

ELEMENTARY
QUANTUM
FIELD THEORY

by

ERNEST M. HENLEY

Professor of Physics
University of Washington

and

WALTER THIRRING

Director

Institute for Theoretical Physics

University of Vienna

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.
New York — San Francisco — Toronto — London
1962

Э. ХЕНЛИ и В. ТИРРИНГ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
КВАНТОВАЯ
ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Перевод с английского А. А. Ансельма

Под редакцией Ю. В. Новожилова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1963

АННОТАЦИЯ

Квантовая теория поля — „передний край“ теоретической физики — представляет собой один из наиболее мощных методов изучения структуры и свойств элементарных частиц, их взаимодействия и взаимных превращений. В настоящее время значение квантовой теории поля вышло за эти пределы: разработанные ею методы применяются в статистической физике ядра, твердого тела, в квантовой химии, и знание ее стало теперь необходимым специалистам, работающим во многих областях физики. Однако сложность математического аппарата квантовой теории поля в известной мере „отпугивает“ тех, кто не связан непосредственно с его применением.

Книга „Элементарная квантовая теория поля“ представляет собой удачную попытку просто и понятно изложить основы этой теории. Для ее чтения достаточно знания квантовой механики в объеме курса, читаемого на большинстве физических и физико-технических факультетов вузов.

В первой части книги излагаются основные представления теории и ряд вводных вопросов (уравнения поля, операторы физических величин, перестановочные соотношения, квантование свободного поля).

Вторая часть посвящена квантово-полевым моделям, для которых можно получить точное решение уравнений теории. Рассматриваются нейтральная скалярная теория, „парная“ теория, модель Ли.

В третьей части обсуждаются взаимодействия π -мезонов с нуклонами, ядерные силы (в основном — статическая модель), а также вопросы вторичного квантования.

Можно надеяться, что настоящая книга будет весьма полезной всем приступающим к изучению квантовой теории поля, физикам — теоретикам и экспериментаторам, занимающимся элементарными частицами, теорией твердого тела, статистической физикой, специалистам по квантовой химии, студентам и аспирантам ряда физических и инженерных специальностей.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Идеи и представления квантовой теории поля играют важную роль в современной физике, и значение ее вышло далеко за рамки физики элементарных частиц. Квантово-полевые методы с успехом применяются и в физике твердого тела, и в физике атомного ядра, и в статистической физике. Появились уже работы, в которых эти методы применяются и к задачам квантовой химии.

Успех квантовой теории поля в объяснении многих явлений, лежащих вне физики элементарных частиц, свидетельствует о том, что именно квантовая теория поля позволяет наилучшим образом понять большой ряд явлений, относящихся к различным областям физики. Убедительный пример успешного применения квантово-полевых методов дает объяснение сверхпроводимости. Поэтому представления квантовой теории поля должны быть в наше время достоянием не только физиков-теоретиков и той части экспериментаторов, которая работает в области физики элементарных частиц, но и инструментом исследователей, занятых в области твердого тела, ядерной физики, статистической физики, т. е. практически всех физиков.

Изучение квантовой теории поля, однако, серьезно затруднялось отсутствием достаточно простого учебника, в котором изложение основных представлений велось бы не на основе абстрактного и сложного математического аппарата современной теории, а на базе тех сведений, которыми в наше время располагает каждый подготовленный студент старших курсов. В книге известных специалистов в области квантовой теории поля Тирринга и Хенли сделана попытка изложить физические идеи квантовой теории поля на основе простейших моделей, без обращения к сложному математическому аппарату. Тирринг и Хенли строят квантовую теорию поля как естественное обобщение классической квантовой механики на случай непрерывного распределения осцилляторов. При этом рассмотрение общих вопросов включает также и обсуждение проблемы внутренней симметрии.

В книге подробно изложены вопросы взаимодействия квантованного поля со статическим источником в различных моделях. Особое

внимание уделяется моделям, допускающим точные решения (нейтральная скалярная модель, парная теория, модель Ли). В каждом случае проблема рассматривается как с квантово-полевой, так и с классической точки зрения.

Большой интерес представляет систематическое изложение физики π -мезонов (взаимодействие π -мезонов с нуклонами, свойства нуклона, ядерные силы) с помощью статической модели. Эта модель позволяет понять качественно и в очень доступной форме значительное число явлений физики элементарных частиц малых энергий. Поэтому книга может также служить хорошим введением в физику π -мезон-нуклонного взаимодействия.

Ю. Новожил

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящей книги — изложить те представления и методы квантовой теории поля, которые не связаны с особыми математическими трудностями и не требуют углубленного понимания специального принципа относительности. В рамках этого подхода из различных приложений квантовой теории поля основное внимание было уделено физике элементарных частиц.

Чтобы сделать книгу доступной широкому кругу читателей, мы предполагали предварительное знание лишь нерелятивистской квантовой механики. Весь остальной необходимый аппарат развивается в тексте. Так в первой части одновременно вводятся математическое и физическое описания квантованного поля. Особое внимание уделяется принципиальным концепциям теории. Однако рассматриваются только поля, подчиняющиеся статистике Бозе — Эйнштейна. Обсуждаются вопросы о наблюдаемых величинах, инвариантах поля, а также различных симметриях и связанных с ними внутренних степенях свободы.

Во второй части излагается дальнейшее развитие теории на основе изучения взаимодействия квантованного поля с различными статическими источниками. Здесь рассматриваются как с классической, так и с квантовомеханической точек зрения те проблемы, для которых известно существование точных решений, а именно нейтральная скалярная теория, теория с билинейным взаимодействием, модель Ли.

В третьей части математический аппарат и физические представления, изложенные в предыдущих главах, применяются к π -мезонной физике низких энергий. Вслед за описанием классического подхода и различных методов, которые использовались в прошлом для анализа этой проблемы, мы переходим к модели, не основанной на бесконтрольных математических приближениях, а именно к модели, развитой Чу и Лоу. В терминах этой модели мы пытаемся объяснить π -мезон-нуклонное рассеяние, статические свойства нуклонов, электромагнитные явления и ядерные силы.

В последние годы возник релятивистский подход к описанию взаимодействующих полей, основанный на аналитических свойствах матрицы рассеяния. Даже когда этот подход сводится к тому, который мы используем в нерелятивистском пределе π -мезон-нуклонной задачи, он все же оказывается богаче и значительно лучше соответствует реальной физической ситуации, чем статическая модель. Поэтому он должен неизбежно приводить к возможности сравнения с детальными экспериментальными данными. К сожалению, указанное направление требует значительно более сложных вычислений, чем содержащиеся в настоящей книге и, кроме того, до настоящего момента не ясно, лежит ли в их основе строгая теория. Хотя релятивистская трактовка должна устранить в конечном счете все недочеты рассмотренных здесь моделей, нерелятивистский подход всегда останется первым и основным шагом к совершенному знанию.

Для единства трактовки различных рассматриваемых нами проблем представляется удобным работать в одном определенном представлении. Мы выбрали гейзенберговское представление с тем, чтобы подчеркнуть взаимосоотношение между классической и квантовомеханической точками зрения.

В намеченных рамках мы стремились изложить материал достаточно подробно, делая упор на физический смысл получаемых результатов. Отдавая себе отчет в том, что строгость и простота являются взаимодополняющими сторонами теории, мы старались сохранить разумные пропорции между тем и другим. Мы не пытались дать полную библиографию, но во всех случаях, когда это казалось необходимым, старались указать, где читатель может найти дальнейшие сведения. Для углубленного изучения предмета мы отсылаем читателя к книгам Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова „Введение в теорию квантовых полей“ (Москва, 1957 г.), Дж. Гамильтона „Теория элементарных частиц“ (Нью-Йорк, 1959) и С. С. Швебера „Введение в релятивистскую квантовую теорию поля“ (Эванстон, 1961).

Мы хотели бы поблагодарить профессора Х. Фраунфельдера и профессора Б. А. Якобсона за ценные комментарии, а также доктора Рэннигера и доктора Х. Питчмана, критически прочитавших книгу в корректуре.

*Эрнест М. Хенли
Вальтер Турринг*

Список обозначений

В тексте имеется несколько мест, в которых один и тот же символ употребляется для обозначения двух различных физических величин. Мы надеемся, что в этих случаях читателю будет ясно из контекста, в каком смысле употребляется символ.

Числа в круглых скобках указывают пункт, в котором впервые появляется данный символ.

Общие обозначения

†, э. с.	Эрмитово сопряженный	(2.1)
*, к. с.	Комплексно сопряженный	(1.2)
', d/dt	Производная по времени	(1.2)
)	Голые состояния	(8.1)
)	Физические состояния	(8.1)
i, j и т. д.	Латинские индексы, обозначающие пространственные компоненты	(15.1)
α, β и т. д.	Греческие индексы, обозначающие компоненты в зарядовом пространстве (в пространстве изоспина)	(15.1)
S к	$L^{-3} \sum_k = (2\pi)^{-3} \int d^3k$	(4.1)

Греческие символы

α	Оператор поглощения положительно заряженного кванта поля	(7.1)
β	Оператор поглощения отрицательно заряженного кванта поля	(7.1)
Γ	Ширина резонанса	(12.2)
$\Gamma^{(+)}(r)$	$\sum_k \omega e^{ik \cdot r}$	(5.4)
γ	Фотон	(20.2)
Δ	Малый объем в импульсном пространстве	(10.1)
Δ^{adv}	Опережающая функция Грина	(8.1)
Δ^{ret}	Запаздывающая функция Грина	(8.1)
$\delta(\omega), \delta(k)$	Фазовый сдвиг	(8.2)
ε	Бесконечно малая положительная величина	(11.1)
\mathbf{e}	Вектор поляризации электромагнитного поля	(20.2)
ε_{ijk}	Полностью антисимметричный тензор	(5.1)
η	Вероятность	(6.3)
η_{fi}	Вероятность перехода	(8.2)
θ	Угол в разложении для поля	(5.1)
ϑ	Константа в классической мезонной теории	(16.1)
ϑ	Угол рассеяния	(16.2)
Δ	Матрица преобразования в зарядовом пространстве	(7.2)
λ	Длина волны	(5.4)
	Безразмерная константа связи	(11.1)
	Неопределенный множитель	(17.4)
λ_T	Перенормированная безразмерная константа связи	(12.2)
$\lambda^{(a)}$	Собственные значения матрицы рассеяния в борновском приближении	(18.5)
μ	Масса π -мезона	(15.1)
μ_N	Часть магнитного момента нуклона	(20.1)
ν	Частота	(5.4)
	Число частиц в конечном объеме	(6.3)
ξ	Индекс, обозначающий спин и изоспин нуклона	(17.1)
π	Оператор плотности импульса	(4.2)
	π -мезон	(7.2)
$\rho(r)$	Функция распределения источника в пространстве	(8.1)
$\rho_k, \rho(k)$	Функция распределения источника в импульсном пространстве	(9.2)

Продолжение

Греческие символы

σ	Сечение рассеяния	(8.2)
σ	Оператор спина	(15.1)
τ	Изоспиновые 2×2 -матрицы	(13.1)
$\bar{\tau}$	Оператор изоспина при действии на протон в модели Лн	(13.3)
ϕ	Поле Клейна — Гордона (оператор)	(4.1)
$\phi^{(+)}$	Положительно-частотная часть $\phi (\sim e^{-i\omega t})$	(5.3)
$\phi^{(-)}$	Отрицательно-частотная часть $\phi (\sim e^{i\omega t})$	(5.3)
ϕ_+	Операторы заряженного поля	(7.1)
ϕ^{in}	Поле при $t = -\infty$	(8.1)
ϕ^{out}	Поле при $t = +\infty$	(8.1)
φ	Азимутальный угол	(5.1)
χ	$g\rho_{\kappa} (2\omega^3 L^3)^{-1/2}$	(9.3)
	Волновая функция относительного движения двух нуклонов	(21.3)
ψ	Оператор шредингеровского поля	(4.2)
$\bar{\psi}$	Оператор шредингеровского поля при действии на протон в модели Ли	(13.3)
ψ_E	Собственная функция энергии E	(2.1)
ψ_0	Собственная функция основного состояния	(2.1)
Ω	Частота гармонического осциллятора	(1.2)
	Волновая матрица	(11.1)
ω	Круговая частота и энергия	(2.1)
$\bar{\omega}$	Матрица для ω	(11.1)
ω_r	Резонансная энергия	(12.2)
ω_s	Частота основного состояния	(16.1)

Другие символы

A	Оператор поглощения в ϕ^{in}	(8.1)
	Амплитуда плоской волны	(16.2)
	Матрица	(17.5)
A	Электромагнитный вектор-потенциал	(7.1)
a	Расстояние между атомами	(1.2)
	Оператор поглощения квантованного поля	(2.1)
	Радиус источника	(16.1)
\mathcal{A}	Амплитуда рассеяния	(14.1)

Другие символы

B	Оператор поглощения в ϕ^{out}	(8.1)
	Матрица	(17.5)
$C(\omega)$	Константа в классической мезонной теории	(16.1)
C_H	Нормировочная константа	(17.1)
D	$\pm \text{Im } D_{\pm}$	(11.2)
D_{\pm}	Знаменатель в волновой матрице	(11.1)
D_i	$\text{Re } D_{\pm}$	(11.2)
$D^{(n)}$	Перенормированная функция D	(12.2)
d	Смещение гармонического осциллятора	(2.3)
E	Энергия	(2.2)
E_0	Энергия основного состояния	(2.2)
E_k	$k^2/2m$, энергия кванта шредингеровского поля	(4.2)
E_i	Энергия состояния $ out, i\rangle$	(14.2)
\mathcal{E}_0	Сдвиг энергии, обусловленный взаимодействием (энергия основного состояния системы)	(9.2)
$\mathcal{E}_0(N)$	Энергия основного состояния N источников	(9.5)
\mathcal{E}	Напряженность электрического поля	(10.2)
ΔE	Энергия возбуждения для первого возбужденного состояния	(17.4)
$F(r, t)$	Волновая функция кванта поля	(6.1)
$F_k, F(k)$	Волновая функция кванта поля в импульсном пространстве	(6.1)
F	Весовая функция для t -матрицы	(18.3)
F_{σ}, F_s	Формфакторы	(20.1)
$f(r, t)$	Волновая функция кванта поля	(6.1)
$f_k, f(k)$	Волновая функция кванта поля в импульсном пространстве	(6.1)
f	Безразмерная константа связи мезона с нуклоном в симметричной псевдоскалярной теории	(15.1)
\bar{f}	Эффективная константа связи мезона с нуклоном	(17.4)
f_r	Перенормированная константа связи мезона с нуклоном	(18.4)
\mathfrak{F}	Весовая функция для g_H	(18.7)
$G(r, t)$	Функция Грина	(8.1)
G	Весовая функция для t -матрицы	(18.3)
$g(k_1, K_0)$	Четырехмерная фурье-компонента функции Грина	(8.1)
g	Константа связи	(9.1)
g_r	Перенормированная константа связи	(13.6)
g_H	Функция, пропорциональная $1/h^{(u)}$	(18.7)

Продолжение

Другие символы

\mathcal{D}	Весовая функция для g_{μ}	(18.7)
H	Гамильтониан	(1.3)
$H^{(1)}$	Функция Ханкеля первого рода	(5.4)
$H(\mathbf{r})$	Оператор локальной плотности энергии	(6.1)
$h^{(u)}$	Коэффициенты в разложении t -матрицы по операторам проектирования	(18.5)
\mathcal{H}	$H - \mathcal{E}_0$	(9.2)
\mathfrak{H}	$- \rho(k) ^2 / [(2\pi)^3 T(k)]$ и аналитическое продолжение этой функции	(14.2)
I	Интенсивность	(6.3)
J	Полный угловой момент	(16.1)
J_l	Сферическая функция Бесселя	(5.1)
j	Оператор тока	(7.1)
K	Сокращенное обозначение для индексов j, α, k	(18.2)
K_0	Канонически сопряженная к времени переменная	(8.1)
k	Волновое число, импульс	(1.3)
k_r	Резонансный импульс	(12.2)
k_{\max}	Импульс обрезания	(15.3)
L	Длина цепочки	(1.3)
	Лагранжиан	(4.2)
L	Оператор орбитального углового момента	(5.1)
$L_n(\lambda)$	Определенная функция	(17.5)
l	Угловой момент	(5.1)
\mathcal{L}	Плотность лагранжиана	(4.2)
M	Физическая масса источника	(9.2)
M_0	Механическая масса источника	(9.2)
M_1, M_2, M_3	Матрицы	(12.4)
ΔM	Энергия физического нейтрона в модели Ли	(13.3)
m	Масса кванта поля	(4.1)
	z -компонента углового момента	(5.1)
\mathcal{M}	Магнитный момент нуклона	(19.5)
\mathfrak{M}	Приведенный магнитный момент нуклона	(19.5)
N	Число атомов	(1.2)
	Число типов колебаний	(3.1)
	Оператор числа частиц	(5.3)
	Нуклон	(14.1)
N_{\pm}	Оператор числа частиц с зарядом ± 1	(7.1)
$N(\mathbf{r})$	Оператор плотности числа частиц	(5.4)
n	Квантовое число, характеризующее состояние	(2.1)

Другие символы

n	Числа заполнения	(3.1)
	Число квантов поля	(5.3)
	Нейтрон	(13.1)
\hat{n}	Единичный вектор нормали	(2.3)
\mathcal{N}	Нормировочная константа	(17.3)
\hat{O}	Произвольный оператор	(2.3)
\hat{P}	Оператор импульса	(5.1)
$\hat{P}(\mathbf{r})$	Оператор плотности импульса	(6.1)
P_s	Импульс, сопряженный нормальной координате	(1.2)
p	Импульс	(1.2)
	Протон	(13.1)
\hat{P}	Оператор четности	(5.2)
\hat{P}	Оператор проектирования	(8.2)
Q	Оператор заряда	(7.1)
	Приведенная к диагональному виду матрица q_{aj} в мезонной теории с сильной связью	(17.5)
$Q(\mathbf{r})$	Оператор плотности заряда	(7.1)
Q_s	Нормальная координата	(1.2)
q	Смещение	(1.2)
\bar{q}	Среднее значение q	(2.3)
Δq	Нулевые флуктуации q	(2.3)
\hat{Q}	Неэрмитов оператор	(4.2)
R	Граничный радиус	(5.1)
	Матрица рассеяния	(11.3)
	Вклад основного состояния в T -матрицу	(18.3)
R	Координата центра массы или энергии	(5.3)
$R(a^\dagger)$	Оператор, переводящий физический нуклон в голый	(17.1)
r	Радиус-вектор	(2.3)
r_a	Эффективный радиус	(18.6)
r_0	Расстояние между двумя нуклонами	(21.1)
r_1, r_2	Константы перенормировки	(17.1)
S	S -матрица	(8.2)
s	Спин нуклона	(15.1)
T	Матрица рассеяния	(8.2)
	Полный изоспин	(15.2)
\mathcal{T}	Матрица вращения в зарядовом пространстве	(7.2)
t	Время	(1.2)

Другие символы

t	Оператор изоспина, обобщенный на n -мерное зарядовое пространство	(7.2)
t	Оператор изоспина мезона	(15.2)
$t(k), t(z)$	Приведенная матрица рассеяния	(14.3)
U	Унитарный оператор	(7.1)
$U_k^l(r)$	Радiallyнная функция в разложении $e^{ik \cdot r}$	(5.1)
U_b	Волновая функция основного состояния	(11.3)
V	Электростатический потенциал	(7.1)
$V(r, t)$	Обобщенная плотность источника потенциального типа	(8.1)
V_K	Радiallyнная часть члена, представляющего источник π -мезонов	(18.2)
$V_\pi(k)$	Член, представляющий источник π -мезонов	(19.1)
v	Скорость	(1.3)
γ	Статический потенциал взаимодействия двух нуклонов	(21.1)
W_{fi}	Вероятность перехода из состояния i в состоянии f	(8.2)
W_i	Полная вероятность перехода из состояния i	(8.2)
W	Приведенная величина энергии	(17.4)
w	$m + k^2/2m$, энергия кванта в модели Лн	(13.2)
Y_l^m	Сферическая гармоника	(5.1)
$Y(r)$	Суперпозиция потенциалов Юкавы	(19.1)
Z	Множитель перенормировки константы связи	(13.4)



Часть первая

СВОБОДНЫЕ
ПОЛЯ



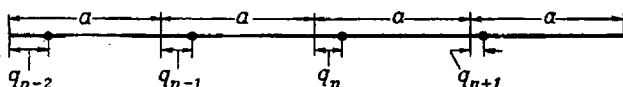
ВВЕДЕНИЕ

1.1. Соотношение между квантовой и классической теориями поля. Квантовая механика дает нам ряд правил, которые предполагаются неограниченно общими. Эти правила можно применить к любой системе и увидеть, как следует видоизменить классические понятия и откуда вытекают квантовомеханические свойства рассматриваемой системы. Использование этих правил при рассмотрении полей приводит к квантовой теории поля. Элементарная квантовая механика не дает последовательной теории, если в совокупности с нею применяется классическая теория поля. Бор и Розенфельд [1, 2] показали, что внутренняя непоследовательность сохраняется до тех пор, пока электромагнитное поле остается не проквантованным. Если квантование не выполнено, то в принципе возможны нарушения соотношения неопределенностей между координатой и компонентой импульса частицы (например, электрона). Обычные шредингеровскую или Klein-Gordesловскую волновые функции ψ также можно рассматривать как классические поля материи, и поэтому они также могут служить объектами квантования. С этим последним типом полей мы и будем в основном иметь дело в настоящей книге. Как и в обычной квантовой механике, процедура квантования поля связана с классической теорией через принцип соответствия. Оказывается, что элементарные квантовые возбуждения поля ведут себя как частицы; сейчас это единственный известный нам способ описания, применимый к элементарным частицам в том виде, как мы встречаем их в природе. В соответствии с этим квантовая теория поля доминирует в наших размышлениях о фундаментальных свойствах материи.

Ниже мы вкратце обсудим гармоническое движение и поля в классической физике. Понятие поля необычайно широко. Оно охватывает все физические величины, зависящие от координат и времени, например, температуру, электрический потенциал и плотность. Общее свойство их заключается в существовании равновесного состояния, а также тот факт, что в случаях, когда отклонение от равновесия можно считать малым, уже линейные уравнения правильно отражают основные черты их поведения. Системы, которые описываются

уравнениями одинаковых типов (эллиптического, гиперболического и т. д. [3]), проявляют одинаковое динамическое поведение, хотя физически они могут быть совершенно различными. Квантовая теория поля имеет дело с гиперболическими уравнениями. Соответственно, мы можем для первого знакомства рассмотреть простейшую систему этого типа, а именно колеблющуюся цепочку атомов. В дальнейшем мы увидим, что разница между непрерывной линией и дискретной цепочкой весьма невелика. Поэтому мы начнем с последнего случая, поскольку он ближе к классической механике [4]. В последующем мы концентрируем внимание на формальных сторонах задачи, полагая, что ее физическая сущность знакома читателю.

1.2. Колеблющаяся цепочка атомов. Если, как это изображено на фиг. 1.1, q_n означает смещение n -го атома цепочки от положения равновесия, \dot{q}_n — производную от этого смещения по времени и



Фиг. 1.1. Колеблющаяся цепочка атомов.

Равновесное расстояние между атомами равно a , мгновенное смещение n -го атома — q_n .

если гармонические силы, действующие между ближайшими соседями, носят гармонический характер, то уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q}_n = \Omega^2 (q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n). \quad (1.1)$$

Здесь мы положили массу атомов равной единице, через Ω^2 обозначили константу, определяющую силу, действующую между ближайшими соседями. Макроскопический участок такой цепочки представляет собой, конечно, систему с меньшей жесткостью. Если смещение всей цепочки из N атомов равно δx , то сила, стремящаяся вернуть отдельный атом в положение равновесия, равна лишь $\delta x \Omega^2/N$.

Чтобы сделать систему связанных осцилляторов конечной, мы замыкаем цепочку из N атомов таким образом, что $q_{i+N} = q_i$. Задача, сформулированная в N уравнениях (1.1), может быть решена посредством введения нормальных координат. Это удобно сделать при помощи гамильтонова формализма, который будет в дальнейшем использован и при квантовомеханическом рассмотрении. Легко видеть, что гамильтониан (энергия) цепочки (здесь $p_n = \dot{q}_n$) равен

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [p_n^2 + \Omega^2 (q_n - q_{n+1})^2], \quad (1.2)$$

а канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_n &= \frac{\partial H}{\partial p_n} = p_n, \\ \dot{p}_n &= -\frac{\partial H}{\partial q_n} = \Omega^2 (q_{n+1} - q_n + q_{n-1} - q_n), \end{aligned}$$

что эквивалентно (1.1).

Определим нормальные координаты Q_s и импульсы P_s равенствами

$$q_n = \sum_s e^{isn} \frac{Q_s}{N^{1/2}}, \quad p_n = \sum_s e^{-isn} \frac{P_s}{N^{1/2}}, \quad (1.3)$$

где в соответствии с периодическими граничными условиями, введенными выше, s принимает значения $s = 2\pi l/N$, а l — любое целое число между $-N/2$ и $N/2$. Поскольку величины q_n вещественны, сами Q_s и P_s комплексны и удовлетворяют соотношениям

$$Q_{-s} = Q_s^*, \quad P_{-s} = P_s^*. \quad (1.4)$$

С помощью формулы

$$\sum_{n=1}^N e^{in(s-s')} = N\delta_{s,s'}, \quad (1.5)$$

можно также обратить (1.3) и получить

$$Q_s = \sum_{n=1}^N e^{-isn} \frac{q_n}{N^{1/2}}, \quad P_s = \sum_{n=1}^N e^{isn} \frac{p_n}{N^{1/2}}. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.3) в гамильтониан, находим с помощью (1.4) и (1.5)

$$H = \frac{1}{2} \sum_s [P_s P_s^* + Q_s Q_s^* \Omega^2 (2 \sin \frac{s}{2})^2]. \quad (1.7)$$

Таким образом, в нормальных координатах уравнения движения, вытекающие из гамильтониана (1.7), независимы¹⁾:

$$\ddot{Q}_s = -\omega_s^2 Q_s, \quad \omega_s = 2\Omega \sin \frac{s}{2}, \quad (1.8)$$

что получается также и при непосредственной подстановке (1.3) в (1.1). Решение (1.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} Q_s(t) &= Q_s(0) \cos \omega_s t + \frac{\dot{Q}_s(0)}{\omega_s} \sin \omega_s t, \\ q_n(t) &= N^{-1} \sum_{n', s} \left\{ q_{n'}(0) \cos [s(n - n') - \omega_s t] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{q}_{n'}(0)}{\omega_s} \sin [s(n - n') - \omega_s t] \right\}. \end{aligned}$$

¹⁾ Читатель самостоятельно проверит, что Q_s и Q_s^* можно рассматривать как независимые переменные.

Уравнения (1.3) вместе с уравнениями (1.8) показывают, что движение нашей системы представляет собой суперпозицию колебаний с частотами ω_s , многие из которых значительно меньше, чем Ω ($\omega_s \sim \Omega 2\pi l/N$), в соответствии с малой жесткостью всей цепочки, о которой уже упоминалось выше. Этот хорошо известный факт служит, например, отправной точкой дебаевской теории теплоемкости (в противовес теории Эйнштейна). В квантовой механике мы увидим, что возбужденные состояния осцилляторов Q_s с энергиями ω_s во многих отношениях ведут себя как частицы. Осцилляции рассмотренного здесь типа представляют собой явление чрезвычайной общности. Они появляются в виде звуковых волн в твердых телах и жидкостях, в виде спиновых волн в ферромагнетиках и в виде поверхностных волн в ядрах, причем во всех этих случаях возбуждения осцилляторов Q_s с энергиями ω_s ведут себя аналогично частицам. По существу звуковые волны в жидком гелии—это самая близкая из всех известных механических моделей элементарных частиц.

1.3. Непрерывная колеблющаяся цепочка. Во многих случаях оказывается целесообразным не разделять цепочку на отдельные атомы и рассматривать задачу не с микроскопической, а с макроскопической точки зрения. Такой подход можно осуществить с помощью предельного перехода, при котором $N \rightarrow \infty$, в то время как расстояние между атомами $a \rightarrow 0$, а длина цепочки $L = aN$ остается постоянной. Это означает, однако, что число степеней свободы системы становится бесконечным и для ее описания необходимо бесконечное число переменных.

Назовем x — расстояние от начала цепочки¹⁾, причем $q_n \rightarrow q(x)$. В этом пределе мы получаем известное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\ddot{q}(x) = \Omega^2 a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x). \quad (1.9)$$

Величина Ωa в (1.9) играет роль скорости волны v , так что в рассматриваемом пределе Ω должна вести себя как $\Omega = v/a$. Следовательно, для того чтобы цепочка, состоящая из бесконечного числа атомов, имела конечную жесткость, требуется, чтобы силы, действующие между соседними атомами, были бесконечно велики. Как следствие, такая цепочка оказывается способной к колебаниям с бесконечно большими частотами.

Общее решение уравнения (1.9), подчиняющееся условию $q(x) = q(x+L)$ вновь можно получить, выполнив предельный переход

¹⁾ На самом деле мы положили $q(x) = q_n/a^{1/2}$, так что для конечной энергии $q(x)$ остается конечным.

над нормальными координатами в (1.9). Вводя

$$k = \frac{s}{a} = \frac{2\pi l}{L} \quad -\infty < l < \infty$$

и

$$q(x) = \frac{1}{L^{1/2}} \sum_k e^{ikx} Q_k \quad (1.10)$$

и используя предел равенства (1.5)

$$\sum_{n=1}^N \rightarrow \frac{1}{a} \int_0^L dx, \quad \int_0^L dx e^{ix(k-k')} = L\delta_{k, k'},$$

находим из (1.9) уравнения движения для Q_k

$$\ddot{Q}_k = -k^2 v^2 Q_k. \quad (1.11)$$

Таким образом, частота ω_k оказывается равной $k v$, что совпадает с пределом полученного ранее выражения (1.8) для ω_s . Отсюда ясно, что атомная структура цепочки проявляется лишь в области коротких волн. Введение нормальных координат означает решение дифференциального уравнения в частных производных с помощью разложения Фурье. Те же результаты можно также вывести из гамильтониана (1.2), который в рассматриваемом пределе имеет вид¹⁾

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[\dot{q}^2(x) + v^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \sum_k (|\dot{Q}_k|^2 + k^2 v^2 |Q_k|^2). \quad (1.12)$$

Поскольку для счетного множества координат Q_k гамильтониан (1.12) прямо приводит к уравнению (1.11), мы должны обобщить гамильтонов формализм обычной механики таким образом, чтобы получить уравнение движения для непрерывной координаты $q(x)$. Это можно сделать, вводя функциональную производную с помощью δ -функции Дирака:

$$\begin{aligned} \frac{\delta q(x)}{\delta q(x')} &= \delta(x - x'), \\ \frac{\delta}{\delta q(x')} \frac{\partial q(x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Первое из этих равенств есть непрерывная форма равенства $\partial q_n / \partial q_{n'} = \delta_{nn'}$, а второе получается дифференцированием первого по x .

Переписывая гамильтониан через канонические переменные p и q

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left\{ p^2(x) + v^2 \left[\frac{\partial q(x)}{\partial x} \right]^2 \right\},$$

¹⁾ Мы считаем массу всей цепочки равной единице.

мы находим, что уравнения Гамильтона

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

обобщаются следующим образом:

$$\dot{p}(x) = - \frac{\delta H}{\delta q(x)} = - v^2 \int_0^L dx' \frac{\partial q(x')}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x),$$

$$\dot{q}(x) = \frac{\delta H}{\delta p(x)} = p(x), \quad (1.14)$$

что согласуется с (1.9).

Так как мы будем иметь дело в основном со случаем непрерывного распределения, который едва ли не проще, чем атомистический подход, то описанный формальный аппарат будет в дальнейшем часто применяться. Это позволит нам исключить микроскопические константы Ω , a , N и заменить их макроскопическими постоянными v , L .

Однако в случае некоторых полей, таких как электромагнитное и поля элементарных частиц, невозможно найти механической базы, которая могла бы служить отправной точкой при построении уравнений движения. В этих случаях приходится обращаться к специальной теории относительности, чтобы получить свойства инвариантности этих полей. Четырехмерная однородность и изотропия нашего пространственно-временного континуума предполагаются вытекающими из аналогичных свойств полей всех элементарных частиц. Говоря на профессиональном языке, инвариантно относительно неоднородной группы Лоренца есть единственный руководящий принцип, позволяющий выбрать возможные уравнения поля для описания элементарных частиц. Эта довольно смелая процедура оказывается очень плодотворной и вскрывает многие поразительные черты элементарных частиц. К сожалению, теория представлений группы Лоренца далеко не элементарна, так что мы не сможем систематически обсудить релятивистскую теорию поля. Однако мы будем встречаться с влиянием теории относительности на наши представления о частицах.

Вследствие условия релятивистской инвариантности, поля приобретают замечательные свойства, которыми не обладает ни одна механическая система. Поскольку теория должна быть инвариантной по отношению к произвольным пространственно-временным смещениям, поле не может иметь никакой атомистической структуры и должно быть непрерывным. Далее, поле должно заполнять все пространство — время, оно должно существовать всегда и везде и не может быть устранено внешним воздействием. Таким образом, мы приходим к новой точке зрения на пространство и вещество. Пространство заполнено непрерывной основой, образующей поля элементарных частиц; а некоторых отношениях это продолжение концепции эфира

прошлого столетия. Вещество представляет собой просто локальное возбуждение этой основы, т. е. нечто в своем роде случайное. Не существует в этом смысле сохранения вещества, и законы, управляющие его взаимодействиями, вторичны и сложны. Простота природы открывается в уравнениях элементарных полей, которые отражают ее симметрию и закономерность. Эта картина совершенно противоположна механической, в которой вещество фундаментально и закон для силы, действующей между его частями, есть первичный закон природы. Сказанное объясняет, почему современные фундаментальные исследования в физике в такой значительной степени используют квантовую теорию поля, которая концентрирует свое внимание на изучении свойств поля—основы всех физических явлений.

Глава 2

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

2.1. Собственные значения H . Для полей, рассмотренных в гл. 1, было показано, что их уравнения движения аналогичны уравнениям движения простого гармонического осциллятора или системы связанных гармонических осцилляторов. Поэтому теперь мы изложим квантовую теорию гармонического осциллятора в форме, удобной для дальнейших исследований. Как будет установлено в следующих главах, квантовомеханическое рассмотрение системы связанных осцилляторов или полей представляет собой непосредственное обобщение теории этой системы с одной степенью свободы. Более того, уже в элементарном случае гармонического осциллятора мы сталкиваемся в простейшей форме с типичными квантовыми свойствами полей.

Наша задача определяется гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2). \quad (2.1)$$

Координата q и импульс p являются теперь операторами, подчиняющимися перестановочному соотношению¹⁾

$$[q, p] = i. \quad (2.2)$$

Типичное предсказание квантовой теории заключается в том, что измерение некоторой наблюдаемой величины не может дать произвольный результат, но лишь собственное значение оператора, связанного с этой величиной. Мы должны поэтому искать собственные значения таких наблюдаемых величин как энергия (2.1). К этой задаче можно подойти с разных сторон. Можно, например, удовлетворить (2.2), представив p в форме дифференциального оператора $-i\hbar\partial/\partial q$, и решить дифференциальное уравнение, к которому приводит задача на собственные значения, $(H - E)\psi = 0$. Но это — не кратчайший путь, и для нашей цели более удобным оказывается чисто алгебраи-

¹⁾ В дальнейшем используется система единиц, в которой $\hbar = 1$.

ческий метод. Введем операторы, которые соответствуют амплитуде классического движения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega q + ip}{(2\omega)^{1/2}}, \\ a^\dagger &= \frac{\omega q - ip}{(2\omega)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

или

$$\begin{aligned} q &= \frac{a + a^\dagger}{(2\omega)^{1/2}}, \\ p &= -i\omega \frac{a - a^\dagger}{(2\omega)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.2) следует, что перестановочные соотношения для a и a^\dagger имеют вид

$$\begin{aligned} [a, a] &= [a^\dagger, a^\dagger] = 0, \\ [a, a^\dagger] &= 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Используя операторы (2.4) и соотношения (2.5), легко выразить гамильтониан через a и a^\dagger :

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (2.6)$$

Поскольку операторы координаты и импульса q и p не коммутируют с гамильтонианом, операторы a и a^\dagger также не коммутируют с ним. Из (2.5) и (2.6) следует, что

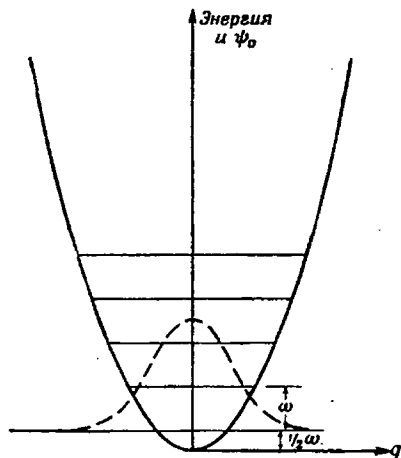
$$\begin{aligned} [H, a^\dagger] &= \omega a^\dagger, \\ [a, H] &= \omega a. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Форма перестановочных соотношений (2.7) позволяет сделать заключение о собственных значениях H . Применяя их к собственной функции ψ_E оператора H с собственным значением E : $(H - E)\psi_E = 0$, находим

$$Ha\psi_E = (E - \omega)a\psi_E. \quad (2.8)$$

Это равенство показывает, что $a\psi_E$ также является собственной функцией H с собственным значением $E - \omega$. Аналогичным образом из другого соотношения (2.7) следует, что для a^\dagger собственное значение равно $E + \omega$. Отсюда видно, что мы имеем дело с последовательностью равноудаленных собственных значений H с интервалом ω . Однако рассматриваемая последовательность должна быть где-то ограничена, поскольку произведение $a^\dagger a$ положительно определено, и H не может поэтому иметь отрицательных собственных значений. Это условие требует, чтобы для определенного состояния ψ_0 выполнялось соотношение $a\psi_0 = 0$. В этом случае уже невозможно получить

более низкого собственного значения применением a . Из (2.6) видно, что ψ_0 есть собственная функция H с собственным значением $\omega/2$. Далее, наше условие определяет ψ_0 однозначно, так что мы имеем только одну последовательность собственных значений. Полученные результаты можно просуммировать следующим образом.



Фиг. 2.1. Потенциал гармонического осциллятора, собственные значения энергии и волновая функция основного состояния $\psi_0(q)$.

Спектр собственных значений H показан на фиг. 2.1 и определяется формулой

$$E = n\omega + \frac{1}{2}\omega, \quad (2.9)$$

где n — неотрицательное целое число.

2.2. Свойства собственных состояний H . Состояние ψ_0 , соответствующее E_0 , подчиняется условию

$$a\psi_0 = 0, \quad (2.10)$$

а состояние ψ_n с собственным значением E_n получается n -кратным применением a^\dagger к ψ_0 :

$$\psi_n = \frac{a^{\dagger n}}{(n!)^{1/2}} \psi_0. \quad (2.11)$$

Здесь $(n!)^{-1/2}$ — точный нормировочный множитель, если ψ_0 нормирована. В этом легче всего убедиться методом индукции:

$$\begin{aligned} \int \psi_n^* \psi_n &= \int \psi_{n-1}^* \frac{aa^\dagger}{n} \psi_{n-1} = \\ &= \frac{1}{n} \int \psi_{n-1}^* \left(\frac{H}{\omega} + \frac{1}{2} \right) \psi_{n-1} = \int \psi_{n-1}^* \psi_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Используя это равенство n раз, мы придем в конце концов к равенству $\int \psi_n^* \psi_n = \int \psi_0^* \psi_0$.

Этот метод можно применить для получения явного выражения ψ_n как функций пространственной переменной q . Так как в этом представлении $p = -i\partial/\partial q$, то

$$a\psi_0(q) = \left(\frac{1}{2\omega}\right)^{1/2} \left(\omega q + \frac{\partial}{\partial q}\right) \psi_0(q) = 0,$$

откуда следует, что нормированная волновая функция основного состояния имеет вид

$$\psi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\omega q^2/2}. \quad (2.13)$$

Высшие возбужденные состояния получаются теперь применением дифференциального оператора $a^+ = (\omega q - \partial/\partial q)(2\omega)^{-1/2}$.

Протяженность волновой функции основного состояния по порядку величины равна $\omega^{-1/2}$, что соответствует квантовомеханической флуктуации Δq координаты q около нулевой точки, как показано на фиг. 2.1. Формально мы можем определить эту величину следующим образом:

$$(\Delta q)^2 = \int \psi_0^* (\bar{q} - q)^2 \psi_0 dq, \quad (2.14)$$

где \bar{q} означает среднее значение q . Как легко видеть из равенства (2.10) и эрмитово сопряженного равенства, q равно нулю:

$$\bar{q} = \int \psi_0^* q \psi_0 dq = \int \psi_0^* (a + a^+) \psi_0 \frac{1}{(2\omega)^{1/2}} dq = 0. \quad (2.15)$$

Этот результат очевиден также вследствие соотношения $\psi_0(q) = \psi_0(-q)$. Таким же образом находим, что

$$\begin{aligned} (\Delta q)^2 &= \int \psi_0^* q^2 \psi_0 dq = \int \psi_0^* \frac{aa^+}{2\omega} \psi_0 dq = \\ &= \frac{1}{2\omega} \int \psi_0^* [a, a^+] \psi_0 dq = \frac{1}{2\omega}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

С физической точки зрения этот результат представляет собой прямое следствие соотношения неопределенностей $\Delta q \Delta p \geq 1/2$. Наименьшая энергия не получается локализацией частицы строго на дне ямы, так как это привело бы к большой величине Δp и, следовательно, к большой величине кинетической энергии. Так как средние значения координаты и импульса равны нулю, то среднее значение энергии оказывается равным $1/2 [(\Delta p)^2 + \omega^2 (\Delta q)^2]$. Если это выражение минимизировать по Δq при ограничении $\Delta q \Delta p = 1/2$, мы найдем, что его минимум достигается при $\Delta q = (2\omega)^{-1/2}$ и равен $\omega/2$. Это значит, что энергетически „наиболее выгодная“ ситуация соответствует

величине, близкой к (2.16), причем нулевая энергия оказывается равной не нулю, как в классическом случае, а $\omega/2$ ¹⁾. Квантовомеханические флуктуации подобного типа обычно малы, но иногда приводят к макроскопическим эффектам. Например, они препятствуют затвердеванию жидкого гелия при нормальном давлении.

2.3. Зависимость движения от времени. Рассмотрев некоторые квантовые стороны задачи, обратимся теперь к динамическому аспекту, отражающему классическое гармоническое движение системы. Развитие во времени может быть описано в квантовой механике многими способами [1]. Можно, например, считать операторы постоянными, а векторы состояний — зависящими от времени, согласно закону

$$\psi(t) = e^{-iHt} \psi(0) \quad (2.17)$$

(представление Шредингера). Другая возможность заключается в том, чтобы векторы состояний считать постоянными и применять унитарный оператор e^{iHt} к операторам \hat{b} . Тогда операторы изменяются со временем как

$$\hat{b}(t) = e^{iHt} \hat{b}(0) e^{-iHt} \quad (2.18)$$

(представление Гейзенберга). Это, очевидно, приводит к тем же ожидаемым значениям наблюдаемых величин

$$\psi^*(t) \hat{b}(0) \psi(t) = \psi^*(0) \hat{b}(t) \psi(0)$$

и к тем же физическим следствиям.

Во втором случае временная зависимость операторов такова, что они подчиняются классическим уравнениям движения, так как из (2.18) вытекает, что

$$\dot{\hat{b}}(t) = i[H, \hat{b}(t)], \quad (2.19)$$

и коммутатор при этом дает то же выражение, что и скобки Пуассона в классической механике. Поскольку в наших задачах классические уравнения будут иметь хорошо известную структуру и способы их решения легко устанавливаются, мы будем работать в гейзенберговском представлении²⁾. Далее, чтобы сбереечь символ ψ для обозначения операторов поля, мы будем пользоваться в дальнейшем дираковскими³⁾ обозначениями „бра-“ и „кет“, в которых вектор состояния и комплексно сопряженный ему обозначаются скобками $| \rangle$ и $\langle |$.

¹⁾ Тот факт, что грубый анализ, основанный на соотношении неопределенностей, приводит к численно точному результату, является случайным. Однако этот способ обычно дает правильные по порядку величины значения.

²⁾ Существуют другие полезные представления, в которых часть временной зависимости содержится в волновых функциях, но здесь мы не будем к ним обращаться.

³⁾ См. книгу Дирака [1], гл. I—III.

Для детального обозначения векторов состояния можно вписать в скобки различные индексы. Например, собственные состояния оператора энергии для гармонического осциллятора могут быть просто охарактеризованы соответствующим квантовым номером состояния, т. е. $|n\rangle$, так что уравнение Шредингера записывается в виде

$$(H - E_n)|n\rangle = 0.$$

В элементарной квантовой механике это обозначение соответствует единому символу \mathbf{r} для вектора вместо конкретизации его компонент в определенной системе координат, т. е. x, y, z .

Последние появляются как скалярные произведения вектора \mathbf{r} на единичный вектор \mathbf{n} , направленный вдоль одной из рассматриваемых осей выбранной системы координат. Так, $x = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_x)$. Соответственно шредингеровская волновая функция $\psi_n(q)$ в точке q' координатного пространства есть компонента состояния $|n\rangle$ в направлении собственного вектора $|q'\rangle$ оператора q ; она задается скалярным произведением

$$\psi_n(q') = \langle q' | n \rangle.$$

Компоненты состояния $|n\rangle$ в другой системе координат образуются как линейные комбинации из $\psi_n(q')$ аналогично тому, как компоненты вектора \mathbf{r} выражаются через линейные комбинации его компонент в системе, заданной единичными векторами \mathbf{n}_i :

$$x' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_{x'} = \sum_{i=x, y, z} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_i) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{x'}) = \sum_{i=x, y, z} r_i (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{x'}).$$

Например, в импульсном пространстве, в котором задаются собственные состояния $|p'\rangle$ оператора p , мы имеем по аналогии с вышеизложенным

$$\phi_n(p') = \langle p' | n \rangle = \int dq' \langle p' | q' \rangle \langle q' | n \rangle = \int dq' \langle p' | q' \rangle \psi_n(q').$$

Эта формула переходит в обычную запись волновой функции в импульсном пространстве, если подставить

$$\langle p' | q' \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-ip'q'}.$$

Новые обозначения можно проиллюстрировать на примере произвольного оператора \mathcal{O} . Так, уравнение для собственных значений

$$\mathcal{O} |n\rangle = \alpha |n\rangle$$

можно переписать, умножая его на $\langle q' |$, в форме

$$\langle q' | \mathcal{O} |n\rangle = \int dq'' \langle q' | \mathcal{O} | q'' \rangle \langle q'' | n \rangle = \alpha \langle q' | n \rangle,$$

или, в эквивалентном виде, как

$$\int dq'' \langle q' | \mathcal{O} | q'' \rangle \psi_n(q'') = \alpha \psi_n(q').$$

Оператор \mathcal{G} является, следовательно, матрицей в некотором частном представлении. Точно так же, произвольный матричный элемент $\langle m | \mathcal{G} | n \rangle$ можно переписать как

$$\langle m | \mathcal{G} | n \rangle = \int dq' dq'' \psi_m^*(q') \langle q' | \mathcal{G} | q'' \rangle \psi_n(q'').$$

Все эти общие равенства значительно упрощаются, если выбрать представление, в котором \mathcal{G} — диагональная матрица:

$$\langle q' | \mathcal{G} | q'' \rangle = \delta(q' - q'') \mathcal{G}(q'').$$

Например, $\langle p' | q' \rangle$ можно найти следующим образом:

$$q | q' \rangle = q' | q' \rangle.$$

$$\langle p' | q | q' \rangle = \int \langle p' | q | p'' \rangle \langle p'' | q' \rangle dp'' = q' \langle p' | q' \rangle.$$

В импульсном пространстве диагональное представление q записывается как

$$\langle p' | q | p'' \rangle = -i \delta'(p' - p''),$$

где δ' обозначает первую производную от δ -функции. Таким образом мы получаем

$$i \frac{\partial}{\partial p'} \langle p' | q' \rangle = q' \langle p' | q' \rangle,$$

$$\langle p' | q' \rangle \sim e^{-ip'q'}.$$

После этих предварительных замечаний можно перейти к изучению движения рассматриваемой системы. Согласно (2.7), уравнение движения (2.19) для оператора a имеет вид

$$\dot{a}(t) = -i\omega a(t). \quad (2.20)$$

Его можно непосредственно проинтегрировать:

$$a(t) = e^{-i\omega t} a(0). \quad (2.21)$$

Из этого результата и из эрмитово сопряженного равенства следует, что координата и импульс оказываются теми же функциями времени, что и в классической механике:

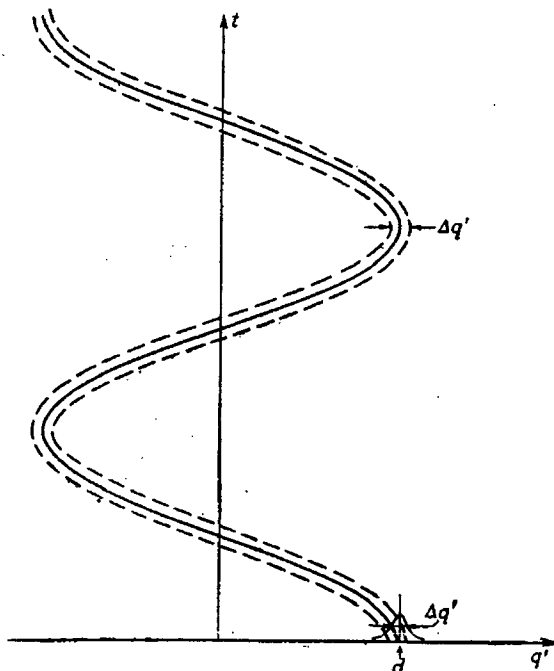
$$q(t) = \frac{a(0)e^{-i\omega t} + a^\dagger(0)e^{i\omega t}}{(2\omega)^{1/2}}, \quad (2.22a)$$

$$p(t) = -\frac{i\omega [a(0)e^{-i\omega t} - a^\dagger(0)e^{i\omega t}]}{(2\omega)^{1/2}}. \quad (2.22b)$$

Чтобы выявить зависимость от времени для нашей системы в определенном состоянии $|\rangle$, вычислим величину

$$|\langle q'(t) | \rangle|^2 = |\psi(q', t)|^2,$$

которая представляет собой вероятность нахождения осциллятора в точке q' в момент времени t . Для состояний $|n\rangle$ эта вероятность, конечно, не будет зависеть от времени; в нашем представлении это следует из (2.21). Чтобы получить более интересные сведения, мы



Фиг. 2.2. Движение пакета $|d\rangle$.

Изображены движение центра пакета и его ширина $\Delta q'$. Показано также размазывание пакета при $t=0$.

должны рассмотреть суперпозицию состояний $|n\rangle$. В частности, полезно рассмотреть собственное состояние (волновой пакет) $|d\rangle$ неэрмитова оператора a :

$$a(0)|d\rangle = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/2} d|d\rangle. \quad (2.23)$$

Покажем, что в этом состоянии вероятность испытывает гармоническое изменение во времени, период которого равен классической частоте ω осциллятора. По аналогии с (2.13) имеем

$$\psi_d(q') = \langle q'|d\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-(q'-d)^2 \omega/2}, \quad (2.24)$$

т. е. гауссовское распределение, имеющее ту же ширину, что и волновая функция основного состояния, но сдвинутое от начала координат на расстояние d . Конечно, это состояние не является собственным состоянием H , и наш формализм немедленно дает, что вес состояния $|n\rangle$ в пакете равен

$$|\langle n | d \rangle|^2 = \frac{1}{n!} |\langle 0 | a^n | d \rangle|^2 = \left(\frac{\omega d^2}{2}\right)^n \frac{1}{n!} |\langle 0 | d \rangle|^2.$$

Используя полноту набора $|n\rangle$, находим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle n | d \rangle|^2 = e^{d^2 \omega / 2} |\langle 0 | d \rangle|^2 = 1$$

и

$$|\langle n | d \rangle|^2 = e^{-d^2 \omega / 2} \left(\frac{d^2 \omega}{2}\right)^n \frac{1}{n!}. \quad (2.25)$$

Таким образом, вероятность обнаружения n -го возбужденного состояния в состоянии $|d\rangle$ подчиняется распределению Пуассона [2] со средним значением

$$n = \frac{\omega d^2}{2} \sim \left(\frac{\text{смещение}}{\text{флуктуация около нулевого положения}} \right)^2.$$

Мы вскоре увидим, что волновой пакет совершает гармоническое движение с амплитудой d и частотой ω . Следовательно, основной вклад в пакет дает возбужденное состояние с энергией, равной $1/2 \omega^2 d^2$, т. е. состояние с классической энергией колебательного движения с амплитудой d и частотой ω .

Чтобы выразить $|d\rangle$ через собственные состояния $q(t)$, вспомним, что согласно (2.22)¹⁾

$$a = e^{i\omega t} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{1/2} \left[q(t) + \frac{ip(t)}{\omega} \right]. \quad (2.26)$$

Отсюда находим для $\psi_d[q'(t)] = \langle q'(t) | d \rangle$:

$$\left[\omega q'(t) + \frac{\partial}{\partial q'(t)} \right] \psi_d = \omega d e^{-i\omega t} \psi_d, \quad (2.27)$$

что после интегрирования дает

$$\psi_d[q'(t)] \sim \exp \left[-\frac{\omega}{2} (q' - d e^{-i\omega t})^2 \right],$$

или, после нормировки,

$$\psi_d[q'(t)] = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\omega}{2} (q' - d \cos \omega t + 2ld \sin \omega t) (q' - d \cos \omega t) \right]$$

$$|\psi_d[q'(t)]|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\omega [q'(t) - d \cos \omega t]^2}. \quad (2.28)$$

¹⁾ В том случае, когда время в записи оператора не указано, здесь и в дальнейшем подразумевается, что $t=0$, т. е. что $a \equiv a(t=0) = a(0)$.

Последнее равенство показывает, что волновой пакет совершает незатухающие колебания с частотой ω , как это изображено на фиг. 2.2. Для средних значений координаты и импульса имеем из (2.28)

$$\begin{aligned}\langle d | q(t) | d \rangle &= d \cos \omega t, \\ \langle d | p(t) | d \rangle &= -\omega d \sin \omega t.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что состояние $|d\rangle$ является естественным квантовомеханическим обобщением классического гармонического движения; оно будет часто использоваться в дальнейшем.

При изучении более сложных систем мы будем придерживаться трактовки, изложенной выше на примере гармонического осциллятора, так как характерные черты этой простейшей модели присущи и всем сложным системам.

Глава 3

СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

3.1. Собственные значения гамильтониана. Чтобы подойти к постановке задачи в квантовой теории поля, мы рассмотрим теперь систему связанных осцилляторов с точки зрения квантовой механики. Задача, которую мы будем решать, представляет собой обобщение случая, рассмотренного в гл. 1 (фиг. 1.1), а именно: осцилляторы, расположенные на замкнутой цепочке, будут связаны теперь не только со своими соседями, но также и со своим положением равновесия. Гамильтониан и уравнения движения такой системы можно записать через обобщенные координаты q_n и импульсы p_n :

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [p_n^2 + \Omega^2 (q_n - q_{n+1})^2 + \Omega_0^2 q_n^2], \quad (3.1)$$
$$\ddot{q}_n = \Omega^2 (q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n) - \Omega_0^2 q_n.$$

Если положить здесь вторую независимую частоту Ω_0 равной нулю мы вновь вернемся к гамильтониану (1.2). Как выяснится в дальнейшем, в пределе непрерывной линии осцилляторов, гамильтониан (1.2) соответствует случаю поля без массы покоя, тогда как (3.1) соответствует полю с „массой“ Ω_0 . Как и в гл. 2, мы должны теперь выписать перестановочные соотношения, которые, согласно общим правилам квантовой механики, имеют вид

$$[q_l, p_m] = i\delta_{l,m}, \quad (3.2)$$
$$[q_l, q_m] = [p_l, p_m] = 0.$$

Чтобы определить собственные значения H , целесообразно использовать новые переменные, определенные в гл. 1 и 2, и в первую очередь ввести, например, нормальные координаты (1.3):

$$q_n = \sum_s e^{isn} \frac{Q_s}{N^{1/2}}, \quad p_n = \sum_s e^{-isn} \frac{P_s}{N^{1/2}}, \quad (3.3)$$

В этих переменных перестановочные соотношения, получаемые с помощью (1.5), имеют вид

$$\begin{aligned} [Q_l, P_m] &= i\delta_{l,m}, \\ [Q_l, Q_m] &= [P_l, P_m] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку q_n и p_n — эрмитовы операторы ($q_n = q_n^\dagger$), необходимо следующим образом обобщить условия (1.4):

$$Q_{-s} = Q_s^\dagger, \quad P_s = P_s^\dagger. \quad (3.5)$$

Подставляя новые переменные в гамильтониан, находим

$$H = \frac{1}{2} \sum_s (P_s P_s^\dagger + \omega_s^2 Q_s Q_s^\dagger), \quad (3.6)$$

$$\omega_s^2 = \Omega^2 \left(2 \sin \frac{s}{2} \right)^2 + \Omega_0^2.$$

Иначе говоря, в нормальных координатах наши осцилляторы оказываются независимыми; в согласии с (3.5) мы вводим (как и в гл. 2) переменные

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{1}{(2\omega_s)^{1/2}} (\omega_s Q_s + iP_s^\dagger), \\ a_s^\dagger &= \frac{1}{(2\omega_s)^{1/2}} (\omega_s Q_s^\dagger - iP_s), \end{aligned} \quad (3.7)$$

или

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{1}{(2\omega_s)^{1/2}} (a_s + a_{-s}^\dagger), \\ P_s &= -i \left(\frac{\omega}{2} \right)^{1/2} (a_{-s} - a_s^\dagger). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заметим, что $a_{-s} \neq a_s^\dagger$ и что мы снова имеем $2N$ независимых операторов a_s, a_s^\dagger , где $s = 2\pi l/N$ и $-N/2 \leq l \leq N/2$. Перестановочные соотношения для a_s и a_s^\dagger следуют непосредственно из (3.4) и (3.7):

$$\begin{aligned} [a_s, a_{s'}^\dagger] &= \delta_{s,s'}, \\ [a_s, a_{s'}] &= [a_s^\dagger, a_{s'}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Гамильтониан записывается как сумма членов вида (2.6):

$$H = \sum_s \frac{1}{2} \omega_s (a_s^\dagger a_s + a_{-s}^\dagger a_{-s} + 1) = \sum_s \omega_s \left(a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2} \right), \quad (3.10)$$

и заключения относительно его собственных значений и собственных векторов можно вывести точно таким же путем как и в предыдущей главе.

Состояние наиминимальной энергии $|0\rangle$ определяется условием

$$a_s |0\rangle = 0 \quad (3.11)$$

для всех s . Ему соответствует собственное значение

$$E = \sum_s \frac{1}{2} \omega_s. \quad (3.12)$$

В общем случае собственное значение дается равенством

$$E = E_0 + \sum_s n_s \omega_s, \quad (3.13)$$

где n_s пробегает ряд из N неотрицательных целых чисел. Собственный вектор, принадлежащий собственному значению (3.13), представляет собой обобщение (2.11):

$$\begin{aligned} |n_1, n_2, n_3, \dots, n_N\rangle = \\ = (n_1! n_2! n_3! \dots n_N!)^{-1/2} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} (a_3^\dagger)^{n_3} \dots (a_N^\dagger)^{n_N} |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тот факт, что собственные значения энергии оказались целыми числами, помноженными на частоты основных колебаний, уже сам по себе приводит к мысли о корпускулярной интерпретации теории. Состояние (3.14) обладает свойствами состояния, в котором n_1 частиц имеют энергию ω_1 , n_2 частиц — энергию ω_2 и т. д. Далее, когда мы рассмотрим локализованные в пространстве величины, например энергию или импульс, содержащиеся в определенном объеме, станет очевидно, что корпускулярные свойства системы в действительности значительно обширнее, чем мы их представляем себе в настоящий момент. Поскольку наша система представляет собой упругие (звуковые) волны, получающиеся кванты называют обычно фононами. Энергия этих квантов аддитивна, так что они ведут себя как невзаимодействующие частицы. Далее, состояние характеризуется лишь числом частиц в каждом из N типов колебаний с энергиями ω_s , так что частицы, принадлежащие к одному и тому же типу, не отличаются друг от друга. Каждый вид колебаний может содержать произвольное число частиц. В силу изложенного частицы подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, и мы имеем дело с моделью неразличимых частиц. Оказывается, что эти частицы гораздо больше похожи на колебания, чем на классические тела, а два любых колебания не могут быть различимы, если их частоты совпадают. Утрата частицами индивидуальности представляет собой одно из наиболее революционных последствий применения квантовой теории к рассмотрению полей. Мы не будем подробно останавливаться на этой стороне вопроса, поскольку он обсуждается в большинстве книг по элементарной квантовой механике. Соответствие между элементарными возбуждениями упругого тела и идеальным бозе-газом служит основой теории тепло-

емкости твердых тел при низких температурах. При этом обычно предполагается очевидным, что каждому движению с частотой ω соответствует энергия $\hbar\omega$. Однако, как мы убедились, необходимо некоторое математическое исследование, чтобы вывести этот результат из исходных принципов. Наше предположение о чисто гармоническом характере сил не всегда, конечно, хорошо соответствует реальной действительности, но существует ряд систем, обладающих существенными чертами бозе-газа.

3.2. Квантовые свойства. Нам остается исследовать, как проявляются в системе связанных осцилляторов такие типичные для осциллятора квантовые свойства, как нулевые колебания и энергия нулевых колебаний. Из (3.12) и (3.6) мы видим, что энергия нулевых колебаний лежит между $N\Omega_0/2$ и $N(\Omega^2 + \Omega_0^2)^{1/2}/2$; таким образом она совпадает с энергией N несвязанных осцилляторов, колеблющихся с основными частотами, лежащими между $N\Omega_0/2$ и $N(\Omega^2 + \Omega_0^2)^{1/2}/2$. В кристаллической решетке энергия нулевых колебаний играет существенную роль, но в случае полей элементарных частиц до сих пор не удалось связать ее с наблюдаемыми эффектами. В последнем случае она становится бесконечной, поскольку число степеней свободы стремится к бесконечности. Релятивистская инвариантность требует, чтобы она была равной нулю, поскольку состояние без частиц должно выглядеть одинаково для наблюдателей в различных лоренцовых системах отсчета; существование исчезающего вектора энергии — импульса нарушает это свойство. Возникающую трудность устраняют, определяя оператор энергии как $H - E_0$. Возможно, однако, что когда-нибудь будет открыт более глубокий смысл этого обстоятельства.

Для нулевых колебаний n -го атома в основном состоянии системы мы находим, учитывая равенство $\langle 0 | q_n | 0 \rangle = 0$:

$$(\Delta q_n)^2 = \langle 0 | q_n^2 | 0 \rangle = \sum_{s, s'} \frac{e^{i(s-s')n}}{N} \langle 0 | Q_s Q_{s'}^+ | 0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_s \frac{1}{2\omega_s}. \quad (3.15)$$

Иными словами, квадратичная флуктуация равна в точности среднему значению флуктуаций, связанных с частотами ω_s . Как и можно было ожидать, квантовые флуктуации для различных типов колебаний независимы, так что квадратичные флуктуации аддитивны. Флуктуации атомов в решетке имеют амплитуду, величина которой лежит в промежутке между ядерными и атомными размерами. Эти флуктуации непосредственно наблюдаемы, например, при рассеянии света или нейтронов. Чем легче атомы и чем слабее силы, действующие между ними, тем больше амплитуда колебаний. Как уже упоминалось, они приводят к макроскопическим эффектам в гелии, препятствуя

его затвердеванию при нормальном давлении даже при абсолютном нуле. Хотя в элементарной квантовой механике эти флуктуации хорошо известны, однако аналогичный эффект в случае полей оказался несколько неожиданным, и был установлен лишь в период новейшего развития квантовой электродинамики. Мы отложим детали до следующей главы, в которой изучаются флуктуационные эффекты при наличии частиц.

3.3. Вопросы динамики. Для зависимости операторов поля от времени мы получаем по аналогии с (2.20) — (2.22) следующие уравнения:

$$\dot{a}_s(t) = -i\omega_s a_s(t) \quad (3.16)$$

и

$$q_n(t) = \sum_s \left(\frac{1}{2N\omega_s} \right)^{1/2} [e^{i(sn - \omega_s t)} a_s(0) + e^{-i(sn - \omega_s t)} a_s^\dagger(0)]. \quad (3.17)$$

Последнее равенство дает ту же временную зависимость, что и случай классического решения уравнений (1.8). Решение (3.17) представляет собой наиболее общую суперпозицию колебаний с собственными частотами ω_s с тем существенным отличием, однако, что коэффициенты разложения теперь являются операторами.

По аналогии с концом предыдущей главы мы можем построить стандартный волновой пакет, в котором n -й атом при $t=0$ смещен из положения равновесия на d_n . Общее состояние такого рода $|d_i\rangle$ определяется равенством

$$a_s |d_i\rangle = \left(\frac{\omega_s}{2N} \right)^{1/2} \sum_{n'} e^{-isn'} d_{n'} |d_i\rangle \quad (3.18)$$

для всех значений s .

Для действительных d_n ожидаемое значение координаты в момент t соответствует классическому движению, вызванному начальным смещением атомов d_n , и нулевой начальной скоростью

$$\langle d | q_n(t) | d \rangle = \sum_{s, n'} \frac{1}{N} d_{n'} \cos [s(n - n') - \omega_s t]. \quad (3.19)$$

Макроскопическую звуковую волну с частотой ω_s и амплитудой d можно представить в виде (3.18), при d_n принимающих комплексные значения $d_n = d e^{is'n}$. Называя это состояние $|\omega_{s'}\rangle$, имеем

$$a_s |\omega_{s'}\rangle = d \delta_{ss'} \left(\frac{N\omega_s}{2} \right)^{1/2} |\omega_{s'}\rangle$$

и следовательно, оно соответствует распределению Пуассона для фононов соответствующей частоты со средним числом фононов $d^2\omega_{s'}/2$.

Для решения, зависящего от времени, находим

$$\langle q_n(t) | \omega_{s'} \rangle = \psi_{d_{s'}} [q_n(t)] \sim \exp \left[-\frac{\omega_{s'}}{2} \left(q_n - \sum_{n'} d_{n'} e^{i(s'n - s'n' - \omega_{s'}t)} \right)^2 \right],$$

а средние положения в этом случае даются простой формулой

$$\langle d | q_n | d \rangle = d \cos(s'n - \omega_{s'}t). \quad (3.20)$$

Если мы хотим, чтобы такое квазиклассическое движение было наблюдаемо, необходимо, чтобы смещение d было много больше амплитуды нулевых колебаний. Последняя, как можно видеть из (3.15), равна по порядку величины $1/(\omega_{s'})^{1/2}$, если все частоты порядка $\omega_{s'}$. Поскольку среднее число фононов равно $d^2\omega_{s'}/2$, то указанное условие означает, что оно должно быть $\gg 1$. В состоянии с определенным числом n' фононов ожидаемые значения всех q_n (т. е. $\langle n' | q_n | n' \rangle$) равны нулю. Этот факт обычно формулируется в виде утверждения, что фазы волн, связанных с фононами, полностью неопределенны.

В заключение можно сказать, что звуковые волны и фононы представляют как классический, так и квантовомеханический аспекты колебательных систем и являются обобщением того, что было найдено нами для гармонического осциллятора.

Глава 4

ПОЛЯ

4.1. Непрерывно связанные осцилляторы. Рассмотрим теперь, как действуют квантовомеханические методы в пределе непрерывной цепочки. В пределе $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, но при конечном aN (см. гл. 1)

$$q_n \rightarrow q(x) a^{1/2}, \quad \sum_n \rightarrow a^{-1} \int dx, \quad \Omega \rightarrow \frac{v}{a},$$

а гамильтониан и уравнения поля приобретают вид

$$H = \int_0^L dx \frac{1}{2} \left[p^2(x, t) + v^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \Omega_0^2 q^2(x, t) \right], \quad (4.1)$$
$$\ddot{q}(x, t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) + \Omega_0^2 q^2(x, t) = 0.$$

Как упоминалось в гл. 1, даже в непрерывном случае нормальные координаты образуют счетную последовательность. Поэтому проквантуем сперва теорию в этих переменных, а коммутационные соотношения для непрерывных координат $q(x)$ изучим позднее. Переписывая (3.3) в форме (1.10), при $s \rightarrow ka$

$$q(x) = L^{-1/2} \sum_k e^{ikx} Q_k, \quad p(x) = L^{-1/2} \sum_k e^{-ikx} P_k \quad (4.2)$$
$$k = \frac{2\pi l}{L}, \quad -\infty < l < \infty,$$

находим, аналогично (1.12), выражение для энергии:

$$H = \sum_k \frac{1}{2} (P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger), \quad \omega_k^2 = v^2 k^2 + \Omega_0^2, \quad (4.3)$$

где был использован непрерывный предел (1.5):

$$\int_0^L dx e^{i(k-k')x} = L \delta_{kk'}.$$

Теперь это — сумма по бесконечному числу несвязанных осцилляторов. В переменных с индексом k перестановочные соотношения (3.2) имеют вид

$$\begin{aligned} [Q_k, P_{k'}] &= i\delta_{k, k'}, \\ [Q_k, Q_{k'}] &= [P_k, P_{k'}] = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

и, аналогично, соотношения для операторов a и a^\dagger , определенных равенствами (3.7), имеют вид

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta_{k, k'}, \\ [a_k, a_{k'}] &= [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0. \end{aligned}$$

С помощью этих операторов мы можем записать следующее выражение для энергии:

$$H = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (4.5)$$

В соответствии с изложенным в гл. 3 находим, что собственные значения $(H - E_0)$ являются целыми кратными величины ω_k . Мы увидим в следующих главах, что k имеет смысл импульса частицы с энергией ω_k . Следовательно, если v — скорость света и $\Omega_0 = mc^2$, то энергия и импульс квантованного поля связаны таким же соотношением, как и в случае релятивистской частицы.

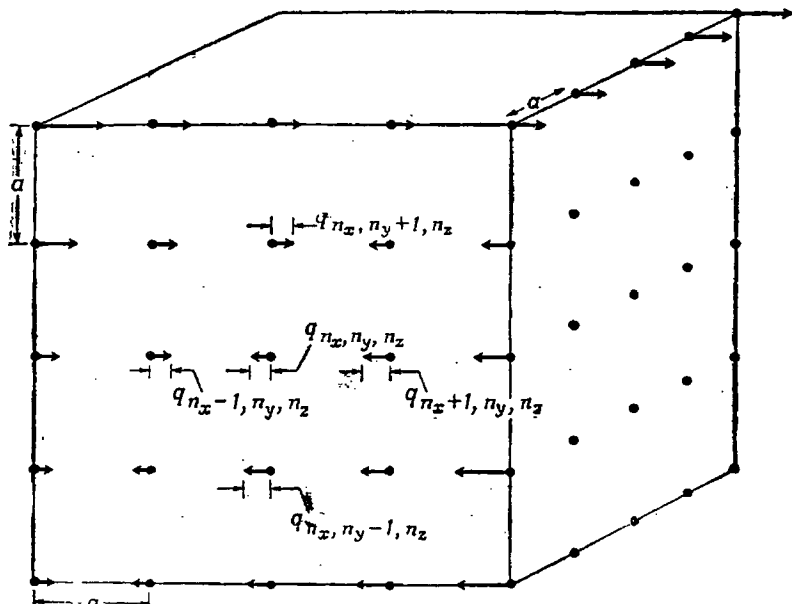
Непрерывная форма записи легко обобщается на трехмерный случай. Для механической модели поля смещений, которую мы до настоящего времени имели в виду, трехмерный случай несколько более сложен, так как поле в этом случае является векторным и имеет три компоненты. Однако при наличии только одного разрешенного направления для смещений трехмерной атомной решетки кристалла, например x , как это показано на фиг. 4.1, мы имеем дискретный аналог скалярного (эрмитова) поля $\phi(x, y, z)$. Именно этот простейший случай, как будет показано в дальнейшем, удовлетворительным образом описывает π -мезоны, если отождествить v со скоростью света и Ω_0 с массой π -мезона.

Трехмерная запись (3.1) имеет вид¹⁾

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3r \{ \dot{\phi}(\mathbf{r}, t)^2 + [\nabla\phi(\mathbf{r}, t)]^2 + m^2\phi^2(\mathbf{r}, t) \}, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(\mathbf{r}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

¹⁾ Мы будем использовать символ \mathbf{r} в качестве сокращенного обозначения для трех пространственных координат (x_1, x_2, x_3) или x, y, z ; (\mathbf{r}, t) для (x, y, z, t) и r для $|\mathbf{r}|$ (т. е. $r^2 = r^2$). Кроме того, мы будем часто записывать $(\mathbf{r}, 0)$ просто как \mathbf{r} .

Фактически мы записали уравнение Клейна — Гордона. Предвосхищая будущие обозначения, мы положим величину $v = c$ равной 1 и заменим \mathcal{Q}_0 на m .



Фиг. 4.1. Механическая аналогия скалярного поля.

В кубе, длина сторон которого равна L , расположены колеблющиеся атомы, расстояние между которыми в положении равновесия равно a . Все атомы колеблются в одном направлении, выбранном здесь вдоль оси x .

Трехмерные условия периодичности требуют, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} \phi(x+L, y, z, t) &= \phi(x, y+L, z, t) = \\ &= \phi(x, y, z+L, t) = \phi(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Эти условия и уравнение движения (4.6) можно удовлетворить в аналогии с (3.17), если положить¹⁾

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} a_{\mathbf{k}} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}}t)} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{(2\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}}, \\ k_{x, y, z} &= \frac{2\pi l_{x, y, z}}{L}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

¹⁾ В дальнейшем мы будем для сокращения писать ω вместо $\omega_{\mathbf{k}}$, ω' вместо $\omega_{\mathbf{k}'}$, и т. д.

Перестановочные соотношения (3.9) обобщаются следующим образом:

$$\begin{aligned} [a_k, a_{k'}^\dagger] &= \delta_{k, k'}, \\ [a_k, a_k] &= [a_k^\dagger, a_k^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Вскоре мы дадим более общий рецепт для отыскания коммутационных свойств поля. Гамильтониан может быть записан в форме, сходной с (3.10), за исключением того, что сумма по k является теперь трехмерной:

$$H = \sum_k \omega \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (4.10)$$

Итак, мы получили замечательный результат, смысл которого заключается в том, что, применяя правила квантовой механики к полю, подчиняющемуся уравнению Клейна — Гордона, мы получаем систему, ведущую себя как совокупность неограниченного числа релятивистских бозе-частиц. Точнее говоря, мы получили по аналогии с (3.14) и (3.13) состояние

$$\begin{aligned} |n_{k_1}, n_{k_2}, n_{k_3}, \dots\rangle &\equiv |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = \\ &= \frac{1}{(n_1! n_2! n_3! \dots)^{1/2}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} (a_3^\dagger)^{n_3} \dots |0, 0, 0, \dots\rangle, \end{aligned}$$

являющееся собственным состоянием гамильтониана H с энергией E^1 :

$$\begin{aligned} H |n_1, n_2, \dots\rangle &= \sum_k \left(a_k^\dagger a_k \omega + \frac{1}{2} \omega \right) |n_1, n_2, \dots\rangle = \\ &= E |n_1, n_2, \dots\rangle = \sum_i \left(n_i \omega_i + \frac{1}{2} \omega_i \right) |n_1, n_2, \dots\rangle. \end{aligned}$$

Поэтому собственные функции удовлетворяют уравнению Шредингера для неограниченного числа частиц с энергиями, задаваемыми равенствами

$$\omega_i = (k_i^2 + m^2)^{1/2}.$$

Поскольку применение оператора a^\dagger к вектору состояния с n частицами приводит к $n+1$ частице, a^\dagger называют обычно оператором рождения и соответственно a — оператором уничтожения (поглощения).

Существуют поля другого типа, гамильтониан которых является не непрерывным аналогом гамильтониана системы связанных осцилляторов, а аналогом гамильтониана ларморовской прецессии электронных спинов. Можно показать, что в этом случае квантование при-

¹⁾ К этому выводу и к соответствующему уравнению можно прийти и непосредственно с помощью перестановочных соотношений (4.9).

водит к частицам, подчиняющимся статистике Ферми — Дирака. Рассмотрение таких полей, соответствующих полужелому спину, выходит за рамки этой книги. Однако мы хотели бы заметить, что квантовая теория поля предсказывает экспериментально установленную связь спина и статистики.

Грубо говоря, переход к трем измерениям увеличивает число степеней свободы втрое. Это изменение не столь существенно, как предельный переход $N \rightarrow \infty$, использованный в этой главе.

Наконец, обсудим в общих чертах предел $L \rightarrow \infty$, когда нефизическое граничное условие (4.7) исчезает. В этом пределе векторы \mathbf{k} в (4.8) образуют плотную последовательность, такую, что k_i становятся непрерывными переменными, изменяющимися от $-\infty$ до ∞ . Мы будем отмечать это обстоятельство, обозначая операторы уничтожения и рождения в этом пределе через $a(\mathbf{k})$, $a^\dagger(\mathbf{k})$. Далее $\sum_{\mathbf{k}}$ следует теперь заменить интегралом. Так как расстояние между двумя соседними точками в \mathbf{k} пространстве равно $2\pi/L$, то их плотность равна $(L/2\pi)^3$ и, следовательно, в этом пределе

$$\sum_{\mathbf{k}} \equiv L^{-3} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow (2\pi)^{-3} \int d^3k.$$

Эта сумма с соответствующими весами, распространенная на все степени свободы, входит в большинство вычислений, ведущих к численным результатам, поэтому мы ввели для нее новое обозначение \mathbf{S} .

При переходе к бесконечному числу степеней свободы возникает ряд вопросов, которые мы сейчас обсудим.

Прежде всего, поскольку теперь имеется бесконечное множество ω и они не имеют верхней границы, сумма, определяющая нулевую энергию

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega, \quad (4.11)$$

расходится. Этой трудности можно избежать, назвав

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \quad (4.12)$$

энергией, поскольку в настоящий момент мы не знаем, что представляет собой энергия нулевых колебаний поля. Можно было бы спросить, сходится ли бесконечная сумма (4.12) к определенному пределу. Однако этот вопрос связан с трудными вопросами о свойствах несепарабельных гильбертовых пространств, к ответу на которые мы еще не готовы. Читатель должен удовлетвориться тем фактом, что в случае состояний, включающих лишь конечное число возбужденных осцилляторов, применение H дает конечную сумму.

Что касается другого характерного квантового свойства, а именно нулевых флуктуаций $\phi(\mathbf{r})$, то здесь бесконечное число степеней свободы также приводит к некоторым трудностям. Аналогично (2.15) и (3.15) находим

$$\langle 0 | \phi(\mathbf{r}) | 0 \rangle = 0, \quad (4.13)$$

$$[\Delta\phi(\mathbf{r})]^2 = \langle 0 | \phi^2(\mathbf{r}) | 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2(k^2 + m^2)^{1/2}}.$$

Сумма (4.13) расходится. Это лучше всего видно в пределе $L \rightarrow \infty$, где мы получаем:

$$[\Delta\phi(\mathbf{r})]^2 = (2\pi)^{-3} \int d^3k \frac{1}{2(k^2 + m^2)^{1/2}} \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Бесконечное значение квадратичной флуктуации связано с тем фактом, что $\phi(\mathbf{r})$ дает состояние с бесконечной нормой, если применить его к любому состоянию с конечной энергией¹⁾. Таким образом, $\phi(\mathbf{r})$ не относится к операторам в том гильбертовом пространстве, с которым мы имеем дело. Оказывается, однако, что среднее значение $\phi(\mathbf{r})$ в конечной области пространства имеет конечную квадратичную флуктуацию. Чтобы убедиться в этом, определим среднее значение поля $\bar{\phi}_b$ в объеме b^3 равенством

$$\bar{\phi}_b = (2\pi b^2)^{-1/2} \int d^3r e^{-r^2/2b^2} \phi(\mathbf{r}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\phi}_b^2 | 0 \rangle &= (2\pi)^{-6} b^{-6} \int d^3k d^3r d^3r' \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{2\omega} e^{-(r^2+r'^2)/2b^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{2\omega} e^{-k^2 b^2} \approx \frac{b^{-3}}{(b^{-2} + m^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Последнее выражение показывает, что по мере уменьшения объема b^3 , по которому производится усреднение, флуктуации поля становятся все более и более сильными. Поскольку в процессе усреднения вклад длин волн, меньших размера b , исчезает, уменьшение объема ведет к увеличению общего вклада во флуктуации поля.

На первый взгляд кажется, что это должно привести к существеннейшим последствиям. Электромагнитные потенциалы V и A удовлетворяют уравнению типа (4.6) при $m=0$. Поэтому для средней квадратичной флуктуации V мы имеем:

$$\Delta\bar{V} \sim \frac{1}{b},$$

¹⁾ Уравнение (4.14) представляет собой частный вариант этого утверждения для случая вакуумного состояния.

что дает чрезвычайно большую величину, если вспомнить, что в наших единицах¹⁾ элементарный заряд $e = (4\pi/137)^{1/2}$. Потенциал $e/4\pi b$, создаваемый элементарным зарядом на расстоянии b , оказывается много меньшим, чем квантовые флуктуации поля, усредненного по сравнимой области. Можно задать вопрос, как при этих условиях электрон в атоме водорода может двигаться по орбите, предписываемой силой, действующей на него со стороны протона. Ответ заключается в том, что большинство флуктуаций имеет частоту $\sim b^{-1} = me^2$, которая при $b \sim 10^{-8}$ см в 137 раз превосходит частоту движения электрона в основном состоянии. Флуктуации приводят лишь к высокочастотным вибрациям электрона с малой амплитудой, тогда как кулоновское поле действует относительно долгое время в одном направлении и определяет движение. Легко показать [2, 3], что амплитуда такой вибрации меньше, чем комптоновская длина волны электрона, 10^{-11} см. Следовательно, этот эффект смещает атомные уровни меньше, чем релятивистские эффекты, которые приводят к размазыванию заряда электрона по области с размерами порядка комптоновской длины волны электрона. Это будет доказано для скалярных частиц в гл. 5. Тем не менее, современные эксперименты устанавливают действие квантовых флуктуаций в атоме водорода с точностью $1 \cdot 10^{-4}$. В мезодинамических приложениях, которые мы рассмотрим в дальнейшем, роль вакуумных флуктуаций поля особенно велика, так как мезон-нуклонное взаимодействие гораздо сильнее электромагнитного. Флуктуации непрерывно встряхивают спин и заряд нуклона, так как π -мезонное поле существеннее действует на эти переменные, чем на координаты нуклона, с которым оно связано.

4.2. Вывод уравнений движения из лагранжиана. Мы рассмотрим теперь вид перестановочных соотношений для непрерывных переменных $\phi(r)$ и $\dot{\phi}(r)$. Это даст ключ к общим правилам квантования. Используя (4.8) и (4.9), получаем

$$\begin{aligned} [\phi(r, t), \phi(r', t')]_{t=t'} &= [\dot{\phi}(r, t), \dot{\phi}(r', t)]_{t=t'} = 0, \\ [\phi(r, t), \dot{\phi}(r, t')]_{t=t'} &= i\delta^3(r - r'). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь мы воспользовались известным из теории разложений Фурье фактом, состоящим в том, что следующая сумма представляет собой эффективно δ -функцию в интервале $-L/2 < x < L/2$ [4]. В пределе $L \rightarrow \infty$

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \delta^3(\mathbf{r}). \quad (4.17)$$

¹⁾ Напомним, что $\hbar = c = 1$.

Это равенство отражает полноту набора экспоненциальных функций и является непрерывным аналогом (1.5). Вид (4.16) для непрерывной формы канонических перестановочных соотношений можно было предвидеть. Действительно, предел равенства $[q_l, p_m] = i\delta_{ln}$ [т. е. (3.2)] при $a \rightarrow 0$ имеет вид

$$[q(x), p(x')] = [q(x), \dot{q}(x')] = i \frac{\delta_{x,x'}}{a},$$

где $\delta_{x,x'}$ равно 1, если x и x' находятся в одной и той же ячейке пространства и равно нулю в противоположном случае. В пределе $a \rightarrow 0$ отношение $\delta_{xx'}/a$ дает как раз одномерную дираковскую δ -функцию, $\delta(x - x')$, а (4.16) представляет собой трехмерное обобщение этого равенства.

Теперь мы можем установить общие правила квантования поля с помощью формального аппарата функциональной производной и δ -функции. Удобно начать с лагранжиана, из которого уравнения поля получаются как свойство стационарности интеграла действия

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(\phi, \nabla\phi, \dot{\phi}) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \mathcal{L}(\phi, \nabla\phi, \dot{\phi}),$$

где \mathcal{L} — плотность лагранжиана. Накладывая в качестве граничного условия требование, чтобы произвольная вариация $\delta\phi$ равнялась нулю в точках t_1 и t_2 , мы получаем с помощью функциональной производной, введенной в (1.13):

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} \delta \dot{\phi} + \frac{\delta L}{\delta \phi} \delta \phi \right) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\phi)} \nabla \right] \delta \phi = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \delta \phi \left[-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\phi)} \right]. \end{aligned}$$

Поэтому эйлеровские уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\phi)}.$$

С помощью функциональных производных

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \text{и} \quad \frac{\delta L}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla\phi)}$$

уравнения Эйлера приводятся к классической форме,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{r}, t)} = \frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{r}, t)}, \quad (4.18)$$

Обобщение канонически сопряженной переменной записывается как

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{r}, t)}.$$

Для гамильтониана и перестановочных соотношений мы постулируем в согласии с общими формулами

$$\begin{aligned} H &= \int d^3r \pi(\mathbf{r}, t) \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) - L, \\ [\phi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} &= i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\phi(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} &= [\pi(\mathbf{r}, t), \pi(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Таким образом, переход от дискретных к непрерывным переменным осуществляется посредством замены суммы на интеграл, частной производной на функциональную производную и δ -символа Кронекера на дираковскую δ -функцию.

Уравнения поля и гамильтониан (4.6) строятся из лагранжиана¹⁾

$$L(t) = \int d^3r \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2]. \quad (4.20)$$

С помощью (1.13) можно убедиться, что канонически сопряженное поле $\pi(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{r}, t)},$$

поэтому постулированный нами лагранжиан ведет к гамильтониану (4.6) и перестановочным соотношениям (4.4) и (4.16).

Использование механической аналогии для нахождения уравнений поля (4.6) может показаться неубедительным, если применять ее, скажем, к полю π -мезонов. Для более систематического вывода существен лагранжев формализм. Чтобы удовлетворить требованию лоренц-инвариантности, плотность лагранжиана, т. е. величина под знаком интеграла (4.20), должна быть скаляром. Наше выражение по существу представляет собой самую общую скалярную форму, квадратичную по полю и его производным.

В качестве следующего примера, который мы будем иногда использовать для противопоставления релятивистскому полю ϕ , применим лагранжев формализм к полю ψ , подчиняющемуся уравнению Шредингера. Это уравнение первого порядка относительно произ-

¹⁾ Этот лагранжиан определен не единственным образом, так как его можно изменить путем добавления к нему полной производной по времени,

водной по времени, однако, поскольку поле не является эрмитовым $\psi^\dagger \neq \psi$, два уравнения для ψ и ψ^\dagger эквивалентны одному уравнению второго порядка. Применение наших правил к уравнениям первого порядка требует некоторой осторожности. Чтобы убедиться в этом, мы вернемся на время к рассмотрению одиночного гармонического осциллятора. Уравнение движения при $\omega = 1$ для реального оператора q , $\ddot{q} = -q$ можно заменить на два дифференциальных уравнения первого порядка для неэрмитовых операторов \hat{Q} и \hat{Q}^\dagger :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{Q}} &= q - i\dot{q}, & \dot{\hat{Q}} &= i\hat{Q}, \\ \hat{Q}^\dagger &= q + i\dot{q}, & \dot{\hat{Q}}^\dagger &= -i\hat{Q}^\dagger. \end{aligned}$$

Мы видим, что эрмитов лагранжиан, дающий $\dot{\hat{Q}} = i\hat{Q}$ и обычное выражение для энергии, имеет вид

$$L = -\frac{i}{4}(\hat{Q}^\dagger \dot{\hat{Q}} - \dot{\hat{Q}}^\dagger \hat{Q}) - \frac{1}{2} \hat{Q}^\dagger \hat{Q}.$$

Сопряженные переменные π и π^\dagger равны

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\hat{Q}}} = -\frac{i\hat{Q}^\dagger}{4}, \quad \pi^\dagger = \frac{\delta L}{\delta \dot{\hat{Q}}^\dagger} = \frac{i\hat{Q}}{4}$$

и, следовательно, для гамильтониана¹⁾ можно записать:

$$H = \pi \dot{\hat{Q}} + \pi^\dagger \dot{\hat{Q}}^\dagger - L = \frac{1}{2} \hat{Q}^\dagger \hat{Q} = \frac{1}{2} (q^2 + \dot{q}^2) + \frac{1}{2}.$$

Однако правильные перестановочные соотношения, выведенные из соотношения $[q, \dot{q}] = i$, имеют вид²⁾

$$[\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}] = 2, \quad [\hat{Q}, \hat{Q}] = [\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}^\dagger] = 0$$

и значит

$$[\hat{Q}, \pi] = \frac{i}{2}, \quad [\hat{Q}^\dagger, \pi^\dagger] = \frac{i}{2}.$$

Множитель $1/2$, появляющийся в перестановочных соотношениях для канонически сопряженных операторов \hat{Q} и π и \hat{Q}^\dagger и π^\dagger , всегда³⁾

¹⁾ \hat{Q} и \hat{Q}^\dagger — независимые переменные.

²⁾ Мы выбрали эрмитов лагранжиан, поскольку он идентичен прежнему лагранжиану для гармонического осциллятора. Посредством добавления члена $i(d/dt)(\hat{Q}^\dagger, \hat{Q})$ можно перейти к неэрмитову гамильтониану, приводящему к правильным уравнениям движения, но перестановочным соотношениям $[\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}] = 2$, $[\hat{Q}, \pi] = 0$, $[\hat{Q}^\dagger, \pi^\dagger] = i$. См., например, у Шиффа [4].

³⁾ Это относится, конечно, только к системам рассматриваемого типа, а именно к системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями первого порядка по времени.

присутствует в том случае, когда при выводе уравнений движения первого порядка для неэрмитова поля используется эрмитов лагранжиан.

Соответствующий лагранжиан для шредингеровских полей ψ и ψ^\dagger можно записать как

$$L = \int d^3r \frac{1}{2} \left[i (\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger \psi) - \frac{1}{m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi \right], \quad (4.21)$$

а уравнения поля, вытекающие из него, имеют вид¹⁾

$$i\dot{\psi} = -\frac{\nabla^2 \psi}{2m},$$

$$i\dot{\psi}^\dagger = \frac{\nabla^2 \psi}{2m}.$$

Операторы обобщенных импульсов π и π^\dagger , канонически сопряженные к ψ и ψ^\dagger , равны

$$\pi = \frac{i}{2} \psi^\dagger, \quad \pi^\dagger = -\frac{i}{2} \psi.$$

С помощью перестановочных соотношений

$$[\psi(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r})] = [\psi^\dagger(\mathbf{r}), \pi^\dagger(\mathbf{r})] = \frac{i}{2} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$[\psi(\mathbf{r}), \pi^\dagger(\mathbf{r})] = [\psi^\dagger(\mathbf{r}), \pi(\mathbf{r})] = 0 \quad (4.22)$$

мы получаем

$$[\psi(\mathbf{r}, t), \psi^\dagger(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$[\psi(\mathbf{r}, t), \psi(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = [\psi^\dagger(\mathbf{r}, t), \psi^\dagger(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = 0.$$

Наконец, гамильтониан равен

$$H = \int d^3r \frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi = \int d^3r \frac{i}{2m} (\nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \pi^\dagger - \nabla \pi \cdot \nabla \psi).$$

При выводе уравнений поля из гамильтониана необходимо соблюдать осторожность. Только после того как эрмитов гамильтониан явным образом выражен через канонически сопряженные импульсы π и π^\dagger , соотношения (1.14) дают правильные уравнения поля. Собственные

¹⁾ Этот случай представляет по существу предельный случай поля Клейна — Гордона

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{imt} \phi(\mathbf{r}, t).$$

значения энергии можно получить таким же способом, как и раньше¹⁾:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - E_{\mathbf{k}} t)} a_{\mathbf{k}}, \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0. \quad (4.23)$$

$$H = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}.$$

Случай шредингеровского поля по существу несколько проще случая релятивистского поля Клейна — Гордона; в частности, соотношение между энергией и импульсом для квантов поля имеет здесь классический вид. В следующей главе мы изучим некоторые различия между релятивистским и нерелятивистским случаями, которые не имеют тривиальной кинематической природы.

