заменить на 2α.

Если $0 < \lambda \leqslant 1$, то функция

$$w = f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda}$$

ображает круг $|z| < 1$ взаимно однозначно и конформно угол $|\arg w| < \pi\lambda/2$, причем $d(R) = R\sin(\pi\lambda/2)$. Она не овлетворяет (3.23), если $\lambda > 1/2$. Таким образом, 1/4 в (3.22) льзя, во всяком случае, заменить числом, большим, чем $(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

3.7. k-кратно симметричные степенные ряды[1]). Предложим, что функция

$$f_k(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{2k+1}z^{2k+1} + \ldots$$

однолистна в круге $|z| < 1$; тогда однолистна и

$$f(z) = [f_k(z^{1/k})]^k = z + b_2z^2 + \ldots,$$

и обратно. Используя оценку

$$M(r, f) \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}$$

з теоремы 1.3, мы получим

$$M(r, f_k) \leqslant \frac{r}{(1-r^k)^{2/k}},$$

де равенство имеет место только в том случае, если $f_k(z) = z(1 - z^ke^{i\theta})^{-2/k}$. Применяя теорему 3.3, заключаем, что ли $k = 1$, 2 или 3

$$|a_{nk+1}| < A(k)\,n^{(2/k)-1} \qquad (n \geqslant 1).$$

[1]) При первом чтении остальная часть главы может быть опущена.

Порядок величин здесь точный. Литтльвуд и Палей [1] впер вые применили идеи теоремы 3.3 в этом частном случа Если $f_k(z)$ p-листна, то аналогичное рассуждение показы вает, что

$$|a_{nk+1}| < A(p, k)\mu_p n^{(2p/k)-1} \qquad (3.2$$

при условии $1 \leqslant k < 4p$ (Робертсон [1]). Спенсер [2, 3 провел доказательство в случае p-листных в среднем фун ций. В этом последнем случае (3.24) неверно, если $k > 4$ как показывают некоторые примеры, сходные с примеро из § 3.4.

Для доказательств этого типа существенно, что индекс отличных от нуля коэффициентов образуют арифметическу прогрессию с разностью k, а все другие коэффициент равны нулю. Перейдем к доказательству неравенства (3.24 при несколько более слабых предположениях. Мы буде исходить из того факта, что функции $f_k(z)$ удовлетворяю условию

$$|f_k[re^{i(\theta+2\pi i\nu/k)}]| = |f_k(re^{i\theta})| \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant k-1).$$

3.7.1. Нам понадобится следующий предварительный ре зультат.

Теорема 3.7[1]). *Предположим, что функция* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *p-листна в среднем в круге* $|z| < 1$ *и что су ществует* $k \geqslant 2$ *точек* $z_1', z_2', \ldots, z_k'$ *на окружности* $|z| = r$, *где* $0 < r < 1$, *таких, что*

$$\text{(i)} \quad |z_i' - z_j'| \geqslant \delta \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant k)$$

и

$$\text{(ii)} \quad |f(z_i')| \geqslant R \qquad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Тогда

$$R < A(p)\mu_p \delta^{2p(1/k-1)}(1-r)^{-2p/k}.$$

---

[1]) По поводу этой теоремы автор указывает в письме к редак тору русского перевода, что для однолистных функций эта теорем с вытекающими из нее следствиями содержится в книге Голузин [3*]: стр. 61, теорема 4. — *Прим. ред.*

Можно считать, что

$$\delta > 4^{p+2}(1-r). \tag{3.25}$$

Действительно, если это не так, то по теореме 2.5

$$\begin{aligned} R \leqslant M(r, f) &< A(p)\mu_p(1-r)^{-2p} \leqslant \\ &\leqslant A(p)\mu_p(1-r)^{-2p/k}\left(\frac{4^{p+2}}{\delta}\right)^{2p-2p/k} < \\ &< A(p)\mu_p(1-r)^{-2p/k}\delta^{2(p/k)-2p}, \end{aligned}$$

и теорема 3.7 доказана.

По крайней мере при одном значении ν кольцо

$$1-4^{-\nu}\delta < |z| < 1-4^{-(\nu+1)}\delta \qquad (1 \leqslant \nu \leqslant [p]+1)$$

не содержит нулей функции $f(z)$, так как $f(z)$ имеет $q \leqslant p$ нулей в круге $|z| < 1$. При таком значении ν положим

$$r_1 = 1 - \frac{1}{2}4^{-\nu}\delta = 1 - \delta_0$$

и заметим, что $f(z)$ не имеет нулей в кольце $1-2\delta_0 < |z| < 1-\delta_0/2$. Используя (3.25), заключаем, далее, что

$$\frac{\delta}{8} \geqslant \delta_0 = \frac{1}{2}4^{-\nu}\delta > \frac{1}{2}4^{p+2-\nu}(1-r) \geqslant 2(1-r), \tag{3.26}$$

так как $1 \leqslant \nu \leqslant p+1$. Следовательно, $r_1 < r$.

Предположим теперь, что

$$z_j' = re^{i\theta_j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

Напишем

$$z_j = r_1 e^{i\theta_j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k)$$

и применим теорему 2.6, где $R_1 = M(r_1, f)$, R_2 — число R из теоремы 3.7 (ii), а δ заменено на δ_0. Получим

$$\delta_j = \frac{\delta_0 - |z_j' - z_j|}{\delta_0} = \frac{1-r}{\delta_0} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

По построению, круги $|z - z_j| < \delta_0/2$ не содержат нулей функции $f(z)$. Кроме того, круг $|z - z_j| < \delta_0$ содержит точку z_j', а его диаметр $2\delta_0 \leqslant \delta/4$, в силу (3.26). Ввиду условия (i) теоремы 3.7 теперь ясно, что круги $|z - z_j| < \delta_0$

($1 \leqslant j \leqslant k$) попарно не пересекаются и применима теорема 2.6 [1]). Мы получаем

$$k\left[\log\frac{A(p)\,\delta_0}{1-r}\right]^{-1} \leqslant 2p\left[\log\left(\frac{R_2}{eR_1}\right)\right]^{-1},$$

$$\frac{R_2}{eR_1} < \left\{\frac{A(p)\,\delta_0}{1-r}\right\}^{2p/k} < A(p)\left(\frac{\delta}{1-r}\right)^{2p/k},$$

в силу (3.26). Так как $r_1 = 1 - \delta_0$, то теорема 2.5 позволяет заключить, что

$$R_1 = M(r_1, f) < A(p)\,\mu_p\delta_0^{-2p} = A(p)\,\mu_p\left(\frac{2\cdot 4^{\nu}}{\delta}\right)^{2p} < A(p)\,\mu_p\delta^{-2p},$$

и теорема 3.7 следует отсюда, если вместо R_2 написать R.

3.8. Степенные ряды с пропусками. Легко видеть, что теоремы, приведенные в § 3.7, сразу следуют из теорем 2.5, 3.3 и 3.7. Мы можем, однако, доказать и больше.

Теорема 3.8. *Предположим, что функция*

$$f(z) = \sum_0^{N-1} a_n z^n + a_N z^N + a_{N+k} z^{N+k} + a_{N+2k} z^{N+2k} + \ldots$$

p-листна в среднем круге $|z| < 1$. *Тогда*

$$M(r, f) < A(p, k, N)\,\mu_p(1-r)^{-2p/k} \quad (0 < r < 1), \tag{3.27}$$

и если $1 \leqslant k < 4p$, *то мы имеем, кроме того,*

$$|a_n| < A(p, k, N)\,\mu_p n^{(2p/k)-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.28}$$

Пусть

$$g(z) = \sum_0^{N-1} a_n z^n, \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{N+kn} z^{N+kn}.$$

---

[1]) Можно считать, что $R_2 > eR_1$. Так как $\delta/(1-r) \geqslant 16$ согласно (3.26), то при $R_2 \leqslant eR_1$ наш результат тривиален.

При $r \geqslant 1/2$ выберем θ_0 так, что $|f(re^{i\theta_0})| = M(r, f)$. Тогда, если

$$\theta_\nu = \theta_0 + \frac{2\pi\nu}{k} \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant k-1),$$

то

$$h(re^{i\theta_\nu}) = h(re^{i\theta_0}) \exp\left(\frac{2\pi l\nu N}{k}\right).$$

По теореме 3.5 заключаем, что при $|z| = r < 1$

$$|g(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} A\,|a_0| = AN\,|a_0|,$$

если $p < 1/4$, и

$$|g(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} A(p)\,\mu_p n^{2p-1} \leqslant A(p, N)\,\mu_p,$$

если $p \geqslant 1/4$. Таким образом,

$$f(re^{i\theta_\nu})| \geqslant |h(re^{i\theta_\nu})| - |g(re^{i\theta_\nu})| \geqslant |h(re^{i\theta_0})| - A(p, N)\mu_p \geqslant$$
$$\geqslant M(r, f) - 2A(p, N)\mu_p \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant k-1).$$

Поэтому применима теорема 3.7 с

$$\delta = |re^{2\pi i/k} - r| \geqslant \frac{1}{2}\,|e^{2\pi i/k} - 1| = A(k)$$

и

$$R = M(r, f) - 2A(p, N)\mu_p.$$

Мы получаем, что

$$M(r, f) < 2A(p, N)\,\mu_p + A(p)\,\mu_p\,A(p, k)(1-r)^{-2p/k},$$

а отсюда следует (3.27). Это неравенство, доказанное в предположении, что $r \geqslant 1/2$, очевидно, остается справедливым, если $r < 1/2$, так как $M(r, f)$ возрастает вместе с r. Неравенство (3.28) следует из (3.27) и теоремы 3.3. Теорема 3.8 доказана.

3.8.1. Мы можем значительно усилить теорему 3.8 при $k = 2$.

Теорема 3.9. *Предположим, что функция* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *p-листна в среднем в круге* $|z| < 1$ *и что*

$a_n = 0$, если $n = bm + c$, где b, c — фиксированные положительные целые числа, а m изменяется от 1 до ∞. Тогда

$$M(r, f) < A(p, b, c)\mu_p(1-r)^{-p} \quad (0 < r < 1), \quad (3.29)$$

и потому, если $p > 1/2$,

$$|a_n| < A(p, b, c)\mu_p n^{p-1} \quad (n \geqslant 1). \quad (3.30)$$

Отметим, что в частном случае, когда функция $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ однолистна в круге $|z| < 1$ и подчинена указанным выше условиям,

$$|a_n| < A(b, c)^{1}).$$

Доказательство этого результата, по-видимому, требует полного использования методов предыдущей главы. Было бы интересно выяснить, влечет ли обращение в нуль более общих последовательностей коэффициентов ограниченность остальных.

Для доказательства теоремы 3.9 рассмотрим функцию

$$f_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{bm+\nu} z^{bm+\nu} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant b-1)$$

и введем обозначение $\omega = \exp[2\pi i/b]$. Тогда

$$f_\nu(z) = \frac{1}{b} \sum_{\mu=0}^{b-1} \omega^{-\mu\nu} f(\omega^\mu z).$$

Действительно, коэффициент при z^n справа равен

$$\frac{a_n}{b} \sum_{\mu=0}^{b-1} \omega^{-\mu\nu}\omega^{\mu n} = \frac{a_n}{b} \sum_{\mu=0}^{b-1} [\omega^{n-\nu}]^\mu,$$

т. е. a_n или 0, смотря по тому, делится ли $n-\nu$ на b или нет. Значит, если ν выбрано так, что $c-\nu$ делится на b,

[1]) Для однолистных функций, как доказал Г. М. Голузин, справедливо более сильное предложение: из ограниченности коэффициентов a_n с индексами, пробегающими какую-нибудь арифметическую прогрессию $n = bm + c$, следует ограниченность всех коэффициентов. См. Г. М. Голузин [3*], стр. 18. — *Прим. ред.*

то по условию теоремы 3.9 при $|z|<1$

$$\left|\sum_{\mu=0}^{b-1}\omega^{-\mu\nu}f(\omega^{\mu}z)\right|=b|f_{\nu}(z)|\leqslant b\sum_{n=0}^{b+c}|a_n|\leqslant A(p,\ b,\ c)\mu_p=K.$$

Выберем теперь z_0 при $1/2\leqslant r<1$ так, что

$$|z_0|=r,\quad |f(z_0)|=M(r,\ f).$$

Если $M(r,\ f)\leqslant 2K$, то мы получаем (3.29). В противном случае

$$\left|\sum_{\mu=1}^{b-1}\omega^{-\mu\nu}f(\omega^{\mu}z_0)\right|\geqslant|f(z_0)|-\left|\sum_{\mu=0}^{b-1}\omega^{-\mu\nu}f(\omega^{\mu}z_0)\right|\geqslant$$

$$\geqslant|f(z_0)|-K\geqslant\frac{1}{2}|f(z_0)|=\frac{1}{2}M(r,\ f).$$

Значит, можно найти μ $(1\leqslant\mu\leqslant b-1)$ так, что

$$|f(\omega^{\mu}z_0)|\geqslant\frac{M(r,\ f)}{2(b-1)}$$

и

$$|\omega^{\mu}z_0-z_0|=r|1-\omega^{\mu}|\geqslant\frac{1}{2}|1-\omega|=\sin\left(\frac{\pi}{2b}\right)\geqslant\frac{1}{b}.$$

Таким образом, применима теорема 3.7 с $k=2$, $z_1'=z_0$, $z_2'=\omega^{\mu}z_0$, $\delta=b^{-1}$ и $R=\frac{1}{2}M(r,\ f)/(b-1)$. Мы получаем

$$M(r,\ f)<2(b-1)A(p)\mu_p b^p(1-r)^{-p},$$

и (3.29) доказано, если $r\geqslant 1/2$. Так как $M(r,\ f)$ возрастает вместе с r, то этот результат получается и при $0\leqslant r<1/2$; (3.30) следует из (3.29) и теоремы 3.3. Таким образом, теорема 3.9 доказана.

Уместно отметить, что проведенное рассуждение не в полной мере использовало наши предположения. Для того чтобы получить оценку $M(r,\ f)=O(1-r)^{-p}$, было бы достаточным предположение, что на окружности $|z|=r$

$$|f_{\nu}(z)|=\left|\sum_{m=0}^{\infty}a_{bm+\nu}z^{bm+\nu}\right|=O(1-r)^{-p}\quad(r\to 1).$$

Подобное замечание может быть сделано и в связи с теоремой 3.8.

Глава 4

СИММЕТРИЗАЦИЯ

4.0. Введение. В этой главе мы, следуя Пойа и Сегё [1], разовьем теорию симметризации настолько, насколько это необходимо для наших приложений к теории функций.

Если нам дана какая-нибудь область D, то мы можем с помощью некоторого преобразования, называемого симметризацией, превратить D в новую область D^*, в каком-то смысле симметричную. Точное определение будет дано в § 4.5. Пойа и Сегё показали, что, в то время как площадь, например, при симметризации не изменяется, различные постоянные, связанные с областью, как, например, емкость, внутренний радиус, главная частота, крутильная жесткость и т. д., монотонно изменяются.

Мы здесь докажем этот результат для первых двух из перечисленных величин, чтобы вывести теорему 4.9, представляющую собой принцип симметризации. Если функция $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ регулярна в круге $|z| < 1$ и имеются некоторые сведения относительно области D_f значений, принимаемых $f(z)$, то этот принцип позволяет нам утверждать, что при некоторых условиях величина $|a_1|$ достигает максимума, когда $f(z)$ однолистна и D_f симметрична. Приложения этого результата будут даны в последних трех пунктах настоящей главы. Некоторые из приложений в свою очередь явятся основой дальнейшего изучения p-листных функций в главе 5. Часть этих результатов можно доказать также с помощью рассмотрения трансфинитного диаметра (Хейман [2]).

Поскольку начало этой главы используется лишь при доказательстве теоремы 4.9, читатель, готовый принять этот результат на веру, может при первом ознакомлении начать с § 4.5 и затем прямо переходить к § 4.9.

Мы должны будем ссылаться на книгу Альфорса [2] (обозначаемую ниже С. А.) по поводу ряда результатов, которые мы не можем более подробно рассмотреть здесь из-за недостатка места. В упомянутой книге имеются все необходимые для нас теоретико-множественные понятия (С. А., гл. 2, § 2), и мы будем употреблять используемые там обозначения. Замыкание области D будет обозначаться через $\overline{D}$. Область D имеет связность n, если ее дополнение в расширенной плоскости имеет ровно n компонент; если $n=1$, D односвязна, если $n=2$ — двусвязна и т. д. (С. А., стр. 112 и 118). Если граница области D состоит из конечного числа n простых замкнутых аналитических кривых (С. А., стр. 65 и 191), попарно не имеющих общих точек, то мы будем называть D аналитической областью.

Будем предполагать, что на плоскости введена правая система прямоугольных декартовых осей OX, OY. Точку плоскости с координатами x, y будем обозначать через (x, y) или $z=x+iy$, смотря по тому, что удобнее. Соответственно функцию u будем записывать или в виде $u(z)$, или в виде $u(x, y)$.

4.1. Функции, удовлетворяющие условию Липшица. Пусть E — плоское множество, и пусть $P(z)$ — функция, определенная на E. Будем говорить, что $P(z)$ *удовлетворяет условию Липшица на* E, если существует такая постоянная C, что

$$|P(z_1)-P(z_2)|\leqslant C|z_1-z_2|, \tag{4.1}$$

каковы бы ни были точки z_1, z_2, лежащие в E. Ясно, что всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица, непрерывна, и если функции P и Q удовлетворяют условию Липшица и ограничены на E, то функция PQ удовлетворяет условию Липшица на E.

Предположим, что E компактно и что функция $P(z)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки $z_0\in E$. Тогда P удовлетворяет условию Липшица на E. Действительно, если бы это было не так, то мы нашли бы последовательность пар различных точек z_n, z_n' $(n\geqslant 1)$ из E, обладающую тем свойством, что

$$\frac{|P(z_n)-P(z_n')|}{|z_n-z_n'|}\to\infty \quad (n\to\infty). \tag{4.2}$$

Переходя, если нужно, к подпоследовательностям, мы можем предполагать, что $z_n \to z_0$, $z'_n \to z'_0$, где z_0, z'_0 лежат в E. Если z_0, z'_0 различны, то мы сразу получаем противоречие между нашим локальным условием и (4.2), так как $P(z)$ ограничена вблизи любой точки множества E. Если $z_0 = z'_0$, то z_n, z'_n в конце концов попадают в ту окрестность z_0, где $P(z)$ удовлетворяет условию Липшица, а это снова противоречит (4.2).

Если функция $P(z) = P(x, y)$ определена в некотором круге γ (С. А., стр. 53) и имеет там ограниченные частные производные, то $P(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица на γ. Действительно, пусть сначала $P(x, y)$ вещественна. Тогда, если точки (x_0, y_0) и (x_0+h, y_0+k) обе лежат в γ, то или (x_0, y_0+k), или (x_0+h, y_0) тоже лежит в γ. Предположим, например, что имеет место первое. Если M — верхняя граница абсолютных величин частных производных на γ, то по теореме о среднем имеем

$$\begin{aligned}|P(x_0+h, y_0+k) - P(x_0, y_0)| &\leqslant \\ &\leqslant |P(x_0+h, y_0+k) - P(x_0, y_0+k)| + \\ &\quad + |P(x_0, y_0+k) - P(x_0, y_0)| = \\ &= \left|h\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(x_0+\theta h,\ y_0+k)}\right| + \left|k\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_0,\ y_0+\theta' k)}\right| \leqslant \\ &\leqslant M(|h| + |k|) \leqslant 2M\sqrt{h^2+k^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, P удовлетворяет условию Липшица на γ. Для комплексных P можно доказать соответствующий факт, рассматривая вещественную и мнимую части.

Теперь ясно, что если P имеет непрерывные частные производные в некоторой области, содержащей компактное множество E, то P удовлетворяет условию Липшица на E. Действительно, в этом случае P имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности, а потому и ограниченные частные производные в несколько меньшей окрестности каждой точки E.

Обратно, заметим, что если $P(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $a \leqslant y \leqslant b$ прямой $x = \text{const}$, то P — абсолютно непрерывная функция от y на этом отрезке, и потому $\partial P/\partial y$ существует почти всюду на отрезке и равно-

мерно ограничена[1]). Следовательно,

$$P(x, b) - P(x, a) = \int_a^b \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dy. \tag{4.3}$$

4.2. Формулы Гаусса и Грина. Перейдем к доказательству этих формул в том виде, в каком они потребуются нам в дальнейшем.

Лемма 4.1 (формула Гаусса). *Предположим, что D — ограниченная аналитическая область плоскости, и пусть на ее границе γ установлено направление обхода, при котором D остается слева. Тогда, если $P(x, y)$, $Q(x, y)$ удовлетворяют условию Липшица в $\overline{D}$, то*

$$\int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Пусть $z = \alpha(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ — уравнение некоторой дуги γ. Тогда $\alpha(t)$ — регулярная функция от t и $\alpha'(t) \neq 0$. Касательная параллельна оси OY в тех точках, где $\alpha'(t)$ — чисто мнимое число; это возможно лишь в конечном числе точек, так как в противном случае число $\alpha'(t)$ было бы всюду чисто мнимым и потому эта дуга γ была бы прямой линией[2]). Это, однако, невозможно, так как γ состоит из конечного числа замкнутых аналитических кривых. Таким образом, имеется лишь конечное число касательных к γ, параллельных оси OY. Предположим, что этими касательными являются

$$x = x_m \qquad (1 \leqslant m \leqslant M),$$

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_M$.

Если $x_{m-1} < \xi < x_m$, то прямая $x = \xi$ пересекает γ в $2n$ точках

$$y = y_1(\xi), \ \ldots, \ y = y_{2n}(\xi),$$

где n зависит только от m, а $y_\nu(\xi)$ $(1 \leqslant \nu \leqslant 2n)$ — дифференцируемые функции от ξ при $x_{m-1} < \xi < x_m$. Часть D_m

[1]) И. П. Натансон [1*], стр. 214, 216, 223.

[2]) Вещественная часть $\alpha'(t)$ — регулярная функция t для $a \leqslant t \leqslant b$ и потому либо имеет только изолированные нули, либо тождественно равна нулю.

области D, лежащая в полосе $x_{m-1} < x < x_m$, состоит из n областей

$$D_{m,\nu}\colon\ y_{2\nu-1}(x) < y < y_{2\nu}(x),\quad x_{m-1} < x < x_m\quad (1 \leqslant \nu \leqslant n),$$

так как в точках пересечения прямой $x = \xi$ с γ эта прямая входит в D или выходит из D попеременно.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_{\gamma} P(x, y)\,dx,$$

взятый вдоль γ в положительном направлении. Тогда $dx > 0$ на кривых $y = y_{2\nu-1}(x)$ и $dx < 0$ на кривых $y = y_{2\nu}(x)$. Таким образом, если I_m есть интеграл, взятый по той части γ, которая лежит в полосе $x_{m-1} < x < x_m$, то

$$I_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \sum_{\nu=1}^{n} \{P[x, y_{2\nu-1}(x)] - P[x, y_{2\nu}(x)]\}\,dx =$$

$$= \int_{x_{m-1}}^{x_m} dx \sum_{\nu=1}^{n} \int_{y_{2\nu-1}}^{y_{2\nu}} -\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dy = \sum_{\nu=1}^{n} \iint_{D_{m,\nu}} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

ввиду (4.3), так как функция $P(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица. Суммируя по отдельным участкам $x_{m-1} < x < x_m$ и всем областям $D_{m,\nu}$, получим

$$\int_{\gamma} P\,dx = \iint_{D} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Подобным образом доказывается, что

$$\int_{\gamma} Q\,dy = \iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Доказательство леммы 4.1 закончено.

Теперь может быть доказана

Лемма 4.2 (формула Грина). *Предположим, что D — ограниченная аналитическая область с границей γ, функция u удовлетворяет условию Липшица в $\overline{D}$, а функция v обладает непрерывными вторыми частными про-*

изводными в некоторой окрестности каждой точки $\overline{D}$. *Тогда*

$$\int_{\gamma} u \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = -\iint_{D} \left[u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx\, dy,$$

где $\partial/\partial n$ *обозначает дифференцирование вдоль нормали, направленной внутрь* D, *а* ds — *элемент длины дуги* γ.

Действительно, u, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ в рассматриваемом случае удовлетворяют условию Липшица в $\overline{D}$, и, значит, этим свойством обладают $u\,\partial v/\partial x$, $u\,\partial v/\partial y$. Пусть (x_0, y_0) — точка на γ, и пусть θ — угол, который касательная к γ составляет с осью OX, когда направление обхода на γ такое, что область D остается слева. Тогда нормаль, направленная внутрь D, составляет с осью OX угол $\theta + \pi/2$, и

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \lim_{h \to 0} \frac{v\left[x_0 + h\cos\left(\theta + \frac{1}{2}\pi\right), y_0 + h\sin\left(\theta + \frac{1}{2}\pi\right)\right] - v[x_0, y_0]}{h} =$$

$$= \cos\theta \frac{\partial v}{\partial y} - \sin\theta \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если ds — элемент длины дуги γ в точке (x_0, y_0), то его проекции на OX, OY равны $dx = ds\cos\theta$ и $dy = ds\sin\theta$. Следовательно,

$$\frac{\partial v}{\partial n}\, ds = \frac{\partial v}{\partial y}\, dx - \frac{\partial v}{\partial x}\, dy.$$

Теперь применим лемму 4.1 с $P = u\,\partial v/\partial y$, $Q = -u\,\partial v/\partial x$ и получим лемму 4.2.

4.3. Гармонические функции и задача Дирихле. Функция $u(x, y)$ называется гармонической в области D, если u имеет непрерывные вторые частные производные в D, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Отсюда следует, что $\varphi(z) = \partial u/\partial x - i\,\partial u/\partial y$ имеет частные производные, удовлетворяющие условиям Коши — Римана, и потому $\varphi(z)$ регулярна в D. Во всяком круге с центром

в точке z_0, лежащем в D, u является вещественной частью регулярной функции

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(\zeta)\, d\zeta + u(z_0).$$

Таким образом, u имеет в D непрерывные частные производные всех порядков. Кроме того, в силу принципа максимума модуля, примененного к функции $\exp\{\pm f(z)\}$, u не может иметь локального максимума или минимума в D, не будучи константой в D.

Предположим теперь, что D — область в открытой плоскости и что $u(\zeta)$ — непрерывная функция от ζ, заданная на границе γ области D. γ мы рассматриваем в расширенной плоскости, так что если D не ограничена, то γ включает бесконечно удаленную точку. Задача Дирихле состоит в том, чтобы найти функцию $u(z)$, непрерывную в $\overline{D}$, гармоническую в D и совпадающую с $u(\zeta)$ на γ. Если u_1, u_2 — две функции, удовлетворяющие этим условиям, то функция $u_1 - u_2$ гармонична в D, непрерывна в $\overline{D}$ и равна нулю на γ, а потому, в силу принципа максимума, $u_1 - u_2$ тождественно равна нулю в D. Значит, если решение задачи Дирихле существует, то оно единственно.

Решение существует не всегда. Если D есть кольцо $0 < |z| < 1$, то всякая ограниченная и гармоническая в D функция может быть доопределена в $z = 0$ так, что получится функция, гармоническая в круге $|z| < 1$. Поэтому граничные значения, заданные на $|z| = 1$, определяют u) 0).

Вопрос о существовании часто может быть разрешен с помощью следующего результата, доказательство которого читатель найдет в книге Альфорса [2], стр. 198 [1]).

Теорема 4.1. *Предположим, что, какова бы ни была граничная точка z_0 области D, существует функция $\omega(z)$, гармоническая в D, непрерывная в $\overline{D}$ и положительная всюду в $\overline{D}$, за исключением точки z_0, где $\omega(z_0) = 0$. Тогда задача Дирихле имеет решение при любых непрерывных граничных значениях на границе области D.*

Отсюда можно вывести следующий критерий:

[1]) См. также И. Г. Петровский [1*], стр. 229. — *Прим. перев.*

Теорема 4.2. *Задача Дирихле всегда имеет решение в области D, если, какова бы ни была граничная точка $z_0 \in \overline{D}$, некоторый прямолинейный отрезок или дуга окружности c содержит z_0 и лежит вне D* [1]).

Мы выведем теорему 4.2 из теоремы 4.1. Предположим сначала, что z_0 — конечная точка. Пусть концами дуги (или отрезка) c являются точки z_0 и z_1. Функция

$$\zeta = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z_1 - z}$$

отображает дополнение этой дуги c на ζ-плоскость, разрезанную вдоль некоторого луча, проходящего через начало так, что точки $z = z_0$, z_1 соответствуют точкам $\zeta = 0$, ∞. Выбирая надлежащим образом α, можно добиться, чтобы этот луч был отрицательной вещественной осью. Тогда функция

$$w = 1 + \frac{\zeta^{1/2} - 1}{\zeta^{1/2} + 1}$$

отображает эту разрезанную плоскость на круг $|w - 1| < 1$. Кроме того, $z = z_0$ соответствует $w = 0$ и D отображается на область, замыкание которой лежит в круге $|w - 1| \leqslant 1$, так что только z_0 переходит в $w = 0$. Таким образом, $\omega = \Re w$ оказывается той гармонической функцией, существование которой предполагается в теореме 4.1 [2]). Если z_0 — бесконечно удаленная точка и некоторый луч, идущий из конечной точки в бесконечность, лежит вне D, то рассуждение аналогично. Доказательство закончено. Плоская область, удовлетворяющая условию теоремы 4.2, будет называться *допустимой* (для задачи Дирихле).

4.4. Интеграл Дирихле и емкость. Дирихле пытался свести доказательство существования решения своей задачи

---

[1]) Точнее, в дополнении к D. — *Прим. ред.*

[2]) Точка из $\overline{D}$, лежащая на дуге, проходящей через z_0 и z_1, соответствует паре комплексно сопряженных значений w. Поэтому ω определяется единственным образом и непрерывна даже на этой дуге. [Слова „единственным образом" следует понимать в смысле независимости функции ω от выбора одной из ветвей двузначной функции $\zeta^{1/2}$ в рассматриваемой автором конструкции. Вообще же говоря, $\omega(z)$ определяется не единственным образом, так как вместе с $\omega(z)$ условию теоремы 4.1 удовлетворяет также и $\alpha\omega(z)$ при любом $\alpha > 0$. — *Прим. ред.*]

к задаче нахождения минимума интеграла Дирихле

$$I_D(u) = \int_D \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

на множестве функций, имеющих заданные граничные значения и удовлетворяющих некоторым условиям гладкости. В благоприятных обстоятельствах этот минимум достигается требуемой гармонической функцией. Однако даже в том случае, когда гармоническая функция, заданная внутри круга, имеет непрерывные граничные значения, ее интеграл Дирихле может быть бесконечным, так что задача на минимум не имеет решений.

Нам понадобится принцип минимума Дирихле только в одном частном случае, когда можно без труда установить, что этот принцип выполняется.

