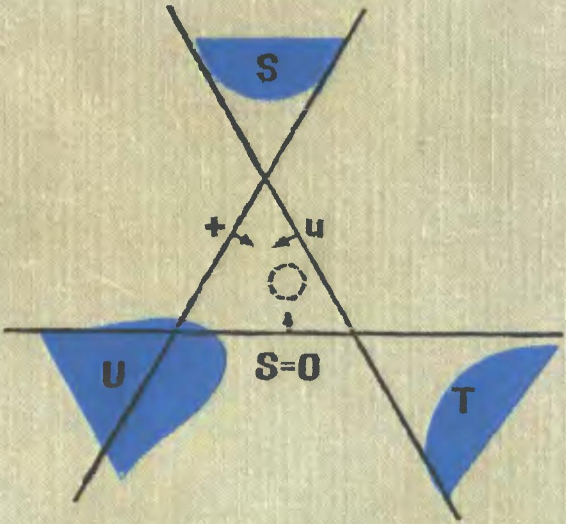
К. ХЕПП · А. ЭПШТЕЙН

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В ЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ



BRANDEIS UNIVERSITY SUMMER INSTITUTE
IN THEORETICAL PHYSICS, 1965

Particle Symmetries and Axiomatic Field Theory

Volume I

AXIOMATIC FIELD THEORY

Edited by
M. Chretien and S. Deser

K. HEPP. ON THE CONNECTION BETWEEN WIGHTMAN AND LSZ QUANTUM FIELD THEORY

H. EPSTEIN. SOME ANALYTIC PROPERTIES OF SCATTERING AMPLITUDES IN QUANTUM FIELD THEORY

GORDON AND BREACH, SCIENCE PUBLISHERS, INC
New York London Paris

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В ЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Перевод с английского **Л. Енковского**
Под редакцией **Нгуен Ван Хьеу**

МОСКВА АТОМИЗДАТ 1971

УДК 530.145.03:539.12

К. Хепп, А. Эпштейн. **Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля.** Перев. с англ. Под ред. Нгуен Ван Хьеу. М., Атомиздат, 1971.

Книгу составляют лекции, прочитанные авторами на летней школе по теоретической физике Брандейского университета в 1965 году: систематизированно изложена теория рассеяния, доказаны дисперсионные соотношения, изучены аналитические свойства четырехточечных функций.

Монография рассчитана на физиков-теоретиков, специализирующихся в области квантовой теории поля и теории элементарных частиц, студентов и аспирантов этих специальностей, а также математиков, интересующихся приложениями теории аналитических функций одной и многих комплексных переменных в квантовой теории поля.

Книга содержит 186 библиографических наименований и 16 рисунков.

2-3-2

Б.З. № 34 — 70—74

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В цикле работ, опубликованных примерно пятнадцать лет назад, Н. Н. Боголюбов впервые дал строгую формулировку основных принципов релятивистской локальной квантовой теории поля и тем самым предложил первую аксиоматику квантовой теории поля, которая получила дальнейшее развитие в ряде работ советских ученых [1—4]. Позже на основе весьма общих предположений своей аксиоматики он впервые дал строгое доказательство дисперсионных соотношений для πN-рассеяния при некоторых значениях передачи импульса [2]. Примерно в это же время Вайтман предложил другую аксиоматику квантовой теории поля. В отличие от аксиоматики Боголюбова, предполагающей существование S-матрицы и асимптотических полей, основным аппаратом аксиоматики Вайтмана являются вакуумные средние от произведения полевых операторов — функции Вайтмана [5, 6].

В последнее десятилетие методы теории дисперсионных соотношений нашли весьма широкое применение в изучении сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий адронов. Поэтому, естественно, возник вопрос: можно ли доказать дисперсионные соотношения в рамках аксиоматики Вайтмана? Положительный ответ на этот вопрос дал Хепп, основываясь на теории рассеяния Хаага—Рюэля. Его лекции по данной проблеме и составляют первую часть настоящего сборника.

Важный вклад в развитие теории дисперсионных соотношений внесла работа Лемана [7], в которой доказана аналитичность амплитуды бинарных процессов по передаче импульса. Несколько лет назад Брос, Эпштейн и Глазер (БЭГ) изучили аналитические свойства амплитуд бинарных процессов как функции двух переменных

s (квадрат полной энергии в с. ц. м) и t (передача импульса) в рамках аксиоматики Вайтмана и доказали аналитичность этих амплитуд в некоторой области. Эти результаты изложены в лекциях Эпштейна, которые составляют вторую часть сборника. В своих работах Брос, Эпштейн и Глазер применили геометрические методы нахождения областей голоморфности аналитических функций многих комплексных переменных и использовали свойства носителя запаздывающих функций — так называемые тождества Штейнмана, установленные им в рамках аксиоматики Вайтмана. Однако последние тождества также имеют место в аксиоматике Боголюбова, как это показал Тодоров, так что данное БЭГ доказательство аналитичности по s и t справедливо и в этой аксиоматике.

Предлагаемый вниманию читателей сборник переводов лекций Хеппа и Эпштейна (вместе с другими лекциями, прочитанными в летней школе в Брэндис, они были напечатаны в сборнике под названием «Аксиоматическая теория поля») представляют собой весьма ценную монографию по теории дисперсионных соотношений. Для понимания этих лекций у читателей предполагается знакомство с аксиоматикой Вайтмана (см. работы [5, 6]) и с данным Н. Н. Боголюбовым доказательством дисперсионных соотношений [1, 3].

Желающих познакомиться с дальнейшим развитием результатов БЭГ отсылаем к недавним работам Мартэна [8], Зоммера [9] и Бессиса и Глазера [10]. Читателям, интересующимся экспериментальными следствиями этих строго доказанных аналитических свойств амплитуды рассеяния, рекомендуем изучить работы [11—15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., Гостехиздат, 1957.
2. Bogolubov N. N., Parasiuk O. S. Acta Math., **97**, 227 (1957).
3. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
4. Медведев Б. В., Поливанов М. К. «Докл. АН СССР», **177**, 816 (1967). Лекции Международной школы теоретической физики. Т. I. Дубна, 1964, стр. 77.
5. Стритер Р. Ф., Вайтман А. С. РСТ, спин, статистика и все такое. Перев. с англ. М., «Наука», 1966.

6. Йост Р. Общая теория квантовых полей. М., «Мир», 1967.
7. Lehman H. Nuovo cimento, **10**, 579 (1958).
8. Martin A. Nuovo cimento, **42**, 930 (1966); **44**, 219 (1966).
9. Sommer G. Nuovo cimento, **48A**, 92 (1967); **52A**, 373 (1967).
10. Bessis J. D., Glaser V. Nuovo cimento, **50A**, 568 (1967).
11. Померанчук И. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **30**, 423 (1956).
12. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И. Т. «Успехи физ. наук», **88**, 51 (1966).
13. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу. Лекции на международной школе по физике высоких энергий. Попрадске Плесо, 1967.
14. Логунов А. А., Нгуен Ван Хьеу. Доклад на международном симпозиуме по теории элементарных частиц. Варна, 1968.
15. Loqunov A. A., Nguen Van Hieu. Report at the Topical Conference on Hadron Collisions. CERN, 1968.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Символы из теории множеств:
   $\in$ — принадлежит (множеству),
   $\notin$ — не принадлежит (множеству),
   $\subset$ — содержится в. . .,
   $\supset$ — содержит,
   $\not\supset$ — не содержит,
   $\complement$ — дополнение ($\complement A$ — дополнение множества A),
   $\exists$ — существует (-ют),
   $\forall$ — для каждого,
   ∂ — граница (подмножества топологического пространства),
   ϕ — пустое множество.
2. R^n — n-мерное вещественное векторное пространство,
   C^n — n-мерное комплексное векториое пространство.

Элементом пространства R^n является последовательность $x=\{x_1,\ldots, x_n\}$ n действительных чисел; элементом пространства C^n является последовательность $z=\{z_1,\ldots, z_n\}$ n комплексных чисел $z_j=x_j+\mathrm{i}y_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$.

Введем обозначения:

$$z=x+\mathrm{i}\,y,\ x=\{x_1, \ldots, x_n\}\in R^n;\ y=\{y_1, \ldots, y_n\}\in R^n,$$

$$\|z\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2=\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2.$$

Для $x\in R^n$ $\|x\|^2=\sum_j x_j^2$.

3. Если R^4 (соответственно C^4) рассматривать как вещественное (соответственно комплексное) пространство Минковского, его метрический тензор $g_{\mu\nu}$ определяется как $g_{00}=1=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}$; $g_{\mu\nu}=0$ при

$\mu \neq \nu$. Будем пользоваться обозначениями Вайтмана и Стритера *, в частности их ковариантными и контравариантными индексами.

V^+ — (открытый) конус будущего в действительном пространстве Минковского $V^+ = \{x \in R^4: (x, x) > 0, x^0 > 0\} = -V^-$, $\bar{V}^+$ — его дополнение.

Пусть A и B — подпространства векторного пространства E, тогда

$$-A = \{x \in E: -x \in E\};$$
$$A + B = \{x \in E: x = a + b, a \in A, b \in B\};$$
$$A - B = A + (-B).$$

Если R^{4n} (соответственно C^{4n}) рассматривать как топологическое произведение действительных (соответственно комплексных) пространств Минковского, взятых n раз, то используются обозначения

$$x \in R^{4n},\ x = \{x_1, \ldots, x_n\};\ x_j \in R^4,\ x_j = \{x_j^0, x_j^1, x_j^2, x_j^3\};$$
$$z \in C^{4n},\ z = \{z_1, \ldots, z_n\};\ z_j \in C^4,\ z_j = \{z_j^0, z_j^1, z_j^2, z_j^3\};$$
$$z = x + \mathrm{i}\, y,\ x \in R^{4n},\ y \in R^{4n} \text{ и т. д.};$$
$$V_n^+ = -V_n^- = (V^+)^n = \{x \in R^{4n}: x_j \in V^+,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

(n — точечный конус будущего);

$$\mathscr{T}_n^+ = -\mathscr{T}_n^- = R^{4n} + \mathrm{i}\, V_n^+$$

(n — точечная труба будущего);

$$\mathscr{T}_n' = \bigcup_{\Lambda \in L_+(C)} \Lambda \mathscr{T}_n^+$$

(n — точечная расширенная труба);
$L_+^\uparrow$ — связная вещественная группа Лорентца;
$L_+(C)$ — связная комплексная группа Лорентца;
Если $z \in C^{4n}$, то $\Lambda \in L_+(C)$ и $\Lambda z = \{\Lambda z_1, \Lambda z_2, \ldots, \Lambda z_n\}$.

4. C^∞ — бесконечно дифференцируемая.
Если Ω — открытое подмножество пространства R^n, то $\mathscr{E}(\Omega)$ — пространство C^∞-функций в Ω;
$\mathscr{E}'(\Omega)$, дуальное пространству $\mathscr{E}(\Omega)$, является пространством обобщенных функций с компактным носителем, содержащимся в Ω;

* См. [4] и [5] в статье Эпштейна.

$\mathscr{D}(\Omega)$ — пространство C^∞-функций с компактным носителем, содержащимся в Ω;

$\mathscr{D}'(\Omega)$, дуальное $\mathscr{D}(\Omega)$, — пространство обобщенных функций, определенных в Ω;

$\mathscr{S}(R^n)$ (или просто $\mathscr{S}$) — пространство C^∞-функций в R^n, быстро убывающих на бесконечности;

$\mathscr{S}'(R^n)$ (или просто $\mathscr{S}'$), дуальное пространству $\mathscr{S}(R^n)$, — пространство обобщенных функций умеренного роста в R^n *.

---

* См. также работу: Гельфанд И. М. и др. Обобщенные фуикции. Вып. I—IV. М., Физматгиз, 1958—1961. — *Прим. пер.*

К. Хепп

СВЯЗЬ МЕЖДУ КВАНТОВОЙ ТЕОРИЕЙ ПОЛЯ ЛЕМАНА — СИМАНЗИКА — ЦИММЕРМАННА И ВАЙТМАНА

ГЛАВА 1. ЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Изучение математической структуры релятивистской квантовой механики — независимо от того, находимся ли мы в локальной точке x-пространства или на массовой поверхности p-пространства, — несомненно, весьма полезно. Вайтмановская формулировка локальной квантовой теории поля является довольно многообещающей. С одной стороны, в ней используется достаточно мало общих предположений («аксиом») математически строгого характера, с другой — из нее получаются разумные с физической точки зрения следствия, и, быть может, она поможет лучшему пониманию лагранжева формализма квантовой теории поля, успешно применяемого к квантовой электродинамике.

После введения основных понятий квантовой теории поля и нерелятивистской теории рассеяния мы хотим построить целиком теорию рассеяния Хаага — Рюэля. Связь с формулировкой (ЛСЦ) Лемана — Симанзика — Циммерманна будет видна из асимптотического условия, редукционных формул и аналитических свойств двухчастичной амплитуды рассеяния. В гл. 2 разбирается теория локальных колец Хаага—Араки; гл. 7, 8 и 9 содержат анализ S-матрицы в квантовой теории поля.

Грубо говоря, квантовая теория поля является классической релятивистской теорией, рассматриваемой в рамках квантовой механики. Настоящая глава посвящена индуктивному описанию различных математических структур, возникающих в теории квантованных полей [1—3].

Квантовая механика

Квантовая механика в ее обычной форме строится в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{h}$ с положительно определенной метрикой. Сепарабельность пространства $\mathfrak{h}$, как оказывается, следует из других предположений теории.

Все время будем пользоваться картиной Гейзенберга. Физически реализуемым состояниям соответствуют единичные лучи в $\mathfrak{h}$. Наблюдаемые фигурируют в виде самосопряженных операторов, спектральные проекции которых описывают соответствующий опыт с ответом «да» или «нет».

Не требуется, чтобы физически реализуемые состояния были плотными во множестве всех единичных лучей в $\mathfrak{h}$; не требуется также, чтобы алгебра фон Неймана [4] всех наблюдаемых состояла из всех ограниченных операторов в $\mathfrak{h}$. Хотя у нас нет необходимости в определении, какой из векторов пространства $\mathfrak{h}$ физически точно реализуемый, следует помнить, что $\mathfrak{h}$ разлагается на прямую сумму когерентных пространств с плотным множеством физически реализуемых состояний*.

Симметрия — это взаимно однозначное отображение физически реализуемых состояний на себя, сохраняющее вероятности переходов. Согласно теореме Вигнера (см. работу [5]), оно всегда может быть представлено в виде набора унитарных и антиунитарных операторов, связывающих когерентные пространства в $\mathfrak{h}$. Компонента единицы топологической группы симметрии всегда может быть (при весьма слабых предположениях о непрерывности) реализована в каждом когерентном подпространстве $\mathfrak{h}$ в виде непрерывного унитарного представления группы G с точностью до мультипликативного множителя [см., например, для группы Галилея (3.12)].

Для важного случая представления компоненты единицы $iL_+^\uparrow$ неоднородной группы Лоренца с помощью лучей Вигнер и Баргманн [6, 7] показали, что допустимой заменой множителей можно получить непрерывное унитарное представление универсальной накрывающей группы $iSL(2, C)$ подгруппы $iL_+^\uparrow$. Однозначность и двузначность этих представлений для $iL_+^\uparrow$ приводит к хорошо известному в релятивистской теории правилу суперотбора [8].

---

* G. G. Wick, E. P. Wigner, A. S. Wightman. Phys. Rev., 88, 101 (1952); Стритер Р. Ф., Вайтман А. С. [2], гл. I. — *Прим. ред.*

Абелева группа трансляций является инвариантной подгруппой группы $iSL(2, C)$. Согласно теореме СНАГ *, непрерывные унитарные представления $U(a, 1)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве имеют вид [8]

$$U(a, 1) = \int e^{i(p, a)}\, dE(p), \tag{1.1}$$

где мера $dE(p)$ — проекционный оператор в $\mathfrak{H}$ и p пробегает $L_+^\uparrow$-инвариантную область в R^4. Используем обозначение $(p, a) = p^0 a^0 - (\mathbf{pa})$. Инфинитезимальные генераторы

$$P^\mu = \int p^\mu dE(p) \tag{1.2}$$

являются наблюдаемыми полной энергии — импульса. В разумной с физической точки зрения теории энергия должна быть ограничена снизу, что вследствие лоренц-инвариантности ограничивает меру $dE(p)$ замыканием будущего светового конуса

$$V_+ = \{p : p^0 > 0,\ (p, p) > 0\}. \tag{1.3}$$

Чтобы избежать трудности, возникающие в теориях с частицами с нулевыми массами, сделаем следующее более узкое квантовомеханическое предположение.

Аксиома I. Состояния описываются единичными лучами в гильбертовом пространстве и преобразуются по непрерывному унитарному представлению $(a, \Lambda) \to U(a, \Lambda)$ и группы $iSL(2, C)$. Если не считать одномерное собственное пространство с энергией — импульсом, равным 0, натянутым на вакуум Ω, то спектр оператора энергии — импульса P^μ лежит в $\overline{V}_+^m = \{p \in V_+, (p, p) \geqslant m^2\}$ для некоторого $m > 0$.

Ясно, что конкретная теория ограничена более детальным описанием спектра оператора P^μ. Многочастичный спектр обсуждается в гл. 5.

Теория поля

Классическое релятивистское поле $T_\alpha(x)$ является решением системы уравнений в частных производных, ковариантных относительно группы симметрии $iL_+^\uparrow$ специальной теории относительности. В преобразовании

$$\hat{x} = \Lambda x + a,\ (a, \Lambda) \in iL_+^\uparrow, \tag{1.4}$$

---

* Теорема Стоуна — Наймарка — Амброза — Годемана.— *Прим. ред.*

$T_\alpha(x)$ преобразуется по конечномерному представлению $\Lambda \to S(\Lambda)$ группы $L_+^\uparrow$:

$$\widehat{T}_\alpha(\widehat{x}) = \sum_\beta S(\Lambda)_{\alpha\beta} T_\beta(x). \quad (1.5)$$

Конечномерные непрерывные представления накрывающей группы $SL(2, C)$ группы $L_+^\uparrow$ полностью приводимы. Каждое неприводимое представление эквивалентно некоторому $D^{[r, s]}$, r, $s = 0$, $\frac{1}{2}$, $1, \ldots$, реализуемому следующим образом [9]:

$$\xi'_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r}\dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_{2s}} = \sum \prod_{i=1}^{2r} A_{\alpha_i \nu_i} \prod_{j=1}^{2s} \overline{A}_{\dot{\beta}_j \dot{\delta}_j} \xi_{\nu_1, \ldots, \nu_{2r}\dot{\delta}_1, \ldots, \dot{\delta}_{2s}}, \quad (1.6)$$

где $A \in SL(2, C)$, а ξ полностью симметричны по индексам, помеченным точкой и без точки. Все неприводимые матричные представления группы $L_+^\uparrow$ эквивалентны $S(\Lambda) = D^{[r,s]}(A)$. [Здесь мы вполне можем $\Lambda = \Lambda(A) \in L_+^\uparrow$ обозначить $A \in SL(2, C)$.]

В формулировке квантовой механики фон Неймана нам приходится выражать наблюдаемые поля через самосопряженные линейные операторные поля в $\mathfrak{H}$ таким образом, чтобы для плотного множества состояний ψ среднее значение $(\psi, T_\alpha(x)\psi)$ вело себя как классическое поле. Можно показать [10], а также явно проверить для свободных полей (см. Упражнение 1), что нельзя построить нетривиальные ковариантные квантовые поля, которые были бы определены в отдельных точках. Это обстоятельство вынуждает нас рассматривать полевые операторы $T_\alpha(x)$ как обобщенные функции, для которых пространственно-временные усреднения

$$T_\alpha(\varphi) = \int dx \varphi(x) T_\alpha(x) \quad (1.7)$$

по соответствующим основным функциям являются наблюдаемыми, что исторически связано со знаменитыми исследованиями Бора и Розенфельда [11, 12].

Обобщенные функции

Выбрав различные линейные пространства для основных функций, получим различные типы обобщенных функций [13]. Конечно, природа не подсказывает, в каком из пространств обобщенных функций мы должны строить квантовую теорию поля. Нужна гибкость при выборе технических допущений, так как динамика в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных часто определяет естественное пространство основных функций. Нерелятивистская квантовая механика эффективно использует преобразование Фурье в качестве изоморфизма между x- и p-пространствами. Пространство основных функций, инвариантное относительно преобразования Фурье и допускающее локализацию в x- и p-пространствах, является пространством S-функций Шварца [14, 15].

Пусть $x=(x_1,\ldots, x_n)\in R^n$ и $r=(r_1,\ldots, r_n)\in Z_+^n$ ($Z_+=\{r\}$), где r — целое число $\geqslant 0$. Обозначим

$$x^r \equiv x_1^{r_1}, \ldots, x_n^{r_n},\ D^r \equiv \frac{\partial^{r_1}}{\partial x_n^{r_1}}, \ldots, \frac{\partial^{r_n}}{\partial x_n^{r_n}}, \qquad (1.8)$$

$$\|x\| \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},\ |r| = \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Для любого n $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_m(R^n)$ является пространством m раз непрерывно дифференцируемых функций φ на R^n, для которых

$$\|\varphi\|_m = \sup_{\substack{|k|<m\\ x\in R^n}} (1+\|x\|)^m |D^k\varphi(x)| < \infty. \qquad (1.9)$$

Можно показать, что $\|\ldots\|_m$ — норма, а $\mathcal{S}_m$ — банахово пространство.

$\mathcal{S} = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \mathcal{S}_m$ состоит из всех комплексных бесконечно дифференцируемых функций φ, которые вместе со своими производными убывают на бесконечности быстрее любой степени $\|x\|^{-1}$ (например, $\exp\{-\|x\|^2\}$). Носитель функции φ, $\operatorname{supp}\varphi$, наименьшее замкнутое множество в R^n, вне которого φ тождественно равна нулю.

$\mathcal{S}$ является топологическим векторным пространством со счетным базисом выпуклых уравновешенных и поглощающих окрестностей нуля [14] *:

$$N_{k,l}(0) = \left\{\varphi\in\mathcal{S} : \|\varphi\|_k < \frac{1}{l}\right\},\ k,\ l = 1,\ 2, \ldots \qquad (1.10)$$

* См. также кн. Иосида К. Функциональный анализ. Перев. с англ. М., «Мир», 1967, стр. 42. — *Прим. ред.*

Последовательность $\varphi_\nu \in \mathcal{S}$ сходится к $\varphi \in \mathcal{S}$, если для всех $m \in Z_+$

$$\lim_{\nu \to \infty} \| \varphi_\nu - \varphi \|_m = 0. \tag{1.11}$$

Множество $B \subset \mathcal{S}$ ограничено, если существует последовательность $\{c_m\} \subset Z_+$, такая, что

$$\sup_{\varphi \in B} \| \varphi \|_m \leqslant c_m \text{ для всех } m. \tag{1.12}$$

Локально выпуклое топологическое линейное пространство является полным, метризуемым, монтелевым и, следовательно, сепарабельным (т. е. имеет счетное плотное подмножество) [16]. Обобщенная функция умеренного роста $T \in \mathcal{S}'$ — это непрерывный линейный функционал на $\mathcal{S}$, т. е. отображение

$$\varphi \to T(\varphi) = \int dx \varphi(x) T(x) \in C = (\text{комплексное число}), \tag{1.13}$$

где

$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi) \text{ для всех } \varphi, \psi \in \mathcal{S} \text{ и } z, b \in C \text{ и}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} | T(\varphi_\nu) - T(\varphi) | = 0, \tag{1.14}$$

если

$$\lim_{\nu \to \infty} \| \varphi_\nu - \varphi \|_m = 0 \text{ для всех } m \in Z_+.$$

Сильная топология в S' определяется несчетным множеством полунорм [15]:

$$p_B(T) = \sup_{\varphi \in B} | T(\varphi) |, \; B \text{ ограничено в } \mathcal{S}. \tag{1.15}$$

Последовательность $T_\nu \in \mathcal{S}'$ сильно сходится к нулю, если $T_\nu(\varphi)$ стремится к нулю равномерно на ограниченных множествах $B \subset \mathcal{S}$. Можно показать[14], что любая слабо сходимая последовательность $T_\nu \in \mathcal{S}'$ (т. е. такая последовательность, для которой $T_\nu(\varphi)$ сходится для всех $\varphi \in \mathcal{S}$) сходится также в сильной топологии в $\mathcal{S}'$.

Пространство $\mathcal{S}'$ также локально выпуклое и полное. $\mathcal{S}$ является сильно дуальным к $\mathcal{S}'$, т. е. $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ рефлективны.

Глобально каждая обобщенная функция умеренного роста имеет конечный порядок [14]: для любого $T \in \mathcal{S}$ существуют такие $c < \infty$ и $m \in Z_+$, что

$$| T(\varphi) | \leqslant c \; \| \varphi \|_m \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{S}_m. \tag{1.16}$$

Если определить обобщенную производную в $\mathscr{S}$ с помощью непрерывного линейного отображения $T \to D^m T$, где

$$(D^m T)(\varphi) \equiv (-1)^{|m|} T(D^m \varphi), \tag{1.17}$$

то из (1.16) следует, что все $T \in \mathscr{S}'$ могут быть записаны в виде

$$T(x) = (1 + \|x\|^2)^{m/2} D^u \tau(x), \tag{1.18}$$

где m, $u \in Z_+$, а $\tau(x)$ — непрерывная ограниченная функция на R^n «Формула интегрирования по частям» (1.17) для дифференцируемых функций умеренного роста сводится к обычному дифференцированию и обеспечивает для обобщенной функции умеренного роста в $\mathscr{S}'$ бесконечную дифференцируемость независимо от порядка частных производных.

Преобразование Фурье $\mathscr{F}$, $\varphi \in \mathscr{S}(R^n) \to \tilde{\varphi} = \mathscr{F}\varphi$, где

$$\tilde{\varphi}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int dx\, e^{ipx} \varphi(x), \tag{1.19}$$

определяет топологический изоморфизм $\mathscr{S}(R^n)$, обладающий свойствами:

$$D^m (\mathscr{F}\varphi)(p) = (2\pi)^{-n/2} \int dx\, e^{ipx} (ix)^m \varphi(x);$$

$$(-ip)^m (\mathscr{F}\varphi)(p) = (2\pi)^{-n/2} \int dx\, e^{ipx} D^m \varphi(x). \tag{1.20}$$

Преобразование Фурье расширяется на $\mathscr{S}'(R^n)$ при дуальном отображении

$$(\mathscr{F}T)(\varphi) = T(\mathscr{F}\varphi). \tag{1.21}$$

Топологический изоморфизм $\mathscr{F}, \mathscr{S}'(R^n) \to \mathscr{S}'(R^n)$, с помощью формулы Планшереля сводится к обычному преобразованию Фурье на $L^2(R^n) \subset \mathscr{S}'(R^n)$.

Согласно (1.18), пространство $\mathscr{S}'(R^n)$ является пространством обобщенных функций, которые не слишком сингулярны (ни локально, ни на бесконечности). Для локальной квантовой теории поля, сформулированной в $\mathscr{S}'$, что приведет к дисперсионным соотношениям с конечным числом вычитаний для двухчастичной амплитуды рассеяния (см. гл. 9).

Перенормируемую теорию возмущений также можно построить естественным образом в $\mathscr{S}'$. Это очевидно для фейнмановского пропагатора

$$\Delta\ (p) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P(p)[(p, p) - m^2 + i\varepsilon]^{-1},$$

который можно представить [17] в виде суммы элементов из $\theta_M(R^4)$ и $\theta'_c(R^4)$. Здесь θ_M — пространство всех функций, которые вместе со всеми своими производными полиномиально ограничены [14]; $\theta'_c = \mathcal{F}\theta_M$ — пространство быстро убывающих обобщенных функций [14].

При перенормировке [18] диаграмм Фейнмана $\prod_e \Delta_e^F(x_r - x_s)$ сначала используется регуляризация Паули — Виллара, для того чтобы произведение обобщенных функций было полностью определено. Затем строятся контрчлены, допустимые модификациями лагранжиана, так что разность имеет предел в $\mathcal{S}'$, когда регуляризующая масса стремится к бесконечности [19]. В этих рамках сформулируем следующие постулаты, касающиеся аналитической структуры квантовой теории поля.

Аксиома II. Для каждой основной функции $\varphi \in \mathcal{S}(R^4)$ существует конечное и счетное семейство операторов $A_\alpha^k(\varphi)$ и $A_\alpha^{k*}(\varphi)$. Они определены в общей плотной области $D \subset \mathfrak{h}$, которая инвариантна

$$U(a, \Lambda)\, D \subset D, \quad A_\alpha^k(\varphi)\, D \subset D, \quad A_\alpha^{k*}(\varphi)\, D \subset D \tag{1.22}$$

и содержит Ω. Для всех Φ, $\psi \in D$ отображение

$$\varphi \to (\Phi, A_\alpha^k(\varphi)\psi) = (A_\alpha^{k*}(\bar{\varphi})\Phi, \psi) \tag{1.23}$$

является обобщенной функцией умеренного роста в $\mathcal{S}'(R^4)$.

Пример свободного бозонного поля показывает, что полевые операторы, вообще говоря, неограничены в $\mathfrak{h}$. В силу аксиомы II * -алгебра $\mathfrak{B}_0$*, порождаемая всеми

---

* Алгеброй на поле комплексных чисел, или комплексной алгеброй, называется всякое множество B элементов a, $b, \ldots$, на котором определены следующие операции:

1. Сложение (коммутативное), сопоставляющее каждой паре элементов (a, b) элемент $a+b$ (сумма);

2. Умножение (не обязательно коммутативное), сопоставляющее каждой паре элементов (a, b) элемент ab (произведение);

3. Умножение на скаляр λ, сопоставляющее каждому элементу a и комплексному числу λ элемент λa, причем имеют место обычные законы ассоциативности и дистрибутивности.

*-Алгеброй или алгеброй с инволюцией называется всякая алгебра (комплексная или вещественная), в которой существует операция сопряжения $x \longrightarrow x^+$, удовлетворяющая условиям:

$$(x^+)^+ = (x), \quad (x+y)^+ = x^+ + y^+,$$
$$(xy)^+ = y^+x^+, \quad (\lambda x)^+ = \bar{\lambda} x^+,$$

где $\bar{\lambda}$ — комплексно сопряженное λ. — *Прим. ред.*

$A^k_\alpha(\varphi)$, $A^{k*}_\alpha(\varphi)$, $\varphi\in\mathscr{S}(R^4)$, полностью определена на D и $D\subset\mathfrak{P}_0\Omega$. Мы не будем постулировать существенную самосопряженность* наблюдаемых полей на D (см. гл. 2), так как асимптотические наблюдаемые уже определены однозначно полем на D.

Лоренц-ковариантность выражается тождеством для обобщенных функций, которое имеет место на D.

Аксиома III.

$$U(a,\ \Lambda)A^k_\alpha(x)U(a,\Lambda)^{-1}=\sum_\beta S^k(\Lambda^{-1})_{\alpha\beta}A^k_\beta(\Lambda x+a), \quad (1.24)$$

где $\Lambda\to S^k(\Lambda)$ — некоторое конечномерное представление группы $SL(2,\ C)$, которое можно считать неприводимым и имеющим вид $D^{[r,\ s]}$.

Рассматривая фермионы с полуцелым $r+s$, мы тем самым допускаем ненаблюдаемые поля. Согласно принципам квантовой механики, наблюдаемые поля, проинтегрированные по основным функциям с пространственно-подобным носителем, должны коммутировать друг с другом. Это исключает возможность интерференций локальных измерений в областях, которые не могут быть связаны световыми сигналами. Новые исследования Борхерса [20] частично исключают «аномальную статистику» для ненаблюдаемых полей. Локальность мы постулируем следующим образом.

Аксиома IV. Для всех φ, $\varphi'\in\mathscr{S}(R^4)$ с носителями, пространственно-подобными относительно друг друга,

$$[A^k_\alpha(\varphi),\ A^{k'}_{\alpha'}(\varphi')]_\pm D=0,\quad [A^{k*}_\alpha(\varphi),\ A^{k'}_{\alpha'}(\varphi')]_\pm D=0. \quad (1.25)$$

Знак $\pm$ при коммутаторе определяется теоремой о связи между спином и статистикой (см. работы [2, 3]): с точностью до унитарной эквивалентности всегда можно предполагать антикоммутаторы для ферми-полей и коммутаторы для бозе-полей.

Наконец, нужно предположить полноту для полевого описания теории. Можно было бы постулировать, что $\mathfrak{P}_0$ — неприводимая операторная алгебра в $\mathfrak{H}$, т. е. что $B=\beta 1$ при условии, что ограниченный оператор B удовлетворяет условию

$$(\Phi,\ BA\psi)=(A^*\Phi,\ B\psi)$$

для всех $A\in\mathfrak{P}_0$. Использовав аксиомы I—III, Рюэль показал [21], что это следует из более удобного предположения.

* См. определение в гл. 2. — *Прим. ред.*

Аксиома V. Вакуум Ω цикличен по отношению к $\mathfrak{P}_0$, т. е. $D_0=\mathfrak{P}_0\Omega$ плотно в $\mathfrak{h}$.

Вот и все, что касается «конституции» общей квантовой теории поля.

ГЛАВА 2. ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА

Привлекательным и весьма важным достоинством квантовой теории поля является тот факт, что содержание аксиом Вайтмана может быть полностью выражено через свойства вакуумных средних произведений полевых операторов

$$\mathfrak{M}^{k_1, \ldots, k_n}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \left(\Omega,\ A^{k_1}_{\alpha_1}(\varphi_1), \ldots, A^{k_n}_{\alpha_n}(\varphi_n)\,\Omega\right). \qquad (2.1)$$

Полезно ввести понятие векторной обобщенной функции умеренного роста, [15, 22]. Предположим, что E — линейное пространство с топологией, определенной множеством полунорм $\{p_\alpha\}$. Пусть для любого $n\in Z_+$ *

$$S'(R^n;\ E) = \mathscr{L}(\mathscr{S}(R^n);\ E) \qquad (2.2)$$

является пространством непрерывных линейных отображений $\mathscr{S}(R^n)$ на E, т. е. обобщенных функций умеренного роста со значениями из E. Топология на $\mathscr{S}'(R^n;\ E)$ определяется следующим образом: пусть $B\subset\mathscr{S}(R^n)$ ограниченно и p_α — полунорма на E, тогда

$$q_\alpha,\ B(T) = \sup_{\varphi\in B} p_\alpha(T(\varphi)) \qquad (2.3)$$

одна из полунорм для топологии на $\mathscr{S}'(R^n;E)$. Из полноты E следует это же свойство для $\mathscr{S}'(R^n;\ E)$. Важное место занимает «теорема о ядре» Шварца [15]. Для любого m, $n\in Z_+$ $\mathscr{L}(\mathscr{S}(R^m), \mathscr{S}'(R^n))$ и $\mathscr{S}'(R^{m+n})$ топологически изоморфны.

Например, функционал $\mathfrak{M}^{k_1, \ldots, k_n}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ полилинеен на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in\mathscr{S}(R^4)$ и непрерывен относительно любого $\varphi_i (1\leqslant i\leqslant n)$ при остальных фиксированных φ_j. Поэтому, согласно теореме о ядре, формула (2.1) определяет единственную обобщениую функцию умеренного роста

$$\mathfrak{M}^{k_1, \ldots, k_n}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n)\in\mathscr{S}'(R^{4n}),$$

---

* Здесь Z_+ — множество положительных целых чнсел. — *Прим. ред.*

значение которой при основной функции

$$(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n)(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n) \in \mathscr{S}(R^{4n})$$

совпадает с (2.1).

Упростим наши обозначения, ограничившись рассмотрением только нейтрального скалярного поля $A(x)$. Теорема о ядре позволяет определить функционал [21, 23]

$$\Phi : \varphi \in \mathscr{S}(R^{4n}) \to \Phi(\varphi),$$

$$\Phi(\varphi) = \int dx_1 \ldots dx_n \varphi(x_1 \ldots x_n) A(x_1), \ldots, A(x_n)\Omega \quad (2.4)$$

как векторную обобщенную функцию умеренного роста на $\mathscr{S}'(R^{4n}; \mathfrak{H})$, так как пространство $\mathscr{S}(R^4)\otimes^n$, плотно на $S(R^{4n})$, а функционал $\Phi(\varphi)$ определен при $\varphi=\varphi_1\otimes, \ldots, \otimes\varphi_n$, ввиду того что пространство $\mathfrak{H}$ полно и квадрат нормы является вакуумным средним. Обозначим $\mathfrak{P}$ *-алгебру всех конечных сумм операторов

$$\int dx_1 \ldots dx_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) A(x_1), \ldots, A(x_n), \varphi \in \mathscr{S}(R^{4n}), n \in Z_+$$

и $D=\mathfrak{P}\Omega$. $D \supset D_0$ плотно в $\mathfrak{H}$, а также инвариантно и является естественной областью для изучения полей. Пусть D — область Гординга [24] для представления $U(a, \Lambda)$. Она инвариантна относительно произвольных полиномов от инфинитезимальных операторов P^μ и $M^{\rho\sigma}$ представления $U(a, \Lambda)$. Это следствие тождества

$$U(a, \Lambda)\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi_{(a, \Lambda)}), \quad (2.5)$$

где отображение $\varphi \to \varphi_{(a, \Lambda)}$ с

$$\varphi_{(a, \Lambda)}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(\Lambda^{-1}(x_1 - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_n - a)) \quad (2.6)$$

принадлежит классу C^∞ на $\mathscr{S}(R^{4n})$ в любой локальной системе координат в окрестности единичного элемента группы $i\mathscr{S}L(2, C)$. Поэтому последовательность $(i\tau)^{-1}[U(G(\tau))-1]\Phi(\varphi)$ сходится в $\mathfrak{H}$ для любой однопараметрической подгруппы $G(\tau)$ группы $iSL(2, C)$ и предел также лежит в области D. Например:

$$P^\mu \Phi(\varphi) = \int dp_1, \ldots, dp_n \sum_{i=1}^{n} p_i^\mu \tilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_n) \times$$

$$\times \tilde{A}(-p_1), \ldots, \tilde{A}(-p_n)\Omega. \quad (2.7)$$

Ниже мы найдем важное применение оператора трансляций к матричным элементам $(\Phi, U(a, 1)\, E_0^\perp \psi)$, где

$\Phi\psi\in D$, а $E_0^{\perp}$ — проекционный оператор на ортогональном дополнении Ω. Использовав теорему СНАГ и спектральное условие, получим

$$(\Phi,\ U(a,\ 1)\,E_0^{\perp}\psi)=\int\limits_{\bar{V}_+^m} e^{i(p,\,a)}(\Phi,\ dE(p)\,\psi). \tag{2.8}$$

Ввиду лоренц-инвариантности меры

$$\chi\to\int\limits_{\bar{V}_+^m}\chi(p)(\Phi,\ dE(p)\,\psi),$$

имеет место

$$\int\chi(p)\,e^{i(p,\,a)}(\Phi,\ dE(p)\,\psi)=\int\chi(p)(\Phi,\ dE(p)\,U(a,\ 1)\,\psi);$$

$$\int\chi(\Lambda p)(\Phi,\ dE(p)\,\psi)=\int\chi(p)(U(\Lambda^{-1})\,\Phi,\ dE(p)\,U(\Lambda^{-1})\,\psi). \tag{2.9}$$

Дифференцируя по параметрам группы $iL_+^{\uparrow}$, можно показать [25], что $(\Phi,\ dE(p)E_0^{\perp}\psi)$ принадлежит классу C^∞ вдоль гиперболоидов $\{(p,\ p)=\mu^2\}$ и вместе со своими касательными производными убывает быстрее любой степени $\|p\|^{-1}$ при $\|p\|\to\infty$. В частности, для произвольного полинома $Q(p)$, $p\in R^4$ и любой ограниченной непрерывной функции $\chi(p)$ имеем

$$\Bigl|\int\limits_{\bar{V}_+^m}\chi(p)\,Q(p)(\Phi,\ dE(p)\,\psi)\Bigr|=\Bigl|\int\limits_{\bar{V}_+^m}\chi(p)(\Phi,\ dE(p)\,Q(P)\,\psi)\Bigr|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\bar{V}_+^m}|\chi(p)|\,\|\Phi\|\,\|Q(P)\,\psi\|. \tag{2.10}$$

Квантовая теория поля полностью характеризуется своими вакуумными средними. Вайтман показал [26], что последовательность $\{\mathfrak{M}_n\in\mathscr{S}'(R^{4n})$ обобщенных функций умеренного роста, удовлетворяющих определенным условиям (линейным: лоренц-инвариантность, локальность, эрмитовость, спектральное условие; и нелинейным: положительная определенность, единственность вакуума), с точностью до унитарной эквивалентности определяет нейтральное скалярное поле $A(x)$, удовлетворяющее аксиомам I—V в сепарабельном гильбертовом пространстве, причем для этого поля

$$(\Omega,\ A(x_1),\ \ldots,\ A(x_n)\,\Omega)=\mathfrak{M}_n(x_1,\ \ldots,\ x_n). \tag{2.11}$$

Доказательство можно найти в работах [2, 3]. Приводимое ниже упражнение содержит интересный тривиальный пример локальной квантовой теории поля; оно окажется полезным при рассмотрении релятивистской теории рассеяния.

Упражнение 1. Изучить представление Фока [27] для операторов рождения и уничтожения свободных частиц с массами $m>0$ и спинами $s=0$, $\frac{1}{2}$,... в спинорном базисе [28, 29]:

$$[a(\mathrm{p})_\alpha, a(\mathrm{q})^*_{\dot\beta}]_{(-1)^{2s+1}} = [b(\mathrm{q})_{\dot\beta}, b(\mathrm{p})^*_\alpha]_{(-1)^{2s+1}} =$$

$$= D^s_{\alpha\dot\beta}\left(\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{m}\right) 2\sqrt{\mathrm{p}^2 + m^2}\,\delta(\mathrm{p}-\mathrm{q}), \tag{2.12}$$

где σ_μ — матрицы Паули и $D^s = D^{[s,0]}$. Остальные $(-1)^{2s+1}$ коммутаторов должны обращаться в нуль и $a(\mathrm{p})_\alpha$, $b(\mathrm{p})_{\dot\beta}$ должны преобразоваться как тензорные операторы относительно группы $iSL(2, C)$:

$$U(a, \Lambda)\,a(\mathrm{p})_\alpha U(a, \Lambda)^{-1} = e^{-i(\Lambda p, a)}\sum_\gamma D^s_{\alpha\gamma}(\Lambda^{-1})\,a(\Lambda\mathrm{p})_\gamma;$$

$$U(a, \Lambda)\,b(\mathrm{p})_{\dot\beta} U(a, \Lambda)^{-1} = e^{-i(\Lambda p, a)}\sum_{\dot\delta} D^s_{\dot\beta\dot\delta}(\Lambda^{-1})\,b(\Lambda\mathrm{p})_{\dot\delta}. \tag{2.13}$$

Показать, что

$$A_0(x)_\alpha = (2\pi)^{-3/2}\int dp\,\delta((p, p) - m^2)\,\theta(p^0)\,[a(\mathrm{p})_\alpha e^{-i(p, x)} +$$

$$+ b^*(\mathrm{p})_\alpha e^{i(p, x)}] \tag{2.14}$$

и что $A_0^*(x)_{\dot\beta}$ удовлетворяют аксиомам Вайтмана, а также вычислить их вакуумные средние. Что происходит в формуле (2.12) при «неправильной статистике» [30]? Показать, что $A_0(\varphi)$ и $A_0^*(\varphi)$ ограниченные операторы для фермионов и, вообще говоря, неограниченные — для бозонов.

Введение вакуумных средних заменяет рассмотрение векторных обобщенных функций в гильбертовом пространстве изучением структуры последовательности обобщенных функций умеренного роста. Результаты квантовой теории поля, такие, как связь между спином и статистикой, эквивалентность между слабой локальностью и TCP-инвариантностью, глобальная природа локальной коммутативности, классы эквивалентности локальных полей и теорема Хаага, были получены при использовании вакуумных средних как граничных значений лоренц-ковариантных аналитических функций в комплексном пространстве Минковского. Здесь мы не будем воспроизводить эти классические результаты — они великолепно изложены в книгах Стритера и Вайтмана [2] и Йоста [3]. Однако мы продемонстрируем технику применения функций Вайтмана, а также методы функционального анализа, чтобы затем построить теорию локальных колец Хаага—Араки [31, 32] из (непустого) класса теорий поля Вайтмана.

Сначала напомним некоторые определения из теории линейных операторов в гильбертовом пространстве (см. [8, 33]). Пусть A — линейный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$ с областью $\Delta(A)$, плотной в $\mathfrak{H}$.

Для всех $\psi, \psi^* \in \mathfrak{H}$ с $(\psi, A\Phi) = (\psi^*, \Phi)$ для всех $\Phi \in \Delta(A)$ существует единственный линейный оператор A^* с $\psi \in \Delta(A^*)$ и $A^*\psi = \psi^*$, сопряженный A. Оператор A называется самосопряженным, если $A^* = A$. Если A симметричен, то

$$A^*\Phi = A\Phi \text{ для всех } \Phi \in \Delta(A), \tag{2.15}$$

однако в общем случае $\Delta(A^*) \supset \Delta(A)$. Оператор A замкнут, если для всех последовательностей $\psi_n \in \Delta(A)$ с $\lim \psi_n = \psi \in \mathfrak{H}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A\,\psi_n = \psi' \in \mathfrak{H}$ имеет место

$$\psi \in \Delta(A) \text{ и } A\psi = \psi'. \tag{2.16}$$

Замыкание $\bar{A}$ оператора A существует, и $\bar{A} = A^{**}$, если $\Delta(A^*)$ также плотно в H. A называется существенно самосопряженным, если $A^{**} = A^*$.

Какова же ситуация для нейтрального скалярного поля $A(x)$? Для $\varphi = \bar{\varphi} \in \mathscr{S}(R^4)$* $A(\varphi)$ симметричен на D и $\Delta(A(\varphi)^*) \supset D$. Поэтому замыкание $\overline{A(\varphi)} = A(\varphi)^{**}$ существует. Если $\operatorname{supp}\varphi$ пространственноподобен относительно $\operatorname{supp}\psi$, то на D имеет место $[A(\varphi), A(\psi)]_- = 0$.

Если бы мы могли доказать, что $A(\varphi)$ существенно самосопряжены на D для $\varphi = \bar{\varphi} \in \mathscr{D}(R^4)$, ($\mathscr{D}(R^4)$) — подмножество [34] всех $\varphi \in \mathscr{S}(R^4)$ с $\operatorname{supp}\varphi$, ограниченным в R^4, и что они имеют коммутирующие спектральные проекционные операторы $E(\lambda, \varphi)$ и $E(\mu, \psi)$, где

$$A(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\varphi, \lambda) \tag{2.17}$$

для всех $\operatorname{supp}\varphi$ и $\operatorname{supp}\psi$ пространственноподобных, то спектральные проекционные операторы $\{E(\lambda, \varphi): -\infty < \lambda < +\infty,\ \varphi \in \mathscr{D}(G)\}$ генерировали бы теорию локальных колец Хаага — Араки $R(G)$ с

$$R(G_1) \subset R(G_2)', \text{ если } G_1 \text{ пространственноподобно } G_2. \tag{2.18}$$

---

* Отметим, что $\bar{\varphi}$ — комплексно сопряженное φ, а $\bar{A}$ — замыкание A. — *Прим. ред.*

(Для $G \subset R^4$ причинное дополнение G' является множеством $\{y:(y-x, y-x)<0$ для всех $x \in G\}$. Его следует отличать от коммутанта [4] $R(G')$ алгебры Неймана $R(G)$, т. е. набора ограниченных операторов B с $[B, A]=0$ для всех $A \in R(G)$.

При изучении неограниченных операторов в гильбертовом пространстве можно натолкнуться на разные трудности. Нельсон [35] предложил пример двух симметричных операторов A и B с общей плотной, инвариантной областью Δ. Дальше, сумма $aA+bB$ является самосопряженной в Δ для всех действительных a и b, и $[A, B]=0$ в Δ, однако спектральные проекционные операторы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ не коммутируют.

Борхерс и Циммерманн [36] показали, что эти трудности не могут возникнуть в квантовой теории поля, если наложить ограничение на рост вакуумных средних с увеличением числа аргументов. Приведем здесь соображения этих авторов. Будем опираться на теорему Нельсона [35] об аналитических векторах. Пусть A — линейный оператор в $\mathfrak{h}$. Вектор $\Phi \in \mathfrak{h}$ считается аналитическим по отношению к A, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| A^n \Phi \|}{n!} s^n < \infty \tag{2.19}$$

для некоторого $s>0$. Нельсон показал, что если симметричный оператор A с $\Delta(A)$, плотным в $\mathfrak{h}$, имеет плотное подмножество $\Delta_0(A) \subset \Delta(A)$ аналитических векторов для A, то A является существенно самосопряженным на $\Delta(A)$.

Будем постулировать, что для любого действительного $\varphi \in \mathscr{D}(R^4)$ вакуум Ω аналитичный вектор для $A(\varphi)$. Как можно показать, необходимым и достаточным условием для этого является существование для любой функции $\varphi=\bar{\varphi} \in \mathscr{D}(R^4)$ константы $a(\varphi)<\infty$, такой, чтобы выполнялось условие ($<\ldots>_0$ означает вакуумное среднее)

$$|<A(\varphi)^n>_0| \leqslant n! \; a(\varphi)^n. \tag{2.20}$$

В случае свободного поля имеем (см. Упражнение 1) $<A(\varphi)^n>_0=0$ для $n \equiv 1$ (2) и

$$<A(\varphi)^{2n}>_0 \leqslant a(\varphi)^n \frac{(2n)!}{n!} \tag{2.21}$$

для остальных случаев.

Теорема 2.1. Если поле Вайтмана $A(x)$ удовлетворяет условию (2.20), то $A(\varphi)$ является существенно самосопряженным в D для всех $\varphi=\bar{\varphi}\in\mathscr{D}(R^4)$.

Доказательство. Пусть $F=\operatorname{supp}\varphi$ и $G\neq\Phi$ — открытое множество в F' и $D(G)$ — множество всех $\Phi(\varphi)$ с $\psi=\{\psi_n\}\in\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{D}(G^{\times n})$ [16]. Покажем, что $D(G)$ аналитично для $A(\varphi)$.

При доказательстве используем свойство локальности. Для φ, $\psi\in\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{D}(G^{\times n})$ введем обозначение

$$(\varphi\otimes\psi)_n=\sum_{m=0}^{n}\varphi_m\otimes\psi_{n-m} \text{ и } (\varphi^*)_n(x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=\bar{\varphi}_n(x_n,\ldots,x_1).$$

Тогда

$$\|A^n(\varphi)\Phi(\psi)\|^2=(A(\varphi)^{2n}\Omega,\ \Phi(\psi^*\otimes\psi)\leqslant$$
$$\leqslant\langle A(\varphi)^{4n}\rangle_0^{1/2}\|\Phi(\psi^*\otimes\psi)\|\leqslant\sqrt{(4n)!}\,a(\varphi)^{2n}\|\Phi(\psi^*\otimes\psi)\|. \tag{2.22}$$

Поэтому степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(N!)^{-1}\|A(\varphi)^n\Phi(\psi)\|s^n\leqslant$$
$$\leqslant\|\Phi(\psi^*\otimes\psi)\|^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(4n)!]^{1/4}}{n!}a(\varphi)^n s^n \tag{2.23}$$

имеет радиус сходимости $\geqslant(4a(\varphi))^{-1}>0$. Доказательство теоремы 2.1 следует из теоремы Нельсона, так как $D(G)$ плотно в H вследствие следующей теоремы Ре и Шлидера [37]:

Теорема 2.2. Для любого $G\subset R^4$ с непустым открытым ядром $\mathring{G}$ *$D(G)$ плотно в $\mathfrak{h}$.

---

* $\mathring{G}$ — подмножество внутренних точек G. Его обычно называют внутренностью G. — *Прим. ред.*

Доказательство. Возьмем произвольный параметр $\chi \in \mathfrak{h}$, ортогональный $\mathcal{D}(G)$. Тогда для всех $n \in Z_+$ и $\psi_n \in \mathcal{D}(G^{\times n})$

$$(\chi, \Phi(\psi_n)) =$$

$$= \int dx_1 \ldots dx_n \psi_n(x_1, \ldots, x_n)(\chi, A(x_1), \ldots, A(x_n)\Omega) = 0. \tag{2.24}$$

Обобщенная функция умеренного роста $(\chi, A(x_1), \ldots, A(x_n)\Omega)$ не имеет носитель в $G^{\times n}$. По спектральному условию фурье-образ этой обобщенной функции имеет носитель в

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \in \overline{V}_-$$

для $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому [2] $(\chi, A(x_1), \ldots, A(x_n)\Omega$ — граничное условие аналитической функции по переменной $x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$ в трубе $\operatorname{Im} x_1 \in V_+, \ldots, \operatorname{Im}(x_i - -x_{i-1}) \in V_+ (2 \leqslant i \leqslant n)$, которая обращается в нуль в открытом множестве вещественных граничных точек (как обобщенная функция) и, следовательно, равна нулю тождественно [2]. Таким образом,

$$(\chi, \Phi(\psi)) = 0 \text{ для всех } \Phi(\psi) \in D, \tag{2.25}$$

а ввиду равенства $\overline{D} = \mathfrak{h}$ получим $\chi = 0$ и $\overline{D(G)} = \mathfrak{h} H$.

Приведенные аргументы показывают также, что для $\overset{\circ}{G} \neq \Phi$ имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3. Сужение $A(\varphi)_G$ поля $A(\varphi)$ на $D(G)$ удовлетворяет равенству $A(\Phi)_G = A(\varphi)$.

Доказательство. Если даны два линейных оператора A и B в $\mathfrak{h}$ с областями определения $\Delta(A)$ и $\Delta(B)$, то A называется расширением B, $A \supset B$, если $\Delta(A) \supset \Delta(B)$, и $A\Phi = B\Phi$ для всех $\Phi \in \Delta(B)$. Очевидно, что из $A(\varphi) \supset \supset A(\varphi)_G$ следует $\overline{A(\varphi)} \supset \overline{A(\varphi)}_G$.

Нам надо показать, что $A(\varphi)^* \supset (A(\varphi)_G)^*$, так как отсюда следует $\overline{A(\varphi)} = A(\varphi)^{**} \subset \overline{A(\varphi)}_G$, что и требуется доказать.

Пусть $\Phi \in \Delta((A(\varphi)_G)^*)$ и $\Phi(\psi) \in D(G)$. Тогда по определению

$$((A(\varphi)_G)^* \Phi, \Phi(\psi)) = (\Phi, A(\varphi)\Phi(\psi)) \tag{2.26}$$

или же в виде тождества для обобщенных функций при $(x_1, \ldots, x_n) \in G^{\times n}$ и $n \in Z_+$ имеет место

$$((A(\varphi)_G)^* \Phi, \; A(x_1), \ldots, A(x_n)\Omega) =$$
$$= (\Phi, \; A(\varphi) A(x_1), \ldots, A(x_n)\Omega). \qquad (2.27)$$

Аналитическим продолжением можно обобщить тождество (2.27) для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in R^{4n}$, следовательно, для любого $\psi \in D$

$$((A(\varphi)_G)^* \Phi, \; \psi) = (\Phi, \; A(\varphi)\psi). \qquad (2.28)$$

Поэтому $\Phi \in D(A(\varphi)^*)$ и $(A(\varphi)_G)^* \Phi = A(\varphi)^* \Phi$, что тождественно выражению $A(\varphi)^* \supset (A(\varphi)_G)^*$.

Неожидан тот факт, что условие Борхерса—Циммерманна на рост исключает патологии, найденные Нельсоном.

Теорема 2.4. Пусть $\varphi = \overline{\varphi}$, $\psi = \overline{\psi} \in \mathscr{D}(R^4)$ имеют носители, пространственноподобные друг другу. Рассмотрим выражения:

$$\overline{A(\varphi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda dE(\varphi, \lambda) \text{ и } \overline{A(\psi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu dE(\psi, \mu)$$

при предположениях, упомянутых выше. Тогда для всех λ и μ

$$[E(\varphi, \lambda), \; E(\psi, \mu)]_- = 0. \qquad (2.29)$$

Доказательство. Так как $\overline{A(\varphi)}$ и $\overline{A(\psi)}$ самосопряженные операторы, то резольвенты

$$R(\varphi, \lambda) = (\overline{A(\varphi)} - \lambda)^{-1}, \; R(\psi, \mu) = (\overline{A(\psi)} - \mu)^{-1} \quad (2.30)$$

существуют, и они ограничены для $\operatorname{Im}\lambda$, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$. Чтобы проверить (2.29), достаточно доказать [8], что $[R(\varphi, \lambda), R(\psi, \mu)]_- = 0$ для всех

$$\operatorname{Im}\lambda \; \operatorname{Im}\mu \neq 0. \qquad (2.31)$$

Из условия локальности имеем для всех $\Phi \in D$

$$(A(\psi) - \mu)(A(\varphi) - \lambda)\Phi = (A(\varphi) - \lambda)(A(\psi) - \mu)\Phi, \quad (2.32)$$

что и является доказательством (2.31) на $Q = (A(\varphi) - \lambda)(A(\psi) - \mu)D$. Ввиду того что резольвенты ограничены, остается лишь показать, что Q плотно в $\mathfrak{H}$. Пусть $G \neq \Phi$ — открытое множество, пространственноподобное относительно supp ψ и supp φ. Тогда достаточно показать, что

$$D'' = (A(\varphi) - \lambda)(A(\psi) - \mu) D(G) \subset Q \qquad (2.33)$$

плотно в $\mathfrak{h}$. $\overline{A(\psi)}$ — самосопряженный и равняется $\overline{A}(\psi)_G$, соглсно теореме 2.3. Поэтому $D'=(A\psi)-\mu)\times \times D(G)$ плотно в $\mathfrak{h}$ для всех $\operatorname{Im}\mu\neq 0$.

Рассмотрим $D''=(A(\varphi)-\lambda)D'$. Каждый вектор в D' аналитичен относительно $A(\varphi)$ по теореме 2.1, так как G и $\operatorname{supp}\psi$ пространственноподобны относительно $\operatorname{supp}\varphi$. Таким образом, сужение $A(\varphi)_{D'}$ оператора $A(\varphi)$ на D' имеет плотное множество аналитических векторов и симметрично. Согласно теореме Нельсона, $A(\varphi)_{D'}$ самосопряжено и поэтому $(A(\varphi)_{D'}-\lambda)D'=(A(\varphi)-\lambda)D'=D''$ плотно в $\mathfrak{h}$. Это и есть доказательство теоремы 2.4.

Построение Борхерса и Циммерманна весьма остроумно с точки зреиия ее непосредственной связи с аксиомами Вайтмана. Однако условие на рост (2.20) очень ограииченно. Подробно изучен случай свободного поля для класса Борхерса.

Пусть $A(x)$ — нейтральное скалярное поле Вайтмана, обладающее циклическим вакуумом по отношению к $\mathfrak{B}(A)$, а $B(x)$ и $C(x)$ — операторные обобщенные функции умеренного роста, определяемые на $D=\mathfrak{B}(A)\Omega$ с $B(\varphi)D\subset D$, $C(\varphi)D\subset D$. Предположим, что $B(x)$ и $C(x)$ преобразуются ковариантно по представлению группы $iSL(2, C)$, принадлежащему $A(x)$, и что $[A(x), B(y)]_-D=[A(x), C(y)]_-D=0$ для $(x-y, x-y)<0$. Тогда, как показал Борхерс [38],

$$[B(x), B(y)]_-=[B(x), C(y)]_-=[C(x), C(y)]_-=0 \quad (2.34)$$

на D для $(x-y, x-y)<0$, т. е. B и C локальны и относительно локальны. Такие (неприводимые) поля относятся к классам эквивалентности.

Класс Борхерса для свободного поля был определен Эпштейном [39] и Шрёром (не опубликовано). Элемент $B(x)$ в классе эквивалентности свободного нейтрального скалярного поля $A_0(x)$ имеет вид

$$B(x)=\sum_{l=0}^{L} C_l(x),\quad C_l(x)=\lim_{\xi_i\to x}:P_l\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)A_0(\xi_1),\ldots,A_0(\xi_l), \quad (2.35)$$

где $P_l\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$ — действительный, симметричный, лоренц-инвариантный полином по $\frac{\partial}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\xi_l}$.

Условию на рост (2.20) не удовлетворяет уже даже $A_0^3:(x)$. Тем не менее Джаффе и Лангергольц и Шрёр построили локальные кольца для любого $B(x)$ в (2.35). Пусть O является пространственно-временной областью, для которой алгебра Неймана $R(A_0; O)$ * поля $A_0(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о дуальности [31, 40], т. е. имеем «ромб» $O=O''$ с гладкой границей [41]. Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(O)$ и $\overline{B(\varphi)}$ — замыкание сужения оператора $B(\varphi)$ на $\mathfrak{P}(A_0)\Omega$. Джаффе [42] показал, что матрицы Стоуна [43] поля $B(\varphi)$ лежат в $R(A_0; O)$. Поэтому эти ограниченные операторы генерируют локальное подкольцо алгебры $R(A_0; O)$.

Рассмотрим множество $S(B; O)$ всех ограниченных операторов P, таких, что $(\psi, PB(\varphi)\Phi)=(B(\varphi^*)\psi, P\Phi)$ для всех $\psi, \Phi\in\mathfrak{P}(A_0)\Omega$ и $\varphi\in\mathcal{D}(0)$, и определим $R(B; O)$ как алгебру Неймана $S(B; O)'$. Лангергольц и Шрёр [44] показали, что тогда $R(B; O)\subset R(A_0; O)$. Более того, для полинома Вика

$$B(x)=\sum_{n=0}^{N} C_n : A_0^n : (x). \tag{2.36}$$

$R(B; O)$ равняется либо $R(A_0; O)$, либо $R(:A^2_0:; O)$ (отметим, что для A_0 и $:A^2_0:$ выполняется условие (2.20) и теорема 2.4 применима), где вторая возможность имеет место везде, где одночастичное подпространство ортогонально $\mathfrak{P}(B)\Omega$.

В этих исследованиях условие (2.20) играло существенную роль, по крайней мере, для одного члена класса Борхерса. С точки зрения применения теоремы эквивалентности Борхерса к S-матрице (см. гл. 5) представляет интерес изучение следующего вопроса: удовлетворяет ли хотя бы одно локальное неприводимое поле в каждом классе эквивалентности условию Борхерса — Циммерманна?

ГЛАВА 3. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Наше мышление в сильной степени находится под влиянием нерелятивистской квантовой механики. Поэтому не удивительно, что успехи в теории нерелятивистского многоканального рассеяния стимулировали изучение асимптотики в релятивистской квантовой теории поля.

---

* Определение алгебры Неймана см. в работе [4]. — *Прим. ред.*

Формулировка зависящей от времени теории столкновений счетного числа связанных состояний без введения канальных гамильтонианов и канальных операторов Мёллера принадлежит Эпштейну [45] и Хаагу [46]; ее можно непосредственно обобщить в квантовой теории поля. Полезно проиллюстрировать теоретико-полевое мажорирование, являющееся пожалуй, технической процедурой в этой «освоенной модели» низкоэнергетических ядерных реакций. Во-первых, теоретико-полевая формулировка Хаага — Рюэля дает здесь некоторые преимущества. Во-вторых, рассмотрение нерелятивистской задачи вскрывает ряд недостатков релятивистской теории рассеяния, которые, по-видимому, нельзя устраннть в чистой аксиоматике, без динамики. Речь идет о построении одночастичных состояний и доказательстве полноты состояний столкновений. Наконец, некоторые трудности нерелятивистского случая переносятся в теорию поля посредством нетривиальных предположений (локальность!), которые опять демонстрируют ограниченный характер аксиом Вайтмана.

Увидев сложность многоканального рассеяния нет причин удивляться тому, что так мало результатов, строго обоснованных, даже в нерелятивистской квантовой механике. Можно надеяться, что какие-то новые методы дадут толчок для дальнейшего развития квантовой теории поля.

Рассмотрим модель тождественных бозонов, взаимодействующих посредством двухчастичного потенциала $V(|\mathbf{x}|)$. Фермионные и более сложные взаимодействия можно ввести в рассмотрение при помощи некоторых (алгебраических) обобщений.

Если вещественный сферически симметричный потенциал $V(\mathbf{x})$ удовлетворяет неравенствам

$$\int\limits_{|x|<R} d\mathbf{x} V(\mathbf{x})^2 < \infty, \quad |V(\mathbf{x})| \leqslant c|\mathbf{x}|^{-\gamma} \text{ для } |\mathbf{x}| \geqslant R \qquad (3.1)$$

и для некоторых $R \leqslant \infty$, $c < \infty$, $\gamma > 1$, то, согласно результатам Като [47], на $L^2(R^{3N})$ оператор умножения V_N с $(V_N\varphi)(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = \Sigma V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\varphi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ удовлетворяет условию

$$\Delta(V_N) \supset \Delta(H_N^0), \quad H_N^0 = -(2m)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \Delta_i, \qquad (3.2)$$

и $H_N = H^0{}_N - V_N$ самосопряженный с $\Delta(H_N) = \Delta(H^0{}_N)$. В терминах координат Якоби

$$\xi_N = N^{-1} \sum_{i=1} \mathbf{x}_i, \ \xi_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{n+1} \, (1 \leqslant n < N)$$

движение центра масс разделено, и H_N принимает вид

$$H_N = H'_N - (2mN)^{-1} \Delta\xi_n, \ H'_N = -\sum_{n=1}^{N-1} (2\mu_n)^{-1} \Delta\xi_n + \\ + \sum_{i<j} V(\eta_{ij}). \tag{3.3}$$

Прежде чем перейти к рассмотрению эксперимента по столкновению, нам следует определить в теории все частицы. Существует максимальная ортонормированная система симметричных N-частичных связанных состояний $\{\psi_{\alpha, s}\} \subset L^2(R^{3(N-1)})$ для каждого H'_N, $N \geqslant 2$ с

$$H'_N \psi_{\alpha,\ s} = E_\alpha \psi_{\alpha s} \tag{3.4}$$

и (для одинакового числа связанных частиц $N(\alpha) = N(\alpha') = N$)

$$\int d\xi_1 \ldots d\xi_{N-1} \psi^*_{\alpha,\ s}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) \psi_{\alpha, s'}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) = \\ = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'}. \tag{3.5}$$

Благодаря свойству ротационной инвариантности потенциала $V(|\mathbf{x}|)$ множества $\{\psi_{\alpha, s}\}$ расщепляются на неприводимые представления трехмерной собственной группы вращений $O_+(3)$

$$\psi_{\alpha,\ s}(R^{-1}\xi_1, \ldots, R^{-1}\xi_{N-1}) = \sum_{s'=-j}^{+j} D^j_{s's}(R) \times \\ \times \psi_{\alpha,\ s'}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) \tag{3.6}$$

с целочисленными спинами $j \in Z_+$.

Свободно движущееся связанное состояние типа α описывается в пространстве $L^2(R^{3N(\alpha)})$ соответствующей $H_{N(\alpha)}$ $(2j(\alpha)+1)$-компонентной волновой функцией $f = \{f_s(\mathbf{p})\}$, принадлежащей, например, $\mathcal{S}(R^3)$.

Имеем

$$\exp(-\mathrm{i} H_N t) \sum_s \widetilde{\psi}_{\alpha,\ s} \otimes \widetilde{f}_s(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) = \tag{3.7}$$

$$= \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{q_N^2}{2mN} + E_\alpha\right) t\right] \sum_s \widetilde{\psi}_{\alpha,\ s}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{N-1}) \widetilde{f}_s(\mathbf{q}_N),$$

где $\mathbf{q}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$, $\mathbf{q}_n = (n+1) \sum_{i=1}^{n} p_i - \frac{n}{n+1} \mathbf{p}_{n+1}$ $(1 \leqslant n < < N)$ — переменные, сопряженные $\xi_1, \ldots, \xi_N$. В частности, для свободной «элементарной» частицы гамильтониан H_1 действует следующим образом:

$$\left[\exp(-\mathrm{i}\, H_1 t) \tilde{f}\right](\mathbf{q}) = \exp\left(-\mathrm{i}\, \frac{q^2}{2m}\, t\right) \tilde{f}(\mathbf{q}). \qquad (3.8)$$

Рассеяние конечного неограниченного числа (элементарных или составных) частиц удобно описывать в картине Гейзенберга пространства Фока. Здесь лучше всего сказывается аналогия с квантовой теорией поля; свойства симметрии волновых функций реализуются автоматически и вероятности переходов для всех каналов определяются одним оператором рассеяния S.

Пусть $\mathfrak{h} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathfrak{h}_N$, где $\mathfrak{h}_0 = C$, и $\mathfrak{h}_N$ множество всех $\Phi_N(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \in L^2(R^{3N})$, полностью симметричных по всем аргументам. Самосопряженный гамильтониан определяется в $\mathfrak{h}$ как $(H\Phi)_N = H_N \Phi_N$ для $\Phi = \{\Phi_N\} \in \in \mathfrak{h}$ с $\Phi_N \in \Delta(H_N)$ для всех N и $\Sigma \| H_N \Phi_N \|^2 < \infty$. Операторами рождения и уничтожения в пространстве $\mathfrak{h}$ являются $a^*(\mathbf{x})$ и $a(\mathbf{x})$, а $\hat{n}$ обозначает оператор числа частиц.

Так как $V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ сферически симметричен, то существует проективное (с точностью до множителя) унитарное представление группы Галилея G в $\mathfrak{h}$, для которого H является инфинитезимальным генератором временных трансляций (см. например, [48]).

Общий элемент $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R) \in G$ из группы действует на пространственно-временные координаты $\mathbf{x}$ и t согласно

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \quad t \to t' = t + b, \qquad (3.9)$$

с

$$(b_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{v}_1, R_1)(b_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_2, R_2) = (b_1 + b_2, \mathbf{a}_1 + R_1\mathbf{a}_2 + b_2\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + R_1\mathbf{v}_2, R_1R_2).$$

Для $\Phi_N \in \Delta(H_N)$ $\Phi_N(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N, t) = \exp(-\mathrm{i} H_N t) \Phi_N \times \times (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)$ является решением зависящего от времени уравнения Шредингера для N частиц

$$\mathrm{i}\, \frac{\partial}{\partial t} \Phi_N(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N, t) = H_N \Phi_N(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N, t). \qquad (3.10)$$

Многообразие решений уравнения (3.10) переносит a в общее, крайне вырожденное проективное унитарное представление группы Галилея G, индуцированное отображением

$$\Phi_N \to U(b,\ \mathbf{a},\ \mathbf{v},\ R)\,\Phi_N:$$
$$(U(b,\ \mathbf{a},\ \mathbf{v},\ R)\,\Phi_N)(\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_N,\ t') =$$
$$= \exp \mathrm{i}\, mN\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{v} + \mathbf{v}R\boldsymbol{\xi}_N + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 t\right)\Phi_N(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N,\ t). \tag{3.11}$$

Функция (3.11) удовлетворяет уравнению Шредингера для N частиц (3.10) в переменных $(\mathbf{x}', t')$. Для $g_1, g_2 \in G$ имеем на Φ_N

$$U(g_1)\,U(g_2) = \exp - \mathrm{i}\,\frac{mN}{2}(\mathbf{a}_1 R_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 R_1 \mathbf{a}_2 +$$
$$+ b_2 \mathbf{v}_1 R_1 \mathbf{v}_2)\,U(g_1 g_2). \tag{3.12}$$

Если мы вернемся к картине Гейзенберга, положив $t' = 0$ в (3.11), то получим проективное унитарное представление G в каждом из «секторов суперотбора» $\mathfrak{h}_N$:

$$\Big(U(b,\ \mathbf{a},\ \mathbf{v},\ R)\,\Phi\Big)_N(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = \exp \mathrm{i}\, Nm\Big(\mathbf{v}\boldsymbol{\xi}_N - \frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{v} +$$
$$+ \frac{1}{2} b\mathbf{v}^2\Big)(e^{\mathrm{i}Hb}\Phi)_N(R^{-1}(\mathbf{x}_1 + b\mathbf{v} - \mathbf{a}), \ldots, R^{-1}(\mathbf{x}_N +$$
$$+ b\mathbf{v} - a)). \tag{3.13}$$

Трактовка связанного состояния (3.7) как частицы оправданна, так как одночастичное состояние

$$\Phi_\alpha(f)(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) = \sum_s \tilde{\psi}_{\alpha,\,s}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{N-1})\,\tilde{f}_s(\mathbf{q}_N)$$

под действием (3.13) преобразуется по неприводимому представлению

$$U(b,\ \mathbf{a},\ \mathbf{v},\ R)\,\Phi_\alpha(f) = \Phi_\alpha(f_{(b,\,a,\,v,\,R)\,\alpha}), \tag{3.14}$$

где

$$\tilde{f}_{(b,\,a,\,v,\,R)\,\alpha}(\mathbf{q})_s = \sum_{s'} D^{j(\alpha)}_{ss'}(R)\,\tilde{f}_{s'}(R^{-1}(q -$$
$$- N(\alpha)\,m\mathbf{v}))\exp \mathrm{i}\left[\frac{N(\alpha)\,m}{2}\mathbf{a}\mathbf{v} - \mathbf{q}\mathbf{a} + \left(\frac{\mathbf{q}^2}{2mN(\alpha)} + E_\alpha\right)b\right]. \tag{3.15}$$

В этой теоретико-групповой картине частица α характеризуется ее массой $N(\alpha)m$, спином $j(\alpha)$ и энергией E_α.

В разумной с физической точки зрения многочастичной теории ищутся гейзенберговские состояния

$$\Phi^{\text{ex}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(f_1,\ldots,f_n),\ \text{ex}=\text{in, out},$$

описывающие асимптотические входящие или выходящие конфигурации n частиц типа $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ с волновыми пакетами $f_1,\ldots,f_n$ для движения центра масс и спиновой ориентации. В предположении (3.1), касающегося потенциала, построим эти состояния как сильные пределы состояний $\Phi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ $(f_1,\ldots,f_n,t)$ в $\mathfrak{h}$ для $t\to\to\pm\infty$. Эти пределы, как этого требует интерпретация свободной частицы, будут преобразовываться по отношению к группе Галилея как симметричные тензорные произведения неприводимых представлений $[N(\alpha)m, j(\alpha), E_\alpha]$, соответствующих каждому куску α:

$$U(b,\ \mathbf{a},\ \mathbf{v},\ R)\,\Phi^{\text{ex}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(f_1,\ldots,f_n)=$$
$$=\Phi^{\text{ex}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\left(f_{l\,(b,\,a,\,v,\,R)_{\alpha_1}},\ldots,f_{n\,(b,\,a,\,v,\,R)_{\alpha_n}}\right). \quad (3.16)$$

В этом смысле взаимодействия система многих тел имеет в качестве «асимптот» при $t\to\pm\infty$ системы свободных частиц. В следующем ниже доказательстве используются классические результаты Кука [49], Хэка [50, 51] и Яуха и Зиннэ [52] о существовании волновых операторов, построенных по теории столкновений Хаага—Рюэля и инспирированных работой Хунзикера [53] и Зандхаса [54].

