*Die Grundlehren
der Mathematischen
Wissenschaften
Band 131*

TOPOLOGICAL METHODS IN ALGEBRAIC GEOMETRY

F. HIRZEBRUCH
UNIVERSITY OF BONN

THIRD ENLARGED EDITION

NEW APPENDIX AND TRANSLATION
FROM THE SECOND GERMAN EDITION
BY R.L.E. SCHWARZENBERGER
UNIVERSITY OF WARWICK

WITH AN ADDITIONAL SECTION
BY A. BOREL
INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON

*Springer-Verlag
New York 1966*

Ф. ХИРЦЕБРУХ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
А. БОРЕЛЯ И Р. ШВАРЦЕНБЕРГЕРА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Б. Б. ВЕНКОВА

*Издательство «Мир»
Москва 1973*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ф. Хирцебрух

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор *В. И. Авербух*
Художник *Г. Д. Коняхина.* Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Ф. Х. Третьякова.* Корректор *О. Ф. Иванова*

Сдано в набор 10/VIII 1972 г. Подписано к печати 23/V 1973 г. Бумага тип. № 3 60×90¹/₁₆=8,75 бум. л., 17,5 печ. л. Уч.-изд. л. 17,67. Изд. № 1/6832. Цена 1 р. 80 к. Зак. 296

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР", Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

УДК 519.4

Вышедший в серии «Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften» труд известного немецкого математика посвящен обстоятельному и систематическому изложению принадлежащего автору доказательства теоремы Римана — Роха, одной из основных теорем алгебраической геометрии. В связи с этим в книге изложены многие факты дифференциальной топологии и дифференциальной геометрии, теории пучков, теории векторных расслоений, теории комплексных многообразий, теории характеристических классов и теории кобордизмов.

Книга представляет интерес для топологов, алгебраистов, геометров и всех лиц, занимающихся современными вопросами глобального анализа. Она доступна студентам старших курсов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

Х $\frac{0223-038}{041(01)-73}$

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Книга, перевод которой предлагается вниманию читателей, является одним из наиболее известных сочинений по алгебраической геометрии за последние 20 лет. Эта книга не совсем обычна. Ее целью является доказательство всего лишь одной теоремы из алгебраической геометрии — теоремы Римана — Роха — Хирцебруха, причем оно и было впервые опубликовано как раз в первом издании этой книги (1956 г.). Так что книгу можно рассматривать и как оригинальную научную работу.

Классическая теорема Римана — Роха является основной теоремой теории алгебраических кривых. Она позволяет в благоприятных случаях вычислять размерность пространства мероморфных функций на неособой проективной алгебраической кривой, полюсы которых находятся в данных точках и имеют порядки, не превышающие заданных чисел.

Хирцебруху принадлежит глубокое обобщение этой теоремы на многомерные алгебраические многообразия. Теорема Хирцебруха при определенных условиях также позволяет вычислять размерность пространства мероморфных функций с заданными особенностями на неособом проективном алгебраическом многообразии произвольной размерности и даже позволяет вычислять (опять-таки при определенных условиях) размерность пространства голоморфных сечений в комплексно-аналитических векторных расслоениях. Эти размерности вычисляются с помощью характеристических классов многообразия и расслоения. От большинства известных ранее приложений топологии к алгебраической геометрии результаты Хирцебруха отличает то, что ему удалось связать алгебраическую геометрию с дифференциальной топологией, в частности с теорией кобордизмов Тома и с теорией характеристических классов.

Теорема Хирцебруха (которая в книге называется теоремой Римана — Роха) имеет многочисленные приложения внутри алгебраической геометрии (некоторые из них приведены в § 23). Однако значение теории Хирцебруха этим не исчерпывается. Его идеи оказали огромное влияние на развитие ряда других разделов математики, интенсивно развивающихся в настоящее время. Достаточно упомянуть глобальную теорию эллиптических операторов, построенную Атьёй и Зингером, или K-теорию, играющую такую важную роль в современной алгебраической топологии. Первое доказательство теоремы Атьи — Зингера об индексе моделирует доказательство Хирцебруха теоремы Римана — Роха (см. § 25).

Помимо доказательства теоремы Римана — Роха книга содержит прекрасное изложение обширного вспомогательного материала. Часть этого материала изложена довольно подробно: это пучки, расслоения, характеристические классы; часть — более конспективно: это кобордизмы Тома, теория Картана — Серра когерентных пучков, теория Ходжа, теоремы Кодаиры и т. д.

Настоящее издание представляет собой перевод с третьего, английского издания, дополненного по сравнению со вторым (немецким) двумя приложениями. В приложении 1, написанном Шварценбергером (переводчиком на английский), дан обзор основной литературы по теореме Римана — Роха, по состоянию на 1966 г. Приложение 2 — это работа А. Бореля «Одна спектральная последовательность для комплексно-аналитических расслоений», на которую имелись ссылки еще в первом издании книги, но которая впервые увидела свет лишь в качестве приложения к третьему изданию.

Переводчик расширил библиографию, добавив ряд работ, появившихся после 1966 г., и написал соответствующие библиографические замечания (см. конец книги).

Б. Б. Венков

МОИМ УЧИТЕЛЯМ
ГЕНРИХУ БЕНКЕ И ХАЙНЦУ ХОПФУ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В последние годы в алгебраической геометрии и в теории функций многих комплексных переменных успешно применялись новые топологические методы, в особенности теория пучков, построенная Ж. Лере.

А. Картан и Ж.-П. Серр показали, как можно переформулировать в терминах теории пучков фундаментальные теоремы о голоморфно полных многообразиях (многообразиях Штейна). Поскольку области голоморфности являются многообразиями Штейна, из этих теорем следуют многие факты теории функций. Они приложимы также к алгебраической геометрии, так как дополнение к гиперплоскому сечению алгебраического многообразия есть многообразие Штейна. С помощью этих и других методов Серру удалось получить важные результаты об алгебраических многообразиях. Недавно многие из его результатов были доказаны для многообразий, определенных над полем произвольной характеристики.

К. Кодаира и Д. Спенсер также с большим успехом применили теорию пучков в алгебраической геометрии. Их методы существенно отличаются от методов Серра: они используют технику, пришедшую из дифференциальной геометрии (гармонические интегралы и т. п.), и совсем не используют теории многообразий Штейна.

Атья и Ходж с успехом применили теорию пучков к изучению интегралов второго рода на алгебраических многообразиях.

Я имел возможность работать вместе с К. Кодаирой и Д. Спенсером во время пребывания в Институте высших исследований в Принстоне с 1952 по 1954 гг. Моей целью было применить к алгебраической геометрии, наряду с теорией пучков, теорию характеристических классов и новые результаты Р. Тома о гладких многообразиях. В связи с приложениями к алгебраической геометрии я изучал и более ранние работы Тодда. В Институте я сотрудничал с А. Борелем, вел продолжительную переписку с Р. Томом, у меня была возможность следить за перепиской Кодаиры и Спенсера с Серром. Таким образом, пребывание в Принстоне дало мне очень много, и я хочу выразить мою искреннюю благодарность А. Борелю, К. Кодаире, Ж.-П. Серру, Д. Спенсеру и Р. Тому.

Эта книга выросла из рукописи, предназначавшейся для опубликования в каком-нибудь журнале и содержавшей изложение результатов, полученных мною в Принстоне. Профессор Ф. Шмидт предложил мне написать на ее основе обзор для шпрингеровской серии Ergebnisse der Mathematik. Некоторые части первоначальной рукописи остались совсем без изменений; в то же время другие части, более обзорного характера, были существенно расширены. В результате получилась эта книга — нечто среднее между обзором, учебником и оригинальной статьей. Я весьма признателен профессору Ф. Шмидту за проявленный им интерес к моей работе.

Мой долг — выразить особенную благодарность Институту высших исследований в Принстоне за предоставленную мне возможность в течение двух лет без помех работать в чрезвычайно стимулирующей математической обстановке. Я хочу поблагодарить Эрлангенский университет, который предоставил мне отпуск на этот период и всячески поддерживал меня; поблагодарить факультет наук Мюнстерского университета и особенно профессора Г. Бенке за согласие принять эту книгу в качестве диссертации; поблагодарить общество содействия Мюнстерского университета за финансовую помощь во время окончательной подготовки рукописи. Я весьма обязан Р. Реммерту и Г. Шейе за их помощь при чтении корректур и Г. Настольду за составление указателей. Наконец, последнюю по месту, но не по важности, благодарность я хочу принести издательству, которое великодушно шло навстречу всем моим пожеланиям.

Ф. Хирцебрух

Файн Холл, Принстон
23 января 1956

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

За десять лет, прошедших со времени опубликования первого издания, основные результаты были распространены в нескольких направлениях. С одной стороны, Гротендик обобщил теорему Римана — Роха для алгебраических многообразий на случай отображений проективных алгебраических многообразий над основным полем произвольной характеристики. С другой стороны, Атья и Зингер доказали теорему об индексе для эллиптических дифференциальных операторов на гладких многообразиях, которая содержит в качестве частного случая теорему Римана — Роха для произвольного компактного комплексного многообразия.

Параллельно совершенствовались теоремы целочисленности для характеристических классов. Для гладких многообразий первоначально они были выведены сложным путем, исходя из почти комплексного и алгебраического случаев. Теперь их получают прямо из теорем об отображениях компактных гладких многообразий, аналогичных теореме Римана — Роха в форме Гротендика. Основным рабочим инструментом служит при этом кольцо $K(X)$, образованное из полукольца классов изоморфизмов комплексных векторных расслоений над топологическим пространством X, вместе с теоремой периодичности Ботта, описывающей это кольцо в случае, когда X — сфера. Теоремы целочисленности следуют также из теоремы Атьи — Зингера об индексе, точно так же, как из теоремы Римана — Роха для алгебраических многообразий следует целочисленность рода Тодда.

Совсем недавно Атья и Ботт получили теоремы о неподвижных точках типа теоремы Лефшеца. При некоторых условиях голоморфное отображение компактного комплексного многообразия V в себя действует на группах когомологий многообразия V с коэффициентами в пучке ростков голоморфных сечений комплексно-аналитического векторного расслоения W над V. Для одного специального класса голоморфных отображений Атья и Ботт нашли формулу, связывающую знакопеременную сумму следов этих действий с множеством неподвижных точек рассматриваемого отображения. В случае тождественного отображения этот результат сводится к теореме Римана — Роха. В качестве другого приложения получается формула Ленглендса (см. п. 22.3) для размерности пространства автоморфных форм. Атья и Ботт провели исследования для произвольных эллиптических операторов и гладких отображений и вывели формулу следа, обобщающую теорему об индексе. Для всех этих результатов имеются соответствующие топологические варианты, которые являются обобщениями теорем целочисленности.

Одной из целей настоящего, английского издания было учесть, в рамках первоначального текста, это дальнейшее развитие, в особенности все то, что непосредственно связано с родом Тодда.

Выполнение этой задачи взял на себя Р. Шварценбергер, осуществивший перевод на английский язык второго немецкого издания. Он написал библиографические замечания к каждой главе и приложение 1, содержащее обзор, большей частью без доказательств, некоторых приложений и обобщений теоремы Римана — Роха, полученных после 1956 г. Теоремы Атьи и Ботта о неподвижных точках упомянуты лишь совсем кратко, так как они стали известны уже после того, как рукопись приложения 1 была закончена. Кроме того добавлено приложение 2, представляющее собой работу А. Бореля, на которую имелась ссылка в первом издании как на готовящуюся к печати, но которая так и не была до сих пор опубликована. Чтобы сделать книгу более удобной для ссылок, некоторые улучшения и исправления внесены в основной текст.

За исключением теорем 2.8.4, 2.9.2, 2.11.2, 4.11.1—4.11.4, 10.1.1, 16.2.1 и 16.2.2, все теоремы нумеруются так же, как в первом издании.

Автор благодарит Р. Шварценбергера за его квалифицированную работу по переводу и редактированию книги и за написание приложения и А. Бореля за разрешение включить его работу в книгу.

Мы также благодарны профессору Ф. Шмидту, предложившему, чтобы это издание появилось в шпрингеровской серии Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Д. Арлту, Э. Брискорну и К. Майеру, внимательно прочитавшим всю рукопись, и Энн Гарфилд, подготовившей машинописный текст. Наконец, мы благодарны издательству за постоянное сотрудничество.

Ф. Хирцебрух
Р. Шварценбергер

Бони и Ковентри
23 января 1966

Введение

Теория пучков, развитая Лере [1], [2] и примененная им в различных топологических вопросах, недавно нашла применение в алгебраической геометрии и в теории функций нескольких комплексных переменных. Эти приложения, принадлежащие главным образом Картану, Серру, Кодаире, Спенсеру, Атье и Ходжу, сделали возможным развить единый общий подход к обеим теориям. В настоящей книге развивается далее направление исследований, связанное с алгебраической геометрией. Кроме того, изложены приложения результатов Тома о кобордизмах гладких многообразий, имеющие самостоятельный интерес. Теория пучков и теория кобордизмов образуют в совокупности тот фундамент, на котором строится современная теория алгебраических многообразий. В данном введении в п. 0.1—0.8 дается обзор результатов, излагаемых в книге. Точные определения не приводятся, их можно найти в основном тексте. Замечания по терминологии и обозначениям, принятым в книге, собраны в конце введения в п. 0.9.

0.1. Компактное комплексное многообразие V (не обязательно связное) называется *алгебраическим многообразием*, если оно допускает комплексно-аналитическое вложение в качестве подмногообразия в комплексное проективное пространство некоторой размерности. По теореме Чжоу [1] это определение эквивалентно классическому определению неособого алгебраического многообразия. Алгебраические многообразия в этом смысле часто называют также неособыми проективными многообразиями. В п. 0.1—0.6 мы будем рассматривать только алгебраические многообразия.

Пусть V_n — алгебраическое многообразие комплексной размерности n. Исторически арифметический род для V_n был определен четырьмя различными способами. С помощью постулационной формулы (характеристического многочлена Гильберта) можно ввести целые числа $p_a(V_n)$ и $P_a(V_n)$. Это два первых определения. Севери предположил, что

$$p_a(V_n) = P_a(V_n) = g_n - g_{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} g_1, \qquad (1)$$

где g_i — число комплексно-линейно независимых голоморфных дифференциальных форм на V_n степени i (i-кратных дифференциалов первого рода). Альтернированную сумму чисел g_i можно для произвольных эллиптических операторов и гладких отображений и вывели формулу следа, обобщающую теорему об индексе. Для всех этих результатов имеются соответствующие топологические варианты, которые являются обобщениями теорем целочисленности.

Одной из целей настоящего, английского издания было учесть, в рамках первоначального текста, это дальнейшее развитие, в особенности все то, что непосредственно связано с родом Тодда.

Выполнение этой задачи взял на себя Р. Шварценбергер, осуществивший перевод на английский язык второго немецкого издания. Он написал библиографические замечания к каждой главе и приложение 1, содержащее обзор, большей частью без доказательств, некоторых приложений и обобщений теоремы Римана — Роха, полученных после 1956 г. Теоремы Атьи и Ботта о неподвижных точках упомянуты лишь совсем кратко, так как они стали известны уже после того, как рукопись приложения 1 была закончена. Кроме того добавлено приложение 2, представляющее собой работу А. Бореля, на которую имелась ссылка в первом издании как на готовящуюся к печати, но которая так и не была до сих пор опубликована. Чтобы сделать книгу более удобной для ссылок, некоторые улучшения и исправления внесены в основной текст.

За исключением теорем 2.8.4, 2.9.2, 2.11.2, 4.11.1—4.11.4, 10.1.1, 16.2.1 и 16.2.2, все теоремы нумеруются так же, как в первом издании.

Автор благодарит Р. Шварценбергера за его квалифицированную работу по переводу и редактированию книги и за написание приложения и А. Бореля за разрешение включить его работу в книгу.

Мы также благодарны профессору Ф. Шмидту, предложившему, чтобы это издание появилось в шпрингеровской серии Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Д. Арлту, Э. Брискорну и К. Майеру, внимательно прочитавшим всю рукопись, и Энн Гарфилд, подготовившей машинописный текст. Наконец, мы благодарны издательству за постоянное сотрудничество.

Ф. Хирцебрух
Р. Шварценбергер

Бонн и Ковентри
23 января 1966

Введение

Теория пучков, развитая Лере [1], [2] и примененная им в различных топологических вопросах, недавно нашла применение в алгебраической геометрии и в теории функций нескольких комплексных переменных. Эти приложения, принадлежащие главным образом Картану, Серру, Кодаире, Спенсеру, Атье и Ходжу, сделали возможным развить единый общий подход к обеим теориям. В настоящей книге развивается далее направление исследований, связанное с алгебраической геометрией. Кроме того, изложены приложения результатов Тома о кобордизмах гладких многообразий, имеющие самостоятельный интерес. Теория пучков и теория кобордизмов образуют в совокупности тот фундамент, на котором строится современная теория алгебраических многообразий. В данном введении в п. 0.1—0.8 дается обзор результатов, излагаемых в книге. Точные определения не приводятся, их можно найти в основном тексте. Замечания по терминологии и обозначениям, принятым в книге, собраны в конце введения в п. 0.9.

0.1. Компактное комплексное многообразие V (не обязательно связное) называется *алгебраическим многообразием*, если оно допускает комплексно-аналитическое вложение в качестве подмногообразия в комплексное проективное пространство некоторой размерности. По теореме Чжоу [1] это определение эквивалентно классическому определению неособого алгебраического многообразия. Алгебраические многообразия в этом смысле часто называют также неособыми проективными многообразиями. В п. 0.1—0.6 мы будем рассматривать только алгебраические многообразия.

Пусть V_n — алгебраическое многообразие комплексной размерности n. Исторически арифметический род для V_n был определен четырьмя различными способами. С помощью постулационной формулы (характеристического многочлена Гильберта) можно ввести целые числа $p_a(V_n)$ и $P_a(V_n)$. Это два первых определения. Севери предположил, что

$$p_a(V_n) = P_a(V_n) = g_n - g_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} g_1, \qquad (1)$$

где g_i — число комплексно-линейно независимых голоморфных дифференциальных форм на V_n степени i (i-кратных дифференциалов первого рода). Альтернированную сумму чисел g_i можно рассматривать как третье определение арифметического рода (подробности см., например, у Севери [1]). Соотношение (1) легко устанавливается при помощи теории пучков (Кодаира и Спенсер [1]), и, следовательно, первые три определения арифметического рода эквивалентны.

Вид знакопеременной суммы g_i в (1) несколько неудобен, и мы слегка видоизменим классическое определение. Мы будем называть *арифметическим родом* алгебраического многообразия V_n число

$$\chi(V_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g_i. \tag{2}$$

Целое число g_0 в (2) равно числу линейно независимых голоморфных функций на V_n и потому совпадает с числом связных компонент многообразия V_n. Принято называть g_n *геометрическим родом* для V_n, а g_1 — *иррегулярностью* для V_n. В случае $n=1$ связная алгебраическая кривая V_1 представляет собой компактную риманову поверхность, гомеоморфную сфере с p ручками. В этом случае $g_n = g_1 = p$ и арифметический род для V_1 равен $1-p$. Арифметический род и геометрический род ведут себя мультипликативно:

Род прямого произведения $V \times W$ двух алгебраических многообразий равен произведению рода V на род W.

Ясно, что арифметический род в старой терминологии не обладал этим свойством. Арифметический род $\chi(V_n)$ является бирациональным инвариантом, потому что все g_i бирационально инвариантны (см. Кэлер [1] и Ван дер Варден [1, 2]). Арифметический род рационального многообразия по старой терминологии есть нуль. По нашему определению он равен 1.

0.2. Четвертое определение арифметического рода принадлежит Тодду [1]. Он показал в 1937 г., что арифметический род можно выразить через канонические классы Эгера — Тодда (Тодд [3]). Однако доказательство его неполное: оно основано на одной лемме Севери, ни одного полного доказательства которой в литературе нет.

Класс Эгера — Тодда K_i на V_n — это по определению класс алгебраических циклов вещественной размерности $2n-2i$ относительно некоторого отношения эквивалентности. Из этого отношения эквивалентности следует гомологичность, хотя, вообще говоря, оно не совпадает с гомологичностью. Например, $K_1 (=K)$ является классом канонических дивизоров на V_n. (Дивизор называется каноническим, если он является дивизором мероморфной n-формы.) Рассматриваемое отношение эквивалентности при $i=1$ совпадает с линейной эквивалентностью дивизоров. Класс K_i определяет некоторый $(2n-2i)$-мерный класс гомологии. Последний

определяет в свою очередь $2i$-мерный класс когомологий, совпадающий с точностью до знака с классом Чженя c_i многообразия V_n. Это совпадение классов Эгера — Тодда и классов Чженя было доказано Накано [2] (см. также Чжень [2], Ходж [3] и Атья [3]).

Замечание. Знак $2i$-мерного класса когомологий, определенного классом K_i, зависит от ориентации многообразия V_n. Мы всегда будем использовать естественную ориентацию в V_n. Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — локальные координаты с $z_k = x_k + iy_k$, то эта ориентация задается упорядочением $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, или, другими словами, положительным элементом объема $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n$. В этом случае K_i определяет класс когомологий $(-1)^i c_i$.

В этой книге мы будем пользоваться только классами Чженя, и потому то, что они совпадают с классами Эгера — Тодда, нам не понадобится. Определение рода Тодда $T(V_n)$ будет дано в терминах класса Чженя, и одной из основных целей книги будет доказательство того, что $\chi(V_n) = T(V_n)$.

0.3. Естественная ориентация многообразия V_n определяет элемент из $2n$-мерной группы целочисленных гомологий $H_{2n}(V_n, \mathbf{Z})$, называемый фундаментальным циклом для V_n. Значение $2n$-мерного класса когомологий b на фундаментальном цикле обозначается через $b[V_n]$.