Теорема 4.3. *Пусть D — допустимая область открытой плоскости; пусть дополнение к D состоит из компактного множества E_1 и замкнутого неограниченного множества E_0, не пересекающего E_1. Пусть функции $v(z)$, $\omega(z)$, непрерывные в расширенной плоскости, равны 0 и 1 на E_0 и E_1 соответственно и удовлетворяют условию Липшица на каждом компактном*[1] *подмножестве области D. Предположим, далее, что $\omega(z)$ — гармоническая функция в D. Тогда $I_D[v(z)] \geqslant I_D[\omega(z)] = \int_{\gamma_a} \left|\frac{\partial \omega}{\partial n}\right| ds$, где γ_a — множество $\{z : \omega(z) = a\}$, a — любое такое число, что $0 < a < 1$, и $\partial\omega/\partial x - i\,\partial\omega/\partial y \neq 0$ на γ_a. В этом случае γ_a состоит из конечного числа аналитических жордановых кривых.*

Систему, состоящую из области D и множеств E_0, E_1, мы будем называть *конденсатором*, а $I_D[\omega(z)]$, в силу очевидных физических соображений, будем называть *емкостью* этого конденсатора. В том частном случае, когда E_0 и E_1 — континуумы, так что область D двусвязна, можно дать простое истолкование емкости в терминах теории функций. В этом случае можно отобразить D взаимно однозначно

[1] Термин „компактный" в этой книге — синоним термина „ограниченный замкнутый". — *Прим. ред.*

и конформно на кольцо $\Delta\ \{z : 1 < |z| < R\}$ (относительно построения отображающей функции с помощью $\omega(z)$ см. Альфорс [2], стр. 202[1])). Интеграл Дирихле, очевидно, инвариантен относительно этого преобразования, так что Δ имеет ту же емкость, что и D. Гармоническая функция, решающая нашу краевую задачу в Δ, такова:

$$\Omega(z) = \frac{\log|R/z|}{\log R} \text{ в } \Delta.$$

Значит, емкость Δ равна

$$\int_{|z|=\rho} \frac{1}{\log R} \frac{\rho\, d\theta}{\rho} = \frac{2\pi}{\log R}.$$

Число $\log R$ часто называют *модулем* двусвязной области D. Таким образом, модуль равен некоторому кратному величины, обратной к емкости области D, рассматриваемой как конденсатор. Для наших целей, однако, существенно то, что E_0 и E_1 не обязаны быть связными.

4.4.1. Доказательство теоремы 4.3. Пусть $\omega(z)$ — функция из теоремы 4.3. Тогда функция $\varphi(z) = \partial\omega/\partial x - i\,\partial\omega/\partial y$ регулярна и не является тождественным нулем в D. Поэтому $\varphi(z)$ обращается в нуль на не более чем счетном множестве точек области D, которые мы будем называть точками ветвления функции $\omega(z)$. Предположим, что $0 < a < 1$ и что множество γ_a тех точек, где $\omega(z) = a$, не содержит точек ветвления функции $\omega(z)$. Множество γ_a, очевидно, компактно и лежит в D по предположению. В окрестности любой точки z_0 на γ_a функция ω совпадает с вещественной частью регулярной функции

$$w = f(z) = \omega + i\omega_1 = a + ib + a_1(z - z_0) + \ldots.$$

Здесь $a_1 \neq 0$, так как $\varphi(z) \neq 0$ на γ_a. Следовательно, обратная функция $z = f^{-1}(w)$ тоже регулярна, и часть γ_a, расположенная в некоторой окрестности z_0, является образом прямолинейного отрезка при отображении, осуществляемом некоторой регулярной функцией, т. е. эта часть γ_a есть аналитическая жорданова дуга. При продолжении вдоль этой дуги мы должны в конце концов вернуться в исходную

[1]) См. также Г. М. Голузин [2], стр. 222—227. — *Прим. перев.*

точку, ибо в противном случае γ_a обладала бы предельной точкой, отличной от описанных ранее. Таким образом, γ_a состоит из аналитических кривых Жордана, попарно не имеющих общих точек. Таких кривых может быть лишь конечное число, так как в противном случае нашлась бы точка на γ_a, каждая окрестность которой пересекается с бесконечным множеством кривых. Это снова противоречит локальным свойствам γ_a, установленным выше.

Предположим теперь, что γ_a, γ_b не содержат точек ветвления, что $0 < a < b < 1$ и что $D_{a,b} = \{z : a < \omega(z) < b\}$. Тогда $D_{a,b}$ состоит из конечного числа ограниченных аналитических областей, полную границу которых образуют γ_a и γ_b. Если $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование вдоль нормали, направленной внутрь $D_{a,b}$, то $\partial\omega/\partial n > 0$ на γ_a и $\partial\omega/\partial n < 0$ на γ_b. Применим теперь формулу Грина к каждой из областей, составляющих $D_{a,b}$. Складывая, получим

$$\int_{\gamma_a} \frac{\partial\omega}{\partial n}\, ds + \int_{\gamma_b} \frac{\partial\omega}{\partial n}\, ds = 0,$$

и так как $\partial\omega/\partial n$ сохраняет знак на γ_a, γ_b, то мы заключаем, что

$$\int_{\gamma_a} \left|\frac{\partial\omega}{\partial n}\right| ds = \int_{\gamma_b} \left|\frac{\partial\omega}{\partial n}\right| ds = I.$$

Применим формулу Грина еще раз:

$$(b-a)\, I = -\int_{\gamma_a} \omega \frac{\partial\omega}{\partial n}\, ds - \int_{\gamma_b} \omega \frac{\partial\omega}{\partial n}\, ds = I_{D_{a,b}}[\omega(z)].$$

Так как каждая точка области D принадлежит некоторому $D_{a,b}$, то, устремляя a к 0, b к 1, получим

$$I_D[\omega(z)] = \lim_{a \to 0,\ b \to 1} I_{D_{a,b}}[\omega(z)] = I.$$

Предположим теперь, что $v(z)$ — функция из теоремы 4.3, и пусть $h = v - \omega$. Тогда $h(z)$ непрерывна на всей плоскости и обращается в нуль на E_0, E_1, а потому и в бесконечности. Значит, при всяком $\varepsilon > 0$ множество

$$E = \{z : |h(z)| \geqslant \varepsilon\}$$

есть компактное подмножество области D. Пусть a_0, b_0 — точ-

ные нижняя и верхняя грани $\omega(z)$ на E, так что $0 < a_0 \leqslant b_0 < 1$. Если $0 < a < a_0$, $b_0 < b < 1$, то γ_a, γ_b не пересекают E и потому $|h(z)| < \varepsilon$ на γ_a, γ_b. Заметим теперь, что h удовлетворяет условию Липшица на $\bar{D}_{a,b}$, поэтому из формулы Грина получаем

$$\left| \iint\limits_{D_{a,b}} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] dx\, dy \right| = \left| \int\limits_{\gamma_a + \gamma_b} h \frac{\partial \omega}{\partial n}\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int\limits_{\gamma_a + \gamma_b} \left| \frac{\partial \omega}{\partial n} \right| ds = 2\varepsilon I.$$

Таким образом,

$$I_{D_{a,b}}(h, \omega) = \iint\limits_{D_{a,b}} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] dx\, dy \to 0$$

$$(a \to 0,\ b \to 1).$$

Кроме того,

$$I_{D_{a,b}}(v) = I_{D_{a,b}}(\omega) + I_{D_{a,b}}(h) + 2I_{D_{a,b}}(h, \omega).$$

Устремляя a к 0, b к 1, заключаем, что $I_D(v) = I_D(\omega) + I_D(h)$. Тем самым доказано неравенство теоремы 4.3, а с ним и сама теорема. Заметим, что равенство возможно только в том случае, когда $I_D(h) = 0$. В этом случае, как нетрудно видеть, $h(z)$ тождественно равняется нулю, так что $\omega(z)$ должна совпадать с $v(z)$. Мы этого, однако, не будем использовать.

4.4.2. Емкость убывает с расширением области. Отметим одно заключение, непосредственно вытекающее из теоремы 4.3 и представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 4.4. *Пусть E_0, E_1; E_0', E_1' — две пары замкнутых множеств, определяющие два конденсатора так, как в теореме* 4.3. *Пусть I, I' — их емкости, и предположим, что $E_0' \subset E_0$, $E_1' \subset E_1$. Тогда $I' \leqslant I$.*

Пусть $\omega(z)$ — потенциальная функция, соответствующая первому конденсатору так, как в теореме 4.3. Если $0 < a < b < 1$, то функцию $v(z)$ определим следующим образом: $v(z) = 0$, если $\omega(z) \leqslant a$, $v(z) = 1$, если $\omega(z) \geqslant b$, и

$$v(z) = \frac{\omega(z) - a}{b - a} \text{ в } D_{a,b}.$$

Тогда функция $v(z)$ удовлетворяет условию Липшица в плоскости, и $v=0$, 1 на E_0', E_1' соответственно. Следовательно, если D' — дополнение к E_0' и E_1', то по теореме 4.3 имеем

$$I' \leqslant I_{D'}(v) = -\int_{\gamma_a+\gamma_b} v\,\frac{\partial v}{\partial n}\,ds = \frac{1}{b-a}\,I_D[\omega(z)] = \frac{I}{b-a}.$$

Устремляя a к 0, b к 1, получаем $I' \leqslant I$, что и требовалось.

4.5. Симметризация. Теперь мы рассмотрим процесс симметризации, введенный в середине прошлого столетия Штейнером и развитый Пойа и Сегё [1].

Пусть O — произвольное открытое множество в открытой плоскости. Ниже мы определим некоторое симметризованное множество O^* двояким образом.

4.5.1. Симметризация по Штейнеру. В этом случае мы осуществляем симметризацию по отношению к некоторой

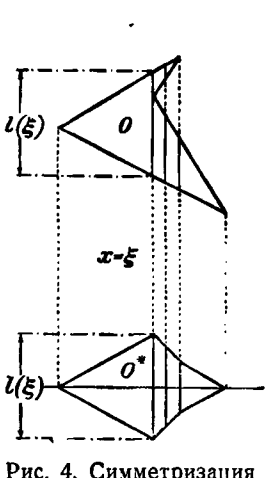

Рис. 4. Симметризация по Штейнеру.

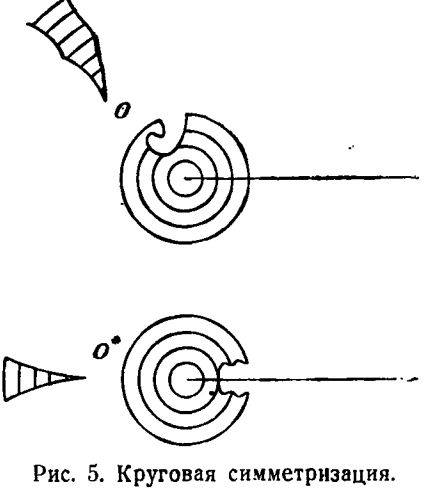

Рис. 5. Круговая симметризация.

прямой, которую можно принять за ось x в системе декартовых координат. При всяком вещественном ξ прямая $x=\xi$ пересекает O по некоторому множеству попарно не пересекающихся открытых промежутков с суммой длин $l(\xi)$,

где $0 \leqslant l(\xi) \leqslant \infty$. Симметризованным множеством будем называть множество

$$O^* = \left\{(x, y) : |y| < \tfrac{1}{2} l(x)\right\}.$$

4.5.2. Круговая симметризация (Пойа)[1]. В этом случае мы производим симметризацию по отношению к некоторой полупрямой, или лучу, причем считаем, что этот луч есть ось $\theta = 0$ в системе полярных координат r, θ. Определим симметризованное множество O^* следующим образом. Рассмотрим пересечение множества O с окружностью $r = \rho$. Если это пересечение содержит всю окружность или пусто, то пересечение O^* с $r = \rho$ тоже должно соответственно содержать всю окружность или быть пустым. Пусть O пересекается с окружностью $r = \rho$ по некоторому множеству открытых дуг с суммой длин $\rho l(\rho)$, где $0 < l(\rho) \leqslant 2\pi$. Тогда O^* пересекается с окружностью $r = \rho$ по единственной дуге $|\theta| < l(\rho)/2$.

Перейдем к обсуждению некоторых свойств симметризации. Результаты верны для обоих видов симметризации, если не оговорено противное.

4.5.3. Симметризованное множество O^* открыто. Мы докажем это только для круговой симметризации. Доказательство для штейнеровской симметризации аналогично.

Предположим, что точка (ρ_0, π) лежит в O^*. Тогда O содержит всю окружность $r = \rho_0$. Так как множество O открыто, то оно содержит некоторое кольцо $\rho_0 - \delta < r < \rho_0 + \delta$, и это кольцо лежит также в O^*. Таким образом, (ρ_0, π) — внутренняя точка в O^*. Слегка измененное рассуждение применимо в том случае, когда начало лежит в O^*.

Предположим теперь, что точка (ρ_0, θ_0), где $0 < \rho_0 < \infty$, $|\theta_0| < \pi$, лежит в O^*. Тогда $l(\rho_0) > 2|\theta_0|$. Выберем x так, что $2|\theta_0| < x < l(\rho_0)$. Теперь мы можем найти на окружности $r = \rho_0$ конечное число открытых дуг, лежащих в O, сумма длин которых превосходит $\rho_0 x$. Слегка уменьшая эти дуги, если нужно, мы можем считать, что они замкнуты, все лежат в O, а сумма их длин больше $\rho_0 x$. Если $\alpha_i \leqslant \theta \leqslant \beta_i$ — такая дуга, а δ_i — ее расстояние от дополнения

[1]) Пойа [1].

к O, то пусть δ — наименьшее из δ_ν. Тогда дуга $\alpha_\nu \leqslant \theta \leqslant \beta_\nu$ всякой окружности $r = \rho$ при

$$\rho_0 - \delta < \rho < \rho_0 + \delta$$

лежит в O. Таким образом,

$$l(\rho) \geqslant x > 2|\theta_0| \quad \text{при} \quad \rho_0 - \delta < \rho < \rho_0 + \delta,$$

и потому (r, θ) лежит в O^* при

$$\rho_0 - \delta < r < \rho_0 + \delta, \quad |\theta| < \frac{1}{2}x,$$

где $x/2 > |\theta_0|$. Поэтому (ρ_0, θ_0) — внутренняя точка в O^* и, значит, O^* — открытое множество.

4.5.4. Множество D^*, полученное из области D симметризацией по Штейнеру, заполняет всю плоскость или является односвязной допустимой областью. Предположим, что прямые $x = \xi_1$ и $x = \xi_2$, где $\xi_1 < \xi_2$, пересекают D^*, а потому и D. Тогда $x = \xi$ пересекает D при $\xi_1 < \xi < \xi_2$, так как в противном случае D оказалось бы объединением не связанных друг с другом непустых открытых множеств, лежащих соответственно в полуплоскостях $x < \xi$ и $x > \xi$. Значит, в этом случае отрезок $\xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2$ вещественной оси лежит в D^*. Две точки (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), лежащие в D^*, могут быть соединены в D^* ломаной с вершинами (ξ_1, η_1), $(\xi_1, 0)$, $(\xi_2, 0)$, (ξ_2, η_2). Поэтому D^* — область.

Предположим, что D^* не заполняет плоскость, так что $l(\xi) < +\infty$ хотя бы при одном ξ. Тогда дополнение к D^* пересекается с прямой $x = \xi$ по двум лучам $|y| > l(\xi)/2$. Поэтому условие допустимости из теоремы 4.2 выполнено для всякой точки (ξ, η) дополнения к D^*, а также в бесконечности. Далее, всякая точка дополнения к D^* может быть соединена с бесконечностью лучом, и потому дополнение к D^* связно в расширенной плоскости. Таким образом, область D^* односвязна и допустима.

Результаты, касающиеся круговой симметризации, не столь просты. Если, например, D состоит из кольца $\rho_1 < r < \rho_2$ с выколотой точкой (ρ, π), то D^* совпадает с D и потому не является ни односвязной, ни допустимой областью.

4.5.5. Множество D^*, полученное из области D с помощью круговой симметризации, есть область. Если D

односвязна, то односвязна и D^*. Если D допустима или если D^* односвязна, то D^* допустима или заполняет плоскость. Доказательство того, что D^* связна и потому является областью, проводится так же, как в случае симметризации по Штейнеру. Если D односвязна и содержит окружность $r=\rho$, то D должна содержать и внутренность этой окружности, так как в противном случае дополнение к D содержало бы точки из внутренности и из внешности (например, бесконечность) окружности, не содержа ни одной точки на самой окружности. Значит, если D содержит окружность $r=\rho$, то D, а с ней и D^* содержат круг $r<\rho$. Пусть ρ_0 — точная верхняя грань тех ρ, при которых это выполняется. Если $\rho_0=+\infty$, то D и D^* заполняют всю открытую плоскость. В противном случае дополнение к D содержит некоторую точку любой окружности $r=\rho\geqslant\rho_0$, а потому дополнение к D^* содержит луч $r\geqslant\rho_0$, $\theta=\pi$.

Всякая граничная точка области D^*, лежащая на этом луче, и бесконечно удаленная точка, очевидно, удовлетворяют условию допустимости. Если (ρ, θ_0) — какая-нибудь другая точка дополнения к D^*, то $\rho\geqslant\rho_0$, $|\theta_0|<\pi$ и дуга $|\theta_0|\leqslant\theta\leqslant\pi$ окружности $r=\rho$ лежит в дополнении к D^* и соединяет (ρ, θ_0) с лучом $\theta=\pi$, $r\geqslant\rho_0$. Поэтому дополнение к D^* связно, а область D^* односвязна. Критерий допустимости выполняется для любой граничной точки области D^*, не лежащей на луче $\theta=\pi$. Приведенное рассуждение показывает, что если D^* односвязна, то критерий допустимости выполнен и в граничной точке (ρ, π).

Остается доказать, что если D — допустимая область, то и D^* допустима. Проведенное рассуждение показывает, что достаточно проверить выполнение критерия теоремы 4.2 для граничных точек (ρ_0, π) области D^* и для ∞. Так как область D допустима, то дополнение к D содержит луч, который пересекается с каждой окружностью $r=\rho$ при достаточно больших ρ, и, значит, это дополнение содержит луч $r>\rho$, $\theta=\pi$. Таким образом, наш критерий выполняется в ∞. Предположим теперь, что (ρ_0, π) — граничная точка D^*. Если дуга $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ окружности $r=\rho_0$ лежит в дополнении к D, то некоторая дуга, середина которой есть (ρ_0, π), лежит в дополнении к D^* и критерий выполняется. Если это не так, то пусть (ρ_0, θ) — граничная точка D. Так как D допустима, то некоторая дуга окружности или некоторый прямолинейный

отрезок содержит (ρ_0, θ), но лежит вне D и по предположению не на $r=\rho_0$. Эта дуга (или отрезок) должна пересекать окружность $r=\rho$ при всех ρ из некоторого промежутка $\rho_0-\delta\leqslant\rho\leqslant\rho_0$ или $\rho_0\leqslant\rho\leqslant\rho_0+\delta$. Таким образом, отрезок $[\rho_0-\delta, \rho_0]$ или $[\rho_0, \rho_0+\delta]$ прямой $\theta=\pi$ лежит в дополнении к D^* и содержит (ρ_0, π), и потому D^* допустима.

4.6. Симметризация функций. Пусть $u(z)$ — вещественная непрерывная и ограниченная функция на плоскости. Симметризация функции, приводящая к новой функции $u^*(z)$, осуществляется посредством одновременной симметризации всех множеств $D_a=\{z: u(z)>a\}$ $(-\infty<a<+\infty)$. Эти множества открыты, так как u непрерывна.

Точнее, пусть D_a^* — множество, полученное симметризацией D_a по отношению к некоторой прямой или лучу. Для всякой точки z плоскости мы определим $u^*(z)$ как точную верхнюю грань множества всех a, при которых z лежит в D_a^*.

Практически мы столкнемся только с тем случаем, когда $u(z)$ неотрицательна и непрерывным образом обращается в нуль в бесконечности. В этом случае множества D_a ограничены при $a>0$ и их замыкания $\bar{D}_a$ компактны. Функция $u(z)$, непрерывная на компактном множестве E, равномерно непрерывна на E [1]). Иными словами, если $\Omega(\delta)$ — точная верхняя грань разности $|u(z_1)-u(z_2)|$ при $z_1, z_2\in E$ и $|z_1-z_2|\leqslant\delta$, то $\Omega(\delta)$ конечна и $\Omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. Число $\Omega(\delta)$ называется *модулем непрерывности* $u(z)$. Ясно, что $u(z)$ удовлетворяет условию Липшица на E тогда и только тогда, когда $\Omega(\delta)\leqslant C\delta$ при некотором положительном C и $0<\delta<\infty$.

4.6.1. Симметризация уменьшает модуль непрерывности. Мы сможем показать, что $u^*(z)$ „по крайней мере так же непрерывна, как $u(z)$".

Теорема 4.5. *Предположим, что при данных выше определениях функций $u(z)$, $u^*(z)$ множество $E=\{z: a\leqslant u(z)\leqslant b\}$ ограничено и что $\Omega(\delta)$ — модуль непрерывности $u(z)$ на E. Пусть $E^*=\{z: a\leqslant u^*(z)\leqslant b\}$. Тогда*

[1]) А. И. Маркушевич [1*], стр. 33, — *Прим. перев.*

функция $u^*(z)$ непрерывна на E^* и ее модуль непрерывности $\Omega^*(\delta) \leqslant \Omega(\delta)$. В частности, если и удовлетворяет условию Липшица на E, то u^* удовлетворяет этому условию на E^*.

Мы докажем этот результат для симметризации по Штейнеру. Доказательство для круговой симметризации проводится сходным образом, но в деталях несколько более сложно. Нам потребуется

Лемма 4.3. *Пусть выполнены приведенные выше условия. Пусть $l(x, t)$ обозначает сумму длин y-интервалов прямой $x = \text{const}$, на которых $u(x, y) > t$. Предположим, что $a \leqslant t_2 < t_1 - \Omega(\delta) \leqslant b - \Omega(\delta)$ и $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$. Тогда*

$$l(x_2, t_2) \geqslant l(x_1, t_1) + 2\sqrt{[\delta^2 - (x_2 - x_1)^2]}.$$

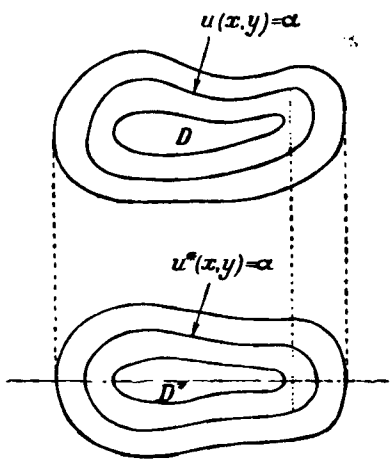

Рис. 6. Симметризация функций.

Пусть F_1 — множество всех y, таких, что $u(x_1, y) > t_1$, и пусть F_2 — множество тех y, для которых $u(x_2, y) > t_2$. Тогда $y_2 \in F_2$, если $y_1 \in F_1$ и $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leqslant \delta^2$. Действительно, в противном случае мы смогли бы на линии, соединяющей (x_1, y_1) и (x_2, y_2), найти две точки, отстоящие друг от друга не больше чем на δ, в которых непрерывная функция u принимает значения t_1 и t_2 соответственно, а это противоречило бы определению $\Omega(\delta)$.

Полагая $y_2 = y_1$, сразу получаем, что F_2 содержит F_1. Пусть, далее, y' есть точная верхняя грань множества F_1. Тогда $u(x_1, y') = t_1$. Следовательно,

$$u(x_2, y) > t_2, \quad \text{если} \quad (y - y')^2 + (x_2 - x_1)^2 \leqslant \delta^2,$$

и, в частности,

$$y \in F_2, \quad \text{если} \quad y' \leqslant y \leqslant y' + \sqrt{\delta^2 - (x_2 - x_1)^2}.$$

Аналогично, пусть y'' — точная нижняя грань множества F_1; тогда

$$y \in F_2, \quad \text{если} \quad y'' \geqslant y \geqslant y'' - \sqrt{\delta^2 - (x_2 - x_1)^2}.$$

Таким образом, F_2 содержит F_1 вместе с двумя интервалами, не принадлежащими F_1, причем каждый из них имеет длину $\sqrt{\delta^2 - (x_2 - x_1)^2}$. Лемма доказана, так как числа $l(x_1, t_1)$, $l(x_2, t_2)$ являются соответственно длинами F_1, F_2.

Допустим теперь, что теорема 4.5 неверна. Тогда можно найти на E^* такие точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), что при некотором положительном δ

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leqslant \delta^2$$

и

$$a \leqslant u^*(x_2, y_2) < u^*(x_1, y_1) - \Omega(\delta) \leqslant b - \Omega(\delta).$$

Выберем t_1, t_2 так, чтобы

$$u^*(x_2, y_2) < t_2 < t_1 - \Omega(\delta) < u^*(x_1, y_1) - \Omega(\delta).$$

Тогда из леммы 4.3 следует, что

$$l(x_2, t_2) \geqslant l(x_1, t_1) + 2\sqrt{\delta^2 - (x_2 - x_1)^2}.$$

Кроме того, из определения $u^*(x, y)$ получаем

$$l(x_1, t_1) > 2|y_1|, \quad l(x_2, t_2) \leqslant 2|y_2|,$$

так как (x_1, y_1) лежит в $D^*_{t_1}$, а (x_2, y_2) не лежит в $D^*_{t_2}$. Таким образом,

$$|y_2 - y_1| \geqslant |y_2| - |y_1| > \sqrt{\delta^2 - (x_2 - x_1)^2},$$

и мы получили противоречие, доказывающее теорему.

4.7. Симметризация коиденсаторов. Рассмотрим конденсатор, удовлетворяющий условиям теоремы 4.3. Пусть $\omega(z)$ — потенциальная функция из этой теоремы. Симметризуем функцию $\omega(z)$, и пусть

$$E_i^* = \{z : \omega^*(z) = i\} \qquad (i = 0, 1).$$

Функция $\omega^*(z)$ непрерывна по теореме 4.5, и потому множества E_0^* и E_1^* замкнуты. Кроме того, дополнение к E_0^* оказывается симметризованным дополнением к E_0, и E_1^* полу-

чается с помощью симметризации, описанной в определениях 4.5.1 и 4.5.2, в которых открытое множество и открытый интервал должны быть заменены замкнутым множеством и замкнутым интервалом.

Дополнение к E_0^* и E_1^* представляет собой открытое множество $D^* = \{z : 0 < \omega^*(z) < 1\}$, которое по-прежнему является областью. Предположим, например, что мы производим симметризацию относительно полупрямой $\theta = 0$. Пусть r_0, r_1 — точные нижняя и верхняя грани r в D. Тогда всякая окружность $r = \rho$ $(r_0 < \rho < r_1)$ пересекает D^* по единственной симметричной дуге $\gamma(\rho)$ одного из видов $|\theta| < l(\rho)$, $|\theta| \leqslant \pi$, $l(\rho) < |\theta| \leqslant \pi$ или по паре дуг $\gamma_+(\rho)$, $\gamma_-(\rho)$, заданных неравенствами $l_1(\rho) < |\theta| < l_2(\rho)$. Первый из названных случаев [1]) наверное имеет место, если только окружность $r = \rho$ не пересекает оба множества E_0 и E_1, что неизбежно, если ρ достаточно близко к r_0 или r_1 [2]). Из того, что D^* открыто, следует, что если ρ достаточно близко к ρ_0, то $\gamma_+(\rho)$ и $\gamma_+(\rho_0)$ [или $\gamma(\rho)$ и $\gamma(\rho_0)$] могут быть соединены прямолинейным отрезком, лежащим в D^*. Значит, D^* связно [3]).

Точно так же, как в 4.5.4 и 4.5.5, можно показать, что область D^* допустима, если допустима D. Таким образом, мы получаем новый конденсатор, который называется симметризованным конденсатором для исходного конденсатора. Докажем теперь следующий результат Пойа и Сегё [1]:

Теорема 4.6. *Предположим, что конденсатор C и его симметризованный конденсатор C^* имеют емкости I, I^* соответственно. Тогда $I^* \leqslant I$.*

Функция $\omega^*(z)$ непрерывна на всей плоскости по теореме 4.5, и так как $\omega(z)$ удовлетворяет условию Липшица

---

[1]) Случай единственной дуги. — *Прим. ред.*

[2]) В противном случае E_0 и E_1 имели бы общую точку. — *Прим. ред.*

[3]) Множество D^* симметрично относительно действительной оси. Достаточно доказать связность той части D_+^* множества D^*, которая лежит в верхней полуплоскости, так как при значениях ρ, достаточно близких к r_0, заведомо имеются дуги $\gamma(\rho)$, принадлежащие D^* и связывающие верхнюю и нижнюю полуплоскости. Связность же D_+^* доказывается с помощью леммы Гейне — Бореля. — *Прим. ред.*

на множестве $\overline{D}_{a,\,b}=\{z: a\leqslant\omega(z)\leqslant b\}$ при $0<a<b<1$, то $\omega^*(z)$ удовлетворяет условию Липшица на $\overline{D}^*_{a,\,b}=\{z: a\leqslant\omega^*(z)\leqslant b\}$. На всяком компактном множестве E^* в D^* функция $\omega^*(z)$ имеет точные нижнюю и верхнюю грани a, b, где $0<a<b<1$, и потому $\omega^*(z)$ удовлетворяет условию Липшица на E^*. Кроме того, $\omega^*(z)=0$, 1 на E_0^*, E_1^* соответственно. Следовательно, по теореме 4.3 мы имеем

$$I^*\leqslant I_{D^*}[\omega^*(z)]\ ^1),\qquad I=I_D[\omega(z)].$$

Для того чтобы завершить доказательство теоремы 4.6, остается проверить, что

$$I_{D^*}[\omega^*(z)]\leqslant I_D[\omega(z)]. \tag{4.4}$$

Этот результат представляет собой основной инструмент в теории Пойа — Сегё.