Пусть $\mathfrak{h}_\infty$ — линейное многообразие всех $\Phi\in\mathfrak{h}$ с $\Phi_N=0$ для всех достаточно больших N.

Для $\{\tilde{f}_s\}\subset\mathcal{S}(R^3)$ оператор

$$B_\alpha(f,\ t)=\mathrm{e}^{+\mathrm{i}Ht}\sum_{s=-j}^{+j}\int d\mathbf{q}\,\tilde{f}^*_s(\mathbf{q})\,B_{\alpha,\ s}(\mathbf{q})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{q^2}{2mN}+E_\alpha\right)t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht};$$

$$B_{\alpha,s}(\mathbf{q})=\int d\mathbf{p}_1\ldots d\mathbf{p}_N\tilde{\psi}^*_{\alpha,\ s}(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_{N-1})\,\delta(\mathbf{q}_N-\mathbf{q})\,(N!)^{-1/2}\times$$
$$\times\breve{a}(-\mathbf{p}_1),\ldots,\breve{a}(-\mathbf{p}_N) \quad (3.17)$$

вполне определен на $\mathfrak{h}_\infty$ и на вакууме Ω удовлетворяет условию

$$B_\alpha(f,\ t)\,\Omega=0,\ B_\alpha(f,\ t)^*\,\Omega=\Phi_\alpha(f). \quad (3.18)$$

Теорема 3.1. Пусть $V(|\mathbf{x}|)$ удовлетворяет условию (3.1), а $\psi_{\alpha, s}$ — условиям (3.4)—(3.6). Тогда операторы $B_\alpha(f, t)$ и $B_\alpha(f, t)^*$ для $\{\widetilde{f_s}\} \subset \mathscr{S}(R^3)$ на $\mathfrak{h}$ удовлетворяют неравенствам

$$\| B_\alpha(f, t)^{(*)}\Phi \| < d \| (\hat{n}+1)^{\frac{1}{2}}, \ldots, (\hat{n}+N(\alpha))^{1/2}\Phi \|, \tag{3.19}$$

$$\| \frac{d}{dt} B_\alpha(f, t)^{(*)}\Phi \| < d'(1+|t|)^{-\delta} \| \hat{n}(\hat{n}+1)^{1/2}, \ldots, \times$$

$$\times (\hat{n}+N(\alpha))^{1/2}\Phi \|, \tag{3.20}$$

где d, $d' < \infty$ не зависят от $\Phi \in \mathfrak{h}_\infty$ и t, а $\delta = \gamma$ для $\gamma < 3/2$; $\delta = \gamma - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина, больше нуля для $\gamma = 3/2$; $\delta = 3/2$ для $\gamma > 3/2$. Тогда существуют линейные операторы $a_\alpha^{\text{ex}}(f)^{(*)}$ на $\mathfrak{h}_\infty$, такие, что

$$\lim_{t \to \pm\infty} \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}(f_i, t)^*\Phi = \prod_{i=1}^{n} a_{\alpha_i}^{\text{ex}}(f_i)^{(*)}\Phi \tag{3.21}$$

существует для $\Phi \in \mathfrak{h}_\infty$ с $[a_\alpha^{\text{ex}}(f), a_\beta^{\text{ex}}(g)] = 0$, и для всех $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R) \in G$ имеет место

$$U(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)\, a_\alpha^{\text{ex}}(f)^{(*)}\, U(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)^{-1} = a_\alpha^{\text{ex}}(f_{(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)_\alpha})^{(*)}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Предположим, что $\Phi \in \mathfrak{h}_M$ с $\Phi_M(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_M, t)$ таким, как и в (3.10). Тогда в силу неравенства Шварца

$$B_\alpha(f, t)^*\Phi = e^{iHt} \sum_s \int d\mathbf{p}_1, \ldots, d\mathbf{p}_N d\mathbf{r}_1, \ldots, d\mathbf{r}_M \times$$

$$\times \widetilde{\psi}_{\alpha, s}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{N-1}) \hat{f}_s(\mathbf{q}_N)\, e^{-i\left(\frac{\mathbf{q}_N^2}{2mN} + E_\alpha\right)t}\, \hat{\Phi}_M(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_M, t) \times$$

$$\times (M!N!)^{-1/2} \widetilde{a}(-\mathbf{p}_1)^*, \ldots, \widetilde{a}(-\mathbf{r}_M)^*\Omega \tag{3.23}$$

удовлетворяет условию

$$\| B_\alpha(f, t)^*\Phi \|^2 \leqslant \frac{(M+N)!}{M!N!} \int d\mathbf{p}_1, \ldots, d\mathbf{p}_N \Big| \sum_s \hat{f}_s(\mathbf{q}_N) \times$$

$$\times \hat{\psi}_{\alpha, s}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{N-1}) \Big|^2 \int d\mathbf{r}_1, \ldots, d\mathbf{r}_M |\widetilde{\Phi}_M(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_M, t)|^2 =$$

$$= C(M+1), \ldots, (M+N) \| \Phi \|^2, \tag{3.24}$$

которое показывает, что неравенство (3.19) может быть расширено вплоть до $\Delta((\widehat{n+1})^{1/2}, \ldots, (\widehat{n+N(\alpha)})^{1/2})$. Если ограничим Φ на область $\mathfrak{H}_M \cap \Delta(H_M^0)$, тогда сильный предел

$$\lim_{\tau\to 0} \tau^{-1}(B_\alpha(f, t+\tau)^* - B_\alpha(f, t)^*)\Phi = \frac{d}{dt} B_\alpha(f, t)^* \Phi \tag{3.25}$$

существует и может быть получен почленным дифференцированием. Используя $H_k = H_k^0 + V_k$ на $\Delta(H_k^0)$, а также (3.7), после выполнения алгебраических операций получаем для предела выражение

$$\frac{d}{dt} B_\alpha(f, t)^* \Phi = \mathrm{i}\, \frac{MN}{(M!N!)^{1/2}} e^{\mathrm{i}Ht} \int d\mathbf{x}_1, \ldots, d\mathbf{y}_M \times$$
$$\times \sum_s f_s(\xi_N, t) e^{-\mathrm{i}E_\alpha t} \psi_{\alpha, s}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) V(\mathbf{x}_1 -$$
$$- \mathbf{y}_1) \Phi_M(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_M, t) a(\mathbf{x}_1)^*, \ldots, a(\mathbf{y}_M)^* \Omega, \tag{3.26}$$

где $f_s(\xi, t)$ — решение свободного уравнения Шредингера, удовлетворяющего для $f_s \in \mathcal{S}(R^3)$ условию [55]:

$$f_s(\xi, t) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{p} f_s(\mathbf{p}) \exp - \mathrm{i}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2mN} t - \mathbf{p}\xi\right) =$$
$$= \left(\frac{mN}{2\pi \mathrm{i} t}\right)^{3/2} \int d\eta f_s(\eta, 0) \exp \mathrm{i}\, \frac{mN}{2t} (\xi - \eta)^2 \text{ для } t \neq 0. \tag{3.27}$$

Для квадратичного интегрируемого потенциала $V(\mathbf{x})$ из (3.26), используя неравенство Шварца, сразу получаем

$$\left\| \frac{d}{dt} B_\alpha(f, t)^* \Phi \right\|^2 \leqslant (NM)^2 (M+N)! (M!N!)^{-1} \times$$
$$\times \int d\mathbf{x}_1, \ldots, d\mathbf{y}_M \left| \sum_s f_s(\xi_N, t) \psi_{\alpha, s}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1); \right.$$
$$|\Phi_M(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_M, t)|^2 \leqslant (NM)^2 (M+N)! (M!N!)^{-1} \times$$
$$\times \sum_{ss'} \sup_\xi f_{s'}(\xi, t)^* f_s(\xi, t) \int d\mathbf{x}_1, \ldots, d\mathbf{y}_M \psi_{\alpha, s'}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1})^* \times$$
$$\times \psi_{\alpha, s}(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1)^2;$$
$$|\Phi_M(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n, t)|^2 \leqslant d'(1 + |t|)^{-3/2} M^2 (M+1), \ldots$$
$$\ldots, (M+N) \|\Phi\|^2. \tag{3.28}$$

Если V удовлетворяет (3.1) с $\gamma \leqslant 3/2$, то более аккуратная оценка [54], выполненная с помощью разделения области интегрирования, опять приводит к (3.20). С помощью мажорирования, аналогичного (3.28), можно убедиться в сильной непрерывности $d/dt B_\alpha(f, t)^* \Phi$ по t для $\Phi \in \mathfrak{H}_M \cap \Delta(\overset{0}{H}_M)$. Для такого Φ, используя известные свойства [56] интеграла Римана в банаховом пространстве, получаем выражение

$$\| B_\alpha(f, t'')^* \Phi - B_\alpha(f, t')^* \Phi \| = \left\| \int_{t'}^{t''} dt \frac{d}{dt} B_\alpha(f, t)^* \Phi \right\| \leqslant$$

$$\leqslant d'' \left| \int_{t'}^{t''} dt (1 + |t|)^{-\delta} \right| \| \hat{n}(\hat{n} + 1)^{1/2} \dots (\hat{n} + N(\alpha))^{1/2} \Phi \|, \tag{3.29}$$

сходящееся к нулю для $t', t'' \to \pm\infty$. Ввиду полноты $\mathfrak{H}$ последовательность Коши имеет единственный предел $a_\alpha^{ex}(f)^* \Phi$. Неравенство (3.29) можно расширить до $\Delta(\hat{n}(\hat{n}+1)^{1/2}, \dots, (\hat{n}+N(\alpha))^{1/2})$. Используя также аналогичные оценки для $B_\alpha(f, t)\Phi$ и $d/dt B_\alpha(f, t)\Phi$, можно доказать существование линейных операторов $a_\alpha^{ex}(f)^*$ с $a_\alpha^{ex}(f)^{(*)} \mathfrak{H}_\infty \subset \mathfrak{H}_\infty$, а также сильную сходимость (3.21).

В частности, сильные пределы

$$\Phi^{ex}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(f_1, \dots, f_n) = \lim_{t \to \pm\infty} \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}(f_i, t)^* \Omega \tag{3.30}$$

существуют и являются хорошими кандидатами для состояний рассеяния: они полностью симметричны по отношению к перестановкам чисел $1, \dots, n$ ввиду равенства

$$[a_\alpha^{ex}(f)^*, a_\beta^{ex}(g)^*]_- = \lim [B_\alpha(f, t)^*, B_\beta(g, t)^*]_- = 0,$$

и они преобразуются относительно группы Галилея как система независимых частиц, так как соотношение

$$U(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R) B_\alpha(f, t)^{(*)} U(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)^{-1} =$$
$$= B_\alpha(f_{(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)_\alpha}, t + b)^{(*)} \tag{3.31}$$

доказывает галилей-ковариантность асимптотических полей.

Теперь покажем, что асимптотические поля удовлетворяют коммутационным соотношениям свободных полей. Следующая теорема (принадлежащая Йосту) формулируется на основании доказательства ортогональности областей определения (входящих и уходящих) волновых операторов для различных каналов [57].

Теорема 3.2. В предположениях, упомянутых выше,

$$[a_\alpha^{\text{ex}}(f),\ a_\beta^{\text{ex}}(g)^*]_- = \delta_{\alpha\beta}(f, g)_\alpha \text{ на } \mathfrak{H}_\infty, \tag{3.32}$$

где $(f,\ g)_\alpha = \sum\limits_{s=-j(\alpha)}^{j(\alpha)} \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p})_s^* \tilde{g}(\mathbf{p})_s$.

Доказательство. Если $N(\alpha) = N(\beta) = 1$, то справедливость (3.32) доказывается тривиально. Для остальных случаев вычисляем $[B_\alpha(f, t), B_\beta(g, t)^*]\Phi_M$ для $\Phi_M \in \mathfrak{H}_M$. Без учета $\delta_{\alpha\beta}(f, g)_\alpha \Phi_M$ получаем сумму членов типа

$$e^{iHt} c \int d\mathbf{y}_1, \ldots, d\mathbf{y}_{N(\beta)} d\mathbf{z}_1, \ldots, d\mathbf{z}_M \times$$
$$\times \psi_\alpha(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{N(\alpha)-k} t) \psi_\beta(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{N(\beta)}, t) \Phi_M(\mathbf{z}_1, \ldots$$
$$\ldots, \mathbf{z}_M, t) a^*(\mathbf{y}_{k+1}), \ldots, a^*(\mathbf{y}_{N(\beta)}) a^*(\mathbf{z}_{(\alpha)-k+1}), \ldots$$
$$\ldots, a^*(\mathbf{z}_M)\Omega, \tag{3.33}$$

где $\psi_\beta(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{N(\beta)}, t) = f_s(\eta_{N(\beta)}, t) \psi_{\beta, s}(\eta_1, \ldots, \eta_{N(\beta)-1}) \times$ $\times \exp(-i E_\beta t)$ и

$$\psi_\alpha(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{N(\alpha)-k}, t) =$$
$$= f_r^*(\xi_{N(\alpha)}, t) \psi_{\alpha r}^*(\xi_1, \ldots, \xi_{N(\alpha)-1}) \exp(i E_\alpha t)$$

для

$$x_i = y_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ \mathbf{x}_i = \mathbf{z}_{k-i},\ k+1 \leqslant i \leqslant N(\alpha).$$

Здесь $k \geqslant 1$, а также $N(\alpha) > k$ или $N(\beta) > k$. Согласно неравенству Шварца, квадрат нормы выражения (3.33) может быть мажорирован выражением

$$d \int d\mathbf{y}_{k+1}, \ldots, d\mathbf{y}_{N(\beta)} d\mathbf{z}_{N(\alpha)-k+1}, \ldots, d\mathbf{z}_M \Big| \int d\mathbf{y}_1, \ldots, d\mathbf{y}_k \times$$
$$\times d\mathbf{z}_1, \ldots, d\mathbf{z}_{N(\alpha)-k} \psi_\alpha(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{N(\alpha)-k}, t) \times$$
$$\times \psi_\beta(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{N(\beta)}, t) \Phi_M(\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_M, t) \Big|^2 \leqslant$$
$$\leqslant d \|\Phi_M\|^2 \int d\mathbf{y}_{k+1}, \ldots, d\mathbf{y}_{N(\beta)} d\mathbf{z}_1, \ldots, d\mathbf{z}_{N(\alpha)-k} \times$$

$$\times\left|\int dy_1,\ldots,dy_k\bar{\psi}_\alpha(y_1,\ldots,y_k,z_1,\ldots,z_{N(\alpha)-k},t)\times\right.$$

$$\times\left.\psi_\beta(y_1,\ldots,y_{N(\beta)},t)\right|^2=\int\prod_{i=1}^{N(\alpha)}dp_i\prod_{j=1}^{N(\beta)}dq_j\times$$

$$\times F(p_i,\ldots,p_{N(\alpha)},q_1,\ldots,q_{N(\beta)})\exp it\left[\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{N(\alpha)}p_i\right)^2}{2mN(\alpha)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{k}p_j+\sum\limits_{j=k+1}^{N(\beta)}q_j\right)^2}{2mN(\beta)}-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}q_i+\sum\limits_{i=k+1}^{N(\alpha)}p_i\right)^2}{2mN(\alpha)}+\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{N(\beta)}q_j\right)^2}{2mN(\beta)}\right],\tag{3.34}$$

где $F\in L^1(R^{3(N(\alpha)+N(\beta))})$. Так как квадратичная форма в экспоненте не равна тождественно нулю, то (3.34) стремится к нулю при $t\to\pm\infty$ согласно лемме Римана—Лебега, что и требовалось доказать.

Пусть $\mathfrak{h}^{\text{ex}}$ — подпространство, натянутое на $\{\Phi^{\text{ex}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(f_1,\ldots,f_n)\}$ и Ω, а $\mathfrak{h}^{\text{in}}$ и $\mathfrak{h}^{\text{out}}$ — пространства Фока на общих одночастичных пространствах $\bigoplus\limits_{\alpha}\mathfrak{h}[N(\alpha)m, j(\alpha), E_\alpha]$. Далее, оператор рассеяния S, определяемый как

$$S\Phi^{\text{out}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(f_i,\ldots,f_n)=\Phi^{\text{in}}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(f_1,\ldots,f_n),\ S\Omega=\Omega,\tag{3.35}$$

изометричен согласно теоремам 3.1 и 3.2. С точки зрения физики важно знать, унитарен ли оператор S и являются ли асимптотические состояния полными, т. е. $\mathfrak{H}=\mathfrak{h}^{\text{in}}=\mathfrak{h}^{\text{out}}$. До сих пор рассматривались только одно-, двух- и трехчастичные секторы.

Случай с $N=1$ тривиален. Для $N=2$ и $V(x)\in\in L'(R^3)\cap L^2(R^3)$ Курода [58, 59] показал, что абсолютно непрерывная часть спектра оператора H_2^1 унитарно-эквивалентна спектру оператора $H_2^{0'}$. Икэбэ [60] показал [для $V\in L^2(R^3)$, локально холер-непрерывного, за исключением конечного числа сингулярностей с $|V(\mathbf{x})|\leqslant c|\mathbf{x}|^{-2-\varepsilon}$ для $|\mathbf{x}|\geqslant R$, $c<\infty$, $\varepsilon>0$], что состояния рассеяния и двухчастичные связанные состояния являются плотными в $\mathfrak{h}_2$ и что имеет место обобщенное разложение по собственным функциям. Случай $N=3$ уже значительно сложнее, так как каждое двухчастичное связанное состояние прибавляет новую ветвь к абсолютному непрерывному спектру оператора H_3'. Л. Д. Фаддеев [61] доказал [для $|\tilde{V}(\mathbf{p})\leqslant c(1+|\mathbf{p}|)^{-\theta}$, $|\tilde{V}(\mathbf{p}+\mathbf{k})-\tilde{V}(\mathbf{p})|\leqslant c(1+|\mathbf{p}|)^{-\theta}|\mathbf{k}|^{-\mu}$ с $c<\infty$, $\theta>{}^3/_2$, $\mu>\frac{1}{2}$ для $|\mathbf{k}|\leqslant 1$ и по существу только с конечным числом двухчастичных связанных состояний ψ_α, с $E_\alpha<0$] асимптотическую полноту в

$$\bigoplus_{N=0}^{3} \mathfrak{H}_N,$$

выполнив работу по оценке сингулярных интегральных уравнений для резольвент операторов H_2' и H_3'. Трудность таких исследований показывает, почему ничего не известно по этому вопросу в общей квантовой теории поля.

Упражнение 2. Показать, что наша формулировка нерелятивистского многоканального рассеяния изоморфна обычному формализму с волновыми операторами (см. работы [57, 62]). Изучить определение канальных гамильтонианов в связи со свойством асимптотической факторизации многочастичных систем [63].

ГЛАВА 4. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВАЙТМАНА

В предыдущей главе мы изучали физически ясную ситуацию в нерелятивистской теории многоканального рассеяния. Для того чтобы вывести по этому методу асимптотическое условие в релятивистской квантовой теории поля, следует решить следующие три задачи:

1. Построить одночастичные состояния $B(f, t)^*$.
2. Дать пространственно-временную оценку релятивистских волновых пакетов.
3. Доказать, что радиус взаимодействия между частицами мал.

В настоящей главе изучим асимптотическое поведение функций Вайтмана в пространственноподобных направлениях, которые как мера радиуса полевых возбуждений, служат основой для понимания потенциала межчастичных сил.

Физически ясно, что для любых Φ, $\psi\in\mathfrak{H}$ состояние $U(a, 1)\psi$ в пределе $a\to\infty$ «видит» только вакуумную компоненту функции Φ:

$$\lim_{a\to\infty}(\Phi, U(a, 1)\psi) = (\Phi, \Omega)(\Omega, \psi), \qquad (4.1)$$

так как Ω единственно трансляционно-инвариантное состояние теории. Из леммы Римана—Лебега видно, что к пределу (4.1) можно приближаться как угодно медленно. Даже состояния $\Phi(\varphi) \in D(G)$ должны иметь «хвосты», достигающие бесконечности, так как по теореме Ре—Шлидера $D(G)$ плотно в $\mathfrak{h}$, если G имеет непустое ядро. Соответствие между $(\Phi, A_\alpha(x)\Phi)$ и классическим полем подсказывает нам для такого Φ экспоненциальное — $\exp(-m|\mathbf{x}|)$ — поведение в пространственноподобных направлениях для теорий с наименьшей массой $m > 0$, как для случая мезонного поля в окрестности фиксированного источника. В пределе $m \to 0$ следовало бы ожидать поведение типа $O(|\mathbf{x}|^{-2})$, как в случае электрического поля точечного заряда.

Рассмотрим более основательно асимптотическое поведение вакуумных средних сглаженных полей $B_i(x)$

$$\langle B_1(x_1), \ldots, B_n(x_n) \rangle_0 \tag{4.2}$$

для большого пространственноподобного разделения некоторых аргументов x_i, где

$$B_i(x) = U(x, 1) \int dx_1, \ldots, dx_{r(i)} \varphi_i(x_1, \ldots, x_{r(i)}) A(x_1) \ldots \\ \ldots, A(x_{r_i}) U(x, 1)^{-1}. \tag{4.3}$$

Важность асимптотического поведения выражения (4.2) для построения состояний столкновения впервые было подчеркнуто Хаагом [64]. Соображения Араки [42] и Йоста и Хеппа [25] в основном базируются на предположениях лоренц-инвариантности и спектральных условиях. Они показывают, что предел (4.1) в двух пучках для Φ, $\psi \in D$ достигается быстрее любой отрицательной степени разделяющего расстояния в пространственноподобном направлении.

Рюэль [21] впервые провел полное изучение поведения $\langle B_1(x_1), \ldots, B_n(x_n) \rangle$ для $x_1, \ldots, x_n$, произвольно движущихся в пространственноподобной плоскости. Ему принадлежит изящное и прямое доказательство, что усеченное вакуумное среднее убывает быстрее, чем любая отрицательная степень диаметра множества точек $\{x_i\}$. Он использовал трансляционную инвариантность, спектральные условия и локальность, однако не пользовался лоренц-инвариантностью или положительностью метрики в гильбертовом пространстве. Мы не будем приводить здесь это доказательство, так как оно очень ясно изложено в книге Йоста [3].

Приводимое доказательство показывает, что (4.2) приближается к своему пределу экспоненциально для основных функций $\varphi_i \in \mathcal{D}(R^{4r(i)})$ в (4.3). Мы не будем пользоваться ни инвариантностью относительно лоренцевых вращений (не считая спектрального условия и локальности с лоренц-инвариантными носителями), ни умеренным ростом полей, если только это специально не оговорено.

Идея выглядит очеиь просто для пучков. Изучим функции из класса C^∞:

$$h_{12}(\xi) = \langle B_1(x_1) B_2(x_2)\rangle_0 - \langle B_1(x_1)\rangle_0 \langle B_2(x_2)\rangle_0 = \\ = \langle B_1(0) U(-\xi,\ 1) E_0^\perp B_2(0)\rangle_0, \qquad (4.4)$$

где $\xi = x_1 - x_2$. Согласно условию локальности,

$$h(\xi) = h_{12}(\xi) - h_{21}(-\xi) = \langle [B_1(x_1),\ B_2(x_2)]\rangle_0 = \\ = \langle B_1(0) U(-\xi,\ 1) E_0^\perp B_2(0)\rangle_0, \qquad (4.5)$$

обращается в нуль для $\xi \in G'$, где

$$G = G(\varphi_1,\ \varphi_2) = \{y_1 - y_2 : y_i \in \operatorname{supp} \varphi_i, \quad i = 1,\ 2\}. \qquad (4.6)$$

Благодаря трансляционной инвариантности преобразование Фурье $\tilde{h}(p)$ функции $h(\xi)$ существует см. [(2.8)] без использования свойства умеренности роста полей. По спектральному условию $\operatorname{supp} \tilde{h} \in \{(p,\ p) \geqslant m^2\}$. Мы увидим, что следствием этого является существование у $h(\xi)$ представления Лемана—Йоста—Дайсона (ЛЙД):

$$h(\xi) = \int\limits_{m^2}^{\infty} dk \int\limits_{G_1} d\eta \left\{ \Delta_k(\xi - \eta)\, \rho_1(\eta,\ k) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \xi^0} \Delta_k(\xi - \eta)\, \rho_2(\eta,\ k) \right\}, \qquad (4.7)$$

где трехмерная область G_1 компактна. Функция $h_{12}(\xi)$ является положительно-частотной частью $h(\xi)$ и получится заменой Δ_k на Δ_k^+ в (4.7). Весовые функции ρ_1, ρ_2 просто связаны с $\tilde{h}(p)dp$ и $p^0\tilde{h}(p)dp$, которые ограничены комплексными мерами (2.10). Экспоненциальное стремление к нулю функции $h_{12}(\xi)$ на больших пространственноподобных расстояниях выводится, наконец, из асимптотических формул

$$\Delta_k^+(\xi) = -\mathrm{i} \left(\frac{k}{32\pi^3 \,|\, \xi \,|^3} \right)^{1/2} \mathrm{e}^{-k\,|\,\xi\,|} \left[1 + O\left(\frac{1}{k\,|\,\xi\,|} \right) \right]; \qquad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^0}\Delta_k^+(\xi) = -i\xi^0\left(\frac{k^3}{32\pi^3|\xi|^5}\right)^{1/2} e^{-k(\xi)}\left[1 + O\left(\frac{1}{k|\xi|}\right)\right]$$

для $(\xi, \xi) < 0$ и $[\xi] = [-(\xi, \xi)]^{1/2} \to \infty$.

Теорема 4.1. При вышеупомянутых предположениях

$$|h_{12}(\xi)| \leqslant c[\xi]^{-3/2} e^{-m[\xi]}\left(1 + \frac{[\xi^0]}{[\xi]}\right) \tag{4.9}$$

для $\xi \in G_1'$ и $[\xi] \geqslant \delta > 0$. Здесь $h_{12}(\xi)$ определяется из (4.4), а C — константа, не зависящая от ξ, которую можно выразить через определенные вакуумные средние, G_1 — выпуклое замыкание дополнения в $\{\xi^0=0\}$ множества $G'_1 \cap \{\xi^0=0\}$, где G определяется выражением (4.6), а $[\xi]$ — кратчайшее пространственноподобное расстояние между ξ и G_1.

Доказательство. Согласно (2.10), выражение

$$\tilde{h}(p)\,dp = (2\pi)^{-2}\{\langle B_1(0)\,dE(p)\,B_2(0)\rangle_0 - \\ - \langle B_2(0)\,dE(-p)\,B_1(0)\rangle_0\} \tag{4.10}$$

для любой ограниченной непрерывной функции χ и $l \in Z_+$ удовлетворяет условию

$$\left|\int \chi(p)(p^0)^l \tilde{h}(p)\,dp\right| \leqslant C_1 \sup_{(p,\,p) \geqslant m^2} |\chi(p)|,$$

$$C_1 = (2\pi)^{-2}\{\|(P^0)^l B_2(0)\Omega\|\,\|B_1(0)^*\Omega\| + \|(P^0)^l \times \\ \times B_1(0)\Omega\|\,\|B_2(0)^*\Omega\|\}. \tag{4.11}$$

Из ограниченности $\tilde{h}(p)$ и свойств носителя следует, что функция

$$H(\xi, s) = (2\pi)^{-2}\int dp e^{-i(p,\,\xi)} \cos s\sqrt{(p,\,p)}\,\tilde{h}(p) \tag{4.12}$$

бесконечно непрерывно дифференцируема и удовлетворяет

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi^0}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2\right] H(\xi, s) = 0;$$

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n} H(\xi, s)\Big|_{s=0} = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad n = 1\,(2), \\ \Box_\xi^{n/2} h(\xi) & \text{для} \quad n = 0\,(2). \end{cases} \tag{4.13}$$

В частности, $H(\xi, 0) = h(\xi)$. Благодаря локальной коммутативности $h(\xi)$ для $\xi \in G'$ обращается в нуль. Из рис. 1 видно, что $H(\xi, s)$ и все ее производные обращаются в нуль вдоль времяподобного сегмента, определяемого для данного ξ выражением

$$s=0, \quad |\xi_0| < \min_{\xi\in G_0} |\eta-\xi|, \qquad (4.14)$$

где G_0 — дополнение множества $G'\cap\{\xi^0=0\}$ в $\{\xi^0=0\}$ (оно компактно).

Для решения H n-мерного волнового уравнения большое значение имеют две теоремы о единственности [65]:

а) если H вместе со своими нормальными производными обращается в нуль на пространственноподобной

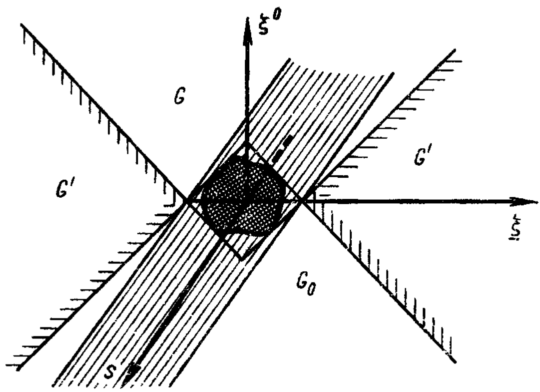


Рис. 1. Носитель функции H (ξ, S).

гладкой поверхности Σ, то H обращается в нуль тождественно в области причинной зависимости Σ'' (принцип Гюйгенса);

б) если H обращается в нуль в бесконечном порядке вдоль времяподобного сегмента T, то оно обращается в нуль (по теореме Асгейрссона) и в двойном конусе, натянутом на сегмент T.

Применив теорему б) к сегменту (4.14) и устремив $\xi\to\infty$, обнаружим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi^0}\right)^1 H(\xi, s)/_{\xi^0=0}=0 \quad \text{для всех} \quad \xi\notin G_1, \qquad (4.15)$$

где G_1 — выпуклое замыкание G_0 и тоже компактно. $H(\xi, s)$ можно выразить через ее данные Коши на плоскости $\{(\xi, s):\xi^0=0\}$

$$H(\xi, s) = -\int d\eta\, dt \left\{\frac{\partial}{\partial \xi^0} \Delta^5(\xi-\eta, s-t) H(\eta, t)|_{\eta^0=0} + \right.$$

$$\left. + \Delta^5(\xi-\eta, s-t) \frac{\partial}{\partial \eta^0} H(\eta, t)|_{\eta^0=0}\right\}, \qquad (4.16)$$

где, согласно принципу Гюйгенса, интегрирование по η может быть ограничено областью G_1 и

$$\Delta^5(\xi, s) = -\mathrm{i}(2\pi)^{-4} \int dp\, dk\, e^{-\mathrm{i}[(p, \xi) - ks]} \varepsilon(p^0) \times$$

$$\times \delta((p, p) - k^2). \qquad (4.17)$$

Положим в (4.16) $s=0$ и рассмотрим часть с $p^0>0$. Тогда

$$h_{12}(\xi) = -(2\pi)^{-1} \int_{G_1} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{-\mathrm{i}kt} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^0} \Delta_k^+(\xi - \right.$$

$$\left. -\eta) H(\eta, t)|_{\eta^0=0} + \Delta_k^+(\xi-\eta) \frac{\partial}{\partial \eta^0} H(\eta, t)|_{\eta^0=0}\right]. \quad (4.18)$$

Рассмотрим теперь такие значения ξ, для которых кратчайшее пространственноподобное расстояние $[\xi]$ между ξ и G_1 положительно. Тогда мы можем воспользоваться равенством

$$\Delta_k^+(\xi-\eta) = -\mathrm{i}(2\pi)^{-3} \int dp\, e^{-\mathrm{i}(p, \xi-\eta)} \theta(p^0) \delta((p, p) - k^2) =$$

$$= -\mathrm{i}(2\pi)^2 k K_1\left(k\sqrt{-(\xi-\eta, \xi-\eta)}\right)/\sqrt{-(\xi-\eta, \xi-\eta)}$$

$$(4.19)$$

и $h_{12}(\xi)$ принимает вид

$$h_{12}(\xi) = -(2\pi)^{-2} \int_{G_1} d\eta \int dp\, \{\chi_0(p, \xi, \eta) \tilde{h}(p) -$$

$$- \mathrm{i}\chi_1(p, \xi, \eta) p^0 \tilde{h}(p)\}, \qquad (4.20)$$

где

$$\chi_0(p, \xi, \eta) = \pi^{-1} e^{\mathrm{i}p\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cos\left(t\sqrt{(p, p)}\right) \int_0^{\infty} dk \cos(kt) \frac{\partial}{\partial \xi^0} \times$$

$$\times \Delta_k^+(\xi-\eta) = \exp(\mathrm{i}p\eta) \frac{\partial}{\partial \xi^0} \Delta^+_{\sqrt{(p, p)}}(\xi-\eta),$$

$$\chi_1(p, \xi, \eta) = \pi^{-1} e^{\mathrm{i}p\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \cos\left(t\sqrt{(p, p)}\right) \int_0^{\infty} dk \cos(kt) \times$$

$$\times \Delta_k^+(\xi-\eta) = \exp(\mathrm{i}p\eta) \Delta^+_{\sqrt{(p, p)}}(\xi-\eta). \qquad (4.21)$$

Отметим, что при переходе от (4.18) к (4.20), и учитывая (4.12) и (4.19), мы можем переставить переменные интегрирования по t и по p, так как $\tilde{h}(p)dp$ быстро убывает по p, и для $(\xi, \xi)<0$

$$I=\int_0^\infty \cos(kt)\,\Delta_k^+(\xi)\,dk=-\mathrm{i}\,(8\pi)^{-1}\,[-(\xi,\xi)+t^2]^{-3/2}, \tag{4.22}$$

поэтому $I=0(|t|^{-3})$, $\dfrac{\partial I}{\partial \xi^0}=0(|t|^{-5})$ для $|t|\to\infty$ влечет за собой равномерную сходимость интегралов по t и по p.

Применив (4.11) к (4.21), получим

$$\begin{aligned}| h_{12}(\xi) | \leqslant (2\pi)^{-2} V(G_1)\,[C_0 \sup | \chi_0(p, \xi, \eta) +& \\ + C_1 \sup | \chi_1(p, \xi, \eta) |],&\end{aligned} \tag{4.23}$$

где $V(G_1)$ — объем множества G_1 и верхняя грань берется по всем $(p, p)\geqslant m^2$ и $\eta\in G_1$. Из (4.8) получим:

$$| \xi |^{3/2} e^{m|\xi|}\, | \Delta_k^+(\xi) | < A_0 < \infty, \tag{4.24}$$

$$| \xi |^{5/2} | \xi^0 |^{-1} e^{m|\xi|} \left| \frac{\partial}{\partial\xi^0} \Delta_k^+(\xi) \right| < A_1 < \infty$$

равномерно для $k\geqslant m$ и $(\xi,\xi)<0$ таких, что $|\xi|=[-(\xi,\xi)]^{1/2}\geqslant\delta>0$. С помощью этих мажорирований получим окончательную формулу

$$| h_{12}(\xi) | \leqslant (2\pi)^{-2} V(G_1)\,[\xi]^{-3/2}\, e^{-m[\xi]} \left[C_0A_0 + C_1A_1\frac{[\xi^0]}{[\xi]}\right]. \tag{4.25}$$

Если отказаться от спектрального условия и предполагать только, что $\operatorname{supp} dE(p)\subset\overline{V}_+$ и что Ω — единственное собственное состояние P^μ, принадлежащее собственному значению 0, то $\tilde{h}(p)dp$ не содержит членов типа $\delta(p)$ и из нее можно по-прежнему получить однозначно ее положительно-частотную часть $\tilde{h}_{12}(p)$. Поэтому каждый шаг в доказательстве теоремы 4.1 сохраняет свою значимость вплоть до уравнения (4.23) с $m\downarrow 0$. Ввиду условия

$$\Delta_0^+(\xi)=-\mathrm{i}\,(2\pi)^{-2}(\xi,\xi)^{-1} \quad \text{для} \quad (\xi,\xi)<0 \tag{4.26}$$

и благодаря ограниченности $kK_1(k)$ и $k^3\dfrac{\partial}{\partial k}[K_1(k)/k]$ для $k\geqslant 0$ легко убедиться в том, что условие

$$| \Delta_k^+(\xi) | \leqslant A_0' | \xi |^{-2}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial\xi^0}\Delta_k^+(\xi) \right| \leqslant A_1' | \xi^0 | | \xi |^{-4} \tag{4.27}$$

выполняется равномерно для $k \geqslant 0$ и $(\xi, \xi) < 0$ с $|\xi| \geqslant \delta > 0$. Эти результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.2. В предположениях теоремы 4.1 с $m=0$ имеем

$$|h_{12}(\xi)| \leqslant V(G_1)[\xi]^{-2}\left(C_0 A_0' + C_1 A_1' \frac{|\xi^1|}{[\xi]^2}\right). \quad (4.28)$$

Для изучения асимптотического поведения вакуумных средних n пучков $<B_1(x_1), \ldots, B_n(x_n)>_0$ удобно исключить Ω как промежуточное состояние, причем симметричным образом, для сохранения свойств локальности носителя. Как и в статистической механике [66], усеченные вакуумные средние определим как

$$<B_1(x_1), \ldots, B_n(x_n)>^T = <B_1(x_1), \ldots, B_n(x_n)>_0 -$$
$$- \sum <B_{i_1}(x_{i_1}), \ldots, B_{i_k}(x_{i_k})>^T \times$$
$$\times <B_{i_{k+1}}(x_{i_{k+1}}) \ldots >^T \ldots; \quad (4.29)$$

часто вместе с $<B(x)>^T = <B(x)>_0 \cdot \Sigma$ распространяется на все разбиения часть $\{i_1, \ldots, i_k\}$, $\{i_{k+1} \ldots\} \ldots$ множества $\{1, \ldots, n\}$ таким образом, что в каждом усеченном вакуумном среднем порядок операторов такой же, как и в $<B_1(x_1), \ldots, B_n(x_n)>^T$ и $1 = i < i_{k+1} < \ldots$ Для фермионов дополнительный знаковый множитель указывает на число перестановок фермионов (mod 2) при переходе от $1, \ldots, n$ к $i_1, \ldots, i_n$.

Теорема 4.3. В вышеупомянутых предположениях и при $m > 0$ $<B_1(x_1), \ldots, B_n(x_n)>^T$ стремится к нулю, по крайней мере, так же быстро, как $R^{3/2} \exp - mR/(n-1)$ при стремлении диаметра точечного множества $\{x_i\}$ к бесконечности и $\overset{0}{x_1} = \ldots = \overset{0}{x_n}$.

З а м е ч а н и е. Эта формулировка не оптимальна ввиду выделенной роли, которую играет гиперплоскость $\overset{0}{x_1} = \ldots = \overset{0}{x_n}$. Более общий случай рассмотрен в теореме 7.2. С другой стороны, пример свободного поля с массой $m \geqslant 0$ свидетельствует о том, что убывания более быстрого, чем $\Delta_m^+(\xi)$, достичь нельзя.

Доказательство. Предположим, что $R = \max\limits_{i<j} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$. Рассмотрим плоскости, проходящие через каждую точку $\mathbf{x}_i$ и ортогональные $\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j$. Всегда существуют соседние плоскости на расстоянии $\geqslant R/(n-1)$, разделяющие точечное множество $\{x_i\}$ на два семейства F_1 и F_2, такие,

что расстояние к их выпуклым оболочкам $C(F_1)$ и $C(F_2)$ равняется, по крайней мере, $R/(n-1)$. Ввиду того что $G(\varphi_i, \varphi_j)$ [см. формулу (4.6)] компактно для всех $i<j$, можно выбрать такое L, что

$$[B_i(0, \mathrm{x}_i), B_j(0, \mathrm{x}_j)] = 0 \quad \text{для} \quad |\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_j| > L.$$

Пусть $R>(n-1)L$. Тогда, пользуясь свойством локальности усеченного вакуумного среднего, можно привести $B_i(x_i)$ к виду

$$<\Pi B_i(x_i)>^T = <B'_1(x'_1), \ldots, B'_k(x'_k) \times \times B''_1(x''_1), \ldots, B''_{n-k}(x''_{n-k})>^T \tag{4.30}$$

с $\{x'_i\} \in F_1$ и $\{x''_j\} \in F_2$. Усеченное вакуумное среднее (4.30) по определению равно

$$<\Pi B_i(x_i)>^T = <B'_1(x'_1), \ldots, B'_k(x'_k) \times \times E_0^{\perp} B''_1(x''_1), \ldots, B''_{n-k}(x''_{n-k})>_0 - \sum_{\text{част}}{}' \Pi<\ldots>^T, \tag{4.31}$$

где суммирование $\sum\limits_{\text{част}}{}'$ распространяется на все разбиения, которые не меньше F_1 и F_2. С помощью итерации выражение (4.30) можно написать в виде суммы произведений вакуумных средних, всегда содержащих по крайней мере один член типа

$$<B'_{i_1}(x'_{i_1}) \ldots B'_{i_r}(x'_{i_r}) E_0^{\perp} B''_{j_1}(x''_{j_1}) \ldots B''_{j_s}(x''_{j_s})>_0, \tag{4.32}$$

где $r \cdot s \neq 0$. Выражение (4.32) может быть мажорировано, как и (4.9), при $\xi^0=0$ и $[\xi]+L$ не меньше, чем расстояние между $C(F_1)$ и $C(F_2)$, которое равно по крайней мере $R/(n-1)$. Константы C_i содержат нормы $\Pi B'_{i_\nu}(x'_{i_\nu})^* \Omega$ и $\Pi B''_{j_\mu}(x''_{j_\mu})\,\Omega$, которые, как и другие вакуумные средние, будут, согласно лемме 4.1 (см. ниже), иметь границы, не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$. И наконец, объемный коэффициент $V(G_1)$ растет, как R^3. Это и есть доказательство теоремы 4.3.

Лемма 4.1. $|<B_1(0, \mathrm{x}_1), \ldots, B_n(0, \mathrm{x}_n>_0|$ равномерно ограничено по $x_1, \ldots, x_n$.

Доказательство. Выберем L таким, как и прежде. Очевидно, что C^∞ — функция, зависящая от разности переменных, ограничена в области $\max\limits_{i<j}|\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_j| \leqslant L$. Если $R>(n-1)L$, а F_1 и F_2 — разбиения множества $\{x_i\}$

с $C(F_1)$ и $C(F_2)$, разделенными расстоянием $\geqslant R/(n-1)$, то, согласно условию локальности, получим

$$\begin{aligned} &| < B_1(0, x_1), \ldots, B_n(0, x_n) >_0 | = \\ &= | < B_1'(x_1'), \ldots, B_k'(x_k') B_1''(x_1''), \ldots, B_{n-k}''(x_{n-k}'') >_0 | \leqslant \\ &\leqslant \| \Pi B_i'(x_i')^* \Omega \| . \| \Pi B_j''(x_j'') \Omega \| . \end{aligned} \tag{4.33}$$

Повторив эту процедуру несколько раз, получим постоянные границы с коэффициентами вида

$$< (B_i^{(*)}(0) B_i^{(*)}(0)^*)^n >_0^{\frac{1}{2n}}.$$

Используя наряду с предположениями теорем 4.1—4.3 условие умеренного роста полей, легко получить свойство асимптотической факторизации полей, сглаженных основными функциями из $\mathscr{S}(R^{4n})$.

Для каждого $\rho \geqslant 1$ и каждого n выберем пару C^∞-функций $\overset{1}{\alpha}_\rho(x_1, \ldots, x_n)$, $\overset{2}{\alpha}_\rho(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что

$$\begin{gathered} \overset{1}{\alpha}_\rho(x_1, \ldots, x_n) + \overset{2}{\alpha}_\rho(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1 \text{ в } R^{4n}, \\ \operatorname{supp} \overset{1}{\alpha}_\rho \subset \{\max [| x_j^0 | + | \mathbf{x}_j |] \leqslant \rho, \\ \operatorname{supp} \overset{2}{\alpha}_\rho \subset \left\{ \max_{1<j<n} [| x_j^0 | + | \mathbf{x}_j |] \geqslant \rho - \frac{1}{2} \right\}. \end{gathered} \tag{4.34}$$

Производные всех порядков от $\overset{1}{\alpha}_\rho$, $\overset{2}{\alpha}_\rho$ должны быть равномерно ограничены по ρ. Вводя вместо функций φ_i в (4.3) функции

$$\overset{1}{\varphi}_{i\rho} = \overset{1}{\alpha}_\rho \varphi_i \in \mathscr{D}(R^{4r(i)}), \quad \overset{2}{\varphi}_{i\rho} = \overset{2}{\alpha}_\rho \varphi_i \in \mathscr{S}(R^{4r(i)}), \tag{4.35}$$

получаем поля $\overset{1}{B}_{i\rho}$ и $\overset{2}{B}_{i\rho}$, такие, что $B_i = \overset{1}{B}_{i\rho} + \overset{2}{B}_{i\rho}$. Из (4.25) следует, что

$$< \overset{1}{B}_{1\rho}(x_1) E_0^\perp \overset{1}{B}_{2\rho}(x_2) >_0 | \leqslant E \rho^3 [\xi]^{-3/2} e^{-m[\xi]} \left(1 + \frac{[\xi^0]}{[\xi]} \right) \tag{4.36}$$

для $[\xi] \geqslant \delta > 0$. Множитель ρ^3 получается из $V(G_1)$, и константу E можно выбрать независимой от ρ, так как $\overset{j}{\varphi}_{i\rho}$ принадлежат ограниченным множествам в $\mathscr{S}(R^{4r(i)})$ для $1 \leqslant \rho < \infty$, вследствие чего нормы типа $\| \overset{1}{B}_{i\rho}(0) \Omega \|$ ограничены относительно ρ.

В правой части соотношения

$$h_{12}(\xi) = \sum_{i,j=1}^{2} < \overset{i}{B}_{1\rho}(x_1) E_0^\perp \overset{j}{B}_{2\rho}(x_2) >_0 \tag{4.37}$$

один член мажорируется выражением (4.36), в то время как остальные стремятся к нулю быстрее любой степени ρ^{-1} при $\rho\to\infty$ вследствие умеренности роста вакуумных средних. Если ограничить ξ неравенством $|\xi^0|\leqslant\lambda|\xi|$, $0<\lambda<1$ и выбрать

$$\rho=\frac{1}{2}\,|\,\xi\,|\left[1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^{1/2}\right], \tag{4.38}$$

то

$$[\xi]=[(|\,\xi\,|-2\rho)^2-|\,\xi^0\,|^2]^{1/2}\geqslant|\,\xi\,|\left(\frac{1+\lambda^2}{2}-\lambda^2\right)^{1/2}\geqslant$$
$$\geqslant|\,\xi\,|\left(\frac{1-\lambda^2}{2}\right)^{1/2} \tag{4.39}$$

и все члены в (4.37) убывают быстрее любой степени $|\xi|$ при $|\xi|\to\infty$, $m>0$.

Следствие 4.1. В предположении теоремы 4.1 и в силу умеренности роста полей $h_{12}(\xi)$ для $\varphi_i\in\mathscr{S}(R^{4r(i)})$ стремится к нулю быстрей любой степени $|\xi|^{-1}=[-(\xi,\ \xi)]^{1/2}$, при $|\xi|\to\infty$ в пределах $|\xi^0|\leqslant\lambda|\xi|$, $0<\lambda<1$.

В случае $m=0$ (4.36) следует заменить

$$|<B^1_{1\rho}(x_1)\,E^{\perp}_0\,B^1_{2\rho}(x_2)>_0|<E\rho^3\,[\xi]^2\left(1+\frac{[\xi^0]}{[\xi]^2}\right). \tag{4.40}$$

Если заменить ρ величиной с более медленным ростом, чем (4.38), например для $|\xi|>(1-[(1+\lambda^2)/2])^{-1}$ произвести замену

$$\frac{1}{2}\left[|\,\xi\,|\left\{1-\left(\frac{1+\lambda^2}{2}\right)^{1/2}\right\}\right]^{\eta/3},\quad 0<\eta<3, \tag{4.41}$$

то получим следующее следствие.

Следствие 4.2. В предположении теоремы 4.2 и в силу умеренности роста полей $h_{12}(\xi)$ для $\varphi_i\in\mathscr{S}(R^{4r(i)})$ стремится к нулю как $|\xi|^{-2+\eta}$ для любого $\eta>0$ при $|\xi|\to\infty$ с ограничением $|\xi^0|\leqslant\lambda|\xi|$, $0<\lambda<1$.

Наконец, теорему 4.3 можно обобщить с помощью следствия 4.1.

Следствие 4.3. В предположениях теоремы 4.1 и в силу умеренности роста полей

$$D<B_1(x_1),\ \ldots,\ B_n(x_n)>^T\in\mathscr{S}\left(R^{3(n-1)}\right) \tag{4.42}$$

в переменных $x_{i+1}-x_i$, $1\leqslant i\leqslant n$ для $x^0_1=\ldots=x^0_n$ и $\varphi_i\in\mathscr{S}(R^{4r(i)})$, где D — произвольный дифференциальный полином по $\partial/\partial x^0_i$.

Можем улучшить наши результаты, использовав интересное замечание Борхерса [67]. Усеченное вакуумное среднее в качестве обобщенной функции в переменных $\xi_i = x_i - x_{i+1}$, $W(\xi_1, \ldots, \xi_n)^T = \langle A(x_0), \ldots, A(x^n) \rangle T$ имеет носитель в импульсном пространстве, лежащий в $\overline{V}_-^m \times \ldots \times \overline{V}_-^m$. Умноженное на $\tilde{\chi} \in \mathscr{S}(R^1)$ оно становится функцией, быстро убывающей по всем переменным:

$$\tilde{W}(q_1, \ldots, q_n)^T \tilde{\chi}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^0\right) \in O_C'(q_1, \ldots, q_n). \quad (4.43)$$

Доказательство. Функция умеренного роста $\tilde{W}^T$ имеет вид

$$\tilde{W}(q_1, \ldots, q_n)^T = \prod_{i=1}^{n} (1 + \| q_i \|^2)^N \tilde{V}(q_1, \ldots, q_n), \quad (4.44)$$

где для некоторого N $\tilde{V}$ является ограниченной обобщенной функцией [14] с носителем в $\overline{V}\mu \times \ldots \times \overline{V}\mu$, $0 < \mu < m$.

Для любого $M \in Z_+$ выражение

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + \| q_i \|^2)^M \tilde{W}^T \tilde{\chi}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i^0\right) = \tilde{b}_M(q_1, \ldots, q_n)] \times$$
$$\times \tilde{V}(q_1, \ldots, q_n) \quad (4.45)$$

также является ограниченной обобщенной функцией, так как легко показать, что $\tilde{b}_N$ вместе со всеми своими производными в $\overline{V}_- \times \ldots \times \overline{V}_-$ также является ограниченной C^∞-функцией, что достаточно [14] для доказательства (4.43).

Из формулы (4.43) Борхерс получил следующую теорему, которая является одним из нетривиальных обобщений для неумеренных полей.

Теорема 4.4. Пусть $A(x)$ удовлетворяет всем аксиомам Вайтмана, кроме локальной коммутативности. Тогда для каждого $\varphi \in \mathscr{S}(R^1)$

$$A_\varphi(\mathbf{x}) = \int dx^0 \varphi(x^0) A(x) \quad (4.46)$$

является линейным оператором в $\mathfrak{H}$ с общей плотной областью D' и $A_\varphi(\mathbf{x}) D' \subset D'$. Для всех $\psi \in D'$ $A_\varphi(\mathbf{x})\psi$ принадлежит $\theta_M(\mathbf{x})(H)$.

Доказательство. Для любого топологического линейного пространства $E \theta_M(\mathbf{x})(E)$ является множеством C^∞-функций $\varphi(x)$ со значениями в E [34], которые вместе со своими производными полиномиально ограничены. Из (4.43) немедленно следует, что $\langle A(x_1),\dots, A(x_n)\rangle_0$ принадлежит $\theta_M(\mathbf{x}_1,\dots, \mathbf{x}_n)(\mathscr{S}'(\mathbf{x}_1^0,\dots, \mathbf{x}_n^0))$. Согласно аксиоме V, линейная оболочка состояний

$$D' = LH\left\{\Omega,\ \prod_{i=1}^{n} A_{\varphi_i}(\mathbf{x}_i)\Omega,\quad n = 1, 2, \dots, \ \varphi_i \in \mathscr{S})R^1)\right\} \tag{4.47}$$

плотна в $\mathfrak{H}$, а из того обстоятельства, что скалярное произведение между состояниями из D' можно выразить через вакуумные средние, можно сделать вывод, что для $\psi\in D'$ $A_\varphi(\mathbf{x})\psi$ есть C^∞-функция, и она вместе со всеми производными полиномиально ограничена в сильной топологии в $\mathfrak{H}$. D' тоже является областью Гординга для $U(a, \lambda)$.

Используя теперь те же соображения, что и раньше, даже при более простых свойствах носителя в x-пространстве при дополнительных предположениях о локальности можно показать, что для $\varphi_i\in\mathscr{S}(R^1)$

$$\langle A\varphi_1(\mathbf{x}_0), \dots, A_{\varphi_n}(\mathbf{x}_n)\rangle^T \in \mathscr{S}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}) \tag{4.48}$$

и что она вместе со всеми производными убывает как $R^{3/2}\exp(-mR)$ для $\varphi_i\in\mathscr{D}(R^1)$. Это дает возможность сформулировать следующую теорему [20].

Теорема 4.5. Пусть $A(x)$ удовлетворяют всем аксиомам Вайтмана с наименьшей массой $m>0$. Тогда усеченное вакуумное среднее $W(\xi_1,\dots, \xi_n)^T = \langle A(x_0),\dots, A(x_n)\rangle^T$ в p-пространстве удовлетворяет условию

$$\int \prod_{i=1}^{n} dp_i^0 \hat{\varphi}(p_1^0, \dots, p_n^0)\hat{W}(p_1, \dots, p_n)^T \in$$
$$\in \mathscr{S}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \tag{4.49}$$

для $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$. Более того, если $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$, то (4.49) аналитично для комплексных $\mathbf{p}_1,\dots, \mathbf{p}_n$ в $\{|\mathrm{Im}\,\mathbf{p}_i|<m/n^2\}$. Аналитичность (4.49) следует из экспоненциального убывания выражения

$$\int \prod_{i=1}^{n} d\xi_i^0\, \varphi(\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) W(\xi_1, \dots, \xi_n)^T,$$

$$R = \max\left|\sum_{i=j}^{k} \xi_i\right|.$$

Пространственные асимптотические свойства факторизации в теореме 4.5 показывают, насколько ограничено поведение вакуумных средних как обобщенных функций учетом локальности, спектральных условий и положительностью метрики в $\mathfrak{h}$: они ведут себя ничуть не хуже, чем вакуумные средние свободных полей. Предлагаем выполнить следующее упражнение.

Упражнение 3. Проверить результаты данной главы для случая свободных полей массы m в четырехмерном пространстве.

Наконец, отметим, что следствие 4.3, которое мы используем для вывода асимптотического условия, остается в силе (при использовании метода Рюэля [21], [32], если аксиому локальной коммутативности заменить «почти локальностью» в более слабой форме:

Аксиома IV′. Для всех $n=1,\ldots$ и $1 \leqslant i \leqslant n$

$$< A(x_0), \ldots, [A(x_{i-1}) A(x_i)]_-, \ldots, A(x_n) >_0 = T(\xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{4.50}$$

в любой зафиксированной области $\{|\xi_i^0| < \delta |\xi_i|\}$, $0 < \delta < 1$ для всех $L \in Z_+$ удовлетворяет

$$T = \sum_{\sigma=1}^{S(L)} D_{\sigma, L} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} (1 + \|\xi_j\|^2)^K (1 + \|\xi_i\|^2)^{-L} \times \tau_{\sigma, L}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{4.51}$$

для некоторого K, не зависящего от L; $S(L) < \infty$, $D_{\sigma, L}$ — дифференциальный одночлен по $\partial/\partial\xi_i^j$, $\xi_i = x_i - x_{i-1}$, а $\tau_{\sigma, L}$ — ограниченная непрерывная функция.

Очевидно, что локальность заключает в себе также почти локальность.

ГЛАВА 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ХААГА — РЮЭЛЯ

В этой главе рассматривается метод Хаага для вывода времяподобного асимптотического условия для состояний рассеяния из известного асимптотического поведения вакуумных средних в пространственноподобных направлениях.

Сначала следует рассмотреть одночастичную задачу. В нерелятивистской квантовой механике нормируемое решение не зависящего от времени уравнения Шредингера описывает все стабильные частицы теории или все неприводимые проективные представления группы Галилея, индуцированные гамильтонианом H. В релятивистской квантовой теории поля все частицы фигурируют как дискретные неприводимые представления $[m, s]$ группы $iSL(2, C)$, возникающие в приводимых представлениях $U(a, \Lambda)$, по отношению к которым поля являются тензорными операторами. Частицы характеризуются [6] массой $m \geqslant 0$ и спином $s=0$, $^1/_2$, 1,... Не конкретизируя даже динамику, нам следует предположить здесь, что по крайней мере одно состояние в каждом $\mathfrak{h}[m, s]$ может быть образовано из вакуума Ω с помощью полинома по сглаженным полям.

Укажем на возможное упрощение в описании частиц со сложным спектром, так как лишь небольшое число полей (например, поля, несущие сохраняющиеся заряды или поля, связанные с ними [68]) может стать субструктурой наблюдаемой зоологии частиц.

Есть случаи, когда одночастичная задача может быть решена чисто кинематически. Согласно аксиоме V, любое одночастичное состояние $\Phi \in \mathfrak{h}[m, s]$ можно аппроксимировать состояниями из $D = \mathfrak{P}\,\Omega$. Если $\tilde{B} \in \mathfrak{P}$ рождает состояние

$$\tilde{B}^*\Omega = \Phi + \psi, \tag{5.1}$$

где $\Phi \in \mathfrak{h}[m, s]$ и ψ обладает спектром масс без носителя в пространстве m, то

$$B^* = \int dx U(x, 1)\, \tilde{B}^* U(x, 1)^{-1} h(x) \in \mathfrak{P} \tag{5.2}$$

удовлетворяет $B^*\Omega = \Phi$ и $B\Omega = 0$, если $h \in \Theta_M(R^4)$ с $\tilde{h}(\sqrt{m^2+p^2}, \mathbf{p}) = 1$ обращается в нуль вне малой окрестности $\{(p, p) = m^2,\ p_0 > 0\}$. В частности, если двухточечная функция ковариантного поля $\langle A_\beta^{k^*}(x)\ A_\alpha^k(y)\rangle_0$ в p-пространстве имеет член типа $\delta((p, p) - m^2)\,\theta(p^0)\,(\tilde{p}/m)_{\alpha\beta}$, отдельный от континуума, то одночастичные операторы рождения и уничтожения могут быть построены соответствующим сужением основных функций.

Хотя сильная сходимость в теореме 5.1 имеет место для всех $B_i \in \mathfrak{P}$ таких, что $(P, P) B_i^* \Omega = m_i^2\, \Omega$, $m_i > 0$ (и без ограничения $B_i\Omega = 0$), с физической точки зрения более последовательно работать с помощью одночастичных операторов рождения и уничтожения, преобразующихся ковариантным образом по $U(a, \Lambda)$. Из нерелятивистской задачи связанных состояний (3.17) видно, каким образом строить эти операторы из состояния покоя.

Представление $U(a, \Lambda)$, сведенное к $\mathfrak{h}[m, s]$, изоморфно обычному представлению в спиральном базисе (см. Упражнение 1). Из изоморфизма I_r получим

$$I_r : B^*\Omega \in \mathfrak{h}[m, s] \longleftrightarrow \left|\widehat{b}\right> = \sum_{\alpha=-s}^{+s} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_p} \widehat{b}_\alpha(\mathbf{p}) \left| \mathbf{p}, \alpha \right>, \tag{5.3}$$

где

$$\left<\mathbf{p}, \dot{\beta} \mid \mathbf{q}, \alpha\right> = 2\omega_p \delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}) (\widetilde{p}/m)_{\alpha\dot{\beta}} \quad \text{и}$$

$$U_r(a, \Lambda) \mid \mathbf{p}, \alpha> = \exp i(\Lambda p, a) D^s_{\alpha\beta}(\Lambda^{-1}) \mid \Lambda\mathbf{p}, \beta>.$$

Волновую функцию $\widehat{b} = \{\widehat{b}_\alpha(\mathbf{p})\} \subset \mathscr{S}(R^3)$ можно вычислить из $<BU(a, \Lambda)B^*>_0$ (однозначно с точностью до фиксированной фазы для $\mathfrak{h}[m, s]$).

$\mathfrak{h}[m, s]$ содержит вместе с $B^*\Omega$ также все $\overset{*}{B_f}\Omega = \int dx f(x) U(x, 1) B^*\Omega$ для $f \in \mathscr{S}(R^4)$. Выбирая соответствующие линейные комбинации $U(a, \Lambda)\overset{*}{B_f}\Omega$, можно найти $(2s+1)$-операторов $'B_\beta \in \mathfrak{P}$ с $'B_\beta\Omega = 0$, $'\overset{*}{B_\beta}\Omega \in \mathfrak{h}[m, s]$, где соответствующие волновые функции $\widehat{b}^\beta = \{\widehat{b}^\beta_\alpha(\mathbf{p})\}$ удовлетворяют

$$\widehat{b}^\beta_\alpha(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{для} \quad \alpha = \beta \text{ и } |\mathbf{p}| \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Выражения $'\widetilde{B}_\beta(p)^* = (2\pi)^{-2} \int dx e^{-i(p, x)} U(x, 1)' \overset{*}{B_\beta} U(x, 1)^{-1}$ являются конечными суммами

$$'\widetilde{B}_\beta(p)^* = (2\pi)^{-2} \sum_n \sum_{(k)} \sum_{(\sigma)} \int dp_1, \ldots, dp_n \varphi_{n(k)(\sigma)} \times$$
$$\times (p_1, \ldots, p_n)_\beta \delta\left(p - \sum_{i=1}^n p_i\right) \widetilde{A}^{k_1}_{\sigma_1} \times$$
$$\times (-p_1), \ldots, \widetilde{A}^{k_n}_{\sigma_n}(-p_n). \tag{5.5}$$

Используя тот факт, что $U(a, \Lambda) I_r = I_r U(a, \Lambda)$, легко показать, что основные функции $\varphi_{n(k)(\sigma)}(p_1, \ldots, p_n)_\beta$ можно выбрать так, чтобы они были ковариантны относительно $SU(2)$, ограничив носитель в $\sum_{i=1}^n p_i$

некоторым $\overline{V}^{\mu}_{+}$, $\mu>0$, и усреднив по $SU(2)$ в системе покоя Σp_i, что не влияет на выражение (5.4). Имеем

$$\varphi_{n(k)(\sigma)}(p_i, \ldots, p_n)_\beta = \sum_{\gamma=-s}^{+s} \sum_{(\tau)} D^s_{\beta\gamma}(R) \times$$

$$\times \varphi_{n(k)(\tau)}(R^{-1} p_1, \ldots, R^{-1} p_n)_\gamma \, S^{(k)}_{(\tau)(\sigma)}(R^{-1}). \quad (5.6)$$

Воспользовавшись ковариантными основными функциями [сравни (5.6) с (3.6)], определим ковариантные операторные обобщенные функции

$$\breve{B}_\beta(p)^* = \sum_{n(k)(\sigma)} \int dp_1, \ldots, dp_n \widehat{\varphi}_{n(k)(\sigma)}(p_1, \ldots, p_n)_\beta \times$$

$$\times \delta\left(p - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \widetilde{A}^{k_1}_{\sigma_1}(-p_1), \ldots, \widetilde{A}^{k_n}_{\sigma_n}(-p_n), \quad (5.7)$$

где C^∞-функция $\widehat{\varphi}_{n(k)(\sigma)}$ равняется

$$\sum_\gamma \sum_{(\tau)} D^s_{\beta\gamma}(L(p))\, \varphi_{n(k)(\tau)} \times$$

$$\times (L^{-1}(p) p_1, \ldots, L^{-1}(p) p_n)_\gamma \, S^{(k)}_{(\tau)(\sigma)}(L(p)^{-1}) \quad (5.8)$$

и «буст» $L(p)$ регулярен для $p \in \overline{V}^N_{+}$, $\mu > 0$:

$$L(p) = [2\sqrt{(p,\, p)}\,(\sqrt{(p,\, p)} + p_0)]^{-1/2} \{\sqrt{(p,\, p)} + p^0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\}. \quad (5.9)$$

По построению $\breve{B}(p)^*_\beta$ ковариантен по отношению к $\mathrm{i}SL(2, C)$:

$$U(a, \Lambda)\breve{B}(p)^*_\beta U(a, \Lambda)^{-1} = e^{i(\Lambda p,\, a)} D^s_{\beta\gamma}(\Lambda^{-1})\, \breve{B}(\Lambda p)_\gamma. \quad (5.10)$$

Определим, как и в (3.17),

$$B(\widehat{f}, t)^* = \sum_{\alpha=-s}^{+s} \int dp \widehat{f}(\mathbf{p})_\alpha \breve{B}(p)^*_\alpha e^{i(p^0-\omega)t} \quad (5.11)$$

с соответствием $e^{ip^0 t} \sim e^{iHt}$, $e^{-i\omega t} \sim e^{-iH_r t}$ (H_r — канальный гамильтониан). Этот оператор обладает замечательными свойствами. Если $\widehat{f}(\mathbf{p})_\alpha \in \mathscr{S}(R^3)$, то ввиду условия

$$\widehat{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i\right)_\alpha \widehat{\varphi}_{n(k)(\sigma)}(p_1, \ldots, p_n)_\alpha \in \mathscr{S}(R^{4n})$$

получим

$$B_r(\widehat{f}, t)\,\Omega = 0, \quad B_r(\widehat{f}, t)^*\Omega = \Phi_r(\widehat{f}) \in \mathfrak{h}\,[m, s],$$

$$U(a, \Lambda)\Phi_r(\widehat{f}) = \Phi_r(U_r(a, \Lambda)\,\widehat{f}). \tag{5.12}$$

Основные физические идеи, используемые при доказательстве следующей теоремы, принадлежат Хаагу [64]. Рюэль [21] же дал математически строгое доказательство на основе аксиом Вайтмана.

Теорема 5.1. Предположим, что $'B_r \in \mathfrak{P}$ $(r = [m, s])$ удовлетворяет условию $'B_r^*\Omega \in \mathfrak{h}[m, s]$, $'B_r\Omega = 0$, и пусть $B_r(\widehat{f}, t)$ определяется согласно (5.11) с $\{f(\mathbf{p})_\alpha\} \subset \mathscr{S}(R^3)$. Тогда состояния

$$\Phi(t) = \Pi B_{r_i}(\widehat{f}_i, t)^{(*)}\Omega \tag{5.13}$$

сходятся при $t \to \pm\infty$ в сильной топологии в $\mathfrak{h}$. Предел равномерен в $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in R^{3n}$ для всех волновых пакетов, перемещенных в пространстве:

$$\widehat{f}^a(\mathbf{p}) \equiv e^{-i\mathbf{p}\mathbf{a}}\,\widehat{f}(\mathbf{p})_\alpha. \tag{5.14}$$

Доказательство. Во второй главе мы видели, что $\Phi(t)$ принадлежит классу C^∞ в сильной топологии в $\mathfrak{h}$. Как и в теореме 3.1, достаточно доказать ограниченность $|t|^{3/2}\|d/dt\Phi(t)\|$ равномерно для $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in R^{3n}$. Наша техника основывается на разложении вакуумного среднего оператора $\|d/dt\Phi(t)\|^2$ на сумму произведений усеченных вакуумных средних. Так как

$$B_r(\widehat{f}, t)\,\Omega = \frac{d}{dt}B_r(\widehat{f}, t)^*\Omega = 0,$$

то слагаемых, содержащих только двухточечные функции или по крайней мере одну одноточечную функцию, не возникает. Вклад от k-точечной функции $(k \geqslant 3)$, согласно трансляционной инвариантности, является суммой членов

$$\int dp_1, \ldots, dp_k\, \widehat{f}'_1(\mathbf{p}_1), \ldots, \widehat{f}'_k(\mathbf{p}_k) \exp i \times$$
$$\times (\pm\omega_1(\mathbf{p}_1), \ldots, \pm(\omega_k(\mathbf{p}_k))\,t < \widetilde{B}_{r_1}(p_1)^{(*)}_{\alpha_1}, \ldots$$
$$\ldots, \widetilde{B}_{r_k}(p_k)^{(*)}_{\alpha_k} >^T. \tag{5.15}$$

Выражение

$$\int \prod_{i=1}^{k} dp_i^0 \widehat{f}_i^i(\mathbf{p}_i)(1+\mathbf{p}_i^2)^N < \widehat{B}_{r_1}(p_1)_{a_1}^{(*)}, \ldots, \widehat{B}_{r_k}(p_k)_{a_k}^{(*)} >^T,$$

согласно следствию 4.3, имеет вид

$$(2\pi)^{3/2}\,\delta\left(\sum_{i=1}^{k}\mathbf{p}_i\right)\widetilde{\chi}_N(-\mathbf{q}_2, \ldots, -\mathbf{q}_k),$$

где

$$\mathbf{q}_i=\sum_{j=i}^{k}\mathbf{p}_j \quad \text{и} \quad \widetilde{\chi}_N \in \mathcal{S}(R^{3(k-1)})$$

для всех $N \in Z_+$. При переходе к x-пространству (5.15) принимает вид

$$\int \prod_{i=1}^{k} d\mathbf{x}_i f_N^i(\mathbf{x}_i, t)\,\chi_N(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_k), \quad (5.16)$$

где

$$f_N^i(\mathbf{x}, t)=(2\pi)^{-3/2}\int d\mathbf{p}\,(1+\mathbf{p}^2)^{-N}\exp -i\,(\pm\,\omega_i(\mathbf{p})\,t-\mathbf{p}\mathbf{x})$$

является решением уравнения Клейна—Гордона для достаточно больших N, удовлетворяющим [21, 32]

$$\sup_x |f_N^i(\mathbf{x}, t)| \leqslant c_N^i(1+|t|)^{-3/2}; \quad (5.17)$$

$$\int d\mathbf{x}\,|f_N^i(\mathbf{x}, t)| \leqslant d_N^i(1+|t|)^{3/2}.$$

Используя $\chi_N \in \mathcal{S}(R^{3(k-1)})$, мы можем мажорировать (5.15) выражением

$$\prod_{i=1}^{k-1}\sup_x |f_N^i(\mathbf{x}, t)|\int d\mathbf{x} f_N^k(\mathbf{x}, t)\left|\int\prod_{i=1}^{k-1}d\xi_i\right|\chi_N(\xi_1, \ldots$$

$$\ldots, \xi_{k-1})| \leqslant c(1+|t|)^{-3(k-1)/2}. \quad (5.18)$$

Очевидно, что оценки (5.17) и (5.18) равномерны в $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{3n}$. Если неисчезающее произведение усеченных вакуумных средних содержит трехточечную функцию, то оно содержит также $(2l+1)$-точечную функцию ($l \geqslant 1$). Поэтому каждый член в разложении оператора $\|d/dt\Phi(t)\|^2$ ведет себя, по крайней мере, как $O(|t|^{-3})$ при $t \to \pm\infty$, что и требовалось доказать. Тогда интерпретация функций

$$\Phi^{\mathrm{ex}}_{r_1, \ldots, r_n}(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_n)=\lim_{t\to t^{\mathrm{ex}}}\prod_{i=1}^{n}B_{r_i}(\widehat{f}_i, t)^*\,\Omega \quad (5.19)$$

как состояний рассеяния подтверждается аналогией с нерелятивистской зависящей от времени теорией рассеяния. Как и в гл. 3, мы сейчас докажем, что подпространство $\mathfrak{h}^{ex}$, натянутое на состояния (5.19), является пространством Фока над одночастичными пространствами $\mathfrak{h}[m, s]$ и что $U(a, \Lambda)$ действует в пространстве $\mathfrak{h}^{ex}$, как антисимметричное тензорное произведение неприводимых представлений $[m, s]$.

Теорема 5.2. Пусть $\mathfrak{h}^{ex}$ — замыкание линейной оболочки D^{ex} состояний $\Phi^{ex}_{r_1, \ldots, r_n}(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_n)$ и Ω. Тогда асимптотические свободные поля определяются на D^{ex} через

$$a_r^{ex}(\widehat{f})^{(*)}\,\Phi^{ex}_{r_1, \ldots, r_n}(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_n) = \lim_{t \to t^{ex}} B_r(\widehat{f}, t)^{(*)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} B_{r_i}(\widehat{f}_i, t)\,\Omega,$$

$$a_r^{ex}(\widehat{f})^*\,\Omega = \Phi_r(\widehat{f}), \quad a_r^{ex}(\widehat{f})\,\Omega = 0 \tag{5.20}$$

и на D^{ex} они удовлетворяют

$$[a_r^{ex}(\widehat{f}), \quad a_s^{ex}(\widehat{g})]_{\pm} = [a_r^{ex}(\widehat{f})^*, \quad a_s^{ex}(\widehat{g})]_{\pm} = 0, \tag{5.21}$$

$$[a_r^{ex}(\widehat{f}), \quad a_s^{ex}(\widehat{g})^*]_{\pm} = \delta_{rs}(\widehat{f}, \widehat{g})_r,$$

где «+» стоит между двумя операторами Ферми, а «—» — между операторами Бозе, и

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_r = \sum_{\alpha, \beta = -s(r)}^{+s(r)} \int dp\,\theta(p^0)\,\delta(p^2 - m_r^2) \times$$

$$\times \widehat{f}(\mathbf{p})^*_{\beta}\, \underset{m}{D^{s}_{\alpha\beta}}(\widetilde{\mathbf{p}})\,(\widehat{g})(\mathbf{p})_{\alpha}. \tag{5.22}$$

$U(a, \Lambda)$ действует в пространстве $\mathfrak{h}^{ex}$ согласно

$$U(a, \Lambda)\,a_r^{ex}(\widehat{f})\,U(a, \Lambda)^{-1} = a_r^{ex}(U_r(a, \Lambda)\,\widehat{f}). \tag{5.23}$$

Доказательство. Так как $\Phi(t)$ в (5.13) сильно сходится, то можно вычислить скалярное произведение между двумя входящими (выходящими) состояниями из $\lim \langle \Pi B_{r_i}(\widehat{f}_i, t)\,\Pi B_{s_j}(\widehat{g}_j, t)^* \rangle_0$. После разложения по усеченным вакуумным средним при $t \to \pm\infty$ остаются только члены, являющиеся произведениями коэффициентов:

$$<B_{r_i}(\widehat{f}_i,\ t)\,B_{s_j}(\widehat{g}_j,\ t)^*>_0=\delta_{r_i s_j}(\widehat{f}_i,\ \widehat{g}_j)_{r_i}; \tag{5.24}$$

со знаком «$\pm$» — согласно определению усеченного вакуумного среднего для операторов Ферми. Уравнение (5.20) непротиворечиво определяет линейные операторы $a_r^{\text{ex}}(\widehat{f})^{(*)}$ с инвариантной областью D^{ex}, так как при $\Phi(t)=\sum_{i=1}^{m}\Phi_i(t)\to\Phi^{\text{ex}}=0$ всегда имеем

$$\|a_r^{\text{ex}}(\widehat{f})^*\Phi^{\text{ex}}\|^2=\lim_{t\to t^{\text{ex}}}(\Phi(t),\ B_r(\widehat{f},\ t)\,B_r(\widehat{f},\ t)^*\,\Phi(t))=0. \tag{5.25}$$

Правильная связь между спином и статистикой в коммутационных соотношениях (5.21) следует из (5.24) по теореме о спине и статистике для вакуумных средних.