¹⁾ Поскольку ψ — неэрмитов оператор, часть, связанная с операторами рождения $a_{\mathbf{k}}^\dagger$, не необходима.

Глава 5

НАБЛЮДАЕМЫЕ

5.1. Энергия, импульс и угловой момент. Исходя из нашей механической аналогии, мы рассмотрели пока только две наблюдаемые величины: полную энергию и амплитуду поля $\phi(\mathbf{r}, t)$. В непрерывном пределе последняя не была оператором в том смысле, что применение ϕ к состоянию с конечной нормой приводило к состоянию с бесконечной нормой [см. (4.14)]. Таким образом, нам предстоит обратиться к некоторым другим наблюдаемым для обсуждения свойств квантованного поля. В классической теории поля существуют определенные общие способы построения таких величин, как импульс или угловой момент поля для заданного лагранжиана. В настоящей главе мы изучим эти и другие наблюдаемые вместе с их коммутационными свойствами; следующая глава будет посвящена собственным состояниям их операторов.

Как и в механике материальной точки, инвариантность лагранжиана относительно определенных преобразований обеспечивает существование соответствующих констант движения. Мы уже сталкивались с одним примером этого общего принципа, а именно с существованием энергии. Если, и только если лагранжиан не зависит явно от времени, энергия (4.19) сохраняется. Читатель легко проверит формулу

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (5.1)$$

где $\partial L / \partial t$ не включает неявную зависимость от времени, входящую через член $\phi(\mathbf{r}, t)$. Аналогично, если L не зависит от координат \mathbf{r} (примером могут служить лагранжианы, рассмотренные в гл. 4), что означает инвариантность относительно пространственных сдвигов и вращений, то мы получаем еще шесть интегралов движения (по одному на каждый параметр рассматриваемой группы). В классической механике интегралы движения, связанные с инвариантностью (для сдвигов и вращений это соответственно полный импульс и угловой момент), являются операторами определенного преобразования. Инвариантность классического гамильтониана относительно таких

преобразований обеспечивает равенство нулю скобок Пуассона между гамильтонианом и операторами преобразований, что означает сохранение последних. Это же остается справедливым и в квантовой теории, где скобки Пуассона заменяются коммутатором. Поэтому импульс и угловой момент определяются в общем виде как операторы, для которых коммутатор с любой величиной дает изменение этой величины при бесконечно малых смещении и повороте.

Здесь необходимо вспомнить, что наша задача еще не инвариантна относительно вращений из-за кубических условий периодичности, наложенных на наши поля. Однако инвариантность можно получить, наложив сферически симметричное граничное условие, например,

$$\phi(r, t) = 0 \quad \text{для } r = R. \quad (5.2)$$

Мы будем иметь в виду это условие при обсуждении полного углового момента. В классической теории твердых тел показано, что частный вид граничного условия не существует для больших систем и играет вспомогательную роль при математическом описании. Случай, представляющий физический интерес, характеризуется пределом $L \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow \infty$. Соответственно форма граничных условий не должна входить и не входит в результаты, имеющие физическое значение, что соответствует преобладанию объемных эффектов над поверхностными. Физические результаты всегда будут выводиться для состояний, в которых поле возбуждено лишь в конечных областях пространства. Для этих состояний операторы поля на бесконечности практически равны нулю. Имея это в виду, мы будем в дальнейшем пренебрегать поверхностными интегралами по бесконечно удаленным поверхностям.

Для релятивистского и нерелятивистского полей полный импульс и угловой момент оказываются равными¹⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -\frac{1}{2} \int d^3r [\pi \nabla \phi + (\nabla \phi) \pi], \\ \mathbf{P} &= -\frac{1}{2} \int d^3r [\pi \nabla \psi + (\nabla \psi) \pi], \\ \mathbf{L} &= -\frac{1}{2} \int d^3r [\pi \mathbf{r} \times \nabla \phi + \mathbf{r} \times (\nabla \phi) \pi], \\ \mathbf{L} &= -\frac{1}{2} \int d^3r [\pi \mathbf{r} \times \nabla \psi + \mathbf{r} \times (\nabla \psi) \pi], \end{aligned} \quad (5.3)$$

¹⁾ Эти операторы ограничены условиями эрмитовости и соответствующего поведения при преобразованиях Лоренца. Их можно получить также по аналогии с классической механикой (см., например, книгу Венцеля [1]). Здесь мы просто задаем \mathbf{P} и \mathbf{L} и показываем, что они имеют правильные свойства, присущие этим операторам.

С помощью (4.19), например, находим

$$\begin{aligned} [P, \phi(\mathbf{r}, t)] &= i\nabla\phi(\mathbf{r}, t), \\ [L, \phi(\mathbf{r}, t)] &= i\mathbf{r} \times \nabla\phi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

и аналогичные уравнения для $\pi(\mathbf{r}, t)$, ψ и т. д. Иными словами коммутаторы P и L с оператором поля дают изменения этих величин соответственно при бесконечно малых смещении и повороте. Поскольку гамильтониан инвариантен относительно этих операций, мы имеем

$$[P, H] = [L, H] = 0. \quad (5.5)$$

Согласно (2.19), это означает, что P и L не зависят от времени. На самом деле соотношение (5.5) можно также проверить с помощью уравнений поля. Отсюда нетрудно видеть, что с помощью уравнения Клейна—Гордона выражения для \dot{P} и \dot{L} можно преобразовать к бесконечным поверхностным интегралам. Однако простое вычисление показывает, что P и L не коммутируют; действительно, перестановочные соотношения между ними такие же, как и в элементарной квантовой механике:

$$[P_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}P_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ или } x, y, z, \quad (5.6)$$

где ϵ_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, например, $\epsilon_{123} = 1$, а $\epsilon_{213} = -1$. В действительности существует очень общая причина, приводящая к (5.6). Поскольку L и P генерируют бесконечно малые повороты и смещения, перестановочные соотношения между ними должны быть такими же, как соотношения для операторов поворота и сдвига. Точно так же можно показать, что перестановочные соотношения между компонентами L имеют обычную форму

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k. \quad (5.7)$$

Подставляя выражения (4.8) или (4.3) в (5.3), мы получаем с помощью наших обычных методов¹⁾

$$P = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}. \quad (5.8)$$

Как было установлено ранее, операторы $a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}$ имеют целые собственные значения, откуда мы заключаем, что состояние

$$|n_1, n_2, \dots\rangle \equiv |n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots\rangle = (a_1^{\dagger})^{n_1} (a_2^{\dagger})^{n_2} \dots |0\rangle$$

¹⁾ Импульс нулевых колебаний $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}$, появляющийся для поля

Клейна—Гордона, равен нулю вследствие симметрии, благодаря которой для каждой компоненты k_i существует компонента $-k_i$.

есть также собственное состояние P , принадлежащее собственному значению $n_1 k_1 + n_2 k_2 + \dots$. Наша корпускулярная интерпретация подтверждается теперь уравнением¹⁾ (5.8), вследствие которого импульс k оказывается связанным с энергией $\omega = (k^2 + m^2)^{1/2}$. Собственные значения импульса являются, следовательно, целыми кратными величинами k . Сходство с задачей о собственных значениях энергии формально возникает из-за того, что перестановочные соотношения (4.19) и (5.4) имеют одинаковую структуру. Следовательно, собственные значения углового момента также имеют аналогичную природу. Однако обычные состояния, являющиеся собственными состояниями P , не будут собственными состояниями L , поскольку P и L не коммутируют никогда, за исключением случая $P = 0$. Но L и H коммутируют так, что мы могли бы найти собственные состояния одновременно H и, например, L_3 .

Чтобы построить такие состояния, следует разложение выполнить не по плоским волнам (собственным функциям сдвига), а по сферическим гармоникам (собственным функциям вращений), так как именно в последнем представлении мы ожидаем, что оператор будет диагонален. Чтобы достичь цели, воспользуемся разложением плоской волны

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{k} \sum_{l, m} (2\pi)^{3/2} i^l U_k^l(r) Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k) Y_l^m(\theta_r, \varphi_r), \quad (5.9)$$

где θ_k , φ_k и θ_r , φ_r представляют собой углы между векторами k и r и произвольно направленной осью z , а Y_l^m — нормированные сферические функции. Функции $U_k^l(r)$ удовлетворяют уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] U_k^l(r) = 0$$

и задаются равенствами

$$U_k^l(r) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k j_l(kr).$$

Разложение (5.9) сводится к известному выражению²⁾

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta),$$

¹⁾ Вследствие этого a_k называют обычно операторами уничтожения в импульсном (или k -) пространстве в противоположность $\phi(r)$ в координатном (или r -) пространстве, которые одновременно рождают и уничтожают частицы.

²⁾ Это разложение легче всего получить, сравнивая асимптотически разложения обеих частей равенства после интегрирования с $P_l(\cos \theta) d \cos \theta$ (см. [2, 3]).

если \mathbf{r} выбрать в направлении оси z . Но поскольку (5.9) инвариантно относительно вращений, оно должно быть справедливо в общем случае.

Постоянные, входящие в определение U_k^l , были выбраны таким образом, чтобы эти функции были нормированы на δ -функцию. Это можно видеть, рассматривая их асимптотическое поведение

$$U_k^l(r) = \frac{v_k^l(r)}{r}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v_k^l(r) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right),$$

и уравнения поля

$$\int_0^\infty dr r^2 U_k^l(r) U_{k'}^l(r) = \frac{1}{k^2 - k'^2} \int_0^\infty dr \left[v_k^l(r) \frac{d^2}{dr^2} v_{k'}^l(r) - v_{k'}^l(r) \frac{d^2}{dr^2} v_k^l(r) \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin R(k - k')}{k - k'} = \delta(k - k').$$

Далее, эти функции и сферические гармоники Y_l^m образуют полную систему трехмерных функций в том смысле, что

$$\int_0^\infty dk \sum_{l,m} U_k^l(r) U_{k'}^l(r') Y_l^{m*}(\theta_r, \varphi_r) Y_l^m(\theta_{r'}, \varphi_{r'}) = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Наконец, если ввести разложение¹⁾,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) = & \int_0^\infty \frac{dk}{(2\omega)^{1/2}} \sum_{l,m} U_k^l(r) \left[Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) a_{lm}(k) e^{-i\omega t} + \right. \\ & \left. + Y_l^{m*}(\theta_r, \varphi_r) a_{lm}^\dagger(k) e^{i\omega t} \right], \end{aligned} \quad (5.10a)$$

и сравнить его с непрерывным пределом (4.8), то можно видеть, что $a_{lm}(k)$ определяется равенством

$$a_{ln}(k) = i^l \int d\Omega_k k Y_l^{m*}(\theta_k, \varphi_k) a(\mathbf{k}).$$

С помощью тождества

$$\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{\delta(k - k')}{k^2} \frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{\sin \theta}$$

¹⁾ Мы ввели здесь обозначение, которое в дальнейшем будет постоянно использоваться; оно позволяет сопоставлять величины в дискретном и непрерывном k -пространствах. Для первых операторы поглощения обозначаются как $a_{\mathbf{k}}$ или $a_{R,m}$, тогда как в выражениях для вторых мы будем писать $a(\mathbf{k})$ или $a_{lm}(k)$.

получаем теперь перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [a_{lm}(k), a_{l'm'}^\dagger(k')] &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(k - k'), \\ [a_{lm}(k), a_{l'm'}(k')] &= [a_{lm}^\dagger(k), a_{l'm'}^\dagger(k')] = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Можно без труда проверить, что соотношения (5.11) следуют из коммутационных свойств $\phi(\mathbf{r}, t)$.

По аналогии с разложением $\phi(\mathbf{r}, t)$ по плоским волнам можно также развить формализм с непрерывной переменной k , как предел дискретного набора, выделенного с помощью граничного условия (5.2). Из асимптотического разложения ψ , которое справедливо только для значений n или l , много меньших kR (например, при фиксированных n или l в пределе $R \rightarrow \infty$), видно, что равенство

$$U_k^l(R) = 0$$

требует, чтобы k имело значения $k = (n + l/2) \pi/R$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. При этих условиях

$$\sum_k \rightarrow \frac{R}{\pi} \int_0^\infty dk,$$

и приведенное выше разложение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{k, l, m} \left(\frac{\pi}{2\omega R} \right)^{1/2} U_k^l(r) [Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) a_{klm} e^{-i\omega t} + \\ &\quad + Y_l^{m*}(\theta_r, \varphi_r) a_{klm}^\dagger e^{i\omega t}], \\ [a_{klm}, a_{k'l'm'}^\dagger] &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{kk'}, \end{aligned} \quad (5.106)$$

при $a_{klm} \rightarrow (\pi/R)^{1/2} a_{lm}(k)$. В дальнейшем изложении мы будем использовать как дискретную, так и непрерывную форму записи. Для получения из теории численных результатов, очевидно, более удобна последняя. Ради удобства справок формулы, позволяющие выполнить переход из дискретного к непрерывному пространству, собраны в приложениях.

В терминах операторов, введенных в (5.106), получаем для интересующих нас наблюдаемых¹⁾

$$H - E_0 = \sum_{l, m, k} a_{k, l, m}^\dagger a_{k, l, m} \omega, \quad (5.12)$$

а для L_3 , используя $\partial Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) / \partial \varphi_r = im Y_l^m(\theta_r, \varphi_r)$, имеем

$$L_3 = \sum_{l, m, k} a_{k, l, m}^\dagger a_{k, l, m} m. \quad (5.13)$$

¹⁾ Член $\sum_m \frac{1}{2} m$, появляющийся в случае поля Клейна — Гордона, равен нулю вследствие симметрии между $+m$ и $-m$.

В новых переменных вакуум определяется равенством

$$a_{k, l, m} |0\rangle = 0. \quad (5.14)$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ (т. е. в случае, когда граничное условие (5.2) должно быть эквивалентно соответствующему условию в импульсном представлении) условие (5.14) совпадает с нашим прежним определением, поскольку в этом случае новые операторы a представляют собой линейные комбинации прежних. В новом представлении собственные состояния частиц с энергиями ω получаются применением оператора a_{klm}^+ к вакууму. Так

$$|n_{k_1 l_1 m_1}, n_{k_2 l_2 m_2}, \dots\rangle = (a_{k_1 l_1 m_1}^+)^{n_{k_1 l_1 m_1}} (a_{k_2 l_2 m_2}^+)^{n_{k_2 l_2 m_2}} \dots |0\rangle.$$

Обращаясь к (5.13), мы видим, что эти состояния будут также собственными состояниями L_3 , принадлежащими собственному значению

$\sum_{l_i m_i k_i} m_i n_{k_i l_i m_i}$. Величины $n_{k_i l_i m_i}$, т. е. собственные значения $a_{klm}^+ a_{klm}$ определяют числа частиц, имеющих энергии ω_i , угловые моменты l_i и третьи компоненты m_i , так, что L_3 при этом имеет целые собственные значения. Чтобы построить собственные состояния заданного полного углового момента, необходимо подобрать соответствующую комбинацию одночастичных состояний. Это можно осуществить методами, известными из элементарной квантовой механики [4]. Мы не будем останавливаться на этом в настоящий момент, но позже выполним эквивалентные этой процедуре преобразования. Существование нескольких способов построения собственных векторов H связано с тем фактом, что в пределе $R \rightarrow \infty$ или $L \rightarrow \infty$ H оказывается бесконечно вырожденным. Собственные состояния L_3 и H представляют собой суперпозиций собственных состояний P с теми же собственными значениями H , а коэффициенты совпадают с теми, которые возникают при переходе от плоских волн к сферическим.

5.2. Четность. Следующий интеграл движения связан с инвариантностью H относительно дискретного ортогонального преобразования координат, представляющего собой отражение $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$. Поскольку это преобразование нельзя разложить на непрерывные вращения¹⁾, связанная с ним сохраняющаяся величина не зависит от углового момента. Она вводится при помощи обычных рассуждений. Поскольку подстановка $\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \phi(-\mathbf{r}, t)$ оставляет перестановочные соотношения неизменными, должно существовать унитарное преобразование, эквивалентное этой подстановке

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ \phi(\mathbf{r}, t) \mathcal{P}_+^{-1} &= \phi(-\mathbf{r}, t), \\ \mathcal{P}_+ \mathcal{P}_+^\dagger &= \mathcal{P}_+^\dagger \mathcal{P}_+ = 1 \end{aligned} \quad (5.14a)$$

¹⁾ Это означает, что \mathcal{P} не имеет классического аналога; не существует бесконечно малого оператора отражения.

Аналогично и H инвариантно относительно подстановки $\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \phi(-\mathbf{r}, t)$, вследствие чего мы имеем равенства

$$\mathcal{P}_+ H \mathcal{P}_+^{-1} = H, \quad [\mathcal{P}_+, H] = 0,$$

означающие, что \mathcal{P}_+ есть интеграл движения. Однако как H , так и перестановочные соотношения инвариантны также относительно замены $\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\phi(-\mathbf{r}, t)$, так что отражение можно определить еще и следующим образом:

$$\mathcal{P}_- \phi(\mathbf{r}, t) \mathcal{P}_-^{-1} = -\phi(-\mathbf{r}, t), \quad (5.146)$$

причем \mathcal{P}_- также сохраняется. Только в присутствии взаимодействия можно установить правильные свойства ϕ при отражении, т. е. установить, который из двух операторов сохраняется. Например, если H включает член

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t),$$

где $\rho(\mathbf{r})$ — величина, инвариантная относительно отражения, то только \mathcal{P}_+ коммутирует с H . В этом случае ϕ называется скаляром. С другой стороны, член

$$\int d^3r \rho(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}, t), \quad \text{где} \quad \mathcal{P}_\pm \boldsymbol{\sigma} \mathcal{P}_\pm^{-1} = \boldsymbol{\sigma}$$

коммутирует только с \mathcal{P}_- и тогда ϕ называется псевдоскаляром. Этот последний случай осуществляется в природе для π -мезонного поля.

Операторы \mathcal{P}_\pm могут быть диагонализированы в представлении углового момента, но не в импульсном представлении, так как в нем $[\mathcal{P}_\pm, \mathbf{L}] = 0$, но $\mathcal{P}_\pm \mathbf{P} \mathcal{P}_\pm^{-1} = -\mathbf{P}$. Поскольку

$$Y_l^m(-\mathbf{r}) \equiv Y_l^m(\pi - \theta_r, \varphi_r + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) = (-1)^l Y_l^m(\mathbf{r}),$$

то мы находим явные выражения¹⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ &= \exp\left(-\pi \sum_{klm} l a_{klm}^+ a_{klm}\right), \\ \mathcal{P}_- &= \exp\left[-i\pi \sum_{klm} (l+1) a_{klm}^+ a_{klm}\right]. \end{aligned} \quad (5.14в)$$

¹⁾ Заметим, что $e^{i6} a e^{-i6}$ определяется разложением экспоненты

$$e^{i6} a e^{-i6} = a + i[6, a] + \frac{i^2}{2!}[6, [6, a]] + \dots$$

так, что если $[a, a^+] = 1$, то

$$e^{-i\pi a^+} a e^{i\pi a^+} = -a.$$

Фазовый множитель в \mathcal{P}_\pm , остающийся неопределенным при определениях (5.14а) и (5.14б), выбирается из условия $\mathcal{P}_\pm |0\rangle = |0\rangle$. При помощи (5.14а) можно также найти, что $\mathcal{P}_\pm a_{\mathbf{k}} \mathcal{P}_\pm^{-1} = \pm a_{-\mathbf{k}}$.

а из этих выражений

$$\mathcal{P}_+ a_{klm} \mathcal{P}_+^{-1} = (1)^i a_{klm}, \quad \mathcal{P}_- a_{klm} \mathcal{P}_-^{-1} = (-1)^{i+1} a_{klm}.$$

Из (5.14в) следует, что \mathcal{P}_+ равно -1 в степени, равной числу частиц, имеющих нечетные угловые моменты, а \mathcal{P}_- равно -1 в степени, равной числу частиц, имеющих четные моменты. Поэтому четность есть мультипликативная величина; для нескольких частиц она представляет собой произведение индивидуальных четностей. Скалярные частицы имеют только орбитальную четность $(-1)^l$, тогда как псевдоскалярные обладают также внутренней отрицательной четностью.

5.3. Число частиц и плотность частиц. Другая наблюдаемая величина, коммутирующая с гамильтонианом, но не имеющая классического аналога, — это число частиц¹⁾:

$$N = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} = \sum_{klm} a_{klm}^{\dagger} a_{klm}. \quad (5.15)$$

Собственные значения этого оператора представляют собой сумму целых чисел $n_{\mathbf{k}}$ (или n_{klm}), которые мы интерпретируем как число частиц в состоянии с импульсом \mathbf{k} (или угловым моментом с z -компонентой m):

$$N |n_{\mathbf{k}_j}\rangle = \sum_{\mathbf{k}_j} n_{\mathbf{k}_j} |n_{\mathbf{k}_j}\rangle. \quad (5.16)$$

Следовательно, N можно назвать оператором полного числа частиц. Очевидно,

$$[H, N] = 0. \quad (5.17)$$

Это означает, что частицы не рождаются и не исчезают. По существу мы определяем оператор числа частиц с заданным импульсом \mathbf{k} как $N_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}$, так что $N = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}$, поэтому

$$[N_{\mathbf{k}} H] = 0, \quad \dot{N}_{\mathbf{k}} = 0.$$

Это равенство показывает, что частицы не переходят из состояния с одним импульсом в состояние с другим; иными словами, частицы, описываемые рассматриваемым гамильтонианом, не рассеиваются. Однако для систем, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем, уравнение (5.17) уже не будет справедливым.

Как и другие операторы, рассмотренные ранее, N можно представить в виде объемного интеграла. Если разбить ϕ на положи-

¹⁾ Это уравнение и связанные с ним последующие уравнения должно всегда пониматься в пределе $L \rightarrow \infty$ или $R \rightarrow \infty$.

тельно и отрицательно частотные части:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \phi^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \phi^{(-)}(\mathbf{r}, t), \\ \phi^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{(2\omega)^{1/2}} a_{\mathbf{k}}, \\ \phi^{(-)} &= \phi^{(+)\dagger},\end{aligned}\quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}[\phi^{(+)}(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} &= [\phi^{(-)}(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = \\ &= [\phi^{(+)}(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = [\phi^{(-)}(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = 0, \\ [\phi^{(+)}(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} &= [\phi^{(-)}(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = \frac{i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2},\end{aligned}$$

то мы найдем, что

$$N = -i \int d^3r [\dot{\phi}^{(-)}\phi^{(+)} - \phi^{(-)}\dot{\phi}^{(+)}]. \quad (5.19)$$

В нерелятивистском пределе это выражение в случае шредингеровского поля переходит в более знакомое выражение

$$N = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (5.20)$$

В элементарной квантовой механике эту величину полагают равной единице; на нашем языке это означает, что рассматриваются только одночастичные состояния.

Можно также показать, что квантовомеханическая теорема Эренфеста (см. [3]) остается справедливой в нашей общей теории. Если по аналогии с квантовой механикой определить положение центра масс как оператор ¹⁾

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \int d^3r \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{r}, \quad (5.21)$$

то, используя (4.22), (5.3) и интегрируя по частям, получаем

$$\dot{\mathbf{R}} = i[H, \mathbf{R}] = \frac{\mathbf{P}}{Nm}. \quad (5.22)$$

Таким образом, полный импульс равен полной массе, умноженной на скорость центра масс. Релятивистский аналог (5.22) имеет место лишь для центра энергий:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{E} \int d^3r \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \mathbf{r}, \quad (5.23)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{P}}{E}. \quad (5.24)$$

¹⁾ Заметим, что $[R_i, P_j] = i\delta_{ij}$, как и в элементарной квантовой механике.

5.4. Локальные наблюдаемые. До сих пор мы рассматривали наблюдаемые, которые имели форму интегралов по всему пространству. При этом по существу предполагалось, что подинтегральное выражение представляло собой соответствующую локальную плотность, а интеграл по конечному объему — часть наблюдаемой величины, содержащаяся в этом объеме. Однако величины, проинтегрированные по всему объему L^3 , могут не коммутировать с ϕ или билинейными по полю операторами, такими как плотность импульса $P(\mathbf{r})$. Поэтому состояния, с которыми мы до сих пор имели дело, не являются, вообще говоря, собственными состояниями таких локальных величин как плотность импульса. Это станет совершенно очевидным в следующей главе, где рассматриваются непосредственно сами состояния.

Для локальных величин имеется существенное отличие между релятивистским и нерелятивистским случаями, которые мы сейчас изучим. Если определить число частиц в объеме v как

$$N_v(t) = \int_v d^3r N(\mathbf{r}, t), \quad (5.25)$$

то для нерелятивистского поля

$$N(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t), \quad (5.26)$$

а для релятивистского —

$$N(\mathbf{r}, t) = -i[\dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\phi^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \phi^{(-)}(\mathbf{r}, t)\dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]. \quad (5.27)$$

В нерелятивистском случае из перестановочных соотношений (4.22) следует, что

$$[N_{v_1}(t), N_{v_2}(t')]_{t=t'} = 0 \quad (5.28)$$

независимо от того, перекрываются объемы v_1 и v_2 или нет. Это значит, что можно говорить об определенном числе нерелятивистских частиц, например 1, в любом объеме независимо от того, насколько он мал или велик. Правда, это число не остается постоянным, поскольку

$$[N_v(t), H] = -\frac{1}{2m} \int_v d^3r [\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\nabla^2\psi(\mathbf{r}, t) - \nabla^2\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t)] \neq 0,$$

и поверхностный интеграл, к которому сводится выписанное выражение, остается конечным для конечных объемов; однако это означает только то, что волновой пакет для локализованной частицы расплывается с течением времени. Для релятивистского поля ϕ перестановочное соотношение (5.28) не имеет места, даже если объемы v_1 и v_2 не перекрываются. Это происходит из-за дополнительного

множителя ω^{-1} , вследствие которого оказывается не равным нулю коммутатор

$$[\phi^{(+)}(\mathbf{r}, t), \phi^{(-)}(\mathbf{r}', t')]_{t=t'} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{2\omega} \equiv \frac{1}{2} \Delta^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (5.29a)$$

при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$.

Вид этого коммутатора можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(k^2+m^2)^{1/2}} = \frac{1}{2\pi^2 r} \int k dk \frac{\sin kr}{(k^2+m^2)^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikr}}{(k^2+m^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.29b)$$

Подстановка $k = m \operatorname{sh} \theta$ дает

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int e^{imr \operatorname{sh} \theta} d\theta = -\frac{i}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(imr) = \\ &= -\frac{m}{4\pi r} H_1^{(1)}(imr). \end{aligned}$$

Мы видим, таким образом, что коммутатор ведет себя как функция Ханкеля первого рода $H^{(1)}(imr)$, которая обладает следующими свойствами¹⁾:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \Delta^{(+)}(\mathbf{r}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi r^2}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta^{(+)}(\mathbf{r}) &= \frac{m}{4\pi r} \left(\frac{2}{\pi m r}\right)^{1/2} e^{-mr}. \end{aligned}$$

Поведение этого коммутатора при асимптотически больших r определяется в (5.29b) в основном экспонентой e^{ikr} , вычисленной в комплексном полюсе $k = im$.

Соответственно для коммутатора локальной плотности $N(\mathbf{r}, t)$ с плотностью в другой точке пространства \mathbf{r}' , взятой в тот же момент времени t , мы находим

$$\begin{aligned} [N(\mathbf{r}, t), N(\mathbf{r}', t')]_{\substack{t=t' \\ \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'}} &= [\dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}', t) \dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \\ &- \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}', t)] \frac{\Delta^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{2} + \\ &+ [\phi^{(-)}(\mathbf{r}', t) \phi^{(+)}(\mathbf{r}, t) - \phi^{(-)}(\mathbf{r}, t) \phi^{(+)}(\mathbf{r}', t)] \frac{\Gamma^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{2}, \end{aligned}$$

¹⁾ См. книгу Ватсона [5], гл. 3, 6, 7. Заметим также, что

$$H_0^{(1)}(imr) = \frac{2}{\pi i} K_0(mr).$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= 2[\dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}', t)] = \sum_{\mathbf{k}} \omega e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} (k^2 + m^2)^{1/2} dk, \quad r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \end{aligned}$$

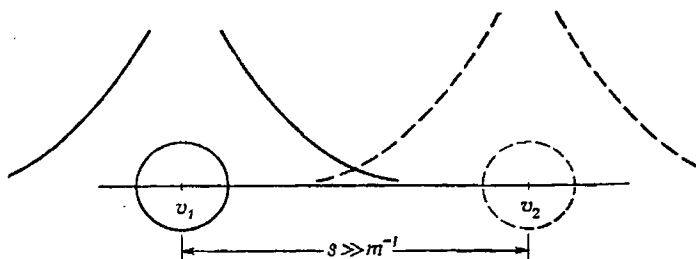
Здесь мы использовали алгебраическое тождество

$$[AB, CD] = A[B, C]D + AC[B, D] + [A, C]DB + C[A, D]B$$

и условие

$$[\phi^{(+)}(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}', t)] = \frac{1}{2} i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Интеграл для Γ^{+} в той форме, как он приведен здесь, расходится, однако его можно привести к сходящемуся посредством выделения нужного числа степеней k в знаменателе за счет дифференцирования по r . Для больших расстояний $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ характер поведения $\Gamma^{(+)}$



Фиг. 5.1. Распределение мезонов вблизи двух непрерывных объемов v_1 и v_2 , разделенных расстоянием s , много большим комptonовской длины волны частиц m^{-1} .

так же определяется экспонентой при $k \approx lm$. Таким образом, для рассматриваемого релятивистского поля коммутатор локальной плотности $N(\mathbf{r}, t)$ с плотностью, взятой в другой пространственной точке, но в тот же момент времени [т. е. $N(\mathbf{r}', t)$], стремится к нулю, только если точки разделены интервалом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg m^{-1}$. То же утверждение сохраняется и для чисел частиц, заключенных в двух непересекающихся объемах v_1 и v_2 , как это показано на фиг. 5.1. Здесь m^{-1} — комptonовская длина волны частицы; например для π -мезона она равна 10^{-13} см.

Поэтому невозможно утверждать, что один π -мезон (или другое определенное число их) находится в объеме, границы которого определены с точностью порядка 10^{-13} см или большей. Это было бы справедливо, только если бы это состояние было собственным

состоянием N_v с собственным значением 1 для рассматриваемого объема и собственным значением 0 для всех соседних объемов, расположенных на расстоянии не более чем 10^{-13} см от первого. Однако вследствие некоммутативности таких близлежащих N_v это невозможно. Лучшее, что можно сделать в релятивистском случае, — это получить равное нулю собственное значение N_v для тех v , которые отстоят от объема, содержащего частицу на расстояниях, много больших m^{-1} . Физически это связано с тем фактом, что столь точное определение границы, $\Delta r \ll m^{-1}$, требует использования внешнего поля, частично содержащего длины волн $< m^{-1}$. В таком поле могут возникать новые частицы. Вследствие тождественности частиц в теории поля новые частицы невозможно отличить от старых. Поэтому рассматриваемое состояние перестает быть одночастичным.

Таким образом, оказывается, что фундаментальные принципы релятивизма ($E = mc^2$) и квантовой теории ($E = h\nu$) приводят к важной модификации наших понятий о частицах. В то время как в нерелятивистском пределе они ведут себя как точки и не существует нижнего предела для величины объема, в который их можно заключить, в релятивистской теории поля кванты поля имеют размеры, грубо говоря, равные их комптоновской длине волны. В этом заключается начальная причина уменьшения электромагнитных взаимодействий, когда в рассмотрение включаются длины волн $\lambda < m^{-1}$. Электрон, например, ведет себя как заряженная сфера радиуса $r \sim m_e^{-1}$, а эффект меньших длин волн исчезает при усреднении. Поэтому сечение рассеяния фотонов на электронах для фотонных длин волн $< m_e^{-1}$, начинает падать [6]. Аналогичным образом этот же эффект уменьшает связь S-электрона в атоме водорода, поскольку размеры электрона не допускают для него полного использования узкой сингулярной части кулоновского потенциала.

Подводя итог, мы можем сказать, что в квантовой теории поля наблюдаемые ведут себя как соответствующие величины в случае ансамбля свободных частиц. Вопрос о размерах частиц и другие свойства локальных величин будут глубже рассмотрены при обсуждении типичных собственных состояний в следующей главе.

Глава 6

СОСТОЯНИЯ

6.1. Вакуумное и одночастичное состояния. Состояния, которыми мы в основном интересовались до сих пор, были собственными состояниями энергии. Состояние с наименьшей энергией, $|0\rangle$, не содержит частиц и в соответствии с этим называется вакуумным. Применение каждого a_k^\dagger к $|0\rangle$ порождает состояние с одной частицей с импульсом k . Наиболее общее одночастичное состояние получается при действии на $|0\rangle$ общей линейной комбинации операторов a_k^\dagger с различными значениями k . Вместо a_k^\dagger можно также использовать переменные поля $\phi^{(-)}(\mathbf{r}, t)$, определенные по (5.18), или, в нерелятивистском случае, — переменные $\psi^\dagger(\mathbf{r}, t)$.

Обращаясь к последнему более привычному случаю, мы можем записать

$$|1\rangle = \int d^3r f(\mathbf{r}, t) \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) |0\rangle. \quad (6.1)$$

Заметим, что введенные ранее одночастичные состояния $a_k^\dagger |0\rangle$ или $a_{klm}^\dagger |0\rangle$ представляют собой частные случаи (6.1) при

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - E_k t)}}{L^{3/2}},$$

или

$$f(\mathbf{r}, t) \sim U_k^l(r) Y_l^m(\theta_r, \varphi_r) e^{-iE_k t},$$

так как эти состояния будучи собственными состояниями гамильтониана не зависят от времени. Нормировка одночастичного состояния (6.1) $\langle 1|1\rangle = 1$ требует, чтобы

$$\begin{aligned} \langle 1|1\rangle &= \langle 0 | \int d^3r f^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \int d^3r' f(\mathbf{r}', t) \psi^\dagger(\mathbf{r}', t) |0\rangle = \\ &= \int d^3r f^*(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) = \\ &= \int d^3r f^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = 1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Мы получили нормировочное условие для волновой функции в квантовой механике, и f действительно играет роль этой величины. Она появляется во всех случаях, когда вычисляются такие величины, как плотность энергии $H(\mathbf{r})$, плотность импульса $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ или плотность числа частиц $N(\mathbf{r})^1$. Так,

$$\langle 1 | N(\mathbf{r}) | 1 \rangle = \langle 0 | \int f^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \int f(\mathbf{r}'') \psi^\dagger(\mathbf{r}'') d^3 r'' | 0 \rangle = \\ = f^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}),$$

$$\langle 1 | H(\mathbf{r}) | 1 \rangle = \frac{1}{2m} \langle 0 | \int f^*(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' \nabla \psi^\dagger(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) \times \\ \times \int f(\mathbf{r}'') \psi^\dagger(\mathbf{r}'') d^3 r'' | 0 \rangle = \frac{1}{2m} \nabla f^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla f(\mathbf{r})$$

и аналогично

$$\langle 1 | \mathbf{P}(\mathbf{r}) | 1 \rangle = \frac{1}{2i} [f^*(\mathbf{r}) \nabla f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \nabla f^*(\mathbf{r})]. \quad (6.3)$$

Теперь мы исследуем вопрос, можно ли рассматривать кванты поля как частицы в том смысле, что они представляют собой объекты, локализованные в определенной области пространства. Как и в квантовой механике, в любой данный момент времени можно построить плотность частиц с произвольным пространственным распределением. Разумеется, построенное состояние не будет, вообще говоря, собственным состоянием энергии и импульса, но это замечание относится и к квантовой механике, где волновой пакет в конечном счете распадается.

Нет необходимости, чтобы наши нерелятивистские частицы имели определенный размер в заданный момент времени t ; достаточно того, что существует состояние, для которого величина $f(\mathbf{r}, t)$ отлична от нуля лишь в произвольно малой области [например, $f(\mathbf{r}, 0) = \delta^3(\mathbf{r})$]. В этом случае ожидаемые значения плотностей будут, согласно (6.3), равны нулю вне этой области. Мы видим из (4.22), что такое состояние является собственным состоянием плотностей, взятых вне области, соответствующей нулевому собственному значению. Это означает, что существуют такие состояния, для которых никакой эксперимент не может обнаружить каких бы то ни было следов частицы вне рассматриваемой области, сколь угодно малой. Тем не менее мы всегда имеем

$$N | 1 \rangle = | 1 \rangle. \quad (6.4)$$

В частности, легко видеть, что при $t=0$ состояние $| 1 \rangle = \psi^\dagger(\mathbf{r}) | 0 \rangle$ является собственным значением N_v (хотя и не нормированным) с собственным значением 1, если v содержит \mathbf{r} , и с собственным значе-

¹⁾ $H(\mathbf{r})$, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ и $N(\mathbf{r})$ являются подынтегральными выражениями для соответствующих наблюдаемых величин, вычисленных при $t=0$.

нием 0 в противном случае¹⁾. Чтобы показать это, мы используем равенство

$$[N_v, \psi^\dagger(\mathbf{r})] = \psi^\dagger(\mathbf{r}) \int d^3r' \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

которое также доказывает, что N_v имеет целые собственные значения для произвольного объема v .

Свойства состояний релятивистского поля оказываются иными. Во-первых, в этом случае вакуумное состояние не является собственным состоянием локальных плотностей $H(\mathbf{r})$, $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ или $\mathbf{L}(\mathbf{r})$. Эти величины содержат пропорциональные $\phi^{(-)2}$ члены, которые при действии на вакуум приводят к появлению двухчастичного состояния. С другой стороны, вакуумное среднее от $H(\mathbf{r})$ отлично от нуля:

$$\begin{aligned} \langle 0 | H(\mathbf{r}) | 0 \rangle &= \frac{1}{2} \langle 0 | \dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle 0 | \dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}) \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}) + \nabla\phi^{(+)}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\phi^{(-)}(\mathbf{r}) + \\ &\quad + m^2\phi^{(+)}(\mathbf{r})\phi^{(-)}(\mathbf{r}) | 0 \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \omega. \end{aligned}$$

Мы можем, однако, перераспределить плотности таким образом, чтобы гарантировать исчезновение средних вакуумных величин. Это достигается тем, что все операторы $\phi^{(+)}$ ставятся справа от $\phi^{(-)}$, т. е.

$$\begin{aligned} \phi^{(+)}\phi^{(-)} &\rightarrow \phi^{(-)}\phi^{(+)} \\ \dot{\phi}^{(+)}\dot{\phi}^{(-)} &\rightarrow \dot{\phi}^{(-)}\dot{\phi}^{(+)}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

так что, например, плотность импульса становится равной

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}) = - [\dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}) \nabla\phi^{(-)}(\mathbf{r}) + \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}) \dot{\nabla}\phi^{(+)}(\mathbf{r}) + \\ + \nabla\phi^{(-)}(\mathbf{r}) \dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}) + \dot{\phi}^{(+)}(\mathbf{r}) \nabla\phi^{(+)}(\mathbf{r})]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что указанная процедура не меняет членов $\phi^{(-)2}$, и поэтому вакуумное состояние не становится собственным состоянием локальных плотностей. Однако описанное переопределение приводит к исчезновению собственной энергии нулевых колебаний. Все сводится лишь к изменению наблюдаемых величин на определенные (хотя и бесконечные) неизмеримые числа. Более того, эти числа являются действительными, вследствие чего эрмитовость наблюдаемых сохраняется. В дальнейшем мы всегда будем предпо-

¹⁾ Это состояние не является собственным состоянием H , поскольку $[\psi^\dagger(\mathbf{r}, t), H] \neq 0$, и поэтому оно зависит от времени. Когда у величины N_v не помечена зависимость от времени, мы подразумеваем $N_v(0)$.

лагать, что наблюдаемые величины, квадратичные по ϕ , представляют собой упорядоченные произведения. Это не означает, что вакуумные флуктуации ϕ исчезают. Так, $(\Delta\phi)^2 = \langle 0 | \phi^2 | 0 \rangle$ по-прежнему задается суммой (4.13), а флуктуация плотности энергии $H(\mathbf{r})$ после упорядочения H (но не H^2) также остается отличной от нуля, $[\Delta H(\mathbf{r})]^2 = \langle 0 | H^2(\mathbf{r}) | 0 \rangle$, и расходится даже быстрее, чем флуктуация оператора поля ϕ . Таким образом, в релятивистской теории никогда не возможно быть уверенным, что локальная энергия равна нулю. Это происходит снова вследствие того, что точное определение объема требует больших импульсов и энергий, при которых в релятивистской теории возможно рождение частиц. В дальнейшем мы увидим, что виртуальное существование частиц во всем пространстве представляет собой одну из наиболее удивительных черт этой теории.

Одночастичные состояния релятивистской теории также обладают интересными свойствами. Для того чтобы записать нашу произвольную линейную комбинацию операторов рождения $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ в импульсном пространстве $\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}}$ в переменных $\phi^{(-)}$, следует ввести $F_{\mathbf{k}} = (2\omega)^{1/2} f_{\mathbf{k}}$ и ее фурье-компоненту $F(\mathbf{r})$, поскольку

$$\frac{a_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{(2\omega)^{1/2}} = \frac{1}{L^{3/2}} \int \phi^{(-)}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r.$$

Отсюда при $t=0$ получаем:

$$|1\rangle = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} |0\rangle = \int d^3r F(\mathbf{r}) \phi^{(-)}(\mathbf{r}) |0\rangle. \quad (6.6)$$

Условие нормировки

$$\sum_{\mathbf{k}} |f_{\mathbf{k}}|^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{|F_{\mathbf{k}}|^2}{2\omega} = 1 \quad (6.7)$$

не соответствует обычному, $\int d^3r |F(\mathbf{r})|^2 = 1$, а имеет вид

$$\begin{aligned} \langle 0 | \int d^3r d^3r' F^*(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}') \phi^{(+)}(\mathbf{r}) \phi^{(-)}(\mathbf{r}') | 0 \rangle = \\ = \frac{1}{2} \int F^*(\mathbf{r}) \Delta^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F(\mathbf{r}') d^3r d^3r' = 1 \end{aligned}$$

Последнее равенство представляет собой результат присутствия множителя ω , из-за которого невозможно найти такое пространственное распределение $F(\mathbf{r})$, чтобы средние значения всех плотностей были равны нулю вне заданной области. Например, полагая все $f_{\mathbf{k}}$ равными $1/L^{3/2}$, что соответствует пространственной δ -функции при $r=0$

для $f(r)$, но не для $F(r)$, мы получаем для плотности частиц из уравнения (5.27):

$$\langle 1|N(r)|1\rangle = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}, \mathbf{q}'} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^{1/2} + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \right] \frac{e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')}}{L^3} \langle 0|a_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{q}'}^{\dagger}|0\rangle = \\ = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \omega^{1/2} \sum_{\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \omega'^{-1/2}. \quad (6.8)$$

Правая часть этого равенства не равна, очевидно, нулю при $r \neq 0$, поэтому одночастичное состояние, описываемое таким образом, нельзя считать локализованным; оно размазано на расстояние порядка $1/m$. С другой стороны, если в соответствии с $F(r) = \delta^3(r)$ выбрать $F_{\mathbf{k}}$ равным $1/L^{3/2}$, мы получим для $N(r)$ с помощью перестановочных соотношений (5.18) и (5.29а):

$$\langle 1|N(r)|1\rangle = -i \langle 0|\phi^{(+)}(0) [\dot{\phi}^{(-)}(r) \phi^{(+)}(r) - \\ - \phi^{(-)}(r) \dot{\phi}^{(+)}(r)] \phi^{(-)}(0)|0\rangle = \\ = \frac{1}{4} [\delta^3(r) \Delta^{(+)}(r) + \Delta^{(+)}(-r) \delta^3(r)] = \frac{1}{2} \delta^3(r) \Delta^{(+)}(r).$$

Эта величина действительно равна нулю при $r \neq 0$, так что состояние оказывается локализованным в начале координат¹⁾. Однако среднее значение плотности энергии в этом состоянии становится равным

$$\langle 1|H(r)|1\rangle = \frac{1}{2} \langle 0|\phi^{(+)}(0) \{ \dot{\phi}^2(r) + [\nabla\phi(r)]^2 + m^2\phi^2(r) \} \phi^{(-)}(0)|0\rangle = \\ = \frac{1}{4} \{ [\delta^3(r)]^2 + [\nabla\Delta^{(+)}(r)]^2 + [m\Delta^{(+)}(r)]^2 \}. \quad (6.9)$$

Основные свойства пространственной зависимости этой функции определяются величиной e^{-2mr} для $r \gg m^{-1}$. Это можно понять, рассмотрев частицу, локализованную в начале координат. Всякое измерение энергии связано с рождением частиц, однако это уже было учтено при переопределении операторов (6.5). Последнее гарантировало, что в отсутствие реальных (но не виртуальных) частиц, т. е. в случае вакуумного состояния, среднее значение плотности энергии равно нулю. Однако благодаря присутствию частицы в начале координат измерения вблизи этой точки могут привести к новым следствиям. На расстоянии $r < m^{-1}$ может родиться пара частиц, одна из которых остается в этой области, тогда как другая аннигилирует с частицей в начале координат. Расстояние, которое может пройти любая

¹⁾ Наш выбор $F(r)$ не приводит к нормированному состоянию $|1\rangle$. Заметим далее, что состояние, описываемое $F(r) = \delta^3(r)$, не является собственным состоянием $N(r)$, т. е.

$$N(r)|1\rangle \neq \text{const}|1\rangle \quad \text{для } r=0$$

в согласии с выводами гл. 5. Однако среднее значение $N(r)$ в этом состоянии локализовано.

виртуальная частица, ограничено условием $\Delta E \Delta t \sim 1$. Поскольку при рождении пары частиц $\Delta E > 2m$, то $\Delta t < (2m)^{-1}$, и частицы не могут распространяться далее чем на расстояние $(2m)^{-1}$. Поэтому событие рассмотренного типа влияет на плотности энергии лишь на расстояниях порядка m^{-1} от начала координат.

Аналогичные вычисления показывают, что N_ν имеет только целые собственные значения, если $\nu^{1/2}$ простирается значительно дальше, чем на длину комптоновской длины волны кванта поля. Мы находим, что $[N_\nu, \phi^{(-)}(\mathbf{r})] \neq \phi^{(-)}(\mathbf{r})$, но содержит дополнительный член, пропорциональный $\phi^{(-)}$ и усредненный около \mathbf{r} на расстояниях порядка комптоновской длины волны:

$$[N_\nu, \phi^{(-)}(\mathbf{r})] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\phi^{(-)}(\mathbf{r}) - i \int_{\nu} \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}') \Delta^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' \right], & \text{если } \mathbf{r} \text{ внутри } \nu, \\ -\frac{i}{2} \int_{\nu} \dot{\phi}^{(-)}(\mathbf{r}') \Delta^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r', & \text{если } \mathbf{r} \text{ вне } \nu. \end{cases}$$

Вектор $\phi^{(-)}(\mathbf{r})|0\rangle$ не будет поэтому собственным состоянием N_ν . Тем не менее, если ν гораздо больше, чем m^{-3} и $F(\mathbf{r})$ представляет собой гладкое распределение в объеме $\gg m^{-3}$ около средней части ν , то $\int d^3 r F(\mathbf{r}) \phi^{(-)}(\mathbf{r})|0\rangle$ будет уже собственным состоянием этого N_ν .

Поскольку локальные плотности энергии, взятые в разных точках пространства в один и тот же момент времени, коммутируют¹⁾ ($[H(\mathbf{r}), H(\mathbf{r}')] = 0$ при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$), может показаться, что возможно построить состояние, в котором энергия точно локализована. Это и в самом деле может быть сделано, но, как можно показать, такие состояния не принадлежат к состояниям с определенным числом частиц. Ввиду этого локальные величины и число частиц представляет собой взаимодополняющие понятия.

6.2. Двухчастичные состояния. Чтобы получить представление о некоторых следствиях применения статистики Бозе — Эйнштейна к квантам поля, мы в заключение изучим интерференционные и флуктуационные явления. Для простоты обратимся к нерелятивистскому полю. Результаты для релятивистского поля ϕ усложняются лишь дополнительными эффектами, обсужденными выше.

¹⁾ Заметим, что упорядочение $H(\mathbf{r})$ меняет его только на обычное число, так что его коммутационные свойства остаются неизменными.

Интерференционные эффекты появляются уже в двухчастичных состояниях. Для нерелятивистского случая наиболее общее состояние такого типа имеет вид¹⁾

$$|2\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi^\dagger(\mathbf{r}_2) |0\rangle \quad (6.10)$$

и принадлежит собственному значению N , равному 2. Условие нормировки (6.10) записывается как

$$\langle 2|2\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 f^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) [f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)] = 1. \quad (6.11)$$

Второй член в (6.11) появляется вследствие бозе-статистики для квантов поля. По существу, мы можем ограничиться рассмотрением симметричной части f в (6.10), поскольку часть, нечетная по \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , не вносит никакого вклада. Действительно, так как $\psi^\dagger(\mathbf{r}_1)$ и $\psi^\dagger(\mathbf{r}_2)$ коммутируют, то произведение $\psi^\dagger(\mathbf{r}_1)\psi^\dagger(\mathbf{r}_2)$ четно по \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , и интеграл от него с нечетной функцией исчезает.

С описанными фактами связан ряд специфических свойств, которые лучше всего проиллюстрировать, вычислив среднее значение $N(\mathbf{r})$. Мы сделаем это для двухчастичного состояния, для которого $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ имеет вид $f_1(\mathbf{r}_1)f_2(\mathbf{r}_2)$, так что частицы были бы независимы, если бы они были различимы²⁾. Далее мы положим, что каждая $f_j(\mathbf{r}_j)$ нормирована на единицу, т. е. $\int d^3r_j f_j(\mathbf{r}_j)^2 = 1$, так что правильным образом нормированная полная волновая функция имеет вид

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{f_1(\mathbf{r}_1)f_2(\mathbf{r}_2)}{[1 + |(f_1, f_2)|^2]^{1/2}}, \quad (6.12)$$

где

$$(f_i, f_j) \equiv \int d^3r f_i^*(\mathbf{r}) f_j(\mathbf{r}). \quad (6.13)$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} \langle 2|N(\mathbf{r})|2\rangle &= \int d^3r_1 d^3r_2 d^3r_1' d^3r_2' f_1^*(\mathbf{r}_1) f_2^*(\mathbf{r}_2) f_1(\mathbf{r}_1') f_2(\mathbf{r}_2') \times \\ &\times [1 + |(f_1, f_2)|^2]^{-1} \langle 0|\psi(\mathbf{r}_1)\psi(\mathbf{r}_2)\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r}')\psi^\dagger(\mathbf{r}_1')\psi^\dagger(\mathbf{r}_2')|0\rangle = \\ &= [|f_1(\mathbf{r})|^2 + |f_2(\mathbf{r})|^2 + (f_1, f_2) f_2^*(\mathbf{r}) f_1(\mathbf{r}) + \\ &\quad + (f_2, f_1) f_1^*(\mathbf{r}) f_2(\mathbf{r})] [1 + |(f_1, f_2)|^2]^{-1}. \quad (6.14) \end{aligned}$$

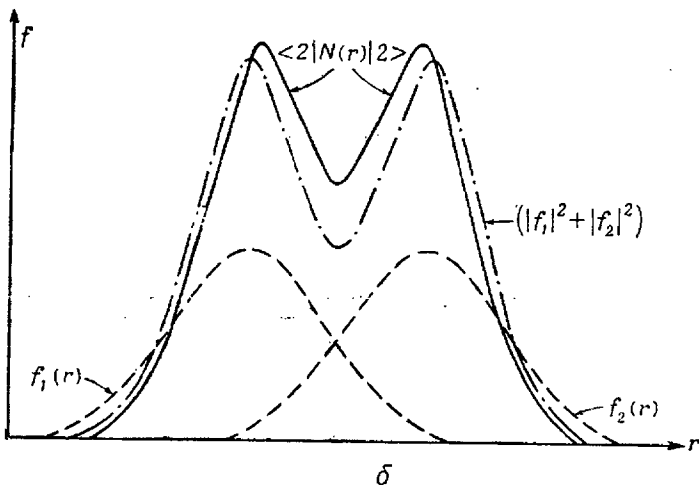
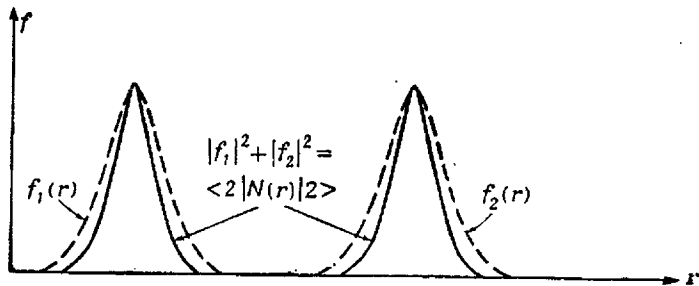
Этот результат получен после перестановки всех операторов ψ направо и операторов ψ^\dagger налево и использования равенства $\psi|0\rangle =$

¹⁾ Если это состояние является собственным состоянием гамильтониана, то оно не зависит от времени, а если нет, то волновая функция задается выражением (6.10) лишь при $t = 0$. В последующем изложении мы рассматриваем этот второй случай.

²⁾ С различными частицами мы встретимся в следующей главе.

$= \langle 0 | \psi^\dagger = 0$. Мы видим, что если волновые функции ортогональны, $(f_1, f_2) = 0$, то плотность числа частиц представляет собой сумму отдельных плотностей

$$\langle 2 | N(r) | 2 \rangle = |f_1(r)|^2 + |f_2(r)|^2,$$

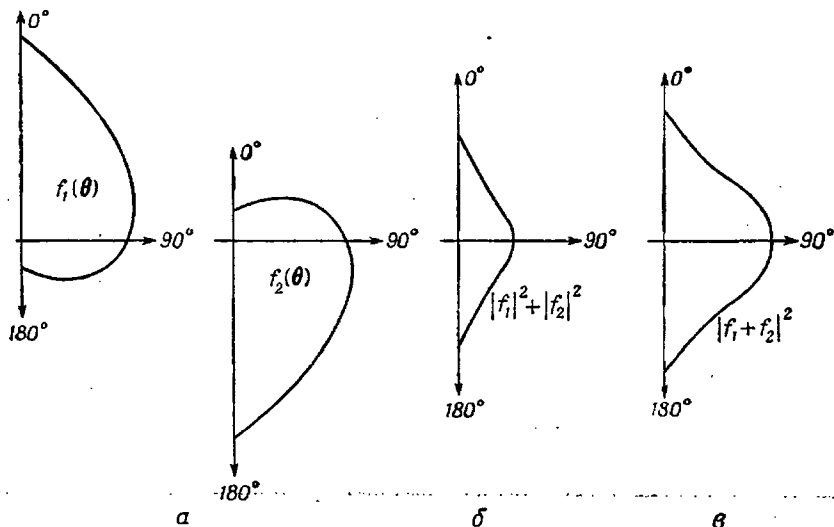


Фиг. 6.1. Интерференционные эффекты в распределении плотности двух частиц.

В случае *a* показаны две неинтерferирующие частицы. Случай *b* соответствует двум интерferирующим частицам. В отсутствие интерференции плотность была бы равна $|f_1|^2 + |f_2|^2$; действительная плотность равна $\langle 2 | N(r) | 2 \rangle$. Видно, что частицы имеют тенденцию к слипанию в области интерференции.

как и должно быть для независимых частиц (см. фиг. 6.1, *a*). Такая ситуация, в частности, имеет место в классическом пределе непрерывных волновых пакетов, когда частицы можно различить, прослеживая их траектории. Если, однако, $(f_1, f_2) \neq 0$, то в выражении плотности появляется интерференционный член, который

благодаря знаменателю в (6.14) приводит к уменьшению плотности в области, где f не перекрываются, и, следовательно, к увеличению ее в среднем в области перекрытия. Это изображено на фиг. (6.1, б). Вследствие этого свойства бозоны имеют естественную тенденцию к слипанию. Таким образом, мы видим, что не только одиночная частица может интерферировать сама с собой (это — обычный принцип суперпозиции в квантовой механике), но две тождественные частицы также могут интерферировать друг с другом. Интерференция, являющаяся другой формой требования симметрии волновой функции,



Фиг. 6.2. а — полярные диаграммы для положительных амплитуд $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ в случае гипотетического α — α -рассеяния; б и в — распределение интенсивности соответственно без учета и с учетом интерференции.

никогда не появляется между частицами различных полей (см. гл. 7); она подчеркивает то обстоятельство, что тождественные частицы представляют собой возбуждения одного и того же поля. Из сказанного вытекает один важный вывод относительно рассеяния двух тождественных частиц. В этом случае интенсивность рассеяния не является простой суммой интенсивностей обеих частиц, а включает интерференционный член того же типа, что и в (6.14). Если, например, при рассеянии α -частиц на He^4 амплитуда $f_1(\theta)$ в системе центра масс велика для рассеяния вперед, амплитуда $f_2(\theta)$ должна быть велика при рассеянии назад, так что полная интенсивность $|f|^2 = |f_1 + f_2|^2$ может быть аномально большой около 90°, как это показано на фиг. 6.2.

6.3. Многочастичные состояния. Другое необычное физическое явление, непосредственно связанное с вышеизложенными рассуждениями, это флуктуации числа бозонов в объеме $v \ll L^3$, содержащем определенное число бозонов n . Для независимых частиц распределение числа частиц в объеме v удовлетворяет закону Пуассона, так что вероятность обнаружения ν частиц в объеме v равна

$$\eta_\nu = e^{-\bar{\nu}} \frac{(\bar{\nu})^\nu}{\nu!},$$

где $\bar{\nu}$ — среднее число частиц в объеме

$$\bar{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu \nu. \quad (6.15)$$

При однородном распределении частиц в нормировочном объеме число $\bar{\nu}$ должно быть равно nV/L^3 . Для распределения Пуассона флуктуация числа частиц в объеме v равна

$$(\Delta\nu)^2 = \overline{\nu^2} - \bar{\nu}^2 = \sum_{\nu} \eta_\nu \nu^2 - \bar{\nu}^2 = \bar{\nu}, \quad (6.16)$$

а это означает, что в случае нормального распределения и в отсутствие корреляций квадратичные флуктуации локальной плотности пропорциональны самой плотности. Это и есть результат для частиц в классическом рассмотрении.

Что же получается при анализе с точки зрения теории поля? Мы покажем сейчас, что даже для бозонов, находящихся в ортогональных состояниях (для которых плотности частиц аддитивны), локальные флуктуации плотности частиц не аддитивны. Чтобы получить этот вывод, мы вычислим в первую очередь $\bar{\nu}$ для n -частичного состояния, которое представляется в виде

$$|n\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_n f_1(r_1) f_2(r_2) \dots f_n(r_n) \psi^\dagger(r_1) \psi^\dagger(r_2) \dots \psi^\dagger(r_n) |0\rangle, \quad (6.17)$$

причем ¹⁾

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij}. \quad (6.18)$$

Теми же методами, что и раньше, мы получаем

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \langle n | N_v | n \rangle = \\ &= \int_v d^3r \langle n | \psi^\dagger(r) \psi(r) | n \rangle = \int_v d^3r \sum_{j=1}^n |f_j(r)|^2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

¹⁾ Мы рассматриваем ортогональные f , чтобы отделить изучаемый эффект от эффекта, обсужденного ранее.

Если каждая функция f выбирается в виде плоской волны $f_j = e^{ik_j \cdot r/L^{3/2}}$, мы имеем

$$\bar{v} = \frac{nv}{L^3}, \quad (6.20)$$

как и следовало ожидать. Для среднего значения

$$N_v^2 = \int_v d^3r d^3r' N(\mathbf{r}) N(\mathbf{r}') = N_v + \int_v d^3r d^3r' \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') \quad (6.21)$$

мы находим обычным образом

$$\langle n | N_v^2 | n \rangle = \bar{v} + \sum_{i \neq k} \int_v d^3r d^3r' f_i^*(\mathbf{r}) f_k^*(\mathbf{r}') [f_i(\mathbf{r}) f_k(\mathbf{r}') + f_k(\mathbf{r}) f_i(\mathbf{r}')], \quad (6.22)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} |\Delta N_v|^2 &= \langle n | N_v^2 - \bar{N}_v^2 | n \rangle = \\ &= \bar{v} + \sum_{i \neq k} \left| \int_v d^3r f_i^*(\mathbf{r}) f_k(\mathbf{r}) \right|^2 - \sum_i \left[\int_v d^3r |f_i(\mathbf{r})|^2 \right]^2, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где

$$\bar{N}_v \equiv \langle n | N_v | n \rangle.$$

Первый член в (6.23) соответствует результату, полученному ранее, т. е. уравнению (6.16) для распределения в отсутствие корреляций; два других члена описывают флуктуации, связанные с интерференцией различных частиц. В пределе $\bar{v} = L^3$ второй член исчезает вследствие предположения (6.18), а последний член равен n , что можно было предвидеть, так как при этом мы переходим к собственному состоянию N , для которого $(\Delta N)^2 = 0$. Для плоских волн последний член равен $n(v/L^3)^2 = \bar{v}v/L^3$; он исчезает при $\bar{v} = \text{const}$, $L^3 \rightarrow \infty$.

Изучим теперь флуктуации плотности частиц в двух предельных случаях: когда объем v много больше и когда он много меньше объема, в котором отличны от нуля¹⁾ функции распределения f_i , представляющие частицы. Если кванты образуются волновыми пакетами с длиной волны, много меньшей $v^{1/3}$, как показано на фиг. 6.3, а, то второй член выпадает из-за ортогональности f_j и $f_{k \neq j}$. Поле в этом случае имеет свойства совершенно не интерферирующей системы и не проявляет волнового поведения. В противоположном

¹⁾ Напомним, что в этом пределе третий член в правой части (6.23) стремится к нулю.

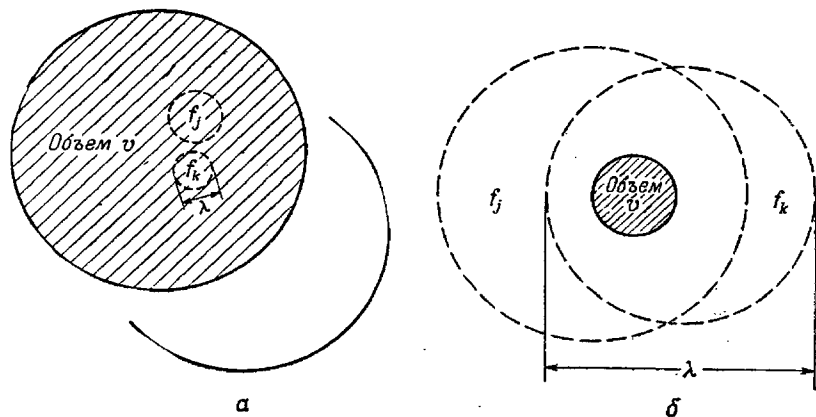
случае больших длин волн $v \ll \lambda^3 = k_j^{-3}$, как это показано на фиг. 6.3, б, если волны плоские, мы получаем, что второй член

$$\sum_{j \neq k} \left(\frac{v}{L^3} \right)^2 = \bar{v}^2.$$

а флуктуации оказываются равными

$$(\Delta N_v)^2 = \bar{v}(\bar{v} + 1).$$

Можно заметить, что при малой средней плотности частиц $\bar{v} \ll 1$ частицы ведут себя как классические. Чтобы проиллюстрировать



Фиг. 6.3. Флуктуации в предельных случаях.

На фиг. а размеры пакета, представляющего частицу, гораздо меньше объема v , а на фиг. б — гораздо больше v .

значение добавочного интерференционного члена (т. е. \bar{v}^2), следует рассмотреть случай большой плотности частиц, $\bar{v} \gg 1$. В этом пределе частицы ведут себя как суперпозиция волн с равными амплитудами и случайно выбранными фазами

$$\sum_{j=1}^n e^{i\phi_j}.$$

Интенсивность результирующей волны равна

$$I = \text{Re} \left(\sum_{j=1}^n e^{-i\phi_j} \sum_{k=1}^n e^{i\phi_k} \right) = n + 2 \sum_{k>j} \cos(\phi_j - \phi_k), \quad (6.24)$$

и поэтому

$$I^2 = \left[n + 2 \sum_{k>j} \cos(\phi_j - \phi_k) \right]^2.$$

В (6.24) Re означает действительную часть выражения в скобках. После усреднения по фазам мы находим для $n \gg 1$:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= n, & \bar{I}^2 &\approx 2n^2, \\ (\Delta I)^2 &= \overline{I^2} - \bar{I}^2 \approx n^2, \end{aligned} \tag{6.25}$$

что согласуется с (6.23)¹⁾. Такие большие флуктуации происходят вследствие естественной тенденции бозонов к слиянию. Это действительно наблюдалось в интенсивных световых лучах, где распределение бозонов не подчинялось закону Пуассона [1]. В зависимости от того, мало или много бозонов имеет достаточную длину волны, наша система будет проявлять либо корпускулярные, либо волновые свойства.

¹⁾ На самом деле наши частицы соответствуют волнам с амплитудой $(v/L^3)^{1/2}$, а не с 1, что приводит к замене n на v в (6.25).

ВНУТРЕННИЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

7.1. Поля с двумя внутренними степенями свободы. Кванты полей, рассмотренные нами до сих пор, вели себя как неразличимые частицы. Чтобы описать системы, состоящие из различных частиц, необходимо ввести несколько полей, по одному на каждый вид частиц. Частицы могут отличаться такими свойствами, как масса, спин и направление спина, или даже такими свойствами, как заряд, т. е. свойствами, не связанными с пространством — временем. Именно с различием последнего типа мы будем иметь дело в настоящей главе. Рассмотрим, например, два эрмитовых поля Клейна — Гордона $\phi_1 = \phi_1^\dagger$ и $\phi_2 = \phi_2^\dagger$ и возьмем плотность лагранжиана в виде суммы

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_1) + \mathcal{L}(\phi_2) = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} [\dot{\phi}_j^2 - (\nabla\phi_j)^2 - m_j^2\phi_j^2],$$

$$[\phi_j(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}_l(\mathbf{r}', t)] = i\delta_{jl}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (7.1)$$

$$[\phi_j(\mathbf{r}, t), \phi_l(\mathbf{r}', t)] = [\dot{\phi}_j(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}_l(\mathbf{r}', t)] = 0.$$

Эти соотношения описывают систему, образованную двумя сортами частиц с различными массами. Наши предыдущие выводы, касающиеся собственных состояний различных операторов, остаются в силе, за исключением того, что теперь каждое состояние должно характеризоваться числом частиц 1-го и 2-го сортов. Например, двухчастичное состояние, содержащее по одной частице каждого сорта, задается выражением

$$|2\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \phi_1^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_2^{(-)}(\mathbf{r}_2) |0\rangle; \quad (7.2)$$

однако $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ не должна быть теперь симметричной, так как

$$\phi_1^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_2^{(-)}(\mathbf{r}_2) \neq \phi_1^{(-)}(\mathbf{r}_2) \phi_2^{(-)}(\mathbf{r}_1).$$

Поэтому частицы, относящиеся к различным полям, не подчиняются бозе-статистике, безотносительно к тому, одинаковы их пространственно-временные свойства или нет. Соответственно, они не интер-

ферируют друг с другом и не дают никаких аномальных флуктуаций.

Механическая модель, которую можно сопоставить введению двух полей — это двумерный осциллятор. В этом случае лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_j (\dot{q}_j^2 - q_j^2 \omega_j^2). \quad (7.3)$$

Если силы, действующие в двух направлениях, равны, т. е. если $\omega_1 = \omega_2$, то появляется новая неэргодическая константа движения, соответствующая ротационной симметрии задачи. Эта константа есть угловой момент, направленный перпендикулярно осям 1 и 2. То же самое происходит и в теории поля, когда две массы в (7.1) равны друг другу. При этом лагранжиан и перестановочные соотношения инвариантны относительно подстановки

$$\begin{aligned} \phi'_1 &= \phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi, \\ \phi'_2 &= -\phi_1 \sin \varphi + \phi_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Соотношения (7.4) также отражают ротационную симметрию в двумерном пространстве, однако это пространство не имеет ничего общего с нашим пространственно-временным континуумом. Тем не менее исходя из формальной аналогии ϕ_1 и ϕ_2 рассматриваются как компоненты двумерного векторного поля во „внутреннем пространстве“, с которым связаны новые константы движения, возникающие из ротационной симметрии. Эти константы называются „изоспином“ по аналогии с угловым моментом для полей с тремя компонентами. Мы сейчас приступим к их обсуждению. Так же как и константы, вытекающие из инвариантности пространственно-временного континуума, новые константы представляют собой операторы бесконечно малых преобразований, причем число констант равно числу параметров группы, оставляющей L инвариантным. Так как группа (7.4) содержит один параметр, мы имеем всего одну константу. Чтобы найти эту константу, мы последуем обычному методу. Поскольку (7.4) оставляют перестановочные соотношения (7.1) инвариантными, должен существовать унитарный оператор U , связывающий¹⁾ ϕ_j и ϕ'_j :

$$\begin{aligned} U \phi_1 U^{-1} &= \phi_1 \cos \varphi + \phi_2 \sin \varphi, \\ U \phi_2 U^{-1} &= -\phi_1 \sin \varphi + \phi_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7.5)$$

¹⁾ В теории поля в отличие от элементарной квантовой механики не всегда справедливо утверждение, что для каждого преобразования, оставляющего перестановочные соотношения инвариантными, существует соответствующий унитарный оператор. Мы не будем, однако, обращать внимания на эту трудность, связанную с патологическими неэквивалентными представлениями в несепарабельных гильбертовых пространствах. См. работу Вайтмана и Швевера [1].

Для бесконечно малых поворотов $\varphi \rightarrow \delta\varphi$ мы полагаем

$$U = 1 + i\delta\varphi Q, \quad U^{-1} = 1 - i\delta\varphi Q, \quad Q^\dagger = Q, \quad (7.6)$$

и получаем

$$\begin{aligned} [Q, \phi_1] &= -i\phi_2, \\ [Q, \phi_2] &= i\phi_1. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Фактически Q можно построить явным образом из операторов поля; оно представляет собой обобщение выражения для углового момента $p_1q_2 - p_2q_1$ в механической модели (7.3):

$$Q = \int d^3r [\dot{\phi}_1\phi_2 - \dot{\phi}_2\phi_1]. \quad (7.8)$$

Легко проверить с помощью (7.1), что соотношения (7.6) и (7.7) выполняются. Далее, поскольку операторы H , P и L представляют собой, подобно лагранжиану, квадратичные формы в компонентах ϕ_j , они инвариантны относительно (7.5), т. е.

$$[Q, H] = [Q, P] = [Q, L] = 0. \quad (7.9)$$

Последнее равенство свидетельствует о том, что Q инвариантно относительно пространственных смещений и поворотов и, что особенно существенно, постоянно во времени. Последнее можно непосредственно проверить, исходя из соотношения

$$\frac{d}{dt} (\dot{\phi}_1\phi_2 - \dot{\phi}_2\phi_1) + \nabla \cdot (\phi_1\nabla\phi_2 - \phi_2\nabla\phi_1) = 0, \quad (7.10)$$

которое показывает, что Q можно свести к поверхностному интегралу.

Аналогичные соотношения можно получить и для других констант движения (таких как энергия), которые представляются в виде бесконечных объемных интегралов. Тот факт, что их временные производные исчезают, может быть выражен в форме дифференциального уравнения непрерывности

$$\frac{\partial Q(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Из (7.10) следует, что локальная плотность $Q(\mathbf{r}, t)$ величины Q

$$Q(\mathbf{r}, t) = (\phi_2\dot{\phi}_1 - \phi_1\dot{\phi}_2), \quad (7.11)$$

и ток \mathbf{j} , определенный равенством

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = (\phi_1\nabla\phi_2 - \phi_2\nabla\phi_1), \quad (7.12)$$

удовлетворяют уравнению непрерывности. Отсюда следует, что их можно интерпретировать как плотность электрического заряда и ток для данного поля. Подтверждением этой интерпретации служит их

поведение при лоренцовых преобразованиях. Плотность $Q(\mathbf{r}, t)$ и ток \mathbf{j} преобразуются как четырехвекторы, в противоположность, например, плотности энергии, которая также удовлетворяет уравнению непрерывности. В силу сказанного оказывается возможным связать электрическое поле с $Q(\mathbf{r}, t)$ и \mathbf{j} лоренц-инвариантным образом:

$$\mathcal{L}' = e[Q(\mathbf{r}, t)V - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}],$$

где V — электростатический потенциал, а \mathbf{A} — вектор-потенциал. Конечно, вопрос о том, имеют ли действительно частицы отличный от нуля заряд e , может быть решен только эмпирически¹⁾. Оба случая реализуются в природе. К примеру, K_0 и \bar{K}_0 -мезоны не связаны с электрическим полем, а π^+ и π^- -мезоны связаны. Однако если частицы заряжены, их связь с электрическим полем должна осуществляться через ток вида (7.12), так как не существует другой величины, обладающей правильными трансформационными свойствами и удовлетворяющей уравнению непрерывности.

Собственные значения оператора заряда Q можно установить, исходя из перестановочных соотношений (7.7), которые с помощью матрицы

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

записываются более компактно:

$$[Q_1 \phi_j] = \sum_{i=1}^2 (\tau_2)_{ji} \phi_i = (\tau_2 \phi)_j,$$

где в правой части подразумевается матричное умножение. Введя такие линейные комбинации полей ϕ_1 и ϕ_2 , которые диагонализуют τ_2 :

$$\phi_+ = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{(2)^{1/2}}, \quad \phi_- = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{(2)^{1/2}}, \quad (7.13)$$

мы получим

$$[Q, \phi_+] = -\phi_+, \quad [Q, \phi_-] = \phi_-. \quad (7.14)$$

и

$$L = \int d^3r (\dot{\phi}_- \dot{\phi}_+ - \nabla \phi_- \cdot \nabla \phi_+ - m^2 \phi_- \phi_+),$$

$$Q = i \int d^3r (\dot{\phi}_+ \phi_- - \dot{\phi}_- \phi_+),$$

$$\pi_+ = \frac{\pi_1 - i\pi_2}{(2)^{1/2}} = \dot{\phi}_-, \quad \pi_- = \frac{\pi_1 + i\pi_2}{(2)^{1/2}} = \dot{\phi}_+.$$

$$[\phi_+(\mathbf{r}, t), \pi_+(\mathbf{r}', t)] = [\phi_-(\mathbf{r}, t), \pi_-(\mathbf{r}', t)] = i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

¹⁾ Для одного эрмитова поля мы имеем только плотность числа частиц, которая не удовлетворяет уравнению непрерывности в присутствии взаимодействия. Следовательно, частицы, связанные с этим полем, должны быть нейтральными.

Для этих полей преобразование (7.4) превращается в простое умножение на фазовый множитель ¹⁾ (градиентное преобразование первого рода):

$$\phi'_+ = e^{-i\varphi} \phi_+, \quad \phi'_- = e^{i\varphi} \phi_-.$$

Перестановочные соотношения (7.14) имеют стандартную форму (2.7), однако поскольку Q не является положительно-определенной величиной, можно заключить, что Q имеет в качестве собственных значений как положительные, так и отрицательные целые числа. Мы видим, что для любого инфинитиземального оператора типа H, P, L или Q , задача о собственных значениях всегда может быть решена аналогичным способом. Рассмотренный случай особенно прост, так как он сводится к диагонализации матрицы 2×2 , а не дифференциального оператора.

Поскольку нежелательно, чтобы в вакуумном состоянии присутствовал какой-либо заряд, потребуем, чтобы

$$Q|0\rangle = 0. \quad (7.15)$$

Следует отметить, что это требование удовлетворяется без упорядочения оператора Q в соответствии с (6.5). Из (7.14) следует, что одночастичные состояния $\phi_+|0\rangle$ и $\phi_-|0\rangle$ являются собственными состояниями оператора заряда при собственных значениях -1 и $+1$ соответственно, так что ϕ_- порождает положительную частицу, а ϕ_+ — отрицательную. Поскольку Q коммутирует с P и H , мы можем построить состояния, являющиеся собственными состояниями одновременно обоих этих операторов. Если определить, используя обозначения (4.8), величины

$$\alpha_k = \frac{a_{1k} + ia_{2k}}{(2)^{1/2}}, \quad \beta_k = \frac{a_{1k} - ia_{2k}}{(2)^{1/2}}, \quad (7.16)$$

и принять во внимание, что преобразование от a_1, a_2 к α, β унитарно, мы получим

$$\phi_+ = \sum_k \frac{\alpha_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \beta_k^+ e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{(2\omega L^3)^{1/2}},$$

$$\phi_- = \sum_k \frac{\beta_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \alpha_k^+ e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{(2\omega L^3)^{1/2}},$$

$$[\alpha_k, \alpha_k^+] = [\beta_k, \beta_k^+] = 1,$$

$$[\alpha_k, \alpha_k] = [\beta_k, \beta_k] = [\alpha_k, \beta_k^+] = [\alpha_k, \beta_k] = \dots = 0.$$

¹⁾ Это также показывает, что одиночное эрмитово поле не может быть заряженным.

и

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^{\dagger} \beta_{\mathbf{k}}) \omega, \\
 P &= \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^{\dagger} \beta_{\mathbf{k}}) \mathbf{k}, \\
 Q &= \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} - \beta_{\mathbf{k}}^{\dagger} \beta_{\mathbf{k}}).
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

Из (7.17) ясно, что собственные значения операторов $\alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, $\alpha_{\mathbf{k}}$ (или $\beta_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, $\beta_{\mathbf{k}}$) представляют собой числа положительных n_{+} (или отрицательных n_{-}) частиц с импульсами \mathbf{k} и энергиями ω .

Интересно отметить, что перестановочные соотношения (7.7) или (7.14) сохраняются при коммутации $\phi_{\pm}(\mathbf{r})$ или $\phi_{\pm}(\mathbf{r})$ с оператором заряда Q_v в любом (сколь угодно малом) объеме v :

$$\begin{aligned}
 Q_v &= \int d^3r' Q(\mathbf{r}'), \\
 [Q_v, \phi_{\pm}(\mathbf{r})] &= \begin{cases} -\phi_{\pm}(\mathbf{r}), & \text{если } \mathbf{r} \text{ внутри } v, \\ 0, & \text{если } \mathbf{r} \text{ вне } v. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Следовательно, заряд, находящийся в произвольно малом объеме, также имеет целые собственные значения в противоположность оператору числа частиц, рассмотренному ранее. Точечный характер кванта заряда отражен также в соотношении $[Q_v, Q_{v'}] = 0$ для произвольных v и v' , и не противоречит установленному ранее факту, состоящему в том, что частицы, соответствующие собственным значениям N , имеют размеры комптоновской длины волны. Эти частицы следует представлять себе в виде флуктуирующего облака точечных заряженных квантов¹⁾, занимающих область с размерами m^{-3} ²⁾. В самом деле, $Q(\mathbf{r})$ не коммутирует с полным числом частиц

$$N = N_{+} + N_{-} = \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^{\dagger} \beta_{\mathbf{k}}.$$

Поэтому состояние $|\phi_{\pm}(\mathbf{r})\rangle$, определенное таким образом, что для него $Q_v |\phi_{\pm}(\mathbf{r})\rangle = 0$ и, следовательно,

$$Q_v \phi_{\pm}(\mathbf{r}) |0\rangle = \begin{cases} \phi_{\pm}(\mathbf{r}) |0\rangle, & \text{если } \mathbf{r} \text{ внутри } v, \\ 0, & \text{если } \mathbf{r} \text{ вне } v. \end{cases}$$

не будет одночастичным состоянием. Почти во всех экспериментах, которые возможно осуществить в настоящее время, энергии едва хватает на возбуждение самых низких собственных состояний H . Поэтому

¹⁾ Конечно, не все из них имеют заряды одинакового знака.

²⁾ Это явление называют иногда Zitterbewegung („дрожание“). Оно было обнаружено впервые при решении уравнения Дирака. Обсуждение этого вопроса в рамках квантовой теории поля см. в книге Тирринга [2].

известные эмпирически частицы соответствуют собственным состояниям N и представляют собой дополнительные объекты по отношению к квантам заряда.

7.2. Три и более степеней свободы. Ротационная инвариантность двумерного зарядового пространства может быть обобщена; это обобщение находит, например, применение в физике π -мезонов, где мы сталкиваемся с тремя различными видами частиц: π , π^0 , π^+ -мезонами, описание которых требует использования трех полей. Мы рассмотрим вначале случай n различных полей с равными массами и применим его потом к $n = 3$. В природе нам приходится сталкиваться с несколькими полями, имеющими одинаковые пространственно-временные свойства. Так, например, K -мезоны (K^- , \bar{K}_0 , K_0 , K^+) соответствуют четырем бесспиновым полям. В общем случае

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [\dot{\phi}_j^2 - (\nabla\phi_j)^2 - m^2\phi_j^2],$$

$$[\phi_j(\mathbf{r}), \dot{\phi}_k(\mathbf{r}')]_{t=t'} = i\delta_{j,k}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (7.19)$$

$$\phi_j^\dagger = \phi_j, \quad [\phi_j(\mathbf{r}), \phi_k(\mathbf{r}')]_{t=t'} = [\dot{\phi}_j(\mathbf{r}), \dot{\phi}_k(\mathbf{r}')]_{t=t'} = 0.$$

Здесь важно помнить, что все члены в L должны входить с одним знаком, чтобы отсутствовали отрицательные вклады в энергию¹⁾. Наиболее общее преобразование, оставляющее уравнения (7.19) инвариантными, имеет вид

$$U(\Lambda)\phi_i U^{-1}(\Lambda) = \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij}\phi_j, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad (7.20)$$

где Λ не зависит от времени и удовлетворяет условиям²⁾

$$\Lambda\Lambda^\dagger = 1 \quad \text{и} \quad \Lambda^* = \Lambda. \quad (7.21)$$

Таким образом, мы имеем ротационную инвариантность в n -мерном евклидовом пространстве. Для поворотов на бесконечно малые углы $\delta\varphi(\mathbf{r})$ вокруг осей \mathbf{r} можно записать Λ в следующей общей форме³⁾:

$$\Lambda_{kj} = \delta_{kj} + \sum_{r=1}^N \delta\varphi(\mathbf{r}) \mathcal{J}_{kj}^{(r)}. \quad (7.22)$$

¹⁾ Частицы с отрицательной энергией разрушают динамическую стабильность системы при наличии взаимодействия.

²⁾ Мы используем следующие обозначения: T — транспонированный, * — комплексно сопряженный, $+$ — эрмитово сопряженный.

³⁾ Существуют также константы, связанные с преобразованиями, не при-
мыкающими непрерывно к единице. Они имеют интересный смысл, но обсу-
ждение их выходит за рамки настоящей книги.

где $\delta\varphi(r)$ — бесконечно малые вещественные параметры. Число линейно независимых матриц $\mathcal{J}^{(r)}$ будет определено ниже. Для двух измерений матрица \mathcal{J} равна $i\tau_2$. Ограничения, накладываемые условиями (7.21) в первом порядке по $\delta\varphi$, дают

$$\mathcal{J}_{ij}^{(r)} = -\mathcal{J}_{ji}^{(r)}, \quad \mathcal{J}_{ij}^{(r)*} = \mathcal{J}_{ij}^{(r)}. \quad (7.23)$$

Поэтому матрицы \mathcal{J} должны быть вещественными и антисимметричными. Таким образом, \mathcal{J} имеет $n(n-1)/2$ линейно независимых матричных элементов. Иначе говоря, мы можем выбрать такое же число линейно независимых базисных $n \times n$ матриц, удовлетворяющих (7.23), через которые можно выразить любую матрицу, удовлетворяющую уравнению (7.22). Число N параметров, характеризующих общую матрицу \mathcal{J} , равно поэтому $n(n-1)/2$.

Оператор U для общего бесконечно малого Λ снова имеет вид

$$U = 1 + i \sum_{r=1}^N \delta\varphi(r) t^{(r)}, \quad (7.24)$$

где операторы $t^{(r)}$ должны быть эрмитовыми вследствие унитарности U . Перестановочные соотношения для t следуют из (7.20):

$$[t^{(r)}, \phi_j] = -i \sum_{k=1}^n \mathcal{J}_{jk}^{(r)} \phi_k, \quad [t^{(r)}, \dot{\phi}_j] = -i \sum_{k=1}^n \mathcal{J}_{jk}^{(r)} \dot{\phi}_k. \quad (7.25)$$

и мы видим, что выражение (7.8) можно обобщить следующим образом:

$$t^{(r)} = \sum_{i,j=1}^n \int d^3r \dot{\phi}_i \mathcal{J}_{ij}^{(r)} \phi_j. \quad (7.26)$$

В силу инвариантности пространственно-временных интегралов движения относительно преобразования U , мы имеем

$$[t^{(r)}, H] = [t^{(r)}, P] = [t^{(r)}, L] = 0$$

и, следовательно, каждый $t^{(r)}$ сам является интегралом движения. Легко проверить, что для каждого $t^{(r)}$ существует свой сохраняющийся ток. В случае двух измерений t равен Q .

Прежде чем заняться построением собственных состояний $t^{(r)}$, убедимся, что операторы $t^{(r)}$ и $t^{(s)}$, вообще говоря, не коммутируют. Из (7.26) или непосредственно с помощью (7.19) легко убедиться, что перестановочные соотношения между операторами $t^{(r)}$ могут быть получены из перестановочных соотношений для матриц $\mathcal{J}^{(r)}$:

$$\begin{aligned} [t^{(r)}, t^{(s)}] &= i \sum_{ijk} \int \dot{\phi}_i (\mathcal{J}_{ij}^{(r)} \mathcal{J}_{jk}^{(s)} - \mathcal{J}_{ij}^{(s)} \mathcal{J}_{jk}^{(r)}) \phi_k d^3r = \\ &= i \sum_{ij} \int d^3r \dot{\phi}_i [\mathcal{J}^{(r)}, \mathcal{J}^{(s)}]_{ij} \phi_j, \end{aligned} \quad (7.27)$$

где в нижней строке уравнение переписано в матричной форме. Так как скобки $[\mathcal{J}^{(r)}, \mathcal{J}^{(r')}]$ представляют собой антисимметричные $n \times n$ матрицы, их можно представить в виде линейной комбинации матриц:

$$[\mathcal{J}^{(r)}, \mathcal{J}^{(r')}] = \sum_{r''} C_{rr''}^{r'} \mathcal{J}^{(r'')} \quad (7.28)$$

Подставляя последнее равенство в (7.27), находим, что операторы t удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и матрицы \mathcal{J} . Таким образом, одновременно диагонализировать можно только те операторы $t^{(r)}$, которым соответствуют коммутирующие матрицы $\mathcal{J}^{(r)}$. Далее, исходя из (7.25), мы можем заключить, что вообще собственные значения операторов t отличаются численным множителем от собственных значений матриц \mathcal{J} .

В заключение обсудим более детально случай $n=3$, который подходит для описания π -мезонов. Здесь удобно выбрать антисимметричные матрицы в виде

$$\mathcal{J}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

Они удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\mathcal{J}^{(r)}, \mathcal{J}^{(s)}] = \varepsilon_{rst} \mathcal{J}^{(t)},$$

где ε_{rst} — антисимметричный тензор. Три оператора t , соответствующие этим матрицам, называются изоспином¹⁾. Они удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы вращения в представлении углового момента $l=1$:

$$[t^{(r)}, t^{(s)}] = i\varepsilon_{rst} t^{(t)}.$$

Что же касается Q , мы требуем, чтобы

$$t^{(r)}|0\rangle = 0.$$

Последнее согласуется с тем, что вакуум представляет собой общее собственное состояние трех (некоммутирующих) операторов t , поскольку вакуум есть одновременно собственное состояние коммутаторов величин t с собственным значением 0. В общем случае можно построить лишь общие состояния одного из $t^{(r)}$ и $t^2 = t^{(1)2} + t^{(2)2} + t^{(3)2}$. Выделение определенного направления в изопространстве возникает в присутствии электрического поля, которое связано с одним из трех

¹⁾ Изоспин часто называют в литературе изотопическим или изобарическим спином.

сохраняющихся токов. Благодаря этой связи один из операторов $t^{(r)}$, например $t^{(3)}$, приобретает смысл электрического заряда. Его собственные состояния получают, применяя к вакууму линейные комбинации ϕ_j , диагонализующие $t^{(3)}$. Такие комбинации имеют вид $(\phi_1 \pm i\phi_2)/2^{1/2}$, ϕ_3 , причем первые комбинации принадлежат собственным значениям ± 1 (и описывают π^\pm -мезоны), а последняя соответствует собственному значению 0 (и описывает π^0 -мезоны). Общие собственные состояния t^2 и $t^{(3)}$ можно построить по аналогии с состояниями углового момента. Положив собственное значение t^2 равным $t'(t'+1)$, мы видим, что вакуум характеризуется значением $t'=0$, а одномезонные состояния $t'=1$. Два мезона могут иметь $t'=0, 1, 2$. Состояние с $t'=0$ инвариантно относительно вращений в изопространстве и поэтому пропорционально скалярному произведению

$$\begin{aligned} |n=2, t'=0\rangle &= \sum_{i=1}^3 \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_i^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_i^{(-)}(\mathbf{r}_2) F_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |0\rangle = \\ &= \int d^3r_1 d^3r_2 [\phi_+^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_-^{(-)}(\mathbf{r}_2) + \phi_-^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_+^{(-)}(\mathbf{r}_2) + \\ &\quad + \phi_3^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_3^{(-)}(\mathbf{r}_2)] F_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |0\rangle \end{aligned}$$

Это состояние можно выразить через состояния заряженных частиц как

$$| - + \rangle + | + - \rangle + | 0 0 \rangle,$$

и, следовательно, каждая из двух частиц может с равной вероятностью быть положительной, отрицательной или нейтральной¹⁾. При вращениях в изотопическом пространстве состояние с $t=1$ должно преобразовываться как вектор и поэтому его можно представить в виде векторного произведения:

$$|n=2, t'=1\rangle = \sum_{i,j} \int d^3r_1 d^3r_2 \epsilon_{ijk} \phi_i^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_j^{(-)}(\mathbf{r}_2) F_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |0\rangle.$$

¹⁾ Обозначение $\phi_+^{(-)}$ и т. д. представляет собой прямое обобщение (5.18)

$$\phi_+^{(-)} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\beta_{\mathbf{k}}^+ e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{(2\omega L^3)^{1/2}}.$$

Заметим, что поскольку ротационная симметрия во внутреннем пространстве не связана с пространственно-временными свойствами, функция $F_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ оказывается независимой от $i=1, 2, 3$.

В частности, состояние с $t_3 = 0$ ($k = 3$) имеет вид $|+-\rangle - |-+\rangle$. Наконец, состояния с $t = 2$ преобразуются как симметричный тензор второго ранга со шпуром, равным нулю:

$$|n = 2, t' = 2\rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 [\phi_i^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_j^{(-)}(\mathbf{r}_2) + \\ + \phi_j^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_i^{(-)}(\mathbf{r}_2) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \phi_i^{(-)}(\mathbf{r}_1) \phi_j^{(-)}(\mathbf{r}_2)] F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) |0\rangle.$$

Эти состояния можно построить и с помощью стандартных формул для сложения угловых моментов [3]. Заметим, что состояния с $t = 0, 2$ четны, а с $t = 1$ нечетны по отношению к перестановке двух частиц. Следовательно, $F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ должна быть четной в первом случае и нечетной во втором по отношению к перестановке \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 ¹⁾ — результат, существенный для π -мезонного облака, окружающего нуклон.

Заключение: описание различных существующих в природе частиц хорошо укладывается в рамки теории поля. Более конкретные предсказания для трех π -мезонов, связанные с симметрией, изоморфной по отношению к трехмерной евклидовой группе, будут играть важную роль в последней части книги. Как будет видно, эта инвариантность не нарушается сильнейшими взаимодействиями, обнаруженными в природе, так что рассмотренный выше аппарат играет важную роль в физике π -мезонов.

¹⁾ Как было пояснено выше, части F , имеющие неправильную симметрию, взаимноисключаются и в конечный результат не входят.



Часть вторая

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ,
ДОПУСКАЮЩИЕ
ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

ОБЩИЙ ОБЗОР

8.1. Уравнения поля. До сих пор мы рассматривали свободные поля. Теперь мы перейдем к более интересной задаче, включающей дополнительный механизм, вызывающий рождение, поглощение и рассеяние частиц поля. В этой части книги мы опишем несколько типов взаимодействий, для которых возможны полный анализ и точные решения. К сожалению, они довольно далеки от физической реальности и имеют лишь отдаленное сходство с тем, что мы наблюдаем в природе. Тем не менее их изучение имеет не только академический интерес, поскольку такие примеры учат нас тому, с чем мы можем столкнуться в более реальных случаях, не поддающихся детальному исследованию; такой реальный случай — π -мезон-нуклонное взаимодействие — мы рассмотрим в последней части книги.