4.7.1. Симметризация уменьшает интеграл Дирихле. Мы докажем неравенство (4.4) для круговой симметризации. Доказательство для симметризации по Штейнеру аналогично и даже немного проще. Выразим интеграл Дирихле в полярных координатах:

$$I_D(\omega)=\int_0^\infty \rho\,d\rho\int_{\mathfrak{E}_\rho}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)^2\right]d\theta.$$

Здесь

$$\mathfrak{E}_\rho=\{\theta: 0<\omega(\rho e^{i\theta})<1\}.$$

Рассмотрим выражение

$$J(\rho)=\int_{\mathfrak{E}_\rho}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)^2\right]d\theta.$$

Если ω постоянна на каждом круге с центром в начале, то D необходимо оказывается кольцом $r_1<\rho<r_2$ и D^* совпадает с D, а $\omega(z)$ — с $\omega^*(z)$. Исключим этот случай. Тогда функция $\omega(z)$, будучи гармонической в D, может быть постоянной и отличной от 0 и 1 на окружности $r=\rho$ только

---

1) Неравенство, так как $\omega^*(z)$ не является, вообще говоря, потенциальной функцией. — *Прим. ред.*

при некоторых изолированных значениях ρ [1]); их мы можем исключить из множества, по которому производится интегрирование. Если $\omega(z)$ не постоянна на окружности $r=\rho$, то $\omega(z)$ не может быть постоянной ни в каком интервале, лежащем в $\mathfrak{E}_\rho$, так как $\omega(\rho, \theta)$ — аналитическая функция от θ в $\mathfrak{E}_\rho$. Действительно, концы такого интервала должны были бы лежать вне $\mathfrak{E}_\rho$, и потому $\omega(z)$ равнялась бы 0 или 1 в этом интервале вопреки определению $\mathfrak{E}_\rho$. Поэтому будем считать, что $\omega(z)$ не постоянна ни в каком интервале множества $\mathfrak{E}_\rho$, и потому $\partial\omega/\partial\theta = 0$ только в изолированных точках $\mathfrak{E}_\rho$. Значения функции $\omega(z)$ в этих точках будем называть стационарными значениями этой функции. Предельными точками множества стационарных точек могут быть лишь 0 и 1. Поэтому можно расположить стационарные значения в порядке их возрастания в последовательность t_m, где точная нижняя граница m конечна или равна $-\infty$, а точная верхняя граница m конечна или равна $+\infty$. Если 0 есть точная нижняя граница для $\omega(z)$ на $\mathfrak{E}_\rho$ и не является предельной точкой последовательности t_m, то мы включим 0 в последовательность t_m; аналогично поступим со значением 1. Пусть t_m, t_{m+1} — последовательные стационарные значения. Тогда в $\mathfrak{E}_\rho$ имеется n открытых интервалов, в которых $\omega(\rho, \theta)$ возрастает от t_m до t_{m+1}, и n интервалов, в которых ω убывает от t_{m+1} до t_m, где n — положительное целое число, причем эти интервалы чередуются на окружности $r=\rho$, так как функция ω непрерывна на этой окружности.

Обозначим эти интервалы в том порядке, в каком они встречаются на окружности $r=\rho$, через $T_{m,\nu}$ $(1 \leqslant \nu \leqslant 2n)$. Предположим, что $\omega(\rho, \theta)$ возрастает в $T_{m,\nu}$ при нечетных ν и убывает в $T_{m,\nu}$ при четных ν. Совокупность интервалов $T_{m,\nu}$ при всевозможных m, ν исчерпывает множество $\mathfrak{E}_\rho$, если исключить некоторые изолированные точки. Таким образом,

$$J(\rho) = \sum_m \sum_{\nu=1}^{2n(m)} \int_{T_{m,\nu}} \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)^2\right] d\theta.$$

Заменим теперь переменную интегрирования θ на $t=\omega(\rho, \theta)$ в каждом интервале $T_{m,\nu}$. Так как $\partial\omega/\partial\theta \neq 0$

[1]) В противном случае $\partial\omega/\partial\theta$ было бы тождественно равно нулю.

в $T_{m,\nu}$, то

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}=-\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\Big/\frac{\partial\theta}{\partial t},\quad \frac{\partial\omega}{\partial\theta}=1\Big/\frac{\partial\theta}{\partial t},\qquad d\theta=\frac{\partial\theta}{\partial t}\,dt.$$

Значит, если $\theta_\nu(t,\rho)$ — такое значение θ в $T_{m,\nu}$, что $\omega(\rho,\theta_\nu)=t$, то

$$J(\rho)=\sum_m\int_{t_m}^{t_{m+1}}\sum_{\nu=1}^{2n(m)}\left\{\frac{(\partial\theta_\nu/\partial\rho)^2}{|\partial\theta_\nu/\partial t|}+\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{|\partial\theta_\nu/\partial t|}\right\}dt. \tag{4.5}$$

Если $t_m<t<t_{m+1}$, то множество тех интервалов на окружности $r=\rho$, где $\omega(\rho,\theta)>t$, задается неравенствами $\theta_{2\nu-1}(t)<\theta<\theta_{2\nu}(t)$ $(1\leqslant\nu\leqslant n)$. Поэтому длина этого множества равна $\rho l(\rho,t)$, где

$$l(\rho,t)=\sum_{\nu=1}^{n}[\theta_{2\nu}(t)-\theta_{2\nu-1}(t)].$$

Очевидно, что $l(\rho,t)$ строго убывает с возрастанием t от t_m до t_{m+1}. Следовательно, $\omega^*(\rho,\varphi)$ удовлетворяет равенству $\omega^*(\rho,\varphi)=t$, где $\varphi=\pm\frac{1}{2}l(\rho,t)$, если $t_m<t<t_{m+1}$. Значит, если $J^*(\rho)$ соответствует $\omega^*(z)$ так же, как $J(\rho)$ соответствует $\omega(z)$, то [1])

$$J^*(\rho)=\sum_m 2\int_{t_m}^{t_{m+1}}\left\{\frac{(\partial\varphi/\partial\rho)^2}{|\partial\varphi/\partial t|}+\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{|\partial\varphi/\partial t|}\right\}dt, \tag{4.6}$$

где

$$\varphi=\frac{1}{2}[(\theta_2-\theta_1)+\ \dots\ +(\theta_{2n}-\theta_{2n-1})].$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t}=-\frac{1}{2}\sum_1^{2n}\left|\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t}\right|,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\leqslant\frac{1}{2}\sum_1^{2n}\left|\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\rho}\right|.$$

[1]) Оценивая интеграл $I_{D^*}[\omega^*(z)]$, мы можем пренебречь множеством, на котором $\omega^*=t_m$. Действительно, или это множество имеет нулевую площадь, или $\partial\omega^*/\partial\theta$, $\partial\omega^*/\partial\rho$ равны нулю почти везде на нем.

Поэтому теорема об арифметических и гармонических средних дает [1])

$$\frac{2}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|}=\frac{4}{\sum_{1}^{2n}\left|\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t}\right|}\leqslant\frac{4}{(2n)^2}\sum_{1}^{2n}\frac{1}{\left|\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t}\right|}\leqslant\sum_{1}^{2n}\frac{1}{\left|\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t}\right|}.$$

Применяя неравенство Шварца

$$\left(\sum a\right)^2\leqslant\left(\sum a^2/|b|\right)\left(\sum|b|\right),$$

получим также [2])

$$\frac{2\,(\partial\varphi/\partial\rho)^2}{|\partial\varphi/\partial t|}\leqslant\frac{\left(\sum|\partial\theta_\nu/\partial\rho|\right)^2}{\sum|\partial\theta_\nu/\partial t|}\leqslant\sum\left\{\frac{|\partial\theta_\nu/\partial\rho|^2}{|\partial\theta_\nu/\partial t|}\right\}.$$

Подставляя эти неравенства в выражения (4.5) и (4.6) для $J(\rho)$ и $J^*(\rho)$, мы заключаем, что

$$J^*(\rho)\leqslant J(\rho),$$

и, интегрируя по ρ, получаем (4.4). Доказательство теоремы 4.6 закончено.

4.8. Функция Грина и внутренний радиус. Пусть D — область комплексной z-плоскости, z_0 — точка из D. Пусть существует непрерывная в замкнутой плоскости и гармоническая всюду в D, кроме z_0, функция $g[z, z_0, D]$, равная нулю вне D и такая, что функция

$$g[z, z_0, D]+\log|z-z_0|$$

оказывается гармонической и при $z=z_0$. Тогда $g[z, z_0, D]$ называют (классической) *функцией Грина* области D.

Очевидно, что если $g[z, z_0, D]$ существует, то она единственна. Действительно, если $g_1(z)$ — другая функция с теми

---

[1]) Если $a_k>0$, $k=1, 2, \ldots, n$, то $\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\geqslant n^2$. — *Прим. ред.*

[2]) $a=\left|\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\rho}\right|$, $b=\left|\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t}\right|$. — *Прим. ред.*

же свойствами, то функция $g - g_1$ гармонична всюду в D, непрерывна в $\bar{D}$ и равна нулю вне D, а потому $g - g_1$ тождественно равна нулю в силу принципа максимума.

Если D допустима и ограничена, то $g[z, z_0, D]$ существует. В самом деле, пусть функция $h(z, z_0)$ гармонична в D и имеет граничные значения $\log|z - z_0|$ на границе D. Тогда, очевидно,

$$g(z, z_0) = h(z, z_0) - \log|z - z_0|$$

— требуемая функция Грина области D.

Предположим теперь, что $g(z, z_0)$ существует. Тогда $g > 0$ в D, так как иначе g имела бы минимум в D в точке, отличной от z_0, что невозможно. Так как функция

$$g(z, z_0) + \log|z - z_0|$$

остается гармонической в z_0, то существует предел

$$\gamma = \lim_{z \to z_0} [g(z, z_0) + \log|z - z_0|].$$

Положим

$$\gamma = \log r_0$$

и назовем r_0 *внутренним радиусом* области D в точке z_0[1]).

Для объяснения этой терминологии предположим, что Δ односвязна и что

$$w = \psi(z) = z - a_0 + b_1(z - a_0)^2 + \dots$$

отображает D взаимно однозначно и конформно на круг $|w| < r_0$, так что $\psi(a_0) = 0$, $\psi'(a_0) = 1$. Тогда

$$g(z, a_0) = \log \frac{r_0}{|\psi(z)|}$$

есть функция Грина области D в точке a_0, и внутренний радиус области D в a_0 равен r_0. Действительно, $g(z, a_0)$, очевидно, гармонична всюду в D, кроме точки a_0, и если z стремится любым образом к границе области D, то $|\psi(z)| \to r_0$ и потому $g(z) \to 0$. Кроме того, вблизи $z = a_0$ имеем

$$g(z, a_0) = \log \frac{r_0}{|z - a_0||1 + o(1)|} = \log \frac{1}{|z - a_0|} + \log r_0 + o(1),$$

что и требовалось.

[1]) В нашей литературе r_0 называется радиусом конформности области D в точке z_0. — *Прим. ред.*

Заметим также, что если функция

$$z=f(w)=a_0+a_1w+\ldots$$

отображает круг $|w|<1$ на область D взаимно однозначно и конформно, то

$$w=f^{-1}(z)=\frac{z-a_0}{a_1}+\ldots$$

вблизи $z=a_0$, так что $a_1f^{-1}(z)$ обладает свойствами функции $\psi(z)$, использованными в только что проведенном рассуждении. В частности, в этом случае $|a_1|$ равняется внутреннему радиусу области D в точке a_0. Отметим, однако, особо, что наше определение внутреннего радиуса приложимо также и к многосвязным областям D, которые нельзя отобразить на круг, и даже в случае односвязной области нам не нужно предполагать существование отображения.

Заметим, что если области D, D_1 имеют функции Грина $g(z, z_0)$, $g_1(z, z_0)$ и если $D\subset D_1$, то разность

$$g_1(z, z_0)-g(z, z_0)$$

гармонична в области D и неотрицательна на ее границе. Поэтому эта разность неотрицательна в D. Значит, если r, r_1 — внутренние радиусы областей D, D_1 в точке z_0, то $\log r_1\geqslant\log r$ и $r\leqslant r_1$. *Таким образом, внутренний радиус возрастает с расширением области.*

Определим внутренний радиус r_0 произвольной области D в точке a_0 (a_0 принадлежит D) как точную верхнюю грань множества внутренних радиусов в a_0 всех областей, содержащих a_0, содержащихся в D и имеющих классическую функцию Грина. Ясно, что $0<r_0\leqslant\infty$.

4.8.1. Внутренний радиус и конформное отображение. Применения понятия внутреннего радиуса к теории функций основаны на следующей теореме:

Теорема 4.7. *Пусть функция* $w=f(z)=a_0+a_1z+\ldots$ *регулярна в круге* $|z|<1$ *и принимает там значения* w, *лежащие в области* D, *имеющей в точке* a_0 *внутренний радиус* r_0. *Тогда* $|a_1|\leqslant r_0$. *Равенство имеет место в том*

случае, когда $f(z)$ отображает круг $|z|<1$ взаимно однозначно и конформно на D[1]).

В предыдущем пункте мы обсудили тот случай, когда $f(z)$ отображает круг $|z|<1$ взаимно однозначно и конформно на область D. В общем случае выберем ρ так, что $0<\rho<1$ и $f'(z)\neq 0$ на окружности $|z|=\rho$. Этого можно добиться небольшим увеличением ρ, если нужно. Пусть $C(\rho)$ — кривая, являющаяся образом окружности $|z|=\rho$ при отображении $w=f(z)$. Это замкнутая аналитическая кривая, которая может быть самопересекающейся. Множество значений w, принимаемых функцией $f(z)$ внутри круга $|z|<\rho$, образует область $D(\rho)$, граница которой состоит из некоторых дуг $C(\rho)$. Если две такие дуги касаются в точке P, то мы добавим к $D(\rho)$ внутренность малого круга с центром в P. Таким образом, мы построим область D_0, содержащую $D(\rho)$ и содержащуюся в D, с границей, состоящей из конечного числа аналитических дуг, причем эти дуги попарно не касаются друг друга.

Тогда D_0 удовлетворяет условию допустимости теоремы 4.2. Далее, D_0 ограничена и имеет функцию Грина

$$g_\rho(w, a_0)=\log\left|\frac{1}{w-a_0}\right|+\log r(\rho)+o(1)$$

вблизи $w=a_0$, где $r(\rho)$ — внутренний радиус области D_0 в точке a_0. Так как D_0 лежит в D, то $r(\rho)\leqslant r_0$.

Рассмотрим теперь функцию

$$h(z)=g_\rho(f(z), a_0)+\log\frac{|z|}{\rho}.$$

Она неотрицательна на окружности $|z|=\rho$ и гармонична при $|z|\leqslant\rho$, за исключением, может быть, тех точек, в которых $f(z)=a_0$. Во всех таких точках, за исключением, может быть, начала, $h(z)$ обращается в $+\infty$. В начале имеем

$$h(z)=\log\left|\frac{1}{f(z)-a_0}\right|+\log r(\rho)+\log\frac{|z|}{\rho}+o(1)=$$
$$=\log\frac{r(\rho)}{|a_1|\rho}+o(1).$$

[1]) На самом деле это единственный случай равенства. См., например, Хейман [2] относительно предельного случая $a_0=\infty$.

Таким образом, $h(z)$ остается гармонической в начале и

$$h(0) = \log \frac{r(\rho)}{|a_1|\rho}.$$

Значит, $h(z) \geqslant 0$ в $|z| < \rho$, так как иначе $h(z)$ имела бы отрицательный минимум где-то в круге $|z| < \rho$ и в такой точке $h(z)$ была бы гармонической, что невозможно. Поэтому

$$h(0) = \log \frac{r(\rho)}{|a_1|\rho} \geqslant 0,$$

$$|a_1| \leqslant \frac{r(\rho)}{\rho} \leqslant \frac{r_0}{\rho}.$$

Устремляя ρ к 1, получаем неравенство теоремы 4.7.

4.8.2. Внутренний радиус и симметризация. Теорема 4.7 становится сильным средством в теории функций, если ее скомбинировать со следующим результатом Пойа и Сегё [1]:

Теорема 4.8. *Предположим, что a_0—точка области D w-плоскости и что D^* получается из D симметризацией относительно прямой или полупрямой, проходящей через точку a_0. Пусть r_0, r_0^* — внутренние радиусы D, D^* в точке a_0. Тогда $r_0 \leqslant r_0^*$* [1]).

Следуя Пойа и Сегё, мы выведем теорему 4.8 из теоремы 4.6. Предположим сначала, что D ограничена и допустима, так что D имеет функцию Грина $g(w) = g(w, a_0)$, удовлетворяющую вблизи $w = a_0$ условию

$$g(w) = \log \left| \frac{1}{w - a_0} \right| + \log r_0 + o(1).$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} g(a_0 + re^{i\theta}) = \frac{-1}{r} + O(1) \quad (r \to 0).$$

Значит, если K достаточно велико, то при каждом θ существует одно и только одно значение r [2]), такое, что $g(a_0 + re^{i\theta}) = K$, и множество этих точек $a_0 + re^{i\theta}$ образует

---

[1]) Дженкинс [2] показал, что в случае, когда D односвязна, $r_0 < r_0^*$, если D^* не совпадает с D.

[2]) В силу монотонности функции $g(a_0 + re^{i\theta})$ по радиусу r при достаточно малых r. — *Прим. ред.*

аналитическую кривую Жордана γ_K, окружающую a_0. Пусть $r = |w - a_0|$. На γ_K при больших K имеем

$$r = e^{-K}[1 + o(1)]\, r_0.$$

Иными словами, при любом $\varepsilon > 0$

$$r_0 e^{-(K+\varepsilon)} < r < r_0 e^{-(K-\varepsilon)} \text{ на } \gamma_K, \tag{4.7}$$

если K достаточно велико.

Рассмотрим теперь конденсатор, образованный кривой γ_K и ее внутренностью, где поддерживается единичный потенциал, и границей D, где поддерживается нулевой потенциал. Соответствующая потенциальная функция равна $g(w)/K$, и, значит, по теореме 4.3 емкость этого конденсатора равна

$$-\frac{1}{K}\int_{\gamma_{K'}} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds,$$

где $0 < K' < K$. Так как функция g гармонична, то из леммы 4.2 следует, что при малых r

$$-\int_{\gamma_{K'}} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds = -\int_{|w-a_0|=r} \frac{\partial g}{\partial r}\, ds = 2\pi r\left[\frac{1}{r} + O(1)\right] \to 2\pi \quad (r \to 0).$$

Таким образом, емкость нашего конденсатора равна $2\pi/K$.

Рассмотрим теперь емкость $c(r)$ конденсатора, который получается из предыдущего, если γ_K заменить окружностью $|w - a_0| = r$. По теореме 4.4 имеем $c(r) \geqslant 2\pi K^{-1}$ или $c(r) \leqslant 2\pi K^{-1}$, смотря по тому, содержит ли круг $|w - a_0| \leqslant r$ внутренность кривой γ_K или содержится в ней. Значит, из (4.7) при больших K получим

$$c(r_0 e^{-K-\varepsilon}) < \frac{2\pi}{K} < c(r_0 e^{-K+\varepsilon}),$$

или

$$\log\frac{r_0}{r} - \varepsilon < \frac{2\pi}{c(r)} < \log\frac{r_0}{r} + \varepsilon\ ^{1})$$

---

1) Из (4.7) следует, что $\log\frac{r_0}{r} - \varepsilon < K < \log\frac{r_0}{r} + \varepsilon$. Фиксируя достаточно малое r и варьируя K, получим

либо $\frac{2\pi}{c(r)} \geqslant K > \log\frac{r_0}{r} - \varepsilon$, либо $\frac{2\pi}{c(r)} \leqslant K < \log\frac{r_0}{r} + \varepsilon$,

в зависимости от того, содержится ли круг $|w - a_0| \leqslant r$ внутри кривой γ_k или наоборот. — *Прим. ред.*

при достаточно малых r. Таким образом,

$$\frac{1}{c(r)} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_0}{r} + o(1) \quad (r \to 0).$$

Если мы теперь симметризуем наш конденсатор относительно прямой или полупрямой, проходящей через a_0, то круг $|w - a_0| \leqslant r$, будучи уже симметричным, не изменится. Область D заменится симметризованной областью D^*. Если $c^*(r)$ обозначает емкость нового конденсатора, то по теореме 4.6 получим

$$\frac{1}{c(r)} \leqslant \frac{1}{c^*(r)}.$$

Используя найденное выше асимптотическое выражение для $1/c(r)$, заключаем, что

$$\log \frac{r_0}{r} + o(1) \leqslant \log \frac{r_0^*}{r} + o(1),$$

а это дает неравенство $r_0 \leqslant r_0^*$.

Итак, теорема 4.8 доказана в предположении, что D ограничена и допустима. Для произвольной области D открытой плоскости будем рассуждать следующим образом. Пусть r_0 — внутренний радиус области D в точке a_0. Пусть D_1 — подобласть D, имеющая функцию Грина $g(w, a_0)$ и внутренний радиус r_1 в точке a_0, где $r_1 > r_0 - \varepsilon$. Предположим ε таким, что

$$\frac{\partial g}{\partial u} - i \frac{\partial g}{\partial v} \neq 0$$

на кривых $\gamma_\varepsilon = \{w : g(w) = \varepsilon\}$, где $w = u + iv$. Пусть D_2 — та из подобластей в D_1, ограниченных некоторыми кривыми Жордана γ_ε, которая содержит a_0. Тогда D_2 аналитична, а потому допустима; функция Грина для D_2 есть $g - \varepsilon$, а внутренний радиус r_2 области D_2 в a_0 равен $r_1 e^{-\varepsilon}$.

Таким образом, если D^*, D_2^* — симметризованные области D, D_2 и r_0^*, r_2^* — их внутренние радиусы в a_0, то $r_0^* \geqslant r_2^* \geqslant r_2 > e^{-\varepsilon}(r_0 - \varepsilon)$. Так как ε произвольно, то неравенство $r_0 \leqslant r_0^*$ теоремы 4.8 доказано.

4.9. Принцип симметризации [1]. Комбинируя теоремы 4.7 и 4.8, мы приходим к следующему результату, имеющему форму, удобную для приложений.

Теорема 4.9. *Предположим, что* $w=f(z)=a_0+a_1z+\ldots$ *— регулярная в* $|z|<1$ *функция и что* $D=D_f$ *— область значений* w*, принимаемых функцией* $w=f(z)$ *хоть однажды в круге* $|z|<1$*. Предположим, далее, что область* D^**, полученная из области* D *симметризацией относительно прямой или луча, проходящего через* a_0*, лежит в односвязной области* D_0*. Пусть функция*

$$w=\varphi(z)=a_0+a_1'z+a_2'z^2+\ldots$$

отображает круг $|z|<1$ *взаимно однозначно и конформно на* D_0*. Тогда* $|a_1|\leqslant|a_1'|$.

Пусть r, r^* и r_0 — внутренние радиусы областей D, D^* и D_0 в точке a_0. Тогда

$$|a_1|\leqslant r\leqslant r^*\leqslant r_0=|a_1'|.$$

Первое неравенство следует из теоремы 4.7, как и равенство $|a_1'|=r_0$. Из теоремы 4.8 вытекает неравенство $r\leqslant r^*$. Далее, $r^*\leqslant r_0$, поскольку внутренний радиус возрастает с расширением области, как было установлено в § 4.8. Теорема 4.9 доказана.

Используя работы Дженкинса [2] и Хеймана [2], цитированные выше, можно показать, что в теореме 4.9 имеет место строгое неравенство, если только D не совпадает с D_0 и D^*, а $f(z)$ — с $\varphi(ze^{i\lambda})$. Однако этот результат нам не понадобится.

Мы можем в теореме 4.9 изменять $f(z)=a_0+a_1z+\ldots$ в классе $\mathfrak{F}$ функций, для которых a_0 фиксировано, а D_f^* остается внутри D_0. Тогда теорема 4.9 показывает, что при $\varphi(z)\in\mathfrak{F}$ величина $|a_1'|$ является точной верхней границей для $|a_1|$, когда $f(z)$ изменяется в классе $\mathfrak{F}$. Некоторые примеры подобных результатов, представляющие самостоятельный интерес, будут приведены в двух следующих пунктах. Экстремальная функция $\varphi(z)$ часто дает точные верхние границы

[1] По поводу остальных результатов этой главы см. Хейман [1].

для $M(r, f)$ и $M(r, f')$ при $f(z) \in \mathfrak{F}$. В последнем пункте настоящей главы мы дадим доказательство этого факта в одном типичном случае, важном для главы 5.

4.10. Приложения симметризации по Штейнеру. Предполагая, что a_0 вещественно и условия теоремы 4.9 выполняются, будем осуществлять симметризацию относительно вещественной оси $v = 0$ комплексной плоскости $w = u + iv$. Пусть $\theta(u)$ — мера объединения интервалов, по которым D_f пересекает прямую $u = \text{const}$. Тогда D^* есть область

$$\left\{w : |v| < \frac{1}{2}\theta(u), \ -\infty < u < +\infty\right\}.$$

В § 4.5.4 мы видели, что D^* в этом случае односвязна, и мы можем в теореме 4.9 выбрать $D_0 = D^*$, если только D^* не заполняет всю плоскость. Действительно, по теореме Римана об отображении[1]), всякая односвязная область, не заполняющая плоскости, может быть взаимно однозначно и конформно отображена на круг $|z| < 1$ с помощью функции $\varphi(z) = a_0 + a_1' z + \ldots$, где a_0 — заданная точка области.

Мы не будем опираться на этот общий результат, а просто приведем два примера применения метода в тех случаях, когда экстремальная функция $\varphi(z)$ может быть легко вычислена явно, так что получаются числовые неравенства. Ясно, что количество примеров можно увеличить.

Теорема 4.10[2]). *Предположим, что функция* $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ *регулярна в круге* $|z| < 1$ *и что* D_f *пересекает всякую прямую* $u = \text{const}$ *в плоскости* $w = u + iv$ *по семейству интервалов с суммой длин* $\leqslant l$. *Тогда*

$$|a_1| \leqslant \frac{2l}{\pi}.$$

Равенство имеет место для функции

$$f(z) = a_0 + \frac{l}{\pi} \log \frac{1+z}{1-z},$$

---

[1]) А. И. Маркушевич [1*], стр. 376.

[2]) Для однолистных функций это неопубликованный результат Рогозинского. Относительно общего случая см. Хейман [1], [2].

взаимно однозначно и конформно отображающей круг $|z|<1$ *на полосу* $|v-\Im a_0|<l/2$.

Не умаляя общности, мы можем предполагать a_0 вещественным, вычитая, если нужно, мнимую постоянную. Произведем симметризацию относительно вещественной оси и заметим, что D_f^* лежит в полосе $|v|<l/2$. Неравенство $|a_1|\leqslant 2l/\pi$ следует из теоремы 4.9, так как функция

$$\varphi(z)=a_0+\frac{l}{\pi}\log\frac{1+z}{1-z}=a_0+\frac{2l}{\pi}z+\ldots$$

отображает круг $|z|<1$ взаимно однозначно и конформно на эту полосу. Полученное неравенство точно, так как $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям, наложенным на $f(z)$.

В качестве другого примера будет доказана

Теорема 4.11. *Предположим, что функция* $f(z)=a_0+a_1z+\ldots$ *регулярна в круге* $|z|<1$ *и что* D_f *пересекает мнимую ось* w*-плоскости по семейству интервалов с суммой длин* $\leqslant l$. *Тогда*

$$|a_1|\leqslant[4|a_0|^2+l^2]^{1/2}.$$

Равенство имеет место, если a_0 *вещественно, а* $f(z)$ *отображает круг* $|z|<1$ *взаимно однозначно и конформно на область* D_0, *представляющую собой* w*-плоскость, разрезанную от* $-il/2$ *до* $-i\infty$ *и от* $il/2$ *до* $+i\infty$ *вдоль мнимой оси.*

Предположим сначала, что a_0 вещественно. Мы можем произвести симметризацию относительно вещественной оси, и тогда D_f^* будет содержаться в D_0. Таким образом, если функция

$$\varphi(z)=a_0+a_1'z+\ldots$$

отображает круг $|z|<1$ на D_0, то $|a_1|\leqslant|a_1'|$. Остается найти a_1'. Заметим, что функция

$$\zeta=z+\frac{1}{z}$$

отображает круг $|z|<1$ на замкнутую ζ-плоскость, разрезанную вдоль отрезка $(-2,2)$ вещественной оси. Поэтому функция

$$w=\frac{il}{\zeta}$$

отображает круг $|z|<1$ на D_0. Выберем теперь такое r, что $-1<r<1$, и положим

$$iz=\frac{z_1+r}{1+rz_1}.$$

Тогда мы получим более общее отображение круга $|z_1|<1$ на D_0, которое осуществляется функцией

$$w=\frac{l(z_1+r)(1+rz_1)}{(1+rz_1)^2-(z_1+r)^2}=\frac{lr}{(1-r^2)}+\frac{l(1+r^2)}{(1-r^2)}z_1+\ldots.$$

Мы можем выбрать r так, что $lr/(1-r^2)=a_0$. Тогда

$$a_1'=\frac{l(1+r^2)}{(1-r^2)}=\sqrt{4a_0^2+l^2},$$

и теорема 4.11 доказана для вещественных a_0.

Если, наконец, $a_0=\alpha+i\beta$, то, рассматривая $f(z)-i\beta$ вместо $f(z)$, получим

$$|a_1|\leqslant\sqrt{4\alpha^2+l^2}\leqslant\sqrt{4|a_0|^2+l^2}.$$

Доказательство закончено.

4.11. Приложения круговой симметризации. Круговая симметризация — средство более сильное, чем симметризация по Штейнеру, и всякий результат, который можно получить вторым из названных методов, может быть получен, правда, не столь непосредственно, и первым — с помощью перехода к экспонентам. При использовании круговой симметризации область D_f^* не обязательно должна быть односвязной. С другой стороны, D_f^* не может заполнять плоскость, если D_f не заполняет ее, в то время как при штейнеровской симметризации D_f^* заполняет плоскость, если D_f пересекает всякую прямую, перпендикулярную к прямой симметризации, по множеству интервалов с бесконечной суммой длин.

Перейдем к изложению некоторых примеров.

Теорема 4.12. *Предположим, что* $0<\alpha<2$, *что функция*

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots$$

регулярна в круге $|z|<1$ *и что* D_f *пересекает всякую окружность* $|w|=\rho$ $(0<\rho<\infty)$ *по множеству дуг*

с суммой длин, не превосходящей $\pi\alpha\rho$. *Тогда* $|a_1| \leqslant 2\alpha|a_0|$, *причем равенство имеет место, если*

$$f(z) = a_0\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}.$$

Можно считать, что a_0 вещественно и положительно, так как этого всегда можно добиться, если рассматривать $e^{-i\lambda}f(z)$ вместо $f(z)$. При этом предположении мы произведем симметризацию D_f относительно положительной вещественной оси. Тогда D_f^* будет содержаться в области

$$D_0 = \left\{w : |\arg w| < \frac{1}{2}\alpha\pi,\ 0 < |w| < \infty\right\}.$$

Функция

$$w = \varphi(z) = a_0\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = a_0(1 + 2\alpha z + \ldots)$$

отображает круг $|z| < 1$ на D_0, и теперь теорема 4.12 следует из теоремы 4.9.

Ключом к дальнейшим приложениям оказывается

Теорема 4.13. *Пусть функция* $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ *регулярна в круге* $|z| < 1$, *и пусть* $R = R_f$ — *точная верхняя грань всех* ρ, *при которых* D_f *содержит всю окружность* $|w| = \rho$. *Предположим, что* R *конечна. Если указанных* ρ *не существует, положим* $R = 0$. *Тогда* $|a_1| \leqslant 4(|a_0| + R)$.