Наконец, докажем лоренц-ковариантность асимптотических полей, которая является непосредственным следствием равенства

$$U(a,\ \Lambda)\lim_{t\to t^{\text{ex}}}\prod_{i=1}^{n}B_{r_i}(\widehat{f}_i,\ t)^{(*)}\,\Omega=$$
$$=\lim_{t\to t^{\text{ex}}}\prod_{i=1}^{n}B_{r_i}(U_{r_i}(a,\ \Lambda)\widehat{f}_i,\ t)^{(*)}\Omega. \tag{5.26}$$

Возвращаясь к (5.10), получаем

$$U(a,\ \Lambda)\,B_r(\widehat{f},\ t)^{(*)}\,U(a,\ \Lambda)^{-1}=B_r^{\Lambda}(U_r(a,\ \Lambda)\widehat{f},\ t)^{(*)}, \tag{5.27}$$

где $B^{\Lambda}(f,\ t)^{(*)}$ определяется как (5.11) с заменой

$\exp\{\pm\ \mathrm{i}\,[p^0-\omega(\mathbf{p})]\,t\}$ на $\exp\{\pm\ \mathrm{i}\,[(\Lambda p)^0-\omega(\Lambda\mathbf{p})]\,t\}$.

Поэтому (5.26) тривиальным образом справедливо также для трансляций и пространственных вращений.

Рассмотрим однопараметрическую группу

$$\Lambda(\lambda)=\left(\begin{array}{cc|cc} \operatorname{ch}\lambda & \operatorname{sh}\lambda & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \operatorname{sh}\lambda & \operatorname{ch}\lambda & & \\ \hline & & 1 & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & & 1 \end{array}\right), \tag{5.28}$$

для которой используем мажорирование

$$\left\|\lim_{t\to\infty}\prod_{i=1}^{n}B_r^{\Lambda(\lambda)}(\widehat{f}_i,\ t)^{(*)}\,\Omega-\lim_{t\to\infty}\prod_{i=1}^{n}B_{r_i}(\widehat{f}_i,\ t)^{(*)}\,\Omega\right\|\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_t^\infty ds \left\{ \left\| \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n B_{r_i}^{\Lambda(\lambda)} (\widehat{f}_i, s)^{(*)} \Omega \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n B_{r_i} (\widehat{f}_i, s)^{(*)} \Omega \right\| \right\} + \left\| \prod_{i=1}^n B_{r_i}^{\Lambda(\lambda)} (\widehat{f}_i\ t)^{(*)} \Omega - \right.$$

$$\left. - \prod_{i=1}^n B_{r_i} (\widehat{f}_i, t)^{(*)} \Omega \right\|.$$

Применяя метод доказательства теоремы 5.1, можно проверить, что первый член в правой части ведет себя как $O(|t|^{-1/2})$ при t, стремящемся к бесконечности равномерно на ограниченных множествах переменной, в то время как второй член можно мажорировать выражением

$$\left| \int\limits_0^\lambda d\mu \left\| \frac{\partial}{\partial\mu} B_{r_i}^{\Lambda(\mu)} (\widehat{f}_i, t)^{(*)} \Omega \right\| \right|. \tag{5.29}$$

Если разложить квадрат подынтегрального выражения по усеченным вакуумным средним, то член, содержащий одночастичные и только двухчастичные функции, не дает вклада (в случае двухчастичных функций — ввиду условия

$$\left. \frac{\partial}{\partial\mu} B_{r_i}^{\Lambda(\mu)} (\widehat{f}_i,\ t)^* \Omega = 0 \right).$$

Остальные члены ведут себя как $O(|t|^{-1/2})$ равномерно для $|\mu| \leqslant \lambda$, так как $\partial/\partial\mu$ уменьшает степень $|t|$ на единицу. Поэтому (5.29) ведет себя, как $O(|t|^{-1/2})$ и (5.28) можно сделать как угодно малым.

Оценки, приводящие к (5.13), показывают, что отображение

$$\{\widehat{f}(p)_\alpha\} \subset \mathcal{S}(R^3) - a_r^{\text{ex}} (\widehat{f})^*$$

непрерывно на D^{ex} в сильной топологии в $\mathfrak{h}$. Поэтому $a_r^{\text{ex}} (\widehat{f})^{(*)}$ определяют свободные асимптотические поля, ковариантные относительно $\mathrm{i}SL(2, C)$, как векторные обобщенные функции умеренного роста, которые полностью определены вакуумными средними.

S-матрица

$$S\Phi^{\text{out}}_{r_1,\ldots,r_n}(\widehat{f_1},\ \ldots,\ \widehat{f_n}) = \Phi^{\text{in}}_{r_1,\ldots,r_n}(\widehat{f_1},\ \ldots,\ \widehat{f_n}), \tag{5.30}$$

очевидно, является изометрическим оператором с областью определения $\mathfrak{h}^{\text{out}}$ и областью значений $\mathfrak{h}^{\text{in}}$; S — унитарна, если постулировать асимптотическую полноту.

Аксиома VI. $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^{\text{ex}}$, где «ex»=«in» или «out». Согласно теореме TCP [22] для $\Theta=TCP$, имеем

$$\theta\Phi^{\text{out}}_{r_1,\ldots,r_n}(\widehat{f_1},\ \ldots,\ \widehat{f_n}) = \Phi^{\text{in}}_{\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_n} \times \times (\widehat{\theta f_1},\ \ldots,\ \widehat{\theta f_n}), \tag{5.31}$$

с

$$(\widehat{\theta f})(\mathbf{p})_\alpha = \mathrm{i}^{F(s)} \sum_\beta \widehat{f}(\mathbf{p})^*_\beta D^s_{\beta\alpha}\left(\mathrm{i}\sigma,\ \frac{\tilde{p}}{m}\right),$$

где $F(s)=1$ для фермионов и нулю для бозонов и $\bar{r}$ обозначает дискретное неприводимое представление, в котором лежит $\theta' B^*{}_r\Omega$. Поэтому равенство $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^{\text{out}}$ влечет за собой $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^{\text{in}}$ и обратно. В дальнейшем мы не будем пользоваться аксиомой асимптотической полноты; отметим только, что можно построить унитарную S-матрицу, если имеет место равенство $\mathfrak{h}^{\text{in}}=\mathfrak{h}^{\text{out}}$ (положив, например, $S=1$ на $\mathfrak{h}^{\text{in}\perp}$). Существуют тривиальные примеры квантовой теории поля, нарушающей аксиому VI, например обобщенное свободное нейтральное поле [69] $A(x)$ с двухточечной функцией

$$\langle A(x)A(y)\rangle_0 = \mathrm{i}\Delta^+_m(x-y) + \mathrm{i}\int\limits_0^\infty d\rho(\mu)\,\Delta^+_\mu(x-y). \tag{5.32}$$

Если мера $d\rho(\mu)$ не обладает δ-видными членами и отличается от нуля, например, в пределах $m<\mu<2m$, то существуют состояния, рождаемые оператором $A(x)$ из Ω, которые уже даже из-за кинематики никогда не могут лежать в $\mathfrak{h}^{\text{ex}}$.

Следующая простая теорема Араки, Хаага и Шрёра [70] показывает, что состояния рассеяния в $\mathfrak{h}^{\text{ex}}$ не зависят от выбора $'B\in\mathfrak{P}$ с $'B^*\Omega\in\mathfrak{h}[m,\ s]$.

Теорема 5.3. Предположим, что $B^*{}_r\Omega$ и $C^*{}_r\Omega$ принадлежит одному и тому же $\mathfrak{h}[m,\ s]$ для $B_r,\ C_r\in\mathfrak{P}$.

Пусть

$$\Phi^{\mathrm{ex}}_{r_1, \ldots, r_n}(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)_B, \quad \Phi^{\mathrm{ex}}_{r_1, \ldots, r_n} \times$$
$$\times (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)_C$$

состояния рассеяния, построенные из $\{B_r\}$ и $\{C_r\}$ соответственно. Тогда

$$\Phi^{\mathrm{ex}}_{r_1, \ldots, r_n}(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)_B =$$
$$= \Phi^{\mathrm{ex}}_{r_1, \ldots, r_n}(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)_C. \tag{5.33}$$

Доказательство. Построим, как и в (5.11), одночастичные операторы рождения и уничтожения $B_r(\hat{f}, t)$, $C_r(\hat{f}, t)$, удовлетворяющие

$$B_r(\hat{f}, t)^* \Omega = C_r(f, t)^* \Omega = \Phi_r(\hat{f}). \tag{5.34}$$

Тогда, согласно (5.24), имеем

$$\left[\Phi^{\mathrm{ex}}_{r_1, \ldots, r_n}(\hat{f}_1, \ldots \hat{f}_n)_B, \ \Phi^{\mathrm{ex}}_{s_1, \ldots, s_m}(\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_m)_B\right] =$$
$$= \delta_{mn} \sum_{P \in S^n} \prod_{i=1}^{n} \delta_{r_i s_{p(i)}} \left(\hat{f}_i, \hat{g}_{p(i)}\right)_{r_i} = \lim_{t \to t^{\mathrm{ex}}} < \prod_{i=1}^{n} B_{r_i}(\hat{f}_i, t) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{m} C_{s_j}(\hat{g}_j, t)^* >_0 = \left[\Phi^{\mathrm{ex}}_{r_1, \ldots, r_n} \times\right.$$
$$\left. \times (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)_B, \ \Phi^{\mathrm{ex}}_{s_1, \ldots, s_m}(\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_m)_C\right], \tag{5.35}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5.3 придает важный физический смысл понятию класса Борхерса локальных полей (см. гл. 2). Если два поля $B(x)$ и $C(x)$, принадлежащие классу Борхерса локального неприводимого поля $A(x)$, рождают одночастичные состояния в одном и том же $\mathfrak{h}$ $[m, s]$ из Ω, то предположения теоремы 5.3 удовлетворяются [71]. Следующее отсюда равенство амплитуд рассеяния было доказано ранее Борхерсом в рамках формализма ЛСЦ [38].

Есть случаи, когда имеет место только асимптотическое условие Хаага — Рюэля в слабой топологии в $\mathfrak{h}$. Приведем теорему Хаага [64] и Араки [32].

Теорема 5.4. Для любого $B_i \in \mathfrak{P}$ с $<B_i>$-оиг и $0=0$ бого собственного значения m_i^2 оператора квадрата массы (P, P) определим $\tilde{B}_i(p)$, как и в (5.5), а также

$$B_i(t) = \int dp \tilde{B}_i(p) \exp - \mathrm{i}\left(p^0 - \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}^2}\right) t. \quad (5.36)$$

Тогда для любого

$$\psi(t) = \prod_{i=1}^{n} B_i(t)^{(*)} \Omega$$

существует состояние $\psi^{ex} \in \mathfrak{H}^{ex}$, такое, что для всех $\Phi^{ex} \in \mathfrak{H}^{ex}$

$$\lim_{t \to t^{ex}} (\Phi^{ex}, \psi(t)) = (\Phi^{ex}, \psi^{ex}). \quad (5.37)$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\|\psi(t)\|^2$ равномерно ограничено по t при разложении ее по усеченным вакуумным средним. Согласно теореме 5.1, при $t \to \pm\infty$ остаются только выражения, зависящие от двухточечных функций; они имеют вид

$$<B_i(t) B_j(t)^*>_0 = (2\pi)^4 \int e^{\mathrm{i}[\omega_i(p) - \omega_j(p)]t} <B_i dE(p) B_j^*>_0, \quad (5.38)$$

$$<B_i(t) B_j(t)>_0 = (2\pi)^4 \int e^{\mathrm{i}[\omega_i(p) + \omega_j(p)]t} <B_i dE(p) B_j>_0. \quad (5.39)$$

Выражение (5.38) не зависит от времеии для $m_i = m_j$. Во всех остальных случаях (5.38) и (5.39) убывают как $|t|^{-3/2}$ при $t \to \pm\infty$, так как, согласно следствию 4.3, меры

$$<B_i dE(p) B_j^{(*)}>_0,$$

проинтегрированные по p^0, являются функциями в $\mathcal{S}(\mathbf{p})$ и к ним применима оценка, использованная в [21]. Отсюда и ограниченность $\|\psi(t)\|$.

Чтобы не усложнять комбинаторику, рассмотрим случай одного лишь $[m, s]$ с $B^*\Omega \in \mathfrak{H}[m, s]$. Пусть $E[m, s]$ — проектор на $\mathfrak{H}[m, s]$ и

$$\Phi(\widehat{f_i}) = E[m, s] B_i^*(t) \Omega. \quad (5.40)$$

Выполним всевозможные свертки k всех операторов $B_j(t)$ с любым $B_k(t)^*$, стоящим справа от B_j, или с $B_l(t)^*$, стоящим слева, в результате получим $<B_j B^*_k>_0$

и $\langle B^*_l B_j \rangle_0$ соответственно и умножим произведение этих множителей на $\Phi^{ex}(\hat{f}_{k_1}, \ldots, \hat{f}_{k_k})$, где несвернутыми $B_i(t)^*$ остаются только $\hat{f}_{k_i}$. Пусть $\psi^{ex} = \sum_k C_k \Phi^{ex}(\hat{f}_{k_1}, \ldots, \hat{f}_{k_k})$. Тогда можно показать, как и в предыдущем случае, для всех $\prod_{j=1}^{m} B^*(g_j, t)\Omega$, что

$$\lim_{t \to t^{ex}} \left[\prod_{j=1}^{m} B^*(\hat{g}_j, t)\Omega, \ \psi(t) \right] =$$

$$= [\Phi^{ex}(\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_m) \psi^{ex}]. \tag{5.41}$$

Соотношение (5.37) можно доказать неравенством треугольника. Пусть $\Phi^{ex} \in \mathfrak{H}^{ex}$ произвольно; выберем последовательность состояний $\Phi_\nu^{ex} \in D^{ex}$ с $\Phi_\nu^{ex} \to \Phi^{ex}$ и последовательность Хаага—Рюэля $\Phi_\nu(t) \to \Phi_\nu^{ex}$ для $t \to t^{ex}$. Тогда

$$|(\Phi^{ex}, \psi(t)) - (\Phi^{ex}, \psi^{ex})| \leqslant |(\Phi^{ex}, \psi(t)) - (\Phi_\nu^{ex}, \psi(t))| +$$

$$+ |(\Phi_\nu^{ex}, \psi(t)) - (\Phi_\nu(t), \psi(t))| + |(\Phi_\nu(t), \psi(t)) -$$

$$- (\Phi_\nu^{ex}, \psi^{ex})| + |(\Phi_\nu^{ex}, \psi^{ex}) - (\Phi^{ex}, \psi^{ex})|. \tag{5.42}$$

При $t \to t^{ex}$ все члены можно сделать меньше любого $\varepsilon > 0$ прежде всего выбором соответствующего $\nu(\varepsilon)$ и мажорированием первого и четвертого членов равномерно по t, использовав равномерную ограниченность $\|\psi(t)\|$; затем выбором $t(\varepsilon, \nu)$, такого, чтобы второй и третий члены были как угодно малы для фиксированных $\nu > \nu(\varepsilon)$ и $t \geqslant t(\varepsilon, \nu)$, что и требовалось доказать.

Результаты этой главы снова иллюстрируют нетривиальный характер аксиом Вайтмана. Существование одночастичных состояний, образованных полиномами в (почти) локальных полях, влечет за собой существование пространств Фока многочастичных состояний рассеяния, на которых $U(a, \Lambda)$ действует, как в теории свободных полей.

ГЛАВА 6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ЛСЦ

В этой главе мы постараемся достичь некоторой свободы в обращении со взаимодействующими и асимптотическими полями.

В нерелятивистской теории рассеяния мы доказали асимптотическое условие сильной сходимости для операторов

$$B_\alpha(\hat{f}, t)^{(*)}$$

на плотной области $\mathfrak{h}_\infty \subset \mathfrak{h}$. Руководствуясь опытом из области перенормируемой теории возмущений, Леман, Симанзик и Циммерманн [73, 72] основали свой подход к теории поля на асимптотическом условии слабой сходимости для полевых операторов к асимптотическим свободным полям *. Получим их постулаты из теории столкновений Хаага — Рюэля.

После подробного рассмотрения наиболее общего случая одночастичных состояний с произвольным спином образованных из Ω с помощью произвольного $B^* \in \mathfrak{P}$, возвратимся к модели скалярной теории поля одного сорта скалярных частиц. Предположим, что $A(x)$ рождает из Ω одночастичные состояния с массой m и что массовый континуум начинается в $2m$. Ковариантные одночастичные операторы рождения даются формулой

$$A(f, t)^* = \alpha \int dp \tilde{f}(p) \tilde{A}(-p) e^{i(p^0 - \omega)t}, \tag{6.1}$$

где $\hat{f} \in \mathscr{S}(G) = \{\hat{f} \in \mathscr{S}(R^4) : \operatorname{supp} \tilde{f} \subset G\}$
и $G = \{p^0 > 0, \quad 0 < (p, p) < 4m^2\}$.

Имеем

$$A(f, t)^* \Omega = \Phi(\hat{f}), \quad A(f, t)\Omega = 0, \tag{6.2}$$

где $\hat{f}(p) = \tilde{f}(\omega, \mathbf{p})$ и нормировка такова, что

$$(\Phi(\hat{f}), \Phi(\hat{g})) = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega} \hat{f}(\mathbf{p})^* \hat{g}(\mathbf{p}).$$

---

* Другой подход, основанный на использовании функциональных производных S-матрицы, был предложен и развит Боголюбовым Н. Н. (см. [18]). — *Прим. ред.*

Согласио теореме Хаага — Рюэля, для $\{\tilde{f}_i\}\subset\mathscr{S}(G)$

$$\prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^*\Omega\to\Phi^{ex}(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_n) \text{ при } t\to t^{ex}. \tag{6.3}$$

Если $\tilde{f}_i\subset\mathscr{S}(R^4)$ ие удовлетворяет иикаким ограничениям иа иосители, то по-прежиему имеется слабая сходимость в $\mathfrak{h}^{ex}$, иапример, в простейшем случае

$$\left(\psi^{ex}, \prod_{i=1}^{m} A(f_i, t)^*\Omega\right)\to(\psi^{ex}, \Phi^{ex}(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m)),$$

$$\left(\psi^{ex}, \prod_{i=1}^{m} A(f_i, t)\prod_{j=1}^{n} A(g_j, t)^*\Omega\right)\to$$

$$\to\left(\psi^{ex}, \prod_{i=1}^{m} a^{ex}(\widehat{f}_i)\Phi^{ex}(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_n)\right) \tag{6.4}$$

для

$$\{\tilde{f}_i\}\subset\mathscr{S}(R^4), \quad \{\tilde{g}_j\}\subset\mathscr{S}(G) \quad \text{и} \quad \psi^{ex}\in\mathfrak{h}^{ex}.$$

В теореме 5.1 мы пользовались довольио грубыми оценками для получения поведения у предела (6.3) типа $O(|t|^{-1/2})$. Для большого класса состояний рассеяиия, в которых асимптотические частицы двигаются по расходимым орбитам, оценки Рюэля могут быть улучшены вплоть до $O(|t|^{-\infty})$ (т. е. $O(|t|^{-N})$ для произвольного $N\geqslant 0$). Характерной особенностью общей квантовой теории поля является то, что эту ситуацию — наряду с меиее тривиальиыми проблемами — можио, по существу, рассматривать с помощью геометрического подхода.

Функции из миожества $\{\tilde{f}_i\}\subset\mathscr{S}(G)$ называются иеперекрывающимися, если иосители $\{\tilde{f}_i\}$ попарно разъедииены в пространстве скоростей, т. е. если для всех $p_i\in\operatorname{supp}\tilde{f}_i$:

$$\mathbf{p}_i\omega_i^{-1}\neq\mathbf{p}_j\omega_j^{-1} \text{ при } i\neq j. \tag{6.5}$$

Аиалогично фуикции из $\{\tilde{f}_i\}\subset\mathscr{S}(R^3)$ иазываются иеперекрывающимися, если (6.5) имеет место для всех $p_i\in\operatorname{supp}\widehat{f}_i$. Как хорошо известио из простраиствеиио-времеииых оцеиок решеиий уравиения Клейиа — Гордона [21], движение волнового пакета в x-пространстве характеризуется скоростями, а не импульсами.

Теорема 6.1. Для неперекрывающегося множества $\{f_i\}\subset\mathscr{S}(G)$

$$\left\| \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{n} A(f_i,\ t)^{(*)}\Omega \right\|^2 \in\mathscr{S}(t). \tag{6.6}$$

Доказательство. Для улучшения результатов теоремы 5.1 будем изучать усеченное вакуумное среднее полевых операторов с $k\geqslant 3$

$$< \prod_{\nu=1}^{k} A(f_{i_\nu},\ t)^{(*)}>^T,$$

получаемое из (6.6). В таком члене либо первых два, либо последних два f_{i_ν} неперекрывающиеся. Рассмотрим, например, случай с $A(f_{i_1},\ t)$, $A(f_{i_2},\ t)$, $i_1\neq i_2$ в качестве первых двух коэффициентов. По трансляционной инвариантности усеченное вакуумное среднее принимает вид

$$\int\prod_{i=1}^{k} dp_i \prod_{\nu=1}^{2}\tilde{f}_{i_\nu}(-p_\nu)\,e^{i\omega_\nu t}\prod_{\nu=3}^{k}\tilde{f}^*_{i_\nu}(\pm p_\nu)\,e^{\pm i\omega_\nu t}\times$$

$$\times\mathfrak{M}(p_1,\ .\ .\ .\ ,\ p_k)^T=\int\prod_{\nu=2}^{k} d\mathbf{p}_\nu\,\chi(\mathbf{p}_2,\ .\ .\ .\ ,\ \mathbf{p}_k)\times$$

$$\times\exp i\,\Omega(\mathbf{p}_2,\ .\ .\ .\ ,\ \mathbf{p}_k)\,t, \tag{6.7}$$

где

$$\Omega(\mathbf{p}_2,\ .\ .\ .\ ,\ \mathbf{p}_k)=\omega\left(\sum_{\nu=2}^{k}\mathbf{p}_\nu\right)+\omega(\mathbf{p}_2)+\sum_{\nu=3}^{k}\pm\,\omega(\mathbf{p}_\nu)$$

и

$$\chi(\mathbf{p}_2,\ .\ .\ .\ ,\ \mathbf{p}_k)=\int dp_1\tilde{f}_{i_1}(-p_1)\times$$

$$\times\prod_{\nu=2}^{k} dp_\nu^0\tilde{f}_{i_\nu}^{(*)}(\pm p_\nu)\,\mathfrak{M}(p_1,\ .\ .\ .\ ,\ p_k)^T, \tag{6.8}$$

согласно теореме 4.5, принадлежит $\mathscr{S}(R^{3(k-1)})$. Так как f_{i_1} и f_{i_2} неперекрывающиеся, то

$$\frac{d\Omega}{d\mathbf{p}_2}=\omega\left(\sum_{\nu=2}^{k}\mathbf{p}_\nu\right)^{-1}\sum_{\nu=2}^{k}\mathbf{p}_\nu+\omega(\mathbf{p}_2)^{-1}\mathbf{p}_2\neq 0 \tag{6.9}$$

в $\operatorname{supp}\chi$. Тогда существуют функции $\alpha_i(\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k)\in\Theta_M$, $1\leqslant i\leqslant 3$, такие, что $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i \equiv 1$ и $\frac{d\Omega}{dp_2^i}\neq 0$ в $\operatorname{supp}\alpha_i$. Поэтому преобразование $\Omega \leftrightarrow p_2^i$ регулярно в $\operatorname{supp}\alpha\chi$, и мы имеем

$$\int \prod_{\nu=2}^{k} d\mathbf{p}_\nu \alpha_i(\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k)\,\chi(\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_k)\,e^{i\Omega t} \in \mathscr{S}(R^1) \quad (6.10)$$

для $1\leqslant i\leqslant 3$. Так как коэффициенты (6.7) в разложении выражения $\left\| \frac{d}{dt}\Pi A(f_i,\ t)^{(*)}\Omega \right\|^2$ ограничены по t, то теорема 6.1 доказана. Наше мажорирование тривиальным образом может быть обобщено на произвольные неперекрывающиеся $\tilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_n)\in\mathscr{S}(G^{\times n})$, которые не обязательно имеют вид $\tilde{f}_1\otimes\ldots\otimes\tilde{f}_n$.

Теорема 6.1 имеет несколько важных следствий.

1. Возможна непосредственная интерпретация $\Phi^{\mathrm{ex}}(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n)$ для неперекрывающихся $\{\hat{f}_i\}\subset\mathscr{S}(R^3)$ с использованием локальных наблюдаемых в качестве «счетчиков Гейгера» [74].

2. Стремление к пределу Хаага — Рюэля, как $O(|t|^{-\infty})$, для неперекрывающихся конфигураций не вызывает удивления в теории с короткодействующими силами. Оно не зависит от размерности в нормальном гиперболическом пространстве — времени. Поэтому даже в модельном приближении [75] одно- или двумерного пространства, когда волновые пакеты (5.17) убывают очень медленно, возможно построение разумной теории столкновений.

3. Теперь мы в состоянии дать прямое доказательство асимптотического условия Хаага — Рюэля (и ЛСЦ) для почти локальных полей без использования явных оценок пространственной асимптотической факторизации вакуумных средних. Рассмотрим однопараметрическое семейство основных функций для $\tilde{f}\in\mathscr{S}(R^4)$:

$$f(x,\ t) = \alpha(2\pi)^{-2}\int dp\, e^{-i(p,\ x)}\tilde{f}(p)\,e^{i(p^0-\omega)t} \quad (6.11)$$

является решением уравнения Клейна — Гордона для класса, рассматриваемого Рюэлем [21] и Араки [32]. Поэтому имеет место следующая равномерная оценка:

$$|f(x,\ t)| \leqslant C_M(1+|x^0-t|)^{-M}(1+x^2+t^2)^{-3/4} \quad (6.12)$$

для $x \in C_\eta(f, t)$ и

$$|f(x, t)| \leqslant C_{MN}(1 + |x^0 - t|)^{-M}(1 + x^2 + t^2)^{-N} \quad (6.13)$$

для остальных случаев.

Здесь $C_\eta(f, t)$ определено как множество точек $\mathbf{x} = \mathbf{p}\omega^{-1}t$, возникающих по крайней мере из одного p в η-окрестности $\operatorname{supp} \tilde{f}$ с фиксированным $\eta > 0 \cdot C_M$, $C_{MN} < \infty$ для всех M, $N \in Z_+$ являются константами, не зависящими от (x, t). За исключением экспоненты 3/4 в (6.12) (которая для наших целей может быть заменена тривиальной экспонентой 0), мажорирования (6.12) и (6.13) легко могут быть получены интегрированием по частям.

Легко увидеть, что $f(x, t)$ вместе со всеми производными быстро убывает при удалении от своего «существенного носителя»:

$$S_{\eta_0}(f, t) = \{x : x^0 = t, \ \mathbf{x} \in C_{\eta}(f, t)\}. \quad (6.14)$$

Используем соотношение $d/dtA(f, t)^*\Omega = 0$ и напишем

$$\left\| \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^{(*)}\Omega \right\|^2$$

в виде конечной суммы членов

$$\pm < A(f_n, t) \ldots \left[\frac{d}{dt} A(f_i, t)^{(*)}, A(f_j, t)^{(*)}\right] \cdot \\ \ldots A(f_n, t)^* >_0 \quad (6.15)$$

с $i \neq j$. Для неперекрывающихся $\{f_i\} \subset \mathscr{S}(G)$ существенные носители $S_\eta(f_i, t)$ и $S_\eta(f_j, t)$ разделены в пространственноподобных направлениях линейно по t (для достаточно малых $\eta > 0$). Ввиду (почти) локальности, коммутатор дает вклад порядка $O(|t|^{-\infty})$, компенсирующий полиномиальный рост по другим переменным. Это доказывает теорему 6.1, содержащую асимптотическое условие Хаага — Рюэля (и ЛСЦ).

В случае нулевой массы свободный волновой пакет

$$f(x) = \int \frac{dp}{2|\mathbf{p}|} \hat{f}(\mathbf{p}) e^{-i(x^0|p| - \mathbf{p}\mathbf{x})}, \quad (6.16)$$

где $\hat{f} \in \mathscr{S}(R^3)$ и $0 \notin \operatorname{supp} f$, движется в x-пространстве со скоростью света в направлении $\mathbf{p}|\mathbf{p}|^{-1}$, $\mathbf{p}\in\operatorname{supp}\hat{f}$. Хотя пространственное условие в этом случае слишком слабо, вышеизложенные соображения тоже дали бы неперекрывающиеся n-частичные состояния рассеяния в сильной сходимости, если бы существовал (почти) локальный $B\in\mathfrak{P}$ с B^*, рождающим из Ω в точности одночастичное состояние. Однако нет оснований верить, что такое решение одночастичной задачи в терминах локальных полей возможно для частиц с нулевой массой. Трудности, связанные с асимптотическим условием в случае нулевой массы, рассматриваются в работах [76—78].

4. Существует нетривиальное расширение областей для неограниченных операторов $B\in\mathfrak{P}$ над D.

Пусть $\breve{\varphi}\in\mathscr{S}(G^{\times n})$ — неперекрывающееся состояние; определим

$$\Phi(\varphi, t)=\alpha^n\int dp\tilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_n)\times$$
$$\times\exp i\sum_{r=1}^{n}(p_r^0-\omega_r)\,t\prod_{r=1}^{n}\tilde{A}(-p_n)\,\Omega \qquad (6.17)$$

и пусть $\Phi^{\mathrm{ex}}(\widehat{\varphi})$ его асимптотический предел. Для любого $B\in\mathfrak{P}$, согласно неравенству Шварца, имеем

$$\left\|B\frac{d}{dt}\Phi(\varphi, t)\right\|^2\leqslant\left\|\frac{d}{dt}\Phi(\varphi, t)\right\|\times$$
$$\times\left\|B^*B\frac{d}{dt}\Phi(\varphi, t)\right\|. \qquad (6.18)$$

Вследствие умеренного роста вакуумных средних второй множитель в правой части растет самое большее полиномиально по $|t|$, первый же ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$ для $t\to\pm\infty$. Поэтому $B\Phi(\varphi, t)$ тоже сходится при $t\to\pm\infty$ в сильной топологии.

Для любого $B\in\mathfrak{P}$ замыкание $\bar{B}=B^{**}$ существует (см. гл. 2). Поэтому для неперекрывающихся $\breve{\varphi}\in\mathscr{S}(G^{\times n})$

$$\lim_{t\to\pm\infty}B\,\Phi(\varphi, t)=\bar{B}\Phi^{\mathrm{ex}}(\widehat{\varphi}). \qquad (6.19)$$

Пусть D_0^{ex} — линейная оболочка всех $\Phi^{\mathrm{ex}}(\widehat{\varphi})$ с неперекрывающимися полностью симметричными $\widehat{\varphi}(\mathbf{p}_1,\ldots$

..., $\mathbf{p}_n)\in\mathcal{S}(R^{3n})$, $n=1, 2, \ldots$, вместе с Ω. D_0^{ex} плотно в $\mathfrak{H}^{ex}$, так как состояния $\hat{\varphi}(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)$ плотны в L^2-пространстве всех полностью симметричных $\hat{\varphi}$, а

$$\int \prod dp_\nu\, \theta(p^0)\, \delta(p_\nu^2 - m^2)\, |\varphi(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n)|^2 < \infty.$$

Все одночастичные состояния с $\hat{f}\in\mathcal{S}(R^3)$ принадлежат D_0^{ex}.

На D_0^{ex} замыкания $\overline{B}$ тоже являются операторными функциями умеренного роста, как и исходные B на D. По определению замыкания для $B_1, B_2\in\mathfrak{P}$ имеем

$$B_1B_2\Phi(\varphi, t) \to \overline{B_1B_2}\,\Phi^{ex}(\hat{\varphi}) = \overline{B}_1(\overline{B}_2\Phi^{ex}(\hat{\varphi})). \qquad (6.20)$$

Поэтому $\overline{B}$ можно свободно умножать на D_0^{ex} и $[B_1, B_2]D_0^{ex}=0$, если основные функции в $B_1, B_2\in\mathfrak{P}$ имеют пространственноподобные носители. Далее,

$$U(a, \Lambda)\overline{B}U(a, \Lambda)^{-1} D_0^{ex} = \overline{U(a, \Lambda)BU(a, \Lambda)^{-1}}\, D_0^{ex}.$$

Пусть $B(\psi) = \int dx_1, \ldots, dx_n\, \psi(x_1, \ldots, x_n) \times \times A(x_1), \ldots, A(x_n)$ для $\psi\in\mathcal{S}(R^{4n})$. Отображение $\psi \to \to \overline{B(\psi)}\Phi^{ex}$, $\Phi^{ex}\in D_0^{ex}$ линейно. Предположим, что последовательность $\{\psi_\nu\}$ сходится в $\mathcal{S}(R^{4n})$. Тогда для любого

$$\Phi^{out}(\hat{\varphi})\in D_0^{out}$$

$$\|\overline{B(\psi_\nu)}\,\Phi^{out}(\hat{\varphi})\| \leqslant \|B(\psi_\nu)\Phi(\varphi, t)\| +$$

$$+\int_t^\infty ds \left\| \frac{d}{ds} B(\psi_\nu)\,\Phi(\varphi, s)\right\|. \qquad (6.21)$$

Квадрат подынтегрального выражения можно мажорировать с помощью (6.18) конечной суммой членов

$$\sum\nolimits_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} C^N_{\alpha\beta\gamma\delta} \sup_x |x^\alpha D_x^\beta \psi_\nu| \sup_y |y^\gamma D_y^\delta \psi_\nu|, \qquad (6.22)$$

где $C^N_{\alpha\beta\gamma\delta} < \infty$ для всех $N\geqslant 0$. Поэтому условие $\psi_\nu \to 0$ в $\mathcal{S}(R^4)$ влечет за собой $\|\overline{B(\psi_\nu)}\,\Phi^{ex}(\hat{\varphi})\| \to 0$. Эти свойства D_0^{ex} оправдывают принятое обозначение $B\Phi^{\mathrm{ex}}$ для $\bar{B}$, действующего на $\Phi^{\mathrm{ex}} \in D_0^{\mathrm{ex}}$.

Мы подвели основу для вывода асимптотического условия ЛСЦ [79, 74] в виде, пригодном для многих приложений квантовой теории поля.

Теорема 6.2. Пусть $\Phi^{\mathrm{ex}} \in D_0^{\mathrm{ex}}$ и $\{f_i\} \subset \mathscr{S}(G)$. Тогда

$$\lim_{t \to t^{\mathrm{ex}}} \prod_{j=1}^{m} A(f_j, t)^* \Phi^{\mathrm{ex}} = \prod_{i=1}^{n} a^{\mathrm{ex}}(\widehat{f}_i)^{(*)} \Phi^{\mathrm{ex}} \tag{6.23}$$

в сильной сходимости в $\mathfrak{h}$. Для произвольного $\{\tilde{g}_j\} \subset \mathscr{S}(R^4)$ имеем слабую сходимость в $\mathfrak{h}^{\mathrm{ex}}$, например,

$$\lim_{t \to t^{\mathrm{ex}}} \left(\psi^{\mathrm{ex}}, \prod_{j=1}^{m} A(g_j, t)^* \Phi^{\mathrm{ex}}\right) = \left(\psi^{\mathrm{ex}}, \prod_{j=1}^{m} a^{\mathrm{ex}}(\widehat{g}_j)^* \Phi^{\mathrm{ex}}\right),$$

$$\lim_{t \to t^{\mathrm{ex}}} \left(\psi^{\mathrm{ex}}, \prod_{j=1}^{m} A(g_j, t) \prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^* \Phi^{\mathrm{ex}}\right) = \\ = \left(\psi^{\mathrm{ex}}, \prod_{j=1}^{m} a^{\mathrm{ex}}(\widehat{g}_j) \prod_{i=1}^{n} a^{\mathrm{ex}}(\widehat{f}_i)^* \Phi^{\mathrm{ex}}\right), \tag{6.24}$$

где $\{\tilde{f}_i\} \subset \mathscr{S}(G)$, $\psi^{\mathrm{ex}} \in \mathfrak{h}^{\mathrm{ex}}$, $\Phi^{\mathrm{ex}} \in D_0^{\mathrm{ex}}$.

Доказательство. Все выражения полностью определены. Будем аппроксимировать, например, $\Phi^{\mathrm{out}}(\widehat{\varphi})$ функцией $\Phi(\varphi, t)$, используя

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^{(*)} \Phi^{\mathrm{out}}(\widehat{\varphi}) - \prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^{(*)} \Phi(\varphi, t) \right\| \leqslant \tag{6.25}$$

$$\leqslant \int_t^{\infty} ds \left\| \prod_{i=1}^{n} A(f_i, t)^{(*)} \frac{d}{ds} \Phi(\varphi, s) \right\|.$$

Подынтегральное выражение ограничено функцией $d_K(1+|s|)^{-K}(1+|t|)$ с L фиксированным и $d_K < \infty$ для всех $K \in Z_+$. Тогда из сильной и слабой формы сходимости теоремы Хаага — Рюэля следует (6.23) и (6.24). Обобщение на случай произвольных спинов и связанных состояний тривиально.

Теоремы 5.1, 5.4 и 6.2 синтезируют различные подходы Хаага и Лемана — Симанзика — Циммерманна к асимптотическому условию. Грубо говоря, имеем сильную сходимость для полей, сглаженных основными функциями без носителя в континууме и слабую сходимость — в остальных случаях. Следует отметить некоторые технические особенности: а) поля следует интегрировать по четырехмерным основным функциям [79]; б) для $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^{ex}$ слабую сходимость получаем только на $\mathfrak{h}^{ex}$; в) асимптотическое условие ЛСЦ было доказано только на неперекрывающихся состояниях в D_0^{ex}.

Остается открытым вопрос о том, на какой максимальной области имеет место асимптотическое условие ЛСЦ. Руководствуясь опытом из теории свободных полей и локальных колец [32], сделаем обычное предположение о том, что поля ограничены на любом подпространстве с ограниченной энергией и удовлетворяют на них асимптотическому условию.

ГЛАВА 7. РЕДУКЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Амплитуды рассеяния однозначно задаются некоторыми пределами функций Вайтмана, существование которых обеспечивается теоремой 5.1:

$$(\Phi^{out}(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m), \quad \Phi^{in}(\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_n)) =$$

$$= \lim_{\substack{s\to+\infty \\ s\to-\infty}} \alpha^{m+n} \int \prod_{i=1}^{m} dp_i \widetilde{f}_i(p_i)^* \, e^{-i\left(p_i^0 - \omega_i\right)s} \prod_{j=1}^{n} dq_j \widetilde{g}_j(q_j) \times$$

$$\times e^{i\left(q_j^0 - \omega_j\right)t} \, \widetilde{\mathfrak{M}}_{m+n}(p_1, \ldots, -q_n). \qquad (7.1)$$

Из (7.1) не очевидно, что правая часть является обобщенной функцией умеренного роста на массовой поверхности, и трудно проанализировать следствия, локальности и спектрального условия рассматриваемой теории поля, ведущие к аналитическим свойствам амплитуд рассеяния.

С помощью простых выкладок ЛСЦ получили в изящном виде связь между амплитудами рассеяния и некоторыми граничными значениями обобщенных запаздывающих функций [73, 72]. Простейшим примером так называемых редукционных формул являются уравнения Янга — Фельдмана [80], которые часто рассматриваются как альтернативная формулировка асимптотического условия.

Теорема 7. 1. Для $\psi^{ex} \in D_0^{ex}$ и $j(x) = (\Box + m^2) A(x)$ свертка

$$\int dy \Delta_m^{\substack{ret\\adv}} (x-y)\, j(y)\, \psi^{\substack{in\\out}}$$

существует в виде векторной обобщенной функции умеренного роста, и мы имеем

$$A(x)\,\psi^{\substack{in\\out}} = A^{\substack{in\\out}}(x)\,\psi^{\substack{in\\out}} + \int dy \Delta_m^{\substack{ret\\adv}} (x-y)\, j(y)\, \psi^{\substack{in\\out}}. \quad (7.2)$$

Предполагаем, что в (6.1) $\alpha = (2\pi)^{-1/2}$, и по определению

$$A^{ex}(\varphi) = \sqrt{2\pi}\,\{a^{ex}(\hat{\varphi}_1)^* + a^{ex}(\hat{\varphi}_2^*)\} \quad \text{для} \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(R^4)$$

и $\hat{\varphi}_1(\mathbf{p}) = \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{p})$, $\hat{\varphi}_2(\mathbf{p}) = \tilde{\varphi}(-\omega, -\mathbf{p})$ [см. (2.14)].

Доказательство. Выберем $\tilde{\alpha}_i \in \Theta_M(R^4)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ с

$$\sum_{i=1}^{3} \tilde{\alpha}_i(p) \equiv 1 \text{ и}$$

$$\operatorname{supp} \tilde{\alpha}_1 \subset \left\{ |(p, p) - m^2| < \frac{1}{2} m^2;\ p^0 > 0 \right\},$$

$$\operatorname{supp} \tilde{\alpha}_2 \subset \left\{ |(p, p) - m^2| < \frac{1}{2} m^2,\ p^0 < 0 \right\},$$

$$\operatorname{supp} \tilde{\alpha}_3 \cap \left\{ |(p, p) - m^2| < \frac{1}{4} m^2 \right\} = \Phi. \quad (7.3)$$

Расщепление $\tilde{f}(p) \to \tilde{f}_i(p) = \tilde{\alpha}_i(p) \tilde{f}(p)$ непрерывно в $\mathcal{S}(R^4)$. Для всех $\psi^{in} \in D_0^{in}$ рассмотрим выражение $2\pi A(f_1, s) * \psi^{in}$, из которого имеем $A(f_1)\psi^{in}$ для $s = 0$ и $A^{in}(f_1)\psi^{in}$ — для $s \to -\infty$. C^∞-функция $F_1(s) = d/ds \sqrt{2\pi} A(f_1, s) * \psi^{in}$ удовлетворяет

$$\|F_1(s)\| \leqslant c_1 (1 + |s|)^{-3/2}. \quad (7.4)$$

Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{0} ds e^{\varepsilon} F_1(s)$ равномерно сходится для $\varepsilon \geqslant 0$, и операции $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}$ и $\int\limits_{-\infty}^{0}$ можно переставить местами:

$$A(f_1)\psi^{in} - A^{in}(f_1)\psi^{in} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{0} ds e^{\varepsilon s} F_1(s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{0} ds i \times$$

$$\times \int dp \tilde{f}_1(p)\, e^{is(p^0 - \omega - i\varepsilon)} (p^0 - \omega)\, \tilde{A}(-p)\, \psi^{in}. \quad (7.5)$$

Отметим, что $p^0+\omega \geqslant m$ в supp $\tilde{f}_1$, и для $\varepsilon > 0$ в топологии $\mathscr{S}(R^4)$ имеем

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{\tilde{f}_1(p) \exp i s (p^0-\omega-i\varepsilon)}{(p^0+\omega)(p^0-\omega-i\varepsilon)} = 0. \tag{7.6}$$

Используя это условие, можно проинтегрировать (7.5) по s:

$$A(f_1)\psi^{in} - A^{in}(f_1)\psi^{in} = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int dp \frac{\tilde{f}_1(p)}{(p^0+\omega)(p^0-\omega-i\varepsilon)} \times$$

$$\times \tilde{j}(-p)\psi^{in} = \int dx f_1(x)\Delta_m^{ret}(x-y) j(y)\psi^{in}, \tag{7.7}$$

где [27]

$$\Delta_m^{\substack{ret\\adv}}(\xi) = -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{dk e^{-i(k,\xi)}}{(k^0\pm i\varepsilon)^2-\mathbf{k}^2-m^2}. \tag{7.8}$$

Аналогично можно показать, что

$$A(f_2)\psi^{in} - A^{in}(f_2)\psi^{in} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int dp \frac{\tilde{f}_2(p)}{(p^0+\omega-i\varepsilon)(p^0-\omega)}\tilde{j}(-p)\psi^{in}. \tag{7.9}$$

Ввиду того что массовая поверхность лежит вне носителя функции $\tilde{f}_3$, имеем $A^{in}(f_3)=0$ и $A(f_3)\psi^{in} = \int dx f_3(x)\Delta_m^{ret}(x-y)j(y)\psi^{in}$. Сумма этих трех вкладов дает (7.2) в качестве тождества обобщенных функций.

Возьмем матричный элемент оператора $A(x)$ между $\Phi^{out}\in D_0^{out}$ и $\psi^{in}\in D_0^{in}$, затем используем (7.2) и тождество $\Delta_m^{adv}(\xi)-\Delta_m^{ret}(\xi)=\Delta_m(\xi)$. Тогда

$$(A^{out}(x)\Phi^{out}, \psi^{in}) - (\Phi^{out}, A^{in}(x)\psi^{in}) =$$

$$= \int dy \Delta_m(x-y)(\Phi^{out}, j(y)\psi^{in}). \tag{7.10}$$

В импульсном пространстве правая часть принимает вид

$$\varepsilon(p^0)\delta((p,p)-m^2)[(p,p)-m^2](\Phi^{out}, \tilde{A}(-p)\psi^{in}).$$

Это выражение полностью определено как сужение непрерывной функции к массовой оболочке в связи с асимптотическим условием. Существенно, что

$$F(t) = \int dp \tilde{f}(p) e^{i(p^0-\omega)t} [(p, p) - m^2] (\Phi^{out}, \tilde{A}(\pm p) \psi^{in}) =$$

$$= -i \frac{d}{dt} \int dp \tilde{f}(p) (p^0 + \omega) e^{i(p^0-\omega)t} (\Phi^{out}, \tilde{A}(\pm p) \psi^{in}) \quad (7.11)$$

ведет себя, как $O(|t|^{-3/2})$ при $t \to \pm\infty$ вместе со всеми производными для $\tilde{f} \in \mathcal{S}(R^4)$ с supp $\tilde{f} \subset \{(p, p) < 4m^2\}$. Пусть $\tilde{T}(p)$ есть $\tilde{h}(p) [(p, p) - m^2] (\Phi^{out}, \tilde{A}(\pm p) \psi^{in})$, где $\tilde{h} \in \Theta_M$ имеет носитель в $\{(p, p) < 4m^2\}$ и $\tilde{h}(p) \equiv 1$ при $(p, p) < 4m^2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\tilde{T}(p)$ как обобщенную функцию умеренного роста $\tau(q)$ по переменным $q^0 = p^0 - \omega(\mathbf{p})$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}$. Тогда из (7.11) следует, что для всех $\tilde{f} \in \mathcal{S}(R^4)$

$$\int dq \tilde{f}(q) e^{iq^0 t} \tilde{\tau}(q) = (\tau * f)(-t, 0) \in D_{L^1}(t), \quad (7.12)$$

т. е. принадлежит классу C^∞ и вместе со всеми производными абсолютно интегрируема по t.

Общепринято считать, что убывание обобщенной функции на бесконечности эквивалентно локальным свойствам регулярности ее фурье-образа. Поэтому [14] $\int d\mathbf{q} \hat{f}(\mathbf{q}) \hat{\tau}(q^0, \mathbf{q})$ непрерывно по q^0 для всех $\hat{f} \in \mathcal{S}(R^3)$, что и определяет $[(p, p) - m^2] (\Phi^{out}, A(\pm p) \psi^{in}) |_{p^0=\omega}$. Предыдущие рассуждения о смысле уравнения Янга — Фельдмана с точки зрения теории обобщенных функций служат для иллюстрации общей картины редукционных формул ЛСЦ для амплитуд рассеяния. Чтобы избежать возможных вопросов о существовании функций Грина в терминах вакуумных средних, определим хронологические и опережающие произведения полевых операторов, используя при этом регуляризованные характеристические функции.

Пусть $\chi \in \mathcal{D}(R^{n-1})$ — произвольная функция, удовлетворяющая для всех $P \in S^n$ (группа перестановок n элементов):

$$\chi(s_1 - s_2, \ldots, s_{n-1} - s_n) = \chi(s_{p(1)} - s_{p(2)}, \ldots, s_{p(n-1)} - s_{p(n)}),$$

$$\int dt_1, \ldots, dt_{n-1} \chi(t_1, \ldots, t_{n-1}) = 1. \quad (7.13)$$

Тогда существуют «гладкие» хронологические и опережающие произведения в виде хорошо определенных обобщенных функций умеренного роста

$$T_\chi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{P\in S^n} \theta_\chi\left(x^0_{p(1)} - x^0_{p(2)}, \ldots, x^0_{p(n-1)} - \right.$$

$$\left. - x^0_{p(n)}\right) A\left(x_{p(1)}, \ldots, A\left(x_{p(n)}\right); \qquad (7.14)$$

$$A_\chi(x_1; x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{i}^{n-1} \sum_{P\in S^{n-1}} \theta_\chi\left(x^0_{p(n)} - x^0_{p(n-1)}, \ldots, x^0_{p(2)} - x^0_1\right)$$

$$[\ldots [A(x_1) A(x_{p(2)})] \ldots A(x_{p(n)})],$$

где

$$\theta_\chi\left(x^0_{p(1)} - x^0_{p(2)}, \ldots, x^0_{p(n-1)} - x^0_{p(n)}\right) =$$

$$= \int d(s_1 - s_2) \ldots d(s_{n-1} - s_n)\, \chi(s_1 - s_2, \ldots, s_{n-1} - s_n) \times$$

$$\times\, \theta\left(x^0_{p(1)} - s_{p(1)} - x^0_{p(2)} + s_{p(2)}\right) \ldots \theta\left(x^0_{p(n-1)} - \right.$$

$$\left. - s_{p(n-1)} - x^0_{p(n)} + s_{p(n)}\right) \in \Theta_M(R^{n-1}).$$

Связь с амплитудами рассеяния, оказывается, не зависит от точного вида регуляризации; она распространяется и на резкие функции Грина во всех случаях, когда последнюю можно определить.

Если обратить внимание на свойства носителя $T_\chi(x_1, \ldots, x_n)$ в x-пространстве, то (7.10) можно обобщить на известную формулу ЛСЦ [73]

$$(a^{\text{out}}(\hat{f})^{(*)} \Phi^{\text{out}}, T_\chi(x_2, \ldots, x_n)\, \psi^{\text{in}}) -$$

$$- (\Phi^{\text{out}}, T_\chi(x_2, \ldots, x_n)\, a^{\text{in}}(\hat{f})^{(*)} \psi^{\text{in}}) =$$

$$= \pm\, \mathrm{i} \int dx_1\, \hat{f}^{(*)}(x_1)(\Box_1 + m^2)(\Phi^{\text{out}}, T_\chi(x_1, \ldots, x_n)\, \psi^{\text{in}}), \qquad (7.15)$$

которая имеет место для $\Phi^{\text{out}} \in D_0^{\text{out}}$, $\psi^{\text{in}} \in D_0^{\text{in}}$ и для

$$\hat{f} \in \mathcal{S}(R^3) \text{ и } \hat{f}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int dp\, \theta(p^0)\, \delta((p, p) -$$

$$- m^2)\, \hat{f}(\mathbf{p}) - \mathrm{i}(p, x),$$

а сужение в пространстве к массовой поверхности существует в виде непрерывной функции по критической переменной.

Более сложен смысл повторного применения (7.15), служащего для полной редукции амплитуды рассеяния [79]:

Теорема 7.2. Обобщенная функция умеренного роста

$$\prod_{i=k+1}^{m} ((p_i, p_i) - m^2) < \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k^{\text{out}} \mid T_\chi(\pm p_{k+1}, \ldots, \pm$$

$$\pm p_m \mid \mathbf{p}_{m+1}, \ldots, \mathbf{p}_n^{\text{in}}>, \qquad (7.16)$$

проинтегрированная по $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ с неперекрывающимися основными функциями из $\mathscr{S}(R^{3n})$, является функциями из класса C^∞ по $p_{k+1} - \omega_{k+1}, \ldots, \overset{0}{p}_m - \omega_m$ в окрестности начала координат.

Доказательство. Для неперекрывающихся $\{\tilde{f}_i\} \subset \subset \mathscr{S}(G)$ определим $f_i(x, t)$, согласно (6.11) и $\dot{f}_i(x, t)$, как $d/dt f_i(x, t)$. Тогда можем утверждать, что интеграл

$$\int \prod_{i=k+1}^{m} dx_i \dot{f}_i^{(*)}(x_i, t_i) < \widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_k^{\text{out}} \mid T_\chi(x_{k+1}, \ldots, x_m) \mid \times$$

$$\times \mid \widehat{f}_{m+1} \ldots \widehat{f}_n^{\text{in}} > \qquad (7.17)$$

лежит в области $\mathscr{S}(R^{m-k})$ по переменным $t_{k+1}, \ldots, t_m$. Ввиду того что все производные по t от C^∞-функции (7.17) остаются того же типа, нам надо только доказать, что (7.17) равномерно ограничено для всех $t_{k+1}, \ldots, t_m$ после умножения на

$$\prod_{i=k+1}^{m} (1 + |t_i|)^N, \quad N \in Z_+.$$

Для доказательства существенно использование пространственно-временного поведения (6.12) и (6.13) функции $f_i(x, t)$. Благодаря тому обстоятельству, что $f_i(x, t)$ быстро убывают с увеличением расстояния от $S_\eta(f_i, t)$, а также из-за хронологической упорядоченности $T_\chi(x_{k+1}, \ldots, x_m)$ в формуле (7.17) группа полевых операторов, проинтегрированная по $f_i^{(*)}(x, t_i)$ с наибольшим t_i действует на $|\widehat{f}_1 \ldots \widehat{f}_k^{\text{out}}>$ налево, с наименьшими же

t_i действуют на $|\widehat{f}_{m+1} \ldots \widehat{f}_n^{\,\mathrm{in}}>$ направо. Использование неперекрывающихся $\widetilde{f}_i$ для почти равных t_i обеспечивает коммутацию $A(f_i, t)^{(*)}$с точностью до члена порядка $O(|t|^{-\infty})$, так как $S_\eta(f_i, t_i)$ при этом разделяются в пространственноподобных направлениях линейно по t_i. Это устранит хронологическое упорядочение в пределах группы с максимальным $|t_i|$, и, согласно теореме 6.1, выражение (7.17) $\in \mathscr{S}(R^{m-k})$.

Для неперекрывающихся $\{\widetilde{f}_i\}$ существует $\eta>0$ такое, что все $S_\eta(f_i, 1\pm\eta)$ пространственноподобны друг другу. Благодаря симметрии $T_\chi(x_{k+1}, \ldots, x_m)$ при мажорировании (7.17) можем ограничиться сектором

$$t_{k+1} \geqslant \ldots \geqslant t_m \text{ и, например, } t \equiv t_{k+1} \geqslant |t_m|. \qquad (7.18)$$

Будем в отдельности изучать каждый подсектор, удовлетворяющий условию

$$t_i - t_{i+1} \leqslant \frac{\eta}{4(m-k)} t \, (k+1 \leqslant i \leqslant l-1), \quad t_1 - t_{l+1} > \frac{\eta}{4(m-k)} t \qquad (7.19)$$

для любого $k+1 \leqslant l \leqslant m$. Оказывается, что тогда для всех $t_{k+1}, \ldots, t_m$ в (7.18), (7.19) обобщенная функция в (7.17) с точностью до члена порядка $O(|t|^{-\infty})$ может быть заменена функцией

$$<\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_k^{\,\mathrm{out}} | A(x_{k+1}), \ldots, A(x_l) \times$$
$$\times T_\chi(x_{l+1}, \ldots, x_m) | \widehat{f}_{m+1}, \ldots, \widehat{f}_n^{\,\mathrm{in}}>. \qquad (7.20)$$

Рассмотрим, например, перестановку $P \in S^{m-k}$ с $\{P(k+1), \ldots, P(l)\} \neq \{k+1, \ldots, l\}$. Член, содержащий $A(x_{p(k+1)}, \ldots, A(x_{p(m)})$ в $T_\chi(x_{k+1}, \ldots, x_m)$, имеет носитель в $G_p = \{x^0{}_{p(i)} - x^0{}_{p(i+1)} \geqslant -t_0,\ k+1 \leqslant i \leqslant m-1\}$ для некоторого $t_0 < \infty$. Ввиду того что хронологическое упорядочение несовместимо с (7.18) и (7.19) для больших t, для (6.12) и (6.13) равномерно для всех $\{t_i\} \in \{(7.18), (7.19)\}$ и $(x_{k+1}, \ldots, x_m) \in G_p$ можно получить

$$\left| x^\alpha D^\beta \prod_{i=k+1}^{l} f_i^{(*)}(x_i, t_i) \right| < C_N^{\alpha\beta} (1 + |t|)^{-N}, \qquad (7.21)$$

где $C_N^{\alpha\beta} < \infty$ для всех $N \in Z_+$ и всех одночленов x^α, D^β в x_i^j, $\partial/\partial x_i^j$. Следовательно, с точностью до члена порядка $O(|t|^{-\infty})$ ими можно пренебречь.

Рассмотрим вклад в $T_\chi(x_{k+1}, \ldots, x_m)$, соответствующий некоторому $P \in S^{m-k}$ с $\{P(k+1), \ldots, P(l)\} = \{k+1, \ldots, l\}$. Теперь можем в (7.17) сделать замену $A(x_{p(k+1)}), \ldots, A(x_{p(m)})$ на

$$A(x_{k+1}) \ldots A(x_1) A(x_{p(1+l)}) \ldots A(x_{p(m)}).$$

Это приводит в носителе $f_i^{(*)}(x_i, t_i)$ для $\{t_i\}$, удовлетворяющим условиям (7.18) и (7.19), только к ошибке порядка $O(|t|^{-\infty})$, так как $\eta > 0$ нами выбрано достаточно малым и таким, что существенные носители $S_\eta(f_i, t_i)$ разделяются в пространственно-временных направлениях линейно по $|t|$ для $k+1 \leqslant i \leqslant l$. Более того, $\theta(\overset{0}{x}_{p(l)} - \overset{0}{x}_{p(l+1)})$ можно заменить 1, а сумму функций θ, связывающую $x_{k+1}, \ldots, x_l$, опустить с точностью до членов порядка $O(|t|^{-\infty})$. Это и доказывает (7.20). Согласно неравенству Шварца,

$$\begin{aligned}
&\left| \int \prod_{i=k+1}^{m} dx_i \dot{f}_i^{(*)}(x_l, t_i) < \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_k^{\text{out}} \right| \times \\
&\times A(x_{k+1}) \ldots A(x_1) T_\chi(x_{l+1}, \ldots, x_m) \times \\
&\times |\hat{f}_{m+1}, \ldots, \hat{f}_n^{\text{in}}>| \leqslant \left\| \prod_{i=1}^{k+1} dx_l \dot{f}_i^{(*)}(x_i, t_l)^* \times \right. \\
&\times A(x_l) \, | \, \hat{f}_i \ldots \hat{f}_k^{\text{out}}> \Bigg\| \, \Bigg\| \prod_{l=l+1}^{m} dx_i \dot{f}_l^{(*)}(x_i, t_l) \times \\
&\times T_\chi(x_{l+1}, \ldots, x_m) \, | \, \hat{f}_{m+1}, \ldots, \hat{f}_n^{\text{in}}> \Bigg\|. \qquad (7.22)
\end{aligned}$$

По асимптотическому условию для неперекрывающихся волновых пакетов первый множитель в правой части ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$ в подсекторе (7.18), (7.19). Так как второй миожитель является функцией умеренного роста и существует только конечное число различных секторов, то быстрое убывание (7.17) нами доказано. Теорема 7.2 следует из того замечания, что приведенное мажорирование может быть распространено на произвольные неперекрывающиеся основные функции из $\mathscr{S}(G^{xn})$.

Функция из класса C^∞ абсолютно интегрируема по всем переменным $t_{k+1}, \ldots, t_m$ и может быть вычислена двумя способами. Вычисляя в виде повторного интеграла по повторному полному дифференциалу, получаем вместе с (7.15) амплитуду рассеяния. При этом не возникает вопроса об области определения, потому что все волновые пакеты являются неперекрывающимися. Производя допустимую замену интегрирования по t интегрированием по p в пространстве импульсов, можно проинтегрировать (7.17) и получить, таким образом, матричный элемент «ампутированного» T-произведения, ограниченного массовой поверхностью. Поэтому амплитуды рассеяния могут быть выражены в виде «остатков» от

$$<\tilde{T}_{\chi}(p_1, \ldots, -p_n)>_0$$

на массовой поверхности [73].

Теорема 7.3. Для неперекрывающихся скоростей амплитуды рассеяния удовлетворяют редукционной формуле

$$<p_1, \ldots, p_m^{\text{out}} \mid p_{m+1}, \ldots, p_n^{\text{in}}>=$$
$$=(-\mathrm{i}\sqrt{2\pi})^n \prod_{i=1}^{n} \delta_m^{+}(p_i)\left(\prod_{i=1}^{n}[(p_i, p_i)-m^2]\times\right.$$
$$\left.\times<\tilde{T}_{\chi}(p_1, \ldots, p_m, -p_{m+1}, \ldots, -p_n)>_0\right). \quad (7.23)$$

Экстраполяции за массовую поверхность

$$\left[\prod_{i=1}^{n}((p_i, p_i)-m^2)<\tilde{T}_{\chi}(p_1, \ldots, -p_n)>_0\right],$$

зависящие от регуляризации χ и проинтегрированные по $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ для $\mathrm{p}_i\omega_i^{-1} \neq \mathrm{p}_j\omega_j^{-1}$ являются функциями класса C^{∞}. Если можно определить «резкие» обобщенные функции, зависящие от времени, то (7.23) остается в силе и сохраняет свой смысл.

Последнее утверждение очевидно из доказательства теоремы 7.2, куда поведение $T(x_1, \ldots, x_n)$ вошло только вдали от «диагоналей» $x_i^0 = x_j^0$.

Отметим, что если рассматривать асимптотические состояния в спинорном базисе, то редукционная формула для частиц с произвольным спином всегда приводит к функциям Грина, «ампутированным» оператором Клейна — Гордона. Предположим, что

$$A(f)^* = \sum_{\alpha=-s}^{s} A_\alpha (f_\alpha)^*$$

рождает из Ω одночастичное состояние $\Phi(\widehat{f})$ с $\widehat{f}(\mathbf{p})_\alpha = \tilde{f}(\omega, \mathbf{p})_\alpha$. Тогда

$$(\varphi^{\text{out}}(\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m), \varphi^{\text{in}}(\widehat{f}_{m+1}, \ldots, f_n)) =$$

$$= (-\mathrm{i}\sqrt{2\pi})^n \sum_{\dot{\beta}_1=-s}^{s} \ldots \sum_{\alpha_n=-s}^{s} \int \prod_{l=1}^{m} dp_l \tilde{f}_l (p_l)^*_{\dot{\beta}_l} \times$$

$$\times \prod_{j=m+1}^{n} dp_j \tilde{f}_j (p_j)_{\alpha_j} \prod_{l=1}^{n} \delta_m^+ (p_l) \left(\prod_{l=1}^{n} [(p_l, p_l) - m^2] \times \right.$$

$$\left. \times < \widetilde{T}_{\chi \dot{\beta}_1, \ldots, \alpha_n} (p_1, \ldots, -p_n) >_0 \right) \qquad (7.24)$$

с очевидным обобщением на (7.14) для операторов Ферми.

Для изучения важных с физической точки зрения реакций, когда две частицы переходят в n—2-частицы ($n \geqslant 4$), амплитуду рассеяния можно экстраполировать опережающими обобщенными функциями. В изучении максимальной аналитичности в локальной квантовой теории исходным пунктом является следующая формула, полученная ГЛЦ [72].

Следствие 7.3. Для неперекрывающихся скоростей, в том же смысле, что и в теореме 7.3, имеем

$$< p_3, \ldots, p_n^{\text{out}} \mid p_1 p_2^{\text{in}} > = -\mathrm{i}(2\pi)^{n/2} \prod_{l=1}^{n} \delta_m^+ (p_l) \times$$

$$\times \left(\prod_{l=1}^{n} [(p_l p_l) - m^2] < \widetilde{A}_\chi (-p_1; -p_2, p_3, \ldots, p_n) > \right). \qquad (7.25)$$

Доказать это следствие можно при помощи аргументов теоремы 7.2. К счастью, свойства носителя в p-пространстве для реакций типа $2 \to n-2$ исключают те члены в разложении $< A (x_1; x_2, \ldots, x_n) >$ по вакуумным средним, для которых асимптотическое условие ЛСЦ не было доказано и которые имеют структуру

$$(\varphi, \Pi A(f_i, t_i)^{(*)}\psi)$$

с Φ и $\psi \in D$.

При доказательстве теоремы 7.2 мы видели, что для неперекрывающихся $\widetilde{\psi} \in \mathcal{S}(G^{\times n})$ функция

$$F(t_1, \ldots, t_n) = \int \prod_{i=1}^{n} dp_i \, e^{-i\left(p_i^0 - \omega_i\right) t_i} \times$$
$$\times \widetilde{\psi}(p_1, \ldots, p_n) < \widetilde{T}_\chi(p_1, \ldots, -p_n) >_0 \qquad (7.26)$$

быстро сходится, если группа элементов $t_1, \ldots, t_n$ стремится к $k \pm \infty$. Это асимптотическое поведение для больших $|t_i|$ эквивалентным образом может быть выражено с помощью следующей структуры сингулярности выражения $<\widetilde{T}_\chi(p_1, \ldots, -p_n)>_0$ вблизи энергетической оболочки: с точностью до сингулярностей типа

$$\delta\left(p_i^0 - \omega_i\right) \pm \frac{i}{\pi} P\left(p_i^0 - \omega_i\right)^{-1}$$

в любом подмножестве переменных $p_1^0 - \omega_1, \ldots, p_n^0 - \omega_n$ с соответствующими состояниями рассеяния в качестве остатков (остатки по всем переменным одновременно см. в формуле (7.23)); вакуумное среднее

$$<\widetilde{T}_\chi(p_1, \ldots, -p_n)>_0,$$

проинтегрированное по неперекрывающимся основным функциям в $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$, принадлежит классу C^∞ в окрестности начала координат. Этот результат был предвосхищен Гринбергом и Вайтманом [79], которые получили асимптотическое условие ЛСЦ из аналогичных предположений о структуре сингулярностей вакуумных средних $\widetilde{\mathfrak{M}}(p_1, \ldots, -p_n)|$ вблизи $p_i^0 - \omega_i$. Так как $F(t_1, \ldots, t_n)$ ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$, если любое $t_i \to -\infty$, то мы можем вычислить $F(0, \ldots, 0)$ с помощью равномерно сходящегося интеграла аналогично (7.5):

$$F(0, \ldots, 0) = \int_{-\infty}^{0} \ldots \int_{-\infty}^{0} dt_1 \ldots dt_n \frac{\partial^n}{\partial t_1, \ldots, \partial t_n} \times$$
$$\times F(t_1, \ldots, t_n) = \lim_{\varepsilon_1 \downarrow 0, \ldots, \varepsilon_n \downarrow 0} \int \prod_{i=1}^{n} dp_i \left((p_i, p_i) - \right.$$
$$\left. - m^2 + i\varepsilon_i\right)^{-1} \widetilde{\psi}(p) \times \qquad (7.27)$$

$$\times\left[\prod_{i=1}^{n}((p_i,\,p_i)-m^2)<\widetilde{T}_\chi(p_1,\,\ldots,\,-p_n)>_0\right].$$

Так как вдали от массовой поверхности не существует проблемы разделения, то в качестве тождества для обобщенных функций получим хорошо известную формулу [81]

$$<\widetilde{T}_\chi(p_1,\,\ldots,\,p_n)>_0=\lim_{\varepsilon_1,\ldots,\,\varepsilon_n\downarrow 0}\prod_{i=1}^{n}[(p_i,\,p_i)-m^2+i\varepsilon_i]^{-1}\times$$
$$\times\left[\prod_{i=1}^{n}((p_i,\,p_i)-m^2)<\widetilde{T}_\chi(p_1,\,\ldots,\,p_n)>_0\right],$$

которая имеет место вблизи массовой оболочки, по крайней мере, для неперекрывающихся $p_1,\ldots,p_n$ с $\varepsilon_i\downarrow 0$.

В заключение отметим, что не следует ожидать того, что сильная форма редукционных формул в теореме 7.3 и в ее следствии имеет место для перекрывающихся импульсов, за исключением того случая, если мы сможем, например, доказать аналитичность «ампутированных» функций Грина вблизи массовой поверхности, как для двухчастичной амплитуды рассеяния. Для импульсов входящих и уходящих частиц, неперекрывающихся по отдельности, формула (7.23) остается в силе в смысле повторного сужения к массовой поверхности независимо от порядка стремления к пределу. Пример этого утверждения приведен в гл. 9.

ГЛАВА 8. СВОЙСТВА АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ S-МАТРИЦЫ

В этой главе рассматриваются общие свойства S-матрицы в квантовой теории поля. С самого начала существования теории S-матрицы [82] было ясно, что наряду с такими глобальными свойствами, как унитарность, правильная мультипликативность частиц и инвариантность по отношению к группе симметрии, реальная S-матрица должна допускать макроскопическое описание процессов в пространстве — времени с помощью асимптотических свойств амплитуд рассеяния. Недавно Вихман и Кричтон [83, 84] систематически изучили эти свойства асимптотической факторизации. Ввиду того что в квантовой теории поля S-матрица является величиной, следующей из теории, можно получить полезную информацию относительно того, когда и как быстро можно достичь эти асимптотические пределы.

Структура вакуума

Вакуумная структура S-матрицы определяется так называемыми пространственными свойствами асимптотической факторизации. Грубо говоря, результат процесса столкновения между группой частиц, обладающих массами, должен быть независимым от наличия других частиц на большом расстоянии. Если в многочастичной реакции некоторые из входящих и уходящих частиц удалены на бесконечности в пространство (это соответствует переходу $\hat{f}(\mathbf{p}) - \hat{f}^a(\mathbf{p}) = e^{i(p,a)}\,\hat{f}(\mathbf{p})$), то

$$\lim_{a=(0,\,\mathbf{a})\to\infty} \langle \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_k \hat{f}^a_{k+1}, \ldots, \hat{f}^{a\,\mathrm{out}}_l \times$$

$$\times | \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_m \hat{g}^a_{m+1}, \ldots, g^{a\,\mathrm{in}}_n \rangle =$$

$$= \langle \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}^{\mathrm{out}}_k | \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}^{\mathrm{in}}_m \rangle \times$$

$$\times \langle f_{k+1}, \ldots, f^{\mathrm{out}}_l | \hat{g}_{m+1}, \ldots, \hat{g}^{\mathrm{in}}_n \rangle \qquad (8.1)$$

с точностью до возможного коэффициента должно иметь место в любой разумной теории S-матрицы. А так как все входящие (уходящие) частицы могли бы взаимодействовать в удаленном прошлом (будущем), то приближение к пределу вообще должно определяться медленным расплыванием волновых пакетов, даже в теории поля с короткодействующими силами.

Руководствуясь ожидаемым результатом, определим связанные амплитуды рассеяния с помощью

$$\langle \hat{f}_1, \ldots, \hat{f}^{\mathrm{out}}_m | \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}^{\mathrm{in}}_n \rangle^T =$$

$$= \langle f_1, \ldots, f^{\mathrm{out}}_m | \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}^{\mathrm{in}}_n \rangle -$$

$$- \sum_{\text{част}} \langle \hat{f}_{i_1}, \ldots, {}^{\mathrm{out}} | g_{j1}, \ldots, {}^{\mathrm{in}} \rangle^T \langle \ldots \rangle^T \ldots,$$

$$(8.2)$$

где $\sum\limits_{\text{част}}$ распространяется на все разбиения $\{\widehat{f}_i\} \cup \{\widehat{g}_j\}$ и $\langle \widehat{f}_i \mid 0 \rangle^T = \langle 0 \mid \widehat{g}_j \rangle^T = 0$. Получим

$$\langle \widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_m^{\text{out}} \mid \widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_n^{\text{in}} \rangle^T =$$

$$= \lim_{\substack{s\to\infty \\ t\to-\infty}} \langle \prod_{i=1}^{m} A(f_i, s) \prod_{j=1}^{n} A(g_j, t)^* \rangle^T. \tag{8.3}$$

В теории возмущений (8.2) соответствует сумме по всем связанным амплитудам Фейнмана для процесса:

$$\widehat{g}_1 + \ldots + \widehat{g}_n \to \widehat{f}_1 + \ldots + \widehat{f}_m.$$

Полезность этого определения следует из работы [85].

Теорема 8.1. Предположим, что $\{\widehat{f}_i\} \subset \mathscr{S}(R^3)$ и определим:

$$R(a) = \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \text{ для } \{a_i = (0, \mathbf{a}_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Тогда

$$|\langle \widehat{f}_1^{a_1}, \ldots, \widehat{f}_m^{a_m\,\text{out}} \mid \widehat{f}_{m+1}^{a_{m+1}}, \ldots, \widehat{f}_n^{a_n\,\text{in}} \rangle^T| \leqslant$$

$$\leqslant c(1 + R(a))^{-1/2} \tag{8.4}$$

равномерно для всех $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{3n}$ при $c < \infty$.