В качестве первого примера рассмотрим простой случай поля с источником $\rho(\mathbf{r}, t)$ в виде заданной функции пространственных координат и времени:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t). \quad (8.1)$$

Элементарный механический аналог такого рода задачи — это внешняя сила $f(t)$, действующая на гармонический осциллятор. Уравнение движения для этой модели имеет вид

$$\ddot{q} + \omega^2 q = f(t). \quad (8.2)$$

Как и ранее, для первой ориентировки мы обратимся к классическому решению уравнения и лишь после этого рассмотрим квантовые аспекты задачи. Мы покажем, что как и одномерную задачу (8.2), уравнение (8.1) можно решить с помощью функции Грина.

Решая эту задачу, следует помнить, что если источник представляет собой сумму нескольких частей, то вследствие линейности уравнений решение будет также суммой решений, соответствующих

отдельным частям. Поэтому нужно найти лишь решение уравнения с точечным источником

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right) G(\mathbf{r}, t) = \delta(t) \delta^3(\mathbf{r}), \quad (8.3)$$

и тогда полное решение (8.1) можно построить в виде суперпозиции

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int dt' d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t'). \quad (8.4)$$

Из уравнения (8.3) легко видеть, что это поле действительно удовлетворяет уравнению (8.1). Решение (8.3) может быть получено в виде разложения дифференциального оператора $\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$ по собственным функциям, что достигается переходом к преобразованию Фурье:

$$G(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK_0}{2\pi} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - K_0 t)} g(K_0, \mathbf{k}), \quad (8.5)$$

$$\delta^3(\mathbf{r}) \delta(t) = \mathbf{S} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK_0}{2\pi} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - K_0 t)}.$$

Подстановка этих выражений в (8.3) дает

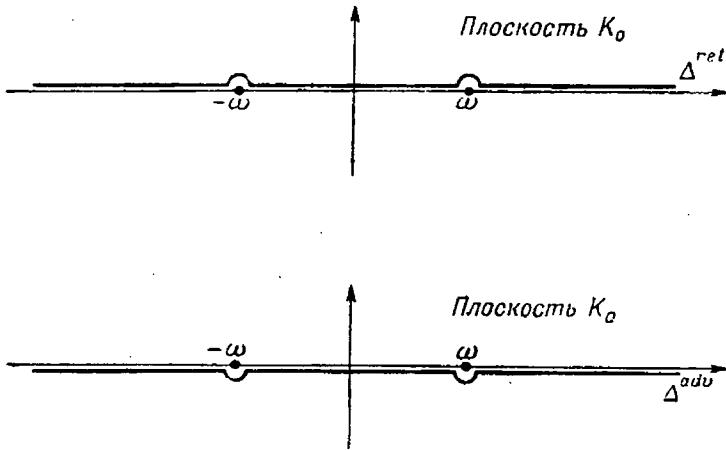
$$\mathbf{S} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dK_0}{2\pi} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - K_0 t)} [(K_0^2 - k^2 - m^2)g + 1] = 0, \quad (8.6)$$

или

$$g = \frac{1}{m^2 + k^2 - K_0^2}. \quad (8.7)$$

Мы видим, что подынтегральное выражение в (8.5) имеет два полюса на пути интегрирования при $K_0 = \omega = (k^2 + m^2)^{1/2}$ и при $K_0 = -\omega$. Если при интегрировании не задать характер обхода этих сингулярностей, наше выражение для функции Грина становится неопределенным. При интегрировании по различным путям мы получаем ответы, которые отличаются на величину вычетов в этих сингулярностях. Это является отражением того хорошо известного факта, что решение линейного неоднородного уравнения неоднозначно, поскольку к нему всегда можно добавить решение однородного уравнения. Действительно, вклады вычетов имеют вид $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, т. е. в точности совпадают с решением однородного уравнения. Чтобы получить единственное решение, необходимо задаться определенными граничными условиями. Для задач, с которыми мы столкнемся в дальнейшем, особые значения имеют граничные условия, соответствующие путям интегрирования в комплексной плоскости K_0 , изображенным на фиг. 8.1. Мы будем обозначать эти специальные функции Грина как Δ^{ret} и Δ^{adv} . Их смысл

можно выяснить, рассматривая интеграл по K_0 в комплексной плоскости. Для t , больших (меньших) нуля, множитель $e^{-iK_0 t}$ экспоненциально растет (убывает) в верхней полуплоскости и убывает (растет)



Фиг. 8.1. Контурсы интегрирования для функции Грина, соответствующие двум различным граничным условиям.

в нижней. Замыкая путь интегрирования в верхней или нижней полуплоскости, мы видим, что $\Delta^{ret} = 0$ для $t < 0$, а $\Delta^{adv} = 0$ для $t > 0$ ¹⁾. Полная функция Грина Δ^{ret} задается выражением²⁾

$$\Delta^{ret}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{\sin \omega t}{\omega}} & \text{для } t > 0, \\ 0 & \text{для } t < 0, \end{cases} \quad (8.8)$$

а два решения Δ^{ret} и Δ^{adv} связаны следующим образом:

$$\Delta^{ret}(\mathbf{r}, t) = \Delta^{adv}(\mathbf{r}, -t). \quad (8.9)$$

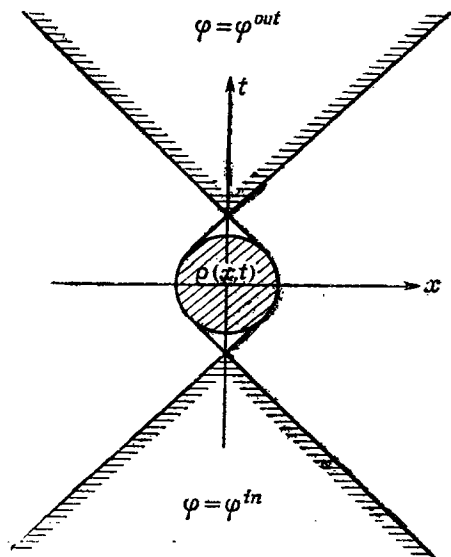
С помощью этих функций Грина можно записать общее решение (8.1) в виде

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \phi^{in}(\mathbf{r}, t) + \int dt' d^3r' \Delta^{ret}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') = \\ &= \phi^{out}(\mathbf{r}, t) + \int dt' d^3r' \Delta^{adv}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t'). \end{aligned} \quad (8.10)$$

¹⁾ Легко видеть, исходя из релятивистской инвариантности, что $\Delta^{ret} = 0$ даже при $t < r$.

²⁾ Как Δ^{ret} , так и Δ^{adv} можно выразить через функции Ханкеля от $r^2 - t^2$. Это легче всего сделать, связав Δ^{ret} с Δ^+ ; см., например, книгу Тирринга ([2] к гл. 7). Нам, однако, не потребуются эти выражения.

Здесь ϕ^{in} и ϕ^{out} — решения однородного уравнения. Их физический смысл легче всего понять, рассмотрев в качестве примера случай, когда $\rho(\mathbf{r}, t)$ отличается от нуля только в конечной пространственно-временной области, ограниченной моментами времени t_1 и t_2 . Из доказанных выше свойств функций Грина следует, что в этом случае ϕ совпадает с ϕ^{in} при $t < t_1$ и с ϕ^{out} при $t > t_2$. Следовательно, ϕ^{in} описывает поле, существовавшее до включения источника, а ϕ^{out} — поле, остающееся после того, как источник выключается, как это



Фиг. 8.2. Расположение областей, в которых ϕ соответствует ϕ^{in} и ϕ^{out} , относительно источника $\rho(x, t)$.

изображено на фиг. 8.2. Для многих проблем оказывается существенным только член с Δ^{ret} в (8.10). Это означает, что граничные условия имеют вид $\phi = \phi^{\text{in}}$ при $t = -\infty$. Хотя нельзя указать какую-либо принципиальную причину, по которой функция Δ^{ret} была бы лучше Δ^{adv} , первая используется чаще, поскольку значительно легче задать экспериментальные условия при $t = -\infty$, чем определенные условия в конце при $t = +\infty$.

Представляет интерес задача другого рода, изучению которой мы в дальнейшем будем уделять много внимания; она определяется уравнением¹⁾

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)\phi(\mathbf{r}', t). \quad (8.11)$$

¹⁾ Этот вид уравнения хорошо известен из обычной квантовой механики, с тем исключением, что там мы обычно имеем дело с не зависящими от времени и пространственно локализованными потенциалами вида

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = V_0(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Здесь $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ — обобщенный потенциал, действующий на поле; в случае связанных осцилляторов он соответствует более сложной связи, чем просто связь с ближайшими соседями. Уравнение (8.11) удается решить лишь для некоторых частных видов V , однако во всех случаях его можно переписать в интегральной форме с помощью функций Грина:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) = & \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \int dt' d^3r' d^3r'' \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \times \\ & \times V(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t') \phi(\mathbf{r}'', t') = \phi^{\text{out}}(\mathbf{r}, t) + \\ & + \int dt' d^3r' d^3r'' \Delta^{\text{adv}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') V(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', t') \phi(\mathbf{r}'', t'). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Если V стремится к нулю при $t \rightarrow \pm \infty$, то ϕ^{in} и ϕ^{out} , определенные по (8.12), имеют тот же физический смысл, что и в предыдущем примере.

Оба вида задач встречаются в многочисленных областях физики, хотя обычно и в несколько более сложной форме. Типичное свойство систем рассмотренного типа заключается в том, что энергия и импульс поля в отдельности более не сохраняются. Это следует из того, что $\partial L / \partial t$ и $\partial L / \partial \mathbf{r}$ не равны теперь нулю, поскольку ρ или V могут зависеть явно от t и \mathbf{r} и поскольку L содержит теперь добавочные члены, содержащие ρ или V . По существу даже число частиц поля не будет сохраняться, так как (8.1) и (8.11) дают

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r i (\phi^{(-)} \dot{\phi}^{(+)} - \dot{\phi}^{(-)} \phi^{(+)}) \neq 0.$$

Наблюдаемые остаются интегралами движения только при определенных условиях. Например, угловой момент сохраняется только при сферически симметричном источнике.

8.2. Квантование. Рассматривая квантовую теорию наших двух случаев, мы последуем обычной процедуре. Лагранжианы каждой из систем отличаются от лагранжиана свободных полей L_0 добавочными членами, равными соответственно

$$L' = \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) \quad (8.13)$$

и

$$L' = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \phi(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \phi(\mathbf{r}', t). \quad (8.14)$$

Эрмитовость L' означает, что $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = V^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$; мы положим также, что $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = V(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)$. Поскольку L' в обоих случаях не содержит $\dot{\phi}$, канонические перестановочные соотношения остаются в силе:

$$[\phi(\mathbf{r}, t), \dot{\phi}(\mathbf{r}', t)] = i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (8.15)$$

Чтобы выяснить коммутационные свойства ϕ^{in} и ϕ^{out} , рассмотрим пределы при $t \rightarrow \pm \infty$, когда ρ и V стремятся к нулю. Поскольку ϕ совпадает при этом с ϕ^{out} и ϕ^{in} , соотношение (8.15) означает, что

$$\begin{aligned} [\phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, -\infty), \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}', -\infty)] &= i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\phi^{\text{out}}(\mathbf{r}, \infty), \phi^{\text{out}}(\mathbf{r}', \infty)] &= i\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Операторы ϕ^{in} и ϕ^{out} удовлетворяют однородным уравнениям поля и могут быть поэтому выражены через не зависящие от времени операторы $A_{\mathbf{k}}$ и $B_{\mathbf{k}}$ в обычной форме:

$$\begin{aligned} \phi^{\text{in}} &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} A_{\mathbf{k}} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} A_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{(2\omega L^3)^{1/2}}, \\ \phi^{\text{out}} &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} B_{\mathbf{k}} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} B_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{(2\omega L^3)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Таким образом, наше рассмотрение свободных полей обеспечивает базу для решения задачи, учитывающей взаимодействия.

Из (8.16) мы заключаем, что $A, (A^{\dagger})$ и $B, (B^{\dagger})$ подчиняются обычным перестановочным соотношениям для операторов уничтожения (рождения). Это в свою очередь свидетельствует о том, что (8.16) выполняется во все моменты времени, а не только в пределах $t \rightarrow \pm \infty$. Совместность (8.15) и (8.16) очевидна для первого

случая, где ϕ и ϕ^{in} отличаются лишь на обыкновенное число. В общем случае, однако, эквивалентность этих двух перестановочных соотношений отнюдь не тривиальна и имеет ряд существенных последствий. В заданный момент t можно, конечно, удовлетворить перестановочным соотношениям для локальных операторов поля $\phi(\mathbf{r}, t)$ и $\dot{\phi}(\mathbf{r}, t)$ обычным образом:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}}(t) + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t)}{(2\omega L^3)^{1/2}}, \\ \pi(\mathbf{r}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{r}, t) &= - \sum_{\mathbf{k}} i \left(\frac{\omega}{2L^3} \right)^{1/2} [a_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t)], \end{aligned} \quad (8.18)$$

где операторы $a_{\mathbf{k}}(t)$ удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям в каждый момент времени:

$$[a_{\mathbf{k}}(t), a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}(t)] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (8.19)$$

Существенно отметить, что соотношения (8.18) и (8.19) вовсе не означают, что временная зависимость операторов $a_{\mathbf{k}}$ совпадает с таковой

у свободных полей. На самом деле это не так, за исключением моментов времени $t \rightarrow \pm \infty$.

Физическая интерпретация наших систем в квантовой теории основана на тех же соображениях, что и в случае классического поля. Поскольку при $t \rightarrow -\infty$ потенциал ϕ совпадает с ϕ^{in} , кванты, рождаемые и уничтожаемые операторами A^\dagger и A — это те частицы, которые присутствуют до включения источника. В частности, оператор числа падающих частиц с импульсом \mathbf{k} можно определить как

$$N_{\mathbf{k}}^{\text{in}} = A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}}. \quad (8.20)$$

Поскольку ϕ^{in} удовлетворяет уравнению для свободного поля, $N_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$ остается постоянным, и его собственные состояния описывают состояния поля, когда в начальный момент времени ($t \rightarrow -\infty$) имеется определенное число частиц с импульсом \mathbf{k} . Аналогичные соображения применимы к ϕ^{out} и $N_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$, которые соответствуют реальной ситуации после выключения источника. В любой момент времени, и, в частности, когда источник включен, поле представляется операторами $a_{\mathbf{k}}(t)$ и числом частиц

$$N_{\mathbf{k}}(t) = a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}}(t).$$

Последняя величина не постоянна и в присутствии источника отличается от $N_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$. Поэтому собственному состоянию $N_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$ соответствует флуктуирующее число $N_{\mathbf{k}}(t)$ частиц. Даже состояние, в котором отсутствуют падающие частицы, не будет собственным состоянием оператора $N_{\mathbf{k}}(t)$.

Частицы, представляемые $N_{\mathbf{k}}(t)$, обычно называются голыми частицами; при этом в $N_{\mathbf{k}}(t)$, вообще говоря, входят как реальные, так и виртуальные частицы. Собственные состояния $N_{\mathbf{k}}(t)$, которые являются одновременно собственными состояниями $H_0(t)$,

$$H_0(t) = \frac{1}{2} \int d^3r [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] = \sum_{\mathbf{k}} \omega a_{\mathbf{k}}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}}(t), \quad (8.21)$$

называются голыми состояниями. Поскольку $N_{\mathbf{k}}(t)$ и $H_0(t)$ зависят от времени, соответствующие голые состояния в разные моменты времени будут различными¹⁾. Собственные состояния $N_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$, которые одновременно являются собственными состояниями H , называются физическими состояниями; они соответствуют реальным частицам. То, что состояния, даваемые оператором $A_{\mathbf{k}}^\dagger(t)$, представляют собой состояния полного гамильтониана, следует попросту из того факта,

¹⁾ Напомним, что мы работаем в гейзенберговском представлении, в котором все состояния постоянны, а временная зависимость перенесена на операторы.

что временная зависимость $A_k(t)$ такая же, как и в случае свободных полей. Мы увидим это более отчетливо в следующих главах, где H будет выражено через операторы A_k . Мы найдем, что H равно просто $\sum_k A_k^\dagger A_k \omega$ плюс некоторое число C . Голые состояния трудно получить экспериментально, поскольку обычных энергий хватает лишь на возбуждение нескольких низколежащих состояний системы. К примеру, состояние голого вакуума¹⁾ $|0\rangle$, определяемое условием $a_k(t)|0\rangle = 0$, соответствует тому, что „облако“ из виртуальных частиц источника устраняется в момент времени t . Это требует большого количества энергии, поскольку $|0\rangle$ содержит примесь высоко возбужденных физических состояний.

В наших случаях положение оказывается сравнительно простым, поскольку мы имеем источник, который может лишь испускать частицы. В теории с нелинейными членами в уравнениях поля, например в релятивистской квантовой электродинамике, каждая частица играет роль источника других частиц. При этом каждая физическая частица оказывается смесью из частиц всех сортов. В наших теориях физические состояния состоят из источника плюс определенное число падающих (или рассеянных) частиц. Они содержат голый источник плюс определенную конфигурацию голых частиц.

Можно спросить, в какой мере следует придавать физический смысл виртуальным частицам. Очевидно, что частицы, которые мы наблюдаем в ионизационной или пузырьковой камерах, всегда представляют собой физические частицы. Однако виртуальные частицы существуют постольку, поскольку они приводят к наблюдаемым эффектам. Мы увидим, что они вносят вклад в энергию и распределение заряда системы. Далее, как выявится в дальнейшем, виртуальные частицы, присутствующие в момент времени t , могут перейти в реальные при внезапном выключении источника в этот момент. В таком случае $\phi(r, t + \delta t)$ оказывается тождественным с $\phi^{\text{out}}(r, t + \delta t)$ и с $\phi(r, t)$ (ϕ остается конечной). Поскольку N^{out} постоянно, образовавшиеся частицы не исчезают во все последующие моменты времени и в дальнейшем представляют собой детектируемые частицы. Таким образом, виртуальные частицы — это частицы, которые появились бы, если бы источник был неожиданно выключен. Практически такое явление может иметь место лишь в ограниченных пределах²⁾, например, при аннигиляции нуклона и антинуклона или при очень быстрых столкновениях между двумя нуклонами [1—3]. Мезоны, образующиеся в таких случаях, как раз и представляют собой

1) Чтобы избежать излишнего увеличения количества индексов, мы обозначаем голые состояния как $| \rangle$, а физические состояния как $| \rangle$.

2) Для получения всех возбужденных физических состояний источник должен был бы выключаться бесконечно быстро.

виртуальные частицы из мезонного облака нуклона, которые внезапно оказываются вне действия источника. Поле ϕ^{out} в общем случае отличается от ϕ^{in} . Поэтому число частиц, а также их энергии и импульсы при $t \rightarrow \infty$ отличаются от своих значений при $t \rightarrow -\infty$; кроме того, в обоих случаях эти величины отличаются от соответствующих величин во все остальные моменты времени.

8.3. Матрица рассеяния и волновая матрица. Мы показали, что применение понятия частицы в случае связанных полей требует некоторых уточнений. В следующей ниже сводке собраны различные наборы ортогональных состояний, связанные с различными сортами частиц.

$$N^{\text{in}} | \text{in}, 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^{\dagger} A_{\mathbf{k}} | \text{in}, 0 \rangle = 0$$

$$| \text{in}, n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{(n_{\mathbf{k}}!)^{1/2}} (A_{\mathbf{k}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{k}}} | \text{in}, 0 \rangle$$

$$H | \text{in}, n_{\mathbf{k}} \rangle = E_{\mathbf{k}} | \text{in}, n_{\mathbf{k}} \rangle$$

$$[H, A_{\mathbf{k}}] = -\omega A_{\mathbf{k}}$$

Физические состояния. Они соответствуют одетому источнику плюс n падающих частиц.

$$N^{\text{out}} | \text{out}, 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}}^{\dagger} B_{\mathbf{k}} | \text{out}, 0 \rangle = 0$$

$$| \text{out}, n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{(n_{\mathbf{k}}!)^{1/2}} (B_{\mathbf{k}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{k}}} | \text{out}, 0 \rangle$$

$$H | \text{out}, n_{\mathbf{k}} \rangle = E_{\mathbf{k}} | \text{out}, n_{\mathbf{k}} \rangle$$

$$[H, B_{\mathbf{k}}] = -\omega B_{\mathbf{k}}$$

Физические состояния. Они соответствуют одетому источнику плюс n рассеянных частиц.

$$N(t) | 0 \rangle = 0$$

$$| n_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{(n_{\mathbf{k}}!)^{1/2}} (a_{\mathbf{k}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{k}}} | 0 \rangle$$

$$H_0(t) | 0 \rangle = 0$$

$$H_0(t) | n_{\mathbf{k}} \rangle = \omega n_{\mathbf{k}}(t) | n_{\mathbf{k}} \rangle$$

$$[H_0, a_{\mathbf{k}}] = -\omega a_{\mathbf{k}}$$

Голые состояния, соответствующие голому источнику плюс $n_{\mathbf{k}}$ (реальных или виртуальных) частиц.

При некоторых условиях состояния „in“ и „out“ не образуют полного набора (например, когда сила источника достаточна для образования связанных состояний). В этом случае, чтобы получить полный набор, следует добавить к состояниям „in“ и „out“ связанные состояния. Мы подробно обсудим этот вопрос в соответствующем месте, а пока в дальнейшем изложении будем считать все наборы полными. При этом условии они связаны друг с другом через унитарные матрицы. Элементы этих матриц можно определить как

скалярные произведения между состояниями различных наборов. Равным образом, они могут быть определены как элементы матрицы, которая преобразует операторы, соответствующие одному набору, в операторы, соответствующие другому. Например, связь между состояниями „in“ и „out“ устанавливается с помощью так называемой „ S -матрицы“ или „матрицы рассеяния“, которая играет фундаментальную роль в современной теории поля. Ее можно определить как унитарную матрицу, преобразующую $A_k(t)$ в $B_k(t)$:

$$\begin{aligned} B_k(t) &= S^{-1} A_k(t) S, \\ S^\dagger S &= S S^\dagger = 1. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Существование такой матрицы вытекает из обычного соображения о том, что A_k и B_k удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям. Далее, они одинаковым образом зависят от времени, так что S -матрица от времени не зависит. Из (8.22) мы заключаем, что

$$A_k S |0, \text{out}\rangle = 0, \quad S |0, \text{out}\rangle = |0, \text{in}\rangle, \quad (8.23)$$

следовательно, эквивалентное определение S -матрицы есть ¹⁾

$$\begin{aligned} S_{k'_1, \dots, k'_n, k_1, \dots, k_n} &= \langle \text{in}, k'_1, \dots, k'_n | S | \text{in}, k_1, \dots, k_n \rangle = \\ &= \langle \text{in}, 0 | A_{k'_1}, \dots, A_{k'_n} S | \text{in}, k_1, \dots, k_n \rangle = \\ &= \langle \text{out}, 0 | S B_{k_1}, \dots, B_{k_n} | \text{in}, k_1, \dots, k_n \rangle = \\ &= \langle \text{out}, k'_1, \dots, k'_n | \text{in}, k_1, \dots, k_n \rangle. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Одно из важных свойств S -матрицы заключается в ее связи с сечением рассеяния, которая устанавливается ниже. Для систем, в которых энергия сохраняется, S -матрица связывает лишь состояния с равной энергией. Удобно записать матричный элемент S между начальным состоянием с энергией ω_i и конечным состоянием с энергией ω_f в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(\omega_i - \omega_f) T_{fi}. \quad (8.25)$$

Из этого соотношения мы находим, что вероятность образования конечного состояния $f \neq i$ из начального состояния равна

$$\eta_{fi} = 4\pi^2 |\delta(\omega_i - \omega_f) T_{fi}|^2. \quad (8.26)$$

Грубый способ избавиться от неудобной величины δ^2 заключается в том, чтобы связать ее с бесконечным временем взаимодействия в состояниях с определенной энергией. Множитель $\delta(\omega_i - \omega_f)$ воз-

¹⁾ Мы полагаем, что все значения k различны, в противном случае нормировка отличается от той, которая дана в тексте.

никает из выражения $\int dt e^{i(\omega_i - \omega_f)t}$ и мы поэтому можем записать, что

$$2\pi [\delta(\omega_i - \omega_f)]^2 = \delta(\omega_i - \omega_f) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega_i - \omega_f)t} = \delta(\omega_i - \omega_f) \int_{-\infty}^{\infty} dt.$$

Определяя вероятность перехода в единицу времени¹⁾ W_{fi} как

$$\eta_{fi} = W_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt,$$

получаем следующее „золотое правило“:

$$W_{fi} = 2\pi \delta(\omega_i - \omega_f) |T_{fi}|^2. \quad (8.27)$$

Полную вероятность перехода из начального состояния можно записать в виде

$$W_i = 2\pi \sum_f \delta(\omega_i - \omega_f) |T_{fi}|^2 = -2 \operatorname{Im} T_{ii}. \quad (8.28)$$

где последнее равенство следует из свойств (8.22), так как

$$\sum_f S_{fi}^* S_{fi} = \delta_{ii}.$$

Эти формальные выражения можно проанализировать более детально, обращаясь к диагонализации S -матрицы. Практически это достигается путем определения достаточного числа интегралов движения, собственные состояния которых являются одновременно собственными состояниями S . Мы определим оператор проектирования $\mathfrak{P}^{(A)}$ на собственные состояния S (обозначенные через A), рассматривая энергию отдельно:

$$\delta_{fi} = \pi g(\omega_i) \delta(\omega_i - \omega_f) \sum_A \mathfrak{P}_{fi}^{(A)},$$

$$g(\omega_i) = \frac{1}{\sum_f \pi \delta(\omega_i - \omega_f) \sum_A \mathfrak{P}_{fi}^{(A)}}, \quad (8.29)$$

и запишем

$$S_{fi} = \pi g(\omega_i) \delta(\omega_i - \omega_f) \sum_A e^{2i\delta_A(\omega_i)} \mathfrak{P}_{fi}^{(A)},$$

$$T_{fi} = -g(\omega_i) \sum_A \sin \delta_A(\omega_i) e^{i\delta_A(\omega_i)} \mathfrak{P}_{fi}^{(A)}, \quad (8.30)$$

¹⁾ Более удовлетворительный вывод этого соотношения основан на рассмотрении волновых пакетов. Подробные сведения можно найти в статье Гелл-Манна и Голдбергера [4].

Подставляя последнее равенство в (8.28), находим, учитывая, что

$$\begin{aligned} [\mathfrak{P}^{(A)}]^\dagger &= \mathfrak{P}^{(A)}; \\ W_i &= 2g(\omega_i) \mathbf{S}_A \mathfrak{P}_i^{(A)} \sin^2 \delta_A(\omega_i), \end{aligned} \quad (8.31)$$

где $\delta(\omega_i)$ — фазовый сдвиг при энергии ω_i . Изложенный формализм сильно упрощается в случае сферически симметричного источника при условии, что на одну падающую частицу приходится одна уходящая. В этом случае \mathbf{S} оказывается диагональной в представлении углового момента, а ω оказывается единственной непрерывной переменной¹⁾:

$$S|k, l, m\rangle = e^{2i\delta_l(k)} |k, l, m\rangle,$$

или в терминах операторов рождения

$$B_{kim} = S^{-1} A_{kim} S = e^{2i\delta_l(k)} A_{kilm}. \quad (8.32)$$

В этом случае мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_A &= \sum_{l=0}^{\infty}, \\ \mathfrak{P}_{k'k}^l &= \sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(k') Y_l^m(k). \end{aligned}$$

Далее, если использовать нормировочный объем L^3 и релятивистскую кинематику $k dk = \omega d\omega$, то

$$\mathbf{S}_f = L^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

и

$$\frac{1}{g(\omega)} = L^3 \pi \int \frac{d^3k' \delta(\omega' - \omega) Y_0^2}{(2\pi)^3} = \frac{L^3 \omega K}{8\pi^2}.$$

Подставляя эти выражения в (8.31) и учитывая, что

$$\sum_m |Y_l^m(0)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi},$$

мы находим

$$W_k = \frac{4\pi}{L^3 k \omega} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l(\omega). \quad (8.33)$$

¹⁾ Множитель $\pi g(\omega_i)$ соответствует нормировке на δ -функцию от энергии

$$\langle k, l, m | k' l' m' \rangle = \pi g(\omega) \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Дальнейшие сведения можно найти, например, в работе Липмана и Швингера [5].

Чтобы получить обычное выражение для сечения рассеяния, необходимо разделить последнее выражение на падающий поток, т. е. на число частиц, падающих в единицу времени на единичную площадку, нормальную к направлению движения ($= k/\omega L^3$):

$$\sigma_k = W_k \frac{\omega L^3}{k} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l(\omega). \quad (8.34)$$

В тех случаях, когда имеет место рождение частиц, собственные состояния S характеризуются в дополнение к энергии другими непрерывными переменными. Тогда (8.34) необходимо модифицировать, но (8.27) и (8.28) по-прежнему остаются справедливыми.

В то время как S -матрица содержит информацию, соответствующую элементарному фазовому анализу, матрица, связывающая состояния „in“ с голыми состояниями, соответствует так называемой „волновой матрице“ элементарной квантовой механики. Последняя содержит информацию относительно детального вида волновой функции вблизи источника. В теории поля она позволяет получить ответ на вопрос о распределении виртуальных частиц в физических состояниях. Хотя такие задачи в значительной степени представляют чисто академический интерес, однако они поучительны и будут рассматриваться в следующих главах. Более того, мы увидим, что существуют важные соотношения между S -матрицей и волновой матрицей.

Глава 9

СТАТИЧЕСКИЙ ИСТОЧНИК

9.1. Интерпретация статического источника. В качестве первого примера мы подробно изучим случай статического источника $\rho(\mathbf{r}, t) = g\rho(\mathbf{r})$. Предположим, что источник расположен в начале координат, что он веществен и нормирован:

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3r = 1,$$

так что g характеризует силу источника в безразмерных единицах. В рассматриваемом случае в общее решение (8.10) входит выражение

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{S} \int_k \frac{dK_0}{2\pi} \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - K_0 t)}}{m^2 + k^2 - K_0^2}. \quad (9.1a)$$

Если изменить порядок интегрирования, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{S} \int_k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2 + m^2} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{k^2 + m^2} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \frac{1}{ikr} = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k dke^{ikr}}{(k+im)(k-im)} = \frac{e^{-mr}}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

До тех пор пока изменения порядка интегрирования допустимы, мы будем получать точно тот же результат и для $\int dt \Delta^{\text{adv}}(\mathbf{r}, t)$. Эти результаты эквивалентны утверждению, что Δ^{adv} и Δ^{ret} подчиняются уравнению

$$(\nabla^2 - m^2) \int_{-\infty}^{\infty} dt \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) = -\delta^3(\mathbf{r}),$$

где $e^{-mr}/4\pi r$ — функция Грина для оператора $(\nabla^2 - m^2)$.

Обоснованность перемены порядка интегрирования по K_0 и t в (9.1a) вытекает из смысла, придаваемого статическому источнику.

Для тех типов взаимодействий, которые были рассмотрены в гл. 8, мы требовали, чтобы источник исчезал при $t = \pm \infty$. Это, очевидно, не имеет места в чисто статическом случае. Оказывается, однако, что при медленном (по сравнению с m^{-1}) включении и выключении источника получаются те же результаты, что и для статического источника, и именно в этом смысле уравнение (9.16) оказывается справедливым. Чтобы доказать это, рассмотрим источник

$$\rho(\mathbf{r}, t) = g\rho(\mathbf{r})e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0. \quad (9.2)$$

Если использовать (8.8), то интеграл по времени, появляющийся в (8.10), становится равным

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') dt' = \\ &= \mathbf{S}_k g\rho(\mathbf{r}') \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\omega} \int_{-\infty}^t e^{-\alpha|t'|} \sin \omega(t - t') dt' = \\ &= \mathbf{S}_k g\rho(\mathbf{r}') \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\omega} \begin{cases} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} e^{\alpha t} & \text{для } t < 0, \\ \frac{\omega e^{-\alpha t} + 2\alpha \sin \omega t}{\alpha^2 + \omega^2} & \text{для } t > 0. \end{cases} \quad (9.3a) \end{aligned}$$

В пределе $\alpha \rightarrow 0$ или фактически при $\alpha \ll m$ уравнение (9.3a) сводится к

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') dt' = \\ &= g\rho(\mathbf{r}') \mathbf{S}_k \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\omega^2} = g\rho(\mathbf{r}') \frac{e^{-m|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (9.3b) \end{aligned}$$

что согласуется с (9.16). Аналогичное уравнение получается в этом пределе и для Δ^{adv} . Таким образом, мы замечаем, что статический источник можно интерпретировать как источник, медленно включаемый и выключаемый в течение времени $\alpha^{-1} \gg m^{-1}$; при этом из (9.36) и (9.16) следует, что

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + g \int \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}') dt' d^3r' = \\ &= \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + g \int d^3r' \frac{e^{-m|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') = \\ &= \phi^{\text{out}}(\mathbf{r}, t) + g \int d^3r' \frac{e^{-m|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}'). \quad (9.4) \end{aligned}$$

Таким образом, $\phi^{\text{in}} = \phi^{\text{out}}$; это означает, что источник не рождает новых реальных частиц и что рассеяние отсутствует. Это свойство

связано со статической формой источника и с отсутствием внутренних степеней свободы¹⁾. Тот факт, что процесс включения и выключения не создает возмущений (т. е. не приводит к рождению частиц), соответствует адиабатической теореме элементарной квантовой теории, согласно которой возмущение, медленно меняющееся по сравнению с присущей системе частотой (которая в данном случае равна m), не приводит к каким-либо переходам.

9.2. Энергия связанной системы. Чтобы исследовать собственные состояния полной энергии, мы выразим гамильтониан H через ϕ и с помощью (8.18) получим

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H' = \frac{1}{2} \int d^3r [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 - 2g\rho(\mathbf{r})\phi] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\mathbf{t}) a_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) \omega - g \frac{\rho_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) + \rho_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}(\mathbf{t})}{(2\omega L^3)^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (9.5)$$

В (9.5) фурье-компонента²⁾ $\rho(\mathbf{r})$ была обозначена через $\rho_{\mathbf{k}}$:

$$\rho_{\mathbf{k}} = \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r, \quad (9.6)$$

а величина, комплексно сопряженная ей — через $\rho_{\mathbf{k}}^*$. Можно также выразить H через операторы ϕ^{in} . Используя тот факт, что

$$(-m^2 + \nabla^2) \int \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) dt = -\delta^3(\mathbf{r}),$$

находим:

$$\int d^3r d^3r' [\nabla_r \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \nabla_{r'} + m^2 \phi^{\text{in}}] \frac{e^{-i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|m}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') = \int d^3r \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}).$$

Вследствие этого равенства появляющиеся в H перекрестные члены от произведения ϕ^{in} и $\rho(\mathbf{r})$ исчезают³⁾, и мы получаем

$$H = H^{\text{in}} + \mathcal{E}_0. \quad (9.7a)$$

¹⁾ Это заключенно будет разъяснено в последующих главах.

²⁾ Если $\rho(\mathbf{r})$ нормировано таким образом, что $\int \rho(\mathbf{r}) d^3r = 1$, то $\rho_{\mathbf{k}}$ безразмерно. Далее, $\rho_0 = 1$ и в непрерывном пределе $\rho(\mathbf{k}) = \rho_{\mathbf{k}}$. Фурье-преобразование от $\rho_{\mathbf{k}}$ имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \rho(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k.$$

³⁾ Это можно показать также в импульсном пространстве. В последующем изложении предполагается, что энергия нулевых колебаний вакуума вычтена из H .

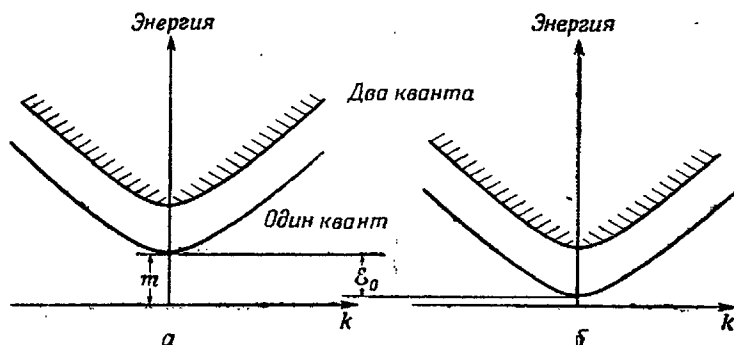
где

$$H^{\text{in}} = \frac{1}{2} \int d^3r [(\dot{\phi}^{\text{in}})^2 + (\nabla\phi^{\text{in}})^2 + m^2(\phi^{\text{in}})^2] = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^{\dagger} A_{\mathbf{k}} \omega \quad (9.76)$$

и

$$\mathcal{E}_0 = \frac{-g^2}{2} \int d^3r d^3r' \rho(\mathbf{r}) \frac{e^{-m|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') = \frac{-g^2}{2} \mathbf{S} \frac{|\rho_{\mathbf{k}}|^2}{\omega^2}. \quad (9.7\text{в})$$

То, что \mathcal{E}_0 окажется постоянным числом, коммутирующим с ϕ^{in} , можно было предвидеть заранее. Поскольку ϕ^{in} и ϕ^{out} зависят от времени как свободные поля, гамильтониан, выраженный через



Фиг. 9.1. Спектры собственных значений H_0 (а) и H (б). Энергетический сдвиг между этими спектрами равен \mathcal{E}_0 .

эти операторы, должен сводиться к $H^{(\text{in})}$ и некоторой части, коммутирующей с $\phi^{(\text{in})}$. Заметим, что $H^{(\text{in})}$ и \mathcal{E}_0 не зависят от времени, а H_0 и H' зависят. Через операторы, введенные в (8.17), мы получаем (энергия нулевых колебаний $\sum (1/2)\omega$ уже вычтена)

$$H = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^{\dagger} A_{\mathbf{k}} \omega + \mathcal{E}_0. \quad (9.8)$$

Спектр собственных значений H имеет, следовательно, ту же форму, что и для свободных полей, с тем отличием, что он сдвинут вниз на величину $|\mathcal{E}_0|$, как показано на фиг. 9.1. Эта величина представляет собой энергию „связи“ виртуальных частиц, хотя энергия взаимодействия H' никоим образом не есть обычный потенциал. Тот факт, что энергия физического основного состояния \mathcal{E}_0 оказалась меньше нуля, показывает, что взаимодействие в рассматриваемой задаче принадлежит к широкому классу взаимодействий, понижающих

энергию основного состояния. Такое понижение всегда имеет место, когда применима теория возмущений, так как при этом [1]¹⁾

$$\mathcal{E}_0 = - \sum_i \frac{|H'_{i0}|^2}{E_i - E_0}. \quad (9.9)$$

Физически это означает, что благодаря взаимодействию в основном состоянии возникает возможность перехода к состоянию с более низкой энергией.

Энергия \mathcal{E}_0 называется „энергией перенормировки“ или иногда „массой перенормировки“. Последний термин должен быть ясен в свете последующего изложения, в котором будет использоваться релятивистская эквивалентность массы и энергии. Можно считать, что статический источник имеет механическую массу $M_0 \gg m$. Тогда гамильтониан H становится равным $H_0 + H' + M_0$. Голые собственные состояния (оператора $H_0 + M_0$) представляют источник и поле без взаимодействия. Когда последнее включается, наименьшим физическим состоянием становится собственное состояние H с энергией $M_0 + \mathcal{E}_0 = M$. Масса M есть физическая масса источника; она отличается от механической массы, обусловленной взаимодействием между источником и полем. В этом смысле можно также называть собственные состояния H_0 голыми состояниями, а собственные состояния H — физическими состояниями.

Для точечного источника $\rho(\mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r})$ мы находим, что $\rho_{\mathbf{k}} = 1$ и что энергия \mathcal{E}_0 линейно расходится. Однако способа наблюдать эту энергию, какой бы ни была ее величина, не существует, коль скоро источник всегда окружен облаком из квантов²⁾. Поскольку \mathcal{E}_0 — ненаблюдаема, ее можно вычесть из H , так что

$$\mathcal{H} |in, 0\rangle \equiv (H - \mathcal{E}_0) |in, 0\rangle = 0. \quad (9.10)$$

9.3. Связь между голыми и физическими состояниями. Физическое реальное основное состояние $|in, 0\rangle$ определяется снова равенством

$$A_{\mathbf{k}} |in, 0\rangle = 0, \quad (9.11)$$

и различные собственные состояния гамильтониана получаются повторным применением операторов $A_{\mathbf{k}}^\dagger$. Эти состояния соответствуют определенному числу падающих частиц с заданными импульсами. Однако $\phi^{\text{in}} = \phi^{\text{out}}$ и $A_{\mathbf{k}} = B_{\mathbf{k}}$, так что они соответствуют также и эквивалентной конфигурации уходящих частиц. Поэтому в описываемой модели отсутствуют рассеяние и рождение частиц.

¹⁾ Матричные элементы берутся между виртуальными, или голыми состояниями; можно показать, что для нашей задачи (9.9) приводит к тому же результату, что и (9.7в).

²⁾ Это станет ясным из дальнейшего изложения.

Более глубокого понимания сущности рассматриваемой модели можно достичь, анализируя вакуумное состояние падающих частиц $|\text{in}, 0\rangle$ в терминах собственных состояний $N(0)$. Иными словами, необходимо рассмотреть конфигурацию виртуальных частиц, присутствующих в физическом основном состоянии системы в момент $t=0$. Для этой цели мы выразим A_k через a_k [определенные равенствами (8.18)]. Это можно осуществить, подставляя (8.17) и (8.18) в (9.4) при $t=0$ [для сокращения мы пишем a_k вместо $a_k(0)$]:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, 0) &\equiv \phi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{(2\omega L^3)^{1/2}} = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} A_{\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} A_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{(2\omega L^3)^{1/2}} + g \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rho_{\mathbf{k}} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \rho_{\mathbf{k}}^*}{(2\omega^2 L^3)}. \end{aligned}$$

Отсюда мы заключаем, что

$$a_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}} + g \frac{\rho_{\mathbf{k}}}{(2\omega^2 L^3)^{1/2}} \quad (9.12)$$

и

$$a_{\mathbf{k}}^{\dagger} = A_{\mathbf{k}}^{\dagger} + g \frac{\rho_{\mathbf{k}}^*}{(2\omega^2 L^3)^{1/2}}.$$

Таким образом, из (9.11) следует, что

$$a_{\mathbf{k}} |\text{in}, 0\rangle = g \frac{\rho_{\mathbf{k}}}{(2\omega^2 L^3)^{1/2}} |\text{in}, 0\rangle \equiv \chi_{\mathbf{k}} |\text{in}, 0\rangle. \quad (9.13)$$

Это равенство имеет ту же форму, что и определение нашего стандартного волнового пакета для гармонического осциллятора (2.23). Задача анализа $|\text{in}, 0\rangle$ в терминах собственных состояний $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ есть задача вычисления (2.25)¹⁾ и, следовательно, в обозначениях п. 2.3 мы получаем

$$|(n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_j} | \text{in}, 0\rangle|^2 = \prod_i \exp(-\bar{n}_{\mathbf{k}_i}) \frac{(\bar{n}_{\mathbf{k}_i})^{n_{\mathbf{k}_i}}}{n_{\mathbf{k}_i}!}, \quad (9.14)$$

где

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = g^2 \frac{|\rho_{\mathbf{k}}|^2}{2\omega^3 L^3}.$$

Последнее равенство определяет вероятность обнаружения в системе $n_{\mathbf{k}_1}$ виртуальных частиц с импульсом \mathbf{k}_1 , $n_{\mathbf{k}_2}$ виртуальных частиц с импульсом \mathbf{k}_2 и т. д. Характер произведения отражает независимость частиц. Вероятность обнаружения $n_{\mathbf{k}_i}$ частиц с импульсом \mathbf{k}_i

¹⁾ Временная зависимость определяется теперь, конечно, H , а не H_0 .

безотносительно к тому, какие числа частиц имеются в состояниях с другими импульсами, задается суммой по всем оставшимся n_{k_i} :

$$\eta(n_{k_i}) = \sum_{n_{k_2} \dots} |(n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_j} | \text{in}, 0)|^2 = \exp\left(-\bar{n}_{k_1}\right) \frac{(\bar{n}_{k_1})^{n_{k_1}}}{n_{k_1}!}. \quad (9.15)$$

Иными словами, мы имеем распределение Пуассона для числа виртуальных частиц с определенным импульсом. Аналогично по индукции мы приходим к выводу, что вероятность обнаружения n виртуальных частиц безотносительно к величине их импульсов равна

$$\eta(n) = \sum_{\sum_i n_{k_i} = n} |(n_{k_1}, \dots, n_{k_j} | \text{in}, 0)|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!}, \quad (9.16a)$$

где

$$\bar{n} = \sum_i \bar{n}_{k_i} = g^2 \sum_k \frac{|p_k|^2}{2\omega^3}, \quad (9.16b)$$

т. е. вновь дается законом Пуассона. Тот же закон сохраняет силу и для вероятности обнаружения n частиц в заданной области Δ импульсного пространства; в этом случае \bar{n} равно $\sum_{\Delta} \bar{n}_{k_i}$. Число \bar{n}

представляет собой среднее значение квантов поля, которые одевают источник. Как мы увидим в следующей главе, именно это число частиц рождается при внезапном выключении источника. Для источника достаточно малого размера (например, радиуса $a \sim 1/k_{\max} \ll 1/m$) мы получаем

$$\bar{n} \approx \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{\pi} \ln \frac{k_{\max}}{m} \sim \frac{g^2}{4\pi}. \quad (9.16b)$$

Таким образом, среднее число частиц, окружающих источник, имеет порядок $g^2/4\pi$.

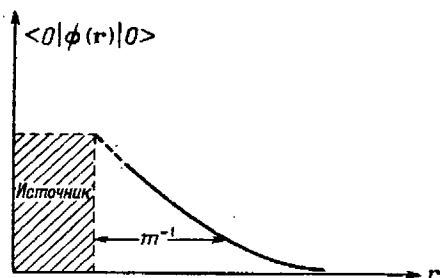
Поучительно выписать разложение физического основного состояния по полному набору собственных функций $N(t)$ при $t=0$ и сравнить его с основным состоянием атома водорода. С помощью (9.13) и (9.16) мы записываем

$$\begin{aligned} |\text{in}, 0\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n | \text{in}, 0\rangle = \\ &= |0\rangle \langle 0 | \text{in}, 0\rangle + \sum_k a_k^\dagger |0\rangle \langle 0 | a_k | \text{in}, 0\rangle + \\ &+ \sum_{k, k'} \frac{a_k^\dagger a_{k'}^\dagger}{(2!)^{1/2}} |0\rangle \langle 0 | \frac{a_{k'} a_k}{(2!)^{1/2}} | \text{in}, 0\rangle + \dots = \\ &= \langle 0 | \text{in}, 0\rangle \left[|0\rangle + \sum_k \chi_k a_k^\dagger |0\rangle + \sum_{k, k'} \frac{1}{2!} \chi_k \chi_{k'} a_k^\dagger a_{k'}^\dagger |0\rangle + \dots \right] = \\ &= e^{-\bar{n}/2} \exp\left(\sum_k \chi_k a_k^\dagger\right) |0\rangle, \quad (9.17) \end{aligned}$$

где χ_k определены, как в (9.13). Фурье-компонента волновой функции основного состояния атома водорода $\sim (1 + r_b^2 k^2)^{-2} \equiv \chi'_k$, где r_b — борковский радиус. В наших обозначениях это состояние записывается как

$$|in, 0\rangle = \sum_k \chi'_k a_k^\dagger |0\rangle. \quad (9.18)$$

В противоположность этому результату основное состояние поля представляет собой смесь состояний с различным числом (от 0 до ∞) виртуальных частиц. Флуктуации числа виртуальных частиц выражаются иногда через понятия рождения и обратного поглощения источником виртуальных частиц. Эта терминология сходна с используемой для молекулы H_2^+ , о которой мы говорим, что в ней



Фиг. 9.2. График $\langle 0 | \phi | 0 \rangle$ вблизи источника.

два протона обмениваются электроном. Виртуальные частицы присутствуют не все время, так что величина $e^{-n/2} \chi_k$, соответствующая волновой функции отдельной виртуальной частицы в импульсном пространстве, нормирована не на единицу, а на $\bar{n} e^{-\bar{n}} < 1$. Волновые функции состояний с несколькими частицами представляют собой простые произведения, означающие, что частицы не связаны между собой, кроме как через эффекты, обусловленные статистикой Бозе — Эйнштейна. Для точечного источника ($\rho_k = 1$) фурье-компонента волновой функции $\chi_k \sim \rho_k / (k^2 + m^2)^{3/2}$ ведет себя приблизительно как $e^{-mr} / r^{3/2}$. Вообще мы видим, что ожидаемое значение потенциала поля $\phi(r)$ в основном состоянии можно представить как

$$\begin{aligned} \langle in, 0 | \phi(r) | in, 0 \rangle &= \sum_k \langle in, 0 | \frac{g \rho_k e^{ik \cdot r} + g \rho_k^* e^{-ik \cdot r}}{2\omega^2} | in, 0 \rangle = \\ &= \sum_k \int d^3 r' g \rho(r') \frac{e^{ik \cdot (r-r')}}{\omega^2} = g \int d^3 r' \frac{e^{-|r-r'|m}}{4\pi|r-r'|} \rho(r'), \quad (9.19) \end{aligned}$$

так что облако из виртуальных квантов поля покрывает источник тонкой вуалью протяженностью $\sim 1/m$, как это показано на фиг. 9.2.

(Для π -мезонов $m^{-1} \sim 10^{-13}$ см.) Этого требует соотношение неопределенностей, так как виртуальные мезоны не могут существовать дольше чем m^{-1} и не могут поэтому уходить от источника дальше чем на расстояние m^{-1} . Разумеется, плотность виртуальных частиц не обрезается точно на расстоянии m^{-1} , а убывает экспоненциально. Такое поведение сходно с просачиванием α -частиц в энергетически запрещенную зону при α -распаде или просачиванием света в плотную среду при полном внутреннем отражении. Грубо говоря, можно утверждать, что все пространство вне источника энергетически запрещено для виртуальных частиц, но они могут просачиваться в эту область вследствие соотношения неопределенностей.

Именно облако из частиц, окружающих источник, „обволакивает“ его и приводит к энергетическому сдвигу \mathcal{E}_0 , играющему роль энергии связи этих виртуальных частиц. Смысл сказанного становится ясен, если вспомнить, что при вычислениях, приводящих к (9.7), половина вклада энергии взаимодействия H' [см. (9.5)] в \mathcal{E}_0 сокращалась с частью, возникающей из H_0 . Поэтому мы имеем

$$\langle \text{in}, 0 | H_0 | \text{in}, 0 \rangle = |\mathcal{E}_0| = -\frac{1}{2} \langle \text{in}, 0 | H' | \text{in}, 0 \rangle. \quad (9.20)$$

Это выражение есть „теорема вириала“, если назвать H' потенциальной энергией. Она утверждает, что полная энергия (равная кинетической (H_0) + потенциальной энергиям) есть кинетическая энергия, взятая с обратным знаком. Действительно, с помощью (9.14) и (9.20) мы находим, что среднее значение H_0 в основном состоянии равно

$$\langle \text{in}, 0 | H_0 | \text{in}, 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}} \omega = g^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{|p_{\mathbf{k}}|^2}{2\omega^2}, \quad (9.21)$$

т. е. как раз среднему значению кинетической энергии (включая массу покоя виртуальных частиц). Используя понятие потенциальной энергии в этом широком смысле слова, можно говорить, что виртуальные частицы связаны с энергией, превышающей их массу m .

9.4. Флуктуации поля. Для квадратичной флуктуации поля в рассматриваемом случае остается справедливой формула (4.13). Причина этого заключается в том, что вклад от источника в $\langle 0 | \phi^2 | 0 \rangle$ сокращается с величиной $|\langle 0 | \phi | 0 \rangle|^2$, не равной теперь нулю. Здесь, как и в случае нашего стандартного волнового пакета (гл. 3), среднее значение числа мезонов $\bar{n} \gg 1$ означает, что флуктуации поля меньше, чем его среднее значение. Поэтому можно использовать картину классического поля. Как мы заметили ранее (см. гл. 4), это не имеет места в случае электрического поля элементарного точечного заряда, где

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle \sim \frac{e}{4\pi r} < \frac{1}{r}.$$

тогда как флуктуация поля, усредненного в области $\sim r^3$, есть величина $\Delta\bar{\phi} \sim 1/r$. Среднее число фотонов в объеме Δ импульсного пространства, ограниченном k_{\max} и k_{\min} , как видно из (9.16), оказывается равным

$$\bar{n}_\Delta = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{dk}{k} = \frac{e^2}{4\pi^2} \ln \frac{k_{\max}}{k_{\min}}. \quad (9.22)$$

Для разумных значений k_{\max} и k_{\min} (например, $k_{\max} \sim m_{el}$, $k_{\min} \sim 1/r_b$) мы получаем при $e^2/4\pi = 1/137$, что $\bar{n}_\Delta \sim 1/137 \ll 1$. Однако для заряженных макроскопических тел ситуация всегда оказывается классической $\bar{n} \gg 1$. Для мезон-нуклонной системы, как будет видно в дальнейшем, $\bar{n} \sim 1$, причем 1 представляет собой очень неудобное для исследования переходное значение.

Для частного вида источника может оказаться, и действительно оказывается для точечного источника, что $\bar{n} \rightarrow \infty$. В этом случае вероятность (9.14) обнаружения конечного числа виртуальных частиц равна нулю. Это означает, что состояния с конечным числом реальных частиц ортогональны состояниям с конечным числом виртуальных частиц. При этом разложение реального состояния в ряд по состояниям с виртуальными частицами с помощью теории возмущений или каких-либо других методов невозможно; в частности, это относится и к разложению основного состояния (9.17). Если тем не менее попытаться выписать ряд теории возмущений, то мы всегда столкнемся с расходимостями. Эта трудность появляется в релятивистских теориях, когда взаимодействия необходимо считать локальными. В нерелятивистской теории, где источник может иметь конечные размеры, эту трудность можно обойти.

9.5. Несколько источников. Поскольку выражение (9.7в) квадратично по ρ , собственные энергии нескольких источников не просто аддитивны, а включают перекрестные члены. В частности, для двух пространственно разделенных точечных источников равной силы

$$\rho(\mathbf{r}) = g [\delta^3(\mathbf{r}) + \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \quad (9.23)$$

мы находим из (9.6), что

$$\mathcal{E}_0(2) = 2\mathcal{E}_0 - g^2 \frac{e^{-m|\mathbf{r}_0|}}{4\pi|\mathbf{r}_0|}, \quad (9.24)$$

а из (9.17), что

$$|0, 0\rangle = e^{-\bar{n}/2} \exp \left[- \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\omega^3 L^3} \right)^{1/2} \rho_{\mathbf{k}} g (1 + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0}) a_{\mathbf{k}}^\dagger \right] |0, 0\rangle,$$

где \mathcal{E}_0 — бесконечная, но постоянная энергия для одного точечного источника, задаваемая выражением $(-g^2/2) \sum_{\mathbf{k}} (1/\omega^2)$, а $|0, 0\rangle$ — физическое основное состояние двух источников. Зависимость $\mathcal{E}_0(2)$

от расстояния между источниками r_0 имеет вид знаменитого потенциала Юкавы¹⁾. На языке уравнения (9.9) теории возмущений этот член обусловлен обменом виртуальным квантом между двумя источниками, а его радиус отражает ограничения, накладываемые на такой процесс соотношением неопределенностей. Взаимодействие между двумя источниками появляется, только когда расстояние между ними есть величина порядка размеров квантового облака. Поэтому невозможно определить классическую траекторию виртуальной частицы, и термин „обмен“ следует принимать критически. Реально он означает лишь существование перекрытия между виртуальными облаками, принадлежащими двум источникам. Ограниченность рамок, в которых применимы классические понятия, следует постоянно иметь в виду при использовании интуитивной картины „обмена“. „Потенциальной“ энергии между двумя источниками нужно приписать характер притяжения, поскольку $\mathcal{E}_0(2) < 2\mathcal{E}_0$. Это происходит от того, что присутствие второго источника на близком расстоянии от первого открывает возможность для существования новых процессов, понижающих энергию. Это справедливо, однако, лишь в том случае, когда g имеет одинаковый знак для обоих источников. Если бы мы выбрали

$$\rho(\mathbf{r}) = g [\delta^3(\mathbf{r}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)], \quad (9.25)$$

то сила изменила бы знак. Последний факт связан с тем очевидным обстоятельством, что на малых расстояниях один от другого источники нейтрализуют друг друга, уменьшая $|\mathcal{E}_0(2)|$. Мы увидим в следующей части, что для π -мезон-нуклонной системы ситуация оказывается несколько более сложной и в зависимости от спинов и зарядов нуклонные источники могут иметь одинаковый или противоположный „мезонный заряд“ g . Соответственно обмен мезоном приводит в некоторых состояниях к „потенциалу“ притяжения, а в некоторых — к „потенциалу“ отталкивания.

В заключение этого раздела мы отметим, что для N точечных источников произвольной силы

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N g_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (9.26)$$

мы имеем

$$\mathcal{E}_0(N) = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_0^{(i)} - \sum_{i>j}^N \sum_{j=1}^N g_i g_j \frac{e^{-m|r_i - r_j|}}{4\pi|r_i - r_j|}, \quad (9.27)$$

¹⁾ Мы отложим до следующей главы обсуждение вопроса о том, в какой мере этот член может рассматриваться как потенциальная энергия частиц-источников.

где

$$\mathcal{E}_0^{(i)} = -\frac{g_i^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega^2}.$$

Таким образом, потенциал

$$\mathcal{E}_0(N) = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_0^{(i)}$$

есть просто сумма потенциалов между парами источников. Отсюда ясно, что присутствие других источников не изменяет силу, действующую между заданной парой. Это справедливо не всегда и связано с тем фактом, что в рассматриваемой модели отсутствует рассеяние квантов.

Рекомендуемая литература

Проблема одного или нескольких статических источников может быть рассмотрена также другими, но эквивалентными изложенному, способами — например, путем установления унитарного преобразования, диагонализующего гамильтониан. Этот подход и обсуждение некоторых дальнейших вопросов читатель может найти в следующих работах:

1. Wentzel G., Quantum Theory of Fields, New York, 1949, p. 47. (Имеется перевод: Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М., 1949.)
2. Tomonaga S., Progr. Theoret. Phys. (Kyoto), 2; 6 (1947).
3. Van Hove L., Physica, 18, 145 (1952).
4. Lee T. D., Phys. Rev., 95, 1329 (1954).

Глава 10

РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ

10.1. Общие замечания. В предыдущей главе мы изучили свойства виртуальных частиц. Теперь исследуем вопрос: при каких обстоятельствах они могут превращаться в реальные частицы. С этой целью мы выразим операторы „out“ через операторы „in“. В согласии с общей формулой (8.12) связь между падающим („in“) и рассеянным („out“) полями задается равенством

$$\phi^{\text{out}} = \phi^{\text{in}} + \int d^3r' dt' \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t'), \quad (10.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}, t) &= \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r}, t) - \Delta^{\text{adv}}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\omega} \sin \omega t \quad \text{для} \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Соотношение (10.1) можно переписать в импульсном пространстве с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \int \Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') d^3r' dt' &= \\ &= \int \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \sin \omega(t - t')}{\omega} \rho(\mathbf{r}', t') d^3r' dt' = \\ &= -\sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{2i\omega} \rho_{\mathbf{k}}(\omega) + \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{2i\omega} \rho_{\mathbf{k}}^*(\omega), \end{aligned}$$

где $\rho_{\mathbf{k}}$ дается выражением

$$\rho_{\mathbf{k}}(K_0) = \int \rho(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - K_0 t)} d^3r dt. \quad (10.3a)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{k}} &= S^\dagger A_{\mathbf{k}} S = A_{\mathbf{k}} + \frac{i\rho_{\mathbf{k}}^*(\omega)}{(2\omega L^3)^{1/2}}, \\ B_{\mathbf{k}}^\dagger &= A_{\mathbf{k}}^\dagger - \frac{i\rho_{\mathbf{k}}^*(\omega)}{(2\omega L^3)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (10.3b)$$

Поскольку оператор $B_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет уравнению свободного поля, в него вносит вклад лишь та часть источника, для которой выполняется соотношение между частотой и волновым числом для свободной частицы. Соответственно в обычном пространстве волновые функции образующихся частиц не будут ограничены только областью, прилегающей к источнику. Пользуясь классической терминологией, можно сказать, что виртуальные частицы — это частицы, сосредоточенные в близлежащей к источнику зоне, тогда как реальные испускаемые частицы покидают источник и переходят в волновую зону. Для решения проблемы анализа состояний с определенным числом уходящих частиц в терминах начальных состояний (в частности, для определения вероятности обнаружения $n_{\mathbf{k}_1}$, $n_{\mathbf{k}_2}$, ... уходящих частиц с импульсами \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , ... для вакуума в начальном состоянии) следует вновь обратиться к (9.14), поскольку $B_{\mathbf{k}} |in, 0\rangle = i\rho_{\mathbf{k}}(\omega) (2\omega L^3)^{-1/2} |in, 0\rangle$, где $\bar{n}_{\mathbf{k}}$ соответствует теперь

$$\bar{n}_{\mathbf{k}} = \frac{|\rho_{\mathbf{k}}(\omega)|^2}{2\omega L^3}.$$

Мы имеем, таким образом, распределение Пуассона для испущенных квантов в любом интервале импульсов Δ со средним числом частиц¹⁾

$$\bar{n}_{\Delta} = \sum_{\mathbf{k} \in \Delta} \frac{|\rho_{\mathbf{k}}(\omega)|^2}{2\omega}. \quad (10.4)$$

Можно выписать также разложение, точно аналогичное (9.17), и получить

$$|in, 0\rangle = S |out, 0\rangle = e^{-\bar{n}/2} \exp \left[i \sum_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(\omega) B_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right] |out, 0\rangle, \quad (10.4a)$$

где

$$\chi_{\mathbf{k}}(\omega) = \frac{\rho_{\mathbf{k}}(\omega)}{(2\omega L^3)^{1/2}}. \quad (10.4b)$$

и

$$\bar{n} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\rho_{\mathbf{k}}(\omega)|^2}{2\omega}. \quad (10.4b)$$

Можно дать явное выражение и для S -матрицы через асимптотические операторы поля. В случае одной степени свободы S -матрица соответствует унитарному преобразованию $q \rightarrow q$, $p \rightarrow p + d$, которое генерируется e^{iqd} . Теоретико-полевое обобщение этого преобразования

¹⁾ Здесь $\rho_{\mathbf{k}}(\omega) = \rho(\mathbf{k}, \omega)$.

имеет вид¹⁾

$$S = e^{-\bar{n}/2} \exp \left[i \sum_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(\omega) B_{\mathbf{k}}^{\dagger} \right] \exp \left[i \sum_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}^*(\omega) B_{\mathbf{k}} \right] = \\ = \exp \left\{ i \sum_{\mathbf{k}} [\chi_{\mathbf{k}}(\omega) B_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \chi_{\mathbf{k}}^*(\omega) B_{\mathbf{k}}] \right\}. \quad (10.4\text{г})$$

С помощью (10.36) матрицу S можно выразить через операторы полей „in“ $A_{\mathbf{k}}$ и $A_{\mathbf{k}}^{\dagger}$:

$$S = \exp \left\{ i \sum_{\mathbf{k}} [\chi_{\mathbf{k}}(\omega) A_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \chi_{\mathbf{k}}^*(\omega) A_{\mathbf{k}}] \right\}. \quad (10.4\text{д})$$

Читатель сможет без затруднений самостоятельно убедиться, что это выражение находится в согласии с (10.4а) и что

$$B_{\mathbf{k}} = S^{\dagger} A_{\mathbf{k}} S, \quad B_{\mathbf{k}}^{\dagger} = S^{\dagger} A_{\mathbf{k}}^{\dagger} S.$$

Если источник $\rho(\mathbf{r}, t)$ сферически симметричен, то вклад в S -матрицу дают лишь сферически симметричные члены, соответствующие угловому моменту, равному нулю. Иными словами, если разложить $B_{\mathbf{k}}$ по операторам, соответствующим определенному угловому моменту $B_{\mathbf{k}lm}$, то только $B_{\mathbf{k}00}$ будет давать вклад в S -матрицу. Поэтому все частицы будут порождаться в S -состояниях (с угловым моментом, равным нулю).

Прежде чем переходить к обсуждению выражений для S -матрицы при типичных видах ρ , рассмотрим другой вопрос, который мог возникнуть. Мы знаем, что при зависящем от времени источнике энергия поля не сохраняется. Какова же энергия; передаваемая или отбираемая от поля источником? Если мы имеем дело с вакуумом для падающих частиц, то она равна среднему значению энергии в этом

¹⁾ Следует соблюдать осторожность, раскрывая явный вид экспоненциальных операторов. Поскольку $B_{\mathbf{k}}$ и $B_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ не коммутируют, то $\exp(B_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}}^{\dagger}) \neq \exp(B_{\mathbf{k}}) \cdot \exp(B_{\mathbf{k}}^{\dagger})$, что легко увидеть, разлагая экспоненты. Однако поскольку коммутатор $B_{\mathbf{k}}$ и $B_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ есть c -число, мы имеем

$$\exp \left[\sum_{\mathbf{k}} (B_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}) \right] = \\ = \exp \left(\sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}} \right) \exp \left(\sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \right) \exp \left(\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}^{\dagger}]}{2} g_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}'} \right) = \\ = \exp \left(\sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}}^{\dagger} f_{\mathbf{k}} \right) \exp \left(\sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} \right) \exp \left(\sum_{\mathbf{k}} \frac{g_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}}{2} \right).$$

состоянии при $t \rightarrow \infty$. Ее можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \text{in}, 0 | H^{\text{out}} | \text{in}, 0 \rangle &= \langle \text{in}, 0 | \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}}^{\dagger} B_{\mathbf{k}} \omega | \text{in}, 0 \rangle = \\ &= \sum_{n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \dots, n_{\mathbf{k}_i}, n_{\mathbf{k}_j}, \dots} \langle \text{in}, 0 | \text{out}, n_{\mathbf{k}_i} \rangle \langle \text{out}, n_{\mathbf{k}_i} | H^{\text{out}} | \text{out}, n'_{\mathbf{k}_j} \rangle \times \\ &\quad \times \langle \text{out}, n'_{\mathbf{k}_j} | \text{in}, 0 \rangle = \sum_{n_{\mathbf{k}_i}} \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}_i} \omega |\langle \text{in}, 0 | \text{out}, n_{\mathbf{k}_i} \rangle|^2. \end{aligned}$$

Поскольку $|\langle \text{in}, 0 | \text{out}, n_{\mathbf{k}_i} \rangle|^2$ представляет собой распределение Пуассона, мы получаем с помощью (6.15)

$$\langle \text{in}, 0 | H^{\text{out}} | \text{in}, 0 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \omega \bar{n}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} |\rho_{\mathbf{k}}(\omega)|^2. \quad (10.5)$$

Это означает, что энергия, переданная полю, точно равна энергии кванта, рожденного источником. В классической теории поля формулу (10.5) получают, интегрируя $\partial H / \partial t = -\partial L / \partial t$ в пределах от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Поскольку $\rho(\mathbf{r}, t)$ — единственный член в лагранжиане, зависящий явно от времени, то

$$\Delta E = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r \phi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t).$$

С классической точки зрения случаю вакуума падающих частиц соответствует $\phi^{\text{in}} = 0$ (в квантовой механике равно нулю среднее значение ϕ^{in}). Интегрируя по частям, подставляя в последнее равенство (8.10) и используя (8.9), можно переписать ΔE в виде

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3r d^3r' dt' \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t') \frac{\partial}{\partial r} \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \\ &= \int dt dt' d^3r d^3r' \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}' t') \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \times \\ &\quad \times [\Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') - \Delta^{\text{adv}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')]. \quad (10.6) \end{aligned}$$

Переходя к импульсному пространству и используя (10.2), мы убеждаемся в справедливости (10.5). В последнем способе записи (10.6) мы подчеркнули, что ΔE связано с разностью между „in“- и „out“-полями, которая обуславливает потерю энергии. Это хорошо известно из классической электродинамики, которая дает аналогичное выражение для потери энергии, причем сила лучистого трения определяется разностью $\phi^{\text{rad}} = \phi^{\text{out}} - \phi^{\text{in}}$ (см. [1]). Поскольку для средних значений поля справедливо классическое уравнение движения и флуктуационные члены имеют тот же вид, что и для свободных полей.

естественно ожидать, что для потери энергии получится классический результат. Аналогичным образом собственная энергия \mathcal{E}_0 статического источника оказывается равной изменению энергии, получаемому при выключении или включении источника.

10.2. Частные случаи. Из (10.4) ясно, что частицы порождаются только в том случае, когда источник содержит частоты $> m$ ¹⁾. Например, для точечного источника с периодической зависимостью от времени

$$\rho(\mathbf{r}, t) = g\delta^3(\mathbf{r}) \cos \omega_0 t, \quad (10.7a)$$

и, следовательно,

$$\rho_{\mathbf{k}}(K_0) = g\pi [\delta(\omega_0 - K_0) + \delta(\omega_0 + K_0)], \quad (10.8a)$$

так что \bar{n} в том виде, как оно задано по (10.4в), равно нулю, если только не выполнено неравенство $\omega_0 > m$. Это опять следствие адиабатического принципа, согласно которому квазистатический источник должен мало чем отличаться от статического. Для (10.8a) \bar{n} становится $\sim |\delta(\omega_0 - \omega)|^2$ и поэтому бесконечно. Физически это очевидно, так как подобного рода источник испускает частицы от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Чтобы получить конечный результат, допустим, что источник излучает в течение конечного времени:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = g\delta^3(\mathbf{r}) e^{-\alpha|t|} \cos \omega_0 t, \quad (10.7б)$$

$$\rho_{\mathbf{k}}(K_0) = g \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (K_0 - \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (K_0 + \omega_0)^2} \right]. \quad (10.8б)$$

В этом случае число частиц пропорционально времени действия источника. Для $\alpha \ll m$ четырехмерная фурье-компонента источника $\rho_{\mathbf{k}}(\omega)$ сводится к (10.8a), и можно записать

$$\begin{aligned} \bar{n} &\approx \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\rho_{\mathbf{k}}(\omega)|^2}{\omega} = \frac{g^2 \pi}{\alpha} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\delta(\omega_0 - \omega)}{2\omega} = \\ &= \frac{g^2}{4\pi} \frac{(\omega_0^2 - m^2)^{1/2}}{\alpha}, \quad \text{если } \omega_0 > m. \end{aligned} \quad (10.9a)$$

Этот результат может быть получен также посредством вычисления тока уходящих частиц.

Физический смысл ϕ^{out} мы проиллюстрируем, вычисляя его среднее значение в вакуумном состоянии падающих частиц. Для сферического источника ϕ^{out} состоит из сферических волн. Это становится

¹⁾ Таким образом, статический источник (включаемый и выключаемый адиабатически) не содержит таких частот.

очевидным, если использовать разложение (5.10) по собственным состояниям углового момента и принять во внимание, что сферический источник связан только с той частью поля, угловой момент которой равен нулю¹⁾. Далее, в любой момент времени после выключения источника ϕ^{out} содержит только уходящие волны, как и следовало бы ожидать интуитивно. Это утверждение легче всего проверяется для источника вида (10.76) и $m=0$. При этом $\Delta(r, t)$ становится $\sim r^{-1} [\delta(r-t) - \delta(r+t)]$ и мы находим

$$\begin{aligned} \langle \text{in}, 0 | \phi^{\text{out}}(r, t) | \text{in}, 0 \rangle &= \\ &= \frac{g}{4\pi r} [\cos(r-t) \omega_0 e^{-\alpha|r-t|} - \cos(r+t) \omega_0 e^{-\alpha|r+t|}]. \end{aligned}$$

При больших положительных значениях t остается не равным нулю только первый член со сферической расходящейся волной.

Возвращаясь к нашему случаю $m \neq 0$, мы обнаруживаем, что при малых значениях α число частиц, рождаемых в единицу времени, весьма близко к $\bar{n}\alpha$, а число частиц, рождаемых за время δt , равно

$$\bar{n}\alpha \delta t = \frac{g^2}{4\pi} (\omega_0^2 - m^2)^{1/2} \delta t, \quad \text{если } \omega_0 > m. \quad (10.96)$$

Последнее выражение аналогично соответствующему выражению в классической электродинамике и имеет простую физическую интерпретацию. Как мы видели в гл. 9 [см. уравнение (9.16в)], число виртуальных частиц, окружающих источник по порядку величины равно $g^2/4\pi$. Так как волновое число k равно скорости v , умноженной на энергию ω , то правую часть равенства (10.96) можно переписать в виде

$$\left(\frac{g^2}{4\pi} \right) (v \delta t) (\omega),$$

или

(Число виртуальных частиц) \times (Расстояние, на которое могут удалиться частицы со скоростью v за время δt) \times (Радиус облака частиц)⁻¹.

Поэтому эта правая часть представляет число виртуальных частиц, которые могут покинуть облако со скоростью v за интервал времени δt . Это означает, что коль скоро необходимая энергия получена, квант от источника покидает облако со своей конечной (соответствующей реальной частице) скоростью. В этой интуитивной картине процесса рождения необходимо иметь в виду, что запас виртуальных частиц в присутствии поля неограничен, так как они

¹⁾ Разложение такого типа мы выполним в следующих главах.

автоматически регенерируются источником. Но поскольку время регенерации есть величина порядка ω_0^{-1} , то, чтобы получить существенно большее число частиц, чем имеется в облаке, нужно ждать дольше, чем это время.

В результате мгновенного события невозможно получить большее число частиц, чем общее число частиц, содержащихся в облаке, причем это число получается при мгновенном выключении источника. Действительно, в этом случае функция

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} g\rho(\mathbf{r}) & \text{для } t < 0, \\ 0 & \text{для } t > 0, \end{cases} \quad (10.10)$$

дает ¹⁾

$$\rho_k(K_0) = \frac{g^0_k}{iK_0},$$

и, следовательно,

$$\bar{n} = g^2 \sum_k \frac{|\rho_k|^2}{2\omega^3}, \quad (10.11)$$

что, согласно (9.166), как раз и представляет собой число виртуальных частиц от источника $\rho(\mathbf{r})$. Как мы объяснили в гл. 9, этот результат имеет совершенно общий характер; он может быть использован для определения числа виртуальных частиц.

Недостаточное количество виртуальных фотонов в поле элементарного заряда является причиной, вследствие которой электрические процессы протекают столь медленно. Частица с единичным зарядом и скоростью $v \approx 1$ должна испытать приблизительно 137 жестких столкновений, прежде чем она „сбросит с себя“ фотон, поскольку этот квант присутствует в облаке, окружающем заряд, в течение менее чем 1% всего времени. Поэтому сечение тормозного излучения в 137 раз меньше сечения рассеяния. Мы увидим, что π -мезон-нуклонные явления приобретают простой смысл, если представлять нуклон в течение некоторой доли времени распавшимся на нуклон и π -мезон. Эта доля времени вполне ощутима, также как и вероятность обнаружения около нуклона более одного мезона. Поэтому почти каждый раз, когда энергия оказывается достаточной, нуклон испускает мезон: множественное рождение также представляет собой довольно частое событие.

¹⁾ При $t < 0$ предполагается адиабатическое включение взаимодействия, т. е. $\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{g \rightarrow 0} g\rho(\mathbf{r})e^{gt}$ для $t < 0$.

Другая интересная идеализация — это источник, внезапно меняющий свою скорость¹⁾:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \rho(\mathbf{r}) & \text{для } t < 0, \\ \rho(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) & \text{для } t > 0, \end{cases} \quad (10.12)$$

$$\rho_{\mathbf{k}}(K_0) = -i\rho_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \right), \quad (10.13)$$

и, следовательно,

$$\bar{n} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\rho_{\mathbf{k}}|^2}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}} \right)^2. \quad (10.14)$$

Два члена в $\rho_{\mathbf{k}}(K_0)$ соответствуют покоящемуся и движущемуся источнику. Поэтому именно число виртуальных частиц в разности полей до и после момента $t=0$ дает число реальных частиц при $t=\infty$. Это согласуется с нашим предшествующим замечанием, что все то, что излучается, есть разница между падающим и уходящим полями („in“- и „out“-полями).

Для $m=0$ и сферически симметричного источника формула числа частиц (10.14) превращается в

$$\bar{n} = \int_0^{\infty} \frac{dk |\rho_{\mathbf{k}}|^2}{(2\pi)^3 2k} d\Omega \left(1 - \frac{1}{1 - v \cos \theta} \right)^2, \quad (10.15)$$

($\omega = k$, а θ — угол между \mathbf{v} и \mathbf{k}). Это дает хорошо известный спектр тормозного излучения $\sim dk/k$, если $\rho_{\mathbf{k}} \sim 1$. Для точечного источника потеря энергии $n_{\mathbf{k}}k$ пропорциональна $\int dk$, так что во всех частотных интервалах излучается одинаковое количество энергии. В рассматриваемом случае выражение для \bar{n} расходится в обоих пределах интегрирования. Верхний предел легко устанавливается, если взять протяженный источник, срезающий очень высокие частоты. На нижнем пределе интеграл расходится даже для протяженного источника, так как условие нормировки $\int d^3r \rho(\mathbf{r}) = 1$ дает $\rho_{\mathbf{k}=0} = 1$. Эта расходимость означает, что мы всегда имеем дело с бесконечным числом квантов низкой частоты (реальных и виртуальных). Для виртуальных частиц это можно истолковать следующим образом. В случае точечного источника собственная энергия (в r -пространстве) задается интегра-

¹⁾ Уравнение (10.12) с релятивистской точки зрения неправильно, так как в нем опущено лоренцово сокращение источника. Изменение скорости может произойти в результате очень кратковременного столкновения (например, два нуклона сталкиваются при очень высокой энергии). Во всяком случае v должно быть < 1 , иначе даже равномерно движущийся источник будет излучать (излучение Черенкова).

лом $\frac{1}{2} \int \mathcal{E}^2 d^3r$, где \mathcal{E} — напряженность электрического поля, т. е. $(e^2/4\pi) \int d^3r/8\pi r^4$. Последнее выражение расходится линейно в нижнем пределе, но сходится в верхнем, что согласуется с выражением (9.2), поскольку верхний предел в k -пространстве соответствует нижнему пределу в r -пространстве, и наоборот. Плотность частиц имеет добавочную степень k в знаменателе или добавочную степень r в числителе и расходится в обоих пределах, как это видно из (9.22). Бесконечность, связанная с инфракрасными квантами, соответствует поведению кулоновского поля $1/r$ на больших расстояниях и не исчезает при размазывании источника. Соответственно при изменении асимптотической части кулоновского поля испускается бесконечное число квантов. Число инфракрасных квантов внутри радиуса Вселенной¹⁾ < 1 , так что „проблема“ несколько академична. Она не возникает при $m \neq 0$, так как в этом случае $\phi \sim e^{-mr}/r$ имеет конечный радиус.

¹⁾ Согласно (9.22),

$$\bar{n} \sim e^2 \ln \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \sim e^2 \ln \frac{r_{\max}}{r_{\min}}.$$

Взяв за r_{\min} электромагнитный радиус электрона ($\sim 1 \cdot 10^{-13}$ см), мы находим

$$\bar{n} = 1 \quad \text{для} \quad r_{\max} = 10^{-13} e^{137} \sim 10^{47} \text{ см.}$$

Но $r_{\text{Вселенной}} \sim 10^{27}$ см.

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ С БИЛИНЕЙНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

11.1. Общие замечания. В этой главе мы рассмотрим систему, для которой член, обусловленный взаимодействием, квадратичен по переменным поля. Общий вид такого члена, как мы убедились в гл. 8, записывается следующим образом

$$L'(t) = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' \phi(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \phi(\mathbf{r}', t), \quad (11.1)$$

и включает в качестве специального случая локальный потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \sim \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, действующий на поле. Однако существуют случаи, в которых существенны нелокальные потенциалы вида (11.1), например, многочастичная задача в ядерной физике [1]. Далее, некоторые типы линейных связей могут близко соответствовать связи типа (11.1). Например, лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля \mathbf{A} с нерелятивистскими частицами заряда e имеет вид

$$L = \frac{1}{2m_0} \int d^3r \psi^*(\mathbf{r}) [i\mathbf{V} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})]^2 \psi(\mathbf{r}) \quad (11.2)$$

и содержит член вида (11.1) с

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \frac{e^2}{m_0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, t), \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= |\psi(\mathbf{r}, t)|^2. \end{aligned} \quad (11.3)$$

В релятивистской теории ситуация сложнее; в частности δ -функция оказывается размазанной на величину комптоновской длины волны заряженной частицы. Аналогично можно показать, что релятивистское псевдоскалярное γ_5 -взаимодействие¹⁾ в мезонной теории содержит эквивалентный основной член вида (11.1) при

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{g^2}{M_0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}, t). \quad (11.4)$$

¹⁾ Читателю, никогда не слышавшему об этом, мы советуем игнорировать следующее замечание. Лагранжиан для этого случая имеет вид $L' = \int \psi^* \gamma_5 \phi \psi d^3r$.

где ρ — нуклонная плотность $\psi^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$, а M_0 — масса нуклона. При преобразовании γ_5 -теории появляется также много других членов, один из которых составит предмет последней части этой книги. Кроме того, как мы увидим в гл. 13, та часть модели Ли, для которой решение можно дать в явном виде, тоже эквивалентна (11.1). В этой и в следующей главах мы будем часто обращаться к электродинамике как к примеру теории такого рода. Мы не будем, однако, изучать эту проблему слишком подробно, ибо ее физические приложения будут представлять для нас интерес лишь постольку, поскольку они позволяют легко ввести многие понятия, с которыми мы в дальнейшем столкнемся в физике π -мезонов. Так, эта модель позволит нам изучить связанные (возбужденные) физические состояния источника и явления рассеяния.

Следуя нашему общему подходу, мы сначала найдем решение уравнений движения с точки зрения классического поля и отложим квантовомеханический анализ до следующей главы. Мы ограничимся обсуждением случая, когда V не зависит от t ¹⁾. Далее, во всех явных вычислениях мы будем считать для простоты, что V разделяется на произведение следующего вида²⁾:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\lambda \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}'), \\ \int d^3r \rho(\mathbf{r}) &= 1, \end{aligned} \quad (11.5)$$

где λ — вещественна и $\rho(\mathbf{r})$ — сферически симметрична. Рассмотрение, которое мы приведем ниже, можно было бы провести и применяя общую форму V , но это потребовало бы использования ряда приемов теории сингулярных интегральных уравнений. Поскольку общий случай не приводит к каким-либо существенно новым результатам, представляющим физический интерес, мы не будем анализировать его детально. Уравнение движения (8.12) можно записать в интегральной форме, вводя асимптотические поля

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \int dt' d^3r' d^3r'' \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') V(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \phi(\mathbf{r}'', t') = \\ &= \phi^{\text{out}}(\mathbf{r}, t) + \int dt' d^3r' d^3r'' \Delta^{\text{adv}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \phi(\mathbf{r}'', t'). \end{aligned} \quad (11.6)$$

¹⁾ Разумеется, мы сохраним возможность адиабатического включения и выключения.

²⁾ В следующем уравнении константа связи λ имеет размерность длины или (энергии)⁻¹. С равным успехом можно было бы ввести безразмерную константу связи $g = \lambda m$. Когда λ отрицательна, гамильтониан перестает быть положительно определенным; при этом, как мы увидим в следующей главе, могут возникнуть существенные трудности.

Фурье-преобразование этого уравнения имеет обычный вид линейного интегрального уравнения. Чтобы получить его, введем четырехмерную фурье-компоненту ¹⁾ поля ϕ :

$$\phi(\mathbf{k}, K_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \phi(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - K_0 t)} d^3\mathbf{r} dt.$$

и трехмерную фурье-компоненту не зависящего от времени источника ²⁾

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}'.$$

Для поля ϕ мы ввели четырехмерную фурье-компоненту вместо трехмерной по той причине, что его зависимость от времени отличается от зависимости для свободного поля и заранее неизвестна. Вводя выписанные выше фурье-компоненты вместе с четырехмерными фурье-компонентами Δ^{ret} и Δ^{adv} , заданными по (8.6) и (8.7), мы получаем ³⁾

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}, K_0) &= \phi^{\text{in}}(\mathbf{k}, K_0) + \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \phi(\mathbf{k}', K_0)}{\omega^2 - (K_0 + i\epsilon)^2} = \\ &= \phi^{\text{out}}(\mathbf{k}, K_0) + \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \phi(\mathbf{k}', K_0)}{\omega^2 - (K_0 - i\epsilon)^2}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Подобное уравнение можно рассматривать как предел обычного линейного алгебраического уравнения (которое действительно получилось бы, если бы мы использовали нормировку на конечный объем ⁴⁾) и, следовательно, его можно изучать соответствующими методами. Для разделяющегося источника уравнение (11.7) содержит λ и K_0 .

¹⁾ Мы будем использовать в дальнейшем непрерывную ($L \rightarrow \infty$) нормировку, но сохраним $\mathbf{S} \rightarrow (1/2\pi)^3 d^3\mathbf{k}$ как символическое обозначение для интегрирования по непрерывному спектру и суммирования по дискретному спектру, когда он существует. Соотношение между непрерывной нормировкой и нормировкой на конечный ящик было разъяснено в гл. 5. Нормирующий множитель $(1/2\pi)^{3/2}$ вместо $1/(2\pi)^3$ выбран из соображений удобства. Обратное преобразование имеет при этом вид

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \phi(\mathbf{k}, K_0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - K_0 t)} d^3\mathbf{k} dK_0.$$

²⁾ Нормировка источника выбрана такой, что для разделяющегося источника, определенного (11.5), $V(0, 0) = -\lambda$. Знак также выбран из соображений удобства: для локального потенциала $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sim \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ мы находим, что $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ зависит только от разности $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$.

³⁾ Мы ввели $i\epsilon$ как удобное сокращенное обозначение для указания пути интегрирования, обсужденного в гл. 8. Подразумевается предел $\epsilon \rightarrow 0$; следовательно, величина $Ni\epsilon$, где N — любое конечное положительное число, так же может быть записана как $i\epsilon$.

⁴⁾ Для этого случая задача рассмотрена в работе [3].

как параметры и представляет собой, вообще говоря, линейное соотношение между ϕ и ϕ^{in} . Однако если для определенных значений параметров детерминант уравнения (11.7) исчезает, то существует решение при $\phi^{\text{in}} = 0$ или при $\phi^{\text{out}} = 0$. Мы увидим позднее, что решения однородных уравнений (например, $\phi^{\text{in}} = 0$) соответствуют связанным состояниям, тогда как решения неоднородного уравнения дают состояния, соответствующие рассеянию. В настоящий момент сконцентрируем внимание на последних. В общем случае решение (11.7) можно дать только в виде бесконечных рядов, но для V , имеющего вид (11.5), разложение Фредгольма обрывается на втором члене. В самом деле, мы находим, что ¹⁾

$$\phi(\mathbf{k}, K_0) = \phi^{\text{in}}(\mathbf{k}, K_0) + \lambda \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\rho(\mathbf{k}) \rho^*(\mathbf{k}')}{(K_0 + i\varepsilon)^2 - \omega^2} \phi(\mathbf{k}', K_0), \quad (11.8a)$$

$$\rho(\mathbf{k}) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r,$$

$$\begin{aligned} \rho(-\mathbf{k}) &= \rho^*(\mathbf{k}) && \text{для вещественного источника,} \\ \rho(\mathbf{k}) &= \rho(|\mathbf{k}|) && \text{для сферического источника.} \end{aligned} \quad (11.8b)$$

Это уравнение можно непосредственно проинтегрировать, и мы получаем

$$\phi(\mathbf{k}, K_0) = \phi^{\text{in}}(\mathbf{k}, K_0) + \lambda \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\rho(\mathbf{k}) \rho^*(\mathbf{k}')}{(K_0 + i\varepsilon)^2 - \omega^2} \frac{\phi^{\text{in}}(\mathbf{k}', K_0)}{1 + \lambda \sum_{\mathbf{q}} \frac{|\rho(\mathbf{q})|^2}{\omega_{\mathbf{q}}^2 - (K_0 - i\varepsilon)^2}}. \quad (11.9)$$

Теперь, когда частное решение получено, мы можем вернуться к более привычному трехмерному разложению Фурье. Чтобы переписать (11.9) в трехмерном импульсном пространстве, используем тот факт, что временная зависимость свободного поля ϕ^{in} известна. В качестве непрерывного аналога разложения Фурье (8.16) мы имеем

$$\begin{aligned} \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{A(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}}{(2\omega)^{1/2}} + \frac{A^\dagger(-\mathbf{k}) e^{i\omega t}}{(2\omega)^{1/2}} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [\phi^{\text{in}(+)}(\mathbf{k}, t) + \phi^{\text{in}(-)}(\mathbf{k}, t)] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (11.9a)$$

где $\phi^{\text{in}(+)}(\mathbf{k}, t)$ — положительно-частотная часть ²⁾ ϕ^{in} , пропорциональная $e^{-i\omega t}$, а $\phi^{\text{in}(-)}(\mathbf{k}, t)$ — отрицательно-частотная, пропорциональная $e^{i\omega t}$. Четырехмерная фурье-компонента $\phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$, определен-

¹⁾ Мы приводим вычисления только для уравнения с ϕ^{in} ; для ϕ^{out} они выполняются аналогичным способом.

²⁾ Это обозначение было введено в гл. 5.

ная выше, отлична от нуля лишь при $K_0 = \pm \omega$ и равна

$$\begin{aligned} \phi^{\text{in}}(\mathbf{k}, K_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{\text{in}}(\mathbf{k}, t) e^{iK_0 t} dt = \\ &= \frac{A(\mathbf{k})}{(2\omega)^{1/2}} \delta(K_0 - \omega) + \frac{A^*(-\mathbf{k})}{(2\omega)^{1/2}} \delta(K_0 + \omega). \end{aligned}$$

Выписывая положительно- и отрицательно-частотные части и используя полученные выше результаты, перепишем (11.9) в удобных матричных обозначениях¹⁾:

$$\phi(\mathbf{k}, t) = (\mathbf{k} | \Omega_+ | \mathbf{k}') \phi^{\text{in}(+)}(\mathbf{k}', t) + (\mathbf{k} | \Omega_- | \mathbf{k}') \phi^{\text{in}(-)}(\mathbf{k}', t), \quad (11.10)$$

где

$$(\mathbf{k} | \Omega_{\pm} | \mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{\lambda \rho(\mathbf{k}) \rho^*(\mathbf{k}')}{(k'^2 - k^2 + i\epsilon) D_{\pm}(k'^2)}. \quad (11.11)$$

Из (11.8б) и (11.11) следует, что для вещественного сферически симметричного источника

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm} &= \Omega_{\mp}^*, \\ D_{\pm}(k'^2) &= 1 + \frac{\lambda}{(2\pi)^3} \int \frac{|\rho(\mathbf{q})|^2 d^3q}{q^2 - k'^2 \mp i\epsilon}, \end{aligned} \quad (11.12a)$$

$$D_{\pm}^*(k^2) = D_{\mp}(k^2). \quad (11.12б)$$

Мы будем иногда давать (11.10) в сокращенной записи

$$\phi = \Omega \phi^{\text{in}}, \quad (11.10a)$$

где уравнение поля (8.11) налагает требование²⁾:

$$\bar{\omega}^2 \Omega - \Omega \bar{\omega}^2 = V \Omega, \quad (11.13)$$

в чем нетрудно убедиться. Здесь под $\bar{\omega}$ следует понимать диагональную матрицу

$$(\mathbf{k} | \bar{\omega} | \mathbf{k}') = (2\pi)^{-3} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \omega,$$

причем в правой части (11.13) подразумевается матричное умножение с $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$.

¹⁾ По дважды повторяющимся индексам производится суммирование в смысле \mathbf{S} . Появляющиеся здесь матрицы не следует смешивать с операторами в гильбертовом пространстве квантовой механики.

²⁾ Чтобы различить матрицу ω и функцию ω , мы будем ставить черточку над первой из них.

11.2. Связанные состояния. Чтобы определить степень общности решений (11.7), необходимо еще рассмотреть решение однородного уравнения. Функция $D_{\pm}(k^2)$, определенная равенствами (11.12), есть детерминант Фредгольма уравнений (11.7). Как уже упоминалось ранее, если этот детерминант обращается в нуль при определенном собственном значении $k = k_b$, то существует решение (11.7) с $\phi^{\text{in}} = 0$. Впоследствии мы выясним, когда это действительно имеет место, а сейчас отметим только, что при этом условии решение имеет вид ¹⁾

$$\phi(k, K_0) = \text{const} \frac{\rho(k)}{k^2 - k_b^2} \delta(K_0 \pm \omega_b),$$

или

$$\phi(k, t) = \text{const} \frac{\rho(k)}{k^2 - k_b^2} e^{\pm i\omega t}. \quad (11.14)$$

Эти выражения удовлетворяют (11.7), если

$$\lambda \sum_q \frac{|\rho(q)|^2}{k_b^2 - q^2} = 1,$$

т. е. $D(k_b^2) = 0$. Вскоре мы покажем, что полученное решение представляет связанное состояние, так что классическое поле, находящееся в этом состоянии, ведет себя особым образом.