Равенство имеет место, если $a_0 \geqslant 0$ *и*

$$f(z) = a_0 + \frac{4(a_0 + R)z}{(1-z)^2}.$$

Эта функция отображает круг $|z| < 1$ *на область* D_0, *представляющую собой* w*-плоскость, разрезанную от* $-\infty$ *до* $-R$ *вдоль вещественной отрицательной оси.*

Снова предположим, что $a_0 \geqslant 0$, и произведем симметризацию относительно положительной вещественной полуоси. Тогда D_f^* не будет содержать точку $w = -\rho$ при $\rho > R$, так как D_f при $\rho > R$ не содержит всей окружности $|w| = \rho$. Поэтому D_f^* содержится в D_0. Теорема 4.13 доказана, так как

$$\varphi(z) = a_0 + \frac{4(a_0 + R)z}{(1-z)^2} = a_0 + 4(a_0 + R)z + \ldots,$$

очевидно, отображает круг $|z| < 1$ на D_0 (см. § 1.1).

Представляют интерес различные частные случаи теоремы 4.13. Так, если

$$f(z)=z+a_2z^2+\dots \quad (|z|<1),$$

то, полагая $a_0=0$, $a_1=1$, получим оценку $R\geqslant 1/4$. Это — точная форма одной теоремы Ландау [1]. Этот результат включает также теорему 1.2 Кёбе — Бибербаха. В самом деле, если $f(z)$ еще и однолистна, то область D_f односвязна и потому ее дополнение связно. Значит, если это дополнение содержит точку w_0, то оно должно пересекаться с каждой окружностью $|w|=\rho$ при $\rho>|w_0|$, и потому $|w_0|\geqslant R\geqslant 1/4$. Таким образом, D_f содержит круг $|w|<1/4$.

Если же $R=0$, то мы получим оценку $|a_1|\leqslant 4|a_0|$ — предельный случай теоремы 4.12.

Легко получить неравенства, если в дополнение к другим предположениям $f(z)$ ограничена сверху. Примером может служить

Теорема 4.14. ***Предположим, что функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы*** 4.13 ***и, сверх того, $|f(z)|<M$ при $|z|<1$. Тогда***

$$|a_1|\leqslant \frac{4(M-|a_0|)(M^2+|a_0|R)(|a_0|+R)}{(M+R)^2(M+|a_0|)}.$$

Равенство имеет место, если $a_0>0$, а $f(z)$ отображает круг $|z|<1$ взаимно однозначно и конформно на область D_0, представляющую собой круг $|w|<M$, разрезанный от $-M$ до $-R$ вдоль отрицательной вещественной оси.

Доказательство предоставляется читателю. Очевидно, что D_f^* содержится в D_0, а разыскание отображения круга $|z|<1$ на D_0, дающее экстремум величине $|a_1|$, — это элементарное упражнение на конформные отображения.

Наконец, мы получим такое следствие теоремы 4.13:

Теорема 4.15. *Предположим, что функция $w=f(z)=a_0+a_1z+\dots$ регулярна в круге $|z|<1$, что $0<l<\infty$ и что дополнение к D_f в w-плоскости при каждом вещественном v содержит последовательность точек*

$$u+l(v+nl) \quad (-\infty<n<+\infty),$$

где v может зависеть от u. Тогда $|a_1| \leqslant 2l/\pi$. Равенство имеет место для

$$f(z) = a_0 + \frac{l}{\pi} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

как и в теореме 4.10.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = e^{2\pi f(z)/l} = e^{2\pi a_0/l}\left(1 + \frac{2\pi a_1}{l} z + \ldots\right).$$

Эта функция регулярна в круге $|z| < 1$, и так как

$$\log g(z) \neq \frac{2\pi}{l}(u + iv + inl) \quad (-\infty < n < +\infty),$$

то

$$g(z) \neq \exp\left[\frac{2\pi}{l}(u + iv)\right].$$

Каково бы ни было $\rho > 0$, можно найти такое число w, что $|w| = \rho$ и $g(z) \neq w$ в $|z| < 1$, так как u — любое вещественное число. Поэтому к $g(z)$ применима теорема 4.13 с $R = R_g = 0$ и

$$\left|\frac{2\pi a_1}{l}\right| \leqslant 4.$$

Равенство имеет место, если a_0 вещественно и

$$f(z) = a_0 + \frac{l}{\pi} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Эта функция отображает круг $|z| < 1$ на полосу $|v| < l/2$. Теорема 4.15 доказана.

Сравнение теорем 4.10 и 4.15 позволяет сопоставить силу штейнеровской и круговой симметризации. Легко видеть, что теорема 4.10 является частным случаем теоремы 4.15 и значительно слабее ее. Действительно, в предположениях теоремы 4.15 D_f вполне может пересекать всякую прямую $u = \text{const}$ по множеству интервалов с бесконечной суммой длин, если только на этой прямой имеется единственная последовательность точек, не принадлежащих D_f и образующих арифметическую прогрессию с разностью l. Эти результаты наводят на мысль, что предположения теоремы 4.15 могут быть еще ослаблены до предположения о том, что D_f

не пересекает ни одной прямой $u = \text{const}$ по интервалу длины, большей l. Неизвестно, справедливо ли при этом предположении неравенство $|a_1| \leqslant 2l/\pi$.

4.12. Оценки для $|f(z)|$ и $|f'(z)|$. Функции, доставляющие максимум величине $|a_1|$ в условиях теорем 4.10—4.15, доставляют также максимум величинам $M(r, f)$ и $M(r, f')$ при $0 < r < 1$. Можно даже показать, что в некоторых случаях они являются единственными такими функциями. Доказательства для разных случаев сходны между собой, и мы обратимся к случаю теоремы 4.13, имеющему наибольшее число приложений.

Теорема 4.16. *Предположим, что $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы* 4.13. *Тогда при $|z| = r$ $(0 < r < 1)$*

$$|f(z)| < |a_0| + \frac{4(|a_0| + R)r}{(1-r)^2}, \tag{4.8}$$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{4(R + |f(z)|)}{1-r^2} < \frac{4(|a_0| + R)(1+r)}{(1-r)^3}, \tag{4.9}$$

за исключением того случая, когда

$$f(z) = a_0 + \frac{4(Re^{i\lambda} + a_0)ze^{-i\theta}}{(1 - ze^{-i\theta})^2},$$

где θ, λ вещественны и $\arg a_0 = \lambda$ или $a_0 = 0$.

Предположим, что $|z| < 1$, и рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = f\left(\frac{z_0 + z}{1 + \bar{z}_0 z}\right) = f(z_0) + (1 - |z_0|^2) f'(z_0) z + \ldots$$

вместо $f(z)$. Тогда $D_\varphi = D_f$, так как φ получается из f отображением единичного круга на себя, и потому теорему 4.13 можно применить к $\varphi(z)$ с тем же значением R. Это дает неравенство

$$(1 - |z_0|^2)|f'(z_0)| \leqslant 4(R + |f(z_0)|),$$

и, опуская индекс, мы получаем левое неравенство (4.9). Положим, далее, $z_0 = re^{i\theta}$, $f(z_0) = T(r)e^{i\lambda(r)}$, где θ фиксировано. Тогда

$$e^{i\theta} f'(re^{i\theta}) = e^{i\lambda(r)}[T'(r) + i\lambda'(r)T(r)].$$

Следовательно, имеем

$$T'(r) \leqslant \frac{4(R+T(r))}{1-r^2}, \tag{4.10}$$

и равенство возможно, только если $\lambda'(r)=0$. Можно записать (4.10) в виде

$$d\log[R+T(r)] \leqslant d\left[2\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\right].$$

Поэтому величина

$$\psi(r)=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2[R+T(r)] \tag{4.11}$$

не может возрастать с возрастанием r. Если $\psi(r_1)=\psi(r_2)$, где $0 \leqslant r_1 < r_2 < 1$, то $\psi(r)$ постоянна при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, и потому в (4.10) имеет место равенство. Тогда $\lambda'(r)=0$ в этом промежутке, так что

$$\lambda(r)=\lambda=\text{const}.$$

Поэтому

$$e^{i\theta}f'(z)=\frac{4[Re^{i\lambda}+f(z)]}{1-(ze^{-i\theta})^2}$$

для $z=re^{i\theta}$ $(r_1<r<r_2)$, и, значит, везде в круге $|z|<1$ в силу единственности аналитического продолжения. Следовательно,

$$\frac{d}{dz}\log[Re^{i\lambda}+f(z)]=\frac{4e^{-i\theta}}{1-(ze^{-i\theta})^2},$$

$$\frac{Re^{i\lambda}+f(z)}{Re^{i\lambda}+a_0}=\left(\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\right)^2,$$

и так как $\arg f(re^{i\theta}) \equiv \lambda$, то необходимо $\arg a_0=\lambda$, если только $a_0 \neq 0$. Таким образом, в этом случае $f(z)$ сводится к одной из экстремальных функций, найденных в теореме 4.16. Ясно, что они удовлетворяют условиям этой теоремы и при $z=re^{i\theta}$ дают равенство в неравенствах (4.8) и (4.9).

Во всех других случаях функция $\psi(r)$ в (4.11) строго убывает с возрастанием r при $0<r<1$, и, в частности,

$$\psi(r)<\psi(0)=R+|a_0|,$$

т. е.

$$|f(re^{i\theta})|<(R+|a_0|)\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2-R.$$

Этим доказано неравенство (4.8), и с его помощью мы получаем второе неравенство в (4.9). Этим завершается доказательство теоремы 4.16.

Интересно отметить два частных случая теоремы 4.16. Если $a_0 = 0$, то неравенство (4.8) дает

$$M(r, f) < \frac{4Rr}{(1-r)^2}.$$

Таким образом, мы получаем следующую усиленную форму одной теоремы Бора [1]:

Если $f(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$, $f(0) = 0$ и $M(r, f) = 1$ при некотором r, $0 < r < 1$, то D_f содержит круг $|w| = \rho$, где

$$\rho > \frac{(1-r)^2}{4r},$$

за исключением того случая, когда

$$f(z) = \frac{(1-r)^2}{r} \frac{ze^{i\lambda}}{(1-ze^{-i\theta})^2}.$$

Действительно, если исключить этот случай, то

$$R > \frac{(1-r)^2}{4r} M(r, f) = \frac{(1-r)^2}{4r},$$

и мы можем выбрать ρ так, что $\frac{1}{4} r^{-1}(1-r)^2 < \rho < R$ и окружность $|w| = \rho$ лежит в D_f.

Мы объединим вместе также те результаты, где $R = 0$:

Теорема 4.17. *Предположим, что функция $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ регулярна в $|z| < 1$ и что при всяком ρ $(0 \leqslant \rho < \infty)$ можно найти $w = \rho e^{i\varphi(\rho)}$ так, что $f(z) \neq w$ в круге $|z| < 1$. За исключением того случая, когда при некотором вещественном θ*

$$f(z) = a_0 \left[\frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}}\right]^2,$$

при $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ выполнены неравенства

$$|a_0| \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 < |f(z)| < |a_0| \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2, \tag{4.12}$$

$$|f'(z)| \leqslant \frac{4}{1-r^2} |f(z)| < 4|a_0| \frac{1+r}{(1-r)^3}, \tag{4.13}$$

и величина $\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 M(r, f)$ *строго убывает с возрастанием* r $(0 < r < 1)$.

В этом случае в теореме 4.16 можно положить $R = 0$, и (4.8) и (4.9) дают правые неравенства в (4.12) и (4.13). Кроме того, $[f(z)]^{-1}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $f(z)$, и мы получаем левое неравенство в (4.12), применяя (4.8) к $[f(z)]^{-1}$ вместо $f(z)$.

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы 4.17, предположим, что $0 \leqslant r_1 < r_2 < 1$, и выберем θ так, что

$$|f(r_2 e^{i\theta})| = M(r_2, f).$$

Тогда, за исключением того случая, когда

$$f(z) \equiv a_0 \left[\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}\right]^2,$$

функция $\psi(r)$ в (4.11) строго убывает с ростом r, и потому

$$\left(\frac{1-r_2}{1+r_2}\right)^2 M(r_2, f) = \left(\frac{1-r_2}{1+r_2}\right)^2 |f(r_2 e^{i\theta})| <$$
$$< \left(\frac{1-r_1}{1+r_1}\right)^2 |f(r_1 e^{i\theta})| \leqslant \left(\frac{1-r_1}{1+r_1}\right)^2 M(r_1, f).$$

Теорема 4.17 доказана.

Глава 5

ФУНКЦИИ, p-ЛИСТНЫЕ В СРЕДНЕМ ПО ОКРУЖНОСТИ

5.0. Введение. Будем снова рассматривать функции $f(z)$, регулярные в области Δ и отличные от постоянных. Пусть $n(w) = n(w, \Delta, f)$ — число корней уравнения $f(z) = w$ в Δ; положим, как в (2.3),

$$p(R) = p(R, \Delta, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

В главах 2 и 3 мы рассматривали функции, подчиненные условию

$$\int_0^R p(\rho)\, d(\rho^2) \leqslant pR^2 \quad (R > 0),$$

где p — положительное число. В дальнейшем мы будем называть такие функции *p-листными в среднем по площади*. В этой главе мы рассмотрим некоторые следствия более ограничительного предположения

$$p(R) \leqslant p \quad (R > 0). \tag{5.1}$$

Функции, подчиненные этому условию, ввел Бернацкий [2]; обычно их называют *p-листными в среднем по окружности*. В этой главе мы будем называть p-листной в среднем в Δ всякую функцию, регулярную в Δ и удовлетворяющую условию (5.1).

Сначала, исходя из теорем 4.13 и 4.17 предыдущей главы, мы докажем несколько точных неравенств, дающих границы для роста функций $f(z)$, p-листных в среднем в круге $|z| < 1$ и таких, что либо $f(z) \neq 0$, либо $f(z)$ имеет нуль кратности p в точке $z = 0$, где p — натуральное число.

Во второй части этой главы мы докажем несколь „теорем регулярности" для произвольных функций, p-лист ных в среднем в круге $|z|<1$. Мы покажем, что есл $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ — такая функция, то существует

$$\alpha=\lim_{r\to 1-0}(1-r)^{2p}M(r,f),$$

и если, сверх того, $p>1/4$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n^{2p-1}}=\frac{\alpha}{\Gamma(2p)}.$$

Мы изложим также некоторые обобщения этих фактов н положительные степени p-листных в среднем функций и н функции типа $\sum_{n=0}^\infty a_{kn+\nu}z^{kn+\nu}$. В качестве приложения эти результатов мы докажем, что если функция

$$f(z)=z+a_2z^2+\dots$$

однолистна в среднем в $|z|<1$, то $|a_n|\leqslant n$ при $n>n_0(f$.

5.1. Функции, не обращающиеся в нуль. В этом пункте будет доказана [1])

Теорема 5.1. *Предположим, что функция* $f(z)=a_0+a_1z+\dots$ *p-листна в среднем и* $f(z)\neq 0$ *в круге* $|z|<1$. *Тогда*

$$|a_1|\leqslant 4p|a_0|.$$

Далее, за исключением того случая, когда

$$f(z)=a_0\left[\frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{i\theta}}\right]^{2p}$$

при некотором вещественном θ, *при* $|z|=\rho$ $(0<\rho<1$ *выполнены неравенства*

$$|a_0|\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{2p}<|f(z)|<|a_0|\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{2p},$$

$$|f'(z)|\leqslant\frac{4p}{1-\rho^2}|f(z)|<\frac{4|a_0|p(1+\rho)^{2p-1}}{(1-\rho)^{2p+1}}.$$

[1]) Хейман [1], [2], [4].

Кроме того, величина $[(1-\rho)/(1+\rho)]^{2p} M(\rho, f)$ *строго убывает с возрастанием* ρ $(0<\rho<1)$ *и потому стремится при* $\rho \to 1$ *к пределу* α_0, *где* $\alpha_0 < |a_0|$.

Нам потребуются две леммы.

Лемма 5.1. *Если* $f(z)$ ***p-листна в среднем в области*** Δ *и* $\eta > 0$, ***то функция*** $\psi(z) = [f(z)]^\eta$ ***будет*** (ηp)***-листной в среднем в*** Δ, *при условии, что* $\psi(z)$ *там однозначна.*

Пусть $\psi(z) = W = Re^{i\Phi}$, $f(z) = w = re^{i\varphi}$, так что $W = w^\eta$. Тогда $R = r^\eta$, $\Phi = \eta\varphi$. Если аргумент $\varphi = \arg f(z)$, монотонно изменяясь при движении вдоль некоторой дуги линии уровня $|f(z)| = r = \text{const}$, получит приращение $\delta\varphi$, то „вклад" этой дуги в величину $p(r, \Delta, f)$ равен $\frac{1}{2\pi}|\delta\varphi|$. Соответствующий вклад в $p(R, \Delta, \psi)$, где $R = r^\eta$, равен $\frac{\eta}{2\pi}|\delta\varphi|$. Назовем $|\delta\varphi|$ вариацией $\arg f(z)$ на этой дуге.

Линию уровня $|f(z)| = r$ в области Δ можно представить в виде объединения конечного или счетного множества жордановых дуг, каждые две из которых имеют общими разве лишь концевые точки и на каждой из которых $\arg f(z)$ изменяется монотонно. Тогда $2\pi p(r, \Delta, f)$ равняется сумме вариаций $\arg f(z)$ на этих жордановых дугах, и потому, складывая эти вариации, получим

$$p[R, \Delta, \psi] = \eta p[r, \Delta, f] \leqslant \eta p,$$

где $R = r^\eta$. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Если функция* $f(z)$ *однолистна в среднем в круге* $|z|<1$, *то существует число* $l = l_f \geqslant 0$, ***обладающее следующим свойством. Если*** $|w| < l$, ***то уравнение*** $f(z) = w$ ***имеет один и только один корень в круге*** $|z|<1$; *если же* $R \geqslant l$, *то найдется* $w_R = Re^{i\varphi}$, *такое, что* $f(z) \neq w_R$ *при* $|z|<1$.

Пусть $n(w)$ — число корней уравнения $f(z) = w$, лежащих в круге $|z|<1$. Заметим, что подмножество w-плоскости $\{w : n(w) \geqslant K\}$ открыто при любом конечном положительном K. Действительно, если $n(w_0) \geqslant K$, то в круге $|z|<1$ существует конечный набор различных точек $z_1, z_2, \ldots, z_q$, в которых $f(z_\nu) = w_0$, причем кратность корня z

равна K_ν и $\sum_{\nu=1}^{q} K_\nu \geqslant K$. Тогда по заданному положительному ε можно найти столь малое ε, что при $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ уравнение $f(z) = w$ имеет ровно K_ν корней в круге $|z - z_\nu| < \delta$ [1]). Если δ достаточно мало, то все эти корни различны, и потому

$$n(w) \geqslant \sum_{\nu=1}^{q} K_\nu \geqslant K, \quad \text{если} \quad |w - w_0| < \varepsilon.$$

Итак, множество всех w, при которых $n(w) \geqslant K$, открыто.

Следовательно, если $n(Re^{i\varphi_0}) > 1$, то $n(Re^{i\varphi}) \geqslant 2$ в некотором промежутке $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$. Так как по предположению

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(Re^{i\varphi})\, d\varphi \leqslant 1,$$

то мы заключаем, что $n(Re^{i\varphi}) < 1$, т. е. $n(Re^{i\varphi}) = 0$, при некотором другом значении φ. Таким образом, если $n(Re^{i\varphi}) \geqslant 1$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, то $n(Re^{i\varphi}) = 1$ в этом промежутке. В этом случае окружность $|w| = R$ взаимно однозначно и непрерывно соответствует некоторому множеству γ в круге $|z| < 1$, которое является поэтому простой замкнутой кривой. Пусть $|w_0| < R$. Тогда по теореме Руше [2]) функции $f(z)$ и $f(z) - w_0$ имеют одинаковое число нулей внутри γ, так как $|f(z)| = R$ на γ. Пусть это число равно N_0. Ввиду того, что функция $f(z)$ по предположению не постоянна, она принимает внутри γ такие значения w, что $|w| < R$. Поэтому $N_0 \geqslant 1$. Значит, $n(w) \geqslant N_0 \geqslant 1$ $(|w| < R)$, и потому $n(w) = 1$ при $|w| < R$.

Пусть теперь $l = l_f$ — точная верхняя грань множества всех R, удовлетворяющих приведенным выше условиям. Если таких R нет, положим $l = 0$. Тогда $n(w) = 1$ при $|w| < l$. Это показывает, что $l < +\infty$, ибо иначе обратная функция $z = f^{-1}(w)$ отображала бы всю w-плоскость на круг $|z| < 1$, что противоречит теореме Лиувилля. Кроме того, при $R > l$ можно найти такое φ, что $n(Re^{i\varphi}) = 0$. Это

[1]) А. И. Маркушевич [1*], стр. 358—359.
[2]) Там же, стр. 317.

остается справедливым и при $R = l$. Действительно, множество точек w, при которых $n(w) \geqslant 1$, открыто, как мы видели выше, и, значит, если бы оно содержало окружность $|w| = l$, оно содержало бы и окружность $|w| = l + \varepsilon$ при малых ε, что противоречит определению l. Лемма 5.2 доказана.

Теперь мы можем доказать теорему 5.1. Пусть

$$\psi(z) = [f(z)]^{1/p} = a_0^{1/p}\left[1 + \frac{a_1}{pa_0}z + \dots\right].$$

Ввиду того, что $f(z)$ регулярна и $f(z) \neq 0$ при $|z| < 1$, мы можем выбрать однозначную ветвь $\psi(z)$, которая однолистна в среднем по лемме 5.1. Кроме того, $\psi(z) \neq 0$ при $|z| < 1$, и потому в лемме 5.2 $l = l_\psi = 0$. Таким образом, при $R > 0$ можно найти $w = w_R$ так, что $|w_R| = R$ и $\psi(z) \neq w_R$ в круге $|z| < 1$.

Поэтому к $\psi(z)$ применима теорема 4.17. Из (4.13) получаем

$$\left|\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right| \leqslant \frac{4}{1 - |z|^2},$$

и, полагая $z = 0$, заключаем, что $|a_1| \leqslant 4p|a_0|$. Кроме того, если $\psi(z)$ не совпадает с функцией $a_0^{1/p}[(1 + ze^{i\theta})/(1 - ze^{i\theta})]^2$, то из (4.12) заключаем, что

$$|a_0|^{1/p}\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2 < |\psi(z)| < |a_0|^{1/p}\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2 \qquad (|z| = \rho)$$

и величина $[(1-\rho)/(1+\rho)]^2 M(\rho, \psi)$ строго убывает с возрастанием ρ $(0 < \rho < 1)$. Теперь, полагая $f(z) = [\psi(z)]^p$, получаем неравенства теоремы 5.1. Экстремальные функции

$$a_0[(1 + ze^{i\theta})/(1 - ze^{i\theta})]^{2p}$$

p-листны в среднем и не обращаются в нуль по лемме 5.1, так как их корни p-й степени однолистны и отображают круг $|z| < 1$ на плоскость, разрезанную по лучу, идущему из начала в бесконечность.

В § 2.4 мы отметили, что если функция $f(z)$ p-листна в среднем по площади и тем более если она p-листна в среднем по окружности, то $f(z)$ имеет $q \leqslant p$ нулей. Значит, условие $f(z) \neq 0$ в теореме 5.1 при $p < 1$ есть следствие p-листности в среднем.

5.2. Функции, имеющие в начале нуль кратности p. В этом пункте мы рассмотрим функцию

$$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\ldots,$$

p-листную в среднем в круге $|z|<1$, где p — натуральное число. В этом случае $f(z)$ не обращается в нуль при $0<|z|<1$, и потому функция

$$[f(z)]^{1/p}=z\left(1+\frac{a_{p+1}}{p}z+\ldots\right)$$

однозначна и, следовательно, однолистна в среднем в круге $|z|<1$ и обращается в нуль только при $z=0$. Таким образом, нашу задачу можно свести к случаю $p=1$. Покажем, что здесь применимы методы § 1.2.1.

Теорема 5.2. *Пусть функция $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ однолистна в среднем в круге $|z|<1$. Тогда $f(z)$ принадлежит классу S_0, определенному в* § 1.2.1.

Предположим, что $|z_0|<1$ и что функция $z=\omega(\zeta)$ осуществляет однолистное отображение круга $|\zeta|<1$ на область в круге $|z|<1$, причем $\omega(\zeta)\neq z_0$. Рассмотрим функцию

$$\psi(\zeta)=f[\omega(\zeta)].$$

Тогда уравнение $\psi(\zeta)=w$ не может иметь в круге $|\zeta|<1$ больше корней, чем уравнение $f(z)=w$ в круге $|z|<1$, так как $\omega(\zeta)$ однолистна. Таким образом, $\psi(\zeta)$ однолистна в среднем в круге $|\zeta|<1$. Пусть $f(z_0)=Re^{i\varphi_0}$. Тогда из леммы 5.2 следует, что если уравнение $f(z)=Re^{i\varphi_0}$ имеет в круге $|z|<1$ корень, отличный от z_0, то можно найти такое φ', что $f(z)\neq Re^{i\varphi'}$ в круге $|z|<1$. В этом случае $\psi(\zeta)\neq Re^{i\varphi'}$ при $|\zeta|<1$. С другой стороны, если $f(z)\neq Re^{i\varphi_0}$ при $z\neq z_0$, то $\psi(\zeta)\neq Re^{i\varphi_0}$ при $|\zeta|<1$.

Таким образом, в любом случае можно найти $\varphi=\varphi(R)$ так, что $\psi(\zeta)\neq Re^{i\varphi}$ при $|\zeta|<1$. Теперь на основании леммы 5.2 мы видим, что при $\rho>R$ существует такое $\varphi=\varphi(\rho)$, что $\psi(\zeta)\neq\rho e^{i\varphi(\rho)}$ при $|\zeta|<1$. Следовательно, по теореме 4.13

$$|\psi'(0)|\leqslant 4[|\psi(0)|+R]=4[|\psi(0)|+|f(z_0)|].$$

Значит, $f(z)\in S_0$, и теорема 5.2 доказана.

Из нее непосредственно следует [1])

Теорема 5.3. *Предположим, что функция* $f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\ldots$ *p-листна в среднем при* $|z|<1$, *где* p *— натуральное число. Тогда* $|a_{p+1}|\leqslant 2p$. *Далее, при* $|z|=r$ $(0<r<1)$

$$\frac{r^p}{(1+r)^{2p}}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{r^p}{(1-r)^{2p}},$$

$$|f'(z)|\leqslant\frac{p(1+r)}{r(1-r)}|f(z)|\leqslant\frac{pr^{p-1}(1+r)}{(1-r)^{2p+1}}.$$

Наконец, уравнение $f(z)=w$ *имеет ровно* p *корней в круге* $|z|<1$, *если* $|w|<4^{-p}$.

Теорема 5.4 [2]). *При предположениях теоремы* 5.3 *величина*

$$r^{-p}(1-r)^{2p}M(r,f)$$

строго убывает с возрастанием r $(0<r<1)$ *и потому стремится к* $\alpha<1$ *при* $r\to 1$, *если только* $f(z)$ *не совпадает с* $z^p(1-ze^{i\theta})^{-2p}$. *Значит, верхние границы для* $|f(z)|$, $|f'(z)|$, *данные в теореме* 5.3, *достигаются только этими функциями.*

Напишем $\psi(z)=[f(z)]^{1/p}=z+\dfrac{a_{p+1}}{p}z^2+\ldots$. По теореме 5.2, $\psi(z)\in S_0$, и потому можно применить теоремы 1.4 и 1.5, заменив $f(z)$ на $\psi(z)$. После возведения в p-ю степень получим результаты теорем 5.3 и 5.4.

5.3. Теоремы регулярности. Предположим, что из данных условий вытекают ограничения на скорость роста некоторых функций. Теоремой регулярности мы будем называть теорему, в которой утверждается, что функции, имеющие

---

[1]) В таком виде этот результат сформулировал у Хеймана [1]. Неравенство $|a_{p+1}|\leqslant 2p$ было доказано для p-листных в среднем по площади функций Спенсером [4]; последнее утверждение теоремы было перенесено на p-листные в среднем по площади функции Гарабедяном и Ройденом [1].

[2]) По поводу этого и следующих результатов этой главы см. Хейман [4].

экстремальную для данного класса скорость роста, растут гладко, или регулярно. Нашим первым результатом будет теорема регулярности о максимуме модуля p-листных в среднем функций.

Теорема 5.5. *Предположим, что функция $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$. Тогда предел*

$$\alpha = \lim_{r\to 1-0} (1-r)^{2p} M(r, f)$$

существует и конечен.

Нам потребуется

Лемма 5.3. *Предположим, что функция $f(z)$ p-листна в среднем, причем $f(z)\neq 0$ при $1-2\delta<|z|<1$, где $\delta>0$. При фиксированном вещественном θ положим*

$$f(re^{i\theta}) = R(r)\, e^{i\lambda(r)}.$$

Если $1-\delta\leqslant r_1<r_2<1$ и если $R=R_1$, R_2 соответствуют $r=r_1$, r_2, то

$$\log\left[R_2\left(\frac{1-r_2}{r_2+2\delta-1}\right)^{2p}\right]\leqslant$$
$$\leqslant \log\left[R_1\left(\frac{1-r_1}{r_1+2\delta-1}\right)^{2p}\right] - \frac{1}{8p}\int_{r_1}^{r_2}(1-r)\lambda'(r)^2\, dr.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\zeta) = f[(1-\delta)e^{i\theta}+\delta\zeta]$. Она p-листна в среднем и $\neq 0$ при $|\zeta|<1$. Следовательно, по теореме 5.1 имеем

$$\left|\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)}\right| = \left|\frac{\delta f'[(1-\delta)e^{i\theta}+\delta\zeta]}{f[(1-\delta)e^{i\theta}+\delta\zeta]}\right| \leqslant \frac{4p}{1-|\zeta|^2}.$$

Выберем ζ так, что $(1-\delta)e^{i\theta}+\delta\zeta = re^{i\theta}$, $|\zeta| = (r+\delta-1)/\delta$. Мы заключаем, что

$$\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| \leqslant \frac{4p\delta}{\delta^2-(r+\delta-1)^2} =$$
$$= \frac{4p\delta}{(r+2\delta-1)(1-r)} \qquad (1-\delta<r<1). \quad (5.2)$$

Теперь

$$e^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} = \frac{\partial}{\partial r}\log f(re^{i\theta}) = \frac{1}{R}\frac{dR}{dr} + i\lambda'(r).$$

Положим $\frac{1}{R}\frac{dR}{dr} = \sigma(r)$. Тогда на основании (5.2)

$$[\sigma(r)]^2 + [\lambda'(r)]^2 \leqslant \left[\frac{4p\delta}{(r+2\delta-1)(1-r)}\right]^2,$$

и потому

$$\frac{4p\delta}{(r+2\delta-1)(1-r)} - |\sigma(r)| \geqslant \frac{[\lambda'(r)]^2}{\{4p\delta/[(r+2\delta-1)(1-r)]\} + |\sigma(r)|} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(1-r)(r+2\delta-1)[\lambda'(r)]^2}{8p\delta}.$$

Если $r \geqslant 1-\delta$, то отсюда

$$\sigma(r) = \frac{d\log R}{dr} \leqslant \frac{4p\delta}{(r+2\delta-1)(1-r)} - \frac{1}{8p}(1-r)[\lambda'(r)]^2.$$

Интегрируя от r_1 до r_2, заключаем, что

$$\log R_2 - \log R_1 \leqslant$$
$$\leqslant 2p\left[\log\left(\frac{r+2\delta-1}{1-r}\right)\right]_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{8p}\int_{r_1}^{r_2}(1-r)[\lambda'(r)]^2\,dr.$$

Лемма 5.3 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 5.5. Так как функция $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$, то она имеет там $q \leqslant p$ нулей. Поэтому можно найти такое $\delta > 0$, что $f(z) \neq 0$ при $1-2\delta < |z| < 1$. Применим теперь лемму 5.3 и выберем θ так, что $M(r_2, f) = R_2$. Тогда $R_1 \leqslant M(r_1, f)$, и лемма 5.3 показывает, что

$$\left(\frac{1-r_2}{r_2+2\delta-1}\right)^{2p} M(r_2, f) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1-r_1}{r_1+2\delta-1}\right)^{2p} M(r_1, f) \qquad (1-\delta < r_1 < r_2 < 1).$$

Таким образом, величина $[(1-r)/(r+2\delta-1)]^{2p} M(r, f)$ убывает с возрастанием r $(1-\delta < r < 1)$ и потому стремится к пределу, который можно обозначить через $\alpha(2\delta)^{-2p}$, когда r стремится к 1 снизу. Значит,

$$(1-r)^{2p} M(r, f) \to \alpha,$$

что и требовалось доказать. Теорема 5.5 доказана.