Определение $T(V_n)$ дается с помощью некоторого многочлена T_n веса n от классов Чженя c_i многообразия V_n, произведения рассматриваются в кольце когомологий многообразия V_n. Этот многочлен определен алгебраически в § 1; он представляет собой $2n$-мерный рациональный класс когомологий, значение которого на фундаментальном цикле по определению совпадает с $T(V_n)$. Для малых n имеем (п. 1.7)

$$T(V_1) = \frac{1}{2} c_1 [V_1], \quad T(V_2) = \frac{1}{12} (c_1^2 + c_2) [V_2], \quad T(V_3) = \frac{1}{24} c_1 c_2 [V_3]. \tag{3}$$

Из определения следует, что $T(V_n)$ — рациональное число. Из равенства $\chi(V_n) = T(V_n)$ вытекает нетривиальный факт, что $T(V_n)$ есть целое число и что $T(V_n)$ — бирациональный инвариант. Последовательность многочленов $\{T_n\}$ должна быть выбрана так, чтобы, подобно арифметическому роду, число $T(V_n)$ вело себя мультипликативно относительно прямых произведений. Имеется много последовательностей с этим свойством: достаточно, чтобы последовательность $\{T_n\}$ была мультипликативной (§ 1). Последовательность $\{T_n\}$ нужно, далее, выбрать так, чтобы $T(V_n)$ совпадало с $\chi(V_n)$ всюду, где только возможно. В частности, если через $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ обозначить n-мерное комплексное проективное пространство, то должно быть $T(\mathbf{P}_n(\mathbf{C})) = 1$ для всех n. Это условие используется в § 1, где показывается, что оно однозначно определяет мультипликативную последовательность $\{T_n\}$ (лемма 1.7.1).

При фиксированном n многочлен T_n однозначно определяется следующим свойством: $T_n[V_n]=1$, если $V=\mathbf{P}_{j_1}(\mathbf{C})\times\ldots\times\mathbf{P}_{j_r}(\mathbf{C})$ — *прямое произведение комплексных проективных пространств с* $j_1+\ldots+j_r=n$. *Следовательно,* T_n *является единственным многочленом, который принимает значение* 1 *на рациональных многообразиях размерности* n.

0.4. Дивизоры на алгебраическом многообразии V_n распадаются на классы эквивалентности по отношению линейной эквивалентности. Дивизор линейно эквивалентен нулю, если он является дивизором (f) мероморфной функции f на V_n. Эта эквивалентность согласована со сложением дивизоров, и, следовательно, классы дивизоров образуют аддитивную группу. Мы можем также рассматривать комплексно-аналитические одномерные векторные расслоения (со слоем $\mathbf{C}$ и структурной группой $\mathbf{C}^*$) над V_n (см. 0.9). В этом введении мы будем отождествлять изоморфные расслоения. Тогда одномерные расслоения образуют абелеву группу относительно тензорного умножения $\otimes$. Единичным элементом, обозначаемым через $\mathbf{1}$, будет служить тривиальное расслоение $X\otimes\mathbf{C}$. Обратное к F расслоение будет обозначаться через F^{-1}.

Группа одномерных векторных расслоений изоморфна группе классов дивизоров. Всякий дивизор определяет одномерное расслоение. Сумма двух дивизоров определяет тензорное произведение соответствующих расслоений. Два дивизора определяют одно и то же расслоение тогда и только тогда, когда они линейно эквивалентны. Наконец, всякое одномерное расслоение определяется некоторым дивизором (Кадаира и Спенсер [2]). Обозначим через $H^0(V_n, D)$ комплексное векторное пространство всех мероморфных функций f на V_n, таких, что $D+(f)$ является дивизором без полюсов. Это — *пространство Римана — Роха* для D; оно *конечномерно*. Размерность $\dim H^0(V_n, D)$ зависит только от класса дивизоров, в котором лежит D. В нахождении $\dim H^0(V_n, D)$ по данному дивизору и состоит проблема Римана — Роха. Если F — одномерное расслоение, соответствующее D, то $H^0(V_n, D)$ изоморфно $H^0(V_n, F)$, комплексному векторному пространству голоморфных сечений расслоения F.

0.5. Как уже было сказано, одна из целей этой книги — доказать равенство

$$\chi(V_n)=T(V_n). \tag{4}$$

Число Чженя $c_n[V_n]$ совпадает с эйлеровой характеристикой для V_n. Поэтому равенство (4) дает для связной алгебраической кривой V_1, гомеоморфной сфере с p ручками,

$$\chi(V_1)=T(V_1)=\frac{1}{2}c_1[V_1]=\frac{1}{2}(2-2p). \tag{4_1}$$

Теорема Римана — Роха для алгебраических кривых утверждает (см., например, Г. Вейль [1]), что

$$\dim H^0(V_1, D)-\dim H^0(V_1, K-D)=d+1-p, \tag{4_1^*}$$

где d — степень дивизора D и K — канонический дивизор на V_1. Так как $\dim H^0(V_1, K)=g_1$, то при подстановке $D=0$ (4_1^*) переходит в (4_1). Мы покажем, что и для алгебраических многообразий произвольной размерности равенство (4) допускает обобщение, совпадающее с (4_1^*) в случае $n=1$. Это обобщение будет дано в терминах векторных расслоений, а не дивизоров.

Пусть F — одномерное комплексно-аналитическое расслоение, и пусть $H^i(V_n, F)$ — i-мерная группа когомологий многообразия V_n с коэффициентами в пучке ростков голоморфных сечений для F. В случае $F=\mathbf{1}$ — это пучок ростков голоморфных функций. Группы когомологий $H^i(V_n, F)$ являются комплексными векторными пространствами, которые в силу результатов Картана и Серра [1] (см. также Картан [4]) и Кодаиры [3] конечномерны. Векторное пространство $H^0(V_n, F)$ есть не что иное, как пространство Римана — Роха для F, введенное в 0.4. Из теоремы Дольбо [1] следует, что $\dim H^i(V_n, \mathbf{1})=g_i$. Целые числа $\dim H^i(V_n, F)$ зависят только от класса изоморфизма расслоения F и равны нулю для $i>n$. Следовательно, можно положить

$$\chi(V_n, F)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim H^i(V_n, F). \tag{5}$$

Это и есть искомое обобщение левой части равенства (4). Будет показано, что $\chi(V_n, F)$ является некоторым многочленом от классов Чженя для V_n и от двумерного класса когомологий f, определяемого расслоением F. Здесь f — первый класс Чженя F (когомологическое препятствие к существованию нигде не обращающегося в нуль непрерывного сечения для F). Если F представляется дивизором D, то f определяется $(2n-2)$-мерным классом гомологий, соответствующим D. Для малых n имеем

$$\chi(V_1, F)=\left(f+\frac{1}{2}c_1\right)[V_1],$$

$$\chi(V_2, F)=\left(\frac{1}{2}(f^2+fc_1)+\frac{1}{12}(c_1^2+c_2)\right)[V_2],$$

$$\chi(V_3, F)=\left(\frac{1}{6}f^3+\frac{1}{4}f^2c_1+\frac{1}{12}f(c_1^2+c_2)+\frac{1}{24}c_1c_2\right)[V_3].$$

Это — обобщение теоремы Римана — Роха на алгебраические многообразия произвольной размерности (теорема 20.3.2). По теореме двойственности Серра (15.4.2) $\dim H^1(V_1, F)=\dim H^0(V_1, K\otimes F^{-1})$ и $\dim H^2(V_2, F)=\dim H^0(V_2, K\otimes F^{-1})$, где K — одномерное векторное расслоение, определенное каноническим классом дивизоров. Отсюда и из выражений для $\chi(V_1, F)$ и $\chi(V_2, F)$ следует классическая теорема Римана — Роха для алгебраической кривой и для алгебраической поверхности. Подробности см. в 19.2 и 20.7.

Кодаира [4] и Серр указали условия, при которых $\dim H^i(V_n, F) = 0$ для $i > 0$ (см. теорему 18.2.2, а также Картан [4], сообщение XVIII). В этом случае формула для $\chi(V_n, F)$ превращается в формулу для $H^0(V_n, F)$, т. е. при этих условиях проблема Римана — Роха, в том виде как она была сформулирована в 0.4, полностью решается. Для алгебраических кривых это означает тот хорошо известный факт, что член $\dim H^0(V_1, K-D)$ в (4_1^*) равен нулю, если $d > 2p-2$.

0.6. Можно и далее обобщить формулу (4). Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V_n (со слоем $\mathbf{C}_q$ и структурной группой $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$, см. 0.9). Пусть $H^i(V_n, W)$ — i-мерная группа когомологий многообразия V_n с коэффициентами в пучке ростков голоморфных сечений расслоения W. Снова $H^i(V_n, W)$ являются конечномерными комплексными векторными пространствами и $\dim H^i(V_n, W)$ равняется нулю для $i > n$. Следовательно, можно определить

$$\chi(V_n, W) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(V_n, W). \tag{6}$$

Серр предположил в письме к Кодаире и Спенсеру (от 29 сентября 1953 г.), что $\chi(V_n, W)$ выражается многочленом от характеристических классов Чженя для V_n и от классов Чженя расслоения W. Ниже мы получим явную формулу для многочлена $\chi(V_n, W)$. Это теорема Римана — Роха для векторных расслоений (теорема 21.1.1). Ее следствие в случае $n = 1$ (алгебраических кривых) является обобщением теоремы Римана — Роха, принадлежащим А. Вейлю [1]. Подробности см. в 21.1.

Основной результат о $\chi(V_n, W)$ можно применить к специальным векторным расслоениям над V_n. Положим (см. Кодаира и Спенсер [3])

$$\chi^p(V_n) = \chi(V_n, \lambda^p \boldsymbol{T}), \tag{7}$$

где $\lambda^p \boldsymbol{T}$ — векторное расслоение ковариантных p-векторов на V_n. Классы Чженя для $\lambda^p \boldsymbol{T}$ выражаются через классы Чженя для V_n (теорема 4.4.3). Следовательно, $\chi^p(V_n)$ является многочленом веса n от классов Чженя для V_n. По теореме Дольбо [1] $\dim H^q(V_n, \lambda^p \boldsymbol{T})$ равняется $h^{p,q}$ — числу комплексно-линейно независимых гармонических форм на V_n типа (p, q). Следовательно,

$$\chi^p(V_n) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{p,q},$$

Например, в случае $n = 4$ имеем

$$\chi^1(V_4) = h^{1,0} - h^{1,1} + h^{1,2} - h^{1,3} + h^{1,4} = $$
$$= 4\chi(V_4) - \frac{1}{12}(2c_4 + c_3c_1)[V_4]. \tag{8}$$

Ясно, что сумма $\sum_{p=0}^{n} \chi^p(V_n)$ равна нулю, если n нечетно. Знакопеременная сумма $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \chi^p(V_n)$ по теоремам де Рама и Ходжа совпадает с эйлеровой характеристикой $c_n[V_n]$ многообразия V_n. Многочлены для $\chi^p(V_n)$ обладают теми же свойствами. Ходж [4] доказал, что для четного n сумма $\sum_{p=0}^{n} \chi^p(V_n)$ равна индексу многообразия V_n. По определению индекс многообразия V_n равен сигнатуре (числу положительных собственных значений минус число отрицательных собственных значений) билинейной симметрической формы $xy[V_n]$ $(x, y \in H^n(V_n, \mathbf{R}))$, определенной на n-мерной группе вещественных когомологий многообразия V_n. Следовательно, индекс многообразия V_n является многочленом от классов Чженя для V_n. Фактически этот многочлен выражается через классы Понтрягина для V_n, и потому он определен для произвольного ориентированного гладкого многообразия.

0.7. Как мы только что заметили, из основного результата этой книги [выражения для $\chi(V_n, W)$ в виде многочлена от классов Чженя для V_n и W] следует, что индекс алгебраического многообразия V_n является некоторым многочленом от классов Понтрягина для V_n. На самом деле эта теорема была исходным пунктом нашего исследования. Пусть M^{4k} — ориентированное гладкое многообразие вещественной размерности $4k$. В этой книге гладкость всегда обозначает C^∞-дифференцируемость, так что все частные производные существуют и непрерывны. Ориентация многообразия M^{4k} определяет некоторый фундаментальный цикл. Значение $4k$-мерного класса когомологий b на фундаментальном цикле обозначается через $b[M^{4k}]$. В гл. II с помощью теории кобордизмов Тома доказано, что индекс $\tau(M^{4k})$ представим в виде многочлена веса k от классов Понтрягина для M^{4k}. Например,

$$\tau(M^4) = \frac{1}{3} p_1 [M^4], \quad \tau(M^8) = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)[M^8]. \tag{9}$$

Формула для $\tau(M^4)$ была предложена (в качестве гипотезы) Ву. Обе формулы для $\tau(M^4)$ и $\tau(M^8)$ доказал Том [2]. Краткое изложение вывода формулы для $\chi(V_n, W)$ из формулы для $\tau(M^{4k})$ можно найти в Хирцебрух [2].

0.8. Определения в 0.1—0.6 были даны только для алгебраических многообразий. При доказательстве теоремы Римана — Роха мы налагаем это ограничение только там, где оно необходимо.

Так, в гл. II теорема об индексе, о которой шла речь в 0.7, доказана для произвольных ориентированных гладких многообразий. Основные результаты Тома о кобордизмах только сформулированы; доказательства, основанные на теоремах о гладких аппроксимациях и на алгебраической теории гомотопий, выходят за рамки книги.

В гл. III формальная теория рода Тодда и ассоциированных с ним многочленов развита для произвольных компактных почти комплексных многообразий (T-теория). В частности, мы получаем одну теорему целочисленности (14.3.2). На самом деле эта теорема целочисленности имеет мало общего с почти комплексными многообразиями; ее связь с последующими теоремами целочисленности для гладких многообразий обсуждается в библиографических замечаниях к гл. III и в приложении 1.

В гл. IV теория целых чисел $\chi(V_n, W)$ развивается, насколько это возможно, для произвольных компактных комплексных многообразий (χ-теория). Кратко описаны необходимые результаты из теории когомологий в пучках, принадлежащие Картану, Дольбо, Кодаире, Серру и Спенсеру. По ходу доказательства нужно сначала предполагать, что V_n — кэлерово многообразие. В конечном счете, если V_n — алгебраическое многообразие, мы можем отождествить χ-теорию с T-теорией (теорема Римана — Роха для векторных расслоений; теорема 21.1.1).

Приложение 1 содержит обзор приложений и обобщений теоремы Римана — Роха. В частности, теперь известно, что отождествить χ-теорию с T-теорией можно для любого компактного комплексного многообразия V_n (см. § 25).

Автор пытался сделать книгу независимой от других источников, насколько это возможно при ограниченном объеме. Необходимый вспомогательный материал о мультипликативных последовательностях, расслоениях и характеристических классах собран в гл. I.

0.9. Замечания об обозначениях и о терминологии. *Следующие обозначения используются во всей книге.*

$\mathbf{Z}$ — целые числа; $\mathbf{Q}$ — рациональные числа; $\mathbf{R}$ — вещественные числа; $\mathbf{C}$ — комплексные числа; $\mathbf{R}^q$ — векторное пространство над $\mathbf{R}$, состоящее из наборов $(x_1, \ldots, x_q)$ вещественных чисел; $\mathbf{C}_q$ — векторное пространство над $\mathbf{C}$, состоящее из наборов q комплексных чисел; $\mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$ обозначает группу обратимых $q \times q$-матриц (a_{ik}) с вещественными коэффициентами a_{ik}, т. е. группу автоморфизмов пространства $\mathbf{R}^q$:

$$x'_i = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} x_k;$$

$\mathbf{GL}^+(q, \mathbf{R})$ обозначает подгруппу группы $\mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$, состоящую из матриц с положительным определителем (группу автоморфизмов, сохраняющих ориентацию); $\mathbf{O}(q)$ обозначает подгруппу ортогональных матриц в $\mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$, а $\mathbf{SO}(q) = \mathbf{O}(q) \cap \mathbf{GL}^+(q, \mathbf{R})$; аналогично $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ обозначает группу обратимых $q \times q$-матриц с комплексными коэффициентами, а $\mathbf{U}(q)$ — подгруппу унитарных матриц в $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$; через $\mathbf{C}^* = \mathbf{GL}(1, \mathbf{C})$ мы будем обозначать мультипликативную группу ненулевых комплексных чисел; $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$ обозначает комплексное проективное пространство комплексной размерности $q-1$ (пространство комплексных прямых, проходящих через начало координат в $\mathbf{C}_q$). Вещественную размерность мы чаще всего обозначаем верхним индексом (например M^{4k}, $\mathbf{R}^q$), а комплексную размерность — нижним индексом (например V_n, $\mathbf{C}_q$).

Мы пошли на одно небольшое отклонение от обычной терминологии. Класс изоморфных главных расслоений со структурной группой G будет называться просто G-расслоением. Таким образом, G-расслоение — это элемент некоторого когомологического множества. С другой стороны, слова расслоение, векторное расслоение или одномерное векторное расслоение обозначают индивидуальное расслоенное пространство, а не класс изоморфных расслоений (см. 3.2). В гл. IV все построения зависят только от класса изоморфизма данного расслоения, поэтому это различие несущественно (см. 15.1).

Книга разделена на главы и параграфы, последние имеют сплошную нумерацию по всей книге, за исключением приложения 2. Нумерация формул своя в каждом параграфе. Параграфы разделены на пункты. Таким образом, 4.1 обозначает п. 1 из § 4; 4.1(5) обозначает формулу (5) из § 4, находящуюся в 4.1; теорема 4.1.1 — это теорема 1 из 4.1.

В конце книги помещены именной и предметный указатели и указатель обозначений.

Глава I

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

В § 1 излагается элементарная алгебраическая теория мультипликативных последовательностей. В частности, здесь строятся многочлены Тодда T_j и многочлены L_j, фигурирующие в теореме об индексе. Необходимые для дальнейшего результаты теории пучков собраны в § 2. В § 3 изложены основные свойства расслоений. В § 4 строятся характеристические классы, в частности классы Чженя и Понтрягина. Поскольку результаты § 1 впервые используются лишь в § 8, читателю рекомендуется начать прямо с § 2 и обратиться к § 1, только когда в этом возникнет надобность.

§ 1. Мультипликативные последовательности

1.1. Пусть B — коммутативное кольцо с единичным элементом 1. Пусть, далее, $p_0 = 1$, и пусть $p_1, p_2, \ldots$ — независимые переменные. Кольцо $\mathfrak{B} = B[p_1, p_2, \ldots]$, получающееся присоединением переменных p_i к кольцу B, является, очевидно, не чем иным, как кольцом многочленов от p_i с коэффициентами из кольца B; оно градуировано следующим образом.

Одночлен $p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}$ имеет вес $j_1 + j_2 + \ldots + j_r$. Далее, для любого k рассмотрим аддитивную подгруппу $\mathfrak{B}_k$ кольца $\mathfrak{B}$, состоящую из всех многочленов, содержащих лишь члены веса k (при $k = 0$ по определению полагаем $\mathfrak{B}_0 = B$). Группа $\mathfrak{B}_k$ есть модуль над кольцом B, ранг которого равен числу $\pi(k)$ разбиений числа k. Ясно, что

$$\mathfrak{B} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{B}_k \tag{1}$$

и

$$\mathfrak{B}_r \mathfrak{B}_s \subset \mathfrak{B}_{r+s}. \tag{2}$$

1.2. Пусть $\{K_j\}$ — последовательность многочленов от переменных p_i, для которой $K_0 = 1$ и $K_j \in \mathfrak{B}_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Такую последовательность мы будем называть *мультипликативной последовательностью* (или *m*-последовательностью), если каждое тождество вида

$$1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots = \\ = (1 + p_1' z + p_2' z^2 + \ldots)(1 + p_1'' z + p_2'' z^2 + \ldots), \tag{3}$$

где z, p_i' и p_i'' — независимые переменные, влечет тождество

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1, p_2, \ldots, p_j) z^j =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} K_i(p_1', p_2', \ldots, p_i') z^i \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1'', p_2'', \ldots, p_j'') z^j. \quad (4)$$

Для краткости положим

$$K\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_i z^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1, \ldots, p_j) z^j.$$

Это сокращенное обозначение мы будем использовать как в случае, когда p_i рассматриваются как независимые переменные, так и в случае, когда этим переменным приданы определенные значения.

Степенной ряд

$$K(1+z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i,$$

где

$$b_0 = 1, \quad b_i = K_i(1, 0, \ldots, 0) \in B,$$

мы будем называть *характеристическим степенным рядом* мультипликативной последовательности $\{K_j\}$.

Нам будет удобно ввести в рассмотрение формальные разложения вида

$$1 + p_1 z + \ldots + p_m z^m = \prod_{i=1}^{m} (1 + \beta_i z). \quad (5_m)$$

Иными словами, переменные p_i мы будем рассматривать как элементарные симметрические функции некоторых новых переменных $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Тем самым кольцо $\mathfrak{B}$ будет кольцом всех симметрических многочленов от переменных β_i с коэффициентами в B.

Следующие две леммы полностью описывают все возможные мультипликативные последовательности.

Лемма 1.2.1. *Мультипликативная последовательность* $\{K_j\}$ *однозначно определяется своим характеристическим степенным рядом* $Q(z) = K(1+z)$.

Доказательство. В виду соотношений (3)—(5) имеем

$$\sum_{j=0}^{m} K_j(p_1, \ldots, p_j) z^j + \sum_{j=m+1}^{\infty} K_j(p_1, \ldots, p_m, 0, \ldots, 0) z^j =$$
$$= \prod_{i=1}^{m} Q(\beta_i z). \quad (6_m)$$

Следовательно, при $j \leqslant m$ каждый многочлен K_j однозначно определен (как симметрический многочлен от β_i, а потому и как многочлен от $p_1, \ldots, p_j$). Это верно для любого m, откуда и следует наше утверждение.