Для того чтобы установить, когда (11.7) имеет решение с $\phi^{\text{in}} = 0$, следует изучить свойства функции $D_{\pm}(k^2)$. Для вещественных значений k можно использовать тождество ²⁾

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x), \quad (11.15)$$

которое позволяет разделить D_{\pm} на вещественную (D_1) и мнимую (D) части

$$D_{\pm}(k^2) = 1 + \lambda P \int \frac{d^3q |\rho(q)|^2}{(2\pi)^3 (q^2 - k^2)} \pm i\lambda \frac{|\rho(k)|^2 |k|}{4\pi} \equiv D_1 \pm iD. \quad (11.16)$$

Если $\rho(k)$ — функция, гладко ³⁾ стремящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$, то, как видно из (11.6), D всегда отлична от нуля для вещественных значений k . Чтобы изучить аналитические свойства D в комплексной плоскости, заменим k^2 комплексной переменной ⁴⁾ $z = x + iy$. Тогда

¹⁾ Далее в этой главе и в большей части последующей будет предполагаться, что величина $\rho(k)$ сферически симметрична. Иными словами, $\rho(k) = \rho(|k|) = \rho(k)$.

²⁾ Символ P означает главное значение Коши.

³⁾ Мы подразумеваем под этим, что $\rho(k)$ всюду положительно. Это не имеет места для пространственного источника $\rho(r)$, который обрывается резко при определенном значении радиуса $r = r_0$.

⁴⁾ При этом $\pm i\epsilon$ включено в y .

$D_+(k^2)$ и $D_-(k^2)$ представляют собой граничные значения функции

$$D(z) = 1 + \lambda \sum_q \frac{|\rho(q)|^2}{q^2 - z} \quad (11.17)$$

при стремлении z к вещественной оси сверху и снизу соответственно. Из (11.17) следует, что $D(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением разреза вдоль положительной вещественной оси, где мнимая часть претерпевает скачок. Чтобы найти нули функции $D(z)$, заметим, что функция

$$\text{Im } D(z) = y\lambda \sum_q \frac{|\rho(q)|^2}{(q^2 - x)^2 + y^2} \quad (11.18)$$

может быть равна нулю только при $y = 0$. Поэтому, чтобы определить нули $D(z)$, достаточно исследовать отрицательную часть вещественной оси.

В этой области¹⁾

$$\frac{1}{\lambda} D'(x) \equiv \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} D(x) = \sum_q \frac{|\rho(q)|^2}{(q^2 - x^2)^2} > 0, \quad (11.19)$$

и поскольку к тому же $D(\pm\infty) = 1$, если²⁾ $\int d^3q |\rho(q)|^2 < \infty$, мы приходим к следующим возможностям:

1. $\lambda > 0$ D не имеет нулей в плоскости с разрезом.
2. $\lambda < 0$ D либо имеет один и только один нуль при отрицательном вещественном значении $x = k_b^2$, если

$$D(0) = 1 + \lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(k)|^2}{k^2} < 0,$$

либо вовсе не имеет нулей.

Сформулированные условия изображены графически на фиг. 11.1. Можно было ожидать заранее, что связанные состояния появляются лишь при $\lambda < 0$, так как отрицательный знак соответствует притяжению, и мы таким образом видим, что принятый нами вид потенциала допускает лишь одно связанное состояние. Из обычной квантовой механики хорошо известно, что даже при наличии притяжения связанное состояние не образуется, если потенциальная энергия слишком мала, чтобы перекрыть кинетическую энергию нулевых колебаний. Здесь это соответствует случаю, когда $\lambda < 0$, но $D(0) > 0$.

¹⁾ Мы надеемся, что у читателя не возникнет неясностей по поводу обозначений $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$ и $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$.

²⁾ Это условие не выполняется для точечного источника.

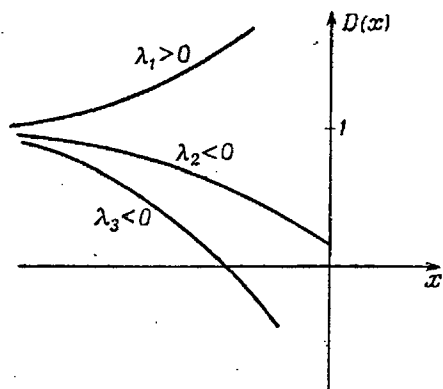
11.3. Поведение волновой матрицы Ω . Матрица¹⁾ Ω , преобразующая локальные переменные поля в асимптотические, обладает рядом интересных свойств, существенных для квантовой трактовки теории. Мы увидим, что при наличии связанных состояний²⁾ матрица Ω „полуунитарна“ в том смысле, что³⁾

$$\Omega_{\pm}^{\dagger} \Omega_{\pm} = 1, \quad (11.20)$$

но

$$\Omega_{\pm} \Omega_{\pm}^{\dagger} = 1 - \mathfrak{P}, \quad (11.21)$$

где \mathfrak{P} — оператор проектирования на связанные состояния, коль скоро какие-то из них существуют. „Полуунитарность“ — это явление, появляющееся только в бесконечномерном пространстве, так



Фиг. 11.1. Диаграмма $D(x)$ для отрицательных значений x и трех возможных значений λ при $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ и отрицательных λ_2 и λ_3 .

как для конечной матрицы условие $\Omega \Omega^{\dagger} = 1$ всегда означает $\Omega^{\dagger} \Omega = 1$. Для доказательства высказанных предположений мы запишем

$$\Omega_{\pm} = 1 + R_{\pm}, \quad (11.22)$$

где

$$\langle \mathbf{k}' | R_{\pm} | \mathbf{k} \rangle = \frac{\lambda}{D_{\pm}(k^2)} \frac{\rho(k') \rho^*(k)}{k^2 - k'^2 \pm i\epsilon},$$

и

$$\langle \mathbf{k}' | R_{\pm}^{\dagger} | \mathbf{k} \rangle = \frac{\lambda}{D_{\mp}(k'^2)} \frac{\rho(k') \rho^*(k)}{k'^2 - k^2 \mp i\epsilon},$$

¹⁾ Матрицу Ω называют иногда в литературе волновой матрицей (см., например, статью [6]).

²⁾ Для связанных состояний энергии связи $< m$. Основное состояние физического источника не входит в эти рассуждения. Оно всегда существует, если только источник не неустойчив, но этот случай мы не будем рассматривать.

³⁾ Из-за наличия матричного умножения, введенного ранее (см. примечание 1 на стр. 133), величина $\langle \mathbf{k} | \Omega_{\pm}^{\dagger} \Omega_{\pm} | \mathbf{k}' \rangle$ не безразмерна. Фактически она равна $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ и единицу в (11.20) и (11.21) следует понимать именно в этом смысле.

так что (11.20) теперь имеет вид

$$R_{\pm}^{\dagger} R_{\pm} = -(R_{\pm} + R_{\pm}^{\dagger}). \quad (11.23)$$

Последнее равенство легко можно проверить явным образом для разделяющегося потенциала:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | R_{+}^{\dagger} R_{+} | \mathbf{k} \rangle &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\lambda^2 \rho(\mathbf{k}') \rho^*(\mathbf{k})}{D_{-}(\mathbf{k}'^2) D_{+}(\mathbf{k}^2)} \frac{|\rho(\mathbf{q})|^2}{(\mathbf{k}'^2 - \mathbf{q}^2 - i\epsilon)(\mathbf{k}^2 - \mathbf{q}^2 + i\epsilon)} = \\ &= \frac{\lambda \rho(\mathbf{k}') \rho^*(\mathbf{k})}{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 + i\epsilon) D_{-}(\mathbf{k}'^2) D_{+}(\mathbf{k}^2)} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{\lambda |\rho(\mathbf{q})|^2}{\mathbf{k}'^2 - \mathbf{q}^2 - i\epsilon} - \frac{\lambda |\rho(\mathbf{q})|^2}{\mathbf{k}^2 - \mathbf{q}^2 + i\epsilon} \right] = \\ &= \frac{\lambda \rho(\mathbf{k}') \rho^*(\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 + i\epsilon} \left[\frac{1}{D_{-}(\mathbf{k}'^2)} - \frac{1}{D_{+}(\mathbf{k}^2)} \right] = -\langle \mathbf{k}' | R_{+} + R_{+}^{\dagger} | \mathbf{k} \rangle. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Можно доказать, что и R_{-} удовлетворяет тому же соотношению.

Проверка (11.21) производится аналогичным образом и мы находим, что

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | R_{+} R_{+}^{\dagger} | \mathbf{k} \rangle &= \lambda^2 \times \\ &\times \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\rho(\mathbf{k}') \rho^*(\mathbf{k}) |\rho(\mathbf{q})|^2}{(\mathbf{q}^2 - \mathbf{k}'^2 + i\epsilon)(\mathbf{q}^2 - \mathbf{k}^2 - i\epsilon) D_{+}(\mathbf{q}^2) D_{-}(\mathbf{q}^2)} = \frac{\lambda \rho(\mathbf{k}') \rho^*(\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 + i\epsilon} \times \\ &\times \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{q})|^2}{D_{+}(\mathbf{q}^2) D_{-}(\mathbf{q}^2)} \left(\frac{\lambda}{\mathbf{k}'^2 - \mathbf{q}^2 - i\epsilon} - \frac{\lambda}{\mathbf{k}^2 - \mathbf{q}^2 + i\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (11.25)$$

При учете (11.16) последний интеграл можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | R_{+} R_{+}^{\dagger} | \mathbf{k} \rangle &= \\ &= \frac{\lambda \rho(\mathbf{k}') \rho^*(\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 + i\epsilon} \frac{1}{i\pi} \int_0^{\infty} q dq \left[\frac{1}{D_{-}(q^2)} - \frac{1}{D_{+}(q^2)} \right] \left(\frac{1}{\mathbf{k}'^2 - q^2 - i\epsilon} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 - q^2 + i\epsilon} \right) = \\ &= \frac{\lambda \rho(\mathbf{k}') \rho^*(\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 + i\epsilon} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{D(z)} \left(\frac{1}{z - \mathbf{k}'^2 + i\epsilon} - \frac{1}{z - \mathbf{k}^2 - i\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (11.26)$$

где контур C примыкает к вещественной оси снизу от $-\infty$ до 0 и сверху от 0 до ∞ . Поскольку $D(\infty) \rightarrow 1$, интеграл по кругу бесконечного радиуса не вносит вклада в (11.26); если прибавить его к интегралу вдоль вещественной оси, то, как это изображено на фиг. 11.2, возникает интеграл по замкнутому контуру. Этот интеграл можно вычислить с помощью теоремы Коши, используя аналитические свойства D , рассмотренные выше. Если D не имеет полюсов, то

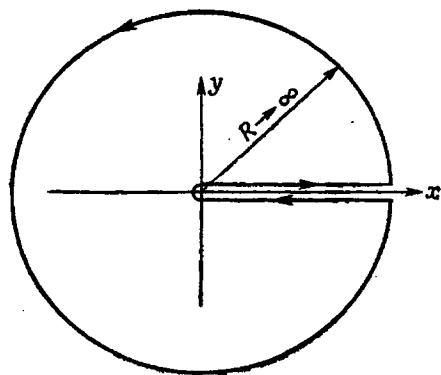
$$\langle \mathbf{k}' | R_{+} R_{+}^{\dagger} | \mathbf{k} \rangle = \frac{\lambda \rho(\mathbf{k}') \rho^*(\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}'^2 + i\epsilon} \left[\frac{1}{D_{-}(\mathbf{k}'^2)} - \frac{1}{D_{+}(\mathbf{k}^2)} \right];$$

если же она имеет один полюс, то¹⁾

$$(k' | R_+ R_+^\dagger | k) = \\ = \frac{\lambda \rho(k') \rho^*(k)}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} \left[\frac{1}{D_-(k'^2)} - \frac{1}{D_+(k^2)} + \frac{1}{D'(k_b^2)} \left(\frac{1}{k_b^2 - k'^2} - \frac{1}{k_b^2 - k^2} \right) \right].$$

Как мы видим, возвращаясь к (11.22), первый случай означает, что

$$(k' | \Omega_+ \Omega_+^\dagger | k) = (2\pi)^3 \delta^3(k - k'), \quad (11.27a)$$



Фиг. 11.2. Контур интегрирования для уравнения (11.26).

тогда как второй — что

$$(k' | \Omega_+ \Omega_+^\dagger | k) = (2\pi)^3 \delta^3(k - k') - U_b(k') U_b^*(k), \quad (11.27b)$$

причем²⁾

$$U_b(k) = \left[\frac{\lambda}{D'(k_b^2)} \right]^{1/2} \frac{\rho(k)}{k^2 - k_b^2}. \quad (11.28a)$$

Сравнение с (11.14) позволяет выписать временную зависимость U_b :

$$U_b(k, t) = U_b(k) e^{-i\omega t}. \quad (11.28b)$$

С помощью (11.19) можно очень просто показать, что волновая функция U_b связанного состояния правильно нормирована. То, что эта волновая функция действительно представляет связанное состояние.

¹⁾ $D'(k_b^2) \equiv dD(x)/dx|_{x=k_b^2}$ и задается уравнением (11.19).

²⁾ Заметим следующее: для того чтобы в (11.28) присутствовал второй член, λ должна быть отрицательной. Однако, как доказывает уравнение (11.19), $D'(k_b^2)$ также отрицательна, так что $\lambda/D'(k_b^2)$ всегда положительно.

следует из пространственной зависимости фурье-преобразования $U_b(k)$. Поскольку k_b^2 отрицательно, мы находим

$$\begin{aligned} U_b(r) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int U_b(k) e^{ik \cdot r} d^3k = \\ &= \left[\frac{\lambda}{D'(k_b^2)}\right]^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \rho(r') \frac{e^{ik(r-r')}}{k^2 + |k_b^2|} d^3k d^3r' = \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left[\frac{\lambda}{D'(k_b^2)}\right]^{1/2} \int \rho(r') \frac{e^{-|k_b||r-r'|}}{|r-r'|} d^3r', \end{aligned} \quad (11.28\text{в})$$

и на больших расстояниях от источника эта волновая функция имеет пространственную зависимость, характерную для связанного состояния:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U_b(r') = \left[\frac{\pi\lambda}{2D'(k_b^2)}\right]^{1/2} \frac{e^{-|k_b|r}}{r}, \quad (11.28\text{г})$$

где величина $\omega_b = (m^2 - |k_b|^2)^{1/2}$ есть энергия связи. Более того, волновая функция U_b ортогональна к состояниям рассеяния¹⁾ в том смысле, что

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} U_b^*(k) (k | \Omega_{\pm} | k') = 0. \quad (11.29)$$

11.4. Рассеяние. В заключение этой главы мы вернемся к связи между падающим и уходящим полями. Из (11.10) и аналогичного равенства для уходящего поля мы получаем²⁾:

$$\begin{aligned} \phi(k, t) &= (k | \Omega_+ | k') \phi^{(+)\text{in}}(k', t) + (k | \Omega_- | k') \phi^{(-)\text{in}}(k', t) = \\ &= (k | \Omega_- | k') \phi^{(+)\text{out}}(k', t) + (k | \Omega_+ | k') \phi^{(-)\text{out}}(k', t). \end{aligned} \quad (11.30)$$

Поскольку это уравнение выполняется во все моменты времени (ϕ^{in} и ϕ^{out} меняются во времени как свободные поля), мы можем отделить в нем положительно- и отрицательно-частотные части и получить с помощью (11.20)

$$\begin{aligned} \phi^{(+)\text{out}} &= \Omega_-^\dagger \Omega_+ \phi^{(+)\text{in}}, \\ \phi^{(-)\text{out}} &= \Omega_+^\dagger \Omega_- \phi^{(-)\text{in}}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Так как $[\phi^{(+)}]^\dagger = \phi^{(-)}$, второе равенство (11.31) совместно с первым.

¹⁾ То, что $(k | \Omega_{\pm} | k')$ представляют состояния рассеяния, станет ясно из п. 11.4. Доказательство ортогональности (11.29) мы оставим в качестве упражнения читателю.

²⁾ Связанное состояние теперь не учитывается, так как оно не играет роли в последующих рассуждениях.

Важно иметь в виду, что оператор $\Omega_-^\dagger \Omega_+$ унитарен, независимо от того, присутствуют или нет связанные состояния. С помощью (11.21) находим, что

$$\begin{aligned}\Omega_-^\dagger \Omega_+ (\Omega_-^\dagger \Omega_+)^{\dagger} &= \Omega_-^\dagger (1 - \mathfrak{P}) \Omega_- = 1, \\ (\Omega_-^\dagger \Omega_+)^{\dagger} \Omega_-^\dagger \Omega_+ &= \Omega_+^\dagger (1 - \mathfrak{P}) \Omega_+ = 1,\end{aligned}\quad (11.32)$$

так как член с \mathfrak{P} исчезает вследствие условия ортогональности (11.29). Если источник, как это и предполагалось, сферически симметричен, $\rho(\mathbf{k}) = \rho(|\mathbf{k}|)$, то произведение $\Omega_-^\dagger \Omega_+$ нетрудно диагонализировать. При этом, как и в случае линейной связи, оказывается связанной только сферически симметричная часть поля. Это можно продемонстрировать, разлагая поле по сферическим волнам, в результате чего Ω становится диагональной по l и m . Матричные элементы Ω между состояниями $|k, l, m\rangle$ оказываются равными единице при $l \neq 0$, а при $l=0$ мы находим (см. гл. 5), что

$$\begin{aligned}(k', 0, 0 | \Omega_+ | k, 0, 0) &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_k d\Omega_{k'} Y_0^0(k') (k' | \Omega_+ | k) Y_0^0(k) = \\ &= \frac{2\pi^2}{k^2} \delta(|k| - |k'|) + \frac{\lambda}{D_+(k^2)} \frac{\rho(k') \rho^*(k)}{k^2 - k'^2 + i\varepsilon}.\end{aligned}\quad (11.33)$$

С помощью равенств (11.15) и (11.16) можно переписать (11.33) в более удобной форме:

$$\begin{aligned}(k', 0, 0 | \Omega_+ | k, 0, 0) &= \\ &= \left[1 - \frac{i\lambda |k| |\rho(k)|^2}{4\pi D_+(k^2)} \right] \delta(k - k') \frac{2\pi^2}{k^2} + \lambda P \frac{\rho(k') \rho^*(k)}{(k^2 - k'^2) D_+(k^2)} = \\ &= \left[\frac{2\pi^2}{k^2} \delta(k - k') + \lambda P \frac{\rho(k') \rho^*(k)}{(k^2 - k'^2) D_+(k^2)} \right] \frac{D_+(k^2)}{D_+(k^2)} = \\ &\equiv (k', 0, 0 | \Omega_1 | k, 0, 0) \frac{D_+(k^2)}{D_+(k^2)}.\end{aligned}\quad (11.34)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}(k', 0, 0 | \Omega_- | k, 0, 0) &= (k', 0, 0 | \Omega_1 | k, 0, 0) \frac{D_-(k^2)}{D_-(k^2)} = \\ &= (k', 0, 0 | \Omega_+ | k, 0, 0) \frac{D_+(k^2)}{D_-(k^2)}\end{aligned}\quad (11.35)$$

и, следовательно¹⁾,

$$\Omega_-^\dagger \Omega_+ = \left(\Omega_+ \frac{D_+}{D_-} \right)^\dagger \Omega_+ = \frac{D_-}{D_+} \Omega_+^\dagger \Omega_+ = \frac{D_-}{D_+} 1$$

или

$$(k', 0, 0 | \Omega_-^\dagger \Omega_+ | k, 0, 0) = \frac{2\pi^2}{k^2} \delta(k - k') \frac{D_-(k^2)}{D_+(k^2)}.\quad (11.36)$$

¹⁾ Матричное умножение означает теперь $(1/2\pi^2) \int k^2 dk$.

Поскольку последняя матрица диагональна, соотношение между „in“- и „out“-полями в этом представлении выглядит особенно просто. Если определить фазовый сдвиг $\delta(k)$ равенством¹⁾

$$(k', 0, 0 | \Omega^\dagger \Omega_+ | k, 0, 0) = \frac{2\pi^2}{k^2} \delta(k - k') e^{2i\delta(k)}, \quad (11.37)$$

то

$$\phi^{(+)\text{ out}} = e^{2i\delta(k)} \phi^{(+)\text{ in}}, \quad \phi^{(-)\text{ out}} = e^{-2i\delta(k)} \phi^{(-)\text{ in}} \quad (11.38)$$

и

$$\operatorname{tg} \delta(k) = -\frac{D(k^2)}{D_1(k^2)} = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{|\rho(k)|^2 k}{1 + \lambda P \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(q)|^2}{q^2 - k^2}}. \quad (11.39)$$

Эти соотношения будут играть существенную роль в следующей главе, где мы будем изучать корпускулярный аспект задачи и свяжем полученные выражения с сечением рассеяния. Здесь же мы хотим только отметить, что когда размеры источника стягиваются к нулю, возникает ряд затруднений. Поскольку $\rho(k)$ равно при этом 1, то из (11.39), мы находим

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \delta(k)}{k} = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\infty} = 0. \quad (11.40)$$

В гл. 12 будет показано, как обойти появляющиеся трудности с помощью предельного перехода.

Как и в теории с линейной по полю связью, в теории с билинейным взаимодействием для некоторых видов источников можно найти аналитическое решение. Здесь мы сталкиваемся с очень интересной задачей, поскольку оказывается возможным рассмотреть рассеяние на многих центрах. При этом „потенциальная энергия“ не является суммой потенциалов взаимодействия между парами, как это было в линейной теории. Обсуждение этих проблем увело бы нас, однако, далеко в сторону²⁾.

¹⁾ Тот факт, что $\delta(k)$ представляет собой обычный фазовый сдвиг, следует из (11.38). Это эквивалентно сделанному выше утверждению, что Ω играет роль „волновой функции“ рассеяния. Ее нормировка определяется условиями (11.20) и (11.21).

²⁾ См., однако, работу Вентцеля [5].

Глава 12

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С БИЛИНЕЙНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

12.1. Квантование и перестановочные соотношения при наличии связанного состояния. В первую очередь мы используем полученные нами результаты, чтобы проверить согласованность перестановочных соотношений для локальных полей с перестановочными соотношениями для асимптотических полей. Вообще говоря, такая эквивалентность гарантируется адиабатическим принципом, но для билинейной теории она не так очевидна, как для теории с линейной связью, в которой локальные и асимптотические операторы поля отличаются лишь на обычное число. В частности, если мы рассмотрим сейчас более общую задачу, включающую связанное состояние, канонические перестановочные соотношения приводят к требованию, чтобы в дополнение к падающему полю (11.10) ϕ содержало бы член, представляющий связанное состояние. Как мы видели в гл. 11 [см. равенство (11.28в)], пространственная зависимость волновой функции связанного состояния имеет вид

$$U_b(\mathbf{r}, t) \sim \int d^3r' \rho(r') \frac{e^{-|k_b| |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-i\omega_b t}$$

при

$$\omega_b = (m^2 + k_b^2)^{1/2} = (m^2 - |k_b|^2)^{1/2},$$

так что соответствующие частицы продолжают концентрироваться около источника в пределе $t \rightarrow \pm\infty$, в отличие от частиц, связанных с ϕ^{in} , которые в конечном счете исчезают на бесконечности. Подход, который, как мы увидим в дальнейшем, позволяет удовлетворить перестановочным соотношениям, характеризуется следующим выражением (все время используются матричные обозначения, введенные в последнем разделе):

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}, t) = & (\mathbf{k} | \Omega_+ | \mathbf{k}') \phi^{(+)\text{in}}(\mathbf{k}', t) + U_b(\mathbf{k}) \phi_b(t) + \\ & + (\mathbf{k} | \Omega_- | \mathbf{k}') \phi^{(-)\text{in}}(\mathbf{k}', t) + U_b^*(\mathbf{k}) \phi_b^\dagger(t), \end{aligned} \quad (12.1)$$

где ϕ^{in} — обычный оператор (8.17) для падающего поля и

$$\begin{aligned}\phi_b(t) &= \frac{A_b e^{-i\omega_b t}}{(2\omega_b)^{1/2}}, \\ [A_b, A_k] &= [A_b, A_k^\dagger] = 0, \\ [A_b, A_b^\dagger] &= 1.\end{aligned}\quad (12.2)$$

Используя эти, а также обычные перестановочные соотношения для ϕ^{in} , можно убедиться, что канонические перестановочные соотношения удовлетворяются. Они не удовлетворялись бы, если бы члены, пропорциональные $U_b(\mathbf{k})$, были опущены или рассматривались как c -числа. Для простоты проведем доказательство при $t=0$; из вывода будет очевидно, что аналогичный способ применим и для других моментов времени. Из (12.1) и (11.9a) мы заключаем, что

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{k}, 0) &= (2\pi)^{-3/2} (\mathbf{k} | \Omega_+ (2\bar{\omega})^{-1/2} | \mathbf{k}') A(\mathbf{k}') + U_b(\mathbf{k}) A_b (2\omega_b)^{-1/2} + \\ &+ (2\pi)^{-3/2} (\mathbf{k} | \Omega_- (2\bar{\omega})^{-1/2} | \mathbf{k}') A^\dagger(-\mathbf{k}') + U_b^*(\mathbf{k}) A_b^\dagger (2\omega_b)^{-1/2}, \\ i\dot{\phi}(\mathbf{k}, 0) &= (2\pi)^{-3/2} \left(\mathbf{k} | \Omega_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{2} \right)^{1/2} | \mathbf{k}' \right) A(\mathbf{k}') + U_b(\mathbf{k}) A_b \left(\frac{\omega_b}{2} \right)^{1/2} - \\ &- (2\pi)^{-3/2} \left(\mathbf{k} | \Omega_- \left(\frac{\bar{\omega}}{2} \right)^{1/2} | \mathbf{k}' \right) A^\dagger(-\mathbf{k}') - U_b^*(\mathbf{k}) A_b^\dagger \left(\frac{\omega_b}{2} \right)^{1/2}.\end{aligned}\quad (12.3)$$

В терминах фурье-компонент $\dot{\phi}(\mathbf{k}, 0)$ и $\phi(\mathbf{k}, 0)$, введенных в гл. 11, вещественность $\dot{\phi}(\mathbf{r})$ требует, чтобы выполнялось условие $\dot{\phi}(-\mathbf{k}, 0) = \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{k}, 0)$, и обычные перестановочные соотношения принимают вид

$$[\phi(\mathbf{k}, 0), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{k}', 0)] = [\dot{\phi}(\mathbf{k}, 0), \phi^\dagger(\mathbf{k}', 0)] = 0. \quad (12.4)$$

Эти соотношения выполняются, если

$$(\mathbf{k} | \Omega_+ \bar{\omega}^{\pm 1} \Omega_+^\dagger - \Omega_- \bar{\omega}^{\pm 1} \Omega_-^\dagger | \mathbf{k}') = 0,$$

что действительно имеет место, как можно показать с помощью (11.35). Последнее перестановочное соотношение

$$\begin{aligned}[\phi(\mathbf{k}, 0), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{k}', 0)] &= \frac{i}{2} [(\mathbf{k} | \Omega_+ \Omega_+^\dagger + \Omega_- \Omega_-^\dagger | \mathbf{k}') + \\ &+ 2U_b(\mathbf{k}) U_b^*(\mathbf{k}')] (2\pi)^{-3} = i\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\end{aligned}\quad (12.5)$$

также удовлетворяется [см. (11.276)], но только благодаря введенным в (12.1) дополнительным связанным состояниям и перестановочным соотношениям (12.2). Разумеется, если связанные состояния отсутствуют, мы просто берем $U_b = 0$ и (12.5) продолжает выполняться.

12.2. Рассеяние. В гл. 11 мы кратко рассмотрели связь между „in“ и „out“-полями. Было показано, что эта связь имеет наиболее

простой вид, когда поля описываются через собственные состояния углового момента. Соотношения между полями сохраняют свой вид и в квантовой теории, как это следует из (12.1) и аналогичного уравнения с ϕ^{out} . Эта пара уравнений показывает, кроме того, что переходы из непрерывного в связанное состояние, и наоборот, невозможны. Можно переписать (11.37) в виде

$$\begin{aligned} B_{lm}(k) &= S^{-1} A_{lm}(k) S = A_{lm}(k) && \text{для } l \neq 0, \\ B_{00}(k) &= S^{-1} A_{00}(k) S = A_{00}(k) e^{2i\delta(k)}, \\ B_{00}^{\dagger}(k) &= S^{-1} A_{00}^{\dagger}(k) S = A_{00}^{\dagger}(k) e^{-2i\delta(k)} \end{aligned} \quad (12.6)$$

и отсюда сделать вывод, что ¹⁾

$$S = \exp \left[i \int A_{00}^{\dagger}(k) 2\delta(k) A_{00}(k) dk \right]. \quad (12.7)$$

Из выражения

$$N^{\text{in}} = \sum_{lm} \int dk A_{lm}^{\dagger}(k) A_{lm}(k)$$

и аналогичного выражения для N^{out} следует, что $N^{\text{in}} = N^{\text{out}}$, т. е. что рождение реальных частиц отсутствует. Только одно состояние, содержащее падающую частицу с $l=0$, отличается от соответствующего состояния с рассеянной частицей на фазовый сдвиг 2δ . Падающая плоская волна, представляющая собой смесь собственных состояний лагранжиана L , дает уходящую плоскую волну плюс расходящуюся сферическую волну с амплитудой ($e^{2i\delta} - 1$). Отсюда можно получить выражение для вероятности перехода, действуя таким же способом, как и в случае квантовой механики одной частицы. Для сечения рассеяния (8.34) получается обычное выражение

$$\frac{d\sigma(k)}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta(k)}{k^2}.$$

Обсудим теперь коротко резонансное рассеяние, представляющее важное свойство π -мезон-нуклонной системы. Если исследовать выражение

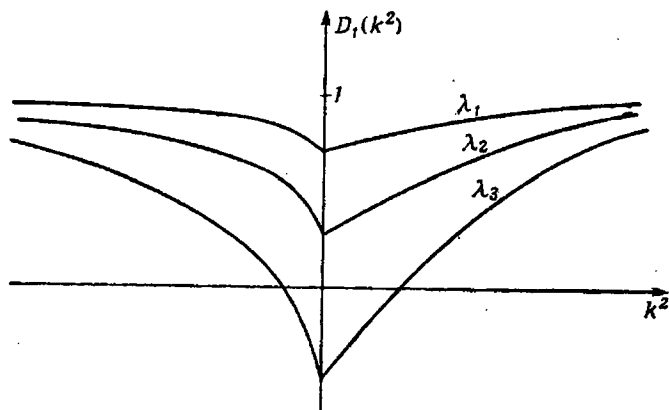
$$\text{tg } \delta(k) = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{|\rho(k)|^2 k}{D_1(k^2)} = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{|\rho(k)|^2 k}{1 + \lambda P \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(q)|^2}{q^2 - k^2}} \quad (12.8)$$

для значений λ , настолько малых, что функция D^{-1} не имеет полюсов, то при $\rho(k)$, стремящемся к нулю при больших импульсах достаточно

¹⁾ Напомним, что

$$[A_{lm}(k), A_{l'm'}^{\dagger}(k')] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(k - k').$$

быстро, $\delta \rightarrow 0$, как при $k \rightarrow 0$, так и при $k \rightarrow \infty$. Для конечных значений импульса δ принимает положительные или отрицательные значения в зависимости от знака λ . Если λ отрицательна, а ее величина возрастает, то начиная с некоторого критического значения D_1 становится отрицательной, а D_1^{-1} имеет два полюса, как это изображено на фиг. 12.1. В этом случае¹⁾ фазовый сдвиг проходит через 90° при



Фиг. 12.1. График функции $D_1(k^2)$ для трех отрицательных значений константы связи при $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

импульсе k_r , величина которого определяется условием $D_1(k_r^2) = 0$. Для импульсов, близких к k_r , можно разложить $D_1(k^2)$:

$$D_1(k^2) \approx (k^2 - k_r^2) D_1'(k_r^2) + \dots$$

где

$$D_1'(k_r^2) = \left[\frac{dD_1(x)}{dx} \right]_{x=k_r^2}$$

В этом приближении фазовый сдвиг можно записать как

$$\operatorname{tg} \delta(k) \approx \frac{1/2}{\omega_r - \omega}, \quad (12.9a)$$

¹⁾ В дальнейшем мы обсудим возможность того, что при возрастании константы связи возникнет резонанс, сопровождающийся образованием связанного состояния. Это не имеет места на самом деле для S-рассеяния, но может осуществляться для P-волн, с которыми мы будем иметь дело в третьей части книги.

где

$$\Gamma = \frac{\lambda k_r}{4\pi \omega_r} \frac{|\rho(k_r)|^2}{D_1'(k_r^2)} \quad (12.96)$$

Для производной фазового сдвига по импульсу мы получаем в окрестности k_r :

$$\delta'(k) = \frac{\frac{1}{2} \Gamma k / \omega}{\left(\frac{1}{2} \Gamma\right)^2 + (\omega_r - \omega)^2}$$

откуда видно, что δ' имеет острый максимум вблизи ω_r для $\Gamma \ll \omega_r$ ¹⁾. Очень быстрое убывание δ в зависимости от k в окрестности значения $k = k_r$, определяемого условием $D_1(k_r^2) = 0$ и называемого резонансным импульсом, свидетельствует о том, что падающие частицы в этой области имеют тенденцию оставаться у источника и что время испускания рассеянных частиц велико по сравнению со временем, необходимым для того, чтобы частица пересекла источник²⁾. Это можно видеть, рассмотрев падающую волну в виде гауссовского (сферического) пакета:

$$\begin{aligned} |U^{\text{in}}(r, t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left[-\frac{(k - k_r)^2 b^2}{2} - ikr - \frac{ik^2 t}{2m} \right] \right|^2 \sim \\ &\sim \exp \left[-\frac{(r - v_r t)^2}{b^2(t)} \right], \end{aligned}$$

где $v_r = k_r/m$, $b^2(t) = b^2 + t^2/m^2 b^2$. Разлагая $\delta(k)$ в окрестности k_r , находим для рассеянного волнового пакета:

$$\begin{aligned} &|U^{\text{out}}(r, t)|^2 = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp \left[-\frac{(k - k_r)^2 b^2}{2} - ikr - \frac{ik^2 t}{2m} + 2i(k - k_r) \delta'(k_r) \right] \right|^2 \sim \\ &\sim \exp \left\{ -\frac{[r - v_r(t + \Gamma^{-1})]^2}{b^2(t)} \right\}, \end{aligned}$$

где $\Gamma^{-1} = 2\delta'(k_r)/v_r$. Таким образом, мы снова получим гауссовское распределение, смещенное, однако, по времени на величину Γ^{-1} . Резонанс такого рода часто называют „виртуальным“ или „метастабильным“ состоянием с временем жизни порядка Γ^{-1} . Он доминирует в рассеянии частиц с энергиями, близкими к ω_r , поскольку соответ-

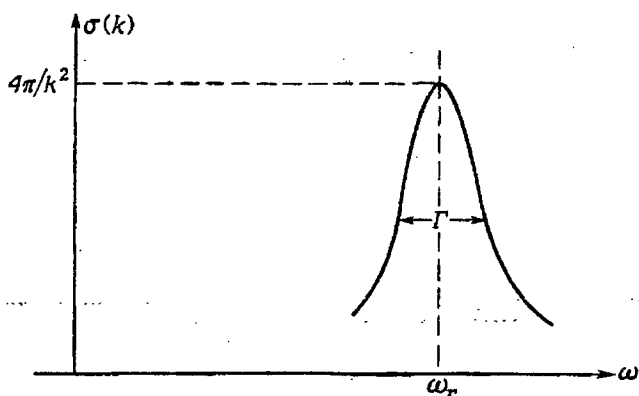
¹⁾ Это условие в действительности не выполняется для S-волн, но мы будем продолжать наши рассуждения, как если бы оно имело место.

²⁾ Обсуждение других сторон явления резонанса см. в книге Блатта и Вайскопфа [1].

ствующий фазовый сдвиг проходит 90° , а сечение рассеяния имеет в этой области максимум. Подставляя (12.9а) в формулу для сечения рассеяния, находим

$$\sigma(k) = 4\pi \frac{d\sigma(k)}{d\Omega} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma^2}{(\Gamma/2)^2 + (\omega_r - \omega)^2}. \quad (12.10)$$

График сечения рассеяния в зависимости от ω вблизи ω_r приведен на фиг. 12.2. Выражение (12.10) имеет простую физическую интерпретацию. Первый множитель — чисто геометрический. Он представляет собой площадку, перпендикулярную к падающему пучку, состоящему из волн с угловым моментом $l=0$ и импульсом k . Второй множитель выражает вероятность образования частицей с энергией ω метастабильного состояния, имеющего ширину Γ и центр распределения по энергии в точке ω_r . Таким образом, (12.10) показывает, что при $k \approx k_r$ рассеиваются только те частицы, которые имеют энергию и импульс, подходящие для образования связанного состояния.



Фиг. 12.2. Форма зависимости сечения рассеяния от энергии вблизи резонансного значения ω_r .

При дальнейшем возрастании $|\lambda|$ значения k , при которых фазовый сдвиг δ проходит через 90° , приближаются к $k=0$, а задержка распада по времени стремится к ∞ . Последнее значение достигается при значении $\lambda = \lambda_c$, которое определяется условием $D(0) = 0$. При еще больших значениях $|\lambda|$ появляется связанное состояние. Поскольку связанное состояние возникает лишь при $\lambda < 0$ (силы притяжения) и соответствует резонансу при отрицательных энергиях, фаза δ оказывается отрицательной при малых энергиях падающих частиц. Это видно из кривой для λ_3 на фиг. 11.1.

В пределе высоких энергий и для источника конечных размеров $tg \delta(k)$ задается первым членом разложения по степеням λ (борновское приближение ¹⁾), поскольку $D(\infty) = 1$. С другой стороны, для $k \rightarrow 0$ поправки к борновскому приближению могут быть заметными, поскольку точный результат отличается от этого приближения множителем $1/D_1(0)$. Эта величина может даже обращаться в нуль, и это действительно имеет место для точечного источника. Такое изменение величины сечения по сравнению с борновским приближением имеет простую физическую интерпретацию, если рассмотреть упрощенный вариант электродинамики ²⁾, в котором рассматривается только член $e^2 A^2/2m_0$ вместо полного лагранжиана (11.2) (и аналогично в γ_5 -теории). В этом случае легко показать, что $m = D(0) m_0$ есть полная инертная масса электрона, включающая инерцию электромагнитного поля, и, следовательно, величины e^2/m^2 и e^2/m_0^2 представляют собой сечения рассеяния соответственно в пределе низких и в пределе высоких энергий. Весь эффект высших приближений по e^2 (представляющих виртуальные фотоны) проявляется лишь в изменении инерции. В области низких частот виртуальные фотоны жестко связаны с зарядом и в соответствии с этим масса оказывается равной m . В высоких же частотах виртуальные частицы не успевают следовать за полем, и сечение рассеяния определяется голый массой m_0 . Этот простой результат типичен для нерелятивистской квантовой электродинамики. Релятивистская теория учитывает порождение также виртуальных пар заряженных частиц, что приводит к эффективному изменению не только массы, но и заряда электрона (поляризация вакуума).

При анализе мезонной теории будет удобно ввести перенормированную константу взаимодействия, такую, чтобы точное выражение для фазового сдвига, экстраполированное к нефизической энергии $\omega = 0$, совпало формально с борновским приближением, вычисленным с перенормированной константой связи ³⁾. Если эта процедура, которая могла бы показаться ненужной и произвольной, осуществлена, мы получаем конечный фазовый сдвиг δ для всех импульсов даже при точечном взаимодействии. В релятивистской теории потребность в таком точечном взаимодействии диктуется требованием лоренц-инвариантности; после перенормировки результаты оказываются менее чувствительными к форме источника $\rho(r)$. Следуя изложенной про-

¹⁾ Тот факт, что первый член действительно соответствует борновскому приближению, доказан, например, в работе Блатта [2].

²⁾ То, что A представляет собой векторное поле, не вносит существенных усложнений.

³⁾ Эту процедуру часто называют „перенормировкой заряда“ по аналогии с подобной процедурой в квантовой электродинамике. См., например, книгу Швекера, Бете и Гофмана [3].

целуре в настоящем случае, определим λ_r равенством

$$\lambda_r = \frac{\lambda}{D_1(-m^2)} = \frac{\lambda}{1 + \lambda P \int \frac{|\rho(q)|^2}{(2\pi)^3 \omega^2 q} d^3q}. \quad (12.11a)$$

Фиксация переинормированной константы λ_r (или эквивалентно $\lim_{k \rightarrow 0} \delta(k)/k$) означает определенную зависимость размера источника $k \rightarrow 0$

от λ . Так, зафиксировав определенное конечное значение λ_r , мы получаем следующее выражение для λ в пределе точечного источника (или достаточно малого источника):

$$\lambda = \frac{\lambda_r}{1 - \lambda_r P \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_q^2}} \rightarrow - \frac{1}{P \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_q^2}} \rightarrow -0.$$

Это означает, что λ приближается к нулю со стороны отрицательных значений независимо от знака λ_r . Хотя это обстоятельство и не приводит к каким-либо трудностям в задаче с одним источником, однако при наличии двух или более источников возникает связанное состояние с энергией $< m$. Отсюда ясно, что в теории отсутствует состояние с наименьшей энергией. В случае модели Ли, которую мы изучим далее, мы столкнемся с явлением подобного рода; оно приводит к серьезным трудностям даже в случае одиночного источника.

Через переинормированную константу связи фазовый сдвиг выражается следующим образом:

$$\text{tg } \delta(k) = - \frac{\lambda_r}{4\pi} \frac{k |\rho(k)|^2}{D_1^{(r)}(k^2)} = - \frac{\lambda_r}{4\pi} \frac{k |\rho(k)|^2}{1 + \lambda_r \omega^2 P \int \frac{d^3q |\rho(q)|^2}{(2\pi)^3 \omega_q^2 (q^2 - k^2)}}. \quad (12.11b)$$

Как уже пояснялось выше, такая форма записи имеет ряд любопытных свойств. В частности, роль высоких энергий в интеграле, где существи точный вид $\rho(r)$, сильно ослаблена, так что интеграл остается конечным даже в пределе точечного источника. В рассеянии может обнаруживаться резонанс при некоторой энергии ω_r , в окрестности которой остаются справедливыми уравнения (12.9) и (12.10) при замене λ на λ_r и $D_1(k^2)$ на $D_1^{(r)}(k^2)$.

12.3. Выражение энергии через асимптотические поля. Обратимся теперь к задаче о выражении H через асимптотические поля; как и в случае линейной скалярной связи, мы найдем, таким образом, энергию (или массу) переинормировки, иначе говоря, энергию вакуума падающих частиц. Как будет видно из дальнейшего, фазовый сдвиг δ непосредственно войдет в вычисления.

С помощью уравнения поля (8.11) перепишем гамильтониан в виде ¹⁾

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \int [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 - \int \phi(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') d^3 r'] d^3 r = \\
 &= \frac{1}{2} \int [\dot{\phi}^\dagger(\mathbf{k}) \dot{\phi}(\mathbf{k}) + \phi^\dagger(\mathbf{k}) \omega^2 \phi(\mathbf{k}) - \\
 &\quad - \phi^\dagger(\mathbf{k}) \int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \phi(\mathbf{k}') \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3}] d^3 k = \\
 &= \int \frac{1}{2} [\dot{\phi}^\dagger(\mathbf{k}) \dot{\phi}(\mathbf{k}) - \phi^\dagger(\mathbf{k}) \ddot{\phi}(\mathbf{k})] d^3 k, \quad (12.12a)
 \end{aligned}$$

где использовано обозначение $\phi(\mathbf{k}) = \phi(\mathbf{k}, 0)$. Подставляя последнее равенство в (12.3) и вычисля вторую производную по времени от ϕ из (11.9a), мы получаем в матричных обозначениях:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{(2\pi)^3}{4} [A^\dagger \bar{\omega}^{1/2} \Omega_+^\dagger + A_b^\dagger U_b^* \omega_b^{1/2} - A \bar{\omega}^{-1/2} \Omega_-^\dagger - A_b U_b \omega_b^{1/2}] \times \\
 &\quad \times [\Omega_+ \bar{\omega}^{1/2} A + U_b \omega_b^{1/2} A_b - \Omega_- \bar{\omega}^{-1/2} A^\dagger - U_b^* \omega_b^{1/2} A_b^\dagger] + \\
 &\quad + \frac{(2\pi)^3}{4} [A^\dagger \bar{\omega}^{-1/2} \Omega_+^\dagger + A_b^\dagger U_b^* \omega_b^{-1/2} + A \bar{\omega}^{-1/2} \Omega_-^\dagger + A_b U_b \omega_b^{-1/2}] \times \\
 &\quad \times [\Omega_- \bar{\omega}^{1/2} A + U_b \omega_b^{1/2} A_b + \Omega_+ \bar{\omega}^{-1/2} A^\dagger + U_b^* \omega_b^{1/2} A_b^\dagger]. \quad (12.12b)
 \end{aligned}$$

Используя (11.36) и эрмитово сопряженное равенство, а также (11.29), можно упростить это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{(2\pi)^3}{2} (A^\dagger \bar{\omega} A + A \bar{\omega} A^\dagger + A_b^\dagger \omega_b A_b + A_b \omega_b A_b^\dagger) = \\
 &= \int d^3 k A^\dagger(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}) \omega + A_b^\dagger A_b \omega_b + E, \quad (12.12в)
 \end{aligned}$$

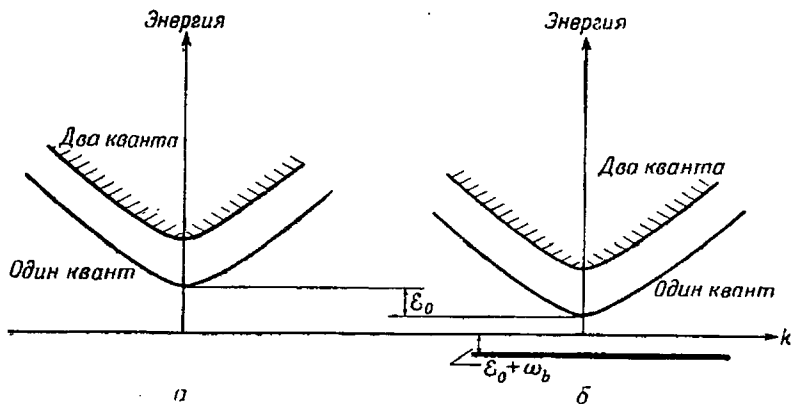
где E формально равно $\frac{1}{2} \int \omega d^3 k + \frac{1}{2} \omega_b$. Рассмотрим кратко связь этой энергии с энергией вакуума падающих частиц. Помимо этой константы, H представляет собой энергию падающих и связанных частиц. Спектр H в сравнении со спектром свободного поля показан на фиг. 12.3.

Приведенный анализ был справедлив лишь для вещественных ω_b , т. е. для $|k_b^2| < m^2$, поскольку мы считали множитель $\omega_b^{1/2}$ вещественным. При $\omega_b^2 < 0$ мы приходим к осцилятору с силой отталкивания $H = \frac{1}{2}(p^2 - \omega_b^2 q^2)$, и дискретный спектр отсутствует ²⁾. В част-

¹⁾ Гамильтониан (12.12) до сих пор не упорядочен в соответствии с (6.5), так что обычная нулевая энергия E_0 невзаимодействующих полей включена в задачу. Множитель $(2\pi)^3$ связан с нашим определением матричного умножения.

²⁾ Формально это напоминает „уходящее решение“, поскольку, когда ω_b становится мнимой, постоянное содержит член, зависящий от времени как $e^{\omega_b t}$. Это сходство не случайно. См., например, статью Ван-Кампена [4].

ности, спектр собственных значений не имеет нижней границы и корпускулярная интерпретация невозможна. Из физических соображений ясно, что неприятности начинаются при $|k_b^2| \rightarrow m^2$. При этом критическом значении импульса полная энергия состояния равна нулю и бесконечно малое количество энергии может породить бесконечное множество частиц в этом связанном состоянии. Эти частицы могли бы появиться при внезапном выключении источника. Таким образом, если λ уменьшается адиабатически, нестабильность появляется.



Фиг. 12.3. Энергетический спектр в отсутствие (а) и в присутствии (б) источника. В последнем случае показано также связанное состояние.

когда λ становится отрицательной, а по абсолютной величине превосходит некоторое критическое значение, определяемое условием $k_b^2 = -m^2$.

Поскольку гамильтониан (12.12) не был упорядочен, с точки зрения (12.12в) представляется, что в отсутствие связанного состояния энергия нулевых колебаний точно равна той же энергии для свободного поля. Таким образом, оказывается, что в теории с парным взаимодействием (в отличие от линейного статического случая) не существует перенормировки энергии. В обозначениях гл. 9 мы как-будто получаем $\mathcal{E}_0 = 0$. Однако разность двух бесконечных (и поэтому неопределенных) членов может быть отличной от нуля, даже когда они выглядят одинаково, причем результат зависит от способа перехода к пределу. Чтобы получить однозначный ответ, мы вычислим разность между энергиями физических вакуумных состояний при наличии источника и без него, используя для нормировки сферу конечного радиуса; только после этого мы перейдем к непрерывному пределу. Положим, что связанные состояния отсут-

ствуют. Граничное условие уравнения (5.9) показывает, что разрешенные значения k для части поля с $l=0$ слегка изменяются в присутствии источника вследствие фазового сдвига δ . Взяв обычные решения в виде стоячих волн, мы найдем, что если возможные значения импульса k в отсутствие взаимодействия определяются как

$$\sin k_n R = 0,$$

то при наличии источника граничное условие имеет вид

$$\sin [k'_n R + \delta(k'_n)] = 0,$$

или (для $\delta k_n \ll k_n$)

$$k'_n = k_n - \frac{\delta(k_n)}{R}. \quad (12.13)$$

Это приводит к изменению собственных значений энергии

$$\begin{aligned} \omega'_n &= \omega_n + \Delta\omega_n, \\ \Delta\omega_n &= -\frac{k_n}{\omega_n} \frac{\delta(k_n)}{R}, \end{aligned} \quad (12.14)$$

и, следовательно, к изменению энергии нулевых колебаний:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \sum_{k'} \omega' - \frac{1}{2} \sum_k \omega = -\frac{1}{2R} \sum_k \frac{k}{\omega} \delta(k). \quad (12.15a)$$

В непрерывном пределе эта разность остается конечной и равной

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{k}{\omega} \delta(k). \quad (12.15b)$$

Таким образом, энергетический сдвиг или перенормировочная энергия \mathcal{E}_0 , связанные с источником, отличны от нуля, поскольку источник нарушает согласование собственных частот, вызывая таким образом изменение энергии нулевых колебаний поля. Происхождение величины \mathcal{E}_0 в случае статического источника, описанного в гл. 9, было иное. Поскольку в этой теории отсутствовало рассеяние, члены типа (12.15) не давали вклада в энергию. Эффект последнего типа приводит также к появлению сил, действующих между макроскопическими телами, поскольку возможные электрические частоты зависят от расстояния между ними. Этот любопытный квантовый эффект был проверен экспериментально [5].

Соотношение (12.15) между фазовым сдвигом и изменением энергии в конечном объеме показывает, почему притяжение (отталкивание) дает положительный (отрицательный) фазовый сдвиг. Кроме того, оно дает способ оценить его величину. Грубо можно представлять

себе, что взаимодействие меняет¹⁾ величину ω^2 на λ/V в объеме V , в котором $\rho \neq 0$. Изменение ω^2 для низколежащих состояний ($k \sim 1/R$) равно вероятности обнаружения частицы в этом объеме, умноженной на λ/V . Следовательно,

$$\delta\omega^2 = -\frac{k\delta(k)}{2R} \sim \frac{\lambda}{V} \frac{V}{R^3}$$

и

$$\delta(k) \sim -\frac{\lambda}{kR^2} \sim -\lambda k,$$

что по существу согласуется с (12.8).

12.4. Виртуальные частицы. Завершая нашу дискуссию теории с парным взаимодействием, изучим распределение виртуальных частиц. Имея в виду эту цель, необходимо найти связь между операторами a_k [см. (8.18)], рождающими виртуальные частицы, и операторами A_k , которыми мы пользовались до сих пор. Эта связь легко устанавливается из сопоставления (8.18) и (12.3). Пользуясь нашими матричными обозначениями, мы находим²⁾ (в нашем стандартном представлении $\Omega_{\pm}^* = \Omega_{\mp}$), что в отсутствие связанного состояния

$$a = M_1 A + M_2^* A^\dagger, \quad a^\dagger = M_1^* A^\dagger + M_2 A, \quad (12.17)$$

$$M_1 = \frac{1}{2} (\bar{\omega}^{1/2} \Omega_+ \bar{\omega}^{-1/2} + \bar{\omega}^{-1/2} \Omega_+ \bar{\omega}^{1/2}) (2\pi)^{-3/2},$$

$$M_2 = \frac{1}{2} (\bar{\omega}^{1/2} \Omega_+ \bar{\omega}^{-1/2} - \bar{\omega}^{-1/2} \Omega_+ \bar{\omega}^{1/2}) (2\pi)^{-3/2}. \quad (12.18)$$

Заметим, что оператор уничтожения виртуальной частицы представляет собой смесь операторов уничтожения и рождения реальных частиц. Это типично релятивистский эффект; в нерелятивистском пределе ($k|\omega|k' \rightarrow m\delta(k-k')$, $M_2 = 0$ и оператор числа квантов³⁾ $N^{\text{in}} = N$. Это означает отсутствие виртуальных квантов, окружающих источник. В релятивистской теории, напротив, мы имеем облако виртуальных частиц даже для основного состояния ($N^{\text{in}} = 0$).

Распределение виртуальных частиц легче всего получить, обращаясь для сравнения к одномерному аналогу, который уже помог нам в этом смысле в случае линейной связи. Для нашей настоящей модели таким аналогом является простой гармонический осциллятор, частота которого изменяется от ω^2 до $\omega'^2 = \omega^2 + \delta\omega^2$. Первая из этих

¹⁾ Что это скорее изменение ω^2 , а не ω , можно видеть из соображений размерности.

²⁾ В этом случае a и A снова связаны унитарной матрицей Λ :

$$a = \Lambda A \Lambda^\dagger, \quad \Lambda \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \Lambda = 1.$$

³⁾ Согласованность перестановочных соотношений для a , a^\dagger и A , A^\dagger требует, чтобы при $M_2 = 0$ выполнялось условие $M_1 M_1^\dagger = 1$.

частот соответствует отсутствию источника и операторам a , a^\dagger , тогда как вторая представляет энергию в присутствии источника. Из (2.3) и (2.4) мы находим, что величины, соответствующие (12.18), становятся равными

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^{1/2} + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \right], \\ M_2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^{1/2} - \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Из (12.17) и эрмитово сопряженного равенства получаем

$$\begin{aligned} a |in, 0\rangle &= M^* a^\dagger |in, 0\rangle, \\ M &= M_2 M_1^{-1}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

В одномерном случае $M = -\delta\omega^2/(\omega + \omega')^2$ и представляет собой число, тогда как в теории с парным взаимодействием M — матрица. Чтобы разложить собственные состояния $|in, n\rangle$ гамильтониана, включающего член $\delta\omega^2$, по собственным состояниям $|n\rangle$ гамильтониана без $\delta\omega^2$, мы используем (12.20) и, произведя обычные преобразования, получаем

$$\langle n|0\rangle = \left(0 \left| \frac{a^n}{(n!)^{1/2}} \right| in, 0 \right) = M^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} \left(0 \left| \frac{a^{n-2}}{[(n-2)!]^{1/2}} \right| in, 0 \right). \quad (12.21)$$

По индукции

$$\eta_n = \begin{cases} |(n|in, 0)|^2 = \left(\frac{|M|}{2} \right)^n \frac{n!}{[(n/2)!]^2} |(0|in, 0)|^2 & \text{для четных } n, \\ 0 & \text{для нечетных } n. \end{cases} \quad (12.22)$$

Величина $|(0|in, 0)|^2$ определяется условием $\sum_0^\infty \eta_n = 1$. Аналогичный метод применим и в том случае, когда M — матрица в k -пространстве. Тогда (12.21) и (12.22) показывают, что виртуальные частицы рождаются только в парах¹⁾ и, следовательно, что вероятность обнаружения нечетного числа виртуальных частиц равна нулю. Простейший член имеет вид

$$\eta_{k_1, k_2} = |(k_1, k_2|in, 0)|^2 = \frac{1}{2} |(0|in, 0)|^2 |k_1| |M| |k_2|^2. \quad (12.23)$$

К сожалению, явное вычисление M , т. е. аналитическое обращение M_2 чрезвычайно громоздко, и мы не будем останавливаться на нем²⁾.

¹⁾ По этой причине теория с квадратичной связью, обсуждаемая в этой главе и в гл. 11, называется „теорией с билинейным взаимодействием“ (или просто „парной теорией“).

²⁾ Оно было выполнено Клейном и Мак-Кормиком [6]. Эти же авторы получили замкнутое выражение для случая, когда присутствует более чем одна пара.

Как и следовало ожидать, волновая функция виртуальной пары M убывает экспоненциально с расстоянием в обычном пространстве и концентрируется около ρ на расстоянии m^{-1} .

Чтобы получить выражения, более доступные для толкования, вернемся к вычислению средних значений наблюдаемых величин в основном состоянии. Из (12.17) мы сразу находим, что $\langle \text{in}, 0 | \phi(\mathbf{r}, t) | \text{in}, 0 \rangle = 0$; это также непосредственно вытекает из инвариантности гамильтониана относительно замены $\phi \rightarrow -\phi$. Более поучительными оказываются билинейные комбинации, такие, как среднее число виртуальных частиц

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \langle \text{in}, 0 | \int d^3k a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) | \text{in}, 0 \rangle = \\ &= (2\pi)^3 \langle \text{in}, 0 | A(\mathbf{k})(\mathbf{k} | M_2^T M_2^* | \mathbf{k}') A^\dagger(\mathbf{k}') | \text{in}, 0 \rangle = \\ &= (2\pi)^3 \text{Sp } M_2^\dagger M_2 \end{aligned} \quad (12.24)$$

С помощью (12.18) и (11.22) последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$\bar{n} = \frac{1}{4} \text{Sp} (\bar{\omega} R_+^\dagger \bar{\omega}^{-1} R_+ + \bar{\omega}^{-1} R_+^\dagger \bar{\omega} R_+ - 2R_+^\dagger R_+).$$

Используя явное выражение для R [см. уравнение (11.23)], находим, что

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{\lambda^2}{4} \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2 |\rho(\mathbf{k}')|^2}{|D_+(\mathbf{k})|^2 (k^2 - k'^2)^2} \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 \right) = \\ &= \frac{\lambda^2}{4} \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2 |\rho(\mathbf{k}')|^2}{\omega \omega' (\omega + \omega')^2} |D_+(k^2)|^{-2}. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Таким образом, вероятность обнаружения одной пары (или более) по сути дела равна

$$\left[\frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{\omega^2} \right]^2,$$

что весьма близко к результату в случае линейной связи,

$$\frac{1}{2} \left[g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{\omega^3} \right]^2,$$

за исключением того, что теперь частицы не независимы, а испускаются парами. Амплитуда вероятности обнаружения возбужденного поля равна по порядку величины $\bar{n}^{1/2}$, или

$$\frac{\lambda}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{\omega^2} = \frac{\lambda}{(8\pi^2)} \int_0^\infty \frac{k^2 dk |\rho(k)|^2}{\omega^2}.$$

Из (12.16) видно, что эта амплитуда приближенно равна $\int dk \delta\omega^2/\omega^2$, т. е. точно совпадает с суммой амплитуд вероятностей возбуждения

различных типов нормальных колебаний. Для нашего аналога отдельного осциллятора мы находим

$$\bar{n}^{-1/2} = \frac{(\delta\omega)^2}{\omega^2}, \quad \text{если } \omega' \approx \omega.$$

Но в этом случае энергия виртуальных пар не связана простым образом с \mathcal{E}_0 какой-либо теоремой вириала. Формально, однако, из (12.12) и (11.1) вытекает, что в теории с парным взаимодействием

$$\langle \text{in}, 0 | H_0 | \text{in}, 0 \rangle = - \langle \text{in}, 0 | L' | \text{in}, 0 \rangle,$$

и представляется, что \mathcal{E}_0 обусловлена только изменениями энергии нулевых колебаний.

Вероятность обнаружения виртуальных пар для источника с гауссовским распределением $\rho(r) \sim e^{-r^2/b^2}$ при ширине $b \gg m^{-1}$ равна по порядку величины $(\lambda/b^2 m^2)^2$. Только глубокий потенциал (большая $|\lambda|$) с резкими границами будет давать виртуальные частицы в заметном числе. В случае кулоновского потенциала $e/4\pi r$ лишь крутая его часть в области $r \sim m^{-1}$ играет эффективную роль в порождении пар. Заменяя его приближенно в этой области потенциалом нашего типа ($\lambda \sim em^{-1}$), находим, что вероятность обнаружения виртуальных пар $\sim e^2/4\pi \sim 1\%$. Виртуальные электронно-позитронные пары¹⁾ в кулоновском поле действительно приводят к измеримому эффекту „поляризации вакуума“, поскольку они имеют заряды и изменяют кулоновское поле в области $r < m^{-1}$ ($\sim 10^{-11}$ см) приблизительно на 1%. Современная экспериментальная техника позволяет измерить эти тонкие эффекты с замечательной точностью [7].

Рекомендуемая литература

- Wentzel G., *Helv. Phys. Acta*, 15, 111 (1942); *Progr. Theor. Phys.* (Kyoto), 5, 584 (1950).
 Blatt J. M., *Phys. Rev.*, 72, 461 (1947).
 Morpurgo G., Touschek V. F., *Nuovo Cimento*, 10, 1681 (1955).
 Thirring W., *Helv. Phys. Acta*, 28, 344 (1955).
 Klein A., McCormick V. H., *Phys. Rev.*, 78, 1428 (1955).
 Arnaud E., *Journ. phys. radium*, 17, 107 (1956).

¹⁾ В этом отношении такие пары ведут себя в согласии с вышеизложенным описанием, хотя наши вычисления и не применимы к ним непосредственно.

МОДЕЛЬ ЛИ: СОСТОЯНИЯ С $Q = \pm \frac{1}{2}$

13.1. Введение. Модель Ли состоит из поля, линейно связанного с источником, имеющим одну внутреннюю степень свободы. Эта степень свободы не является классическим параметром типа координаты и имеет всего два собственных значения. В качестве примера такой величины можно привести заряд нуклона (источника), который имеет два собственных значения, отличающих протон (p) и нейтрон (n). Эта степень свободы была описана в гл. 7; она включается в связь, вызывающую элементарный процесс $n \leftrightarrow p + \pi^-$, если называть кванты поля π -мезонами. Вообще говоря, если источник имеет более чем одну степень свободы, задача так усложняется, что ее не удается решить в явном виде. Мы встретимся с такой ситуацией в третьей части книги. Однако в модели Ли предполагается, что π^+ -мезоны отсутствуют, так что отсутствует и процесс $p \leftrightarrow n + \pi^+$. В этом случае сохранение заряда настолько ограничивает различные возможности, что задача становится разрешимой. Несмотря на определенную искусственность, модель Ли отражает важные черты π -мезон-нуклонных систем. Формально задача имеет много общего с теорией с билинейным взаимодействием, рассмотренной в последних двух главах. Мы будем широко использовать эту аналогию, с тем чтобы избежать повторения формальных манипуляций.

Чтобы описать степени свободы источника, следует ввести новые динамические переменные. Мы определим операторы $\tau_3(t)$, $\tau_+(t)$, $\tau_-(t) = \tau_+^\dagger(t)$, определив их действие на голые нуклоны при $t=0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_-(0) |p\rangle &= |n\rangle, & \tau_-(0) |n\rangle &= 0, \\ \tau_+(0) |n\rangle &= |p\rangle, & \tau_+(0) |p\rangle &= 0, \\ \tau_3(0) |p\rangle &= |p\rangle, & \tau_3(0) |n\rangle &= -|n\rangle. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Эти операторы не зависят от времени в отсутствие взаимодействия и при равных массах нуклонов (при этом H_0 не зависит от операторов τ). Отсюда в отсутствие взаимодействия гильбертово пространство есть прямое произведение обычного полевого пространства,

умноженное на двумерное пространство. Если в дальнейшем представлять нуклон в виде (p, n) , то операторы¹⁾ τ оказываются матрицами 2×2 следующего вида:

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13.2)$$

В отсутствие взаимодействия операторы τ начинают зависеть от времени, и (13.2) приобретает смысл представления $\tau(0)$ через состояния голых частиц при $t=0$. Взаимодействие $H'(\tau)$, соответствующее процессам $n \leftrightarrow p + \pi^-$ между состояниями голых частиц, должно иметь вид

$$(\tau_+) \times (\text{Оператор рождения}) + (\tau_-) \times (\text{Оператор уничтожения}).$$

Если мы хотим запретить процесс $p \leftrightarrow n + \pi^+$ для π -мезона, описываемого полем Клейна—Гордона, мы сталкиваемся с той трудностью, что все локальные²⁾ операторы, такие, как $\phi(\mathbf{r}, t)$, содержат одновременно операторы уничтожения и операторы рождения. Поэтому τ_+ должен умножаться не только на оператор рождения π^- , но и на оператор уничтожения π^+ [см. (7.16)] и аналогично на τ_- . Однако шредингеровское поле $\psi(\mathbf{r})$ представляет собой чистый оператор уничтожения, так что нужный гамильтониан $H'(\mathbf{r})$ нетрудно построить. Мы будем исходить из модели, описываемой следующим гамильтонианом³⁾:

$$H = \frac{1 - \tau_3(t)}{2} \mathcal{E}_0 + \int d^3r \left\{ \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi \cdot \frac{1}{2m} + m \psi^\dagger \psi + \right. \\ \left. + g \rho(\mathbf{r}) [\psi(\mathbf{r}, t) \tau_-(t) + \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \tau_+(t)] \right\} \dots \quad (13.3)$$

Член с \mathcal{E}_0 введен, чтобы отразить разность масс p и n ; он равен нулю при действии на голое p -состояние и равен \mathcal{E}_0 для голого нейтрона. Этот член будет использован для перенормировки энергии физического n -состояния.

13.2. Перестановочные соотношения и уравнения движения. Перестановочные соотношения для операторов τ нельзя вывести из

¹⁾ Под τ без индекса будет подразумеваться любой из трех операторов τ_+ , τ_- , τ_3 .

²⁾ В модели Ли [1] обычно вводится нелокальное взаимодействие, поскольку бозоны считаются релятивистскими. Такое взаимодействие выходит за рамки нашего рассмотрения. Однако во многих существенных чертах модель, которую мы будем использовать, аналогична оригинальной.

³⁾ Рассматриваемый гамильтониан отличается от шредингеровского гамильтониана, приведенного в гл. 4, наличием членов с источником, членом \mathcal{E}_0 , а также добавлением члена $m \psi^\dagger \psi$, представляющего энергию покоя квантов поля. Заметим, что g имеет размерность $L^{1/2}$.

канонических, однако их можно найти, рассматривая матричное представление (13.2). Поскольку операторы $\tau(t)$ получаются из $\tau(0)$ с помощью унитарного преобразования (2.18), для них верны такие же, как и для $\tau(0)$, перестановочные соотношения вида

$$\begin{aligned} [\tau_+(t), \tau_-(t)] &= \tau_3(t), \\ \frac{1}{2} [\tau_3(t), \tau_{\pm}(t)] &= \pm \tau_{\pm}(t). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Считается, конечно, что $\psi(t)$ и $\psi^\dagger(t)$ коммутируют с $\tau(t)$ в один момент времени:

$$[\psi(r, t), \tau(t)] = [\psi^\dagger(r, t), \tau(t)] = 0, \quad (13.5)$$

а перестановочные соотношения для операторов ψ и ψ^\dagger имеют обычный вид [см. (4.22)]

$$\begin{aligned} [\psi(r, t), \psi^\dagger(r', t)] &= \delta^3(r - r'), \\ [\psi(r, t), \psi(r', t)] &= [\psi^\dagger(r, t), \psi^\dagger(r', t)] = 0. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Используя эти перестановочные соотношения и равенство $i\dot{G} = [G, H]$ [см. (2.19)], мы выводим уравнения движения

$$-i\dot{\psi}^\dagger(r, t) = \left(m - \frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi^\dagger(r, t) + g\rho(r) \tau_-(t), \quad (13.7a)$$

$$i\dot{\psi}(r, t) = \left(m - \frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi(r, t) + g\rho(r) \tau_+(t). \quad (13.7b)$$

В импульсном пространстве эти уравнения переходят в

$$-i\dot{\psi}^\dagger(k, t) = \omega \psi^\dagger(k, t) + g \frac{\rho^*(k)}{(2\pi)^{3/2}} \tau_-(t), \quad (13.8a)$$

$$-i\dot{\psi}(k, t) = \omega \psi(k, t) + g \frac{\rho(k)}{(2\pi)^{3/2}} \tau_+(t), \quad (13.8b)$$

где

$$\omega = m + \frac{k^2}{2m}, \quad \psi^\dagger(k, t) = \int \psi^\dagger(r, t) e^{ik \cdot r} \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}},$$

$$\psi(k, t) = \int \psi(r, t) e^{-ik \cdot r} \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}}, \quad \rho(k) = \int \rho(r) e^{-ik \cdot r} d^3r.$$

Полученные дифференциальные уравнения можно заменить эквивалентными интегральными уравнениями способом, аналогичным примененному для получения уравнений (8.4) — (8.10). С помощью запаздывающей функции Грина

$$\Delta^{\text{ret}\dagger}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int dK_0 \frac{e^{iK_0 t}}{K_0 - \omega - i\epsilon} = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ ie^{i\omega t} & \text{для } t > 0 \end{cases}$$

и эрмитово сопряженного равенства мы получаем¹⁾

$$\psi^\dagger(\mathbf{k}, t) = \psi^{\dagger \text{in}}(\mathbf{k}, t) + ig \int_{-\infty}^t dt' \tau_-(t') e^{i\omega(t-t')} \frac{\rho^*(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}}, \quad (13.9a)$$

$$\psi(\mathbf{k}, t) = \psi^{\text{in}}(\mathbf{k}, t) - ig \int_{-\infty}^t dt' \tau_+(t') e^{-i\omega(t-t')} \frac{\rho(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (13.9b)$$

Для операторов τ находим, что

$$\begin{aligned} -i\dot{\tau}_-(t) &= \mathcal{E}_0 \tau_-(t) + g \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \tau_3(t) = \\ &= \mathcal{E}_0 \tau_-(t) + g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \rho(\mathbf{k}) \psi^\dagger(\mathbf{k}, t) \tau_3(t), \end{aligned} \quad (13.10a)$$

$$i\dot{\tau}_+(t) = \mathcal{E}_0 \tau_+(t) + g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \rho^*(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}, t) \tau_3(t), \quad (13.10b)$$

а с помощью (13.7a) и (13.7b), что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{\tau}_3(t) &= ig \int d^3r \rho(\mathbf{r}) [\psi(\mathbf{r}, t) \tau_-(t) - \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \tau_+(t)] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Первые два уравнения также можно записать в интегральной форме, но мы отложим это на время. Последнее уравнение выражает закон сохранения заряда, поскольку из него следует, что

$$\dot{Q} = 0, \quad Q = \frac{1}{2} \tau_3 - \int d^3r \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \tau_3 - \int d^3k \psi^\dagger(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}). \quad (13.12)$$

Иначе говоря, сохраняется только полный заряд (т. е. заряд источника вместе с зарядом поля). Заряд одного источника или одного поля в отдельности не сохраняется. Заметим, что оператор Q имеет

¹⁾ Здесь предполагается, что читатель уже знаком с адиабатическим принципом, обосновывающим физическую интерпретацию

$$\psi^{\text{in} \dagger}(\mathbf{k}, t) = \psi^{\text{in} \dagger}(\mathbf{k}, 0) e^{i\omega t}$$

и

$$\psi^{\text{in}}(\mathbf{k}, t) = \psi^{\text{in}}(\mathbf{k}, 0) e^{-i\omega t}.$$

Параметр ω , появляющийся в экспоненте и ω в знаменателе уравнения для $\Delta^{\text{ret}}(\mathbf{k}, t)$ следует интерпретировать как один и тот же символ.

полуцелые собственные значения $\leq 1/2$, соответствующие следующим голым состояниям частиц¹⁾:

Q	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	\dots
Частица	p	n	$n\pi^-$	\dots
		$p\pi^-$	$p\pi^-\pi^-$	\dots

Уравнения движения (13.7) и (13.10) все еще слишком сложны, чтобы их проинтегрировать в замкнутой форме. Однако если ограничиться физическими состояниями частиц (собственными состояниями Q и H), то происходят дальнейшие упрощения, поскольку в рассматриваемой модели эти состояния представляют смесь состояний с n и $n+1$ мезонами.

13.3. Физические нуклоны. Состояние голого протона²⁾ $|p\rangle$ совпадает с состоянием физического протона:

$$\begin{aligned}
 |p\rangle &= |p\rangle = |\text{in}, p\rangle = |\text{out}, p\rangle, \\
 \tau_+(t) |p\rangle &= \psi(\mathbf{r}, t) |p\rangle = 0, \\
 \tau_3(t) |p\rangle &= |p\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{13.13}$$

и оба они являются собственными состояниями H ,

$$H |p\rangle = 0.
 \tag{13.14}$$

Причина этого состоит в том, что не существует другого состояния с тем же собственным значением Q . Если применить уравнение движения к $|p\rangle$, то матрица τ_3 заменяется на 1, и мы получаем два связанных линейных уравнения. В последующем изложении мы в первую очередь будем искать решение этих уравнений через начальные значения операторов. Затем мы убедимся, что это решение удовлетворяет правильным перестановочным соотношениям, если постулировать, что операторы „in“ имеют те же коммутационные свойства, что и операторы без взаимодействия. Для удобства формулировки мы пометим чертой операторы, умноженные справа на оператор проектирования на протонное состояние. Это означает, что уравнения, включающие операторы с чертой, справедливы лишь при применении

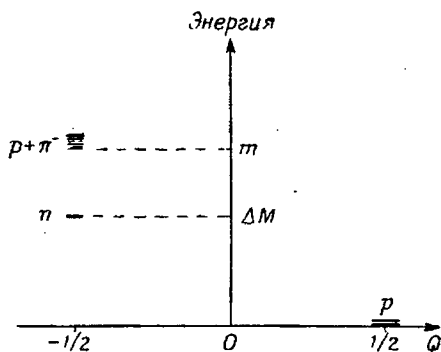
¹⁾ Истинный электрический заряд равен $Q + 1/2$ и имеет целые значения. Величина Q представляет собой третью компоненту изоспина, она будет использоваться в последней части книги. Электрический заряд нуклона равен $1/2(1 + \tau_3)$, а мезона — $\int a^3 r \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$, поскольку мы имеем дело с π^- -мезонами.

²⁾ Такое состояние соответствует в наших прежних обозначениях голому вакуумному состоянию $|0\rangle$. Обозначения $|p\rangle$ и $|n\rangle$ введены, чтобы различать внутренние степени свободы.

к протонному состоянию. В частности, $\bar{\tau}_3(t) = 1$, и мы получаем следующие фурье-преобразования по времени¹⁾ от уравнений (13.9) и (13.10):

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^+(\mathbf{k}, K_0) &= \int \bar{\psi}^+(\mathbf{k}, t) e^{-iK_0 t} dt = \bar{\psi}^{+in}(\mathbf{k}, K_0) - \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\rho^*(\mathbf{k}) \bar{\tau}_-(K_0)}{\omega - K_0 + i\varepsilon}, \\ \bar{\psi}(\mathbf{k}, K_0) &= 0, \\ (K_0 - \mathcal{E}_0) \bar{\tau}_-(K_0) &= g \int \frac{d^3 k \rho(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\psi}^+(\mathbf{k}, K_0).\end{aligned}\tag{13.15}$$

Если исключить $\bar{\tau}_-(K_0)$ из третьего уравнения и подставить его в первое, мы получим уравнение, почти идентичное уравнению (10.7) парной теории. Значения K_0 , для которых уравнение (13.15) имеет решение, будут давать спектр собственных значений H для состояний.



Фиг. 13.1. Спектр собственных значений гамильтониана (13.3) для состояний с $Q = \pm 1/2$.

получающихся применением τ_- и ψ^+ к $|p\rangle$. Поскольку как τ_- , так и ψ^+ рождают состояние с $Q = -1/2$, мы ожидаем, что получится дискретное состояние, соответствующее физическому нейтрону, и непрерывные $p + \pi^-$ состояния, начинающиеся с $K_0 = m$. Обозначая энергию физического нейтрона через ΔM , можно подобрать \mathcal{E}_0 таким образом, чтобы выполнялось условие стабильности нейтрона $\Delta M < m$. Спектр для этого случая изображен на фиг. 13.1. Как и в случае теории с парным взаимодействием, физический нейтрон должен соответствовать решению (13.15) с $K_0 = \Delta M < m$ при $\psi^{+in} = 0$ ²⁾. Отсюда

¹⁾ Как обычно, мы определяем $\bar{\tau}_-(K_0) \equiv \int \bar{\tau}_-(t) e^{-iK_0 t} dt$.

²⁾ Это обстоятельство представляет интерес с той точки зрения, что можно представлять себе физическую частицу как нечто отличающееся от связанного состояния голых частиц. Однако наш пример показывает, что на рассматриваемом уровне нет фундаментальной разницы между «составной частицей» и физической.

мы имеем для величины $K_0 = \Delta M$

$$(\Delta M - \xi_0) \bar{\tau}_-(\Delta M) = g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{\Delta M - \omega} \bar{\tau}_-(\Delta M),$$

или

$$\Delta M = -g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{\omega - \Delta M} + \xi_0 < \xi_0. \quad (13.16)$$

При выключенном источнике энергия нейтрона равна ξ_0 . Поскольку $\omega > m$ и мы предполагаем, что $\Delta M < m$, то уравнение (13.6) показывает, что взаимодействие уменьшает энергию нейтрона, как и в случае статического источника.

13.4. Состояния рассеяния. Решения уравнения (13.15) с $K_0 > m$ можно найти так же, как и в теории с билинейным взаимодействием:

$$\bar{\tau}_-(K_0) \left[K_0 - \xi_0 + g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{\omega - K_0 + i\epsilon} \right] = g \int \frac{d^3 k \rho(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\psi}^{+ \text{in}}(\mathbf{k}, K_0).$$

В силу (13.16) можно исключить из левой части ненаблюдаемую величину ξ_0 , после чего выражение в скобках переписывается как ¹⁾

$$\begin{aligned} K_0 - \Delta M + g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |\rho(\mathbf{k})|^2 \left(-\frac{1}{\omega - \Delta M} + \frac{1}{\omega - K_0 + i\epsilon} \right) = \\ = (K_0 - \Delta M) D_-(K_0) \equiv \\ \equiv (K_0 - \Delta M) \left[1 + g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{(\omega - K_0 + i\epsilon)(\omega - \Delta M)} \right]; \quad (13.17) \end{aligned}$$

$D_-(K_0)$ представляет собой граничное значение аналитической функции комплексной переменной $K_0 = z = x + iy$. Как и в гл. 11, мы находим, что $D(z)$ не имеет нулей при $x < m$. Фактически $D(-\infty + i0) = 1$ и $dD(x)/dx > 1$. Поскольку $\psi^{\text{in}}(\mathbf{k}, K_0)$ отлична от нуля лишь при $K_0 = m + k^2/2m > m$, мы получаем, что (13.15) имеет ненулевое решение для всех $K_0 > m$ и для $K_0 = \Delta M$. Вклад от точки $K_0 = \Delta M$ будет обозначаться через $\bar{\tau}_-^{\text{in}}$; чтобы удовлетворить перестановочным соотношениям, следует умножить его на множитель $Z^{1/2}$, смысл и величину которого мы вскоре определим. Мы можем суммировать изложенные положения в виде уравнения

$$\bar{\tau}_-(K_0) = Z^{1/2} \bar{\tau}_-^{\text{in}} \delta(K_0 - \Delta M) + g \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\rho(\mathbf{k}) \bar{\psi}^{+ \text{in}}(\mathbf{k}, K_0)}{(K_0 - \Delta M - i\epsilon) D_-(K_0)}, \quad (13.18)$$

¹⁾ Добавление величины $i\epsilon$ к разности $\omega - \Delta M$ не играет никакой роли, поскольку ΔM по предположению меньше m . Это следует из того, что $\psi^{+ \text{in}}(\mathbf{k}, t)$ так же зависит от времени, как и свободное поле, $\psi^{+ \text{in}}(\mathbf{k}, K_0) \sim \delta(K_0 - \omega)$.

где — $i\epsilon$ в знаменателе соответствует интегрированию (13.10а) с запаздывающей функцией Грина¹⁾. Решение для $\bar{\psi}^+$ можно получить так же, как и в гл. 11, с помощью функции Грина, вводя четырехмерную фурье-компоненту $\bar{\psi}^+(\mathbf{k}, K_0)$. Мы не будем повторять здесь эту процедуру, а приведем лишь результат²⁾

$$\bar{\psi}^+(\mathbf{k}, t) = \frac{U_b(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \bar{\tau}_-^{\text{in}}(t) + (\mathbf{k} | \Omega_- | \mathbf{k}') \bar{\psi}^{+\text{in}}(\mathbf{k}', t), \quad (13.19a)$$

$$U_b(\mathbf{k}) = Z^{1/2} g \frac{\rho^*(\mathbf{k})}{\Delta M - w}, \quad (13.19б)$$

$$(\mathbf{k} | \Omega_- | \mathbf{k}') = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (2\pi)^3 + g^2 \frac{\rho^*(\mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}') D_-^{-1}(w')}{(w' - w - i\epsilon)(w' - \Delta M)} =$$

$$= (\mathbf{k} | \Omega_+^* | \mathbf{k}'). \quad (13.19в)$$

Видно, что $\bar{\tau}_-^{\text{in}}$ играет ту же роль, что и оператор связанного состояния A_b в теории с билинейным взаимодействием, однако величина U_b , как мы скоро увидим, не нормирована на 1. Аналогичным образом фурье-преобразование от (13.18) имеет вид

$$\bar{\tau}_-(t) = Z^{1/2} \bar{\tau}_-^{\text{in}}(t) + g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\rho(\mathbf{k}) D_-^{-1}(w)}{w - \Delta M} \bar{\psi}^{+\text{in}}(\mathbf{k}, t) \quad (13.20)$$

при учете того, что

$$\psi^{+\text{in}}(\mathbf{k}, K_0) \sim \delta(w - K_0).$$

13.5. Полнота. Покажем теперь явным образом, что перестановочные соотношения (13.4) — (13.6) выполняются в подпространстве $Q = 1/2$, если предположить, что τ^{in} и ψ^{in} удовлетворяют перестановочным соотношениям для операторов в отсутствие взаимодействия, и если $Z = D^{-1}(\Delta M)$, как это показано ниже. Аналогично уравнениям (12.3) — (12.5) мы получаем³⁾

$$\langle p | [\tau_+(0), \tau_-(0)] | p \rangle = \langle p | \left[Z^{1/2} \tau_+^{\text{in}} + g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\rho^*(\mathbf{k}) \psi^{\text{in}}(\mathbf{k})}{(w - \Delta M) D_+(w)} \right] \times$$

$$\times \left[g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\psi^{+\text{in}}(\mathbf{k}) \rho(\mathbf{k})}{(w - \Delta M) D_-(w)} + \tau_-^{\text{in}} Z^{1/2} \right] | p \rangle =$$

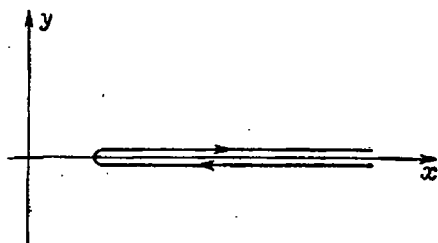
$$= Z + \sum_{\mathbf{k}} g^2 \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{(w - \Delta M)^2 |D_-(w)|^2} = Z - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z - \Delta M) D(z)}. \quad (13.21)$$

¹⁾ Следует отметить, что однородное уравнение для нашего (точного) решения имеет вид $i\bar{\tau}_- = -\Delta M \tau_-$, а не $i\bar{\tau}_- = -\mathcal{E}_0 \tau_-$.

²⁾ Здесь подразумевается матричное умножение, определенное в гл. 11.

³⁾ Интересно отметить, что $\tau_-^{\text{in}}(t)$ не коммутирует с $\psi(\mathbf{r}, t)$. Физически это объясняется тем, что τ_-^{in} порождает физический нейтрон, а последний представляет собой протяженную структуру, которая интерферирует с мезонным облаком даже вне источника. Ситуация противоположна случаю голых частиц, точечный характер которых выражается каноническими перестановочными соотношениями.

Здесь C — контур, аналогичный части контура на фиг. 11.2; он изображен на фиг. 13.2; $D^{-1}(z)$ — функция везде аналитическая, за исключением разреза вдоль вещественной оси от m до ∞ . Для $|z| \rightarrow \infty$



Фиг. 13.2. Контур интегрирования C для уравнения (13.21).

она стремится, однако, к 1, так что интеграл по бесконечному кругу дает вклад, равный

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z} = 1.$$

Отсюда, замыкая контур бесконечной окружностью и обозначая интеграл по замкнутому контуру символом \oint , получаем

$$(13.21) = Z - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{(z - \Delta M) D(z)} + 1 = Z - \frac{1}{D(\Delta M)} + 1 = \langle p | \tau_3 | p \rangle = 1, \quad (13.22)$$

что означает равенство

$$Z = \frac{1}{D(\Delta M)} = \frac{1}{1 + g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{(\omega - \Delta M)^2}}. \quad (13.23)$$

Аналогичные соображения показывают, что

$$U_b(\mathbf{k}) U_b^*(\mathbf{k}') + (\mathbf{k} | \Omega_- | \mathbf{q})(\mathbf{q} | \Omega_-^\dagger | \mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (13.24)$$

Эта формула уже знакома нам из теории с билинейным взаимодействием. Таким образом, равенство

$$\langle p | [\psi(\mathbf{k}), \psi^\dagger(\mathbf{k}')] | p \rangle = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (13.25)$$

удовлетворяется. Также можно проверить и равенство¹⁾

$$\begin{aligned} \langle p | [\tau_+, \psi^\dagger(\mathbf{k})] | p \rangle &= \\ &= g \frac{\rho^*(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{D_+^{-1}(\omega)}{\omega - \Delta M} + \frac{D^{-1}(\Delta M)}{\omega - \Delta M} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz D^{-1}(z)}{(z - \Delta M)(z - \omega)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (13.26)$$

¹⁾ Доказательство перестановочных соотношений в других частях гильбертова пространства не тривиально, но мы не будем им заниматься.

Установив перестановочные соотношения и найдя решения в выбранном секторе гильбертова пространства, мы обратимся теперь к обсуждению физического смысла использованных величин. Состояние физического нейтрона возникает при действии τ_-^{in} на протонное состояние:

$$|in, n\rangle = \tau_-^{\text{in}} |p\rangle, \quad \langle in, n| = \langle p| \tau_+^{\text{in}}.$$

Поскольку τ_-^{in} имеет временную зависимость $\sim e^{it\Delta M}$, то, следовательно, состояние $|in, n\rangle$ является собственным состоянием H с собственным значением ΔM , как мы и нашли ранее. Множитель Z равен вероятности обнаружения голого нейтрона в состоянии физического нейтрона:

$$\langle n|in, n\rangle = \langle p| \left[Z^{1/2} \tau_+^{\text{in}} + g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\rho(k) \psi^{\text{in}}(k)}{(\omega - \Delta M) D_+(\omega)} \right] \tau_-^{\text{in}} |p\rangle = Z^{1/2} \quad (13.27)$$

а $U_b(k)$ — волновая функция виртуального π -мезона при распаде нейтрона на $p + \pi^-$:

$$\begin{aligned} (p + \pi_k^- | in, n) &= (p | \psi(k) | in, n) = \\ &= \langle p | \left[\frac{U_b(k) \tau_+^{\text{in}}}{(2\pi)^{3/2}} + (k | \Omega_+ | k') \psi^{\text{in}}(k') \right] \tau_-^{\text{in}} | p \rangle = \frac{U_b(k)}{(2\pi)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (13.28)$$

С помощью простых вычислений можно убедиться, что последняя функция имеет следующие свойства: $U_b(k)$ нормирована, как этого и следовало ожидать, на вероятность диссоциации нейтрона²⁾:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |U_b(k)|^2 = 1 - Z. \quad (13.29)$$

Форма записи U_b в виде (13.196) показывает, что виртуальные π -мезоны остаются вблизи источника на расстоянии $(m - \Delta M)^{-1}$. Далее, к виртуальным π -мезонам применима теорема вирнала в той же форме, что в случае статического источника. Если, например, $\Delta M = 0$, то мы получаем соотношение между H^{int} — частью гамильтониана (13.3),

пропорциональной g , и $H^m = \int d^3r \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi / 2m$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle in, n | H | in, n \rangle = \langle in, n | H^m | in, n \rangle + \\ &+ \langle in, n | H^{\text{int}} | in, n \rangle + \langle in, n | \frac{1 - \tau_3}{2} | in, n \rangle \mathcal{E}_0 \end{aligned} \quad (13.30)$$

¹⁾ Это можно также непосредственно проверить с помощью (13.3) при анализе $|in, n\rangle$ в терминах состояний голых частиц, к обсуждению которых мы сейчас переходим.

²⁾ Как можно заметить, здесь требуется, чтобы $0 \leq Z \leq 1$.

и

$$\begin{aligned} \langle \text{in}, n | H^m | \text{in}, n \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} |U_b(\mathbf{k})|^2 \omega = Zg^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\rho(\mathbf{k})|^2}{\omega} = \\ &= \langle \text{in}, n | \mathcal{E}_0 \frac{1-\tau_3}{2} | \text{in}, n \rangle; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\langle \text{in}, n | H^{\text{int}} | \text{in}, n \rangle = -2 \langle \text{in}, n | H^m | \text{in}, n \rangle.$$

Тот факт, что перестановочные соотношения для операторов ψ , ψ^\dagger и τ удовлетворяются, показывает, что найденные нами состояния с $Q = -1/2$ образуют полный набор. Таким образом, имеется, в частности, только одно дискретное состояние системы p , π^- , именно

$$| \text{in}, n \rangle = Z^{1/2} | n \rangle + \int \frac{d^3k U_b(\mathbf{k}) \psi^\dagger(\mathbf{k}) | p \rangle}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (13.30a)$$

Формальная причина этого заключается в том, что, как было видно ранее, величина $(K_0 - \Delta M) D_\pm(K_0)$ имеет только один нуль $K_0 = \Delta M$. С увеличением ΔM радиус $U_b(\mathbf{r})$ растет и достигает бесконечности при $\Delta M = m$. В этот момент нейтрон становится неустойчивым¹⁾ по отношению к распаду на протон и π -мезон, и исходное дискретное состояние для $Q = -1/2$ исчезает. В этом случае перестановочные соотношения выполняются при $\tau_-^{\text{in}} = 0$ и физический нейтрон превращается просто в резонанс в π -мезон-протонном рассеянии; волновая функция рассеяния π -мезона $| \text{in}, p + \pi^- \rangle$ сингулярна в \mathbf{k} -пространстве; это означает, что существуют π -мезоны на бесконечном расстоянии от нуклона.

13.6. Фазовый сдвиг. В заключение этой главы рассмотрим рассеяние в системе $p + \pi^-$. Для этого необходимо связать $\psi^{\dagger \text{in}}$ и $\psi^{\dagger \text{out}}$. Предыдущие рассуждения можно было бы повторить и исходя из $\psi^{\dagger \text{out}}$ и τ_-^{out} , которое совпадает с τ_-^{in} :

$$\begin{aligned} \tau_-^{\text{out}}(t) &= e^{i\Delta M t} \tau_-^{\text{out}}(0) = \tau_-^{\text{in}}(t), \\ | \text{in}, n \rangle &= | \text{out}, n \rangle \equiv | n \rangle. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Следовательно,

$$\langle \mathbf{k} | \Omega_- | \mathbf{k}' \rangle \bar{\psi}^{\dagger \text{in}}(\mathbf{k}') = \langle \mathbf{k} | \Omega_+ | \mathbf{k}' \rangle \bar{\psi}^{\dagger \text{out}}(\mathbf{k}'). \quad (13.32)$$

Как и в теории с парным взаимодействием, для сферического источника лишь части $\bar{\psi}^{\dagger \text{out}}$ и $\bar{\psi}^{\dagger \text{in}}$, соответствующие угловому моменту, равному нулю $l=0$, отличаются на фазовый сдвиг $e^{-2i\delta}$,

$$\bar{\psi}^{\dagger \text{out}} = e^{-2i\delta} \bar{\psi}^{\dagger \text{in}},$$

¹⁾ Для $\Delta M > m$ наша модель давала бы после необходимого переименования частиц теоретико-полевое описание α -распада.