5.4. Радиус наибольшего роста. Наша задача состоит в том, чтобы доказать аналог теоремы 5.5 для коэффициентов p-листных в среднем функций $f(z)$ и, более общо, для коэффициентов положительных степеней $f(z)$. С этой целью предположим теперь, что

$$\alpha = \lim_{r \to 1} (1-r)^{2p} M(r, f) > 0. \tag{5.3}$$

При $\alpha = 0$ наши результаты можно доказать более элементарными методами. Если выполняется (5.3), то из теоремы 2.8 следует, что существует радиус, на котором

$$\overline{\lim_{r \to 1}} (1-r)^{2p} |f(re^{i\theta_0})| > 0.$$

Для наших p-листных в среднем (по окружности) функций можно непосредственно доказать большее.

Теорема 5.6. *Предположим, что функция $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z|<1$ и что выполняется* (5.3). *Тогда существует такое θ_0, что $0 \leqslant \theta_0 < 2\pi$ и*

$$\lim_{r \to 1} (1-r)^{2p} |f(re^{i\theta_0})| = \alpha. \tag{5.4}$$

Снова предположим, что $f(z) \neq 0$ при $1-2\delta < |z| < 1$, и используем лемму 5.3. Положим $r_n = 1 - 1/n$ и выберем такое θ_n, что $0 \leqslant \theta_n \leqslant 2\pi$ и

$$|f(r_n e^{i\theta_n})| = M(r_n, f) \qquad \left(n > \frac{1}{\delta}\right).$$

Тогда из (5.3) следует, что

$$\beta_n = \left(\frac{1-r_n}{r_n + 2\delta - 1}\right)^{2p} |f(r_n e^{i\theta_n})| \to \frac{\alpha}{(2\delta)^{2p}}.$$

Полагая в лемме 5.3 $\theta = \theta_n$, получим

$$\left(\frac{1-r}{r+2\delta-1}\right)^{2p} |f(re^{i\theta_n})| \geqslant \beta_n \qquad (1-\delta \leqslant r \leqslant r_n).$$

Пусть θ_0 — предельная точка последовательности θ_n, и пусть r фиксировано. Тогда заключаем, что

$$\left(\frac{1-r}{r+2\delta-1}\right)^{2p} |f(re^{i\theta_0})| \geqslant \frac{\alpha}{(2\delta)^{2p}} \qquad (1-\delta \leqslant r < 1).$$

Таким образом,

$$\varlimsup_{r\to 1}(1-r)^{2p}|f(re^{i\theta_0})|\geqslant\alpha.$$

Кроме того, согласно (5.3),

$$\varlimsup_{r\to 1}(1-r)^{2p}|f(re^{i\theta_0})|\leqslant\alpha.$$

Теорема 5.6 доказана.

Нам нужны также некоторые сведения об $\arg f(re^{i\theta_0})$. Мы докажем следующую лемму:

Лемма 5.4. *В предположениях теоремы* 5.6 *пусть*

$$f(re^{i\theta_0})=R(r)\,e^{i\lambda(r)}.$$

Тогда

$$\int_{1-\delta}^{1}(1-r)\,[\lambda'(r)]^2\,dr<+\infty.$$

Значит, $\lambda(r)-\lambda(\rho)\to 0$, *и потому*

$$\left(\frac{1-r}{1-\rho}\right)^{2p}\frac{f(re^{i\theta_0})}{f(\rho e^{i\theta_0})}\to 1\quad\textit{при}\quad\rho\to 1$$

равномерно относительно r, *если* $\rho\leqslant r\leqslant(1+\rho)/2$.

В лемме 5.3 положим $r_1=1-\delta$, $\theta=\theta_0$. Тогда получим

$$\int_{1-\delta}^{r_2}(1-r)\,[\lambda'(r)]^2\,dr\leqslant 8p\log\left[\frac{R_1(r_2+2\delta-1)^{2p}}{R_2(1-r_2)^{2p}}\right].$$

Кроме того, по теореме 5.6, $(1-r_2)^{2p}R_2\to\alpha$ при $r_2\to 1$. Поэтому, устремляя r_2 к 1, получим неравенство

$$\int_{1-\delta}^{1}(1-r)\,[\lambda'(r)]^2\,dr\leqslant 8p\log\left[\frac{R_1(2\delta)^{2p}}{\alpha}\right].$$

Мы видим, в частности, что интеграл конечен.

Допустим теперь, что дано положительное ε, и пусть ρ настолько близко к 1, что

$$\int_{1}^{1}(1-t)\,[\lambda'(t)]^2\,dt<\varepsilon.$$

Тогда, если $\rho \leqslant r \leqslant (1+\rho)/2$, то с помощью неравенства Шварца получаем

$$|\lambda(r)-\lambda(\rho)| \leqslant \int_\rho^r |\lambda'(t)|\,dt \leqslant \left\{\int_\rho^r (1-t)\,[\lambda'(t)]^2\,dt \int_\rho^r \frac{dt}{1-t}\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{1/2}\left\{\log\frac{1-\rho}{1-r}\right\}^{1/2} \leqslant [\varepsilon \log 2]^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\lambda(r)-\lambda(\rho) = \arg\frac{f(re^{i\theta_0})}{f(\rho e^{i\theta_0})} \to 0$$

при $\rho \to 1$. По теореме 5.6,

$$\left|\frac{f(re^{i\theta_0})}{f(\rho e^{i\theta_0})}\right| \sim \left(\frac{1-\rho}{1-r}\right)^{2p},$$

когда r и ρ стремятся независимо друг от друга к единице. Доказательство леммы 5.4 закончено.

5.5. Рост коэффициентов. Случай $\alpha = 0$. Предположим, что функция $f(z)$ p-листна в среднем и не обращается в нуль в кольце $1-2\delta < |z| < 1$. Пусть $\lambda > 0$. Положим $\varphi(z) = [f(z)]^\lambda$. Тогда $\varphi(z)$ может быть аналитически продолжена на все кольцо $1-2\delta < |z| < 1$. Кроме того, если $\varphi_2(z)$ получается из некоторой ветви $\varphi_1(z)$ функции $\varphi(z)$ при однократном аналитическом продолжении вдоль кольца в положительном направлении, то

$$|\varphi_2(z)/\varphi_1(z)| = 1,$$

и потому, в силу принципа максимума модуля, $\varphi_2(z)/\varphi_1(z) = e^{i\mu}$, где μ — вещественная постоянная.

Таким образом, функция $\varphi(z)/z^\mu$ остается однозначной в кольце и может быть разложена в ряд Лорана, так что

$$\varphi(z) = z^\mu \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n. \tag{5.5}$$

Теперь будет доказана

Теорема 5.7. *Предположим, что функция $f(z)$ p-листна в среднем в круге $|z| < 1$, что $p\lambda > 1/4$ и что*

функция $\varphi(z)=[f(z)]^{\lambda}$ *разлагается в кольце* $1-2\delta<|z|<1$ *в степенной ряд* (5.5). *Тогда* [1])

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|b_n|}{n^{2p\lambda-1}}=\frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(2p\lambda)},$$

где α *— константа из теоремы* 5.5.

Воспользуемся формулой

$$(n+\mu)\,b_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{\varphi'(z)\,dz}{z^{n+\mu}}=$$

$$=\frac{\rho^{1-n-\mu}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi'(\rho e^{i\theta})\,e^{-i(n+\mu-1)\theta}\,d\theta, \quad (5.6)$$

где $1-2\delta<\rho<1$. В этом пункте мы докажем теорему 5.7 при дополнительном предположении, что $\alpha=0$. Выберем положительную постоянную t так, что

$$0<t<2, \qquad t>2-\frac{2}{\lambda}, \qquad t>\frac{1}{2p\lambda}. \quad (5.7)$$

Это возможно, так как $p\lambda>1/4$. Тогда, применяя неравенство Шварца, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi'(\rho e^{i\theta})|^2\,|\varphi(\rho e^{i\theta})|^{-t}\,d\theta\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi(\rho e^{i\theta})|^{t}\,d\theta\right)^{1/2}=$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}|f'(\rho e^{i\theta})|^2\,|f(\rho e^{i\theta})|^{(2-t)\lambda-2}\,d\theta\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda t}\,d\theta\right)^{1/2}.$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем $\Gamma(x)$ обозначает гамма-функцию. Нужные нам свойства этой функции можно найти, например, у Титчмарша [1], стр. 55—58 (см. также А. И. Маркушевич [1*], стр. 539—553. — *Прим. перев.*).

Ввиду того, что $\alpha = 0$, по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $r_0(\varepsilon) < 1$, что

$$M(r, f) \leqslant \varepsilon (1-r)^{-2p} \qquad (r_0(\varepsilon) < r < 1). \tag{5.8}$$

Мы можем применить лемму 3.1 с $(2-t)\lambda$ вместо λ, так как $f(z)$ p-листна в среднем по окружности, и тем более по площади, и выполняется (5.8). Значит, если $r_0(\varepsilon) < r < 1$, то существует такое ρ, что $2r-1 \leqslant \rho \leqslant r$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(\rho e^{i\theta})|^2 |f(\rho e^{i\theta})|^{(2-t)\lambda-2}\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4p\varepsilon^{\lambda(2-t)}}{\lambda(2-t)} (1-r)^{-2p\lambda(2-t)-1}.$$

Теперь на основании (5.8) и неравенства (3.10) теоремы 3.2, в котором λ заменено на λt, при $0 \leqslant \rho \leqslant r$, $r_0 \leqslant r < 1$ имеем

$$I_{\lambda t}(\rho, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda t}\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant M(r_0, f)^{\lambda t} + \frac{p}{2}[(\lambda t)^2+1]\int_{r_0}^{r} \frac{M(x, f)^{\lambda t}\, dx}{x} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{\lambda t}(1-r_0)^{-2p\lambda t} + \frac{p}{2}[(\lambda t)^2+1]\int_{r_0}^{r} \varepsilon^{\lambda t}(1-x)^{-2p\lambda t}\frac{dx}{x} <$$

$$< (1-r)^{1-2p\lambda t},$$

если r достаточно близко к 1. Значит, при r, достаточно близком к 1,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi'(\rho e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant A(p, \lambda)\, \varepsilon^{\frac{1}{2}\lambda(2-t)} (1-r)^{\frac{1}{2}[1-2p\lambda t-2p\lambda(2-t)-1]} \leqslant$$

$$\leqslant A(p, \lambda)\, \varepsilon^{\frac{1}{2}\lambda(2-t)} (1-r)^{-2p\lambda},$$

где ρ таково, что $2r-1 \leqslant \rho \leqslant r$. Положим $r = 1 - 1/n$ и применим (5.6). Тогда при достаточно больших n будем

иметь

$$|(n+\mu)b_n| \leqslant \left(1-\frac{2}{n}\right)^{-n-\mu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi'(\rho e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant A(p, \lambda)\varepsilon^{\frac{1}{2}\lambda(2-t)} n^{2p\lambda}.$$

Теперь мы заключаем, что

$$b_n = o\left(n^{2p\lambda-1}\right) \qquad (n \to +\infty),$$

так как ε может быть выбрано сколь угодно малым. Теорема 5.7 доказана при $\alpha = 0$.

5.6. Случай $\alpha > 0$: меньшая дуга. Из теоремы 2.9 при $\alpha > 0$ следует, что θ_0 в теореме 5.6 единственно и что величина $|f(re^{i\theta})|$ относительно мала, если только θ не находится вблизи θ_0.

Мы выведем теорему 5.7 из формулы (5.6), получив асимптотическое разложение $\varphi'(\rho e^{i\theta})$ на *бóльшей дуге* $\{\theta : |\theta - \theta_0| < K(1-\rho)\}$, где K — большая положительная постоянная, и убедившись в том, что дополнительная *меньшая дуга*

$$\gamma = \{\theta : K(1-\rho) \leqslant |\theta - \theta_0| \leqslant \pi\}$$

сравнительно мало влияет на величину интеграла в (5.6). Именно этот последний факт мы и докажем сначала.

Лемма 5.5. *Предположим, что $\varphi(z)$ определена, как в теореме* 5.7, *что $\alpha > 0$ и что θ_0 удовлетворяет условию* (5.4). *Тогда, каково бы ни было $\eta > 0$, можно найти $K > 0$ и натуральное n_0, обладающие следующим свойством: если $n > n_0$, то в промежутке $1 - 1/n \leqslant \rho \leqslant 1 - 1/(2n)$ существует такое ρ, что*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |\varphi'(\rho e^{i\theta})|\, d\theta < \eta n^{2p\lambda},$$

где γ — меньшая дуга $\{\theta : K(1-\rho) \leqslant |\theta - \theta_0| \leqslant \pi\}$.

Снова возьмем t так, чтобы выполнялись неравенства (5.7). Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma |\varphi'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \lambda\left(\frac{1}{2\pi}\int_\gamma |f'(\rho e^{i\theta})|^2\,|f(\rho e^{i\theta})|^{(2-t)\lambda-2}\,d\theta\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2\pi}\int_\gamma |f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda t}\,d\theta\right)^{1/2}. \qquad (5.9)$$

Функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству (3.11) с $\alpha=2p$ и некоторой постоянной $C>0$. Поэтому мы можем применить лемму 3.1 с $r=1-1/(2n)$, $\alpha=2p$ и $\lambda(2-t)$ вместо λ. При некотором ρ из промежутка $1-1/n\leqslant\rho\leqslant 1-1/(2n)$ получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma |f'(\rho e^{i\theta})|^2\,|f(\rho e^{i\theta})|^{(2-t)\lambda-2}\,d\theta < \frac{4pC^{\lambda(2-t)}}{\lambda(2-t)}(2n)^{2p\lambda(2-t)+1}. \qquad (5.10)$$

Чтобы оценить второй множитель в правой части неравенства (5.9), заметим, что число θ_0 в (5.4) заведомо обладает свойствами θ_0 в теореме 2.8. Поэтому применима теорема 2.9. Значит, если K в зависимости от ε выбрано достаточно большим, то при $r_0<\rho<1$ имеем

$$|f(\rho e^{i\theta})| < \frac{1}{(1-\rho)^{\varepsilon}\,|\theta-\theta_0|^{2p-\varepsilon}} \qquad (K(1-\rho)\leqslant|\theta-\theta_0|\leqslant\pi).$$

Полагая $|\theta-\theta_0|=x$, заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma |f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda t}\,d\theta \leqslant \frac{2(1-\rho)^{-\varepsilon\lambda t}}{2\pi}\int_{K(1-\rho)}^{\pi} x^{-\lambda t(2p-\varepsilon)}\,dx.$$

Выберем $\varepsilon>0$ столь малым, что $\lambda t(2p-\varepsilon)>1$. Это возможно ввиду (5.7). Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma |f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda t}\,d\theta \leqslant \frac{(1-\rho)^{-\varepsilon\lambda t}}{\pi}\int_{K(1-\rho)}^{\infty} x^{-\lambda t(2p-\varepsilon)}\,dx =$$
$$= \frac{K^{1-\lambda t(2p-\varepsilon)}(1-\rho)^{1-\lambda t(2p-\varepsilon)-\varepsilon\lambda t}}{\pi[\lambda t(2p-\varepsilon)-1]} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{K^{1-\lambda t(2p-\varepsilon)}}{\pi[\lambda t(2p-\varepsilon)-1]}(2n)^{2p\lambda t-1}. \qquad (5.11)$$

Заметим, что при фиксированных λ, t, C, η и ε можно выбрать K столь большим, что

$$\frac{\lambda 4pC^{\lambda(2-t)}}{\lambda(2-t)} \frac{K^{1-\lambda t(2p-\varepsilon)}}{\pi[\lambda t(2p-\varepsilon)\quad 1]} 2^{tp\lambda} < \eta^2.$$

При таком выборе K лемма 5.5 следует из (5.9), (5.10) и (5.11).

5.7. Бо́льшая дуга. Наша ближайшая задача — найти асимптотическую формулу для $f(z)$ и, значит, для $\varphi(z)$ на дополнительной к γ дуге $|\theta - \theta_0| \leqslant K(1-\rho)$ окружности $|z| = \rho$. С этой целью положим

$$r_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad z_n = r_n e^{i\theta_0} \qquad (n \geqslant 1),$$

где θ_0 — снова число из теоремы 5.6. Выберем и зафиксируем положительное ε и обозначим через $\Delta_n = \Delta_n(\varepsilon)$ область

$$\left\{z : \frac{\varepsilon}{n} < |1 - ze^{-i\theta}| < \frac{1}{\varepsilon n}, \quad |\arg(1 - ze^{-i\theta_0})| < \frac{1}{2}\pi - \varepsilon\right\}.$$

Положим, далее, $\alpha_n = n^{-2p} f(z_n)$ и

$$f_n(z) = \frac{\alpha_n}{(1 - ze^{-i\theta_0})^{2p}}.$$

Таким образом, α_n и $f_n(z)$ определены при $n \geqslant 1$ и

$$|\alpha_n| \to \alpha \qquad (n \to +\infty)$$

по теореме 5.6. Теперь может быть доказана

Лемма 5.6. *При* $n \to +\infty$

$$f(z) \sim f_n(z), \quad f'(z) \sim f_n'(z)$$

равномерно относительно z *в* $\Delta_n(\varepsilon)$.

Предположим, не умаляя общности, что $\theta_0 = 0$, так как в противном случае можно вместо $f(z)$, $f_n(z)$ рассматривать $f(ze^{i\theta_0})$, $f_n(ze^{i\theta_0})$. Тогда, если

$$z = l_n(Z) \equiv r_n + \frac{1}{n} Z, \quad 1 - z = \frac{1}{n}(1 - Z), \qquad (5.12)$$

то область $\Delta_n(\varepsilon)$ в z-плоскости соответствует области

$$\Delta_1(\varepsilon)=\left\{Z:\varepsilon<|1-Z|<\frac{1}{\varepsilon},\quad |\arg(1-Z)|<\frac{1}{2}\pi-\varepsilon\right\}$$

в Z-плоскости. Положим

$$g_n(Z)=(1-Z)^{2p}\frac{f[l_n(Z)]}{f(z_n)}.$$

Тогда при фиксированном ε $\Delta_n(\varepsilon)$ лежит в круге $|z|<1$ для достаточно больших n, и потому функция $g_n(Z)$ определена в $\Delta_1(\varepsilon)$ при всех больших n. Пусть

$$\Delta_n'=\Delta_n\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right),\quad \Delta_n''=\Delta_n\left(\frac{1}{4}\varepsilon\right),$$

и пусть

$$\Delta'=\Delta_1\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right),\quad \Delta''=\Delta_1\left(\frac{1}{4}\varepsilon\right)$$

— соответствующие области в Z-плоскости. Пусть d — расстояние от Δ' до дополнения к Δ''. Тогда расстояние от Δ_n' до дополнения к Δ_n'' равно d/n, и, значит, расстояние от Δ_n' до окружности $|z|=1$ при больших n не меньше d/n. Поэтому, по теореме 5.5,

$$|f(z)|=O(n^{2p})$$

при больших n равномерно относительно z из Δ_n'. Следовательно, также

$$f[l_n(Z)]=O(n^{2p})$$

для Z из Δ'. Теперь ясно, что

$$g_n(Z)=O(1)\qquad (n\to+\infty)$$

равномерно относительно Z из Δ'.

Предположим теперь, что Z вещественно, $-1\leqslant Z\leqslant 0$, и пусть $z=\rho$ соответствует Z в силу (5.12). Тогда $\rho\leqslant r_n\leqslant(1+\rho)/2$, и, значит, из леммы 5.4 следует, что

$$g_n(Z)\sim(1-Z)^{2p}\left(\frac{1-r_n}{1-\rho}\right)^{2p}=1\qquad (n\to\infty).$$

Таким образом, $g_n(Z)$ равномерно ограничена в Δ' при больших n и $g_n(Z)\to 1$ $(n\to\infty)$ на некотором сегменте веще-

ственной оси, лежащем внутри Δ'. Поэтому, по теореме Витали о сходимости [1]),

$$g_n(Z) \to 1, \quad g_n'(Z) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

равномерно относительно Z в $\Delta_1(\varepsilon)$.

Возвращаясь на z-плоскость, заключаем, что

$$\frac{n^{2p} f(z)(1-z)^{2p}}{f(z_n)} \to 1, \quad \frac{1}{n}\frac{d}{dz}\frac{n^{2p} f(z)(1-z)^{2p}}{f(z_n)} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

равномерно относительно z из Δ_n. Первое из этих предельных соотношений показывает, что

$$f(z) \sim \frac{f(z_n)}{n^{2p}}(1-z)^{-2p} = f_n(z),$$

что и требовалось. Второе соотношение показывает, что

$$f'(z)(1-z)^{2p} - 2p(1-z)^{2p-1} f(z) = o(n) \qquad (n \to \infty).$$

Так как $\varepsilon < n|1-z| < \varepsilon^{-1}$ в Δ_n, то мы заключаем, что

$$f'(z) = \frac{2p}{1-z} f(z) + o(n^{2p+1}),$$

и теперь второе асимптотическое разложение леммы 5.6 следует из первого.

5.8. Доказательство теоремы 5.7. Закончим теперь доказательство теоремы 5.7 при $\alpha > 0$. При этом будет доказана более сильная

Теорема 5.8. *Предположим, что функция*

$$\varphi(z) = z^{\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n$$

удовлетворяет условиям теоремы 5.7, *что* $\alpha > 0$ *и что* θ_0 *удовлетворяет условию* (5.4). *Тогда*

$$nb_n \sim \frac{\varphi\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta_0}\right] e^{-i(n+\mu)\theta_0}}{\Gamma(2p\lambda)} \qquad (n \to +\infty).$$

По теореме 5.6,

$$\left|\varphi\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta_0}\right]\right| = \left|f\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta_0}\right]\right|^{\lambda} \sim \alpha^{\lambda} n^{2p\lambda} \qquad (n \to +\infty)$$

[1]) А. И. Маркушевич [1*], стр. 294.

Поэтому теорема 5.7 сразу следует из теоремы 5.8. Последний результат значительно сильнее, так как наряду со сведениями о $|b_n|$ он дает и сведения об $\arg b_n$.

Предположим, не умаляя общности, что $\theta_0 = 0$, так как в противном случае вместо $f(z)$, $\varphi(z)$ можно рассмотреть $f(ze^{i\theta_0})$, $\varphi(ze^{i\theta_0})$. Напишем

$$(1-z)^{-2p\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Тогда

$$c_n = \frac{2p\lambda(2p\lambda+1)\dots(2p\lambda+n-1)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n} = \frac{\Gamma(n+2p\lambda)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2p\lambda)} \sim \frac{n^{2p\lambda-1}}{\Gamma(2p\lambda)}$$

при $n\to\infty$. Кроме того, пусть $\varphi_n(z) = f_n(z)^{\lambda}$, так что

$$\varphi_n(z) = \alpha_n^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$$

и, значит,

$$nc_n\alpha_n^{\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{\varphi_n'(z)\,dz}{z^n} =$$

$$= \frac{\rho^{1-n}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n'(\rho e^{i\theta})\, e^{-i(n-1)\theta}\,d\theta \qquad (0<\rho<1).$$

Вспомним (5.6):

$$(n+\mu)b_n = \frac{\rho^{1-n-\mu}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(\rho e^{i\theta})\, e^{-i(n+\mu-1)\theta}\,d\theta$$

$$(1-2\delta<\rho<1)$$

Следовательно,

$$2\pi\rho^{n-1}\left[(n+\mu)\rho^{\mu}b_n - nc_n\alpha_n^{\lambda}\right] =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi'(\rho e^{i\theta})\, e^{-i\rho\theta} - \varphi_n'(\rho e^{i\theta})\right] e^{-i(n-1)\theta}\,d\theta. \qquad (5.13$$

Предположим теперь, что $\eta>0$, и выберем K столь большим, что при $n>n_0$ можно найти в промежутке $1-1/n \leqslant \rho \leqslant 1-1/2n$ число ρ, такое, что

$$\int |\varphi'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta < \eta n^{2p\lambda},$$

где γ обозначает дугу $K(1-\rho) \leqslant |\theta| \leqslant \pi$. Это возможно в силу леммы 5.5. Применяя эту лемму к $(1-z)^{-2p\lambda}$ вместо $\varphi(z)$, можем считать, что

$$\int_\gamma |\varphi_n'(\rho e^{i\theta})|\, d\theta < \eta n^{2p\lambda},$$

так как $|\alpha_n|$ остается ограниченным при $n \to +\infty$. Таким образом,

$$\left| \int_\gamma [\varphi'(\rho e^{i\theta}) e^{-i\mu\theta} - \varphi_n'(\rho e^{i\theta})] e^{-i(n-1)\theta}\, d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_\gamma [\,|\varphi'(\rho e^{i\theta})| + |\varphi_n'(\rho e^{i\theta})|\,]\, d\theta < 2\eta n^{2p\lambda}. \qquad (5.14)$$

Если γ' обозначает дополнительную дугу $0 \leqslant |\theta| \leqslant K(1-\rho)$, то γ' лежит в $\Delta_n(\varepsilon)$ при всех больших n, где ε — достаточно малое положительное число, зависящее от K. Действительно, на γ' имеем

$$\frac{1}{2n} \leqslant |1-z| \leqslant 1-\rho+|e^{i\theta}-1| \leqslant (1+K)(1-\rho) \leqslant \frac{1+K}{n}$$

и

$$|\arg(1-z)| = \operatorname{arctg} \frac{|\rho \sin\theta|}{1-\rho\cos\theta} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{|\theta|}{1-\rho} \leqslant \operatorname{arctg} K.$$

Поэтому при $z = \rho e^{i\theta}$ из леммы 5.6 получаем

$$\varphi'(z) = \lambda f'(z)[f(z)]^{\lambda-1} \sim \lambda f_n'(z)[f_n(z)]^{\lambda-1} = \varphi_n'(z)$$

при $n \to \infty$ равномерно на γ'. Так как $\theta = o(1)$ на γ', то мы заключаем, что

$$\varphi'(\rho e^{i\theta}) e^{-i\mu\theta} \sim \varphi'(\rho e^{i\theta}) \sim \varphi_n'(\rho e^{i\theta}),$$

и потому при $n \to +\infty$

$$\varphi'(\rho e^{i\theta}) e^{-i\mu\theta} - \varphi_n'(\rho e^{i\theta}) =$$

$$= o[\varphi_n'(\rho e^{i\theta})] = o(1-\rho)^{-2p\lambda-1} = o(n^{2p\lambda+1})$$

равномерно на γ'. Таким образом,

$$\left|\int_{\gamma'}\left[\varphi'(\rho e^{i\theta})\,e^{-i\mu\theta}-\varphi_n'(\rho e^{i\theta})\right]e^{-i(n-1)\theta}\,d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\gamma'}\left|\varphi'(\rho e^{i\theta})\,e^{-i\mu\theta}-\varphi_n'(\rho e^{i\theta})\right|d\theta=$$

$$=o(n^{2p\lambda+1})\,2K(1-\rho)=o(n^{2p\lambda}). \qquad (5.15)$$

Так как γ и γ' заполняют весь промежуток $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, то из (5.13), (5.14) и (5.15) мы заключаем, что

$$\left|2\pi\rho^{n-1}\left[(n+\mu)\rho^{\mu}b_n-nc_n\alpha_n^{\lambda}\right]\right|<[2\eta+o(1)]\,n^{2p\lambda}$$

при больших n. Кроме того,

$$\rho^{n-1}\geqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\geqslant\frac{1}{4}\qquad(n\geqslant 2),$$

η сколь угодно мало и $\rho^{\mu}\to 1$ при $n\to+\infty$. Таким образом,

$$b_n=\frac{nc_n\alpha_n^{\lambda}}{(n+\mu)\rho^{\mu}}+o(n^{2p\lambda-1})\sim\frac{n^{2p\lambda-1}\alpha_n^{\lambda}}{\Gamma(2p\lambda)}=$$

$$=\frac{[f(z_n)]^{\lambda}}{n\Gamma(2p\lambda)}=\frac{\varphi(z_n)}{n\Gamma(2p\lambda)}\qquad(n\to+\infty),$$

где $z_n=1-1/n$. Теорема 5.8 доказана.

5.9. Приложения. Случай $\lambda=1$. Случай $\lambda=1$ в теореме 5.7 наиболее интересен, так как он непосредственно связан с коэффициентами p-листных в среднем функций. Если функция

$$f(z)=\sum_0^{\infty}a_nz^n$$

p-листна в среднем в круге $|z|<1$ и $p>1/4$, то

$$\frac{|a_n|}{n^{2p-1}}\to\frac{\alpha}{\Gamma(2p)}\qquad(n\to\infty),$$

где α — константа из теоремы 5.5. Всякий раз, когда мы получаем оценку для α, мы получаем соответственно точную оценку для асимптотического роста коэффициентов. Так, например, имеет место

Теорема 5.9. *Предположим, что p — положительное целое число и что функция*

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$$

p-листна в среднем в круге $|z| < 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^{2p-1}} = \frac{\alpha}{(2p-1)!},$$

где $\alpha < 1$, за исключением того случая, когда $f(z) = z^p(1 - ze^{i\theta})^{-2p}$.