Лемма 1.2.2. *Для любого формального степенного ряда* $Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ *с* $b_0 = 1$ *и* $b_i \in B$ *существует мультипликативная последовательность* $\{K_j\}$, *характеристическим степенным рядом которой служит ряд* $Q(z)$.

Доказательство. Рассмотрим в произведении

$$\prod_{i=1}^{m} Q(\beta_i z)$$

коэффициент при z^j. Этот коэффициент симметричен по β_i и потому является некоторым многочленом $K_j^{(m)}(p_1, \ldots, p_j)$ от p_i (имеющим, очевидно, вес j). При этом ясно, что при $m \geqslant j$ многочлен $K_j^{(m)}$ не зависит от m. Положим $K_j = K_j^{(m)}$ при $m \geqslant j$. Легко видеть, что $\{K_j\}$ и будет искомой мультипликативной последовательностью. Действительно, так как по построению имеет место тождество (6_m), то свойство мультипликативности (4) выполнено в случае, когда для больших значений i переменные p_i' и p_i'' заменены нулями. Но тогда оно, очевидно, выполнено и всегда. Наконец, соотношение (6_m) при $m = 1$ показывает, что $K(1+z) = Q(z)$.

Таким образом, согласно леммам 1.2.1 и 1.2.2, между мультипликативными последовательностями и формальными степенными рядами со свободным членом, равным единице, имеет место естественное взаимно однозначное соответствие. Например, мультипликативной последовательности $\{p_j\}$ соответствует ряд $1 + z$.

1.3. Удобно переформулировать результаты п. 1.1 и 1.2 в других переменных. Заменим p_i на c_i, переменную z на x, а корни β_i в (5_m) на γ_i. Две системы переменных свяжем между собой соотношениями $c_0 = p_0 = 1$, $z = x^2$ и $\beta_i = \gamma_i^2$. Другими словами, введем соотношения

$$z = x^2, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i (-z)^i = \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j (-x)^j\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i\right). \quad (7)$$

Имеет место очевидная

Лемма 1.3.1. *Пусть* $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ — *произвольная мультипликативная последовательность, и пусть* $Q(z)$ — *ее характеристический степенной ряд. Рассмотрим мультипликативную последова-*

тельность $\{\tilde{K}_j(c_1, \ldots, c_j)\}$, *отвечающую степенному ряду* $\tilde{Q}(x) = Q(x^2)$. *Тогда соотношение* (7) *выражается формулами*

$$K_j(p_1, \ldots, p_j) = \tilde{K}_{2j}(c_1, \ldots, c_{2j}),$$
$$0 = \tilde{K}_{2j+1}(c_1, \ldots, c_{2j+1}).$$

В частности, степенному ряду $1 + x^2$ *отвечает мультипликативная последовательность* $1, 0, p_1, 0, p_2, \ldots$.

Заметим, что

$$p_1 = -2c_2 + c_1^2,$$
$$p_2 = 2c_4 - 2c_3c_1 + c_2^2,$$
$$p_3 = -2c_6 + 2c_5c_1 - 2c_4c_2 + c_3^2.$$

1.4. Пусть $Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$ — произвольный степенной ряд (с $b_0 = 1$ и $b_i \in B$). Рассмотрим формальное разложение

$$1 + b_1z + b_2z^2 + \ldots + b_mz^m = (1 + \beta_1'z)(1 + \beta_2'z) \ldots (1 + \beta_m'z). \quad (8)$$

Пусть, как обычно,

$$\Sigma(\beta_1')^{j_1}(\beta_2')^{j_2} \ldots (\beta_r')^{j_r}, \quad \left(j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_r \geqslant 1; \quad \sum_{s=1}^{r} j_s = k \leqslant m\right) \quad (9)$$

— симметрическая функция от β_i', являющаяся суммой всех попарно различных одночленов, получающихся из одночлена $(\beta_1')^{j_1}(\beta_2')^{j_2} \ldots (\beta_r')^{j_r}$ всевозможными перестановками переменных β_1', $\beta_2', \ldots, \beta_r'$. Число слагаемых в этой сумме равно $m!/h$, где h — число перестановок переменных $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_m'$, оставляющих инвариантным одночлен $(\beta_1')^{j_1}(\beta_2')^{j_2} \ldots (\beta_r')^{j_r}$. Из наложенных в (9) условий на показатели $j_1, j_2, \ldots, j_r$ непосредственно вытекает, что симметрическая функция $\Sigma(\beta_1')^{j_1}(\beta_2')^{j_2} \ldots (\beta_r')^{j_r}$ является многочленом от b_i веса k с целыми коэффициентами. Этот многочлен не зависит от m, и мы будем обозначать его символом $\Sigma(j_1, j_2, \ldots, j_r)$.

Следующая лемма позволяет упростить явное вычисление многочленов мультипликативных последовательностей.

Лемма 1.4.1. *Пусть мультипликативная последовательность* $\{K_j(p_1, \ldots, p_j\}$ *отвечает степенному ряду* $Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$. *Тогда коэффициент при* $p_{j_1}p_{j_2} \ldots p_{j_r}$ *в многочлене* $K_k\left(j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_r \geqslant 1, \sum_{s=1}^{r} j_s = k\right)$ *равен* $\Sigma(j_1, j_2, \ldots, j_r)$.

Это легко вытекает из соотношений (6) и (8). Провести подробное доказательство мы предоставляем читателю.

Например, коэффициент p_k в многочлене K_k равен $s_k = \Sigma(k)$:

$$s_0 = 1, \quad s_1 = b_1, \quad s_2 = -2b_2 + b_1^2, \quad s_3 = 3b_3 - 3b_2b_1 + b_1^3 \text{ и т. д.,}$$

а коэффициент при p_k^2 в многочлене K_{2k} равен $\Sigma(k, k) = \frac{1}{2}(s_k^2 - s_{2k})$.

Числа s_k могут быть вычислены с помощью формулы Коши:

$$1 - z\frac{d}{dz}\log Q(z) = Q(z)\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{Q(z)}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j s_j z^j. \quad (10)$$

1.5. Изучим теперь (в этом пункте и в следующих п. 1.6—1.8) некоторые специальные мультипликативные последовательности, используемые ниже в этой книге.

В первую очередь рассмотрим степенной ряд

$$Q(z) = \frac{\sqrt{z}}{\operatorname{th}\sqrt{z}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_k z^k,$$

где B_k — числа Бернулли (в тех обозначениях, при которых $B_k > 0$ и $\neq \frac{1}{2}$ для всех k):

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30},$$
$$B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510}.$$

Кольцом коэффициентов B мы считаем здесь поле Q рациональных чисел.

Мультипликативную последовательность, отвечающую степенному ряду $Q(z)$, мы будем обозначать символом $\{L_j(p_1, \ldots, p_j)\}$. Используя лемму 1.4.1, можно вычислить первые несколько многочленов L_j:

$$L_1 = \frac{1}{3}p_1,$$

$$L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2),$$

$$L_3 = \frac{1}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3),$$

$$L_4 = \frac{1}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}(381p_4 - 71p_3p_1 - 19p_2^2 + 22p_2p_1^2 - 3p_1^4),$$

$$L_5 = \frac{1}{3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}(5110p_5 - 919p_4p_1 - 336p_3p_2 + 237p_3p_1^2 + 127p_2^2p_1 - 83p_2p_1^3 + 10p_1^5).$$

Согласно формуле 1.4(10), коэффициенты s_k при p_k в многочленах L_k удовлетворяют соотношению

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j s_j z^j = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{2\sqrt{z}}{\operatorname{sh} 2\sqrt{z}}.$$

Следовательно, $s_0=1$ и

$$s_k=\frac{2^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k \tag{11}$$

при $k\geqslant 1$.

Следующая лемма показывает, что при значениях переменных $p_i=\binom{2k+1}{i}$, удовлетворяющих соотношению

$$1+p_1z+p_2z^2+\ldots+p_kz^k=(1+z)^{2k+1}\pmod{z^{k+1}},$$

многочлен $L_k(p_1, \ldots, p_k)$ принимает значение 1.

Лемма 1.5.1. *Пусть* $Q(z)=\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{th}\sqrt{z}}$. *Для любого k коэффициент J_k при z^k в степенном ряде $(Q(z))^{2k+1}$ равен 1, и степенной ряд $Q(z)$ является единственным степенным рядом с рациональными коэффициентами, обладающим этим свойством.*

Доказательство. По интегральной формуле Коши

$$J_k=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{1}{z^{k+1}}\left(\frac{\sqrt{z}}{\operatorname{th}\sqrt{z}}\right)^{2k+1}dz.$$

Полагая $t=\operatorname{th}\sqrt{z}$, получаем

$$J_k=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dt}{(1-t^2)\,t^{2k+1}}=1.$$

В обоих случаях интегралы берутся по малым окружностям с центрами в начале координат в соответствующих плоскостях z и t. Заметим, что при подстановке $t=\operatorname{th}\sqrt{z}$ однократному обходу окружности в плоскости t соответствует двукратный обход окружности в плоскости z.

Единственность степенного ряда $Q(z)$ немедленно вытекает из возможности последовательно вычислить все его коэффициенты, исходя из равенств $J_k=1$.

Следующая лемма в этой книге не используется, хотя она и играет важную роль в приложениях многочленов L_k к когомологическим операциям. Ее доказательство можно найти у Атьи и Хирцебруха [4].

Лемма 1.5.2. *Многочлен L_k единственным образом представляется в виде дроби, числителем которой служит многочлен с взаимно простыми целыми коэффициентами, а знаменателем — положительное целое число*

$$\mu(L_k)=\prod q^{\left[\frac{2k}{q-1}\right]},$$

где произведение распространено на все нечетные простые q, удовлетворяющие условию $3\leqslant q\leqslant 2k+1$.

1.6. Мультипликативную последовательность, отвечающую степенному ряду $Q(z)=\dfrac{2\sqrt{z}}{\operatorname{sh}2\sqrt{z}}$, мы будем обозначать через $\{A_k(p_1, \ldots, p_k)\}$. С помощью леммы 1.4.1 без труда находим, что

$$A_1=-\frac{2}{3}p_1,\quad A_2=\frac{2}{45}(-4p_2+7p_1^2),$$

$$A_3=\frac{-4}{3^3\cdot5\cdot7}(16p_3-44p_2p_1+31p_1^3).$$

Замечание. Согласно Атье и Хирцебруху [2], многочлен A_k единственным образом представляется в виде дроби, числителем которой является многочлен с взаимно простыми целыми коэффициентами, а знаменателем — число $\dfrac{\mu(L_k)}{2^{\alpha(k)}}$, где $\alpha(k)$ — число единиц в двоичном представлении числа k.

1.7. Следующие два примера мультипликативных последовательностей нам будет удобно записывать в (c_i, x, γ_i)-обозначениях (см. 1.3.). Пусть сначала кольцом коэффициентов B по-прежнему служит поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Рассмотрим мультипликативную последовательность $\{T_k(c_1, \ldots, c_k)\}$, отвечающую степенному ряду

$$Q(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Члены T_k этой последовательности мы будем называть *многочленами Тодда*. Для их вычисления можно воспользоваться соотношением

$$\frac{x}{1-e^{-x}}=\exp\left(\frac{1}{2}x\right)\frac{\frac{1}{2}x}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}x}$$

(где $\exp a=e^a$), из которого с помощью леммы 1.3.1, аналога формулы (6_m) для переменных c_i, x, γ_i и соотношения (7) без труда получаем, что

$$T_k(c_1, \ldots, c_k)=\sum\frac{1}{2^{4s}r!}\left(\frac{1}{2}c_1\right)^r A_s(p_1, \ldots, p_s), \tag{12}$$

где суммирование распространено на все неотрицательные целые числа r и s, удовлетворяющие соотношению $r+2s=k$. В частности,

$$T_1=\frac{1}{12}c_1,$$

$$T_2=\frac{1}{12}(c_2+c_1^2),$$

$$T_3=\frac{1}{24}c_2c_1,$$

$$T_4=\frac{1}{720}(-c_4+c_3c_1+3c_2^2+4c_2c_1^2-c_1^4),$$

$$T_5=\frac{1}{1440}(-c_4c_1+c_3c_1^2+3c_2^2c_1-c_2c_1^3),$$

$$T_6=\frac{1}{60480}(2c_6-2c_5c_1-9c_4c_2-5c_4c_1^2-c_3^2+11c_3c_2c_1+ \\ +5c_3c_1^3+10c_2^3+11c_2^2c_1^2-12c_2c_1^4+2c_1^6)$$

(ср. Тодд [1]).

Замечания. 1) Из формулы (12) следует, что при нечетных k многочлен T_k делится на c_1.

2) Применив к мультипликативной последовательности $\{T_k\}$ формулу 1.4(10), мы немедленно получим, что в многочлене Тодда T_k коэффициенты при c_k и c_1^k совпадают. Как легко показать, последовательность $\{T_k\}$ является единственной мультипликативной последовательностью с $T_1=\frac{1}{2}c_1$, обладающей этим свойством.

Следующая лемма показывает, что при значениях переменных $c_i=\binom{n+1}{i}$, удовлетворяющих соотношению

$$1+c_1x+\ldots+c_nx^n=(1+x)^{n+1}\ (\mathrm{mod}\ x^{n+1}),$$

многочлен $T_n(c_1,\ldots,c_n)$ принимает значение 1.

Лемма 1.7.1. *Пусть* $Q(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}$. *Тогда для любого* k *коэффициент при* x^k *в степенном ряде* $(Q(x))^{k+1}$ *равен* 1, *и степенной ряд* $Q(x)$ *является единственным степенным рядом с рациональными коэффициентами, обладающим этим свойством.*

Доказательство. Достаточно применить интегральную формулу Коши (ср. с доказательством леммы 1.5.1).

Аналогично доказывается

Лемма 1.7.2. *При значениях переменных* c_i, *определяемых соотношением*

$$1+c_1x+\ldots+c_kx^k=(1+x)^k(1-x)\qquad(\mathrm{mod}\ x^{k+1}),$$

все многочлены T_k, $k\geqslant 1$, *обращаются в нуль.*

Имеет место также следующее утверждение, аналогичное лемме 1.5.2 (см. Атья и Хирцебрух [4]).

Лемма 1.7.3. *Многочлен* T_k *единственным образом представляется в виде дроби, числителем которой служит многочлен с взаимно простыми целыми коэффициентами, а знаменателем — положительное целое число*

$$\mu(T_k)=\prod q^{\left[\frac{k}{q-1}\right]},$$

где произведение распространено на все простые числа q, *удовлетворяющие соотношению* $2\leqslant q\leqslant k+1$. *Кроме того,* $\mu(T_{2k+1})=2\mu(T_{2k})=2^{2k+1}\mu(L_k)$ (см. лемму 1.5.2).

1.8. Пусть теперь кольцом коэффициентов B является кольцо $\mathbf{Q}[y]$ многочленов от одной переменной y с рациональными коэффициентами. Рассмотрим мультипликативную последовательность $T_j(y;c_1,\ldots,c_j)$, соответствующую степенному ряду

$$Q(y;\ x)=\frac{x(y+1)}{1-e^{-x(y+1)}}-yx=\frac{x(y+1)}{e^{x(y+1)}-1}+x.$$

Следующее обобщение леммы 1.7.1 показывает, что при $c_i=\binom{n+1}{i}$ имеет место равенство

$$T_n(y;\ c_1,\ \ldots,\ c_n)=1-y+y^2-\ \ldots\ +(-1)^n y^n.$$

Лемма 1.8.1. *Для любого* n *коэффициент при* x^n *в степенном ряде* $(Q(y;x))^{n+1}$ *равен* $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i y^i$, *и ряд* $Q(y;x)$ *является единственным степенным рядом с коэффициентами в кольце* $\mathbf{Q}[y]$, *обладающим этим свойством.*

Многочлен $T_n(y;c_1,\ldots,c_n)$ можно единственным образом записать в виде

$$T_n(y;\ c_1,\ \ldots,\ c_n)=\sum_{p=0}^{n}T_n^p(c_1,\ \ldots,\ c_n)\,y^p.$$

Покажем, что многочлены $T_n^p(c_1,\ldots,c_n)$ удовлетворяют соотношению

$$T_n^p(c_1,\ \ldots,\ c_n)=(-1)^n T_n^{n-p}(c_1,\ \ldots,\ c_n). \tag{13}$$

Действительно, $Q\left(\frac{1}{y};\ yx\right)=Q(y;\ -x)$ и потому

$$y^nT_n\left(\frac{1}{y};\ c_1,\ \ldots,\ c_n\right)=(-1)^nT_n(y;\ c_1,\ \ldots,\ c_n).$$

Далее, рассмотрим формальное разложение

$$1+c_1x+\ \ldots\ +c_nx^n=\prod_{i=1}^{n}(1+\gamma_ix), \tag{14}$$

где x — независимая переменная. Имеет место формула

$$T_n^p(c_1, \ldots, c_n) = \varkappa_n \left[\Sigma \exp(-\gamma_{j_1} - \ldots - \gamma_{j_p}) \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{1-\exp(-\gamma_i)} \right], \quad (15)$$

где суммирование распространено на все $\binom{n}{p}$ комбинаций p попарно различных корней γ_i, а символ $\varkappa_n$ обозначает сумму всех однородных (по γ_i) членов степени n в выражении в [ ]. Ввиду тождества (14) эта сумма является многочленом веса n от переменных c_i.

Для доказательства формулы (15) обозначим временно ее правую часть через $\widetilde{T}_n^p$. Имеем

$$\sum_{p=0}^{n} \widetilde{T}_n^p y^p = \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} \left((1 + y\exp(-\gamma_i)) \frac{\gamma_i}{1-\exp(-\gamma_i)} \right) \right] =$$

$$= \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{(1 + y\exp(-(1+y)\gamma_i))}{1+y} \cdot \frac{(1+y)\gamma_i}{1-\exp(-(1+y)\gamma_i)} \right] =$$

$$= \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} Q(y;\ \gamma_i) \right] = \sum_{p=0}^{n} T_n^p(c_1, \ldots, c_n) y^p,$$

и все доказано.

Заметим в заключение, что $Q(0;\ x) = \frac{x}{1-e^{-x}}$, $Q(-1;\ x) = 1 + x$ и $Q(1,\ x) = \frac{x}{\operatorname{th} x}$. Следовательно (см. 1.5 и лемму 1.3.1),

$$T_n^0(c_1, \ldots, c_n) = T_n(c_1, \ldots, c_n) \quad \text{(многочлен Тодда)},$$

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p T_n^p(c_1, \ldots, c_n) = c_n,$$

$$\sum_{p=0}^{n} T_n^p(c_1, \ldots, c_n) = \widetilde{L}_n(c_1, \ldots, c_n), \quad (16)$$

т. е.

$$\sum_{p=0}^{n} T_n^p(c_1, \ldots, c_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ L_k(p_1, \ldots, p_k), & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

1.9. Многочлены Тодда по существу совпадают с многочленами Бернулли высшего порядка в смысле Нёрлунда (см. Нёрлунд [1], стр. 143). Действительно, согласно Нёрлунду, многочлены Бернулли определяются тождеством

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i x}{\exp(\gamma_i x) - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} B_j^{(n)}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Поскольку переменные c_i являются элементарными симметрическими функциями переменных $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (см. формулу 1.8(14)), отсюда непосредственно вытекает, что при $k \leqslant n$

$$T_k(c_1, \ldots, c_k) = \frac{(-1)^k}{k!} B_k^{(n)}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Аналогичное замечание имеет место и для построенных в 1.6 многочленов A_k. Эти многочлены по существу совпадают с рассмотренными Нёрлундом многочленами D_k. Именно, в обозначениях п. 1.3 и 1.6

$$A_k(p_1, \ldots, p_k) = \widetilde{A}_{2k}(c_1, \ldots, c_{2k}) = \frac{2^{2k}}{(2k)!} D_{2k}^{(n)}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

при $2k \leqslant n$.

§ 2. Пучки

В этом параграфе излагаются основные результаты теории пучков, используемые в настоящей книге (см. также Картан [2], Серр [2], Грауэрт и Реммерт [1] и Годеман [1]). Последнюю книгу особенно рекомендуем для первоначального изучения алгебраической топологии и теории пучков.

Мы будем пользоваться следующей терминологией. *Топологическое пространство* X — это множество, в котором отмечены некоторые подмножества, называемые *открытыми*. При этом требуется, чтобы пустое множество и все пространство X были открыты и чтобы объединение любого и пересечение конечного числа открытых множеств были открытыми множествами. Открытые множества U, содержащие данную точку x пространства X, называются *открытыми окрестностями* этой точки. Семейство открытых множеств топологического пространства X называется *базой* его топологии, если любое открытое множество пространства является объединением множеств этого семейства. Пространство X называется *хаусдорфовым*, если любые две его различные точки обладают непересекающимися открытыми окрестностями.

Семейство $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ открытых множеств пространства X называется его *открытым покрытием*, если объединение множеств этого семейства совпадает со всем пространством X. Возможность того, что одно и то же открытое множество несколько раз входит в семейство (с различными индексами i), при этом не исключается. Тот факт, что множество индексов покрытия может быть совершенно произвольным, приводит при рассмотрении множества всех открытых покрытий пространства X к известным логическим затруднениям. Во избежание этих затруднений можно ограничиться *собственными* открытыми покрытиями $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X, в которых, во-первых, различным индексам $i, j \in I$, отвечают различные множества U_i, U_j и, во-вторых, в качестве множества индексов взято само множество элементов этого покрытия. Каждое собственное покрытие является, следовательно, подмножеством множества всех подмножеств пространства X.

Открытое покрытие $\mathfrak{B} = \{V_j\}_{j \in J}$ пространства X называется *вписанным* в открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ или *измельчением* этого последнего, если каждое множество V_j содержится по крайней мере в одном множестве U_i. Два открытых покрытия называются эквивалентными, если каждое из них вписано в другое. Ясно, что каждое открытое покрытие эквивалентно некоторому собственному покрытию.