Доказательство. Мы задаемся целью аппроксимировать связанную амплитуду рассеяния с помощью вакуумных средних одночастичных состояний равномерно в $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ при конечных $t > 0$:

$$|\langle \widehat{f}_1^{a_1}, \ldots, f_m^{a_m\,\text{out}} | \widehat{f}_{m+1}^{a_{m+1}}, \ldots, f_n^{a_n\,\text{in}} \rangle^T -$$

$$- \langle \prod_{i=1}^{m} A(f_i^{a_i}, t) \prod_{i=m+1}^{n} A(f_i^{a_i}, -t)^* \rangle^T | \leqslant c(1+t)^{-1/2}. \tag{8.5}$$

В силу теоремы 5.1 это возможно при любом выборе $\widehat{f}_i \in \mathscr{S}(G)$ с $\tilde{f}_i(\omega, \mathbf{p}) = \widehat{f}_i(\mathbf{p})$. Основные функции $f_i^{a_i}(x, t)$ в (8.5) быстро убывают с удалением от $S_\eta(f_i^{a_i}, t) = S_\eta(f_i, t) + a_i$ [см. (6.12), (6.13)].

Если выбрать $t=R(a)[9(n-1)]^{-1}$, то одночастичные состояния в (8.5) попадают в два пучка с пространственноподобным разделением, увеличивающимся линейно по $R(a)$. Согласно следствию 4.3, второй член ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$, поэтому теорема 8.1 доказана.

Следствие 8.1. Предположим $R(a)=\max\limits_{i<j}|\mathbf{a}_i-\mathbf{a}_j|$. Тогда

$$\lim_{R(a)\to\infty} R(a)^\rho <\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m^{\text{out}} | \mathbf{p}_{m+1}, \ldots, \mathbf{p}_n^{\text{in}}>^T \times$$
$$\times \exp\left\{ \mathrm{i}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{p}_i\mathbf{a}_i - \sum_{i=m+1}^n \mathbf{p}_i\mathbf{a}_i\right)\right\} = 0 \qquad (8.6)$$

для всех $\rho<1/2$ в сильной топологии в $\mathscr{S}'(R^{3n})$.

Очевидно, можно освободиться от выделенной роли, которую играет пространственноподобная гиперплоскость $a_1^0=\ldots=a_n^0=0$. Мы убеждаемся таким образом в том, что связанные амплитуды рассеяния не обладают больше «вакуумными сингулярностями», т. е. δ-функциями для сохранения энергии — импульса подгруппы частиц, взаимодействующих только между собой. Эти амплитуды (в спинорном базисе) являются исходными в теории аналитической S-матрицы [86, 87]. В нерелятивистской многоканальной теории рассеяния [63] могут быть получены также асимптотические свойства факторизации, и исключение несвязанных функций Грина существенно для уравнений Фаддеева [61, 88].

Можем использовать тот факт, что для неперекрывающихся волновых пакетов предел Хаага — Рюэля достигается с точностью до членов типа $O(|t|^{-\infty*})$ для того, чтобы вывести более сильные свойства асимптотической факторизации для некоторых «равномерно неперекрывающихся» процессов рассеяния. Избегая кинематических осложнений, сформулируем следующую теорему только для двух пучков [85].

Теорема 8.2. Предположим, что $\{\widehat{f}_i\}\subset S(R^3)$ и $\{\widehat{g}_j\}\subset S(R^3)$ по отдельности неперекрывающиеся. Тогда предел в (8.1) достигается по всем направлениям $\mathbf{e}=\mathbf{a}|\mathbf{a}|^{-1}$ с точностью до членов типа $O(|\mathbf{a}|^{-\infty})$ при

$$a\mathbf{e} \neq \mathbf{p}_i\omega_i^{-1} - \mathbf{p}_j\omega_j^{-1}, \quad 0 \leqslant a < \infty, \qquad (8.7)$$

где

$$\mathbf{p}_i \in \operatorname{supp} \widehat{f}_i \, (1 \leqslant i \leqslant k), \quad \mathbf{p}_j \in \operatorname{supp} \widehat{f}_j \, (k+1 \leqslant j \leqslant l),$$

или

$$\mathbf{p}_i \in \operatorname{supp} \widehat{g}_i \, (1 \leqslant i \leqslant m), \ \mathbf{p}_j \in \operatorname{supp} \widehat{g}_j \, (m+1 \leqslant j \leqslant n).$$

Доказательство. Если (8.7) удовлетворяется, то минимальное разделение существенных носителей функции $f_i^{(a)}(x, t)$ для фиксированного t и $0 \leqslant a < \infty$ растет линейно по t. Поэтому (8.5) ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$, как в этом легко убедиться с помощью оценок, использованных в доказательстве теоремы 8.3.

Упражнение 4. Можно определить область столкновения двух частиц в состояннн рассеяния $\Phi^{\text{in}}(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)$, измеряя вероятность перехода:

$$|(\Phi^{\text{out}}(\widehat{g}_1^a, \widehat{g}_2^a), \Phi^{\text{in}}(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2))| = T(a) \tag{8.8}$$

с $\Phi^{\text{out}}(\widehat{g}_1^a, \widehat{g}_2^a)$ изменяющегося параметра столкновения $a = (0, \mathbf{a})$. Какое поведение более быстрое, чем $O(|\mathbf{a}|^{-\infty})$, можно получить, используя соответствующне волновые пакеты в S-матрице Хаага—Рюэля? Швингер [89] дает следующее асимптотическое поведение:

$$\int_{-1}^{+1} dx \exp - \frac{\lambda}{2a} (1 - x^2)^{-a} e^{-\mathrm{i}\, xy} \sim 2 \left(\pi \frac{1-\alpha}{\lambda}\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda}{y}\right)^{1 - \frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{\lambda}{2a}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha}\right] \sin\left[\frac{\pi\alpha}{4} + y - \right.$$

$$\left. - \left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)\frac{\lambda}{2\alpha}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha}\right] \tag{8.9}$$

для $y \longrightarrow \infty$, где $\alpha = a(1+a)$, $\lambda > 0$, $a > 0$.)

Одночастичная структура

Нетрудно привести примеры лоренц- и TCP-инвариантных унитарных S-матриц, которые не будучи физически приемлемыми обладают правильной вакуумной структурой (например, общая фазовая матрица ЛСЦ [55, 73, 90, 91]. S-матрица должна иметь к тому же одночастичные сингулярности в физической области связанных амплитуд рассеяния $\langle \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m^{\text{out}} | q_1, \ldots, q_n^{\text{in}} \rangle \times$ $\times (m, n \geqslant 3)$ для любой стабильной частицы.

Эти сингулярности следуют из экспериментальной осуществимости следующих друг за другом реакций с большим времяподобным разделением. Рассмотрим, например, трехчастичный процесс $p_4+p_5+p_6 \rightarrow p_1+p_2+$ $+p_3$ между частицами с одинаковыми массами. Вероятность перехода мала для большинства значеиий импульсов $p_1, \ldots, p_6$, за исключением, иапример, окрестиости

$$(p_1+p_2-p_4)^2=m^2,$$

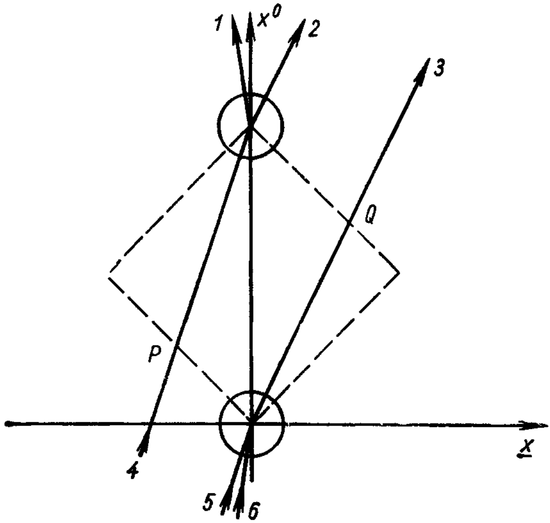


Рис. 2. Диаграмма с перерассеяиием.

где возможны последовательности двухчастичых реакций

$$p_5+p_6 \rightarrow p_3+p, \quad p+p_4 \rightarrow p_1+p_2.$$

При макроскопическом пространствеиио-времениом описаиии члеи повторного рассеяния четче всего должеи проявляться в процессах с «каузально иезависимой» конфигурацией. На рис. 2 частицы *5* и *6* сиачала взаимодействуют с частицей *4*, оставаясь разъедииенными в простраистве — времеии. Затем уходящая частица рассеивается на *4*, с переходом в *1* и *3*, в то время как *3* движется далеко в стороие. Частицы *3* и *4* причиино независимы в том смысле, что в то время как *4* остается отделенной большим пространственноподобным интервалом от 5 и 6 «до взаимодействия» (в асимптотическом смысле) и аналогичным образом 3 — от 1 и 2 — «после взаимодействия», интервал между 3 и 4 большой и времяподобный. Поэтому наложим на $p_1, \ldots, p_6$ на массовой поверхности следующие кинематические ограничения:

а) равномерно неперекрывающиеся скорости $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i \omega(\mathbf{p}_i)^{-1}$

$$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 \neq \lambda \mathbf{v}_3 \neq \mathbf{v}_2 \text{ для всех } \lambda \geqslant 0,$$

$$\mathbf{v}_5 \neq \mathbf{v}_6, \quad \mathbf{v}_5 \neq \mu \mathbf{v}_4 \neq \mathbf{v}_6 \text{ для всех } -\infty < \mu < \infty; \qquad (8.10)$$

б) причинная независимость частиц 3 и 4: пересечение P светового конуса будущего в 0 с лучом $\{(\rho p^0_4 + 1, \rho\mathbf{p}_4), \rho \leqslant 0\}$ и пересечение Q светового конуса прошлого в $(1, \mathbf{0})$ с $\{\rho p_3, \rho \geqslant 0\}$ должны определять пространственноподобный сегмент PQ (см. рис. 2).

Тогда покажем, что связанная трехчастичная амплитуда в почти локальной квантовой теории поля удовлетворяет следующему времяподобному кластерному свойству [92].

Теорема 8.3. Пусть в предположении гл. 6 (без асимптотической полноты) $p_1, \ldots, p_6$ является трехчастичной конфигурацией рассеяния, удовлетворяющей а) и б). Определим $\omega_i = \omega(\mathbf{q}_i)$, $\omega = \omega(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4)$ и

$$T(t) = \int \prod_{i=1}^{6} \frac{dq_i}{2\omega_i} \widehat{f}_i^{(*)}(\mathbf{q}_i)\, e^{-i(\omega_1+\omega_2-\omega_4-\omega)t} \times$$
$$\times \langle \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3^{\text{out}} \,|\, \mathbf{q}_4\mathbf{q}_5\mathbf{q}_6^{\text{in}} \rangle^T. \qquad (8.11)$$

Тогда для всех $\widehat{f}_i \in \mathcal{D}(U_\varepsilon(\mathbf{p}_i))$ ($\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_6) > 0$ достаточно мало).

$$T(t) - \int \frac{d\mathbf{q}}{2\omega} \langle \widehat{f}_1 \widehat{f}_2^{\text{out}} \,|\, f_4 \mathbf{q}^{\text{in}} \rangle^T \langle \mathbf{q} f_3^{\text{out}} \,|\, f_5 f_6^{\text{in}} \rangle^T = O(|t|^{-\infty}) \qquad (8.12)$$

для $t \to +\infty$, а для $t \to -\infty$ $T(t)$ ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$. Одночастичная неприводимая амплитуда по отношению к $q^2 \equiv (q_1 + q_2 - q_4)^2$

$$\langle \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3^{\text{out}} \,|\, \mathbf{q}_4\mathbf{q}_5\mathbf{q}_6^{\text{in}} \rangle^T - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} ((q, q) - m^2 + i\varepsilon)^{-1} \times$$
$$\times \int \frac{dq}{2\omega} \langle \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2^{\text{out}} \,|\, \mathbf{q}_4\mathbf{q}^{\text{in}} \rangle^T \langle \mathbf{q}\mathbf{q}_3^{\text{out}} \,|\, \mathbf{q}_5\mathbf{q}_6^{\text{in}} \rangle^T, \qquad (8.13)$$

проинтегрированная по остальным переменным с основными функциями, обладающими достаточно малым носителем вблизи $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_6$, принадлежит классу C^∞ в $\omega_1+\omega_2-\omega_4-\omega$ в окрестности начала координат.

Замечание. В (8.13) можно найти причинный пропагатор, хорошо известный в теории возмущений для одночастичных приводимых связанных диаграмм. Связь «рецепта $i\varepsilon$» с причинностью была руководящим принципом в подходе Штюкельберга [93] и Фейнмана [94] к теории S-матрицы и была четко описана Фирцом [95], а также недавно Вандерсом [96] и Ягольнитцером [97]. В теории аналитической S-матрицы большое значение имеет правильная одночастичная структура, однако доказательства формулы (8.13) с помощью условия аналитичности и унитарности несколько громоздки, так как в них предполагается сингулярная структура типа Ландау в окрестности критической точки [98].

Циммерманн [81] первым рассмотрел в рамках подхода ЛСЦ вакуумную и одночастичную структуру хронологических обобщенных функций. Дополним его результаты количественными оценками стремления $T(t)$ к своему пределу или оценкой регулярности одночастичной неприводимой амплитуды. Из нашего подхода станет ясно, что одночастичная структура S-матрицы существенным образом зависит от одночастичного спектра и малости радиуса действия сил, однако не зависит ни от аналитичности, ни от унитарности.

Доказательство. Используем ту же методику, что и при выводе редукционных формул ЛСЦ. Идея заключается в том, что аппроксимировать $T(t)$ вакуумным средним произведения одночастичных состояний, зависящих от t (с точностью до членов типа $O(|t|^{-\infty})$), которые ведут себя как $O(|t|^{-\infty})$ при $t\to-\infty$, и отличающимся от

$$\int \frac{d\mathbf{q}}{2\omega} < \widehat{f}_1 \widehat{f}_2^{\,\mathrm{out}} | \widehat{f}_4 \mathbf{q}^{\mathrm{in}} > < \mathbf{q} \widehat{f}_3^{\,\mathrm{out}} | \widehat{f}_5 \widehat{f}_6^{\,\mathrm{in}} >$$

членом типа $O(|t|^{-\infty})$ при $t\to\infty$.

Для $t>0$ выберем $\varepsilon>0$ малым настолько, чтоб все $U_\varepsilon(p_i)\subset G$ и чтобы $(q_1+q_2-q_4)$, $(q_5+q_6-q_3)\in G$ для всех $q_i\in U_\varepsilon(p_i)$. Тогда из спектрального условия для $f_i\in\mathscr{D}(U_\varepsilon(p_i))$ следует, что

$$\int dq_3 dq_5 dq_6 \widetilde{f}_3(q_3) * \widetilde{f}_5(q_5) \widetilde{f}_6(q_6) \widetilde{A}(q_3) \widetilde{A}(-q_5) \widetilde{A}(-q_6)\Omega \quad (8.14)$$

является одночастичным состоянием. $T(t)$ — предел некоторого выражения

$$F(s, u, v, t) = \alpha^6 \int dq \prod_{i=1}^{2} \widetilde{f}_i^*(q_i) e^{-i\left(q_i^0-\omega_i\right)(s+t)} \widetilde{f}_3^*(q_3) \times$$

$$\times e^{-i\left(q_3^0-\omega_3\right)(u+t)} \widetilde{f}_4(q_4) e^{-i\left(q_4^0-\omega_4\right)v} \prod_{i=5}^{6} \widetilde{f}_i(q_i) \times$$

$$\times e^{-i\left(q_i^0-\omega_i\right)s} e^{-i(\omega_1+\omega_2-\omega_4-\omega)t} \widetilde{\mathfrak{M}}_6(q_1, \ldots, -q_6)^T \quad (8.15)$$

при $s=u=v\to\infty$.

Из рис. 2 видно, что для $p_1, \ldots, p_6$, удовлетворяющих а) и б), существуют $\eta_1>0$, η_2, $\eta_3<\eta_1$, такие, что точки

$$P_1=(1+\eta_1,\ \eta_1 v_1),\ P_2=(1+\eta_1,\ \eta_1 v_1),$$
$$P_3=(1+\eta_2,\ (1+\eta_2)v_3),\ \ P_4=(-\eta_3,\ -(1+\eta_3)v_4),$$
$$P_5=(-\eta_1,\ -\eta_1 v_5),\ \ P_6=(-\eta_1,\ -\eta_1 v_6) \quad (8.16)$$

определяют пространственноподобные интервалы $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_4P_5}$, $\overline{P_4P_6}$, $\overline{P_5P_6}$, $\overline{P_3P_6}$. Докажем (8.11), показав, что для достаточно малых $\varepsilon>0$ и для всех $\tilde{f}_i\in\mathcal{D}(U_\varepsilon\ (p_i))$ имеем при $t\to+\infty$

$$T(t)-F(\eta_1 t,\ \eta_2 t,\ \eta_3 t,\ t)=O\left(|t|^{-\infty}\right) \quad (8.17)$$

и

$$F(\eta_1 t,\ \eta_2 t,\ \eta_3 t,\ t)-$$
$$-\int\frac{dq}{2\omega}<f_1f_2^{\text{out}}\,|\,\hat{f}_4\mathbf{q}^{\text{in}}>^T<\hat{f}_3\mathbf{q}^{\text{out}}\,|\,f_5f_6^{\text{in}}>^T=O\left(|t|^{-\infty}\right). \quad (8.18)$$

Сначала вычислим

$$T(t)-F(\eta_1 t,\ \eta_1 t,\ \eta_1 t,\ t)\,|\leqslant\int\limits_{\eta_1 t}^{\infty}ds\left|\frac{d}{ds}F(s,\ s,\ s,\ t)\right|, \quad (8.19)$$

где правая часть ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$, если для $t>0$, $s\geqslant\eta_1 t$ имеем $\left|\dfrac{d}{ds}F(s,\ s,\ s,\ t)\right|=c(1+t)^M(1+s)^{-N}$ равномерно для всех N и для фиксированного M, $c=c(\eta_1,\ N)<\infty$.

Так как $\tilde{f}_i\in\mathcal{D}(G)$, то члены в $d/dsF(s,\ s,\ s,\ t)$ обращаются в нуль там, где d/ds действует на $|\exp-i(q_i^0-\omega_i)s$, $i=1{,}6$. Рассмотрим вклад от $d/ds\exp-i(q_3^0-\omega_3)\ s$, где по той же причине вакуумные средние $\mathfrak{M}\ (q_1, \ldots, -q_6)^T$ можем заменить на

$$<\widetilde{A}(q_1)[\widetilde{A}(q_2)\widetilde{A}(q_3)], \ldots, \widetilde{A}(-q_6)>^T+$$
$$+<[\widetilde{A}(q_1)\widetilde{A}(q_3)]\widetilde{A}(q_2), \ldots, \widetilde{A}(-q_6)>^T.$$

Первая, например, из этих обобщенных функций умеренного роста имеет вид

$$\sum_{r=1}^{R}D_r\prod_{i=1}^{r}(1+\|\xi_i\|^2)^K T_r(\xi_1, \ldots, \xi_5). \quad (8.20)$$

Вследствие почти локальности [см. (4.51)] в любой фиксированной области $\{|\xi_2^0|<\delta|\xi_2|\}$, $0<\delta<1$ для всех $L\in Z$ ее можно выразить следующим образом:

$$\sum_{s=1}^{S(L)} D_{s,L} \prod_{i\neq 2} (1+\|\xi_i\|^2)^K (1+\|\xi_2\|^2)^{-L} T_{s,L}(\xi_1, \ldots, \xi_5). \tag{8.21}$$

Целые числа R и K зависят только от порядка вакуумных средних, в то время как $S(L)$ увеличивается с ростом L. D_r и $D_{s,L}$ являются дифференциальными одночленами по $\partial/\partial\xi_i^j$, а T_r и $T_{s,L}$ — ограниченные непрерывные функции.

Обобщенные функции (8.20) и (8.21) интегрируются по основным функциям

$$f(x_1, \ldots, x_6, s, t) = -\frac{i\alpha^2}{(2\pi)^{12}} \int dq\,(q_3^0-\omega_3) \prod_{i=1}^{3} \tilde{f}_i^*(q_i) \times$$
$$\times \exp[-i(q_i^0-\omega_i)(s+t)+i(q_i, x_i)] \times$$
$$\times \exp[-i(\omega_1+\omega_2-\omega_4-\omega)t] \prod_{i=4}^{6} \tilde{f}_i(q_i) \times$$
$$\times \exp[-i(q_i^0-\omega_i)s-i(q_i, x_i)]. \tag{8.22}$$

Очевидно, что Df функция этого же типа, однако Qf для любого полинома Q от x_i может быть представлено в виде конечной суммы $\Sigma f_{mn}s^m t^n$, с $f_{mn}(x_1, \ldots, x_6, s, t)$ таким же, как и в (8.22). Поэтому достаточно показать, что (8.22) для $s\geqslant\eta_1 t$, $t\to\infty$ и всех N удовлетворяет условиям: $|f(x, s, t)|=O(|s|^{-\infty})$, равномерно для

$$|\xi_2^0|\geqslant\delta|\xi_2|, \tag{8.23}$$

$|1+\|\xi_2\|^2|^{-N}f(x, s, t)|=O(|s|^{-2N})$, равномерно для $|\xi_2^0|\leqslant\delta|\xi_2|$. Для $t=\tau s$, $0\leqslant\tau\leqslant\eta_1^{-1}<\infty$, интегрируя (8.22) по частям, убедимся в том, что $f(x, s, \tau s)$ сходится равномерно быстрее, чем любая степень $[x_i^0-(1+\tau)s]^{-1}$, $i=2, 3$, и ограничена по остальным переменным. В множестве $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, для которого

$$\mathbf{x}_2 \neq [\mathbf{q}_2\omega_2^{-1}+(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4)\tau\omega^{-1}]s, \quad q_i\in U_{2\varepsilon}(p_i) \quad (i=1, 2, 4), \tag{8.24}$$

$$\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{q}_3(1+\tau)s\omega_3^{-1}, \quad q_3\in U_{2\varepsilon}(p_3), \tag{8.25}$$

$f(x, s, \tau s)$ убывает равномерно быстрее, чем любая степень $(s^2+x_2^2)$ или $(s^2+x_3^2)$ соответственно, с границами, зависящими непрерывно от τ. Для фиксированного $\eta_1>0$, удовлетворяющего (8.16), существует некоторое $\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_6)>0$, такое, что расстояние между $\{\mathbf{q}_2\omega_2^{-1}+(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_4)\tau\omega^{-1} : q_i\in U_{2\varepsilon}(p_i)\}$ и $\{(1+\tau)\mathbf{q}_3\omega_3^{-1}: q_3\in U_{2\varepsilon}(p_3)\}$ превышает некоторое $\eta>0$ для всех $0\leqslant\tau\leqslant\eta_1^{-1}$. Это является причиной для выбора кинематических связей а). Тогда существенный носитель функции $f(x, s, \tau s)$ в x_2, x_3 (где не выполняется ни (8.24), ни (8.25)) разделяется линейным образом по s в пространственноподобном направлении равномерно для $0\leqslant\tau\leqslant\eta_1^{-1}$. Это доказывает справедливость формул (8.23) для достаточно большого $\delta<1$. Остальные члены в $d/dsF(s, s, s, t)$ ведут себя подобным образом.

С помощью аналогичных методов покажем для некоторого $\varepsilon>0$, что

$$\begin{aligned}
&| F(\eta_1 t, \eta_1 t, \eta_1 t, t)-F(\eta_1 t, \eta_2 t, \eta_3 t, t)| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\eta_1 t}^{\eta_1 t} du\left|\frac{d}{du}F(\eta_1 t, u, \eta_1 t, t)\right| + \\
&+\int\limits_{\eta_3 t}^{\eta_1 t} dv\left|\frac{d}{dv}F(\eta_1 t, \eta_2 t, v, t)\right| = O(|t|^{-\infty}). \qquad (8.26)
\end{aligned}$$

Наконец, существует некоторое $\varepsilon>0$, такое, что существенные носители волновых пакетов частиц *3* и *4* в $F(\eta_1 t, \eta_2 t, \eta_3 t, t)$ разделяются линейно по t в пространственноподобных направлениях. Поэтому вследствие (почти) локальности $F(\eta_1 t, \eta_2 t, \eta_3 t, t)$ с точностью до членов типа $O(|t|^{-\infty})$ равна

$$\begin{aligned}
&<\prod_{i=1}^{2} A(f_i, \eta_1 t) A(f_4, -(1+\eta_3)t)^* A(f_3, (1+\eta_2)t)\times \\
&\times\prod_{i=5}^{6} A(f_i, -\eta_1 t)^* >_0^T, \qquad (8.27)
\end{aligned}$$

где опущен коэффициент $\exp\{-i(q_1^0+q_2^0-q_4^0-\omega)t\}$, так как $A(f_3, (1+\eta_2)t)$ $A(f_5, -\eta_1 t)^*$ $A(f_6, -\eta_1 t)^*\Omega$ — одночастичное состояние с волновой функцией

$f_{356}(t) \in \mathcal{D}(R^3)$, зависящей от t. Сразу видно, что для $t \to \infty$

$$\| A(f_4, -(1+\eta_3)t)^* \mid \widehat{f}_{356}(t) > - a^{\text{in}}(\widehat{f}_4)^* \mid \widehat{f}_{356}(t) > \| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{-(1+\eta_3)t} ds \left\| \frac{d}{ds} A(f_4, s)^* \,|\, \widehat{f}_{356}(t) > \right\| = O\left(|t|^{-\infty}\right). \quad (8.28)$$

Поступая аналогичным образом с другими членами, можем показать, что при $t \to \infty$ (8.27) стремится быстрее любой степени $|t|^{-1}$ к

$$< \prod_{i=1}^{2} a^{\text{out}}(\widehat{f}_i)\, a^{\text{in}}(\widehat{f}_4)^*\, a^{\text{out}}(\widehat{f}_3) \prod_{i=5}^{6} a^{\text{in}}(\widehat{f}_i)^* >_0^T =$$

$$= \int \frac{d\mathbf{q}}{2\omega} < \widehat{f}_1 \widehat{f}_2^{\text{out}} \,|\, \widehat{f}_4 \mathbf{q}^{\text{in}} >^T < \mathbf{q} \widehat{f}_3^{\text{out}} \,|\, f_5 f_6^{\text{in}} >^T, \quad (8.29)$$

где благодаря ограничениям на носители $\{f_i\}$ проекционный оператор

$$E_1 = \int \frac{dq}{2\omega q} \mid \mathbf{q} >< \mathbf{q} \mid$$

может быть помещен на $^h[m, 0]$. Для $t \leqslant 0$ $T(t)$ можно аппроксимировать функцией

$$G(s, t) = \alpha^6 \int dq \prod_{i=1}^{3} \tilde{f}_i^*(q_i)\, e^{-i\left(q_i^0 - \omega_i\right)s} \times$$

$$\times \prod_{i=4}^{6} \tilde{f}_i(q_i)\, e^{-i\left(q_i^0 - \omega_i\right)s} e^{-i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_4 - \omega)t} \times$$

$$\times \mathfrak{M}_6(q_1, q_2, q_3, -q_4, -q_5, -q_6)^T. \quad (8.30)$$

Следовательно, для любого $\eta_4 > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $\tilde{f}_i \in \mathcal{D}(U\ \ (p_i))$

$$| G(-\eta_4 t, t) - T(t) | = O\left(|t|^{-\infty}\right) \text{ при } t \to -\infty. \quad (8.31)$$

Для достаточно малых ε, $\eta_4 > 0$ существенные носители волновых функций частиц *1, 2, 4* в $G(-\eta_4\ t, t)$ пространственноподобны по отношению к волновым функциям частиц *3, 5, 6* и разделены линейно по $|t|$. Согласно (почти) локальности, вакуумные средние в $G(-\eta_4 t,\ t)$ можно заменить на $\mathfrak{M}_6(q_3, -q_5, -q_6, q_1, q_2, -q_4)^T$, которое обращается в нуль ввиду свойств носителя $\{\tilde{f}_i\}$.

Поэтому $T(t)=O(|t|^{-\infty})$ при $t\to\infty$. Из этих оценок следует, что

$$\frac{d}{dt}T(t)=-\mathrm{i}\int\prod_{i=1}^{6}\frac{dq_i}{2\omega_i}\widehat{f}_i^{(*)}(\mathbf{q}_i)\frac{e^{-\mathrm{i}(\omega_1+\omega_2-\omega_4-\omega)t}}{(\omega_1+\omega_2-\omega_4-\omega)}\times$$

$$\times[(q_1+q_2-q_4)^2-m^2]<\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3^{\text{out}}|\mathbf{q}_4\mathbf{q}_5\mathbf{q}_6^{\text{in}}>^T \qquad (8.32)$$

принадлежит классу $\mathcal{S}(R^1)$ по переменной t. Вводя в качестве новой переменной $\omega_1+\omega_2-\omega_4-\omega$, что представ-

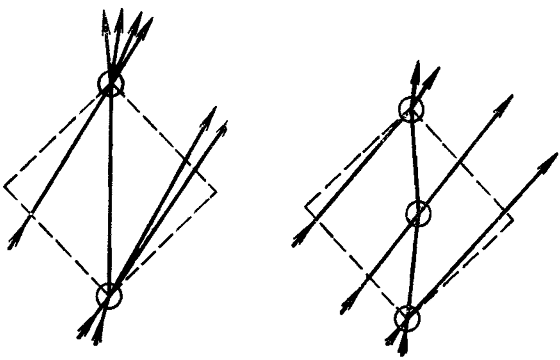


Рис. 3. Диаграммы многократного рассеяния.

ляется всегда возможным в носителе $\{\widehat{f}_i\}$, можно увидеть, что по отношению к переменной $\omega_1+\omega_2-\omega_4-\omega$ функция

$$[(q_1+q_2-q_4)^2-m^2]<\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3^{\text{out}}|\mathbf{q}_4\mathbf{q}_5\mathbf{q}_6^{\text{in}}>^T,$$

проинтегрированная по остальным переменным с основными функциями, удовлетворяющими ограничениям теоремы, касающейся носителя, принадлежит классу C^∞. Аналогично $T(t)-\theta(t)T(\infty)$ принадлежит классу C^∞ и быстро убывает при $t\to\pm\infty$. Поэтому ее фурье-образ принадлежит классу C^∞ по сопряженным переменным, что и доказывает (8.13).

Одночастичные особенности можно непосредственно выразить через причинно-независимые равномерно неперекрывающиеся многочастичные конфигурации. Более того, диаграммам множественного рассеяния (рис. 3) можно придать асимптотический смысл и ввести «крупнозернистое» пространственно-временное описание амплитудой рассеяния.

Упражнение 5. Какой вывод об одночастичных особенностях можно сделать для тройного рассеяния, изображенного на рис. 3?

ГЛАВА 9. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Установленная связь между формулировками Вайтмана и ЛСЦ квантовой теории поля была бы неполной без рассмотрения дисперсионных соотношений двухчастичной амплитуды рассеяния. Очевидно, что результаты Броса, Эпштейна и Глазера [99—101], касающиеся четырехточечной функции, остаются в силе даже для гладких обобщенных функций Грина. Классическое же доказательство дисперсионных соотношений — само по себе уже являющееся настоящим шедевром математики — очень чувствительно к ослаблению некоторых из предположений, одно из которых — существенное при использовании интеграла Коши — касается поведения на бесконечности.

Будем следовать методу Н. Н. Боголюбова и др. [1] и приведем аргументы в пользу целесообразности попыток Хури и Киношиты [102, 103] экспериментально проверить основы квантовой теории поля с помощью неравенств, получаемых из условия аналитичности, кросс-симметрии и унитарности для двухчастичной амплитуды. Связывая основу этих предсказаний (с точностью до одного недоказанного) с аксиомами Вайтмана, из слабого отклонения теории от эксперимента можно извлечь серьезные последствия для локальной теории поля. Заполним также пробелы [104] в классическом доказательстве, связанном со свойствами обобщенных функций и полиномиальной ограниченностью, которые легко устранимы в вайтмановском подходе.

Для простоты ограничимся случаем модели одной скалярной частицы (для общего случая см. работу [105]). Двухчастичную амплитуду рассеяния

$$T(p_1, p_2; p_3, p_4) = \langle p_1 p_2^{\text{out}} \,|\, p_3 p_4^{\text{in}} \rangle - \langle p_1 p_2^{\text{out}} \,|\, p_3 p_4^{\text{out}} \rangle \qquad (9.1)$$

экстраполируем за массовую поверхность следующим образом:

$$-2\pi i \delta_m^+(p_2)\, \delta_m^+(p_3)\, [(p_2^2 - m^2)(p_3^2 - m^2) \times$$
$$\times \langle p_1 \,|\, \widetilde{R}(p_2, -p_3) \,|\, p_4 \rangle]. \qquad (9.2)$$

С точностью до множителя $\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)$ запаздывающий коммутатор в (9.2) зависит только от p_1, p_4 и $(p_2+p_3)/2$ с $p_i^0=\omega(\mathbf{p}_i)\,(i=1,4)$. После перехода в систему координат Брейта

$$p_1,\ p_4=\left(\sqrt{m^2+\mathbf{\Delta}^2},\ \pm\mathbf{\Delta}\right),\quad \frac{p_2+p_3}{2}=\omega \qquad (9.3)$$

и выделения δ-функции экстраполяция за массовую оболочку принимает вид ротационно-инвариантной обобщенной функции

$$T_r(\omega,\ \mathbf{\Delta})=T_r(\omega_0,\ R\boldsymbol{\omega},\ R\mathbf{\Delta})\,(R\in O_+(3)),$$

которая должна зависеть только от инвариантов ω_0, $\boldsymbol{\omega}^2$, $\boldsymbol{\omega}\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta}^2$ или s, t, p_2^2, p_3^2, где

$$\begin{gathered} s=(p_1+p_2)^2;\\ u=(p_1-p_3)^2=\omega^2+m^2+\mathbf{\Delta}^2-2\omega^0\sqrt{m^2+\mathbf{\Delta}^2};\\ t=(p_1-p_4)^2=-4\mathbf{\Delta}^2; \\ p_2^2,\ p_3^2=\omega^2-\mathbf{\Delta}^2\pm 2(\boldsymbol{\omega}\mathbf{\Delta}). \end{gathered} \qquad (9.4)$$

Физическая область амплитуды (9.1) характеризуется

$$(\boldsymbol{\omega}\mathbf{\Delta})=0,\ \boldsymbol{\omega}^2=m^2+\mathbf{\Delta}^2,\ \omega^0>\sqrt{m^2+\mathbf{\Delta}^2}\ \text{при}\ 0\leqslant\mathbf{\Delta}^2<\infty. \qquad (9.5)$$

Опережающий коммутатор $T_a(\omega,\ \Delta)$, получающийся из

$$(p_2^2-m^2)(p_3^2-m^2)\langle p_1\mid\widetilde{A}(p_2,\ -p_3)\mid p_4\rangle,$$

тесно связан с T_r.

Согласно условию локальности, частичные фурье-образы T_r и T_a имеют носитель по переменной x_2-x_3, сопряженной ω в $\overline{V}_+$ и $\overline{V}_-$ соответственно. Поэтому [2] T_r и T_a являются граничными значениями аналитических функций по ω с полиномиальным ростом в трубах $\mathfrak{T}_\pm=\{\mathrm{Im}\,\omega\in V_\pm\}$. Для действительных ω

$$T_r(\omega,\ \mathbf{\Delta})-T_a(\omega,\ \mathbf{\Delta})=-\mathrm{i}\,T_c(\omega,\ \mathbf{\Delta}), \qquad (9.6)$$

по существу, сводится к коммутатору

$$\langle p_1\,|\,[\widetilde{j}(p_2)\,\widetilde{j}\,(-p_3)]\,|\,p_4\rangle$$

и при

$$|\omega_0| < \sqrt{m^2+\boldsymbol{\omega}^2} - \sqrt{m^2+\boldsymbol{\Delta}^2} \tag{9.7}$$

обращается в нуль согласно спектральному условию.

Применив теорему об острие клина [2], получим общее аналитическое продолжение $T_1(\omega, \Delta)$ обобщенных функций T_r и T_a в $\mathfrak{T}_+ \cup \mathfrak{T}_-$ и комплексиую окрестность области (9.7).

В работе Н. Н. Боголюбова и др. [1] исходными являются комплексные инвариаиты ω_0, ω^2 и $\omega\Delta$, возникающие из ω в оболочке голоморфности D_1-области, устаиовленной в силу теоремы об острие клина. При использовании только этой информации невозможно получить строгие свойства аиалитичности [104]. Эти авторы [1] предлагают исходить из дисперсионного соотиошения для $T_1(\omega, \Delta)$ для нефизических значений p_2^2 и p_3^2. Для $\omega\Delta=0$ и $\omega^2<-\Delta^2 T_1$ аналитично по ω_0 при $\mathrm{Im}\,\omega_0 \neq 0$ и для действительных ω_0 в интервале

$$|\omega_0| < \bar{\omega}_0 = -(\omega^2+\boldsymbol{\Delta}^2)/2\sqrt{m^2+\boldsymbol{\Delta}^2}.$$

Используя умереиный рост по ω_0 в трубчатой области, получаем в вещественной окрестности множества, определяемого условиями $(\omega\Delta)=0$ и $\omega^2<-\Delta^2$, формулу Коши (обычио после конечного числа «вычитаний»):

$$T_1(\omega_0, \omega^2, (\omega\Delta), \Delta^2) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{-\bar{\omega}_0} + \int_{\bar{\omega}_0}^{\infty}\right\}\frac{d\omega_0}{\omega_0' - \omega_0}[T_r(\omega_0', \omega^2,$$

$$(\omega\Delta), \Delta^2) - T_a(\omega_0', \omega^2, (\omega\Delta), \Delta^2)] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\omega}_0}^{\infty}\frac{d\omega_0' A_1(\omega_0, \omega^2, (\omega\Delta), \Delta^2)}{\omega_0' - \omega_0} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\bar{\omega}_0}\frac{d\omega_0' A_2(\omega_0', \omega^2, (\omega\Delta), \Delta^2)}{\omega_0' - \omega_0}. \tag{9.8}$$

Здесь мы использовали (9.6) для разрывиости $T_r - T_a$ через действительную ось, а также спектральное условие, согласио которому в интервале $[\bar{\omega}_0, +\infty>$ ненулевой вклад дает только $-<p_1|\tilde{j}(p_2)E_0^{\perp}\tilde{j}(-p_3)|p_4>$, а в интервале $<-\infty, -\bar{\omega}_0)$ — член $<p_1|\tilde{j}(-p_3)E_0^{\perp}\tilde{j}(p_2)|p_4>$.

Эти члены превращаются в A_1 и A_2 после выделения δ-функции.

«Абсорбтивные части» A_1 и A_2 тоже являются граничными значениями аналитических функций. Лучше всего изучать их с глобальной точки зрения четырехточечной функции в p-пространстве, пользуясь при этом тождествами Штейнманна (см. [101] и ссылки, приведенные там).

Н. Н. Боголюбов и др. пользуются редукционной формулой

$$<p_1|\tilde{j}(p_2)E_0^{\perp}j(-p_3)|p_4> = 2\pi\delta_m^+(p_1)\delta_m^+(p_4)\times$$
$$\times\left[\prod_{i=1}^{4}(p_i-m^2)<\tilde{R}(p_2;\ p_1)E_0^{\perp}\tilde{R}(-p_3;\ -p_4)>_0\right], \quad (9.9)$$

которая имеет место для p_1^2, $p_4^2<4m^2$. Правая часть нетривиальным образом зависит только от переменных p_1+p_2, $(p_1-p_2)/2$, $(p_3-p_4)/2$ и в соответствии с лоренц-инвариантностью должна быть обобщенной функцией от s, t, p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2, совпадающей с A_1 при $p_1^2=p_4^2=m^2$.

Двукратный запаздывающий коммутатор (9.9) является членом квартета запаздывающих опережающих двукратных коммутаторов, свойства носителей которых в x-пространстве по переменным x_1-x_2 и x_3-x_4 в $\bar{V}_\pm$ дают аналитичность и полиномиальную ограниченность в p-пространстве в трубчатой области $\mathfrak{T}_\pm\times\mathfrak{T}_\pm$ по сопряженным переменным $(p_1-p_2)/2$, $(p_3-p_4)/2$. Согласно спектральному условию, все четыре обобщенные функции попарно совпадают в некоторых действительных областях и определяют общее аналитическое продолжение

$$T_0(s,\ t,\ p_1^2,\ p_2^2,\ p_3^2,\ p_4^2).$$

Оболочку голоморфности, области, установленной с помощью теоремы об острие клина для $s\geqslant m^2$ (или $\omega_0\geqslant\bar{\omega}_0$ в (9.8)) по t, p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2, можно изучать аналитическими методами [1, 106, 107] или с помощью новейших методов геометрии [104, 107]. Она содержит полосу

$$|p_1^2-m^2|\leqslant\delta,\ |p_2^2-\zeta^2|\leqslant\delta,\ |p_3^2-\zeta^2|\leqslant\delta,\ |p_4^2-m^2|\leqslant\delta,$$
$$-8m^2+\varepsilon\leqslant\operatorname{Re}t\leqslant 0,\quad |\operatorname{Im}t|\leqslant\delta/s, \quad (9.10)$$

где $\delta>0$ для всех $\varepsilon>0$, $R>0$ и $-R\leqslant\zeta^2\leqslant m^2$. Можем перейти к переменным ω_0, ω^2, $(\omega\Delta)$, Δ^2, p_1^2, p_4^2 в (9.8) и в аналогичном выражении для A_2:

$$\Gamma_1=-\int\limits_{m^2}^{\infty}\frac{ds'T_0(s',\ -4\Delta^2,\ m^2,\ \omega^2-\Delta^2+2\omega\Delta,\ \omega^2-\Delta^2-2\omega\Delta^2,\ m^2)}{s'-\omega^2-m^2-\Delta^2-2\omega_0\sqrt{m^2+\Delta^2}}-$$

$$-\int\limits_{m^2}^{\infty}\frac{du'T_0(u',\ -4\Delta^2,\ m^2,\ \omega^2-\Delta^2-2(\omega\Delta),\ \omega^2-\Delta^2+2(\omega\Delta),\ m^2)}{u'-\omega^2-m^2-\Delta^2+2\omega_0\sqrt{m^2+\Delta^2}}. \tag{9.11}$$

Если T_0 остается ограниченным полиномиально в полосе (9.10) (это имеет место только для ω_0, ω^2, $(\omega\Delta)$, Δ^2, получаемых из вещественных ω и Δ, вследствие умеренности роста T_c!), то правая часть (9.11) дает аналитическое продолжение T_2 амплитуды T_1 в область D_2, которая для физических значений $p_i^2=m^2$ и $-8m^2<t\leqslant 0$ дает аналитичность в области $\operatorname{Im} s\neq 0$ или $\omega_0\neq 0$.

Можно показать [1, 107], что физическую область

$$\omega_0\geqslant\sqrt{m^2+\Delta^2}$$

можно достичь как некасательный предел изнутри области $D_1\cap D_2$, в которой вследствие аналитического продолжения $T_1=T_2$. Поэтому эти действительные граничные значения T_2 для $\operatorname{Im} s\downarrow 0$ тоже являются экстраполяцией за массовую поверхность амплитуды рассеяния, и для физических значений $(\omega\Delta)=0$, $\omega^2=m^2+\Delta^2$ получим следующую теорему.

Теорема 9.1. Двухчастичная амплитуда рассеяния для фиксированного $-8m^2<t\leqslant 0$ имеет вид

$$T(p_1,\ p_2;\ p_3,\ p_4)=\delta(p_1+p_2-p_3-p_4)\prod_{i=1}^{4}\delta_m^+(p_i)\,T(s,\ t), \tag{9.12}$$

где $T(s,\ t)$ — граничная обобщенная функция со стороны $\operatorname{Im} s>0$ голоморфной в $\{\operatorname{Im} s\neq 0\}$ функции, удовлетворяющей дисперсионному соотношению (вообще говоря, с конечным числом вычитаний) и принадлежит классу C^∞ по t.

Тщательное и математически строгое доказательство дисперсионных соотношений должно основываться на длинной цепочке сложных рассуждений (см., например, [104, 108, 109]). Очевидно, что для установления связи между доказательством Боголюбова и S-матрицей Хаага — Рюэля, т. е. четырехточечной функцией $<A(x_1), \ldots, A(x_4)>_0$, нам надо преодолеть технические трудности [110], некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Редукционная формула для перекрывающихся импульсов

Формулы (9.2) и (9.9) можно вывести методами теоремы 7.2. Для четырехточечной функции в общем случае имеем следующую лемму.

Лемма 9.1. Для $p_2^2, p_3^2 < 4m^2$ при любом порядке приближения к пределу имеем тождество для обобщенных функций

$$T(p_1, p_2; p_3, p_4) = -2\pi i \lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty} \delta_m^+(p_2, a)\,\delta_m^+(p_3, b) \times$$

$$\times [(p_2^2 - m^2)(p_3^2 - m^2) <p_1 \mid \widetilde{R}_\chi(p_2; -p_3) \mid p_4>], \quad (9.13)$$

$$\mid p_2 p_3^{\text{out}}> - \mid p_2 p_3^{\text{in}}> - 2\pi i \lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty} \delta_m^+(p_2, a)\,\delta_m^+(p_3, b) \times$$

$$\times [(p_2^2 - m^2)(p_3^2 - m^2)\widetilde{R}_\chi(-p_2; -p_3)\Omega], \quad (9.14)$$

$$\widetilde{j}(-p_2) \mid p_3> = \sqrt{2\pi} \lim_{a\to\infty} \delta_m^+(p_2, a) \times$$

$$\times [(p_2^2 - m^2)(p_3^2 - m^2)\widetilde{R}_\chi(-p_2; -p_3)\Omega], \quad (9.15)$$

где $\delta_m^+(p, a)$ — последовательность $\Theta_M(R^4)$-функций,

$$\delta_m^+(p, a) = [\pi 2\omega (p^0 - \omega)]^{-1} \sin (p^0 - \omega) a \to \delta_m^+(p). \quad (9.16)$$

Доказательство. Предположим, что $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_4 \in \mathscr{S}(R^3)$ и для $\tilde{f}_i \in \mathscr{S}(R^4)$ с $\operatorname{supp} \tilde{f}_i \in \{(p, p) < 4m^2\}$ введем

$$F_i(x, t) = (2\pi)^{-5/2} \int dp \widetilde{f}_i(p) \left(\frac{p_0 + \omega}{2\omega}\right) \exp i \{(p^0 - \omega)t - (p, x)\}. \quad (9.17)$$

Применяя обычные оценки, можно для фиксированных s и $t \to -\infty$ опустить гладкую θ_χ-функцию (с точностью до члена порядка $O(|t|^{-\infty})$) в

$$\int dx dy F_2(x, s)^* F_3(y, t)\,\theta_\chi(x^0 - y^0) <\widehat{f}_1 \mid A(x) A(y) \mid \widehat{f}_4> \quad (9.18)$$

и получим $\int dx F_2(x, s)^* <\widehat{f}_1 \mid A(x) \mid \widehat{\widehat{f_3 f_4^{\text{in}}}}>$ с поведением

$O(|t|^{-\infty})$. Аналогично (9.18) ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$ для фиксированного s и $t \to \infty$. Таким путем мы покажем, что выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \int dx dy F_2(x, s)^* F_3(y, t) \theta_\chi(x^0 - y^0) < \hat{f}_1 \mid A(x) A(y) \mid \hat{f}_4 > \tag{9.19}$$

интегрируемо для фиксированного s в интервале $-\infty < t < \infty$ и, следовательно, также в интервале $-\infty < s < \infty$. Тогда

$$\lim_{a \to \infty} \lim_{b \to \infty} \int_{-a}^{a} ds \int_{-b}^{b} dt \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \int dx dy F_2(x, s)^* F_3(y, t) \theta_\chi(x^0 - y^0) \times$$

$$\times < \hat{f}_1 \mid A(x) A(y) \mid \hat{f}_4 > = < \hat{f}_1 \hat{f}_2^{\text{in}} \mid \hat{f}_3 \hat{f}_4^{\text{in}} > -$$

$$- < \hat{f}_1 \hat{f}_2^{\text{out}} \mid \hat{f}_3 \hat{f}_4^{\text{in}} >. \tag{9.20}$$

С помощью аналогичных соображений находим, что в (9.20) замена $<\hat{f}_1 | A(x) A(y) | \hat{f}_4>$ на $<\hat{f}_1 | [A(x) A(y)] | \hat{f}_4>$ при последовательности стремления к пределу $\lim\limits_{a \to \infty} \lim\limits_{b \to \infty}$ не приводит к изменениям, в то время как обратная последовательность $\lim\limits_{b \to \infty} \lim\limits_{a \to \infty}$ приводит к добавочному члену, равному правой части (9.20). Формула (9.13) получена после перехода в пространство импульса и интегрирования по s и t (отметим, что в $\mathscr{S}'$ слабый и сильный последовательные пределы тождественны [14]).

Рассмотрим также (9.15) для $\tilde{f}_2, \tilde{f}_3 \in \mathscr{S}(R^4)$ с носителем в $\{(p, p) < 4m^2\}$. Для $t \to -\infty$ имеем поведение $O(|t|^{-\infty})$:

$$\int dx dy f_2(x) F_3(y, t) K_x \theta_\chi(x^0 - y^0) A(x) A(y) \Omega \to$$

$$\to j(f_2) | \hat{f}_3 >, \tag{9.21}$$

в то время как (9.21) при $t \to \infty$ ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$. С другой стороны

$$\int dx dy f_2(x) F_3(y, t) K_x \theta_\chi(x^0 - y^0) A(y) A(x) \Omega \cdot \tag{9.22}$$

ведет себя как $O(|t|^{-\infty})$ при $t \to \infty$, а при $t \to -\infty$ $\theta_\chi(x^0 - y^0)$ можно опустить (с точностью члена порядка до $O(|t|^{-\infty})$); остаток обращается в нуль, так как

$$\operatorname{supp} \tilde{j}(-p) \Omega \subset \{(p, p) \geqslant 4m^2, p^0 > 0\}.$$

Отсюда получаем (9.15) в пространстве импульсов и, следовательно, редукционную формулу (9.9). С помощью же (9.14) получаем аналитичность по t двухчастичной амплитуды рассеяния в «малом эллипсе Лемана» [107].

Лоренц-инвариантные обобщенные функции

Мы хотим придать смысл рассмотрению $L_+^\uparrow$-инвариантным обобщенным функциям как функциям в пространстве обобщенных функций с меньшей размерностью, чем в системе Брейта (9.5) или системе центра масс [для (9.13)], или как обобщенным функциям от $L_+^\uparrow$-инвариантов.

Канонические представления для $L_+^\uparrow$-инвариантных обобщенных функций от одной векторной переменной были даны в работе Матэ (см. [15]). Нас интересует случай трех 4-векторов с существенным упрощением, заключающимся в том, что носитель лежит в $\overline{V}_+^\mu \times R^8$ для некоторых $\mu > 0$.

Пусть $\mathring{\mathscr{S}}'(\overline{V}_+^\mu \times R^{4n};\ L_+^\uparrow)$ — подпространство всех $L_+^\uparrow$-инвариантных обобщенных функций $T \in \mathscr{S}'(R^{4(n+1)})$ с носителем в $\overline{V}_+^\mu \times R^{4n}$ и пусть $\mathring{\mathscr{S}}'([\mu, \infty> \times R^{4n}];\ O_+)$ является подпространством всех $\tau(t, q_1, \ldots, q_n) \in \mathscr{S}'(R^{4n+1})$ с носителем в $[\mu, \infty> \times R^{4n}]$ и $O_+(3)$-ииваринтный по переменным $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 9.2. $\mathring{\mathscr{S}}'(\overline{V}_+^\mu \times R^{4n};\ L_+^\uparrow)$ и $\mathring{\mathscr{S}}'([\mu, \infty> \times R^{4n}];\ O_+)$ топологически изоморфны.

Доказательство следует из теоремы Шварца [14] о том, что обобщенная функция, не зависящая от некоторых переменных, однозначно определяет обобщенную функцию в пространстве меньшей размерности, и наоборот. Ввиду лоренц-инвариантности $T(\Lambda_{\mu\nu}\varphi) = 0$ для

$$\Lambda_{\mu\nu}\varphi = \sum_{i=0}^{n} \left(p_{i\mu} \frac{\partial}{\partial p_i^\nu} - p_{i\nu} \frac{\partial}{\partial p_i^\mu} \right) \varphi(p_0, \ldots, p_n). \quad (9.23)$$

Для $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{V}_+^\mu \times R^{4n}$, $\mu > 0$ преобразование координат

$$t = (p_0, p_0),\ \mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_0,\ q_i = L(p_0)^{-1} p_i\ (1 \leqslant i \leqslant n) \quad (9.24)$$

с «бустом» (5.9) регулярно, и для $1 \leqslant k < l \leqslant 3$ имеем:

$$\Lambda_{ok}\varphi = \sqrt{t + q_0^2}\,\frac{\partial}{\partial q_0^k}\,\varphi, \quad \Lambda_{lk}\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(q_i^k \frac{\partial}{\partial_i^l} - q_i^l \frac{\partial}{\partial q_i^k}\right)\varphi. \qquad (9.25)$$

Таким образом, как и обобщенная функция от новых координат (9.24), T не зависит от q_0 и O_+ — инвариантна по $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$.

Лемма 9.3. Пусть C — замкнутое выпуклое множество $C = \{(a, b, c) \in R^3 : a, c \geqslant 0, ac \geqslant b^2\}$ и $\mathring{\mathscr{S}}'(C)$ — подпространство $\{T \in \mathscr{S}'(R^3) : \operatorname{supp} T \subset C\}$. Тогда пространства $\mathscr{S}'(R^6;\ O_+)$ и $\mathscr{S}'(C)$ топологически изоморфны.

Здесь используется тот факт, что обобщенная функция из пространства $\mathscr{S}'(R^6;\ O_+)$ определяется однозначно на подпространстве основных функций $\varphi \in \mathscr{S}(R^6) \subset \subset \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(R\mathbf{x}, R\mathbf{y})$ для всех $R \in O_+$. Это пространство изоморфно пространству $\mathscr{S}$ (C), в нем каждый O_+-инвариант $\varphi \in \mathscr{S}(R^6)$ является основной функцией O_+-инвариантов:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}^2, (\mathbf{x}\mathbf{y}), \mathbf{y}^2). \qquad (9.26)$$

Поэтому лемма 9.3 является следствием дуальности [110].

Отметим, что комбинированием лемм 9.2 и 9.3 и применением теоремы о ядре можно установить топологический изоморфизм между пространствами

$$\mathring{\mathscr{S}}'(\overline{V}_+^{\mu} \times R^8;\ L_+^{\uparrow}) \text{ и } \mathring{\mathscr{S}}'(D),$$

где D является замкнутым выпуклым образом пространства $\overline{V}_+^{\mu} \times R^8$ в пространстве $L_+^{\uparrow}$-инвариантов $\{(p_0, p_0), (p_0, p_1), \ldots, (p_2, p_2)\}$, образованных из p_0, p_1, p_2.

Резкие запаздывающие коммутаторы

Математически строгий метод построения резких запаздывающих коммутаторов, как $\langle p_1 | \tilde{R}(p_2;\ p_3) | p_4 \rangle$ и $\langle \tilde{R}(p_1;\ p_2)\ E_0^{\perp} \tilde{R}(p_3;\ p_4) \rangle_0$, основывается на представлении ЛЙД (см. гл. 4) для соответствующих коммутаторов. Преимущество этого метода заключается в том, что мы в явном виде получаем общее аналитическое продолжение амплитуд T_r и T_a, а также квартет двукратных запаздывающих (опережающих) коммутаторов. Это открывает возможность для аналитического вычисления оболочек голоморфности и изучения поведения на бесконечности, которое существенно для возможности использования интеграла Коши (9.11).

Важное место занимает следующая лемма, принадлежащая Дайсону [111].

Лемма 9.4. Каждой функции $T \in \mathcal{S}'(R^4)$ с supp $\mathfrak{F}T \subseteq \subset \overline{V}_+ \cup \overline{V}_-$ однозначным образом соответствует некоторая функция

$$u(x, \vec{y}) = (2\pi)^{-2} \int J_0\left(\sqrt{(y_1^2 + y_2^2)\, p^2}\right) \times$$
$$\times\, e^{-i(p,x)}\, \mathfrak{F}T(p)\, dp \in \mathcal{S}'(R^6), \tag{9.27}$$

удовлетворяющая условию $\left(\Box_x - \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right) u(x, \vec{y}) = 0,$

$$u(x, \vec{y}) = u(x, R\vec{y}) \text{ для всех } R \in O_+(2). \tag{9.28}$$

Обратно, каждая функция $u \in \mathcal{S}'(R^6)$ со свойством (9.28) определяет посредством формулы $u(x, \vec{0}) = T(x)$ функцию $T \in \mathcal{S}'(R^4)$ с $\mathfrak{F}T \in \overline{V}_+ \cup \overline{V}_-$. Отображение (9.27) является топологическим изоморфным двух пространств обобщенных функций умеренного роста.

Доказательство имеется в работах [65, 109]. Однозначность этой параметризации всех $T \in \mathcal{S}'(R^4)$ с supp $\mathfrak{F}T \subset \overline{V}_+ \cup \overline{V}_-$ есть следствие теоремы Асгейрссона (см. гл. 4), согласно которой радиально симметричное решение $u \in \mathcal{S}'(R^6)$ шестимерного волнового уравнения с условием $u(x, \vec{0}) = 0$ тождественно равно нулю.

Лемму 9.4 можно применить к коммутатору

$$< [\breve{A}(p_1)\, \breve{A}(p_2)]\, E_0^{\perp}\, [\breve{A}(-p_3)\, \breve{A}(-p_4)] >,$$

который после выделения $\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ в системе центра масс

$$p_1 + p_2 = \left(\sqrt{s}, \mathbf{0}\right), \quad q_1 = \frac{p_1 - p_2}{2}, \quad q_2 = \frac{p_3 - p_4}{2}, \tag{9.29}$$

согласно лемме 9.2, можно рассматривать как обобщенную функцию

$$C(s, q_1, q_2) \in \mathring{\mathcal{S}}'([m^2, \infty> \times R^6;\ O_+).$$

По спектральному условию C имеет носитель

$$s \geqslant m^2, \quad |q_i^2| \geqslant \sqrt{m^2 + q_i^2} - \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad i = 1, 2, \qquad (9.30)$$

а парциальный фурье-образ $\tilde{C}(s, y_1, y_2)$, согласно условию локальности, имеет носитель по переменным y_1, y_2 в $(\bar{V}_+ \cup \bar{V}_-) \times (\bar{V}_+ \cup \bar{V}_-)$. Преобразование (9.27) приводит к обобщенной функции $u(s, q_1, \mathbf{k}_1, q_2, \mathbf{k}_2)$, удовлетворяющей (9.28) по переменным $(q_1, \mathbf{k}_1)$ и $(q_2, \mathbf{k}_2)$.

Свойства носителя (9.30) по переменным q_1 и q_2 независимы. Поэтому при применении принципа Гюйгенса и теоремы Асгейрссона в каждом волновом уравнении они приводят к независимым ограничениям на данные Коши на поверхности $\{q_1^0 = q_2^0 = 0\}$, по которым u может быть однозначно определено. Это дает двукратное представление ЛЙД:

$$C(s, q_1, q_2) = \int d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big\{ \Delta_6(q_1 - u_1, -\mathbf{k}_1) \times$$

$$\times \Delta_6(q_2 - u_2, -\mathbf{k}_2) \frac{\partial^2}{\partial u_1^0 \partial u_2^0} u(s, u_1, \mathbf{k}_1, u_2, \mathbf{k}_2)\Big|_{u_1^0 = u_2^0 = 0} +$$

$$+ 3 \text{ члена} \Big\} = (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{u}_1 d\mathbf{u}_2 d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \Big\{ \epsilon(q_1^0)\, \delta'\big((q_1^0)^2 -$$

$$- (\mathbf{q}_1 - \mathbf{u}_1)^2 - \mathbf{k}_1^2\big)\, \epsilon(q_2^0)\, \delta'\big((q_2^0)^2 - (\mathbf{q}_2 - \mathbf{u}_2)^2 - \mathbf{k}_2^2\big) \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial u_1^0 \partial u_2^0} u(s, u_1, \mathbf{k}_1^2, u_2, \mathbf{k}_2)\Big|_{u_1^0 = u_2^0 = 0} + 3 \text{ члена} \Big\}. \qquad (9.31)$$

В (9.31) спектральные обобщенные функции с помощью (9.27) выражаются через вакуум; $\langle [\tilde{A}(p_1) \tilde{A}(p_2)] E_0^{\perp} \times$ $\times [\tilde{A}(-p_3) \tilde{A}(-p_4)] \rangle_0$ при фиксированных s имеет в

$$G(s) = \left\{ \mathbf{u}_i^2 \leqslant \frac{s}{4}, \ \mathbf{k}_i^2 \geqslant \max\ 0, m - \left(\frac{s}{4} - \mathbf{u}_i^2\right)^{1/2}, \ i = 1, 2 \right\} \qquad (9.32)$$

носитель [111]. Свертывание в (9.31) следует понимать в слабом смысле: для любого $\varphi \in \mathcal{S}(R^8)$

$$\int dq_1 dq_2 \varphi(q_1, q_2)\, \epsilon(q_1^0)\, \delta'\big((q_1^0)^2 - (\mathbf{q}_1 - \mathbf{u}_1)^2 - \mathbf{k}_1^2\big)\, \epsilon$$

$$\epsilon(q_2^0)\, \delta'\big((q_2^0)^2 - (\mathbf{q}_2 - \mathbf{u}_2)^2 - \mathbf{k}_2^2\big) \qquad (9.33)$$

принадлежит $\mathscr{S}(R^{10})$ по переменным $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{k}_2$. Общее аналитическое продолжение двукратных запаздывающих опережающих коммутаторов [108] получим заменой в (9.31) $\varepsilon(\ )\delta'(\ )\varepsilon(\ )\delta'(\ )$ и ее производных по q_1^0 и q_2^0 ядром

$$\prod_{j=1}^{2} \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}^2} \frac{\left[(q_j^0)^2 - (\mathbf{q}_j - \mathbf{u}_j)^2 + 1\right]^N}{\left[(q_j^0)^2 - (\mathbf{q}_j - \mathbf{u}_j)^2 - \mathbf{k}_j^2\right]\left[\mathbf{k}_j^2 + 1\right]^N} \tag{9.34}$$

и его производными. Из умеренности роста спектральных обобщенных функций [см. (1.18)] следует, что ядра являются основными функциями для достаточно большого $N \geqslant 0$ и всех $(q_1, q_2) \in D(s)$, где знаменатель нигде не обращается в нуль для всех $(u_1, \mathbf{k}_1, u_2, \mathbf{k}_2) \in G(s)$. Резкие запаздывающие (опережающие) коммутаторы получаются в виде граничных обобщенных функций из $\mathfrak{F}_\pm \times \mathfrak{F}_\pm$, всегда лежащих в $D(s)$ для $s > 0$, причем необходимые условия, налагаемые на рост [2], выполняются.

Это явное выражение для T_0 в (9.11) через четырехточечную функцию Вайтмана устраняет все сомнения относительно умеренности роста подынтегрального выражения в дисперсионных соотношениях для комплексных значений массы. Выполнив трудоемкое мажорирование, можно показать, что интеграл (9.11) равномерно сходится в полосе (9.10) после конечного числа вычитаний. Отсюда получаем свойства аналитичности и ограниченности для амплитуды рассеяния согласно теореме 9.1.

В этих лекциях мы нигде не пытались дать «аксиоматическую» характеристику формулировки ЛСЦ квантовой теории поля. Это не противоречит духу программы ЛСЦ: недостаточная степень точности в математическом аппарате теории, которая все же поддается контролю, дает больше гибкости при введении физических понятий. Часто с помощью более сложного математического аппарата можно получить более строгие результаты, как мы это видели в теории Хаага — Рюэля.

Качественно мы можем принять формулировку ЛСЦ как асимптотически полную квантовую теорию поля Вайтмана. При этом следует сделать некоторые технические предположения:

а) инвариантная область для $A(\varphi)$, $a^{\mathrm{ex}}(\hat{f})^{(*)}$ должна содержать по крайней мере D^{ex}, на которой A как векторная обобщенная функция умеренного роста должна удовлетворять асимптотическому условию;

б) должны существовать «резкие» обобщенные функции Грина и редукционные формулы как итерированные сужения на массовую поверхность (например, как непрерывные функции по критическим переменным);

в) должна допускаться перестановка порядка предельного перехода, например, как при использовании редукционной формулы и суммировании по полному набору промежуточных состояний.

Желателен математический контроль над этими и другими предположениями.

Теперь у нас все готово для исследования следствий уравнений унитарности [72, 73], выражающих асимптотическую полноту в виде связанного набора интегральных уравнений для запаздывающих или хронологических обобщенных функций.

Однако надо еще затратить много усилий, прежде чем можно будет продолжить работу Симанзика по исследованию многочастичной структуры обобщенных функций Грина [112—114]. Величины, введенные здесь как неприводимые функции более высокого порядка с повышающимся порогом для промежуточных состояний, вполне устойчивы против идеологии, исходящей как из теории квантованных полей, так и из аналитической S-матричной теории. Здесь может возникнуть даже новая схема для вычисления субатомных процессов, однако эти планы пока расходятся с насущными заботами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wightman A. S., Gårding L. Arkiv. fys., 28, 129 (1964).
2. Стритер Р. Ф., Вайтман А. С. PCT, спин, статистика и все такое. Перев. с англ. М., «Наука», 1966.
3. Йост Р. Общая теория квантовых полей. М., «Мир», 1967.
4. Dixmier J. Les algebras d'operateurs dans l'espace Hilbertien. Paris, Gauthier-Villars, 1956.
5. Bargmann V. J. Math. and Phys., 5, 862 (1964).
6. Wigner E. P. Ann. Math., 40, 149 (1939).
7. Bargmann V. Ann. Math., 59, 1 (1954).
8. Dunford N., Schwartz J. Linear operators. Vol. I, II, N. Y., Interscience, 1958—1963.
9. Von der Waerden B. L. Die Gruppen Theoretischen Methode in der Quanten Mechanik. Berlin, Springer-Verlag, 1932.

10. Wightman A. S. Ann. Inst. H. Henri Poincaré, Sec. A., 1, 403 (1964).
11. Bohr N., Rosenfeld L. Kgl. danske vid. selskab. Mat.-fys. Medd., 12, No. 18 (1933).
12. Bohr N., Rosenfeld L. Phys. Rev., 78, 794 (1950).
13. Heisenberg W. Z. Phys., 120, 513 (1943).
14. Schwartz L. Theory der Distributions. Vol. I, II Paris, Hermann, 1957—1959.
15. Garding L., Lions J. Nuovo Cimento, Suppl., 14, 9 (1959).
16. Köthe G. Topologische lineare Räume. Berlin, Springer-Verlag, 1960.
17. Парасюк О. С. «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 20, 843 (1956).
18. Bogolubov N. N., Parasiuk O. S. Acta math., 97, 227 (1957).
19. Holle E., Philips R. S. Functional Analysis and Semi-Groups. Providence, Amer. Math. Soc., 1957.
20. Borchers H. J. Commun. Math. Phys., 1, 281 (1965).
21. Ruelle D. Helv. phys. acta, 35, 147 (1962).
22. Schwartz L. Ann. Inst. Fourier, VII, VIII (1957—1958).
23. Jost R. Helv. phys. acta, 30, 409 (1957).
24. Garding L. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 33, 331 (1947).
25. Jost R., Hepp K. Helv. phys. acta, 35, 34 (1962).
26. Wightman A. S. Phys. Rev., 101, 890 (1956).
27. Швебер С. С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
28. Joos H. Fortschr. Phys., 10, 65 (1962).
29. Fierz M. Helv. phys. acta, 12, 3 (1939).
30. Pauli W. Phys. Rev., 58, 716 (1940).
31. Haag R., Schroer B. J. Math. and Phys., 3, 248 (1962).
32. Araki H. Vorlesungen über axiomatische Quantenfeldtheory. Bd. I, II. Zürich, E. T. H., 1961—1962.
33. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966.
34. Schwartz L. J. analyse math., 4, 88 (1954).
35. Nelson E. Ann. Math., 70, 572 (1959).
36. Borchers H. J., Zimmermann W. Nuovo cimento, 31, 1047 (1964).
37. Rech H., Schlieder S. S. Nuovo cimento, 22, 105 (1961).
38. Borchers H. J. Nuovo cimento, 15, 784 (1960).
39. Epstein H. Nuovo cimento, 27, 886 (1963).
40. Guenen M., Misra B. Helv. phys. acta, 37, 267 (1964).
41. Aráki H. J. Math. Phys., 5, 1 (1964).
42. Jaffé A. Ann. Phys., 32, 127 (1965).
43. Stone M. H. J. Indian. Math. Soc., 15, 155 (1951).
44. Langerholz J., Schroer B. Commun. Math. Phys., 1, 215 (1965).
45. Ekstein H. Phys. Rev., 101, 880 (1956).
46. Brenig W., Haag R. Fortschr. Phys., 7, 183 (1959).
47. Kato T. Trans. Amer. Math. Soc., 70, 195 (1951).
48. Levy-Leblond J. M. J. Math. Phys., 4, 776 (1963).
49. Cook J. M. J. Math. Phys., 36, 81 (1957).
50. Hack M. N. Nuovo cimento, 9, 731 (1958).
51. Hack M. N. Nuovo cimento, 13, 231 (1959).
52. Jauch J. M., Zinner I. I. Nuovo cimento, 11, 553 (1959).
53. Hunziker W. Private communication.

54. Sandhas W. Preprint, 1965.
55. Redmond P., Uretski J. L. Ann. Phys., **9**, 106 (1960).
56. Michel L., Axiomatic Fild Theory, Vol I Gardon, Breach, N. Y., 1966.
57. Jauch J M. Helv. phys. acta, **31**, 661 (1958).
58. Kuroda S. T. Nuovo cimento, **12**, 431 (1959).
59. Kato T. Techn. Report, (Univ. of Calif.), No. 11 (1963).
60. Ikebe T. Arch. Rat. Mech. and Analysis, **5**, 1 (1960).
61. Фаддеев Л. Д. Тр. Матем. ин-та АН СССР, **69**, 1 (1963).
62. Goldberger M. L., Watson K. M. Collision Theory. Wiley, 1964.
63. Hunziker W. J. Math. Phys., **6**, 6 (1965).
64. Haag R. Phys. Rev., **112**, 669 (1958).
65. Wightman L. In: «Dispersion Relations and Elementary Particles». Paris, Hermann, 1960.
66. Mayer J. E., Mayer M. G. Statistical Mechanics. Wiley, 1940.
67. Borchers H. J. Nuovo cimento, **33**, 1600 (1964).
68. Schwinger J. Field Theory of Particles. Brandeis Lectures. Prentice Hall, 1964.
69. Greenberg O. W. Thesis. Princeton, 1956.
70. Araki H., Haag R., Schroer B. Nuovo cimento, **19**, 90 (1961).
71. Doplicher S. Nuovo cimento, **29**, 285 (1963).
72. Glaser V., Lehman H., Zimmermann W. Nuovo cimento, **6**, 1122 (1957).
73. Lehman H., Symanzik K., Zimmermann W. Nuovo cimento, **1**, 205 (1955); **6**, 319 (1957).
74. Araki H., Haag R., Robinson D. Private communication.
75. Wightman A. S. Cargese Lectures, 1964.
76. Källén G. Quantenelektrodynamik. Encyclopedia of Physics. Bd. I. Berlin, Springer-Verlag, 1958.
77. Schroer B. Fortschr. Phys., **11**, 1 (1963).
78. Dollard J. D. J. Math. Phys., **5**, 729 (1964).
79. Greenberg O. W. Thesis. Princeton, 1956.
80. Yang C. N., Feldman D. Phys. Rev., **79**, 972 (1950).
81. Zimmermann W. Nuovo cimento, **13**, 503 (1959).
82. Heisenberg W. Z. Phys., **120**, 513 (1943).
83. Wichman E. H., Crichton J. H. Phys. Rev., **132**, 2788 (1963).
84. Crichton J. H. Thesis, UCRL-11961 (1965).
85. Hepp K. Helv. phys. acta, **37**, 659 (1964).
86. Stapp H. P. Phys. Rev., **128**, 1863 (1962).
87. Gunson J. J. Math. Phys., **6**, 852 (1965).
88. Weinberg S. Phys. Rev., **133**, B232 (1964).
89. Schwinger J. Ann. Phys., **9**, 169 (1960).
90. Jost R. Helv. phys. acta, **36**, 77 (1936).
91. Schneider W. Thesis. Zürich, 1965.
92. Hepp K. J. Math. Phys., **6** (1965).
93. Stueckelberg E. C. G., Rivier D. Helv. phys. acta, **23**, 215 (1950).
94. Feynman R. P. Phys. Rev., **76**, 749 (1949).
95. Fierz M., Helv. phys. acta, **23**, 731 (1950).
96. Wanders W. Helv. phys. acta, **38**, 142 (1965).
97. Iagolnitzer D. Preprint, 1964.
98. Olive D. Phys. Rev., **135**, B745 (1964).

99. Bros J., Epstein H., Glaser W. Nuovo cimento, **31**, 1265 (1964).
100. Bros J., Epstein H., Glaser W. Commun, Math. Phys., **1**, 240 (1965).
101. Эпштейн Х. См. наст. сб., стр. 115.
102. Khuri N. N., Kinoshita T. Phys. Rev., **137** B720 (1965).
103. Khuri N. N., Kinoshita T. Phys. Rev., **146**, B706 (1965).
104. Froissart M. Dispersion Relations and their Connection with Causality. N. Y., Academik Press, 1964.
105. Riaki F. Unpublished.
106. Bremerman H. J., Oehme R., Taylor J. G. Phys. Rev., **109**, 2178 (1958).
107. Lehman H. Nuovo cimento, Suppl., **14**, 153 (1959).
108. Omnes R. Dispersion Relations and Elementary Particles. Paris, Hermann, 1960.
109. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1964.
110. Hepp K. Helv. phys. acta, **37**, 639 (1964).
111. Dyson F. J. Phys. Rev., **110**, 1460 (1958).
112. Symanzik K. J. Math. Phys., **1**, 249 (1960).
113. Symanzik K. Lectures in Boulder (1960), Hercegnovi (1961), Madras (1964).
114. Symanzik K. Werner Heisenberg and die Physik unserer Zeit. Braunschweig, Vieweg, 1961.

Г. Эпштейн

АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей лекции автор не дает обзора всех аналитических свойств обобщенных функций в квантовой теории поля.

Наиболее важные из опущенных работ — это работы по исследованию аналитических свойств функций Вайтмана (в x-пространстве) (см., например, работу Келлена [1]), а также доказательства дисперсионных соотношений (см., например, работу [2]) *.

Список литературы ни в коем случае не претендует на полноту, и автор заранее приносит свои извинения за возможные упущения. Материалы, включенные в эту лекцию, являются частично результатом совместной работы с Бросом, Глазером и Стора, которым автор признателен за разрешение включить сюда неопубликованные работы.