Действительно, предельное соотношение выполняется в силу теоремы 5.7, и

$$\alpha = \lim_{r\to 1-0} (1-r)^{2p} M(r, f).$$

Кроме того, по теореме 5.4, $\alpha < 1$, если только $f(z)$ не равна $z^p(1 - ze^{i\theta})^{-2p}$.

Случай $p = 1$ особенно интересен. Теорема 5.9 показывает, что в этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} = \alpha < 1,$$

если только $f(z)$ не равна $z + 2z^2e^{i\theta} + 3z^3e^{2i\theta} + \ldots$. Поэтому во всяком случае

$$|a_n| \leqslant n \quad \text{при} \quad n > n_0(f).$$

Это доказывает справедливость гипотезы Бибербаха, о которой говорилось в главе 1, для фиксированной функции f и всех достаточно больших n.

Подобным образом может быть доказана

Теорема 5.10. *Предположим, что функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ p-листна в среднем, $f(z) \neq 0$ при $|z| < 1$ и $p > 1/4$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n^{2p-1}} = \frac{\alpha}{\Gamma(2p)},$$

где $\alpha \leqslant |a_0|\, 4^p$, *причем равенство имеет место только для функций* $a_0\left(\frac{1+ze^{i\delta}}{1-ze^{i\theta}}\right)^{2p}$.

Предельное соотношение снова является следствием теоремы 5.7. Неравенство для α следует из последнего утверждения теоремы 5.1.

5.10. k-кратно симметричные функции. Предположим теперь, более общо, что k — положительное целое и что функция

$$f_k(z) = a_k z^k + a_{2k} z^{2k} + \ldots + a_{nk} z^{nk} + \ldots$$

p-листна в среднем в круге $|z| < 1$. Тогда функция

$$\varphi(z) = f_k(z^{1/k}) = a_k z + a_{2k} z^2 + \ldots$$

(p/k)-листна в среднем там же, и обратно. Действительно, каждому корню z_0 уравнения $\varphi(z) = w$ соответствуют ровно k корней уравнения $f_k(z) = w$, связанных с z_0 соотношением $z^k = z_0$. Таким образом, при всяком w

$$n[w,\ f_k(z)] = kn[w,\ \varphi(z)],$$

и потому при всяком положительном R

$$p[R,\ \varphi] = \frac{1}{k}\, p[R,\ f_k].$$

Вообще, если ν — натуральное число и функция

$$f_k(z) = z^\nu + a_{k+\nu} z^{k+\nu} + a_{2k+\nu} z^{2k+\nu} + \ldots \qquad (5.16)$$

p-листна в среднем в круге $|z| < 1$, то функция

$$[f_k(z)]^k = z^{\nu k}(1 + a_{k+\nu} z^k + \ldots)^k = z^{\nu k} + b_{\nu+1} z^{(\nu+1)k} + \ldots$$

(pk)-листна в среднем в круге $|z| < 1$ по лемме 5.1, и согласно приведенному выше замечанию функция

$$f(z) = [f_k(z^{1/k})]^k = z^\nu + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} b_n z^n$$

p-листна в среднем в круге $|z| < 1$. Таким образом, существует

$$\alpha = \lim_{r \to 1} (1-r)^{2p} M[r,\ f(z)]. \qquad (5.17)$$

Далее,

$$f_k(z^{1/k}) = [f(z)]^{1/k} = z^{\nu/k}(1 + a_{k+\nu}z + a_{2k+\nu}z^2 + \ldots).$$

Значит, к $f(z)$ можно применить теорему 5.7 с $\lambda = 1/k$. Таким образом, получается

Теорема 5.11. *Если функция $f_k(z)$, заданная рядом* (5.16), *p-листна в среднем в круге $|z| < 1$, где $1 \leqslant k < 4p$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{nk+\nu}|}{n^{2p/k-1}} = \frac{\alpha^{1/k}}{\Gamma(2p/k)},$$

где α определено формулой (5.17).

Пусть, обратно, $f(z) = z^\nu + \ldots$ — любая p-листная в среднем в круге $|z| < 1$ функция. Тогда $f_k(z) = [f(z^k)]^{1/k}$ p-листна в среднем в круге $|z| < 1$ и имеет вид (5.16), если только функция $f_k(z)$ регулярна, т. е. если все нули функции $f(z)$, расположенные в точках, отличных от начала, имеют кратности, делящиеся без остатка на k.

Отметим, в частности, случай $\nu = p$. В этом случае обе функции $f(z)$ и $f_k(z)$ имеют нуль кратности p в начале и потому не имеют других нулей. Каждой $f(z)$ соответствует некоторая $f_k(z)$, и обратно. Справедлива

Теорема 5.12. *Предположим, что функция*

$$f_k(z) = z^p + a_{p+k}z^{p+k} + a_{p+2k}z^{p+2k} + \ldots$$

p-листна в среднем в круге $|z| < 1$ и что $1 \leqslant k < 4p$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{p+nk}|}{n^{2p/k-1}} = \frac{\alpha^{1/k}}{\Gamma(2p/k)}$$

и $\alpha \leqslant 1$, причем равенство имеет место только для p-листных в среднем функций

$$f_k(z) = z^p(1 - z^k e^{i\theta})^{-2p/k}.$$

В самом деле, в этом случае функция

$$f(z) = [f_k(z^{1/k})]^k = z^p + \ldots$$

p-листна в среднем в круге $|z|<1$, и потому, по теореме 5.4,

$$\alpha = \lim_{r\to 1}(1-r)^{2p}M(r, f) < 1,$$

причем равенство имеет место только для функций $f(z) = z^p(1-ze^{-i\theta})^{-2p}$, соответствующих $f_k(z) = z^p(1-z^k e^{i\theta})^{-2p/k}$, что и требовалось доказать.

Отметим частный случай нечетной однолистной функции

$$f_2(z) = z + a_3z^3 + a_5z^5 + \ldots.$$

Полагая $p=1$, $k=2$, заключаем из теоремы 5.12, что в этом случае

$$\lim_{n\to\infty}|a_{2n+1}| < 1,$$

если только $f_2(z)$ не совпадает с $z + z^3e^{i\theta} + z^5e^{2i\theta} + \ldots$. В частности,

$$|a_{2n+1}| \leqslant 1 \qquad (n > n_0(f)).$$

Однако при всяком фиксированном $n \geqslant 2$ можно найти нечетную однолистную функцию $f_2(z)$ [1]), для которой $|a_{2n+1}| > 1$. Этот пример до некоторой степени снижает ценность того свидетельства в пользу предположения Бибербаха, которое представляет собой теорема 5.9.

5.11. Некоторые дальнейшие результаты. Недавно Дженкинсом [1, 3] были доказаны некоторые неравенства для класса $\mathcal{F}$ функций

$$f(z) = z + a_2z^2 + \ldots,$$

однолистных в среднем по окружности в круге $|z|<1$, примыкающие к теореме 5.3. Он получил точную верхнюю границу для $|f(r)|$ при $0<r<1$ и заданной величине $|a_2|$ или $|f(-\rho)|$, где ρ — фиксированное число, $0<\rho<1$. В обоих случаях экстремальными оказываются однолистные функции с вещественными коэффициентами. Из теоремы 1.10

[1]) Шеффер и Спенсер [1]. Ранее Фекете и Сегё [1] показали, что в этом случае точная верхняя граница для $|a_5|$ равна $\frac{1}{2} + e^{-2/3} = 1,01\ldots$.

следует, что у этих экстремалей $|a_n| \leqslant n$, и потому

$$|f(\rho)|+|f(-\rho)| = f(\rho)-f(-\rho) =$$

$$= 2(\rho + a_3\rho^3 + a_5\rho^5 + \ldots) \leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\rho^{2n+1},$$

$$|f(\rho)|+|f(-\rho)| \leqslant \frac{\rho}{(1+\rho)^2} + \frac{\rho}{(1-\rho)^2}\ ^{1}).$$

Это последнее неравенство справедливо для всех $f(z) \in \mathcal{F}$, и, значит, $|a_3| \leqslant 3$ при $f(z) \in \mathcal{F}$. Один неопубликованный пример Спенсера показывает, что этот факт перестает быть верным для функций, однолистных в среднем по площади, хотя неравенство $|a_2| \leqslant 2$ остается справедливым. В следующей главе мы докажем методом Лёвнера, что для однолистных функций $|a_3| \leqslant 3$.

Из результатов Дженкинса следует также, что если $|a_2|$ задано и $f(z) \in \mathcal{F}$, то

$$\alpha = \lim_{r \to 1-0} (1-r)^2 M(r, f) \leqslant \psi(|a_2|) \leqslant 4b^{-2}\exp\left(2 - 4b^{-1}\right),$$

где $b = 2-(2-|a_2|)^{1/2}$, и это неравенство точно при $0 \leqslant |a_2| \leqslant 2$.

Если функция $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \ldots$ p-листна в среднем в круге $|z| < 1$, то $[f(z)]^{1/p} \in \mathcal{F}$, и отсюда Дженкинс вывел оценку $|a_{p+2}| \leqslant p(2p+1)$, точную в этом случае. Число α в теореме 5.12 удовлетворяет неравенству

$$\alpha \leqslant \psi\left(\frac{k|a_{p+k}|}{p}\right),$$

которое точно при данном $|a_{p+k}|$. Эти результаты выходят за пределы круга проблем, затронутых в этой книге, и будут опубликованы в брошюре Дженкинса, в серии „Ergebnisse". Эта брошюра скоро выйдет в свет[2]).

Теоремы регулярности, касающиеся средних $I_\lambda(r, f)$ и их производных, подобные теоремам 5.5 и 5.7, вместе с обсуждением поведения $\arg a_n$ и отличное от приведенного (хотя и немного более длинное) рассмотрение случая меньшей дуги, не опирающееся на глубокую теорему 2.9, можно найти у Хеймана [4].

---

[1]) Для однолистных функций это неравенство принадлежит Г. М. Голузину. См. [2]. — *Прим. ред.*

[2]) См. примечание на стр. 6. — *Прим. перев.*

Глава 6

ТЕОРИЯ ЛЁВНЕРА

6.0. Введение. В этой главе мы изложим более глубокую теорию, принадлежащую Лёвнеру [2]. Она позволит нам установить точные оценки для класса S функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

однолистных в круге $|z| < 1$. Эти оценки, по-видимому, не могут быть получены методами главы 1. Будем говорить, что класс S' плотен в классе S, если S' есть подкласс класса S и если любая функция $f(z) \in S$ может быть приближена последовательностью функций $f_n(z) \in S'$ так, что $f_n(z) \to f(z)$ равномерно на всяком компактном подмножестве круга $|z| < 1$ при $n \to \infty$. Тогда и p-е производные в любой точке круга $|z| < 1$, и, в частности, коэффициенты $f_n(z)$ стремятся к соответствующим производным или коэффициентам $f(z)$ при $n \to \infty$. Поэтому оценки, полученные для класса S', будут верны и для более широкого класса S.

Основной результат Лёвнера можно сформулировать так:

Теорема 6.1. *Предположим, что $t_0 > 0$, и пусть $\varkappa(t)$ — непрерывная комплекснозначная функция от t, заданная в промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_0$, причем $|\varkappa(t)| = 1$. Пусть $w = f(z, t)$ — решение дифференциального уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = -w\,\frac{1 + \varkappa(t)\,w}{1 - \varkappa(t)\,w} \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_0), \tag{6.1}$$

такое, что $f(z, 0) = z$. Тогда функции $e^{t_0} f(z, t_0)$ при всевозможных t_0 и $\varkappa(t)$ образуют плотный подкласс класса S.

Мы докажем этот результат в первой части главы, убедившись в том, что (*а*) если функция $w = f(z, t) =$

$= e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \ldots)$ отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, разрезанный вдоль кусочно-аналитической кривой, то функции $e^t f(z, t)$ плотны в S; (*b*) эти функции действительно являются решениями дифференциального уравнения (6.1) при надлежащем выборе функции $\varkappa(t)$; (*c*) какова бы ни была непрерывная функция $\varkappa(t)$ в теореме 6.1, соответствующее решение $f(z, t)$ уравнения (6.1) существует и единственно и $e^t f(z, t) \in S$.

Доказательство теоремы 6.1 длинное и нелегкое. Оно, однако, вполне оправдывается многими красивыми и простыми приложениями. Пусть $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in S$. В последней части этой главы мы изложим некоторые из этих приложений, причем будут найдены точная верхняя граница для $|a_3|$ и всех коэффициентов обратной функции $z = f^{-1}(w)$, так же как оценки аргумента $f(z)/z$ и $f'(z)$, радиусов выпуклости и звездообразности.

6.1. Граничные свойства конформного отображения. В этом пункте мы докажем два предварительных результата.

Лемма 6.1. *Предположим, что функция $w = \varphi(z)$ взаимно однозначно и конформно отображает подобласть D_1 круга $|z| < 1$ на область D_2, лежащую в круге $|w| < 1$. Пусть z_0 — произвольная точка из D_1, а $l(R)$ — полная длина образа в D_2 части окружности $|z - z_0| = R$, лежащей в D_1. Если $R_1 > 0$[1]), $k > 1$, то существует такое R, что $R_1 < R < kR_1$ и $l(R) \leqslant \pi(2/\log k)^{1/2}$. В частности, существует последовательность R_n, убывающая до нуля при $n \to \infty$, так что $l(R_n) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Рассмотрим отображение $z = \varphi^{-1}(w)$ области D_2 на область D_1 и положим

$$\psi(w) = \varphi^{-1}(w) - z_0.$$

Тогда линии уровня γ_R в D_2, соответствующие $|z - z_0| = R$, совпадают с линиями уровня $|\psi(w)| = R$. Пусть $l(R)$ — их полная длина. Тогда мы можем применить теорему 2.1

[1]) И R_1 достаточно мало́. — *Прим. ред.*

с $p(R) \leqslant 1$, $A \leqslant \pi$, так как $\psi(w)$ однолистна. Получим неравенство

$$\int_{R_1}^{kR_1} \frac{l(R)^2\,dR}{R} \leqslant \int_0^{\infty} \frac{l(R)^2\,dR}{Rp(R)} \leqslant 2\pi A \leqslant 2\pi^2.$$

Если l — нижняя граница $l(R)$ при $R_1 < R < kR_1$, то мы заключаем, что

$$l^2 \log k \leqslant 2\pi^2,$$

$$l \leqslant \pi\left(\frac{2}{\log k}\right)^{1/2},$$

что и требовалось.

Если теперь определить R_n' индуктивно: $R_0' = 1$, $R_{n+1}' = e^{-n}R_n'$, то из доказанного следует, что существуют R_n, удовлетворяющие неравенствам

$$R_{n+1}' < R_n < R_n' \text{ и } l(R_n) < \pi\sqrt{2/n}.$$

Лемма 6.1 доказана.

Нам потребуется также

Лемма 6.2. *Пусть γ — простая дуга длины $l < 1$, целиком лежащая в круге $|z| < 1$, за исключением двух ее концов, лежащих на окружности $|z| = 1$. Пусть D — множество всех таких точек P, лежащих в круге $|z| < 1$, что всякая кривая, соединяющая в круге $|z| < 1$ начало с точкой P, пересекает γ. Тогда диаметр множества D не превосходит l*[1]).

Кривую γ можно задать в параметрической форме: $z = \alpha(t)$ $(a < t < b)$. Пусть t_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — такая возрастающая последовательность чисел, что

$$a < t_n < b \qquad (n \geqslant 1),$$

$$t_n \to b \qquad (n \to \infty).$$

Тогда

$$\sum_{r=1}^{n} |\alpha(t_r) - \alpha(t_{r-1})| \leqslant l,$$

[1]) Диаметром точечного множества E называют точную верхнюю грань расстояний $|z_1 - z_2|$ между точками $z_1, z_2 \in E$.

и потому

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\alpha(t_r) - \alpha(t_{r-1})| \leqslant l,$$

ряд $\sum_{r=1}^{\infty} [\alpha(t_r) - \alpha(t_{r-1})]$ сходится.

Таким образом, $\alpha(t_r)$ стремится к некоторому пределу $\alpha(b)$ при $r \to \infty$, причем $\alpha(b)$, очевидно, не зависит от выбора последовательности t_r. Поэтому $\alpha(t) \to \alpha(b)$ при $t \to b - 0$, и подобным образом $\alpha(t)$ стремится к конечному пределу $\alpha(a)$ при $t \to a + 0$.

Положим $z_1 = \alpha(a)$, $z_2 = \alpha(b)$. Тогда $|z_1| = |z_2| = 1$ по предположению. Пусть $z_3 = (z_1 + z_2)/2$. Если z — какая-нибудь точка на γ, то

$$|z - z_1| + |z - z_2| \leqslant l,$$

так как длина γ равна l, и потому z лежит внутри эллипса с центром в z_3 и с большей осью l. Значит, z лежит внутри круга C с центром z_3 и радиусом $l/2$. Диаметр этого круга равен l, и так как C содержит точку z_1, лежащую на окружности $|z| = 1$, то C не может содержать начала. Всякая другая точка P в круге $|z| < 1$, лежащая вне C, очевидно, может быть соединена с началом кривой, лежащей в круге $|z| < 1$ и вне C; значит, P лежит вне D. Таким образом, D лежит внутри C и потому имеет диаметр, не превосходящий l.

6.2. Преобразования. Пусть функция

$$f(z) = \beta(z + a_2 z^2 + \ldots), \qquad (6.2)$$

где $\beta > 0$, однолистна в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет неравенству $|f(z)| < 1$. Такую функцию $f(z)$ будем называть *преобразованием*. Преобразование $w = f(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на область D, лежащую в круге $|w| < 1$. Обозначим через $S = S_f$ множество всех точек круга $|w| < 1$, не принадлежащих D, и через $d = d_f$ — диаметр S_f. Исключим тот тривиальный случай, когда S_f пусто и $f(z) = z$.

Будем говорить, что две точки z, w, расположенные соответственно на окружности $|z| = 1$ и границе области D,

соответствуют друг другу при преобразовании $w = f(z)$, если существует последовательность z_n, такая, что

$$|z_n| < 1 \qquad (n \geqslant 1)$$

и

$$z_n \to z, \ f(z_n) \to w \quad (n \to \infty).$$

Пусть $B = B_f$ — множество всех точек окружности $|z| = 1$, соответствующих точкам множества S. Заметим, что точки окружности $|z| = 1$, не принадлежащие B, могут соответствовать только точкам окружности $|w| = 1$. Обозначим через $\delta = \delta_f$ диаметр множества B.

Наша цель — изучение поведения на границе преобразований при малых δ или d. В этом случае D приближается к кругу $|w| < 1$, а $f(z)$ приближается к z. Наша первая задача состоит в том, чтобы показать, что если одно из чисел δ или d мало, то мало и другое, и что в таком случае β приближенно равно 1.

Лемма 6.3. *Если $f(z)$ — преобразование, заданное формулой* (6.2), *то в обозначениях, введенных выше,* $1 - d \leqslant \beta \leqslant 1$.

Неравенство $\beta \leqslant 1$ следует из леммы Шварца. При доказательстве того, что $\beta \geqslant 1 - d$, можно предположить, что $d < 1$. Из леммы 5.2 следует, что если S пересекается с окружностью $|w| = r$ при некотором $r < 1$, то S пересекается с окружностью $|w| = \rho$ при $r < \rho < 1$. Следовательно, S имеет по крайней мере одну предельную точку $e^{i\theta}$ на окружности $|w| = 1$. Таким образом, S целиком лежит в круге $|w - e^{i\theta}| \leqslant d$ и, значит, в множестве $|w| \geqslant 1 - d$. Поэтому D содержит круг $|w| < 1 - d$.

Значит, обратная функция $z = f^{-1}(w)$ отображает круг $|w| < 1 - d$ на подобласть круга $|z| < 1$, и функция

$$f^{-1}[(1-d)w] = \frac{(1-d)w}{\beta} + \ldots$$

удовлетворяет условиям леммы Шварца. Поэтому $1 - d \leqslant \beta$, и лемма 6.3 доказана.

Лемма 6.4. *В обозначениях, введенных выше,*

$$\delta \leqslant 4\pi \left[\log \frac{2}{d}\right]^{-1/2}, \quad d \leqslant 4\pi \left[\log \frac{2}{\delta}\right]^{-1/2}.$$

При доказательстве первого неравенства можно считать, что $d < 2e^{-4\pi^2}$. Действительно, в противном случае неравенство тривиально, так как $\delta \leqslant 2$.

Пусть w_0 — предельная точка множества S_f, лежащая на окружности $|w| = 1$. Тогда S_f целиком содержится в круге $|w - w_0| \leqslant d$, и потому дуга c_R окружности $|w - w_0| = R$, лежащая в круге $|w| < 1$, при $R > d$ лежит и в D. Пусть γ_R — образ c_R при отображении $z = f^{-1}(w)$, и пусть $l(R)$ — длина γ_R. Тогда, в силу леммы 6.1, где $R_1 = d$, $k = d^{-1}$, мы можем выбрать R_0, удовлетворяющее неравенствам

$$d < R_0 < 1, \quad l(R_0) \leqslant \pi\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{d}\right)^{-1/2} \leqslant \pi\left(\frac{1}{4}\log\frac{2}{d}\right)^{-1/2} < 1.$$

Теперь заметим, что γ_{R_0} отделяет $z = 0$ от B_f, так как c_{R_0} отделяет $w = 0$ от S_f. Значит, по лемме 6.2,

$$\delta_f \leqslant l(R_0) \leqslant 2\pi\left(\log\frac{2}{d}\right)^{-1/2},$$

что и требовалось. Доказательство второго неравенства леммы 6.4 проводится сходным образом. Лемма доказана.

6.2.1. Нам потребуется также следующая

Лемма 6.5. *Предположим, что функция* $\psi(z) = u + iv$ *регулярна в круге* $|z| < 1$, *что* $u(z)$ *сохраняет там знак и что* $v(0) = 0$. *Предположим, далее, что*

$$u(re^{i\varphi}) \to 0 \quad (r \to 1)$$

равномерно при $\delta \leqslant |\varphi - \varphi_0| \leqslant \pi$. *Тогда*

$$\psi(z) = \psi(0)\left[\frac{e^{i\varphi_0} + z}{e^{i\varphi_0} - z} + \varepsilon(z)\right],$$

где $|\varepsilon(z)| < 5\delta\,|e^{i\varphi_0} - z|^{-2}$ *при* $|e^{i\varphi_0} - z| > 2\delta$, $|z| < 1$.

Не умаляя общности, можем считать, что $\varphi_0 = 0$. Тогда по формуле Пуассона для $|z| < r < 1$ получим

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\varphi})\frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z}\,d\varphi + iC,$$

где C постоянно при $|z|<r$, и так как $\psi(0)$ — вещественное число, то $C=0$. Таким образом, при фиксированном z

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} u(re^{i\varphi})\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}\,d\varphi+o(1)\quad(r\to 1). \tag{6.3}$$

Полагая $\psi(0)=\alpha$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} u(re^{i\varphi})\,d\varphi\to\alpha\quad(r\to 1). \tag{6.4}$$

Кроме того,

$$\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}\to\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z},$$

и если $|z-1|\geqslant 2\delta$, $|\varphi|\leqslant\delta$, то $|e^{i\varphi}-1|\leqslant\delta$, и потому

$$\left|\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}-\frac{1+z}{1-z}\right|=\left|\frac{2z(e^{i\varphi}-1)}{(e^{i\varphi}-z)(1-z)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\delta}{|1-z|[|1-z|-\delta]}\leqslant\frac{4\delta}{|1-z|^2}.$$

Таким образом, если $|z-1|>2\delta$, $|\varphi|<\delta$ и r достаточно близко к 1, то

$$\left|\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}-\frac{1+z}{1-z}\right|<\frac{5\delta}{|1-z|^2}.$$

Теперь, устремляя в (6.3) r к 1, получим

$$\left|\psi(z)-\frac{1+z}{1-z}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} u(re^{i\varphi})\,d\varphi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{5\delta}{|1-z|^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|u(re^{i\varphi})|\,d\varphi+o(1).$$

Используя (6.4) и тот факт, что u сохраняет знак в круге $|z|<1$, заключаем, что

$$\left|\psi(z)-\alpha\frac{1+z}{1-z}\right|\leqslant\frac{5\delta|\alpha|}{|1-z|^2},$$

если $|1-z|\geqslant 2\delta$, а это и есть утверждение леммы 6.5.

6.3. Структура бесконечно малых преобразований. Теперь мы можем описать бесконечно малые преобразования, т. е. такие преобразования, для которых $\delta(f)$ и $d(f)$ малы[1]).

Лемма 6.6. *Пусть* $f_n(z)=\beta_n(z+\ldots)$ — *последовательность преобразований круга* $|z|<1$, *пусть* $\delta(f_n)$, $d(f_n)$ *определены, как в* § 6.2, *и пусть или* $d(f_n)\to 0$, *или* $\delta(f_n)\to 0$ *при* $n\to\infty$. *Тогда*

$$f_n(z)\to z \quad (n\to\infty) \tag{6.5}$$

равномерно в круге $|z|<1$ *и, в частности,* $\beta_n\to 1$.

Далее, если z_n — *точка окружности* $|z|=1$, *соответствующая точке* w_n *круга* $|w|<1$ *при преобразовании* $w=f_n(z)$, *и если* $0<r<1$, *то*

$$f_n(z)-z\sim -(1-\beta_n)z\frac{z_n+z}{z_n-z} \qquad (n\to\infty) \tag{6.6}$$

равномерно в круге $|z|\leqslant r$.

Из леммы 6.4 следует, что $\delta(f_n)\to 0$, если $d(f_n)\to 0$, и обратно. Из леммы 6.3 следует, что $\beta_n\to 1$. Положим

$$\psi_n(z)=\log\frac{f_n(z)}{z}=u_n(z)+iv_n(z).$$

Функция $\psi_n(z)$ регулярна в круге $|z|<1$, так как $f_n(z)$ обращается в нуль только при $z=0$. Кроме того, $u_n(z)\leqslant 0$ ($|z|<1$), так как $f_n(z)$ удовлетворяет условиям леммы Шварца. Пусть $z_n=e^{i\varphi_n}$ соответствует w_n, $|w_n|<1$, при преобразовании $w=f_n(z)$. Если $|e^{i\varphi}-e^{i\varphi_n}|>\delta(f_n)$, то точка $z=e^{i\varphi}$ соответствует только точкам w окружности $|w|=1$, и каково бы ни было $\delta>0$, это справедливо при $\delta\leqslant|\varphi-\varphi_n|\leqslant\pi$, $n>n_0(\delta)$, так как $\delta(f_n)\to 0$. В таком случае

$$u_n(re^{i\varphi})\to 0 \quad (r\to 1)$$

равномерно при $\delta\leqslant|\varphi-\varphi_n|\leqslant\pi$ и фиксированном $n>n_0(\delta)$.

Теперь применим лемму 6.5 и получим

$$\psi_n(z)=\log\beta_n\left[\frac{z_n+z}{z_n-z}+\varepsilon_n(z)\right]. \tag{6.7}$$

---

[1]) Бесконечно малы. — *Прим. ред.*

где $|\varepsilon_n(z)| < 5\delta|z-z_n|^{-2}$ при $|z-z_n| > 2\delta$. Таким образом, если η фиксировано и положительно, то можно выбрать столь большое n_1, что

$$|\psi_n(z)| \leqslant \eta$$

при $n > n_1$ и $|z-z_n| \geqslant \eta$, и тогда

$$|f_n(z)-z| = |z|\,|e^{\psi_n(z)}-1| \leqslant e^{\eta}-1 < 2\eta \qquad (6.8)$$

при $\eta < 1/2$. Кроме того, будем считать n настолько большим, что концы дуги $|z-z_n| = \eta$ на окружности $|z| = 1$ соответствуют только точкам окружности $|w| = 1$. Согласно (6.8), имеем $|f_n(z)-z| \leqslant 2\eta$, и потому $|f_n(z)-z_n| \leqslant 3\eta$ на этой дуге. Значения, которые функция $w = f_n(z)$ принимает при $|z-z_n| < \eta$, образуют область Δ в круге $|w| < 1$, отделенную от $w = 0$ образом дуги $|z-z_n| = \eta$ при отображении $w = f_n(z)$. Значит, Δ лежит и в области $|w-z_n| < 3\eta$. Таким образом, мы, наконец, получим

$$|f_n(z)-z_n| \leqslant 3\eta \text{ в круге } |z-z_n| < \eta,$$

и потому

$$|f_n(z)-z| < 4\eta \text{ при } |z_n-z| \leqslant \eta.$$

Вместе с (6.8) это дает (6.5), так как η произвольно.

Далее, (6.7) показывает, что при фиксированном r, $0 < r < 1$, $\psi_n(z) \to 0$ $(n \to \infty)$ равномерно для $|z| \leqslant r$, поэтому при $n \to \infty$ равномерно для $|z| \leqslant r$

$$f_n(z)-z = z\left[e^{\psi_n(z)}-1\right] \sim z\psi_n(z) \sim z\log\beta_n\frac{z_n+z}{z_n-z},$$

согласно (6.7), и так как $\beta_n \to 1$ $(n \to \infty)$, мы получаем (6.6) Лемма 6.6 доказана.

6.4. Лёвнеровские отображения на области с разрезами. Пусть γ — простая жорданова дуга, концевая точка B которой лежит на окружности $|w| = 1$, в то время как остальные точки этой дуги содержатся в круге $|w| < 1$. Предположим, далее, что γ не проходит через начало и состоит из конечного числа аналитических дуг P_1P_2, P_2P_3, ..., $P_{n-1}B$. Такую дугу мы будем называть кусочно-аналитическим разрезом или, короче, к. а. разрезом.

Точечное множество G, состоящее из всех точек круга $|w|<1$, не принадлежащих γ, представляет собой односвязную область. Действительно, если точки Q_1 и Q_2 лежат в G вблизи различных точек дуги γ, то Q_1 и Q_2 можно соединить в G кривой, расположенной вблизи γ, которая может, если нужно, обойти вокруг начальной точки γ и пойти вдоль другой стороны. Таким образом, любые две точки из G, расположенные вблизи γ, могут быть соединены в G, а всякая точка G может быть соединена с некоторой точкой, лежащей вблизи γ, например, прямолинейным сегментом, идущим в начало γ. Поэтому G — связное множество. Дополнение к G состоит из множеств $|w|\geqslant 1$ и γ и потому связно и замкнуто. Таким образом, G — односвязная ограниченная область[1]), содержащая $w=0$, и поэтому, в силу теоремы Римана об отображении[2]), существует единственное преобразование

$$w=f(z)=\beta(z+a_2z^2+\ldots), \tag{6.9}$$

отображающее круг $|z|<1$ взаимно однозначно и конформно на G и такое, что $f(0)=0$ и $f'(0)=\beta>0$. Очевидно, $f(z)/\beta\in S$. Далее, справедлива

Лемма 6.7. *Функции вида* $f(z)/\beta$, *где* $f(z)$ *построена так же, как в* (6.9), *образуют плотный в* S *подкласс* S''.