Хаусдорфово пространство называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ можно выбрать конечное подсемейство $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$, также являющееся покрытием.

2.1. Определение пучков и их гомоморфизмов. Определение. *Пучком* (абелевых групп) над топологическим пространством X называется тройка $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$, обладающая следующими тремя свойствами:

I) *S является топологическим пространством, а π — его непрерывным отображением на пространство X.*

II) *Каждая точка $\alpha \in S$ обладает в S открытой окрестностью N, такой, что ограничение $\pi | N$ отображения π на N является гомеоморфизмом окрестности N на некоторую открытую окрестность точки $\pi(\alpha)$ пространства X.*

Прообраз $\pi^{-1}(x)$ точки $x \in X$ называется *стеблем* пучка $\mathfrak{S}$ над этой точкой и обозначается символом S_x. Каждая точка пространства S принадлежит одному и только одному стеблю. Из свойства II, означающего, что π является локальным гомеоморфизмом, вытекает, что топология пространства S индуцирует на каждом стебле дискретную топологию.

III) *Каждый стебель S_x наделен структурой абелевой группы, так что для любых точек $\alpha, \beta \in S_x$ определены их сумма $\alpha + \beta \in S_x$ и разность $\alpha - \beta \in S_x$. Эта разность непрерывно зависит от α и β.*

Последнее условие расшифровывается следующим образом. Пусть $S \oplus S$ — подпространство пространства $S \times S$, состоящее из всех точек (α, β), для которых $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда отображение $S \oplus S \to S$, определенное формулой $(\alpha, \beta) \to \alpha - \beta$, непрерывно.

Из этих аксиом немедленно вытекает, что нулевой элемент 0_x абелевой группы S_x непрерывно зависит от x в том смысле, что отображение $X \to S$, определенное формулой $x \to 0_x$, непрерывно. Аналогично сумма $\alpha + \beta$ также непрерывно зависит от α и β.

Замечание. Можно определить пучки, на стеблях которых заданы любые другие алгебраические структуры. Следует лишь видоизменить аксиому III), предусмотрев в ней непрерывность соответствующих алгебраических операций.

Например, часто случается, что каждый стебель пучка абелевых групп является на самом деле модулем (над одним и тем же кольцом K для всех стеблей), так что любой точке $\alpha \in S_x$ и любому элементу $k \in K$ отвечает некоторая точка $k\alpha \in S_x$. В этом случае в аксиоме III) необходимо добавить требование, чтобы для любого $k \in K$ отображение $S \to S$, определенное формулой $\alpha \to k\alpha$, было непрерывно; мы получим определение пучка K-модулей.

В дальнейшем мы всегда будем молчаливо предполагать, что все рассматриваемые пучки являются пучками абелевых групп или K-модулей (с фиксированным кольцом K). Хотя все теоремы и определения будут формулироваться лишь для пучков абелевых групп, они справедливы и для пучков K-модулей (конечно, после соответствующей ей замены слов, например слова «гомоморфизм» на «K-гомоморфизм» и т. п.). Впрочем, для нас будет по существу интересен лишь случай, когда кольцом K является поле комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Хотя все определения и результаты начальных п. 2.1—2.4 без труда переносятся на пучки любых алгебраических структур, определение групп когомологий топологического пространства с коэффициентами в пучке, даваемое в 2.6, существенно опирается на тот факт, что стебли пучка являются абелевыми группами или K-модулями. При этом сами группы когомологий оказываются абелевыми группами или соответственно K-модулями. Часть теории одномерных групп когомологий может быть перенесена и на случай пучков неабелевых групп (см. 3.1).

Определение. Пусть $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ и $\tilde{\mathfrak{S}} = (\tilde{S}, \tilde{\pi}, X)$ — два пучка над одним и тем же топологическим пространством X. Говорят, что задан *гомоморфизм* h пучка $\mathfrak{S}$ в пучок $\tilde{\mathfrak{S}}$, если

a) *задано непрерывное отображение h пространства S в пространство $\tilde{S}$;*

b) *имеет место равенство $\pi = \tilde{\pi} h$, означающее, что отображение h для каждого $x \in X$ переводит стебель S_x в стебель $\tilde{S}_x$;*

c) *для каждого $x \in X$ индуцированное отображением h отображение*

$$h_x\colon S_x \to \tilde{S}_x \tag{1}$$

является гомоморфизмом абелевых групп.

В силу a) и b) гомоморфизм h является локальным гомеоморфизмом пространства S в пространство $\tilde{S}$.

Гомоморфизм h называется *мономорфизмом* (соотв. *эпиморфизмом*, *изоморфизмом*) (если для каждой точки $x \in X$ гомоморфизм h_x является мономорфизмом (соотв. эпиморфизмом, изоморфизмом).

Элементарные свойства пучков приведены далее в 2.4.

2.2. Предпучки. В конкретных ситуациях пучки возникают, как правило, из так называемых предпучков.

Определение. Говорят, что над топологическим пространством X задан *предпучок* (абелевых групп), если каждому открытому множеству U пространства X сопоставлена некоторая абелева группа S_U и любым двум открытым множествам U и V с $V \subset U$ сопоставлен гомоморфизм r_V^U: $S_U \to S_V$, причем выполнены следующие аксиомы:

I) *Пустому множеству отвечает нулевая группа: если* $U = \varnothing$, *то* $S_U = 0$.

II) *Гомоморфизм* r_U^U: $S_U \to S_U$ *является тождественным отображением. Если* $W \subset V \subset U$, *то* $r_W^U = r_W^V r_V^U$.

Замечание. Ввиду аксиомы I) группы S_U и гомоморфизмы r_V^U достаточно задавать лишь для непустых открытых множеств U и V.

Следующая конструкция позволяет каждому предпучку сопоставить некоторый пучок.

a) Для каждой точки $x \in X$ обозначим через S_x прямой предел абелевых групп S_U, $x \in U$, по отношению к гомоморфизмам r_V^U (см., например, Стинрод и Эйленберг [1], гл. VIII). По определению это означает, что для любой открытой окрестности U точки x каждый элемент $f \in S_U$ определяет некоторый элемент $f_x \in S_x$, называемый *ростком* элемента f в точке x, причем каждая точка множества S_x является ростком некоторого элемента и два элемента $f \in S_U$ и $g \in S_V$, где U и V — некоторые открытые окрестности точки x, тогда и только тогда определяют один росток, когда у точки x существует такая открытая окрестность W, что $W \subset U$, $W \subset V$ и $r_W^U f = r_W^V f$.

b) Прямой предел S_x абелевых групп естественным образом сам является абелевой группой. Пусть S — объединение всех групп S_x, $x \in X$, и пусть π: $S \to X$ — отображение, переводящее каждую из групп S_x, $x \in X$, в соответствующую точку $x \in X$.

c) Для любой точки $y \in U$ каждый элемент $f \in S_U$ определяет некоторый росток $f_y \in S_y$. Пусть f_U — подмножество множества S, состоящее из всех ростков f_y, $y \in U$. Семейство всех множеств f_U (U пробегает всевозможные открытые множества пространства X, а f пробегает все элементы из S_U) образует базу некоторой топологии в множестве S. Будем считать S топологическим пространством, снабженным этой топологией.

Без труда проверяется, что построенная так тройка $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ является пучком абелевых групп над пространством X. Мы будем называть его пучком, *порожденным* предпучком $\{S_U, r_V^U\}$.

Пусть $\mathfrak{G} = \{S_U, r_V^U\}$ и $\tilde{\mathfrak{G}} = \{\tilde{S}_U, \tilde{r}_V^U\}$ — два предпучка над пространством X. *Гомоморфизмом* h предпучка $\mathfrak{G}$ в предпучок $\tilde{\mathfrak{G}}$ называется семейство $\{h_U\}$ гомоморфизмов h_U: $S_U \to \tilde{S}_U$, перестановочных с гомоморфизмами r_V^U и $\tilde{r}_V^U$, т. е. таких, что $\tilde{r}_V^U h_U = h_V r_V^U$ при $V \subset U$.

Гомоморфизм h называется *мономорфизмом* (соотв. *эпиморфизмом*, *изоморфизмом*), если каждый гомоморфизм h_U является мономорфизмом (соотв. эпиморфизмом, изоморфизмом).

Предпучок $\mathfrak{G}$ называется *подпредпучком* предпучка $\tilde{\mathfrak{G}}$, если для любого открытого множества U группа S_U является подгруппой группы $\tilde{S}_U$, а гомоморфизмы r_V^U — ограничениями на $\mathfrak{G}$ гомоморфизмов $\tilde{r}_V^U$. В этом случае определен *факторпредпучок* $\tilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{G}$, сопоставляющий произвольному открытому множеству U факторгруппу $\tilde{S}_U/S_U$.

Для каждого гомоморфизма h предпучка $\mathfrak{G}$ в предпучок $\tilde{\mathfrak{G}}$ естественным образом определяются его ядро и образ. *Ядро гомоморфизма* h — это подпредпучок предпучка $\mathfrak{G}$, сопоставляющий каждому открытому множеству U ядро гомоморфизма h_U. Аналогично *образ гомоморфизма* h — это подпредпучок предпучка $\tilde{\mathfrak{G}}$, сопоставляющий каждому открытому множеству U образ гомоморфизма h_U.

Пусть $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ и $\tilde{\mathfrak{S}} = (\tilde{S}, \tilde{\pi}, X)$ — пучки, порожденные предпучками $\mathfrak{G}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}$ соответственно, и пусть h: $\mathfrak{G} \to \tilde{\mathfrak{G}}$ — произвольный гомоморфизм предпучков. Покажем, что гомоморфизм h порождает гомоморфизм пучка $\mathfrak{S}$ в пучок $\tilde{\mathfrak{S}}$, который мы также будем обозначать символом h. Чтобы построить этот гомоморфизм, достаточно, очевидно, построить индуцированные им гомоморфизмы h_x: $S_x \to \tilde{S}_x$ (см. формулу 2.1(1)). Рассмотрим элемент $\alpha \in S_x$. Этот элемент является ростком в точке x некоторого элемента $f \in S_U$. Мы примем за $h_x(\alpha)$ росток в точке x элемента $h_U(f)$. Легко видеть, что это определение корректно (оно является не чем иным, как специализацией для рассматриваемого частного случая общего определения *прямого предела* гомоморфизмов h_U).

2.3. Канонический предпучок пучка. *Сечением* пучка $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ над открытым множеством U пространства X называется всякое непрерывное отображение s: $U \to S$, для которого композиция πs: $U \to U$ представляет собой тождественное отображение. Для каждого сечения s пучка $\mathfrak{S}$ над множеством U множество $s(U)$ пересекается с каждым стеблем S_x точно в одной точке.

Из свойства 2.1 III) немедленно вытекает, что множество $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ всех сечений пучка $\mathfrak{S}$ над множеством U является абелевой группой, нулем которой служит нулевое сечение $x \to 0_x$.

Сопоставив каждому открытому множеству U пространства X группу $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ сечений пучка $\mathfrak{S}$ над U (при $U = \varnothing$ группу $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ по определению считаем нулевой) и любым двум открытым множествам U, V с $V \subset U$, гомоморфизм r_V^U: $\Gamma(U, \mathfrak{S}) \to$

$\to\Gamma(V, \mathfrak{S})$, относящий каждому сечению пучка $\mathfrak{S}$ над U его ограничение на V (при $V=\varnothing$ по определению считаем $r^U_V=0$), мы, очевидно, получим над пространством X некоторый предпучок $\{\Gamma(U, \mathfrak{S}), r^U_V\}$. Этот предпучок называется *каноническим предпучком* пучка $\mathfrak{S}$. Легко видеть, что пучок, порожденный предпучком $\{\Gamma(U, \mathfrak{S}), r^U_V\}$, изоморфен (см. 2.2) исходному пучку $\mathfrak{S}$. Действительно, в силу 2.1 I), II) каждая точка $\alpha\in S$ принадлежит по крайней мере одному множеству вида $s(U)$, где U — некоторое открытое множество пространства X, а s — некоторое сечение пучка $\mathfrak{S}$ над U. При этом если $\alpha\in s(U)\cap s'(U')$, где s и s' — сечения пучка $\mathfrak{S}$ над множествами U и U' соответственно, то $s=s'$ на некоторой открытой окрестности точки $\pi(\alpha)$. Таким образом, ростки в точке x сечений пучка $\mathfrak{S}$ над открытыми окрестностями точки x находятся во взаимно однозначном соответствии с точками стебля S_x. Далее, в силу 2.1 I), II) семейство всех множеств вида $s(U)$ образует базу топологии пространства S (см. 2.2c).

Предположим теперь, что пучок $\mathfrak{S}$ порожден некоторым предпучком $\mathfrak{G}=\{S_U, r^U_V\}$. Любой элемент $f\in S_U$ обладает в каждой точке $x\in U$ некоторым ростком f_x (см. 2.2a), причем отображение $x\to f_x$ есть сечение $h_U(f)$ пучка $\mathfrak{S}$ над U. Ясно, что отображение h_U: $S_U\to\Gamma(U,\mathfrak{S})$, задаваемое формулой $f\to h_U(f)$, представляет собой гомоморфизм абелевых групп, причем семейство $\{h_U\}$ этих гомоморфизмов является гомоморфизмом предпучка $\mathfrak{G}$ в канонический предпучок пучка $\mathfrak{S}$. Вообще говоря, этот гомоморфизм не является ни мономорфизмом, ни эпиморфизмом (подробнее об этом см. Серр [2], § 1, предложения 1 и 2). Тем не менее он индуцирует (см. конец п. 2.2) тождественный изоморфизм h: $\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}$.

2.4. Подпучки. Точные последовательности. Факторпучки. Ограничения и тривиальные распространения пучков. Введем дальнейшие алгебраические понятия теории пучков.

Определение. Тройка $\mathfrak{S}'=(S',\pi',X)$ называется *подпучком* пучка $\mathfrak{S}=(S,\pi,X)$, если

I) *Пространство S' является открытым подпространством пространства S.*

II) *Отображение π' является ограничением отображения π на подпространство S' и отображает это подпространство на все пространство X.*

III) *Для любой точки $x\in X$ стебель $\pi'^{-1}(x)=S'\cap\pi^{-1}(x)$ является подгруппой стебля $\pi^{-1}(x)$ пучка $\mathfrak{S}$.*

Условие I) равносильно следующему условию:

I*) *Для любого сечения s пучка $\mathfrak{S}$ над произвольным открытым множеством $U\subset X$ и любой точки $\alpha\in s(U)\cap S'$ существует такая окрестность V точки $\pi(\alpha)$, содержащаяся в множестве U, что $s(x)\in S'$ для каждой точки $x\in V$.*

Из условий I*) и II) непосредственно следует, что отображение π' является локальным гомеоморфизмом, а из условия III) — что групповые операции в $\mathfrak{S}'$ непрерывны. Другими словами, тройка (S',π',X) сама является пучком. Вложение пространства S' в пространство S определяет мономорфизм (см. 2.1) пучка $\mathfrak{S}$ в пучок $\mathfrak{S}'$, называемый *вложением* $\mathfrak{S}'$ в $\mathfrak{S}$.

Пучок (X,π,X), где π — тождественное отображение, а также любой изоморфный ему пучок, называется *нулевым пучком* над пространством X. Его стеблями являются нулевые группы, и он служит подпучком каждого пучка $\mathfrak{S}$ над X. Действительно, множество S' нулевых элементов стеблей пучка $\mathfrak{S}$, т. е. множество $s(X)=0(\mathfrak{S})$, где s — нуль группы $\Gamma(X,\mathfrak{S})$, является, очевидно, пространством нулевого подпучка пучка $\mathfrak{S}$.

Для любого гомоморфизма h: $\mathfrak{S}\to\tilde{\mathfrak{S}}$ между пучками $\mathfrak{S}=(S,\pi,X)$ и $\tilde{\mathfrak{S}}=(\tilde{S},\tilde{\pi},X)$ тройка (S',π',X) с $S'=h^{-1}(0(\tilde{\mathfrak{S}}))$ и $\pi'=\pi|S'$ является подпучком пучка $\mathfrak{S}$. Этот подпучок обозначается символом $h^{-1}(0)$ и называется *ядром* гомоморфизма h. Его стеблями являются ядра гомоморфизмов h_x: $S_x\to\tilde{S}_x$, индуцированных гомоморфизмом h. Аналогично тройка $(\tilde{S}',\tilde{\pi}',X)$ с $\tilde{S}'=h(S)$ и $\tilde{\pi}'=\tilde{\pi}|\tilde{S}'$ является подпучком пучка $\tilde{\mathfrak{S}}$. Этот подпучок называется *образом* гомоморфизма h. Его стеблями являются образы гомоморфизмов h_x: $S_x\to\tilde{S}_x$.

Пусть $\{A_i\}$ — последовательность групп (или предпучков, или пучков), а $\{h_i\}$ — последовательность гомоморфизмов h_i: $A_i\to A_{i+1}$. (Имеется в виду, что индекс i принимает все целые значения, заключенные между двумя фиксированными пределами n_0 и n_1, причем эти пределы могут быть равны $-\infty$ или $+\infty$. Таким образом, группы A_i определены при $n_0<i<n_1$, а гомоморфизмы h_i — при $n_0<i<n_1-1$.) Последовательность A_i, h_i называется *точной последовательностью*, если ядро каждого гомоморфизма совпадает с образом предыдущего гомоморфизма (если, конечно, этот последний гомоморфизм определен). В случае когда A_i — предпучки $\{S^{(i)}_U\}$ над топологическим пространством X, свойство точности последовательности $\{A_i\}$ означает, что для каждого открытого множества U пространства X точна последовательность абелевых групп

$$\ldots\to S^{(i)}_U\to S^{(i+1)}_U\to S^{(i+2)}_U\to\ \ldots. \tag{2}$$

В случае когда A_i — пучки над X, свойство точности означает, что в любой точке $x\in X$ стебли пучков A_i составляют точную последовательность. Поскольку прямой предел точных последовательностей снова является точной последовательностью (Стинрод и Эйленберг [1], гл. VIII, теорема 5.4), справедлива

Лемма 2.4.1. *Для любой точной последовательности*

$$\ldots\to\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{G}_{n+1}\to\mathfrak{G}_{n+2}\to\ \ldots \tag{3}$$

предпучков над топологическим пространством X индуцированная последовательность

$$\ldots \to \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n+1} \to \mathfrak{S}_{n+2} \to \ldots$$

пучков, порожденных предпучками $\mathfrak{G}_i$, также является точной последовательностью.

Особое значение имеют *короткие* точные последовательности, т. е. точные последовательности вида

$$0 \to \mathfrak{S}' \xrightarrow{h'} \mathfrak{S} \xrightarrow{h} \mathfrak{S}'' \to 0. \tag{4}$$

Пусть $\mathfrak{S}' = (S', \pi', X)$, $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ и $\mathfrak{S}'' = (S'', \pi'', X)$ — пучки над пространством X. Первый нуль этой последовательности обозначает нулевой подпучок пучка $\mathfrak{S}'$, а первая стрелка — вложение этого подпучка в пучок $\mathfrak{S}'$. Следовательно, точность в члене $\mathfrak{S}'$ означает, что гомоморфизм h' является мономорфизмом. Мы будем считать его вложением пучка $\mathfrak{S}'$ в пучок $\mathfrak{S}$. Последний нуль обозначает нулевой подпучок пучка $\mathfrak{S}''$, а последняя стрелка — нулевой гомоморфизм, переводящий каждый стебель пучка $\mathfrak{S}''$ в его нулевой элемент. Следовательно, точность в члене $\mathfrak{S}''$ означает, что гомоморфизм h является эпиморфизмом. Для каждой точки $x \in X$ точная последовательность (4) определяет соответствующую точную последовательность

$$0 \to S'_x \xrightarrow{h'_x} S_x \xrightarrow{h_x} S''_x \to 0 \tag{5}$$

стеблей над этой точкой, так что группа S''_x изоморфна факторгруппе S_x/S'_x.

Далее легко видеть, что топология пространства S'' является фактортопологией, определенной отображением $h\colon S \to S''$ (подмножество пространства S'' тогда и только тогда открыто, когда его прообраз при отображении h открыт в пространстве S). Это показывает, что для данного пучка $\mathfrak{S}$ и его подпучка $\mathfrak{S}'$ существует (с точностью до изоморфизма) самое большее один пучок $\mathfrak{S}''$, для которого последовательность (4) точна. Этот пучок называется *факторпучком* пучка $\mathfrak{S}$ по подпучку $\mathfrak{S}'$. Докажем, что он всегда существует. Это можно без труда показать прямым построением, но мы предпочтем определить сначала соответствующий предпучок.

Итак, пусть $\mathfrak{S}$ — произвольный пучок над топологическим пространством X, а $\mathfrak{S}'$ — его произвольный подпучок. Для любого открытого множества U пространства X группа $\Gamma(U, \mathfrak{S}')$ сечений пучка $\mathfrak{S}'$ над U является, очевидно, подгруппой группы сечений пучка $\mathfrak{S}$. Следовательно, положив $S''_U = \Gamma(U, \mathfrak{S})/\Gamma(U, \mathfrak{S}')$, мы получим точную последовательность

$$0 \to \Gamma(U, \mathfrak{S}') \to \Gamma(U, \mathfrak{S}) \to S''_U \to 0. \tag{6}$$

Для каждого открытого множества V, содержащегося в U, гомоморфизм ограничения $\Gamma(U, \mathfrak{S}) \to \Gamma(V, \mathfrak{S})$ переводит подгруппу $\Gamma(U, \mathfrak{S}')$ группы $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ в подгруппу $\Gamma(V, \mathfrak{S}')$ группы $\Gamma(V, \mathfrak{S})$ и потому индуцирует некоторый гомоморфизм $r^U_V\colon S''_U \to S''_V$. Ясно, что тем самым мы получаем некоторый предпучок $\{S''_U, r^U_V\}$ (факторпредпучок канонического предпучка пучка $\mathfrak{S}$ по его подпредпучку, соответствующему каноническому предпучку пучка $\mathfrak{S}'$). Пусть $\mathfrak{S}''$ — пучок, порожденный предпучком $\{S''_U, r^U_V\}$ Согласно лемме 2.4.1, точная последовательность (6) индуцирует некоторую точную последовательность вида (4), так что пучок $\mathfrak{S}''$ и является искомым пучком.