ГЛАВА 1. ОБОБЩЕННЫЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Наиболее широко применяемые редукционные формулы квантовой теории поля (см. [1, 8—10]) выражают элементы S-матрицы через вакуумные средние хронологических, запаздывающих или опережающих, произведений полевых операторов. Например, в теории с четырьмя частицами, описываемыми локальными скалярными нейтральными полями A_0, A_1, A_2, A_3, амплитуда реакции $1+2 \to 3+0$ определяется следующим образом:

$$\langle p_3, p_0 | S-1 | -p_1, -p_2 \rangle =$$

---

* Строгое доказательство было дано впервые Боголюбовым Н. Н. [3]. — *Прим. ред.*

$$= \frac{1}{(2\pi)^{16}} \int \exp i \sum_{j=0}^{3} (p_j, x_j) K_{x_0}, \ldots, K_{x_3} \times$$

$$\times \tilde{r}_0 (x_0, x_1, x_2, x_3) \, d^4x_0 \ldots d^4x_3,$$

где K_{x_j} обозначает $(\Box_{x_j} + m_j^2)$, и

$$\tilde{r}_0 (x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_P \theta (x_0^0 - x_{P1}^0) \theta (x_{P1}^0 - x_{P2}^0) \theta (x_{P2}^0 - x_{P3}^0) \times$$

$$\times (\Omega, [[[A_0(x_0), A_{P1}(x_{P1})], A_{P2}(x_{P2})] A_{P3}(x_{P3})] \Omega).$$

Суммирование производится по всем перестановкам P чисел (1, 2, 3). Импульсы частицы обозначены: $-p_1$, $-p_2$, p_3, p_0 соответственно.

Выводить здесь эти формулы не будем, поскольку они были изучены в лекциях Хеппа, которому удалось получить их строгим образом (и в несколько иной форме) из аксиом Вайтмана. Такие формулы имеют место также в теории Хаага и Араки (см. лекции Робинсона [6] и Араки [11]). Сразу же после получения этих формул стало ясно, что можно написать многие редукционные формулы, которые приводят к аналитичности (вне массовой поверхности) в различных областях. При этом было также обнаружено, что различные обобщенные функции, возникающие в этих формулах, являются граничными значениями одной и той же голоморфной функции в импульсном пространстве — обстоятельство, обобщающее перекрестные свойства теории возмущений. Эта проблема была исследована систематически Йостом [12] для трехточечной функции, и затем Штейнманом [13, 14], Рюэлем [15, 16], Араки [17], Араки и Бургоином [18]. Некоторый прогресс был достигнут недавно Бросом [20].

§ 1. Определение обобщенных запаздывающих функций (о. з. ф.)

В этом параграфе мы сделаем обзор некоторых результатов Рюэля [16], метод которого, по-видимому, позволяет понять общую картину. Рассмотрим последовательность $n+1$ нейтральных скалярных полей $A_0(x)$, $A_1(x), \ldots, A_n(x)$, удовлетворяющих обычным аксиомам:

$$\text{(I)} \quad U(a, 1) A_j(x) U(a, 1)^{-1} = A_j(x+a);$$

$$\text{(II)} \quad [A_j(x), A_k(y)] = 0 \text{ при } (x-y)^2 < 0;$$

$$\text{(III)} \quad A_j(x) \subset A_j^*(x),$$

причем эти соотношения имеют место в смысле соотношений обобщенных функций умеренного роста, и только тогда, когда они применяются к соответствующим областям (см. лекции Хеппа).

$U(a, 1)$ является непрерывным унитарным представлением трансляционной группы $R^4 \subset U(a, 1) = \exp i a_\mu P^\mu$. Допустим, что существует такой вектор Ω, однозначный до фазового фактора с проектором E_0, что $U(a, 1)\Omega = \Omega$ и что сужение оператора P на $(1-E_0)\mathscr{H}$ (где $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство) имеет спектр, содержащийся в множестве

$$\{p \in R^4, \ p^0 > 0, \ p^2 \geqslant \mu^2\},$$

где $\mu > 0$, т. е. что массы состояний, ортогональных к вакууму Ω, имеют строго положительную нижнюю границу μ.

Интуитивно удобно, но не существенно, предположить, что $U(a, 1)$ расширяется до непрерывного унитарного представления группы Пуанкаре

$$(a, \Lambda) \to U(a, \Lambda),$$

такого, что

$$U(a, \Lambda)\Omega = \Omega,$$

$$U(a, \Lambda) A_j(x) U(a, \Lambda)^{-1} = A_j(\Lambda x + a),$$

т. е. что $A_j(x)$ — скалярное поле. Читатель может принять это допущение, хотя интересующие нас свойства не зависят от него.

Будет также удобно рассматривать последовательность регуляризованных полей $A_j * \varphi_j(x)$, где $\varphi_j \in \mathscr{D}(R^4)$ бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем. Такие операторы обладают свойствами (I) и (III), однако свойство (II) должно быть заменено

$$[A_j * \varphi_j(x), A_k * \varphi_k(y)] = 0$$

для

$$x - y \notin \overline{V}^+ \cup \overline{V}^- + (\operatorname{supp} \varphi_j) - (\operatorname{supp} \varphi_k).$$

Следуя Рюэлю, введем обозначение

$$\mathcal{W}^{\pi}(x_0, \ldots, x_n) = \mathcal{W}^{\pi}(x) =$$
$$= (\Omega, A_{\pi 0}(x_{\pi 0}), \ldots, A_{\pi n}(x_{\pi n})\Omega),$$

где π — перестановка $j \to \pi j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$. Обозначим $(\pi^{-1}x)_j = x_{\pi j}$ и назовем W_{φ}^{π} функцией класса C^{∞} $(\Omega, A_{\pi 0} \ast \varphi_{\pi 0}(x_{\pi 0}), \ldots, A_{\pi n} \ast \varphi_{\pi n}(x_{\pi n})\Omega)$. Известно, что переставленные функции Вайтмана $\mathcal{W}^{\pi}(x)$ инвариантны относительно одновременной трансляции, $x_0, \ldots, x_n$ и поэтому зависят только от переменных

$$\xi_j^{\pi} = x_{\pi j} - x_{\pi (j-1)} \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Их можно рассматривать как обобщенные функции умеренного роста на фактор-пространстве $R^{4n+1}/\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — подпространство, состоящее из векторов вида $x_0 = x_1 = \ldots = x_n$, так как поля A_j являются операторными обобщенными функциями умеренного роста по предположению, а также в силу теоремы о ядре. Это фактор-пространство, изоморфное R^{4n}, будем называть ξ-пространством. Для каждой перестановки π переменные

$$\{(\xi_j^{\pi})^{\mu}\}_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 0 \leqslant \mu \leqslant 3}}$$

линейно независимые координаты на этом многообразии. Рассмотрим теперь преобразование фурье-функции $\mathcal{W}^{\pi}(x)$, определяемое эвристически следующим образом:

$$\mathcal{W}^{\pi}(x) = \int \exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{j=0}^{n}(p_j, x_j)\, G^{\pi}(p)\right\} dp_0, \ldots, dp_n.$$

Для $\pi = 1$ (тождественное преобразование):

$$\mathcal{W}^{1}(x) = W(\xi_1^1, \ldots, \xi_n^1);$$

$$\mathcal{W}(\xi_1^1, \ldots, \xi_k^1 + a, \xi_{k+1}^1, \ldots, \xi_n^1) =$$
$$= (\Omega, A_0(x_0) \ldots U(a, 1) A_k(x_k) \ldots A_n(x_n)\Omega) =$$
$$= (\Omega, A_0(x_0) \ldots (\exp \mathrm{i}\, aP^{\mu}) A_k(x_k) \ldots A_n(x_n)\Omega).$$

После сглаживания по всем переменным ξ_j^1 с помощью основных функций получим обобщенную функцию вида

$\int e^{i\,ga}T(q)\,d^4q$, причем T имеет носитель, содержащийся в спектре оператора P. Пользуясь тождеством

$$(p, x) = p_n(x_n - x_{n-1}) + (p_{n-1} + p_n)(x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + \\ + (p_n + \ldots + p_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + (p_n + \ldots + p_1)(x_1 - x_0) + \left(\sum_{j=0}^{n} p_j\right) x_0,$$

видим, что носитель функции

$$\tilde{G}'(p) = \delta(p_0 + \ldots + p_n)\,\tilde{g}'(p)$$

должен содержаться в множестве

$$\left\{p: \sum_{j=0}^{n} p_j = 0,\ -\sum_{k=j}^{n} p_k \in \overline{V}^+,\quad 0 \leqslant j \leqslant n\right\}.$$

Вводя обозначение

$$P_j^\pi = \sum_{k=j}^{n} p_{\pi k},$$

заметим, что G_j^π имеет носитель, содержащийся в

$$\left\{p: \sum_{j=0}^{n} P_j^\pi = 0,\ -P_j \in \overline{V}^+,\ 0 \leqslant j \leqslant n\right\}.$$

Как известно, отсюда следует, что $\mathscr{W}_j^\pi$ является граничным значением функции (преобразования Лапласа $\tilde{G}^\pi$), голоморфной в трубе

$$\{z \in C^{4(n+1)},\quad \operatorname{Im}\zeta_j^\pi \in V^+\},\ \text{где}\ \zeta_j^\pi = z_{\pi j} - z_{\pi(j-1)}.$$

(Позже мы вернемся к преобразованиям Лапласа обобщенных функций с носителем на конусе.) Функции $\mathscr{W}_\varphi^\pi$ также обладают этими свойствами. Локальная коммутативность приводит к тому, что все переставленные функции Вайтмана являются граничными значениями одной и той же голоморфной функции (см. работу [5] и гл. 3). Мы не занимаемся этой проблемой, поскольку нас интересуют только аналитические свойства в p-пространстве. Источником этой аналитичности будут свойства носителя в x-пространстве. Для того чтобы получить эти свойства, нам придется умножать функции Вайтмана на θ-функции. Отсюда и возникают серьезные трудности *. Отметим, однако, что все свойства, полученные в настоящем параграфе, справедливы без всяких изменений и для регуляризованных функций Вайтмана $\mathscr{W}^{\pi}_{\varphi}$, для которых законно умножение на θ-функции. Мы предположим, что можно умножать также обобщенные функции $\mathscr{W}^{\pi}$ на θ-функции, и что свойства, полученные для регуляризованных функций $\mathscr{W}^{\pi}_{\varphi}$, распространяются на случай $\mathscr{W}^{\pi}$; как будто мы можем найти предельную процедуру, в которой $\varphi_j \to \delta(x)$, и соответствующие произведения $\mathscr{W}^{\pi}_{\varphi}$ с θ-функциями имеют пределы в смысле пределов обобщенных функций. Некоторые другие замечания относительно пока нерешенной проблемы строгого определения обобщенных запаздывающих функций сделаны ниже.

Циклы

Рюэль ввел символы (π, σ), где π — перестановка чисел $(0, 1, \ldots, n)$, а σ — последовательность чисел $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$, $\sigma^j = \pm 1$. Вместо (π, σ) пишут также $(\pi 0 \gtrless \pi 1 \lesseqgtr \ldots \gtrless \gtrless \pi n)$, где между πk и $\pi(k-1)$ стоит знак $>$, если $\sigma^k = 1$, и если $\sigma^k = -1$. Этим символам могут быть сопоставлены взаимно однозначно подмножества x-пространства (или ξ-пространства), определяемые следующим образом:

$$\{x : \sigma^k (x^0_{\pi k} - x^0_{\pi(k-1)}) < 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

или

$$\{\xi : \sigma^k \xi^{\pi 0}_k < 0, \ 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

(Их можно рассматривать как $(n+1)$-симплексы симплициального комплекса. Это и объясняет выбор названия «цикл», употребляемого в дальнейшем. Мы не будем рассматривать эту точку зрения, а только сошлемся на работу Рюэля, часть которой, к сожалению, не опубликована.)

---

* В формулировке Боголюбова Н. Н. мы имеем дело с вариационными производными токов, обладающими свойствами запаздывания (или опережения). Поэтому подобные трудности не появляются. — *Прим. ред.*

Для целей настоящих лекций мы определяем цикл как формальную линейную комбинацию символов (π, σ) вида

$$\sum_{\pi \in \gamma_{n+1}} \varepsilon(\sigma_\pi)(\pi, \sigma_\pi)$$

(где γ_{n+1} — группа перестановок чисел $(0, 1, \ldots, n)$ и $\varepsilon(\sigma) = \sigma^1, \ldots, \sigma^n)$, обладающую следующими свойствами: если π и π' отличаются друг от друга только одной транспозицией

$$\pi = \pi 0, \pi 1, \ldots, \pi p, \pi(p+1), \ldots, \pi n,$$
$$\pi' = \pi 0, \pi 1, \ldots, \pi(p+1), \pi p, \ldots, \pi n,$$

то

$$\sigma_\pi^1 = \sigma_\pi^1, \ldots, \sigma_\pi^p = \sigma_{\pi'}^p, \sigma_\pi^{p+2} = \sigma_{\pi'}^{p+2}, \ldots, \sigma_\pi^n = \sigma_{\pi'}^n.$$

(Топологическое определение циклов допускает более общие циклы, которые мы не будем рассматривать.)

Мы положим:

$$(\pi, \sigma)\mathscr{W}(x) = \left\{\prod_{k=1}^{n} \theta\left(\sigma^k\left(x^0_{\pi(k-1)} - x^0_{\pi k}\right)\right)\right\}\mathscr{W}^{\pi}(x).$$

По предположению это — обобщенная функция, инвариантная относительно трансляций, т. е. обобщенная функция в ξ-пространстве. Аналогично (однако строгим образом) мы определяем $(\pi, \sigma)\mathscr{W}_\varphi(x)$. Каждому циклу мы соответственно сопоставляем обобщенную функцию умеренного роста:

$$\sum_\pi \varepsilon(\sigma_\pi)(\pi, \sigma_\pi)\mathscr{W}(x)$$

и

$$\sum_\pi \varepsilon(\sigma_\pi)(\pi, \sigma_\pi)\mathscr{W}_\varphi(x).$$

Преобразование Фурье обобщенной функции $F(x)$, инвариантной относительно трансляций, имеет вид $\tilde{F}(p) = \delta(p_0 + \ldots + p_n)\tilde{f}(p)$, где $\tilde{f}$ — обобщенная функция на линейном подпространстве $\{p : p_0 + \ldots + p_n = 0\}$, которое мы теперь будем называть импульсным пространством (p-пространство по-прежнему обозначается $R^{4(n+1)}$). Импульсное пространство является дуальным к ξ-пространству и $\tilde{f}$ — преобразование Фурье обобщенной функции в ξ-пространстве, определяемой F. Мы будем называть комплексным импульсным пространством подмногообразие C^4, определяемое следующим образом:

$$\{k=(k_0, \ldots, k_n): k_0+\ldots+k_n=0\}.$$

Будет удобно пользоваться также переменными $k_0, \ldots, k_n$ в комплексном импульсном пространстве (хотя, например, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ могло бы быть множеством независимых переменных).

Теперь мы введем специальный класс циклов, которым соответствуют обобщенные запаздывающие функции. Для этой цели мы рассмотрим в пространстве R^{n+1} всех $(n+1)$-кратных последовательностей $(s_0, \ldots, s_n)$ n-мерное линейное подпространство Σ_{n+1}, определяемое как $\{s: s_0+s_1+\ldots+s_n=0\}$ (переменные s_j являются вспомогательными; читатели могут, однако, рассматривать их как временные компоненты $n+1$ четырехмерных векторов с нулевой суммой). Пусть I — непустое подмножество множества $\{0, 1, \ldots, n\}$ с непустым дополнением CI. Для $s \in \Sigma_{n+1}$ положим

$$s_I=\sum_{j \in I} s_j=-s_{CI}.$$

Аналогично для любого p в импульсном пространстве положим

$$p_I=\sum_{j \in I} p_j=-p_{CI}.$$

Для каждого I уравнение $s_I=0$ определяет гиперплоскость (содержащую 0) в Σ_{n+1}. Эти гиперплоскости разделяют Σ_{n+1} на открытые конические ячейки. В каждой ячейке для каждого I имеется определенный знак (так как s_I не обращается в нуль внутри ячейки). Множество всех ячеек будем обозначать Ξ_{n+1}.

Каждой ячейке $S \in \Xi_{n+1}$ сопоставляем цикл C^S следующим образом:

$$C^S=\sum_{\pi \in j_{n+1}} \varepsilon(\sigma_\pi^S)(\pi, \sigma_\pi^S),$$

где

$$\sigma_\pi^{Sp}=-\operatorname{sign} \sum_{j=p}^{n} s_{\pi j}=\operatorname{sign} \sum_{j=0}^{p-1} s_{\pi j} \text{ в } S.$$

Для того чтобы проверить, является ли, согласно принятому нами определению, C^s циклом, рассмотрим две перестановки π и π', такие что $\pi j=\pi' j$ для $j\neq k$ или $k+1$ и $\pi k=\pi'(k+1)$, $\pi(k+1)=\pi' k$. Очевидно, что для $p\leqslant k$ или $p\geqslant k+2$

$$\sum_{j=0}^{p-1} s_{\pi j} = \sum_{j=0}^{p-1} s_{\pi' j},$$

так что $\sigma_\pi^{Sp}=\sigma_{\pi'}^{Sp}$, что и требовалось доказать.

$C^S\mathscr{W}(x)$, рассматриваемая как обобщенная функция в ξ-пространстве, имеет носитель, содержащийся в выпуклом конусе. Отсюда следует, что ее преобразование Фурье в импульсном пространстве $C^S\widetilde{\mathscr{W}}$ является граничным значением голоморфной функции в трубе в комплексном импульсном пространстве, причем базис этой трубы лежит внутри конуса, дуального к носителю $C^S\mathscr{W}$ в ξ-пространстве (см. работу [5] и гл. 2, 3). Чтобы иметь предварительное представление о форме этой трубы, предположим, что только временные компоненты четырехмерных векторов $k_0, \ldots, k_n$ $(k_j=p_j+\mathrm{i}\,q_j)$ комплексные, а все остальные переменные действительны.

Мы можем написать

$$(\pi,\ \sigma_\pi^S)\,\mathscr{W}_\varphi(x) = \prod_{k=1}^{n} \theta(-\sigma_\pi^{Sk}\,\xi_k^{\pi 0})\mathscr{W}_\varphi(x).$$

Преобразование Лапласа этой функции как функции в импульсном пространстве выражается наилучшим образом в переменных

$$K_j^\pi = \sum_{r=j}^{n} k_{\pi r} = P_j^\pi + \mathrm{i}\,Q_j^\pi,$$

сопряженных с переменными ξ_k^π. Преобразование Лапласа тогда задается выражением

$$\frac{1}{(2\pi)^{4n}}\int \exp \mathrm{i} \sum_{j=0}^{n} (k_j,\ x_j)\, C^S\mathscr{W}_\varphi(x)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{4n}}\int \exp \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} (K_j^\pi,\ \xi_j^\pi)\left\{\prod_{k=1}^{n} \theta(-\sigma_\pi^{Sk}\,\xi_k^\pi)\right\}\times$$

$$\times\mathscr{W}_\varphi(x)\, d^4\xi_1^\pi \quad \ldots \quad d^4\xi_n^\pi.$$

Очевидно, что если мы положим $k_j^0=p_j^0+\mathrm{i}\,q_j^0$, $k_j=p_j$, то приведенный интеграл после сглаживания по переменным

p_j с помощью основных функций будет определять функцию от k^0, голоморфную в трубе $\{k^0: Q_j^{\pi 0} \sigma_\pi^{Sk} < 0,\ 1 \leqslant j \leqslant \leqslant n\}$. Из определения σ_π^{Sk} следует, что эта область аналитичности всегда содержит множество $\{k^0: q^0 \in S\}$. Таким образом, область аналитичности преобразования Лапласа $C^S \mathscr{W}_\varphi$ относительно переменных k_j^0 содержит трубу $\{k^0: q^0 \in S\}$. Такое заключение справедливо также для $C^S \mathscr{W}$. Введем теперь некоторые дополнительные обозначения: пусть $r^S(p)$ и $r_\varphi^S(p)$ — преобразования Фурье соответственно $C^S \mathscr{W}$ и $C_\varphi^S \mathscr{W}$ в импульсном пространстве. $\mathscr{A}_\varphi^S$ будет обозначать оператор

$$\mathscr{A}_\varphi^S(x) = \sum_\pi \varepsilon(\sigma_\pi^S) \left\{ \prod_{j=1}^n \theta(-\sigma_\pi^{Sj} \xi_j^{\pi 0}) \right\} \times$$
$$\times A_{\pi 0} * \varphi_{\pi 0}(x_{\pi 0}) \ldots A_{\pi n} * \varphi_{\pi n}(x_{\pi n}),$$

а $\mathscr{A}_S(x)$ иногда будет обозначать формально такое же выражение без регуляризации, существование которой предполагается. $\tilde{r}^S(x)$ и $\tilde{r}_\varphi^S(x)$ соответственно будут обозначать преобразования Фурье $r^S(p)$ и $r_\varphi^S(p)$, а $H'^S(k)$ и $H_\varphi'^S(k)$ соответственно преобразования Лапласа $\tilde{r}^S(x)$ и $\tilde{r}_\varphi^S(x)$, граничные значениям $r^S(p)$ и $r_\varphi^S(p)$ соответственно.

Действительно, можно показать, что $H_\varphi'^S(k)$ голоморфна в трубе $\mathscr{T}^S$, определяемой в комплексном импульсном пространстве следующим образом:

$$\mathscr{T}^S = \{k = p + iq,\ q_I \in V^+ \text{ для } s_I > 0 \text{ в } S\}.$$

(Насколько мне известно, этот результат может быть получен для n-точечной функции только как следствие работы [20], к которой мы вернемся позже.)

Соотношения совпадения в импульсном пространстве

Пусть S' и S'' — две ячейки в Ξ_{n+1} с общей поверхностью на гиперплоскости $s_X = 0$. Под этим мы подразумеваем, что все частичные суммы s_I, для которых $I \neq X$ и $I \neq \complement X$, имеют один и тот же знак в S' и S'', а $s_X = -s_{\complement X}$ имеет обратные знаки в S' и S''; мы предположим в качестве примера, что $s_X > 0$ в S' и $s_X < 0$ в S'' (здесь $X \neq \Phi$ и $\complement X \neq \Phi$).

Если мы напишем выражение для $C^{S'}-C^{S''}$

$$C^{S'}-C^{S''}=\sum_{\pi}\left\{\varepsilon\left(\sigma_{\pi}^{S'}\right)\left(\pi, \sigma_{\pi}^{S''}\right)-\varepsilon\left(\sigma_{\pi}^{S''}\right)\left(\pi, \sigma_{\pi}^{S''}\right)\right\},$$

то увидим, что $\sigma_{\pi}^{S'}=\sigma_{\pi}^{S''}$, если $X=\{\pi 0, \ldots, \pi r\}$ или $CX=\{\pi 0, \ldots, \pi(n+1-r)\}$, где r — число элементов X. Поэтому существенными членами в выше написанном разложении являются только те, для которых π обладает этим свойством. Пусть

$$X=\{j_0, \ldots, j_{r-1}\},\ CX=\{j_r, \ldots, j_n\}.$$

Если $X=\{\pi 0, \ldots, \pi r\}$, то мы обозначим π_1 и π_2 перестановку X (CX), определяемую условиями $\pi_1 j_k=\pi k$ $(0\leqslant k\leqslant r-1)$ и $\pi_2 j_k=\pi k$, $r\leqslant k\leqslant n$ соответственно. Тогда π будет обозначаться $\pi_1\pi_2$. Положим также

$$\sigma_1=\left(\sigma_1^1, \ldots, \sigma_1^{r-1}\right),\ \sigma_1^j=\sigma_{\pi}^{S}{}^{j}=\sigma_{\pi}^{S}{}^{j} \quad \text{для} \quad 0\leqslant j\leqslant r-1,$$

$$\sigma_2=\left(\sigma_2^{r+1}, \ldots, \sigma_2^{n}\right),\ \sigma_2^j=\sigma_{\pi}^{S}{}^{j}=\sigma_{\pi}^{S}{}^{j} \quad \text{для} \quad r+1\leqslant j\leqslant n.$$

Имеем

$$\sigma_{\pi}^{Sk}=+\operatorname{sign}\sum_{j=0}^{k-1} S_{\pi j} \text{ в } S.$$

Таким образом,

$$\sigma_1^j=\sigma_{\pi_1}^{S_1 j},\quad \sigma_2^j=\sigma_{\pi_2}^{S_2 j},$$

где S_1 — ячейка, определяемая на гиперплоскости $s_x=0$ в переменных $\{s_j\}_{j\in x}$ через неравенства, справедливые в S' или S'', а S_2 — ячейка, определяемая аналогично в переменных $\{s_j\}_{j\in Cx}$. Более того, поскольку $s_x>0$ в S' и $s_x<0$ в S'', то мы имеем $\sigma_{\pi}^{S'r}=1$, $\sigma_{\pi}^{S''r}=-1$. Обозначим

$$\sigma_{\pi}^{S'}=\sigma_1>\sigma_2,\quad \sigma_{\pi}^{S''}=\sigma_1<\sigma_2,$$

тогда

$$\varepsilon\left(\sigma_{\pi}^{S'}\right)\left(\pi, \sigma_{\pi}^{S'}\right)=\varepsilon(\sigma_1)\,\varepsilon(\sigma_2)\,(\pi_1\pi_2, \sigma_1>\sigma_2),$$

$$\varepsilon\left(\sigma_{\pi}^{S''}\right)\left(\pi, \sigma_{\pi}^{S''}\right)=-\varepsilon(\sigma_1)\,\varepsilon(\sigma_2)\,(\pi_1\pi_2, \sigma_1<\sigma_2).$$

Аналогично если $X=\{\pi(n+1-r), \ldots, \pi n\}$, то π может обозначаться как $\pi_2\pi_1$ (причем π_1 и π_2 — перестановки X и CX соответственно), и

$$\sigma_{\pi}^{S'}=\sigma_2<\sigma_1,\quad \sigma_{\pi}^{S''}=\sigma_2>\sigma,$$

$$\varepsilon\left(\sigma_{\pi}^{S'}\right)\left(\pi,\ \sigma_{\pi}^{S'}\right)=-\varepsilon(\sigma_2)\,\varepsilon(\sigma_1)\,(\pi_2\pi_1,\ \sigma_2<\sigma_1),$$

$$\varepsilon\left(\sigma_{\pi}^{S''}\right)\left(\pi,\ \sigma_{\pi}^{S''}\right)=\varepsilon(\sigma_2)\,\varepsilon(\sigma_1)\,(\pi_2\pi_1,\ \sigma_2>\sigma_1).$$

Обозначения те же, что и в первом случае. Отсюда

$$\mathcal{A}_{\varphi}^{S'}-\mathcal{A}_{\varphi}^{S''}=\sum_{\pi_1\pi_2}\left\{\prod_{k=1}^{r-1}\theta\left(-\sigma_{\pi_1 jk}^{S_1 k}\,\xi_{j_k}^{\pi_1 0}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{k=r+1}^{n}\theta\left(-\sigma_{\pi_2 jk}^{S_2 k}\,\xi_{j_k}^{\pi_2 0}\right)\right\}\left[A_{\pi_1 j_0}^{\varphi}\left(x_{\pi_1 j_0}\right),\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\ A_{\pi_1 j_{r-1}}^{\varphi}\left(x_{\pi_1 j_{r-1}}\right),\ A_{\pi_2 j_r}^{\varphi}\left(x_{\pi_2 j_r}\right),\ \ldots,\ A_{\pi_2 j_n}^{\varphi}\left(x_{\pi_2 j_n}\right)\right]=$$

$$=\left[\mathcal{A}_{\varphi}^{S_1},\ \mathcal{A}_{\varphi}^{S_2}\right] \qquad (1.1)$$

(мы обозначили $\mathcal{A}_j^{\varphi}=\mathcal{A}_j * \varphi_j$). Напомним, что S_1 и S_2 являются ячейками, определяемыми в терминах переменных $\{s_j\}_{j\in X}$ и $\{s_j\}_{j\in CX}$ на гиперплоскостях $\{s_X=0\}$ и $s_{CX}=0$ соответственно посредством приписания каждой частичной сумме s_I, $I\subset X$ или $I\subset CX$ того знака, который она имеет в S' или S''. Аналогичная формула имеет место для $\mathcal{A}^{S'}$ и $\mathcal{A}^{S''}$ постольку, поскольку эти выражения определены. Так как в настоящих лекциях мы принимаем, что можно определить $\tilde{r}^S=(\Omega,\mathcal{A}^S\Omega)$, то мы имеем

$$\tilde{r}^{S'}-\tilde{r}^{S''}=\left(\Omega,\ \left[\mathcal{A}^{S_1},\ \mathcal{A}^{S_2}\right]\Omega\right),$$

причем последнее выражение следует принимать как соответствующую сумму произведений функций Вайтмана на θ-функцию.

Первым применением этих важных формул является доказательство того, что $r_{\varphi}^{S'}(p)$ и $r_{\varphi}^{S''}(p)$ (и, следовательно, $r^{S'}(p)$ и $r^{S''}(p)$) совпадают в некоторой открытой вещественной области. Чтобы убедиться в этом, обозначим π такую перестановку, что

$$\{\pi 0,\ \ldots,\ \pi(r-1)\}=X,\ \{\pi r,\ \ldots,\ \pi n\}=CX,$$

$$\pi 0<\ldots<\pi(r-1),\quad \pi r<\ldots<\pi n,$$

и возьмем в качестве независимых переменных в ξ-пространстве $\xi_1^{\pi},\ldots,\xi_n^{\pi}$. Полагая

$$\tilde{r}_{\varphi}^{S'}-\tilde{r}_{\varphi}^{S''}=\tilde{F}_{\varphi}\left(\xi_1^{\pi},\ \ldots,\ \xi_n^{\pi}\right),$$

имеем

$$\widetilde{F}_\varphi(\xi_1^\pi, \ldots, \xi_r^\pi + a, \xi_{r+1}^\pi, \ldots, \xi_n^\pi) =$$

$$= \int \exp\Big\{- i \sum_{j \neq r} (\xi_j^\pi, P_j^\pi) \exp i (\xi_r^\pi + a) p_X F_\varphi(p)\Big\} dp_1, \ldots$$

$$\ldots, dp_n = \Big(\mathcal{A}_\varphi^{S_1^*}\Omega, U(a, 1)\mathcal{A}_\varphi^{S_2}\Omega\Big) -$$

$$- \Big(U(a, 1)\mathcal{A}_\varphi^{S_2^*}\Omega, \mathcal{A}_\varphi^{S_1}\Omega\Big) = \Big(\mathcal{A}_\varphi^{S_1^*}\Omega, (1 - E_0) U(a, 1) \times$$

$$\times \mathcal{A}_\varphi^{S_2}\Omega\Big) - \Big((1 - E_0) U(a, 1)\mathcal{A}_\varphi^{S_2^*}\Omega \mathcal{A}_\varphi^{S_1}\Omega\Big).$$

Очевидно, что преобразование Фурье этой функции обращается в нуль всякий раз, когда $p_X = -p_X = p_{CX}$ лежат вне спектра энергии — импульса подпространства всех состояний, ортогональных к вакууму и имеющих такие же «внутренние» квантовые числа, что и $\mathcal{A}_\varphi^{S_2}\Omega$ или $\mathcal{A}_\varphi^{S_2^*}\Omega$ (соответственно $\mathcal{A}_\varphi^{S_1}\Omega$ или $\mathcal{A}_\varphi^{S_1^*}\Omega$). Первоначальное предположение относительно спектра энергии — импульса теперь будет дополнено следующей, более детальной, гипотезой.

1. Когда X и CX имеют более одного элемента, массы состояний, имеющих квантовые числа $\mathcal{A}_\varphi^{S_2}\Omega$ или $\mathcal{A}_\varphi^{S_1^*}\Omega$, принимают наибольшую нижнюю границу $M_X = M_{CX} > 0$.

2. Когда X имеет один элемент, скажем $X = \{j\}$, то состояния с квантовыми числами $A_j(\varphi_j)^{(*)}\Omega$, ортогональные к вакууму, имеют либо массу m_j (одночастичные состояния), либо массу $\geqslant M_j > m_j$; M_j обозначает наибольшую нижнюю границу масс состояний с требуемыми квантовыми числами, ортогональных вакууму и одночастичным состояниям. Отсюда следует, что

1) если X и CX имеют более одного элемента, то

$$r_\varphi^{S'} - r_\varphi^{S''} = 0 \text{ для } (p_X, p_X)^2 < M_X^2 = M_{CX}^2;$$

2) если $X = \{j\}$ или $CX = \{j\}$, то

$$r_\varphi^{S'} - r_\varphi^{S''} = 0 \text{ для } (p_j, p_j) \neq m_j^2 \text{ и } (p_j, p_j) < M_j^2.$$

Кроме того, поскольку $(\Phi, U(a, 1)\Psi)$ является преобразованием фурье-меры, то мы имеем в последнем случае

$$(p_j^2 - m_j^2)(r_\varphi^{S'} - r_\varphi^{S''}) = 0 \text{ для } p_j^2 < M_j^2.$$

Согласно принятой выше точке зрения, мы предположим, что $r^{S'}$ и $r^{S''}$ обладают аналогичными свойствами. Это подсказывает нам целесообразность введения новых обобщенных функций

$$\hat{r}^S_\varphi = \left[\prod_{j=0}^{n} (p_j^2 - m_j^2)\right] r^S_\varphi, \quad \hat{r}^S = \left[\prod_{j=0}^{n} (p_j^2 - m_j^2)\right] r^S.$$

Они являются граничными значениями функций $H^S_\varphi(k)$ и $H^S(k)$ соответственно, которые голоморфны в $\mathcal{T}^S = \{k = p + \mathrm{i}q,\ q_I \in V^+\}$, если $s_I > 0$ в S и определяются как

$$H^S_\varphi(k) = \prod_{j=0}^{n} (k_j^2 - m_j^2)\, H'^S_\varphi(k),$$

$$H^S(k) = \prod_{j=0}^{n} (k_j^2 - m_j^2)\, H'^S(k).$$

Функции $\hat{r}^S$ и $\hat{r}^S_\varphi$ имеют следующие области совпадения: если S' и S'' ячейки с общей поверхностью на гиперплоскости $\{s : s_X = 0\}$, то

$$\left.\begin{aligned} \hat{r}^{S'} - \hat{r}^{S''} &= 0, \\ \hat{r}^{S'}_\varphi - \hat{r}^{S''}_\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ для } p_X^2 < M_X^2$$

для всех X, таких, что $X \neq \Phi$ и $CX \neq \Phi$.

Нетрудно найти отсюда область, где любые две $\hat{r}^S$ совпадают друг с другом. В частности, мы видим, что все эти обобщенные функции совпадают друг с другом в области

$$\{p : p_X^2 < M_X^2\ \forall X\}.$$

Эта область открыта и непуста. Она содержит открытую непустую область $\{p : p_X^2 < 0\ \forall X\}$.

Поскольку $M_X^2 > 0$ для всех X, то она содержит также окрестность нуля.

Тождества Штейнмана

Определение $(n+1)$-точечных обобщенных запаздывающих функций, данное в § 1, заставляет их удовлетворять множеству линейных тождеств, называемых тождествами Штейнмана. Можно показать, что последние могут быть порождены некоторым подмножеством линейных тождеств, которые мы опишем ниже.

Пусть X и Y — два подмножества множества $\{0, 1, \ldots, n\}$, такие, что

$$
\begin{array}{cccc}
X \not\subset Y, & X \not\subset CY, & Y \not\subset X, & CX \not\subset Y, \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
CY \not\subset CX, & Y \not\subset CX, & CX \not\subset CY, & CY \not\subset X.
\end{array}
$$

Это означает, как легко проверить, что пересечение гиперплоскостей $\{s : s_X = 0\}$ и $\{s : s_Y = 0\}$ в Σ_{n+1} не содержится ни в какой другой гиперплоскости вида $\{s : s_I = 0\}$. Пусть $\{S_{ij}\}_{ij=1,-1}$ — четыре ячейки, такие, что для всех $I \subset \{0, \ldots, n\}$, удовлетворяющих $I \neq X$, CX, Y, CY, s_I, имеют один и тот же знак в четырех ячейках и что $\operatorname{sign} X = i$, $\operatorname{sign} Y = j$ в S_{ij}. Применяя формулу (1.1) (или соответствующую формулу для нерегуляризованных о. з. ф.), находим

$$r_\varphi^{S_{1,1}} - r_\varphi^{S_{-1,1}} = \left(\Omega, \left[\mathcal{A}_\varphi^{S_1}, \mathcal{A}_\varphi^{S_2}\right] \Omega\right),$$

$$r_\varphi^{S_{1,-1}} - r_\varphi^{S_{-1,-1}} = \left(\Omega, \left[\mathcal{A}_\varphi^{S'_1}, \mathcal{A}_\varphi^{S'_2}\right] \Omega\right),$$

где S_1 и S'_1 — ячейки, определяемые в терминах переменных $\{s_j\}_{j \in X}$ на гиперплоскости $\{s : s_X = 0\}$ приписанием каждой частичной сумме $s_I (I \subset X)$ того знака, который она имеет в $S_{1,1}$ или в $S_{-1,1}$ (соответственно в $S_{-1,1}$ или $S_{-1,-1}$), так как частичные суммы s_K имеют один и тот же знак в $S_{1,1}$ и в $S_{1,-1}$ для всех K, за исключением области Y и CY. Поскольку $I \subset X$ обозначает $I \neq Y$ и $I \neq CY$, то мы видим, что в действительности $S'_1 = S_1$. Аналогично $S'_2 = S_2$ и поэтому получим тождества*:

$$r_\varphi^{S_{1,1}} - r_\varphi^{S_{-1,1}} = r_\varphi^{S_{1,-1}} - r_\varphi^{S_{-1,-1}}$$

и

$$r^{S_{1,1}} - r_\omega^{S_{-1,1}} = r^{S_{1,-1}} - r^{S_{-1,-1}}.$$

Связь с кратными коммутаторами

Формула (1.1) § 1 также показывает, что все о. з. ф. могут быть получены как линейные комбинации произ-

---

* Эти тождества имеют место также в формулировке Боголюбова Н. Н., как это было показано Тодоровым И. Т. — *Прим. ред.*

ведений соответствующих θ-функций с кратными коммутаторами, т. е. выражениями вида

$$(\Omega, [A_{\pi 0}(x_{\pi 0}), [A_{\pi 1}(x_{\pi 1}), [\ldots, [A_{\pi (n-1)} \times \times (x_{\pi(n-1)}), A_{\pi n}(x_{\pi n})], \ldots]]]\Omega).$$

Это утверждение докажем индукцией: если мы знаем, что оно верно для любого числа переменных, меньшего $n+1$, и для одной $(n+1)$-точечной о. з. ф., то формула (1.1), очевидно, показывает, что это верно также для всех $(n+1)$-точечных о. з. ф. Таким образом, достаточно найти для каждого n одну $(n+1)$-точечную о. з. ф., для которого это свойство имеет место. Для этой цели рассмотрим опережающие $(n+1)$-циклы, которым соответствуют обычные опережающие функции.

Пусть S_0 — ячейка из Ξ_{n+1}, определяемая как $\{s : s_j > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. (Это, очевидно, ячейка, так как определяющие неравенства означают: $s_I > 0$, если $0 \in I$, и $s_I < 0$, если $0 \in I$.) Мы можем проверить, что

$$\tilde{r}^{s_0}(x) = \sum_{\substack{\pi \\ \pi 0 = 0}} \theta(\pi n, \pi(n-1))\,\theta(\pi(n-1), \pi(n-2)), \ldots, \ldots, \theta(\pi 1, 0)(\Omega, [A_{\pi n}(x_{\pi n}), [A_{\pi(n-1)}(x_{\pi(n-1)}), [\ldots, [A_{\pi 1}(x_{\pi 1}), A_0(x_0)], \ldots]]]\Omega),$$

где $\theta(j, k) = \theta(x_j^0 - x_k^0)$. Аналогичная формула справедлива для регуляризованных функций $\tilde{r}_\varphi^{S^0}(x)$.

Поскольку замена функций Вайтмана (регуляризованных функций Вайтмана соответственно) усеченными функциями Вайтмана (регуляризованными усеченными функциями Вайтмана) не затрагивает вакуумных средних «кратных коммутаторов», то она также не меняет о. з. ф. (соответственно регуляризованные о. з. ф.).

Штейнмановские оркестры

Множество $(n+1)$-точечных о. з. ф. разделяется на подмножества, называемые штейнмановскими оркестрами. Штейнмановским оркестром является множество таких о. з. ф. r^s, что переменные s_j $(j = 0, \ldots, n)$ имеют фиксированный знак в S. Например, штейнмановский оркестр, полученный приписанием знаков $s_0 < 0$, $s_1 > 0, \ldots, s_n > 0$, содержит только один член — «опережающую функцию», которую мы обозначали r^{S_0} (соло!). В случае четырехточечных функций существуют также оркестры с четырьмя членами (штейнмановские квартеты); в случае пятиточечных функций существуют оркестры с 18 членами и т. д. Наше обсуждение относительно тождеств Штейнмана показывает, что эти тождества порождаются специальными тождествами (с четырьмя членами), в которых возникают только члены одного штейнмановского оркестра. Действительно, накладываемые на X и Y условия в § 1 запрещают X, CX, Y и CY иметь только один элемент.

§ 2. Штейнмановские стрелки и носители о. з. ф.

Настоящий параграф посвящен изложению некоторых аспектов подхода Штейнмана к о. з. ф. Этот метод оказывается полезным для изучения носителей о. з. ф., хотя и не дает все эти функции. Кроме того, он приводит к полному описанию четырехточечных о. з. ф. Мы предположим, что произведения полевых операторов могут умножаться свободно на θ-функции. Пусть Φ — произведение полевых операторов, умноженное на c-функции (в частности, на произведение θ-функций):

$$\Phi = h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}) A_{1_p}(x_{i_p}) \ldots A_{i_p}(x_{i_p}). \quad (1.2)$$

Определим для $j \neq i_1, \ldots, i_p$

$$A_j(x_j) \uparrow \Phi = h \sum_{r=1}^{p} \theta(x_j^0 - x_{i_r}^0) A_{i_1}(x_{i_1}) \ldots$$
$$\ldots [A_j(x_j), A_{i_r}(x_{i_r})] \ldots A_{i_p}(x_{i_p})$$

и

$$A_j(x_j) \downarrow \Phi = -h \sum_{r=1}^{p} \theta(x_{i_r}^0 - x_j^0) A_{i_1}(x_{i_1}) \ldots$$
$$\ldots [A_j(x_j), A_{i_r}(x_{i_r})] \ldots A_{i_p}(x_{i_p}).$$

Это определение благодаря линейности расширяется на случай выражений Φ, которые являются конечными линейными комбинациями выражения вида (1.2). Мы будем писать сокращенно

$1\uparrow 2\downarrow \ldots \uparrow n$ вместо $A_1(x_1)\uparrow A_2(x_2)\downarrow \ldots \uparrow A_n(x_n)$ и т. д. Очевидно, что

$$(A_j(x_j)\uparrow - A_j(x_j)\downarrow)\Phi = [A_j(x_j), \Phi],$$

или, в сокращенной форме,

$$(j\uparrow - j\downarrow)\Phi = [j, \Phi].$$

Воспользуемся также обозначениями

$$\theta(j, k) = \theta(x_j^0 - x_k^0),$$

$$\theta(n, n-1, n-2, \ldots, 0) =$$
$$= \theta(n, n-1)\theta(n-1, n-2) \ldots \theta(1, 0)$$

и т. д.

Операции со стрелками обладают следующими свойствами:

1. Стрелки одного направления коммутируют:

$$1\uparrow 2\uparrow \Phi = 2\uparrow 1\uparrow \Phi.$$

Доказательство (символическое!):

$$2\uparrow\Phi = \sum_j \theta(2, j) \ldots [2, j],$$

$$1\uparrow 2\uparrow\Phi = \sum_{j\neq k} \theta(1, k)\theta(2, j) \ldots [2, j] \ldots [1, k] \ldots +$$
$$+ \sum_j \{\theta(2, j)\theta(1, j) \ldots [2, [1, j]] \ldots +$$
$$+ \theta(2, j)\theta(1, 2) \ldots [[1, 2], j] \ldots\}.$$

Воспользуемся тождеством

$$\theta(1, 2)\theta(2, j) + \theta(2, 1)\theta(1, j) = \theta(1, j)\theta(2, j).$$

Доказательство тождества: левая часть может быть переписана, как

$$\theta(1, j)\theta(2, j)[\theta(1, 2) + \theta(2, 1)] = \theta(1, j)\theta(2, j).$$

Последний член может быть переписан следующим образом:

$$\sum_j \{\theta(2, j)\theta(1, j) \ldots ([2, [1, j]] + [[1, 2], j]) \ldots +$$
$$+ \theta(1, j)\theta(2, 1) \ldots [[2, 1], j] \ldots\}.$$

В силу тождества Якоби $[[1, 2], j] = [1, [2, j]] - [2[1, j]]$. Это новое выражение получается из первоначального выражения заменой 1 на 2 и 2 на 1. Это и доказывает наше утверждение.

2. $j\uparrow$ и $j\downarrow$ дифференциалы (в алгебраическом смысле).

3. $1\uparrow 2=2\downarrow 1$ (очевидно).

Замечание. Употребляемые здесь обозначения не совпадают с штейнмановскими: мы предпочитаем пользоваться операторами, действующими налево.

Мономы Штейнмана

Нас будут интересовать мономы Штейнмана. Они являются выражениями вида $0\updownarrow 1\updownarrow 2\updownarrow\ldots\updownarrow n$ (и такими переставленными выражениями), где $\updownarrow$ обозначает $\uparrow$ или $\downarrow$. Рассмотрим сначала $n\uparrow(n-1)\uparrow\ldots\uparrow 0$. Для $n=1$ это

$$1\uparrow 0=\theta\left(x_1^0-x_0^0\right)\left[A_1(x_1),\ A_0(x_0)\right]=\mathscr{A}^{s_0}$$

(опережающее произведение). Мы увидим, что это верно для всех n. Для этой цели рассмотрим

$$n\uparrow\theta(n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 0)[n-1,\ [n-2,\ [\ \ldots$$
$$\ldots,\ [1,\ 0],\ \ldots\ ]]]=\sum_{j=0}^{n-1}\theta(n,\ j)[n-1,\ [\ \ldots$$
$$\ldots,\ [[n,\ j],\ [j-1,\ [\ \ldots,\ [1,\ 0],\ \ldots\ ]]]\ \ldots\ ]].$$

Пользуясь тождеством Якоби $[[n,\ j],\ \Phi]=[n,\ [j,\ \Phi]]-$ $-[j,\ [n,\ \Phi]]$ и производя перегруппировку членов, мы получим:

$$\theta(n,\ n-1,\ \ldots,\ 1,\ 0)[n,\ [n-1,\ [\ \ldots,\ [1,\ 0],\ \ldots\ ]]]+$$
$$+\sum_{j=0}^{n-2}[n-1,\ [\ \ldots,\ [n,\ [j,\ [j-1,\ [\ \ldots,\ [1,\ 0],\ \ldots\ ]]]\ \ldots$$
$$\ldots\ ]]]\,\theta(n-1,\ \ldots,\ j+1)\,\theta(j,\ j^{-1},\ \ldots,\ 1,\ 0)\times$$
$$\times\left\{\theta(j+1,\ j)\,\theta(n,\ j)-\theta(n,\ j+1)\,\theta(j+1,\ j)\right\}.$$

Пользуясь тождеством

$$\theta(j+1,\ j)\,\theta(n,\ j)=\theta(n,\ j+1)\,\theta(j+1,\ j)+$$
$$+\theta(j+1,\ n)\,\theta(n,\ j),$$

мы находим

$$n\uparrow\theta(n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1,\ 0)[n-1,\ [n-2,\ [\ \ldots$$
$$\ldots,\ [1,\ 0],\ \ldots\ ]]]=\sum_{j=0}^{n-1}\theta(n-1,\ \ldots,\ n,\ j,\ \ldots$$
$$\ldots,\ 1,\ 0)[n-1,\ [\ \ldots,\ [n,\ [j,\ [\ \ldots,\ [1,\ 0],\ \ldots$$
$$\ldots\ ]]]\ \ldots\ ]]. \tag{1.3}$$

Отсюда следует по индукции, что

$$n\uparrow(n-1)\uparrow\ldots\uparrow 1\uparrow 0=\sum_{\substack{\pi\\ \pi 0=0}}\theta(\pi n,\ldots,\pi 1, 0)\times$$
$$\times[\pi n,[\pi(n-1),[\ldots,[\pi 1, 0]\ldots]]]=\mathscr{A}^{S_0}.$$

При помощи аналогичных вычислений получим

$$n\downarrow\theta(n-1,\ldots,1,0)[n-1,[n-2,\ldots[1,0],\ldots]]]=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}\theta(n-1,\ldots,j,n,\ldots,0)\times$$
$$\times[n-1,[\ldots,[j,[n,[\ldots,[1,0],\ldots]]],\ldots]]. \qquad (1.4)$$

Из формулы (1.3) заключаем по индукции, что $p\updownarrow(p-1)\updownarrow\ldots\updownarrow 1\updownarrow 0$ может быть выражено как сумма $(p+1)$-кратного опережающего коммутатора и линейной комбинации коммутаторов и опережающих коммутаторов с меньшим числом переменных. Более точно, если предположить, что для всех $p\leqslant n-1$ имеет место

$$p\updownarrow(p-1)\updownarrow\ldots\updownarrow 1\updownarrow 0=p\uparrow(p-1)\uparrow\ldots\uparrow 1\uparrow 0+$$
$$+\sum[j_0\uparrow\ldots\uparrow j_r,[j_{r+1}\uparrow\ldots\uparrow j_s,[\ldots,[j_1\uparrow\ldots$$
$$\ldots\uparrow j_p],\ldots]]],$$

то это свойство остается верным для $p=n$ в силу формулы (1.3) и в силу соотношения $n\downarrow=n\uparrow-ad_n$.

Как и в § 1, отсюда следует, что существует открытая область действительного импульсного пространства, где преобразования Фурье вакуумных средних $n\updownarrow n-1\updownarrow\ldots\updownarrow 1\updownarrow 0$ и $n\uparrow n-1\uparrow\ldots\uparrow 1\uparrow 0$ совпадают. В частности, эта область содержит множество

$$\{p\colon p_X^2<0,\ \forall X\}. \qquad (1.5)$$

Нетрудно показать при помощи той же техники, что преобразования Фурье вакуумных средних всех мономов Штейнмана совпадают друг с другом в области (1.5). (Это в конечном счете приводит к отождествлениям мономов Штейнмана с $\mathscr{A}^S$, поскольку, как это будет видно, преобразования Лапласа вакуумных средних мономов Штейнмана аналитичны в трубе вида $\mathscr{T}^S$. Так как их граничные значения в области (1.5) совпадают с r^{s_0} и поэтому также с r^s, они совпадают с r^s везде.)

Замечание. Рассуждения в настоящем параграфе до сих пор применимы также к случаю, когда регуляризованные полевые операторы $A_j^{\varphi}(x_j)=A_j \divideontimes \varphi_j(x_j)$ заменяют везде «операторы» $A_j(x_j)$. Тогда законно формальное умножение на θ-функции. Однако результаты, которые мы выведем ниже, требуют наличия «резкой» локальной коммутативности. Вызываемые регуляризацией модификации будут кратко описаны в конце настоящего параграфа.

Теперь покажем, пользуясь методом индукции, что носитель функции

$$\theta(p, p-1, \ldots, 1, 0)[p, [p-1, [\ldots, [1, 0], \ldots]]]$$

содержится во множестве $\{x : x_p - x_0 \in \overline{V}^+\}$. Предположим, что это имеет место для всех $p \leqslant n-1$. Тогда для $q \leqslant p$ имеем

$$\theta(p, \ldots, 0)[p, [p-1, \ldots, [1, 0] \ldots]] =$$
$$= \theta(p, \ldots, q)[p, [p-1, \ldots, [q+1, \{\theta(q, \ldots$$
$$\ldots, 0)[q, [q-1, [\ldots, [1, 0], \ldots]]]\}] \ldots]],$$

поскольку носитель этого выражения содержится в множестве $\{x : x_q - x_0 \in \overline{V}^+\}$.

Выражение

$$\theta(n, n-1, \ldots, 1, 0)[n, [n-1, [\ldots, [1, 0], \ldots$$
$$\ldots]]] = \sum_{j=0}^{n-1} \theta(n, n-1, \ldots, 0)[n-1, [\ldots$$
$$\ldots, [[n, j], [j-1, [\ldots, [1, 0], \ldots]]], \ldots]]$$

имеет носитель, содержащийся в $\bigcup\limits_{j<n} \{x : x_n - x_j \in \overline{V}^+\}$, так как $\theta(n, n-1, \ldots, 0) = \theta(n, n-1, \ldots, 0)\theta(n, j)$ и $[n, j]$ имеет носитель, лежащий в $\{x : x_n - x_j \in \overline{V}^+ \cup \overline{V}^-\}$. С другой стороны, такое выражение может быть переписано следующим образом:

$$\theta(n, n-1)[n, \theta(n-1, \ldots, 1, 0) \times$$
$$\times [n-1, [\ldots, [1, 0], \ldots]]],$$

так что его носитель содержится в

$$\{x : x_j - x_0 \in \overline{V}^+, \quad 0 < j \leqslant n-1\},$$

как это можно проверить на основе предыдущих замечаний и методом индукции.

Если x — точка носителя, то она должна удовлетворять условию

$$x_n - x_j \in \overline{V}^+, \quad x_j - x_0 \in \overline{V}^+$$

для некоторого $j \in \{0, \ldots, n-1\}$; поэтому $x_n - x_0 \in \overline{V}^+$ и, наконец, $x_j - x_0 \in \overline{V}^+$, $0 \leqslant j \leqslant n$. Это и доказывает наше утверждение.

Замечание. Случай регуляризованных полей отличается от рассмотренного выше случая, однако мы имеем

$$\operatorname{supp}[A_j^\varphi(x_j), A_k^\varphi(x_k)] \subset \{x : x_j - x_k \in \overline{V}^+ \cup \overline{V}^- + \operatorname{supp}\varphi_j - \operatorname{supp}\varphi_k\}.$$

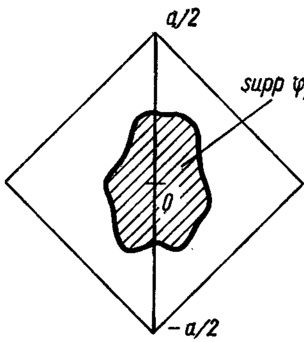


Рис. 1. Носитель функции φ_j.

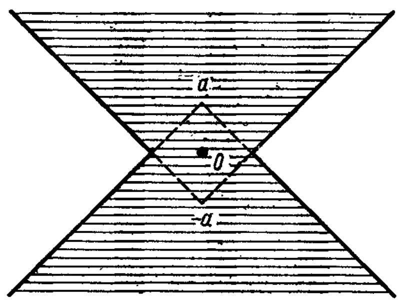


Рис. 2. Носитель коммутатора.

Пусть $a = (a^0, 0, 0, 0)$ $(a^0 > 0)$ — четырехмерный вектор, такой, что для $0 \leqslant j \leqslant n$

$$\operatorname{supp}\varphi_j \subset \left\{ x \in R^4 : x + \frac{a}{2} \in V^+, \ x - \frac{a}{2} \in V^- \right\}$$

(рис. 1).

Тогда

$$\operatorname{supp}[A_j^\varphi(x_j), A_k^\varphi(x_k)] \subset \{x : x_j - x_k \in (\overline{V}^+ - a) \cup (\overline{V}^- + a)\}$$

(рис. 2.)

Теперь легко показать методом индукции, что

$$\theta(p, \ldots, 0)[p, [p-1, [\ldots, [1, 0]\ldots]]]$$

имеет носитель, содержащийся в

$$\{x : x_j - x_0 \in \overline{V}^+ - pa\}.$$

Это свойство справедливо для $p=1$. Для высших p доказательство аналогично доказательству, данному для случаи «резкой» коммутативности.

Теперь приступим к изучению носителя $p\updownarrow (p-1)\updownarrow\ldots\ldots 1\updownarrow 0$. Предположим, что для каждого $p\leqslant n-1$ и для каждого $j\,(0<j\leqslant p)$, за которым следует стрелка $\uparrow$ ($\downarrow$ соответственно), $p\updownarrow\ldots j\updownarrow\ldots\updownarrow 0$ может быть написано как сумма членов, каждый из которых содержит фактор вида

$$\theta(j, r, \ldots, k)[j, [r, \ldots, [\ , k], \ldots,]]$$

(соответственно

$$\theta(k, \ldots, r, j)[k, [r, \ldots, [\ , j] \ldots,]]),$$

где $k<j$. Это, очевидно, верно для $p=1$.

Рассмотрим теперь $n\updownarrow\ldots\updownarrow 0$; упомянутое свойство остается верным в силу формул (1.3) и (1.4), доказанных выше. Поэтому оно справедливо для всех p. Отсюда следует, что носитель $n\updownarrow\ldots\updownarrow 1\updownarrow 0$ содержится в пересечении всех множеств вида

$$\{x\colon \varepsilon_j(x_j-x_{j-1})\in\overline{V}^+,\quad \varepsilon_j(x_j-x_{j-2})\in\overline{V}^+$$
$$\text{или } \varepsilon_j(x_j-x_0)\in\overline{V}^+\}$$

для $j=1,\ldots, n$, где $\varepsilon_j=1$, если за j следует $\uparrow$ и $\varepsilon_j=-1$, если за j следует $\downarrow$.

Это пересечение может быть представлено в виде объединения всех множеств типа

$$\{x\colon \varepsilon_n(x_n-x_{k_n})\in\overline{V}^+,\ \varepsilon_{n-1}(x_n-x_{k_{n-1}})\in\overline{V}^+, \ldots$$
$$\ldots, \varepsilon_1(x_1-x_0)\in\overline{V}^+\},$$

где $k_1=0$, $k_2<2$, $k_3<3,\ldots, k_n<n$ принимают все допустимые этими неравенствами значения. Очевидно, что некоторые множества семейства, определяемого таким образом, содержатся в других множествах того же семейства. Это произойдет всякий раз, когда за k_j следует стрелка с тем же направлением, что и стрелка после j. Поэтому мы можем оставить только те множества семейства, для которых после k_j стоит стрелка с направлением, обратным направлению стрелки после j. Такое множество может быть представлено графически следующим образом: каждому индексу j с последующей стрелкой $\uparrow$ мы приписываем символ $\times j$ (крест с индексом j), а каждому индексу k с последующей стрелкой $\downarrow$ — символ $\cdot k$ (точка с индексом k). Условимся, что за индексом всегда следует скрытая стрелка

с направлением, обратным направлению стрелки после 1: это совместимо с равенством $1\uparrow 0 = 0\downarrow 1$. Мы тогда связываем линией символ, относящийся к 1, с символом, относящимся к 0, а затем относящийся к 2 символ с символом, относящимся к 1, если они принадлежат различным категориям (т. е. если 1 и 2 стоят перед обратными стрелками), или с символом, относящимся к 0, в обратном случае, и будем продолжать эту процедуру шаг за шагом, связывая относящийся к j символ с символом, относящимся к k_j (который обязательно принадлежит другой категории) и т. д. Полученный график выглядит как дерево, т. е. связный и просто связный график. Каждая линия связывает точку с крестом, и ей соответствует неравенство

$$\underset{j}{\times}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet_{k} \quad : (x_j - x_k) \in \bar{V}^+.$$

Это графическое представление было предложено Бросом.

Случай регуляризованных полей

С помощью вышеупомянутого графического представления можно также показать, что носитель монома Штейнмана содержится в объединении некоторых множеств, каждое из которых графически представляется деревом. Однако поскольку неравенства

$$x_j - x_k \in \bar{V}^+ - na,$$
$$x_r - x_j \in \bar{V}^+ - na$$

означают лишь, что $x_r - x_k \in \bar{V}^+ - 2na$, то мы должны каждой линии типа $j\times\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\cdot k$ в дереве приписать неравенство $(x_j - x_k) \in \bar{V}^+ - n^2 a$.

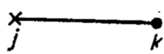
Элементарные носители

«Элементарным носителем», относящимся к дереву, называют множество, определяемое неравенствами, соответствующими линиям дерева, например:

$$\underset{j}{\times}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet_{k} \quad : (x_j - x_k) \in \bar{V}^+$$

(или $x_j - x_k \in \bar{V}^+ - n^2 a$ в случае регуляризованных полей). Теперь мы хотим доказать, что для данного дерева с $(n+1)$ вершинами переменные $x_j - x_k$, соответствующие линиям дерева, образуют множество n независимых (четырехмерных векторных) переменных в ξ-пространстве. Это может быть сделано индукцией по числу вершин на дереве. Допустим, что это свойство верно для дерева с n вершинами, и рассмотрим дерево с $(n+1)$ вершинами. Некоторые вершины оказываются крайними, т. е. являются непосредственно связанными только с одной вершиной. Допустим, что 0 есть такая крайняя вершина, связанная некоторой линией с 1. Если мы выделим эту линию, то по гипотезе полученное дерево с n вершинами соответствует $(n-1)$ независимым переменным $x_j - x_k$, где $j \neq 0$, $k \neq 0$. Очевидно, что мы получим n независимых переменных, если прибавим переменную $x_0 - x_1$.

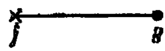
Теперь мы можем найти переменные, сопряженные (p-пространство) с x_j—x_k, соответствующие линиям



дерева. Такими же индуктивными рассуждениями легко доказать, что сопряженной с $x_j - x_k$ переменной является

$$\sum_r p_r,$$

где r пробегает все вершины, остающиеся связанными с крестовидной вершиной j после выделения линий



Элементарный носитель представляет собой закрытый конус в ξ-пространстве.

Внутренность дуального к нему конуса в импульсном пространстве (см. II и III) задается «неравенствами»

$$\sum_r p_r \in V^+$$

(частичные суммы

$$\sum_r p_r$$

определены выше). Соответствующие неравенства

$$\left(\sum_r s_r > 0\right)$$

в пространстве Σ_{n+1} определяют открытый симплициальный конус. Множество всех таких конусов (соответствующих всем деревьям с $(n+1)$ вершинами) будет обозначаться $\hat{\Xi}_{n+1}$. Пусть I^+ (соответственно I^-) — множество индексов, соответствующих крестовидным вершинам (соответственно точечным вершинам) дерева. Внутренность конуса, дуального к связанному с деревом элементарному носителю, содержится в множестве $\{p : p_j \in V^+,\ j \in I^+;\ p_k \in V^-,\ k \in I^-\}$ (в этом можно убедиться при помощи таких же индукционных рассуждений — выделением от дерева крайней вершины). Отсюда следует, что носитель мономов Штейнмана, для которых индексы из I^+ и I^- стоят перед $\uparrow$ и $\downarrow$ соответственно, имеет дуальный конус с внутренностью, содержащейся в указанном выше множестве: этот дуальный конус является пересечением всех конусов, дуальных к элементарным носителям, связанным с деревьями, которые соответствуют мономам Штейнмана. Таким образом, все мономы с одинаковыми $I^{\pm}$ являются членами одного и того же штейнмановского оркестра.

Можно доказать также следующее более общее утверждение (см. работу [20]). Пусть S — ячейка ($S \in \Xi_{n+1}$) и E_S — множество всех конусов $K \in \hat{\Xi}_{n+1}$, которые содержат S. Для каждого $K \in \hat{\Xi}_{n+1}$ обозначим T_K связанное с K дерево и $\hat{K}$ — элементарный носитель, соответствующий T_K. Тогда

$$\operatorname{supp} \tilde{r}_S(x) \subset \bigcup_{K \in E_S} \hat{K}.$$

Отсюда следует, что внутренность конуса, дуального к носителю $\tilde{r}_S$, содержит конус $\mathcal{V}^S = \{q : q_x \in V^+\}$, если $S \ni s_X > 0$, и что H^S и H'^S голоморфны в трубе $\mathcal{T}^S$, как это было сформулировано выше (см. гл. 2 и 3. Дополнительные замечания будут даны в гл. 3).

§ 3. Связь с T-произведениями

Можно показать [16], что $r^S(p)$ совпадает с преобразованием Фурье вакуумного среднего T-произведения для вещественных p, удовлетворяющих

$$p \in \mathcal{V}^S = \{p : p_x \in V^+ \text{ для } S \ni s_x > 0\}.$$

Вакуумное среднее T-произведения является функцией, соответствующей циклу $\sum_\pi (\pi, >)$, т. е.

$$\sum_\pi \prod_{k=1}^{n} \theta\left(x^0_{\pi(k-1)} - x^0_{\pi k}\right)\left(\Omega, A_{\pi 0}\left(x_{\pi 0}\right), \ldots, A_{\pi n}\left(x_{\pi n}\right)\Omega\right).$$

Такое же свойство имеет место для регуляризованных полей. Это устанавливает связь между редукционными формулами для о. з. ф. и для T-произведений.

ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В настоящей главе мы дадим весьма неполный анализ наиболее часто употребляемых в теории поля свойств голоморфных функций многих комплексных переменных. Более полное изложение этого предмета и, в частности, доказательства читатель может найти, например, в лекции Вайтмана [4] и в работах [21—26] и т. д.

§ 1. Общие свойства

Пусть $z \to f(z)$ — комплексная функция, определяемая на открытом подмножестве Ω пространства C^n. Следующие свойства оказываются эквивалентными:

1) f имеет непрерывные производные первого порядка по x_i, y_i и удовлетворяет уравнениям Коши — Римана

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y_j} = 0 \quad (i \leqslant j \leqslant n);$$

2) f непрерывна и задается формулой Коши в любом полидиске с замыканием, содержащимся в Ω:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^n} \int_{\text{Остов}} \frac{f(z)'\,dz'_1 \ldots dz'_n}{\prod_{j=1}^{n} (z'_j - z_j)}; \qquad (2.1)$$

3) для каждой $\hat{z} \in \Omega$ существует окрестность этой точки, в которой f равна сумме абсолютно и равномерно сходящегося степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} a_\alpha (z - \hat{z})^\alpha. \tag{2.2}$$

[Мы употребляем обозначения Шварца [6] для мультииндексов:

$\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ (последовательность целых чисел),
$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$,

$$|\alpha| = \sum_{i=1} \alpha_i, \quad \alpha! = \alpha_1! \ \alpha_2! \ldots \alpha_n!].$$

Если функция f обладает свойствами 1), 2) или 3), то говорим, что она голоморфна или аналитична в Ω. Такие функции являются функциями класса C^∞ в их области определения. В любом полидиске с замыканием, содержащимся в области определения, их производные задаются формулой

$$D^\alpha f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\text{остов}} \frac{\alpha! f(z')\, dz_1' \ldots dz_n'}{(z' - z)^\alpha \prod\limits_{j=1}^{n} (z_j' - z_j)},$$

$$D^\alpha f(z) \equiv \frac{\partial^\alpha f(z)}{\partial_{z_1}^{\alpha_1}, \ldots, \partial_{z_n}^{\alpha_n}}. \tag{2.3}$$

Кроме того, коэффициенты в формуле (2.2) определяются соотношением

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\hat{z}). \tag{2.4}$$

Аналитическое продолжение

Пусть функция f голоморфна в области $\Omega \subset C^n$ и $\hat{z} = \in \Omega$. Степенной ряд (2.2) может сходиться в некотором полидиске, не содержащемся в Ω. Если пересечение этого полидиска с Ω не связано, то вообще старое и новое значения этой фуикции могут не совпадать друг с другом. Однако мы можем воспользоваться принципом аналитического продолжения.

Если функция f, голоморфная в области Ω пространства C^n, равна нулю в открытом подмножестве множества Ω, то она равна нулю и в Ω.

Этот принцип может быть также сформулирован следующим образом: если f_1 и f_2 голоморфны в двух областях Ω_1 и Ω_2 соответственно и совпадают друг с другом в окрестности точки $\hat{z}\in\Omega_1\cap\Omega_2$, то они совпадают друг с другом в связной компоненте $\Omega_1\cap\Omega_2$, содержащей $\hat{z}$. Отсюда вытекает следствие.

Пусть $\{\Omega_j\}_{j\in J}$ — семейство областей в C^n, таких, что пересечения $\Omega_j\cap\Omega_k$ всегда пусты или связны для всех j, k. Пусть $\{f_j\}_{j\in J}$ — семейство функций, причем f_j определена и голоморфна в Ω_j. Допустим, что всякий раз, когда пересечение $\Omega_j\cap\Omega_k\neq\Phi$, оно содержит открытое подмножество, в котором $f_j=f_k$. Тогда существует функция f, голоморфная в $\Omega=\bigcup\limits_{j\in J}\Omega_j$, которая совпадает с f_j в Ω_j для всех j.

Точное изложение теории аналитического продолжения требует понятия элемента аналитической функции в точке.

Элемент аналитической функции в точке $z\in C^n$ представляет собой класс эквивалентности, состоящий из пар (U, f), где U — открытая окрестность точки z, а f голоморфна в U. Две такие пары эквивалентны, если существует окрестность W точки z, такая, что $W\subset U\cap V$ и что f и q совпадают друг с другом в W.

Пусть $\mathscr{H}(\Omega)$ — множество элементов аналитических функций в точках Ω. Поскольку каждый элемент этого множества представляет собой элемент аналитической функции в некоторой точке z, то мы можем определить отображение $\pi: g\to z$ множества $\mathscr{H}(\Omega)$ на Ω, сопоставляющее каждому элементу g точку z области Ω, в которой задан этот элемент. Топология на $\mathscr{H}(\Omega)$ определяется следующим образом: каждой паре (U, f) в классе эквивалентности, определяющем элемент g с $\pi(g)=z$, сопоставляется открытая окрестность этого элемента; эта окрестность определяется как множество элементов аналитической функции f в точках множества U. С этой топологией π представляет собой локальный гомеоморфизм $\mathscr{H}(\Omega)$ на Ω, как это можно проверить. Для того чтобы понять сущность этой топологии, рассмотрим непрерывную траекторию, т. е. непрерывное отображение $t\to g(t)$ интервала $[0, 1]$ в $\mathscr{H}(\Omega)$. По определению если задана окрестность W элемента $g(t_0)$, то существует $\varepsilon>0$, такое, что условие $|t-t_0|<\varepsilon$ влечет за собой условие $g(t)\in W$. Если W представляет собой окрестность, соответствующую паре (U, f), то это означает, что для $|t-t_0|<\varepsilon$ $\pi[g(t)]\in U$ и $g(t)$ является элементом аналитической функции f в точке $\pi[g(t)]$. Иначе говоря, непрерывная траектория в пространстве элементов аналитической функции является аналитическим продолжением аналитической функции вдоль непрерывной траектории в Ω. В качестве простого упражнения можно проверить, что $\mathcal{H}(\Omega)$ представляет собой хаусдорфово пространство.

Мы говорим, что элемент g' порождается другим элементом g, если мы можем найти непрерывную траекторию в пространстве элементов с краевыми точками g и g'.

Согласно предыдущим замечаниям, легко увидеть, используя лемму Хейнэ—Бореля, что это эквивалентно следующему условию: соответственно g и g' являются элементами в z и z' функций f и f', голоморфных в полидисках S и S' с центром в точках z и z', и мы можем найти конечную последовательность полидисков $S_1, S_2, \ldots, S_n$ и функций $f_1, \ldots, f_N$, таких, что:

1) $S=S_1,\ f=f_1,\ S'=S_N,\ f'=f_N$;
2) f_j голоморфна в S_j $(1\leqslant j\leqslant N)$;
3) $S_j\cap S_{j+1}\neq\Phi$ и $f_j=f_{j+1}$ в $S_j\cap S_{j+1}$,
$$(1\leqslant j\leqslant N-1).$$

Множество всех элементов, порождаемых одним элементом функции, голоморфной в области пространства C^n, определяет «область регулярности» этой функции. Как и в случае одной переменной, эта область регулярности, вообще говоря, не является однолистной. Она не может быть, однако, наиболее общим комплексным многообразием, поскольку, как мы уже видели, всегда существует локальный гомеоморфизм этой области на область в C^n: она является римановой областью.

Определение

Римановой областью над областью Ω пространства C^n является пара (E, π), состоящая из связного хаусдорфова топологического пространства E и локального гомеоморфизма π пространства E на Ω; кроме того, требуется, чтобы E было счетным объединением компактных множеств и чтобы аналитические функции на (E, π) отделяли точки пространства E.

Аналитическая функция f на (E, π) представляет собой по определению комплексную функцию на E, такую, что для каждого открытого множества $W \subset E$, такого, что $\pi | W$ является гомеоморфизмом W на $\pi(W)$, функция $f_0(\pi | W)^{-1}$ аналитична в $\pi(W)$.

Принцип максимума

Пусть B — относительно компактная подобласть аналитического многообразия, f — функция, аналитическая в B и непрерывная в $\overline{B}$. Точка f принимает максимальное значение на границе:

$$\max_{z \in \overline{B}} f(z) = \max_{z \in \partial B} f(z).$$

Если f достигает максимума в точке области B, то она постоянна.

Эта важная теорема доказана здесь не будет. Доказательство, по существу, не отличается от доказательства для случая одной комплексной переменной (см., например, [22]).

§ 2. Одновременное аналитическое продолжение и оболочки голоморфности

Обозначим $S(z, r)$ полнднск $\{z' : |z'_j - z_j| < r, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ в C^n. Нам нужны некоторые определения относительно римановых областей. Пусть (E, π) — риманова область, $\hat{z} \in E$. Существует $r > 0$, такое, что π отображает гомеоморфно открытую окрестность точки $\hat{z}$ на $S(\pi(z), r)$. Эту окрестность обозначим $S(\hat{z}, r)$:

$$S(\hat{z}, r) = \pi^{-1}(S(\pi(z), r)).$$

Наименьшая верхняя грань действительных чисел $r > 0$, для которых это имеет место, обозначим $\operatorname{dist}(\hat{z}, \partial E)$. Отметим, что если (E, π) область в C^n, то

$$\operatorname{dist}(\hat{z}, \partial E) = \sup_{S(\hat{z}, r) \subset E} r.$$

Примем также обозначение $S(\hat{z}, r) \subset \hat{E}$ для произвольной римановой области как выражение того, что $S(\hat{z}, r)$ определено, т. е. $r \leqslant \operatorname{dist}(\hat{z}, \partial E)$. Если f голоморфна на (E, π), то можно найти $D^\alpha f$ следующим образом:

$$D^\alpha f(\hat{z}) = \left.\frac{\partial^{|\alpha|} f(\pi^{-1}(\zeta))}{\partial\zeta_1^{\alpha_1} \ldots \partial\zeta_n^{\alpha_n}}\right|_{\zeta=\pi(\hat{z})}.$$

Легко проверить, что $D^\alpha f(\hat{z})$ также голоморфная функция на (E, π) и что все алгебраические свойства дифференцирования остаются в силе.