Предположим, что $f(z)\in S$ и $0<\rho<1$. Тогда $f(\rho z)$ отображает круг $|z|<1$ на внутренность некоторой аналитической кривой, а именно на внутренность образа окружности $|z|=\rho$ при отображении $f(z)$. Кроме того, $\frac{1}{\rho}f(\rho z)\in S$, $\frac{1}{\rho}f(\rho z)\to f(z)$ при $\rho\to 1$ равномерно для $|z|\leqslant r$, если $0<r<1$.

Таким образом, достаточно показать, что функции $\frac{1}{\rho}f(\rho z)$ можно приблизить функциями из S''. Если M велико, то функция

$$w=\psi(z)=\frac{1}{\rho M}f(\rho z)=\frac{1}{M}z+\ldots$$

---

[1]) А. И. Маркушевич [1*], стр. 41.
[2]) Там же, стр. 376.

отображает круг $|z|<1$ на внутренность D некоторой замкнутой аналитической кривой Γ, целиком лежащей в круге $|w|<1$. Пусть Γ_n состоит из прямолинейного сегмента, соединяющего точку $w=1$ с ближайшей точкой P кривой Γ, и из части Γ, полученной удалением из Γ дуги P_nP диаметра $1/n$. Пусть Δ_n состоит из круга $|w|<1$, из которого удален к. а. разрез Γ_n, и пусть функция

$$f_n(z)=\beta_n(z+a_2z^2+\ldots)$$

отображает круг $|z|<1$ на Δ_n. Остается доказать, что $f_n(z)\to\psi(z)$ $(n\to\infty)$ и потому $f_n(z)/\beta_n$ приближает функцию $\frac{1}{\rho}f(\rho z)$ при фиксированном ρ, которая в свою очередь приближает $f(z)$.

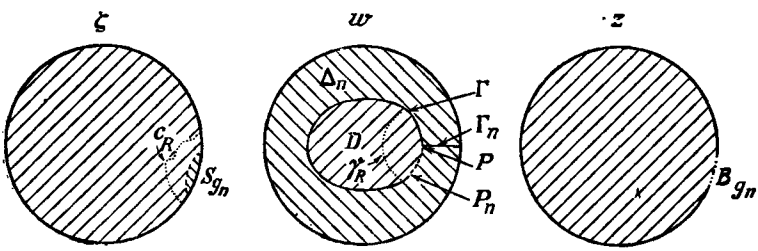

Рис. 7. $f_n(\zeta)=w=\psi(z)$; $\zeta=g_n(z)$.

Рассмотрим теперь $\zeta=f_n^{-1}[\psi(z)]=g_n(z)$. Легко проверить, что $g_n(0)=0$, $g_n'(0)>0$, так что $g_n(z)$ — преобразование. Пусть множество S_{g_n} определено, как в § 6.2. Тогда S_{g_n} состоит из всех тех точек круга $|\zeta|<1$, которые при преобразовании $w=f_n(z)$ соответствуют точкам, находящимся вне D.

Выберем теперь δ столь малым, чтобы окружность радиуса R с центром в точке P пересекала D по одной дуге γ_R при $0<R<\delta$ и чтобы начало $w=0$ лежало во внешности этой окружности. Тогда, если $1/n<R$, то при отображении $\zeta=f_n^{-1}(w)$ дуга γ_R соответствует единственной дуге c_R, расположенной в круге $|\zeta|<1$, и все точки множества S_{g_n} отделены от $\zeta=0$ дугой c_R. Согласно лемме 6.1,

можно выбрать такое R, что длина $l(R)$ дуги c_R удовлетворяет неравенству

$$l(R) \leqslant \pi \left[\frac{1}{2} \log (n\delta)\right]^{-1/2}$$

и потому, по лемме 6.2, диаметр $d(g_n)$ множества S_{g_n} удовлетворяет неравенству

$$d(g_n) \leqslant \pi \left[\frac{1}{2} \log (n\delta)\right]^{-1/2}.$$

Из леммы 6.6 следует теперь, что равномерно в круге $|z| < 1$

$$g_n(z) \to z \quad (n \to \infty).$$

По заданному $r < 1$ выберем теперь такое ρ, что $r < \rho < 1$. Применяя неравенство Коши к кругу с центром в точке z и радиусом $1 - \rho$, получим

$$|f_n'(z)| \leqslant (1-\rho)^{-1} \quad (|z| \leqslant \rho).$$

Значит, при $|z_1| \leqslant \rho$, $|z_2| \leqslant \rho$

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f_n'(z)\, dz \right| \leqslant (1-\rho)^{-1} |z_1 - z_2|.$$

Предположим теперь, что $|z| \leqslant r$. Тогда $|g_n(z)| \leqslant \rho$ при всех достаточно больших n, так как $g_n(z) \to z$ равномерно. Значит,

$$|f_n(z) - \psi(z)| = |f_n(z) - f_n[g_n(z)]| \leqslant$$

$$\leqslant (1-\rho)^{-1} |z - g_n(z)|,$$

и потому $f_n(z) \to \psi(z)$ $(n \to \infty)$ равномерно при $|z| \leqslant r$. Лемма 6.7 доказана.

6.5. Свойства непрерывности. Теперь, следуя Лёвнеру, исследуем класс S'' и покажем, что функции (6.9) могут быть получены из функции $w = z$ с помощью ряда последовательных бесконечно малых преобразований.

Пусть γ — к. а. разрез, заданный уравнением $w = \alpha(t)$

$(0 \leqslant t \leqslant t_0)$, где $\alpha(t) \neq 0$, $|\alpha(t)| < 1$ $(0 \leqslant t < t_0)$ и $|\alpha(t_0)| = 1$. Обозначим через $\gamma_{t't''}$ дугу на γ, соответствующую отрезку $t' \leqslant t \leqslant t''$, и через γ_t — дугу γ_{tt_0}. Пусть $G(t)$ — область, полученная из круга $|w| < 1$ удалением дуги γ_t. При возрастании t от 0 до t_0 область $G(t)$ расширяется от $G = G(0)$ до круга $|w| < 1$. Обозначим через

$$w = g_t(z) = \beta(t)(z + a_2(t)z^2 + \ldots) \quad (\beta(t) > 0)$$

функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на $G(t)$, и постараемся показать, что $g_t(z)$ при возрастании t непрерывно изменяется от $g_0(z) = f(z)$ до $g_{t_0}(z) = z$. Сначала будет доказана

Лемма 6.8. *Если функция $w = g_t(z)$ определена, как выше, то обратная функция $z = g_t^{-1}(w)$ непрерывна в точке $w = \alpha(t)$. Поэтому z стремится к некоторой точке $\lambda(t)$, $|\lambda(t)| = 1$, когда $w = g_t(z)$ стремится любым образом к $\alpha(t)$, оставаясь в $G(t)$.*

Выберем δ столь малым, что при $0 < R < \delta$ окружность $|w - \alpha(t)| = R$ пересекает γ_t лишь в одной точке. Такой выбор возможен, так как γ_t имеет непрерывно изменяющуюся касательную в точке $\alpha(t)$. Тогда при $0 < R < \delta$ окружность $|w - \alpha(t)| = R$ лежит в $G(t)$, за исключением единственной точки. Образом этой окружности является дуга c_R, все точки которой, за исключением концов, лежат в круге $|z| < 1$. По лемме 6.1, мы можем выбрать такую последовательность $R_n \to 0$, что $l(R_n) \to 0$, где $l(R_n)$ — длина c_{R_n}. Если $R_n < |\alpha(t)|$, то круг $|w - \alpha(t)| < R_n$, разрезанный вдоль дуги γ_t, соответствует одной из областей, на которые c_{R_n} разбивает круг $|z| < 1$, и именно области Δ_n, не содержащей $z = 0$. По лемме 6.2, диаметр области Δ_n не превосходит $l(R_n)$ и потому стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, Δ_n стягивается при $n \to \infty$ к единственной точке $\lambda(t)$, так как $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$ при $R_n < R_{n-1}$.

Таким образом, n можно выбрать столь большим, что область Δ_n будет содержаться в круге $|z - \lambda(t)| < \varepsilon$. Тогда при $|w - \alpha(t)| < R_n$ и $w = g_t(z)$ будем иметь $|z - \lambda(t)| < \varepsilon$. Лемма 6.8 доказана.

6.5.1. Положим теперь

$$h(z, t', t'') = g_{t''}^{-1}[g_{t'}(z)] \quad (0 \leqslant t' < t'' \leqslant t_0).$$

Будем изучать поведение $h(z, t', t'')$ при $t'' - t' \to 0$.

Заметим, что функция $w = g_{t'}(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на $G(t')$, т. е. на круг $|w| < 1$, разрезанный вдоль $\gamma_{t'}$. Вместе с тем функция $\zeta = g_{t''}^{-1}(w)$ отображает $G(t'')$ на круг $|\zeta| < 1$, и потому $G(t')$ соответствует кругу $|\zeta| < 1$, из которого удален образ кривой $\gamma_{t't''}$ при отображении $\zeta = g_{t''}^{-1}(w)$. Действительно, все точки кривой $\gamma_{t't''}$, за исключением конца $\alpha(t'')$, расположены в $G(t'')$, но не в $G(t')$.

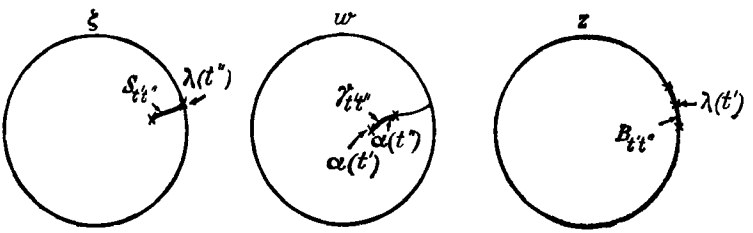

Рис. 8. $g_{t''}(\zeta) = w = g_{t'}(z)$; $\zeta = h(z, t', t'')$.

По лемме 6.8, функция $\zeta = g_{t''}^{-1}(w)$ непрерывна в точке $\alpha(t'')$ и, значит, всюду на $\gamma_{t't''}$ и отображает $\gamma_{t't''}$ на жорданову дугу $S_{t't''}$, расположенную в круге $|\zeta| \leqslant 1$.

Таким образом, функция $\zeta = h(z, t', t'')$ отображает круг $|z| < 1$ на круг $|\zeta| < 1$, разрезанный вдоль $S_{t't''}$. Обозначим через $B_{t't''}$ множество граничных точек окружности $|z| = 1$, соответствующее $S_{t't''}$ при этом преобразовании. Другие точки окружности $|z| = 1$ соответствуют только точкам окружности $|\zeta| = 1$. Заметим также, что $z = \lambda(t')$ принадлежит $B_{t't''}$ и соответствует началу разреза $S_{t't''}$ и что другой конец разреза $S_{t't''}$, расположенный на окружности $|\zeta| = 1$, есть $\zeta = \lambda(t'')$.

Лемма 6.9. *Если $t'' - t' \to 0$, в то время как $t = t'$ или $t = t''$ фиксировано, то $S_{t't''}$ и $B_{t't''}$ стягиваются к точке $\lambda(t)$ в соответствующих плоскостях. Кроме того, $\lambda(t)$ — непрерывная функция.*

Предположим сначала, что $t'' \to t'$, а t' фиксировано. Тогда дуга $\gamma_{t't''}$ стягивается к неподвижной точке $\alpha(t')$ и потому в конце концов оказывается лежащей в круге с центром $\alpha(t')$ и радиусом δ. Если число ε достаточно мало, то, согласно лемме 6.8, можно выбрать такое δ, зависящее от ε, что $|z - \lambda(t')| < \varepsilon$ при $w = g_{t'}(z)$ и $|w - \alpha(t')| < \delta$. Таким образом, если диаметр $\gamma_{t't''}$ меньше δ, то диаметр $B_{t't''}$ меньше ε. Поэтому при $t'' \to t'$ диаметр $B_{t't''}$ стремится к нулю, и, по лемме 6.4, стремится к нулю диаметр $S_{t't''}$.

Подобным образом, если $t' \to t''$, а t'' фиксировано, дуга $\gamma_{t't''}$ стягивается к точке $\alpha(t'')$. Из непрерывности функции $g_{t''}^{-1}(w)$ в точке $w = \alpha(t'')$ следует, что множество $S_{t't''}$, соответствующее $\gamma_{t't''}$ при отображении $\zeta = g_{t''}^{-1}(w)$, стягивается к точке $g_{t''}^{-1}[\alpha(t'')] = \lambda(t'')$, и потому диаметр $S_{t't''}$ стремится к нулю. Поэтому диаметр $B_{t't''}$ стремится к нулю по лемме 6.4.

Из леммы 6.6 следует теперь, что в любом случае

$$h(z, t', t'') \to z \tag{6.10}$$

равномерно в круге $|z| < 1$, когда $t' - t'' \to 0$ любым образом. Поэтому в конце концов окажется $|z - \zeta| < \varepsilon$, если z принадлежит $B_{t't''}$, а ζ—соответствующая точка $S_{t't''}$.

Кроме того, $S_{t't''}$ всегда содержит $\lambda(t'')$, а $B_{t't''}$ всегда содержит $\lambda(t')$. Полагая $z = \lambda(t')$, выберем t'' столь близко к t', чтобы диаметр $S_{t't''}$ оказался меньше ε. Тогда $|\zeta - \lambda(t'')| < \varepsilon$ и $|\zeta - \lambda(t')| < \varepsilon$, и потому

$$|\lambda(t'') - \lambda(t')| < 2\varepsilon.$$

Аналогично, если t'' фиксировано, выберем $\zeta = \lambda(t'')$ и t' настолько близко к t'', чтобы диаметр $B_{t't''}$ был меньше ε. Тогда $|\zeta - z| < \varepsilon$ и $|z - \lambda(t')| < \varepsilon$, так что $|\lambda(t'') - \lambda(t')| < 2\varepsilon$. Поэтому в любом случае $\lambda(t'') - \lambda(t') \to 0$, и если $t = t'$ или t'' и t фиксировано, то $\lambda(t')$ и $\lambda(t'')$ стремятся к $\lambda(t)$. Значит, $\lambda(t)$ — непрерывная функция. Множества $B_{t't''}$, $S_{t't''}$ стремятся к $\lambda(t)$, если $t'' - t' \to 0$, а одно из чисел t'', t' остается неподвижным, так как диаметры обоих этих множеств стремятся к нулю и эти множества содержат $\lambda(t'')$, $\lambda(t')$ соответственно. Лемма 6.9 доказана.

6.6. Дифференциальное уравнение. Заметим, что при $0 \leqslant t' < t'' \leqslant t_0$ функция

$$h(z, t', t'') = \frac{\beta(t')}{\beta(t'')} z + \ldots$$

удовлетворяет в круге $|z| < 1$ условиям леммы Шварца. Таким образом, $\beta(t)$ — строго возрастающая функция t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_0$. На основании (6.10) заключаем, что

$$\frac{\beta(t')}{\beta(t'')} \to 1 \quad (t'' - t' \to 0),$$

если t' или t'' остается неподвижной. Поэтому функция $\beta(t)$ непрерывна. Значит, $\tau = \log[\beta(t)/\beta(0)]$ — непрерывная строго возрастающая функция от t при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, и можно τ взять в качестве параметра t, который до сих пор не был определен. В дальнейшем мы так и сделаем. После этой нормировки

$$g_t(z) = \beta e^t (z + a_2(t) z^2 + \ldots) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0), \quad (6.11)$$

где $\beta = \beta(0) = f'(0)$, $t_0 = \log(1/\beta)$. Кроме того,

$$h(z, t', t'') = e^{t'-t''} z + \ldots.$$

Теперь докажем следующую лемму:

Лемма 6.10. *Пусть при нормировке* (6.11) $t'' - t' \to 0$, *а* $t = t'$ *или* t'' *остается неподвижным в промежутке* $0 \leqslant t' < t'' \leqslant \log(1/\beta)$. *Тогда равномерно при* $|z| \leqslant r$, *где* $0 < r < 1$,

$$\frac{h(z, t', t'') - z}{t'' - t'} \to -z \frac{1 + \varkappa(t) z}{1 - \varkappa(t) z},$$

где $\varkappa(t) = \lambda(t)^{-1}$.

Действительно, леммы 6.6 и 6.9 показывают, что при $|z| \leqslant r < 1$

$$h(z, t', t'') - z \sim -(1 - e^{t'-t''}) z \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z},$$

когда $t'' - t' \to 0$, где $e^{i\varphi}$ — точка $B_{t't''}$, так что $e^{i\varphi} \to \lambda(t)$. Отсюда и следует лемма 6.10.

Теперь мы можем частично доказать нашу основную теорему.

Теорема 6.2. *Если* $f(z, t)=g_t^{-1}[f(z)]$ $(0\leqslant t\leqslant t_0=\log(1/\beta))$, *то* $f(z, t)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-f\frac{1+\varkappa(t)f}{1-\varkappa(t)f}$$

с начальным условием $f(z, 0)=z$. *Функции* $\beta^{-1}f(z, t_0)$ *образуют плотный подкласс класса* S.

Функция $w=f(z)$ отображает круг $|z|<1$ на круг $|w|<1$, разрезанный вдоль γ. Вместе с тем функция $\zeta=g_t^{-1}(w)$ отображает круг $|w|<1$, разрезанный вдоль меньшего множества γ_t, на круг $|\zeta|<1$. Поэтому функция $\zeta=f(z, t)$ отображает круг $|z|<1$ взаимно однозначно и конформно на подмножество круга $|\zeta|<1$ и является однолистной функцией при

$$0\leqslant t\leqslant t_0=\log(1/\beta).$$

Кроме того, в окрестности $z=0$

$$w=f(z)=\beta z+\ldots=g_t(\zeta)=\beta e^{t}\zeta+\ldots.$$

Поэтому $\zeta=e^{-t}z+\ldots$ и, значит, $e^tf(z, t)\in S$. В частности,

$$\beta^{-1}f(z, t_0)=\beta^{-1}f(z)\in S.$$

По лемме 6.7, этот класс функций плотен в S.

Теперь в лемме 6.10 вместо z будем писать $f(z, t')$. Это допустимо ввиду того, что $|f(z, t')|<1$ при $|z|<1$. Кроме того,

$$h[f(z, t'), t', t'']=g_{t''}^{-1}\{g_{t'}(g_{t'}^{-1}[f(z)])\}=g_{t''}^{-1}[f(z)]=f(z, t'').$$

Поэтому лемма 6.10 позволяет заключить, что

$$\frac{f(z, t'')-f(z, t')}{t''-t'}\sim -f(z, t')\frac{1+\varkappa(t)f(z, t')}{1-\varkappa(t)f(z, t')},\quad (6.12)$$

если $t''-t'\to 0$, а t' или t'' остается неподвижной. Если фиксировано $t=t'$, то мы получаем требуемый результат относительно правой производной. Если фиксировано t'', то получается также требуемый результат для левой производной. Действительно, по лемме 6.9 и ввиду того, что $\varkappa(t)=1/\lambda(t)$,

$$\varkappa(t')\to\varkappa(t'')\quad (t'\to t'')$$

при фиксированном t''. Согласно (6.10),

$$h(z,\ t',\ t'') - z \to 0 \quad (t' \to t'')$$

равномерно в круге $|z| < 1$. Заменяя z на $f(z,\ t')$, заключаем, что

$$f(z,\ t'') - f(z,\ t') \to 0 \quad (t' \to t'')$$

равномерно в круге $|z| < 1$, так что ввиду (6.12) при фиксированном $t = t''$

$$\frac{f(z\ t) - f(z,\ t')}{t - t'} \to -f(z,\ t)\,\frac{1 + \varkappa(t) f(z,\ t)}{1 - \varkappa(t) f(z,\ t)},$$

когда $t' \to t$ снизу. Теорема 6.2 доказана.

6.7. Окончание доказательства теоремы 6.1. Чтобы завершить доказательство теоремы 6.1, остается убедиться в том, что, какова бы ни была непрерывная функция $\varkappa(t)$, удовлетворяющая условию $|\varkappa(t)| = 1$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$, существует единственное решение $w = f(z,\ t)$ дифференциального уравнения (6.1), удовлетворяющее условию $f(z,\ 0) = z$, причем $e^t f(z,\ t) \in S$. Доказательство этого — обычная задача теории дифференциальных уравнений. Однако для полноты мы проведем его.

Удобно положить

$$W = U + iV = \log\left(\frac{1}{w}\right).$$

Тогда уравнение (6.1) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1 + \varkappa(t) e^{-W}}{1 - \varkappa(t) e^{-W}} = \varphi(t,\ W). \tag{6.13}$$

Заметим, что $\Re\varphi(t,\ W) > 0$ при $\Re W > 0$. Кроме того, при $U > \delta > 0$

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial W}\right| = \frac{|2e^{-W}|}{|1 - \varkappa(t) e^{-W}|^2} \leqslant \frac{2}{(1 - e^{-\delta})^2} = K$$

и

$$|\varphi(t,\ W)| \leqslant \frac{2}{1 - e^{-\delta}} < K. \tag{6.14}$$

Интегрируя вдоль прямолинейного отрезка от W_1 до W_2, получим

$$\varphi(t, W_2)-\varphi(t, W_1)| = \int\limits_{W_1}^{W_2} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial W}\right| |dW| \leqslant K|W_2-W_1|, \quad (6.15)$$

если $\Re W_1 > \delta$, $\Re W_2 > \delta$. Поэтому функция $\varphi(t, W)$ удовлетворяет условию Липшица по W в полуплоскости $U > \delta$ равномерно относительно t.

Определим теперь последовательность функций $F_n(t, \omega)$ $(n \geqslant 0)$ следующим образом. Пусть $\Re\omega > \delta > 0$, и пусть

$$\left.\begin{aligned} F_0(t, \omega) &\equiv \omega, \\ F_n(t, \omega) &= \omega + \int\limits_0^t \varphi[\tau, F_{n-1}(\tau, \omega)]\, d\tau \\ &(0 \leqslant t \leqslant t_0, \ n \geqslant 1). \end{aligned}\right\} \quad (6.16)$$

Заметим сначала, что функция $\Re F_n(t, \omega)$ возрастает вместе с t при фиксированном ω и потому остается бóльшей δ. Действительно, если это справедливо для n, то

$$\Re\varphi[\tau, F_n(\tau, \omega)] > 0$$

и утверждение остается верным при $n+1$.

Далее, имеем

$$|F_n(t, \omega) - F_{n-1}(t, \omega)| \leqslant \frac{K^n t^n}{n!} \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_0, \ n \geqslant 1).$$

Действительно, при $n = 1$ из (6.14) получим

$$F_1(t, \omega) - F_0(t, \omega) = \left|\int\limits_0^t \varphi(\tau, \omega)\, d\tau\right| \leqslant \int\limits_0^t K\, d\tau = Kt.$$

Если наш результат верен для n, то на основании (6.15)

$$|F_{n+1}(t, \omega) - F_n(t, \omega)| =$$

$$= \left|\int\limits_0^t \{\varphi[\tau, F_n(\tau, \omega)] - \varphi[\tau, F_{n-1}(\tau, \omega)]\}\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\int\limits_0^t |F_n(\tau, \omega) - F_{n-1}(\tau, \omega)|\, d\tau \leqslant K\int\limits_0^t \frac{K^n \tau^n}{n!}\, d\tau = \frac{K^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Таким образом, результат верен и для $n+1$.

Значит, последовательность $F_n(t, \omega)$ равномерно сходится при $\Re\omega > \delta$ и $0 \leqslant t \leqslant t_0$ к предельной функции $F(t, \omega)$. Переходя к пределу в (6.16), мы видим, что

$$F(t, \omega) = \omega + \int_0 \varphi[\tau, F(\tau, \omega)]\, d\tau.$$

Поэтому функция $W(t) = F(t, \omega)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.13) и начальному условию $W(0) = \omega$.

Заметим теперь, что функции $F_n(t, \omega)$ аналитичны по ω при $\Re\omega > 0$ и фиксированном t и непрерывны по совокупности переменных t, ω. Значит, этими свойствами обладает и их равномерный предел $F(t, \omega)$.

Допустим теперь, что $W(t)$ — какое-нибудь решение уравнения (6.13), удовлетворяющее условию $\Re W(0) > \delta$ и, значит, $\Re W(t) > \delta$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$. Пусть, далее,

$$W(t_1) = F(t_1, \omega)$$

для некоторой пары (t_1, ω), где $0 \leqslant t_1 \leqslant t_0$, $\Re\omega > \delta$. Тогда $W(t) \equiv F(t, \omega)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$. Действительно, пусть

$$M = \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} |W(t) - F(t, \omega)|.$$

Тогда (6.13) дает при $0 \leqslant t \leqslant t_0$

$$W(t) - W(t_1) = \int_{t_1}^{t} \varphi[\tau, W(\tau)]\, d\tau,$$

$$F(t, \omega) - F(t_1, \omega) = \int_{t_1}^{t} \varphi[\tau, F(\tau, \omega)]\, d\tau,$$

и потому

$$|F(t, \omega) - W(t)| = \left| \int_{t_1}^{t} \{\varphi[\tau, W(\tau)] - \varphi[\tau, F(t, \omega)]\}\, d\tau \right|. \quad (6.17)$$

По индукции заключаем, что

$$|F(t, \omega) - W(t)| \leqslant \frac{MK^n (t - t_1)^n}{n!}$$

при любом натуральном n. Действительно, при $n=0$ это верно по условию. Если это верно для n, то ввиду (6.15) и (6.17)

$$|F(t,\omega)-W(t)|\leqslant K\left|\int_{t_1}^{t} MK^n(\tau-t_1)^n\,d\tau\right|=$$

$$=\frac{MK^{n+1}|t-t_1|^{n+1}}{(n+1)!},$$

что и требовалось. Поскольку n произвольно, $W(t)\equiv F(t,\omega)$.

Полагая $t_1=0$, мы видим, что $F(t,\omega)$ — единственное решение уравнения (6.13), удовлетворяющее условию $F(0,\omega)=\omega$. Мы видим также, что $F(t,\omega)$ — однолистная функция от ω при фиксированном положительном t и $\Re\omega>0$. В самом деле, если

$$F(t,\omega_1)=F(t,\omega_2),$$

то приведенная выше теорема единственности показывает, что $F(0,\omega_1)=F(0,\omega_2)$, т. е. $\omega_1=\omega_2$. Если $\omega_2-\omega_1=2\pi i$, мы легко усматриваем, что

$$F(t,\omega_2)-F(t,\omega_1)=2\pi i.$$

Поэтому функция $f(z,t)$, заданная соотношением

$$-\log f(z,t)=F(t,-\log(z))\qquad(0\leqslant t\leqslant t_0),$$

при фиксированном t является аналитической однозначной функцией от z в области $0<|z|<1$ и представляет собой единственное решение дифференциального уравнения (6.1), удовлетворяющее условию $f(z,0)=z$. Кроме того, $|f(z,t)|<1$ при $|z|<1$, и потому $f(z,t)$ регулярна и при $z=0$ и, очевидно, равна там нулю. Применяя (6.1) к $g(t)=f(z,t)/z$, получим

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t}=-g\,\frac{1+zx(t)\,g}{1-zx(t)\,g},$$

и, полагая $z=0$, заключаем, что

$$\frac{\partial g}{\partial t}=-g,\quad g(t)=e^{-t}g(0)=e^{-t}.$$

Таким образом, $f(z,t)=ze^{-t}+\ldots$ в окрестности точки $z=0$, и потому $e^t f(z,t)\in S$. Теорема 6.1 доказана.

6.8. Третий коэффициент. Перейдем теперь к изложению некоторых применений теоремы 6.1. Пусть S обозначает, как обычно, класс функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots,$$

однолистных в круге $|z|<1$. В этом пункте будет доказана

Теорема 6.3. *Если* $f(z)\in S$, *то* $|a_3|\leqslant 3$[1]. По теореме 6.1 можно ограничиться рассмотрением функций $e^{t_0}f(z, t_0)$, о которых в ней шла речь, так как они образуют плотный подкласс в классе S. Положим $\beta=e^{-t}$,

$$f(z, t_0)=\beta\left(z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\right)$$

и приступим к выводу формулы Лёвнера, выражающей a_n через $\varkappa(t)$. Оказывается удобным работать с функцией $g_t(\zeta)$, определенной соотношением

$$g_t[f(z, t)]=f(z, t_0)\qquad(0\leqslant t\leqslant t_0).$$

Положим $\zeta=f(z, t)$ и продифференцируем последнее соотношение по t. Получим

$$\frac{\partial g}{\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}=0.$$

Подставляя в (6.1), имеем

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial\zeta}\zeta\frac{1+\varkappa\zeta}{1-\varkappa\zeta}. \tag{6.18}$$

В окрестности точки $z=0$ имеем $f(z, t)=e^{-t}(z+\ldots)$, и потому

$$g_t(\zeta)=\beta e^t\left[\zeta+\sum_{n=2}^{\infty}c_n(t)\zeta^n\right]$$

в окрестности $\zeta=0$. Подставляя в (6.18), получаем при $n\geqslant 2$

$$c_n'(t)+c_n(t)=nc_n(t)+2\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\,c_{n-r}(t)[\varkappa(t)]^r,$$

---

[1]) Значительно более детальное рассмотрение показывает, что $|a_3|<3$, если $f(z)$ не является функцией вида $z(1-ze^{i\theta})^{-2}$. Подобное замечание можно сделать и к теореме 6.4. См. Лёвнер [2].