и по аналогии с (11.31) — (11.38) мы находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta(k) &= -\frac{D(w)}{D_1(w)} = \\ &= \frac{-g^2 k m |\rho(k)|^2}{2\pi(w - \Delta M) \left[1 + g^2 P \int \frac{d^3 k' |\rho(k')|^2}{(2\pi)^3 (w' - \Delta M)(w' - w)} \right]}, \end{aligned} \quad (13.33)$$

где

$$\begin{aligned} D_+(w) &= D_1(w) + iD(w) = \left[1 + g^2 P \sum_{k'} \frac{|\rho(k')|^2}{(w' - w)(w' - \Delta M)} \right] + \\ &+ i \left[\frac{g^2 m}{2\pi} \frac{k |\rho(k)|^2}{(w - \Delta M)} \right]. \end{aligned}$$

Для $\Delta M < m$ и для $k \rightarrow 0$, мы имеем $\delta(k) < 0$, как и в парной теории при наличии связанного состояния¹⁾. Если этот резонанс переходит от отрицательных энергий к положительным, $\Delta M > m$, величина $\lim_{k \rightarrow 0} \delta(k)/k$ становится положительной, подобно случаю слабого потенциала притяжения. В этом случае нейтрон становится неустойчивым, а время жизни²⁾ его равно Γ^{-1} . Время жизни определяется формулой (12.9а) и мы находим, что

$$\Gamma = \frac{g^2 k_r m |\rho(k_r)|^2}{2\pi \left[1 + g^2 P \int \frac{d^3 k' |\rho(k')|^2}{(2\pi)^3 (w' - \Delta M)^2} \right]}, \quad (13.34а)$$

причем

$$\frac{k_r^2}{2m} + m = \Delta M = w_r. \quad (13.34б)$$

Как и следовало ожидать по аналогии с парной теорией, перенормированную константу связи можно определить так, чтобы при $w = \Delta M$ фазовый сдвиг задавался борновским приближением с перенормированной константой связи. Тогда

$$g_r^2 = g^2 \frac{1}{1 + g^2 P \int \frac{d^3 k |\rho(k)|^2}{(2\pi)^3 (w - \Delta M)^2}} = Zg^2, \quad (13.35)$$

¹⁾ Это свойство всегда характеризует связанные состояния. См., например, книгу Блатта и Вайскопфа [2].

²⁾ При определенных условиях величина

$$(n(t) | n(0)) = (p | \tau_+(t) \tau_-(0) | p)$$

ведет себя как $\sim e^{-\Gamma t/2}$ [3]. Если $|\rho(k)|^2$ может быть продолжена в комплексную плоскость, так что D также может быть продолжена под разрез, то мы находим полюс на втором римановом листе при комплексном значении энергии $\Delta M + i\Gamma$, соответствующем неустойчивому нейтронному состоянию.

где

$$g_r = Z^{1/2} g,$$

причем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta(k) &= \\ &= \frac{-g_r^2 k m |\rho(k)|^2}{2\pi(\omega - \Delta M) \left[1 + \frac{g_r^2(\omega - \Delta M)}{(2\pi)^3} P \int \frac{|\rho(k')|^2 d^3 k'}{(\omega' - \Delta M)^2 (\omega' - \omega)} \right]}. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Последнее выражение имеет те же свойства, что и аналогичное уравнение в парной теории. В нашем варианте теории трудности с расходимостями отсутствуют даже в случае точечного источника, поскольку при высоких энергиях величина ω пропорциональна k^2 . Конечно, нерелятивистское выражение для энергии не имеет смысла при очень высоких энергиях. При релятивистском рассмотрении мезонов (согласно уравнению Клейна — Гордона) (13.35) заменяется на¹⁾

$$g_r^2 = Z g^2 = g^2 \frac{1}{1 + g^2 P \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(k)|^2}{(\omega - \Delta M)^2 2\omega}}. \quad (13.37)$$

Интеграл в знаменателе расходится в этом случае при больших импульсах для точечного источника, так что сечение рассеяния обращается в нуль при малых k . Использование перенормированной константы связи приводит к появлению лишней степени ω' [или ω , если используется (13.37)] в интеграле (13.36), так что даже для точечного источника сечение остается конечным в пределе малых импульсов. В этом случае, однако, возникают трудности, которые могут также появиться и в нашем нерелятивистском варианте. Именно, из (13.35) мы находим, что

$$g^2 = \frac{g_r^2}{1 - g_r^2 P \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(k)|^2}{(\omega - \Delta M)^2}};$$

следовательно, для достаточно малого (в обычном пространстве) источника и конечного (возможно — большого) значения g_r величина g^2 становится отрицательной, а g — мнимой (в релятивистской теории в пределе точечного источника $g \rightarrow -i0$). Это эквивалентно неэрмитовости гамильтониана (13.3). Далее, величина Z , выраженная через g_r , также оказывается отрицательной, что означает отрицательную вероятность обнаружения голого нейтрона в состоянии физического

¹⁾ См., например, работу Ли [1]. Множитель (2ω) , естественно, возникает при использовании уравнения Клейна — Гордона, как мы это видели и раньше.

нейтрона. Для формулировки такой теории [4] требуется введение индефинитной метрики в гильбертовом пространстве, что выходит за рамки нашего обсуждения. В теории с обрезанием трудности не возникают до тех пор, пока размеры источника ограничивают значения $Z(g_r)$ в пределах $0 \leq Z \leq 1$.

Формально мы находим из (13.33), что предел сечения при высоких энергиях задается борновским приближением с константой связи g . Физическая причина этого, так же как и низкоэнергетическое поведение, подробно рассматриваются в следующей главе.

МОДЕЛЬ ЛИ: СОСТОЯНИЯ С $Q = -\frac{3}{2}$

14.1. Рассеяние. Уравнение Лоу. Для состояний, не рассмотренных в предыдущей главе, задача также может быть сведена к интегральным уравнениям для волновых функций виртуальных π -мезонов. Такие уравнения невозможно, однако, решить, в общем виде, и поэтому мы не будем выводить их. С экспериментальной точки зрения волновая функция виртуальных π -мезонов не представляет особого интереса, так как большая часть информации, которую она может дать, недоступна для проверки при современной технике эксперимента. Легче всего может быть измерено сечение рассеяния, и поэтому следует сосредоточить усилия на вычислении фазового сдвига как функции от энергии. Мы рассмотрим сейчас очень важный метод получения общих свойств фазовых сдвигов, минуя вычисление полной волновой функции мезонов.

Для простоты мы ограничимся в этой главе случаем $\Delta M = 0$ и будем обозначать физическое нуклонное состояние (протона или нейтрона) через $|N\rangle$. Оба физических нуклона имеют тогда одинаковую энергию (массу) $E = 0$; интересующая нас величина оказывается матричным элементом S -матрицы (8.23):

$$\langle \text{out}, N + \pi_{\mathbf{k}}, | \text{in}, N + \pi_{\mathbf{k}} \rangle = \langle N | \psi^{\text{out}}(\mathbf{k}') \psi^{\dagger \text{in}}(\mathbf{k}) | N \rangle. \quad (14.1)$$

Уравнение (13.9) и аналогичные уравнения для

$$\begin{aligned} \psi^{\dagger \text{in}}(\mathbf{k}, t) &= \psi^{\dagger \text{out}}(\mathbf{k}, t) - \frac{ig}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t-t')} \rho^*(\mathbf{k}) \tau_{-}(t') = \\ &= \psi^{\dagger \text{out}}(\mathbf{k}, t) - \frac{ig}{(2\pi)^{1/2}} \rho^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t} \tau_{-}(\omega) \end{aligned} \quad (14.2)$$

показывают нам, что состояние с падающей плоской волной $\psi^{\dagger \text{in}}(\mathbf{k})|N\rangle$ представляет собой уходящую плоскую волну с тем же импульсом $\psi^{\dagger \text{out}}(\mathbf{k})|N\rangle$ плюс нечто, связанное с $\tau_{-}(\omega)$. Очевидно, что это должна быть искомая рассеянная волна.

Если состояние $|N\rangle$ относится к протону, мы можем использовать (13.18) (или аналогичное равенство для операторов „out“), чтобы вывести явное выражение для $\tau_-(\omega)|N\rangle$. Поскольку $\bar{\tau}_-^{\text{in}}(K_0)$ пропорционально $\delta(K_0)$ и поскольку

$$\psi^{\dagger \text{out}}(\mathbf{k}, K_0) = 2\pi\psi^{\dagger \text{out}}(\mathbf{k})\delta(K_0 - \omega),$$

мы получаем

$$\begin{aligned} -\frac{ig}{(2\pi)^{3/2}}\rho^*(\mathbf{k})\bar{\tau}_-(\omega) &= -\frac{ig^2}{\pi}\frac{|\rho(\mathbf{k})|^2 km}{D_+(\omega)\omega}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\times \\ &\times\int_0^\infty dk'\delta(k-k')\bar{\psi}^{\dagger \text{out}}(k') = \mathcal{A}\psi^{\dagger \text{out}}(k), \end{aligned} \quad (14.3)$$

откуда видно, что сферическому источнику соответствует сферически симметричная рассеянная волна. Сравнивая (14.2) и (14.3) с (8.24), можно видеть, что \mathcal{A} есть $\{\exp[2i\delta(k)] - 1\}$; это согласуется также с (13.33).

Вообще можно получить матричный элемент S -матрицы из (14.2), используя известную зависимость от времени матричных элементов между собственными состояниями гамильтониана. Так ¹⁾,

$$\begin{aligned} \langle \text{out}, N + \pi_{\mathbf{k}'} | \text{in}, N + \pi_{\mathbf{k}} \rangle &= \\ &= \langle N | \psi^{\text{out}}(\mathbf{k}') \left[\psi^{\dagger \text{out}}(\mathbf{k}) - \frac{ig\rho^*(k)}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \tau_-(t) \right] | N \rangle = \\ &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \langle \text{out}, N + \pi_{\mathbf{k}'} | -\frac{ig\rho^*(k)}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iHt} \tau_-(0) e^{-iHt} e^{-i\omega t} | N \rangle = \\ &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - 2\pi i \delta(\omega - \omega') g \frac{\rho^*(k)}{(2\pi)^{3/2}} \langle \text{out}, N + \pi_{\mathbf{k}'} | \tau_-(0) | N \rangle \equiv \\ &\equiv \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - 2\pi i \delta(\omega - \omega') T(\mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (14.4)$$

При выводе (14.4) мы использовали тот факт, что

$$\langle \text{out}, N + \pi_{\mathbf{k}'} | e^{iHt} = \langle \text{out}, N + \pi_{\mathbf{k}'} | e^{i\omega' t},$$

поскольку энергия обоих физических состояний была подобрана равной нулю. Вообще говоря, T -матрица есть функция обеих переменных \mathbf{k}' и \mathbf{k} , однако вследствие сферической симметрии задачи и сохранения энергии здесь эта матрица зависит от единственной переменной \mathbf{k}' .

¹⁾ Следует помнить, что $\rho(\mathbf{r})$ — сферически симметричный источник, так что $\rho(\mathbf{k}) = \rho(k)$.

Соотношение между T -матрицей и фазовым сдвигом можно найти из (14.3) или непосредственно из (8.30); оно имеет вид¹⁾

$$T(k) = -\frac{e^{i\delta(k)} \sin \delta(k)}{\pi m k} \frac{1}{4\pi}. \quad (14.4a)$$

T -матрица, определенная равенством (14.4), не зависит, конечно, от времени. Для последующего обсуждения она более удобна, чем S -матрица, поскольку присущая последней сингулярная часть в T -матрице выделена. Таким образом, T -матрица окажется аналитической функцией энергии.

Из (14.4) следует, что амплитуду рассеяния $T(k)$ можно получить из анализа $\tau_- |N\rangle$ по „out“-состояниям с энергией ω . Используя тот факт, что $\psi(k)$ коммутирует с τ_- и что $\psi^{\text{out}} |N\rangle = 0$, мы можем переписать последнее выражение в следующей форме²⁾

$$\begin{aligned} T(k) &= \frac{g\rho^*(k)}{(2\pi)^{3/2}} \langle \text{out}, N + \pi k | \tau_- | N \rangle = \\ &= \frac{g\rho^*(k)}{(2\pi)^{3/2}} \langle N | \left[\psi(k) - \frac{ig\rho(k)}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty dt \tau_+(t) e^{i(\omega + i\epsilon)t} \right] \tau_- | N \rangle = \\ &= \frac{ig^2 |\rho(k)|^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dt e^{i(\omega + i\epsilon)t} \langle N | [\tau_-(0), \tau_+(t)] | N \rangle. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Уравнение (14.5) называют обычно уравнением Лоу [2] по имени его автора.

14.2. $\pi^- + n$ -рассеяние. В качестве первого применения уравнения Лоу мы найдем некоторые общие свойства амплитуды $\pi^- + n$ -рассеяния. Коммутатор в (14.5) содержит перед $|n\rangle$ один член с $\tau_+(t)$ и другой с $\tau_-(0)$. Первый из них рождает состояние с³⁾ $Q = 1/2$; по существу мы видим из уравнения

$$|in, n\rangle = Z^{1/2} |n\rangle + \frac{U_b(k) \psi^\dagger(k)}{(2\pi)^{3/2}} |p\rangle,$$

¹⁾ См. также статью Липмана и Швингера [1]. При нашей нормировке

$$S = \int d^3k, \text{ а } g(E) = 1/\pi m k.$$

²⁾ Появившийся в (14.5) коммутатор подчеркивает тот факт, что рассеяние возможно лишь когда источник зависит от динамических переменных. Для источника в виде c -числа правая часть (14.5) равна нулю в согласии с нашим прежним результатом. Величина $i\epsilon$ представляет собой обычную добавку, обеспечивающую сходимость функции Грина и определяющую положение полюса в импульсном пространстве.

³⁾ Из равенства $[Q, \tau_\pm(t)] = \pm \tau_\pm(t)$ мы заключаем, что операторы τ_+ и τ_- меняют собственные значения Q на единицу.

что¹⁾

$$\tau_+(t) |in, n\rangle = Z^{1/2} |p\rangle. \quad (14.6)$$

Следовательно, соответствующий член в правой части (14.5) становится равным²⁾

$$\frac{ig^2 |p(k)|^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dt e^{i(\omega+is)t} \langle n | \tau_-(0) Z^{1/2} | p \rangle = -\frac{g_t^2 |p(k)|^2}{\omega (2\pi)^3}, \quad (14.7a)$$

где

$$g_r = \langle p | g\tau_+ | n \rangle = \langle n | g\tau_-(0) | p \rangle = Z^{1/2} g. \quad (14.7b)$$

Оставшийся член из (14.5) рождает состояния с $Q = -3/2$, т. е. состояния с одним уходящим π -мезоном и нейтроном или с двумя уходящими π -мезонами и протоном. Здесь мы должны предположить, что взаимодействие не меняет формы энергетического спектра и не существует дискретных состояний с $Q = 3/2$. При этих предположениях указанные состояния имеют энергию $> m$. Если обозначить физические состояния с $Q = -3/2$ символом $|out, l\rangle$, то можно переписать оставшуюся часть коммутатора в виде

$$\begin{aligned} \langle n | \tau_+(t) \tau_-(0) | n \rangle &= \sum_i \langle n | e^{iHt} \tau_+(0) e^{-iHt} | out, l \rangle \langle out, l | \tau_-(0) | n \rangle = \\ &= \sum_i e^{-iE_i t} |\langle out, l | \tau_-(0) | n \rangle|^2, \end{aligned} \quad (14.8)$$

где E_i — энергия состояния $|out, l\rangle$. Это дает вместе с (14.7)

$$T(k) = \frac{g_r^2 |p(k)|^2}{(2\pi)^3 \omega} \frac{|p(k)|^2}{(2\pi)^3} \sum_i \frac{|\langle out, l | \tau_- g | n \rangle|^2}{E_i - \omega - i\epsilon}. \quad (14.9)$$

Первое замечание относится к знаку величины $\lim_{k \rightarrow 0} \delta(k)/k$. Из (14.9) и (14.4a) следует, что она больше нуля, как для случая притяжения в отсутствие связанного состояния. Причину, по которой взаимодействие π^- -мезона с нейтроном оказывается притяжением, можно проследить; она оказывается следующей: одиночный нейтрон испускает π -мезон, а образовавшийся при этом протон снова поглощает его. Мы видели, что такие процессы понижают энергию на величину \mathcal{E}_0 . Если имеется другой π^- -мезон, эмиссионная и абсорбционная способности нуклона возрастают. Мы уже видели, что источник испускает бозоны более интенсивно, когда в его окрестности присутствуют идентичные бозоны, вследствие хорошо извест-

¹⁾ Поскольку $|in, n\rangle = |out, n\rangle$, мы будем писать просто $|n\rangle$, не вводя добавочного индекса.

²⁾ Величина $i\epsilon$ в знаменателе (14.7a) может быть опущена, поскольку полюс при $\omega = 0$ лежит в нефизической области.

ного эйнштейновского принципа индуцированной эмиссии¹⁾. Этот процесс понижает энергию таким образом, что выигрыш от энергии взаимодействия превосходит потерю ее на собственную массу π -мезона. Таким образом, взаимодействие уменьшает энергию $n + \pi^-$ по сравнению с энергией $n + \pi^-$ в отсутствие взаимодействия, имитируя силу притяжения. В том, что такая ситуация приводит к притяжению, тогда как фазовый сдвиг для системы $p + \pi^-$ оказывается отрицательным, заключается одна из трудностей в современном толковании физики π -мезонов низких энергий.

Сделанные до сих пор утверждения носили точный характер. Однако решение уравнения (14.9) невозможно получить в замкнутом виде. Мы получим его в том приближении, когда в сумме по состояниям с $Q = -3/2$ пренебрегают вкладом от состояний $|\text{out}, p + 2\pi^- \rangle$. Если эти виртуальные процессы с испусканием второго π -мезона не учитываются²⁾, то из всей суммы в (14.9) остается лишь член, пропорциональный величине $\langle \text{out}, n + \pi^- | \tau_- | n \rangle$, которую можно выразить через T . Получаем³⁾

$$T(k) = -\frac{g_r^2 |\rho(k)|^2}{w(2\pi)^3} - |\rho(k)|^2 \int d^3k' \frac{|T(k')|^2 |\rho(k')|^2}{w' - w - i\varepsilon}. \quad (14.10)$$

1) Сходным образом, можно интерпретировать возникновение потенциала Юкавы как следствие испускания мезонов одним из нуклонов под действием мезонного поля другого. Индуцированная вероятность испускания формально возрастает из-за того, что

$$|(n+1|\phi|n)|^2 \sim (n+1).$$

2) Это приближение будет применяться также и в физике π -мезонов. Вообще говоря, это слишком грубое приближение, в особенности в области высоких энергий. Действительно, сравнивая точное высокоэнергетическое решение (14.17) с одним из приближенных решений уравнения (14.14), мы видим, что они могут быть совершенно различными при $Z \ll 1$. Однако решение может быть в определенной степени справедливым при малых энергиях, где оно приближается к правильному пределу.

3) С помощью того же приема мы получаем для $p + \pi^-$ -рассеяния точное уравнение

$$T(k) = \frac{g_r^2 |\rho(k)|^2}{w(2\pi)^3} - |\rho(k)|^2 \int d^3k' \frac{|T(k')|^2}{|\rho(k')|^2 (w' - w - i\varepsilon)}.$$

Его точное решение было получено в предыдущей главе:

$$T(k) = \frac{g_r^2 |\rho(k)|^2}{8\pi^3 w D_+(w)} = \frac{g_r^2 |\rho(k)|^2}{8\pi^3 w \left[1 + g_r^2 w \int \frac{d^3k'}{8\pi^3 w'^2 (w' - w - i\varepsilon)} |\rho(k')|^2 \right]}. \quad (14.5a)$$

Вследствие нашей нормировки одимезонных состояний

$$\langle \text{in}, k | \text{in}, k' \rangle = \langle N | \psi^\dagger \text{in}(k) \psi \text{in}(k') | N \rangle = \delta^3(k - k'),$$

а сумма \sum_i в (14.9) превращается в непрерывном пределе в $\int d^3k$.

Хотя (14.10) и относится к нелинейным интегральным уравнениям, его можно решить точно. С этой целью покажем, что $T(k)/|\rho(k)|^2$ есть граничное значение функции, аналитической в плоскости w . Действительно, (14.10) показывает, что функция \mathfrak{F} комплексной переменной z , подчиняющаяся уравнению

$$\frac{1}{\mathfrak{F}(z)} = \frac{g_r^2}{z} + \int_m^\infty \frac{dw' |\rho(k')|^2 k' m}{2\pi^2 |\mathfrak{F}(w' + i\epsilon)|^2 (w' - z)}, \quad (14.11)$$

связана с T соотношением

$$T(k) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\rho(k)|^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mathfrak{F}(w + i\epsilon)}. \quad (14.12)$$

Из (14.11) видно, что $1/\mathfrak{F}(z)$ аналитична везде в комплексной плоскости, за исключением полюса в начале координат и разреза вдоль вещественной оси от m до ∞ . На этом разрезе мнимая часть функции \mathfrak{F} имеет разрыв:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\mathfrak{F}(w + i\epsilon)} - \frac{1}{\mathfrak{F}(w - i\epsilon)} \right] &= \\ &= \int_m^\infty \frac{dw'}{2\pi^2} \frac{|\rho(k')|^2 k' m}{|\mathfrak{F}(w' + i\epsilon)|^2} \left(\frac{1}{w' - w - i\epsilon} - \frac{1}{w' - w + i\epsilon} \right) = \\ &= \frac{i |\rho(k)|^2 m k}{\pi |\mathfrak{F}(w + i\epsilon)|^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{F}(w - i\epsilon) = \mathfrak{F}^*(w + i\epsilon)$, скачок \mathfrak{F} непосредственно связан с ρ :

$$-i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\mathfrak{F}(w + i\epsilon) - \mathfrak{F}(w - i\epsilon) \right] = - \frac{|\rho(k)|^2 m k}{\pi} = 2 \operatorname{Im} \mathfrak{F}(w + i\epsilon).$$

Функция с перечисленными аналитическими свойствами имеет вид

$$\mathfrak{F}(w) = \frac{w}{g_r^2} \left[1 - w g_r^2 \int_m^\infty \frac{dw' |\rho(k')|^2 k' m}{2\pi^2 w'^2 (w' - w - i\epsilon)} \right], \quad (14.13)$$

при условии, что g_r достаточно мало, чтобы выражение в скобках не обращалось в нуль при $w < m$. С последней оговоркой (14.11) действительно удовлетворяет уравнению (14.13)¹⁾.

Чтобы связать полученное решение с более привычным материалом, найдем его и с помощью тех методов, которые мы использовали в теории с билинейным взаимодействием. Интеграл в (14.11) можно записать в виде контурного интеграла вокруг разреза (см. фиг. 13.2) и, далее, дополнить бесконечной окружностью до интеграла по зам-

¹⁾ Дискуссию однозначности этого решения можно найти в статьях [3, 4].

кнутому контуру, поскольку $\oint(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. Следовательно, уравнение (14.11) можно записать в линейной форме:

$$\frac{1}{\oint(z)} = \frac{g_r^2}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz'}{\oint(z')(z'-z)},$$

где C — контур интегрирования, изображенный на фиг. (13.2). Вычисляя интеграл по теореме Коши, мы сразу убеждаемся, что (14.11) удовлетворяется. Таким образом, мы получаем следующее решение для $T(k)$ [ср. с (14.12) и (14.13)]:

$$T(k) = \frac{-g_r^2 |\rho(k)|^2}{(2\pi)^3 w \left[1 - w g_r^2 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(k')|^2}{(w' - w - i\epsilon) w'^2} \right]}. \quad (14.14)$$

Вспоминая, что $T = -e^{i\delta} \sin \delta / (4\pi^2 km)$, получаем для фазового сдвига:

$$\operatorname{tg} \delta(k) = \frac{g_r^2 |\rho(k)|^2 km}{2\pi w \left[1 - g_r^2 w P \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{|\rho(k')|^2}{(w' - w) w'^2} \right]}. \quad (14.15)$$

Это выражение имеет ту же форму, что и выражение для фазового сдвига в парной теории при наличии притяжения [см. (12.116)]. Характер решений (14.14) и (14.15) обнаруживает одно важное свойство уравнения Лоу: поскольку оно включает только физические состояния, его решения могут быть выражены непосредственно через имеющую физический смысл, „измеримую“ константу связи g_r (а не g). Мы предполагали отсутствие резонансов при отрицательных энергиях, которые означали бы дискретные состояния с $Q = -3/2$ ¹⁾. Это приводит к ограничению, налагаемому на величину g_r^2 , характер которого зависит от $\rho(k)$. При достаточно больших g_r (превосходящих определенный предел) появляется резонанс с $w > m$. Наличие знаменателя в (14.14) увеличивает фазовый сдвиг, тогда как в $p + \pi^-$ -рассеянии мы имели уменьшение фазового сдвига. Поскольку при малых энергиях неупругие члены в (14.5), соответствующие состоянию $p + 2\pi^-$, только увеличивают этот эффект, следует ожидать, что и точное решение также имеет эту особенность. Таким образом, можно думать, что при низких и средних энергиях сечение $p + \pi^-$ -рассеяния должно быть гораздо больше сечения $p + \pi^-$ -рассеяния.

Это видно и из сопоставления (14.14) и (14.5а). Последнее решение для $p + \pi^-$ -рассеяния можно получить также, пользуясь техникой, примененной при вычислении (14.14),

¹⁾ В этом случае (14.14) было бы решением уравнения Лоу с включенным в него вкладом от дискретного состояния.

14.3. Поведение $T(k)$ при низких и высоких энергиях. В заключение мы получим из (14.9) и (14.5а) низко- и высокоэнергетической поведение $T(k)$. С этой целью рассмотрим

$$t(k) = - \frac{(2\pi)^3 T(k)}{|p(k)|^2}$$

как функцию ω . Член с \sum_i в уравнении (14.9) регулярен при $\omega < m$, поскольку $E_i > m$. Первое же слагаемое имеет полюс при $\omega = 0$ с вычетом, равным g_r^2 . Поэтому этот член будет главным при $\omega \rightarrow 0$, т. е.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} t(k) = \frac{g_r^2}{\omega}. \quad (14.16)$$

Таким образом, мы получаем для системы $n + \pi^-$ тот же результат, что и для системы $p + \pi^-$ [см. (14.5а)], а именно: при $\omega \rightarrow 0$ точный результат равен борновскому приближению, вычисленному с перенормированной константой связи¹⁾. В пределе $\omega \rightarrow \infty$ можно заменить знаменатель под знаком \sum_i в (14.9) величиной $-\omega$, если только сумма сходится достаточно быстро. Вынося множитель $1/\omega$ из всего выражения, мы видим, что оставшаяся величина представляет собой не что иное, как коммутатор при равных временах. Последний, однако, равен $-\tau_3$, и мы получаем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} t(k) = \frac{g^2}{\omega} \langle n | -\tau_3 | n \rangle = \frac{g^2}{\omega} (2Z - 1). \quad (14.17)$$

Это выражение становится более прозрачным, если переписать его в виде

$$\frac{g^2}{\omega} Z + \left(-\frac{g^2}{\omega}\right) (1 - Z),$$

то есть

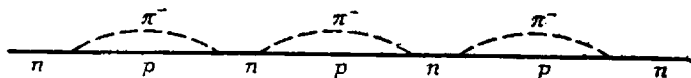
$$\begin{aligned} & \cdot [\text{Борновское приближение для } t(k) \text{ в системе} \\ & n + \pi^-] \times (\text{Вероятность обнаружения голого} \\ & n \text{ в } |n\rangle) + [\text{Борновское приближение для } t(k) \\ & \text{в системе } p + \pi^-] \times (\text{Вероятность обнаружения} \\ & \text{голового } p \text{ в } |n\rangle). \end{aligned}$$

В этой форме результат аналогичен найденному в случае рассеяния в системе $p + \pi^-$. По существу уравнение Лоу позволило нам получить его, минуя решение уравнения Шредингера.

Физический смысл низкоэнергетических и высокоэнергетических пределов можно понять, разбивая процесс рассеяния на элементарные акты взаимодействия между голыми частицами. Это соответствует

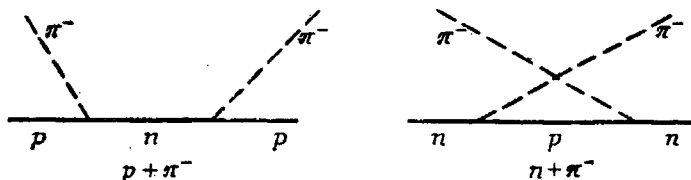
¹⁾ Здесь все время предполагается, что $|p(k)|^2$ можно аналитически продолжить к нефизической энергии $\omega = 0$ или $k^2 = -2m^2$.

разложению T по степеням g . Борновское приближение состоит в том, что берется наименьшее число процессов. При рассеянии оно соответствует поглощению начального π^- и испусканию рассеянного π^- -мезона. При рассеянии $n + \pi^-$ -мезона все процессы должны идти в обратном порядке по сравнению с процессами, приводящими



Фиг. 14.1. Диаграмма для физического нейтрона.

к $p + \pi^-$ -рассеянию. Это иллюстрируется диаграммами¹⁾, изображенными на фиг. 14.2. Высшие приближения по g дают новые столкновения π^- -мезона и „одевание“ нейтрона. Для четвертого порядка g^4 это иллюстрируется фиг. 14.3. Представим себе теперь, что энергия внешнего²⁾ π^- -мезона растет по сравнению с энергиями виртуальных мезонов. В этом случае промежуток времени между испусканием и поглощением ΔT должен быть чрезвычайно коротким, поскольку



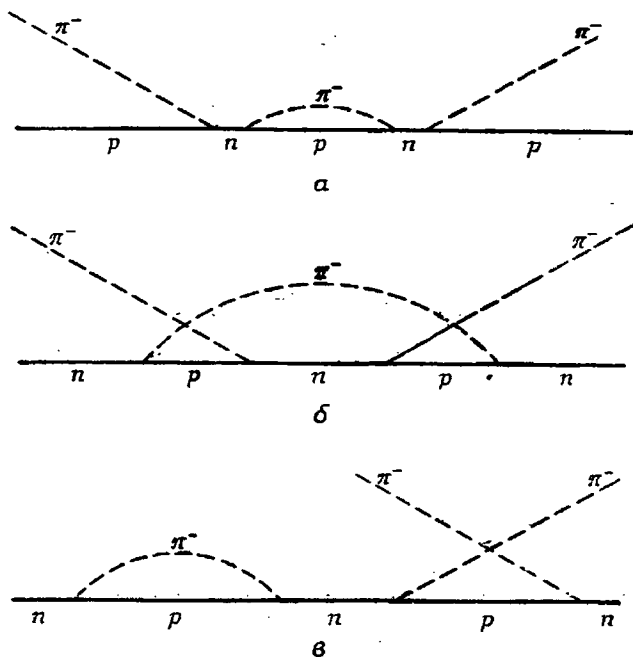
Фиг. 14.2. Диаграммы рассеяния π^- -мезонов на протонах и нейтронах.

он связан с неопределенностью в энергии нуклона ΔE , величина которой определяется энергией внешнего π^- -мезона (поглощаемого и испускаемого): $\Delta E \Delta T \sim \omega \Delta T \sim 1$. Следовательно, для $p + \pi^-$ -рассеяния вклад от диаграммы фиг. 14.4, а будет доминировать по сравнению с вкладом от других диаграмм, в которых присутствуют (промежуточные) виртуальные π^- -мезоны, как это изображено на фиг. 14.4, б и в. Высокоэнергетический предел при $p + \pi^-$ -рассеянии определяется поэтому борновским приближением. Для системы $n + \pi^-$

¹⁾ На этих диаграммах линии показывают траектории различных голых частиц, причем время течет слева направо. В такой картине физический нейтрон выглядит так, как он изображен на фиг. 14.1. Эти диаграммы не следует понимать слишком буквально, поскольку классическое понятие траектории неприменимо к виртуальным частицам. Однако они служат хорошей иллюстрацией различных членов ряда теории возмущений, когда H' ответственно за элементарные процессы испускания (и поглощения) голых частиц. См. [4].

²⁾ Т.-е. рассеивающегося.

рассеяние может происходить таким образом, что в течение некоторого времени существует голый протон. Таким образом, в пределе высоких энергий мы имеем как рассеяние на голем нейтроне (фиг. 14.5, а), так и рассеяние на голем протоне (фиг. 14.5, б), но в обоих случаях виртуальные (промежуточные) мезоны не испускаются

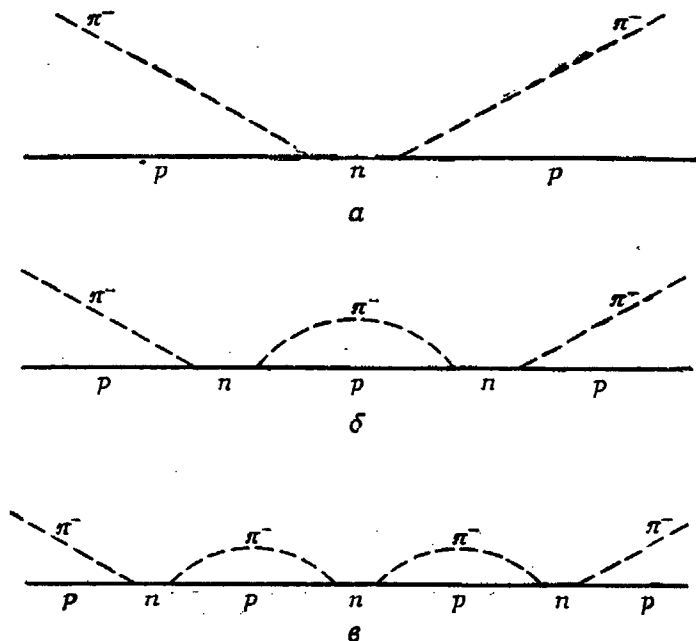


Фиг. 14.3. Диаграммы порядка g^4 для $p + \pi^-$ -рассеяния (а) и для $n + \pi^-$ -рассеяния (б и в).

и не поглощаются между взаимодействиями с внешним мезоном. Вклад от процессов последнего рода, изображенных на фиг. 14.5, в, опять будет мал по сравнению с основными процессами, и мы вновь получим борновские амплитуды для рассеяния на двух видах частиц, взятые с весом, пропорциональным соответствующим вероятностям.

Чтобы подойти к вопросу о низкоэнергетическом пределе, рассмотрим сперва вымышленный случай, когда внешний мезон не имеет массы покоя, так что его энергию можно сделать много меньшей энергии виртуальных π -мезонов. При таких условиях из соотношения неопределенностей следует, что время между взаимодействиями с внешней частицей будет много больше времени виртуальных процессов. В случае $p + \pi^-$ -рассеяния это означает, что после поглощения внешнего π -мезона нуклон практически становится физическим

нейтроном, как это изображено на фиг. 14.6. Однако поскольку поглощение внешнего π -мезона превращает протон в голый нейтрон, это может произойти только в течение той доли времени, когда физический нейтрон (из промежуточного состояния) находится в состоянии голого нейтрона. При наличии двух таких элементарных



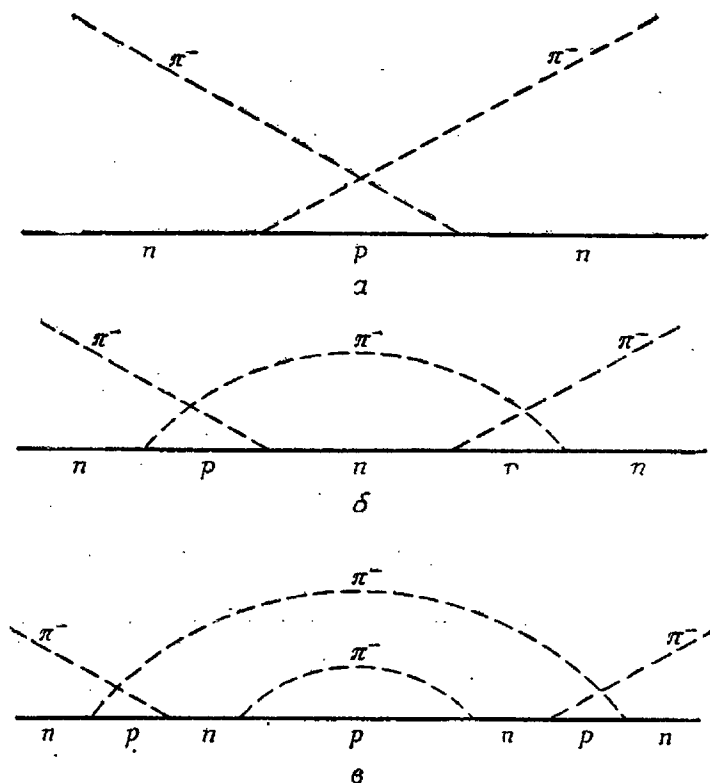
Фиг. 14.4. Диаграммы, иллюстрирующие свойства $p + \pi^-$ -рассеяния при высоких энергиях.

процессов (испускание и поглощение внешнего π -мезона) мы получаем следующее выражение для сечения рассеяния в рассматриваемом пределе

(Борновское приближение) \times (Вероятность обнаружения голого нейтрона в состоянии физического нейтрона)².

То же самое относится и к случаю $n + \pi^-$ -рассеяния, где в рассматриваемом пределе существенным оказывается вклад диаграмм высших порядков, изображенных на фиг. 14.7, а, и не существенным — вклад диаграмм, изображенных на фиг. 14.7, б. Для $m \neq 0$ указанные заключения остаются справедливыми в пределе $\omega \rightarrow 0$, но

поскольку это — нефизическая область, то здесь низкоэнергетическое поведение имеет смысл только в этом экстраполяционном смысле. Вообще можно утверждать, учитывая способ определения константы g , что она измеряет силу элементарного взаимодействия между голым

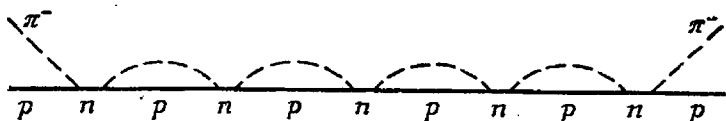


Фиг. 14.5. Диаграммы, иллюстрирующие свойства $n + \pi^-$ -рассеяния при высоких энергиях.

нуклоном и π^- -мезоном. С другой стороны, g_r определяет силу элементарного взаимодействия между физическим нуклоном и π^- -мезоном¹⁾. Это следует из того, что $g_r = \langle p | \tau_+ g | n \rangle$. В быстрых процессах мы имеем дело с голыми частицами-источниками и, следовательно, с константой g ; в медленных — с физическими частицами-источниками и потому — с g_r . Поскольку при высоких энергиях

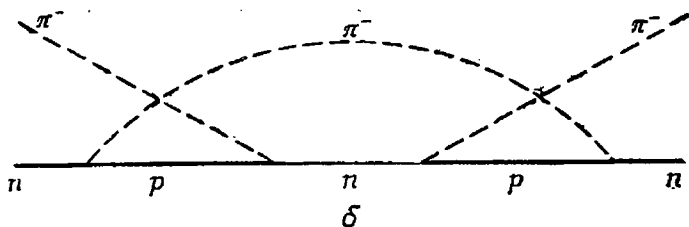
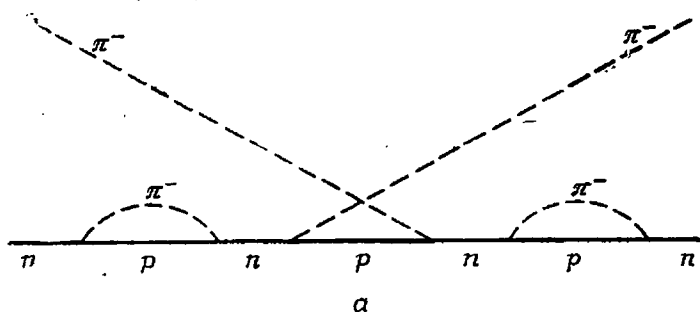
¹⁾ Физические и голые π^- -мезоны тождественны.

ситуация становится очень сложной¹⁾, в общем случае можно измерить только g_r . Даже и эту константу невозможно получить непосредственно, поскольку энергия $\omega = 0$ недостижима экспериментально. Однако если низкоэнергетические значения фазовых сдвигов можно



Фиг. 14.6. Диаграммы, иллюстрирующие низкоэнергетический предел $p + \pi^-$ -рассеяния.

экстраполировать к этой энергии, или если член в скобках в знаменателях (14.14) и (14.5а) можно приближенно разложить в ряд



Фиг. 14.7. Диаграммы, иллюстрирующие низкоэнергетический предел $n + \pi^-$ -рассеяния.

по g_r для малых, но физических энергий, то возможно и непосредственно получить g_r^2 из измерения сечений. Мы рассмотрим этот вопрос ниже в последней части книги.

¹⁾ Ясно, что нерелятивистское приближение становится неприменимым при таких энергиях; кроме того, необходимо принять во внимание рождение нуклонных пар и отдачу нуклонов.

Время от времени появляются исследования по различным видоизменениям и обобщениям модели Ли. В одной из модификаций, предложенной Ван-Ховом, введено ограничение числа степеней свободы, но допускается существование более одного мезона в облаке, окружающем физический нуклон. В этом обобщении сохраняется один тип кванта поля, π^0 , но разрешаются два процесса

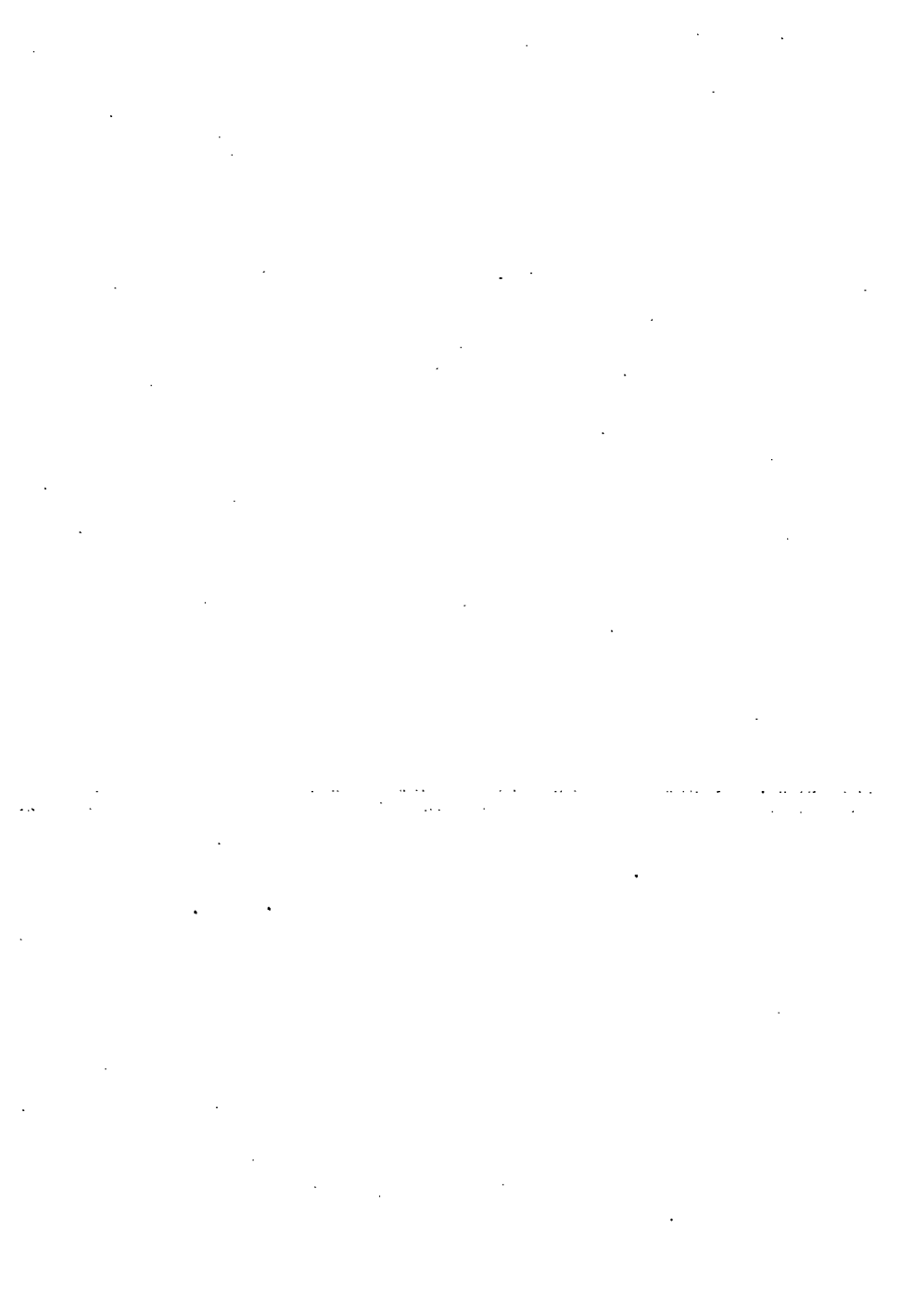
$$V \rightleftharpoons n + \pi^0 \quad (\text{сила связи } g_a),$$

$$n \rightleftharpoons V + \pi^0 \quad (\text{сила связи } g_b).$$

Эта теория имеет ряд преимуществ перед моделью Ли; она допускает точное решение для связанных физических состояний. Основное преимущество этой теории для нас заключается в том, что из нее легко видеть связь между нейтральной скалярной теорией (гл. 9 и 10) и моделью Ли. Так, если физические массы V и n частиц одинаковы и $g_a = g_b$, то теория сводится к нейтральной скалярной теории, за исключением дублирования состояний. Подробное обсуждение этой теории увело бы нас однако слишком далеко в сторону, поэтому мы отошлем читателя к оригинальным работам Руййгрока и Ван-Хова [6—8].

Часть третья

ФИЗИКА П-МЕЗОНОВ



ВВЕДЕНИЕ

15.1. Статическая модель. Существует большой ряд физических проблем, укладывающихся в рамки квантовой теории поля; они могут быть рассмотрены методами, сходными с изложенными выше или несколько менее строгими. Прототипом дискретных связанных осцилляторов служат атомы в кристалле. Электроны, движущиеся в кристалле, играют роль возмущений, линейно связанных с атомами. Однако поскольку необходимо учитывать обратную реакцию кристалла на электроны, взаимодействие оказывается динамическим, включает трансляционные степени свободы электрона, и его нельзя представить как связь с фиксированным заданным источником. Вытекающие отсюда усложнения делают эту „поляронную“ проблему [1, 2] интересной, однако ее невозможно решить точно.

Примером квазинепрерывной механической модели может служить квантование уравнений движения жидкости [3]. Усложнения в этой задаче связаны с нелинейностью уравнений гидродинамики, в результате которой существуют только приближенные решения, например, при низких температурах, где квантовые эффекты определяют явление, и где квазинепрерывная модель дает довольно разумные результаты [4]. В ядерной физике поверхностные волны в ядре представляют собой двумерный пример случая, когда существенны квантовые эффекты [5]. Проблема многих тел в том виде, как она формулируется в случае бозе-газа или газа Ферми — Дирака из электронов или нуклонов, также легче всего описывается методами теории поля [5], хотя на первый взгляд в ней отсутствуют характерные черты поля. Более того, в пределе высоких плотностей задачу об электронном газе с кулоновским взаимодействием оказывается можно истолковать с помощью описанной нами парной теории и поэтому возможно ее точное решение [8].

Наиболее удивительные применения наши методы находят, однако, не при изучении каких-либо материальных веществ, а при рассмотрении нематериальных полей, возбуждения которых представляются нам в виде элементарных частиц. Здесь можно привести много примеров, в том числе квантовую электродинамику и теорию „слабых взаимодействий“. Эти теории имеют то преимущество, что благодаря достаточно слабой связи физические и голые частицы оказываются почти идентичными. С другой стороны, их систематическое изложение требует применения теории представлений группы Лоренца и

выходит поэтому за рамки настоящей книги. Вместо этого мы обратимся к приближенной теории π -мезон-нуклонного взаимодействия, которая является одной из самых волнующих современных теорий, поскольку она проникает до наименьших расстояний, использованных в любой из сколько-нибудь успешных физических теорий. В других случаях, упомянутых выше, явления протекают в области атомных размеров или порядка комптоновской длины волны электрона. В настоящее время мы совершенно уверены, что используемые нами принципы справедливы в таких областях. Однако физика π -мезонов имеет дело с расстояниями порядка 10^{-13} см, и интересно отметить, что, по-видимому, концепции теории поля сохраняют применимость и на столь малых расстояниях. Несмотря на большую пруделанную работу, пока еще имеется мало сведений как о полях внутри этой области, так и о том, необходимо ли вводить понятие минимальной длины. Эти проблемы находятся в числе тех наиболее актуальных проблем, которые стоят перед физиками в наши дни.

Теория π -мезон-нуклонного взаимодействия усложняется двумя обстоятельствами: 1) не известна вполне определенно точная форма взаимодействия и 2) структуру физического нуклона образуют, кроме π -мезонов, также и другие частицы. Совершенно ясно, например, что мезонное облако вокруг нуклона содержит также K -мезоны и гипероны, антинуклоны и антигипероны. К счастью, возможно приближенно отделить π -мезонное облако от облаков, создаваемых другими частицами, поскольку оно простирается на большие расстояния. Как мы видели раньше, протяженность облака измеряется по порядку величины комптоновской длиной волны; иными словами, она обратно пропорциональна массе частицы поля. K -мезон приблизительно в $3^{1/2}$ раза тяжелее π -мезона, и поскольку по современным концепциям „странность“ сохраняется, испускание K -мезона требует одновременного превращения нуклона в гиперон, что составляет приблизительно еще одну мезонную массу. Отсюда можно ожидать, что облако K -мезонов и гиперонов не простирается более чем на две девятых от длины π -мезонного; это означает, что объем нуклона на 99% состоит из π -мезонного облака. Нуклон-антинуклонные пары имеют еще более короткий радиус. Однако существенная роль последних может заключаться в том, что посредством промежуточной пары π -мезон может превратиться в три π -мезона¹⁾, что приводит к конечным размерам самого π -мезона²⁾.

1) Два π -мезона запрещены законами сохранения углового момента и четности.

2) Предположение такого рода было развито Таммом [9]. Этот эффект давал бы также вклад в π - π -взаимодействие, на существование которого указывают некоторые данные экспериментов при высоких энергиях. (См., например, [10].) Количественные результаты получены совсем недавно, и мы не будем останавливаться на них.

Эти замечания показывают, что перспективы теории, рассматривающей только π -мезоны и нуклон, довольно хороши. Экспериментальные данные [4] свидетельствуют о наличии у нуклона „отталкивающего ядра“, в настоящее время еще не изученного; он простирается приблизительно до $5 \cdot 10^{-14}$ см, вне этой области π -мезоны вносят главный вклад в структуру нуклона. Положение здесь не так ясно, как, скажем, в нерелятивистской теории атома водорода. Поправки к теории атома существенны в области порядка комптоновской длины волны электрона, т. е. $1/137$ радиуса атома водорода. Ввиду этого формула Бальмера дает очень хорошее приближение; поправки, связанные с тонкой структурой, составляют менее 0,1%. В нашем же случае, видимо, более вероятна точность порядка 5%.

Даже если ограничиться π -мезонами и нуклонами, картина остается еще очень сложной. Причина этого заключается в том, что в сильно взаимодействующих системах присутствует много виртуальных частиц и осуществляются все виды взаимодействий, разрешенные соображениями инвариантности. Например, нет никакой причины, по которой не существовало бы сильного π — π -взаимодействия. Это, конечно, будет проявляться также в π -мезон-нуклонном взаимодействии, поскольку нуклон окружен плотным π -мезонным облаком. К счастью, оказывается, что в физике π -мезонов низких энергий все эффекты делятся на большие, средней величины и малые. Большие эффекты имеют общее происхождение, именно: неустойчивое возбужденное состояние нуклона. Последнее можно описать с помощью члена, учитывающего эти взаимодействия; его мы и используем в дальнейшем. Эффекты средней величины представляют собой поправки порядка 15% к большим эффектам и обусловлены π — π -взаимодействиями, нелинейными π -мезон-нуклонными взаимодействиями, кинематическими поправками и т. д. Поскольку они в нашей модели не учитываются, мы не сможем делать предсказания относительно эффектов, не связанных непосредственно с возбужденным состоянием. В настоящее время развивается техника расчета эффектов средней величины. Соответствующие методы являются обобщением методов, которые мы используем в нашей модели. Наконец, существуют малые эффекты (порядка нескольких процентов), которые связаны с взаимодействиями странных частиц, мезонными силами и т. д. и которые находятся вне современных теоретических возможностей.

После этих замечаний перейдем к вопросу о точном виде π -мезон-нуклонного взаимодействия. Эмпирически известные процессы $p \leftrightarrow p + \pi^0$, $p \leftrightarrow n + \pi^+$, $n \leftrightarrow p + \pi^-$ показывают, 1) что должна существовать некоторого вида линейная связь, поскольку, например, квадратичная связь (которую нельзя исключить) должна была бы привести к рождению мезонных пар, и 2) что связь включает

зарядовые степени свободы нуклона. Мы видели в модели Ли, что благодаря второму условию допустимо рассеяние даже при фиксированном источнике, т. е. при пренебрежении трансляционными степенями свободы нуклона. Конечно, закон сохранения импульса требует, чтобы последние включались в рассмотрение элементарного процесса, но теория и эксперимент указывают, что во многих физических явлениях эффект отдачи меньше эффектов, обусловленных изменением зарядовых степеней свободы. В этом можно убедиться следующим образом. Процесс испускания и обратного поглощения виртуального π -мезона с импульсом k продолжается в течение времени $\Delta t \sim \omega^{-1} = (\mu^2 + k^2)^{-1/2}$, где μ — масса π -мезона. Скорость отдачи нуклона массы M равна $v = k/M$, так что флуктуации в положении нуклона, связанные с этим виртуальным процессом, равны по порядку величины

$$\Delta r \sim v \Delta t \sim \frac{k}{M} (k^2 + \mu^2)^{-1/2}.$$

Эта неопределенность меньше комптоновской длины волны нуклона — $1/M \approx 2 \cdot 10^{-14}$ см. Соответственно сечение рассеяния, обусловленное галилеевой инвариантностью и другими эффектами отдачи [13], по порядку величины равно $(1/M)^2$ и исчезает при $M \rightarrow \infty$. С другой стороны, характерная длина для процесса поглощения и испускания есть комптоновская длина волны мезона [фактически $(\mu^2 + k^2)^{-1/2}$], которая в семь раз больше нуклонной длины. Эта длина определяет также величину сечения рассеяния, обусловленного внутренними степенями свободы. Таким образом, мы чувствуем себя вполне уверенно, пренебрегая эффектами отдачи для кинетических энергий мезона $\leq 3\mu$.

В пределе $M \rightarrow \infty$ имеются только два значения углового момента, которые может иметь мезон, участвующий в элементарном процессе $N \rightarrow \pi + N$. Так как неподвижный нуклон не имеет орбитального момента, а его спин равен $1/2$, сохранение полного углового момента предписывает, чтобы испускаемый π -мезон имел орбитальный момент 0 или 1. Поскольку эти два состояния имеют противоположную четность, испускание может происходить только в одном из них, если четность сохраняется; какое именно из двух состояний реализуется в природе, зависит от внутренней четности¹⁾ π -мезона. Экспериментальные данные [14] определенно показывают, что эта четность отрицательна, так что π -мезон должен испускаться в состоянии с орбитальным моментом $l = 1$. Эта простая модель фактически в состоянии объяснить почти все существенные эмпирические факты. Испускание π -мезона может сопровождаться поворотом нуклонного спина, поэтому необходимо принять во внимание два спиновых состояния

¹⁾ Она была определена в гл. 5.

нуклона. Это достигается простым введением набора матриц Паули¹⁾ σ , которые представляют псевдовектор, характеризующий источник в 2×2 спиновом пространстве. В обычном представлении

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Другое свойство π -мезон-нуклонного взаимодействия заключается в том, что инвариантность относительно трехмерной ортогональной группы, которую мы рассматривали в гл. 7, не нарушается при наличии источника²⁾. Этот факт вполне установлен экспериментально [14, 12] как в физике π -мезонов, так и в ядерной физике; мы будем использовать его как один из руководящих принципов. Поскольку зарядовое пространство π -мезонов должно быть связано с зарядовым пространством нуклонов в силу сохранения полного заряда (точно так же, как в модели Ли), необходимо ввести понятие нуклона с двумя зарядовыми состояниями, представляющими протон и нейтрон. В этом новом 2×2 пространстве мы вводим новый набор матриц Паули τ для описания изоспина нуклона, свойства которого уже знакомы нам из изучения модели Ли.

Наиболее общий вид линейной связи между мезонами и нуклонами, обладающей описанными выше свойствами, можно получить простым образом, исходя из свойств инвариантности лагранжиана. Отрицательная внутренняя четность π -мезона означает, что π -мезонное поле меняет знак при отражении пространственных координат. Поскольку поле ϕ входит в лагранжиан L' линейно, оно должно быть связано с источником таким образом, чтобы образовался истинный скаляр, т. е. чтобы величина L' была четной относительно отражений. Из этого следует, что связь должна иметь вид³⁾ $\sigma \cdot \nabla \phi$. Если теперь $\rho(r)$ — сферический источник, то, чтобы обеспечить сохранение углового момента, следует записать

$$L' = \int d^3r \rho(r) \sigma \cdot \nabla \phi(r). \quad (15.1)$$

Как и требовалось, это выражение инвариантно относительно одновременного вращения σ и τ и коммутирует с \mathcal{P}_- (см. п. 5.2). В следующем пункте мы, исходя из этого лагранжиана, построим собственные функции углового момента для π -мезон-нуклонной системы и увидим явно, что благодаря наличию оператора ∇ π -мезоны испускаются только в состояниях с орбитальным моментом, равным единице.

¹⁾ Свойства спиновых матриц такие же, как и в элементарной квантовой механике; см., например, у Шиффа [15].

²⁾ Это утверждение не точно; например, оно выполняется только при пренебрежении электромагнитными силами.

³⁾ Спин σ , как и оператор орбитального момента L , является аксиальным вектором и не меняет знака при отражении. Он связан со спином нуклона s соотношением $s = \frac{1}{2}\sigma$.

Остается ввести „сохранение изоспина“, что означает инвариантность относительно вращений в зарядовом пространстве (см. гл. 7). π -мезон имеет три зарядовых состояния, π^+ , π^0 и π^- . Поскольку величины ϕ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) преобразуются как компоненты вектора в изотопическом пространстве и поскольку τ — единственный другой вектор, имеющийся в нашем распоряжении, мы получаем окончательно для статической связи ¹⁾:

$$L' = -\frac{f}{\mu} \sum_{\alpha} \int d^3r \rho(r) \tau_{\alpha} \sigma \cdot \nabla \phi_{\alpha}(r). \quad (15.2)$$

Исходя из предшествующих рассуждений, следует ожидать, что источник $\rho(r)$ будет определять эффекты, не включенные особо в (15.2), например K -мезонные эффекты или некоторые последствия отдачи. Поэтому следует ожидать, что источник будет иметь некоторую структуру с радиусом порядка, может быть, $(1/4)\mu$ или $(1/3)\mu$. Будем предполагать, что источник нормирован на единицу, $\int \rho(r) d^3r = 1$.

Это следует помнить, говоря, что константа связи f измеряет силу π -мезон-нуклонного взаимодействия. Константа связи определяется из экспериментов, которые мы рассмотрим в последующих главах.

Из многочисленных приложений теории взаимодействия π -мезонов и нуклонов наиболее успешным было приложение к π -мезон-нуклонному рассеянию. Мы обсудим также электромагнитные явления, которые качественно объясняются теорией. Наконец, затем мы перейдем к старейшему по времени приложению теории — ядерным силам. В значительной степени они могут быть объяснены с помощью рассматриваемой теории.

15.2. Перестановочные соотношения и уравнения движения.

Решив вопрос о выборе вида взаимодействия, мы тем самым подготовились к тому, чтобы выписать основные уравнения нашей теории. Сделаем это в различных представлениях для переменных поля, которые были введены в гл. 5²⁾:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha}(r) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{a_{\alpha}(k) e^{ik \cdot r} + a_{\alpha}^{\dagger}(k) e^{-ik \cdot r}}{(2\omega)^{1/2}} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\omega)^{1/2}} \sum_{l, m} U_k^l(r) [a_{\alpha lm}(k) Y_l^m(\vartheta, \varphi) + a_{\alpha lm}^{\dagger}(k) Y_l^{*m}(\vartheta, \varphi)]. \end{aligned}$$

¹⁾ В это уравнение введена масса π -мезона μ для того, чтобы константа f была безразмерной. Чтобы различать r -пространство и изотопическое пространство, мы в дальнейшем будем обозначать индексы, относящиеся к обычному пространству, латинскими буквами, а относящиеся к изотопическому, — греческими.

²⁾ Чтобы удовлетворялись канонические перестановочные соотношения, операторы a определены таким образом, что $\phi \sim -i(a - a^{\dagger})$.

Два способа разложения подчеркивают здесь различные аспекты проблемы; каждое из них будет использовано в свое время в последующих главах. Для того чтобы разложить

$$\sigma \cdot \nabla_p(r) = \frac{\rho'(r) \sigma \cdot r}{r}$$

по сферическим гармоникам, целесообразно вместо линейных компонент спина ввести круговые:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \frac{r}{r} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x - i\sigma_y) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x+iy}{r} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + i\sigma_y) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x-iy}{r} + \\ &+ \sigma_z \frac{z}{r} = \sum_{m=-1}^1 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2} \sigma^m Y_1^m. \end{aligned} \quad (15.3)$$

$$\sigma^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и аналогично для изоспина

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=-1}^3 \tau_\alpha \phi_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 - i\tau_2) \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_1 + i\tau_2) \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2) + \tau_3 \phi_3 = \sum_{\alpha=-1}^1 \tau^\alpha \phi^{*\alpha}, \end{aligned} \quad (15.4)$$

где ¹⁾

$$\phi^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 \pm i\phi_2) \equiv \phi_{\pm}$$

представляют собой операторы, диагонализующие $t^{(3)}$. Чтобы различать линейные и круговые компоненты, мы будем использовать нижние (изменяющиеся от 1 до 3) индексы для первых и верхние (пробегающие значения — 1, 0, 1) индексы — для вторых. В таких обозначениях полный гамильтониан нашей модели можно записать

¹⁾ Операторы $\phi^{\pm 1}$ обозначались в гл. 7 как ϕ_{\pm} . Там же был определен оператор $t^{(3)}$.

в виде ¹⁾

$$H = H_0 + H' - \mathcal{E}_0,$$

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\alpha=1}^3 \int d^3r \frac{1}{2} [\dot{\phi}_\alpha^2 + (\nabla \phi_\alpha)^2 + \mu^2 \phi_\alpha^2] = \\ &= \sum_{\alpha=-1}^1 \int d^3k a^{\dagger\alpha}(k) a^\alpha(k) \omega = \sum_{l, m, \alpha} \int_0^\infty dk \omega a_l^{\dagger\alpha m}(k) a_l^{\alpha m}(k), \quad (15.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H' &= \frac{f}{\mu} \int d^3r \rho(r) \tau_\alpha \sigma \cdot \nabla \phi_\alpha(r) = \\ &= \frac{f}{\mu} i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \rho(k) \tau_\alpha \sigma \cdot k \frac{a_\alpha(k) - a_\alpha^\dagger(k)}{(2\omega)^{1/2}} = \\ &= \frac{f}{\mu} \sum_{m, \alpha} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{(12\pi^2\omega)^{1/2}} \rho(k) \tau_\alpha \sigma^m [a_1^{\alpha m}(k) + a_1^{\dagger\alpha m}(k)]. \end{aligned}$$

Здесь, как и в модели Ли, введена константа \mathcal{E}_0 , так что энергия физического основного состояния может быть выбрана равной нулю. Это упрощает формулы, приведенные в следующих главах, и не отражается на физических выводах. Следует отметить, что H' содержит только переменные поля с $l=1$. Другие переменные входят только в H_0 и потому описывают свободные частицы.

Перестановочные соотношения при равных временах имеют обычную форму:

$$[\phi_\alpha(r, t), \dot{\phi}_\beta(r', t)] = i\delta_{\beta\alpha} \delta^3(r - r'),$$

$[\phi, \phi] = [\dot{\phi}, \dot{\phi}] = [\tau, \phi] = [\tau, \dot{\phi}] = [\sigma, \phi] = [\sigma, \dot{\phi}] = [\sigma, \tau] = 0$ в один и тот же момент времени, (15.6)

$$[\sigma_m, \sigma_n] = 2i\sigma_l \varepsilon_{lmn},$$

$$[\tau_\alpha, \tau_\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau_\gamma.$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный тензор, который был введен ранее.

¹⁾ Как обычно, мы предполагаем, что гамильтониан H_0 упорядочен, и ограничиваемся реальными источниками $\rho(r)$. Операторы a^α определены аналогично ϕ^α .

Уравнения движения для мезон-нуклонной системы следуют из (15.5) и (15.6) в соответствии с общим уравнением $\hat{G} = i[H, \hat{G}]$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2\right) \phi_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{f}{\mu} \tau_\alpha(t) \sigma(t) \cdot \nabla \rho(\mathbf{r}),$$

$$\dot{a}_\alpha(\mathbf{k}, t) = -i a_\alpha(\mathbf{k}, t) \omega - \frac{f}{\mu} \frac{\rho(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sigma(t) \cdot \mathbf{k} \tau_\alpha(t)}{(2\omega)^{1/2}}, \quad (15.7)$$

$$\dot{a}_1^{2m}(\mathbf{k}, t) = -i a_1^{2m}(\mathbf{k}, t) \omega - i \frac{f}{\mu} \frac{\rho(\mathbf{k}) k^2}{(12\pi^2 \omega)^{1/2}} \tau^\alpha(t) \sigma^m(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_\alpha(t) &= -\frac{f}{\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} 2 \int d^3 r \phi_\beta(\mathbf{r}, t) \tau_\gamma(t) \sigma \cdot \nabla \rho(\mathbf{r}) = \\ &= 2i \frac{f}{\mu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \int \frac{d^3 k \rho(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}} \sigma \cdot \mathbf{k} \frac{a_\beta(\mathbf{k}) - a_\beta^\dagger(\mathbf{k})}{(2\omega)^{1/2}} \tau_\gamma, \end{aligned} \quad (15.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_j(t) &= -\frac{f}{\mu} \varepsilon_{jmn} 2 \int d^3 r \tau_\alpha(t) \phi_\alpha(\mathbf{r}, t) \sigma_n \nabla_m \rho(\mathbf{r}) = \\ &= 2i \frac{f}{\mu} \varepsilon_{jmn} \int \frac{d^3 k \rho(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2} (2\omega)^{1/2}} k_m \sigma_n [a_\alpha(\mathbf{k}) - a_\alpha^\dagger(\mathbf{k})] \tau_\alpha. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Уравнения (15.7) можно переписать в виде интегрального уравнения обычным способом:

$$\phi_\alpha(\mathbf{r}, t) = \phi_\alpha^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \frac{f}{\mu} \int d^3 r' dt' \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \tau_\alpha(t') \sigma(t') \nabla \rho(\mathbf{r}'),$$

или

$$a_\alpha(\mathbf{k}, t) = A_\alpha(\mathbf{k}, t) - \frac{f}{\mu} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \frac{\rho(\mathbf{k}) \sigma(t') \cdot \mathbf{k} \tau_\alpha(t')}{(2\pi)^{3/2} (2\omega)^{1/2}}. \quad (15.10)$$

Свойства инвариантности, скрытые в гамильтониане, позволяют выписать несколько интегралов движения. То, что эти величины постоянны, можно доказать с помощью уравнений движения или проверкой их коммутативности с H . Однако, учитывая подготовленность читателя, мы перейдем прямо к существу вопроса и получим эти величины как операторы преобразований, оставляющих H инвариантным. Сохранение углового момента связано с инвариантностью H относительно одновременного вращения \mathbf{r} и σ . Оператор преобразования $\phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \phi(\mathbf{r}', t)$, где \mathbf{r}' связано с \mathbf{r} поворотом вокруг оси, проходящей через начало координат, имеет тот же вид, что и для свободных полей. Вращение σ на угол θ вокруг некоторой оси \mathbf{n} определяется оператором

$$\begin{aligned} U &= e^{i\mathbf{n} \cdot \theta/2}, \\ U^{-1} \sigma U &= \sigma'. \end{aligned} \quad (15.11)$$

Для инфинитезимального поворота на угол $\delta\theta$ оператор U имеет вид $1 + i\sigma \cdot n \delta\theta/2$, и полный сохраняющийся угловой момент равен [см. (5.3)]

$$\begin{aligned} J &= S + L = \frac{\sigma}{2} - \sum_{\alpha} \int d^3r \dot{\phi}_{\alpha}(r) r \times \nabla \phi_{\alpha}(r) = \\ &= \frac{\sigma}{2} - i \sum_{\alpha} \int d^3k a_{\alpha}^{\dagger}(k) k \times \nabla_k a_{\alpha}(k). \end{aligned} \quad (15.12)$$

Точно таким же образом оператор одновременного поворота ϕ_{α} и τ_{α} в пространстве изоспина [ср. (7.26)] записывается как

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= \frac{1}{2} \tau_{\alpha} + t_{\alpha} = \frac{\tau_{\alpha}}{2} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d^3r \dot{\phi}_{\beta}(r) \phi_{\gamma}(r) = \\ &= \frac{\tau_{\alpha}}{2} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} i \int d^3k a_{\beta}^{\dagger}(k) a_{\gamma}(k). \end{aligned} \quad (15.13)$$

Из других классических констант движения сохраняется энергия, но не импульс. Это связано с тем, что в задаче отсутствует выделенное начало отсчета времени, а начало координат фиксировано на находящемся в нем нуклоне. Далее, сохраняется четность, поскольку для нашего гамильтониана не существует различия между левой и правой координатными системами. Явное выражение [см. (5.14в)] имеет вид

$$\mathcal{P}_- = \exp \left[-i\pi \sum_{l, m, k} (l+1) a_{klm}^{\dagger} a_{klm} \right], \quad (15.14)$$

$$\mathcal{P}_- \phi(r) \mathcal{P}_-^{-1} = -\phi(-r), \quad \mathcal{P}_- \sigma \mathcal{P}_-^{-1} = \sigma, \quad \mathcal{P}_- \tau \mathcal{P}_-^{-1} = \tau.$$

Наконец, существует одна константа, связанная с особой симметрией рассматриваемой модели и отсутствующая в более строгих вариантах теории. Если забыть о мезонах с $l \neq 1$ и рассмотреть сокращенный гамильтониан вида

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{\infty} dk \sum_{m, \alpha} \left\{ \omega a_1^{\dagger \alpha m}(k) a_1^{\alpha m}(k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f}{\mu} \frac{k^2 \rho(k)}{(12\pi^2 \omega)^{1/2}} \tau^{\alpha} \sigma^m [a_1^{\alpha m}(k) + a_1^{\dagger \alpha m}(k)] \right\}, \end{aligned}$$

то легко заметить, что он инвариантен относительно замены $\tau^{\alpha} \leftrightarrow \sigma^m$ и $a_1^{\alpha m}(k) \leftrightarrow a_1^{m\alpha}(k)$. Такая перестановка меняет местами J и T и оставляет инвариантными перестановочные соотношения. Следовательно, должен существовать постоянный унитарный оператор, осуществляющий такое преобразование. Мы предоставляем читателю найти явное выражение для этого оператора, так как оно не будет играть особой роли в дальнейшем изложении. Общее следствие этой симметрии заключается в том, что для каждого собственного

состояния H , принадлежащего собственным значениям J' и T' операторов J и T , имеется вырожденное состояние с собственными значениями T' и J' . Аналогично, π -мезон-нуклонный фазовый сдвиг в состоянии $T = 1/2$, $J = 3/2$ равен сдвигу при $T = 3/2$, $J = 1/2$.

15.3. Сравнение с другими моделями. Если отбросить требование линейности связи, то можно указать много выражений, обладающих желаемыми свойствами инвариантности, из которых одно из простейших дается квадратичной связью вида

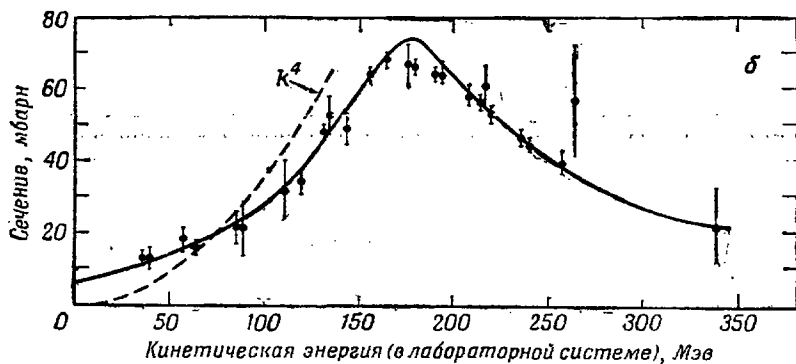
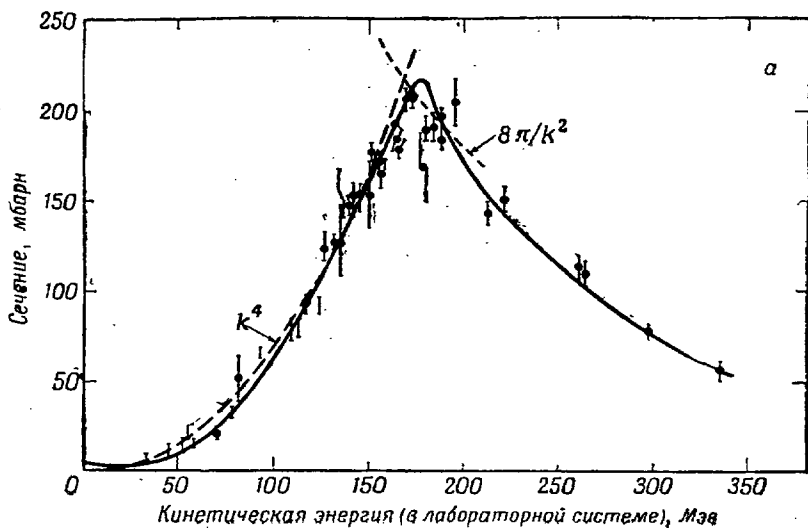
$$L' = f' \sum_{\alpha} \int d^3r \rho(r) \phi_{\alpha}(r) \phi_{\alpha}(r), \quad (15.15)$$

или

$$L' = f'' \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \int d^3r \rho(r) \dot{\phi}_{\alpha}(r) \phi_{\beta}(r) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} r_{\gamma}. \quad (15.16)$$

Для точечного источника (15.15) сводится к парной теории, тогда как выражение (15.16) имеет более сложную математическую структуру. Последнее включает зарядовые степени свободы источника и не поддается точному анализу. Мы всегда будем предполагать, что такие связи составляют малые поправки к основному члену (15.2). Члены вида (15.15) и (15.16) действительно возникают при попытке перейти от релятивистского π -мезон-нуклонного взаимодействия к нерелятивистскому приближению [16—18]. Эксперименты также показывают, что, как это следует и из (15.15), π -мезоны взаимодействуют с нуклонами в S -состояниях, но это взаимодействие заметно слабее, чем взаимодействие (15.2), хотя априорно не существует убедительных аргументов, почему это должно бы быть верно.

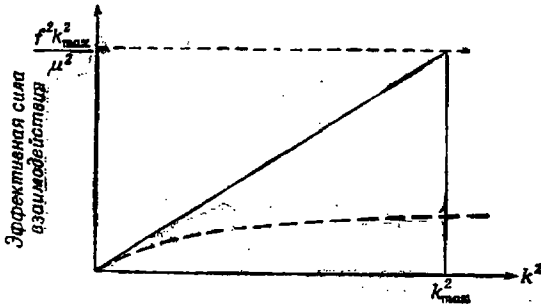
То обстоятельство, что в нашей модели при L' вида (15.2) с нуклоном взаимодействуют только мезоны с орбитальным моментом $l = 1$, или находящиеся в P -состоянии, приводит к важным количественным отличиям по сравнению с предыдущими примерами, включавшими S -волны. На классическом языке падающий мезон с импульсом k и угловым моментом l проходит от нуклона на расстоянии k^{-1} . Для импульсов $k \leq \mu$ это расстояние, конечно, больше радиуса источника. Можно было бы наивно ожидать, что нуклон не может испускать мезоны этой энергии, поскольку они должны возникать в той части пространства, которая не содержит мезонного источника. С квантовомеханической точки зрения мезоны не локализованы точно в источнике, однако предпочтительно испускаются мезоны, которые как бы выходят из близкой к источнику области. Оказывается, что вероятность испускания (или поглощения) мезона пропорциональна k^2 . Этого и следовало бы ожидать при внимательном рассмотрении гамилтониана H' , который содержит $\rho(k)k$, а не просто $\rho(k)$. Физическая зависимость k^2 возникает следующим образом. В направлении



Фиг. 15.1. Полные сечения рассеяния для π^+ -мезонов (а) и π^- -мезонов (б) на протонах как функции кинетической энергии в лабораторной системе.

Экспериментальные кривые и точки взяты из работы Андерсона, Давидона и Крузе [19]. Данные представляют собой результат работы многих авторов, ссылки на которые приведены в работе [19]. Пунктирная кривая, считая с данными по низким энергиям, пропорциональна четвертой степени импульса в системе центра масс κ . На фиг. а приведена также кривая величины $8\pi/k^2$, которая нам понадобится в следующей главе.

испускания мезоны с угловым моментом 1 образуются на окружности радиуса k^{-1} с центром, совпадающим с нуклоном. С квантовомеханической точки зрения эти мезоны приходят с площадки размеров порядка k^{-2} . Сила взаимодействия пропорциональна той части площадки, которая находится внутри источника. Если предположить, что источник имеет радиус $\sim M^{-1}$, где M — масса нуклона, то эта часть составляет $(k/M)^2$. Энергетическая зависимость эффективной силы взаимодействия находит отражение, например, в распределении по



Фиг. 15.2. График зависимости эффективной силы π -мезон-нуклонного взаимодействия от квадрата импульса π -мезона k .

Непрерывная линия соответствует резкому обрезанию, пунктирная — обрезанию Юкавы.

и μ , ρ сам виртуальных мезонов в нуклонном облаке, которое пропорционально k^2/ω^3 , а не $1/\omega^3$, как в случае скалярной теории. Аналогично π -мезон-нуклонное сечение рассеяния при малых энергиях пропорционально k^4 , поскольку оно включает и испускание и поглощение. Это обстоятельство иллюстрируется фиг. 15.1; оно находится в удивительном контрасте с рассеянием $\gamma - e$, для которого сечение начинается с константы, будучи обусловлено испусканием и поглощением в S -состоянии.

Увеличение силы взаимодействия начинается лишь при $k^{-1} >$ радиуса источника ($\sim M^{-1}$), как это изображено на фиг. 15.2. Поэтому импульс обрезания $k_{\max} \sim M$ для фурье-компоненты источника определяет максимальную силу источника: она оказывается равной

$$\max \left[\frac{f^2}{\mu^2} k^2 \rho^2(k) \right] \approx \frac{f^2}{\mu^2} k_{\max}^2 \sim f^2 \left(\frac{M}{\mu} \right)^2.$$

Если размеры источника уменьшаются, максимальная сила его возрастает. В безразмерных единицах можно ожидать, что разложение по f на самом деле совпадает с разложением по $f k_{\max}/\mu$. Это соответствует усреднению силы взаимодействия по энергии и действительно имеет место. В дальнейшем, когда мы будем говорить о сильной или слабой связях, мы будем иметь в виду соответственно случаи $f k_{\max}/\mu \gg 1$ или $\ll 1$. Что касается формы $\rho(r)$, то мы будем пользоваться функцией, которая гладко стремится к нулю в

радиуса $1/k_{\text{max}}$. Поскольку детальный вид $\rho(r)$ не имеет, вероятно, физического значения, наибольший интерес представляют результаты, не зависящие от него. Как мы увидим, при низких энергиях наблюдаемые величины зависят, помимо силы взаимодействия, только от одного параметра, а именно от его радиуса. На практике удобно использовать резкое обрезание источника в импульсном пространстве:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & \text{для } k < k_{\text{max}}, \\ 0 & \text{для } k > k_{\text{max}}, \end{cases}$$

где $k_{\text{max}} \sim 1/(\text{радиус источника}) \sim M$. Если отсутствие непрерывности в этом случае приводит к каким-либо неприятностям, можно использовать обрезание Юкавы

$$\rho(k) = \frac{k_{\text{max}}^2}{k^2 + k_{\text{max}}^2},$$

$$\rho(r) = \frac{e^{-k_{\text{max}} r}}{4\pi k_{\text{max}} r},$$

или гауссово обрезание

$$\rho(k) = e^{-k^2/k_{\text{max}}^2}.$$

ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЫ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

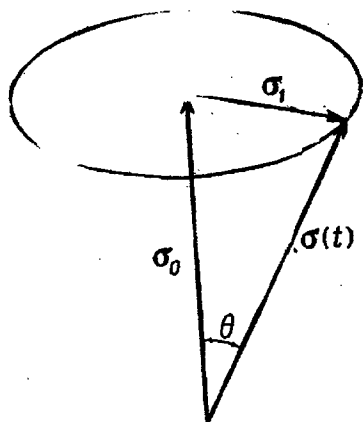
16.1. Классическое описание ¹⁾ стационарного движения. В согласии с нашей обычной процедурой обсудим в первую очередь уравнения движения в том пределе, когда после получения таких уравнений ²⁾ все величины могут считаться коммутирующими числами. В этом случае векторы σ и τ считаются единичными и определяют направления спина и изоспина. Уравнения (15.7) — (15.9) описывают при этом нелинейную классическую систему, и решение может быть получено только в пределе, когда все величины осциллируют с бесконечно малыми амплитудами около своих положений равновесия. Упростим теперь поставленную задачу, обратившись к модели без изоспина. В этой модели классические уравнения можно разрешить точно и мы сможем глубже понять их структуру. При этом мы будем пренебрегать τ , а не σ по той причине, что, опустив σ , мы изменили бы размерность константы связи и, следовательно, зависимость соответствующих величин от предельного импульса.

В этом разделе мы рассмотрим решения с $\phi^{\text{in}} = 0$, т. е. взаимодействие нуклона с собственным мезонным полем. С аналогичной задачей мы встречаемся в электромагнитной теории. Однако здесь мезонное поле связано с σ и, следовательно, с ротационными, а не трансляционными степенями свободы. Таким образом, в то время как основной эффект воздействия собственного электромагнитного поля на заряженное тело заключается в добавлении некоторой величины к его инертной массе, соответствующее мезонное поле рождает момент инерции нуклона. По аналогии с решением электромагнитных уравнений для поля, сопровождающего равномерно движущийся заряд, мы получим решения для мезонного поля, следующего за равномерно вращающимся вектором σ . Эти две теории различны в квантовой механике, где импульс не квантуется, а момент количества движения должен быть величиной, равной полуцелому числу \hbar . В квантовой механике вращение может происходить только с определенными

¹⁾ При изложении этого вопроса мы близко следуем Паули [1].

²⁾ В классическом пределе уравнения движения следуют из скобок Пуассона, которые имеют ту же величину, что и соответствующие коммутаторы.

частотами, которые определяются моментом инерции мезонного поля. Если момент инерции мал, энергия этого движения велика. Когда эта энергия становится больше массы мезона, нуклон испускает мезон; иначе говоря, возбужденное стационарное состояние нуклона становится нестабильным по отношению к распаду на мезон и нуклон в основном состоянии. Такое движение соответствует затухающему вращению, которое может, однако, поддерживаться, как это будет видно ниже, при $\phi^{in} \neq 0$. Подобные нестабильные возбужденные уровни



Фиг. 16.1. Иллюстрация к стационарному решению задачи о движении спина σ .

нуклона были действительно обнаружены экспериментально, и в настоящее время спектроскопия нуклона представляет собой интересную новую область физики.

В качестве переменных в нашей модели выступают зависящий от времени единичный вектор $\sigma(t)$ и классическое мезонное поле $\phi(r, t)$. Они связаны уравнениями

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \frac{g}{\mu} \int d^3r' dt' \Delta^{ret}(r - r', t - t') \sigma(t') \cdot \nabla \rho(r') = \\ &= \frac{g}{\mu} \int \frac{dK_0}{2\pi} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} dt' \frac{e^{-iK_0(t-t')}}{\omega^2 - (K_0 + i\epsilon)^2} e^{ik \cdot r} \rho(k) \sigma(t') \cdot ik \quad (16.1) \end{aligned}$$

и

$$\dot{\sigma}(t) = -2 \frac{g}{\mu} \sigma \times \int d^3r' \rho(r') \nabla \phi(r', t). \quad (16.2)$$

Последнее уравнение показывает, что мезонное поле действует на спин закручивающим образом. Направление крутящего момента перпендикулярно градиенту мезонного поля и спину, так что σ^2 оказывается константой. Если бы градиент был постоянной величиной,

мы получили бы в качестве решения вращение, аналогичное движению волчка в гравитационном поле. Хотя в нашем случае $\nabla\phi$ не имеет заданного определенного значения, можно ожидать, что аналогичное движение вполне возможно. В соответствии с этим будем искать решение, соответствующее равномерному вращению σ вокруг трех осей. В качестве предполагаемой формы решения, содержащей угол θ и частоты вращения в виде параметров (фиг. 16.1), возьмем следующее выражение:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1(t),$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \omega_s t \\ \sin \theta \sin \omega_s t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = 1. \quad (16.3)$$

Поскольку σ_1 содержит только частоты $\pm \omega_s$, мезонное поле равно ¹⁾

$$\phi(r, t) = \frac{g}{\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_p(k)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt' dK_0}{2\pi} e^{-iK_0(t-t')} \times$$

$$\times \frac{\sigma(t') \cdot i\mathbf{k}}{\omega^2 - (K_0 + i\epsilon)^2} = \frac{g}{\mu} [\sigma_0 \cdot \nabla V_0(r) + \sigma_1 \cdot \nabla V_{\omega_s}(r)], \quad (16.4)$$

где V определяется формулой ($V_0 \equiv V_{\omega_s=0}$):

$$V_{\omega_s}(r) = \int d^3r' \rho(r') \frac{\exp[-(\mu^2 - \omega_s^2)^{1/2} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (16.5)$$

В зависимости от значения ω_s , величина V_{ω_s} либо убывает экспоненциально (при $\omega_s < \mu$), либо осциллирует на бесконечности (при $\omega_s > \mu$). В первом случае излучение отсутствует и мы получаем стационарную прецессию с $\phi^{\text{in}} = 0$, которую мы и изучим в первую очередь ²⁾. Как и в большинстве задач классической теории поля, тщательный анализ этого случая требует довольно длинных, хотя и простых алгебраических вычислений.

¹⁾ В дальнейшем $\rho(r)$ считается сферически симметричной и вещественной функцией, так что и $\rho(k)$ имеет такие же свойства. Обозначим константу связи через g , чтобы различать „нейтральную псевдоскалярную“ и „симметричную псевдоскалярную“ теории.

²⁾ Величина $i\epsilon$ в этом случае не играет существенной роли и может быть опущена.

Подставляя (16.4) в (16.2) и используя тот факт, что $\sigma_0 \cdot \sigma_1 = 0$ и $\int d^3r f(r) x_i x_j = \delta_{ij} \int d^3r f(r) r^2/3$, получаем¹⁾

$$\dot{\sigma}_1(t) = 2 \frac{g^2}{\mu^2} [\sigma_0 + \sigma_1(t)] \times \int d^3r \nabla \rho(r) [\sigma_0 \cdot \nabla V_0(r) + \sigma_1 \cdot \nabla V_{\omega_s}(r)] = \sigma_0 \times \sigma_1 C(\omega_s), \quad (16.6)$$

$$C(\omega_s) = \frac{2}{3} \frac{g^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{4\pi} [f(\omega_s) - f(0)],$$

$$f(\omega_s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk k^4 |\rho(k)|^2}{\omega^2 - \omega_s^2}.$$

Подстановка (16.3) означает, что $\dot{\sigma}(t) = (\omega_s |\cos \theta|) \sigma_0 \times \sigma_1$. Следовательно, она удовлетворяет (16.6) при условии, что

$$\omega_s = C(\omega_s) \cos \theta. \quad (16.7)$$

Уравнение (16.7) определяет частоту ω_s для заданного угла θ . Выясним теперь условия, при которых (16.7) имеет решение для $\omega_s < \mu$. Для этого нужно вычислить функцию $C(\omega_s)$.

Если импульс обрезания k_{\max} значительно больше μ , то можно показать, что главный член в $f(\omega_s)$ не зависит от ω . Для этого используем тождество

$$\frac{k^4}{k^2 + \mu^2 - \omega_s^2} = k^2 - (\mu^2 - \omega_s^2) + \frac{(\mu^2 - \omega_s^2)^2}{k^2 + \mu^2 - \omega_s^2}. \quad (16.8)$$

Первый член разложения дает наибольшую расходимость при $k_{\max} \rightarrow \infty$:

$$N = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 |\rho(k)|^2 \sim \frac{2}{3} \frac{k_{\max}^2}{\pi}, \quad (16.9)$$

тогда как второй член расходится только линейно и отражает наличие у источника радиуса a :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk |\rho(k)|^2 = \int d^3r d^3r' \frac{\rho(r) \rho(r')}{|r - r'|} = \frac{2}{\pi} k_{\max}. \quad (16.10)$$

¹⁾ Объяснение обозначений см. в примечании 1 на стр. 43.

Остальные члены сходятся, и мы можем поэтому положить $\rho(k) \equiv 1$. Собирая получающиеся выражения, имеем

$$f(\omega_s) = N - \frac{\mu^2 - \omega_s^2}{a} + (\mu^2 - \omega_s^2)^{3/2}$$

и

$$C(\omega_s) = \frac{2}{3} \frac{g^2}{\mu^2} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\omega_s^2}{a} + (\mu^2 - \omega_s^2)^{3/2} - \mu^3 \right]. \quad (16.11)$$

Вычисления существенно упрощаются, если предположить, что линейный размер источника много меньше комptonовской длины волн π -мезона, т. е. $1/a \gg \mu^2$. В этом случае поле состоит в основном из компонент с большими импульсами и легко может следовать за сравнительно медленным движением спина. Учитывая последовательные эффекты запаздывания с помощью разложения

$$\Delta^{\text{ret}}(r, t) = \left[\delta(t) + \delta''(t) \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \dots \right] \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r},$$

мы получаем для (16.4) следующее приближенное выражение:

$$\phi(r, t) = \frac{g}{\mu} \left[\sigma(t) + \sigma''(t) \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \dots \right] \cdot \nabla V_0(r), \quad (16.12)$$

и, следовательно, уравнение

$$\dot{\sigma} = - \frac{g^2}{6\pi\mu^2} \frac{\sigma \times \ddot{\sigma}}{a}. \quad (16.13)$$

Это уравнение представляет собой предельную форму уравнения (16.6), откуда следует

$$\omega_s = 0 \quad \text{или} \quad \omega_s = \frac{6\pi\mu^2 a}{g^2 \cos \theta}. \quad (16.14)$$

Таким образом, для достаточно малых значений μa всегда существует решение с $\omega_s < \mu$. Это утверждение перестает быть справедливым в квантовой теории, где угловой момент должен быть целым. Из того, что нам известно о движении твердого тела в квантовой механике, можно ожидать, что для получения квантового результата достаточно дополнить классические вычисления условием квантования углового момента. Мы увидим в следующей главе, как это условие возникает в квантовой теории поля. Чтобы получить соответствие между квантовым и классическим анализом, следует вычислить сперва энергию и угловой момент для нашего решения,

¹⁾ Причина, побуждающая нас исследовать не только этот предельный случай, заключается в том, что для понимания задачи о рассеянии требуется знать полное решение.

используя формулы предыдущей главы для H и J и опуская спин. Учитывая (16.4), мы имеем после некоторых вычислений ¹⁾

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3r \left\{ \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2\phi^2] + \frac{g}{\mu} \rho\sigma \nabla\phi \right\} - \mathcal{E}_0 = \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho^2(k) \frac{g^2}{\mu^2} \frac{k^2}{3} \left\{ \sigma_0^2 \left(\frac{\omega_s^2}{2\omega^4} - \frac{1}{\omega^2} \right) + \right. \\
 &+ \left. \sigma_1^2 \left[\frac{\omega_s^2 + \omega^2}{2(\omega^2 - \omega_s^2)^2} - \frac{1}{\omega^2 - \omega_s^2} \right] \right\} - \mathcal{E}_0 = -\frac{g^2}{4\pi\mu^2} \frac{1}{6} \times \\
 &\times \left\{ f(0) \cos^2\theta + \left[f(\omega_s) - 2\omega_s^2 \frac{\partial}{\partial(\omega_s)^2} f(\omega_s) \right] \sin^2\theta \right\} - \mathcal{E}_0 = \Delta E, \\
 \mathcal{E}_0 &= -\frac{g^2}{4\pi\mu^2} \frac{f(0)}{6}, \tag{16.15}
 \end{aligned}$$

$$\Delta E = \frac{g^2}{4\pi\mu^2} \frac{\sin^2\theta}{6} \left[\frac{\omega_s^2}{a} + \mu^3 - (\mu^2 - \omega_s^2)^{1/2} - 3\omega_s^2(\mu^2 - \omega_s^2)^{1/2} \right].$$

Величина \mathcal{E}_0 выбирается из условия ее равенства энергии²⁾ в статическом случае ($\omega_s = 0$). Оставшуюся часть энергии мы назовем ΔE , поскольку она представляет собой разность энергий для решения, соответствующего вращению, и статического решения. Как можно видеть, для достаточно больших a разность $\Delta E > 0$; это означает, что статическое решение оказывается решением с наименьшей энергией.