Функция от $\hat{z}$, определяемая выражением $\operatorname{dist}(\hat{z}, dE)$, непрерывна и поэтому достигает минимального значения на любом компактном подмножестве области E. Если $A \subset E$ и $\bar{A}$ — компактное подмножество области E, то $A \Subset E$ и

$$\operatorname{dist}(A, \partial E) = \inf_{z \in A} \operatorname{dist}(z, \partial E) = \min_{z \in \bar{A}} \operatorname{dist}(z, \partial E) > 0.$$

Имеем

$$\operatorname{dist}(A, \partial E) = \max_{\forall z \in A S(z, r) \subset E} r.$$

Для любого $\rho \leqslant \operatorname{dist}(A, \partial E)$ мы можем определить

$$A_\rho = \bigcup_{z \in A} S(z, \rho).$$

Из $A \Subset E$, $\rho < \operatorname{dist}(A, \partial E)$ следует, что $A_\rho \Subset E$, т. е. что $\bar{A}_\rho$ представляет собой компактное подмножество области E. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ — число, для которого $\rho + \varepsilon < \operatorname{dist}(A, \partial E)$.

Тогда существует конечное подмножество $\{z_j\}_{j \in I}$ множества A, такое, что

$$\bar{A} \subset \bigcup_{j \in I} S(z_j, \varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$\bar{A}_\rho \subset \bigcup_{j \in I} \overline{S(z_j, \rho + \varepsilon)},$$

т. е. $\bar{A}_\rho$ содержится в конечном объединении компактных подмножеств области E.

Для любого $A \Subset E$ и каждой непрерывной функции на A мы обозначим

$$\|f\|_A = \|f\|_{\bar{A}} = \sup_{z \in A} |f(z)| = \max_{z \in \bar{A}} |f(z)|.$$

Определение: классы голоморфных функций. Множество $\mathcal{T}$ голоморфных функций в римановой области будет называться классом, если из $f \in \mathcal{T}$ следует, что $af^p \in \mathcal{T}$ и $D^\alpha f \in \mathcal{T}$ для любого комплексного числа a, любого целого числа $p \geqslant 0$ и любого мультииндекса α.

Лемма Картана — Туллена

Пусть $\mathcal{T}$ — класс функций, голоморфных в римановой области (E, π); пусть $A \Subset E$ с $\operatorname{dist}(A, \partial E) = r > 0$ и $z \in E$ такая, что для каждой $f \in \mathcal{T}$ $|f(z)| < \|f\|_A$. Тогда для каждой $f \in \mathcal{T}$ существует голоморфная в $S(\pi(z), r)$ функция, которая совпадает с $f_0\pi^{-1}$ в окрестности $\pi(z)$. Более того, для каждого ρ, такого, что $0 < \rho < r$,

$$\sup_{\zeta' \in S(\pi(z), \rho)} |\varphi(\zeta')| < \|f\|_{A_\rho}.$$

Доказательство (Картан — Туллен [27])

Обозначим $d = \operatorname{dist}(z, \partial E)$. Для $\zeta \in S(\pi(z), d)$ мы имеем при любом $f \in \mathcal{T}$

$$f_0\pi^{-1}(\zeta) \equiv (f\pi^{-1}(\zeta)) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(z) (\zeta - \pi(z))^\alpha. \quad (2.5)$$

Поскольку $\frac{1}{\alpha!} D^\alpha f \in \mathcal{T}$, то

$$\left| \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(z) \right| < \left\| \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f \right\|_A.$$

Из формулы Коши (2.3) мы выведем для любого ρ, удовлетворяющего условию $0 < \rho < r$:

$$\left\| \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f \right\|_A \leqslant \rho^{-|\alpha|} \|f\| A_\rho.$$

Следовательно, ряд (5) мажорируется рядом

$$\|f\|_{A_\rho} \sum_\alpha \rho^{-|\alpha|} |\zeta - \pi(z)|^\alpha.$$

Поэтому он сходится абсолютно и равномерно к голоморфной функции φ в любом полидиске $S(\pi(z), \rho_1)$ с $0<\rho_1<\rho$, в котором он удовлетворяет условию

$$|\varphi(\zeta)|<\left(1-\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{-n}\|f\|_{A_\rho}.$$

Допустим, что в полидиске $S(\pi(z), \rho_1)$

$$\sup_{\zeta\in S(\pi(z),\rho_1)}|\varphi(\zeta)|>\|f\|_{A_\rho}.$$

Тогда для некоторого $p>0$ имеем

$$\left\|\left(\frac{\varphi}{\|f\|_{A_\rho}}\right)^p\right\|_{S(\pi(z),\rho_1)}>\left(1-\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{-n},$$

что невозможно, так как $\left(\frac{f}{\|f\|_{A_\rho}}\right)^p\in\mathcal{T}$.

Важность этой леммы иллюстрируется при доказательстве теоремы о непрерывности, которая будет сформулирована ниже.

Ситуация, описываемая в гипотезах леммы, может возникать, например, как результат принципа максимума, если z содержится в открытом подмножестве Ω аналитического подмногообразия области (E, π) с $A=\partial\Omega$. В таких случаях лемма утверждает существование аналитических продолжений всех функций в $\mathcal{T}$ в общую риманову область. Мы, таким образом, встречаемся с наиболее важными чертами теории голоморфных функций многих переменных: пусть задана область $\Omega\subset C^n$; тогда вообще все функции, голоморфные в Ω, могут быть аналитически продолжены за пределы Ω. Эти продолжения не должны быть однолистными: множество областей в C^n нестабильно относительно аналитического расширения. Однако класс римановых областей стабилен.

Теорема 2.1. Пусть (E, π) — риманова область. Тогда существует другая риманова область (E', π'), однозначная до изоморфизма, такая, что

1) существует гомеоморфизм (χ) пространства E на открытое подмножество пространства E', который является голоморфным отображением (т. е. каждая точка в $\pi(E)$ имеет открытую окрестность, в которой $\pi'\circ\chi\circ\pi^{-1}$ определяется и является голоморфным взаимно однозначным отображением) и $\pi'\circ\chi=\pi$;

2) для каждой f, голоморфной на (E, π), существует функция $\tilde{f}$, голоморфная на (E', π'), такая, что $\tilde{f} \circ \chi = f$;

3) среди римановых областей со свойствами 1) и 2) (E', π') представляет собой максимальную область. (E', π') называется оболочкой голоморфности (E, π).

Риманова область со свойствами 1) и 2) будет называться голоморфным расширением (E, π). Область (E, π) может быть отождествлена с ее образом $(\chi(E), \pi' | \chi(E))$ и, следовательно, ее можно рассматривать как подобласть области (E', π'). Условие 3) означает, что если (E'', π'') представляет голоморфное расширение области (E, π), то она является подобластью области (E', π') в том же смысле.

Мы не будем приводить подробного доказательства этой теоремы, так как его можно найти в работах, цитированных в начале этой главы, а также в лекции Малгранжа [25] и в книге Хёрмандера [24]. Для дальнейшего изложения достаточно кратко описать конструкцию области (E', π').

Обозначим $\mathcal{A}(E)$ множество голоморфных функций в (E, π). Пусть Σ — множество всех конечных последовательностей C полидисков (в C) со следующими свойствами:

1) $C = \{S_0^C, S_1^C, \ldots, S_m^C\}$ (m зависит от C; $S_j^C = S(\zeta^{(j)}, r_j)$, где $r_j > 0$ — рациональное число, а $\zeta^{(j)}$ имеет рациональные координаты; $\zeta^{(j)} \in S_{j-1}^C$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$;

2) $S_0^C = \pi(S(z_0, r_0))$, где $S(z_0, r_0) \subset E$ и π является голоморфизмом;

3) для каждой $f \in \mathcal{A}(E)$ существуют $m+1$ функций $\hat{f}_0^C, \hat{f}_1^C, \ldots, \hat{f}_m^C$, голоморфных в $S_0^C, \ldots, S_m^C$ соответственно, и таких, что $\hat{f}_j^C$ совпадает с $\hat{f}_{j-1}^C$ в $S_{j-1}^C \cap S_j^C$ для $1 \leqslant j \leqslant m$ и что $\hat{f}_0^C(\pi(z) = f(z))$ для всех $z \in S(z_0, r_0)$.

Образуем теперь несвязное объединение (или теоретико-множественную сумму):

$$\mathfrak{M} = \operatorname{disj} \bigcup_{C \in \Sigma} S_j^C$$

и снабдим $\mathfrak{M}$ очевидной топологией (образа). Существует естественное отображение φ множества $\mathfrak{M}$ в C^n, определяемое таким образом: каждой точке $z \in S_j^C$, рассматриваемой как точка множества $\mathfrak{M}$, сопоставляется такая же точка, рассматриваемая как точка пространства C^n. Введем следующее соотношение эквивалентности в $\mathfrak{M}$: $z \in S_j^C$ и $z' \in S_{j'}^{C'}$ эквивалентны, если для каждой $f \in \mathcal{A}(E)$

$$\widehat{f}_j^C(z) = \widehat{f}_{j'}^{C'}(z').$$

Поскольку координаты представляют собой голоморфные функции, это означает, очевидно, что $\varphi(z) = \varphi(z')$. Из разложения в степенной ряд отсюда видно, что $\widehat{f}_j^C$ фактически совпадает с $\widehat{f}_{j'}^{C'}$ во всей окрестности и поэтому в $S_j^C \cap S_{j'}^{C'}$. Фактор-пространство E, определяемое в $\mathfrak{M}$ при помощи соотношения эквивалентности, является хаусдорфовым, так как если

$$\widehat{f}_j^C(\zeta) \neq \widehat{f}_{j'}^{C'}(\zeta'),$$

то это неравенство остается в силе и после того как ζ и ζ' заменить достаточно близкими к ним точками. Поскольку $\varphi(z) = \varphi(z')$, если z и z' эквивалентны, то φ определяет отображение π' пространства E' в C^n. Это отображение представляет собой, очевидно, локальный гомеоморфизм. Для каждой $f \in \mathcal{A}(E)$ существует функция $\tilde{f}$, голоморфная на многообразии (E', π'), такая, что $\tilde{f}$ совпадает с $\tilde{f}_j^C$ в S_j^C. Эти функции отделяют точки области (E', π'). Отсюда следует, что (E', π') — риманова область. Существует естественное отображение χ пространства E в E' (которое может определяться, например, при помощи цепочек, сводящихся к одному полидиску). Это отображение взаимно однозначно, так как функции из $\mathcal{A}(E)$ отделяют точки пространства E. Более того, $f = \tilde{f} \circ \chi$ для каждой $f \in \mathcal{A}(E)$ и $\pi' \circ \chi = \pi$. Легко проверить, что область (E', π') действительно является максимальным голоморфным расширением области (E, π), т. е. ее оболочкой голоморфности. При помощи аналогичного метода можно определить оболочку голоморфности римановой области (E, π) относительно некоторого класса $\mathcal{T}$, если этот класс отделяет точки пространства E.

Риманова область (область в C^n соответственно), которая сама является оболочкой голоморфности, называется римановой областью голоморфности (соответственно областью голоморфности).

Пусть Ω — область голоморфности. Для любого заданного счетного плотного подмножества $\{z_j\}_{i\in I}$ ее границы можно построить функцию, аналитическую в Ω и неограниченную в любой окрестности каждой из точек $z_j (j\in I)$. В качестве примера этого свойства рассмотрим область D в C^n, оболочкой голоморфности которой является другая область $\Omega\subset C^n$. Пусть $\mathfrak{M}$ — аналитическое подмногообразие, регулярно вложенное в C^n, $\mathfrak{M}\cap D\neq\Phi$. Тогда если A является подобластью области $\mathfrak{M}$, которая представляет собой аналитическое расширение $\mathfrak{M}\cap D$, то мы должны иметь $A\subset\Omega\cap\mathfrak{M}$, так как мы можем выбрать подмножество $\{z_j\}_{j\in J}$ так, чтобы оно содержало плотное подмножество из $\partial\Omega\cap\mathfrak{M}$ (см. работу [28]). Это свойство будет весьма полезным в дальнейшем.

Отметим, наконец, что голоморфная в римановой области (E, π) функция f не принимает новых значений в оболочке голоморфности (E', π') области (E, π). Действительно, допустим, что расширение $\tilde{f}$ функции f в (E', π') может принимать новое значение a. Тогда функция $(f-a)^{-1}$ будет аналитической в (E, π) и не может быть непрерывной в (E', π).

Теорема о непрерывности

Пусть $\{z^r\}_{r=1,2,\ldots}$ — последовательность точек в C^n, сходящаяся к точке z^∞. Пусть $\{D(r)\}_{r=1,2,\ldots}$ — последовательность относительно компактных областей в C^m, сходящаяся к относительно компактной области $D(\infty)\subset\subset C^\infty$ в следующем смысле: 1) для каждого $\rho>0$ мы можем найти такое N, что для каждого $r>N$ $D(r)_\rho\supset\supset D(\infty)$; 2) для каждого $\rho>0$ мы можем найти такое N, что для каждого $r>N$

$$(\partial D(r))_\rho \supset \partial D(\infty) \text{ и } \partial D(r) \subset (\partial D(\infty))_\rho.$$

Пусть Ω — область голоморфности в C^{n+m}, такая, что $z^r\times\overline{D(r)}\subset\Omega$ для всех r и $z^\infty\times\partial D(\infty)\subset\Omega$. Тогда $z^\infty\times\times\overline{D(\infty)}\subset\Omega$.

Доказательство этой теоремы следует из леммы Картана—Туллена и принципа максимума (см., например, работы [4, 23]). Данная здесь формулировка теоремы не является самой общей. За подробностями мы отсылаем читателя к цитированным работам.

Другая теорема о непрерывности, принадлежащая Бремерманну [29], сформулирована в гл. 3.

Не существует общего метода поиска оболочки голоморфности области в C^n. Ответ известен для некоторых случаев, с которыми мы будем встречаться. Один из наиболее важных ответов задается следующей теоремой.

Теорема о выпуклой трубе

Оболочкой голоморфности связной открытой трубы в C^n является ее выпуклая оболочка.

Определение. Трубой в C^n является такое множество E, что $E+R^n=E$. Другими словами, E имеет вид

$$E=\{z=x+iy: y\in S\},$$

причем S — некоторое подмножество в C^n.

Здесь мы имеем пример, когда оболочкой голоморфности некоторой области в C^n является другая область в C^n. Подобные примеры будут даны в следующем параграфе.

§ 3. Звездообразные области

Область $D\subset C^n$ является звездообразной относительно точки a, если $a+\rho(D-a)\subset D$ для каждого действительного ρ, удовлетворяющего условию $0<\rho\leqslant 1$.

Пусть D_1 и D_2 — две области, звездообразные относительно начала 0. Если $0\in D_1$, то область $D_1\cap D_2$ связна (она, очевидно, звездообразна относительно 0).

Доказательство. Если $0\in D_1$, то для каждого $z\in C^n$ существует $\rho(0<\rho\leqslant 1)$, такое, что $\rho z\in D_1$. Допустим, что $D_1\cap D_2$ несвязна: она является тогда объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств Ω_1 и Ω_2, которые звездообразны относительно 0. Мы имеем

$$D_2\subset\bigcup_{0<\rho\leqslant 1}\frac{1}{\rho}D_1\cap D_2=\Omega_1'\cup\Omega_2',$$

$$\Omega_{1,2}'=\bigcup_{0<\rho\leqslant 1}\frac{1}{\rho}\Omega_{1,2};$$

Ω_1' и Ω_2' открыты и имеют непустые пересечения с D_2. Они не пересекаются, так как если существует

$z \notin \Omega_1' \cap \Omega_2'$, то должно существовать также действительное число $\rho(0<\rho\leqslant 1)$, для которого $\rho z \in \Omega_1 \cap \Omega_2 = \Phi$. Поэтому D_2 несвязна, что противоречит нашим гипотезам.

Теорема 2.2. Если область Ω в C^n звездообразна относительно точки a, содержащейся в Ω, то оболочка голоморфности области Ω представляет собой область, звездообразную относительно a.

Доказательство этой теоремы может быть найдено в книге Бохнера и Мартена [21]. Мы дадим здесь, однако, другое доказательство ввиду его важности для наших целей.

Пусть Ω — область в C^n, звездообразная относительно 0 и содержащая 0. Пусть $\mathcal{T}$ — класс голоморфных в Ω функций, таких, что если $f\in\mathcal{T}$, то $f_\rho \in \mathcal{T}$ для каждого $\rho\in(0,1)$, где $f_\rho(z)=f(\rho, z)$. Пусть $S(\zeta, r)$ — полидиск, такой, что $\zeta\in\Omega$ и что для каждого $f\in\mathcal{T}$ существует голоморфная в $\tilde{f}$ функция $S(\zeta, r)$, совпадающая с f в окрестности точки ζ. Для каждого действительного $\rho\in(0,1)$ $f_\rho \in\mathcal{T}$ и, следовательно, существует функция $\tilde{f}$, голоморфная в $S(\zeta, r)$ и совпадающая с f_ρ в окрестности точки ζ. Определяя $f_{[\rho]}$ как

$$f_{[\rho]} z = \tilde{f}_\rho\left(\frac{z}{\rho}\right),$$

мы видим, что $f_{[\rho]}$ определена и голоморфна в $\rho S(\zeta, r)$ и совпадает с f в окрестности точки $\rho\zeta$. Пусть $\varepsilon\in(0,1)$ достаточно мало, так что $(1-\varepsilon)<\rho\leqslant 1 \Rightarrow \rho\zeta\in$ связная компонента $\Omega\cap S(\zeta, r)$, содержащая ζ. Тогда для $(1-\varepsilon)<\rho\leqslant 1$

$$f_{[\rho]}(z) = f(z) = \tilde{f}(z) \equiv f_{[1]}(z)$$

в окрестности точки $\rho\zeta$, и поэтому $f_{[\rho]}=f_{[1]}$ в связной области $\rho S(\zeta, r)\cap S(\zeta, r)$. Повторяя такие же рассуждения, после замены

$$S(\zeta, r) \text{ на } \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m S(\zeta, r) \quad \text{и} \quad \zeta \text{ на} \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m \zeta$$

найдем, что для $(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m < \rho \leqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m$

$$f_{[\rho]}(z) = f_{\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m\right]}(z)$$

в

$$\rho S(\zeta, r) \cap \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^m S(\zeta, r).$$

Отметим, что если $0<\rho_1<\rho<\rho_2\leqslant 1$, то

$$\rho_1 S(\zeta, r) \cap \rho_2 S(\zeta, r) \subset \rho S(\zeta, r).$$

Отсюда следует, что

$$f_{[\rho_1]}(z) = f_{[\rho_2]}(z) \quad \text{в} \quad \rho_1 S(\zeta, r) \cap \rho_2 S(\zeta, r)$$

всякий раз, когда последнее пересечение не пусто. Этим определяется функция φ, голоморфная в звездообразной области

$$\bigcup_{0<\rho\leqslant 1} \rho S(\zeta, r).$$

Функция φ совпадает с f в окрестности точки ζ, следовательно также в (связном) пересечении области Ω и области

$$\bigcup_{0<\rho\leqslant 1} \rho S(\zeta, r),$$

а f и φ определяют одну голоморфную функцию в объединении этих двух областей.

Оболочка голоморфности области Ω относительно $\mathscr{T}$ определяется конечными цепочками полидисков. Для каждой цепочки C мы можем применить изложенное рассуждение и построить индуктивио содержащую Ω звездообразную относительно 0 область Ω_C, такую, что для каждой $f\in\mathscr{T}$ существует функция f_C, голоморфная в Ω и равная f в Ω. Этим определяется функция $\hat{f}$, голоморфная в

$$\widehat{\Omega} = \bigcup_C \Omega_C,$$

такая, что каждый элемент, порожденный f, является элементом аналитической функции $\hat{f}$. Оболочкой голоморфности области Ω относительно $\mathscr{T}$ является, следовательно, область $\widehat{\Omega}$.

§ 4. Голоморфные функции и обобщенные функции

Пусть f — функция, голоморфная в области

$$D = \{z = x + iy \in C^n : \|x\| < a, \quad \|y\| < b, \quad y \in C\},$$

где C — открытый связный непустой конус в R^n (с вершиной в 0), не содержащий 0.

Определение 1.1. Считаем, что f стремится к C^∞-функции h в вещественном открытом множестве $A \subset \{x : \|x\| < a\}$ в смысле $\mathscr{E}(A)$, если каждая производная $D^\alpha f$ функции $f(|\alpha| \geqslant 0)$ расширяется до непрерывной функции в множестве $D \cup \{z : y=0,\ x \in A\}$ и имеет своим ограничением на A функцию $D^\alpha h$.

Определение 2.2. Мы говорим, что f стремится к обобщенной функции T в вещественном открытом множестве $A \subset \{x : \|x\| < a\}$ в смысле $\mathscr{D}'(A)$, если для каждой $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ с носителем в A и для каждого компактного подмножества K в C интеграл

$$\int f(x + \mathrm{i}\rho y)\, \varphi(x)\, dx$$

сходится к $\langle T, \varphi \rangle$ равномерно относительно $y \in K$ при $\rho \to 0$ $(\rho > 0)$.

Из известных свойств обобщенных функций (см. работу [6, т. 1]) следует, что тогда сходимость будет также равномерна относительно $\mathscr{D}(A)$ в ограниченном множестве пространства $\mathscr{D}(A)$ и что определение 2.2 эквивалентно следующему определению:

для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и каждой $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ с носителем в $\{x : \|x\| < \varepsilon\} f * \varphi$ стремится к $T * \varphi$ в $\varepsilon A = \{x \in A : d(x, \partial A) > \varepsilon\}$ в смысле $\mathscr{E}(\varepsilon A)$. Здесь $f * f$ представляет собой функцию, определяемую в

$$\{z = x + \mathrm{i}y \,\|\, x \,\| < a - \varepsilon, \quad \| y \| < b, \quad y \in C\}$$

следующим образом:

$$f * \varphi(x + \mathrm{i}y) = \int f(x - x' + \mathrm{i}y)\, \varphi(x')\, dx'.$$

Она, очевидно, голоморфна в указанной области.

Лемма 0. Пусть f — функция, голоморфная в

$$\{z = x + \mathrm{i}y : \| x \| < a, \quad \| y \| < b, \quad y \in C\},$$

где C — открытый связный непустой конус, не содержащий 0. Если f стремится к 0 в вещественной окрестности нуля в смысле $\mathscr{D}'(W)$, то $f = 0$.

Доказательство. Существует такое число $r > 0$, $r < b$, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и всех $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$ с носителем в $\{x : \|x\| < \varepsilon\}$, $f * \varphi$ стремится к 0 в множестве $x : \|x\| < 2r$ в смысле $\mathscr{E}(\{x : \|x\| < 2r\})$. Мы покажем, что для всех таких φ, $f * \varphi = 0$. Действительно, пусть $y \in C$, $\|y\| < r$, x — фиксированное число с $\|x\| < r$, и рассмотрим функцию одной комплексной переменной

$$\psi(\lambda) = f * \varphi(x + \lambda y) \quad (\lambda \in C^1).$$

Это — голоморфная функция от λ в $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > 0, |\lambda| < 1 + \eta (\eta > 0)\}$, т. е. в полидиске. Кроме того, она стремится к 0 в вещественных точках. Применяя принцип симметрии Шварца (или теорему Пенлеве), мы находим, что $\psi = 0$. В частности, $f * \varphi(x + iy)$ для всех $x + iy$, таких, что $\|x\| < r$, $\|y\| < r$, $y \in C$. Следовательно, она равна нулю во всей ее области определения.

Аналитические функции, имеющие своими граничными значениями обобщенные функции

Теорема 2.3. Пусть f — функция одной комплексной переменной, аналитична в области $\{= x + iy : |x| < a, 0 < y < b\}$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы f стремилась к обобщенной функции T в $(-a, a)$ в смысле $\mathscr{D}'(-a, a)$ при $y \to 0$ является следующее условие: для каждого действительного $r < a$ $(r > 0)$ существуют целое число p и константа M (обе зависящие от r), такие, что

$$|f(x + iy)| \quad < \frac{M}{y^r}$$

для всех x, y, удовлетворяющих $|x| \leqslant r$, $0 < y \leqslant c$, где c — некоторое фиксированное число, $0 < c < b$.

Теорема 2.4. Пусть f — функция одной комплексной переменной, аналитична в полосе $\{z : 0 < y < 1\}$. Для того чтобы f стремилась к обобщенной функции умеренного роста T в вещественных точках в смысле $\mathscr{S}'(R)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали число $0 < y_1 \leqslant 1$, константа $M > 0$ и целые числа $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, такие, что

$$|f(x + iy)| < y^{-p} M (1 + |x|)^q$$

при всех x и y, удовлетворяющих $0 < y \leqslant y_1$.

В качестве примера докажем только теорему 2.4. Для математиков теоремы 2.3 и 2.4 и многие другие теоремы такого рода хорошо известны, но опубликованных работ по этому предмету довольно мало (см., например, работы [4, 30, 31]).

1. **Необходимость условия.** По определению мы говорим, что f стремится к T в смысле $\mathcal{S}'$, если существует y_0, $0<y<1$, такое, что для $0<y<y_0$ обобщенная функция f_y, определяемая формулой

$$<f_y, \varphi> = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+iy)\varphi(x)\,dx,$$

принадлежит $\mathcal{S}'$ и стремится к T при $y\to 0$. Полагая $f_0=T$, мы имеем непрерывное отображение $y\to f_y$ компактна $[0, y_0]$ в $\mathcal{S}'$. Его образ компактен и, следовательно, ограничен, так это существует полунорма $\| \|_p$ в $\mathcal{S}$ относительно которой все функционалы f_y $(0\leqslant y\leqslant y_0)$ равномерно непрерывны. Это означает, что существуют константа $A>0$ и целое число $p\geqslant 0$, такие, что для каждой $\varphi\in\mathcal{S}$ и каждого y $(0\leqslant y\leqslant y_0)$:

$$|<f_y, \varphi>| \leqslant A \sup_{\substack{x \\ 0\leqslant m\leqslant p}} (1+x^2)^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial^m}{\partial x^m}\varphi(x)\right| = A\|\varphi\|_p.$$

Поэтому обобщенные функции f_y расширяются до равностепенно непрерывного подмножества пространства, дуального к банаховому пространству, определяемому нормой $\| \|_p$: их можно применить к функциям φ, убывающим на бесконечности, как $|x|^{-p}$, вместе с p первыми производными. В частности, положим

$$\varphi_{z, y'}(x') = (x'+iy'+i)^{-p}(x'+iy'-z)^{-1}$$

для $z = x+iy$, $0\leqslant y'\leqslant y_0$, $0<y<y_0$, $y'\neq y$.

Мы имеем для $0<y'<y<y_0$:

$$f(z) = \frac{(z+1)^p}{2\pi i}\left[<f_{y'}, \varphi_{(z, y')}> - <f_{y_0}, \varphi_{z, y_0}>\right].$$

(Эту формулу Коши легко доказать следующим образом: 1) регуляризовать все f_y посредством функции $\psi\in\mathcal{D}$ (т. е. взять свертку f_y с φ); 2) написать формулу Коши вдоль прямоугольника; 3) преобразовать постепенно прямоугольник в бесконечную полосу; 4) устремить φ к δ-функции.)

С другой стороны, $y'\to\varphi_{z, y'}$ представляет собой непрерывное отображение множества $\{y' : y'\neq y\}$ в банахово пространство с нормой $\| \|_p$. Поэтому при $y'\to 0$ (и фиксированном $y>0$) $\varphi_{z, y'}$ остается в компактном множестве (соответствующем, например, $0 \leqslant y' \leqslant y/2$) и, следовательно,

$$<f_{y'};\ \varphi_{z,\,y'}> \to <f_0,\ \varphi_{z,\,0}> \quad \text{при } y' \to 0.$$

Наконец,

$$f(z) = \frac{(z+\mathrm{i})^p}{2\pi \mathrm{i}}\left[<f_0,\ \varphi_{z,\,0}> - <f_{y_0},\ \varphi_{z,\,y_0}>\right]$$

$(0<y<y_0)$. Пользуясь неравенством

$$|\,f(z)\,| \leqslant A\,|\,z+\mathrm{i}\,|^p\left\{\|\,\varphi_{z,\,y_0}\,\|_p + \|\,\varphi_{z,\,0}\,\|_p\right\},$$

легко проверить, что существует константа $M>0$, такая, что

$$|\,f(z)\,| < M(1+|\,x\,|)^p\,[y^{-p} + (y_0-y)^{-p}]$$

при $0<y<y_0$.

2. **Достаточность условия.** Допустим, что для всех y, удовлетворяющих $0<y\leqslant y_0$, мы имеем

$$|\,f(x+\mathrm{i}y)\,| < \frac{M(1+|\,x\,|)^q}{y^p}.$$

Рассмотрим

$$F_m(z) = \int\limits_{\mathrm{i}y_0}^{z} \frac{(z-z')^m}{(m)!} f(z')\,dz' \quad (m \geqslant 0),$$

где $z=x+\mathrm{i}y$, $0<y\leqslant y_0$, причем интеграл берется вдоль (компактного) контура, содержащегося во множестве $\{z'=x'+\mathrm{i}y',\ 0<y'<1\}$.

Как известно,

$$F_m(\mathrm{i}y_0)=0; \quad \frac{d}{dz}F_m(z) = F_{m-1}(z); \quad \frac{dF_0}{dz} = f,$$

так что F_m является первообразной $(m+1)$-го порядка функции f. Мы имеем

$$F_m(x+\mathrm{i}y) = \int\limits_0^x \frac{(x+\mathrm{i}y - x' - \mathrm{i}\,y_0^m)}{m!} f(x'+\mathrm{i}y_0)\,dx' +$$

$$+\ \mathrm{i}^{m+1}\int\limits_{y_0}^{y} \frac{(y-y')^m}{m!} f(x+\mathrm{i}y')\,dy'.$$

Поэтому (для простоты допустим, что $x>0$)

$$|F_m(x+iy)| \leqslant \int_0^x \frac{1}{m!}|x-x'+iy_0|^m \frac{M}{y_0^p}(1+x')^q dx' +$$

$$+ M(1+x)^q \int_y^{y_0} \frac{(y'-y)^m}{m!} \cdot \frac{dy'}{y'^p}.$$

Положим

$$\varphi_m(y) = \int_y^{y_0} \frac{(y'-y)^m}{m!} \cdot \frac{dy'}{y'^p}.$$

Это — модуль первообразной $(m+1)$-го порядка от y^{-p}; первообразная равна нулю вместе с $(m-1)$ ее первыми производными в точке y_0. Имеем

$$\varphi_0(y) = \int_y^{y_0} \frac{dy'}{y'^p};$$

$$\varphi_1(y) = \int_y^{y_0} \varphi_0(y')\,dy';$$

$$\varphi_m(y) = \int_y^{y_0} \varphi_{m-1}(y')\,dy' \quad (m \geqslant 1).$$

Допустим, что $p>1$. Тогда

$$\varphi_0(y) = \frac{1}{(p-1)}\left[\frac{1}{y^{p-1}} - \frac{1}{y_0^{p-1}}\right] < \frac{1}{(p-1)} y^{-(p-1)};$$

$$\varphi_1(y) < \frac{1}{(p-1)(p-2)} y^{-(p-2)}, \ldots$$

$$\ldots, \varphi_{p-2}(y) < \frac{1}{(p-1)!} y^{-1};$$

$$\varphi_{p-1}(y) < \frac{1}{(p-1)!} \lg\frac{y_0}{y};$$

$$\varphi_p(y) < y_0 - y - y\lg\frac{y_0}{y} < 2y_0.$$

Отсюда следует, что $F_p(x+iy)$ мажорируется выражением вида

$$|F_p(x+iy) \leqslant K_1(1+|x|)^{q+p}$$

для $0<y\leqslant y_0$. Поэтому $F_{p+1}(z)$ непрерывна в замкнутой полосе $\{x+iy: 0\leqslant y\leqslant y_0\}$, в которой она удовлетворяет

$$|F_{p+1}(x+iy)|<K(1+|x|)^{q+p+1}$$

для некоторого положительного K. Она имеет, в частности, непрерывное граничное значение на вещественной оси, обозначаемое $F_{p+1}(x)$, к которому она стремится в смысле сходимости последовательности непрерывных функций полиномиального роста, а следовательно в смысле сходимости последовательности обобщенных функций умеренного роста. Дифференцируя $(p+2)$ раз, мы получим следующий результат: $f(x+iy)$ стремится к

$$\frac{d^{p+2}}{dx^{p+2}} F_{p+1}(x)$$

в смысле $\mathscr{S}'$ при $y\to 0$. Интересно отметить, что мы получаем верхнюю грань $(p+2)$ для локального порядка обобщенной функции, к которой стремится f.

Аналогичные теоремы имеют место для n переменных. Доказательства аналогичны. Мы отсылаем читателей к работе [30], в которой сформулированы и доказаны эти теоремы.

Теорема Малгранжа — Цернера

Эта теорема была доказана в 1961 г. Б. Малгранжем (неопубликовано) и затем Цернером [32] при помощи другого метода. Изложенное здесь третье доказательство принадлежит Бросу, Глазеру и Эпштейну.

Теорема 2.5 (Малгранж, Цернер)

Пусть $f_1(z_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, z_2, x_3, \ldots, x_n), \ldots,$ $f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}\, z_n)$ — функции действительных переменных со следующими свойствами:

1) $f_k(x_1, \ldots, z_k, \ldots, x_n)$ является C^∞-функцией $x_1, \ldots, x_n, y_k$ при y_k, лежащих в интервале $0\leqslant y_k\leqslant 1$, и является голоморфной функцией $z_k=x_k+iy_k$ для $0<y_k<1$ $(1\leqslant k\leqslant n)$;

2) для любого действительного $x=(x_1, \ldots, x_n)$,

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_k(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = \\ = \ldots = f_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда существует функция $F(z_1, \ldots, z_n)$, голоморфиая в области

$$\left\{z: 0 < y_k < 1 \ (1 \leqslant k \leqslant n);\ \sum_{j=1}^{n} y_j < 1\right\} = H$$

и принадлежит классу C^∞ в замыкании этой области, которая совпадает с $f_k(x_1, \ldots, z_k, \ldots, x_n)$ при $y_j=0$ $(j \neq k)$, $0 \leqslant y_k \leqslant 1$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Мы докажем эту теорему только для $n=2$, доказательство для общего случая аналогично, но требует некоторых осложнений алгебраического характера. Доказательство состоит из двух этапов.

1. *Доказательство для ограниченных функций.* Предположим, что существует константа $M>0$, такая, что

$$|f_1(z_1, x_2)| < M \text{ н } |f_2(x_1, z_2)| < M$$

везде, где эти функции определяются. Положим

$$g_1(z_1, x_2) = (z_1 + \mathrm{i})^{-1}(x_2 + \mathrm{i})^{-1} f_1(z_1, x_2),$$

$$g_2(x_1, z_2) = (x_1 + \mathrm{i})^{-1}(z_2 + \mathrm{i})^{-1} f_2(x_1, z_2).$$

Тогда g_1 и g_2 обладают свойствами 1) и 2). Мы покажем теперь, что существует функция $G(z_1, z_2)$, голоморфная в области H и принадлежащая классу C^∞ в $\overline{H}$, которая имеет g_1 и g_2 своими граничными значениями.

Если функция G действительио существует и обращается в нуль на бескоиечности, то мы можем вычислнть ее при помощи формулы Коши. Введем вспомогательные переменные $w=z_1+z_2$, $u=z_1-z_2$ и зафиксируем w так, что $0<\mathrm{Im}\,w<1$. Пересечение определяемого таким образом многообразия с H представляет собой полосу (отиосительно переменной u), определяемую условнем $0<\mathrm{Im}(w+u)$, $0<\mathrm{Im}(w-u)$, т. е. $-\mathrm{Im}\,w<\mathrm{Im}\,u<\mathrm{Im}\,w$. Обозначим

$$G(z_1, z_2) = \widehat{G}(z_1+z_2,\ z_1-z_2) = \widehat{G}(w, u),$$

$$\widehat{G}(w, u) = G\left(\frac{w+u}{2},\ \frac{w-u}{2}\right).$$

Мы имеем

$$\widehat{G}(w, u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty-w}^{+\infty-w} \frac{\widehat{G}(w, u')\,du'}{u'-u} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty+w}^{\infty+w} \frac{\widehat{G}(w, u'')\,du''}{u''-u}.$$

Производя в первом интеграле замену переменных $u' = 2\theta_1 - w$, а во втором — замену переменных $u'' = -2\theta_2 + w$, мы получим

$$G(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\theta_1, z_1+z_2-\theta_1)\,d\theta_1}{\theta_1 - z_1} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G(z_1+z_2-\theta_2, \theta_2)\,d\theta_2}{\theta_2 - z_2}\right),$$

$$G(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_2(\theta_1, z_1+z_2-\theta_1)\,d\theta_1}{\theta_1 - z_1} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(z_1+z_2-\theta_2, \theta_2)\,d\theta_2}{\theta_2 - z_1}\right).$$

Воспользуемся написанной формулой в качестве определения функции G. Она является голоморфной функцией в H, как это легко проверить, и принадлежит классу C^∞ в $\overline{H}$ в силу известных теорем. Таким образом, остается только показать, что она совпадает с f_1 и f_2 в соответствующих множествах. Для этой цели вычислим

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} G(x_1 + i\varepsilon, x_2 + i\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left[\frac{1}{2\pi i} \times \int \frac{g_1(x_1+x_2+2i\varepsilon-\theta_2, \theta_2)\,d\theta_2}{\theta_2 - x_2 - i\varepsilon} + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_2(\theta_1, x_1+x_2+2i\varepsilon-\theta_1)\,d\theta_1}{\theta_1 - x_1 - i\varepsilon}\right].$$

Введем в первый интеграл новую переменную, определяемую соотношением $\theta_1+\theta_2=x_1+x_2$, т. е. $\theta_2=x_1+$ $+x_2-\theta_1$,
и получим

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left[-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{g_1(\theta_1+2i\varepsilon,\ x_1+x_2-\theta_1)\,d\theta_1}{\theta_1-x_1+i\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{g_2(\theta_1,\ x_1+x_2-\theta_1+2i\varepsilon)\,d\theta_1}{\theta_1-x_1-i\varepsilon}\right].$$

Легко показать, что этот предел равен

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\theta_1\left[\frac{g_2(\theta_1,x_1+x_2-\theta_1)}{\theta_1-x_1-i\varepsilon}-\frac{g_1(\theta_1,\ x_1+x_2-\theta_1)}{\theta_1-x_1+i\varepsilon}\right]. \tag{2.6}$$

Поскольку $g_2(\theta_1,\quad x_1+x_2-\theta_1)=g_1(\theta_1,\quad x_1+x_2-\theta_1)=$ $=g(\theta_1,\ x_1+x_2-\theta_1)$, то оказывается, что этот предел равен $g(x_1,\ x_2)=g_1(x_1,\ x_2)=g_2(x_1,\ x_2)$. Так как $G(z_1,\ x_2)$ и $g_1(z_1,\ x_2)$ голоморфны по z_1 в одной и той же области и совпадают друг с другом в вещественных точках, они совпадают друг с другом везде. Поэтому $G(z_1,\ x_2)=$ $=g_1(z_1,\ x_2)$ и $G(x_1,\ z_2)=g_2(x_1,\ z_2)$. ($G(z_1,\ x_2)$ голоморфна, так как она принадлежит классу C^∞ и удовлетворяет уравнениям Коши — Римана по x_1 и y_1.) Искомая функция равна

$$F(z_1,\ z_2)=(z_1+i)(z_2+i)\,G(z_1,\ z_2),$$

и теорема доказана для случая ограниченных функций.

Замечание

Если бы мы знали только то, что $f_1(x_1,\ x_2)$ и $f_2(x_1,\ x_2)$ [и поэтому $g_1(x_1,\ x_2)$ и $g_2(x_1,\ x_2)$] совпадают друг с другом всего лишь в вещественных точках, таких, что $|x_1+x_2|<\eta$, то из формулы (2.6) следовало бы также, что $G(x_1,\ x_2)=g_1(x_1,\ x_2)=g_2(x_1,\ x_2)$ в этих точках. Тогда из аналитического продолжения следует, что $G(x_1,\ x_2)=g_1(x_1,x_2)=g_2(x_1,\ x_2)$ везде и, в частности, что $f_1(x_1,x_2)=$ $=f_2(x_1,\ x_2)$ везде. Это замечание после соответствующей разработки приводит к довольно общему доказательству «теоремы о двойном конусе» (см. теорему 2.7).

2. *Доказательство для общего случая (с двумя переменными).* Определим область $D(\tau,\ \alpha)$ в комплексной плоскости переменной z следующим образом:

$$D(\tau,\ \alpha)=\left\{z:0<\arg\frac{\tau+z}{\tau-z}<\alpha\right\},$$

где $\tau>0$ и $0<\alpha<\pi$. Эта область ограничивается сегментом $[-\tau, \tau]$ вещественной оси и другой окружности, проходящей через точки τ, $-\tau$ и $i\tau \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (рис. 3).

Конформное отображение

$$\zeta=\xi+i\eta=\frac{1}{2}\lg\frac{\tau+z}{\tau-z}\quad\left(z=\tau \operatorname{th}\frac{\alpha\zeta}{2}\right)$$

преобразует биголоморфно $D(\tau, \alpha)$ в полосу $\{\zeta:0<\eta<1\}$ на комплексной плоскости переменной ζ.

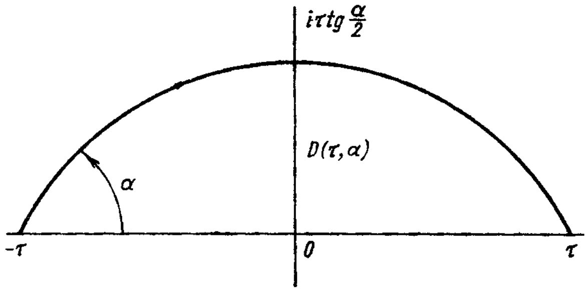


Рис. 3. Область D (τ, α).

Возвращаясь к ситуации в теореме (с двумя переменными), мы вписываем в каждую полосу $\{0<y_j<1\}$ $(j=1, 2)$ область $D(\tau, \alpha_\tau)$, где α_τ удовлетворяет

$$\tau \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_\tau}{2}\right)=1,$$

т. е.

$$\alpha_\tau=2\operatorname{Arctg}\frac{1}{\tau}.$$

Для фиксированного τ определим

$$\varphi_1(\zeta_1, \xi_2)=f_1\left(\tau \operatorname{th}\frac{\alpha_\tau\zeta_1}{2}, \quad \tau \operatorname{th}\frac{\alpha_\tau\xi_2}{2}\right),$$

$$\varphi_2(\xi_1, \zeta_2)=f_2\left(\tau \operatorname{th}\frac{\alpha_\tau\xi_1}{2}, \quad \tau \operatorname{th}\frac{\alpha_\tau\zeta_2}{2}\right).$$

$$(\zeta_1=\xi_1+i\eta_1, \quad \zeta_2=\xi_2+i\eta_2).$$

Функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют относительно переменных ζ_j таким же условиям, что и f_1 и f_2 относительно переменных z_j. Более того, они ограничены, так как принимают значения функций f_1 и f_2 на компактном множестве. Поэтому мы можем применить к ним теорему, доказанную для ограниченных функций, и заключить, что существует функция $\Phi(\zeta_1, \zeta_2)$, голоморфная в области H (по переменным ζ_j) и принадлежащая классу C^∞ в $\overline{H}$, которая имеет граничными значениями φ_1 и φ_2. Возвращаясь к первоначальным переменным z_j, мы находим, что для каждого $\tau>0$ существует функция $F(z_1, z_2)$, голоморфная в области H_τ:

$$H_\tau = \{z : z_1 \in D(\tau, \theta_1\alpha_\tau), \quad z_2 \in D(\tau, \theta_2\alpha_\tau),$$
$$0 < \theta_1; \quad 0 < \theta_2, \ \theta_1 + \theta_2 = 1\}$$

и принадлежащая C^∞ на границе области H_τ, которая имеет граничные значения f_1 и f_2. Функции F_τ при различных τ должны согласоваться везде, где они одновременно определены. Поэтому существует функция $F(z_1, z_2)$ с граничными значениями f_1 и f_2, голоморфная в пределе областей H_τ при $\tau\to\infty$: этим пределом является область H.

Замечание. Доказательство для n переменных разделяется на два шага. Переход от случая ограниченных функций к общему случаю тождествен переходу, указанному выше для случая двух переменных. Доказательство для ограниченных функций прежде всего сводится (делением на $\prod\limits_{j=1}^{n}(z_j+1)$) к случаю функций f_j, обращающихся в нуль на бесконечности. Остальная часть доказательства (аналогичная доказательству для случая двух переменных) основывается на следующей формуле для F:

$$F(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int \frac{f_k\left(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}, \sum\limits_{j=1}^{n} z_j + \theta_k, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_n\right) \delta\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j\right) d\theta_1, \ldots, d\theta_n}{\prod\limits_{r \neq k} (\theta_r - z_r)},$$

которая обобщает формулу (2.1), использованную для случая двух переменных.

Применение сформулированной теоремы. Теорема о «локальной трубе»

Пусть E — множество $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$:

$$E_k = \{z \in C^n : y_j = 0 \quad \text{для} \quad j \neq k, \quad 0 \leqslant y_k < 1\}.$$

Положим

$$H = \left\{ z = x + \mathrm{i}y : 0 < y_j;\ 0 < \sum_{j=1}^{n} y_j < 1 \right\}.$$

Пусть N — открытая связная окрестность множества E. Если F — голоморфная в $N \cap H$ функция, то существует функция F', голоморфная в H, которая совпадает с F в $N' \cap H$, где N' — открытая окрестность множества E, содержащаяся в N.

Эта теорема доказывается посредством вписания в $N \cap H$ множеств, к которым можно применить теорему 2.3 после замены переменных, аналогичной замене, использованной во втором шаге доказательства теоремы 2.3.

Теорема об «острие клина» для функции класса C^∞

Лемма 2.1. Пусть $f_1(z_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, z_k, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, z_n)$ — функции $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, $(z_j = x_j + \mathrm{i}y_j)$ со следующими свойствами.

1. Для каждого $k (1 \leqslant k \leqslant n)$ функция $f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, z_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ принадлежит классу C^∞ в множестве $|x_r| \leqslant a$, $y_j = 0$ для $j \neq k$, $0 \leqslant y_k \leqslant b$; $0 < b < a$; функция f_k голоморфна по z_k в множестве: $|x_r| \leqslant a$, $y_j = 0$ при $j \neq k$, $0 < y_k < b$.

2. $$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_k(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_n(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{при } |x_r| \leqslant a.$$

Тогда существует функция $F(z)$, голоморфная в области

$$\left\{ z : |x_r| < \frac{a}{2} (1 \leqslant r \leqslant n);\quad 0 < y_r;\ \sum_{j=1}^{n} y_j < \frac{b}{4} \right\}$$

и принадлежащая классу C^∞ в замыкании этой области, которая имеет своими граничными значениями $f_1, \ldots, f_n$.

Доказательство. Функция F фактически голоморфна в более широкой области. Мы можем вписать в каждый прямоугольник

$$\{ z_k : |x_k| < a,\quad 0 < y_k < b \}$$

область $D(a,\ \alpha)$, где

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a}\,(<1).$$

Пользуясь конформным отображением, преобразующим $D(a,\ \alpha)$ в полосу, применяя теорему 2.3, а затем возвращаясь к первоначальным переменным, мы находим, что существует функция $F(z)$ с граничными значениями $f_1,\ \ldots,\ f_n$, голоморфная в

$$\left\{z: z_k\in D(a,\ \theta_k\alpha),\quad 0<\theta_k;\ \sum_{k=1}^{n}\theta_k<1\right\}.$$

Простыми вычислениями можно проверить, что эта область всегда содержит область, определенную в лемме.

Лемма 2.2. Пусть C_1 и C_2 — два открытых непустых выпуклых конуса в $\mathbf{R}^n$; $\mathcal{T}_1=\mathbf{R}^n+\mathrm{i}C_1$; $\mathcal{T}_2=\mathbf{R}^n+\mathrm{i}C_2$ и функция f_1 (соответственно f_2) голоморфна в

$$\mathcal{T}_1\cap\{z:\ \|x\|<3\ a,\quad \|y\|<b\}$$

(соответственно $\mathcal{T}_2\cap\{z:\|x\|<3\,a,\quad \|y\|<b\}$), где $0<b<a$. Допустим, что f_1 и f_2 стремится к одной и той же функции класса C^∞ в $\{x\in\mathbf{R}^n:\|x\|<3a\}$, как $\mathcal{E}\ (\{x:\|x\|<3\,a\})$. Тогда f_1 и f_2 имеет общее аналитическое продолжение в

$$\{z=x+\mathrm{i}y:\|x\|<a;\quad y\in\operatorname{conv}\left\{y':\|y'\|<\frac{b}{4},\right.$$

$$\left.y'\in C_1\cup C_2\}\right\}.$$

Это аналитическое продолжение принадлежит классу C^∞ в вещественных точках, таких, что $\|x\|<a$. Здесь conv означает «выпуклую оболочку», и еще напомним, что

$$\|x\|^2=\sum_{j=1}^{n}x_j^2,\quad \|z\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2=\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2.$$

Доказательство. Пусть $\hat{x}+\mathrm{i}\hat{y}$ — точка указанной области. Тогда мы можем найти линейно независимые векторы $e_1,\ldots,\ e_n\in R^n$ с длиной l и число $\varepsilon>0$, такие, что

$$\hat{y}=\sum_{k=1}^{n}\hat{\eta}^k e_k,\quad 0<\hat{\eta}^k\quad (k=1,\ \ldots,\ n);$$

$$e_1, \ldots, e_p \in C_1; \quad e_{p+1}, \ldots, e_n \in C_2;$$

$$\widehat{\eta}^1 + \widehat{\eta}^n < (1-\varepsilon)^2 \frac{b}{4}; \quad \widehat{\eta}^k < \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^2 \frac{b}{4} \quad \text{при } k \neq 1, n;$$

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Положим

$$F_k(\xi^1, \ldots, \xi^{k-1}, \zeta^k, \xi^{k+1}, \ldots, \xi^n) =$$

$$= \begin{cases} f_1\left(\sum\limits_{j \neq k} \xi^j e_j + \zeta^k e_k + \widehat{x}\right), & \text{если } 1 \leqslant k \leqslant p, \\ f_2\left(\sum\limits_{j \neq k} \xi^j e_j + \zeta^k e_k + \widehat{x}\right), & \text{если } p+1 \leqslant k \leqslant n, \end{cases}$$

где $\zeta^k = \xi^k + i\eta^k$. Функция F_k вещественных переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_k$ принадлежит классу C^∞ для $0 \leqslant \eta^k \leqslant b$, $\|\Sigma \xi^r e_r\| < 2a$ и голоморфна в ζ^k для $0 < \eta^k < b$, $\|\sum\limits_r \xi^r e_r\| < 2a$, и в частиости, когда

$$|\xi^1| < a(1-\varepsilon); \quad |\xi^n| < a(1-\varepsilon); \quad |\xi^r| < \frac{\varepsilon}{n} a(r \neq$$

$$\neq 1, n);$$

$$\eta^j = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k; \quad 0 < \frac{\eta^k}{1-\varepsilon} < b, \text{ если } k = 1 \text{ или } n;$$

$$0 < \frac{n\eta^k}{\varepsilon} < b, \quad \text{если } k \neq 1, n.$$

Они совпадают друг с другом при $\xi \in A$:

$$A = \Big\{\xi : |\xi^1| < a(1-\varepsilon),$$

$$|\xi^n| < a(1-\varepsilon); \quad |\xi^r| < \frac{\varepsilon}{n} a(r \neq 1, n)\Big\}.$$

Применяя лемму 2.1 относительно перемеиных

$$\frac{\zeta^1}{1-\varepsilon}, \quad \frac{\zeta^n}{1-\varepsilon}, \quad \frac{n\zeta^j}{\varepsilon} \quad (j \neq 1, n),$$

мы находим, что f_1 и f_2 имеют аналитическое продолжение в образе множества

$$\Big\{\zeta : \xi \in \frac{1}{2} A, \quad 0 < \eta^k,$$

$$\frac{\eta^1}{1-\varepsilon} + \frac{\eta^n}{1-\varepsilon} + \frac{n}{\varepsilon} \sum_{r=2}^{n-1} \eta^r < \frac{b}{4}\Big\}$$

по переменным z. Этот образ содержит точку $\hat{x}+i\hat{y}$, поскольку

$$\frac{1}{1-\varepsilon}(\hat{\eta}_1+\hat{\eta}^n)<(1-\varepsilon)\frac{b}{4},$$

$$\sum_{r=2}^{n-1}\frac{n}{\varepsilon}\hat{\eta}^r<\frac{n^2}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^2\frac{b}{4}=\varepsilon\frac{b}{4}.$$

Легко проверить, что различные продолжения функций f_1 и f_2, полученные таким образом, согласуются везде, где они определены одновременно.

Лемма 2.3. Пусть C — открытый непустой конус в $\mathbf{R}^n$; $f(z)$ — функция, голоморфная в $\{z:\|x\|<(n+2)a, y\in C, \|y\|<b\}$ $(0<b<a)$, стремящаяся к функции класса C^∞ в действительном открытом множестве $A=\{x:\|x\|<(n+2)a\}$ в смысле $\mathscr{E}(A)$. Тогда $f(z)$ имеет аналитическое продолжение в

$$\left\{z:\|x\|<a,\quad y\in \operatorname{conv}\left\{y':\|y'\|<\frac{b}{4}\right\}\cap C\right\}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.2. Отметим, что если C несвязно, то гипотеза теоремы означает, что $f(x+iy)$ стремится к одной и той же функции $f(x)$ класса C^∞ при $y\to 0$ в любой связной компоненте конуса C.

Случай с граничными значениями, представляющими собой обобщенные функции

В предыдущих леммах и в теореме Малгранжа — Цернера можно ослабить условие относительно граничных значений рассматрнваемых функций (т. е. что они принадлежат классу C^∞) и заменить его следующим условием: граничные значения этих функцнй представляют собой обобщенные функции. Мы не будем доказывать это подробно, а дадим только набросок метода доказательства. За полной ннформацией мы отсылаем читателя к лнтературе, в частности к книге Стритера и Вайтмана [5], где даны другие ссылки.

Отметим, что в случае функций с граничными значениями из класса C^∞ полученное в предыдущих леммах и теореме аналитическое продолжение $F(z)$ удовлетворяет принципу максимума относительно первоначальных функций: для каждого компактного множества K конечной области существует компакт $\hat{K}$ первоначального множества, где первоначальные функции заданы так, что $\|F\|_K \leqslant \|F\|_{\hat{K}}$. Если мы регуляризуем первоначальные функции и обобщенные функции через функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ с достаточно малым носителем, то мы можем применить предыдущие теоремы и получить аналитическое продолжение F^φ первоначальных функций в область произвольно близкую к конечной области. Это продолжение тоже удовлетворяет $\|F^\varphi\|_K \leqslant \|F^\varphi\|_{\hat{K}}$. Поэтому F^φ непрерывно (и линейно) зависит от φ, и легко проверить, что

$$F^\varphi(x+iy) = (T_y * \varphi)(x),$$

где T_y — обобщенная функция от x, непрерывно зависящая от параметра y. В силу теоремы о ядре она представляет собой обобщенную функцию от x и y. По этим переменным она удовлетворяет уравнениям Коши — Римана. Следовательно, она является аналитической функцией в силу одной из простейших форм теоремы о регулярности ([6, т. 2, стр. 72]).

Мы сформулируем «вариант с обобщенными функциями» теоремы об острие клина и оставим читателям задачу: сформулировать «вариант с обобщенными функциями» теоремы Малгранжа — Цернера.

Теорема 2.6. Пусть C_1 и C_2 — два открытых выпуклых непустых конуса в $\mathbf{R}^n$; f_1 и f_2 — две функции со следующими свойствами:

1) для $\alpha=1,2$ f_α голоморфна в области

$$\{z: \|x\| < 3a, \quad y \in C_\alpha, \quad \|y\| < b\},$$

где $0<b<a$.

2) $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y\in C_\alpha}} \int f_\alpha(x+iy)\varphi(x)\,dx = T(\varphi) \quad \alpha = 1,2$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ с носителем в $\{x: \|x\| < 3a\}$; T представляет собой обобщенную функцию, определяемую в том же шаре.

Тогда существует функция F, голоморфная в

$$\left\{z: \|x\| < a, \quad y \in \operatorname{conv}\left[\left\{y' : \|y'\| < \frac{b}{4}\right\} \cap (C_1 \cup C_2)\right]\right\},$$

которая совпадает с f_α в пересечении этой области с $\mathcal{T}_\alpha = R^n + iC_\alpha$ $(\alpha = 1,2)$. Более того, $F(z)$ имеет T своим граничным значением в смысле сходимости последовательностей обобщенных функций.

Имеет место аналогичный «вариант с обобщенными функциями» леммы 2.3.

Теорема о двойном конусе. Обобщение замечания, сделанного в § 4, приводит к следующему дополнению к теореме 2.4.

Теорема 2.7. Пусть C_1 и C_2 — два открытых выпуклых непустых конуса в $\mathcal{T}_1 = R^n + iC_1$, $\mathcal{T}_2 = R^n + iC_2$; $C_+ = C_1 - C_2 = -C_-$; a и b — две точки в R^n, такие, что $b - a \in C_+$; и V — вещественная открытая окрестность сегмента (a, b), а W — комплексная открытая окрестность «двойного конуса»:

$$D = \{x \in R^n: \quad x - a \in C_+, \quad b - x \in C_+\}.$$

Пусть f_1 и f_2 — две функции, голоморфные в $\mathcal{T}_1 \cap W$ и $\mathcal{T}_2 \cap W$ соответственно и имеющие граничными значениями T_1 и T_2 (соответственно) в V. Если T_1 и T_2 совпадают друг с другом в V, то они совпадают друг с другом в D.

Для большей информации о теореме об острие клина см., например, [23]. Теорема 2.7 обобщает теорему Владимирова и Борхерса [34]. Описанный выше метод был взят из работы Броса, Эпштейна и Глазера, которая готовится к печати.

Наконец отметим, что при помощи теоремы о локальной трубе вместо теоремы Малгранжа — Цернера мы можем получить «геометрические варианты» лемм 2.2 и 2.3. В качестве примера приведем только следующую лемму.

Лемма 2.4. Пусть C — открытый связный конус в R^n, содержащий два непустых выпуклых конуса C_1 и C_2. Обозначим Ω область

$$\Omega = \{z: \|x\| < 3a, \quad \|y\| < b, \quad y \in C_1 \cup C_2\} \cup,$$
$$\{z: \|x\| < 3a, \quad \|y\| < \rho, \quad y \in C,$$

где $0 < b < a$, $0 < \rho$. Оболочка голоморфности области содержит открытое множество

$$\left\{z: \|x\| < a, \quad y \in \operatorname{conv}\left[\left\{y': \|y'\| < \frac{b}{4}\right\} \cap (C_1 \cup C_2)\right]\right\}.$$

Преобразоввние Лвпласв обобщенных функций умеренного роств с носитепем в конусе

Напомним, что конусом C в R^n является такое множество, что для любого действительного $\rho>0$, $\rho C\subset C$ (т. е. в нашем определении конус всегда имеет вершину в 0).

Если C — конус в $\mathbf{R}^n$, то дуальным ему является конус C^*, определяемый в пространстве, дуальном к $\mathbf{R}^n$ (которое изоморфно $\mathbf{R}^n$), следующим образом:

$$C^* = \{p:(p, x)\geqslant 0 \quad \text{для всех } x\in C\}.$$

Нетрудно проверить, что C^* замкнут и выпуклый. C^{**} определяется в том же пространстве, что и C, и, очевидно, содержит C. Можно проверить (см., например, [35]), что C^{**} является замкнутой выпуклой оболочкой конуса C. Легко проверить следующие свойства:

1) $C_1\subset C_2\Rightarrow C_2^*\subset C_1^*$,

2) $C=C_1\bigcup C_2\bigcup\ .\ .\ .\ C_r\Rightarrow C^*=C_1^*\bigcap C_2^*\bigcap\ .\ .\ .\ \bigcap C_r^*$,

$C=C_1+C_2+\ .\ .\ .\ +C_r\Rightarrow C^*=C_1^*\bigcap C_2^*\bigcap\ .\ .\ .\ \bigcap C_r^*$,

3) $C=C_1\bigcap C_2\ .\ .\ .\ \bigcap C_r$ и $C_j=C_j^{**}$ $(1\leqslant j\leqslant r)\Rightarrow$

$\Rightarrow C^*=\overline{C_1^*+\ .\ .\ .\ +C_r^*}$

и т. д. Внутренность C^{*0} конуса C^* задается как

$$C^{*0}=\{p:(p, x)>0 \quad \text{для всех } x\in\overline{C}, \quad x\neq 0\}.$$

Она может быть, конечно, пустой: например, если C обладает свойством $C+Ra\subset C$, то C^* содержится в $\{p:(p, a)=0\}$.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.8 [36]. Пусть T — обобщенная функция умеренного роста, с носителем в конусе $C\subset\mathbf{R}^n$, таком, что $C^{*0}\neq\Phi$. Тогда преобразоваиие Фурье обобщенной функции T представляет собой граничное значение в смысле $\mathscr{S}'$ функции T, голоморфной в трубе $\mathbf{R}^n+iC^{*0}$.

Доказательство. Допустим, что C имеет внутренние точки.

1. Покажем сначала, что T может быть написана в виде $T\doteq P(D)G$, где P — полином с постоянными коэффициентами, $P(D)$ — дифференциальный оператор с по-

стоянными коэффициентами, полученный заменой переменных в P на $\partial/\partial x$, G — непрерывная функция с носителем в C^{**}, растущая полиномиально на бесконечности.

Поскольку $C^{*0} \neq \Phi$, то существует $\hat{p}$, такой, что $(\hat{p}, x) > 0$ для всех $x \in C^{**}$, $x \neq 0$. Так как C имеет внутренние точки, то мы можем выбрать n линейно независимых векторов $e_1, \ldots, e_n$, содержащихся в C. Они удовлетворяют $(\hat{p}, e_j) > 0$ $(j=1, \ldots, n)$, и мы можем выбрать их длины так, чтобы выполнялось $(\hat{p}, e_j) = 1$ $(j=1, \ldots, n)$. С тех пор мы выбираем эти векторы в качестве системы отсчета, т. е. мы выбираем координаты так, чтобы $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Тогда для $x = (x_1, \ldots, x_n)$ мы имеем

$$(\hat{p}, x) = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Так как T является обобщенной функцией умеренного роста, то она удовлетворяет для любой $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$:

$$| < T, \varphi > | < C \| \varphi \|_{p, q},$$

$$\| \varphi \|_{p, q} = \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| < q}} (1 + \| x \|)^p \, | D^\alpha \varphi(x) | ,$$

и ее можно расширять до непрерывного линейного функционала на банаховом пространстве, полученном дополнением $\mathscr{S}$ по норме $\| \ \|_{p,q}$. Это пространство состоит из всех функций φ с непрерывными производными первого порядка, для которых $\|\varphi\|_{p,q}$ конечны.

Положим для $r \geqslant 0$

$$F_r(x) = \frac{1}{(r!)^n} x_1^r x_2^r, \ . \ . \ . \ , x_n^r \theta(x_1) \theta(x_2), \ . \ . \ . \ , \theta(x_n).$$

Имеем

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1, \ . \ . \ . \ , \partial x_n} F_r(x) = F_{r-1}(x) \quad \text{для} \quad r > 1,$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1, \ . \ . \ . \ , \partial x_n} F_0(x) = \delta(x).$$

Для $r \geqslant 2$ F_r имеет непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка. $F_{q+1}(\hat{x} - x)$, рассматриваемая как функция от x, зависящая от параметра $\hat{x}$, не имеет конечного значения $\| \ \|_{pq}$. Однако носители T и $F_{q+1}(\hat{x} - x)$

имеют компактное пересечение. Действительно, это пересечение содержится в

$$\overline{C}\cap(\widehat{x}-\overline{K})\subset\left\{x:0\leqslant\sum_{j=1}^{n}x_j;\quad x_j\leqslant\widehat{x}_j\quad(1\leqslant j\leqslant n)\right\}.$$

Последнее множество само содержится в $\{x:0\leqslant\leqslant\widehat{x}_j-x_j\leqslant\sum_k\widehat{x}_k\}$.

Чтобы определить $T\divideontimes F_{q+1}(\widehat{x})$ (которая задается эвристически интегралом $\int T(x)F_{q+1}(\widehat{x}-x)\,dx$), достаточно применить T к $F_{q+1}(\widehat{x}-x)\chi_{\widehat{x}}(x)$, где $\chi_{\widehat{x}}(x)$ для каждого фиксированного $\widehat{x}$ является C^∞-функцией x, такой, что $F_{q+1}(\widehat{x}-x)\chi_{\widehat{x}}(x)$ имеет компактный носитель и совпадает с $F_{q+1}(\widehat{x}-x)$ на окрестности $(\operatorname{supp}T)\cap\cap(\operatorname{supp}F_{q+1}(\widehat{x}-x))$. Мы выбираем

$$\chi_{\widehat{x}}(x)=\begin{cases}\alpha\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(\widehat{x}_j-x_j)\right) & \text{для } \sum\limits_{j=1}^{n}\widehat{x}_j\leqslant 1,\\[2ex] \alpha\left(\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}(\widehat{x}_j-x_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\widehat{x}_j}\right) & \text{для } \sum\limits_{j=1}^{n}\widehat{x}_j\geqslant 1,\end{cases}$$

где $t\to\alpha(t)$ — вещественная C^∞-функция одной переменной, такая, что $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $\alpha(t)=1$ для $t\leqslant 2$, $\alpha(t)=0$ для $t\geqslant 3$.

$\chi_{\widehat{x}}(x)$ зависит непрерывно от x, и для каждого мультииндекса β существует константа M_β, не зависящая от x, такая, что $|D^\beta\chi_{\widehat{x}}(x)|<M_\beta$. Произведение $F_{q+1}(\widehat{x}-x)\times\times\chi_{\widehat{x}}(x)$ (рассматриваемое как функция от x, зависящая от параметра $\widehat{x}$) является элементом банахова пространства, соответствующего норме $\|\ \|_{p,q}$, и зависит непрерывно от $\widehat{x}$. Пользуясь правилом Лейбница, легко увидеть, что

$$\|F_{q+1}(\widehat{x}-x)\chi_{\widehat{x}}(x)\|_{p,q}\leqslant B(1+\|\widehat{x}\|)^{p+(q+1)n}.$$

Следовательно, $T \ast \widehat{F(x)}$ является непрерывной функцией x, удовлетворяющей

$$| T \ast F_{q+1}(\widehat{x}) | < M(1 + \| \widehat{x} \|)^{p+(q+1)n}.$$

Ее носитель содержится в $\bar{C} + \bar{K} \subset C^{**} + \bar{K} \subset C^{**}$. Кроме того,

$$\frac{\partial^{n(q+2)}}{\partial x_1^{q+2}, \ldots, \partial x_n^{q+2}} T \ast F_{q+1} = T \ast \delta = T.$$

$T \ast F_{q+1}$ является искомой функцией G. (Это доказательство принадлежит Глазеру.)

2. Для $k = p + \mathrm{i}q$ преобразование Лапласа $\widehat{T}(k)$ задается эвристически формулой

$$\widehat{T}(k) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+q\mathrm{i})x} P(D) G(x)\, dx,$$

точный смысл которой раскрывается в формуле:

$$\widehat{T}(k) = P(-\mathrm{i}k) \int \mathrm{e}^{-qx} \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} G(x)\, dx.$$

Интеграл сходится абсолютно и равномерно (по k), когда q меняется на любом компакте, содержащемся в C^{*0}, и $\widehat{T}(k)$ голоморфна в $R^n + \mathrm{i}C^{*0}$. Для каждого фиксированного $q \in C^{*0}$, $\widehat{T}(p + \mathrm{i}q)$, рассматриваемая как обобщенная функция умеренного роста p (зависящая от параметра q), является преобразованием Фурье от $\mathrm{e}^{-qx}T(x)$, которая стремится к T в смысле $\mathcal{S}'$ при $q \to 0$. Поэтому $\widehat{T}(p + \mathrm{i}q)$ стремится к Фурье-образу $\widetilde{T}$ от T при $q \to 0$ в смысле $\mathcal{S}'$.

Пусть d — расстояние $d(q, \partial C^*)$, где $q \in C^{*0}$. Тогда для каждой $x \in C^{**}$ и каждого r, такого, что $\|r\| < d$, мы имеем $(q + r, x) \geqslant 0$. Для каждой фиксированной $x \in C^{**}$, $x \neq 0$ можем найти такое r, что $\|r\| = 1$, $(r, x) = -\|x\|$, так что $(q, x) \geqslant -(dr, x) = d\|x\|$. Мы имеем, следовательно,

$$| \widehat{T}(p + \mathrm{i}q) | \leqslant | P(-\mathrm{i}k) | \int \mathrm{e}^{-d\|x\|} (1 + \|x\|)^m\, dx \leqslant$$

$$\leqslant A(1 + \|k\|)^r \int \mathrm{e}^{-d\|x\|} (1 + \|x\|^m) \|x\|^{n-1} d\|x\|,$$

$$| \widehat{T}(k) | \leqslant \frac{B(1 + \|k\|)^r}{d^{m+n}}, \quad d = d(q, \partial C^*).$$

Можно показать, что эти условия достаточны также для того, чтобы $\widehat{T}(k)$ была преобразованием Лапласа обобщенной функции умеренного роста с носителем в C^{**}. (Более подробно по этим вопросам см. работы [23, 30, 33, 36, 37].)

ГЛАВА 3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ

В настоящей главе мы принимаем, как и в гл. 1, что можно определить «резкие» о. з. ф. со свойствами, указанными в гл. 1. Однако все указанные аналитические свойства справедливы также для регуляризованных о. з. ф. и для о. з. ф. в теории Хаага — Араки, за исключением случаев, когда явно утверждается обратное.

§ 1. Ячейки, носители и трубы $\mathcal{T}^s$ для четырехточечной функции

В соответствии с гл. 1 рассмотрим пространство Σ_4, определяемое в четырехмерном пространстве переменных s_0, s_1, s_2 и s_3 условием $s_0+s_1+s_2+s_3=0$. Это — трехмерное пространство, которое разделяется на 32 конических ячейки плоскостями вида $\{s: s_j=0\}$ $(j=0, 1, 2, 3)$ и $\{s: s_j+s_k=0\}$ $(j\neq k,\ j,\ k=0, 1, 2, 3)$. Для того чтобы получить графическое представление этих ячеек, мы можем, например, нарисовать их пересечения со сферой с центром в начале координат и получить рис. 4.

Мы можем приписать этим ячейкам индексы следующим образом:

$$S_j^+ = \{s: s_k > 0,\quad s_m > 0,\quad s_n > 0\} = -S_j^-;$$

$$S_{jk}^+ = \{s: s_k < 0,\quad s_m + s_k > 0,\quad s_n + s_k > 0\} = -S_{jk}^-.$$

Здесь (j, k, m, n) — любая перестановка $(0, 1, 2, 3)$. Заметим, что $S_{jk}^+ \neq S_{kj}^+$. Этим ячейкам сопоставим трубы

$$\mathcal{T}^S = R^{12} + i\mathcal{V}^s$$

в комплексном импульсном пространстве, где

$$\mathcal{V}^{S_j^\pm} \equiv \mathcal{V}_j^\pm,\quad \mathcal{V}^{S_{jk}^\pm} \equiv \mathcal{V}_{jk}^\pm$$

определяются таким образом:

$$\mathscr{V}_j^+ = \{q \in R^{12} : q_k \in V^+, \quad q_m \in V^+, \quad q_n \in V^+\} = -\mathscr{V}_j^-,$$

$$\mathscr{V}_{jk}^+ = \{q \in R^{12} : q_k \in V^-, \quad q_m + q_k \in V^+,$$

$$q_n + q_k \in V^+\} = -\mathscr{V}_{jk}^-.$$

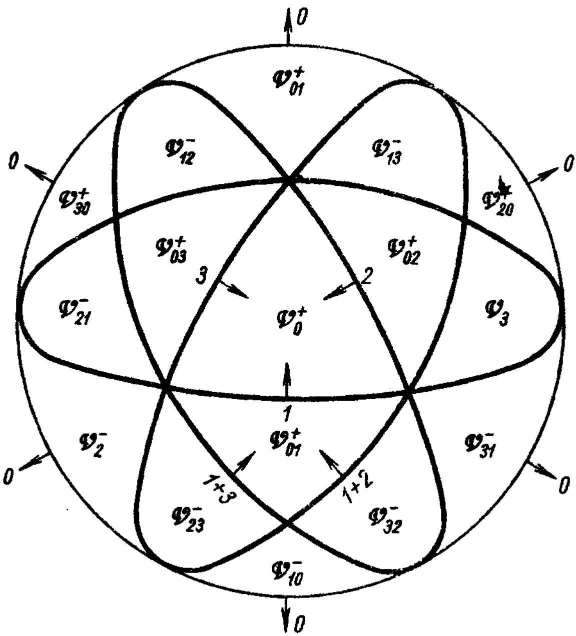


Рис. 4. Графическое представление ячеек.

Ради простоты примем также следующие обозначения для о. з. ф.:

$$a_j(p) \equiv r^{S_j^+}(p); \quad a_{jk}(p) \equiv r^{S_{jk}^+}(p);$$

$$r_j(p) \equiv r^{S_j^-}(p); \quad r_{jk}(p) \equiv r^{S_{jk}^-}(p)$$

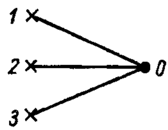
(эти обозначения взяты из работы [18]).