Тем самым доказана следующая

Теорема 2.4.2. *Для любого пучка $\mathfrak{S}$ над топологическим пространством X и любого его подпучка $\mathfrak{S}'$ существует единственный (с точностью до изоморфизма) пучок $\mathfrak{S}''$, обладающий тем свойством, что имеет место точная последовательность*

$$0 \to \mathfrak{S}' \xrightarrow{h'} \mathfrak{S} \xrightarrow{h} \mathfrak{S}'' \to 0, \tag{7}$$

где h' — вложение. Для любой точки $x \in X$ участвующий в этой последовательности гомоморфизм h_x определяет изоморфизм факторгруппы S_x/S'_x на стебель S''_x пучка $\mathfrak{S}''$ над точкой x.

Замечание. Последовательность (7) индуцирует точную последовательность

$$0 \to \Gamma(U, \mathfrak{S}') \to \Gamma(U, \mathfrak{S}) \to \Gamma(U, \mathfrak{S}''). \tag{8}$$

Подчеркнем, что гомоморфизм $\Gamma(U, \mathfrak{S}) \to \Gamma(U, \mathfrak{S}'')$ эпиморфизмом, вообще говоря, не является. Согласно (6), образ этого гомоморфизма, т. е. подгруппа всех сечений пучка $\mathfrak{S}''$ над U, являющихся образами сечений пучка $\mathfrak{S}$, естественным образом отождествляется с группой S''_U.

Пусть теперь Y — произвольное подпространство пространства X. Для любого пучка $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ над X тройка $(\pi^{-1}(Y), \pi|\pi^{-1}(Y), Y)$, где $\pi^{-1}(Y)$ — подпространство пространства S, являющееся прообразом подпространства Y при отображении π, очевидно, является пучком над пространством Y. Этот пучок обозначается через $\mathfrak{S}|Y$ и называется *ограничением* пучка $\mathfrak{S}$ на подпространство Y.

Теорема 2.4.3. *Для любого замкнутого подпространства Y пространства X и любого пучка $\mathfrak{S} = (S, \pi, Y)$ над Y существует единственный (с точностью до изоморфизма) пучок $\hat{\mathfrak{S}}$ над пространством X, обладающий тем свойством, что*

$$\hat{\mathfrak{S}}\,|Y = \mathfrak{S}, \quad \hat{\mathfrak{S}}\,|X - Y = 0.$$

Для любого открытого множества U пространства X группы $\Gamma(U, \hat{\mathfrak{S}})$ и $\Gamma(U \cap Y, \mathfrak{S})$ изоморфны.

Доказательство. Единственность пучка $\hat{\mathfrak{S}}$ очевидна. Действительно, во-первых, условия, которым он должен удовлетворять, однозначно определяют все его стебли: $\hat{S}_x = S_x$ при $x \in Y$ и $\hat{S}_x = 0$ при $x \notin Y$. Во-вторых, всевозможные множества вида $s(U \cap Y) \cup ((U \cap (X - Y)) \times 0)$, где U — произвольное открытое множество пространства X, а s — произвольное сечение пучка $\mathfrak{S}$ над множеством U, образуют, как легко видеть, базу топологии пространства X. Этим не только доказана единственность пучка $\hat{\mathfrak{S}}$, но и дан метод его построения. Впрочем, пучок $\hat{\mathfrak{S}}$ можно построить и иначе. Именно, сопоставив каждому открытому множеству U пространства X группу $\hat{S}_U = \Gamma(U \cap Y, \mathfrak{S})$ и каждому открытому множеству $V \subset U$ гомоморфизм ограничения $r_V \colon \Gamma(U \cap Y, \mathfrak{S}) \to \Gamma(V \cap Y, \mathfrak{S})$, мы, очевидно, получим над пространством X некоторый предпучок. Ясно, что порожденный этим предпучком пучок $\hat{\mathfrak{S}}$ обладает тем свойством, что $\hat{\mathfrak{S}} | Y = \mathfrak{S}$. Кроме того, поскольку подпространство Y по условию замкнуто, каждая точка $x \in X - Y$ обладает открытой окрестностью U, для которой $U \cap Y = \varnothing$, и потому $\hat{S}_U = 0$. Следовательно, $\hat{\mathfrak{S}} | X - Y = 0$.

Определение. Построенный пучок $\hat{\mathfrak{S}}$ называется *тривиальным распространением пучка $\mathfrak{S}$*.

Замечания. 1) Построенный предпучок $\{\hat{S}_U, r_V^U\}$ является каноническим предпучком пучка $\mathfrak{S}$.

2) Если в некоторой граничной точке подпространства Y стебель пучка $\mathfrak{S}$ отличен от нуля, то пространство $\hat{S}$ не хаусдорфово.

2.5. Примеры. 1) пусть X — топологическое пространство, а A — абелева группа. Тройка $(X \times A, \pi, A)$, где $X \times A$ — прямое произведение пространства X и группы A, наделенной дискретной топологией, а $\pi \colon X \times A \to X$ — проекция этого произведения на его первый множитель, является, очевидно, пучком над пространством X (суммой и разностью точек (x, a) и (x, a') пространства $X \times A$ будут при этом точки $(x, a + a')$ и $(x, a - a')$ соответственно). Этот пучок называется *постоянным пучком* над пространством X со стеблем A и, как правило, отождествляется с группой A.

2) Пусть снова X — топологическое пространство. Сопоставив каждому непустому открытому множеству U пространства X аддитивную группу S_U всех непрерывных комплексных функций, определенных на U, и каждой паре открытых множеств $V \subset U$ гомоморфизм $r_V^U \colon S_U \to S_V$, относящий функции на U ее ограничение на V, мы, очевидно, получим над пространством X некоторый предпучок $\{S_U, r_U^V\}$. Порожденный этим предпучком пучок $\mathbf{C}_c$ называется *пучком ростков комплексных непрерывных функций*.

Аналогично определяется *пучок $\mathbf{C}_c^*$ ростков нигде не обращающихся в нуль комплексных непрерывных функций*; соответствующий предпучок сопоставляет каждому непустому открытому множеству U мультипликативную группу S_U^* не принимающих нулевого значения комплексных непрерывных функций, определенных на U. Имеет место естественный гомоморфизм $S_U \to S_U^*$, сопоставляющий функции $f \in S_U$ функцию $e^{2\pi i f} \in S_U^*$. Эти гомоморфизмы определяют гомоморфизм предпучков $\{S_U, r_V^U\} \to \{S_U^*, r_V^U\}$ и, значит, гомоморфизм пучков $\mathbf{C}_c \to \mathbf{C}_c^*$ (см. 2.2). Ядром гомоморфизма $\mathbf{C}_c \to \mathbf{C}_c^*$ является подпучок пучка $X \times C$, изоморфный постоянному пучку, стеблем которого является группа целых чисел $\mathbf{Z}$. Каждый элемент z_0 мультипликативной группы $\mathbf{C}^*$ отличных от нуля комплексных чисел обладает открытой окрестностью, в которой может быть выбрана однозначная ветвь функции $\log z$. Это очевидным образом позволяет каждому ростку k из $\mathbf{C}_c^*$ сопоставить росток $(2\pi i)^{-1} \log k$ из $\mathbf{C}_c$. Поскольку при гомоморфизме $\mathbf{C}_c \to \mathbf{C}_c^*$ росток $(2\pi i)^{-1} \log k$ переходит в росток k, тем самым доказано, что гомоморфизм $\mathbf{C}_c \to \mathbf{C}_c^*$ является эпиморфизмом (с ядром $\mathbf{Z}$). Другими словами, над пространством X имеет место точная последовательность пучков

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C}_c \to \mathbf{C}_c^* \to 0. \tag{9}$$

3) Пусть X — *гладкое n-мерное многообразие*. Это означает (см., например, де Рам [1], Ленг [1]), что X представляет собой хаусдорфово пространство со счетной базой, для каждой точки $x \in X$ которого указаны некоторые вещественные функции, определенные в окрестности этой точки (своей для каждой функции). Эти функции, называемые гладкими в точке x, должны удовлетворять следующей аксиоме:

Существуют такая открытая окрестность U точки x и такой гомеоморфизм g этой окрестности на открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, что вещественная функция f, определенная в окрестности V произвольной точки $y \in U$, тогда и только тогда гладка в V, когда функция fh^{-1}, где $h = g | U \cap V$, является C^∞-дифференцируемой функцией в точке $g(y)$ пространства $\mathbf{R}^n$.

Здесь fh^{-1} — вещественная функция, определенная в некоторой открытой окрестности точки $g(y)$ пространства $\mathbf{R}^n$. Такая функция называется C^∞-дифференцируемой, если в некоторой окрестности точки $g(y)$ существуют все ее частные производные и эти производные непрерывны.

Фигурирующий в этой аксиоме гомеоморфизм g называется *допустимой картой* гладкого многообразия X.

Для каждого открытого множества U гладкого многообразия X рассмотрим аддитивную группу всех комплексных дифференцируемых функций в U (комплексная функция считается дифференцируемой, если дифференцируемы ее действительная и мнимая части). Как и в примере 2), эти группы образуют некоторый предпучок $\{S_U, r_V^U\}$. Пучок $\mathbf{C}_\mathfrak{b}$, порожденный этим предпучком, называется *пучком ростков комплексных дифференцируемых функций*. Аналогично определяется *пучок* $\mathbf{C}_\mathfrak{b}^*$ *ростков нигде не обращающихся в нуль комплексных дифференцируемых функций*. Точно так же, как в примере 2), показывается, что пучки $\mathbf{C}_\mathfrak{b}$ и $\mathbf{C}_\mathfrak{b}^*$ связаны точной последовательностью

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C}_\mathfrak{b} \to \mathbf{C}_\mathfrak{b}^* \to 0. \tag{10}$$

4) Пусть, наконец, X — комплексное n-мерное многообразие. Определение комплексного многообразия аналогично определению гладкого многообразия (см. А. Вейль [2]): хаусдорфово пространство X со счетной базой называется *комплексным многообразием*, если для каждой точки $x \in X$ указаны некоторые комплексные функции, определенные в окрестности этой точки (своей для каждой функции). Эти функции, называемые голоморфными (или комплексно-аналитическими) в точке $x \in X$, должны удовлетворять следующей аксиоме:

Существуют такая открытая окрестность U точки x и такой гомеоморфизм g окрестности U на открытое подмножество пространства $\mathbf{C}_n$, что комплексная функция f, определенная в окрестности V произвольной точки $y \in U$, тогда и только тогда голоморфна, когда функция fh^{-1}, где $h = g|U \cap V$, голоморфна (в обычном смысле) в точке $g(y)$.

Фигурирующий в этой аксиоме гомеоморфизм g называется *допустимой картой* комплексного многообразия X. Допустимые карты n-мерного комплексного многообразия естественным образом являются допустимыми картами некоторого $2n$-мерного гладкого многообразия, определенного на том же самом несущем топологическом пространстве X.

Аналогично примерам 2) и 3) для каждого комплексного многообразия определен *пучок* $\mathbf{C}_\omega$ *ростков голоморфных функций*: в соответствующих определениях следует лишь принять за S_U аддитивную группу комплексных функций, голоморфных в U. Аналогично определяется и *пучок* $\mathbf{C}_\omega^*$ *ростков нигде не обращающихся в нуль голоморфных функций*, связанный с пучком $\mathbf{C}_\omega$ точной последовательностью

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C}_\omega \to \mathbf{C}_\omega^* \to 0. \tag{11}$$

Замечания. Пучки $\mathbf{C}_c$, $\mathbf{C}_\mathfrak{b}$, $\mathbf{C}_\omega$ можно рассматривать и как пучки $\mathbf{C}$-модулей. Однако говорить о точных последовательностях (9), (10) и (11) тогда уже нельзя. Построенные выше предпучки, порождающие пучки $\mathbf{C}_c$, $\mathbf{C}_c^*$, $\mathbf{C}_\mathfrak{b}$, $\mathbf{C}_\mathfrak{b}^*$, $\mathbf{C}_\omega$, $\mathbf{C}_\omega^*$, являются их каноническими предпучками, так что, например, группа $\Gamma(U, \mathbf{C}_c)$ представляет собой аддитивную группу всех комплексных непрерывных функций, определенных на U.

2.6. Группы когомологий с коэффициентами в пучке. В этом пункте для каждого целого $q \geqslant 0$ строятся группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{S})$ топологического пространства X с коэффициентами в данном пучке $\mathfrak{S}$ над пространством X. Построение производится в три этапа. На первом этапе строятся группы когомологий $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ произвольного открытого покрытия $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X с коэффициентами в данном предпучке $\mathfrak{G}$. Затем группы когомологий $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в данном пучке $\mathfrak{S}$ определяются как группы когомологий этого покрытия с коэффициентами в каноническом предпучке пучка $\mathfrak{S}$. Наконец, группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{G})$ и $H^q(X, \mathfrak{S})$ пространства X определяются как прямые пределы групп $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ и $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ соответственно по «всем» открытым покрытиям пространства X.

Группы когомологий $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ и $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$

Пусть $\mathfrak{G} = \{S_U, r_V^U\}$ — произвольный предпучок над топологическим пространством X и $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Функция f, сопоставляющая каждой $(q+1)$-членной последовательности $(i_0, \ldots, i_q)$ индексов из множества I некоторый элемент $f(i_0, \ldots, i_q)$ группы $S_{(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q})}$, называется *$q$-мерной коцепью* (покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в предпучке $\mathfrak{G}$). Все q-мерные коцепи очевидным образом образуют аддитивную группу $C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$. Формула

$$(\delta^q f)(i_0, \ldots, i_{q+1}) = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k r_W^{W_k} (f(i_0, \ldots, \hat{i}_k, \ldots, i_{q+1})),$$

где $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$, определяет, очевидно, гомоморфизм

$$\delta^q \colon C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}),$$

называемый *кограничным оператором*. Здесь знак ^ над символом означает, как обычно, что этот символ должен быть опущен. Кроме того, здесь положено

$$W = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{q+1}}, \quad W_k = U_{i_0} \cap \ldots \cap \hat{U}_{i_k} \cap \ldots \cap U_{i_{q+1}}.$$

Как полагается, $\delta^{q+1}\delta^q = 0$, так что определены группы когомологий

$$H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) = \frac{\text{kernel}(\delta^q)}{\text{image}(\delta^{q-1})}.$$

Группы когомологий $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ с коэффициентами в пучке $\mathfrak{S}$ определяются теперь как группы когомологий с коэффициентами в каноническом предпучке пучка $\mathfrak{S}$.

Группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{G})$ и $H^q(X, \mathfrak{S})$

Пусть покрытие $\mathfrak{B} = \{V_j\}_{j \in J}$ вписано в покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Рассмотрим произвольное отображение $\tau \colon J \to I$, обладающее тем свойством, что $V_j \subset U_{\tau j}$ при любом $j \in J$. Формула

$$(\tau^* f)(j_0, \ldots, j_l) = r_W^{W'}(f(\tau j_0, \ldots, \tau j_q)),$$

где $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$, определяет, очевидно, гомоморфизм

$$\tau^*\colon C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \to C^q(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}).$$

Здесь положено $W = V_{j_0} \cap \ldots \cap V_{j_q}$ и $W' = U_{\tau j_0} \cap \ldots \cap U_{\tau j_q}$, так что $W \subset W'$.

Для любого $q \geqslant 0$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\tau^*} & C^q(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}) \\ {\scriptstyle \delta^q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta^q} \\ C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) & \xrightarrow{\tau^*} & C^{q+1}(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}). \end{array}$$

Следовательно, гомоморфизм τ^* индуцирует гомоморфизм

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}\colon H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \to H^q(\mathfrak{B}, \mathfrak{G}).$$

Лемма 2.6.1. *Гомоморфизм $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$ зависит только от открытого покрытия $\mathfrak{U}$ и вписанного в него открытого покрытия $\mathfrak{B}$ и не зависит от выбора отображения $\tau\colon J \to I$. Кроме того, гомоморфизм $t_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}}$ является тождественным отображением и для любого открытого покрытия $\mathfrak{W}$, вписанного в покрытие $\mathfrak{B}$, имеет место равенство $t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}} = t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{B}} t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Пусть τ и τ' — два отображения из J в I, обладающие тем свойством, что $V_j \subset U_{\tau j} \cap U_{\tau' j}$. Для каждого $q \geqslant 1$ определим гомоморфизм (оператор гомотопии)

$$k^q\colon C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \to C^{q-1}(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$$

формулой

$$(k^q f)(j_0, \ldots, j_{q-1}) = \sum_{h=0}^{q-1} (-1)^h r_W^{W_h}(f(\tau j_0, \ldots, \tau j_h, \tau' j_{h+1}, \ldots, \tau' j_{q-1})),$$

где $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$. Здесь положено

$$W = V_{j_0} \cap \ldots \cap V_{j_{q-1}}$$

и

$$W_h = U_{\tau j_0} \cap \ldots \cap U_{\tau j_h} \cap U_{\tau' j_h} \cap U_{\tau' j_{h+1}} \cap \ldots \cap U_{\tau' j_{q-1}},$$

так что $W \subset W_h$. Ясно, что

$$k^1 \delta^0 = (\tau')^* - \tau^*,$$

$$\delta^{q-1} k^q + k^{q+1} \delta^q = (\tau')^* - \tau^* \quad \text{для} \quad q \geqslant 1.$$

Этим доказана первая часть леммы. Остальные утверждения теперь очевидны.

Согласно лемме 2.6.1, группы когомологий эквивалентных покрытий естественно изоморфны. Поэтому при определении групп когомологий пространства X мы можем ограничиться лишь собственными покрытиями этого пространства (см. начало этого параграфа).

Определение. *Группой когомологий $H^q(X, \mathfrak{G})$ топологического пространства X с коэффициентами в данном предпучке $\mathfrak{G}$* называется прямой предел групп $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ по отношению к гомоморфизмам $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$, где $\mathfrak{U}$ пробегает все собственные покрытия пространства X.

Группой когомологий $H^q(X, \mathfrak{S})$ пространства X с коэффициентами в пучке $\mathfrak{S}$ называется группа когомологий этого пространства с коэффициентами в каноническом предпучке для $\mathfrak{S}$.

Группа когомологий $H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ по определению представляет собой группу функций f, сопоставляющих каждому индексу $i \in I$ некоторое сечение f_i пучка $\mathfrak{S} \mid U_i$ и обладающих тем свойством, что $f_i = f_j$ на $U_i \cap U_j$. Следовательно, $H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) = \Gamma(X, \mathfrak{S})$. Иными словами, имеет место

Теорема 2.6.2. *Группа когомологий $H^0(X, \mathfrak{S})$ естественно изоморфна группе $\Gamma(X, \mathfrak{S})$ сечений пучка $\mathfrak{S}$ над пространством X.*

Пусть теперь $\mathfrak{S}$ — произвольный пучок над замкнутым подпространством Y пространства X, и пусть $\hat{\mathfrak{S}}$ — тривиальное распространение пучка $\mathfrak{S}$ на все пространство X (см. теорему 2.4.3). Тогда имеет место

Теорема 2.6.3. *Группы когомологий $H^q(Y, \mathfrak{S})$ и $H^q(X, \hat{\mathfrak{S}})$ естественно изоморфны.*

Доказательство. Каждое открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X определяет некоторое открытое покрытие $\mathfrak{U} \mid Y = \{U_i \cap Y\}_{i \in I}$ пространства Y, причем любое покрытие подпространства Y может быть так получено. Далее, для каждого открытого множества U пространства X группы $\Gamma(U \cap Y, \mathfrak{S})$ и $\Gamma(U, \hat{\mathfrak{S}})$ естественно изоморфны, причем эти изоморфизмы согласованы с гомоморфизмами ограничения r_V^U для $V \subset U$. Следовательно, для всех q имеют место изоморфизмы

$$C^q(\mathfrak{U} \mid Y, \mathfrak{S}) \cong C^q(\mathfrak{U}, \hat{\mathfrak{S}}),$$

перестановочные с кограничными операторами коцепных комплексов $\{C^q(\mathfrak{U} \mid Y, \mathfrak{S})\}$ и $\{C^q(\mathfrak{U}, \hat{\mathfrak{S}})\}$ и потому индуцирующие изоморфизмы

$$H^q(\mathfrak{U} \mid Y, \mathfrak{S}) \cong H^q(\mathfrak{U}, \hat{\mathfrak{S}}).$$

Теорема доказана.