Для углового момента (15.12) получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} &= \frac{\sigma}{2} + \frac{g^2}{\mu^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\rho^2(k) \sigma_1 \cdot \mathbf{k}}{\omega^2 - \omega_s^2} \mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}} \left(\frac{\sigma_0 \cdot \mathbf{k}}{\omega^2} + \frac{\sigma_1 \cdot \mathbf{k}}{\omega^2 - \omega_s^2} \right) = \\
 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{g^2}{\mu^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2 \rho^2(k)}{3(\omega^2 - \omega_s^2)} \left(\frac{\dot{\sigma}_1 \times \sigma_0}{\omega^2} + \frac{\dot{\sigma}_1 \times \sigma_1}{\omega^2 - \omega_s^2} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \left\{ \cos\theta + \omega_s \frac{g^2}{4\pi\mu^2} \frac{2}{3} \sin^2\theta \left[\frac{1}{a} - \frac{3}{2} (\mu^2 - \omega_s^2)^{1/2} \right] \right\}. \tag{16.16}
 \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, компоненты вектора \mathbf{J} , параллельные σ_1 , сокращаются в силу условия (16.6). Следовательно, полный угловой момент оказывается постоянным вектором, направленным вдоль оси z .

¹⁾ Заметим, что H_0 дает положительный вклад и полную энергию, а H' — отрицательный (и большой) вклад.

²⁾ Энергия \mathcal{E}_0 , как и следовало ожидать, оказывается не зависящей от θ . Энергия же основного состояния равна нулю.

Для получения более простых результатов перейдем к пределу $a^{-1} \gg \mu$, что действительно выполняется в π -мезон-нуклонном взаимодействии. Тогда

$$\omega_s = \frac{3a}{2 \cos \theta (g^2/4\pi\mu^2)}.$$

и, следовательно,

$$J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \sec \theta \end{bmatrix}, \quad |J| > \frac{1}{2}. \quad (16.17)$$

Разность ΔE выражается через J как

$$\Delta E = \frac{4\pi}{g^2} \frac{3a\mu^2}{2} \left(J^2 - \frac{1}{4} \right), \quad \omega_s = \frac{\partial \Delta E}{\partial J}, \quad (16.18)$$

что соответствует энергии вращения твердого тела с моментом инерции $g^2/(4\pi\mu^2 3a)$. Последний обусловлен мезонным полем, следующим за спином. Величину его можно без труда получить в виде суммы по всем возможным значениям импульса от произведения

$$\begin{aligned} & (\text{Вероятность обнаружения мезона}) \times (\text{Энергия мезона}) \times \\ & \times (\text{Расстояние, на которое мезон может уйти} \\ & \quad \text{от источника})^2 = \\ & = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{g^2}{\mu^2} \frac{p^2(k) k^2}{\omega^3} \right] \omega \left(\frac{1}{\omega^2} \right). \end{aligned}$$

Выражение (16.18) можно использовать для определения энергии следующего уровня в квантовой теории¹⁾. За основным состоянием ($J = 1/2$) следует состояние с $J = 3/2$ с энергией

$$\Delta E_{3/2} = \frac{6\pi a \mu^2}{g^2} = \omega_b.$$

Таким образом, условие стабильности этого состояния по отношению к мезонному распаду $\omega_b < \mu$ имеет место только для достаточно больших значений $g^2/4\pi$. Причина этого заключается в том, что только в случае сильной связи мезонное облако оказывается достаточно плотным, чтобы обеспечить необходимый момент инерции. Для слишком малых моментов инерции вращение должно быть чрезвычайно быстрым, чтобы угловой момент оказался равным единице. Мезонное облако при этом не выдержит центробежных сил и распадется. Положение здесь аналогично положению с нейтрон-протонным взаимодействием, сила которого достаточна только для образования одного связанного триплетного S -состояния (дейтрона). Состояния с большими угловыми моментами разрываются центробежными силами. В природе мы, по-видимому, сталкиваемся именно

¹⁾ При этом величину $J^2 - 1/4$ следует заменить на $J(J+1) - 3/4$.

с этой ситуацией; связь оказывается недостаточно сильной для образования возбужденного состояния нуклона. Однако на эксперименте наблюдается гигантский резонанс в мезонном рассеянии при энергиях мезонов $\sim 2\mu$. Это явление следует отнести за счет нестабильного возбужденного состояния, влияние которого на рассеяние будет рассмотрено в следующем пункте.

16.2. Классический анализ рассеяния. Для $\omega_b > \mu$ функция $C(\omega_b)$, заданная уравнением (16.11), становится комплексной. Соответственно и наша подстановка (16.3) оказывается неправомерной. Комплексная частота означает затухание, обусловленное излучением. Чтобы поддержать движение, введем поле ϕ^{in} , связанное с пучком падающих мезонов; тогда прецессия спина нуклона проявится в виде резонанса при рассеянии.

В качестве ϕ^{in} мы возьмем плоскую волну

$$\phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)} + A^* e^{-i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}, \quad (16.19)$$

амплитуда которой есть величина порядка

$$(\text{Нормировочный объем})^{-1/2},$$

так что высшими степенями по A можно пренебречь. Удобно разбить σ следующим образом:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1(t), \quad \sigma_1(t) = \sigma(\omega_0) e^{-i\omega_0 t} + \sigma^*(\omega_0) e^{+i\omega_0 t}. \quad (16.20)$$

Мы хотим, чтобы решение для σ оставалось статическим до того момента, когда появляется падающая волна¹⁾, поэтому σ_1 будет величиной порядка A , и ее высшими степенями можно пренебречь. Представление σ , соответствующее предположению (16.3), имеет вид

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(\omega_0) = \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16.21)$$

Уравнение поля, включающее ϕ^{in} ,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{\mu} \int d^3 r' dt' \Delta^{\text{ret}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \sigma(t') \cdot \nabla_{\rho}(\mathbf{r}') \quad (16.22)$$

можно рассматривать совершенно аналогично предыдущему, и мы сразу же приходим к выражению, соответствующему положительно-частотной части (16.6):

$$i\omega_0 \sigma(\omega_0) = 2i \frac{g}{\mu} A \sigma_0 \times \mathbf{k}_0 \rho(k) + C(\omega_0) \sigma_0 \times \sigma(\omega_0). \quad (16.23)$$

¹⁾ Для осуществления этой ситуации необходимо построить ϕ^{in} в виде волнового пакета.

Первый член в правой части этого равенства представляет собой вращающий момент, обусловленный падающим полем. Второй член связан с реакцией поля источника и представляет собой точно то же выражение, что и раньше. Из (16.23) следует, что только компонента \mathbf{k}_0 , перпендикулярная к σ_0 , вносит вклад в движение. Выбрав это направление за направление оси x , находим, что первое слагаемое в (16.23) является вектором, направленным по оси y , а второе — вектором, лежащим в плоскости xu и перпендикулярным к $\sigma(\omega_0)$. Поэтому можно удовлетворить (16.23), приняв

$$\sigma(\omega_0) = \gamma \sigma_0 \times \mathbf{k}_0 - \beta \sigma_0 \times (\sigma_0 \times \mathbf{k}_0) \quad (16.24)$$

или же в упомянутой выше координатной системе:

$$\sigma(\omega_0) = |\mathbf{k}_0| \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя это выражение в (16.23), находим

$$\gamma = \frac{2gA\omega_0\rho(k)}{\mu[\omega_0^2 - C^2(\omega_0)]}, \quad \beta = \frac{-2igAC(\omega_0)\rho(k)}{\mu[\omega_0^2 - C^2(\omega_0)]}, \quad (16.25)$$

где $C(\omega_0)$ определяется как

$$C(\omega_0) = \frac{g^2}{6\pi\mu^2} \left(\frac{\omega_0^2}{a} - ik_0^3 - \mu^3 \right). \quad (16.26)$$

Движение σ сходно с затухающим движением гармонического осциллятора под действием внешней периодической силы. Пренебрегая C , мы получаем линейное движение в направлении y , совпадающее по фазе с вращающим моментом, обусловленным ϕ^{in} . Величина C характеризует влияние соответствующего поля, вызывающего вращение в направлении x . В результате получается эллиптическое движение, причем его проекция на направление y не синфазна с ϕ^{in} из-за наличия мнимой части C (фиг. 16.2). Если C становится настолько большой величиной, что $\text{Re}[\omega_0^2 - C^2(\omega_0)] = 0$, то движение вдоль оси y расходится по фазе с ϕ^{in} на 90° . Для $1/a \gg \omega_0$ это происходит при

$$\omega_r = \frac{6\pi\mu^2 a}{g^2},$$

и при этой энергии амплитуда осцилляций достигает максимального значения. Резонансная частота в точности равна найденной нами частоте для прецессирующего решения с $\cos\theta = 1$.

Чтобы определить сечение рассеяния, вычислим $\phi(r, t)$, определяемый по уравнению (16.22) в пределе $r \rightarrow \infty$. Величина σ_0

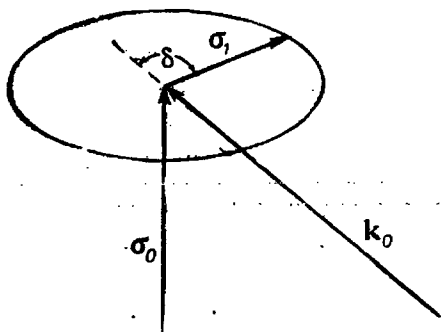
порождает только экспоненциально убывающее поле, а поле, вызванное $\sigma(\omega_0)$, осциллирует на больших расстояниях и представляет собой обычные расходящиеся радиальные волны (к. с. \equiv комплексно сопряженное):

$$\begin{aligned} \phi &= A e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)} + \frac{i g \rho(k_0) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}}{4\pi\mu r} \sigma(\omega_0) \mathbf{k}_s + \text{к. с.} = \\ &= A e^{-i\omega_0 t} \left[e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + \frac{e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}}{r} f(\vartheta) \right] + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (16.27)$$

где \mathbf{k}_s имеет длину k_0 и направление \mathbf{r} . Дифференциальное сечение рассеяния определяется теперь стандартным способом путем сравнения падающего и рассеянного потоков:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\vartheta)|^2 = \left| \frac{g^2 \rho^2(k)}{4\pi\mu^2} \frac{2\omega_0}{\omega_0^2 - C^2(\omega_0)} \right|^2 \times \\ &\times \left| \mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \times \mathbf{k}_0 + i \frac{C(\omega_0)}{\omega_0} \mathbf{k}_s \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \times [\boldsymbol{\sigma}_0 \times \mathbf{k}_0] \right|^2. \end{aligned} \quad (16.28)$$

В противоположность примерам, рассмотренным во второй части книги, это сечение не изотропно. Оно зависит от относительной



Фиг. 16.2. Иллюстрация к решению задачи о движении спина σ под действием падающей мезонной волны с импульсом \mathbf{k}_0 .

Фазовый сдвиг между прецессирующим спином σ_1 и \mathbf{k}_0 обозначен через δ .

ориентации трех векторов, \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}_s , $\boldsymbol{\sigma}_0$ и содержит много интересной информации. Мезоны испускаются преимущественно в направлении движения спина. Движение, обусловленное падающим мезоном, дает угловое распределение с пиком в направлении, перпендикулярном к $\boldsymbol{\sigma}_0$ и \mathbf{k}_0 , в то время как другой член амплитуды, связанный с реакцией поля, дает излучение преимущественно в направлении падения. Все это очень ценно для экспериментальной проверки теории, однако наша классическая схема может неверно воспроизводить эти тонкие детали. Причина заключается в том, что спин $1/2$ отличается от классического углового момента; в частности, его нулевые осцилляции равны по порядку его собственной величине (классически

$\sigma^2 = 1$, квантовомеханически $\sigma^2 = 3$). В соответствии с этим мы не будем опираться на эти предсказания теории и усредним сечение по направлениям спина:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_s |f|^2 = \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^2 \frac{k^4}{\mu^4 \omega_0^2} \left| \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - C^2(\omega_0)} \right|^2 \left[\sin^2 \vartheta + \left| \frac{C(\omega_0)}{\omega_0} \right|^2 \frac{7 \cos^2 \vartheta + 1}{5} \right], \end{aligned} \quad (16.29)$$

где k — длина векторов \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_s , а ϑ — угол между ними.

Если ω_0 и резонансная энергия много меньше ω_{\max} , то

$$C(\omega_0) = \frac{\omega_0^2}{\omega_r} - i \frac{\Gamma}{2}, \quad (16.30)$$

причем резонансная энергия

$$\omega_r = \frac{6\pi\mu^2}{g^2}, \quad (16.31)$$

а ширина

$$\Gamma = \frac{4}{3} \frac{g^2}{4\pi\mu^2} k_r^3. \quad (16.32)$$

Около резонанса сечение рассеяния принимает знакомую форму:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{8}{15} \left(\frac{g^2}{4\pi} \right)^2 \frac{k^4}{\mu^4} \frac{3 + \cos^2 \vartheta}{(\omega_0 - \omega_r)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (16.33)$$

Полученное угловое распределение только качественно имеет правильный характер (точный квантовомеханический результат равен $(1 + 3 \cos^2 \vartheta)$). При энергии, равной ω_r , полное сечение достигает максимального значения $\bar{\sigma} = 16\pi/k_r^2$, которое в два раза больше квантовомеханического значения для резонанса с $J = 3/2$ (см. фиг. 15.1). Аналогичным образом вычисления такого же рода [2] не дали бы правильного распределения заряда, если бы мы учли изоспин. Экспериментальные данные согласуются с квантовомеханическими предсказаниями для резонанса в состоянии $J = 3/2$ с точностью 5—10%. Классические вычисления непригодны, таким образом, для сопоставления с результатами измерений. Тем не менее основной факт низкоэнергетической физики π -мезонов, а именно существование резонансного состояния с высшим угловым моментом правильно предсказывается классической моделью. Так основные черты π -мезон-нуклонного взаимодействия можно понять в рамках интуитивной картины нуклона, окруженного мезонным полем¹⁾.

¹⁾ В нашем классическом случае нуклон имеет $J = 1/2$.

16.3. Квантовые аспекты статической модели. Обсудив уравнения движения в классическом пределе, мы обратимся теперь к эффектам, связанным с квантовой природой поля, спина и изоспина. В то время как спин и изоспин, несомненно, принадлежат к области малых значений квантовых чисел, из двух дополнительных аспектов описания поля ни один не проявляется в чистом виде в π -мезон-нуклонной системе, но оба аспекта необходимы для ее понимания. В первую очередь мы изучим характерные черты элементарных процессов, описываемых H' . Чтобы получить некоторое представление о свойствах изоспина, используем круговые компоненты [см. (15.4)]. Применение $\phi^{\alpha}\tau^{\alpha}$ к голому нуклонному состоянию порождает ¹⁾ мезоны π^0 (ϕ^0), π^+ (ϕ^1) и π^- (ϕ^{-1}) и в двух последних случаях меняет протон на нейтрон (τ^-) и, наоборот, (τ^+) таким образом, что заряд сохраняется. Мы имеем ²⁾:

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \tau_{\alpha} |p\rangle &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} |n\pi^+\rangle - \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} |p\pi^0\rangle = \\ &= \left| T = \frac{1}{2}, T_z = \frac{1}{2} \right\rangle, \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} \sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \tau_{\alpha} |n\rangle &= -\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} |p\pi^-\rangle + \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} |n\pi^0\rangle = \\ &= \left| T = \frac{1}{2}, T_z = -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (16.34)$$

с

$$\begin{aligned} |n\pi^+\rangle &\equiv -\phi^1 |n\rangle, \\ |p\pi^+\rangle &\equiv -\phi^1 |p\rangle. \end{aligned}$$

Поскольку величина $\sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \tau_{\alpha}$ инвариантна относительно вращений в изоспиновом пространстве (т. е. представляет собой скаляр в этом пространстве), состояния (16.34) должны иметь, как и нуклоны, изоспин, равный $1/2$. Фактически коэффициенты при выражениях в правой части равенства (16.34) являются хорошо известными коэффициентами Клебша — Гордона для сложения изоспина π -мезона ($=1$) со спином голого нуклона ($=1/2$) при полном изоспине, равном $1/2$. Остальные собственные состояния нуклонного заряда π -мезон-нуклонной системы должны иметь $T = 3/2$, $T_z = \pm 1/2$ и быть ортогональны

¹⁾ Напоминаем читателю, что $\phi^0 \equiv \phi_3$, $\phi^1 \equiv \phi_+$, $\phi^{-1} \equiv \phi_-$.

²⁾ Множитель $(1/3)^{1/2}$ играет роль нормировочной постоянной. Относительный сдвиг фаз выбран в согласии с Кондоном и Шортли [3].

к состояниям с $T = 1/2$; эти состояния имеют вид ¹⁾

$$\begin{aligned} \left| T = \frac{3}{2}, T_z = \frac{1}{2} \right\rangle &= \left(\frac{1}{3} \right)^{1/2} | \pi \pi^+ \rangle + \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} | p \pi^0 \rangle, \\ \left| T = \frac{3}{2}, T_z = -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left(\frac{1}{3} \right)^{1/2} | p \pi^- \rangle + \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} | \pi \pi^0 \rangle. \end{aligned} \quad (16.35)$$

Оставшиеся два состояния с $T = 3/2$ есть

$$\begin{aligned} \left| T = \frac{3}{2}, T_z = \frac{3}{2} \right\rangle &= | p \pi^+ \rangle, \\ \left| T = \frac{3}{2}, T_z = -\frac{3}{2} \right\rangle &= | n \pi^- \rangle. \end{aligned} \quad (16.36)$$

Все состояния (16.34) — (16.36) — это собственные состояния T^2 и T_z . Мы замечаем, что состояния с $T = 1/2$, $T_z = \pm 1/2$ содержат вдвое больше заряженных, чем нейтральных мезонов, тогда как в состояниях с $T = 3/2$, $T_z = \pm 1/2$ это отношение имеет обратное значение. Если усреднить по всем состояниям с $T = 1/2$ или $T = 3/2$, то легко видеть, что π^0 , π^+ и π^- -мезоны всегда присутствуют в равных количествах. В этом находит свое выражение изотропия в изотопическом пространстве, обусловленная видом гамильтониана (15.5), а именно выбором одинаковой константы связи $|f|$ для всех компонент ϕ_a . Из (16.34) следует, что эффективная сила взаимодействия для испускания заряженного мезона в $(2)^{1/2}$ раз больше, чем для нейтрального. Далее, константа связи для испускания нейтрального π^0 -мезона имеет для протонов и нейтронов противоположные знаки. Последнее свойство имеет нетривиальное теоретико-групповое происхождение и может быть проверено экспериментально, например, при изучении упругого фоторождения π^0 -мезона на дейтерии (т. е. когда конечное состояние ядра имеет ту же энергию, что и начальное). Волны, соответствующие рождению π^0 -мезона на протоне или нейтроне будут интерферировать, уменьшая или увеличивая вероятности этих событий в зависимости от относительного знака констант связи. Как упоминалось в предыдущей главе, зависимость H' от импульса $H' \sim k$ характерна для взаимодействия в P -состоянии и будет играть существенную роль в последующих главах. Аналогично изоспину при применении $\int d^3r p(r) \sigma \cdot \nabla \phi$ к нуклону возникают только состояния с тем же (что у нуклона) полным моментом, равным $1/2$. Как и ранее, число возможных состояний π -мезон-нуклонной системы равно шести, что соответствует $J = 3/2$ и $J = 1/2$. Их можно записать совершенно аналогично (16.34) и (16.35), если характеризовать

¹⁾ Мы снова выбираем фазы в согласии со стандартными коэффициентами Клебша — Гордона (см. книгу Кондона и Шортли [3]).

состояния компонентой орбитального момента π -мезона l_z , равной 1, 0, -1 , и компонентой спина нуклона \uparrow (вверх) и \downarrow (вниз)

$$\begin{aligned} \left| J = \frac{3}{2}, J_z = \frac{3}{2} \right\rangle &= |\uparrow 1\rangle, \\ \left| J = \frac{3}{2}, J_z = \frac{1}{2} \right\rangle &= \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} |\downarrow 1\rangle + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} |\uparrow 0\rangle, \\ \left| J = \frac{3}{2}, J_z = -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} |\uparrow -1\rangle + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} |\downarrow 0\rangle, \quad (16.37) \\ \left| J = \frac{3}{2}, J_z = -\frac{3}{2} \right\rangle &= |\downarrow -1\rangle, \\ \left| J = \frac{1}{2}, J_z = \frac{1}{2} \right\rangle &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} |\downarrow 1\rangle - \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} |\uparrow 0\rangle, \\ \left| J = \frac{1}{2}, J_z = -\frac{1}{2} \right\rangle &= -\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} |\uparrow -1\rangle + \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} |\downarrow 0\rangle. \end{aligned}$$

Хотя мы находимся в области малых квантовых чисел, классические свойства сложения угловых моментов уже проявляются в (16.37). Так, например, в состоянии $|J = 3/2, J_z = 1/2\rangle$ конфигурация $|\uparrow 0\rangle$ входит с удвоенным весом по сравнению с конфигурацией $|\downarrow 1\rangle$. С другой стороны, в состоянии $|J = 1/2, J_z = 1/2\rangle$ имеет место обратная ситуация. В силу сохранения углового момента при испускании π -мезона нуклоном возможны только состояния с $J = 1/2$; при этом (16.37) показывает, что в таком процессе спин нуклона переворачивается два раза из трех. Этот факт представляет собой квантово-механическое выражение классической прецессии спина, уже изученной нами.

Аналогом утверждения об отношении чисел заряженных и нейтральных мезонов служит утверждение о сферической форме мезонного облака. Мы видим, что в состояниях с $J = 1/2$ мезонов с $l_z = \pm 1$ в два раза больше, чем с $l_z = 0$. Поскольку первые мезоны имеют угловое распределение, пропорциональное $1/2 \cdot \sin^2 \theta$, а распределение мезонов с $l_z = 0$ пропорционально $\cos^2 \theta$, то распределение оказывается изотропным в согласии с общей теоремой об отсутствии у частиц со спином $1/2$ квадрупольного момента¹⁾. С другой стороны, состояния с $J = 3/2, J_z = \pm 1/2$ дают угловое распределение мезонов $\sim 1 + 3 \cos^2 \theta$, как это упоминалось в предыдущем пункте.

В заключение этой главы сделаем несколько замечаний относительно спектра собственных значений H . Если $H' = 0$, спектр имеет простой вид (см., например, фиг. 12.3). Для $T = J = 1/2$ мы имеем нуклон — четырехкратно вырожденное состояние с $E = 0$. При $E = \mu$ начинаются одномезонные состояния непрерывного спектра,

¹⁾ Хотя в данном случае мы вывели это заключение для одного мезона в нуклонном облаке, оно может быть обобщено на любую систему с $J = 1/2$.

которые могут иметь $T = 3/2, J = 1/2; T = 1/2, J = 3/2, T = 3/2, J = 3/2$. В общем случае мезоны, связанные с нуклоном в систему с T или $J = (2n + 1)/2$, появляются при (или выше) энергии $E = n\mu$.

При включении H' все уровни понижаются¹⁾, но предполагается, что для достаточно малых H' структура энергетического спектра остается неизменной. Это означает, что по-прежнему остается четырехкратно вырожденное основное состояние $|N\rangle$, которое мы назовем физическим нуклоном. Над энергетической щелью, равной μ , расположены теперь состояния непрерывного спектра „физический нуклон + один мезон“. Они могут быть получены применением $\phi^{\text{in}}(\mathbf{k} \rightarrow 0, t)$ к $|N\rangle$. Поскольку оператор ϕ^{in} зависит от времени как $e^{i\mu t}$, состояние, получающееся в результате этой операции, действительно есть собственное состояние H с энергией μ . Состояния с несколькими мезонами можно получить, применяя произведение операторов рождения к основному состоянию.

Можно ожидать, что для достаточно сильных взаимодействий структура энергетического спектра меняется. Для f , превышающих некоторое критическое значение, можно найти дискретные состояния мезон-нуклонной системы, представляющие стабильные возбужденные уровни физического нуклона. Как мы видели ранее, классическая картина этих состояний соответствует прецессии нуклонного спина (или изоспина) и связанного с ним мезонного поля с частотами $< \mu$. В классическом приближении это происходит при достаточно больших константах связи ($f > \mu a$). В квантовой теории не найдена (за исключением некоторых приближений) минимальная константа связи, необходимая для образования связанных состояний. Не удалось даже доказать, что эти дискретные состояния будут всегда иметь энергию $E > 0$, так что основное состояние системы соответствует $T = J = 1/2$. Здесь следует опираться на полуэмпирический факт, состоящий в том, что нуклон, который мы наблюдаем в природе, имеет $J = T = 1/2$ и что не существует стабильных изобаров, поскольку первое возбужденное состояние с $J = T = 3/2$ лежит уже в области непрерывного спектра. Опыт приближенного рассмотрения показывает, что такого поведения и следует ожидать в модели с эмпирической константой связи и обрезанием. В соответствии с этим мы будем основываться в наших последующих рассуждениях на предположении, что энергетический спектр имеет нормальный вид.

¹⁾ Таково предсказание теории возмущений, поскольку

$$\Delta E = \sum_n \frac{|\langle n | H' | 0 \rangle|^2}{E_0 - E_n},$$

где E_0 и E_n — энергии основного и n -го состояний соответственно. Мы увидим, что для основного состояния это утверждение выполняется точно.

Глава 17

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ

17.1. Точные результаты. В течение длительного времени одной из основных задач мезонной теории был анализ физического нуклона в терминах голого нуклона и окружающего его мезонного облака. Анализ этой задачи завел в тупик, из которого до сих пор не найден выход; до настоящего времени количественное описание проблемы отсутствует. С другой стороны, даже если задача была бы решена, результат имел бы довольно ограниченную ценность. Причина заключается в том, что для описания свойств основного состояния оказался несущественным большой эффект физики π -мезонов, связанный с резонансным состоянием нуклона. Для основного состояния одинаково важны и явление резонанса, и эффекты средней величины как учитываемые рассматриваемой моделью, так и лежащие вне ее. Как мы увидим далее, измеримые величины, относящиеся к основному состоянию, наша модель предсказывает с точностью только около 50%. По плодотворности и сложности эту задачу можно сравнить с вычислением основного состояния легких ядер при неточном знании ядерных сил.

Существенным шагом вперед статической мезонной теории был отказ от рассмотрения свойств физического нуклона. С практической точки зрения модель оказалась наиболее подходящей для описания таких процессов, как π -мезон-нуклонное рассеяние. Здесь надо знать лишь определенные матричные элементы в основном состоянии, а многие величины типа собственной энергии \mathcal{E}_0 остаются ненаблюдаемыми. Тем не менее для лучшего понимания проблемы мы дадим в настоящей главе обзор наиболее существенных известных черт основного состояния и тех уроков, которые были вынесены в прошлом из изучения различных приближенных схем. Соответствующие методы представляют собой содержание последующих пунктов.

В первую очередь изучим структуру важнейших матричных элементов. Мы уже упоминали, что основное состояние

$$|N\rangle = |N, \text{in}\rangle = |N, \text{out}\rangle$$

четырекратно вырождено. Эти вырожденные состояния имеют спин и изоспин, равные $1/2$, и могут быть записаны как $|p \uparrow\rangle$, $|p \downarrow\rangle$,

$|n \uparrow\rangle, |n \downarrow\rangle$. Матричные элементы между этими состояниями можно значительно упростить, если использовать трансформационные свойства, связанные с инвариантностью относительно различных групп. Тот факт, что рассматриваемые состояния преобразуются как голые нуклоны при вращениях в обычном и изотопическом пространстве, можно выразить равенствами¹⁾

$$\begin{aligned} \langle \alpha, j | e^{i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}} | \alpha', j' \rangle &= \langle \alpha, j | e^{i\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}} | \alpha', j' \rangle, \\ \langle \alpha, j | e^{i\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}'} | \alpha', j' \rangle &= \langle \alpha, j | e^{i\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}'} | \alpha', j' \rangle \end{aligned} \quad (17.1)$$

для произвольных векторов \mathbf{n} и \mathbf{n}' . (При классификации состояний нуклона мы используем индекс $\alpha = 1, 2$ для изоспина и $j = 1, 2$ для углового момента.) Далее, поскольку $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ имеют те же трансформационные свойства относительно вращений, что и \mathbf{J} и \mathbf{T} и поскольку нуклонные состояния являются собственными состояниями этих операторов, мы имеем

$$\begin{aligned} \langle p | \tau_3 | p \rangle &= -\langle n | \tau_3 | n \rangle, \\ \langle p | \tau_3 | n \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (17.2)$$

При помощи вращений эти соотношения можно обобщить следующим образом:

$$\langle \alpha, j | \tau_\beta | \alpha', j' \rangle = \tau_\beta(\alpha, j | \tau_\beta | \alpha', j') \delta_{jj'}, \quad (17.3)$$

где τ_1 — число, не зависящее от β , α и α' . Аналогично

$$\langle \alpha, j | \sigma_i | \alpha', j' \rangle = \tau'_i(\alpha, j | \sigma_i | \alpha', j') \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (17.4)$$

где число τ'_i должно быть тем же, что и τ вследствие инвариантности теории к замене \mathbf{J} на \mathbf{T} . Одновременное вращение в спиновом и изоспиновом пространствах дает

$$\langle \xi' | \sigma_i \tau_\alpha | \xi \rangle = \tau_2(\xi' | \sigma_i \tau_\alpha | \xi), \quad (17.5)$$

куда входит новая константа τ_2 . Чтобы избежать большого числа индексов, мы ввели единый индекс $\xi = 1, \dots, 4$ для обозначения нуклонных состояний.

Таким образом, мы видим, что матричные элементы операторов \mathbf{J} , \mathbf{T} , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$ и их произведений между физическими нуклонными состояниями содержат всего два произвольных параметра τ_1 и τ_2 . На самом деле они еще не вполне произвольны, а должны удовлетворять некоторым неравенствам. Чтобы получить эти неравенства,

¹⁾ Операторы $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$ зависят от времени, но здесь они взяты при $t = 0$, как это всегда и подразумевается, если временная зависимость не указана. Поэтому матричные элементы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ между голыми состояниями 1) представляют собой обычные матрицы Паули.

выразим состояния физического нуклона через голые состояния

$$|\xi\rangle = R(a^\dagger, \sigma, \tau) |\xi\rangle, \quad (17.6)$$

где „облачающий оператор“ R представляет собой инвариантную комбинацию из σ , τ и мезонных операторов рождения типа, например, (16.34). Поскольку физический и голый нуклоны имеют спин и изоспин, равные $1/2$, угловой момент и изоспин мезонного облака могут быть равны лишь 0 и 1. Если приписывать различным частям R индексы l , l_z , t и t_z для обозначения квантовых чисел соответствующих частей мезонного облака, то R будет линейной комбинацией операторов R'_{0000} , $R'_{11_2 00}$, R'_{0011_2} и $R'_{11_2 11_2}$. Таким образом, мы можем записать, например, основное состояние в виде

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle = & R'_{0000} |p \uparrow\rangle + R'_{0011} |n \uparrow\rangle + R'_{0101} |p \uparrow\rangle + \\ & + R'_{1100} |p \downarrow\rangle + R'_{1000} |p \uparrow\rangle + R'_{1111} |n \downarrow\rangle + \\ & + R'_{1011} |n \uparrow\rangle + R'_{1110} |p \downarrow\rangle + R'_{1010} |p \uparrow\rangle, \end{aligned}$$

где все R' содержат только операторы рождения мезонов. Мы обеспечили пока лишь выполнение необходимого условия, состоящего в том, что состояние $|p \uparrow\rangle$ должно быть собственным состоянием T_z и J_z . Однако в гл. 16 мы научились строить собственные состояния T и J . Следуя приведенной там схеме, введем операторы R_{0000} , $R_{11_2 00}$, R_{0011_2} , $R_{11_2 11_2}$ таким образом, что при различных значениях l_z (или t_z) они будут связаны соответствующим вращением. Оператор R отличается от R' выделением некоторых коэффициентов Клебша — Гордона, и в терминах R мы получаем

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle = & R_{0000} |p \uparrow\rangle + \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} [2^{1/2} R_{0011} |n \uparrow\rangle - R_{0010} |p \uparrow\rangle] + \\ & + \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} [2^{1/2} R_{1100} |p \downarrow\rangle - R_{1000} |p \uparrow\rangle] + \\ & + \frac{1}{3} [2R_{1111} |n \downarrow\rangle - 2^{1/2} R_{1011} |n \uparrow\rangle - 2^{1/2} R_{1110} |p \downarrow\rangle + R_{1010} |p \uparrow\rangle]. \end{aligned} \quad (17.7)$$

Поскольку состояние голого вакуума инвариантно относительно вращений, матричные элементы

$$C_{ii} = \langle \xi | R_{ii_2 i_2}^\dagger R_{ii_2 i_2} | \xi \rangle \quad (17.8)$$

не зависят от l_z и t_z ¹⁾. Нормировка физического нуклонного состояния требует выполнения равенства

$$C_{00} + C_{01} + C_{10} + C_{11} = 1. \quad (17.9)$$

¹⁾ Этот общий результат называют обычно теоремой Вигнера — Эккарта. См., например, Розе [1].

Далее, из симметрии теории относительно замены обычного пространства на изоспиновое следует, что

$$C_{II} = C_{II}, \quad (17.10)$$

так что мы имеем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 0 < C_{00} < 1, \\ 0 < C_{10} = C_{01} < \frac{1}{2}, \\ 0 < C_{11} < 1. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Постоянные τ_i нетрудно выразить через матрицы C_{II} . Следует только вспомнить, что голые нуклонные состояния являются собственными состояниями операторов τ и σ , например,

$$\tau_3 |p\rangle = \sigma_3 |p\rangle = |p\rangle,$$

и что операторы $R_{II_2 II_2}$ коммутируют с σ и τ . Поскольку C_{II} не зависят от l_2 и t_2 , мы можем вычислить любой матричный элемент. Так

$$\tau_1 = \frac{\langle p \uparrow | \tau_3 | p \uparrow \rangle}{\langle p \uparrow | \tau_3 | p \uparrow \rangle} = C_{00} + \frac{2}{3} C_{10} - \frac{1}{3} C_{11}, \quad (17.12)$$

$$\tau_2 = \frac{\langle p \uparrow | \sigma_3 \tau_3 | p \uparrow \rangle}{\langle p \uparrow | \sigma_3 \tau_3 | p \uparrow \rangle} = C_{00} - \frac{2}{3} C_{10} + \frac{1}{9} C_{11}.$$

Читатель может проверить, что вычисление, например, $\langle p \downarrow | \sigma^{-1} | p \uparrow \rangle$ приводит к аналогичному результату для τ_1 . Вследствие (17.9) и (17.10) только два из элементов C независимы и, следовательно, могут быть выражены через τ . Подставляя (17.9) и (17.10) в (17.11) и (17.12), мы выводим ряд неравенств типа, например,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \leq \tau_1 \leq 1, \quad -\frac{1}{3} \leq \tau_2 \leq 1, \\ -\frac{1}{3} \leq 3\tau_2 + 2\tau_1 \leq 5, \quad 1 + 2\tau_1 - 3\tau_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Мы не можем получить какие-либо другие точные утверждения. Однако можно привести довольно убедительные аргументы в пользу того, что величина C_{10} должна быть небольшой. Поскольку одиночный мезон имеет $l=t=1$, состояния, дающие вклад в C_{10} , должны содержать по меньшей мере два мезона, угловые моменты которых прибавляются к результирующему значению, равному 1, тогда как изоспины компенсируются (или наоборот). Поэтому угловой момент мезонной волновой функции должен быть нечетным¹⁾, в то время

¹⁾ Состояние двух частиц с полным угловым моментом, равным 1, возникающее при сложении двух моментов, равных 1, нечетно по отношению к перестановке двух частиц (например, $k = k_1 \times k_2$). При полном моменте, равном нулю, получается четное состояние (например, $k = k_1 \cdot k_2$).

как изоспиновая функция четна по отношению к перестановке мезонов (или наоборот), и, согласно требованию статистики Бозе — Эйнштейна (которой подчиняются мезоны), радиальная часть волновой функции должна быть нечетной. Антисимметрия радиальной функции при учете ее быстрого экспоненциального спада (например, $\exp[-(k_1, r_1 + k_2, r_2)] \exp[-(k_2, r_1 + k_1, r_2)]$) приводит к тому, что среднее вакуумное значение, определяющее величину C_{01} , должно быть мало. Это утверждение еще усиливается при точном рассмотрении в рамках модели Ли таких состояний, для которых разрешен обмен более чем одним мезоном [2]. В этой модели $C_{01} < 0,01$. В предположении, что C_{01} пренебрежимо мала, обе величины r_1 и r_2 полностью определяются единственным параметром C_{11} (поскольку $C_{00} = 1 - C_{11}$), и мы получаем

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 - \frac{4}{3} C_{11}, \\ r_2 &= 1 - \frac{8}{9} C_{11} = \frac{1}{3} (1 + 2r_1). \end{aligned} \quad (17.14)$$

Важное значение величин r_1 и r_2 заключается в том, что они являются основными величинами, характеризующими состояния физического нуклона, которые нужны нам для сопоставления теории и эксперимента. Однако было сделано много попыток получить приближенные выражения для операторов R , также как для их средних значений. Подобные вычисления иллюстрируют наши общие идеи и позволяют вычислить r_1 , r_2 и другие матрицы в некоторых крайних, но в основном нереальных случаях¹⁾. Ниже мы обрисует основные черты различных часто используемых приближений в их применении к основному состоянию.

17.2. Теория возмущений [3]. В теории возмущений константа связи f и, следовательно, H' рассматриваются как малое возмущение свободного мезонного поля. При разложении по степеням H' (или f) изменение волновой функции основного состояния в первом порядке связано с возможным присутствием только одного мезона, который может быть испущен при действии H' . Например, поскольку $H_0 |N\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= |p \uparrow\rangle - \frac{1}{H_0} H' |p \uparrow\rangle = \\ &= |p \uparrow\rangle + i \frac{f}{\mu} \sum_a \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sigma \cdot k \tau_a^+ (k) \rho(k)}{(2\omega^3)^{1/2}} |p \uparrow\rangle. \end{aligned} \quad (17.15)$$

В рассматриваемом приближении волновая функция виртуальных мезонов сходна с функцией для нейтральной модели со статическим

¹⁾ Читатель, интересующийся только практическими результатами, может пропустить остальные разделы настоящей главы.

источником, за исключением множителя k и спиновой и изоспиновой зависимости, рассмотренной в предыдущих главах. Ясно, что волновая функция не нормирована (но может быть нормирована) с точностью до f^2 . Выбор энергии основного состояния за нуль приводит к тому, что величина \mathcal{E}_0 оказывается порядка f^2 [если только, как в рассматриваемой теории, матричные элементы $(\xi' | H' | \xi)$ равны нулю]:

$$\langle p \uparrow | H | p \uparrow \rangle = \sum_{\alpha} (p \uparrow | H' \frac{1}{H_0} \omega a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} \frac{1}{H_0} H' | p \uparrow) - \\ - 2 (p \uparrow | H' \frac{1}{H_0} H' | p \uparrow) - \mathcal{E}_0 = 0. \quad (17.16)$$

$$\mathcal{E}_0 = - (p \uparrow | \frac{f^2}{\mu^2} \sum_{\alpha} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\sigma \cdot k \sigma \cdot k \tau_{\alpha} \tau_{\alpha}}{2\omega^2} \rho^2(k) | p \uparrow) = \\ = - \frac{3}{2} \frac{f^2}{\mu^2} \sum_k \frac{k^2}{\omega^2} \rho^2(k).$$

Эта энергия расходится для точечного источника как кубическая функция и поэтому она чрезвычайно чувствительна к форме источника или импульсу обрезания. Мы можем записать также (17.15) и форме (17.7). При этом вклад вносят только члены, соответствующие C_{00} и C_{11} , поскольку в нашем приближении в облаке присутствует не более одного мезона. Далее $R_{0000} = 1$ и

$$R_{1010} = (3)^{1/2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \tau_3 a_3^{\dagger} \sigma_3 k_3 \frac{\rho(k)}{(2\omega^3)^{1/2}},$$

так что

$$C_{00} = 1, \quad C_{10} = C_{01} = 0, \quad C_{11} = \frac{3}{2} \frac{f^2}{\mu^2} \sum_k \frac{k^2}{\omega^3} |\rho(k)|^2. \quad (17.17)$$

Поскольку состояние $|p \uparrow\rangle$ не нормировано, равенства (17.9) и (17.13) неприменимы; из (17.12) мы, однако, получаем, что

$$r_1 = 1 - \frac{f^2}{2\mu^2} \sum_k \frac{k^2}{\omega^3} |\rho(k)|^2, \quad (17.18)$$

$$r_2 = 1 + \frac{1}{6} \frac{f^2}{\mu^2} \sum_k \frac{k^2}{\omega^3} |\rho(k)|^2. \quad (17.19)$$

Если $f^2 (k_{\max}/\mu)^2 > 1$, неравенства (17.13) невозможно удовлетворить даже приближенно. Это обусловлено тем фактом, что волновая функция не нормирована с точностью до f^2 . Очевидно, что подход теории возмущений справедлив только при $C_{11} < 1$, и все разложение по степеням f (точнее по степеням $f k_{\max}/\mu$) становится практически непригодным, если это неравенство не выполняется. Например, для $k_{\max} \sim M$ это ограничивает f величиной $\leq 0,1$ и $f^2/4\pi \leq 10^{-3}$, в то

время как из дальнейшего будет видно, что экспериментально $f^2/4\pi \sim 10^{-1}$.

17.3. Приближение Тамма — Данкова [4—6]. В методе Тамма — Данкова делается попытка исправить некоторые недостатки теории возмущений. Этот метод сходен с теорией возмущений, так как в нем предполагается, что число мезонов в облаке ограничено (обычно рассматривается один мезон), но он отличается от теории возмущений тем, что уравнение Шредингера в соответствующем подпространстве решается точно. Метод Тамма — Данкова согласуется с точным решением по модели Ли для состояний с $Q = 1/2$. Из (17.7) видно, что наиболее общая форма основного состояния в рассматриваемом одно-мезонном приближении имеет вид

$$|p\rangle = \mathcal{N} \left[1 + \sum_{\alpha} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}}{k} \tau_{\alpha} f(\mathbf{k}) \right] |p\rangle, \quad (17.20)$$

где \mathcal{N} — нормировочная константа:

$$\mathcal{N}^{-2} = 1 + 3 \sum_{\mathbf{k}} |f(\mathbf{k})|^2, \quad (17.21)$$

а $f(\mathbf{k})$ — волновая функция мезона в импульсном пространстве. Если подставить (17.20) в уравнение Шредингера ¹⁾

$$H|p\rangle = (H_0 + H' - \mathcal{E}_0)|p\rangle = 0, \quad (17.22)$$

то применение H' к члену, пропорциональному $a^{\dagger}(\mathbf{k})|p\rangle$, образует состояния с двумя мезонами или без мезонов. Следуя уже установленному приближению, мы пренебрегаем двухмезонной амплитудой и получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \left[-\mathcal{E}_0 - i \frac{f}{\mu} \sum_{\alpha} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sigma \cdot \mathbf{k} a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) \rho(k)}{(2\omega)^{1/2}} \tau_{\alpha} + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha} \int a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) \frac{\sigma \cdot \mathbf{k}}{k} \tau_{\alpha} f(\mathbf{k}) (\omega - \mathcal{E}_0) \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} + \right. \\ \left. + i \frac{3f}{\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\mathbf{k}) k \rho(k)}{(2\omega)^{1/2}} \right] |p\rangle = 0. \quad (17.23) \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$f(\mathbf{k}) = i \frac{f}{\mu} \frac{k}{(2\omega)^{1/2}} \frac{\rho(k)}{\omega - \mathcal{E}_0} \quad (17.24)$$

и

$$\mathcal{E}_0 = - \frac{3f^2}{\mu^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^2 \rho^2(k)}{2\omega(\omega - \mathcal{E}_0)}. \quad (17.25)$$

¹⁾ Это можно также рассматривать как вариационную процедуру с пробным состоянием (17.20). Этот метод будет развит в следующем пункте.

В пределе, например, когда $\mathbb{S}_k = d^3 k / (2\pi)^3$, уравнение (17.25) представляет собой интегральное уравнение для величины \mathbb{E}_0 . Как можно было предвидеть, волновая функция $f(k)$ аналогична волновой функции в модели Ли. В пределе слабой связи

$$\frac{3}{2} \frac{f^2}{\mu^2} \mathbb{S}_k \frac{k^2 |\rho(k)|^2}{\omega^2} \ll k_{\max}$$

и выражения для $f(k)$ и \mathbb{E}_0 переходят в соответствующие выражения теории возмущений. С другой стороны, в более реальном предельном случае

$$\frac{3}{2} \frac{f^2}{\mu^2} \mathbb{S}_k \frac{k^2 |\rho(k)|^2}{\omega} \gg k_{\max}^2$$

мы получаем (выбирая тот же знак, что и в теории возмущений):

$$\mathbb{E}_0 = - \left[3 \frac{f^2}{\mu^2} \mathbb{S}_k \frac{k^2 |\rho(k)|^2}{2\omega} \right]^{1/2}. \quad (17.26)$$

В то время как для малых f^2 величины C_{11} , C_{01} и C_{00} соответствуют теории возмущений, в рассматриваемом противоположном предельном случае

$$f(k) = -i \frac{f}{\mu} \frac{k}{(2\omega)^{1/2}} \frac{\rho(k)}{\mathbb{E}_0} \quad \text{и} \quad \mathcal{N} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2},$$

и, следовательно,

$$C_{00} = \frac{1}{2}, \quad C_{01} = C_{10} = 0, \quad C_{11} = \frac{1}{2},$$

$$r_1 = \frac{1}{3}, \quad r_2 = \frac{5}{9}, \quad (17.27)$$

что, как это будет видно позднее, находится в прекрасном согласии с экспериментальными значениями.

Поскольку волновая функция физического нуклона нормирована, неравенства (17.13) в нашем предельном случае выполняются. При этом неясно, однако, похоже ли полученное решение на точное. Дело в том, что не существует априорной причины, по которой двухмезонная амплитуда и амплитуды с большим числом мезонов были бы малы при больших $f k_{\max} / \mu$.

17.4. Приближение промежуточной связи Томонаги [7—11]. В методе Томонаги для промежуточной силы связи число мезонов в облаке не ограничивается. Вместо этого в нем используется статистика Бозе—Эйнштейна для π -мезонов и вытекающая из нее тенденция к слипанию; кроме того, считается, что все мезоны имеют одинаковые радиальные волновые функции. С этой точки зрения удобно перейти к представлению углового момента по уравнению (5.10a)¹⁾. Тогда,

¹⁾ Это можно было также сделать в двух последних пунктах.

если разложить мезонное поле по полному набору ортогональных радиальных функций $F_s(k)$

$$a_\alpha(k) = \sum_{s, l, m} \frac{1}{k} F_s(k) Y_l^m(\theta_k, \varphi_k) a_{\alpha sl}^m, \quad (17.28)$$

$$\sum_s F_s^*(k') F_s(k) = \delta(k' - k), \quad \int_0^\infty dk F_s^*(k) F_{s'}(k) = \delta_{ss'},$$

то рассматриваемое приближение состоит в том, что из всех видов пробных функций (подлежащих определению с помощью вариационного принципа) оставляется только один, скажем с $s=0$. Новые операторы подчиняются обычным перестановочным соотношениям для всех значений s :

$$[a_{\alpha sl}^m, a_{\alpha' s' l'}^{m'}] = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (17.29)$$

Поэтому гамильтониан можно переписать в виде

$$H_0 = \sum_\alpha \int d^3k a_\alpha^\dagger(k) a_\alpha(k) \omega = \sum_{\alpha, s, l, m, s'} a_{\alpha slm}^\dagger a_{\alpha s' l' m} W_{ss'}, \quad (17.30)$$

$$H' = \sum_{\alpha, s, l, m} \tau_\alpha \sigma_m (\bar{f}_s a_{\alpha slm} + \bar{f}_s^* a_{\alpha slm}^\dagger),$$

$$W_{ss'} = \int_0^\infty dk \omega F_s^*(k) F_{s'}(k), \quad \bar{f}_s = \frac{f}{\mu} \int_0^\infty dk \frac{\rho(k) k^2 F_s(k)}{(12\pi^2 \omega)^{1/2}}. \quad (17.31)$$

В приближении Томонаги сохраняется только член с $s=0$ ¹⁾ благодаря предположению, что для пробного состояния $|N_t\rangle$ при $s \neq 0$ будет $a_s |N_t\rangle = 0$. Оптимальную форму $F_0(k) \equiv F(k)$ находят посредством минимизации

$$\mathcal{E}_0 = \langle N_t | H_0 + H' | N_t \rangle \quad (17.32)$$

по отношению к виду $F(k)$ и зависимости $|N_t\rangle$ от операторов рождения и уничтожения мезонов $a_{\alpha j}$ и $a_{\alpha j}^\dagger$. При выполнении этой процедуры мы учтем ограничение

$$\int_0^\infty dk |F(k)|^2 = 1.$$

¹⁾ Поскольку в дальнейшем мы имеем дело только с $l=1$ и $s=0$, индексы l и s у $a_{\alpha slm}$ будут опускаться.

Для этого введем неопределенный множитель Лагранжа λ' . Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{E}_0}{\delta F^*(k)} &= \langle N_t | \sum_{\alpha j} a_{\alpha j}^+ a_{\alpha j} | N_t \rangle \frac{\delta W}{\delta F^*(k)} + \\ &+ \langle N_t | \sum_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j a_{\alpha j}^+ | N_t \rangle \frac{\delta \bar{f}^{\alpha}}{\delta F^*(k)} + \lambda' F(k) = \\ &= \langle N_t | \sum_{\alpha j} a_{\alpha j}^+ a_{\alpha j} | N_t \rangle \omega F(k) + \\ &+ \langle N_t | \sum_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j a_{\alpha j}^+ | N_t \rangle \frac{k^2 f_p(k)}{\mu (12\omega)^{1/2} \pi} + \lambda' F(k) = 0 \end{aligned}$$

и для $F(k)$ находим

$$F(k) = \frac{\mathcal{N} k^2 p(k)}{\omega^{1/2} (\omega + \lambda)}, \quad (17.33)$$

где \mathcal{N} — нормировочная постоянная, не зависящая от k , а λ — неопределенный множитель, связанный с λ' соотношением

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\langle N_t | \sum_{\alpha j} a_{\alpha j}^+ a_{\alpha j} | N_t \rangle}.$$

Минимизируя \mathcal{E}_0 с этой формой $F(k)$, мы получаем наименьшее собственное значение в виде функции от λ . Тогда этот параметр можно определить путем дальнейших вариационных вычислений, которые будут проделаны в следующем пункте. Полученный вид $F(k)$ совпадает с (17.24) в приближении Тамма — Данкова; при этом, однако, следует помнить, что число мезонов теперь не ограничено.

Остается определить собственную функцию основного состояния $|N_t\rangle$ и энергию \mathcal{E}_0 , которые зависят от W и \bar{f} и, следовательно, от λ . Упрощенный гамильтониан (17.30), в котором оставлены только члены с $s=0$, соответствует девяти осцилляторам ($\alpha=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$), связанным со спином и изоспином; его диагонализация представляет собой задачу элементарной квантовой механики. Ее, однако, невозможно решить в замкнутом виде. Мы столкнулись бы с этим обстоятельством, даже если бы учитывали осложнения, связанные только со спином (нейтральная псевдоскалярная теория) или с изоспином (симметричная скалярная теория). Чтобы получить некоторое представление о проблеме, рассмотрим первый из этих

случаев ¹⁾ подробнее. Здесь упрощенный гамильтониан имеет вид ²⁾

$$H = W \sum_j a_j^\dagger a_j + \bar{g} \sigma_j (a_j + a_j^\dagger) - \mathcal{E}_0. \quad (17.34)$$

Возвращаясь к канонически сопряженным операторам p и q с помощью равенств

$$\begin{aligned} p_j &= -i(a_j - a_j^\dagger) \left(\frac{W}{2}\right)^{1/2}, \\ q_j &= (a_j + a_j^\dagger) \left(\frac{1}{2W}\right)^{1/2}, \\ [q_j, p_{j'}] &= i\delta_{jj'}, \end{aligned} \quad (17.35)$$

можно переписать H в виде

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + W^2 q^2) + g' \sigma \cdot q - \frac{3}{2} W - \mathcal{E}_0, \quad (17.36)$$

где

$$q^2 = \sum_{j=1}^3 q_j^2 \quad \text{и} \quad g' = \bar{g} (2W)^{1/2}.$$

Формула (17.36) подчеркивает формальную аналогию с элементарной квантовой механикой и соответствует трехмерному осциллятору, связанному со спином взаимодействием $\sigma \cdot q$. При этом взаимодействии не сохраняется четность, так как при отражении системы координат $\sigma \rightarrow \sigma$, а $q \rightarrow -q$. Продолжая эту аналогию, мы приходим к выводу, что основное состояние должно быть смесью состояний с определенными угловыми моментами $S_{1/2}$ и $P_{1/2}$ ³⁾. Это единственные два состояния, разрешенные при условии, что и спин голуба, и спин физического нуклона равны $1/2$. Они соответствуют угловому моменту мезонного облака $l=0$ и $l=1$ и имеют вид ⁴⁾ $h_0(q) |N\rangle$ и $\sigma \cdot q h_1(q) |N\rangle$. В дальнейшем мы будем, однако, выполнять разложение не по этим состояниям, а по состояниям, для которых вектор σ параллелен или антипараллелен вектору q , поскольку это условие определяет знак H' . Вводя операторы проектирования на собственные состояния $\sigma \cdot q$:

$$\mathbb{P}_\pm = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sigma \cdot q}{q} \right), \quad (17.37)$$

¹⁾ Чтобы отличать этот случай, заменим \bar{f} на \bar{g} , как это было сделано в гл. 16.

²⁾ Предполагается, что λ вещественна, поэтому $\bar{g} = g^*$, и $F(k)$, определенная уравнением (17.33), тоже вещественна.

³⁾ Теорема о чередовании уровней в центрально симметричном потенциале применима в данном случае и показывает, что основное состояние есть действительно состояние с $j = 1/2$. См. книгу [12].

⁴⁾ $q \equiv |q|$.

запишем основное состояние в виде

$$|N\rangle = \left[\mathfrak{P}_+ \frac{h_+(q)}{q} + \mathfrak{P}_- \frac{h_-(q)}{q} \right] |N\rangle, \quad (17.38)$$

где h_{\pm} удовлетворяют уравнениям

$$2\pi \int_0^{\infty} dq \left[|h_+(q)|^2 + |h_-(q)|^2 \right] = 1, \quad h_+(0) = h_-(0) = 0. \quad (17.39)$$

Поскольку оператор \mathfrak{P}_{\pm} инвариантен относительно вращений, состояние (17.38) есть собственное состояние J_z с собственным значением $1/2$, или J_z с собственным значением $\pm 1/2$, в зависимости от того, куда направлен спин $|N\rangle$ — вверх или вниз. Раскрывая условие $H|N\rangle = 0$ с помощью равенств

$$\begin{aligned} \sigma \cdot A \sigma \cdot B &= A \cdot B + i \sigma \cdot A \times B, \\ p^2 &= -\frac{1}{q^2} \frac{d}{dq} \left(q^2 \frac{d}{dq} \right) + \frac{l(l+1)}{q^2}, \end{aligned}$$

находим

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2} W^2 \left(q \pm \frac{g'}{W^2} \right)^2 - \left(\mathcal{E}_0 + \frac{g'^2}{2W^2} + \frac{3}{2} W \right) \right] h_{\pm} = \pm \frac{h_{\pm}}{q^2}. \quad (17.40)$$

Выписанные уравнения второго порядка невозможно решить аналитически, но предельные случаи их нетрудно исследовать.

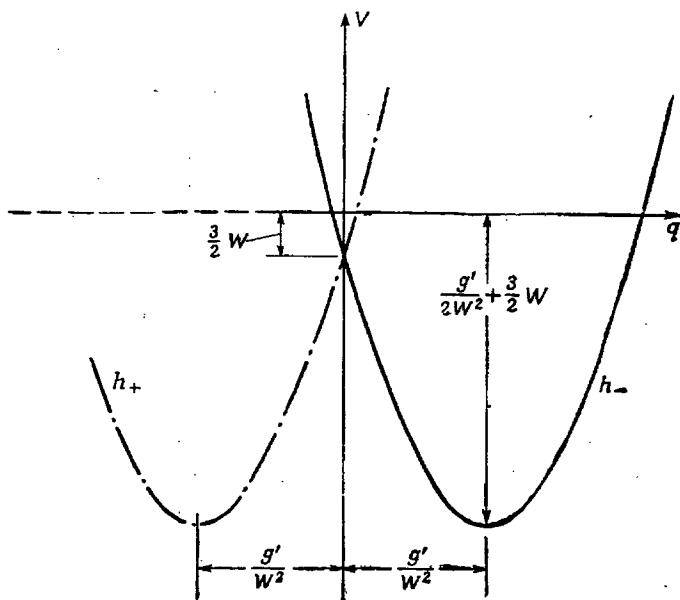
При малых значениях g' мы возвращаемся к результату теории возмущений (так как доминирует h_0), но для больших значений $g' > 0$ основным членом становится величина h_- . Это можно видеть, если принять во внимание, что уравнение (17.40) соответствует гармоническому осциллятору, смещенному на величину $\pm g'/W^2$ от центра (фиг. 17.1). Поскольку мы рассматриваем только случай $q > 0$, то h_- будет гауссовой функцией с вершиной в g'/W^2 с той же шириной, что и функция основного состояния, а h_+ должна держаться как возможно малой. В самом деле, для больших смещений член h_-/q^2 становится пренебрежимо малым и решение в виде чистого h_- оказывается хорошим приближением. Далее, для смещений, значительно превосходящих величины нулевых флуктуаций $\sim W^{-1/2}$, необходимо лишь малое изменение h_- , чтобы удовлетворить граничному условию при $q=0$. Следовательно, в этом пределе основное состояние приближенно имеет вид

$$|N\rangle = \frac{1}{9} \left(\frac{W}{16\pi^3} \right)^{1/4} \left(1 - \frac{\sigma \cdot q}{q} \right) \exp \left[-\frac{W}{2} \left(q - \frac{g'}{W^2} \right)^2 \right] |N\rangle \quad (17.41)$$

при

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{g'^2}{2W^2} - W. \quad (17.42)$$

Другое решение (17.40), которое в основном состоит из h_+ , имеет более высокую энергию. Для малых значений g' эти два решения переходят в состояния $S_{1/2}$ и $P_{1/2}$ соответственно. Аналогично энергия



Фиг. 17.1. График потенциала $V = \frac{1}{2} W^2 \left(q \pm \frac{g'}{W^2} \right) - \left(\frac{g'}{2W^2} + \frac{3}{2} W \right)$ для h_+ и h_- .

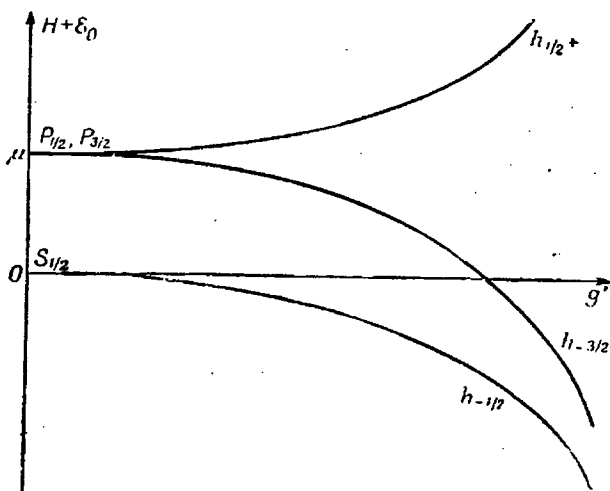
Кривая продолжена в нефизическую область отрицательных значений q (пунктирный участок).

одного из $3/2$ -состояний будет понижаться при включении H' . В самом деле, рассмотрение центробежного члена по теории возмущений показывает, что связанный с ним сдвиг над основным состоянием равен

$$\Delta E = l(l+1) \left\langle \frac{1}{2q^2} \right\rangle \sim \frac{W^4}{g'^2}.$$

С ростом g' энергия приближается к энергии основного состояния, как это показано, на фиг. 17.2. Конечно, вопрос о том, будет ли такое состояние устойчивым или же оно будет распадаться на основное состояние и π -мезоны, можно решить, только принимая во внимание члены с $s \neq 0$ в (17.30). Задача окажется сходной с соответствующей задачей в модели Ли, в которой источник, имею-

щий различные энергетические уровни, связан с мезонным полем. Если энергетические сдвиги, обусловленные взаимодействием для всех уровней, одинаковы, то первое возбужденное состояние будет



Фиг. 17.2. Энергия $H + \epsilon_0$ наинизших состояний как функция эффективной силы связи g' .

Указаны угловые моменты состояний и другие необходимые квантовые числа.

стабильным, когда его энергия превышает основное состояние менее чем на μ .

Возбужденное $3/2$ -состояние соответствует классическому вращению спина, рассмотренному ранее. В самом деле, поскольку для сильной связи $\lambda \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$F(k) \approx \frac{2^{1/2} k^2 \rho(k)}{k_{\max} \omega^{3/2}}, \quad W_{\infty} \approx \frac{2}{3} k_{\max}, \quad g' = \frac{g}{\mu} \frac{k_{\max}^2}{9\pi} (2k_{\max})^{1/2},$$

то для приведенной выше энергии возбуждения

$$\Delta E = \frac{W^4}{g'^2} = \frac{2\pi}{k_{\max} (g^2/4\pi\mu^2)}.$$

Это прекрасно согласуется с классическим результатом, следующим из (16.18):

$$\Delta E = \frac{9\pi}{4k_{\max} g^2/4\pi\mu^2}.$$

Рассматривая существенные черты основного состояния, мы в первую очередь отмечаем, что гауссовская форма (17.41) означает, что

распределение мезонов подобно распределению Пуассона, как это имело место и в скалярной теории. Однако q рождает только мезоны с полным угловым моментом, равным нулю, и поэтому рождается всегда смесь мезонных пар. В самом деле, если

$$q_x = x, \quad q_y = y, \quad q_z = z,$$

то уравнения

$$\begin{aligned} q^2 &= (x + iy)(x - iy) + z^2 = q^2(Y_1^{1*}Y_1^1 + Y_1^{-1*}Y_1^{-1} + Y_1^{0*}Y_1^0) \frac{4\pi}{3} = \\ &= q^2(-2Y_1^{-1}Y_1^1 + Y_1^{0*}Y_1^0) \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

показывают, что $h_0(q)$ и $h_1(q)$ всегда рождают смесь пар с $l_z = \pm 1$ или $l_z = 0$. При этом первой возможности соответствует амплитуда, вдвое большая, чем второй. В нейтральной псевдоскалярной теории константа r_2 отсутствует, а величина r_1 определяется в пределе очень сильной связи равенствами

$$\begin{aligned} \langle N_i | \sigma | N_i \rangle &= \mathcal{N}^2 \langle N | \int d^3q \exp \left[-W \left(q - \frac{g'}{W_2} \right)^2 \right] \times \\ &\times \frac{1}{q^2} \left(1 - \frac{\sigma \cdot q}{q} \right) \sigma \left(1 - \frac{\sigma \cdot q}{q} \right) | N \rangle = \frac{1}{3} \langle N | \sigma | N \rangle. \end{aligned} \quad (17.43)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом пределе величина r_1 равна $1/3$. Для промежуточных значений g' систему уравнений (17.40) можно решить лишь с помощью численных методов, которые мы не будем здесь обсуждать¹⁾.

Возвращаясь к симметричной псевдоскалярной теории, мы можем легко представить себе, что аналитическое решение в этом случае найти невозможно. Вследствие дополнительных степеней свободы, которые вносит изоспин, мы получаем вместо (17.39) четыре связанных уравнения для четырех функций h_0, \dots, h_3 в девятимерном пространстве. Для малых констант связи f получается, однако, результат, совпадающий с даваемым теорией возмущений, а для больших значений f теория переходит в приближение сильной связи, к которому мы сейчас и обратимся.

17.5. Приближение сильной связи [13—17]. В этом пределе голый нуклон окружен большим числом мезонов, и нулевые флуктуации поля много меньше его среднего значения, так что классические вычисления приобретают определенный смысл. В простейшем подходе, при котором мы интересуемся преимущественно свойствами основного состояния, все виртуальные мезоны считаются принадлежащими к одному типу, и получающийся упрощенный гамильтониан (17.30) будет диагонализироваться в пределе больших g .

¹⁾ См., однако, статьи [7—11].

Если ввести канонические операторы $p_{\alpha j}$ и $q_{\alpha j}$, как и в (17.35),

$$\begin{aligned} p_{\alpha j} &= -i(a_{\alpha j} - a_{\alpha j}^{\dagger}) \left(\frac{W}{2}\right)^{1/2}, \\ q_{\alpha j} &= (a_{\alpha j} + a_{\alpha j}^{\dagger}) \left(\frac{1}{2W}\right)^{1/2}, \\ [q_{\alpha j}, p_{\alpha' j'}] &= i\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{jj'}, \end{aligned} \quad (17.44)$$

то упрощенный гамильтониан приобретает вид

$$\begin{aligned} H' &= H_0' + H'' - \mathcal{E}_0 = \\ &= \sum_{\alpha j} \frac{1}{2} (p_{\alpha j}^2 + W^2 q_{\alpha j}^2) + f' \sigma_j \tau_{\alpha} q_{\alpha j} - \frac{9}{2} W - \mathcal{E}_0, \end{aligned} \quad (17.45)$$

где

$$f' = \bar{f}(2W)^{1/2}.$$

Чтобы найти собственные значения H , воспользуемся (как и в предыдущем пункте) на время полуклассической трактовкой, при которой операторы q рассматриваются как обычные числа и определяется минимум $H(q, p=0)$. Тогда мы должны найти наименьшее собственное значение 4×4 -матрицы $\tau_{\alpha} \sigma_j q_{\alpha j}$. С этой целью заметим, что вращение в спиновом и изоспиновом пространствах¹⁾

$$\begin{aligned} U \tau_{\alpha} U^{-1} &= \tau_{\beta} A_{\beta\alpha}, & A^* &= A, & AA^{\dagger} &= 1, \\ U \sigma_j U^{-1} &= \sigma_i B_{ij}, & B^* &= B, & BB^{\dagger} &= 1 \end{aligned}$$

порождает преобразование

$$U \tau_{\alpha} \sigma_j q_{\alpha j} U^{-1} = \tau_{\alpha} \sigma_j Q_{\alpha j}, \quad (17.46)$$

где (в сокращенной записи)

$$Q_{\alpha j} = A_{\alpha\beta} B_{jh} q_{\beta h} = AqB^{-1}. \quad (17.47)$$

Мы утверждаем теперь, что матрица q может быть диагонализирована с помощью этого преобразования и покажем это следующим образом. В первую очередь заметим, что вещественная положительно определенная симметричная матрица²⁾ qq^T может быть диагонализирована с помощью вещественной ортогональной матрицы A :

$$QQ^T = Aqq^T A^{-1}. \quad (17.48)$$

Поэтому можно извлечь квадратный корень и получить вещественную диагональную матрицу Q с элементами $Q_{\alpha j} = Q_{\alpha} \delta_{\alpha j}$. Элементы Q_{α}

¹⁾ Свойства матриц вращения определяются эрмитовостью σ и τ . По дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

²⁾ q^T = транспонированная q -матрица.

аналогичны радиальной переменной q в нейтральной теории и поэтому предполагаются положительными. Матрицу B можно записать с помощью (17.47) в виде

$$B = Q^{-1} A q. \quad (17.49)$$

Легко проверить, что она ортогональна ($Q^T = Q$):

$$B B^T = Q^{-1} Q^2 Q^{-1} = 1. \quad (17.50)$$

Собственные значения H' , пропорциональные собственным значениям 4×4 -матрицы,

$$\tau_a \sigma_j Q_{aj} = \sum_{i=1}^3 Q_i \tau_i \sigma_i, \quad (17.51)$$

можно найти, используя свойства $\theta_i = \sigma_i \tau_i$, а именно:

$$\theta_i^2 = 1, \quad \theta_i \theta_j \theta_k = -1, \quad [\theta_i, \theta_j] = 0.$$

Отсюда видно, что операторы θ_i могут быть диагонализированы одновременно. Собственные значения θ_i равны ± 1 , а произведение собственных значений $\theta_i \theta_j \theta_k$ должно быть равно -1 . Поэтому четыре возможных собственных значения (17.51) имеют вид

$$\begin{aligned} -Q_1 - Q_2 - Q_3, & \quad Q_1 + Q_2 - Q_3, \\ Q_1 - Q_2 + Q_3, & \quad -Q_1 + Q_2 + Q_3. \end{aligned} \quad (17.52)$$

Вследствие нашего предположения, что $Q_i > 0$, первое из этих чисел соответствует основному состоянию.

Чтобы найти минимум энергии основного состояния и соответствующую форму Q_i , минимизируем H по Q_i , используя частный вид потенциальной энергии, получающийся при усреднении по основному состоянию:

$$\tilde{H}' = \sum_{aj} \left[\frac{1}{2} W^2 q_{aj}^2 + f' (\sigma_j \tau_a)_{00} q_{aj} \right] = \sum_i \frac{1}{2} W^2 Q_i^2 - f' Q_i. \quad (17.53)$$

Минимум достигается при

$$Q_i = \frac{f'}{W^2} \quad (17.54)$$

и равен

$$\tilde{H}' = \frac{3}{2} \frac{f'^2}{W^2} - 3 \frac{f'^2}{W^2} = -\frac{3}{2} \frac{f'^2}{W^2}. \quad (17.55)$$

Основное состояние H будет содержать гауссову функцию радиальных переменных Q_i с центром около их положений равновесия f'/W^2 , т. е.

$$\prod_i \exp \left[-\frac{W}{2} \left(Q_i - \frac{f'}{W^2} \right)^2 \right].$$

Для того чтобы найти выражение типа (17.41), нужно еще построить оператор проектирования на собственное состояние $q_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j$ с собственным значением $-\sum_i Q_i$. Этот оператор имеет простой вид только в положении равновесия; он будет полезен в той мере, в какой ширина гауссовских функций оказывается пренебрежимой по сравнению со смещениями. Для $Q_i = f'/W^2$ мы имеем

$$q_{\alpha j} = (A^{-1}QB)_{\alpha j} = \frac{f'}{W^2} A_{\alpha\beta}^{-1} B_{\beta j} = \frac{f'}{W^2} e_{\alpha j}, \quad (17.56)$$

где e удовлетворяет соотношениям

$$e_{\alpha j} e_{\alpha k} = \delta_{jk}, \quad e_{\alpha j} e_{\beta j} = \delta_{\alpha\beta}, \\ e_{\alpha j} e_{\beta k} e_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{jkl} e_{\gamma l}.$$

Поскольку в равновесии

$$(q_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j)^2 = \frac{3f'^2}{W^4} - \frac{2f'}{W^2} q_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j,$$

мы видим, что

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{4} \left(1 - q_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j \frac{W^2}{f'} \right) \quad (17.57)$$

и есть искомый оператор проектирования. По существу для $Q_i = f'/W^2$ мы имеем

$$\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}, \quad q_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j \mathfrak{P} = -3 \frac{f'}{W^2} \mathfrak{P}.$$

Таким образом, в рассматриваемом пределе основное состояние приближенно имеет вид

$$|N\rangle = \mathcal{N} (1 - q_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j W^2 f'^{-1}) \exp \left[-\frac{W}{2} \sum_i (Q_i - \frac{f'}{W^2})^2 \right] |N\rangle. \quad (17.58)$$

Поскольку Q_i и \mathfrak{P} инвариантны относительно вращений в спиновом и изоспиновом пространствах, основное состояние (17.58) есть собственное состояние операторов J и T с тем же собственным значением, что и для $|N\rangle$. Член, пропорциональный $q_{\alpha j} \tau_{\alpha} \sigma_j$, представляет собой компоненту мезонного облака с $l=t=1$; другой член соответствует $l=t=0$. Смешанные члены отсутствуют, и мы получаем с помощью (17.8) и (17.12)

$$C_{00} = \frac{1}{4}, \quad C_{11} = \frac{3}{4}, \quad C_{10} = 0, \\ r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{1}{3}. \quad (17.59)$$

Равенство $r_1 = 0$ означает, что средние значения σ и τ в основном состоянии равны нулю. Это можно проверить непосредственно, поскольку

$$\langle N | \tau_\alpha | N \rangle = \frac{1}{4} (N | \tau_\alpha + \sum_{\beta=1}^3 \tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta | N \rangle = 0.$$

Так как энергия основного состояния равна нулю, то

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{3}{2} \frac{f'^2}{W^2} + E', \quad (17.60)$$

где E' — сумма энергии нулевых колебаний, равной $-9/2 W$, и кинетической энергии $\sum_{\alpha,j} 1/2 p_{\alpha j}^2$, имеющей порядок $3/2 W$. Для больших f' можно пренебречь E' в основном состоянии и найти с помощью (17.31) и (17.33)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= -3 \frac{\bar{f}^2}{W} = -\frac{f^2}{\mu^2} \frac{\left[\int_0^\infty dk \frac{\rho^2(k) k^4}{\omega(\omega+\lambda)} \right]^2}{\left[\int_0^\infty dk \frac{k^4 \rho^2(k)}{(\omega+\lambda)^2} \right]} \frac{1}{4\pi^2} = \\ &= -\frac{f^2}{\mu^2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{L_1^2(\lambda)}{L_1(\lambda) - \lambda L_2(\lambda)}, \end{aligned} \quad (17.61)$$

где

$$L_n(\lambda) = \int_0^\infty dk \frac{k^4 \rho^2(k)}{\omega(\omega+\lambda)^n}. \quad (17.62)$$

Чтобы найти оптимальное значение λ , мы минимизируем \mathcal{E}_0 по λ . Используя тот факт, что

$$\frac{\partial L_n}{\partial \lambda} = -n L_{n+1},$$

находим

$$\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \lambda} = -2 \frac{f^2}{\mu^2} \lambda \frac{L_2^2 - L_1 L_3}{(L_1 - \lambda L_2)^2} L_1 \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2.$$

Минимальное значение \mathcal{E}_0 получается, следовательно, при $\lambda = 0$ и равно

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{f^2}{\mu^2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4 \rho^2(k)}{\omega^2}. \quad (17.63)$$

Таким образом, в пределе сильной связи собственная энергия оказывается равной одной трети величины, вычисленной по теории возмущений [13—17]¹⁾.

Как и в нейтральной псевдоскалярной теории, первое возбужденное состояние имеет более высокие спин и изоспин, в то время как состояния, соответствующие другим собственным значениям оператора $\sigma_j \tau_a g_{aj}$, лежат много выше. Следующим после основного уровня оказывается $3/2$ — $3/2$ -уровень (для него $J = T = 3/2$); его энергия превышает энергию основного состояния на величину

$$\Delta E = \frac{9\pi}{4k_{\max}(f^2/4\pi\mu^2)}. \quad (17.64)$$

Если бы это состояние было нестабильным, оно приводило бы к резонансу в рассеянии с $J = T = 3/2$. Мы уже рассматривали этот вопрос в классическом приближении, и рассмотрим его с квантовомеханической точки зрения в следующей главе. Результаты, полученные в этой главе, нельзя считать точными даже при $f \gg 1$, поскольку предполагалось, что все мезоны принадлежат одному типу ($s = 0$), и в то же время не было показано, что другими типами можно пренебречь.

17.6. Численные методы. Был предпринят также ряд попыток разрешить проблему основного состояния с помощью более сложных вариационных методов, требующих значительной численной работы [18—20]. После этих исследований стало ясно следующее. Для малых значений f^2 и k_{\max} константы r_1 и r_2 меняются довольно быстро от своих предельных значений при слабой связи 1, до предельных значений, соответствующих сильной связи 0, $1/3$. Как только последний предел достигнут, вся задача оказывается довольно нечувствительной к точной величине f^2 и k_{\max} . Эмпирически, как мы увидим, наилучшие значения равны ²⁾ $f^2/4\pi \sim 0.2$ и $k_{\max} \sim 5\mu$. Вариационные вычисления показывают, что при этих значениях мы не вполне достигаем предела сильной связи, и экспериментально определенные значения r_1 и r_2 оказываются равными $1/3$ и $1/2$. Примечательно, что эти числа соответствуют точному результату теории. С другой стороны, последний аргумент может быть и не очень существенным, поскольку

¹⁾ Из (17.16) следует, что

$$\mathcal{E}_0 = - \frac{3}{(2\pi)^2} \frac{f^2}{\mu^2} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{\omega^2} \rho^2(k).$$

²⁾ Не следует смешивать эту величину с перенормированной константой связи $f_r^2/4\pi \sim r_2 f^2/4\pi \sim 0.1$.

мы находимся еще в области, где численные значения чувствительны к значению (неперенормированной) константы связи и обрезанию. Суммируя, можно утверждать, что вычисление свойств основного состояния с реалистичными значениями f и k_{\max} и с точностью, достаточной для определения согласованности результатов, представляется крайне затруднительным. В то же время в рамках грубого физического описания результаты, получаемые при анализе описываемой модели, воспроизводят экспериментальные данные для основного состояния.

РАССЕЯНИЕ П-МЕЗОНОВ

18.1. Введение. Эту главу мы посвятим вопросам рассеяния π -мезонов на нуклонах. В используемом нами статическом пределе гамильтониан допускает поглощение и испускание мезонов с единственным угловым моментом, а именно мезонов в P -состоянии. Поэтому только фазовые сдвиги с $L = 1$ ($J = 1/2$ или $3/2$) будут отличны от нуля. Экспериментально [1] установлено, что существуют также отличные от нуля S -фазы, равно как и D -фазы, появляющиеся при более высоких энергиях, но основной вклад в рассеяние в области энергий, где статическая модель вообще имеет смысл, вносят P -волны. Эффекты, связанные с другими фазовыми сдвигами, могут быть учтены в виде (кинематических) поправок на отдачу, однако это не исчерпывает всей картины. Из P -волн оказывается существенным только фазовый сдвиг с $J = 3/2$, $T = 3/2$, поскольку он проходит через резонанс в области, где статический предел еще сохраняет смысл. Этот резонанс не является неожиданным с точки зрения классической модели и модели с сильной связью, которые мы описали выше. Мы увидим, что его можно совершенно естественным образом предсказать и исходя из уравнений Лоу [2], которыми мы будем пользоваться при описании рассеяния. Этот метод имеет то преимущество, что он не требует знания точной формы мезонной волновой функции. Хотя этот метод не позволяет получить полное выражение для S -матрицы, но основные черты рассеяния π -мезонов можно установить. Еще более существенным является тот факт, что описанный ниже метод представляется единственным методом¹⁾, не основанным на неконтролируемых математических приближениях.

18.2. Матрица рассеяния²⁾. Вывод уравнения Лоу в нашем случае аналогичен выводу в модели Ли (гл. 14). Дополнительные труд-

¹⁾ Можно показать, что релятивистские дисперсионные соотношения сводятся к обсуждаемым ниже уравнениям в пределе бесконечной нуклонной массы и при пренебрежении рождением нуклон-антинуклонных пар.

²⁾ Чтобы не загромождать излишне формулы, мы положим мезонную массу μ равной 1. Это означает, что все энергии будут измеряться в мезонных массах, а все длины — в единицах комптоновской длины волны мезона.

ности появляются здесь в связи с существованием 36 независимых состояний $|\text{in}, N + \pi\rangle$ нуклона и P -волнового π -мезона при каждой фиксированной энергии. Эти состояния можно записать стандартным образом в виде

$$|\text{in}, N + \pi_k\rangle = A_{ja}^\dagger(k)|N\rangle \equiv A_K^\dagger|N\rangle. \quad (18.1)$$

Для наших целей наиболее подходит разложение поля по переменным, связанным с угловым моментом $A_{ja}(k)$. Чтобы избежать употребления слишком большого числа индексов, мы будем часто использовать в дальнейшем обозначение, введенное в (18.1): будем считать, что индекс K означает девять возможных состояний по угловому моменту, изотопическое состояние мезона и одновременно (полу-)непрерывную переменную k . Вводя величину ξ для четырех возможных нуклонных состояний, мы можем переписать (18.1) в виде

$$|\text{in}, k\xi\rangle = A_K^\dagger|\xi\rangle. \quad (18.2)$$

Обобщение этого обозначения на случай состояния с n реальными мезонами, которое нам вскоре понадобится, записывается как

$$|\text{in}, n, \xi\rangle \equiv |\text{in}, k_1, k_2, \dots, k_n, \xi\rangle = A_{K_1}^\dagger, A_{K_2}^\dagger \dots A_{K_n}^\dagger|\xi\rangle.$$

Матрица рассеяния связывает состояния „in“ и „out“. Во введенных выше обозначениях эта 36×36 -матрица равна

$$S_{k'\xi', k\xi} = \langle \text{out}, k'\xi' | \text{in}, k\xi \rangle = \langle \xi' | B_{K'} A_K^\dagger | \xi \rangle, \quad (18.3)$$

Чтобы получить связь между мезонными операторами „in“ и „out“, используем уравнение (15.10), переписанное через операторы, связанные с угловым моментом,

$$a_{ja}^\dagger(k, t) \equiv a_K^\dagger(t) = A_K^\dagger(t) + if \int_{-\infty}^t \frac{dt' k^2 \rho(k) \alpha_i(t') \tau_a(t') e^{i\omega(t-t')}}{(12\omega\pi^2)^{1/2}}.$$

Через мезонные операторы B в конечном состоянии этот же оператор записывается в виде

$$a_K^\dagger(t) = B_K^\dagger(t) - if \int_t^\infty dt' \frac{k^2 \rho(k) \alpha_i(t') \tau_a(t') e^{i\omega(t-t')}}{(12\omega\pi^2)^{1/2}},$$

так что в результате (при $t = 0$)

$$A_K^\dagger(0) = B_K^\dagger(0) - if \int_{-\infty}^\infty dt e^{-i\omega t} V_K(t), \quad (18.4)$$

где для члена с источником введено сокращенное обозначение

$$V_K(t) = f \frac{\rho(\vec{k}) k^2}{(12\omega\pi^2)^{1/2}} [\sigma(t) \tau(t)]_K. \quad (18.5)$$

Оператор V эрмитов, $V_K(t) = V_K^\dagger(t)$. Подстановка (18.4) в (18.3) дает

$$\begin{aligned} S_{K'\xi', K\xi} &= \langle \xi' | B_{K'} B_K^\dagger | \xi \rangle - i \langle \text{out}, K'\xi' | \int_{-\infty}^{\infty} V_K(t) e^{-i\omega t} dt | \xi \rangle = \\ &= \delta_{\xi\xi'} \delta_{KK'} - 2\pi i \delta(\omega - \omega') \langle \text{out}, K'\xi' | V_K(0) | \xi \rangle = \\ &= \delta_{\xi\xi'} \delta_{KK'} - 2\pi i \delta(\omega - \omega') T_{K'\xi', K\xi}. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Чтобы получить последнюю формулу (18.6), мы использовали явную временную зависимость $V_K(t)$ в гейзенберговском представлении [см. (2.18)] и выполнили интегрирование по времени.

Для неупругих процессов S - и T -матрицы отличаются лишь на δ -функцию, выражающую сохранение энергии:

$$\begin{aligned} S_{n, K\xi} &= \langle \text{out}, k_1, k_2, \dots, k_n, \xi' | \text{in}, k, \xi \rangle = -2\pi i \delta \left(\sum_{l=1}^n \omega_l - \omega \right) \times \\ &\times \langle \text{out}, K_1, K_2, \dots, K_n, \xi' | V_K(0) | \xi \rangle = \\ &\equiv -2\pi i \delta(E_n - \omega) T_{n, K\xi}. \end{aligned} \quad (18.7)$$

С помощью уравнений поля равенство (18.6) можно переписать на поверхности энергии ($\omega = \omega'$) в виде

$$\begin{aligned} T_{K'\xi', K\xi} &= \langle \text{out}, K'\xi' | V_K | \xi \rangle = \langle \xi' | \left(a_{K'} - i \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} V_{K'}(t) \right) V_K | \xi \rangle = \\ &= \langle \xi' | V_K \left(B_{K'} + i \int_0^{\infty} V_{K'}(t) e^{i\omega t} dt \right) | \xi \rangle - \\ &\quad - i \langle \xi' | \int_0^{\infty} e^{i\omega t} V_{K'}(t) dt V_K | \xi \rangle = \\ &= -i \int_0^{\infty} \langle \xi' | [V_{K'}(t), V_K(0)] | \xi \rangle e^{i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (18.8)$$

Из последней формы записи становится ясной возможность некоторых упрощений. Мы замечаем, что зависимость T -матрицы от импульса можно выделить в виде множителя, после чего у нас остается матрица от спиновых и изоспиновых операторов между физическими нуклонами. Такое разделение T -матрицы есть специаль-

ное свойство статической модели; мы к нему еще обратимся в последующих пунктах.

Продолжая рассуждения, перепишем T -матрицу упругого рассеяния, вводя полный набор промежуточных состояний $|\text{out}, n\rangle$, как это мы делали, рассматривая модель Ли. Если использовать при этом тот факт, что

$$\langle \xi' | V_{K'}(t) | \text{out}, n \rangle = e^{-iE_n t} T_{n, K', \xi'}^* \quad (18.9)$$

то мы приходим к следующему уравнению ¹⁾:

$$T_{K'\xi', K\xi} = - \sum_n \left(\frac{T_{n, K'\xi'}^* T_{n, K\xi}}{E_n - \omega - i\epsilon} + \frac{T_{n, K\xi}^* T_{n, K'\xi}}{E_n + \omega} \right). \quad (18.10)$$

Отметим, что во втором члене мезонные индексы в отличие от нуклонных поменялись местами.

18.3. Свойства матрицы рассеяния. Из вида уравнения (18.10) можно вывести некоторые важные заключения.

а. Унитарность. Для случая, когда присутствует один физический мезон, выполняющееся всегда условие $S^\dagger S = 1$ можно записать в явном виде в следующей форме:

$$\begin{aligned} \langle \text{in}, K'\xi' | S^\dagger S | \text{in}, K\xi \rangle &= \sum_n \langle \text{in}, K'\xi' | S^\dagger | n \rangle \langle n | S | \text{in}, K\xi \rangle = \\ &= \delta_{K'K} \delta_{\xi'\xi} + 2\pi i \delta(\omega' - \omega) \left[T_{K\xi, K'\xi'}^* - T_{K'\xi', K\xi} - \right. \\ &\quad \left. - 2\pi i \sum_n T_{n, K'\xi'}^* T_{n, K\xi} \delta(E_n - \omega) \right] = \delta_{K'K} \delta_{\xi'\xi}. \quad (18.11) \end{aligned}$$

Обращение в нуль скобок в (18.11) можно доказать с помощью подстановки (18.10) в разность $T_{K\xi, K'\xi'}^* - T_{K'\xi', K\xi}$. Второй член (18.10) выпадает, а первый дает сумму

$$\sum_n \left(\frac{T_{n, K'\xi'}^* T_{n, K\xi}}{E_n - \omega - i\epsilon} - \frac{T_{n, K'\xi'}^* T_{n, K\xi}}{E_n - \omega + i\epsilon} \right) = \sum_n 2\pi i \delta(E_n - \omega) T_{n, K'\xi'}^* T_{n, K\xi}. \quad (18.12)$$

Аналогичным образом можно показать, что и $SS^\dagger = 1$. Нелинейный характер первого члена (18.10) связан с унитарностью S . Второй член не дает непосредственно вклада в условие унитарности, однако

¹⁾ Сумма по n включает как сумму по спиновым и изоспиновым переменным, так и непрерывное интегрирование по энергии. Таким образом,

$$S = \sum_n \int dk.$$

он совершенно необходим для обеспечения перекрестной симметрии, к обсуждению которой мы переходим.

б. Перекрестная симметрия. Перекрестная симметрия T -матрицы выражается наиболее удобным образом, если рассматривать отдельно зависимость T от переменной ω в знаменателе в противовес зависимости $k^2 p(k) \omega^{-1/2}$, известной явно. С этой целью введем функцию t ,

$$t_{\epsilon'K', \epsilon K}(z) = - \sum_n \left(\frac{T_{n, \epsilon'K', \epsilon K}^* T_{n, \epsilon K}}{E_n - z} + \frac{T_{n, \epsilon'K}^* T_{n, \epsilon K'}}{E_n + z} \right), \quad (18.13)$$

зависящую от комплексной переменной z и обладающую тем свойством, что

$$T_{\epsilon'K', \epsilon K} = \lim_{z \rightarrow \omega + i\epsilon} t_{\epsilon'K', \epsilon K}(z). \quad (18.14)$$

В физической области величина $i\epsilon$, появляющаяся [после подстановки (18.14)] в знаменателе второго члена в (18.13), не играет роли. Она необходима, однако, для выполнения условия эрмитовости

$$t_{K\epsilon, K'\epsilon'}^*(z^*) = t_{K'\epsilon', K\epsilon}(z) \quad (18.15a)$$

и перекрестной симметрии T -матрицы, которая математически формулируется следующим образом:

$$t_{\epsilon'K', \epsilon K}(z) = t_{\epsilon'K, \epsilon K'}(-z). \quad (18.15b)$$

Эта теорема аналитического продолжения проверяется непосредственно с помощью (18.13). Она не зависит от явного вида V_K и, как можно показать, справедлива для любой мезон-нуклонной связи, включающей и поглощение, и испускание мезонов [3] (так, она не выполняется в модели Ли, но остается в силе для нейтральной скалярной теории и т. д.). Эта симметрия связана с инвариантностью теории по отношению к перестановке падающего и рассеянного мезонов в смысле, который явно определен через уравнение (18.15b). Она не имеет никакой интуитивной основы, поскольку мы имеем здесь дело с соотношением между физической амплитудой рассеяния и ее значениями в нефизической области отрицательных энергий. Теоремы (18.15) по существу связаны с аналитическими свойствами t -матрицы для вещественных и комплексных энергий.

в. Полюсы, точки ветвления и разрезы. Аналитические свойства матрицы задаются явно уравнением (18.13) и определяются энергетическим спектром промежуточных состояний n . Сумма по всем состояниям содержит вклад от основного состояния при $E_n = 0$ и непрерывный спектр от 1 до ∞ . Поэтому t имеет следующую спектральную форму:

$$t_{\epsilon'K', \epsilon K}(z) = \frac{R_{\epsilon'K', \epsilon K}}{z} + \int_1^{\infty} dE \left[\frac{F_{\epsilon'K', \epsilon K}(E)}{E - z} + \frac{G_{\epsilon'K', \epsilon K}(E)}{E + z} \right], \quad (18.16)$$

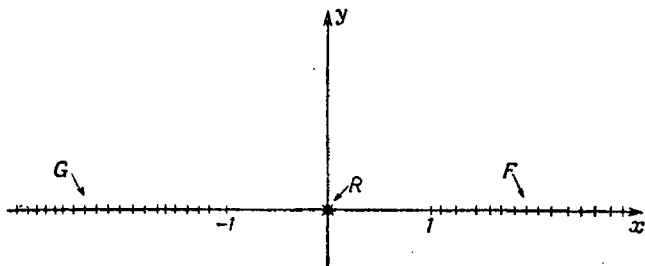
где первый член связан с основным состоянием, а F и G представляют собой весовые функции. Эти функции можно вычислить из (18.13) и (18.15):

$$F_{\xi'K', \xi K}(E) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{z \rightarrow E+is} [t_{\xi'K', \xi K}(z) - t_{\xi'K', \xi K}(z^*)] = G_{\xi'K', \xi K'}(E). \quad (18.17)$$

Таким образом, t имеет полюс в начале координат с вычетом R , равным

$$R_{\xi'K', \xi K} = \sum_{\zeta} (\langle \xi' | V_{K'} | \zeta \rangle \langle \zeta | V_K | \xi \rangle - \langle \xi' | V_K | \zeta \rangle \langle \zeta | V_{K'} | \xi \rangle), \quad (18.18)$$

где суммирование по ζ включает четыре физических основных состояния. Кроме того, t -матрица имеет также разрезы от 1 до ∞ и от



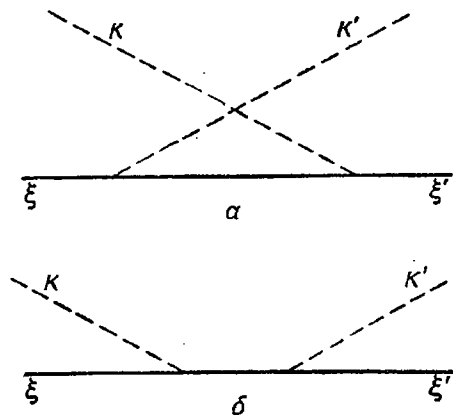
Фиг. 18.1. Сингулярности t -матрицы в комплексной плоскости z .