Мы видим, что существует 32 о. з. ф. для четырехточечной функции. В случае четырехточечной функции существует столько же различных мономов Штейнмана. Они могут быть представлены в одной из форм:

$$\left.\begin{matrix} n\uparrow m\uparrow k\uparrow j \\ n\downarrow m\downarrow k\downarrow j \end{matrix}\right\}$$ или (инвариантная относительно перестановок n, m, k),

$$\left.\begin{matrix} k\downarrow m\uparrow n\uparrow j \\ k\uparrow m\downarrow n\downarrow j \end{matrix}\right\}$$ или (инвариантная относительно перестановки m, n),

где (j, k, m, n) — любая перестановка $(0, 1, 2, 3)$. Согласно общим правилам (гл. 1, § 2), носитель $3\uparrow 2\uparrow 1\uparrow 0$ состоит только из элементарного носителя, соответствующего дереву



Этот элементарный носитель представляет собой множество

$$\{x: x_1 - x_0 \in \bar{V}^+, \quad x_2 - x_0 \in \bar{V}^+, \quad x_3 - x_0 \in V^+\}.$$

Его дуальным конусом является в точности $\bar{\mathscr{V}}_0^+$ со внутренностью $\mathscr{V}_0^+$ (здесь элементарный носитель рассматривается как замкнутый конус в ξ-пространстве, дуальным пространством которого является импульсное пространство). Здесь $3\uparrow 2\uparrow 1\uparrow 0$ отождествляется с a_0, и в более общем виде

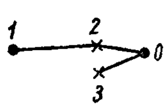
$$n\uparrow m\uparrow k\uparrow j = a_j,$$
$$n\downarrow m\downarrow k\downarrow j = r_j$$

для любой перестановки (j, k, m, n) от $(0, 1, 2, 3)$.

Носитель $1\downarrow 2\uparrow 3\uparrow 0$ состоит из двух элементарных носителей:

$$\{x: x_2 - x_0 \in \bar{V}^+, \quad x_3 - x_0 \in \bar{V}^+, \quad x_2 - x_1 \in \bar{V}^+\},$$

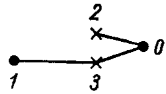
соответствующего дереву



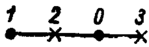
и

$$\{x : x_2 - x_0 \in \overline{V}^+, \quad x_3 - x_0 \in \overline{V}^+, \quad x_3 - x_1 \in \overline{V}^+\},$$

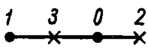
соответствующего дереву



Дуальным объединением этих двух конусов является пересечение дуальных конусов. Внутренностями последних являются соответственно

для 

$:\{q : q_1 \in V^-, \quad q_1 + q_2 \in V^+, \quad q_3 \in V^+\}$

и для 

$:\{q : q_1 \in V^-, \quad q_2 \in V^+, \quad q_1 + q_3 \in V^+\}$.

Их пересечением является

$$\{q : q_1 \in V^-, \quad q_1 + q_2 \in V^+, \quad q_1 + q_3 \in V^+\} = \mathscr{V}_{01}^+,$$

так что

$$1 \downarrow 2 \uparrow 3 \uparrow 0 = a_{01}$$

и в более общем виде

$$k \downarrow m \uparrow n \uparrow j = a_{jk},$$

$$k \uparrow m \downarrow n \downarrow j = r_{jk}$$

для любой перестановки (j, k, m, n) чисел (0, 1, 2, 3).

Штейнмановские тождества порождаются соотношением

$$a_{jk} + a_{kj} = r_{mn} + r_{nm}$$

для любой перестановки (j, k, m, n) чисел (0, 1, 2, 3).

§ 2. Примитивная область аналитичности

Как было отмечено в гл. 1 (это также непосредственное следствие теоремы 2.8 в гл. 2, § 4, 5), каждая о. з. ф. r^S является (в импульсном пространстве) граничным значением функции H'^S — преобразования Лапласа от $\tilde{r}^S$, голоморфной в $\mathscr{T}^S$. Здесь эти функции будут обозначаться $H_j'^{+}$, H_j , $H_{jk}'^{+}$, $H_{jk}'^{-}$. Они голоморфны в $R^{12}+\mathcal{V}_j^-$, $R^{12}+\mathcal{V}_{jk}^+$, $\widetilde{R}^{12}+\mathcal{V}_{jk}^-$ соответственно и имеют граничными значениями a_j, r_j, a_{jk}, r_{jk} соответственно.

Первые следствия штейнмановских тождеств

Полезно несколько модифицировать доказательство теоремы 2.8, данное в гл. 2, § 4. Рассмотрим штейнмановский квартет a_{01}, a_{10}, r_{23}, r_{32}. Элементарными носителями, соответствующими этим о. з. ф., являются множества:

$$\widehat{K}_1=\{\xi: x_2-x_0\in\overline{V}^+,\quad x_2-x_1\in\overline{V}^+,\quad x_3-x_0\in\overline{V}^+\},$$

соответствующее дереву $\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{2}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{3}{\times}$

$$\widehat{K}_2=\{\xi: x_2-x_1\in\overline{V}^+,\quad x_2-x_0\in\overline{V}^+,\quad x_3-x_1\in\overline{V}^+\},$$

соответствующее дереву $\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{3}{\times}$

$$\widehat{K}_3=\{\xi: x_3-x_1\in\overline{V}^+,\quad x_3-x_0\in\overline{V}^+,\quad x_2-x_1\in\overline{V}^+\},$$

соответствующее дереву $\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{3}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{2}{\times}$

$$\widehat{K}_4=\{\xi: x_3-x_0\in\overline{V}^+,\quad x_3-x_1\in\overline{V}^+,\quad x_2-x_0\in\overline{V}^+\},$$

соответствующее дереву $\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{2}{\times}$

Пересечением любых двух разлнчных $\widehat{K}_j$ является

$$\Xi_{01}^*=\{\xi: x_2-x_0\in\overline{V}^+,\ x_3-x_0\in\overline{V}^+,\ x_2-x_1\in\overline{V}^+,\ x_3-x_1\in\overline{V}^+\}.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{supp}\tilde{a}_{01}\subset\widehat{K}_1\cup\widehat{K}_4,\quad \operatorname{supp}\tilde{a}_{10}\subset\widehat{K}_2\cup\widehat{K}_3\\ &\operatorname{supp}\tilde{r}_{23}\subset\widehat{K}_1\cup\widehat{K}_2,\quad \operatorname{supp}\tilde{r}_{32}\subset\widehat{K}_3\cup\widehat{K}_4\end{aligned}\right\}. \qquad (3.1)$$

Внутренностями дуальными к элементам носителям являются

$$\widehat{K}_1^{*0} = \{q: q_1 \in V^-, \quad q_1 + q_2 \in V^+, \quad q_3 \in V^+\},$$

$$\widehat{K}_2^{*0} = \{q: q_0 \in V^-, \quad q_1 + q_3 \in V^-, \quad q_3 \in V^+\},$$

$$\widehat{K}_3^{*0} = \{q: q_0 \in V^-, \quad q_1 + q_2 \in V^-, \quad q_2 \in V^+\},$$

$$\widehat{K}_4^{*0} = \{q: q_1 \in V^-, \quad q_1 + q_3 \in V^+, \quad q_2 \in V^+\}.$$

Ситуация представлена символически на рис. 5. Конусы $\widehat{K}_j^{*0}$ $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ содержатся в $B = \{q: q_1 \in V^-, q_2 \in V^+, q_3(-V^+)\}$. Поэтому $\widehat{K}_j$ содержит B^* $(j=1, 2, 3, 4)$:

$$B^* = \{\xi: x_0 - x_1 \in \overline{V}^+, \quad x_2 - x_0 \in \overline{V}^+, \quad x_3 - x_0 \in \overline{V}^+\}.$$

Пусть $u \to G_r(u)$ — функция вещественного четырехмерного вектора вида

$$G_r(u) = \frac{1}{8\pi(4^r)\, r!\, (r+1)!} \theta(u^0)\, \theta((u, u))\, (u, u)^r,$$

где $[(u, u)$ — лоренцев квадрат от $u)]$; $r \geqslant 0$ — целое число. Легко проверить, что соотношения

$$\Box_u G_r(u) = G_{r-1}(u) \quad \text{для} \quad r \geqslant 1,$$

$$\Box_u G_0(u) = D_R(u),$$

$$\Box_u^2 G_0(u) = \delta(u)$$

справедливы в смысле соотношений обобщенных функций. Положим теперь

$$F_r(\xi) = G_r(x_0 - x_1)\, G_r(x_2 - x_0)\, G_r(x_3 - x_0).$$

При помощи рассуждений, по существу тождественных с рассуждениями в гл. 2, § 4, легко показать, что существует целое число $N \geqslant 0$, такое, что для каждой обобщенной функции r^S из указанного квартета $\tilde{r}^S * F_N(\xi)$ является непрерывной функцией полиномиального роста с носителем в supp $\tilde{r}^S + B^*$.

Поскольку каждое $\widehat{K}_j (1 \leqslant j \leqslant 4)$ — замкнутый выпуклый конус, содержащий B^*, то $\widehat{K}_j + B^* = \widehat{K}_j$, так что уравнения (3.1) остаются в силе, если мы заменим supp $\tilde{r}^S$ на supp $\tilde{r}^S * F_N$ для каждой из четырех о. з. ф.

Более того, $\tilde{r}^S * F_N$ имеет такие же свойства ковариантности относительно однородной группы Лоренца, что и $\tilde{r}^S$, и

$$\tilde{r}^S(\xi) = (\Box_1 \Box_2 \Box_3)^{N+2}\, \tilde{r} * F_N(\xi)$$

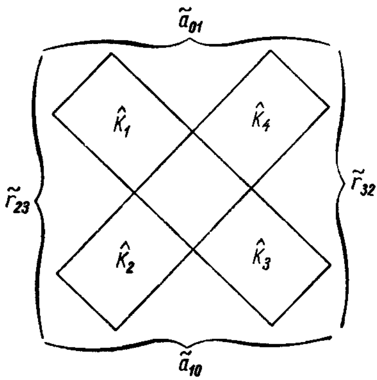
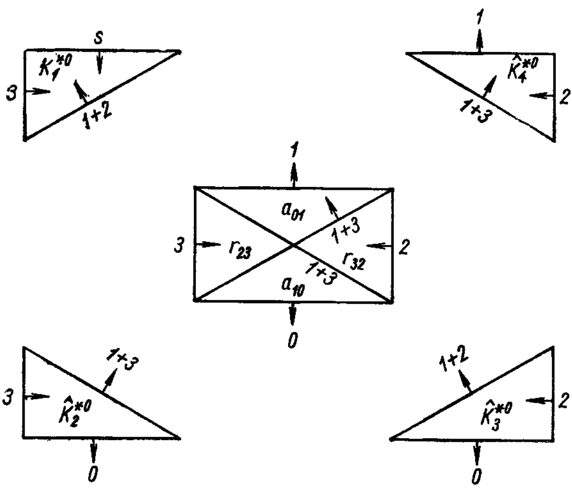


Рис. 5. Символическое представление ячеек в импульсном пространстве.



в смысле уравнения обобщенных функций. Наконец, четыре свертки, получаемые из данного квартета о. з. ф., удовлетворяют штейнмановскому тождеству

$$\tilde{a}_{01} * F_N(\xi) + \tilde{a}_{10} * F_N(\xi) = r_{23} * F_N(\xi) + \tilde{r}_{32} * F_N(\xi).$$

Уравнения (3.1) или рис. 5 подсказывают, что штейнмановские тождества могут быть «решены», если написать

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}_{01} * F_N = \tilde{\varphi}_1' + \tilde{\varphi}_4'; \quad \tilde{a}_{10} * F_N = \tilde{\varphi}_2' + \tilde{\varphi}_3'; \\ \tilde{r}_{23} * F_N = \tilde{\varphi}_1' + \tilde{\varphi}_2'; \quad \tilde{r}_{32} * F_N = \tilde{\varphi}_3' + \tilde{\varphi}_4',\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

где $\tilde{\varphi}_j'$ — кусочнонепрерывная функция полиномиального роста с носителем в $\hat{K}_j$ для каждого $j=1, 2, 3, 4$. Это действительно можно сделать несколькими способами. Мы будем исходить из того, что доопределим $\tilde{\varphi}'_j$ равной нулю вне $\hat{K}_j$. Тогда тривиально проверить уравнения (3.2) вне $\hat{K}_1 \cup \hat{K}_2 \cup \hat{K}_3 \cup \hat{K}_4$. Если мы рассмотрим теперь $\hat{K}_1 \cap C\,(\hat{K}_2 \cup \hat{K}_3 \cup K_4)$, то из уравнений (3.2) следует, что на этом множестве

$$\tilde{\varphi}_1'(\xi) = \tilde{a}_{01} * F_N(\xi) = \tilde{r}_{23} * F_N(\xi)$$

в силу штейнмановского тождества. Наконец, в области $\hat{\mathcal{Y}}_1 \cap \hat{K}_2 \cap \hat{K}_3 \cap \hat{K}_4$ мы можем выбрать $\tilde{\varphi}'_1(\xi)$ произвольно. Если в этой области для определенности положить $\tilde{\varphi}'_1(\xi) = \tilde{a}_{01} * F_N(\xi)$, то получим

$$\tilde{\varphi}_4' = \tilde{a}_{01} * F_N - \tilde{\varphi}_1', \quad \tilde{\varphi}_2' = \tilde{r}_{23} * F_N - \tilde{\varphi}_1',$$

$$\tilde{\varphi}_3' = \tilde{a}_{10} * F_N - \tilde{r}_{23} * F_N + \tilde{\varphi}_1',$$

$$\tilde{\varphi}_3' = \tilde{r}_{32} * F_N - \tilde{a}_{01} * F_N + \tilde{\varphi}_1'.$$

Вследствие штейнмановского тождества эти уравнения самосогласованы. Более того, мы можем выбрать функции $\tilde{\varphi}'_j$ так, чтобы они обладали такими же свойствами ковариантности, что и функции $\tilde{r}^S * F_N$, т. е. такими же свойствами ковариантности, что и $\tilde{r}^S$ (мы можем, например, определить

$$\tilde{\varphi}_1' = \theta\left(x_2^0 - x_1^0\right) \theta\left((x_2 - x_1)^2\right) \tilde{a}_{01} * F_N$$

и пользоваться предыдущими уравнениями для того, чтобы вычислить другие $\tilde{\varphi}_j'$). Обозначая

$$(\Box_1 \Box_2 \Box_3)^{N+2} \tilde{\varphi}_j' = \tilde{\varphi}_j$$

(в смысле обобщенных функций),

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}_{01} &= \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_4, & \tilde{a}_{10} &= \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3,\\ \tilde{r}_{23} &= \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2, & \tilde{r}_{32} &= \tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_4.\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Функции $\tilde{\varphi}_j$ представляют собой обобщенные функции с носителями в соответствующих множествах $\widehat{K}_j$ и с такими же свойствами ковариантности, что и функции $\tilde{r}^S$. Пользуясь тем, что они являются производными от кусочнонепрерывных функций с теми же носителями, легко увидеть, как в гл. 2, § 4, что для каждого $j(1 \leqslant j \leqslant 4)$ преобразование Лапласа Φ'_j от φ_j голоморфно в трубе $R^{12} + iK_j^{*0}$. Обозначим φ_j преобразование Фурье от $\tilde{\varphi}_j$ (граничное значение Φ'_j) и

$$\Phi_j(k) = \left[\prod_{r=0}^{3} (k_r^2 - m_r^2)\,\Phi'_j(k)\right];$$

$$\hat{\varphi}_j(p) = \left[\prod_{r=0}^{3} (p_r^2 - m_r^2)\,\varphi_j(p)\right];$$

$$H_{jk}^{\pm}(k) = \left[\prod_{r=0}^{3} (k^2 - m^2)\,H_{jk}'^{\pm}(k)\right]$$

(см. гл. 1, § 1). Имеем

$$H_{01}'^{+} = \Phi'_1 + \Phi'_4, \quad H_{10}'^{+} = \Phi'_2 + \Phi'_3,$$

$$H_{23}'^{-} = \Phi'_1 + \Phi'_2, \quad H_{32}'^{-} = \Phi'_3 + \Phi'_4$$

и аналогичные уравнения для функций $H_{jk}^{\pm}$ через Φ_1.

Соотношения совпадения

$$a_{01}(p) = r_{32}(p) \quad \text{для} \quad (p_1 + p_2)^2 < M_{12}^2,$$

$$a_{01}(p) = r_{23}(p) \quad \text{для} \quad (p_1 + p_3)^2 < M_{13}^2$$

и уравнения (3.3) означают

$$\varphi_1(p) = \varphi_3(p) \quad \text{для} \quad (p_1 + p_2)^2 < M_{12}^2, \tag{3.4}$$

$$\varphi_4(p) = \varphi_2(p) \quad \text{для} \quad (p_1 + p_3)^2 < M_{13}^2. \tag{3.5}$$

Аналогичные соотношения справедливы для $\hat{\varphi}_j$.

Применение теоремы об острие клина

В настоящем разделе мы покажем, что все функции H являются ветвями одной и той же аналитической функции $H(k)$. Доказательство будет дано для

$(n+1)$-точечной функции (обозначения были введены в § 1, гл. 1).

Пусть S' и S'' — две соседние ячейки в Ξ_{n+1} с общей поверхностью на гиперплоскости $\{s : s_x=0\}$. Обозначим $\mathcal{R}_x$ вещественное открытое множество, определяемое в импульсном пространстве следующим образом:

$$\mathcal{R}_x = \{p : p_x^2 < M_x^2\} .$$

Применяя теорему об острие клиипа (см. лемму 2.3 и теорему 2.6) к функциям $H^{S'}$ и $H^{S''}$ (граничные значения $\widehat{r}^{S'}$ и $\widehat{r}^{S''}$ которых совпадают друг с другом в $\mathcal{R}_x$), иайдем, что для каждой точки $p \in \mathcal{R}_x$ существует открытое множество

$$A(p) = \{k' = p' + \mathrm{i}q' : \| p' - p \| < \rho(p),$$

$$\| q' \| < \rho(p), \quad q' \in \mathcal{V}^{S'} + \mathcal{V}^{S''}\}$$

и голоморфная в $A(p)$ функция, которая совпадает с $H^{S'}$ (соответственно $H^{S''}$) в $A(p) \cap \mathcal{T}^{S'}$ (соответственно в $A(p) \cap \mathcal{T}^{S''}$). Здесь $\rho(p)$ — положительное число, такое, что

$$\{p' : \| p' - p \| < \rho(p)\} \subset \mathcal{R}_x.$$

Для каждого $\sigma (0 < \sigma \leqslant 1)$ и каждого $\Lambda \in L$ (L — вещественная однородная группа Лоренца с отражеииями) функции $k \to H^{S'}(\sigma \Lambda k)$ и $k \to H^{S''}(\sigma \Lambda k)$ голоморфны в $\mathcal{T}^{S'}$ и $\mathcal{T}^{S''}$ и имеют равные граничные значения на множестве $\sigma^{-1}\Lambda^{-1}\mathcal{R}_x$, содержащем $\mathcal{R}_x$. Поэтому они обладают аналитическим продолжением в $A(p)$. Отсюда следует, что исходные функции $H^{S'}$ и $H^{S''}$ обладают аналитическим продолжением в $\sigma \Lambda A(p)$.

Пересечения множеств $\sigma \Lambda A(p)$ и $\sigma' \Lambda' A(p')$, когда они непусты, имеют вид

$$\{k'' = p'' + \mathrm{i}q'' : \| \Lambda^{-1}(p'' - p) \| < \sigma\rho(p),$$

$$\| \Lambda'^{-1}(p'' - p') \| < \sigma'\rho(p'), \quad \| \Lambda^{-1}(q'' - q) \| < \sigma\rho(p),$$

$$\| \Lambda'^{-1}(q'' - q') \| < \sigma'\rho(p'), \quad q'' \in \mathcal{V}^{S'} + \mathcal{V}^{S''}\}.$$

Оно выпукло, поэтому связно, и содержит точки $\mathcal{T}^{S'} \cup \cup \mathcal{T}^{S''}$, так что продолжения функции $H^{S'}$ в $\sigma \Lambda A(p)$ и $\sigma' \Lambda' A'(p')$ согласуются в их пересечениях. Таким образом (см. гл. 2, § 1), существует функция, голоморфная в области

$$B(S', S'') = \bigcup_{\substack{0<\sigma<1 \\ \Lambda\in L \\ p\in\mathcal{R}_x}} \sigma\Lambda A(p),$$

которая совпадает с $H^{S'}$ (соответственно $S^{S''}$) в $B(S', S'') \bigcap \mathcal{T}^{S'}$ (соответственно в $B(S', S'') \bigcap \mathcal{T}^{S''}$). Множество $B(S', S'')$ является областью, инвариантной относительно вещественной группы Лоренца и звездообразной относительно точки 0.

Легко увидеть при помощи того же метода, что существует область B, инвариантная относительно L, звездообразная относительно 0, содержащая 0 и все вещественные точки в

$$\mathcal{R} = \bigcap_x \mathcal{R}_x,$$

и функция, голоморфная в B и совпадающая с H^S в $B \bigcap \mathcal{T}^S$ для каждой S.

Из гл. 2, § 3, следует, что $B \bigcap B(S', S'')$ связно. Оно содержит точки из $\mathcal{T}^{S'}$. Поэтому существует однозначное продолжение функции $H^{S'}$ в $B \bigcup B(S', S'')$. Продолжая эту процедуру шаг за шагом, мы увидим, что существует функция H, голоморфная в

$$\Delta = B \bigcup \left\{ \bigcup_{S',\, S'' \text{ смежные}} B(S', S'') \bigcup \left\{ \bigcup_S \mathcal{T}^S \right\} \right\},$$

которая совпадает с H^S в $\mathcal{T}^S$ для каждой S. Δ — лоренц-инвариантная звездообразная (относительно 0) область, содержащая 0. Δ назовем примитивной областью аналитичности $(n+1)$-точечной функции.

Первые следствия

Применяя теорему из § 4, гл. 2, мы видим, что Δ обладает оболочкой голоморфности $\mathcal{H}(\Delta)$, которая является областью в C^{4n} (для случая $(n+1)$-точечной функции) со следующими свойствами:

1. $\mathcal{H}(\Delta)$ звездообразна относительно 0;

2. $\mathcal{H}(\Delta)$ инвариантна относительно вещественной группы Лоренца L.

Применим теперь следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть D — область в C^{4n}, инвариантная относительно $L_+^\uparrow$ и такая, что для каждой «времяподобной подгруппы» группы $L_+^\uparrow$, $\xi \to \chi_M(\xi)$, существует непустое открытое множество W_M области D, инвариантное относительно соответствующей комплексной подгруппы $\zeta \to \chi_M(\zeta)$ $(\zeta \in C)$. Пусть f — голоморфная в D функция. Тогда существует функция $F(\Lambda, z)$, голоморфная в $L_+(C) \times D$, такая, что $F(\Lambda, z) = f(\Lambda z)$ в окрестности $L_+^\uparrow \times D$.

Здесь $L_+(C)$ — комплексная связная группа Лоренца. «Времяподобной подгруппой» группы $L_+^\uparrow$ является однопараметрическая подгруппа вида

$$\chi_M(\xi) = \exp \xi M,$$

$M = e_0 \wedge e_1$, причем e_0 и e_1 — два вещественных четырехмерных вектора, таких, что $(e_0, e_0) = 1$, $(e_1, e_1) = -1$, $(e_1, e_0) = 0$.

Эта теорема представляет собой некоторое обобщение теоремы Глазера и Стритера (см. [38—40]), которая может быть расширена на случай весьма общих комплексных групп Ли. Семейство времяподобных подгрупп может быть заменено любым семейством однопараметрических подгрупп, генераторами которых являются операторы полного множества в алгебре группы Ли.

Для того чтобы доказать, что теорема применима к имеющейся ситуации, мы должны проверить существование W_M для каждого $M = e_0 \wedge e_1$. Для этой цели мы выбираем лоренцевы координаты так, чтобы $e_0 = (1, 0, 0, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, 0)$. Если мы пользуемся переменными

$$u_j = k_j^0 + k_j^1; \quad v_j = k_j^0 - k_j^1; \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

то $k' = (\exp \zeta M) k$ будет таким, что

$$u_j' = e^{\zeta} u_j; \quad v_j' = e^{-\zeta} v_j; \quad k_j'^2 = k_j^2; \quad k_j'^3 = k_j^3.$$

Рассмотрим, в частности, вещественную точку p, для которой

$$u_j > 0, \quad v_j < 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Тогда $p' = (\exp i\theta M)p$ будет таким, что

$$u'_j = u_j e^{i\theta}, \quad v'_j = -|v_j| e^{-i\theta} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

и будет содержаться в $\pm\mathcal{T}^{S_0}$ при $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ (напомним, что $\mathcal{T}^{S_0} = \{k = p + iq : q_j \in V^+,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$). При $\theta = \pm\pi$ мы имеем $p_I'^2 < 0$ для всех $I \subset \{0, ..., n\}$, так что $p' \in \Delta$. Таким образом, компактное множество

$$\bigcup_{0 < \theta < 2\pi} (\exp i\,\theta M)\,p$$

содержится в Δ. Поэтому можно найти действительное $r > 0$, такое, что множество

$$\bigcup_{0 < \theta < 2\pi} (\exp i\,\theta M)\,\{k' : \|k' - p\| < r\}$$

также содержится в Δ. Наконец, так как $L\Delta \subset L$, то и множество

$$W_M = \bigcup_{\zeta \in C} (\exp \zeta M)\,\{k' : \|k' - p\| < r\}$$

содержится в Δ.

Теорема 3.1 и тот факт, что $\mathcal{H}$ должна быть простой, означают, что $\mathcal{H}$ инвариантна относительно комплексной группы Лоренца $L_+(C)$ и даже относительно $L(C)$, так как Δ инвариантна относительно отражений. Класс голоморфных в Δ функций, порожденных множеством функций, удовлетворяющих штейнмановским тождествам, имеет оболочку голоморфности $\mathcal{H}_s(\Delta)$, строго бо́льшую, чем $\mathcal{H}(\Delta)$. Однако при помощи рассуждений, аналогичных рассуждениям, приведенным относительно $\mathcal{H}(\Delta)$, можно убедиться в том, что $\mathcal{H}_s(\Delta)$ является областью в C^{4n}, инвариантной относительно $L(C)$, звездообразной относительно 0 и содержащей 0.

Проблема нахождения $\mathcal{H}_s(\Delta)$ или $\mathcal{H}(\Delta)$ называется линейной программой, так как не используется условие унитарности. Приведенные рассуждения показывают, что линейная программа никогда не приводит к нескольким римановым листам: они являются типичными результатами использования условия унитарности. Некоторые результаты, полученные до сих пор в линейной программе, можно найти в работах [2, 3, 41—51] и т. д. Изложенные в настоящей главе свойства четырехточечной функции взяты почти полностью из работ [52, 53].

Из общих свойств $\mathscr{H}(\Delta)$ отметим то свойство, что $\mathscr{H}(\Delta)$ не пересекается с «разрезами» Γ_x, определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_x = \{k : k_x^2 \in M_x^2 + R^+\} =$$
$$= \{k : k_x^2 = M_x^2 + \rho,\ \rho \geqslant 0\} = \Gamma_{CX}$$

для каждого непустого $X \subset \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ с непустым дополнением. Действительно, для каждого $\rho \geqslant 0$ функция $k_x^2 - M_x^2 - \rho$ не обращается в нуль в Δ и не может обращаться в нуль в $\mathscr{H}(\Delta)$. То же самое справедливо и для $\mathscr{H}_s(\Delta)$ (функция $k_x^2 - M_x^2 - \rho)^{-1}$ голоморфна в Δ и удовлетворяет штейнмановским тождествам.

Многообразие $\{k : k_j^2 = m_j^2\}$ (для фиксированного j) не пересекается ни с одной из труб $\mathscr{T}^S$ (оно не пересекается с Δ); массовая оболочка $\{k : k_j^2 = m_j^2,\ 0 \leqslant j \leqslant n\}$ не пересекается с Δ. Мы увидим, что она пересекается и с $\mathscr{H}(\Delta)$. Ограничение функции $H(k)$ на массовую оболочку дает аналитическне продолження амплитуд реакций (элементы S-матрицы). Поэтому желательно знать пересечение $\mathscr{H}(\Delta)$ или $\mathscr{H}_s(\Delta)$ с массовой оболочкой.

§ 3. Две леммы об аналитическом расширении

Мы возвращаемся к случаю четырехточечиой функции и применяем следующие леммы.

Лемма 3.1. Пусть f — функция, голоморфная в области

$$\{R^{12} + i\mathscr{V}_0^+\} \cup \{R^{12} + i\mathscr{V}_{01}^+\} \cup [\mathfrak{N}(\mathscr{R}_1) \cap \{R^{12} +$$
$$+ i\mathscr{V}_0^+ + i\mathscr{V}_{01}^+\}],$$

где $\mathfrak{N}(\mathscr{R}_1)$ — открытая связная (комплексная) окрестность вещественных точек в $\mathscr{R}_1 \mathscr{R}_1 = \{p : p_1^2 < M_1^2\}$. Существует функция, голоморфная в области

$$\{R^{12} + i\mathscr{V}_0^+ + i\mathscr{V}_{01}^+\} \cup C\Gamma_1 =$$
$$= \{k = p + iq : q \in \mathscr{V}_0^+ + \mathscr{V}_{01}^+,\ k_1^2 \notin M_1^2 + R^+\},$$

которая совпадает с f в $R^{12} + i\mathscr{V}_{01}^+$.

Выпуклая оболочка $\mathcal{V}_0^+ + \mathcal{V}_{01}^+$ множества $\mathcal{V}_0^+ \cup \mathcal{V}_{10}^+$ задается следующим параметрическим представлением:

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 - Q_0, \\ q_2 = Q_2 + Q_0, \ Q_j \in V^+ (0 \leqslant j \leqslant 3), \\ q_3 = Q_3 + Q_0. \end{cases}$$

Лемма 3.2. Пусть f — функция, голоморфная в области

$$\{R^{12} + \mathrm{i}\,\mathcal{V}_{01}^+\} \cup \{R^{12} + \mathrm{i}\,\mathcal{V}_{32}^-\} \cup (\mathfrak{N}(R_{12}) \cap \{R^{12} + \mathrm{i}\mathcal{V}_{01}^+ + \mathrm{i}\,\mathcal{V}_{32}^-\}),$$

где $\mathfrak{N}(\mathcal{R}_{12})$ — комплексная связная открытая окрестность вещественных точек в $\mathcal{R}_{12} = \{p : (p_1 + p_2)^2 < M_{12}^2\}$. Тогда существует функция g, голоморфная в области

$$\{R^{12} + \mathrm{i}\,\mathcal{V}_{01}^+ + \mathrm{i}\mathcal{V}_{32}^-\} \cap C\Gamma_{12} =$$
$$= \{k = p + \mathrm{i}q : q \in \mathcal{V}_{01}^+ + \mathcal{V}_{32}^-, \ (k_1 + k_2)^2 \notin M_{12}^2 + R^{12}\}.$$

Выпуклой оболочкой $\mathcal{V}_{01}^+ + \mathcal{V}_{32}^-$ множества $\mathcal{V}_{01}^+ \cup \mathcal{V}_{32}^-$ является

$$K_4^{*0} \{q : q_1 \in \mathcal{V}^-, \ q_2 \in \mathcal{V}^+, \ q_1 + q_3 \in \mathcal{V}^+\}.$$

Доказательства лемм 3.1 и 3.2 могут быть найдены в работе [52], поэтому здесь не приводятся. Из этих двух лемм мы заключаем, что если S' и S'' являются двумя соседними ячейками с общей поверхностью в $\{s : s_x = 0\}$, то $\mathcal{H}(\Delta)$ содержит $\{\mathcal{T}^{S'} + \mathcal{T}^{S''}\} \cap C\,\Gamma_x$ — выпуклую оболочку объединения двух труб $\mathcal{T}^{S'}$ и $\mathcal{T}^{S''}$, за исключением точек разреза $\Gamma_x = \{k : k_x^2 = M_x^2 + \rho, \ \rho \geqslant 0\}$. Это заключение справедливо также в случае n-точечной функции.

Мы можем также пользоваться леммой 3.1 и результатами гл. 3, § 2, для того, чтобы найти подобласти $\mathcal{H}_s(\Delta)$. Функции Φ_1 и Φ_3 голоморфны в

$$R_{12} + K_1^{*0} = \{k = p + \mathrm{i}q : q_1 \in V^-, \ q_3 \in V^+, \ q_1 + q_2 \in V^-\},$$

$$R_{12} + K_3^{*0} = \{k = p + \mathrm{i}q : q_0 \in V^-, \ q_2 \in V^+, \ q_1 + q_2 \in V^-\}$$

соответственно и обладают граничными значениями, которые совпадают друг с другом при $(p_1 + p_2)^2 < M_{12}^2$.

Вводя переменные $k_1' = k_1 + k_2$, $k_2' = -k_1$, $k_3' = k_3$, мы находим, что

$$k \in R^{12} + K_1^{*0} \rightleftarrows k' \in R^{12} + \mathscr{V}_0^+;$$

$$k \in R^{12} + K_3^{*0} \rightleftarrows k' \in R^{12} + \mathscr{V}_{01}^+;$$

$$q = 0,\ (p_1 + p_2)^2 < M_{12}^2 \rightleftarrows q' = 0,\ k_1'^2 < M_{12}^2.$$

Применяя лемму 3.1 и возвращаясь к исходным переменным, мы находим, что Φ_1 и Φ_2 имеют общее аналитическое продолжение в

$$\{R^{12} + \Theta_{10}\} \cap C\Gamma_{12},\ \Theta_{10} = K_1^{*0} + K_3^{*0} = K_2^{*0} + K_4^{*0}.$$

Θ_{10} имеет следующее параметрическое представление:

$$q_0 = -(Q_1 + Q_3),$$

$$q_1 = -(Q_0 + Q_2),\ Q_j \in V^+,\ 0 \leqslant j \leqslant 3,$$

$$q_2 = Q_1 + Q_2,$$

$$q_3 = Q_0 + Q_3.$$

Аналогично Φ_2 и Φ_4 имеет аналитическое продолжение в $\{R^{12} + \mathrm{i}\,\Theta_{10}\} \cap C\,\Gamma_{13}$. Поэтому функции H_{01}^+, H_{10}^+, H_{23}^-, H_{32}^- (каждая из них является суммой двух функций Φ_j) имеют общее аналитическое продолжение в $\{R^{12} + \mathrm{i}\,\Theta_{10}\} \cap \cap \{C\,\Gamma_{12} \cup C\,\Gamma_{13}\}$. Аналогичные результаты справедливы, очевидно, для каждого из шести штейнмановских квартетов.

§ 4. Аналитичность вблизи физических точек

Покажем, пользуясь результатами гл. 2, § 3, что $\mathscr{H}(\Delta)$ содержит разрезанные окрестности всех вещественных физических точек [т. е. $\mathscr{H}(\Delta)$ содержит все комплексные точки в малом шаре вокруг вещественной физической точки, за исключением точек, принадлежащих разрезу Γ_{jk}].

Пусть $\hat{p}$ — вещественная точка $\hat{p} = \{\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$, удовлетворяющая следующим неравенствам:

$$\hat{p}_j^2 < M_j^2 (0 \leqslant j \leqslant 3);\ (\hat{p}_1 + \hat{p}_3)^2 < M_{13}^2;\ (\hat{p}_1 + \hat{p}_0)^2 < M_0^2.$$

Если $(\hat{p}_1+\hat{p}_2)<M_{12}^2$, то $\hat{p}$ принадлежит $\mathscr{R}$, т. е. Δ. Пусть $(\hat{p}_1+\hat{p}_2)^2 \geqslant M_{12}^2$ и $\hat{p}_1+\hat{p}_2 \in V^+$. Точка $\hat{p}$ тогда принадлежит $\mathscr{R}_0 \cap \mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2 \cap \mathscr{R}_3 \cap \mathscr{R}_{13} \cap \mathscr{R}_{10}$, где в частности, граничные значения функции $H(k)$, рассматриваемые как пределы из труб $\mathscr{V}_{01}^+$ и $\mathscr{V}_{32}^+$ (соответственно $\mathscr{V}_{01}^-$ и $\mathscr{V}_{32}^-$), совпадают друг с другом. В силу теоремы об острие клина (теорема 2.6 в гл. 2, § 4) существует число $\rho(\hat{p})>0$, такое, что

$$\{k=p+iq : \|p-\hat{p}\|<\rho(\hat{p});\ \|q\|<\rho(\hat{p});$$
$$q \in \mathscr{V}_{01}^+ + \mathscr{V}_{32}^+\} \subset \mathscr{H}(\Delta),$$

$$\{k=p+iq : \|p-\hat{p}\|<\rho(\hat{p});\ \|q\|<\rho(\hat{p});$$
$$q \in \mathscr{V}_{01}^- + \mathscr{V}_{32}^-\} \subset \mathscr{H}(\Delta).$$

Легко проверить, что

$$\mathscr{V}_{01}^+ + \mathscr{V}_{32}^+ = \{q : q_1+q_2 \in V^+\} = -(\mathscr{V}_{01}^- + \mathscr{V}_{32}^-)$$

(Замечание: характерной особенностью различных конусов, возникающих в нашей задаче, является то, что для любых двух из этих конусов, например $\mathscr{V}'$ и $\mathscr{V}''$, существует число $\alpha>0$, такое, что

$$\operatorname{conv}[\{q : \|q\|<b\} \cap \{\mathscr{V}'\mathscr{V}''\}]$$

содержит

$$\{q : \|q\|<\alpha b\} \cap \{V'+V''\}.)$$

С другой стороны, из результатов § 3, гл. 3, следует, что существует число $a>0$ (зависящее от $\hat{p}$), такое, что

$$\{k=p+iq : \|p-\hat{p}\|<a;\ \|q\|<a;\ q \in \mathscr{V}_{01}^+ + \mathscr{V}_{32}^-;$$
$$\operatorname{Im}(k_1+k_2)^2 \neq 0\} \subset \mathscr{H}(\Delta);$$

$$\{k=p+iq : \|p-\hat{p}\|<a;\ \|q\|<a;\ q \in \mathscr{V}_{01}^- + \mathscr{V}_{32}^+;$$
$$\operatorname{Im}(k_1+k_2)^2 \neq 0\} \subset \mathscr{H}(\Delta).$$

Каждое из этих двух множеств является объединением двух непересекающихся областей, отделяющихся разрезом Γ_{12} (который задается локально уравнением

$\operatorname{Im}(k_1+k_2)^2=0$). Точки k первого множества, для которого $q\in\mathcal{V}_{01}^{+}$ (соответственно $q\in\mathcal{V}_{32}^{-}$), будут такими, что $q_1+q_2\in\mathcal{V}_{01}^{+}$ (соответственно $q_1+q_2\in V^{-}$), а так как p_1+ $+p_2\in V^{+}$ (для достаточно малого a), то они удовлетворяют условию

$$\operatorname{Im}(k_1+k_2)^2=2(p_1+p_2)(q_1+q_2)>0$$

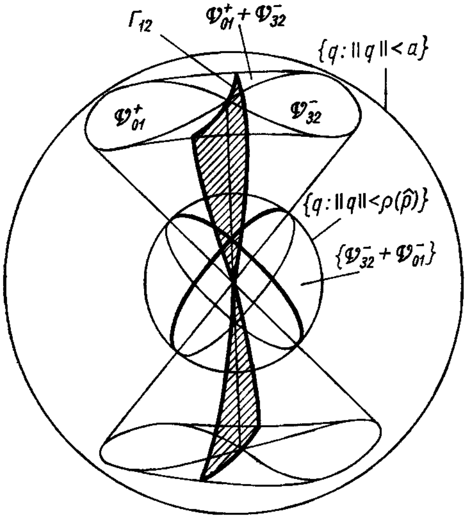


Рис. 6. Множества $\mathcal{V}_{ij}^{\pm}$.

(соответственно $\operatorname{Im}(k_1+k_2)^2<0$). Аналогичные результаты справедливы для второго множества. Ситуация изображена символически на рис. 6.

Произведем замену переменных, чтобы «выпрямить» разрез Γ_{12}. Для этой цели выбираем новые координаты $z_1,\ldots,z_{12}$ так, чтобы:

1) отображение τ из комплексного импульсного пространства в пространство переменных $z_1,\ldots,z_{12}$ преобразовало биголоморфно множество $\{k:\|p-\widehat{p}\|<a,$ $\|q\|<a\}$ на открытую окрестность начала координат

$$z_1=(k_1+k_2)^2;$$

2) отображение τ было вещественным, т. е. преобразовало две комплексно сопряженные точки в комплексно сопряженные точки.

Такое отображение существует, если a достаточно мало. Например, мы можем оставить все компоненты k_1, k_2, k_3, за исключением k_1^ν, как $z_2, \ldots, z_{12}$, и заменить k_1^0 на $(k_1+k_2)^2$.

Мы можем написать

$$\tau(k) = A(k - \hat{p}) + \sum_{\nu=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} (k_j^\nu - \hat{p}_j^\nu)\, \sigma_{j\nu}(k),$$

где $\sigma_{j\nu}(k)$ — голоморфные функции, равные нулю при $k=\hat{p}$, а A — вещественная несингулярная матрица 12×12. Пусть C — открытый выпуклый конус в вещественном импульсном пространстве и C_0 — другой открытый выпуклый конус, такой, что $\bar{C}_0 \cap C\{0\} \subset C$. Мы можем найти достаточно малое $b>0$, такое, что образ множества $\{k=p+iq,\ \|p-\hat{p}\|<a,\ \|q\|<a,\ q\in C\}$ содержит $\{z: \|\mathrm{Re}\, z\|<b,\ \|\mathrm{Im}\, z\|<b,\ \mathrm{Im}\, z \in AC_0$. Применяя это к конусам $\pm(\mathscr{V}_{01}^+ - \mathscr{V}_{32}^+)$ и $\pm(\mathscr{V}_{01}^+ + \mathscr{V}_{32}^-)$, мы можем найти $b>0$, такое, что образ множества

$$\mathscr{H}(\Delta) \cap \{k = p + iq : \|p - \hat{p}\| < a,\ \|q\| < a\}$$

содержит множества следующего вида:

1) $\{z : \|\mathrm{Re}\, z\| < b,\ \|\mathrm{Im}\, z\| < b,\ \mathrm{Im}\, z \in \pm C_1,\ \mathrm{Im}\, z_1 \neq 0\}$;

2) $\{z : \|\mathrm{Re}\, z\| < b,\ \|\mathrm{Im}\, z\| < c,\ \mathrm{Im}\, z \in \pm C_2\}$,

где C_1 — открытый выпуклый конус (произвольно), близкий к $\{A\mathscr{V}_{01}^+ + \mathscr{V}_{32}^-\}$, а C_2 — открытый выпуклый конус (произвольно), близкий к $A\mathscr{V}_{01}^+ + \mathscr{V}_{32}^-$, такие, что

$$\{z : \mathrm{Im}\, z_1 > 0,\ \mathrm{Im}\, z \in C_1\} \cap \{z : \mathrm{Im}\, z \in C_2\} \neq \Phi$$

и

$$\{z : \mathrm{Im}\, z_1 < 0,\ \mathrm{Im}\, z \in -C_1\} \cap \{z : \mathrm{Im}\, z \in C_2\} \neq \Phi.$$

Пользуясь геометрической формулой теоремы об острие клина (гл. 2, § 4, лемма 2.4 *), мы находим, что оболочка

* В действительности нам нужно некоторое обобщение леммы 2.4 в гл. 2, § 4, в котором вместо требования, чтобы C содержал C_1 и C_2, мы только требуем того, чтобы $C \cap C_1$ и $C \cap C_2$ были непустыми. Мы предлагаем читателю доказать это обобщение.

голоморфности объединения двух последних множеств содержит

$$\{z : \operatorname{Im} z_1 > 0,\ \|\operatorname{Re} z\| < d,\ \|\operatorname{Im} z\| < d\}$$

и

$$\{x : \operatorname{Im} z_1 < 0,\ \|\operatorname{Re} z\| < d,\ \|\operatorname{Im} z\| < d\},$$

где $0<d<b$. Поскольку отображение τ (локально) биголоморфно, то мы можем вернуться к исходным переменным и заключить, что существует число $r(\widehat{p})>0$, такое, что $\mathscr{H}(\Delta)$ содержит

$$\{k : \|p-\widehat{p}\| < r(\widehat{p});\ \|q\| < r(\widehat{p});\ \operatorname{Im}(k_1+k_2)^2 \neq 0\}.$$

Лемма 3.3. Для каждой вещественной точки $\widehat{p}$, такой, что

$$\widehat{p}_j^2 < M_j^2,\ (p_1+p_2)^2 < M_{13}^2,\ (p_1+p_0)^2 < M_{10}^2,$$

существует число $r(\widehat{p})>0$, такое, что $\mathscr{H}(\Delta)$ содержит открытое множество

$$\{k : \|p-\widehat{p}\| < r(\widehat{p}),\ \|q\| < r(\widehat{p}),\ k \notin \Gamma_{12}\}.$$

Существование числа $r(\widehat{p})$ со свойствами, указанными в лемме, фактически было доказано только для такой точки $\widehat{p}$, что $(\widehat{p}_1+\widehat{p}_2)^2 \neq M_{12}^2$. Чтобы завершить доказательство леммы, мы обращаемся к следующей теореме.

Теорема 3.1 (теорема о сильной непрерывности Бремермана). Пусть $t \to w(t)$ — непрерывная комплексная функция для $0 \leqslant t \leqslant 1$; пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ принадлежат C^{n-1}. Обозначим $\mathbf{z}(t)=\mathbf{a}+w(t)\mathbf{b}$. Пусть $D(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ обозначает область в C^1, зависящую непрерывно от t вблизи точки $t=0$ в следующем смысле: для каждого компакта $K \subset D(0)$ существует $\eta>0$, такое, что $K \subset D(t)$ для всех t в интервале $0 \leqslant t \leqslant \eta$. Пусть $\Delta(t)$ обозначает «диск» в C^n, определяемый условием

$$\Delta(t) = \{z=(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) = (\mathbf{z}, z_n) : \mathbf{z}=\mathbf{z}(t),$$

$$z_n \in D(t)\}.$$

Если область голоморфности Ω содержит $\Delta(t)$ для всех t, таких, что $0<t\leqslant 1$, и если Ω содержит одну точку области $\Delta(0)$, то Ω содержит $\Delta(0)$.

Доказательство (нетривиальное) этой теоремы можно найти в работах [23, 29, 39]. В случаях, которые мы будем рассматривать, можно пользоваться существенно более слабой формой теоремы, а именно следующей леммой.

Лемма 3.4. Пусть a и b принадлежат C^n и D — область в C^m и $\Delta(w)$ обозначает «диск» в C^{n+m}, определяемый следующим образом:

$$\Delta(w) = \{(z, \zeta) : z \in C^n;\ \zeta \in C^m;\ z = a + \\ + wb;\ \zeta \in D;\ w \in C\}.$$

Пусть Ω — область голоморфности, содержащая $\Delta(w)$ для всех w, лежащих в полукруге

$$\{w : \operatorname{Im} w > 0,\ |w| < \rho\}.$$

Если Ω содержит одну точку из $a=0$, то она содержит $\Delta(0)$.

Доказательство. Не теряя общность, можем положить $a=0$. Точку из $\Delta(0)$, содержащуюся в Ω по предположению, будем выбирать в качестве начала координат.

Докажем теорему прежде всего в случае, когда D — полидиск $\{\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_m) :\ |\zeta_j|<1\ (1\leqslant j\leqslant m)\}$. Тогда достаточно показать, что любая функция, голоморфная в области вида

$$\{w, \zeta : \operatorname{Im} w > 0,\ |w| < \sigma;\ |\zeta_j| < 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m\} \cup \\ \cup \{w, \zeta : |w| < \sigma;\ |\zeta_j| < \varepsilon,\ 1 \leqslant j \leqslant m\},$$

голоморфна в окрестности множества

$$\{w, \zeta : w = 0,\ |\zeta_j| < 1,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Введем переменные

$$w' = u' + \mathrm{i}v' = \lg \frac{\sigma + w}{\sigma - w},\ w = \sigma \operatorname{th} \frac{w'}{2},$$

$$\zeta'_j = \xi'_j + \mathrm{i}\eta'_j = -\mathrm{i} \lg \zeta_j,\ \zeta_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta'_1}\ (1 \leqslant j \leqslant m)$$

и определим

$$\varphi(w', \zeta') = f\left(\sigma \operatorname{th} \frac{w'}{2} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta'_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta'_m})\right).$$

Функция $\varphi(w', \zeta')$ голоморфна в трубе

$$\left\{w', \zeta' : 0 < v' < \frac{\pi}{2},\ \eta'_j < 0\,(1 \leqslant j \leqslant m)\right\} \cup$$
$$\cup \left\{w', \zeta' : -\frac{\pi}{2} < v' < \frac{\pi}{2},\ \eta'_j < \lg \varepsilon\,(1 \leqslant j \leqslant m)\right\}$$

и периодична: $\varphi(w', \zeta' + 2\pi r) = \varphi(w', \zeta')$ для любого $r \in Z^m$ (т. е. $r = (r_1, \ldots, r_m)$ с положительными или отрицательными r_j, $1 \leqslant j \leqslant m$). Функция φ имеет аналитическое продолжение в выпуклой оболочке B' этой трубы. Это продолжение периодично. Поэтому оно представляет собой голоморфную функцию

$$w = \sigma\, \mathrm{th}\frac{w'}{2} \quad \text{и} \quad \zeta\,(\zeta_i = e^{i\zeta'_i})$$

в образе B по последним переменным области B', которая продолжает $f(w, \zeta)$. Область B содержит $\{w, \zeta : 0 < |\zeta_j| < 1,\ w = 0\}$. С другой стороны, функция f уже аналитична в $\{w, \zeta : w = 0,\ |\zeta_j| < \varepsilon\}$, так что в силу теоремы о непрерывности она аналитична в $\{w, \zeta : w = 0,\ |\zeta_j| < 1\,(1 \leqslant j \leqslant m)\}$, что и требовалось доказать.

Для того чтобы доказать лемму для общей области D, мы можем покрывать D при помощи конечной цепи полидисков.

Лемма интересна тем, что, поскольку она основывается на теореме о выпуклом конусе и поэтому в принципе может быть доказана при помощи формулы Коши для компактного контура, она более пригодна для оценки проведения аналитического продолжения (на бесконечности или вблизи границ), чем теорема 3.3.

Теперь возвращаемся к доказательству леммы 3.1, которое мы завершили посредством применения следующей леммы.

Лемма 3.5. Пусть Ω — область в комплексном импульсном пространстве, такая, что для каждого вещественного t пересечение области Ω с $\{k : (k_1 + k_2)^2 = t\}$ либо пусто, либо связно. Пусть E — область голоморфности, содержащая $\Omega \cap \{k : \mathrm{Im}\,(k_1 + k_2)^2 \neq 0\}$. Допустим, что $E \cap \Omega$ содержит одну точку $\hat{k}$, для которой $(\hat{k}_1 + k_2)^2 = t \in R$. Тогда E содержит $\Omega \cap \{k : (k_1 + k_2)^2 = t\}$.

Доказательство. Случай $t \neq 0$: мы допустим сначала, что область Ω такая, что существуют функции $z_1, z_2, \ldots, z_{12}$, голоморфные в Ω, для которых $z_1 = (k_1 + k_2)^2 - t$ и

$k \to z = (z_1, \ldots, z_{12})$ биголоморфное отображение области Ω на полидиск

$$\{z : |z_j| < \rho, \ 1 \leqslant j \leqslant 12\},$$

причем образом $\hat{k}$ является 0. Теперь мы применяем лемму 3.2 с

$$\Delta(w) = \{z = (z_1, \ \ldots, \ z_{12}) : z_1 = w, \ |z_j| < \rho\}$$

и находим, что $E \cap \Omega$ содержит множество $\Omega \cap \{k : (k_1 + k_2)^2 = t\}$, которое является образом области $\Delta(0)$.

В общем случае каждая точка в $\Omega \cap \{k : (k_1 + k_2)^2 = t\}$ может быть связана с $\hat{k}$ через конечную цепь подобластей

$$\{\Omega^{(r)}\}_{1 < r \leqslant N}$$

области Ω, каждая из которых содержит точку $\hat{k}^{(r)}$, такую, что $(\hat{k}_1^{(r)} + \hat{k}_2^{(r)})^2 = t$ и что

а) $\hat{k}^{(r)} \in \Omega^{(r-1)} \cap \Omega^{(r)}$ $(1 < r \leqslant N)$; $\hat{k}^{(1)} = \hat{k}$;

б) существуют координаты $z_1^{(r)}, \ldots, z_{12}^{(r)}$, определяемые в $\Omega^{(r)}$, которые отображают биголоморфно эту область на

$$\{z^{(r)} : |z_j^{(r)}| < \rho_r, \ 1 \leqslant j \leqslant 12\},$$

причем образом $\hat{k}^{(r)}$ является 0;

в) $z_1^{(r)} = (k_1 + k_2)^2 - t$.

Пользуясь полученным результатом, мы можем показать индуктивно, что $\Omega \cap E$ содержит $\Omega^{(r)} \cap \{k : (k_1 + k_2)^2 = t\} \subset E$; если это верно для некоторого r, то $\hat{k}^{(r+1)} \in E$ и поэтому $\Omega^{(r+1)} \cap \{k : (k_1 + k_2)^2 = t\} \subset E$ в силу утверждений в а).

Случай $t = 0$: из предыдущего случая, $t \neq 0$, мы заключаем, что $\Omega \cap \{k : (k_1 + k_2)^2 = 0\}$ имеет открытую окрестность W в Ω, для которой $W \cap \{k : (k_1 + k_2)^2 \neq 0\} \subset E$. На основе теоремы о непрерывности мы имеем $W \subset E$.

Эту лемму, очевидно, можно обобщить, если заменить аналитическое многообразие $(k_1 + k_2)^2 = t$ другими аналитическими многообразиями $\{k : f(k) = t\}$ (где функции f голоморфны) и, в частности, заменить его многообразиями вида $\{k : k_x^2 = t\}$ $(X \subset \{0, 2, 3\})$.

При помощи методов, аналогичных методам, применяемым при доказательстве леммы 3.1, мы можем доказать следующую лемму (см. [52]).

Лемма 3.6. *Для каждой вещественной точки* $\hat{p}$, *такой, что* $\hat{p}^2 < M_j^2$ *и* $(p_1 + p_0)^2 < M_{10}^2$, *существует число* $r'(\hat{p})$, *такое, что* $\mathcal{H}_s(\Delta)$ *содержит открытое множество*

$$\{k : \|p - \hat{p}\| < r'(\hat{p}),\ \|q\| < r'(\hat{p}),\ k \notin \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13}\}.$$

Леммы 3.3 и 3.6, очевидно, остаются справедливыми, если сделаем перестановку индексов 0, 1, 2, 3.

Обозначения для инвариантных переменных. С настоящего момента мы будем пользоваться следующими (обычными) обозначениями для инвариантных переменных нашей задачи:

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (k_0 + k_3)^2;$$
$$t = (k_1 + k_3)^2 = (k_0 + k_2)^2;$$
$$u = (k_1 + k_0)^2 = (k_2 + k_3)^2;$$
$$\zeta_j = k_j^2 \quad (0 \leqslant j \leqslant 3).$$

Как известно, эти переменные не являются независимыми

$$s + t + u = \sum_{j=0}^{3} \zeta_j. \qquad (3.6)$$

Отображение импульсного пространства в пространство переменных s, t, u и ζ_j, удовлетворяющих условию (3.6), обозначим I. Определитель Грамма от (k_1, k_2, k_3) или $(-k_0, k_2, k_3)$ и т. д. обозначим $Q(s, t, u, \zeta_j)$:

$$Q(s, t, u, \zeta) = \det\{(k_i, k_j)\}_{(i, j=1, 2, 3)}.$$

Условия стабильности. Будем предполагать, что имеют место следующие условия стабильности:

$$M_{jk} \leqslant m_j + m_k,$$
$$M_j \leqslant m_{jk} + m_k,$$

причем (j, k, m, n) — произвольная перестановка (0, 1, 2, 3). Так как $m_l < M_l (0 \leqslant l \leqslant 3)$ и $M_{jk} = M_{mn}$, то они означают, что

$$m_j < M_{jk} + m_k, \quad M_j < M_{jk} + M_k,$$

$$|m_j - m_k| < M_{jk}, \quad M_{jk} < M_j + M_k,$$

$$m_j < m_k + m_m + m_n.$$

Физические точки. Физическими являются те вещественные точки p, для которых $\zeta_j = p_j^2 = m_j^2 (0 \leqslant j \leqslant 3)$ и, следовательно, $p_j \in V^{\pm}$. Так как $m_j < m_k + m_m + m_n$ для каждой перестановки (j, k, m, n) чисел (0, 1, 2, 3) и $p_j = -(p_k + p_m + p_n)$, то два вектора из

$$\{p_j\}_{j=0,\,1,\,2,\,3}$$

должны принадлежать V^+, а других два — V^-. Если, например, $p_j \in V^+$, $p_k \in V^+$, $p_m \in V^-$, $p_n \in V^-$, то

$$p_j^2 < M_j^2 (0 \leqslant j \leqslant 3),$$

$$(p_j + p_m)^2 \leqslant (m_j - m_m)^2 < M_{jm}^2,$$

$$(p_j + p_n)^2 \leqslant (m_j - m_n)^2 < M_{jm}^2,$$

$$(p_j + p_k)^2 \geqslant (m_j + m_k)^2 \geqslant M_{jk}^2.$$

Иначе говоря, имеют место условия, при которых справедлива лемма 3.3 (после подходящей перестановки переменных). Поэтому существует открытая комплексная окрестность W точки p, такая, что $\mathscr{H}(\Delta)$ содержит $W \cap C\Gamma_{jk}$. (Эта окрестность, очевидно, пересекается с массовой оболочкой.)

Замечание. Пользуясь свойством полиномиального роста функции $H(k)$ вблизи границ области $\bigcup_S \mathscr{T}^S$ (которое вытекает из гл. 2, § 5), локальной природой теоремы об острие клина, алгебраической природой замен переменных (которые были сделаны при доказательстве леммы 3.3), можно показать, что $H(k)$ также обладает полиномиальным ростом вблизи границы областей, определяемых леммой 3.1. Так как массовая оболочка представляет собой алгебраическое многообразие, то отсюда следует, что ограничение $H(k)$ на ней также имеет полиномиальный рост вблизи вещественных физических точек. В силу теорем, обобщающих теорему 2.1, имеем граничное значение в этих точках, которое является обобщенной функцией на вещественном многообразии $\{p : p_j^2 = m_j^2, 0 \leqslant j \leqslant 3\}$, по крайней мере, в регулярных точках этого многообразия.

Мы уже отметили, что $\mathscr{H}(\Delta)$ и $\mathscr{H}_s(\Delta)$ инвариантны относительно комплексной группы Лоренца (включая отражения) $L(C)$. Холл и Вайтман показали, что если k и k' удовлетворяют условию $(k_i, k_j) = (k'_i, k'_j)$ $(j, i=0, 1, 2, 3)$ и если $Q[I(k)] \neq 0$, то существует преобразование $\Lambda \in L(C)$, такое, что $k' = \Lambda k$ (т. е. $k'_j = \Lambda k_j$, $0 \leqslant j \leqslant 3$). Отсюда следует, что множество $\mathscr{H}(\Delta) \cap \{k : Q(I(k) \neq 0\}$ насыщено (следуя Хеппу [51]), т. е. оно является полным прообразом собственного образа в пространстве инвариантов:

$$I^{-1}(I(\mathscr{H}) \cap \{s, t, u, \zeta : Q(s, t, u, \zeta) = 0\}) =$$
$$= \mathscr{H}(\Delta) \cap \{k : Q(I(k)) = 0\}.$$

Поэтому полезно рассмотреть образ $I\ [\mathscr{H}(\Delta)]$ области $\mathscr{H}(\Delta)$ и образ области $\mathscr{H}_s(\Delta)$ и, в частности, его пересечение со множеством $\{s, t, u, \zeta : \zeta_j = m_j^2\ (0 \leqslant j \leqslant 3)\}$. Это пересечение содержит подобласти (массовой оболочки) следующего вида:

$$S'^{\pm} = \{s, t, u : \pm \operatorname{Im} s > 0\} \cap \mathfrak{R}(S),$$
$$T'^{\pm} = \{s, t, u : \pm \operatorname{Im} t > 0\} \cap \mathfrak{R}(T),$$
$$U'^{\pm} = \{s, t, u : \pm \operatorname{Im} u > 0\} \cap \mathfrak{R}(U).$$

$\mathfrak{R}(S)$, $\mathfrak{R}(T)$ и $\mathfrak{R}(U)$ представляют собой открытые связные окрестности (в подмногообразии $\{s, t, u, \zeta_j = m_j^2\}$ пространства инвариантов) множеств S, T, U соответственно, где

$$S = \{s, t, u : (s, t, u, \zeta) = I(p),\ \operatorname{Im} p = 0,$$
$$p_j^2 = m_j^2 (0 \leqslant j \leqslant 3);\ p_1 \in V^+,\ p_2 \in V^+,\ p_3 \in V^-,\ p_0 \in V^-\},$$

$$T = \{s, t, u : (s, t, u, \zeta) = I(p),\ \operatorname{Im} p = 0,$$
$$p_j^2 = m_j^2 (0 \leqslant j \leqslant 3);\ p_1 \in V^+,\ p_3 \in V^+,\ p_2 \in V^-,\ p_0 \in V^-\},$$

$$U = \{s, t, u : (s, t, u, \zeta) = I(p),\ \operatorname{Im} p = 0,$$
$$p^2 = m^2 (0 \leqslant j \leqslant 3);\ p_1 \in V^+,\ p_0 \in V^+,\ p_2 \in V^-,\ p_3 \in V^-\}.$$

S'^{+} является образом подмножества области $\mathscr{H}(\Delta)$, определяемого ниже:

$$E_s^+ = \{k' = p' + iq' : \|p' - p\| < \rho(p);\ \|q'\| < \rho(p);$$
$$p_j^2 = k_j'^2 = m_j^2 (0 \leqslant j \leqslant 3);\ p_1 \in V^+,\ p_2 \in V^+,\ p_0 \in V^-,$$
$$p_3 \in V^-;\ \operatorname{Im}(k_1' + k_2')^2 > 0\}\ (\rho(p) > 0).$$

Это множество связно и инвариантно относительно отражения пространства. Так как $L_+(C)$ связно, то от-

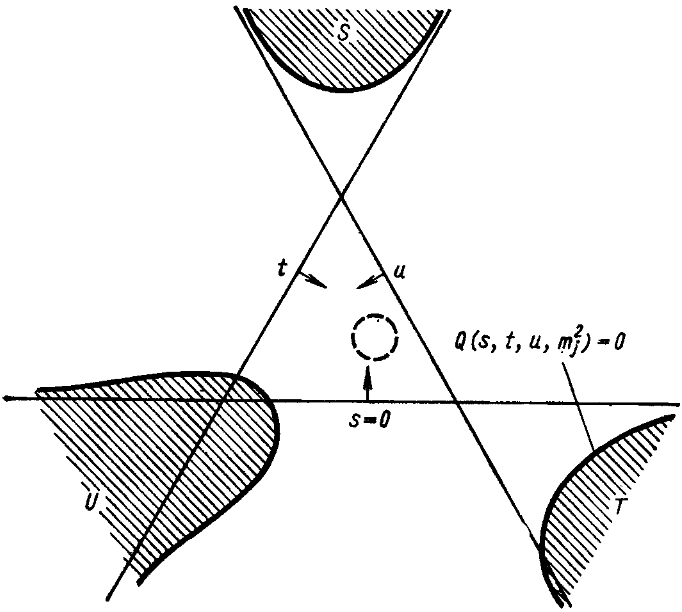


Рис. 7. Диаграмма Мандельстама ($\zeta_j = m_j^2$, $0 \leqslant j \leqslant 3$).

сюда следует, что множество $E_s'^{+} = \bigcup_{\Lambda \in L(C)} E_s^+$ и множество $E_s'^{+} \cap \{k : Q[I(k)] \neq 0\}$ связны. Для $S'^{\pm}$, $T'^{\pm}$ и $U'^{\pm}$ имеем аналогичные результаты.

В следующих параграфах мы покажем, что пересечение области $\mathscr{H}(\Delta)$ с массовой оболочкой содержит связную подобласть, которая сама содержит множество

$E_s'^+$ и аналогично определяемые множества $E_s'^-, E_t'^\pm, E_u'^\pm$. Это известно как «перекрестное свойство» четырехточечной функции.

Множества S, T, U (которые имеют своими границами ветви кривой $Q(s, t, u, m_j^2)$) удобно изображать на диаграмме Мандельстама (рис. 7) (см., например, работу [54]).

§ 5. Доказательство перекрестной симметрии

Доказательство будет начинаться аналитическим расширением внутри подмногообразия комплексного импульсного пространства. Такая процедура тем не менее приводит к точкам области $\mathscr{H}(\Delta)$ (т. е. точкам, где $H(k)$ голоморфна по всем переменным) как результат замечаний, сделанных в гл. 2, § 2 и гл. 3, § 5.

Рассмотрим сначала (линейное) многообразие, получаемое приравниванием (k_1+k_3) фиксированному вещественному четырехмерному вектору, обозначаемому (P_1+P_3):

$$\{k : (k_1 + k_3) = (P_1 + P_3)\}.$$

На этом многообразии мы имеем также

$$(k_0+k_2) = (P_1+P_3).$$

Можно выбрать в качестве независимых переменных на этом многообразии (компоненты) k_1 и k_2 (отметим, что $q_3=-q_1$ и $q_0=-q_2$ на рассматриваемом многообразии).

Лемма 3.7. Если $(P_1+P_3)^2=t<M_{13}^2$ [(P_1+P_3) — вещественный четырехмерный вектор], то пересечение области $\mathscr{H}(\Delta)$ с многообразием $\{k: k_1+k_3=P_1+P_3\}$ содержит следующие восемь труб:

$$\pm\{k : k_1 + k_3 = P_1 + P_3;\ q_1 + q_2 \in V^+,\ q_1 \in V^-\},$$

$$\pm\{k : k_1 + k_3 = P_1 + P_3;\ q_1 \in V^+,\ q_1 - q_2 \in V^-\},$$

$$\pm\{k : k_1 + k_3 = P_1 + P_3;\ q_1 - q_2 \in V^+,\ q_2 \in V^+\},$$

$$\pm\{k : k_1 + k_3 = P_1 + P_3;\ q_2 \in V^-,\ q_1 + q_2 \in V^+\}.$$

Доказательство. Определенные выше трубы лежат на границах труб $\mathcal{T}^S$ в Δ. Лемма является следствием лемм 3.1 и 3.2 (и соответствующих лемм с перестановками индексов) в гл. 3, § 3. Можно дать независимое доказательство, применив леммы 3.4 следующим образом: пусть $\hat{k}=\hat{p}+i\hat{q}$ — точка первой трубы в многообразии: $\hat{k}_1+\hat{k}_3=P_1+P_3$, $\hat{q}_1+\hat{q}_2\in V^+$, $\hat{q}_1\in V^-$. Пусть $\Delta(w)$ обозначает диск

$$\Delta(w)=\{k=\hat{p}+\zeta\hat{q}+w\varepsilon,\ \operatorname{Im}\zeta>0\},$$

где $\varepsilon\in\mathcal{V}_{01}^+$. Для $\operatorname{Im}w>0$, $\Delta(w)\subset\mathcal{H}(\Delta)$ (так как $q=\operatorname{Im}\zeta\hat{q}+\operatorname{Im}w\,\varepsilon\in\mathcal{V}_{01}^+$ для каждого $k\in\Delta(w)$. $\mathcal{H}(\Delta)$ содержит все точки, достаточно близкие к $\hat{p}$ и имеющие мнимые части в $\mathcal{V}_{01}^+ + \mathcal{V}_{23}^-$ (так как $(\hat{p}_1+\hat{p}_3)<M_{13}^2$). Среди этих точек имеются точки области $\Delta(0)$, для которых $|\zeta|$ достаточно мало. Поэтому лемма 3.4 применима и $\Delta(0)\subset\mathcal{H}(\Delta)$. В частности, $\hat{k}\subset\mathcal{H}(\Delta)$, что и требовалось доказать.

Доказательство для других труб аналогично.

Многообразие $\mathcal{V}^0$

Фактически мы будем работать с (линейным) многообразием меньшей размерности, обозначаемым $\mathcal{V}^0$ и определяемым следующим образом:

1. Четвертые компоненты k_j^3 всех векторов $k_j(0\leqslant j\leqslant 3)$ фиксированы и равны нулю.

2. $k_1+k_3=P_1+P_3$ — фиксированный вещественный пространственноподобный четырехмерный вектор, взятый вдоль третьей оси координат, т. е.

$$k_1^0+k_3^0=-(k_2^0+k_0^0)=0;$$

$$k_1^1+k_3^1=-(k_2^1+k_0^1)=0,$$

$$(k_1+k_3)^2=(P_1+P_3)^2=t<0;$$

$$(k_1+k_3)=-(k_2+k_0)=(0,\ 0,\ \sqrt{-t},\ 0).$$

Отметим формулы (справедливы везде в импульсном пространстве):

$$(k_1+k_3)k_1=\frac{1}{2}[(k_1+k_3)^2+(k_1)^2-(k_3)^2]=\frac{1}{2}(t+\zeta_1-\zeta_3);$$

$$(k_1+k_3)k_3=\frac{1}{2}(t+\zeta_3-\zeta_1),\ (k_1+k_3)k_2=$$

$$=-\frac{1}{2}(t+\zeta_2-\zeta_0);$$

$$(k_1+k_3)k_0=-\frac{1}{2}(t+\zeta_0-\zeta_2).$$

Из них следует, что точкам в $\mathcal{V}$ соответствуют

$$k_1=\pi_1,\ -\frac{1}{2\sqrt{-t}}(t+\zeta_1-\zeta_3),\ 0;$$

$$k_3=-\pi_1,\ -\frac{1}{2\sqrt{-t}}(t+\zeta_3-\zeta_1),\ 0;$$

$$k_2=\pi_2,\ \frac{1}{2\sqrt{-t}}(t+\zeta_2-\zeta_0),\ 0;$$

$$k_0=-\pi_2,\ \frac{1}{2\sqrt{-t}}(t+\zeta_0-\zeta_2),\ 0$$

(π_1 и π_2 являются двухкомпонентными комплексными векторами).

3. Наконец, третьи компоненты всех векторов $k_j(0\leqslant \leqslant j\leqslant 3)$ будут приравнены некоторым постоянным. Для этого зафиксируем $\zeta_3-\zeta_1$ и $\zeta_2-\zeta_0$.

Так как в конце концов нас интересуют точки массовой оболочки, мы должны положить $\zeta_3-\zeta_1=m_3^2-m_1^2$ и $\zeta_2-\zeta_0=m_2^2-m_0^2$.

Таким образом, $\mathcal{V}$ является многообразием всех точек k в комплексном пространстве, имеющих вид:

$$\mathcal{V}\begin{cases} k_1=\pi_1,\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-t}}(t+m_1^2-m_3^2),\ 0; \\ k_2=\pi_2,\ \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}(t+m_1^2-m_0^2),\ 0; \\ k_3=-\pi_1,\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-t}}(t+m_3^2-m_1^2),\ 0; \\ k_0=-\pi_2,\ \dfrac{1}{2\sqrt{-t}}(t+m_0^2-m_2^2),\ 0, \end{cases}$$

где $\pi_1 = \pi_1^0, \pi_1^1$ и $\pi_2 = (\pi_2^0, \pi_2^1)$ являются комплексными двумерными векторами, которые могут быть использованы как координаты в $\mathscr{V}$. Касательно $\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{V}$ можно сделать следующие замечания:

а. $\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{V}$ содержит восемь труб

$$\mathscr{A} = \{(\pi_1, \pi_2) : \operatorname{Im}(\pi_1 + \pi_2) \in V^+, \ \operatorname{Im}\pi_1 \in V^-\};$$

$$\mathscr{A}' = \{(\pi_1, \pi_2) : \operatorname{Im}\pi_1 \in V^+, \ \operatorname{Im}(\pi_1 - \pi_2) \in V^-\};$$

$$\mathscr{B} = \{(\pi_1, \pi_2) : \operatorname{Im}(\pi_1 + \pi_2) \in V^+, \ \operatorname{Im}\pi_2 \in V^-\};$$

$$\mathscr{B}' = \{(\pi_1, \pi_2) : \operatorname{Im}\pi_2 \in V^-, \ \operatorname{Im}(\pi_1 - \pi_2) \in V^-\},$$

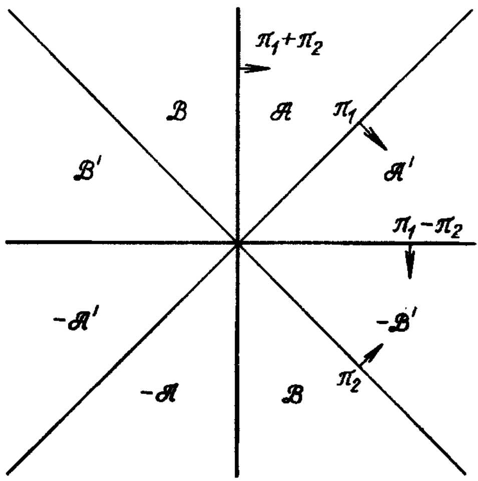


Рис. 8. Символическое представление труб в $\mathscr{V}$.

а также $-\mathscr{A}$, $-\mathscr{B}$, $-\mathscr{A}'$, $-\mathscr{B}'$ (рис. 8). V^+ обозначает будущий конус в двумерном пространстве — времени, т. е. $(\operatorname{Im}\pi_1 \in V^+)$ означает: $(\operatorname{Im}(\pi_1^0 + \pi_1^0) > 0$ и $\operatorname{Im}(\pi_1^0 - \pi_1^1) > 0)$.

б. Более того, $\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V}$ содержит множества вида $\mathfrak{N}(\mathscr{A},\mathscr{B})\cap(\mathscr{A}+\mathscr{B})$ и $N(\mathscr{A}',\mathscr{B}')\cap(\mathscr{A}'+\mathscr{B}')$, где $\mathfrak{N}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ является открытой (комплексной) связной окрестностью (в $\mathscr{V}$) вещественных точек $p\in\mathscr{V}$, удовлетворяющих

$$p_j^2<M_j^2\,(0\leqslant j\leqslant 3),\ (p_1+p_0)^2<M_{10}^2. \tag{3.7}$$

$\mathfrak{N}(\mathscr{A}',\mathscr{B}')$ является открытой связной окрестностью (в $\mathscr{V}$) вещественных точек $p\in\mathscr{V}$, удовлетворяющих

$$p_j^2<M_j^2\,(0\leqslant j\leqslant 3),\ (p_1+p_2)^2<M_{12}^2. \tag{3.8}$$

Для того чтобы выразить эти условия через переменные π_1, π_2, введем обозначения:

$$\begin{cases}
\mathfrak{M}_1^2=\min\left\{M_1^2-\dfrac{1}{4t}(t+m_1^2-m_3^2)^2,\ M_3^2-\right.\\
\qquad\qquad\left.-\dfrac{1}{4t}(t+m_3^2-m_1^2)^2\right\};\\
\mathfrak{M}_2^2=\min\left\{M_2^2-\dfrac{1}{4t}(t+m_2^2-m_0^2)^2,\ M_0^2-\right.\\
\qquad\qquad\left.-\dfrac{1}{4t}(t+m_0^2-m_2^2)^2\right\};\\
\mathfrak{M}_{10}^2=M_{10}^2-\dfrac{1}{4t}(m_1^2-m_3^2+m_2^2-m_0^2)^2;\\
\mathfrak{M}_{12}^2=M_{12}^2-\dfrac{1}{4t}(m_1^2-m_3^2-m_2^2+m_0^2)^2.
\end{cases}$$

Вещественные точки в $\mathscr{V}$, удовлетворяющие условию (3.7) [соответственно (3.8)], соответствуют вещественным значениям π_1, π_2, удовлетворяющим условиям

$$\pi_1^2<\mathfrak{M}_1^2;\ \ \pi_2^2<\mathfrak{M}_2^2;\ \ (\pi_1-\pi_2)^2<\mathfrak{M}_{10}^2, \tag{3.9}$$

$$\pi_1^2<\mathfrak{M}_1^2;\ \ \pi_2^2<\mathfrak{M}_2^2;\ \ (\pi_1+\pi_2)^2<\mathfrak{M}_{12}^2. \tag{3.10}$$

(Здесь π_1^2 обозначает $(\pi_1,\ \pi_1)\equiv(\pi_1^0)^2-(\pi_1^1)^2$ и т. д.).