т. е.

$$c_n'(t) = (n-1)\,c_n(t) + 2\sum_{r=1}^{n-1} r c_r(t)\,[\varkappa(t)]^{n-r} \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_0).$$

Выражая коэффициенты через $g_t(\zeta)$ с помощью контурных интегралов, можно обосновать почленное дифференцирование. Кроме того, при $t = 0$

$$f(z, 0) \equiv z, \quad g_0(z) \equiv f(z, t_0), \quad c_n(0) = a_n.$$

Когда $t = t_0$, $g_t(z) \equiv z$, и потому $c_n(t_0) = 0$ $(n \geqslant 2)$. Наконец, $c_1(t) \equiv 1$. Таким образом, мы получаем граничные условия

$$c_1(t) \equiv 1, \quad c_n(0) = a_n, \quad c_n(t_0) = 0 \qquad (n \geqslant 2).$$

Из этой системы можно последовательно определить коэффициенты. Мы получаем

$$c_n(t) =$$

$$= -2e^{(n-1)t}\int_t^{t_0}\left\{\sum_{r=1}^{n-1} r c_r(\tau)\,[\varkappa(\tau)]^{n-r}\right\} e^{-(n-1)\tau}\,d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0).$$

Отсюда

$$c_2(t) = -2e^t\int_t^{t_0} \varkappa(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau.$$

Кроме того,

$$c_3(t) = -2e^{2t}\left\{\int_t^{t_0}\varkappa(\tau)^2\,e^{-2\tau}\,d\tau + 2\int_t^{t_0}\varkappa(\tau)\,c_2(\tau)\,e^{-2\tau}\,d\tau\right\} =$$

$$= -2e^{2t}\left\{\int_t^{t_0}[\varkappa(\tau)]^2\,e^{-2\tau}\,d\tau - 2\left(\int_t^{t_0}\varkappa(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau\right)^2\right\},$$

так как

$$\frac{d}{dt}\left(\int_t^{t_0}\varkappa(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau\right)^2 = -2\varkappa(t)\,e^{-t}\int_t^{t_0}\varkappa(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau = \varkappa(t)\,c_2(t)\,e^{-2t}.$$

Отсюда сразу получаем неравенство $|a_2| = |c_2(0)| \leqslant 2$. При разыскании верхней границы для $|a_3| = |c_3(0)|$ мы

можем считать, не умаляя общности, что a_3 вещественно и положительно, так как этого можно добиться, если рассматривать $e^{-i\varphi}f(ze^{i\varphi})$ вместо $f(z)$. Положим $\varkappa(t)=e^{i\theta(t)}$ и рассмотрим

$$\Re a_3=-2\int_0^{t_0}[2\cos^2\theta(t)-1]\,e^{-2t}\,dt+$$

$$+4\left(\int_0^{t_0}\cos\theta(t)\,e^{-t}\,dt\right)^2-4\left(\int_0^{t_0}\sin\theta(t)\,e^{-t}\,dt\right)^2.$$

Чтобы получить верхнюю границу для $\Re a_3$, опустим третий член справа. Первый член равен

$$-4\int_0^{t}e^{-2t}\cos^2\theta(t)\,dt+1-e^{-2t_0},$$

а второй член, в силу неравенства Шварца, не превосходит

$$4\int_0^{t_0}e^{-t}\,dt\int_0^{t_0}e^{-t}\cos^2\theta(t)\,dt<4\int_0^{t_0}e^{-t}\cos^2\theta(t)\,dt.$$

Таким образом, мы получаем

$$|a_3|=\Re a_3\leqslant 1+4\int_0^{t_0}\cos^2\theta(t)\,(e^{-t}-e^{-2t})\,dt\leqslant$$

$$\leqslant 1+4\int_0^{\infty}(e^{-t}-e^{-2t})\,dt=3.$$

Теорема 6.3 доказана.

6.9. Коэффициенты обратных функций. Предположим снова, что $w=f(z)\in S$, и пусть обратная функция

$$z=\varphi(w)=f^{-1}(w)$$

имеет в окрестности точки $w=0$ разложение

$$\varphi(w)=w+\sum_{m=2}^{\infty}b_m w^m.$$

С помощью теоремы 6.1 Лёвнер получил точные оценки для всех коэффициентов b_m. Его результат формулируется следующим образом:

Теорема 6.4. *Если*

$$w = f(z) \in S \quad \text{и} \quad z = f^{-1}(w) = w + \sum_{m=2}^{\infty} b_m w^m,$$

то

$$|b_m| \leqslant \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)\, 2^m}{(m+1)!} \qquad (m \geqslant 2).$$

Равенство имеет место, если

$$f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, \quad f^{-1}(w) = \left[1 - 2w - (1-4w)^{1/2}\right]/(2w).$$

Мы снова можем ограничиться рассмотрением функций $e^{t_0} f(z, t_0)$ теоремы 6.1. Действительно, этими функциями можно приблизить любую $f(z) \in S$, так что их коэффициенты будут стремиться к соответствующим коэффициентам функции $f(z)$, а коэффициенты обратной функции $f^{-1}(w)$, являющиеся полиномами от коэффициентов $f(z)$, тоже могут быть приближены.

Пусть $f(z, t)$ — функция из теоремы 6.1, и пусть $z = \varphi_t(w)$ — обратная к ней функция, так что

$$\varphi_t[f(z, t)] = z. \tag{6.19}$$

Пусть

$$\varphi_t(w) = e^t \left[w + \sum_{m=2}^{\infty} b_m(t) w^m \right] \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_0) \tag{6.20}$$

и $\beta = e^{-t_0}$. Тогда функция

$$\varphi(w) = \varphi_{t_0}(\beta w) = w + \sum_{m=2}^{\infty} b_m w^m$$

служит обратной для функции $\beta^{-1} f(z, t) \in S$, и потому нам нужно доказать наши неравенства лишь для коэффициентов b_m этой функции $\varphi(w)$, где

$$b_m = \beta^{m-1} b_m(t_0).$$

Заметим, что уравнение (6.1) и равенство (6.19) снова приводят к уравнению, аналогичному (6.18), а именно

$$\frac{\partial \varphi_t(w)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_t(w)}{\partial w}\, w\, \frac{1+\varkappa(t)\,w}{1-\varkappa(t)\,w}.$$

Используя (6.20), мы, как и в предыдущем разделе, получим соотношение

$$b_m'(t) + b_m(t) = m b_m(t) + 2\sum_{r=1}^{m-1} r b_r(t)\,[\varkappa(t)]^{m-r}$$

$$(0 \leqslant t \leqslant t_0,\ m \geqslant 2)$$

с граничными условиями

$$b_1(t) \equiv 1\ \ (0 \leqslant t \leqslant t_0),\ \ b_m(0) = 0,\ \ b_m(t_0) = \beta^{-m+1} b_m\ \ (m \geqslant 2).$$

Это приводит к индуктивному соотношению

$$b_m(t) = 2e^{(m-1)\,t} \int_0^t \left\{ \sum_{r=1}^{m-1} r b_r(\tau)\,[\varkappa(\tau)]^{m-r} \right\} e^{-(m-1)\,\tau} d\tau \quad (m \geqslant 1).$$

Теперь ясно, что $|b_m(t_0)|$ достигает свое максимально большое значение при любом фиксированном $t_0 > 0$ и $m > 1$, если $\varkappa(t) \equiv 1$. В этом случае все $b_m(t)$ вещественны и положительны. Очевидно также, что соответствующее значение $b_m = e^{-(m-1)\,t_0} b_m(t_0)$ возрастает с ростом t_0, и потому мы получаем верхнюю границу при переменном t_0 в пределе при $t_0 \to \infty$.

Положим теперь в дифференциальном уравнении (6.1) $\varkappa(t) \equiv 1$; интегрируя, получим

$$\frac{f(z, t_0)}{1 + [f(z, t_0)]^2} = \frac{bz}{(1+z)^2},$$

т. е.

$$\frac{w}{(1+w)^2} = \frac{\beta \varphi_{t_0}(w)}{[1+\varphi_{t_0}(w)]^2}.$$

Полагая $\varphi(w) = \varphi_{t_0}(\beta w)$, мы заключаем, что

$$\frac{\varphi(w)}{[1+\varphi(w)]^2} = \frac{w}{(1+\beta w)^2}.$$

Таким образом, $\beta \to 0$ ($t_0 \to \infty$) и $\varphi(w) \to \psi(w)$, где

$$\frac{\psi(w)}{[1+\psi(w)]^2} = w,$$

т. е.

$$\psi(w) = \frac{1-2w-\sqrt{1-4w}}{2w} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m w^m$$

и

$$b_m = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m-1)\,2^m}{(m+1)!},$$

что и требовалось. Обратная функция $w=\psi^{-1}(z)=z(1+z)^{-2}$ принадлежит S, и потому $\psi(w)$ имеет наибольшие в нашем классе коэффициенты. Теорема 6.4 доказана.

6.10. Аргумент[1]) $f(z)/z$. В то время как элементарные методы главы 1 достаточны для получения оценок величин $|f(z)|$, $|f'(z)|$ и т. д. для $f(z)\in S$, оценки для $\arg(f(z)/z)$, $\arg f'(z)$ и т. д. лежат глубже. Здесь функция $z(1-z)^{-2}$ уже не является экстремальной. Следуя Грунскому [1], докажем такую теорему:

Теорема 6.5. *Предположим, что $f(z)\in S$. Тогда*

$$-\log\frac{1+|z|}{1-|z|} \leqslant \arg\frac{f(z)}{z} \leqslant \log\frac{1+|z|}{1-|z|}. \qquad (6.21)$$

Оба эти неравенства точны при любом фиксированном z из круга $|z|<1$.

Снова достаточно рассматривать функции $e^{t_0}f(z, t_0)$ из теоремы 6.1 или просто $f(z, t_0)$, так как $\arg e^{t_0}=0$. Положим для краткости $f=f(z, t)$, $\varkappa=\varkappa(t)$. Тогда на основании (6.1) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\log f = -\frac{1+\varkappa f}{1-\varkappa f} = \frac{-(1+\varkappa f)(1-\bar{\varkappa}\bar{f})}{|1-\varkappa f|^2}.$$

---

[1]) Если $\varphi(z)\neq 0$ при $|z|<1$ и $\varphi(0)>0$, то, по определению, $\arg\varphi(z)$ есть мнимая часть величины $\log\varphi(0)+\int_0^z [\varphi'(\zeta)/\varphi(\zeta)]\,d\zeta$, где интеграл берется вдоль прямолинейного сегмента.

Вычисляя вещественные и мнимые части, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\log|f| = -\frac{1-|f|^2}{|1-\varkappa f|^2}, \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\arg f = -\frac{2\Im(\varkappa f)}{|1-\varkappa f|^2}. \tag{6.23}$$

Уравнение (6.22) показывает, что $|f|$ строго убывает с возрастанием t. Кроме того, на основании (6.22) и (6.23) получим

$$d_t \arg f \leqslant \frac{2|f|}{1-|f|^2}\, d_t \log\frac{1}{|f|}. \tag{6.24}$$

Проинтегрируем от $t=0$ до t_0 и заметим, что $f(z, 0)=z$. Мы видим, что

$$\arg\frac{f(z, t_0)}{z} \leqslant \log\frac{(1+|z|)(1-|f(z, t_0)|)}{(1-|z|)(1+|f(z, t_0)|)} \leqslant \log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Это дает оценку сверху в (6.21). Оценка снизу получается аналогично. Уместно заметить, что методы главы 1 привели только к неравенству

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Теперь покажем, что оценку сверху, данную в (6.21), нельзя улучшить при фиксированном значении $z=z_0$, $|z_0|<1$. Для этого мы должны найти функцию $\varkappa(t)$, определенную в заданном промежутке $0\leqslant t\leqslant t_0$, так, чтобы решение $f=f(z_0, t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{df}{dt} = -f\frac{1+\varkappa f}{1-\varkappa f} \qquad (0\leqslant t\leqslant t_0)$$

с начальным условием $f(z_0, 0)=z_0$ удовлетворяло условию

$$\Im(\varkappa f) = -|f|.$$

Действительно, в этом случае в (6.24) будем иметь равенство. Кроме того, (6.22) в этом случае дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\log|f| = -\frac{1-|f|^2}{1+|f|^2},$$

так что для $f=f(z_0, t)$ выполнено соотношение

$$\frac{|f|}{1-|f|^2} = e^{-t}\frac{|z_0|}{1-|z_0|^2}.$$

Определим из этого уравнения $|f| = |f(z_0, t)|$, затем $\arg f(z_0, t)$ из соотношения

$$d_t \arg f = -\frac{2d_t|f|}{1-|f|^2},$$

так что

$$\arg \frac{f(z_0, t)}{z_0} = \log\left(\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\right) - \log\frac{1+|f|}{1-|f|},$$

и, наконец, $\varkappa(t)$:

$$\varkappa(t) = \frac{-t|f(z_0, t)|}{f(z_0, t)}.$$

Если так определить $\varkappa(t)$ и $f(z_0, t)$, то (6.22) и (6.23) удовлетворяются и $\arg[f(z_0, t)/z_0]$ можно выбрать сколь угодно близко к $\log[(1+|z_0|)/(1-|z_0|)]$, поскольку $f(z_0, t) \to 0$ $(t \to \infty)$. Поэтому решение $e^{t_0} f(z_0, t_0)$ уравнения (6.1), соответствующее этому значению $\varkappa(t)$, принадлежит S и приближенно реализует верхнюю оценку (6.21) с произвольной степенью точности, так что эта оценка точна. Рассматривая $\overline{f(z_0, t)}$ вместо $f(z_0, t)$, можно убедиться в том, что и оценка снизу точна. Теорема 6.5 доказана.

6.11. Радиусы выпуклости и звездообразности. Функция $f(z)$ отображает окружность $|z| = r$ на выпуклую кривую $\gamma(r)$, если касательная к $\gamma(r)$ в точке $f(re^{i\theta})$ непрерывно вращается против часовой стрелки при возрастании t. Это условие равносильно тому, что $\arg[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})]$ возрастает с возрастанием θ, так что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f'(re^{i\theta}) + 1 \geqslant 0 \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

т. е.

$$\Im\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f'(re^{i\theta})\right\} = \Re\left\{re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\} \geqslant -1 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Отсюда

$$\Re\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geqslant -1 \qquad (|z| = r).$$

Неравенство (1.6) главы 1 дает для $f(z) \in S$

$$\Re\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geqslant \frac{r(2r-4)}{1-r^2} \qquad (|z| = r),$$

так что наше условие выполняется, если $2r^2-4r\geqslant r^2-1$, т. е.

$$r^2-4r+1\geqslant 0,\quad 0\leqslant r\leqslant 2-\sqrt{3}.$$

Таким образом, функция $f(z)\in S$ при $0\leqslant r\leqslant 2-\sqrt{3}$ отображает окружность $|z|=r$ на выпуклую кривую. С другой стороны, если $f(z)=z(1-z)^{-2}$, то

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{2z^2+4z}{1-z^2}.$$

Это выражение вещественно и меньше -1, если $-1<r<\sqrt{3}-2$. Таким образом, эта функция не отображает окружность $|z|=r$ на выпуклую кривую при $r>2-\sqrt{3}$. Число $r_c=2-\sqrt{3}$ называется *радиусом выпуклости*[1]).

Аналогично, можно поставить вопрос о наибольшем радиусе r, при котором образ $\gamma(r)$ окружности $|z|=r$ при отображении $f(z)$ всегда ограничивает область, звездную относительно точки $w=0$. Как мы видели в главе 1 [см. (1.14)], для этого необходимо и достаточно следующее условие:

$$\Re\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}\geqslant 0,\quad \text{т. е.}\quad \left|\arg z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}\qquad (|z|=r).$$

Если положить

$$\varphi(z)=\frac{f\left(\dfrac{z_0+z}{1+\bar{z}_0z}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)},$$

то $\varphi(z)\in S$ в том и только в том случае, когда $f(z)\in S$. Применяя к $\varphi(z)$ в точке $z=-z_0$ неравенство (6.21), получаем

$$\left|\arg\left(\frac{z_0f(z_0)}{f'(z_0)}\right)\right|\leqslant\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|},$$

и эта оценка точна, так как неравенство (6.21) является точным.

Таким образом, если *радиусом звездообразности* r_s называть радиус самого широкого из кругов, внутренность

[1]) Гронуолл [1].

которых отображается любой функцией $f(z) \in S$ на область, звездообразную относительно $w = 0$, то [1])

$$\frac{\pi}{2} = \log \frac{1+r_s}{1-r_s}, \quad r_s = \operatorname{th} \frac{\pi}{4} = 0{,}65\ldots.$$

6.12. Аргумент $f'(z)$. В качестве последнего приложения докажем следующий результат Голузина [1]:

Теорема 6.6. *Предположим, что $f(z) \in S$. Тогда справедливы такие точные неравенства:*

$$|\arg f'(z)| \leqslant 4 \arcsin |z| \quad \left(|z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$|\arg f'(z)| \leqslant \pi + \log \frac{|z|^2}{1-|z|^2} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < 1\right)^2).$$

Мы снова можем ограничиться функциями $f(z, t)$ теоремы 6.1. Начнем с уравнения (6.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} f(z, t) = -f \frac{1+\varkappa f}{1-\varkappa f} = f + \frac{2}{\varkappa} - \frac{2}{\varkappa(1-\varkappa f)}.$$

Продифференцируем обе части по z. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} f'(z, t) = f'(z, t)\left[1 - \frac{2}{(1-\varkappa f)^2}\right],$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \log f'(z, t) = 1 - \frac{2}{(1-\varkappa f)^2}.$$

Вычисляя мнимую часть, найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \arg f'(z, t) = \frac{2\Im (1-\varkappa f)^2}{|1-\varkappa f|^4}.$$

Исключим t из последнего соотношения и (6.22). Получим

$$d_t \arg f' = \frac{2\Im (1-\varkappa f)^2}{|1-\varkappa f|^2} \cdot \frac{-d_t |f|}{|f|(1-|f|^2)}$$

при возрастании t.

---

[1]) Грунский [2].

[2]) Точность этого неравенства Голузина была впервые доказана И. Е. Базилевичем [2']. — *Прим. перев.*

Теперь мы видим, что

$$\frac{|\Im(1-\varkappa f)^2|}{|1-\varkappa f|^2} = |\sin[2\arg(1-\varkappa f)]| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} 2|f|\sqrt{1-|f|^2} & \left(|f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ 1 & \left(|f| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \end{cases} \tag{6.25}$$

так как $|\varkappa(t)| = 1$.

Вспоминая, что $d_t|f| < 0$, заключаем, что

$$d_t \arg f' \leqslant \begin{cases} \dfrac{-4\,d_t|f|}{\sqrt{1-|f|^2}} & \left(|f| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \dfrac{-2\,d_t|f|}{|f|(1-|f|^2)} & \left(|f| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

Интегрируя от $t=0$ до t_0, получим при $|z| \leqslant 1/\sqrt{2}$

$$|\arg f'| \leqslant \int\limits_{|f|}^{|z|} \frac{4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant 4 \arcsin|z|,$$

а при $|z| > 1/\sqrt{2}$

$$|\arg f'| \leqslant \int\limits_{|f|}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{|z|} \frac{2\,dx}{x(1-x^2)} \leqslant \pi + \log\left(\frac{|z|^2}{1-|z|^2}\right).$$

Неравенства теоремы 6.6 доказаны. Для того чтобы показать, что они точны, мы должны найти такую функцию $\varkappa(t)$, что для решения $f(z_0, t)$ уравнения (6.1) с начальным значением $f(z_0, 0) = z_0$ в (6.25) имеет место равенство. Получающееся уравнение позволяет нам вычислить $\varkappa f(z_0, t)$ через $|f(z_0, t)|$ и, следовательно, $|f(z_0, t)|$ через t с помощью (6.22), а затем и $\arg f(z_0, t)$ через t с помощью (6.23). Тогда мы можем выбрать такую $\varkappa(t)$, что в (6.25) имеет место равенство. После того как это сделано для $0 \leqslant t \leqslant t_0$, соотношения

(6.22), (6.23) и равенство в (6.25) будут выполняться одновременно, и мы получим

$$\arg f'(z_0, t_0) = \int_{|f(z_0, t_0)|}^{|z_0|} \frac{4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(|z_0| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\arg f'(z_0, t_0) = \int_{|f(z_0, t_0)|}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + \log \frac{|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \quad \left(|z_0| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

если $|f(z_0, t_0)| < 1/\sqrt{2}$, и так при всех больших t_0. Поэтому оценку сверху в теореме 6.6 можно приближенно реализовать с произвольной точностью, и, значит, эта оценка точна.

6.13. Заключение. Предшествующие теоремы дают представление об успехах, достигнутых Лёвнером и его последователями с помощью теоремы 6.1. Долгие годы этот метод оставался единственно пригодным для получения столь глубоких результатов. Недавно были обнаружены еще два метода, позволяющих получать сравнимые результаты. Это вариационный метод Шиффера[1]) и теория модулей Дженкинса, которая упоминалась в конце главы 5. Оба эти метода могут быть использованы для доказательства неравенства $|a_3| \leqslant 3$[2]). Кроме того, оба эти метода приводят к различным результатам, лежащим за пределами этой главы. Так, комбинируя вариационную технику с теоремой 6.1, Гарабедян и Шиффер сумели доказать, что $|a_4| \leqslant 4$[3]). К сожалению, отсутствие места не позволяет нам подробно изложить эти трудные результаты, и читатель должен обратиться к оригинальным статьям.

---

[1]) Возможно, метод Шиффера [1] заслуживает предпочтения.
[2]) Дженкинс [3], Гарабедян и Шиффер [1].
[3]) Гарабедян и Шиффер [2].

ЛИТЕРАТУРА

(Нижеследующий список состоит только из тех работ, которые цитировались в книге.[1])

Альфорс (Ahlfors L.)

[1] Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, *Acta Soc. Sci. fenn.*, series A, 1 (1930), № 9.

[2] Complex Analysis, New York, 1953.

Базилевич И. Е.

[1] О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций, *Мат. сб.*, 28 (70) (1951), 147—164.

[2*] Sur les théoremes de Koebe — Bieberbach, *Мат. сб.*, 1 (43), № 3 (1936).

Беркилл (Burkill J. C.)

[1] The Lebesque Integral, Cambridge, 1951.

Бернацкий (Biernacki M.)

[1] Sur les fonctions multivalentes d'ordre *p. C. R. Acad. Sci., Paris*, **203** (1936), 449—451.

[2] Sur les fonctions en moyenne multivalentes, *Bull. Sci. Math.* (2) **70** (1946), 51—76.

Бибербах (Bieberbach L.)

[1] Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, *S. B. preuss. Akad. Wiss*, 138 (1916), 940—955.

Бор (Bohr H.)

[1] Über einen Satz von Edmund Landau, *Scr. Bibl. Univ. Hierosolym*, 1, № 2 (1923).

Гарабедян и Ройден (Garabedian P. R., Royden H. A. L.)

---

[1]) Названия, отмеченные звездочкой, добавлены переводчиком и редактором перевода. — *Прим. ред.*

[1] The one-quarter theorem for mean univalent functions, *Ann. Math.* (2) 59 (1954), 316—324.

Гарабедян и Шиффер (Garabedian P. R., Schiffer M.)

[1] A coefficient inequality for schlicht functions, Ann. Math. (2), 61 (1955), 116—36.

[2] A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, *J. Rat. Mech. Anal.*, 4 (1955), 427—465.

Голузин Г. М.

[1] О теоремах искажения в теории конформных отображений, *Мат. сб.* (2) 1 (1936), 127—135.

[2] Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, М.—Л., 1952.

[3*] Некоторые вопросы теории однолистных функций, *Труды Матем. ин-та им. Стеклова*, XXVII, 1949.

Гронуолл (Gronwall T. H.)

[1] Sur la déformation dans la représentation conforme, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 162 (1916), 249—252.

Грунский (Grunsky H.)

[1] Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche, *Schr. Inst. angew. Math. Univ. Berl.*, 1 (1932), 95—140.

[2] Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung, *Jber. deutsch. Math. Ver.*, 43 (1933), 1. Abt., 140—143.

Дворецкий (Dvoretzky A.)

[1] Bounds for the coefficients of univalent functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 629—635.

Дженкинс (Jenkins J. A.)

[1] On a problem of Gronwall, *Ann. Math.* (2), 59 (1954), 490—504.

[2] Some uniqueness results in the theory of symmetrization, *Ann. Math.* (2), 61 (1955), 106—115.

[3] On circumferentially mean p-valent functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 79 (1955), 423—428.

Дьедонне (Dieudonné J.)

[1] Sur les fonctions univalentes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 192 (1931), 1148—1150.

Каплан (Kaplan W.)

[1] Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.*, 1 (1953), 169—185.

Картрайт (Cartwright M. L.)
[1] Some inequalities in the theory of functions, Math. Ann., **111** (1935), 98—118.

Кёбе (Koebe P.)
[1] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven, II, *Math. Ann.*, **69** (1910), 1—81.

Ландау (Landau E.)
[1] Zum Koebeschen Verzerrungssatz, *R. C. Circ. mat. Palermo*, **46** (1922), 347—348.

Лёвнер (Löwner K.)
[1] Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden, *Leipzig Ber.*, **69** (1917), 89—106.
[2] Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, I, *Math. Ann.*, **89** (1923), 103—121.

Лелон-Ферран (Lelong-Ferrand J.)
[1] Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée, Paris, 1955.

Литтльвуд (Littlewood J. E.)
[1] On inequalities in the theory of functions, *Proc. Lond. Math.* Soc. (2), **23** (1925), 481—519.
[2] On the coefficients of schlicht functions, *Quart. J. Math.*, 9 (1938), 14—20.
[3] Lectures on the Theory of Functions, Oxford, 1944.

Литтльвуд и Палей (Littlewood J. E., Paley R. E. A. C.)
[1] A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients *J. Lond. Math. Soc.*, **7** (1932), 167—169.

Маркушевич А. И.
[1*] Теория аналитических функций, Гостехиздат, М—Л., 1950.

Монтель (Montel P.)
[1] Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, Paris, 1933.

Натансон И. П.
[1*] Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Неванлинна (Nevanlinna R.)
[1] Über die konforme Abbildung von Sterngebieten, *Öfvers Finska Vet. Soc. Förh.*, **53** (A) (1921), № 6.

Петровский И. Г.
[1*] Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
Пойа (Pólya G.)
[1] Sur la symétrisation circulaire, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **230** (1950), 25—27.
Пойа и Сегё (Pólya G., Szegö G.)
[1] Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Princeton, 1951.
Рид (Reade M. O.)
[1] On close-to-convex univalent functions, *Michigan Math. J.*, **3** (1955), 59—62.
Робертсон (Robertson M. S.)
[1] Multivalent functions of order *p*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 282—285.
Рогозинский (Rogosinski W. W.)
[1] Über positive harmonische Sinusentwicklungen, *Jber. deutsch. Math. Ver.*, **40** (1931), 2. Abt., 33—35.
Сас (Szász O.)
[1] Über Funktionen die den Einheitskreis schlicht abbilden, *Jber. deutsch. Math. Ver.*, **42** (1932), 1. Abt., 73—75.
Сегё (Szegö G.)
[1] Zur Theorie der schlichten Abbildungen, *Math. Ann.*, **100** (1928), 188—211.
Спенсер (Spencer D. C.)
[1] Note on some function-theoretic identities, *J. Lond. Math. Soc.*, **15** (1940), 84—86.
[2] On finitely mean valent functions, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **47** (1941), 201—211.
[3] On finitely mean valent functions, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 418—435.
[4] On mean one-valent functions, *Ann. Math.* (2), **42** (1941), 614—633.
Титчмарш (Titchmarsh E. C.)
[1] The Theory of Functions, 2nd ed., Oxford, 1939. Русский перевод: Теория функций, Гостехиздат, М. — Л., 1951.
Фекете и Сегё (Fekete M., Szegö G.)
[1] Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen, *J. Lond. Math. Soc.*, **8** (1933), 85—89.
Фихтенгольц Г. М.
[1*] Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. 1—3, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Харди (Hardy G. H.)

[1] The mean value of the modulus of an analytic function, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **14** (1915), 269—277.

Хейман (Hayman W. K.)

[1] Symmetrization in the Theory of Functions, Tech. Rep. № 11, Navy Contract № 6-ori-106 Task Order 5, Stanford University, 1950.

[2] Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions, *J. Anal. Math.*, **1** (1951), 155—179.

[3] Functions with values in a given domain, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 428—432.

[4] The asymptotic behaviour of p-valent functions, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **5** (1955), 257—284.

Шеффер и Спенсер (Schaeffer A. C., Spencer D. C.)

[1] The coefficients of schlicht functions, *Duke Math. J.*, **10** (1943), 611—635.

[2] Coefficient Regions for Schlicht Functions, New York, 1950.

Шиффер (Schiffer M.)

[1] Variation of the Green function and theory of the p-valued functions, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 341—360.

Штейн (Stein P.)

[1] On a theorem of M. Riesz, *J. Lond. Math. Soc.*, **8** (1933), 242—247.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. Элементарные оценки для однолистных функций . . 7

Глава 2. Рост конечнолистных в среднем функций 25

Глава 3. Средние и коэффициенты 54

Глава 4. Симметризация 74

Глава 5. Функции, p-листные в среднем по окружности . . . 115

Глава 6. Теория Лёвнера 142

Литература 175

В. К. Хейман

МНОГОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ

Редактор *М. С. Агранович*
Технический редактор *Е. С. Потапенкова*
Корректор *А. С. Кириллова*

Сдано в производство 10/XI 1959 г.
Подписано к печати 24/II 1960 г.
Бумага 84×108¹/₃₂=2,9 бум. л. 9,4 печ. л.
Уч.-изд. л. 8,4. Изд. № 1/5217.
Цена 5 р. 90 к. Зак. 864.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ВЫПУСКАЕТ СЕРИЮ БРОШЮР

ПОД ОБЩИМ НАЗВАНИЕМ

«БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»:

Вышли из печати

Микусинский Я., Сикорский Р., **Элементарная теория обобщенных функций,** 1. Варшава, 1957, перевод с английского, 3,5 изд. л., ИЛ, 1959.

Хёрмандер Л., **К теории общих дифференциальных операторов с частными производными.** Уппсала, 1955, перевод с английского, 6 изд. л., ИЛ, 1959.

Халмош П. Р., **Лекции по эргодической теории.** Токио, 1956, перевод с английского, 7 изд. л., ИЛ, 1959.

Капланский И., **Введение в дифференциальную алгебру.** Париж, 1957, перевод с английского, 4 изд. л., ИЛ, 1959.

Карлеман Т., **Математические задачи кинетической теории газов.** Уппсала, 1957, перевод с французского, 6 изд. л., ИЛ, 1960.

Находятся в печати

Судзуки М., **Строение группы и строение структуры ее подгрупп.** Берлин, Гёттинген, Гейдельберг, 1956, перевод с английского, 6 изд. л.

Ито К., **Вероятностные процессы,** вып. I. Токио, 1957, перевод с японского, 6 изд. л.

Номидзу К., **Группы Ли и дифференциальная геометрия.** Токио, 1956, перевод с английского, 6 изд. л.

Готовятся к печати

Дей М. М., **Нормированные линейные пространства.** Берлин, 1958, перевод с английского, 8 изд. л.

Ито К., **Вероятностные процессы,** вып. II. Токио, 1957, перевод с японского, 5 изд. л.

Гординг Л., **Задача Коши для гиперболических уравнений.** Чикаго, 1958, перевод с английского, 5 изд. л.

Гудстейн Р. Л., **Математическая логика.** Лейчестер, 1957, перевод с английского, 5 изд. л.

Рутисхаузер Г., **Алгоритм частных и разностей.** Базель, Штутгарт, 1957, перевод с немецкого, 4 изд. л.

Гротендик А., **О некоторых вопросах гомологической алгебры.** Япония, 1957, перевод с французского, 7 изд. л.

Лере Ж., **Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии.** Париж, 1959, перевод с французского, 6 изд. л.