—1 до $-\infty$, как это показано на фиг. 18.1. Разрез вдоль отрицательной полуоси возник вследствие перекрестной симметрии; в модели Ли он поэтому отсутствовал.

18.4. Низкоэнергетический и высокоэнергетический пределы упругого рассеяния. В нашем случае, как и в модели Ли, можно определить перенормированную константу связи f_r , так, чтобы физически недостижимый предел амплитуды $t_{\xi'K', \xi K}$ при $z \rightarrow 0$ задавался борновским приближением при замене f на f_r . В пределе $z \rightarrow 0$ сингулярный член R/z вносит наибольший вклад. Вспомня определение (18.5) для V_K , мы видим, что в нашем случае остаются лишь матричные элементы от σ между физическими однонуклонными состояниями. Они были уже рассмотрены в предыдущей главе; мы находим, что

$$R_{\xi'K', \xi K} = f^2 v_2^2 \frac{k^4 p^2(k)}{12\omega\pi^2} (\xi' | \sigma_{K'} | \sigma_K - (\sigma_K | \sigma_{K'} | \xi), \quad (18.19)$$

где матричное умножение $(\sigma\tau)_{K'}$, и $(\sigma\tau)_K$ предполагает суммирование \sum_c . Помимо множителя r_2^2 , этот результат совпадает с результатом теории возмущений. В последнем случае матричный элемент можно



Фиг. 18.2. Диаграммы для вычисления R -матрицы в наинизшем порядке теории возмущений.

вычислить с помощью двух (фейнмановских) диаграмм, изображенных на фиг. 18.2, и мы получаем

$$\frac{R_{\xi'K', \xi K}}{\omega} = \frac{H'(K')H'(K) - H'(K)H'(K')}{\omega}$$

что соответствует (18.19) с $r_2^2 = 1$. Таким образом,

$$f_r = r_2 f, \quad f \langle \xi' | \sigma\tau | \xi \rangle = f_r \langle \xi' | \sigma\tau | \xi \rangle. \quad (18.20)$$

Точно так же, как и в модели Лн, интерпретация равенства

$$\lim_{z \rightarrow 0} t = \left(\frac{f_r}{f}\right)^2 \lim_{z \rightarrow 0} t_{\text{борн}}$$

заключается в том, что время между испусканием и поглощением внешнего π -мезона гораздо больше времени всех виртуальных процессов. Нуклон в промежуточном состоянии оказывается поэтому практически реальным, и мы получаем борновское приближение, за исключением дополнительного множителя r_2 . Этот множитель имеет то же вероятностное истолкование, что и в случае модели Ли. Константа f_r представляет силу взаимодействия различных компонент физического нуклона, взятых с весами, пропорциональными их вероятности появления.

В высокоэнергетическом пределе можно пренебречь величиной E_n в знаменателе (18.13) по сравнению с z . Тогда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} t_{\xi'K', \xi K}(z) = \frac{1}{z} \sum_n \langle \xi' | V_{K'} | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_K | \xi \rangle - \langle \xi' | V_K | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_{K'} | \xi \rangle = \frac{1}{z} \langle \xi' | [V_{K'}, V_K] | \xi \rangle. \quad (18.21)$$

Это выражение для t совпадает с борновским приближением, за исключением того, что матричный элемент берется между физическими нуклонными, а не между голыми нуклонными состояниями. Иными словами, в рассматриваемом пределе амплитуда задается борновским приближением для рассеяния между различными состояниями голого нуклона, умноженным на амплитуды, с которыми эти состояния появляются в физическом нуклоне. Эти амплитуды легко можно найти, исходя из того факта, что за вычетом известной зависимости от импульса коммутатор в формуле (18.21) пропорционален выражению

$$[\tau_\alpha \sigma_j, \tau_\alpha \sigma_{j'}] = 2i (\delta_{\alpha\alpha'} \varepsilon_{jj'k} \sigma_k + \delta_{jj'} \varepsilon_{\alpha\alpha'\gamma} \tau_\gamma), \quad (18.22)$$

где величина $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ равна ± 1 в зависимости от четности перестановки тройки чисел α, β, γ относительно конфигурации 1, 2, 3. Таким образом, с помощью (17.3) мы находим, что в пределе бесконечной энергии t -матрица представляется в виде борновского приближения, умноженного на r_1 :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z t_{\xi'K', \xi K}(z) = r_1 f^2 \frac{k^4 \rho^2(k)}{12\omega k^2} \langle \xi' | [(\sigma\tau)_{K'}, (\sigma\tau)_K] | \xi \rangle = r_1 \lim_{z \rightarrow \infty} z t_{\text{Борн}}. \quad (18.23)$$

Теорема о поведении амплитуды при нулевой энергии служит, вероятно, наиболее важным инструментом, позволяющим связать теорию с экспериментом, высокоэнергетический же предел представляет чисто академический интерес, так как находится вне области применимости модели. Ясно, что в этом пределе пренебрежение отдачи и рождением пар (и использование источника конечных размеров) не может иметь смысла.

18.5. Диагонализация T -матрицы. Чтобы использовать формализм, рассмотренный в конце гл. 8, мы займемся сейчас диагонализацией 36×36 -матрицы t . Поскольку при взаимодействии угловой момент и изоспин сохраняются (т. е. $J^{\text{out}} = J = J^{\text{in}}$; $T^{\text{out}} = T = T^{\text{in}}$), мы ожидаем, что диагонализацию удастся осуществить посредством перехода от одномезонных состояний к представлению, в котором T^2, T_z, J^2, J_z диагональны¹⁾. В самом деле, поскольку эти перемен-

¹⁾ Мы надеемся, что читатель не будет смешивать T -матрицу и изоспин T .

ные вместе с энергией полностью определяют одномезонные состояния, мы имеем

$$\begin{aligned} & \langle \text{out}, T', T'_z, J', J'_z | \text{in}, T, T_z, J, J_z \rangle = \\ & = \langle \text{in}, T', T'_z, J', J'_z | S | \text{in}, T, T_z, J, J_z \rangle = \\ & = \delta_{T, T'} \delta_{T_z, T'_z} \delta_{J, J'} \delta_{J_z, J'_z} e^{i2\delta_{JT}} \delta(E - E') \frac{dE}{dk}. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Чтобы связать фазовый сдвиг δ_{JT} с T -матрицей, обратимся к результатам гл. 8. Поскольку здесь $S = \int_0^\infty dk$, множитель $\pi g(E)$ в (8.30)

равен просто k/ω . Далее, можно спроектировать T -матрицу на соответствующие состояния J и T с помощью операторов проектирования \mathfrak{P}^{JT} :

$$T_{\xi'K', \xi K} = - \sum_{J, T} \mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K}^{JT} \sin \delta_{JT} e^{i\delta_{JT}} \frac{k}{\pi\omega}, \quad (18.25)$$

причем

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^\dagger \quad (18.26)$$

и

$$\mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K}^{JT} \equiv \langle \text{in}, \xi'K' | \mathfrak{P}^{JT} | \text{in}, \xi K \rangle. \quad (18.27)$$

В одномезонном подпространстве T и J могут принимать только значения $1/2$ и $3/2$. Поскольку δ_{JT} и δ_{TJ} совпадают, получается всего три различных фазовых сдвига: $\delta_{1/2, 1/2}$, $\delta_{1/2, 3/2} = \delta_{3/2, 1/2}$ и $\delta_{3/2, 3/2}$. Если ввести для них индексы 1, 2, 3, то S принимает вид, иллюстрируемый фиг. 18.3. Операторы проектирования на эти подпространства строятся обычным образом с $T = t + \tau/2$ и $J = 1 + \sigma/2$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^{(1)} &= \mathfrak{P}^{1/2, 1/2} = \frac{1}{9} \left(\frac{15}{4} - T^2 \right) \left(\frac{15}{4} - J^2 \right) = \frac{1}{9} (1 - t \cdot \tau) (1 - \sigma \cdot 1), \\ \mathfrak{P}^{(2)} &= \mathfrak{P}^{1/2, 3/2} + \mathfrak{P}^{3/2, 1/2} = \frac{1}{9} \left[\left(\frac{15}{4} - T^2 \right) \left(J^2 - \frac{3}{4} \right) + \left(T^2 - \frac{3}{4} \right) \left(\frac{15}{4} - J^2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{9} [(1 - \tau \cdot t)(2 + \sigma \cdot 1) + (2 + \tau \cdot t)(1 - \sigma \cdot 1)], \\ \mathfrak{P}^{(3)} &= \mathfrak{P}^{3/2, 3/2} = \frac{1}{9} \left(T^2 - \frac{3}{4} \right) \left(J^2 - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{9} (2 + \tau \cdot t)(2 + \sigma \cdot 1). \end{aligned} \quad (18.28)$$

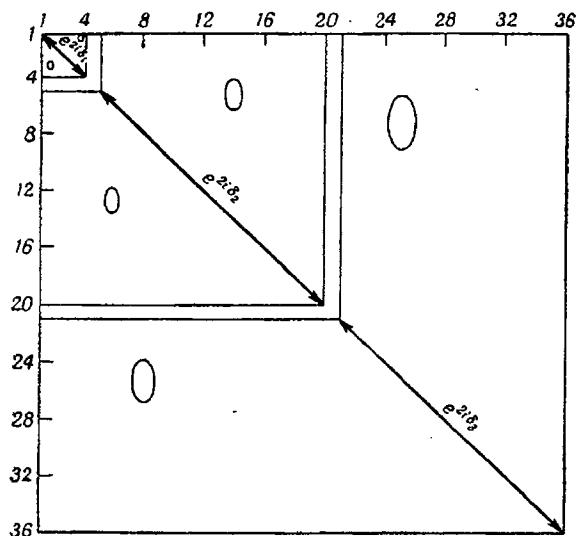
¹⁾ Ср. с равенством (14.4а), которое отличается от (18.25) нормировочным множителем $4\pi k^2$. Сечение упругого рассеяния равно

$$\sigma = \frac{1}{2} \times 8\pi^3 \omega^2 k^{-4} |T|^2 = \sum_{JT} \mathfrak{P}_{k^2}^{JT} \frac{4\pi}{k^2} |\sin \delta_{JT} e^{i\delta_{JT}}|^2.$$

²⁾ В то время как T -матрица постоянна во времени, t и τ зависят от времени. Здесь используются их значения при $t = -\infty$.

Нормировочные множители выбраны таким образом, что для одно-мезонного подпространства

$$\mathfrak{P}^{(u)}\mathfrak{P}^{(v)} = \delta_{uv}\mathfrak{P}^{(v)}, \quad u, v = 1, 2, 3. \quad (18.29)$$



Фиг. 18.3. Вид S -матрицы. Все не диагональные матричные элементы равны нулю, а диагональные показаны на рисунке.

Матричные элементы t и l в одимезонном подпространстве соответствуют просто представлению $l = 1$ и имеют вид [ср. с (15.12), (15.13) и (5.13)]¹⁾

$$\begin{aligned} \langle in, \xi, \alpha j | l_3^{(in)} | in, j' \alpha', \xi' \rangle &= i \epsilon_{\beta \alpha \alpha'} \delta_{\xi \xi'} \delta_{j j'}, \\ \langle in, \xi, \alpha j | l_u^{in} | in, j' \alpha', \xi' \rangle &= i \epsilon_{u j j'} \delta_{\xi \xi'} \delta_{\alpha \alpha'}, \end{aligned} \quad (18.30)$$

так что мы получаем, например,

$$\langle in, \xi, \alpha j | \sigma^{(in)} \cdot l^{(in)} | in, \alpha' j', \xi' \rangle = i \delta_{\alpha \alpha'} (\xi | \sigma_j \sigma_{j'} - \sigma_{j'} \sigma_j | \xi'). \quad (18.31)$$

Возвращаясь к сокращенным обозначениям, запишем матричные элементы операторов проектирования (18.28) в представлении углового момента как

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\xi' K', \xi K}^{(1)} &= \frac{1}{9} (\xi' | (\sigma \tau)_{K'} (\sigma \tau)_K | \xi), \\ \mathfrak{P}_{\xi' K', \xi K}^{(2)} &= \frac{1}{9} (\xi' | 3(\tau_{K'} \tau_K + \sigma_{K'} \sigma_K) - 2(\sigma \tau)_{K'} (\sigma \tau)_K | \xi), \\ \mathfrak{P}_{\xi' K', \xi K}^{(3)} &= \frac{1}{9} (\xi' | 9\delta_{K' K} - 3\tau_{K'} \tau_K - 3\sigma_{K'} \sigma_K + (\sigma \tau)_{K'} (\sigma \tau)_K | \xi). \end{aligned} \quad (18.32)$$

¹⁾ Индексы j и α означают угловой момент и изоспин мезона соответственно.

Мы вскоре встретимся с выражениями $\mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K'}^{(u)}$, где мезонные индексы поменялись местами, а нуклонные индексы ξ и ξ' следуют в обычном порядке. Поскольку такая операция меняет знак 1 и t , эти операторы можно выразить в виде линейной комбинации прежних:

$$\mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K'}^{(u)} = \sum_v A^{(u)(v)} \mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K'}^{(v)} \quad (18.32a)$$

Прямой подстановкой находим, что A имеет вид

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -8 & 7 & 4 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18.33)$$

Из таких свойств матрицы A , как $A^2 = 1$, $\text{Det } A \equiv |A| = -1$, $\text{Sp } A = +1$, следует, что A имеет собственные значения $+1, +1, -1$.

Учитывая сказанное, можно немедленно установить, как ведет себя T -матрица в окрестности нулевой энергии. Подстановка (18.29) и (18.32) в (18.19) дает

$$\begin{aligned} R_{\xi'K', K\xi} &= \frac{9f_r^2 k^4 \rho^2(k)}{12\omega\pi^2} (\mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K}^{(1)} - A^{(1)(v)} \mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K}^{(v)}) = \\ &= -\frac{f_r^2 k^4 \rho^2(k)}{12\omega\pi^2} \mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K}^{(v)} \lambda^{(v)}. \end{aligned} \quad (18.34)$$

Величина $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})$ есть собственный вектор A с собственным значением, равным -1 :

$$\begin{aligned} \lambda A &= -\lambda, \\ \lambda &= (-8, -2, +4). \end{aligned}$$

Чтобы получить величины с простыми аналитическими свойствами, введем функцию

$$t(\omega) = - \sum_v \mathfrak{P}^{(v)} h^{(v)}(\omega) \frac{\rho^2(k) k^4}{12\pi^2 \omega}, \quad (18.35)$$

для которой получаем из (18.16) и (18.17)

$$\begin{aligned} \sum_v \mathfrak{P}^{(v)} h^{(v)} &= \sum_v \left\{ \mathfrak{P}^{(v)} \lambda^{(v)} \frac{f_r^2}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{\mathfrak{P}^{(v)} \text{Im } h^{(v)}(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \sum_u \frac{\mathfrak{P}^{(v)} A^{(u)(v)} \text{Im } h^{(u)}}{\omega' + \omega} \right] \right\}, \end{aligned}$$

или

$$h^{(v)}(z) = \frac{f_r^2 \lambda^{(v)}}{z} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega \left[\frac{\text{Im } h^{(v)}(\omega)}{\omega - z} + \sum_u A^{(u)(v)} \frac{\text{Im } h^{(u)}(\omega)}{\omega + z} \right]. \quad (18.36)$$

Отсюда видно, что $h^{(v)}(z)$ можно продолжить в комплексную плоскость, где они имеют следующие свойства:

$$h^{(v)}(z) = h^{(v)*}(z^*) = \sum_u A^{(u)(v)} h^{(u)}(-z). \quad (18.37)$$

Их связь с фазовыми сдвигами, как можно видеть, сравнивая (18.35) с (18.25), задается равенствами

$$\lim_{z \rightarrow \omega + i\varepsilon} h^{(v)}(z) = e^{i\delta_v(\omega)} \sin \delta_v(\omega) \frac{12\pi}{k^3 \rho^2(k)}. \quad (18.38)$$

Связь функций h с полными сечениями определяют соотношения

$$\text{Im } h^{(v)} = \sigma_v \frac{1}{k \rho^2(k)}. \quad (18.39)$$

При этом полные сечения в P -волновом канале дает формула

$$\sigma_v = \frac{12\pi}{k^2} \sin^2 \delta_v.$$

Это определение таково, что сечение (8.34) для неполяризованной мишени и определенного значения изоспина равно

$$\sigma_{\text{неполн.}} = \frac{1}{2} \sum_{\xi = -1/2}^{+1/2} \text{Im } T_{\xi'K' \xi K} = \frac{1}{3} \sigma^{(J=1/2)} + \frac{2}{3} \sigma^{(J=3/2)}.$$

Следует отметить, что при $\omega > 2$ возможно рождение частиц, а фазовые сдвиги, описывающие одночастичный канал, становятся комплексными. Тем не менее равенство (18.39) применимо и в этом случае, поскольку оно представляет собой следствие общего уравнения (8.28). Таким образом, уравнения Лоу можно записать в следующей окончательной форме:

$$\begin{aligned} h^{(1)}(\omega) &= -\frac{8f_r^2}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{k' \rho^2(k')} \left[\frac{\sigma_1(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \sum_v \frac{A^{(v)(1)} \sigma_v(\omega')}{\omega' + \omega} \right], \\ h^{(2)}(\omega) &= -\frac{2f_r^2}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{k' \rho^2(k')} \left[\frac{\sigma_2(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \sum_v \frac{A^{(v)(2)} \sigma_v(\omega')}{\omega' + \omega} \right], \\ h^{(3)}(\omega) &= +\frac{4f_r^2}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{k' \rho^2(k')} \left[\frac{\sigma_3(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \sum_v \frac{A^{(v)(3)} \sigma_v(\omega')}{\omega' + \omega} \right]. \end{aligned} \quad (18.40)$$

18.6. Связь уравнений Лоу с экспериментом. В уравнениях Лоу (18.40) все величины, за исключением константы связи f_r^2 , непосредственно наблюдаемы — по крайней мере в принципе. Первые члены в правых частях (18.40) соответствуют борновскому прибли-

жению с перенормированной константой связи; их можно определить только посредством экстраполяции к нефизической точке $\omega = 0$. Эти члены отрицательны в 1-м и 2-м состояниях и положительны в 3-м состоянии, что соответствует отталкиванию в 1-м и 2-м и притяжению в 3-м состоянии. Это можно понять, рассматривая фейнмановские диаграммы низшего порядка, изображенные на фиг. 18.2. Поскольку на фиг. 18.2, б промежуточный нуклон имеет $T = 1/2$, $J = 1/2$, он вносит вклад лишь в рассеяние в 1-м состоянии. Поэтому величина $\sigma^{(3)}$ обусловлена полностью процессом, соответствующим фиг. 18.2, а, и причина притяжения остается той же самой, что и в случае $\pi\pi^-$ -рассеяния в модели Ли. На языке теории возмущений притяжение объясняется тем, что промежуточное состояние имеет более высокую энергию, чем начальное. С другой стороны, рассеяние в 1-м состоянии определяется в основном процессом, изображенным на фиг. 18.2, б; во 2-м состоянии из-за противоположных знаков констант связи p и n с π^0 -мезоном меняется знак вклада от диаграммы фиг. 18.2, а.

В точных выражениях для амплитуд рассеяния интегралы, входящие в (18.40), дают увеличение по сравнению с борновским приближением для 3-го состояния и уменьшение — для двух других, поскольку сечение σ_3 значительно превосходит остальные сечения. Положение здесь точно такое же, как при рассеянии на короткодействующем потенциале, где в борновском приближении амплитуда в случае отталкивания оказывается завышенной, а в случае притяжения — заниженной¹⁾. В борновском приближении $h^{(1)} = -2h^{(3)}$, тогда как эмпирически известно, что $|h^{(1)}| \ll |h^{(3)}|$, т. е. в области физических энергий поправочные члены должны играть существенную роль. Мы подсчитаем это отклонение от борновского приближения, разлагая вещественные части интегралов в (18.40) по степеням ω . Если сохранить в этом разложении только наинизший член, то получится приближение „эффективного радиуса“ для фазовых сдвигов²⁾. Таким образом,

$$\operatorname{Re} h^{(u)} = \frac{f_{r\lambda}^{2(u)}}{\omega} (1 + \omega r_u), \quad (18.41a)$$

$$r_u = \frac{1}{\pi\lambda^{(u)} f_r^2} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{\omega' k' \rho^2(k')} [\sigma_u(\omega') + A^{(v)(u)} \sigma_v(\omega')]$$

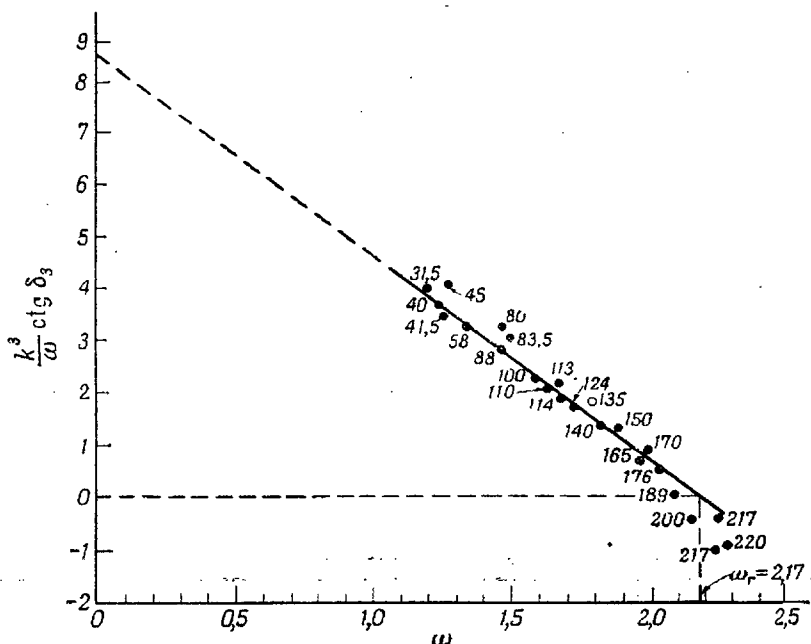
¹⁾ Исходя из этой аналогии, Вайскопф [4] дал оценку отклонения перенормированного борновского приближения в предположении, что логарифмическая производная волновой функции $\langle 1 | \phi | 0 \rangle$, слабо зависит от энергии на радиусе источника. Согласно его решению 3-й фазовый сдвиг достигает 90° при приблизительно правильной энергии, в то время как остальные фазовые сдвиги остаются малыми.

²⁾ См., например, книгу Блатта и Вайскопфа [5]. Поскольку $\operatorname{Im} h^{(u)} \sim k^3$, то при малых энергиях ею можно пренебречь.

и

$$\frac{1}{\omega} \operatorname{Re} \frac{i}{h^{(u)}} = \operatorname{ctg} \delta_u \frac{k^3 \rho^2(k)}{12\pi\omega} \approx \frac{1 - \omega r_u}{f_r^2 \lambda^{(u)}}. \quad (18.416)$$

График величины $k^3 \rho^2(k) \lambda^{(u)} \operatorname{ctg} \delta_u / 3\omega$ как функции ω должен при низких энергиях приближаться к прямой линии. При этом отрезок отсекаемый этой „кривой Чу и Лоу“ на оси ординат при $\omega = 0$,



Фиг. 18.4. График Чу — Лоу (18.416).

Точка пересечения прямой с осью ординат соответствует $3/[4(f_r^2/4\pi)]$, а с осью абсцисс — величине r_3 . Кривая взята из статьи [6]. Ссылки на работы, послужившие источником экспериментальных точек, имеются в этой статье. Проставленные вдоль кривой числа представляют собой экспериментальные энергии.

равен $4\pi/f_r^2$ и должен быть одинаковым для всех фазовых сдвигов. К сожалению, на эксперименте 1-й и 2-й фазовые сдвиги слишком малы, чтобы быть измеренными с достаточной точностью. На фиг. 18.4 приведен график котангенса в средней части (18.416) при $\rho(k) = 1$ и отложены экспериментальные данные¹⁾ для 3-го фазового

¹⁾ См. статью [6], откуда и взята фиг. 18.4. Экспериментальные точки собраны из ряда работ, ссылки на которые имеются в этой статье. См. также статью [7].

сдвига в зависимости от ω . Как видно из фиг. 18.4, экспериментальные точки с хорошей точностью укладываются на прямой, пересекающей ось ординат при

$$\frac{f_r^2}{4\pi} = 0,087 \pm 0,01. \quad (18.42)$$

Из уравнений (18.40) следует, что наклон прямой линии равен массе мезона, умноженной на эффективный радиус r_3 ; он может быть выражен через интегралы от полных сечений. Как будет показано в следующем пункте, это действительно выполняется с ожидаемой точностью. Более того, фазовый сдвиг проходит через 90° при $\omega = \omega_r = 1/r_3 \approx 2,1$. Из сопоставления с фиг. 15.1 можно видеть, что это предсказание также выполняется, поскольку полное сечение $\pi^+ + p$ -рассеяния достигает резонанса при лабораторной кинетической энергии ~ 190 Мэв, что соответствует в системе центра масс $\omega \approx 2,1$.

18.7. Приближенное решение уравнения Лоу. Определив величину f_r^2 из эксперимента, хотелось бы попытаться найти фазы $\delta_u(\omega)$, не привлекая дополнительных экспериментальных данных. Однако это можно осуществить, лишь привлекая известные эмпирические факты. Прежде всего, как известно, в области применимости нашей модели рассеяние в основном носит упругий характер. Эти справедливо, грубо говоря, для $\omega < 2$, но мы предположим, что рассеяние остается упругим при всех энергиях. При этом фазовые сдвиги δ_u становятся вещественными и можно записать

$$\sigma_u = |h_u|^2 \frac{\rho^4(k) k^4}{12\pi}. \quad (18.43)$$

Это приближение равносильно учету в сумме по промежуточным состояниям только безмезонных и одномезонных промежуточных состояний¹⁾. В этом случае, как и при решении соответствующей задачи в модели Ли, полезно ввести функции, обратные h ,

$$g_u = \frac{f_r^2 \lambda^{(u)}}{z h^{(u)}(z)}. \quad (18.44)$$

Поскольку $h^{(u)}(z)$ не имеет нулей для комплексных z (при $\text{Im } h > 0$), а величина $z h(z)$ остается конечной при $z = 0$, функция g является аналитической функцией в комплексной плоскости везде, за исключением разрывов вдоль вещественной оси от 1 до ∞ и от -1 до $-\infty$ ²⁾. Множители в (18.44) подобраны таким образом, что

¹⁾ Этот путь не следует смешивать с приближением Тамма — Данкова, в котором разложение производится по числу мезонов, окружающих *голый* нуклон, а не физический. В данном случае разложение включает *физические* состояния. Благодаря этому удается получить правильное поведение в области низких энергий.

²⁾ Возможно также существование полюсов на вещественной оси между -1 и $+1$. Их значение обсуждали Кастилейо, Далитц и Дайсон (см. [3] к гл. 14). Мы не будем останавливаться на изучении этих сингулярностей.

$g_u(0) = 1$ и, следовательно, по аналогии с (18.16) g можно записать как¹⁾

$$g_u(z) = 1 - \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega \left[\frac{\Im u(\omega)}{\omega - z} + \frac{\Re u(\omega)}{\omega + z} \right]. \quad (18.45a)$$

Вещественные весовые функции $\Im u$ и $\Re u$ соответствуют мнимым частям g на положительной и отрицательной вещественных полуосях. Используя (18.37), т. е. условие $g_u(z^*) = g_u^*(z)$, легко получаем из (18.45a), что

$$\begin{aligned} g_u(\omega + i\epsilon) - g_u(\omega - i\epsilon) &= 2i \operatorname{Im} g_u(\omega) = -2i\omega \Im u(\omega), \\ g_u(-\omega - i\epsilon) - g_u(-\omega + i\epsilon) &= 2i \operatorname{Im} g_u(-\omega) = 2i\omega \Re u(\omega). \end{aligned} \quad (18.45b)$$

Далее, из (18.38) находим в одномезонном приближении

$$\operatorname{Im} g_u(\omega) = -\frac{f_r^2}{4\pi} \frac{k^3 \rho^2(k)}{\omega} \frac{\lambda^{(u)}}{3} \quad (18.46)$$

и получаем таким образом $\Im u(\omega)$, не зная $\delta_u(\omega)$. С другой стороны, чтобы определить $\Re u$, нужно знать фазовые сдвиги в нефизической области. Их можно найти из условий перекрестной симметрии (18.37), которые записываются для функций g_u в виде

$$\frac{1}{g_u(-z)} = \frac{zh^{(u)}(-z)}{f_r^2 \lambda^{(u)}} = -\frac{1}{\lambda^{(u)}} A^{(u)(v)} \lambda^{(v)} \frac{1}{g_v(z)} \equiv B_{uv} \frac{1}{g_v(z)}, \quad (18.47)$$

$$B_{uv} = -\frac{\lambda^{(v)}}{\lambda^{(u)}} A^{(u)(v)} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 8 & -7 & 8 \\ 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как и для матрицы $A^{(u)(v)}$, собственные значения B_{uv} равны ± 1 , а $B^2 = 1$.

Уравнение (18.47) определяет лишь $\operatorname{Im} g^{-1}(-z)$; для того же, чтобы определить $\operatorname{Im} g(-z)$, необходимо знать также и $\operatorname{Re} g^{-1}(-z)$,

¹⁾ В общем случае степень z перед интегралом не обязательно должна быть равна 1. Однако если

$$\int_1^{\infty} \frac{d\omega}{k\rho^2(k)} \sigma(\omega) < \infty,$$

то $\lim_{z \rightarrow \infty} g_u = \text{const.}$ Это и оправдывает z^1 ; кроме того, это дает также результат, согласующийся с теорией возмущений.

которую невозможно получить простым образом. Поэтому даже в одномезонном приближении, оказывается невозможным найти точное решение. Чу и Лоу [8] предложили, однако, некоторое приближенное решение, для которого матрица B заменяется матрицей B' ;

$$B \approx B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (18.48)$$

которая отличается от B незначительным численным сдвигом и так же удовлетворяет условиям

$$B'^2 = 1, \quad \text{Sp } B' = 1, \quad |B'| = 1. \quad (18.49)$$

В этом приближении задача становится разрешимой относительно g_1 и g_3 , но все еще не для g_2 . Из (18.47) находим

$$\begin{aligned} g_1(\mp z) &= g_3(\pm z), \\ g_2^{-1}(-z) &= g_1^{-1}(z) - g_2^{-1}(z) + g_3^{-1}(z), \end{aligned} \quad (18.50)$$

поэтому (18.456) означает, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_1(\omega) &= -\mathfrak{F}_3(\omega) = -\frac{\lambda_3 k^3 \rho^2(k) f_r^2}{12\pi\omega^2}, \\ \mathfrak{G}_3(\omega) &= -\mathfrak{F}_1(\omega) = -\frac{\lambda_1 k^3 \rho^2(k) f_r^2}{12\pi\omega^2}. \end{aligned} \quad (18.51)$$

Не существует ясных математических аргументов, доказывающих обоснованность выражений (18.48). Однако используя эмпирические фазовые сдвиги, можно показать, что члены, которые были отброшены, по крайней мере не велики по сравнению с оставленными. Поэтому в пределах нашей грубой модели эти результаты могут служить приемлемой иллюстрацией, хотя получающиеся числа не следует принимать слишком серьезно. Мы находим:

$$\begin{aligned} g_1(\omega) &= 1 + \frac{f_r^2}{4\pi} \frac{\omega}{3\pi} \int_1^\infty d\omega' \frac{k'^3 \rho^2(k')}{\omega'^2} \left(\frac{8}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{4}{\omega' + \omega} \right), \\ g_3(\omega) &= 1 - \frac{f_r^2}{4\pi} \frac{\omega}{3\pi} \int_1^\infty d\omega' \frac{k'^3 \rho^2(k')}{\omega'^2} \left(\frac{4}{\omega' - \omega - i\varepsilon} + \frac{8}{\omega' + \omega} \right), \end{aligned} \quad (18.52a)$$

и, следовательно, разложение по степеням ω дает (при низких энергиях)

$$h^{(1)}(\omega) = -\frac{8}{\omega} f_r^2 \frac{1}{1 + \frac{f_r^2}{4\pi} \frac{4\omega}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \frac{k'^3 \rho^2(k')}{\omega'^3}},$$

$$h^{(3)}(\omega) = \frac{4f_r^2}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{f_r^2}{4\pi} \frac{4\omega}{\pi} \int_1^\infty d\omega' \frac{k'^3 \rho^2(k')}{\omega'^3}}. \quad (18.52)$$

Форма амплитуды рассеяния $h^{(1)}$ знакома нам¹⁾ из парной теории с отгалкиванием и из $p\pi^-$ -рассеяния в модели Ли, а форма $h^{(3)}$ сходна с амплитудой рассеяния в случае притяжения в парной теории или при $p\pi^-$ -рассеянии в модели Ли. Вид этой функции предсказывает резонанс в состоянии $3/2, 3/2$ для достаточно сильной связи, что и наблюдается на эксперименте. Чтобы получить некоторое представление о резонансной энергии, вычислим эффективные радиусы r_1 и r_3 , предсказываемые (18.52). Тогда радиус r_2 можно найти из условия $r_2 = -4(r_1 + r_3)$, которое следует из перекрестной симметрии (18.37) в применении к (18.41a). Таким путем мы получаем

$$r_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{4(f_r^2/4\pi)}{\pi} \int_1^\infty d\omega \frac{k^3 \rho^2(k)}{\omega^3}. \quad (18.53)$$

Другое приближение, несколько отличное от рассмотренного (т. е. от приближения, получающегося при замене B на B'), состоит в том, что в уравнениях Лоу (18.40) оставляют только величину α_3 . Мы покажем вскоре, что в этом случае значение r_1 приблизительно совпадает с (18.53), но $r_2 = r_1$ и $r_3 = -(\frac{5}{4})r_1$, а не $-r_1$; основная неопределенность, как мы видим, получается для радиуса r_2 . В обоих приближениях величины и относительные знаки r_1 и r_3 оказываются приблизительно одинаковыми. Если предположить, что приближение эффективного радиуса все еще в какой-то мере справедливо при резонансной энергии ω_r , то получается $\omega_r = 1/r_3$. В случае прямоугольного обрезания, когда

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & \text{для } k < k_{\max}, \\ 0 & \text{для } k > k_{\max}, \end{cases}$$

мы находим

$$\omega_r \approx \left(\frac{f_r^2}{4\pi} \frac{4}{\pi} \omega_{\max} \right)^{-1}. \quad (18.54)$$

¹⁾ За исключением очевидных изменений, связанных с тем, что здесь мы имеем дело с P -волновыми мезонами.

При использовании (18.42) экспериментальное значение $\omega_r \approx 2$ дает $\omega_{\max} \approx 5$. Интересно отметить, что ω_r точно совпадает с энергией $3/2$, $3/2$ -уровня в пределе сильной связи, которая задается формулой (17.64):

$$E_3 = \frac{9}{\frac{f^2}{4\pi} \frac{4}{\pi} \omega_{\max}}. \quad (18.55)$$

Если теперь принять во внимание, что, согласно приближению (17.59), $f_r = f/3$, то мы найдем, что $E_3 = \omega_r$. Ширина уровня Γ [см. (12.9а)] равна

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv 2(\omega_r - \omega) \operatorname{tg} \delta = (\omega_r - \omega) \frac{k_r^3}{\omega_r} \frac{f_r^2}{4\pi} \frac{8}{3} (1 - r_3 \omega)^{-1} \rho^2(k) = \\ &= \frac{8}{3} \frac{f_r^2}{4\pi} k_r^3 \rho^2(k) \sim 1,1. \end{aligned} \quad (18.56)$$

Ширина Γ не зависит от обрезания для k_r , не слишком близких к k_{\max} , и имеет ту же форму, что и в случае классического решения (16.32). Характер сечения в окрестности резонансной энергии имеет обычный вид, рассмотренный в гл. 15.

18.8. Заключение. В заключение настоящей главы мы разъясним наиболее существенные черты π -мезон-нуклонного рассеяния. При низких энергиях, для которых $\sin \delta \sim f_r^2 k^3 / \omega$, мы ожидаем, что сечение рассеяния должно быть пропорционально

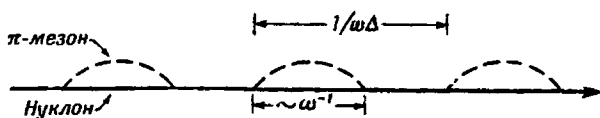
$$\sigma \sim f_r^4 \frac{k^4}{\omega^2}. \quad (18.57)$$

Это действительно наблюдается экспериментально, как видно из фиг. 15.1. В этой области „эффективная сила связи“ ($f_r k$) остается малой.

Вид сечения рассеяния (18.57) можно пояснить следующим образом. Рассмотрим ящик объема L^3 , содержащий мезон с импульсом k и покоящийся нуклон. Поскольку мезон не локализован, вероятность его нахождения внутри сферы радиуса ω^{-1} с центром в точке, где находится нуклон, равна $\sim \omega^{-3} L^{-3}$. Далее, нуклон может испускать и поглощать мезоны, когда они находятся от него на расстоянии, меньшем ω^{-1} . Эта величина характеризует размеры облака (а не источника). Поскольку не существует различия между падающим мезоном и любым из мезонов облака, нуклон может поглотить один из таких мезонов облака вместо падающего. С другой стороны, нуклон активен к этому процессу лишь в течение определенной доли времени Δ , в том смысле, что существует определенная вероятность испускания и поглощения мезонов нуклоном.

Если представить историю нуклона графически, как это сделано на фиг. 18.5, то длины мезонных линий окажутся равными $t \approx \omega^{-1}$,

причем сами линии распределены хаотически, а отношение их длины к длине нуклонной линии равно Δ . Как мы знаем, согласно скалярным теориям, если в течение преимущественной части активного периода существует один мезон, то $\Delta \approx$ Среднее число мезонов $\approx g^2/4\pi$. Для P -волновых мезонов вероятность взаимодействия сильно зависит от энергии, и в этом случае до тех пор, пока $\Delta < 1$, она равна эффективной силе связи с физическим нуклоном $\approx (f_r^2/4\pi)k^2$. Поглощение падающего мезона нарушает сохранение энергии, и поэтому может длиться лишь в течение времени $t \sim 1/\Delta E = \omega^{-1}$. По прошествии этого времени нуклон должен¹⁾ испустить обратно



Фиг. 18.5. Диаграмма, представляющая физический нуклон.

мезон с энергией ω , но не обязательно в том же направлении. Такое событие и составляет процесс рассеяния π -мезона нуклоном. Поскольку поглощение и испускание происходят только в результате квантовомеханической флуктуации, разрешенной соотношением неопределенностей, мы не можем сказать, в какой именно момент времени в течение интервала t происходит поглощение и испускание; эти события могут произойти и в обратном порядке. Амплитуды процессов этих двух типов (испускание — поглощение, поглощение — испускание) интерферируют друг с другом, поскольку промежуточное состояние не контролируется посредством измерений; однако интерференционные члены не меняют порядка величины сечения (за исключением случая 3-го состояния при высоких энергиях, в окрестности резонанса). В нашей качественной аргументации отдельные события можно считать независимыми и перемножать вероятности отдельных этапов процесса (хотя с точки зрения квантовой механики это и не вполне справедливо). Тогда вероятность всего процесса равна ($\eta =$ вероятность)

$$\eta_{\text{процесса}} = \eta \text{ (попадания мезона в область мезонного облака нуклона)} \times \eta \text{ (того, что это произойдет в течение времени, когда нуклон активен в смысле поглощения или испускания мезонов)} \times \eta \text{ [испускания (или поглощения) мезона нуклоном в течение времени } \omega^{-1}\text{],}$$

¹⁾ Классическая картина оказывается несколько нелогичной, поскольку в ней нуклон поглощает мезон только тогда, когда „знает“, что в дальнейшем испустит его.

или

$$\eta_{\text{процесса}} = \left(\frac{1}{\omega^3 L^3} \right) \left(\frac{f_r^2}{4\pi} k^2 \right) \left(\frac{f_r^2}{4\pi} k^2 \right).$$

Сечение рассеяния равно этой суммарной вероятности, деленной на поток падающих мезонов и умноженной на частоту, с которой мезоны уходят из облака. Последняя равна скорости мезона k/ω , деленной на диаметр облака ω^{-1} . Поскольку поток падающих мезонов (т. е. вероятность их прохождения через единичную площадку за единицу времени) равен $(k/\omega)(1/L^3)$, то сечение рассеяния имеет вид

$$\sigma \approx \left(\frac{f_r^2}{4\pi} k^2 \right)^2 \frac{1}{\omega^3 L^3} k \frac{L^3 \omega}{k} = \left(\frac{f_r^2}{4\pi} \frac{k^2}{\omega} \right)^2.$$

Конечно, сечение ограничено геометрическими размерами облака $1/\omega^2$. При превышении этой величины наши рассуждения теряют смысл, так как отдельные вероятности оказываются при этом больше единицы. Строгий формальный анализ показывает, что этот предел достигается лишь в 3-м состоянии и при больших энергиях. В той мере, в какой резонанс в 3-м состоянии доминирует при рассеянии, справедливы другие простые утверждения относительно сечения, смысл энергетической зависимости в окрестности резонанса с точки зрения вероятностей был рассмотрен в гл. 12.

Угловое распределение мезонов можно получить из соображений, которые мы изложили после формулы (16.37). Если взять за ось квантования направление импульса падающего мезона, то получается, что $J_z = s_z = \pm 1/2$ и угловое распределение мезонов в состоянии $J = 3/2$, $J_z = \pm 1/2$ оказывается $\sim 1 + 3 \cos^2 \vartheta$. Этот результат следует сравнить с классическим результатом (16.33), согласно которому угловое распределение тоже имеет пики для направлений рассеяния вперед и назад, но сильно сглаженные. Предсказания, связанные с зарядовой независимостью, можно получить, определяя, какая часть падающих и рассеянных состояний (например, $\pi^- p$) имеет $J = T = 3/2$. Для рассеяния на протонах мы получаем, таким образом, из (16.35)

$$\sigma_{\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p} : \sigma_{\pi^- p \rightarrow \pi^0 n} : \sigma_{\pi^- p \rightarrow \pi^- p} = 9 : 2 : 1. \quad (18.58)$$

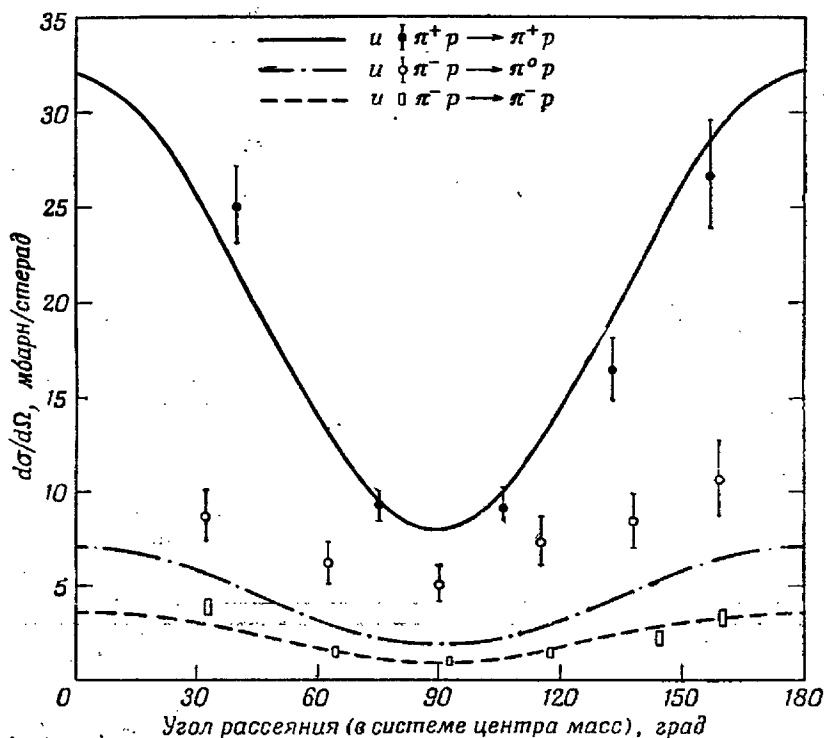
Экспериментальные кривые, изображенные на фиг. 15.1 и 18.6, показывают, что полученные предсказания выполняются очень хорошо. Максимум на кривой $\pi^+ p$ -рассеяния на фиг. 15.1 свидетельствует о том, что резонанс действительно имеет место в $J = 3/2$ состоянии, так как в этом случае сечение достигает максимально возможного значения, равного $8\pi/k^2$.

Использованная нами простая статическая модель предсказывает также, что фазы $\delta_{1/2, 3/2}$ и $\delta_{3/2, 1/2} = \delta_2$ должны быть равны, отрица-

тельны и невелики:

$$\operatorname{tg} \delta_2 \approx -\frac{f_r^2}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{k^3 p^2(k)}{\omega} \approx -0,05 \frac{k^3}{\omega}.$$

Экспериментально эти фазы действительно оказываются малыми, но они не определены точно.



Ф и г. 18.6. Дифференциальное сечение рассеяния для упругого и зарядово-обменного рассеяния π -мезонов с энергией 189 Мэв на водороде.

Экспериментальные точки взяты из работы [9]. Кривые пропорциональны выражению $3 \cos^2 \vartheta + 1$ и нанесены с отношением 9 : 2 : 1, как предсказывает уравнение (18.53).

Конечно, рассеяние характеризуется и многими более тонкими особенностями. Например, из (18.28) и (18.32) следует, что T -матрицу можно записать в виде¹⁾ $a + b\sigma \cdot k \times k'$, где k и k' — импульсы падающего и рассеянного мезонов соответственно. Отсюда

¹⁾ Это, кстати, наиболее общая форма амплитуды при сохранении четности, поскольку a и b могут быть функциями k^2 и $k \cdot k'$.

следует, что протоны отдачи могут быть поляризованы в направлении, перпендикулярном плоскости рассеяния, поскольку члены a и b будут складываться или вычитаться в зависимости от направления спина по отношению к плоскости рассеяния. К сказанному следует добавить, что, как мы уже отмечали ранее, S -волновые фазовые сдвиги отличны от нуля и становятся все более существенными по мере приближения энергии к нулю и области ниже резонансной энергии. Выше резонанса картина рассеяния усложняется эффектами отдачи, и рассмотренная нами модель постепенно теряет смысл. Тем не менее, как мы видим, простая статическая модель может объяснить большое число экспериментальных фактов и довольно широком интервале энергий.

Рекомендуемая литература

- Low F. E., Phys. Rev., 97, 1392 (1955).
Chew G. F., Low F. E., Phys. Rev., 101, 1570 (1956).
Wick G. C., Rev. Mod. Phys., 27, 339 (1955).
Chew G. F., Theory of Pion Scattering and Photoproduction „Handbuch der Physik“, Berlin (в печати).
Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., Nuovo Cimento, 1, 205 (1955).
Cini M., Fubini S., Nuovo Cimento, 3, 764 (1956).
Fubini S., Nuovo Cimento, 3, 1425 (1956).

Глава 19

СВОЙСТВА НУКЛОНОВ

19.1. Среднее значение поля. Изложенное в предыдущей главе позволяет углубить наши сведения о свойствах нуклона. Средние значения некоторых наблюдаемых величин, таких, как число мезонов в облаке, их зарядовое распределение и их вклад в магнитный момент нуклона, могут быть выражены через перенормированную константу связи и сечение рассеяния.

В этом пункте мы вернемся к разложению по плоским волнам, поскольку большинство наблюдаемых величин выражается при этом наиболее удобным образом. Рассмотрим в первую очередь величину $a_\alpha(\mathbf{k}, t)$ при $t=0$, которая задается формулой (15.10) или

$$a_\alpha(\mathbf{k}) = A_\alpha(\mathbf{k}) - \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} V_\alpha(\mathbf{k}, t),$$
$$V_\alpha(\mathbf{k}, t) = f \frac{\sigma(t) \cdot \mathbf{k} \tau_\alpha(t) \rho(\mathbf{k})}{(2\omega)^{1/2} (2\pi)^{1/2}} = V_\alpha^\dagger(\mathbf{k}, t) \quad (19.1)$$

Взаимодействие $V_\alpha(\mathbf{k}, t)$ представляет собой „двойник“ взаимодействия, описываемого уравнением (18.5). Для основного состояния $A_\alpha(\mathbf{k})|\xi\rangle = 0$, принимая во внимание гейзенберговскую временную зависимость оператора $\sigma(t) \tau_\alpha(t)$, мы находим, что

$$\langle \xi' | a_\alpha(\mathbf{k}) | \xi \rangle = - \frac{f_r}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\rho(\mathbf{k})}{(2\omega)^{1/2}} (\xi' | \tau_\alpha \sigma \cdot \mathbf{k} | \xi) \int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} =$$
$$= \frac{f_r}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i\rho(\mathbf{k})}{(2\omega^2)^{1/2}} (\xi' | \tau_\alpha \sigma \cdot \mathbf{k} | \xi). \quad (19.2)$$

При интегрировании в (19.2) был использован тот факт, что при адиабатическом выключении взаимодействия

$$\int_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t} = \lim_{\substack{\alpha > 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} \int_{-\infty}^0 dt e^{(i\omega + \alpha)t}.$$

Среднее значение мезонного поля равно при этом

$$\begin{aligned} \langle \xi' | \phi_\alpha(r) | \xi \rangle &= f_r \int \frac{\rho(k)}{(2\omega^3)^{1/2}} (\xi' | i\tau_\alpha \sigma \cdot k | \xi) \frac{e^{ik \cdot r} - e^{-ik \cdot r}}{(2\omega)^{1/2}} \frac{d^3k}{8\pi^3} = \\ &= f_r (\xi' | \tau_\alpha \sigma \cdot \nabla | \xi) Y(r), \\ Y(r) &= \int d^3r' \rho(r') \frac{e^{-|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Мы получаем, следовательно, тот же результат, который дает теория возмущений при замене f на f_r . Хотя величину ϕ непосредственно измерить невозможно, полученный результат все же поучителен, поскольку величина (19.3) связана с ядерными силами на больших расстояниях (т. е. с одномезонным обменом, см. гл. 21) и с πN -рассеянием при приближающейся к нулю энергии.

19.2. Средние значения в основном состоянии. Чтобы изучить наблюдаемые величины, которые квадратичны относительно поля ϕ , используем полный набор собственных состояний $|out, n\rangle$ оператора H и запишем

$$\begin{aligned} \langle \xi' | a_\alpha^\dagger(k') a_\alpha(k) | \xi \rangle &= \int_{-\infty}^0 dt dt' e^{i(\omega t - \omega' t')} \langle \xi' | V_\alpha^\dagger(k', t') V_\alpha(k, t) | \xi \rangle = \\ &= \frac{f^2 \rho(k) \rho(k')}{(2\pi)^3 2(\omega\omega')^{1/2}} \sum_n \frac{\langle \xi' | \tau_\alpha \sigma \cdot k' | out, n \rangle \langle out, n | \tau_\alpha \sigma \cdot k | \xi \rangle}{(E_n + \omega)(E_n + \omega')}. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Здесь мы снова использовали иременную зависимость гейзенберговских операторов.

Когда промежуточное состояние $|out, n\rangle$ является основным состоянием, матричные элементы в (19.4) легко можно выразить через f_r . Для других промежуточных состояний выражение в правой части можно связать с полным сечением. Это делается с помощью (18.11) и (18.39):

$$\begin{aligned} -2\text{Im} T_{\xi'K', \xi K} &= \sum_n T_{n, \xi'K'}^* T_{n, \xi K} 2\pi \delta(\omega_n - \omega) = \\ &= 2\pi \sum_n \langle \xi' | V_{K'} | out, n \rangle \langle out, n | V_K | \xi \rangle \delta(\omega_n - \omega) = \\ &= \sum_u \frac{\mathfrak{P}_{\xi'K', \xi K}^{(u)}(\omega) k}{6\pi^2 \omega}, \end{aligned} \quad (19.5)$$

где суммирование в \sum проводится по всем состояниям, за исключением основного. Чтобы использовать (19.5), необходимо преобразовать операторы проектирования применительно к представлению

в виде плоских волн. В более подробных обозначениях мы имеем

$$\mathfrak{P}_{\xi' a' k', \xi a k} = (\mathbf{k}' | m') \mathfrak{P}_{\xi' a' m', \xi a m} (m | \mathbf{k}),$$

где

$$(m | \mathbf{k}) = Y_1^m = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \frac{k^m}{k}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\xi' a' k', \xi a k}^{(1)} &= \frac{1}{12\pi k k'} (\xi' | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}' \tau_a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \tau_a | \xi), \\ \mathfrak{P}_{\xi' a' k', \xi a k}^{(2)} &= \frac{1}{12\pi k k'} (\xi' | 3\tau_a \tau_a \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - 2\tau_a \tau_a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}' \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} + 3\delta_{aa} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}' \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} | \xi), \\ \mathfrak{P}_{\xi' a' k', \xi a k}^{(3)} &= \frac{1}{12\pi k k'} (\xi' | (3\delta_{aa} - \tau_a \tau_a) (3\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}' \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) | \xi). \end{aligned} \quad (19.5a)$$

Уравнение (19.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sum_n \langle \xi' | \tau_a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}' | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | \tau_a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} | \xi \rangle \delta(\omega_n - \omega_q) = \\ = \frac{4}{3f_r^2 q \rho^2(q)} \sum_u \mathfrak{P}_{\xi' a' k', \xi a k}^{(u)} \sigma_u(\omega_q), \end{aligned} \quad (19.5b)$$

где \mathbf{p} и \mathbf{p}' — единичные векторы в направлениях \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Умножая (19.5b) на $[1/(\omega + \omega_q)] [1/(\omega' + \omega_q)]$ и интегрируя по ω_q , получаем

$$\begin{aligned} (\xi' | a_a^\dagger(\mathbf{k}') a_a(\mathbf{k}) | \xi) = \frac{\rho(k) \rho(k')}{16\pi^3 (\omega \omega')^{1/2}} \left[\frac{f_r^2}{\omega \omega'} (\xi' | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}' \tau_a \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \tau_a | \xi) + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \sum_u \int_1^\infty d\omega_q \frac{\mathfrak{P}_{\xi' a' k', \xi a k}^{(u)} \sigma_u(\omega_q)}{q \rho^2(q) (\omega + \omega_q) (\omega' + \omega_q)} \right]. \end{aligned} \quad (19.6)$$

В качестве первого применения уравнения (19.6) вычислим среднее число виртуальных мезонов, окружающих нуклон. С помощью (19.6) находим

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \sum_a \int d^3k \langle \xi | a_a^\dagger(\mathbf{k}) a_a(\mathbf{k}) | \xi \rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\rho^2(k) k^2}{2\omega} \left[\frac{3f_r^2}{\omega^2} + \frac{1}{3\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega_q}{q \rho^2(q)} \frac{\sigma_1(\omega_q) + 4\sigma_2(\omega_q) + 4\sigma_3(\omega_q)}{(\omega_q + \omega)^2} \right] = \\ &= \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk k^4 \rho^2(k)}{\omega} \left[\frac{f_r^2}{4\pi \omega^2} + \frac{1}{36\pi^2} \int_1^\infty \frac{d\omega_q}{q \rho^2(q)} \frac{\sigma_1(\omega_q) + 4\sigma_2(\omega_q) + 4\sigma_3(\omega_q)}{(\omega_q + \omega)^2} \right]. \end{aligned} \quad (19.7)$$

В (19.7) не подразумевается суммирования по $|\xi\rangle$, но величина $\langle N \rangle$ не зависит от состояния $|\xi\rangle$. Первый член соответствует перенорми-

рованному борновскому приближению¹⁾, которое отличается от знакомого нам по второй части книги выражения $\sim f^2 (d^3k/\omega^3)$ множителем k^2 , возникающим из-за того, что теперь мы имеем дело с P -волновыми мезонами. Поскольку наш метод относится к физическим частицам, вместо f появилась величина f_r . Интеграл $\int d\omega_q \dots$ представляет вклад высших приближений по f_r^2 .

Совершенно аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \langle H_0 \rangle &= \sum_{\alpha} \int d^3k \omega \langle \xi | a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle = \\ &= \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} dk k^4 \rho^2(k) \left[\frac{f_r^2}{4\pi\omega^2} + \frac{1}{36\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{d\omega_q}{q\rho^2(q)} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\sigma_1(\omega_q) + 4\sigma_2(\omega_q) + 4\sigma_3(\omega_q)}{(\omega + \omega_q)^2} \right] \end{aligned} \quad (19.8)$$

и с соответствующими изменениями

$$\begin{aligned} \langle H' \rangle &= \sum_{\alpha} \int d^3k \langle \xi | a_{\alpha}(\mathbf{k}) iV_{\alpha}(\mathbf{k}) - i a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) V_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) | \xi \rangle = \\ &= \sum_n \sum_{\alpha} \int d^3k \frac{2 \langle \xi | V_{\alpha}(\mathbf{k}) | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle}{\omega + E_n} = \\ &= -\frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk k^4 \rho^2(k)}{\omega} \left[\frac{f_r^2}{4\pi\omega} + \frac{1}{36\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{d\omega_q}{q\rho^2(q)} \frac{\sigma_1(\omega_q) + 4\sigma_2(\omega_q) + 4\sigma_3(\omega_q)}{(\omega + \omega_q)} \right]. \end{aligned} \quad (19.9)$$

Сравнивая (19.8) и (19.9), мы видим, что борновский член $\langle H_0 \rangle$ равен половине члена $-\langle H' \rangle$, но двойной интеграл в H_0 меньше половины двойного интеграла в H' . Отсюда следует „теорема вириала“

$$\langle H_0 \rangle \leq -\frac{1}{2} \langle H' \rangle \quad \text{и} \quad \langle \mathcal{E}_0 \rangle \leq -\langle H_0 \rangle. \quad (19.10)$$

Она означает, что взаимодействие H' делает нуклон динамически более легким.

19.3. Константы перенормировки и другие параметры статической модели. Для выяснения других свойств величины \mathcal{E}_0 следует сперва обратиться к изучению параметров r_1 , r_2 , f^2 , ω_{\max} , которые существенны при описании нуклона в рамках статической модели.

¹⁾ В дальнейшем мы будем сокращенно писать ПБП.

Ряд необходимых для этого соотношений можно получить, интегрируя уравнения (19.5б) по ω_n :

$$\begin{aligned} \langle \xi' | (\tau\sigma)_{K'} (\tau\sigma)_K | \xi \rangle &= \langle \xi' | (\tau\sigma)_{K'} | \xi'' \rangle \langle \xi'' | (\tau\sigma)_K | \xi \rangle = \\ &= \frac{4}{3f^2} \int_1^\infty \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \sum_u \mathfrak{P}_{\xi' K', \xi K}^{(u)} \sigma_u(\omega_n). \end{aligned} \quad (19.11)$$

С другой стороны, средние значения можно найти, используя (17.5), (17.3) и (18.32). Например,

$$\begin{aligned} \langle \xi' | (\tau\sigma)_{K'} (\tau\sigma)_K | \xi \rangle &= (\xi' | \delta_{KK'} - (\sigma \cdot l_{K'K} + \tau \cdot t_{K'K}) \tau_1 + \\ &+ \sigma \cdot l_{K'K} t_{K'K} \cdot \tau \tau_2 | \xi). \end{aligned} \quad (19.12)$$

Чтобы привести интеграл в (9.11) к виду, удобному для сравнения с (19.12), используем (19.5б)

$$\begin{aligned} \sum_u \mathfrak{P}_{\xi' K', \xi K}^{(u)} h^{(u)} &= (\xi' | \delta_{KK'} (h_1 + 4h_2 + 4h_3) - (\sigma \cdot l_{K'K} + \tau \cdot t_{K'K}) \times \\ &\times (h_1 + h_2 - 2h_3) + \sigma \cdot l_{K'K} \tau \cdot t_{K'K} (h_1 - 2h_2 + h_3) | \xi) \frac{1}{12\pi}. \end{aligned} \quad (19.13)$$

Собирая результаты и приравнявая коэффициенты при 1 , $\sigma \cdot l + \tau \cdot t$ и $\sigma \cdot l \cdot \tau \cdot t$, мы получаем

$$\frac{1}{36\pi^2} \int \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 + 4\sigma_2 + 4\sigma_3 \\ \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3 \\ \sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{f^2}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \tau_2^2 \\ \tau_1 - \tau_2^2 \\ \tau_2 - \tau_2^2 \end{array} \right\}. \quad (19.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 + 4\sigma_2 + 4\sigma_3 \\ \sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3 \\ \sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{f^2}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \tau_2^2 \\ \tau_1 - \tau_2^2 \\ \tau_2 - \tau_2^2 \end{array} \right\}. \quad (19.14b)$$

В принципе соотношения (19.14) можно использовать для вычислений перенормированной константы связи и констант перенормировки из наблюдаемых величин. Однако при расчетах возникает трудность, связанная с тем, что область высоких энергий вносит существенный вклад в интегралы (19.14), тогда как для этой области рассматриваемая модель не соответствует физической реальности. Взяв, например, комбинацию $a + 2b - 3c$ соотношений (19.14), найдем

$$\int \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \sigma_2 \geq \frac{1}{4} \int \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \sigma_3, \quad (19.15)$$

поскольку из (17.13) мы знаем, что $(1 + 2\tau_1 - 3\tau_2) \geq 0$. Экспериментально σ_2 составляет всего несколько процентов от σ_3 вплоть до энергий ~ 300 Мэв, так что $\int \sigma_2 d\omega_n / [k_n \rho^2(k_n)]$ должен содержать большой вклад от высоких энергий. Отмеченная трудность отсутствует в уравнениях Лоу (гл. 18) для π -мезон-нуклонного рассеяния или в выражении для $\langle N \rangle$, где вклад в интегралы от области высо-

ких энергий подавляется благодаря присутствию одной или более дополнительных степеней ω в знаменателе.

Тем не менее, если подставить данные по низкоэнергетическому рассеянию¹⁾ в полученные нами соотношения (или в соотношения, которые мы получим ниже) и оставить вопрос о высоких энергиях открытым, можно составить достаточно хорошее представление о том, каковы должны быть величины различных параметров, входящих в теорию, чтобы она согласовывалась с экспериментами при низких энергиях. Мы не будем подробно останавливаться на соответствующем анализе [1], а заметим лишь, что при

$$\frac{f_r^2}{4\pi} = 0,08 \quad \text{и} \quad \rho(k) = \frac{\zeta^2}{k^2 + \zeta^2}, \quad \rho(r) \sim \frac{e^{-\zeta r}}{r},$$

$$\frac{f^2}{4\pi} = 0,22, \quad \tau_1 = 0,37, \quad (19.16)$$

$$\zeta = 4,7, \quad \tau_2 = 0,58$$

удовлетворяется большое число соотношений и неравенств. Конечно, τ_1 и τ_2 не являются независимыми величинами и в принципе могут быть вычислены через f и ρ . Согласно изложенному в гл. 17, нет ничего несовместного в том, что константы τ_1 и τ_2 имеют приписанные им численные значения, если ρ и f_r выбраны в согласии с (19.16). Для понимания физического смысла величин τ_1 и τ_2 следует вернуться к соображениям гл. 17. Исходя из значения $\tau_1 \approx 0,4$, мы находим, например, что вероятность обнаружения голого протона (нейтрона) в состоянии физического протона равна 70% (30%). С другой стороны, поскольку $\tau_2 \approx 0,5$, мы заключаем, что вероятность обнаружения голого протона со спином, направленным вверх, и голого нейтрона со спином, направленным вниз, в состоянии физического протона с $J_z = 1/2$ составляет 75%.

19.4. Собственная энергия нуклона. Средние значения (19.7) — (19.9) можно вычислить, используя обрезание (19.16). Знаменатели в интегралах по $d\omega_n$ для этих величин оказываются достаточно большими, чтобы наиболее существенный вклад вносила область низких энергий, где $3/2$, $3/2$ -резонанс доминирует в рассеянии. Мы пренебрегаем поэтому величинами σ_1 и σ_2 , а вместо σ_3 подставляем $2/3$ измеренного полного сечения взаимодействия π^+p . Множитель $2/3$ появляется следующим образом. Система π^+p всегда находится

¹⁾ В нижеследующих данных использована величина вклада мезонного заряда в электромагнитные свойства нуклона. Этот вопрос кратко рассмотрен ниже.

в изоспиновом состоянии с $T = 3/2$, а ее угловой момент может иметь два значения: $J = 3/2$ или $J = 1/2$. Вероятность первого из этих состояний равна $2/3$ [см. (16.37)]. При сделанных нами упрощениях оставшееся интегрирование по k производится элементарно, и мы находим

$$\langle N \rangle \approx 1, \quad (19.17a)$$

$$\langle H_0 \rangle \approx 8, \quad \langle H_0 + H' \rangle = \mathcal{E}_0 = -11. \quad (19.17b)$$

Основной вклад в (19.17) дает ПБП, а величина поправочных членов составляет около 20%. Поскольку интеграл по d^3k содержит член с k^4 в числителе, возникает большой вклад от энергий, близких к ω_{\max} , в особенности для (19.17b). Так как применимость статической модели при энергиях $\sim \omega_{\max}$ весьма сомнительна, к полученным числам не следует относиться слишком серьезно. Тем не менее порядок величин, по крайней мере $\langle N \rangle$, должен быть правильным. Что это действительно так, можно усмотреть из экспериментальных данных по аннигиляции протонов с антипротонами, где среднее число рождаемых π -мезонов оказывается равным ~ 5 [2]. Отсюда возникает следующая возможная картина такого явления. Нуклонные ядра аннигилируют, рождая минимальное число π -мезонов, равное двум (если предположить сохранение энергии — импульса) или трем. Два или три других мезона являются мезонами из облаков двух тяжелых частиц. Получающееся число находится в хорошем согласии со средним числом мезонов, вычисленным выше.

Возвращаясь к нашему выражению для \mathcal{E}_0 [см. (19.8) и (19.9)], мы можем вывести еще одно поучительное неравенство. Заметим сперва, что все поправочные члены (под интегралом $\int d\omega_n$) дают вклады одинакового знака. Далее, для всех физических энергий ω_n

$$0 \leq \frac{2}{\omega(\omega + \omega_n)} - \frac{1}{(\omega + \omega_n)^2} \leq \frac{1}{\omega^2}, \quad (19.18)$$

откуда, используя (19.14a), получаем

$$\frac{f_r^2}{4\pi} \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \frac{dkp^2(k)k^4}{\omega^2} \leq |\mathcal{E}_0| \leq \frac{f^2}{4\pi} \frac{3}{\pi} \int_0^\infty \frac{dkp^2(k)k^4}{\omega^2}. \quad (19.19)$$

Таким образом, точное значение \mathcal{E}_0 лежит в интервале между борновскими приближениями с перенормированной и неперенормированной константами связи. В пределе сильной связи (или в классическом

случае), когда $f^2 = 9f_r^2$, мы имели из (17.63)

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{f^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk \rho^2(k) k^4}{\omega^2} = -\frac{9f_r^2}{4\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\rho^2(k) k^4 dk}{\omega^2}. \quad (19.20)$$

Это — среднее геометрическое от двух указанных пределов.

19.5. Распределение заряда и тока физического нуклона. Магнитный момент. В заключение вычислим распределение заряда и тока, связанное с мезонным облаком и приводящее к определенному магнитному моменту. Эти величины могут быть подробно измерены (например, с помощью рассеяния электронов на нуклонах при высоких энергиях) и представляют поэтому особый интерес. Нам нужно теперь вычислить средние значения $\langle \xi' | a_{\alpha'}(\mathbf{k}') a_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle$, т. е. амплитуды вероятности обнаружения мезонных пар в состоянии физического нуклона. С этой целью мы воспользуемся уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [a_{\alpha'}(\mathbf{k}', t), a_{\alpha}(\mathbf{k}, t)]_{t=0} &= i [H, a_{\alpha'}(\mathbf{k}') a_{\alpha}(\mathbf{k})] = \\ &= -i(\omega + \omega') a_{\alpha'}(\mathbf{k}') a_{\alpha}(\mathbf{k}) - a_{\alpha'}(\mathbf{k}') V_{\alpha'}(\mathbf{k}') - a_{\alpha}(\mathbf{k}) V_{\alpha}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (19.21)$$

Учитывая, что матричные элементы между стационарными состояниями постоянны, поскольку $\langle \xi | [H, \mathcal{G}] | \xi \rangle = 0$ и что a и V коммутируют, находим с помощью (19.1):

$$\begin{aligned} \langle \xi' | a_{\alpha'}(\mathbf{k}') a_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle &= i \frac{\langle \xi' | V_{\alpha'}(\mathbf{k}') a_{\alpha'}(\mathbf{k}') + V_{\alpha}(\mathbf{k}) a_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle}{\omega + \omega'} = \\ &= \frac{-1}{\omega + \omega'} \mathbf{S}_n \left[\frac{\langle \xi' | V_{\alpha'}(\mathbf{k}') | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle}{\omega_n + \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \xi' | V_{\alpha}(\mathbf{k}) | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_{\alpha'}(\mathbf{k}') | \xi \rangle}{\omega_n + \omega'} \right]. \end{aligned} \quad (19.22)$$

и аналогично для эрмитово сопряженной величины

$$\begin{aligned} \langle \xi' | a_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{k}') a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) | \xi \rangle &= -i \frac{\langle \xi' | a_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{k}') V_{\alpha'}(\mathbf{k}') + a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) V_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle}{\omega + \omega'} = \\ &= \frac{-1}{\omega + \omega'} \mathbf{S}_n \left[\frac{\langle \xi' | V_{\alpha'}(\mathbf{k}') | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle}{\omega_n + \omega'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \xi' | V_{\alpha}(\mathbf{k}) | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_{\alpha'}(\mathbf{k}') | \xi \rangle}{\omega_n + \omega} \right]. \end{aligned}$$

Используя результаты и обозначения п. 19.2, получаем с помощью описанных в этом пункте приемов следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle \xi' | a_{\alpha'}(\mathbf{k}') a_{\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle &= -\frac{\rho(\mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}')}{8\pi^3 (4\omega\omega')^{1/2} (\omega + \omega')} \times \\ &\times \left\{ \left(\xi' \left| \frac{\tau_{\alpha'}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}') \tau_{\alpha}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})}{\omega} + \frac{\tau_{\alpha}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \tau_{\alpha'}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}')}{\omega'} \right| \xi \right) \times \right. \\ &\times f_r^2 + \frac{4}{3} \int_1^{\infty} \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \sum_u \sigma_u \left[\frac{\mathfrak{P}_{\xi' \alpha' \mathbf{k}', \xi \alpha \mathbf{k}}^{(u)}}{\omega_n + \omega} + \frac{\mathfrak{P}_{\xi' \alpha \mathbf{k}, \xi \alpha' \mathbf{k}'}^{(u)}}{\omega_n + \omega'} \right] \left. \right\}, \quad (19.23) \\ \langle \xi' | a_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{k}') a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) | \xi \rangle &= -\frac{\rho(\mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}')}{(4\omega\omega')^{1/2} (\omega + \omega')} \frac{1}{8\pi^3} \times \\ &\times \left\{ \left(\xi' \left| \frac{\tau_{\alpha'}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}') \tau_{\alpha}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})}{\omega'} + \frac{\tau_{\alpha}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}) \tau_{\alpha'}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}')}{\omega} \right| \xi \right) \times \right. \\ &\times f_r^2 + \frac{4}{3} \int_1^{\infty} \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \sum_u \sigma_u \left[\frac{\mathfrak{P}_{\xi' \alpha' \mathbf{k}', \xi \alpha \mathbf{k}}^{(u)}}{\omega_n + \omega'} + \frac{\mathfrak{P}_{\xi' \alpha \mathbf{k}, \xi \alpha' \mathbf{k}'}^{(u)}}{\omega_n + \omega} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Эти формулы позволяют вычислить локальные величины, квадратичные по полю ϕ . Для плотности тока (7.12) $\mathbf{j}_{\pi} = -e(\phi_1 \nabla \phi_2 - \phi_2 \nabla \phi_1)$ находим

$$\begin{aligned} \langle \xi' | j_{\pi j}(\mathbf{r}) | \xi \rangle &= -e \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}}{(4\omega\omega')^{1/2}} l(k_j - k'_j) \times \\ &\times \langle \xi' | a_1(\mathbf{k}') a_2(\mathbf{k}) + a_1^{\dagger}(-\mathbf{k}') a_2(\mathbf{k}) + a_1(\mathbf{k}') a_2^{\dagger}(-\mathbf{k}) + \\ &+ a_1^{\dagger}(-\mathbf{k}') a_2^{\dagger}(-\mathbf{k}) | \xi \rangle = \\ &= e \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \rho(\mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}')}{\omega\omega'} l(k_j - k'_j) (\xi' | \tau_3 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{k}' | \xi) \times \\ &\times \left[\frac{f_r^2}{\omega\omega'} + \frac{1}{9\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3}{(\omega_n + \omega)(\omega_n + \omega')} \left(1 + \frac{\omega_n}{\omega + \omega'} \right) \right]. \quad (19.24) \end{aligned}$$

При выводе (19.24) было использовано тождество

$$\tau_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \tau_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}' + \tau_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}' \tau_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} = -2\tau_3 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{k}'. \quad (19.25)$$

Можно упростить уравнение (19.24), проинтегрировав его по углам. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int d^3k d^3k' e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} l(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{k}') f(\omega, \omega') = \\ = \nabla \times \boldsymbol{\sigma} \int d^3k d^3k' \frac{k^2 k'^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{(k + k')^2} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} f(\omega, \omega'). \end{aligned}$$

Последнее равенство легче всего доказывается, если, рассматривая j -компоненту, переписать интеграл в форме

$$\frac{1}{2} \sum_i (\nabla \times \sigma)_i \int d^3k d^3k' (k_i - k'_i)(k_j - k'_j) f(\omega, \omega') e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}$$

При замене переменных $1/2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \mathbf{x}$ и $(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = \mathbf{K}$ интеграл приобретает вид

$$\begin{aligned} 2 \sum_i (\nabla \times \sigma)_i \int d^3x d^3K \chi_i x_j f(\omega, \omega') e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \\ = \sum_i (\nabla \times \sigma)_i \int d^3K [F_1(K^2) \delta_{ij} + F_2(K^2) K_i K_j] e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned}$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции. Член с F_2 не вносит вклада, поскольку применение к нему оператора $(\nabla \times \sigma)$ дает нуль. Для F_1 мы получаем

$$F_1 = \int d^3x \left[x^2 - \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{K})^2}{K^2} \right] f(\omega, \omega').$$

Поэтому (19.24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \xi | \mathbf{j}_\pi(\mathbf{r}) | \xi \rangle = \\ = e \nabla \times (\xi | \tau_3 \sigma | \xi) \int \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6} \frac{\rho(k) \rho(k')}{\omega \omega'} \frac{k^2 k'^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}')^2} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \times \\ \times \left[\frac{f_r^2}{\omega \omega'} + \frac{1}{9\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3}{(\omega_n + \omega)(\omega_n + \omega')} \left(1 + \frac{\omega_n}{\omega + \omega'} \right) \right]. \quad (19.26) \end{aligned}$$

Поскольку интеграл в (19.26) зависит только от $|\mathbf{r}|$, мезонный ток оказывается перпендикулярным к σ и \mathbf{r} в соответствии с направлением плотности магнитного момента $\sigma f(r)$ (см. фиг. 19.1). Для протона ток положителен, а для нейтрона ток равен протонному по величине, но отличается знаком. Из (19.16) следует, что 70% тока обусловлены ПБП, пропорциональным величине $\langle \xi | \phi | \xi'' \rangle \langle \xi'' | \nabla \phi | \xi \rangle$, которая вносит вклад на больших расстояниях $\sim \sigma \times \nabla e^{-2r/r^2}$. Последнее замечание поясняет качественно известные из опытов по рассеянию электронов данные [3], согласно которым ток, обуславливающий наличие магнитных моментов у протона и нейтрона, размазан в пространстве со средним квадратичным радиусом $\sim 0,7 \cdot 10^{-13}$ см $\approx 1/2$.

Подобный же характер имеет и распределение заряда, которое можно вычислить по аналогичной схеме¹⁾:

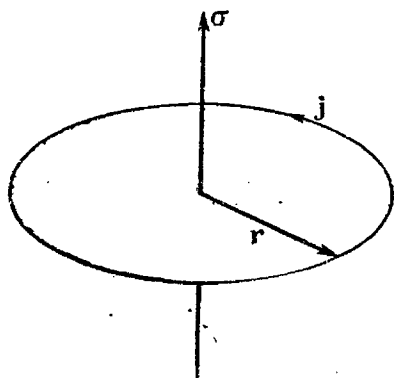
$$\begin{aligned} \langle \xi | Q_{\pi}(r) | \xi \rangle &= -e (\phi_2 \dot{\phi}_1 - \phi_1 \dot{\phi}_2) = \\ &= \frac{ie}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (2\pi)^3 \frac{e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}}{(\omega\omega')^{1/2}} \langle \xi | (\omega - \omega') [a_1(\mathbf{k}) a_2(\mathbf{k}') - a_1^\dagger(-\mathbf{k}) a_2^\dagger(-\mathbf{k}')] - \\ &\quad - (\omega + \omega') [a_1^\dagger(-\mathbf{k}) a_2(\mathbf{k}') - a_2^\dagger(-\mathbf{k}') a_1(\mathbf{k})] | \xi \rangle, \end{aligned} \quad (19.27a)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi | Q_{\pi}(r) | \xi \rangle &= -2e \langle \xi | \tau_3 | \xi \rangle \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \frac{\rho(\mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{\omega + \omega'} \times \\ &\quad \times \left[\frac{f_r^2}{\omega\omega'} + \frac{1}{9\pi} \int_1^\infty \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3}{(\omega_n + \omega)(\omega_n + \omega')} \right], \end{aligned} \quad (19.27b)$$

поскольку

$$\tau_1 \sigma \cdot \mathbf{k} \tau_2 \sigma \cdot \mathbf{k}' - \tau_2 \sigma \cdot \mathbf{k}' \tau_1 \sigma \cdot \mathbf{k} = 2i \tau_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'. \quad (19.28)$$

Плотности заряда для протона и нейтрона $\langle |Q_{\pi}(r)| \rangle$ также равны, но противоположны по знаку, причем основной член, связанный с ПБП, асимптотически ведет себя как e^{-2r}/r^2 . Равные, но противоположные по знаку плотности заряда согласуются с простейшей



Фиг. 19.1. Соотношение между мезонным током и направлением спина.

картиной, в которой виртуальные процессы $p \rightarrow n + \pi^+$ и $n \rightarrow p + \pi^-$ образуют положительно заряженное облако вокруг протона и отрицательно заряженное вокруг нейтрона. Отсюда следует, что нейтрон, в целом электронейтральная частица, имеет некоторую электрическую структуру. В этом отношении он напоминает атом водорода, положительный внутри и отрицательный снаружи.

¹⁾ Члены, пропорциональные $a_1(\mathbf{k}') V_2(\mathbf{k})$, $V_1(\mathbf{k}') a_2(\mathbf{k})$ и т. д., возникающие из произведений $a_1 a_2$, $\bar{a}_1 a_2$ и т. д., в выражении (19.27a) для $Q(r)$ сокращаются.

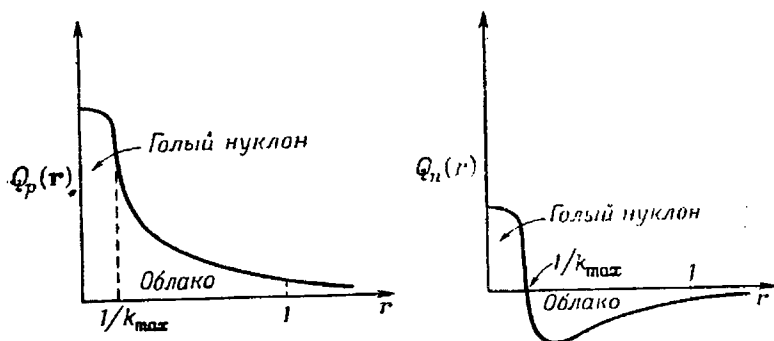
Чтобы получить полный заряд, необходимо сложить заряд голого нуклона с зарядом облака. Представляется разумным предположить, что первый из них имеет пространственное распределение $\sim \rho(r)$ и, следовательно, его можно представить как

$$e \left\langle \xi \left| \frac{1+\tau_3}{2} \rho(r) \right| \xi \right\rangle.$$

При r_1 , заданном уравнением (19.16), мы получаем $0.7\rho(r)$ для физического протона и $0.3\rho(r)$ для физического нейтрона. Следовательно, ожидаемые распределения заряда нуклона, включающие голый нуклон, имеют радиальную зависимость типа изображенной на фиг. 19.2. Эксперименты не подтверждают такой картины [3]. В то время как средний квадратичный радиус распределения заряда в протоне,

$$\langle r^2 \rangle = e^{-1} \int Q(r) r^2 d^3r,$$

равен $0.75 \cdot 10^{-13}$ см. как и предсказывает теория, нейтронный радиус оказывается гораздо меньшим, если не равным нулю. Наиболее



Фиг. 19.2. Статистические распределения заряда физических нуклонов.

правдоподобное объяснение этой загадки в настоящее время заключается в том, что заряд π -мезона сам размазан в пространстве на расстояние порядка $1/4$ λ ¹⁾. Усреднение зарядового распределения нейтрона на таких расстояниях заметно уменьшит среднеквадратичный радиус, тогда как в случае протона это усреднение не будет особенно существенным.

¹⁾ Можно думать, что это происходит вследствие π — π -взаимодействия. См., например, работу [4].

Полный заряд и полный магнитный момент π -мезонного облака можно получить непосредственно из наших результатов. Для заряда

$$Q_\pi = e \langle \xi | \tau_3 | \xi \rangle \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk k^4 \rho^2(k)}{\omega} \left[\frac{f_r^2}{4\pi\omega^2} + \frac{1}{36\pi^2} \int_1^\infty \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3}{(\omega_n + \omega)^2} \right]. \quad (19.29)$$

Поскольку полный заряд, включающий вклад нуклонного распределения, равен $Q = Q_\pi + Q_N$, где

$$Q_N = \langle \xi | \frac{1 + \tau_3}{2} | \xi \rangle = \left(\xi | \frac{1 + \tau_3 \mathcal{R}_1}{2} | \xi \right),$$

а величина Q для протона и нейтрона должна быть равна 1 или 0, то уравнение (19.29) представляет собой новое соотношение для τ_1 . Оно дает также верхний предел для ω_{\max} , поскольку заряд мезонного облака не должен превосходить e . Даже если пренебречь всеми сечениями, кроме σ_3 , при слишком большой величине обрезания ω_{\max} интеграл $\int d^3k$ будет слишком большим. Эти соображения были решающими при определении величин ω_{\max} и τ_1 способом, изложенным в п. 19.3. Как и следовало ожидать, член, соответствующий ПБП для Q_π , равен члену ПБП для $\langle N \rangle$, умноженному на $2e/3$ [см. (19.7)], поскольку (16.34) показывает, что протон две трети времени проводит распавшись на $n + \pi^+$ и одну треть — на $p + \pi^0$.

Для магнитного момента мы получаем с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\pi &= \frac{e}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{j} d^3r = \sigma \tau_3 \frac{4}{3\pi} e \int_0^\infty \frac{dk k^4 \rho^2(k)}{\omega^2} \times \\ &\times \left[\frac{f_r^2}{4\pi\omega^2} + \frac{1}{36\pi^2} \int_1^\infty \frac{d\omega_n}{k_n \rho^2(k_n)} \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3}{(\omega_n + \omega)^2} \left(1 + \frac{\omega_n}{2\omega} \right) \right], \quad (19.30) \\ &\langle \xi | \mathcal{M}_\pi | \xi \rangle = (\xi | \tau_3 \sigma | \xi) e \mathcal{M}_\pi. \end{aligned}$$

Можно ожидать, что магнитный момент, измеренный в ядерных магнетонах, окажется равным по порядку величине

(Среднее число мезонов) \times (Отношение массы нуклона к мезону).

Последнее обстоятельство связано с тем, что магнитный момент бесспиновой частицы с $l=1$ равен отношению масс, умноженному на магнетон, связанный с частицей, имеющей спин $1/2$. Экспериментально

$$\mathcal{M}_p \approx 2,8\sigma \frac{e}{2M}, \quad \mathcal{M}_n \approx -1,9\sigma \frac{e}{2M}.$$

так что момент мезонного облака оказывается правильно направленным. Однако для экспериментаторов, измеряющих эти величины с точностью до пяти значащих цифр¹⁾, желательно было бы, конечно, сделать более точный расчет. Более тонкий анализ выглядит следующим образом. Как мы нашли из (16.34), для обоих нуклонов и вероятность обнаружения заряженного виртуального мезона, и вероятность, что такой мезон будет иметь $I_z = 1$, равны $2/3$. Далее следует принять во внимание релятивистскую массу мезона (т. е. его полную энергию ω). При этом следует ожидать, что

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{9} \frac{\bar{N}}{\omega}.$$

Если интерпретировать \bar{N}/ω как $\int N(k) dk/\omega$, мы получим из ПБП в формуле (19.7)

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{9} \frac{3}{\pi} \int \frac{k^4 \rho^2(k)}{\omega^2} \frac{f_r^2}{4\pi\omega^2},$$

что составляет половину от ПБП в (19.30). Это объясняется тем, что при наших вычислениях мы сохраняли в выражении для \mathbf{j} только члены, пропорциональные a^+a . С другой стороны, члены aa и a^+a^+ вносят в ПБП вклад такой же величины, так что такой более утонченный анализ дает результат, отличающийся вдвое от верного²⁾. Если

включить теперь вклад от $\int_1^\infty d\omega_n \dots$, то точный результат при учете (19.16) будет иметь вид

$$\mathcal{M} = (\tau_3 \sigma) \times 1,3 \text{ ядерных магнетонов.} \quad (19.31)$$

Это довольно малое значение связано с тем фактом, что большинство мезонов имеет высокую энергию, так что эффективное отношение масс равно $\sim M/\omega_{\max}$, а не M . Чтобы обсудить смысл (9.31), введем изовекторную и изоскалярную части \mathcal{M} с помощью равенства

$$\mathcal{M} = (\mathfrak{M}_v \tau_3 + \mathfrak{M}_s) \frac{e}{2M} \sigma,$$

где, как известно из эксперимента,

$$\mathfrak{M}_v = 2,35, \quad \mathfrak{M}_s = 0,45.$$

Мезонное облако вносит в \mathfrak{M}_v вклад, равный 1,3 ядерного магнетона, так что один дополнительный магнетон в \mathfrak{M}_v и всю величину \mathfrak{M}_s ³⁾

¹⁾ Для справок можно обращаться, например, к статьям [5] и [6].

²⁾ Результат теории сильной связи равен правильному ПБП, умноженному на $3/4$. См. статью [7].

³⁾ Заметим, что в пределе сильной связи $\mathfrak{M}_s = 0$, поскольку $\langle \sigma \rangle = 0$ безотносительно к предположению о вкладе нуклонного ядра.

следует объяснять другими явлениями. Возможно, что нужно учитывать магнитные моменты голых протонов, антинуклонов, тяжелых мезонов, гиперонов и т. д. По-видимому, они могут дать довольно существенные поправки к величине M . Мы увидим в следующей главе, что статическая модель не в состоянии правильно предсказать электромагнитные явления на малых расстояниях (внутри нуклонного ядра), и это не должно удивлять нас. В заключение можно сказать, что только первая цифра магнитных моментов может быть понята в рамках простой статической модели, и пройдет еще немало времени, пока мы сможем вычислить остальные четыре измеренные цифры.

Рекомендуемая литература

- Cini M., Fubini S., Nuovo Cimento, 3, 764 (1956).
Fubini S., Nuovo Cimento, 3, 1425 (1956).
Miyazawa H., Phys. Rev., 101, 1564 (1956).
Fubini S., Thirring W., Phys. Rev., 105, 1382 (1959).
Salzman G., Phys. Rev., 105, 1076 (1959).

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

20.1. Выражения для операторов заряда и тока. Электромагнитные эффекты представляют собой важное средство для изучения π -мезон-нуклонных систем. Свойства взаимодействия фотонов с веществом хорошо известны¹⁾ и поэтому их можно использовать для получения дальнейших сведений¹⁾ о структуре нуклона и его взаимодействиях с π -мезонами. Электромагнитные свойства нуклона частично были уже описаны в предыдущей главе, теперь же мы рассмотрим фоторождение мезонов и рассеяние фотонов на нуклоне (комpton-эффект).

Для этой цели в первую очередь следует определить полные плотности заряда и тока в статической модели. Плотность заряда состоит из вклада мезонов²⁾

$$Q_{\pi}(r) = e(\dot{\phi}_2\phi_1 - \dot{\phi}_1\phi_2) \quad (20.1)$$

и вклада голого нуклона

$$Q_N(r) = e \frac{1 + \tau_3}{2} \rho(r). \quad (20.2)$$

При этом предполагается, что пространственное распределение Q_N обусловлено виртуальными частицами, образующими источник³⁾. Аналогично оператор мезонного тока имеет вид

$$j_{\pi} = e(\phi_2\nabla\phi_1 - \phi_1\nabla\phi_2), \quad (20.3)$$

а оператор тока голого нуклона обусловлен его нормальным (дираковским) моментом и вкладом от других виртуальных частиц. Эта

¹⁾ Статическая модель предполагает некоторые оговорки, которые вскоре будут сделаны.

²⁾ В этой главе нам будет более удобно описывать мезонное поле с помощью плоских волн, поскольку величины $Q_{\pi}(r)$ и $j_{\pi}(r)$ потребуются знать не только в P -состояниях.

³⁾ Строго говоря, голый нейтрон должен был бы также иметь плотность заряда со средним значением, равным нулю; мы пренебрегаем, однако, этим эффектом.

часть должна выражаться через нуклонные операторы τ и σ ; мы предположим, что ее дивергенция равна нулю и что следовательно,

$$\mathbf{j}_N(\mathbf{r}) = \nabla \times \boldsymbol{\mu}_N(\mathbf{r}), \quad (20.4)$$

где величина $\boldsymbol{\mu}_N(\mathbf{r})$ связана с частью магнитного момента. Ее вид мы вскоре определим. Единственное свойство тока \mathbf{j}_N , которое понадобится нам (до тех пор пока этот оператор не будет определен более детально), это его независимость от операторов порождения и поглощения мезонов, так что

$$[a_\alpha(\mathbf{k}), \mathbf{j}_N] = [a_\alpha^\dagger(\mathbf{k}), \mathbf{j}_N] = 0.$$

Сумма рассмотренных выше зарядов и токов не может представлять полный ток, поскольку соответствующее уравнение непрерывности

$$\dot{Q}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (20.5)$$

не выполняется внутри источника. Используя уравнения поля (15.7) и (15.8) с взаимодействием H' , мы находим

$$\dot{Q}_\pi(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_\pi = ef [\tau_2(t) \phi_1 - \tau_1(t) \phi_2] \sigma(t) \cdot \nabla \rho(\mathbf{r}) \quad (20.6)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{Q}_N(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_N &= \\ &= ef \rho(\mathbf{r}) \sigma(t) \cdot \int d^3r' [\tau_1(t) \phi_2(\mathbf{r}', t) - \tau_2(t) \phi_1(\mathbf{r}', t)] \nabla \rho(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (20.7)$$

В пределе точечного источника это дает

$$\dot{Q}_\pi(\mathbf{r}, t) + \dot{Q}_N(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_\pi + \nabla \cdot \mathbf{j}_N = -\nabla \cdot \mathbf{j}_I,$$

где

$$\mathbf{j}_I = ef \delta^3(\mathbf{r}) \sigma [\tau_1(t) \phi_2(\mathbf{r}, t) - \tau_2(t) \phi_1(\mathbf{r}, t)]. \quad (20.8)$$

Таким образом, уравнение (20.5) удовлетворяется, если полный ток включает „ток взаимодействия“¹⁾ \mathbf{j}_I . Физическая причина, заставляющая нас вводить \mathbf{j}_I , состоит в следующем. Когда протон испускает π^+ -мезон, превращаясь в нейтрон, заряд $Q_N(\mathbf{r})$ внезапно исчезает и переходит от источника к мезонному облаку. Уравнение непрерывности требует тогда, чтобы существовал ток, переносящий заряд от нуклона к облаку. При этом существенно, что плотность P -волновых мезонов равна нулю в начале координат, и поэтому заряд от нуклона не может быть передан мезонам без специального тока. В скалярной теории, где H' пропорционально не $\sigma \cdot \nabla \phi$, а просто ϕ (т. е. взаимодействуют S -волновые мезоны), уравнение непрерывности удовлетворяется без тока типа \mathbf{j}_I .