2.7. Точная когомологическая последовательность для предпучков. Пусть $\mathfrak{G}$ и $\tilde{\mathfrak{G}}$ — произвольные предпучки над топологическим пространством X. Каждый гомоморфизм $h = \{h_U\}$ предпучка $\mathfrak{S}$ в предпучок $\tilde{\mathfrak{S}}$ (см. 2.2) естественным образом индуцирует некоторый гомоморфизм h_* группы $C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ в группу $C^q(\mathfrak{U}, \tilde{\mathfrak{S}})$, перестановочный с кограничными операторами и потому определяющий некоторый гомоморфизм

$$h_*: H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \to H^q(\mathfrak{U}, \tilde{\mathfrak{S}}).$$

При этом для любого покрытия $\mathfrak{V}$, вписанного в покрытие $\mathfrak{U}$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}"'] & H^q(\mathfrak{U}, \tilde{\mathfrak{S}}) \arrow[d, "t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}"'] \\ H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{S}) \arrow[r, "h_*"] & H^q(\mathfrak{V}, \tilde{\mathfrak{S}}), \end{tikzcd} \qquad (12)$$

так что в пределе гомоморфизмы h_* определяют некоторый гомоморфизм

$$h_*: H^q(X, \mathfrak{S}) \to H^q(X, \tilde{\mathfrak{S}}).$$

Рассмотрим теперь произвольную короткую точную последовательность предпучков над пространством X (см. 2.4):

$$0 \to \mathfrak{S}' \xrightarrow{h'} \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0 \qquad (13)$$

Здесь 0 — нулевой предпучок, сопоставляющий каждому открытому множеству пространства X нулевую группу. Пусть U — произвольное открытое подмножество пространства X. Предпучки $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}''$ сопоставляют этому множеству некоторые группы S'_U, S_U и S''_U, причем $S''_U = S_U/S'_U$. Поэтому для любого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ пространства X последовательность

$$0 \to C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}') \xrightarrow{h'_*} C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \xrightarrow{h_*} C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}'') \to 0, \qquad (14)$$

индуцированная последовательностью (13), также является точной.

Согласно общей теории коцепных комплексов, последовательность (14) индуцирует точную последовательность групп когомологий

$$0 \to H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}') \xrightarrow{h'_*} H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \xrightarrow{h_*} H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}'') \xrightarrow{\delta^0_*} H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}') \to \ldots$$

$$\ldots \to H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}') \xrightarrow{h'_*} H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \xrightarrow{h_*} H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}'') \xrightarrow{\delta^q_*} H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}') \to \ldots \qquad (15)$$

Здесь гомоморфизм δ^q_* определяется следующим образом. Пусть $b \in H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}'')$, и пусть $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}'')$ — произвольный представитель класса когомологий b. В силу точности последовательности (14) существует такая коцепь $g \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$, что $h_*(g) = f$.

Так как $\delta^q f = 0$, то $h_* \delta^q g = 0$ и, следовательно, коцепь $\delta^q g$ принадлежит подгруппе $C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}')$ группы $C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$. Поскольку $\delta^{q+1}(\delta^q g) = 0$, коцепь δ^q определяет некоторый элемент группы $H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}')^q$. Этот элемент и принимается за $\delta^q_* b$.

Ясно, что для любого открытого покрытия $\mathfrak{V}$, вписанного в покрытие $\mathfrak{U}$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}'') \arrow[r, "\delta^q_*"] \arrow[d, "t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}"'] & H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}') \arrow[d, "t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}"'] \\ H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{S}'') \arrow[r, "\delta^q_*"] & H^{q+1}(\mathfrak{V}, \mathfrak{S}'). \end{tikzcd} \qquad (16)$$

Поэтому в прямом пределе гомоморфизмы δ^q_* для каждого $q \geqslant 0$ определяют некоторый гомоморфизм

$$\delta^q_*: H^q(X, \mathfrak{S}'') \to H^{q+1}(X, \mathfrak{S}').$$

Коммутативные диаграммы (12) (построенные для гомоморфизмов h' и h) и коммутативная диаграмма (16) в совокупности образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}') \arrow[r, "h'_*"] \arrow[d, "t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}"'] & H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}"'] & H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}'') \arrow[r, "\delta^q_*"] \arrow[d, "t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}"'] & H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}') \arrow[r] \arrow[d, "t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}"'] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{S}') \arrow[r, "h'_*"] & H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \arrow[r, "h_*"] & H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{S}'') \arrow[r, "\delta^q_*"] & H^{q+1}(\mathfrak{V}, \mathfrak{S}') \arrow[r] & , \end{tikzcd} \qquad (17)$$

означающую, что $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ представляет собой гомоморфизм когомологической последовательности (15), построенной для покрытия $\mathfrak{U}$, в когомологическую последовательность (15), построенную для покрытия $\mathfrak{V}$. Поскольку прямой предел точных последовательностей также является точной последовательностью, тем самым доказана следующая

Лемма 2.7.1. *Каждая короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0$$

предпучков над топологическим пространством X естественным образом определяет точную последовательность групп когомологий

$$0 \to H^0(X, \mathfrak{S}') \to H^0(X, \mathfrak{S}) \to H^0(X, \mathfrak{S}'') \to H^1(X, \mathfrak{S}') \to \ldots$$

$$\ldots \to H^q(X, \mathfrak{S}') \to H^q(X, \mathfrak{S}) \to H^q(X, \mathfrak{S}'') \xrightarrow{\delta^q_*} H^{q+1}(X, \mathfrak{S}') \to \ldots \qquad (18)$$

Следствие. *Если точная последовательность* $0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \xrightarrow{h} \tilde{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{G}'' \to 0$ *предпучков над топологическим пространством* X *обладает тем свойством, что*

$$H^q(X, \mathfrak{G}') = H^q(X, \mathfrak{G}'') = 0$$

для всех $q \geqslant 0$, *то гомоморфизм*

$$h_*\colon H^q(X, \mathfrak{G}) \to H^q(X, \tilde{\mathfrak{G}})$$

является изоморфизмом (*для всех* $q \geqslant 0$).

Доказательство. Пусть $h(\mathfrak{G})$ — образ гомоморфизма h. Тогда имеют место точные последовательности

$$0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \to h(\mathfrak{G}) \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to h(\mathfrak{G}) \to \tilde{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{G}'' \to 0,$$

и потому отображения $H^q(X, \mathfrak{G}) \to H^q(X, h(\mathfrak{G}))$ и $H^q(X, h(\mathfrak{G})) \to H^q(X, \tilde{\mathfrak{G}})$ будут изоморфизмами. С другой стороны, ясно, что гомоморфизм h_* является как раз композицией этих изоморфизмов.

2.8. Паракомпактные пространства. Наиболее глубокие результаты теории пучков могут быть доказаны лишь для паракомпактных пространств (см., впрочем, библиографические замечания в конце главы). В этом пункте собраны основные определения и теоремы о паракомпактных пространствах, нужные нам в дальнейшем. В терминологии мы следуем Бурбаки; в частности, все паракомпактные пространства (равно как компактные и локально компактные) у нас по определению хаусдорфовы.

Определение. Открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X называется *точечно конечным*, если каждая точка пространства X принадлежит лишь конечному числу множеств U_i. Покрытие $\mathfrak{U}$ называется *локально конечным*, если каждая точка пространства X обладает открытой окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств U_i.

Определение. Топологическое пространство X называется *паракомпактным*, если оно хаусдорфово и в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие.

Теорема 2.8.1 (Дьёдонне [1], теорема 1). *Каждое паракомпактное пространство нормально.*

Теорема 2.8.2 (Дьёдонне [1], теорема 3). *Каждое локально компактное пространство, являющееся объединением счетного числа компактных подпространств, паракомпактно. В частности, каждое локально компактное пространство со счетной базой паракомпактно.*

Все многообразия, рассматриваемые в этой книге, по определению хаусдорфовы и обладают счетной базой (см. 2.5, примеры

3) и 4)). Следовательно, по теореме 2.8.2 все они паракомпактны. К паракомпактным пространствам принадлежат также все метрические пространства и все клеточные разбиения (см. Морита [1] и [2]).

Теорема 2.8.3 (теорема сужения, Дьёдонне [1], теорема 6). *Для любого точечно конечного открытого покрытия* $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ *нормального пространства* X *существует такое открытое покрытие* $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ *с тем же множеством индексов* I, *что* $\bar{V}_i \subset U_i$ *для любого* $i \in I$.

Носителем $\operatorname{supp} \varphi$ непрерывной функции $\varphi\colon X \to \mathbf{R}$ называется, как известно, наименьшее замкнутое множество, вне которого функция φ равна нулю:

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in X;\ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Определение. Пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — произвольное открытое покрытие топологического пространства X. Семейство $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ действительных непрерывных функций, определенных на пространстве X, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\mathfrak{U}$, если

1) $\varphi_i(x) \geqslant 0$ *для любой точки* $x \in X$;
2) $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ *для любого* $i \in I$;
3) *каждая точка* $x \in X$ *обладает открытой окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом множеств* $\operatorname{supp} \varphi_i$;
4) *для любой точки* $x \in X$ *имеет место равенство*

$$\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1.$$

(Сумма имеет смысл в силу условия 3).)

Теорема 2.8.4. *Пространство* X *тогда и только тогда паракомпактно, когда оно хаусдорфово и для любого его открытого покрытия существует подчиненное этому покрытию разбиение единицы.*

Доказательство. Пусть пространство X паракомпактно, и пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — его произвольное открытое покрытие. По условию в покрытие $\mathfrak{U}$ можно вписать некоторое локально конечное (и потому точечно конечное) открытое покрытие $\mathfrak{U}' = \{U'_i\}_{i \in I}$. Согласно теореме сужения 2.8.3 (эта теорема применима, поскольку, согласно теореме 2.8.1, пространство X нормально), существуют такие открытые покрытия $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ и $\mathfrak{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ пространства X, что $\bar{W}_i \subset V_i$ и $\bar{V}_i \subset U'_i$ для любого $i \in I$. Так как $\bar{W}_i \subset V_i$, то по лемме Урысона на пространстве X существует такая вещественная неотрицательная непрерывная функция φ'_i, равная единице на $\bar{W}_i$ и нулю вне V_i. Поскольку покрытия $\mathfrak{V}$

и $\mathfrak{W}$ локально конечны, сумма $\psi = \sum_{i \in I} \varphi_i'$ существует и представляет собой непрерывную функцию, очевидно, всюду отличную от нуля. Ясно, что функции $\varphi_i = \varphi_i'/\psi$ обладают всеми свойствами 1) — 4).

Обратно, предположим, что любое открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X обладает подчиненным разбиением единицы $\{\varphi_i\}_{i \in I}$. Пусть V_i — внутренность замкнутого множества $\operatorname{supp} \varphi_i$. Из свойства 4) немедленно вытекает, что семейство $\mathfrak{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ открытых множеств пространства X является его покрытием. Согласно свойству 2), это покрытие вписано в покрытие $\mathfrak{U}$, а согласно свойству 3), оно локально конечно. Этим доказана паракомпактность пространства X.

2.9. Группы когомологий паракомпактных пространств. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольный предпучок над топологическим пространством X и $\mathfrak{S}$ — порожденный им пучок (см. 2.2). Пусть, далее, $\tilde{\mathfrak{G}}$ — канонический предпучок пучка $\mathfrak{S}$ и h: $\mathfrak{G} \to \tilde{\mathfrak{G}}$ — построенный в 2.3 естественный гомоморфизм. Для любого $q \geqslant 0$ этот гомоморфизм определяет гомоморфизм h_*: $H^q(X, \mathfrak{G}) \to H^q(X, \tilde{\mathfrak{G}}) = H^q(X, \mathfrak{S})$ соответствующих групп когомологий.

Теорема 2.9.1. *Если пространство X паракомпактно, то для любого предпучка $\mathfrak{G}$ над пространством X естественный гомоморфизм*

$$h_*: H^q(X, \mathfrak{G}) \to H^q(X, \mathfrak{S})$$

является изоморфизмом.

Таким образом, группа когомологий паракомпактного пространства с коэффициентами в предпучке $\mathfrak{G}$ зависит только от порожденного этим предпучком пучка $\mathfrak{S}$. Для доказательства нам понадобится следующая вспомогательная

Лемма 2.9.2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — предпучок над паракомпактным пространством X, порождающий нулевой пучок, и пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Тогда для любой коцепи $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ существуют такое открытое покрытие $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ пространства X, вписанное в покрытие $\mathfrak{U}$, и такое отображение τ: $J \to I$ с $V_j \subset U_{\tau j}$ при $j \in J$, что коцепь $\tau^* f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{G})$ является нулевой коцепью.*

Доказательство (см. Серр [2], стр. 218). Пусть $\mathfrak{G} = \{S_U, r_V^U\}$. Условие, что предпучок $\mathfrak{G}$ порождает нулевой пучок, означает, что для любой открытой окрестности U произвольной точки x и любого элемента $g \in S_U$ существует такая открытая окрестность V точки x, что $r_V^U g = 0$.

Не теряя общности, мы можем, очевидно, считать покрытие $\mathfrak{U}$ локально конечным. Поэтому по теореме 2.8.3 (применимой согласно теореме 2.8.1) существует такое открытое покрытие $\mathfrak{W} = \{W_i\}_{i \in I}$ пространства X, что $\overline{W}_i \subset U_i$. Пусть $J = X$, и пусть τ: $X \to I$ — отображение, для которого $x \in W_{\tau x}$. Для каждой точки $x \in X$ выберем открытую окрестность V_x точки $x \in X$, удовлетворяющую следующим условиям:

a) Если $x \in U_i$, то $V_x \subset U_i$. Если $x \in W_i$, то $V_x \subset W_i$.

b) Если $V_x \cap \overline{W}_i$ непусто, то $V_x \subset U_i$.

c) Если $x \in U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$, то элемент $f(i_0, \ldots, i_q)$, рассматриваемый как элемент из S_{V_x}, равен нулю.

Условиям a) и b) можно удовлетворить, так как $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$ — локально конечные покрытия и $\overline{W}_i \subset U_i$. По замечанию, сделанному в начале доказательства, V_x можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялось c). Пусть $\mathfrak{V} = \{V_x\}_{x \in X}$.

Покажем, что коцепь $\tau^* f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{G})$ равна нулю, т. е. что для всех $(x_0, \ldots, x_q)$ элемент $f(\tau x_0, \ldots, \tau x_q)$, рассматриваемый как элемент из $S_{V_{x_0} \cap \ldots \cap V_{x_q}}$, равен нулю. Если $V_{x_0} \cap \ldots \cap V_{x_q}$ пусто, то доказывать нечего. Если $V_{x_0} \cap \ldots \cap V_{x_q}$ непусто, то непусто и $V_{x_0} \cap V_{x_k}$ для всех k, $0 \leqslant k \leqslant q$. По a) $V_{x_0} \cap W_{\tau x_k}$ непусто и, следовательно, по b), $V_{x_0} \subset U_{\tau x_k}$ для всех k. Из c) вытекает поэтому, что элемент $f(\tau x_0, \ldots, \tau x_q)$, рассматриваемый как элемент из $S_{V_{x_0}}$, равен нулю. Это же верно и для меньшего множества $V_{x_0} \cap \ldots \cap V_{x_q}$. Лемма доказана.

Замечание. В частном случае $q = 0$ теорема 2.9.2 справедлива для произвольного топологического пространства X. Достаточно выбрать такое открытое покрытие $\mathfrak{V} = \{V_x\}_{x \in X}$ и такое отображение τ: $X \to I$, что V_x есть открытая окрестность для x, $V_x \subset U_{\tau x}$ и $f(\tau x)$ как элемент из S_{V_x} равен нулю.

Доказательство теоремы 2.9.1. Используемый метод принадлежит Серру.

Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — канонический предпучок для $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G} \xrightarrow{h} \tilde{\mathfrak{G}}$ — канонический гомоморфизм. Имеет место точная последовательность предпучков

$$0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \xrightarrow{h} \tilde{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{G}'' \to 0, \tag{19}$$

в которой у $\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{G}''$ ассоциированные пучки — нулевые. По лемме 2.9.2 $H^q(X, \mathfrak{G}') = H^q(X, \mathfrak{G}'') = 0$ для всех $q \geqslant 0$. Следовательно, h_*: $H^q(X, \mathfrak{G}) \to H^q(X, \tilde{\mathfrak{G}})$ является изоморфизмом по следствию леммы 2.9.1. Теорема доказана.

Замечание. В частном случае $q=0$ теорема 2.9.1 справедлива для произвольного топологического пространства X, если только $\mathfrak{G}'=0$, т. е. если h — мономорфизм.

2.10. Точная когомологическая последовательность для пучков. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0 \tag{20}$$

над топологическим пространством X. Для всякого открытого множества U имеет место точная последовательность (в обозначениях из 2.4)

$$0 \to \Gamma(U, \mathfrak{S}') \to \Gamma(U, \mathfrak{S}) \to S''_U \to 0. \tag{21}$$

Пусть $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ — канонические предпучки для $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$; обозначим через $\mathfrak{G}''$ предпучок, образованный группами S''_U. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'' \to 0, \tag{22}$$

которая по лемме 2.7.1 дает точную когомологическую последовательность. По определению, $H^q(X, \mathfrak{G}') = H^q(X, \mathfrak{S}')$ и $H^q(X, \mathfrak{G}) = H^q(X, \mathfrak{S})$. Пучок, ассоциированный с $\mathfrak{G}''$, совпадает с $\mathfrak{S}''$. Если X паракомпактно, то по теореме 2.9.1 естественный гомоморфизм $H^q(X, \mathfrak{G}'') \to H^q(X, \mathfrak{S}'')$ будет изоморфизмом. Следовательно, в полученной точной последовательности группы $H^q(X, \mathfrak{G}'')$ можно заменить группами $H^q(X, \mathfrak{S}'')$. Получающиеся при этом гомоморфизмы

$$\delta^q_*\colon H^q(X, \mathfrak{S}'') \to H^{q+1}(X, \mathfrak{S}')$$

определены естественным образом. Итак, доказана

Теорема 2.10.1. *Точная последовательность пучков*

$$0 \to \mathfrak{S}' \xrightarrow{h'} \mathfrak{S} \xrightarrow{h} \mathfrak{S}'' \to 0 \tag{23}$$

над паракомпактным пространством X дает точную когомологическую последовательность

$$0 \to H^0(X, \mathfrak{S}') \xrightarrow{h'_*} H^0(X, \mathfrak{S}) \xrightarrow{h_*} H^0(X, \mathfrak{S}'') \xrightarrow{\delta^0_*} H^1(X, \mathfrak{S}') \to \ldots$$

$$\ldots \to H^q(X, \mathfrak{S}') \xrightarrow{h'_*} H^q(X, \mathfrak{S}) \xrightarrow{h_*} H^q(X, \mathfrak{S}'') \xrightarrow{\delta^q_*} H^{q+1}(X, \mathfrak{S}') \to \ldots,$$

в которой все гомоморфизмы определены естественным образом.

Замечание. Из замечаний предыдущего пункта следует, что над произвольным (не обязательно паракомпактным) пространством X точная последовательность пучков (23) дает точную когомологическую последовательность

$$0 \to H^0(X, \mathfrak{S}') \to H^0(X, \mathfrak{S}) \to H^0(X, \mathfrak{S}'') \to$$
$$\to H^1(X, \mathfrak{S}') \to H^1(X, \mathfrak{S}) \to H^1(X, \mathfrak{S}'').$$

Теперь мы переходим к некоторым приложениям точной когомологической последовательности, которые нам будут нужны в гл. IV. Пусть $\mathbf{K}$ — некоторое поле и $\mathfrak{S}$ — пучок $\mathbf{K}$-модулей над X (см. 2.1). Тогда группы когомологий будут векторными пространствами над $\mathbf{K}$. Через $\dim H^q(X, \mathfrak{S})$ будем обозначать размерность над $\mathbf{K}$.

Определение. Пучок $\mathfrak{S}$ $\mathbf{K}$-модулей над X имеет *тип* (F), если группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{S})$ являются конечномерными векторными пространствами над $\mathbf{K}$ и если $\dim H^q(X, \mathfrak{S}) = 0$ для всех достаточно больших q.

Если $\mathfrak{S}$ имеет тип (F), то может быть определена характеристика Эйлера — Пуанкаре

$$\chi(X, \mathfrak{S}) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim H^q(X, \mathfrak{S}).$$

Теорема 2.10.2. *Пусть* $0 \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0$ — *точная последовательность пучков над паракомпактным пространством X. Если два из пучков $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}''$ имеют тип (F), то и третий также имеет тип (F) и*

$$\chi(X, \mathfrak{S}) = \chi(X, \mathfrak{S}') + \chi(X, \mathfrak{S}'').$$

Это доказывается непосредственным применением теоремы 2.10.1.

Теорема 2.10.3. *Пусть*

$$0 \to \mathfrak{S}_1 \to \mathfrak{S}_2 \to \ldots \to \mathfrak{S}_n \to 0$$

— *точная последовательность пучков над паракомпактным пространством X. Если все $\mathfrak{S}_i$ имеют тип (F), то*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \chi(X, \mathfrak{S}_i) = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{K}_r$ ядро гомоморфизма из $\mathfrak{S}_r$ в $\mathfrak{S}_{r+1}$ и применим теорему 2.10.2 к точной последовательности

$$0 \to \mathfrak{K}_r \to \mathfrak{S}_r \to \mathfrak{K}_{r+1} \to 0.$$

2.11. Тонкие пучки. В приложениях теории пучков особенно важную роль играют различные результаты о равенстве нулю групп когомологий.

Определение. Пучок $\mathfrak{S}$ над паракомпактным пространством X называется *тонким пучком*, если для всякого локально конечного открытого покрытия $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X найдется система $\{h_i\}_{i \in I}$ гомоморфизмов $h_i\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, такая, что

I) *Для всякого $i \in I$ найдется замкнутое множество $A_i \in X$, такое, что $A_i \subset U_i$ и $h_i(S_x)=0$ для $x \notin A_i$, где S_x — стебель в $\mathfrak{S}$ над x.*

II) $\sum_{i \in I} h_i$ *тождественно равна единице* (сумма имеет смысл, так как покрытие $\mathfrak{U}$ локально конечно).