Существование подмножеств области $\mathscr{H}(\Delta)$ вида $\mathfrak{M}(\mathscr{A},\mathscr{B})\cap(\mathscr{A}+\mathscr{B})$ и $\mathfrak{N}(\mathscr{A}',\mathscr{B}')\cap(\mathscr{A}'+\mathscr{B}')$ является следствием теоремы об острие клина (см. лемму 2.5).

в. В действительности из леммы 3.7 (и соответствующих лемм с перестановками индексов) мы знаем больше:

для каждого вещественного (π_1, π_2), удовлетворяющего (3.9), существует (комплексная) подобласть области $\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{V}$ вида

$$\{(\pi_1', \pi_2') : \|\pi' - \pi\| < \rho(\pi), \ \operatorname{Im}(\pi_1' + \pi_2')^2 \neq 0\}$$

(где $\rho(\pi) > 0$) и для каждого вещественного (π_1, π_2), удовлетворяющих (3.9), существует подобласть области $\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{V}$ вида

$$\{(\pi_1', \pi_2') : \|\pi' - \pi\| < \rho(\pi), \ \operatorname{Im}(\pi_1' + \pi_2')^2 \neq 0\},$$

где $\rho(\pi) > 0$.

г. $\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{V}$ инвариантна относительно таких преобразований Лоренца в $L(C)$, которые оставляют инвариантным $\mathscr{V}$.

Новые переменные

Удобно работать со световым конусом или характеристическими координатами. Обозначим:

$$u_j = \pi_j^0 + \pi_j^1; \ v_j = \pi_j^0 - \pi_j^1; \ (j = 1,2)$$

$$u^{\pm} = u_1 \pm u_2; \ v^{\pm} = v_1 \pm v_2.$$

Преобразование Лоренца в $L_+(C)$, оставляющее $\mathscr{V}$ инвариантным, задается согласно

$$u_j \to \lambda u_j; \ v_j \to \frac{1}{\lambda} v_j \ (j = 1,2),$$

где $\lambda \neq 0$ — комплексное число. Когда λ вещественно, то получаем преобразование в $L_+^{\uparrow}$, если $\lambda > 0$, и в $L_+^{\uparrow}$, если $\lambda < 0$. $\mathscr{V}$ также инвариантно относительно отражения

$$\pi_j^0 \to \pi_j^0, \ \pi_j^1 \to -\pi_j^1 \ (j = 1,2)$$

или в переменных u_j, v_j

$$u_j \to v_j, \ v_j \to u_j \ (j = 1,2).$$

Будем пользоваться также следующим множеством переменных в $\mathscr{V}$:

$$\begin{cases} z_1 = \pi_1^2 = u_1 v_1; \ z_2 = \pi_2^2 = u_2 v_2, \\ z_3 = (\pi_1 + \pi_2)^2 = (u_1 + u_2)(v_1 + v_2), \\ \alpha = \sqrt{\dfrac{u_1}{v_1}}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Переменные z_1, z_2, z_3 являются инвариантными переменными (которые можно выразить через s, t, u, ζ_j; эта связь в явном виде будет дана ниже), определенными и голоморфными везде на $\mathcal{V}$. α является параметром преобразования Лоренца; обратное преобразование приводит π_1 в вектор, параллельный оси с индексом 0. Он определяется только в области

$$\{\pi : u_1 v_1 \notin R^-\},$$

где R^- — множество вещественных отрицательных чисел, или в $\mathcal{V}-\mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — разрез: $\mathcal{C}=\{\pi : u_1 v_1 \in R^-\}$. В этой области мы будем определять $\sqrt{u_1 v_1}$ таким образом, чтобы его вещественная часть была положительной и $\alpha = \dfrac{\sqrt{u_1 v_1}}{v_1} = \dfrac{\sqrt{z_1}}{v_1}$.

Решая (3.11) по отношению к u_j, v_j ($j=1, 2$), мы находим $u_1=\sqrt{z_1}\alpha$, $v_1=\dfrac{\sqrt{z_1}}{\alpha}$, $u_1 v_2+u_2 v_1=z_3-z_1-z_2$,

$$(u_2 v_1 - u_1 v_2)^2 = (z_3 - z_1 - z_2)^2 - 4z_1 z_2 = \lambda(z_1, z_2, z_3),$$

так что, полагая $\sqrt{\lambda(z_1, z_2, z_3)}=u_2 v_1 - u_1 v_2$, получим

$$u_2 = \frac{\alpha}{2\sqrt{z_1}}\left[z_3 - z_1 - z_2 + \sqrt{\lambda(z_1, z_2, z_3)}\right],$$

$$v_2 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{z_1}}\left[z_3 - z_1 - z_2 - \sqrt{\lambda(z_1, z_2, z_3)}\right].$$

Отметим, что $\lambda(z_1, z_2, z_3)$ — симметричный полином по z_1, z_2, z_3, который равен $(-t)^{-1}Q(s, t, u, \zeta_j)$ в $\mathcal{V}$.

Множество переменных z_1, z_2, z_3, α будет использовано только на $\mathcal{V}'=\mathcal{V}-\mathcal{C}$, где $\sqrt{z_1}$ будет определяться так, чтобы его вещественная часть была положительной ($\sqrt{z_1}=\sqrt{u_1 v_1}$). Однако эти переменные не определяют биголоморфное отображение в $\mathcal{V}'$, так как функция $\sqrt{\lambda(z_1, z_2, z_3)}$ неголоморфна в образе области $\mathcal{V}'$ (она имеет многообразие разветвления). Эта трудность может быть преодолена следующим образом.

Отметим прежде всего, что открытое подмножество $\mathcal{H}(\Delta)\cap(\mathcal{V}-\mathcal{C})$ множества $(\mathcal{V}-\mathcal{C})$ инвариантно относительно отображения τ:

$$\tau\{u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2\}=\left\{u_1,\ v_1,\ \frac{u_1}{v_1}v_2,\ \frac{v_1}{u_1}u_2\right\}$$

(которое получается объединением двух отображений:

$$u_j\to\frac{v_1}{u_1}u_j,\ v_j\to\frac{u_1}{v_1}v_j\ (j=1,2)$$

и $u_j\longleftrightarrow v_j$ $(j=1,2)$).

Отображение τ биголоморфно в $\mathscr{V}'=\mathscr{V}-\mathscr{C}$. Мы можем пользоваться в $\mathscr{V}'$ координатами: u_1, v_1, z_4, z_5, где $z_4=u_2v_1+u_1v_2$, $z_5=u_2v_1-u_1v_2$ (якобиан этого преобразования равен $2u_1v_1$). Относительно этих переменных τ имеет вид

$$\tau=(u_1,\ v_1,\ z_4,\ z_5)\to(u_1,\ v_1,\ z_4,\ -z_5).$$

Пусть X — подобласть области $\mathscr{V}'$, инвариантная относительно преобразований Лоренца и отражений, оставляющих $\mathscr{V}$ инвариантной. Тогда X инвариантна относительно τ. Пусть функция $f(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2)=$ $=g(u_1,\ v_1,\ z_4,\ z_5)$ голоморфна в X. Функция

$$g(u_1,\ v_1,\ z_4,\ z_5)-g(u_1,\ v_1,\ z_4,-z_5)$$

голоморфна в X и равна нулю при $z_5=0$. Поэтому в окрестности каждой точки в X и, следовательно, везде в X эта функция может быть написана как $z_5h_1(u_1,\ v_1,\ z_4,\ z_5)$, где функция h голоморфна в X. Более того, функция $h_1(u_1,\ v_1,\ z_4,\ z_5)$ четна по z_5 так же, как функция $h_2(u_1,\ v_1,\ z_4,\ z_5)=g(u_1,\ v_1,\ z_4,\ z_5)+$ $+g(u_1,\ v_1,\ z_4,\ z_5)$. Поэтому h_1 и h_2 являются функциями от u_1, v_1, z_4 и z_5^2 в X. Наконец,

$$f(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2)=(u_2\ v_1-u_1v_2)F_1(z_1,\ z_2,\ z_3,\ \alpha)+ \\ +F_2(z_1,\ z_2,\ z_3,\ \alpha), \qquad (3.12)$$

где функции F_1 и F_2 голоморфны по переменным z_1, z_2, z_3, α в образе области X в пространстве этих переменных. Мы назовем $\mathscr{T}$ отображение

$$\mathscr{T}:\mathscr{V}\to C^3:(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2)\to(z_1,\ z_2,\ z_3)$$

и $\mathfrak{T}$ — отображение

$$\mathfrak{T}:\mathscr{V}' \to C^4(u_1, v_1, u_2, v_2) \to (z_1, z_2, z_3, \alpha),$$

определяемые формулами (3.11).

В силу лоренц-инвариантности области X мы имеем

$$\mathfrak{T}(X) = \mathscr{T}(X) \cdot \{\alpha : \alpha \neq 0\}.$$

Если $(u_1, v_1, u_2, v_2) \in X$ и $\alpha_0 = \frac{\sqrt{u_1 v_1}}{v_1}$, то точка $(\beta u_1, \beta^{-1} v_1, \beta u_2, \beta^{-1} v_2)$ соответствует тем же значениям z_1, z_2, z_3 и значению $\beta\alpha_0$ переменной α.

Функции F_1 и F_2 могут быть аналитически продолжены в любую область вида $Y' \times \{\alpha : \alpha \neq 0\}$, где Y' является аналитическим продолжением $\mathscr{T}(x)$, и в силу формулы (6) функция f может быть продолжена в $\mathscr{T}^{-1}(Y')$. (Замечание: формулы $z_1 = u_1 v_1$; $z_2 = \frac{z_4^2 - z_5^2}{4u_1 v_1}$; $z_3 - z_2 - z_1 = z_4$ показывают, что отображение $\mathscr{T}$ открыто в $\mathscr{V}'$.)

Короче говоря, мы имеем следующий рецепт: пусть X — область (не обязательно инвариантная относительно преобразований Лоренца и отражений) в $\mathscr{V}' \cap \mathscr{H}(\Delta)$. Для того чтобы получить аналитическое продолжение области X в $\mathscr{V}'$, достаточно:

1) взять образ области X в пространстве переменных z_1, z_2, z_3;

2) найти расширение Y' этого образа в C^3;

3) взять прообраз $\mathscr{T}^{-1}(Y')$, который является расширением области X в $\mathscr{V}'$.

Следующий параграф посвящается изучению соответствующих областей X.

Нас интересуют точки, которые лежат на оболочке голоморфности $(k : k_j^2 = m_j^2,\ 0 \leqslant j \leqslant 3)$ (или в ее окрестности). Это ведет нас к рассмотрению многообразия $\mathscr{W} \subset \subset \mathscr{V}$, определяемого условием $k_1^2 - k_2^2 \equiv \zeta_1 - \zeta_2$. Область $\mathscr{W}$ определяется в терминах переменных π_1 и π_2 следующим образом:

$$\mathscr{W}\{\pi \subset \mathscr{V} : \pi_1^2 - \pi_2^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2\}, \tag{3.13}$$

где

$$\mu_1^2 = m_1^2 - \frac{1}{4t}(t + m_1^2 - m_3^2)^2 = m_3^2 - \frac{1}{4t}(t + m_3^2 - m_1^2)^2,$$

$$\mu_2^2 = m_2^2 - \frac{1}{4t}(t + m_2^2 - m_0^2)^2 = m_0^2 - \frac{1}{4t}(t + m_0^2 - m_2^2)^2.$$

Отметим, что

$$\mathfrak{M}_1^2 - \mu_1^2 = \min\{M_1^2 - m_1^2,\ M_3^2 - m_3^2\},$$

$$\mathfrak{M}_2^2 - \mu_2^2 = \min\{M_2^2 - m_2^2,\ M_0^2 - m_0^2\}. \qquad (3.14)$$

Мы обозначим также $\mathscr{W}' = \mathscr{W} - \mathscr{C}$. Образом области $\mathscr{W}$ относнтельно отображения $\mathscr{T}$ является множество

$$\mathscr{T}(\mathscr{W}) = \{z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathscr{T}(\mathscr{V}) : z_1 - z_2 = \mu_1^2 - \mu_2^2.$$

Отсюда следует, что если X — подобласть области $\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{V}'$, то любое аналитическое расширение в многообразии $\{z_1,\ z_2,\ z_3 : z_1 = z_2 = \mu_1 - \mu_2^2\}$ области $\mathscr{T}(X) \cap \{z_1, z_2, z_3 : z_1 - z_2 = \mu_1^2 - \mu_2^2\}$ содержится в $\mathscr{T}(\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{W}')$ (см. замечания в гл. 2, § 2).

Отметим, что в области $\mathscr{W}$ все разности $\zeta_j - \zeta_k$ фиксированы и равны $m_j^2 - m_k^2$. Удобно пользоваться в $\mathscr{T}(\mathscr{W})$ вместо переменных $z_1,\ z_2,\ z_3$ переменными s (или u) и z, где

$$z = \sum_{j=0}^{3} (\zeta_j - m_j^2) - \Phi, \qquad (3.15)$$

$$\Phi = 4 \min_{0<j\leqslant 3} (M_j^2 - m_j^2) = 4 \min\{\mathfrak{M}_1^2 - \mu_1^2,\ \mathfrak{M}_2^2 - \mu_2^2\}. \qquad (3.16)$$

На массовой оболочке $z = -\Phi$. Мы имеем

$$s + t + u = z + \sum_{j=0}^{3} m_j^2 + \Phi. \qquad (3.17)$$

На $\mathscr{V}$ имеем

$$\begin{cases} s = z_3 + \frac{1}{4t}(m_3^2 - m_1^2 + m_0^2 - m_2^2)^2; \\ u = 2(z_1 + z_2) - z_3 + \frac{1}{4t}(m_3^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_0^2)^2; \\ z = 2(z_1 - \mu_1^2) + 2(z_2 - \mu_2^2) - \Phi. \end{cases} \qquad (3.18)$$

На $\mathscr{W}$:

$$z = 4(z_1 - \mu_1^2) - \Phi = 4(z_2 - \mu_2^2) - \Phi. \qquad (3.19)$$

Некоторые точки в $\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{V}$

Лемма 3.8. $\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V}$ содержит точки $\pi=(\pi_1, \pi_2)$, такие, что

$$\pi_j^0 + \pi_j^1 = u_j,\ \pi_j^0 - \pi_j^1 = v_j (j = 1,2)$$

и выполняется одно из следующих условий:

1) $u_1=v_1$ действительно >0, $u_1^2<\mathfrak{M}_1^2$, $\mathrm{Im}u_2\geqslant0$, $\mathrm{Im}v_2>$ >0;

2) $v_1=0$; u_1 действительно >0, $\mathrm{Im}u_2\geqslant0$, $\mathrm{Im}v_2>0$;

3) $u_1=-v_1$ действительно >0, $\mathrm{Im}u_2\geqslant0$, $\mathrm{Im}v_2>0$.

Доказательство. 1. Пусть u_1 и v_1 действительны и $u_1v_1<\mathfrak{M}_1^2$, $\mathrm{Im}u_2>0$. Рассмотрим диски

$$\Delta(w) = \{\pi' = (\pi_1', \pi_2'): \pi' = w\varepsilon + \mathrm{Re}\,\pi + \zeta\,\mathrm{Im}\,\pi,\ \mathrm{Im}\,\zeta > 0\},$$

где $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ лежит в $\mathscr{A}$. Для $\mathrm{Im}\,w>0$ $\Delta(w)\subset\mathscr{A}\subset$ $\subset\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V}$. Точки из $\Delta(0)$ с достаточно малыми $|\zeta|$ также принадлежат $\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V}$: это следует из теоремы об острие клина (примененной, например, к трубам: $R^{12}+i\mathscr{V}_{01}^+$, $R^{12}+i\mathscr{V}_{23}^-$, $R^{12}+i\mathscr{V}_0^+$, $R^{12}+i\mathscr{V}_2^-$, $R^{12}+i\mathscr{V}_{03}^+ R^{12}+$ $+ i\mathscr{V}_{21}^-$). В силу леммы 3.8 $\Delta(0)\subset\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V}$.

2. Пусть u_1, v_1 действительны, $u_1>0$, $u_1v_1<\mathfrak{M}_1^2$, $\mathrm{Im}u_2=$ $=0$, $\mathrm{Im}v_2>0$. Мы снова рассмотрим диски

$$\Delta(w) = \{\pi' = (\pi_1', \pi_2'): \pi' = w\varepsilon + \mathrm{Re}\,\pi + \zeta\,\mathrm{Im}\,\pi;\ \mathrm{Im}\,\zeta > 0\}$$

и покажем, что $\Delta(0)$ содержит точки из $\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V}$. Это позволяет применить лемму 3.8 и показать, что $\Delta(0)\subset$ $\subset\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V}$. Пусть $\pi'=(\pi_1', \pi_2')$, $\pi'=\mathrm{Re}\pi+\xi\mathrm{Im}\pi$ — вещественная точка в $\Delta(0)$. Она удовлетворяет, в частности, условию $\pi_1'=\pi_1$, так что $\pi_1'^2<\mathfrak{M}_1^2$. Определяя $v_2'=\mathrm{Re}v_2+$ $+\xi\mathrm{Im}v_2$, мы имеем два случая:

a) $u_2 \geqslant 0$. Неравенства

$$u_2v_2' < \mathfrak{M}_1^2\,(\text{т. е. } \pi_2'^2 < \mathfrak{M}_2^2),$$

$$(u_1 + u_2)(v_1 + v_2') < \mathfrak{M}_{12}^2\,(\text{или } (\pi_1' + \pi_2')^2 < \mathfrak{M}_{12}^2)$$

выполняются для достаточно большого отрицательного v_2', т. е. для достаточно большого отрицательного ξ. В силу замечания б) существует подмножество множества $\mathcal{H}(\Delta)\cap\mathcal{V}$ вида

$$\{\pi'':\|\pi''-\pi'\|<\rho(\pi'),\ \operatorname{Im}(\pi_1''-\pi_2'')^2\neq 0\}.$$

Для того чтобы показать, что это множество пересекает $\Delta(0)$, мы должны только показать, что существуют произвольно малые (комплексные) числа ω, такие, что $\operatorname{Im}\omega>0$ и

$$(u_1-u_2)(v_1-v_2''\omega)\notin\mathfrak{M}_{10}^2+R^+.$$

Это очевидно, если $u_1-u_2=0$ (так как $\mathfrak{M}_{10}^2\geqslant M_{10}^2>0$) и если $u_1-u_2\neq 0$ (условие удовлетворяется для любого недействительного ω).

б) $u_2\leqslant 0$. Неравенства

$$u_2v_2'<\mathfrak{M}_2^2\,(\text{т. е. } \pi_2'^2<\mathfrak{M}_2^2),$$

$$(u_1-u_2)(v_1-v_2')<\mathfrak{M}_{10}^2\,(\text{или } \pi_1'-\pi_2')^2<\mathfrak{M}_{10}^2$$

удовлетворяются для достаточно большого положительного v_2'. Все остальное доказывается аналогично случаю а).

Образ точек, удовлетворяющих условиям леммы 3.2 относительно отображений $\mathcal{T}$, содержит множество $F_1=\{(z_1, z_2, z_3): z_1$ действительно $<\mathfrak{M}_1^2$; z_2 действительно $\leqslant 0$; $\operatorname{Im}z_3>0\}$. Докажем это утверждение шаг за шагом.

1. Пусть z_1 и z_2 — действительные числа, $0<z_1<\mathfrak{M}_1^2$, $z_2<0$. Полагаем $u_1=v_1=\sqrt{z_1}>0$; $u_2=\dfrac{z_2}{v_2}$; тогда $\operatorname{Im}v_2>0\Rightarrow\operatorname{Im}u_2>0$. Если определим

$$z_3=z_1+z_2+\sqrt{z_1}\left(v_2+\frac{z_2}{v_2}\right),$$

то мы сможем проверить, что при $\operatorname{Im}v_2>0$ z_3 принимает всевозможные значения, такие, что $\operatorname{Im}z_3>0$.

2. Пусть $z_1=0$, $z_2<0$. Положим u_1 действительным строго положительным, $v_1=0$, $u_2=z_2/v_2$ и определим $z_3=z_2+u_1v_2$. При $\operatorname{Im}v_2>0$ z_3 может принимать все значения с $\operatorname{Im}z_3>0$.

3. Пусть z_1 и z_2 — действительные числа $z_1<0$, $z_2<0$. Положим

$$u_1=-v_1=\sqrt{-z_1};\ u_2=\frac{z_2}{v_2}.$$

Определим

$$z_3=z_1+z_2+\sqrt{-z_1}\left(v_2-\frac{z_2}{v_2}\right).$$

Мы можем проверить, что когда v_2 принимает всевозможные значения в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im}v_2>0$), то z_3 принимает (в частности) всевозможные значения, такие, что $\operatorname{Im}z_3>0$.

4. Пусть z_1 действительно, $z_1<m_1^2$, $z_2=0$, а u_1 — (строго) положительное действительное число, $v_1=\frac{z_1}{u_1}$, $u_2=0$. Определим $z_3=z_1+u_1v_2$. При $\operatorname{Im}v_2>0$ z_3 принимает всевозможные значения в верхней полуплоскости.

Таким образом, каждая точка в F_1 может быть выражена как $\mathcal{T}(\pi)$, где π удовлетворяет одному из условий леммы 3.2. Покажем теперь, что отображение $\mathcal{T}$ открыто в этих точках. Заметим прежде всего, что отображение $\mathcal{T}$ открыто в любой точке (π_1, π_2), за исключением колинеарных π_1 и π_2 (матрица Якоби имеет ранг 3, за исключением случая $(\pi_1, \pi_2)=0$). В случае колинеарных π_1 и π_2 имеем либо $\pi_2=\mu\pi_1$, либо $\pi_1=0$. Но все точки в условиях леммы имеют $\pi_1\neq0$. Если $\pi_2=\mu\pi_1$, то $\pi_2^2=\mu^2\pi_1^2$, $\pi_1\pi_2=\mu\pi_1^2$. Каждое из этих условий означает, что $\mu^2\pi_1^2<0$, $\operatorname{Im}\mu\pi_1^2>0$ и $\operatorname{Im}\pi_1^2=0$. Поэтому μ^2 должно быть действительным и иметь недействительный квадратичный корень: $\mu^2<0$, $\mu=i|\mu|$, $\pi_1^2>0$. Итак, (π_1, π_2) может удовлетворять только условию: $\pi_2=i|\mu|\pi_1$, $u_1=v_1>0$, $|\mu|\neq0$. Мы предлагаем читателям проверить, что $\mathcal{T}$ открыто в такой точке. (При помощи соответствующей замены переменных задача сводится к проверке того, что отображение $\lambda\to\lambda^2(\lambda\in C)$ открыто в точке $\lambda=0$. Переменная λ соответствует $u_1v_2—u_2v_1$.)

Вследствие сформулированного утверждения множество $\mathscr{T}(\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V})$ содержит некоторую открытую связную окрестность F_1. Устраняя разрез C, мы получаем следующую лемму.

Лемма 3.9. $\mathscr{T}(\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{V}')$ содержит область G_1 вида

$$G_1=\{(z_1,\ z_2,\ z_3):|z_j-Z_j|<\varepsilon(Z_1,\ Z_2,\ Z_3)(1\leqslant j\leqslant 3);$$

$$(Z_1,\ Z_2,\ Z_3)\in F_1;\ z_1\notin R^-\},$$

которая может быть получена устранением разреза $\mathscr{T}(C)$ из открытой связной окрестности множества

$$F_1=\{(z_1,\ z_2,\ z_3):z_1\ \text{действительно}<\mathfrak{M}_1^2;\ z_2\ \text{действительно}\leqslant 0,\ \operatorname{Im} z_3>0\}.$$

Почти все указанные выше точки содержатся в первоначальной области аналитичности. Мы осуществим теперь первое нетривиальное аналитическое решение при помощи представления Йоста — Лемана — Дайсона в (фактически вблизи) подмногообразии многообразия $\mathscr{V}$, полученном приравниванием «полного импульса» k_1+k_2 вещественному физическому значению. Это будет подробно объяснено ниже.

Для каждого вещественного σ мы обозначим $\mathscr{L}_\sigma$ (линейное) подмногообразие многообразия $\mathscr{V}$, определяемое как

$$\mathscr{L}_\sigma=\{\pi:u^+=\sigma,\ v^+=\sigma\}.$$

Напомним, что $\pi=(\pi_1,\ \pi_2)$, $u^\pm=u_1\pm u_2$, $v^\pm=v_1\pm v_2$ и $u_j=\overset{0}{\pi}_j+\overset{1}{\pi}_j$, $v_j=\pi_j-\overset{1}{\pi}_j$. Многообразие $\mathscr{L}_\sigma$ получается, если положить $\overset{0}{\pi}_1+\overset{0}{\pi}_2=\sigma$, $\overset{1}{\pi}_1+\overset{1}{\pi}_2=0$. Переменные u^- и v^- могут быть использованы как координаты в комплексном многообразии $\mathscr{L}_\sigma$.

Пусть $\mathscr{T}_\sigma^\pm$ — трубы в $\mathscr{L}_\sigma$, определяемые как

$$\mathscr{T}_\sigma^\pm=\{\pi\in\mathscr{L}_\sigma:\operatorname{Im} u^->0,\ \operatorname{Im} v^->0\}=-\mathscr{T}_\sigma^-,$$

и пусть $\mathcal{R}_\sigma$ — открытое вещественное множество, определяемое следующим образом:

$$\mathcal{R}_\sigma = \Big\{\pi \in \mathcal{L}_\sigma : \pi_1^2 = \frac{1}{4}(u^- + \sigma)(v^- + \sigma) < \mathfrak{M}_1^2;$$

$$\pi_2^2 = \frac{1}{2}(\sigma - u^-)(\sigma - v^-) < \mathfrak{M}_2^2;\ (\pi_1 - \pi_2)^2 =$$

$$= u^- v^- < \mathfrak{M}_{10}^2\Big\}.$$

$\mathcal{R}_\sigma$, очевидно, не пусто, так как оно содержит все точки, для которых $u^- v^-$ достаточно большое и отрицательное; $\mathcal{R}_\sigma$ является пересечением $\mathcal{L}_\sigma$ с множеством точек, удовлетворяющих (3.7) или (3.9) (гл. 3, § 5). Поэтому $\mathfrak{R}_\sigma = \mathfrak{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \mathcal{L}_\sigma$ является открытой окрестностью множества $\mathcal{R}_\sigma$ в $\mathcal{L}_\sigma$. Обозначим $\mathcal{D}_\sigma$ область Йоста — Лемана — Дайсона, соответствующую трубам $\mathcal{T}_\sigma^\pm$ и области совпадения $\mathcal{R}_\sigma$. Эта область является оболочкой голоморфности класса всех функций, голоморфных в $\mathcal{T}_\sigma^+ \cup \mathcal{T}_\sigma^-$ и в окрестности множества $\mathcal{R}_\sigma$ (см. лекции Хеппа в настоящем сборнике; а также [4, 55—57]; в последней работе содержится доказательство сформулированного утверждения). Мы обращаем внимание на случай $\sigma > 0$.

Вообще говоря, множества $\mathcal{T}_\sigma^\pm$ и $\mathfrak{R}_\sigma$ не содержатся в $\mathcal{H}(\Delta)$, так как (для больших $\sigma > 0$) они содержатся в Γ_{12}. Однако для каждой точки π множества $\mathcal{T}_\sigma^\pm \cup \mathfrak{R}_\sigma$ существует число $\rho(\pi) > 0$, такое, что

$$\{\pi' : |u'^- - u^-|^2 + |v'^- - v^-|^2 < \rho(\pi)^2;$$

$$|u'^+ - \sigma|^2 + |v'^+ - \sigma|^2 < \rho(\pi)^2;$$

$$\operatorname{Im} u'^+ > 0,\ \operatorname{Im} v'^+ > 0\} \subset \mathcal{H}(\Delta) \cap \mathcal{V}$$

(условия $\operatorname{Im} u'^+ > 0, \operatorname{Im} v'^+ > 0$ означают $\operatorname{Im}(\pi_1' + \pi_2') \in V^+$).

Общее свойство оболочек голоморфности, которое может быть проверено непосредственно в случае области $\mathcal{D}_\sigma$ (см. [56]) следующее: для каждой точки $\hat{\pi} \in \mathcal{D}_\sigma$

существует относительно компактное открытое множество $K_{\hat{\pi}}$, такое, что $\bar{K}_{\hat{\pi}} \subset \mathscr{T}_{\sigma}^{+} \cup \mathscr{T}_{\sigma}^{-} \cup \mathfrak{R}_{\sigma}$ и что $\hat{\pi} \in \mathscr{H}(K_{\hat{\pi}})$— оболочка голоморфности множества $K_{\hat{\pi}}$. Так как $K_{\hat{\pi}}$ может быть накрыто коиечным множеством открытых множеств вида

$$\{\pi' \in \mathscr{L}_\sigma : |u'^- - u^-|^2 + |v'^- - v^-|^2 < \rho(\pi)^2\},$$

(где $\pi \in K_{\hat{\pi}}$), то мы можем найти число $\rho(\hat{\pi})$, такое, что

$$\{\pi' : u' = u^-;\ v'^- = v^-; |u'^+ - \sigma|^2 + |v'^+ - \sigma|^2 < \rho(\hat{\pi})^2,$$
$$\operatorname{Im} u'^+ > 0,\ \operatorname{Im} v'^+ > 0,\ \pi \in K\} \subset \mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{V}.$$

Так как здесь имеем топологическое произведение, то его оболочка голоморфности получается заменой $K_{\hat{\pi}}$ на $\mathscr{H}(K_{\hat{\pi}})$:

$$\{\pi' : u'^- = \hat{u}^-;\ v'^- = \hat{v}^-; |u'^+ - \sigma|^2 + |v'^+ - \sigma|^2 < \rho(\hat{\pi})^2,$$
$$\operatorname{Im} u > 0,\ \operatorname{Im} v > 0\}.$$

Отсюда следует, как это можно показать, что $\mathscr{T}(\mathscr{H}(\Delta) \cap \cap \mathscr{V})$ содержит открытое множество вида

$$\{z_1,\ z_2,\ z_2,\ \sum_{j=1}^{3} |z_j - \hat{z}_j| < r(\hat{z}), \operatorname{Im} z_3 > 0\},\ r(\hat{z}) > 0,$$

где мы обозначили $\mathscr{T}(\hat{\pi}) = (\hat{z}_1,\ \hat{z}_2,\ \hat{z}_3)$ и $\hat{z}_3 = \hat{u}^+ \hat{v}^+ = \sigma^2$.

Обратим теперь внимание на случай $\sigma > \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$, когда $\mathscr{R}_\sigma$ множество вещественных точек в $\mathscr{L}_\sigma$ удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} (u^- + \sigma)(v^- + \sigma) < 4\mathfrak{M}_1^2, \\ (u^- - \sigma)(u^- - \sigma) < 4\mathfrak{M}_2^2. \end{cases} \tag{3.20}$$

Это множество ограничивается двумя ветвями гиперболы

$$\begin{cases} (u^- + \sigma)(v^- + \sigma) = 4\mathfrak{M}_1^2,\ (u^- + \sigma) > 0, \\ (u^- - \sigma)(v^- - \sigma) = 4\mathfrak{M}_2^2,\ (u^- - \sigma) < 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Отметим, что для точек в $\mathscr{L}_\sigma$, удовлетворяющих $\pi_1^2 - \pi_2^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2$ (т. е. точек из $\mathscr{L}_\sigma \cap \mathscr{W}$), имеем

$$\frac{1}{2}(u^+ v^- + u^- v^+) = \mu_1^2 - \mu_2^2,$$

т. е.

$$\sigma(u^- + v^-) = 2(\mu_1^2 - \mu_2^2). \tag{3.22}$$

В многообразии $\mathscr{L}_\sigma \cap \mathscr{W}$ мы можем выбрать в качестве переменной величину

$$x = \frac{u^- - v^-}{2} \quad (x = \pi_1^1 - \pi_2^1).$$

В $\mathscr{L}_\sigma \cap \mathscr{W}$, z связано с x соотношением

$$z = -x^2 + \sigma^2 - 2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)^2}{\sigma^2} - \Phi. \tag{3.23}$$

Хорошо известно, что $\mathscr{D}_\sigma$ является дополнением множества всех комплексных точек всех «допустимых гипербол». Эти гиперболы удовлетворяют уравнениям вида

$$\{\pi \in \mathscr{L}_\sigma,\ \pi_1^1 - \pi_2^1 = x;\ \pi_1^0 - \pi_2^0 = h;$$

$$(h - \rho)^2 - (x - \xi)^2 - \eta^2 = 0\}\ (\xi,\ \rho,\ \eta \text{ действительны})$$

и имеют все действительные точки вне $\mathscr{R}_\sigma$.

Легко показать, что мы можем получить границу области $\mathscr{D}_\sigma$, если взять предельную допустимую гиперболу, которая касается обеих кривых (3.20) или касается одной из них (в конечной точке) и касается другой на бесконечности. Пересечение $\mathscr{D}_\sigma$ с $\mathscr{W}$ можно получить прямыми вычислениями. Однако легче пользоваться вместо $\mathscr{D}_\sigma$ меньшей областью $\mathscr{D}'_\sigma$, соответствующей области $\mathscr{R}'_\sigma \subset \mathscr{R}_\sigma$, где $\mathscr{R}'_\sigma$ задается следующим образом:

$$\begin{cases} (u'^- + \sigma')(v'^- + \sigma') < 4\mathfrak{M}^2; \\ (u'^- - \sigma')(v'^- - \sigma') < 4\mathfrak{M}^2, \end{cases}$$

где

$$u'^- = u^- - \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)}{\sigma},\quad v'^- = v^- - \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)}{\sigma},$$

$$\sigma' = \sigma + \frac{|\mu_1^2 - \mu_2^2|}{\sigma},\quad \mathfrak{M}^2 = \max\left\{\mu_1^2 + \frac{\Phi}{4},\ \mu_2^2 + \frac{\Phi}{4}\right\}.$$

Область $\mathscr{D}'_\sigma$ вообще меньше области $\mathscr{D}_\sigma$, за исключением случая равных масс, когда $\mathscr{D}_\sigma = \mathscr{D}'_\sigma$. Многообразие $\mathscr{L}_\sigma \cap \mathscr{W}$, в котором

$$u^- + v^- = \frac{2(\mu_1^2 - \mu_2^2)}{\sigma},$$

задается в переменных u'^-, v'^- условием $u'^- + v'^- = 0$, а x задается соотношением $x = \frac{u^- - v^-}{2} = \frac{u'^- - v'^-}{2}$.

Отметим также формулу

$$z = -x^2 + \sigma'^2 - 4\mathfrak{M}^2. \tag{3.24}$$

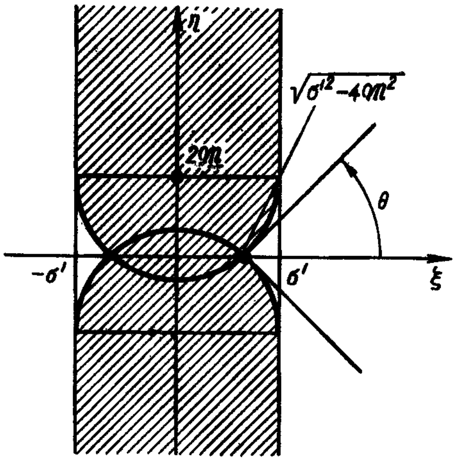


Рис. 9. Область Г.

В случае области $\mathcal{R}'_\sigma$ допустимые гиперболы имеют (в терминах новых переменных) уравнения вида

$$(u'^- - \xi)(v'^- + \xi) - \eta^2 = 0,$$

где $(\xi, \eta) \in \Gamma$,

$$\Gamma = \{(\xi, \eta) : |\xi| \leqslant \sigma', \ |\eta| \geqslant 2\mathfrak{M} - \sqrt{\sigma'^2 - \xi^2}\}.$$

Граница области Г состоит из полупрямых, лежащих на $\{(\xi, \eta) : |\xi| = \sigma'\}$, и из дуг кругов

$$\xi^2 - (\eta \pm 2\mathfrak{M})^2 - \sigma'^2 = 0$$

(рис. 9).

Точка из $\mathcal{L}_\sigma \cap \mathcal{W}$ принадлежит $\mathcal{D}'_\sigma$, если соответствующее значение x таково, что

$$(\xi, \eta) \in \Gamma \Rightarrow (x - \xi)^2 + \eta^2 \neq 0 \text{ или } x \neq \xi + i\eta.$$

Так как $(\xi, \eta) \in \Gamma \Rightarrow (\xi, -\eta) \in \Gamma$, то мы видим, что точка в $\mathcal{L}_\sigma \cap \mathcal{W}$ принадлежит $\mathcal{D}'_\sigma$, если соответствующее x

значение принадлежит СГ, рассматриваемому как подмножество пространства $C=R^2$. Поэтому образ области $\mathcal{D}'_\sigma \cap \mathcal{W}$ по переменной $-x^2$ (линейно связанной с z) получается из СГ конформным отображением.

В частности, легко проверить, что множество $\{z : |\arg(-z)| < \theta\}$, $\cos\theta = \frac{2\mathfrak{M}}{\sigma'} \leqslant 2\frac{\mathfrak{M}}{\sigma}$ содержится в образе области $\mathcal{D}'_\sigma \cap \mathcal{W}$ по переменной z [определяемой в формуле (3.24); см. также (18)]. Пусть $\sigma_0 > \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ — число, такое, что

$$\frac{2\mathfrak{M}}{\sigma_0} = \cos\theta_0 < 1, \quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда для $\sigma > \sigma_0$ $\mathcal{D}'_\sigma \cap \mathcal{W}$ содержит $\{z : |\arg(-z)| < \theta_0\}$. Вместе с предыдущими замечаниями это доказывает следующую лемму.

Лемма 3.10. $\mathcal{T}(\mathcal{H}(\Delta) \cap \mathcal{V}')$ содержит множество вида

$$G_2 \{(z_1, z_2, z_3) : |\arg(-z)| < \theta_0, \; z = 2(z_1 + z_2 - \\ - \mu_1^2 - \mu_2^2) - \Phi;$$

$$|z_1 - z_2 - \mu_1^2 + \mu_2^2| + |z_3 - \sigma^2| < \rho'(z_1 + z_2, \sigma),$$

$$\sigma \text{ действительно } > \sigma_0;$$

$$\operatorname{Im} z_3 > 0, \; z_1 \notin R^-\} \text{ при } \rho'(z_1 + z_2, \sigma) > 0.$$

Множество G_2 получается устранением всех точек, таких, что $z_1 \in R^-$ или $\operatorname{Im} z_3 \leqslant 0$ из окрестности множества F_2:

$$F_2 = \{(z_1, z_2, z_3) : |\arg(-z)| < \theta_0; \; z_1 - z_2 = \mu_1^2 - \mu_2^2;$$

$$z_3 = \sigma^2 \text{ действительно } > \sigma_0^2\}.$$

Переопределяя $\pi_1 + \pi_2$ и $\pi_2 - \pi_1$ (пользуясь $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$ вместо $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$) получаем лемму.

Лемма 3.11. $\mathcal{T}(\mathcal{H}(\Delta) \cap \mathcal{V}')$ содержит множество вида

$$G_3 = \{(z_1, z_2, z_3) : |\arg(-z) < \theta_0|, \; z = 2(z_1 + z_2 - \\ - \mu_1^2 - \mu_2^2) - \Phi;$$

$$|z_1 - z_2 - \mu_1^2 + \mu_2^2| + |2(z_1 + z_2) - z_3 - \sigma^2| < \rho'(z_1 + z_2, \sigma),$$

$$\sigma \text{ действительно } > \sigma_0;$$

$$\operatorname{Im}[2(z_1 + z_2) - z_3] < 0; \; z_1 \notin R^-\} \text{ при } \rho''(z_1 + z_2, \sigma) > 0.$$

Множество G_3 получается устранением из окрестности множества

$$F_3 = \{(z_1, z_2, z_3) : |\arg(-z)| < \theta_0;\ z_1 - z_2 = \mu_1^2 - \mu_2^2;$$
$$2(z_1 + z_2) - z_3 = \sigma^2 \text{ действительно } > \sigma_0^2\}$$

всех точек, таких, что $z_1 \in R^-$ или $\operatorname{Im}[2(z_1+z_2)-z_3] \geqslant 0$.

Аналитическое расширение по переменным s и z

В соответствии с замечаниями гл. 3, § 5, можем получить точки из $\mathscr{H}(\Delta) \cap \mathscr{W}'$ аналитическим расширением множества $(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cap \mathscr{T}(\mathscr{W}')$ в многообразии $\mathscr{T}(\mathscr{W}') = \{(z_1, z_2, z_3) : z_1 \notin R^-;\ z_1 - z_2 = \mu_1^2 - \mu_2^2\}$. В этом многообразии будем пользоваться переменными s, u, z, которые связаны соотношением

$$s + u - z = -t + \sum_{j=0}^{3} m_j^2 - \Phi. \tag{3.25}$$

В $\mathscr{T}(\mathscr{W})$ имеем

$$z = 2(z_1 + z_2 - \mu_1^2 - \mu_2^2) - \Phi = 4(z_1 - \mu_1^2) - \Phi =$$
$$= 4(z_2 - \mu_2^2) - \Phi,$$

$$s = z_3 + \frac{1}{4t}(m_3^2 - m_1^2 + m_0^2 - m_2^2)^2,$$

$$u = 2(z_1 + z_2) - z_3 + \frac{1}{4t}(m_3^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_0^2)^2.$$

Обозначим

$$G_j' = G_j \cap \mathscr{T}(\mathscr{W}')\ (1 \leqslant j \leqslant 3),\quad F_j' = F_j \cap \mathscr{T}(\mathscr{W}')\ (1 \leqslant j \leqslant 3).$$

А. Расширение $G_1' \cup G_2'$, $G_1' \cup G_3'$.

Функция F_1' имеет вид

$$F_1' = \{(s, z) : z_2 \text{ действительно } \leqslant 0;\ \operatorname{Im} z_3 > 0\} =$$
$$= \{(s, z) : z_1 \leqslant \mu_1^2 - \mu_2^2;\ \operatorname{Im} z_3 > 0\},$$

так как из $z_1 \leqslant \mu_1^2 - \mu_2^2$ следует, что $\mathfrak{M}_1^2 - z_1 > \mathfrak{M}_1^2 - \mu_1^2 > 0$.

G_1' имеет вид

$$G_1' = \Re(F_1') \cap \{(s, z) : z_1 \notin R^-\},$$

где $\mathfrak{R}(F_1')$ является открытой окрестностью множества F_1'. При $\mu_1^2-\mu_2^2<0$ удобно пользоваться вместо G_1' областью G_1'', получаемой заменой π_1 на π_2 в лемме 3.2.

$$G_1''=\mathfrak{R}(F_1'')\bigcap\{(s,\ z):z_1\in R^-\},$$

где $\mathfrak{R}(F_1'')$ — открытая окрестность множества F_1'', $F_1''=\{(s,\ z):\ z_1$ действительно $\leqslant 0,\ \operatorname{Im} z_3>0\}$. Поэтому $\mathscr{H}(\Delta)\cap\mathscr{W}'$ содержит в каждом случае множество

$$C_1'''=\mathfrak{R}(\mathscr{E}_1)\bigcap\{(s,\ z):z_1\in R^-\},$$

где $\mathfrak{R}(\mathscr{E}_1)$ — открытая окрестность множества $\mathscr{E}_1=\{(s,\ z):z_1$ и z_2 действительны; $\min\{z_1,\ z_2\}\leqslant 0$; $\operatorname{Im} z_3>0\}$.

Так как $z=4\ (z_1-\mu_1^2)-\Phi=4\ (z_2-\mu_2^2)-\Phi$, то $\mathscr{E}_1=\{(s,\ z):z$ действительно; $z+a(t)\leqslant 0$; $\operatorname{Im} s>0\}$, где

$$a(t)=\min(4\mu_1^2+\Phi,\ 4\mu_2^2+\Phi).$$

Множества G_2' и G_3' задаются согласно

$$G_2'=\mathfrak{R}(F_2')\bigcap\{(s,\ z):\operatorname{Im} s>0;\ z+4\mu_1^2+\Phi\notin R^-\};$$

$$G_3'=\mathfrak{R}(F_3')\bigcap\{(s,\ z):\operatorname{Im} u=\operatorname{Im}(z-s)<0;$$
$$z+4\mu_1^2+\Phi\notin R^-\}.$$

$\mathfrak{R}(F_2')$ и $\mathfrak{R}(F_3')$ являются открытыми окрестностями множеств F_2' и F_3' соответственно:

$$F_2'=\{(s,\ z):|\arg(-z)|<\theta_0;\ s \text{ действительно } >s_0(t)\},$$

$$F_3'\{(s,\ z):|\arg(-z)|<\theta_0;\ u \text{ действительно } >u_0(t)\},$$

$$s_0(t)=\sigma_0^2+\frac{1}{4t}(m_1^2-m_3^2+m_0^2-m_2^2)^2, \tag{3.26}$$

$$\mu_0(t)=\sigma_0^2+\frac{1}{4t}(m_1^2-m_3^2+m_2^2-m_0^2)^2. \tag{3.27}$$

Ради простоты будем пользоваться меньшими открытыми множествами, получаемыми устранением из G_1''', G_2' и G_3' разреза, более «длинного», чем $\{z+4\mu_1^2+\Phi\in 0\}$, а именно: $\{z+a(t)\leqslant 0\}$ (рис. 10). Мы хотим преобразовать множество $G_1'''\cup G_2'\cap\{(s,\ z):z+a(t)\notin R^-\}$ в открытое множество, близкое к «выровненной трубе», к которой мы можем применить теорему о локальной трубе из гл. 2, § 4. Замена переменных

$$s' = \lg(s - s_0); \quad z' = \cos h^{-1}\left[1 - 2\left(-\frac{z}{a}\right)^{\frac{\pi}{\theta_0}}\right]$$

преобразует его в множество вида

$$\mathfrak{N}'(E') \cap \{(s', z'),\ 0 < \operatorname{Im} s' < \pi;\ 0 < \operatorname{Im} z' < \pi\},$$

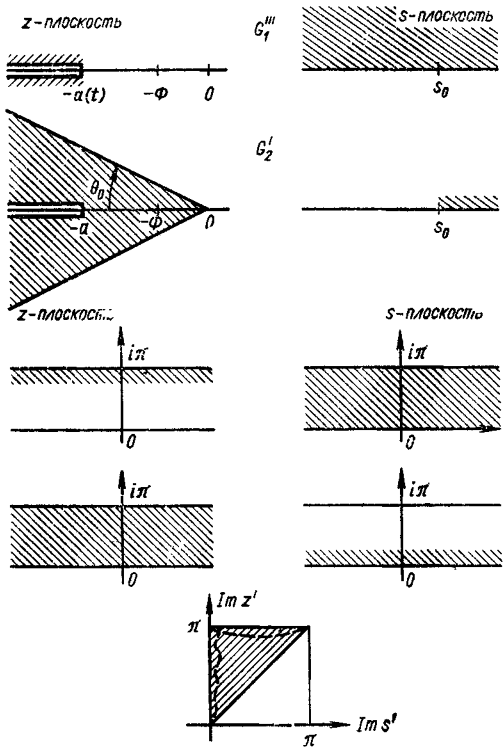


Рис. 10. Расширение множества $G_1''' \cup G_2' \cap \{s, z;\ z + a(t) \not\subset R^-\}$.

где $\mathfrak{N}'(E')$ — открытая окрестность множества E':

$$E' = \{(s', z') : 0 < \operatorname{Im} s' < \pi;\ \operatorname{Im} z' = \pi\} \cup \{(s', z') : \operatorname{Im} s' = 0;\ 0 < \operatorname{Im} z' \leqslant \pi\},$$

которое является выровненной трубой. Мы получим расширение

$$\{(s', z') : 0 < \operatorname{Im} s' < \pi;\ 0 < \operatorname{Im} z' < \pi;\ \operatorname{Im} z' > \operatorname{Im} s'\},$$

из которого извлечем подмножество, являющееся топологическим произведением

$$\{(s', z') : 0 < \operatorname{Im} s' < \psi;\ \psi < \operatorname{Im} z' < \pi\}, \qquad (3.27а)$$

где угол $\psi\,(0<\psi<\pi)$ выбирается так, чтобы область (3.27) содержала точки (s', z'), соответствующие $z=-\Phi$. Это требует, чтобы $\psi<\varphi$, где $0<\varphi<\pi$ и

$$\cos\varphi = 1 - 2\left(\frac{\Phi}{a}\right)^{\frac{\pi}{\theta_0}}. \qquad (3.28)$$

Прообразом области (3.27) по переменной (s, z) является топологическое произведение

$$\{(s, z) : 0 < \arg(s - s_0) < \psi,\ z \in A\}.$$

A является областью (содержащей $-\Phi$), которая содержит множество вида

$$\{z : |\arg(-\Psi - z)| < \chi;\ z + a(t) \notin R^-\}$$

$$\chi = \theta_0\left(1 - \frac{\psi}{\pi}\right) \quad \Psi = a\left(\sin\frac{\psi}{2}\right)^{\frac{2\theta_0}{\pi}} \qquad (3.29)$$

и, следовательно, содержит подобласть B:

$$B = \left\{z : \pi - \chi < \left|\arg\frac{z + \Psi}{z + b}\right| \leqslant \pi;\ z + a(t) \notin R^-\right\},$$

где $b=b(t)>a(t)$. Область B ограничивается двумя симметричными дугами кругов, проходящих через $-b(t)$ и Ψ и частью разреза $\{z : z+a(t) \in R^-\}$, лежащей между $-b$ и $-a$; B содержит $-\Phi$. Наконец, мы получим подобласть Δ_2 области $\mathcal{T}\,(\mathcal{H}(\Delta) \cap \mathcal{W}')$:

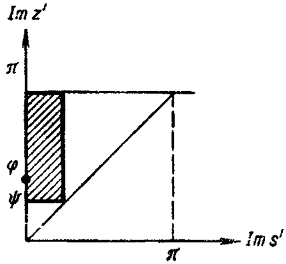
$$\Delta_2 = \{(s, z) : 0 < \arg(s - s_0) < \psi;\ z \in B\}$$

(рис. 11). При помощи такого же метода из $G_1' \cup G_3'$ получим аналитическое расширение

$$\Delta_3 = \{s, z : -\psi < \arg(u - u_0) < 0;\ z \in B\}.$$

Б. Новое расширение.

Обычно легко вычислить оболочку голоморфности для объединения двух топологических произведений по таким же переменным, как объединение двух полидисков. Поэтому сначала извлечем из Δ_3 подобласть Δ_3', которая является топологическим произведением об-



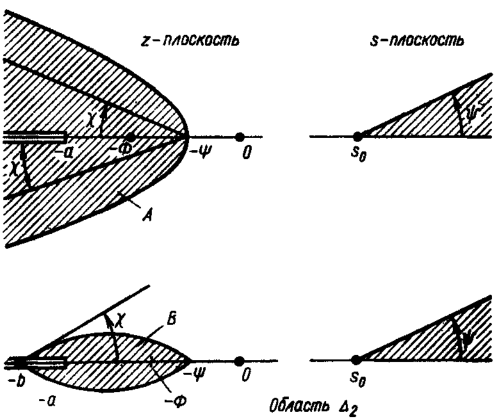


Рис. 11. Построение области Δ_2.

ласти по переменной s и области по переменной z (рис. 12):

$$\Delta_3' = \{(s,\ z) : \pi - \psi < \arg(s - s_2) < \pi;\ z \in B\}, \quad (3.30)$$

$$s_2 = \Phi + \left(\sum_{j=0}^{3} m_j^2\right) - u_0(t) - t + \frac{(b - \Psi)}{2}\left(\mathrm{i} - \frac{2}{\operatorname{tg}\psi}\right)\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}.$$

Затем извлечем из $G_1''' \cup \Delta_2 \cup \Delta_3'$ следующие подмножества:

$$D_1 = G_1''' \bigcap \{(s,\ z) : \operatorname{Im} s > \operatorname{Im} s_2\},$$

$$D_2 = \{(s,\ z) : z \in B;\ \operatorname{Im} s > \operatorname{Im} s_2;\ s \in \Re(s_1 + R_*^+) \bigcup \Re(s_2 + R_*^-)\},$$

где $\Re\ (s_2 + R_*^-)$ — открытая окрестность множества $\{s : s = s_2 - \rho,\ \rho > 0\}$ ($R_*^+ = -R_*^-$ — множество строго по-

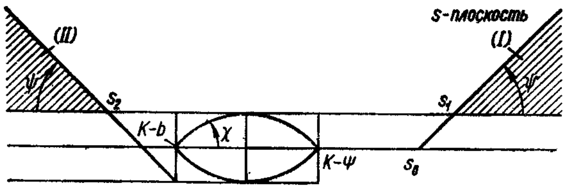


Рис. 12. Построеиие области Δ_3'.

ложнтельных действительных чисел), $\Re\,(s_1 + R_*^+)$ — открытая окрестность множества $\{s : s = s_1 + \rho,\ \rho > 0\}$, где

$$s_1 = s_0 + \frac{(b - \Psi)\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}}{2\operatorname{tg}\psi} + \mathrm{i}\,(b - \Psi)\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}. \qquad (3.31)$$

Отметим, что $\operatorname{Im} s_1 = \operatorname{Im} s_2$.

Область (I) — это $\{s : \operatorname{Im}(s - s_2) > 0,\ 0 < \arg(s - s_0) < \psi\}$.

Область (II) содержится в пересечении всех областей

$$\{s : \pi - \chi < \arg[s - z + t - \sum_j m_j^2 - \Phi + u_0] < \pi\},$$

где z принимает всевозможные значения в B. Константа K равна

$$K = -t + \sum_j m_j^2 + \Phi - u_0.$$

Δ_3' является топологическим произведением области B на (I) $\cup$ (II).

Конформное отображение $s'' = s - \frac{i}{2}(b - \Psi) \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}$,

$$z'' = \operatorname{Arch}\left\{1 - 2\left[-\frac{(z+\Psi)(b-a)}{(a-\Psi)(b+z)}\right]^{\frac{\pi}{\chi}}\right\}$$

преобразует объединения $D_1 \cup D_2$ в пересечение множества

$$\{(s'', z'') : \operatorname{Im} z'' < \pi;\ \operatorname{Im} s'' > 0\}$$

с окрестностью выровненной полутрубы:

$$\{(s'', z'') : \operatorname{Im} z'' = \pi;\ \operatorname{Im} s'' > 0\} \cup \{(s'', z'') : 0 < \operatorname{Im} z'' \leqslant \pi;$$

$$s = s_1'' + \rho,\ \rho > 0,\ \text{или}\ s = s_2'' - \rho',\ \rho' > 0\},$$

$$\text{где}\ s_1'' = \operatorname{Re} s_1,\ s_2'' = \operatorname{Re} s_2.$$

Полутрубой является область в $C^{n+1} = C \times C^n\ (n \geqslant 1)$, которая инвариантна относительно вещественных преобразований первой переменной, т. е. область вида

$$\{w \in C,\ \zeta \in C^n : (\operatorname{Im} w,\ \zeta) \in D \subset R \times C^n\}.$$

Теорема Бремермана [29] (см. также [23, 42]) дает оболочку голоморфности такой области. Здесь мы должны пользоваться обобщением этой теоремы для специального случая. Оно аналогично теореме о локальной трубе в гл. 2, § 4.

Лемма 3.12. Пусть $\tau \to \varphi(\tau)$ — действительная неотрицательная полунепрерывная снизу функция $\tau \in R$ нетождественно равна нулю. Пусть $\zeta \to U(\zeta)$ — наименьшая функция, гармоническая в $\{\zeta \in C,\ \operatorname{Im} \zeta > 0\}$, полунепрерывная снизу в $\{\zeta \in C,\ \operatorname{Im} \zeta \geqslant 0\}$, такая, что для всех действительных ξ $U(\xi) \geqslant \varphi(\xi)$. Обозначим Δ_φ область

$$\Delta_\varphi = \{(w,\ \zeta) \in C^2 : \operatorname{Im} \zeta > 0;\ 0 < \operatorname{Im} w < U(\zeta)\},$$

и пусть Ω — связное открытое множество, равное пересечению области Δ_φ с окрестностью «выровненной полутрубы»

$$\{(w,\ \zeta) \in C^2 : \operatorname{Im} \zeta = 0,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} w < \varphi(\zeta)\} \cup$$

$$\cup \{(w,\ \zeta) \in C^2 : \operatorname{Im} \zeta > 0,\ \operatorname{Im} w = 0\}.$$

Оболочкой голоморфности множества Ω является Δ_φ.

Эта лемма может быть доказана почти таким же методом, что и теорема о «локальной трубе». Легко доказать также «вариант с обобщенными функциями» этой леммы, как в случае леммы Малгранжа — Цернера. Если φ является непрерывной функцией, убывающей достаточно быстро, то $U(\zeta)$ может быть вычислена с помощью формулы

$$U(\zeta) = \operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} \ (\operatorname{Im} \zeta > 0),$$

которая справедлива также тогда, когда $\varphi(\tau)$ кусочнонепрерывна и убывает достаточно быстро на бесконечности. В других случаях $U(\zeta)$ может быть получена процедурой стремления к пределу. Лемма 3.6 является только примером широкого класса родственных теорем, которые читатели сами могут легко получить.

Чтобы применить лемму 3.12 к нашей задаче, достаточно положить

$$w = \pi - z,\ \zeta = s'',\ \varphi(\tau) = \pi\theta(\tau - s_1'') + \pi\theta(s_2'' - \tau).$$

Переходя к пределу при $T \to \infty$ в

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} \ (\operatorname{Im} \zeta > 0),$$

получим

$$U(\zeta) = \pi - \arg(\zeta - s_1'') + \arg(\zeta - s_2'')$$

с условиями $0 < \arg(\zeta - s_1'') < \pi$, $0 < \arg(\zeta - s_2'')$. Мы получим следующее расширение по переменным s_1'', z'':

$$\{(s'', z'') : \operatorname{Im} s'' > 0;\ \arg(s'' - s_1'') - \arg(s'' - s_2'') < \operatorname{Im} z'' < \pi\}.$$

При $z = -\Phi$, z'' принимает значение

$$z''\Big|_{z=-\Phi} = \operatorname{Arch}\left\{1 - 2\left[\frac{(\Phi - \Psi)(b - a)}{(a - \Psi)(b - \Phi)}\right]^{\frac{\pi}{\chi}}\right\} =$$

$$= i \operatorname{Arccos}\left\{1 - 2\left[\frac{(\Phi - \Psi)(b - a)}{(a - \Psi)(b - \Phi)}\right]^{\frac{\pi}{\chi}}\right\} = i\varphi''.$$

Пересечением этой области со множеством $\{(s'', z''):z''=i\varphi''\}$ будет $\{(s'', z''):z''=i\varphi'';\ \arg(s''-s_1'')-\arg(s''-s_2'')<\varphi'',\ \operatorname{Im} s''>0\}$.

Возвращаясь к переменным (s, z) и пользуясь областями Δ_2 и Δ_3, находим, что $\mathcal{T}\mathcal{H}(\Delta)\cap\mathcal{W}'$ содержит

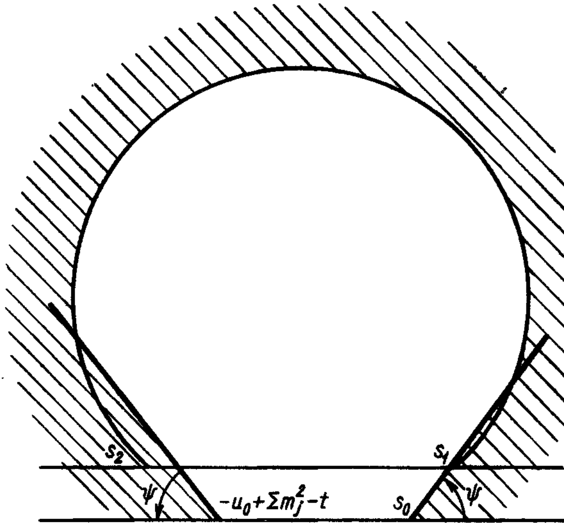


Рис. 13. Область $D(t)$ (заштрихована) (угол ψ увеличен, а радиус круга — уменьшен).

множество $\{s, z:z=-\Phi,\ s\in D(t)\}$, где $D(t)$ — область в C, определяемая следующим образом:

$$D(t)=\{s:\arg(s-s_0)<\psi\}\cup\{s:\pi-\psi<\arg(s+t+u_0-\sum_{j=0}^{3}m_j^2)<\pi\}\cup\left\{s:\operatorname{Im}s>\frac{b-\Psi}{2}\operatorname{tg}\frac{\chi}{2};\ 0<\arg(s-s_1)-\arg(s-s_2)<\varphi''\right\}$$

(рис. 13). $D(t)$ содержит пересечение окрестности ∞ с $\{s:\operatorname{Im}s>0\}$.

Отметим, что множество

$$\{(s,\ t,\ u,\ \zeta_j):t=t_1;\ \zeta_j=m_j^2;\ s\in D(t_1)\},$$

где t_1 действительно, строго отрицательно и не пересекается с многообразием $Q(s, t, u, \zeta)=0$, и вследствие этого $I(\mathscr{H}(\Delta))$ содержит открытую окрестность $W_t^+(t_1)$, которая, в частности, содержит множество вида

$$\Omega_t^+(t_1) = \{(s, t, u, \zeta_j) : \zeta_j = m_j^2 (0 \leqslant j \leqslant 3);\ \operatorname{Im} s > 0;$$
$$s > R(t_1);\ |t - t_1| < \varepsilon(t_1, s)\}.$$

Осуществляя очевидные перестановки, мы видим, что $I(\mathscr{H}(\Delta))$ содержит также множество $\Omega_t^-(t_1)$ (определяемое заменой условия $\operatorname{Im} s>0$ на условие $\operatorname{Im} s<0$ в определении $\Omega_t^+(t_1)$) и множества $\Omega_u^\pm(u_1)$ для каждого действительного $u_1<0$ (или s_1, $s_1<0$).

Очевидно, что $\Omega_t^+(t_1)$ связывает s'^+ и u'^-. Имеем следующую цепь подмножеств из $I(\mathscr{H}(\Delta))$, каждое из которых пересекает предыдущее и последующее подмножества:

$$S'^+,\ \Omega_t^+(t_1);\ U'^-;\ \Omega_s^-(s_1);\ T'^+;\ \Omega_u^+(u_1);\ S'^-;\ \Omega_t^-(t_1);$$
$$U'^+;\ \Omega_s^+(s_1);\ T'^-;\ \Omega_u^-(u_1);\ S'^+.$$

Отметим, наконец, что штейнмановские тождества обеспечивают аналитичность «абсорбтивной части» (скачок амплитуды рассеяния через S-разрез) по переменным z и α для вещественных значений s, меньших чем s_0 (абсорбтивная часть является обобщенной функцией по s). При помощи метода, аналогичного классическим доказательствам дисперсионных соотношений (см. лекции Хеппа), можно получить существенно более широкую перекрестную область. Мы можем также найти плоскость s с разрезом, если массы удовлетворяют условиям, при которых классические доказательства дисперсионных соотношений пригодны. Однако мы можем пользоваться интегралами Коши вдоль конечных контуров, так как мы уже знаем, что амплитуда рассеяния аналитична в области:

$$\{s, z : |s| < R(t),\ \operatorname{Im} s \neq 0;\ z \in B_1\},$$

где B_1 — область, содержащая вещественный интервал $(-a(t), -\Phi)$ и точки, близкие к разрезу между $-b$ и $-a$. Чтобы строго вывести это доказательство, мы должны показать, что «абсорбтивная часть» может быть определена при фиксированных $t<0$, $\zeta_j-\zeta_k=m_j^2-m_k^2$ как обобщенная функция по s и аналитическая функция по z и α. Это доказательство весьма длинно и приводиться здесь ие будет. Его преимущество заключается в том, что оно справедливо также в теории Хаага и Араки или справедливо для регуляризованных о. з. ф. Однако мы можем написать дисперсионное соотношение (даже если существует необходимая аналитичность) только в том случае, когда поведение амплитуды на бесконечности может быть контролировано (см. лекции Хеппа).

Пользуясь свойством перекрестной симметрии и некоторыми дополнительными предположениями относительно поведения амплитуды на бесконечности, Мартэн дал весьма общее доказательство теоремы Померанчука.

§ 6. Заключительные замечания

Тождества Штейнмана для n-точечной функции

Результаты § 2 и 3, гл. 3, были обобщены Бросом, который показал, что каждому элементарному носителю $\widehat{K}$ (соответствующему дереву T_k, см. § 2) мы можем сопоставить обобщенную функцию $\tilde{\varphi}_{\widehat{K}}$ с носителем в $\widehat{K}$, такую, что имеет место следующее свойство: пусть S — ячейка ($S\in\Xi_{n+1}$) и E'_s — множество всех элементарных носителей $\widehat{K}$, таких, что соответствующий $\widehat{K}\in\Xi_{n+1}$ (см. гл. 1, § 2) содержит S.

Тогда

$$\tilde{r}^S(x)=\sum_{\widehat{K}\in E'_S}\tilde{\varphi}_{\widehat{K}}(x).$$

Эти уравиения «решают» тождества Штейнмана (т. е. из них вытекают эти тождества). Выбор $\tilde{\varphi}_k$ довольно произволен. Из этого разложения можно вывести некоторые аналитические свойства.

Аналитичность вблизи физических точек для n-точечной функции

1. Отметим прежде всего, что леммы 3.1 и 3.2 имеют обобщения на случай n-мерных векторов (см. [52]) и могут быть использованы для того, чтобы «свести соседние трубы». Итак, некоторые части разрезов Γ_x могут быть изолированы. Однако очень трудно изолировать эти разрезы вблизи точек, где две или больше из них пересекаются.

2. Наличие большого числа разрезов Γ_x, на которых лежит физическая точка (в любом канале) в случае n-точечной функции для $n \geqslant 5$ делает невозможным применение метода гл. 3, § 4. Более того, существуют контрпримеры, показывающие, что для n-точечной функции ($n \geqslant 5$) вряд ли сможем получить аналитнчность только из линейной программы в разрезанных окрестностях физических точек. Мы можем иадеяться в лучшем случае, что существует аиалитичность на массовой оболочке в областях, локально похожих на конические трубы в окрестностях физических точек. Однако даже это утверждение было доказано только для некоторого класса физических точек (при помощи локальиой теоремы об острие клина). Ничего не известно относительно свойства перекрестной симметрии на массовой оболочке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Källen G. Kgl. danske. Vid. selskab. Mat.-fys. medd., 27, No. 12 (1953).
2. Froissart M. «Dispersion Relations and their Connection with Cousality». E. Wigner ed. N. Y., Academic Press, 1964.
3. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношеиий. М., Физматгиз, 1958.
4. Wightman A. S. Relation Dispersion et Particles Elementaires. Paris, Herman, 1960.
5. Стритер Р. Ф., Вайтман А. С. PCT, спин, статистика и все такое. Перев. с англ. М., «Наука», 1966.
6. Robinson D. W. Axiomatic Fild Theory. Vol. 1. Gordon and Breach, N. Y., 1966.
7. Hörmander L. Linear Partial Differential Operators. Berlin, Springer-Verlag, 1963.
8. Lehman H., Symanzik K., Zimmermann W. Nuovo cimento, 1, 205 (1954).
9. Lehman H., Symanzik K., Zimmermann W. Nuovo cimento, 6, 319 (1957).

10. Glaser V., Lehman H., Zimmermann W. Nuovo cimento, **6**, 1122 (1957).
11. Araki H. Einführung in der axiomatische Quantenfeldtheory Mineographed Lectures notes. Zurich, E. T. H. 1961—1962.
12. Jost R. Helv. phys. acta, **31**, 263 (1958).
13. Steinmann O. Helv. phys. acta, **33**, 257 (1960).
14. Steinmann O. Helv. phys. acta, **33**, 347 (1960).
15. Ruell D. Thesis. Brussels, 1959.
16. Ruell D. Nuovo cimento, **19**, 356 (1961).
17. Araki H. J. Math. and Phys., **2**, 163 (1961).
18. Araki H., Burgoyne N. Nuovo cimento, **18**, 342 (1960).
19. Burgoyne N. Thesis. Princeton University, unpublished.
20. Bros J. Thesis, 1965.
21. Bochner S., Martin W. Several Complex Variables Princeton, Princeton University Press 1948.
22. Gunning R., Rossi H. Analytic Functions of Several Variables. N. Y., Prentice Hall, Enlewood Cliffs, 1965.
23. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М., «Наука», 1964.
24. Hörmander L. Linear Partial Differential Operators. Berlin, Springer-Verlag, 1963.
25. Malgrange B. Lectures on the Theory of Functions of Several Complex Variables. Bombay, Tata Institute, 1958.
26. Фукс Б. А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. Т. 1, 2. М., Физматгиз, 1962 — 1963.
27. Cartan H., Thullon P. Nuovo cimento, Math. Ann., **106**, 617 (1932).
28. Leray J. Bull. Soc. Math. France, **85**, 414 (1957).
29. Bremermann H. J. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, **5** (1951).
30. Zerner M. Les functions Holomorphes a valeurs vectorielles et leurs valeurs aux bords. Mineographed notes of a series of Lectures. Orsay, 1961.
31. McKenna J. Thesis. Princeton University, unpublished.
32. Zerner M. Mineographed notes of a seminar given in Marseilles (1961).
33. Владимиров В. С. Труды Матем. ин-та АН СССР, **60**, 101 (1961).
34. Borchers H. J. Nuovo cimento, **19**, 781 (1961).
35. Bourbaki N. Espaces Vectoriels Topologiques. Chap. 1, 2. Paris, Herman, 1953.
36. Schwarz L. Medd. Lunds Mat. Seminar, Suppl. p. 196 (1952).
37. Gårding L., Lions J. Nuovo cimento, Suppl., **14**, 9 (1959).
38. Streater R. F. J. Math. and Phys., **3**, 256 (1962).
39. Bros J. Seminaire Lelong, No. 8. Paris, 1962.
40. Йост Р. Общая теория квантовых полей. Перев. с англ. М., «Мир», 1967.
41. Källen G., Toll J. Helv. phys. acta, **33**, 753 (1960).
42. Brown W. S. Thesis. Princeton University, 1960.
43. Brown W. S. J. Math. and Phys., **3**, 221 (1962).
44. Källen G., Toll J. Helv. phys. acta, **33**, 753 (1960).
45. Streater R. F. Proc. Roy. Soc., **256**, 39 (1960).
46. Ruell D. Helv. phys. acta, **34**, 587 (1961).
47. Lehman H. Nuovo cimento, Suppl., **14**, 153 (1959).
48. Lehman H. Nuovo cimento, **10**, 579 (1958).

49. Lehman H. Unpublished lecture at Internat. School of Physics «Enrico Fermi». Varenna (Italy), 1963.
50. Bremermann H. J., Ochme P., Taylor J. G. Phys. Rev., **109**, 2178 (1958).
51. Hepp K. Helv. phys. acta, **37**, 639 (1964).
52. Bros J., Epstein H., Glaser V. Nuovo cimento, **31**, 1265 (1964).
53. Bros J., Epstein H., Glaser V. Commun. Math. Phys., **1**, 240 (1965).
54. Froissart M., Omnès R. Mandelstam Theory and Regge Poles. N. Y., W. A. Benjamin, 1963.
55. Dyson F. J. Phys. Rev., **110**, 1460 (1958).
56. Bros J., Messia A., Stora R. J. Math. and Phys., **2**, 639 (1961).
57. Jost R., Lehman H. Nuovo cimento, **5**, 1598 (1957).

СОДЕРЖАНИЕ

Хепп К., Эпштейн С.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В ЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Редактор *В. Н. Безрукова*
Художественный редактор *А. С. Александров*
Художник *А. И. Шавард*
Технический редактор *А. Л. Гулина*
Корректор *Н. А. Смирнова*

Сдано в набор 6/VIII 1969 г. Подписано к печати 29/I 1971 г. Формат 84×108$^1/_{32}$ Бумага типографская № 2 Усл. печ. л. 12,6 Уч.-изд. л. 12,5 Тираж 2700 экз. Цена 1 р. 46 к. Зак. изд. 68058 Зак. тип. 954
Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Моск. тип. № 6 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Ж-88, 1-й Южно-портовый пр., 17.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В 1971 ГОДУ ВЫЙДЕТ В СВЕТ КНИГА

БИЛЕНЬКИЙ С. М. **Введение в диаграммную технику Фейнмана. М.**, Атомиздат, 1971 (II кв.), 15 л., 10 000 экз, 1 р. 70 к, в переплете, 2-3-2.

Диаграммы Фейнмана получили широкое распространение в физике. Однако имеется мало книг, в которых техника диаграмм Фейнмана излагалась бы в форме, доступной для экспериментаторов. Лекции по этому вопросу, читавшиеся автором в течение ряда лет физикам-экспериментаторам и студентам, пользовались неизменным успехом.

В книге излагаются основы квантовой теории поля и диаграммной техники Фейнмана. Подробно рассмотрены квантованные скалярное, спинорное и векторное поля. Детально излагается аппарат теории возмущений и вводятся диаграммы Фейнмана.

Книга рассчитана на физиков-экспериментаторов и студентов физических факультетов старших курсов.

План 1971 г., п. 5

Заказы на книги принимают книжные магазины, распространяющие научно-техническую литературу.

В Москву заказы направляйте по адресу: Москва, Центр, ул. Петровка, 15. Книжный магазин № 8.

АТОМИЗДАТ