¹⁾ Формально этот ток можно получить, вводя комплексные поля и заменяя $\nabla \phi$ на $\nabla \phi - ieA\phi$ в выражении для H' . Это приводит к появлению добавки $A \cdot \mathbf{j}_I$ в H' .

Для протяженного источника уравнение непрерывности все еще не выполняется внутри источника, даже если заменить $\delta^3(\mathbf{r})$ в уравнении (20.8) на $\rho(\mathbf{r})$. Мы можем ввести дополнительные [1—2] токи с тем, чтобы удовлетворить уравнению непрерывности внутри источника; однако эти токи определяются не однозначно и оказываются несущественными. На этой стадии необходимо обратиться к релятивистской локальной теории, которая в статическом пределе дает три рассмотренных типа токов. При этом уравнение (20.5) удовлетворяется для протяженного источника, если проинтегрировать его по области, содержащей источник¹⁾:

$$\int_V d^3r [\dot{Q}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}] = 0. \quad (20.9)$$

Суммируя сказанное, можно утверждать, что предсказания статической модели, касающиеся электромагнитных явлений, должны быть не столь определенными, как относящиеся к чисто π -мезонным проблемам.

Устаив вид нужного нам тока, изучим теперь свойства отдельных его частей. Средние значения \mathbf{j}_π и $Q_\pi(\mathbf{r})$ в состоянии физического нуклона были рассмотрены в предыдущей главе. Поскольку, однако, эти операторы билинейны по ϕ , они содержат не только другие угловые моменты, но, например, интерференционные члены между S - и P -волнами или между D - и P -волнами. Члены этого типа особенно существенны при электрических дипольных переходах, при которых требуется изменение четности и углового момента на единицу. Но так как мы будем иметь дело с фотонами, для которых длина волны $\lambda \leq 10^{-13}$ см или $k_{ph} \geq 200$ Мэв, то разложение этого члена по мультиполям может оказаться не вполне приемлемым. Ток \mathbf{j}_I принципиально состоит в основном только из S -волн²⁾, потому что он равен нулю вне источника, а внутри источника

$$k_{ph} \times r_s \approx \frac{k_{ph}}{k_{max}} \leq \frac{2}{3} \quad \text{для } \lambda_{ph} \geq 5 \cdot 10^{-14} \text{ см.}$$

Другие угловые моменты начинают играть роль в токе \mathbf{j}_I только при более высоких энергиях фотона.

Относительно тока \mathbf{j}_N известно очень немного, поскольку наглядное представление о том, что он равен току дираковской частицы для голого протона и нулю для голого нейтрона, приводит к существенному отличию от наблюдаемых магнитных моментов.

¹⁾ Это не очень жесткое условие. Оно выполняется даже в отсутствие тока \mathbf{j}_I .

²⁾ Вследствие этого можно также ожидать, что \mathbf{j}_I не будет вносить существенного вклада в магнитные моменты.

К счастью, в дальнейшем будет играть важную роль ожидаемое значение полного тока между физическими состояниями нуклона, а его можно связать с наблюдаемыми магнитными моментами. Рассмотрим k -ю фурье-компоненту матричных элементов полного тока $\mathbf{j}_i \equiv \mathbf{j}$ между состояниями нуклона. Эта величина должна быть полярным вектором, зависящим только от σ , k и τ_3 . Уравнение непрерывности, согласно которому

$$\mathbf{k} \cdot \langle \xi | \mathbf{j}(\mathbf{k}) | \xi \rangle = 0,$$

ограничивает возможный вид матричного элемента¹⁾ значениями

$$\begin{aligned} \langle \xi | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | \xi \rangle &\equiv \int \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \langle \xi | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | \xi \rangle = \\ &= \langle \xi | i \frac{\sigma \times \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} [\tau_3 F_v(k^2) + F_s(k^2)] | \xi \rangle. \end{aligned} \quad (20.10a)$$

В статическом пределе (т. е. при $\mathbf{k} \rightarrow 0$) член в скобках в (20.10a) соответствует полным магнитным моментам протона и нейтрона. Это следует из того факта, что

$$\mathcal{M} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k = -\frac{i}{2} \lim_{k \rightarrow 0} \nabla_{\mathbf{k}} \times \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r.$$

При этом мы замечаем, что

$$F_v(0) = \frac{\mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_n}{2}, \quad F_s(0) = \frac{\mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_n}{2}. \quad (20.10b)$$

Поскольку член ПБП для \mathbf{j}_{π} вне источника пропорционален функции e^{-2r/r^2} (см. гл. 19) и поскольку другие вклады связаны с источником, а, следовательно, еще более сконцентрированы около начала координат, мы ожидаем, что формфакторы F_v и F_s должны быть приближенно равны своим статическим значениям вплоть до $k \leq 2$). В дальнейшем мы пользуемся этими значениями. Поскольку среднее значение \mathbf{j}_{π} известно, можно было бы с помощью (20.10a) дать более детальное определение \mathbf{j}_N . Однако можно этого и не делать, поскольку в интересующих нас приложениях мы встретим только среднюю величину полного тока.

20.2. Амплитуды рождения. Обратимся сначала к процессу фоторождения мезонов, т. е. к реакции типа $\gamma + N \rightarrow N + \pi$. В этом

¹⁾ Мы рассматриваем величину $\mathbf{j}(-\mathbf{k})$, поскольку она удобнее для дальнейшего обсуждения. Величина

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

²⁾ Эти формфакторы совпадают с формфакторами в случае рассеяния электронов на протонах, и анализ экспериментов подтверждает сделанное в тексте утверждение. См. статью [3].

процессе участвует не только π -мезон-нуклонная система, но и поле излучения. Для его правильной трактовки следует проанализировать гамильтониан

$$H = H_{\pi+N} + H_{\gamma} + H_{\text{int}}, \quad (20.11)$$

где H_{γ} — гамильтониан свободных фотонов, а H_{int} — гамильтониан взаимодействия фотонов с заряженными частицами.

Мы не будем входить в детали квантования поля излучения¹⁾ и приведем лишь соответствующие основные факты. Свободный гамильтониан H_{γ} описывает свободные фотоны — частицы без массы, спин которых равен единице, но J_z -компонента спина может быть направлена либо параллельно, либо антипараллельно их импульсу. В разложении по угловым моментам, как оказалось, отсутствуют одночастичные состояния с угловым моментом, равным нулю. Для $l \neq 0$ они могут иметь любую четность. Фотоны с четностью $(-1)^l$ называют электрическими фотонами с мультипольностью l , когда же четность их равна $(-1)^{l+1}$, их называют магнитными фотонами с мультипольностью l . Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_{\text{int}} = - \int d^3r \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (20.12)$$

где вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ построен обычным образом из операторов рождения и поглощения фотонов.

Наша цель состоит в том, чтобы найти вероятность перехода из начального состояния $\gamma + N$ в конечное $N + \pi$. Мы вычислим ее с помощью „золотого правила“ (8.27). Ситуация упрощается вследствие того, что взаимодействие H_{int} — слабое, и поэтому при расчете по теории возмущений²⁾ в разложении по степеням e^2 можно заменить T_{fi} на соответствующий матричный элемент от H_{int} .

В соответствии с этим получаем

$$\begin{aligned} \langle \text{out. } N + \pi | N_{\text{int}} | p + \gamma \rangle &= - \int \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{(2k)^{1/2}} \epsilon \langle \text{out. } N + \pi | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | N \rangle = \\ &= \epsilon \langle \text{out. } N + \pi | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | N \rangle (2k)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (20.13)$$

Здесь предполагалось, что начальный фотон имеет импульс \mathbf{k} , вектор поляризации ϵ и что его волновая функция нормирована на

¹⁾ Это квантование аналогично квантованию поля, рассмотренному в этой книге, с той разницей, что спин фотонов равен 1, и все фотоны поперечны. См., например, книгу Шиффа [4].

²⁾ Взаимодействие π -мезонов рассматривается „точно“.

одну частицу в единичном объеме, так что ¹⁾

$$\langle 0 | A(\mathbf{r}) | \gamma \rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{*}{(2k)^{1/2} (2\pi)^{3/2}}.$$

В первую очередь выведем интегральное уравнение для матричного элемента от фурье-компоненты полного тока $\mathbf{j}(-\mathbf{k})$. С помощью (19.1) мы получим соотношение, подобное уравнению Лоу ²⁾:

$$\begin{aligned} \langle \text{out}, N + \pi_{\mathbf{k}'\alpha} | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | N \rangle &= \langle \xi' | [B_{\alpha}(\mathbf{k}'), \mathbf{j}(-\mathbf{k})] | \xi \rangle = \\ &= \langle \xi' | \left[a_{\alpha}(\mathbf{k}') + \int_0^{\infty} V_{\alpha}(\mathbf{k}') e^{i\omega t} dt, \mathbf{j}(-\mathbf{k}) \right] | \xi \rangle = \\ &= \langle \xi' | [a_{\alpha}(\mathbf{k}'), \mathbf{j}(-\mathbf{k})] | \xi \rangle + \sum_n \left[\frac{\langle \xi' | V_{\alpha}(\mathbf{k}') | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | \xi \rangle}{E_n - \omega - i\epsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \xi' | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_{\alpha}(\mathbf{k}') | \xi \rangle}{E_n + \omega} \right] = \\ &= \langle \xi' | [a_{\alpha}(\mathbf{k}'), \mathbf{j}(-\mathbf{k})] | \xi \rangle + \frac{1}{\omega} (\langle \xi' | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | \xi'' \rangle \langle \xi'' | V_{\alpha}(\mathbf{k}') | \xi \rangle - \\ &\quad - \langle \xi' | V_{\alpha}(\mathbf{k}') | \xi'' \rangle \langle \xi'' | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | \xi \rangle) + \\ &\quad + \sum_n \left[\frac{\langle \xi' | V_{\alpha}(\mathbf{k}') | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | \xi \rangle}{E_n - \omega - i\epsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \xi' | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_{\alpha}(\mathbf{k}') | \xi \rangle}{E_n + \omega} \right]. \quad (20.14) \end{aligned}$$

Среднее значение в однонуклонном состоянии можно легко вычислить с помощью рассмотренного ранее выражения для \mathbf{j} . Используя соотношение

$$[a_{\alpha}(\mathbf{k}), \phi_{\beta}] = \frac{(2\pi)^{-3/2} \delta_{\alpha\beta} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{(2\omega)^{1/2}}.$$

¹⁾ Как и в случае атомного фотоэффекта, вектор-потенциал A можно трактовать как классическое поле. Это дает тот же результат, что и (20.13), причем с самого начала подразумевается, что матричный элемент по фотонным переменным уже вычислен.

²⁾ Напомним читателю, что \sum_n' означает суммирование только по состояниям непрерывного спектра.

мы находим для коммутаторов:

$$\begin{aligned}
 & [a_\alpha(k'), j_N(-k)] = 0, \\
 & [a_\alpha(k'), j_I(-k)] = \left[a_\alpha(k'), \int d^3r (\tau_1 \phi_2 - \tau_2 \phi_1) \frac{e^{ik \cdot r}}{(2\pi)^{3/2}} e f p(r) \sigma \right] = \\
 & = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \frac{\rho(|k' - k|)}{(2\omega')^{1/2}} e f \sigma (\tau_1 \delta_{\alpha, 2} - \tau_2 \delta_{\alpha, 1}), \\
 & [a_\alpha(k'), j_\pi(-k)] = \\
 & = - \frac{e}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r [a_\alpha(k'), \phi_1(r) \nabla \phi_2(r) - \phi_2(r) \nabla \phi_1(r)] e^{ik \cdot r} = \\
 & = \frac{ie}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3r}{(2\omega')^{1/2}} [\delta_{\alpha, 2} \phi_1(r) - \delta_{\alpha, 1} \phi_2(r)] (2k' - k) e^{i(k - k') \cdot r}. \quad (20.15)
 \end{aligned}$$

Чтобы определить среднее значение суммы выписанных коммутаторов в однонуклонном состоянии, можно воспользоваться уравнением (19.3). Тогда

$$\begin{aligned}
 \langle \xi' | [a_\alpha(k'), j(-k)] | \xi \rangle & = \frac{e f r \rho(|k' - k|)}{(2\omega')^{1/2} (2\pi)^3} (\xi' | (\tau_1 \delta_{\alpha, 2} - \tau_2 \delta_{\alpha, 1}) \times \\
 & \times \left[\sigma - \frac{(2k' - k) \sigma \cdot (k' - k)}{(k' - k)^2 + 1} \right] | \xi \rangle). \quad (20.16)
 \end{aligned}$$

Соответствующий матричный элемент тока j равен [см. (20.10) при $F(k^2) \approx F(0)$]

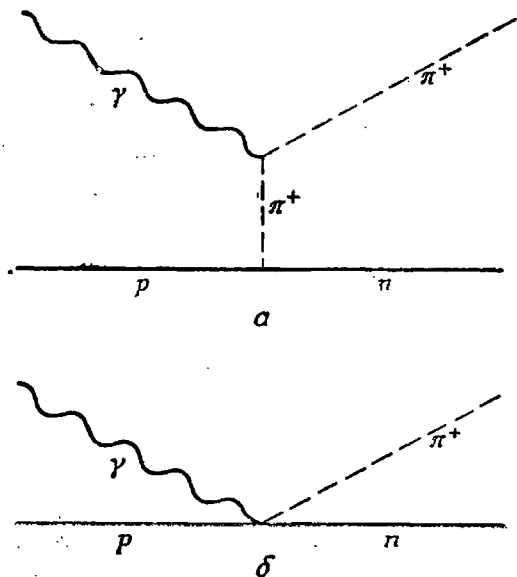
$$\langle \xi' | j(-k) | \xi \rangle = i (\xi' | \sigma \times k \left(\frac{1 + \tau_3}{2} \mathfrak{M}_p + \frac{1 - \tau_3}{2} \mathfrak{M}_n \right) | \xi \rangle). \quad (20.17)$$

Если принять, что энергия мезона $\omega' = k$ (как предписывает закон сохранения энергии), воспользоваться (19.1) и учесть, что из условия $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ вытекает $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$, то для амплитуды фоторождения получается следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{out}, \xi', \alpha k' | H_{\text{int}} | \xi, \gamma_k \rangle & = -e \left\{ (\xi' | \frac{e f r}{(2\pi)^3} \frac{\rho(|k' - k|)}{2\omega'} \times \right. \\
 & \times (\tau_1 \delta_{\alpha, 2} - \tau_2 \delta_{\alpha, 1}) \left[\sigma - \frac{2k' \sigma \cdot (k' - k)}{(k' - k)^2 + 1} \right] | \xi \rangle + \frac{1}{2\omega'^2} f_r \frac{\rho(k')}{(2\pi)^3} \times \\
 & \times (\xi' | \left[i \sigma \times k \left(\frac{\mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_n}{2} + \tau_3 \frac{\mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_n}{2} \right), i \sigma \cdot k' \tau_\alpha \right] | \xi \rangle + \\
 & + \sum_n \left[\frac{\langle \xi' | V_\alpha(k') | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | j(-k) | \xi \rangle}{(E_n - \omega - i\epsilon) (2\omega')^{1/2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\langle \xi' | j(-k) | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_\alpha(k') | \xi \rangle}{(E_n + \omega) (2\omega')^{1/2}} \right] \left. \right\}. \quad (20.18)
 \end{aligned}$$

Взяв значения магнитных моментов из эксперимента, мы снова находим, что однонуклонные члены совпадают с перенормированным борнов-

ским приближением. Смысл отдельных членов в уравнении (20.18) следующий. Первый член в правой части существует только для заряженных мезонов и соответствует поглощению фотона мезоном — как и при обычном фотоэффекте. Он состоит из двух частей, из которых первая связана с током j_x (пропорциональна k') и соответствует поглощению фотона мезоном из нуклонного облака, а вторая обусловлена током j_l (пропорциональна σ) и соответствует поглощению фотона мезоном в процессе рождения. Оба эти вклада показаны



Фиг. 20.1. Диаграммы, связанные при изображении фоторождения заряженных мезонов со следующими членами в матричном элементе: (а) $[a_x(k'), j_x(-k)]$, (б) $[a_x(k'), j_l(-k)]$.

графически на фиг. 20.1. При процессе на фиг. 20.1, б мезоны рождаются в основном в S -состоянии, в то время как процесс, изображенный на фиг. 20.1, а, содержит все угловые моменты, связанные с запаздывающим знаменателем $1/[(k' - k)^2 + 1]$. Последний эффект возникает из-за того, что пространственная протяженность j_x (10^{-13} см) не мала по сравнению с длиной волны фотона, имеющего энергию, достаточную для рождения реального мезона, так что разложение по степеням отношения первой из этих величин ко второй сходилась бы довольно медленно. Члены, пропорциональные магнитным моментам, соответствуют поглощению мезона магнитным моментом нуклона, сопровождающемуся испусканием мезона, как это показано на фиг. 20.2. Это единственные члены, которые приводят также и к рождению нейтральных π -мезонов. Можно было бы ожидать, что эти члены имеют порядок $1/M$ по сравнению с теми, что изображены

на фиг. 20.1; однако, поскольку $\mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_n = 4,7$, они могут оказаться сравнимыми с остальными.

Члены, содержащиеся в S' , соответствуют многократным столкновениям уже рожденных мезонов. Их вычисление представляет собой сложную, но разрешимую задачу [4]. К счастью, основную поправку, связанную с многократным рассеянием, можно найти и не решая интегрального уравнения (20.18) для амплитуды рождения. В соответствии с нашими сведениями относительно $\pi - N$ -рассеяния, мы ожидаем, что многократное рассеяние приведет к возрастанию амплитуды в 3-м состоянии и уменьшению амплитуды в других состояниях. Далее, оказывается, что эти поправки приводят в основном к изменению членов, обусловленных магнитным моментом нуклона (фиг. 20.2), и мало влияют на члены, обусловленные фотоэлектрическими эффектами (фиг. 20.1). Причина этого заключается в том, что при процессе, изображенном на фиг. 20.1, а, фотон поглощается мезоном, находящимся на довольно большом расстоянии от источника (в облаке). Такой мезон имеет поэтому значительную вероятность быть испущенным без дальнейших взаимодействий. Что же касается процесса на фиг. 20.1, б, то здесь рождаются мезоны в S -состоянии, испускаемые затем без всякого взаимодействия¹⁾. С другой стороны, члены, соответствующие диаграмме на фиг. 20.2, существенно меняются из-за поправок высших порядков по f . Их можно вычислить, если ввести ток J'_N , зависящий только от операторов σ и τ (но не от мезонных операторов),

$$J'_N(-k) = j_v + j_s,$$

где

$$j_v(-k) \equiv \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sigma \times k \tau_3 \frac{\mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_n}{2\tau_2},$$

$$j_s(-k) \equiv \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sigma \times k \frac{\mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_n}{2\tau_1}.$$

Согласно определению этого тока, мы имеем

$$\langle \xi' | j(-k) | \xi \rangle = \langle \xi' | J'_N(-k) | \xi \rangle \quad \text{и} \quad [a_\alpha(k'), J'_N(-k)] = 0.$$

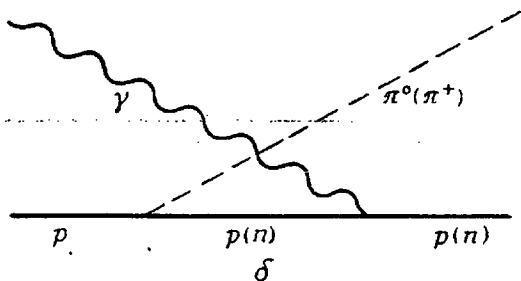
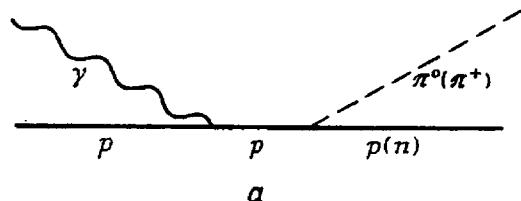
Следовательно, если $j = (j - j'_N) + J'_N$, то коммутатор первого члена с мезонным оператором поглощения $a_\alpha(k')$ остается равным (20.15), и в то же время не вносит вклада в члены, связанные с магнитными

¹⁾ Можно было бы думать, что рассеяние в S -состоянии, опущенное в нашей модели, будет существенно менять этот вклад и, следовательно, низкоэнергетическое поведение сечения. На самом деле этого не происходит, как показали Дрелл, Фридман и Захариазен [6]. Предельная форма сечения, полученная нами при низких энергиях, остается справедливой и в релятивистском случае и известна под названием теоремы Кроля — Рудермана [7].

моментами (20.17). Иными словами, амплитуда, обусловленная этой частью тока, удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\omega')^{1/2}} \langle \text{out}, \xi', \alpha k' | \mathbf{s} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{j}'_N) | \xi \rangle = & - \mathbf{s} \left\{ \langle \xi' | \frac{\partial f_r}{(2\pi)^3} \frac{\rho(|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|)}{2\omega'} \times \right. \\ & \times (\tau_1 \delta_{\alpha, 2} - \tau_2 \delta_{\alpha, 1}) \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{2(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}'}{(\mathbf{k}' - \mathbf{k})^2 + 1} \right] | \xi \rangle + \\ & + \mathbf{S}'_n \left[\frac{\langle \xi' | V_\alpha(\mathbf{k}') | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | \mathbf{j}(-\mathbf{k}) - \mathbf{j}'_N(-\mathbf{k}) | \xi \rangle}{(2\omega')^{1/2} (E_n - \omega - i\varepsilon)} + \right. \\ & \left. + \frac{\langle \xi' | i(-\mathbf{k}) - \mathbf{j}'_N(-\mathbf{k}) | \text{out}, n \rangle \langle \text{out}, n | V_\alpha(\mathbf{k}') | \xi \rangle}{(2\omega')^{1/2} (E_n + \omega)} \right] \left. \right\}. \quad (20.19) \end{aligned}$$

Уравнение (20.19) совпадает с (20.18) с той разницей, что в нем отсутствуют члены, содержащие магнитные моменты. Мы уже



Фиг. 20.2. Диаграммы, соответствующие фоторождению нейтральных и заряженных мезонов вследствие взаимодействия фотона с магнитным моментом нуклона.

выяснили, что поправки, связанные с многократным рассеянием, несущественны для членов уравнения (20.19), поэтому сохранение только борновского приближения должно быть достаточно удовлетворительным. Возвращаясь к току \mathbf{j}'_N , мы в первую очередь замечаем, что матричные элементы

$$\langle \text{out}, \xi', \mathbf{k}' | \mathbf{j}_v | \xi \rangle$$

можно непосредственно выразить через амплитуды рассеяния, поскольку они включают лишь матричные элементы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ между нуклонным состоянием и состоянием нуклон + π -мезон. Чтобы сделать это явным образом, можно воспользоваться разложением по

собственным состояниям углового момента и изоспина с помощью операторов проектирования. При этом матричный элемент перехода в $3/2$, $3/2$ -состояние будет сравним с (20.19), в то время как остальные члены останутся малыми. С помощью (18.6) можно выразить матричный элемент

$$\langle \text{out}, \xi', k' | \tau_3 \sigma \cdot k \times \epsilon | \xi \rangle$$

через амплитуды рассеяния. Проще всего это делается в представлении через плоские волны. При этом следует брать операторы проектирования в виде (19.5а) и заменить множитель $k(\pi\omega)^{-1}$ в (18.25), характеризующий плотность состояний, на $(4\pi k' \omega')^{-1}$:

$$\begin{aligned} & \frac{f}{(16\pi^3 \omega')^{1/2}} \langle \text{out}, \xi', k' | \tau_3 \sigma \cdot k \times \epsilon | \xi \rangle \approx \\ & \approx \frac{\sin \delta_3 e^{i\delta_3}}{16\pi^3 k'^3 \omega' \rho (|k \times \epsilon|)} \left(\delta_{3,\alpha} - \frac{1}{3} \tau_\alpha \tau_3 \right) [2k' \cdot k \times \epsilon - i\sigma \cdot k' \times (k \times \epsilon)]. \end{aligned}$$

Из этого соотношения сразу получаем¹⁾, что

$$\begin{aligned} & \langle \text{out}, \xi', k' | \alpha | \epsilon \cdot j_\nu(-k) | \xi \rangle \frac{1}{(2\omega')^{1/2}} = \\ & = \frac{\mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_n}{2v_2} \frac{1}{(2\omega')^{1/2} (2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\rho (|k \times \epsilon|)} \langle \text{out}, \xi', k' | \tau_3 \sigma \cdot k \times \epsilon | \xi \rangle = \\ & = f_r \frac{\mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_n}{2} \frac{e^{i\delta_3} \sin \delta_3}{f_r^2 k'^3} \frac{1}{16\omega' \pi^3 \rho (|k \times \epsilon|)} \left(\delta_{3,\alpha} - \frac{1}{3} \tau_\alpha \tau_3 \right) \times \\ & \quad \times [2k' \cdot k \times \epsilon - i\sigma \cdot k' \times (k \times \epsilon)]. \quad (20.19a) \end{aligned}$$

Найденная величина равна члену ПБП из уравнения (20.18), умноженному на отношение истинной амплитуды рассеяния к амплитуде ПБП. Рассматривая j_s , мы убеждаемся, что его матричные элементы несущественны по сравнению с вычисленными нами раньше главными членами, а именно с (20.19) и (20.19а). Это частично обусловлено тем, что j_s не может приводить к конечному $3/2$, $3/2$ -состоянию, а частично тем, что $\mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_n < \frac{1}{4} (\mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_n)$. Поэтому в дальнейшем мы опустим величину j_s . Поскольку (20.19а) представляет собой тогда единственный член²⁾, ответственный за рождение π^0 -мезо-

¹⁾ Напоминаем, что наша новая кинематика такова, что $\omega = k = \omega' = (k'^2 + 1)^{1/2}$, и δ_3 следует брать именно при этой энергии.

²⁾ На самом деле существует еще небольшая амплитуда рождения π^0 -мезонов в S -состоянии, связанная с S -рассеянием и отсутствующая в нашей модели.

нов, мы можем связать сечение рождения π^0 -мезона непосредственно с π^0 -мезонным рассеянием:

$$\sigma(\gamma_{\mathbf{k}} + N \rightarrow \pi_{\mathbf{k}'}^0 + N) = \left(\frac{M_p - M_n}{2} \right)^2 \frac{k}{f_r^2 k'} \frac{1}{\rho^2 (|\mathbf{k} \times \mathbf{s}|)} \sigma(\pi_{\mathbf{k} \times \mathbf{s}}^0 + N \rightarrow \pi_{\mathbf{k}'}^0 + N). \quad (20.19б)$$

В итоге получается следующее хорошее приближение для довольно сложной амплитуды рождения:

$$\begin{aligned} & \langle \text{out}, \pi_{\mathbf{k}'\alpha} + N | H_{\text{int}} | N + \gamma_{\mathbf{k}} \rangle = \\ & = \frac{ef_r}{2\omega'} (\tau_2 \delta_{\alpha,1} - \tau_1 \delta_{\alpha,2}) \rho (|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|) \left[\sigma \cdot \varepsilon - 2\mathbf{k}' \cdot \varepsilon \frac{\sigma \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})}{(\mathbf{k}' - \mathbf{k})^2 + 1} \right] \times \\ & \times (2\pi)^{-3} + f_r \frac{M_p - M_n}{2} \frac{e^{i\delta_3} \sin \delta_3}{\rho (|\mathbf{k} \times \mathbf{s}|) f_r^2 k'^3} \left(\delta_{3,\alpha} - \frac{1}{3} \tau_\alpha \tau_3 \right) \times \\ & \times [2\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \times \varepsilon - i\sigma \cdot \mathbf{k}' \times (\mathbf{k} \times \varepsilon)] (16\pi^3 \omega)^{-1}. \quad (20.20) \end{aligned}$$

20.3. Общие свойства сечения. Сечение фоторождения можно вычислить с помощью „золотого правила“ из амплитуды (20.20). Результат имеет чрезвычайно громоздкий вид, однако его физический смысл и основные черты можно понять с помощью простых рассуждений. Для изображенного на фиг. 20.1, а процесса рождения мезона из облака поперечное сечение должно быть по порядку величины равно

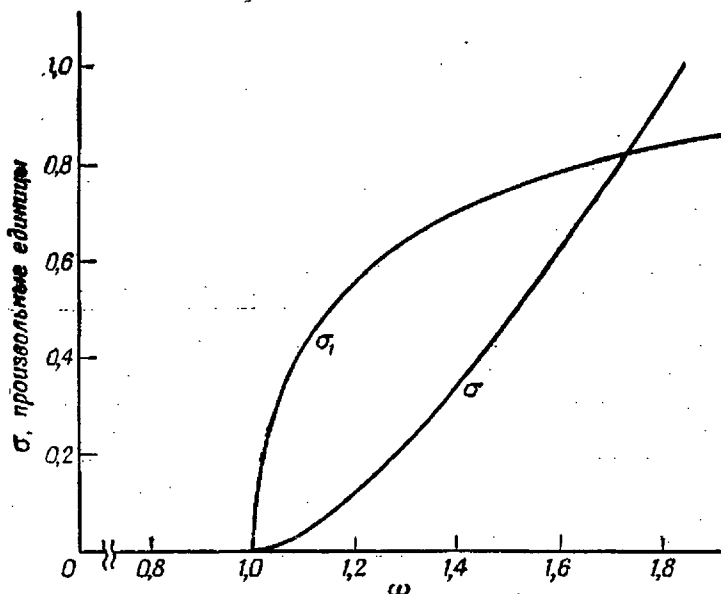
$$\begin{aligned} \sigma &= (\text{Вероятность попадания фотона в мезонное облако}) \times (\text{Вероятность присутствия в этот момент мезона}) \times (\text{Вероятность поглощения фотона мезоном в } P\text{-состоянии}) \times (\text{Вероятность выхода мезона из облака в единицу времени}) \\ & \times (\text{Падающий поток фотонов})^{-1} = \\ & = \left(\frac{1}{\omega^3 L^3} \right) \left(\frac{f_r^2}{4\pi} k'^2 \right) \left(\frac{e^2}{4\pi} k^2 \right) (k') (L^3) = \frac{f_r^2}{4\pi} \frac{e^2}{4\pi} \frac{k'^3 k^2}{\omega^3}. \quad (20.21а) \end{aligned}$$

Это сечение очень быстро возрастает с импульсом мезона и исчезающе мало у порога рождения. Вклад тока \mathbf{j}_I (фиг. 20.1, б) определяется таким же путем, но в нем отсутствуют множители k'^2 и k^2 , поскольку мезон рождается в S -состоянии, так что ¹⁾

$$\sigma_I = \frac{f_r^2}{4\pi} \frac{e^2}{4\pi} \frac{k'}{\omega^3}. \quad (20.21б)$$

¹⁾ Более точно получается $\sigma_I \sim k'/\omega$, и эта зависимость отложена на фиг. 20.3. Около порога рождения $\omega \approx 1$, и разница между этими выражениями мала.

Энергетическая зависимость этих двух членов иллюстрируется на фиг. 20.3. Полученные оценки снова отражают характер точного решения лишь при малых энергиях, когда вероятности невелики. Вообще пороговое поведение определяется законами сохранения четности и углового момента. Различные возможности перечислены в табл. 1. Из нее видно, что линейный рост σ_1 с импульсом представляет собой проявление псевдоскалярной природы π -мезона. Для скалярных частиц основным ниакоэнергетическим процессом было бы



Фиг. 20.3. Качественная энергетическая зависимость сечения рождения мезона из облака нуклона, σ (см. фиг. 20.1, а), и сечения рождения, связанного с током взаимодействия σ_1 (см. фиг. 20.1, б).

поглощение электрического дипольного фотона мезоном в S -состоянии, который испускался бы затем в P -состояние. При этом пороговое поведение сечения было бы не $\sim k'$, а $\sim k'^3$, как при атомном фотоэффекте. Разница проявляется также в угловом распределении, которое изотропно для π -мезонов, испускаемых в S -состоянии, и $\sim \sin^2 \theta$ для P -волновых π -мезонов, поскольку угловой момент направлен вдоль импульса фотона.

В окрестности резонансной энергии ($\omega' \sim 2$, или при энергии γ -квантов 300 Мэв в лабораторной системе) вклад от изовекторного тока J_V становится существенным. Когда в процессе рождения

Таблица 1

Тип π -мезона	$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$	Зависимость сечения от импульса
Скалярный π -мезон	Электрический диполь ($\mathcal{P} = -1$) $l = 1, J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	k'^3
	Магнитный диполь ($\mathcal{P} = +1$) $l = 0, J = \frac{1}{2}$ $(l = 2, J = \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	k' (k'^5)
Псевдоскалярный π -мезон	Электрический диполь ($\mathcal{P} = -1$) $l = 0, J = \frac{1}{2}$ $(l = 2, J = \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	k' (k'^5)
	Магнитный диполь ($\mathcal{P} = +1$) $l = 1, J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	k'^3

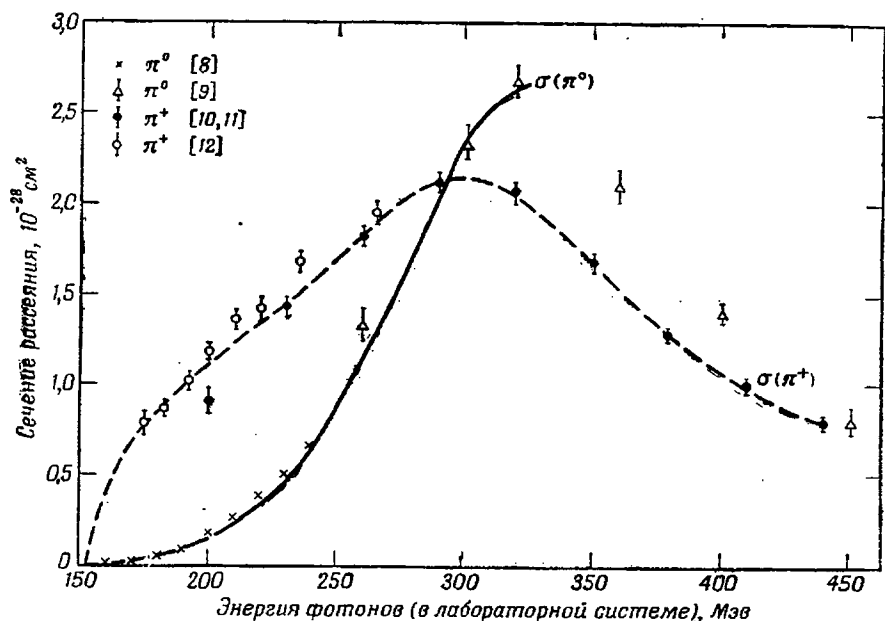
преобладает одно состояние, угловая и энергетическая зависимости сечения чрезвычайно просты. Так угловое распределение при $3/2, 3/2$ -резонансе получается посредством усреднения по двум возможным спиновым состояниям нуклона в начальном состоянии. Нуклонный спин можно квантовать вдоль направления спина фотона, а последний можно выбрать параллельным импульсу фотона. Дальнейшее усреднение по фотонному спину не дает ничего нового, и мы получаем [см. (16.37)]-

Угловой момент	Начальное состояние	Конечное состояние	Относительный вклад в $d\sigma/d\Omega$
$J = \frac{3}{2}, J_z = \frac{3}{2}$	$ \uparrow\uparrow, \uparrow N\rangle$	$ \uparrow\uparrow\rangle$	$ Y_1^1 ^2$
$J = \frac{3}{2}, J_z = \frac{1}{2}$	$ \uparrow\uparrow, \downarrow N\rangle$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} \downarrow\uparrow\rangle + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \uparrow\uparrow\rangle \right]$	$\frac{1}{9} (Y_1^1 ^2 + 2 Y_1^0 ^2)$

Множитель $(1/3)^{1/2}$ в случае антипараллельных спинов появляется потому, что начальное состояние находится в состоянии с $J = 3/2$ с вероятностью $1/3$ и в состоянии с $J = 1/2$ с вероятностью $2/3$. Тогда полное угловое распределение для мезонов, порожденных в состоянии с $J = 3/2$ имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{10}{9} |Y_1^1|^2 + \frac{2}{9} |Y_1^0|^2 \sim 2 + 3 \sin^2 \vartheta. \quad (20.22)$$

Поскольку в состоянии с $T = 3/2$, $T_z = -1/2$ число нейтральных мезонов вдвое больше числа заряженных [см. (16.35)], отношение сечений рождения нейтральных и заряженных мезонов в состоянии



Фиг. 20.4. Полные сечения фоторождения π^+ - и π^0 -мезонов на протонах в зависимости от энергии фотона в лабораторной системе отсчета.

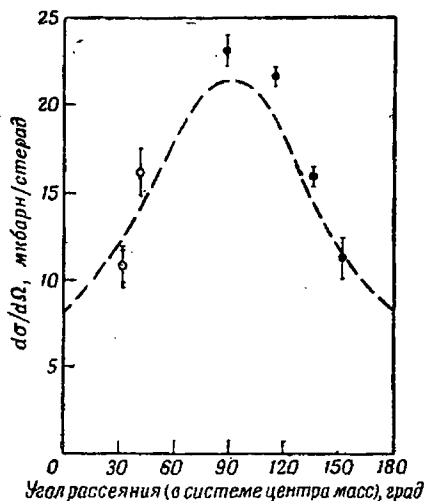
Экспериментальные данные по рождению π^0 -мезонов получены в работах [8] и [9]. Сплошная кривая для фоторождения π^0 -мезонов соответствует вкладу в сечение (20.19а), обусловленному только током j_σ (см. [8]). Данные по рождению π^+ -мезонов при высоких энергиях усреднены по работам [10—11]. Низкоэнергетические данные получены в работе [12]. Пунктирная кривая произвольна, она проведена по экспериментальным точкам и иллюстрирует низкоэнергетическое поведение (см. фиг. 20.3).

с $T = J = 3/2$ равно 2. В окрестности резонанса энергетическая зависимость сечения, согласно (20.19а), задается выражением

$$\sigma = \frac{\pi}{k'^2} \frac{\Gamma \Gamma_\gamma}{(\omega' - \omega_r)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad \text{где } \Gamma_\gamma = \frac{\Gamma}{f_r^2 \rho^2(k)} \left(\frac{\mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}_\pi}{2} \right)^2 \frac{\omega'}{k}. \quad (20.23)$$

20.4. Сравнение с экспериментом. Экспериментальные данные по полным сечениям фоторождения заряженных и нейтральных мезонов приведены на фиг. 20.4. Как резонансное, так и пороговое поведение качественно согласуются с предсказаниями простой статической модели. Для нейтральных мезонов экспериментальное сечение

рождения при малых энергиях много меньше сечения рождения заряженных мезонов; однако при энергии, близкой к резонансной, их величины сравниваются. Во всей этой области энергий сечение рождения π^0 -мезонов хорошо описывается формулами (20.19б) и (20.23). Сплошная кривая на фиг. 20.4 дает вклад тока j_v согласно (20.19а). Описание рождения π^+ -мезонов нуждается в некоторых уточнениях, связанных в основном с эффектами отдачи [13], но в общем вполне удовлетворительно укладывается в рамки теории. Вклад добавочных



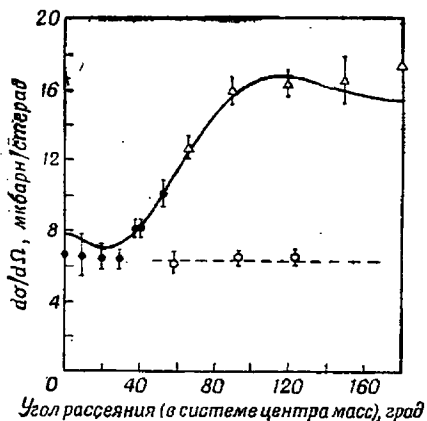
Фиг. 20.5. Дифференциальное сечение рождения π^0 -мезонов с энергией 300 Мэв в лабораторной системе.

Экспериментальные точки взяты из работ [9, 15, 16]. Пунктирная кривая изображает функцию $2 + 3\sin^2 \theta$, которая должна давать угловое распределение при рождении мезонов в чистом $J = T = 3/2$ состоянии.

электрических дипольных членов и вклад высших мультиполей приводит к тому, что сечение рождения π^+ -мезонов оказывается больше половины сечения рождения π^0 -мезонов, как это должно было бы быть, согласно соображениям, приведенным в конце предыдущего пункта. Низкоэнергетические данные соответствуют формулам (20.21) при $f_2^2/4\pi \approx 0,07$, что хорошо согласуется с величиной константы связи, полученной из экспериментов по мезон-нуклонному рассеянию.

Угловое распределение π^0 -мезонов в области резонанса также хорошо согласуется с нашей моделью и определяется функцией (20.22). На фиг. 20.5 проводится сравнение с экспериментальными данными при энергии 300 Мэв. Для π^+ -мезонов около порога рождения модель предсказывает рождение в S -состоянии и, следовательно, сферически симметричное угловое распределение. Это и имеет место в пределах экспериментальных ошибок при 175 Мэв (25 Мэв над порогом), как показано на фиг. 20.6. При более высоких энергиях появляются интерференционные члены от поглощения электрических и магнитных квантов. Поскольку с последними связана фаза

член $(\delta\delta_3)$, интерференционный член быстро меняется в окрестности резонанса. Это проявляется в сдвиге максимума углового распределения из области углов, близких к 180° , в область малых углов в этой области энергий. Сравнение углового распределения с предсказанием статической модели приведено на фиг. 20.6 для энергии несколько меньшей резонансной, — при 260 Мэв . Таким образом, теория успешно предсказывает такие тонкие эффекты, как относительный сдвиг фаз амплитуд электро- и магниторождения.



Фиг. 20.6. Дифференциальные сечения рождения π^+ -мезонов при 175 Мэв (кружки) и при 260 Мэв (в первом случае точки взяты из работы [12]).

Данные, относящиеся к высоким энергиям, взяты из работ [10, 11]. Пунктирная кривая соответствует рождению в чистом S -состоянии. Кривая высоких энергий взята из работ [17].

Учитывая неоднозначность описания электромагнитных явлений в статической модели и тот факт, что мы пренебрегли взаимодействием S -волновых мезонов с нуклонами, следует признать полученное согласие весьма примечательным¹⁾. В частности, следует подчеркнуть, что фоторождение заряженных и нейтральных π -мезонов дает два новых независимых способа измерения величины f_r , причем оба получающихся значения согласуются с величиной, найденной из π -мезонного рассеяния.

20.5. Комптоновское рассеяние. Другое электромагнитное явление, для которого существенно $3/2, 3/2$ -состояние, — это рассеяние фотонов на нуклонах. Оно представляет собой эффект второго порядка по величине e , и мы упомянем лишь основные результаты. Нормальное (томпсонское) рассеяние включает трансляционные степени свободы таким же образом, как электронный комpton-эффект. Начальный фотон встряхивает протон, который затем испускает рассеянный фотон. Вследствие большой массы протона это дает исключительно

¹⁾ При сравнении статической модели с экспериментом все появляющиеся в формулах значения энергии предполагаются отнесенными к системе центра масс.

малое сечение $\sim e^2/M^2 \sim 10^{-31}$ см². С другой стороны, из-за наличия возбужденного состояния нуклона имеется вероятность резонансного рассеяния с возбуждением состояния $J=T=3/2$, которое далее распадается с испусканием рассеянного фотона¹⁾. Согласно классической картине, это означает, что фотон действует на магнитный момент нуклона, вызывая этим вынужденное вращение нуклонного спина. Такой эффект дает резонансное рассеяние обычного вида [19] [ср. с (20.23)]:

$$\sigma_{\text{резонансное}} = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_{\gamma}^2}{(E_{\gamma} - E)^2 + (\Gamma/2)^2},$$

где λ — длина волны падающего фотона, или $1/E_{\gamma}$, а E_{γ} — резонансная энергия (~ 300 Мэв в лабораторной системе); другие символы определены в (20.23). Сечение рассеяния много меньше геометрического предела $\pi\lambda^2$, поскольку возбужденное состояние распадается преимущественно с испусканием π -мезона ($\Gamma_{\lambda} \ll \Gamma$), но много больше сечения томпсоновского рассеяния (e^2/M^2). Современная экспериментальная техника позволяет проверить эти предсказания теории, несмотря на малую величину сечений.

Рекомендуемая литература

Chew G. F., Low F. E., Phys. Rev., 101, 1579 (1956).

Chew G. F., Theory of Pion Scattering and Photoproduction, „Handbuch der Physik“, Berlin (в печати).

¹⁾ По поводу анализа, основанного на статической модели, см. статью Карзаса, Ватсона и Захариазена [18].

ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ

21.1. Введение. Классическое вычисление энергии взаимодействия нуклонов. В этой последней главе мы воспользуемся статической моделью для вычисления дальнедействующей, или внешней части сил между двумя нуклонами, вызванной „обменом“ мезонами. Хотя исторически потенциал Юкавы знаменовал начало мезонной теории, проблема ядерных сил не относится к наиболее прозрачным применениям статической модели. Статический потенциал должен был бы объяснять все низкоэнергетические свойства двухнуклонной системы (например, энергию связи дейтрона, его квадрупольный момент, фазы рассеяния нуклона на нуклоне). Основываясь на соображениях о различных формах убывания отдельных частей потенциала, можно думать, что внешняя часть потенциала обусловлена обменом одним мезоном и должна поэтому довольно точно предсказываться статической моделью. Обмен двумя мезонами должен частично определять взаимодействие на меньших расстояниях и гораздо существеннее, чем одномезонный обмен, зависеть от эффектов отдачи (отсутствующих в нашей модели) и от структуры нуклона (т. е. от k_{\max}). С другой стороны, в него должны вносить вклад не только P -волновые мезоны, но также, например, и мезоны в S -состоянии, взаимодействие которых с нуклоном соответствует члену ϕ^2 . Как мы уже говорили ранее, обмен K -мезонами дает силы более короткого радиуса, так что эти эффекты предположительно скрыты в структуре источника.

Классическая энергия взаимодействия двух источников, разделенных расстоянием r_0 , может быть вычислена способом, аналогичным описанному в гл. 9. Поскольку энергия пропорциональна ρ^2 , а не ρ , мы получаем перекрестный член для энергии взаимодействия двух источников:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \rho(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (21.1)$$

Поле, соответствующее классическому решению, было найдено в гл. 16 [см. (16.4)] для случая нейтрального псевдоскалярного поля при наличии одного источника. Легко обобщить это выражение на случай

симметричной теории и получить для статических σ и τ

$$\phi_a(\mathbf{r}) = f \tau_a \sigma \cdot \nabla Y_0(\mathbf{r}), \quad (21.2a)$$

где

$$Y_0(\mathbf{r}) = \int d^3 r' \rho(r') \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (21.2b)$$

В присутствии двух источников гамильтониан взаимодействия H' приобретает вид

$$H' = f \sum_a \int [\rho(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \sigma \cdot \nabla \phi_a \tau_a d^3 r]. \quad (21.3)$$

Подставляя (21.2) в (21.3), находим, что энергия взаимодействия, создаваемая первым источником в точке, где находится второй источник (a и b обозначают два источника) равна

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(2) \equiv \mathcal{V} = f^2 \sum_{a=1}^3 \tau_{aa} \tau_{ba} \int \rho(r') \rho(r'-\mathbf{r}_0) (\sigma_a \cdot \nabla_r) (\sigma_b \cdot \nabla_r) \times \\ \times \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 r d^3 r'. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Для точечных источников это выражение дает

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{r}_0) = \frac{f^2}{4\pi} \sum_{a=1}^3 \tau_{aa} \tau_{ba} \frac{1}{3} \left[\sigma_a \cdot \sigma_b + S_T \left(\frac{3}{r_0^2} + \frac{3}{r_0} + 1 \right) \right] \frac{e^{-r_0}}{r_0} - \\ - f^2 \sum_{a=1}^3 \tau_{aa} \tau_{ba} \delta^3(\mathbf{r}_0) \sigma_a \cdot \sigma_b. \end{aligned} \quad (21.5)$$

где S_T — энергия взаимодействия двух диполей (тензорные силы),

$$S_T = \frac{3\sigma_a \cdot \mathbf{r}_0 \sigma_b \cdot \mathbf{r}_0}{r_0^2} - \sigma_a \cdot \sigma_b.$$

Для источников конечных размеров поведение энергии взаимодействия на больших расстояниях не меняется, но потенциал с δ -функцией размывается по области, занимаемой источником, и последний член в (21.5) переходит в

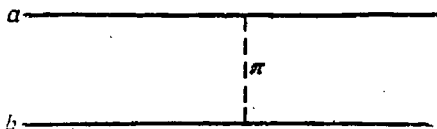
$$- f^2 \sum_{a=1}^3 \tau_{aa} \tau_{ba} \sigma_a \cdot \sigma_b \int \rho(r') \rho(r'-\mathbf{r}_0) d^3 r'. \quad (21.6)$$

При вычислении силы взаимодействия между двумя нуклонами по теории возмущений вклад в наименьшем порядке дает диаграмма,

соответствующая обмену одним мезоном (фиг. 21.1). При этом потенциал взаимодействия равен

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(r_0) &= - \sum_n \frac{\langle 0 | H' | n \rangle \langle n | H' | 0 \rangle}{E_0 - E_n} = \\ &= - f^2 \int \sigma_a \cdot k \sigma_b \cdot k \frac{\rho^2(k)}{\omega^2} \sum_{\alpha=1}^3 \tau_{a\alpha} \tau_{b\alpha} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (21.7)$$

что в точности соответствует потенциалу в классическом пределе. Основываясь на результатах предыдущих глав, можно ожидать, что

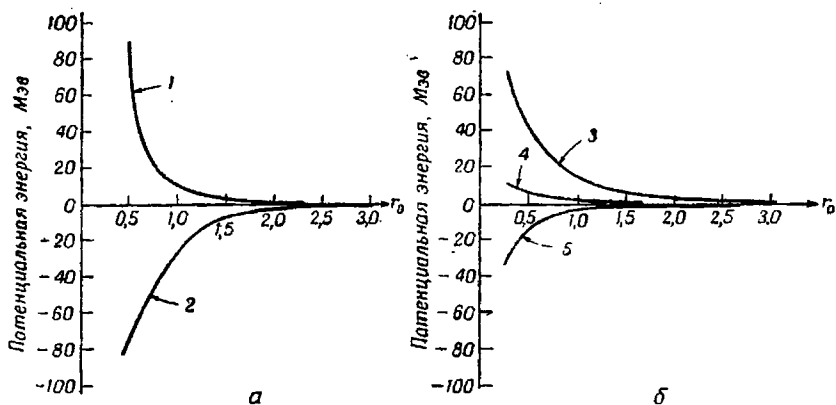


Фиг. 21.1. Диаграмма, изображающая вклад одномезонного обмена в ядерные силы.

в статической модели потенциал имеет в основном тот же вид, но f заменяется на f_r . В дальнейшем мы увидим, что это действительно так.

Зависимость от зарядовых переменных потенциала (21.7) заключена в произведении $\tau_a \cdot \tau_b$, которое имеет противоположный знак в зависимости от того, параллельны или антипараллельны изоспины нуклонов. Среднее значение этой величины равно 1 в изотриплетном состоянии и -3 в изосинглетном состоянии. Можно было заведомо предвидеть, что силы зависят от относительной ориентации изоспинов, поскольку вероятности обмена мезоном в этих состояниях различны. Например, два протона могут обмениваться только π^0 -мезоном, тогда как в изосинглетном состоянии нуклоны могут обмениваться как π^0 -мезоном, так и заряженными мезонами. Соответственно взаимодействие оказывается более сильным в изосинглетном состоянии. Противоположные знаки сил связаны с нашим замечанием относительно противоположного знака констант связи π^0 -мезона с протоном и нейтроном.

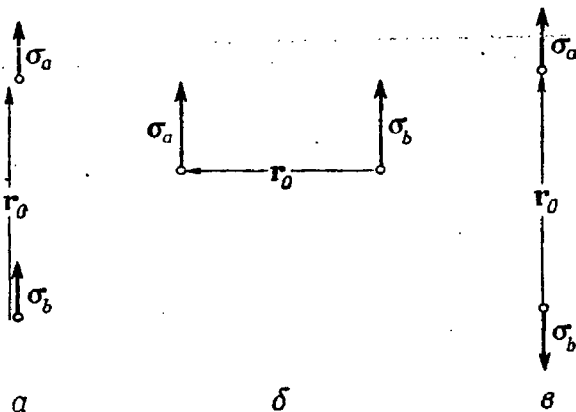
Зависимость от спина связана в основном с выражением $(\sigma_a \cdot r_0 \sigma_b \cdot r_0) / r_0^2$ и отражает перекрытие мезонных облаков, каждое из которых пропорционально $(\sigma \cdot r_0)$. Для типичных ориентаций классических спинов относительно радиус-вектора значения величины $\sigma_a \cdot r_0 \sigma_b \cdot r_0 / r_0^2$ показаны на фиг. 21.3. Для различных квантовых состояний свойства обменных сил иллюстрируются фиг. 21.2 и сведены в табл. 2. Основные свойства сил вытекают из структуры



Ф и г. 21.2. Кривая наиболее дальнедействующей части ядерного потенциала при $f_r^2/4\pi = 0,08$.

a — вклад тензорных сил в потенциальную энергию; 1 — спин, равный единице, изотриpletные состояния; 2 — спин, равный единице, изосинглетные состояния.

b — кривая центральных сил; 3 — спин, равный нулю, изосинглетные состояния; 4 — спин, равный единице, изосинглетные состояния; 5 — спин, равный единице, изотриpletные состояния и спин, равный нулю, изотриpletные состояния.



Ф и г. 21.3. Иллюстрация значений $S_T' = (\sigma_a \cdot r_0)(\sigma_b \cdot r_0)/r_0^2$ для различных пространственных и спиновых нуклонных конфигураций (*a*) $S_T' = 1$; (*б*) $S_T' = 0$; (*в*) $S_T' = -1$.

дейтрона, который представляет собой изосинглетное, триплетное по спину состояние, вытянутое вдоль направления спина (положительный квадрупольный момент). Такое состояние соответствует наиболее глубокой потенциальной яме во втором приближении для потенциала. В других состояниях также возможно притяжение, но менее сильное. Последнее утверждение согласуется с тем экспериментальным фактом, что полная сила взаимодействия нейтрона с нейтроном также соответствует притяжению, но не достаточно сильному для образования связанного состояния.

Таблица 2

Характер одномезонных сил в различных состояниях

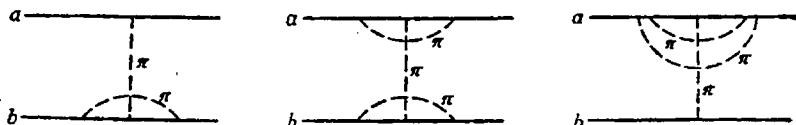
Спин	Изоспин	Тензорные силы	Центральные силы	Короткодействующие силы
Триплет	Синглет	Сильное притяжение	Умеренное притяжение	Умеренное отталкивание
Триплет	Триплет	Умеренное отталкивание	Слабое отталкивание	Слабое притяжение
Синглет	Триплет		Умеренное притяжение	Умеренное отталкивание
Синглет	Синглет		Сильное отталкивание	Сильное притяжение

21.2. Статический потенциал. Квантово-механический анализ. Прежде чем перейти к вычислению потенциала, следует сделать несколько замечаний. При выводе и использовании потенциала в статическом пределе подразумевается приближение Борна — Оппенгеймера (молекулярное приближение) [1—2]. Иными словами, потенциал взаимодействия вычисляется для нуклонов, разделенных расстоянием r_0 , где вектор r_0 рассматривается как параметр. Полученный потенциал затем подставляют в уравнение Шредингера, откуда и получают свойства нуклон-нуклонной системы. Ясно, что в данном случае оправдать приближение Борна — Оппенгеймера труднее, чем в молекулярных задачах, где разложение ведется по величине $(m_e/M)^{1/4} \sim 1/6$, а не по $(\mu/M)^{1/4} \sim 2/3$ (M — масса нуклона). Тем не менее только в статическом пределе возможно удовлетворительно определить потенциал¹⁾, и именно в статическом случае было

¹⁾ В этом случае потенциал определяется как не зависящая от энергии величина, что следует из теории поля. По поводу различных приводимых нами способов определения см. статью Нишиджимы [3]. Имеет ли «удовлетворительный» в указанном смысле потенциал отношение к действительности, — это совсем другой вопрос. Дискуссию его можно найти в статье Чарапа и Фубини [4].

выполнено это вычисление по нейтральной скалярной теории в гл. 10. Очевидно, что в полученном таким образом потенциале отсутствуют не только поправки порядка p/M , но и поправки, связанные с нулевым импульсом p порядка p/M .

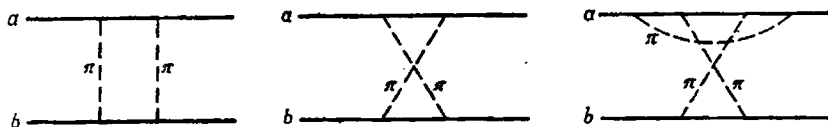
Поправки к (21.7), обусловленные высшими приближениями по f^2 , существенны и трудно поддаются учету. К счастью, для больших расстояний более существенны диаграммы типа изображенных на



Фиг. 21.4. Типичные для ядерных сил процессы, вследствие которых мы заменяем f на f_r .

фиг. 21.4, а их эффект сводится к замене f на f_r . Диаграммы двухмезонного обмена (фиг. 21.5) дают радиус сил, равный $1/2$, и их вклад может быть связан с рассеянием мезонов нуклонами.

Мы лишь вкратце наметим путь расчета этих диаграмм, поскольку они сильно зависят от мезон-мезонного взаимодействия и от поправок на неадиабатичность [5].



Фиг. 21.5. Типичные для ядерных сил диаграммы двухмезонного обмена.

Наши результаты будут получены по существу в духе приближения Гайтлера — Лондона. Так, для вычисления в первом приближении энергии двухнуклонной системы мы используем для каждого из нуклонов состояние с невозмущенным мезонным облаком. Такое состояние можно записать с помощью (17.6) в виде ¹⁾

$$|\xi_a, \xi_b, r_0\rangle = R_a R_b |\xi_a, \xi_b, r_0\rangle, \quad (21.8)$$

оно является в пределе $r_0 \rightarrow \infty$ собственным состоянием полного гамильтониана ²⁾

$$H = H_0 + H' - 2\mathcal{E}_0. \quad (21.9)$$

¹⁾ Для дальнейшего следует помнить, что „одевающий оператор“ R содержит только операторы рождения мезонов и операторы σ и τ . Поскольку операторы σ и τ , относящиеся к разным нуклонам, коммутируют, мы имеем $[R_a, R_b] = 0$.

²⁾ Точный вид $V_a(k)$ задается формулой (19.1). Индексы a, b означают, что берутся операторы σ_a, τ_a или σ_b, τ_b . Сокращение э. с. означает „эрмитово сопряженная величина“.

где

$$H' = H'_a + H'_b = \int d^3k a_\alpha(\mathbf{k}) [iV_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) + e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} iV_{\alpha\beta}(\mathbf{k})] + \text{э. с.}$$

Теперь мы просто вычислим энергию основного состояния

$$\langle \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 | H | \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle = \mathcal{V}(\mathbf{r}_0).$$

Для лучшего выполнения этой процедуры воспользуемся нетривиальным пробным состоянием, которое содержит примесь состояний „нуклон + падающий π -мезон“. Эти состояния описывают возмущение π -мезонного облака и соответствуют диаграммам типа изображенных на фиг. 21.5. Учитывая, что

$$(H_0 + H' - 2\mathcal{E}_0) R_\alpha | \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle = (H'_b - \mathcal{E}_0) R_\alpha | \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle, \quad (21.10)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} & HR_\alpha R_b | \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle = \\ & = \{ [[H, R_\alpha], R_b] + R_\alpha H'_a R_b + R_b H'_b R_\alpha - R_\alpha R_b (H + 2\mathcal{E}_0) \} | \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle. \end{aligned} \quad (21.11)$$

Двойной коммутатор в рассматриваемом приближении равен нулю. Он вносит вклад в потенциал более короткого радиуса ($\leq 1/2$) и соответствует двухмезонному обмену [6—7]. Далее,

$$\begin{aligned} & (H + 2\mathcal{E}_0) | \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle = \\ & = \int d^3k [-a_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) iV_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) - i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} V_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) a_\alpha^\dagger(\mathbf{k})] | \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle, \end{aligned} \quad (21.12)$$

так как все остальные члены содержат справа операторы поглощения. Поскольку $a^\dagger V_\alpha$ коммутирует с R_b , а $a^\dagger V_\beta$ с R_α , два члена в (21.12) могут быть сокращены с соответствующими членами в (21.11) и мы получаем¹⁾

$$\begin{aligned} \langle \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 | H | \xi_a, \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle &= \sum_\alpha \int d^3k [\langle \xi_a | V_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}) | \xi \rangle \langle \xi_b, \mathbf{r}_0 | a_\alpha(\mathbf{k}) | \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle + \\ & + \langle \xi_b, \mathbf{r}_0 | V_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) | \xi_b, \mathbf{r}_0 \rangle \langle \xi_a | a_\alpha(\mathbf{k}) | \xi_a \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}]. \end{aligned} \quad (21.13)$$

Среднее значение $a_\alpha(\mathbf{k})$ задается (19.2), и окончательно имеем

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}_0) = - \frac{f_\pi^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \sigma_a \cdot \mathbf{k} \sigma_b \cdot \mathbf{k} \sum_\alpha \tau_{a\alpha} \tau_{b\alpha} \rho^2(k), \quad (21.14)$$

¹⁾ Разделение на множители $R_\alpha R_b | \xi_a, \xi_b \rangle = | \xi_a \rangle | \xi_b \rangle$ возможно потому, что $| \xi_a, \xi_b \rangle$ есть прямое произведение $| \xi_a \rangle$ и $| \xi_b \rangle$.

что, как и предсказывалось, совпадает с потенциалом (21.4) и (21.7) при замене константы связи f^2 на перенормированную константу f_r^2 .

21.3. Сравнение с экспериментом. Зная точное значение величины потенциала, можно попытаться произвести количественное сравнение с экспериментом. С этой целью следует принять во внимание трансляционные степени свободы нуклонов и добавить к потенциалу (21.7) кинетическую энергию. Двухнуклонная волновая функция $\chi_{\epsilon_a \epsilon_b}(\mathbf{r}_0)$ определяется, если записать двухнуклонное состояние в виде

$$|2\rangle = \sum_{\epsilon_a \epsilon_b} \int d^3 r_0 \chi_{\epsilon_a \epsilon_b}(\mathbf{r}_0) |\epsilon_a, \epsilon_b, \mathbf{r}_0\rangle. \quad (21.15)$$

Если $|2\rangle$ — собственное состояние полной энергии, то χ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\left[-\delta_{\epsilon_a \epsilon_b, \epsilon'_a \epsilon'_b} \frac{1}{M} \nabla^2 + \mathcal{V}_{\epsilon_a \epsilon_b, \epsilon'_a \epsilon'_b}(\mathbf{r}_0) \right] \chi_{\epsilon'_a \epsilon'_b}(\mathbf{r}_0) = E \chi_{\epsilon_a \epsilon_b}(\mathbf{r}_0). \quad (21.16)$$

Чтобы решить это уравнение, необходимо диагонализировать \mathcal{V} в спиновом и изоспиновом пространствах. Это проделывается в большинстве руководств по ядерной физике [8] и приводит к хорошо известной системе уравнений, связывающих S - и D -волны для основного состояния дейтрона. Поскольку наш потенциал (21.11) описывает только дальнедействующие силы, при $r_0 < 1$ его следует выбирать полуфеноменологическим образом. Однако квадрупольный момент и энергия связи дейтрона чувствительны к виду волновой функции χ в основном на расстояниях $r_0 \geq 1$ и могут быть поэтому найдены с помощью потенциала (21.14) с константой связи, взятой из π -мезон-нуклонного рассеяния. Тщательное исследование уравнения (21.16) [9] показывает, что получить правильные статические свойства дейтрона очень трудно, если только константа связи не лежит в пределах $0,065 \leq f_r^2/4\pi \leq 0,09$. Параметры низкоэнергетического рассеяния, а именно длина рассеяния и эффективные радиусы в S - и P -состояниях, также согласуются с решением (21.16) при $r_0 > 1$.

Недавно был найден способ, позволяющий непосредственно выделять из данных по рассеянию нуклонов часть, связанную с обменом одним π -мезоном. Метод состоит в продолжении сечения рассеяния к нефизическим энергиям и углам, где промежуточный мезон становится реальным. В этой нефизической ситуации он может распространяться на большие расстояния, и амплитуда рассеяния имеет полюс. Вычет в этом полюсе непосредственно связан с перенормированной константой связи, и экспериментальные данные [10—11] дают значение $f_r^2/4\pi = 0,07 \pm 0,01$ в согласии с величиной, получающейся из других процессов.

При более высоких энергиях ситуация становится более сложной, поскольку начинают играть роль такие зависящие от скорости силы, как спин-орбитальные. Эти силы, очевидно, выходят за рамки статической модели. Соответственно и их применение к таким процессам, как рождение π -мезонов в нуклон-нуклонных столкновениях, весьма сомнительно, поскольку при энергиях выше порога этого процесса картина не может быть описана простой статической моделью.

21.4. Заключительные замечания. В заключение мы можем сказать, что статическая модель представляет собой теорию с довольно прозрачной математической структурой. Она замечательно успешно связывает различные данные, касающиеся низкоэнергетических мезонных явлений. Тот факт, что значения перенормированной константы связи, определенные из рассеяния π -мезонов фоторождения и из ядерных сил, согласуются с точностью около 15%, показывает, что квантовая теория поля может проникнуть во внутриядерный мир. Не следует, однако, обольщаться этим успехом. Модель является очевидным упрощением реального положения дел. Более точная теория должна рассматривать нуклоны как квантованное поле и содержать усложнения релятивистской теории. К сожалению, это означает не только дополнительные вычислительные трудности; вся математическая структура таких теорий неизвестна¹⁾.

Не вдаваясь в эти вопросы и руководствуясь теорией возмущений, мы можем постулировать простое аналитическое поведение амплитуды рассеяния. Используя так называемое представление Мандельштама [14], можно вывести уравнения для амплитуды рассеяния [15], которые представляют обобщение рассмотренных нами уравнений Лоу. Они содержат не только все кинематические поправки, но также нуклон-антинуклонные пары, π — π -взаимодействие и т. д. Отсюда возникают дальнейшие точки ветвления и новые каналы при больших энергиях. Поскольку мы не умеем решать уравнение Лоу даже в случае связи трех внутренних степеней свободы π -мезона с нуклоном, ясно, что упомянутые уравнения исключительно сложны. Однако, пренебрегая мезон-мезонным взаимодействием и переходя к пределу $M \rightarrow \infty$, мы получим уравнения статической модели, если, конечно, этот предел существует. В этом смысле большие эффекты, которые правильно предсказываются статической моделью, вытекают и из более фундаментального подхода. Можно даже надеяться, что на этом пути удастся вычислить эффекты средней величины. Конечно, потребуется еще много работы, прежде чем все усложнения, связанные с релятивистскими эффектами и квантовым характером теории, будут преодолены.

¹⁾ За исключением одного нереального случая. См. статьи [12, 13].

Рекомендуемая литература

- Taketani M., Machida S., Onuma S., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 7, 45 (1952).
- Brueckner K. A., Watson K. M., Phys. Rev., 92, 1023 (1953).
- Henley E. M., Ruderman M. A., Phys. Rev., 92, 1036 (1953).
- Gartenhaus S., Phys. Rev., 100, 900 (1955).
- Signell P. S., Marshak R. E., Phys. Rev., 106, 832 (1957); 109, 1229 (1958).

Приложение

Формулы, собранные ниже, выражают некоторые величины в различных представлениях, использованных в тексте. Все они одинаково существенны и отражают различные стороны теории. Координатное пространство имеет наиболее ясный интуитивный смысл и было использовано первым вместе с кубическими или сферическими граничными условиями. Реальный эксперимент не имеет дела с такими условиями, так что они играют вспомогательную математическую роль. Соответственно мы быстро перешли к случаю бесконечного объема и задали определенные начальные условия. Разложение по плоским волнам диагонализировало энергию, импульс и заряд. В задачах со сферически симметричным источником импульс не сохраняется, но сохраняется момент количества движения. В этом случае разложение по сферическим волнам приводит к дальнейшему упрощению проблемы. Употребляются несколько способов определения переменных поля в различных представлениях. Мы выбрали условие, что коммутаторы операторов поля точно равны δ -символу Кронекера для дискретных переменных и δ -функции Дирака для непрерывных. Преимущество этого условия заключается в том, что выражения для энергий, импульса и т. д. оказываются суммами или интегралами без дополнительных численных множителей. Это достигается за счет появления некоторых множителей в выражениях локальных полей через эти переменные.

r-пространство	Плоские волны	Сферические волны
	<p>Дискретный случай: $k = (n_x, n_y, n_z) \frac{2\pi}{L}$</p> <p>Непрерывный случай: $\frac{1}{L^3} \sum_k \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$</p>	<p>Дискретный случай: $k = \left(n + \frac{l}{2}\right) \frac{\pi}{L}$</p> <p>Непрерывный случай: $\frac{1}{L} \sum_k \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk$</p>
<p>$\phi(\mathbf{r})$</p>	<p>Дискретный случай: $\sum_k \frac{a_k e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}}{(2\omega L^3)^{1/2}} + \text{э. с.} \quad (4.8)$</p> <p>Непрерывный случай: $\int \frac{d^3k a(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2} (2\omega)^{1/2}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{э. с.}$</p>	<p>Дискретный случай: $\sum_{k, l, m} Y_l^m(\theta, \varphi) U_k^l(r) e^{-i\omega t} \frac{a_{kl}^m}{(2\omega L/\pi)^{1/2}} + \text{э. с.}$</p> <p>Непрерывный случай: $\int_0^\infty dk \sum_{l, m} Y_l^m(\theta, \varphi) U_k^l(r) e^{-i\omega t} \frac{a_l^m(k)}{(2\omega)^{1/2}} + \text{э. с.}$</p>
<p>$[\phi(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}', t)] = i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$</p>	<p>Перестановочные соотношения</p> <p>Дискретный случай: $[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k, k'}$</p> <p>Непрерывный случай: $[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$</p>	<p>Дискретный случай: $[a_{kl}^m, a_{k'l'}^m] = \delta_{m, m'} \delta_{l, l'} \delta_{k, k'}$</p> <p>Непрерывный случай: $[a_l^m(k), a_l^{m'}(k')] = \delta_{m, m'} \delta_{l, l'} \delta(k - k')$</p>

r-пространство	Плоские волны	Сферические волны
Энергия		
$\int d^3r \frac{1}{2} \{\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\}$	$\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} \omega = \int d^3k a^{\dagger}(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \omega$	$\sum_{l, m, k} a_{kl}^{\dagger m} a_{kl}^m \omega = \int d\mathbf{k} \sum_{l, m} a_l^{\dagger m}(\mathbf{k}) a_l^m(\mathbf{k}) \omega$
Импульс		
$- \int d^3r \phi \nabla \phi$	$\int d^3k a^{\dagger}(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \mathbf{k}$	Имеет сложный вид
Угловой момент		
$L = -\frac{1}{2} \int d^3r \phi (\mathbf{r} \times \nabla \phi) - \frac{1}{2} \int d^3r (\mathbf{r} \times \nabla \phi) \phi$	$-i \int d^3k a^{\dagger}(\mathbf{k}) \mathbf{k} \times \Delta_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k})$	$L_z = \int_0^{\infty} dk \sum_{l, m} a_l^{\dagger m}(\mathbf{k}) a_l^m(\mathbf{k}) m$
Гамильтонова взаимодействия для π -мезонов в статической модели		
$\frac{f}{\mu} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \tau_a \sigma \cdot \nabla \phi_a$	$i \frac{f}{\mu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \rho(\mathbf{k}) \tau_a \sigma \cdot \mathbf{k} \frac{a_a(\mathbf{k})}{(2\omega)^{1/2}} + \text{э. с.}$	$\frac{f}{\mu} \sum_{m, a, 0}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{k} k^2}{(12\pi^2 \omega)^{1/2}} \rho(\mathbf{k}) \tau_a \sigma^m a_l^m(\mathbf{k}) + \text{э. с.}$

Цитированная литература

К ГЛАВЕ 1

1. Bohr N., Rosenfeld L., Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 12, 8 (1938).
2. Rosenfeld L., статья в сборнике "Niels Bohr and the Development of Physics" ed. by W. Pauli, New York, 1955, p. 70. (Имеется перевод: Нильс Бор и развитие физики, сборник под редакцией В. Паули, ИЛ, 1958).
3. Jeffreys H., Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, New York, 1946, p. 499.
4. Kittel C., Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., New York, 1953, p. 103. (Имеется перевод: С. Киттель, Введение в физику твердого тела, М., 1961).

К ГЛАВЕ 2

1. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3d ed., New York, 1947, Ch. V. (Имеется перевод: П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, М., 1960, гл. 5.)
2. Margenau H., Murphy G. M., The Mathematics of Physics and Chemistry, Princeton, 1943, p. 425.

К ГЛАВЕ 3

1. Schiff L. I., Quantum Mechanics, 2nd ed., New York, 1955, p. 135. (Имеется перевод: Л. И. Шифф, Квантовая механика, 2-е изд., ИЛ, 1959).

К ГЛАВЕ 4

1. Pauli W., статья в сборнике "Niels Bohr and the Development of Physics" ed. by W. Pauli, New York, 1955, p. 30. (Имеется перевод: Нильс Бор и развитие физики, под редакцией В. Паули, ИЛ, 1958.)
2. Thirring W., Principles of Quantum Electrodynamics, New York, 1958.
3. Welton T. A., Phys. Rev., 74, 1157 (1948).
4. Schiff L. I., Quantum Mechanics, 2nd ed., New York, 1955, p. 52. (Имеется перевод: Л. И. Шифф, Квантовая механика, 2-е изд., ИЛ, 1959).

К ГЛАВЕ 5

1. Wentzel G., The Quantum Theory of Fields, New York, 1949, p. 8 and App. I. (Имеется перевод: Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию полей. М., 1957).
2. Watson G. N., Theory of Bessel Functions, New York, 1944, p. 128. (Имеется перевод: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949).
3. Schiff L. I., Quantum Mechanics, 2nd ed., New York, 1955. (Имеется перевод: Л. И. Шифф, Квантовая механика, 2-е изд., ИЛ, 1959.)
4. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Квантовая механика, М., 1948, гл. 4.
5. Watson G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed., New York, 1958, Ch. 3, 6, 7.

К ГЛАВЕ 6

1. Purcell E. M., Nature, 178, 1499 (1956).

К ГЛАВЕ 7

1. Wightman A. S., Schweber S. S., Phys. Rev., 98, 812 (1955).
2. Thirring W., Principles of Quantum Electrodynamics, New York, 1958.
3. Condon E. U., Shortley G. H., The Theory of Atomic Spectra, New York, 1953, Ch. III. (Имеется перевод: Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949, гл. III.)

К ГЛАВЕ 8

1. Lewis H. W., Oppenheimer J. R., Wouthuysen S., Phys. Rev., 73, 127 (1948).
2. Henley E. M., Lee T. D., Phys. Rev., 101, 1536 (1955).
3. Kobayashi Z., Takeda G., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 19, 269, (1958).
4. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., 91, 70 (1953).
5. Lippmann B. A., Schwinger J., Phys. Rev., 79, 48 (1950).

К ГЛАВЕ 9

1. Schiff L. I., "Quantum Mechanics", 2nd ed., New York, 1955, p. 153. (Имеется перевод: Л. И. Шифф, Квантовая механика, 2-е изд., ИЛ, 1959).

К ГЛАВЕ 10

1. Thirring W., Principles of Quantum Electrodynamics, New York, 1958, Ch. 2.

К ГЛАВЕ 11

1. Eden R. J., в книге "Nuclear Reactions", ed. by P. M. Endt, M. Demeur, Amsterdam, 1959, vol. 1, Ch. 1.
2. Dyson F. J., Phys. Rev., 73, 929 (1948).

3. Foldy L. L., Phys. Rev., **84**, 168 (1951).
4. Drell S. D., Henley E. M., Phys. Rev., **88**, 1053 (1952).
5. Wentzel G., Helv. Phys. Acta, **15**, 111 (1942).
6. Møller C., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., **23**, 1 (1945).

К ГЛАВЕ 12

1. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952, Ch. 8. (Имеется перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954, гл. 8.)
2. Blatt J. M., Phys. Rev., **72**, 466 (1947).
3. Schweber S. S., Bethe H. A., de Hoffmann F., "Mesons and Fields", Evanston, 1955, vol. I. (Имеется перевод: С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман, Мезоны и поля, ИЛ, 1957, т. 1.)
4. Van Kampen N. G., Physica, **24**, 545 (1958).
5. Sparnaay M. J., Physica, **24**, 751 (1958).
6. Klein A., McCormick B. H., Phys. Rev., **98**, 1428 (1955).
7. Lamb W. E., Retherford R. C., Phys. Rev., **72**, 241 (1947).

К ГЛАВЕ 13

1. Lee T. D., Phys. Rev., **45**, 1329 (1954).
2. Blatt J. M., Weisskopf V. F., "Theoretical Nuclear Physics", New York, 1952, Ch. 2. (Имеется перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954, гл. 2.)
3. Glaser V., Källen G., Nucl. Phys., **2**, 706 (1956—1957).
4. Källen G., Pauli W., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., **30** (7), (1955).

К ГЛАВЕ 14

1. Lippman B. A., Schwinger J., Phys. Rev., **79**, 469 (1950).
2. Low F., Phys. Rev., **93**, 1392 (1955).
3. Castillejo L., Dalitz R. H., Dyson F. J., Phys. Rev., **101**, 453 (1956).
4. Ida M., Progr. Theor. Phys., (Kyoto) **21**, 625 (1959).
5. Wick G. C., Rev. Mod. Phys., **27**, 339 (1955).
6. Ruijgrok T. W., van Hove L., Physica, **22**, 880 (1956).
7. Van Hove L., Physica, **25**, 365 (1959).
8. Ruijgrok T. W., Physica, **24**, 185, 205 (1958); **25**, 357 (1959).

К ГЛАВЕ 15

1. Lee T. D., Low F. E., Pines D., Phys. Rev., **90**, 297 (1953).
2. Lee T. D., Pines D., Phys. Rev., **92**, 883 (1953).
3. Krönig R., Thellung A., Physica, **18**, 749 (1952).
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1951, гл. 6.
5. Bohr A., Mottelson B. R., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., **27**, 16 (1953).
6. Huang K., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 767 (1957).

7. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev., **108**, 1175 (1957).
8. Wentzel G., Phys. Rev., **108**, 1593 (1957).
9. Тамм И. Е., ЖЭТФ, **32**, 178 (1957).
10. Rodberg L. S., Phys. Rev. Lett., **3**, 58 (1959).
11. Frazer W. R., Fulco J. R., Phys. Rev. Lett., **2**, 365 (1959).
12. Bethe H. A., Morrison P., Elementary Nuclear Theory, 2nd ed., New York, 1956. (Имеется перевод: Г. Бете, Ф. Моррисон, Элементарная теория ядра, ИЛ, 1958).
13. Henley E. M., Ruderman M. A., Phys. Rev., **90**, 719 (1953).
14. Bethe H. A., de Hoffmann F., Mesons and fields, vol. II, Evanston, 1955, sec. 28c; 28d. (Имеется перевод: Г. Бете, Ф. Гофман, Мезоны и поля, т. II, ИЛ, 1957.)
15. Schiff L. I., Quantum Mechanics, 2nd ed., New York, 1955, sec. 33. (Имеется перевод: Шифф Л. И., Квантовая механика, 2-е изд., ИЛ, 1959, § 33.)
16. Dyson F. J., Phys. Rev., **73**, 929 (1948).
17. Drell S. D., Henley E. M., Phys. Rev., **88**, 1053 (1952).
18. Foldy L. L., Phys. Rev., **84**, 168 (1951).
19. Anderson H. L., Davidson W. C., Kruse U. E., Phys. Rev., **100**, 339 (1955).

К ГЛАВЕ 16

1. Pauli W., "Meson Theory of Nuclear Forces", 2nd ed., New York, 1948.
2. Wada W. W., Phys. Rev., **88**, 1032 (1952).
3. Condon E. U., Shortley G. H., "The Theory of Atomic Spectra", New York, 1953, Ch. 2. (Имеется перевод: Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949, гл. 2.)

К ГЛАВЕ 17

1. Rose M. E., Elementary Theory of Angular Momentum, New York, 1957, p. 85.
2. Haber-Schaim U., Thirring W., Nuovo Cimento, **2**, 100 (1955).
3. Marshak R. E., Meson Physics, New York, 1952.
4. Тамм И. Е., Journ. Phys. USSR (Сов. физ.), **9**, 449 (1945).
5. Dancoff S. M., Phys. Rev., **78**, 382 (1950).
6. Bethe H. A., de Hoffmann F., Mesons and Fields, vol. II, Evanston, 1955. (Имеется перевод: Г. Бете, Ф. Гофман, Мезоны и поля, т. II, ИЛ, 1957.)
7. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **2**, 6 (1947).
8. Lee T. D., Pines D., Phys. Rev., **92**, 883 (1953).
9. Lee T. D., Christian R., Phys. Rev., **94**, 1760 (1954).
10. Friedman M. H., Lee T. D., Christian R., Phys. Rev., **100**, 1494 (1955).
11. Henley E. M., Lee T. D., Phys. Rev., **101**, 1536 (1956).
12. Sachs R. G., Nuclear Theory, Reading, Mass., 1953, App. I.
13. Pauli W., Dancoff S. M., Phys. Rev., **62**, 851 (1942).

14. Wentzel G., *Helv. Phys. Acta*, **13**, 269 (1940); **14**, 633 (1941).
15. Serber R., Dancoff S. M., *Phys. Rev.*, **62**, 85 (1942).
16. Harlow F., Jacobsohn B. A., *Phys. Rev.*, **93**, 333 (1954).
17. Pais A., Serber R., *Phys. Rev.*, **105**, 1636 (1959); **113**, 955 (1959).
18. Eder G., *Nuovo Cimento*, **18**, 430 (1960).
19. Halpern F. R., *Phys. Rev.*, **107**, 1145 (1957).
20. Halpern F. R., Sartori L., Nishimura K., Spitzer R., *Ann. Phys.*, **7**, 154 (1959).

К ГЛАВЕ 18

1. Bethe H. A., de Hoffmann F., *Mesons and Fields*, vol. II, Evanston, 1955, Ch. 3B. (Имеется перевод: Г. Бере, Ф. Гофман, Мезоны и поля, ИЛ, 1957, т. II.)
2. Low F. E., *Phys. Rev.*, **93**, 1392 (1955).
3. Geil-Mann M., Goldberger M. L., *Phys. Rev.*, **96**, 1433 (1954).
4. Weisskopf V. F., *Phys. Rev.*, **116**, 1615 (1959).
5. Blatt J. M., Weisskopf V. F., *Theoretical Nuclear Physics*, New York, 1952. (Имеется перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.)
6. Barnes S. W., Rose B., Giacomelli G., King J., Miyake K., Kinsey K., *Phys. Rev.*, **117**, 226 (1960).
7. Lindenbaum S. J., *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **7**, 317 (1957).
8. Chew G. F., *Theory of Pion Scattering and Photoproduction*, *Handbuch der Physik*, Berlin (в печати).
9. Anderson H. L., Davidson W. C., Glicksman M., Kruse U. E., *Phys. Rev.*, **100**, 279 (1955).

К ГЛАВЕ 19

1. Fubini S., Thirring W., *Phys. Rev.*, **105**, 1382 (1957).
2. Segré E., *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **8**, 127 (1958).
3. Hofstadter R., Bumiller F., Yearian M. R., *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 482 (1958).
4. Frazer W. R., Fulco J. R., *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 365 (1959).
5. DuMont J. W. M., *Ann. de phys.*, **7**, 365 (1959).
6. Blatt J. M., Weisskopf V. F., *Theoretical Nuclear Physics*, New York, 1952. (Имеется перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.)
7. Pauli W., Dancoff S. M., *Phys. Rev.*, **62**, 85 (1942).

К ГЛАВЕ 20

1. Capps R. H., Sachs R. G., *Phys. Rev.*, **96**, 540 (1954).
2. Capps R. H., Holladay W. G., *Phys. Rev.*, **99**, 931 (1955).
3. Hofstadter R., Bumiller F., Yearian M. R., *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 482 (1958).
4. Schiff L. I., *Quantum Mechanics*, 2nd ed., New York, 1955. (Имеется перевод: Л. И. Шифф, Квантовая механика, 2-е изд., ИЛ, 1959.)
5. Omnes R., *Nuovo Cimento*, **8**, 316 (1958).

6. Drell S. D., Friedman M. H., Zachariasen F., Phys. Rev., 104, 236 (1956).
7. Kroll N. M., Ruderman M. A., Phys. Rev., 93, 233 (1954).
8. Koester L. S., Mills F. E., Phys. Rev., 105, 1900 (1957).
9. McDonald W. S., Peterson V. Z., Corson D. R., Phys. Rev., 107, 577 (1957).
10. Walker R. L., Teasdale J. G., Peterson V. Z., Vette J. I., Phys. Rev., 99, 210 (1955).
11. Tollestrup A. V., Keck J. C., Worlock R. M., Phys. Rev., 99, 220 (1955).
12. Beneventano M., Bernardini G., Carlson-Lee D., Stopini G., Tau L., Nuovo Cimento, 4, 323 (1956).
13. Moravcsik M. J., Phys. Rev., 104, 1451 (1956).
14. Chew G. F., Phys. Rev., 106, 1337 (1957).
15. Oakley D. C., Walker R. L., Phys. Rev., 97, 1283 (1955).
16. Goldschmidt-Clermont Y., Osborne L. S., Scott M., Phys. Rev., 97, 188 (1955).
17. Proceedings of the 7th Annual Rochester Conference, New York, 1957, p. 11.
18. Karzas W. J., Watson W. K. R., Zachariasen F., Phys. Rev., 110, 253 (1958).
19. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952 (Имеется перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.)

К ГЛАВЕ 21

1. Born M., Oppenheimer J. R., Ann. d. Phys., 84, 457 (1927).
2. Schiff L. I., Quantum Mechanics, 2nd ed., New York, 1955. (Имеется перевод: Л. И. Шифф, Квантовая механика, 2-е изд., ИЛ, 1959).
3. Nishijima K., Suppl. Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 3, 138 (1956).
4. Charap J. M., Fubini S., Nuovo Cimento, 14, 540 (1959); 15, 73 (1960).
5. Machida S., Toyoda T., Suppl. Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 3, 106 (1956).
6. Cutcosky R. E., Phys. Rev., 112, 1027 (1958); 118, 1272 (1959).
7. Новожилов Ю. В., ЖЭТФ, 32, 1262 (1957); 33, 901 (1957).
8. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952, ch. 2. (Имеется перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954, гл. 2.)
9. Iwadare J., Otsuki S., Tamagaki R., Watari W., Suppl. Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 3, 32 (1956).
10. Moravcsik M. J., Dispersion Relations (ed. G. R. Sreaton), Edinburgh, 1961.
11. Ciffra P., MacGregor M. H., Moravcsik M. J., Stapp H. P., Phys. Rev., 114, 880 (1959).
12. Thirring W., Ann. d. Phys., 9, 91 (1958); Nuovo Cimento, 9, 1007 (1958).
13. Glaser V., Nuovo Cimento, 9, 1005 (1958).
14. Mandelstam S., Phys. Rev., 115, 1741 (1959); 115, 1752 (1959).
15. Chew G. F., Dispersion Relations (ed. G. R., Sreaton), Edinburgh, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Список обозначений	9

Часть первая

СВОБОДНЫЕ ПОЛЯ

<i>Глава 1. Введение</i>	19
1.1. Соотношение между квантовой и классической теориями поля	19
1.2. Колеблущаяся цепочка атомов	20
1.3. Непрерывная колеблущаяся цепочка	22
<i>Глава 2. Гармонический осциллятор</i>	26
2.1. Собственные значения H	26
2.2. Свойства собственных состояний H	28
2.3. Зависимость движения от времени	30
<i>Глава 3. Связанные осцилляторы</i>	36
3.1. Собственные значения гамильтониана	36
3.2. Квантовые свойства	39
3.3. Вопросы динамики	40
<i>Глава 4. Поля</i>	42
4.1. Непрерывно связанные осцилляторы	42
4.2. Вывод уравнений движения из лагранжиана	48
<i>Глава 5. Наблюдаемые</i>	54
5.1. Энергия, импульс и угловой момент	54
5.2. Четность	60
5.3. Число частиц и плотность частиц	62
5.4. Локальные наблюдаемые	64
<i>Глава 6. Состояния</i>	68
6.1. Вакуумное и одночастичное состояния	68
6.2. Двухчастичные состояния	73
6.3. Многочастичные состояния	77

Глава 7. Внутренние степени свободы	81.
7.1. Поля с двумя внутренними степенями свободы	81
7.2. Три и более степеней свободы	84

Часть вторая

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Глава 8. Общий обзор	95
8.1. Уравнения поля	95
8.2. Квантование	99
8.3. Матрица рассеяния и волновая матрица	103
Глава 9. Статический источник	108
9.1. Интерпретация статического источника	108
9.2. Энергия связанной системы	110
9.3. Связь между голыми и физическими состояниями	112
9.4. Флуктуации поля	116
9.5. Несколько источников	117
Рекомендуемая литература	119
Глава 10. Рождение частиц	120
10.1. Общие замечания	120
10.2. Частные случаи	124
Глава 11. Классическая теория с билинейным взаимодействием	129
11.1. Общие замечания	129
11.2. Связанные состояния	134
11.3. Поведение волновой матрицы \mathcal{Q}	136
11.4. Рассеяние	139
Глава 12. Квантовая теория поля с билинейным взаимодействием	142
12.1. Квантование и перестановочные соотношения при наличии связанного состояния	142
12.2. Рассеяние	143
12.3. Выражение энергии через асимптотические поля	149
12.4. Виртуальные частицы	153
Рекомендуемая литература	156
Глава 13. Модель Ли: состояния с $Q = \pm \frac{1}{2}$	157
13.1. Введение	157
13.2. Перестановочные соотношения и уравнения движения	158
13.3. Физические нуклоны	161
13.4. Состояния рассеяния	163

13.5. Полнота	164
13.6. Фазовый сдвиг	167
Глава 14. Модель Ли: состояния с $Q = -\frac{3}{2}$	171
14.1. Рассеяние. Уравнение Лоу	171
14.2. $\pi^- + n$ -рассеяние	173
14.3. Поведение $T(k)$ при низких и высоких энергиях	178
Часть третья	
ФИЗИКА П-МЕЗОНОВ	
Глава 15. Введение	187
15.1. Статическая модель	187
15.2. Перестановочные соотношения и уравнения движения	192
15.3. Сравнение с другими моделями	197
Глава 16. Основные черты статической модели	201
16.1. Классическое описание стационарного движения	201
16.2. Классический анализ рассеяния	208
16.3. Квантовые аспекты статической модели	212
Глава 17. Основное состояние	216
17.1. Точные результаты	216
17.2. Теория возмущений	220
17.3. Приближение Тамма — Даикова	222
17.4. Приближение промежуточной связи Томонаги	223
17.5. Приближение сильной связи	230
17.6. Численные методы	235
Глава 18. Рассеяние π-мезонов	237
18.1. Введение	237
18.2. Матрица рассеяния	237
18.3. Свойства матрицы рассеяния	240
18.4. Низкоэнергетический и высокоэнергетический пределы упругого рассеяния	242
18.5. Диагонализация T -матрицы	244
18.6. Связь уравнений Лоу с экспериментом	248
18.7. Приближенное решение уравнения Лоу	251
18.8. Заключение	255
Рекомендуемая литература	259
Глава 19. Свойства нуклонов	260
19.1. Среднее значение поля	260
19.2. Средние значения в основном состоянии	261

19.3. Константы перенормировки и другие параметры статической модели	263
19.4. Собственная энергия нуклона	265
19.5. Распределение заряда и тока физического нуклона. Магнитный момент	267
Рекомендуемая литература	274
<i>Глава 20. Электромагнитные явления</i>	<i>275</i>
20.1. Выражения для операторов заряда и тока	275
20.2. Амплитуды рождения	278
20.3. Общие свойства сечения	286
20.4. Сравнение с экспериментом	289
20.5. Комptonовское рассеяние	291
Рекомендуемая литература	292
<i>Глава 21. Ядерные силы</i>	<i>293</i>
21.1. Введение. Классическое вычисление энергии взаимодействия нуклонов	293
21.2. Статический потенциал. Квантово-механический анализ	297
21.3. Сравнение с экспериментом	300
21.4. Заключительные замечания	301
Рекомендуемая литература	302
Приложение	303
<i>Цитированная литература</i>	<i>306</i>