Теорема 2.11.1. *Пусть $\mathfrak{S}$ — тонкий пучок над паракомпактным пространством X. Тогда группы $H^q(X, \mathfrak{S})=0$ равны нулю для $q \geqslant 1$.*

Доказательство (см. Картан [4], сообщение XVII). Так как X паракомпактно, то достаточно доказать, что группы $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ равны нулю при $q \geqslant 1$ для любого локально конечного открытого покрытия $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i \in I}$. Определим для $q \geqslant 1$ гомоморфизм (гомотопию)

$$k^q\colon C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \to C^{q-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$$

следующим образом. Пусть $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$. Тогда коцепь $k^q f$ сопоставляет каждому набору $(i_0, \ldots, i_{q-1})$ сечение $(k^q f)(i_0, \ldots, i_{q-1})$ пучка $\mathfrak{S}$ над $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{q-1}}$. Для всякого индекса $i \in I$ пусть $t(i, i_0, \ldots, i_{q-1})$ совпадает с сечением $\mathfrak{S}$ над $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{q-1}}$, которое равно $h_i(f(i, i_0, \ldots i_{q-1}))$ на меньшем множестве $U_i \cap U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{q-1}}$ и равно нулю вне его. Здесь h_i — гомоморфизмы, обладающие свойствами I) и II). Положим

$$(k^q f)(i_0, \ldots, i_{q-1}) = \sum_{i \in I} t(i, i_0, \ldots, i_{q-1}).$$

Эта сумма имеет смысл, так как $\mathfrak{U}$ локально конечно. Пусть δ^q — кограничный гомоморфизм $C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$. Легко доказать, что для $q \geqslant 1$ гомоморфизм $k^{q+1}\delta^q + \delta^{q-1}k^q$ совпадает с тождественным отображением, чем и завершается доказательство.

Это доказательство представляет собой обобщение обычной конструкции конуса, которая применяется для доказательства тривиальности групп когомологий (с постоянными коэффициентами) для симплекса.

Рассмотрим теперь над паракомпактным пространством X пучок $\mathbf{C}_c$ (см. 2.5, пример 2). Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное локально конечное открытое покрытие X. По теореме 2.8.4 существует подчиненное ему разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i \in I}$. С помощью функций φ_i можно следующим образом определить отображения h_i: $\mathbf{C}_c \to \mathbf{C}_c$. Пусть S_U — $\mathbf{C}$-модуль комплексных непрерывных функций на U. Для $f \in S_U$ положим $h_i(f) = \varphi_i f$. Этим определяется гомоморфизм h_i предпучка $\{S_U\}$ в себя, а следовательно, и гомоморфизм h_i пучка $\mathbf{C}_c$ в себя. Эти гомоморфизмы h_i удовлетворяют условиям I) и II) из определения тонкого пучка. Тем самым доказана

Теорема 2.11.2. *Пучок $\mathbf{C}_c$ ростков комплексных непрерывных функций над паракомпактным пространством X тонок.*

Точно так же доказывается, что пучок ростков вещественных непрерывных функций над паракомпактным пространством X тонок.

Теорема 2.11.2 — типичный пример целого класса подобных теорем.

Пусть, наконец, X — гладкое многообразие (см. 2.5, пример 3), и пусть $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие для X. Тогда можно найти подчиненное разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i \in I}$, в котором φ_i — гладкие функции (см. де Рам [1], § 2). С помощью этого гладкого разбиения единицы можно показать, что многие пучки над X — тонкие. Например, пучок ростков $\mathbf{C}_b$ комплексных гладких функций тонок. Аналогично пучок ростков $\mathfrak{A}^p$ внешних дифференциальных форм степени p с вещественными (или комплексными) гладкими коэффициентами тонок. Канонический предпучок для этого пучка получается, если сопоставить каждому открытому множеству U в X $\mathbf{R}$(или $\mathbf{C}$)-модуль внешних форм степени p (с гладкими коэффициентами), определенными на U (см. де Рам [1], § 4).

2.12. Резольвенты для пучков. Теорема де Рама. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathfrak{S} \xrightarrow{h} \mathfrak{S}_0 \xrightarrow{h^0} \mathfrak{S}_1 \xrightarrow{h^1} \cdots \xrightarrow{h^{p-1}} \mathfrak{S}_p \xrightarrow{h^p} \cdots \tag{24}$$

над паракомпактным пространством X. Эта последовательность называется *резольвентой* для пучка $\mathfrak{S}$, если группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{S}_p)$ равны нулю для $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$. По теореме 2.11.1 это имеет место, если все пучки $\mathfrak{S}_p$ — тонкие. Точная последовательность (24), в которой все $\mathfrak{S}_p$, $p \geqslant 0$, тонки, называется *тонкой резольвентой* пучка $\mathfrak{S}$. Точная последовательность (24) определяет последовательность

$$0 \to \Gamma(X, \mathfrak{S}) \xrightarrow{h_*} \Gamma(X, \mathfrak{S}_0) \xrightarrow{h^0_*} \Gamma(X, \mathfrak{S}_1) \xrightarrow{h^1_*} \cdots \xrightarrow{h^{p-1}_*} \Gamma(X, \mathfrak{S}_p) \xrightarrow{h^p_*} \cdots, \tag{25}$$

которая, вообще говоря, точна только в членах $\Gamma(X, \mathfrak{S})$ и $\Gamma(X, \mathfrak{S}_0)$. Так как $h^{p+1}_* h^p_* = 0$, то группы $\Gamma(X, \mathfrak{S}_p)$, $p \geqslant 0$ и гомоморфизмы h^p_* образуют абстрактный коцепной комплекс.

Теорема 2.12.1. *Рассмотрим резольвенту* (24) *пучка $\mathfrak{S}$ над паракомпактным пространством X. Имеет место следующее утверждение: q-я группа когомологий абстрактного комплекса $\{\Gamma(X, \mathfrak{S}_p), p \geqslant 0\}$ естественным образом изоморфна группе когомологий $H^q(X, \mathfrak{S})$. Другими словами,*

$$H^q(X, \mathfrak{S}) \cong \ker(h^q_*)/\operatorname{im}(h^{q-1}_*) \quad \textit{для} \quad q \geqslant 1,$$

$$H^0(X, \mathfrak{S}) \cong \ker(h^0_*).$$

Доказательство. Ясно, что $\ker(h_*^0) = \Gamma(X, \mathfrak{S})$, а по теореме 2.6.2 последняя группа совпадает с группой когомологий $H^0(X, \mathfrak{S})$. Этим наше утверждение доказано для $q=0$. Обозначим через $\mathfrak{K}_p$ ядро гомоморфизма $h^p: \mathfrak{S}_p \to \mathfrak{S}_{p+1}$. Последовательность (24) дает точные последовательности пучков

$$0 \to \mathfrak{K}_p \to \mathfrak{S}_p \to \mathfrak{K}_{p+1} \to 0, \tag{26}$$

$p \geqslant 0$. Так как группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{S}_p)$ равны 0 для $q > 0$, точная когомологическая последовательность для (26) дает естественные изоморфизмы

$$H^{q-1}(X, \mathfrak{K}_{p+1}) \cong H^q(X, \mathfrak{K}_p) \quad \text{для} \quad q \geqslant 2. \tag{27}$$

Так как $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{S}$, повторное применение формулы (27) дает

$$H^1(X, \mathfrak{K}_{q-1}) \cong H^q(X, \mathfrak{S}) \quad \text{для} \quad q \geqslant 1. \tag{28}$$

Выпишем отрезок точной когомологической последовательности для (26) (с p замененным на $q-1$)

$$H^0(X, \mathfrak{S}_{q-1}) \xrightarrow{h_*^{q-1}} H^0(X, \mathfrak{K}_q) \to H^1(X, \mathfrak{K}_{q-1}) \to 0. \tag{29}$$

Так как $H^0(X, \mathfrak{K}_q)$ совпадает с ядром гомоморфизма h_*^q и $H^0(X, \mathfrak{S}_{q-1}) = \Gamma(X, \mathfrak{S}_{q-1})$, то теорема следует из (28) и (29).

Пусть X — гладкое многообразие (см. 2.5, пример 3), и пусть $\mathfrak{A}^p$ — пучок ростков гладких p-форм над X (см. конец п. 2.11). Если U — открытое множество в X, то $\Gamma(U, \mathfrak{A}^p)$ — это $\mathbf{R}$-модуль гладких p-форм, определенных на U. Внешняя производная является гомоморфизмом из $\Gamma(U, \mathfrak{A}^p)$ в $\Gamma(U, \mathfrak{A}^{p+1})$. В терминах локальных координат внешняя производная p-формы

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

есть $p+1$-форма

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} df_{i_1, \ldots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Пусть $\mathbf{R}$ — постоянный пучок вещественных чисел, h — вложение $\mathbf{R}$ в пучок $\mathfrak{A}^0$ ростков вещественных гладких функций и $h^p: \mathfrak{A}^p \to \mathfrak{A}^{p+1}$ — гомоморфизм, определяемый внешней производной.

Теорема 2.12.2 (лемма Пуанкаре). *Последовательность*

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{h} \mathfrak{A}^0 \xrightarrow{h^0} \mathfrak{A}^1 \xrightarrow{h^1} \ldots \longrightarrow \mathfrak{A}^p \xrightarrow{h^p} \ldots$$

точна.

Доказательство. Так как $dd = 0$, то $h^{p+1}h^p = 0$ для $p \geqslant 0$. Поэтому достаточно доказать следующее. Пусть ω — p-форма ($p \geqslant 1$), определенная на открытом множестве U. Если $d\omega = 0$, то найдется $(p-1)$-форма α, определенная на открытом множестве $V \subset U$, такая, что $\omega = d\alpha$ на V. Так как это чисто локальное утверждение, то можно считать X n-мерным евклидовым пространством. Требуемый результат в этом случае есть классическая лемма Пуанкаре. Его можно доказать, например, индукцией по размерности.

Теорема 2.12.3 (де Рам). *Пусть X — гладкое многообразие, и пусть A^p, $p \geqslant 0$, — $\mathbf{R}$-модуль гладких p-форм, определенных на всем X. Пусть Z^p — ядро $\mathbf{R}$-гомоморфизма d: $A^p \to A^{p+1}$. Тогда $dA^{p-1} \subset Z^p$ для $p \geqslant 1$ и*

$$H^0(X, \mathbf{R}) \cong Z^0, \quad H^p(X, \mathbf{R}) \cong Z^p/dA^{p-1} \quad \text{для} \quad p \geqslant 1.$$

Доказательство. Точная последовательность, построенная в теореме 2.12.2, является тонкой резольвентой постоянного пучка $\mathbf{R}$. Гомоморфизмы h_*^p совпадают в этом случае с внешними производными, и наша теорема следует из теоремы 2.12.1.

Замечание. Точно так же доказывается соответствующий результат для комплексных гладких p-форм. Пусть A^p — $\mathbf{C}$-модуль p-форм, определенных на всем X с гладкими комплексными функциями в качестве коэффициентов. Пусть Z^p — ядро $\mathbf{C}$-гомоморфизма d: $A^p \to A^{p+1}$. Тогда имеют место изоморфизмы

$$H^0(X, \mathbf{C}) \cong Z^0, \quad H^p(X, \mathbf{C}) \cong Z^p/dA^{p-1} \quad \text{для} \quad p \geqslant 1.$$

§ 3. Расслоения

3.1. Пусть X — топологическое пространство. Пучок групп $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ (не обязательно абелевых) определяется, как и в 2.1, свойствами I)—III), последним из них в следующей слегка видоизмененной форме:

III) *Всякий стебель является группой. Групповые операции сопоставляют точкам α и β из S_x элементы $\alpha\beta$ и $\alpha\beta^{-1}$ из S_x, причем $\alpha\beta^{-1}$ непрерывно зависит от α и β.* (Отсюда следует, что 1_x непрерывно зависит от x и что $\alpha\beta$ и $\alpha^{-1}\beta$ непрерывно зависят от α и β.)

Определения предпучка, канонического предпучка и т. д. переносятся с аналогичными видоизменениями. Как и в 2.3, определены группы $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ сечений пучка $\mathfrak{S}$ над открытым множеством U и гомоморфизмы ограничения r_V^U. Единичным элементом группы $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ служит сечение $x \to 1_x$. (Если U пусто, то по определению $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ состоит из одного единичного элемента.)

В неабелевом случае группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{S})$ определить нельзя. Однако все же для $q=1$ можно определить когомологическое множество $H^1(X, \mathfrak{S})$ с отмеченным элементом 1. Если $\mathfrak{S}$ — пучок абелевых групп, то это множество совпадает с группой, Доказательство. Ясно, что $\ker(h_*^0) = \Gamma(X, \mathfrak{S})$, а по теореме 2.6.2 последняя группа совпадает с группой когомологий $H^0(X, \mathfrak{S})$. Этим наше утверждение доказано для $q = 0$. Обозначим через $\mathfrak{K}_p$ ядро гомоморфизма $h^p: \mathfrak{S}_p \to \mathfrak{S}_{p+1}$. Последовательность (24) дает точные последовательности пучков

$$0 \to \mathfrak{K}_p \to \mathfrak{S}_p \to \mathfrak{K}_{p+1} \to 0, \tag{26}$$

$p \geqslant 0$. Так как группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{S}_p)$ равны 0 для $q > 0$, точная когомологическая последовательность для (26) дает естественные изоморфизмы

$$H^{q-1}(X, \mathfrak{K}_{p+1}) \cong H^q(X, \mathfrak{K}_p) \quad \text{для} \quad q \geqslant 2. \tag{27}$$

Так как $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{S}$, повторное применение формулы (27) дает

$$H^1(X, \mathfrak{K}_{q-1}) \cong H^q(X, \mathfrak{S}) \quad \text{для} \quad q \geqslant 1. \tag{28}$$

Выпишем отрезок точной когомологической последовательности для (26) (с p замененным на $q-1$)

$$H^0(X, \mathfrak{S}_{q-1}) \xrightarrow{h_*^{q-1}} H^0(X, \mathfrak{K}_q) \to H^1(X, \mathfrak{K}_{q-1}) \to 0. \tag{29}$$

Так как $H^0(X, \mathfrak{K}_q)$ совпадает с ядром гомоморфизма h_*^q и $H^0(X, \mathfrak{S}_{q-1}) = \Gamma(X, \mathfrak{S}_{q-1})$, то теорема следует из (28) и (29).

Пусть X — гладкое многообразие (см. 2.5, пример 3), и пусть $\mathfrak{A}^p$ — пучок ростков гладких p-форм над X (см. конец п. 2.11). Если U — открытое множество в X, то $\Gamma(U, \mathfrak{A}^p)$ — это $\mathbf{R}$-модуль гладких p-форм, определенных на U. Внешняя производная является гомоморфизмом из $\Gamma(U, \mathfrak{A}^p)$ в $\Gamma(U, \mathfrak{A}^{p+1})$. В терминах локальных координат внешняя производная p-формы

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} f_{i_1, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

есть $p+1$-форма

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} df_{i_1, \ldots, i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Пусть $\mathbf{R}$ — постоянный пучок вещественных чисел, h — вложение $\mathbf{R}$ в пучок $\mathfrak{A}^0$ ростков вещественных гладких функций и $h^p: \mathfrak{A}^p \to \mathfrak{A}^{p+1}$ — гомоморфизм, определяемый внешней производной.

Теорема 2.12.2 (лемма Пуанкаре). *Последовательность*

$$0 \to \mathbf{R} \xrightarrow{h} \mathfrak{A}^0 \xrightarrow{h^0} \mathfrak{A}^1 \xrightarrow{h^1} \ldots \longrightarrow \mathfrak{A}^p \xrightarrow{h^p} \ldots$$

точна.

Доказательство. Так как $dd = 0$, то $h^{p+1}h^p = 0$ для $p \geqslant 0$. Поэтому достаточно доказать следующее. Пусть ω — p-форма ($p \geqslant 1$), определенная на открытом множестве U. Если $d\omega = 0$, то найдется $(p-1)$-форма α, определенная на открытом множестве $V \subset U$, такая, что $\omega = d\alpha$ на V. Так как это чисто локальное утверждение, то можно считать X n-мерным евклидовым пространством. Требуемый результат в этом случае есть классическая лемма Пуанкаре. Его можно доказать, например, индукцией по размерности.

Теорема 2.12.3 (де Рам). *Пусть X — гладкое многообразие, и пусть A^p, $p \geqslant 0$, — $\mathbf{R}$-модуль гладких p-форм, определенных на всем X. Пусть Z^p — ядро $\mathbf{R}$-гомоморфизма d: $A^p \to A^{p+1}$. Тогда $dA^{p-1} \subset Z^p$ для $p \geqslant 1$* и

$$H^0(X, \mathbf{R}) \cong Z^0, \quad H^p(X, \mathbf{R}) \cong Z^p/dA^{p-1} \quad \text{для} \quad p \geqslant 1.$$

Доказательство. Точная последовательность, построенная в теореме 2.12.2, является тонкой резольвентой постоянного пучка $\mathbf{R}$. Гомоморфизмы h_*^p совпадают в этом случае с внешними производными, и наша теорема следует из теоремы 2.12.1.

Замечание. Точно так же доказывается соответствующий результат для комплексных гладких p-форм. Пусть A^p — $\mathbf{C}$-модуль p-форм, определенных на всем X с гладкими комплексными функциями в качестве коэффициентов. Пусть Z^p — ядро $\mathbf{C}$-гомоморфизма d: $A^p \to A^{p+1}$. Тогда имеют место изоморфизмы

$$H^0(X, \mathbf{C}) \cong Z^0, \quad H^p(X, \mathbf{C}) \cong Z^p/dA^{p-1} \quad \text{для} \quad p \geqslant 1.$$

§ 3. Расслоения

3.1. Пусть X — топологическое пространство. Пучок групп $\mathfrak{S} = (S, \pi, X)$ (не обязательно абелевых) определяется, как и в 2.1, свойствами I)—III), последним из них в следующей слегка видоизмененной форме:

III) *Всякий стебель является группой. Групповые операции сопоставляют точкам α и β из S_x элементы $\alpha\beta$ и $\alpha\beta^{-1}$ из S_x, причем $\alpha\beta^{-1}$ непрерывно зависит от α и β.* (Отсюда следует, что 1_x непрерывно зависит от x и что $\alpha\beta$ и $\alpha^{-1}\beta$ непрерывно зависят от α и β.)

Определения предпучка, канонического предпучка и т. д. переносятся с аналогичными видоизменениями. Как и в 2.3, определены группы $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ сечений пучка $\mathfrak{S}$ над открытым множеством U и гомоморфизмы ограничения r_V^U. Единичным элементом группы $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ служит сечение $x \to 1_x$. (Если U пусто, то по определению $\Gamma(U, \mathfrak{S})$ состоит из одного единичного элемента.)

В неабелевом случае группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{S})$ определить нельзя. Однако все же для $q = 1$ можно определить когомологическое множество $H^1(X, \mathfrak{S})$ с отмеченным элементом 1. Если $\mathfrak{S}$ — пучок абелевых групп, то это множество совпадает с группой, определенной в 2.6. Отмеченный элемент в этом случае совпадает с нулевым элементом группы когомологий.

Опять можно определить когомологическое множество с коэффициентами в произвольном предпучке. Для краткости мы приведем определение только для случая канонического предпучка, т. е. для случая самого пучка $\mathfrak{S}$.

Когомологическое множество $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$

Пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие пространства X.

$\mathfrak{U}$-*коциклом* называется функция f, сопоставляющая упорядоченной паре i, j элементов из I элемент $f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathfrak{S})$ таким образом, что

$$f_{ij} f_{jk} = f_{ik} \text{ в } U_i \cap U_j \cap U_k$$

для всех i, j, $k \in I$. Равенства такого типа всегда понимаются как равенства между ограничениями сечений на общую область определения. Из определения следует, что f_{ii} равняется единичному элементу в $\Gamma(U_i, \mathfrak{S})$ и что $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$.

Множество $\mathfrak{U}$-коциклов будем обозначать через $Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$. Коциклы f и f' называются *эквивалентными*, если для любого $i \in I$ найдется элемент $g_i \in \Gamma(U_i, \mathfrak{S})$, такой, что

$$f'_{ij} = g_i^{-1} f_{ij} g_j \text{ в } U_i \cap U_j \quad \text{для всех } i, j \in I.$$

Когомологическим множеством $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ называется множество классов эквивалентности $\mathfrak{U}$-коциклов. Пусть $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ — покрытие, вписанное в $\mathfrak{U}$, и пусть τ — отображение из J в I, такое, что $V_r \subset U_{\tau r}$ для всех $r \in J$. Тогда $\mathfrak{U}$-коцикл f определяет $\mathfrak{V}$-коцикл $\tau^* f$ равенством

$$(\tau^* f)_{r,s} = f_{\tau r, \tau s} \text{ в } V_r \cap V_s \quad \text{для всех } r, s.$$

Отображение τ^* индуцирует естественное отображение

$$t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}\colon H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{S})$$

с такими же свойствами, как и в лемме 2.6.1. Если $'\tau$ — другое отображение из J в I с $V_r \subset U_{'\tau r}$, то сечения $g_r = f_{\tau r, '\tau r}$ определяют эквивалентность

$$('\tau^* f)_{r,s} = g_r^{-1} (\tau^* f)_{r,s} g_s \text{ в } V_r \cap V_s \quad \text{для всех } r, s \in J$$

между $'\tau^* f$ и $\tau^* f$. Следовательно, отображение $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ не зависит от выбора отображения τ.

Когомологическое множество $H^1(X, \mathfrak{S})$ представляет собой прямой предел множеств $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ по отношению к отображениям $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$, когда $\mathfrak{U}$ пробегает все собственные открытые покрытия пространства X (см. 2.6 и начало § 2). Можно показать, что если покрытие $\mathfrak{V}$ вписано в $\mathfrak{U}$, то отображение $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$ взаимно однозначно, т. е. $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ можно рассматривать как подмножество в $H^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{S})$.

Если $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ конфинальны, то $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ естественным образом отождествляется с $H^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{S})$. Отсюда следует, что $H^1(X, \mathfrak{S})$ можно рассматривать как объединение множеств $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$, когда $\mathfrak{U}$ пробегает все собственные открытые покрытия X. Отмеченный элемент $1 \in H^1(X, \mathfrak{S})$ представим коциклом $f_{ij} = 1 \in \Gamma(U_i \cup U_j, \mathfrak{S})$ для любого открытого покрытия $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда G — топологическая группа, а $\mathfrak{S}$ — пучок ростков функций со значениями в G. Функции могут быть непрерывными, гладкими или голоморфными в зависимости от структур на X и G. Мы будем отмечать эти случаи символами $G_\mathfrak{c}$, $G_\mathfrak{d}$, G_ω, что согласуется с обозначениями из 2.5.

Если X — топологическое пространство и G — топологическая группа, то $G_\mathfrak{c}$ есть пучок, для которого $\Gamma(U, G_\mathfrak{c})$ совпадает с группой непрерывных отображений из U в G.

Если X — гладкое многообразие (см. 2.5) и G — вещественная группа Ли, то $G_\mathfrak{d}$ есть пучок, для которого $\Gamma(U, G_\mathfrak{d})$ совпадает с группой гладких (т. е. дифференцируемых класса C^∞, см. 2.5) отображений U в G.

Если X — комплексное многообразие (см. 2.5), а G — комплексная группа Ли, то G_ω есть пучок, для которого $\Gamma(U, G_\omega)$ совпадает с группой голоморфных отображений из U в G.

Соглашение. Если речь идет о пучке $G_\mathfrak{d}$ над пространством X, то мы будем молчаливо предполагать, что X — гладкое многообразие, а G — группа Ли. Если речь идет о пучке G_ω над X, то X предполагается комплексным многообразием, а G — комплексной группой Ли.

Пучок $G_\mathfrak{d}$ над X есть подпучок пучка $G_\mathfrak{c}$. Пучок G_ω над X есть подпучок пучка $G_\mathfrak{d}$. Имеем естественные отображения

$$H^1(X, G_\mathfrak{d}) \to H^1(X, G_\mathfrak{c}), \quad H^1(X, G_\omega) \to H^1(X, G_\mathfrak{d}), \tag{1}$$

а также их композицию

$$H^1(X, G_\omega) \to H^1(X, G_\mathfrak{c}).$$

Если $G' \to G$ — непрерывный (или гладкий, или голоморфный) гомоморфизм топологических групп (или групп Ли, или комплексных групп Ли), то имеем гомоморфизмы пучков

$$G'_\mathfrak{c} \to G_\mathfrak{c}, \quad G'_\mathfrak{d} \to G_\mathfrak{d}, \quad G'_\omega \to G_\omega$$

и естественные отображения

$$H^1(X, G'_\mathfrak{c}) \to H^1(X, G_\mathfrak{c}), \quad H^1(X, G'_\mathfrak{d}) \to$$
$$\to H^1(X, G_\mathfrak{d}), \quad H^1(X, G'_\omega) \to H^1(X, G_\omega). \tag{2}$$

Если $G' = G$ и h является внутренним автоморфизмом, $h(g) = a^{-1} g a$ $(g \in G)$, определяемым элементом $a \in G$, то все естественные отображения (2) — тождественные отображения. (2*)

3.2a. Пусть X — топологическое пространство и G — топологическая группа с единичным элементом $e \in G$. Рассмотрим эффективное непрерывное действие группы G на топологическом пространстве F. Здесь *непрерывное действие* означает непрерывное отображение $G \times F \to F$, переводящее $g \times f \in G \times F$ в $gf \in F$, такое, что $g_1(g_2f) = (g_1g_2)f$ и $ef = f$ для всех $f \in F$. *Эффективность* означает, что если $gf = f$ для некоторого g и всех f, то $g = e$.

Определение. Топологическое пространство W вместе с непрерывным отображением (*проекцией*) π: $W \to X$ называется *расслоением над X со структурной группой G и слоем F*, если существует система координатных преобразований, т. е. если

I) *имеются открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X и гомеоморфизмы h_i: $\pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$, которые отображают „слой" $\pi^{-1}(u)$ на $u \times F$;*

II) *для всех $i, j \in I$ имеются элементы $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, G_c)$, такие, что*

$$(h_ih_j^{-1})(u \times f) = u \times g_{ij}(u)f \quad \text{для всех } u \in U_i \cap U_j,\ f \in F. \tag{3}$$

Замечание. Так как действие G на F эффективно, то элемент g_{ij} однозначно определяется отображениями h_i и h_j. Элементы g_{ij} определяют коцикл $g \in Z^1(\mathfrak{U}, G_c)$ и, следовательно, элемент когомологического множества $H^1(\mathfrak{U}, G_c)$. Например, рассмотрим тривиальное расслоение с $W = X \times F$, где π — проекция произведения на сомножитель. Всякое открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ удовлетворяет условию I), а функции $g_{ij} = 1 \in \Gamma(U_i \cap U_j, G_c)$ удовлетворяют условию II). В этом случае g совпадает с отмеченным элементом в когомологическом множестве $H^1(\mathfrak{U}, G_c)$.

Чтобы завершить определение расслоения над X, надо еще указать, при каких условиях различные системы координатных преобразований определяют одно и то же расслоение. Гомеоморфизм h_U: $\pi^{-1}(U) \to U \times F$, где U — открытое множество в X, называется *допустимой картой* для системы координатных преобразований I), II), если для каждого $i \in I$ найдутся элементы $g_{U,i} \in \Gamma(U \cap U_i, G_c)$, такие, что

$$(h_Uh_i^{-1})(u \times f) = u \times g_{U,i}(u)f \quad \text{для всех } u \in U \cap U_i,\ f \in F. \tag{3*}$$

Определение. Две системы координатных преобразований превращают W в *одно и то же* расслоение W над X со структурной группой G и слоем F тогда и только тогда, когда всякая допустимая карта для одной системы является допустимой картой и для другой системы.

Определение. Пусть W с проекцией π и W' с проекцией π' — два расслоения над X со структурной группой G и слоем F. *Изоморфизмом* k расслоения W на расслоение W' называется гомеоморфизм k: $W \to W'$, такой, что для каждой точки $x \in X$

I) *слой $\pi^{-1}(x)$ отображается на слой $\pi'^{-1}(x)$;*

II) *найдутся окрестность U точки x, элемент $g_U \in \Gamma(U, G_c)$ и допустимые карты h_U: $\pi^{-1}(U) \to U \times F$ для W и h'_U: $\pi'^{-1}(U) \to U \times F$ для W', такие, что*

$$h'_Ukh_U^{-1}(u \times f) = u \times g_U(u)f \quad \text{для всех } u \in U,\ f \in F.$$

Если задано открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X и $\mathfrak{U}$-коцикл $g = \{g_{ij}\} \in Z^1(\mathfrak{U}, G_c)$, то можно построить расслоение W_g над X со структурной группой G и слоем F. Достаточно рассмотреть дизъюнктное объединение произведений $U_i \times F$ и отождествить точку $u \times f \in U_j \times F$ с точкой $u \times g_{ij}(u)f \in U_i \times F$ для всех $u \in U_i \cap U_j$. Полученное пространство будет расслоением с проекцией, индуцированной проекцией $U_i \times F \to U_i$. Если $g \in Z^1(\mathfrak{U}, G_c)$ и $h \in Z^1(\mathfrak{U}, G_c)$, то W_g изоморфно W_h тогда и только тогда, когда g и h представляют один и тот же элемент в когомологическом множестве $H^1(X, G_c)$. Всякое расслоение над X со структурной группой G и слоем F изоморфно расслоению W_g для некоторого g. Тем самым получена

Теорема 3.2.1. *Классы изоморфизмов расслоений над X со структурной группой G и слоем F (с заданным эффективным непрерывным действием G на F) находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с элементами когомологического множества $H^1(X, G_c)$. Тривиальное расслоение $W = X \times F$ соответствует отмеченному элементу $1 \in H^1(X, G_c)$.*

Расслоения, находящиеся в классе изоморфизмов, соответствующем элементу $\xi \in H^1(X, G_c)$, называются *ассоциированными* с ξ. Если $F = G$ и действие G на себе осуществляется левыми переносами, то расслоения со структурной группой и слоем G называются *главными*.

Соглашение. Элементы из $H^1(X, G_c)$ будем называть *G-расслоениями*. С другой стороны, слова *расслоение* или *главное расслоение* будут относиться к индивидуальным расслоениям, а не к классу изоморфных расслоений.

3.2b. Определение и результаты п. 3.2a переносятся на дифференцируемый и голоморфный случаи. Пусть X — гладкое (соотв. комплексное) многообразие, а G — вещественная (соотв. комплексная) группа Ли. [По поводу групп Ли см., например, Понтрягин [1].] Рассматривается эффективное гладкое (соотв. голоморфное) действие $G \times F \to F$ группы G на гладком (соотв. комплексном) многообразии F. В остальных определениях нужно только заменить всюду пучок G_c на пучок G_b (соотв. на G_ω) над X. Расслоение W будет тогда автоматически гладким (соотв. комплексным) многообразием. Проекция π будет гладким (соотв. голоморфным) отображением. Изоморфизм между двумя расслоениями будет гладким (соотв. голоморфным) гомеоморфизмом.

Мы будем говорить о непрерывных, гладких или комплексно-аналитических расслоениях или G-расслоениях в соответствии с тем, какой из пучков G_c, G_b, G_ω рассматривается. Пусть W — непрерывное, гладкое или комплексно-аналитическое расслоение над X с проекцией π. *Сечением* для W над открытым множеством U называется непрерывное, гладкое или голоморфное отображение $s\colon U \to W$, такое, что πs — тождественное отображение. Если существует сечение над всем X, то мы будем просто говорить, что W обладает сечением.

Замечание. Общую схему п. 3.2a можно использовать для определения многих других типов расслоений (например, вещественно-аналитических, алгебраических). Нужно только заменить пучок G_c соответствующим пучком. Вообще можно говорить о расслоениях с заданным структурным пучком (Гротендик [1], Хольман [1]). Для целей этой книги достаточны пучки G_c, G_b и G_ω.

3.2c. Рассмотрим непрерывное действие топологической группы G на топологическом пространстве F, не являющееся эффективным. Элементы h из G, действующие тривиально на F (т. е. такие, что $hf = f$ для всех $f \in F$), образуют замкнутую нормальную подгруппу N группы G. Имеется эффективное непрерывное действие топологической группы G/N на F.

Если G — вещественная группа Ли, то такова же всякая замкнутая подгруппа N группы G. Следовательно, гладкое действие группы G на гладком многообразии F определяет эффективное гладкое действие вещественной группы Ли G/N на F.

Если G — комплексная группа Ли, то замкнутая подгруппа группы G не обязана быть комплексной группой Ли. Однако, как легко доказать, замкнутая нормальная подгруппа группы G, определенная голоморфным действием на комплексном многообразии F, является комплексной группой Ли. В этом случае имеется эффективное голоморфное действие комплексной группы Ли G/N на F.

Имеют место естественные отображения [см. 3.1 (2)]

$t\colon H^1(X, G_c) \to H^1(X, (G/N)_c)$, если X—топологическое пространство,

$t\colon H^1(X, G_b) \to H^1(X, (G/N)_b)$, если X—гладкое многообразие,

$t\colon H^1(X, G_\omega) \to H^1(X, (G/N)_\omega)$, если X—комплексное многообразие.

Пусть W — расслоение со структурной группой G/N и слоем F, ассоциированное с $\xi \in H^1(X, G_c)$. В этом случае мы будем также говорить о W как о расслоении со структурной группой G и слоем F, ассоциированном с ξ. Аналогичное замечание относится к G_b и G_ω.

3.2d. Следующие замечания равно относятся к непрерывному, гладкому и комплексно-аналитическому случаям.

Пусть E — главное расслоение над X со структурной группой и слоем G. Имеется эффективное действие группы G на E, определенное правыми сдвигами на каждом слое. В локальном представлении E в виде $U \times G$ (т. е. в допустимой карте) действие элемента $a \in G$ задается формулой $(u \times g)a = u \times ga$. Это действие элемента $a \in G$ на E не зависит от выбора допустимой карты, так как координатные преобразования (3), (3*) определяются левыми сдвигами.

Рассмотрим действие (необязательно эффективное) группы G на F. Мы покажем теперь, как построить расслоение W над X со слоем F, исходя из главного расслоения E. Образуем прямое произведение $E \times F$ и отождествим $ea \times f$ с $e \times af$ для всех $a \in G$, $e \in E$, $f \in F$. Факторпространство W естественным образом является расслоением над X со структурной группой G и слоем F. Расслоения W и E ассоциированы с одним и тем же G-расслоением.

3.3. Пусть X, Y — топологические пространства, $\varphi\colon Y \to X$ — непрерывное отображение и G — топологическая группа. Тогда имеется естественное отображение

$$\varphi^*\colon H^1(X, G_c) \to H^1(Y, G_c). \tag{4}$$

Если в открытом покрытии $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X элемент ξ представлен $\mathfrak{U}$-коциклом $\{g_{ij}\}$, то $\varphi^*\xi$ представляется в открытом покрытии $\varphi^{-1}\mathfrak{U} = \{\varphi^{-1}U_i\}_{i \in I}$ пространства Y $\varphi^{-1}\mathfrak{U}$-коциклом $\{g_{ij}\varphi\}$; $\varphi^*\xi$ называется G-расслоением, *индуцированным* из G-расслоения ξ с помощью отображения φ.

Пусть W — расслоение над X со структурной группой G, слоем F и проекцией π, ассоциированное с ξ. Следующая конструкция дает расслоение φ^*W над Y, ассоциированное с $\varphi^*\xi$ и имеющее слой F.

Пусть φ^*W — подпространство в $Y \times W$, состоящее из точек $y \times w \in Y \times W$, таких, что $\varphi(y) = \pi(w)$. Оно будет расслоением над Y с проекцией, индуцированной проекцией на первый множитель в произведении.

Пусть $\varphi\colon Y \to X$ — гладкое или голоморфное отображение гладких или комплексных многообразий X и Y. Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли. Имеется естественное отображение

$$\varphi^*\colon H^1(X, G_b) \to H^1(Y, G_b) \quad \text{или} \quad \varphi^*\colon H^1(X, G_\omega) \to H^1(Y, G_\omega). \tag{4'}$$

Определение φ^* и построение расслоения φ^*W таковы же, как и в непрерывном случае.

3.4a. Пусть G' — замкнутая подгруппа топологической группы G. Рассмотрим пространство G/G' левых классов смежности xG', $x \in G$, и естественное отображение σ: $G \to G/G'$. Обозначим через $e \in G$ — единичный элемент. Утверждение

$$\sigma\colon G \to G/G' \textit{ допускает локальное сечение} \qquad (5)$$

означает, что имеются открытая окрестность U элемента $\sigma(e)$ в G/G' и непрерывное отображение s: $U \to G$, для которых σs — тождественное отображение

Т е о р е м а 3.4.1 (С т и н р о д [1], 7.4). *Если имеет место* (5), *то G можно естественным образом рассматривать как главное расслоение над G/G' со структурной группой и слоем G' и с проекцией σ.*

Т е о р е м а 3.4.2. *Пусть G' — замкнутая подгруппа вещественной группы Ли G. Тогда G' является вещественной группой Ли и σ: $G \to G/G'$ допускает локальное гладкое (даже вещественно-аналитическое) сечение. Можно естественным образом рассматривать G как гладкое главное расслоение над G/G' со структурной группой и слоем G' и проекцией σ.*

Т е о р е м а 3.4.3. *Пусть G' — замкнутая подгруппа комплексной группы Ли G. Тогда σ: $G \to G/G'$ допускает локальное голоморфное сечение. Можно естественным образом рассматривать G как комплексно-аналитическое главное расслоение над G/G' со структурной группой и слоем G' и проекцией σ.*

Существование гладкого (голоморфного) локального сечения s в теоремах 3.4.2 и 3.4.3 можно доказать с помощью канонических координат в окрестности точки $e \in G$. В частных случаях, встречающихся в этой книге, s может быть легко построено непосредственно.

3.4b. Последующее изложение равно относится к непрерывному, гладкому и комплексно-аналитическому случаям. Пусть X — топологическое пространство, гладкое многообразие или комплексное многообразие, смотря по тому, какой случай рассматривается. Пусть G' — замкнутая подгруппа группы G. В непрерывном случае будем предполагать, что выполнено (5). В комплексно-аналитическом случае предполагаем, что G', G — комплексные группы Ли.

С о г л а ш е н и е. Пусть W — расслоение со структурной группой G и слоем F, ассоциированное с G-расслоением ξ над X (см. 3.2a и 3.2c). Обозначим через h естественное вложение множества G'-расслоений над X в множество G-расслоений над X, индуцированное вложением G' в G (см. 3.1). Если найдется G'-расслоение $\check\xi$ над X, такое, что $h\check\xi = \xi$, то мы будем говорить, что *структурную группу расслоения ξ можно редуцировать к G'*. Если

такое G'-расслоение возникает естественным образом, то мы будем говорить, что структурную группу можно редуцировать к G' естественным образом.

Пусть E — главное расслоение над X с проекцией π и слоем G, ассоциированное с G-расслоением ξ. Обозначим через E/G' факторпространство, получаемое отождествлением в каждом слое расслоения E точек, переходящих одна в другую, при правом сдвиге на элемент из G' (см. 3.2d). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E/G' \arrow[dl, "\rho"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Т е о р е м а 3.4.4. *Можно естественным образом рассматривать E как главное расслоение над E/G' со структурной группой и слоем G' и проекцией σ. Пусть $\check\xi$ — соответствующее G'-расслоение над E/G'.*

Далее, E/G' можно естественным образом рассматривать как расслоение над X со структурной группой G, слоем G/G' и проекцией ρ (*при этом G действует на G/G'* слева, см. 3.2c).

Расслоение E/G' ассоциировано с G-расслоением ξ.

Пусть h — отображение множества G'-расслоений над E/G' в множество G-расслоений над E/G', введенное выше. Тогда

$$h\check\xi = \rho^*\xi, \qquad (6)$$

т. е. после «поднятия» с помощью ρ структурную группу для ξ можно естественным образом редуцировать к G'.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теорем 3.4.1, 3.4.2 или 3.4.3 соответственно рассматриваемому случаю. Проверку первых утверждений мы предоставляем читателю. Покажем только, как получить (6). Пусть W — подпространство в $E/G' \times E$, состоящее из точек $c \times d$ в $E/G' \times E$, таких, что $\rho(c) = \pi(d)$. Согласно сказанному в 3.3, W есть главное расслоение над E/G' со слоем G, ассоциированное с $\rho^*\xi$. Согласно 3.2d, имеется расслоение $\check W$ над E/G', получающееся из $E \times G$ отождествлениями $da \times a^{-1}g = d \times g$ для всех $a \in G'$, $d \in E$, $g \in G$; $\check W$ имеет в качестве структурной группы G' и в качестве слоя G. Действие G' на G задается левыми переносами, и поэтому $\check W$ можно рассматривать как главное расслоение над E/G' со структурной группой и слоем G, ассоциированное с $h\check\xi$. Формула $k(d \times g) = \sigma(d) \times dg$ задает корректно определенное отображение k: $\check W \to W$, являющееся изоморфизмом главных расслоений, чем завершается доказательство формулы (6).

В следующей теореме (в ней используются обозначения теоремы 3.4.4) даются условия, при которых структурная группа для ξ может быть редуцирована к G'. Мы используем также терминологию из 3.2b, так что под сечением понимается непрерывное, гладкое или голоморфное сечение соответственно рассматриваемому случаю.

Теорема 3.4.5. *Структурную группу для ξ можно редуцировать к G' тогда и только тогда, когда расслоение E/G' над X имеет сечение s. Если сечение s расслоения E/G' задано, то G'-расслоение*

$$\eta = s^*(\check{\xi})$$

отображается в ξ при вложении $G' \to G$. В этом случае имеются открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X и система допустимых карт $U_i \times G$ для E, такие, что координатные преобразования

$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G$$

отображают $U_i \cap U_j$ в G' и в каждой карте $U_i \times G$ сечение s задается отображением $u \in U_i$ в точку $u \times e$ из E/G', где $e \in G$ — единичный элемент. Коцикл $\{g_{ij}\}$ представляет G-расслоение ξ, если g_{ij} рассматривать как отображение в G, и представляет G'-расслоение η, если g_{ij} рассматривать как отображения в G'.

Доказательства теорем этого пункта можно найти у Стинрода [1] и Хольмана [1]. Существенным фактом в непрерывном случае является предположение (5) о том, что G/G' допускает локальное сечение. В остальных двух случаях аналогичное предположение не нужно делать, так как локальное сечение всегда существует.

3.5. Естественное действие комплексной группы Ли $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ на комплексном векторном пространстве $\mathbf{C}_q$ (см. 0.9) непрерывно и эффективно. *Векторным расслоением* над X называется расслоение W над X со структурной группой $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ и слоем $\mathbf{C}_q$. В частности, имеем непрерывные векторные расслоения над топологическим пространством X, гладкие векторные расслоения над гладким многообразием X и комплексно-аналитические векторные расслоения над комплексным многообразием X (см. 3.2b). Если $q = 1$, то W называется *расслоением на прямые* или *одномерным* векторным расслоением.

Координатные преобразования между двумя допустимыми картами для W сохраняют на каждом слое структуру векторного пространства. Следовательно, определены операции сложения точек в одном слое и умножения точки слоя на комплексное число. Отсюда следует, что для сечений над открытым множеством U определены операции сложения сечений и умножения сечения на комплексное число. Эти операции не выводят из области непрерывных, гладких или голоморфных сечений соответственно рассматриваемому случаю. Следовательно, над X определены следующие пучки:

I) $\mathfrak{C}(W)$ — *пучок ростков непрерывных сечений в непрерывном векторном расслоении W над топологическим пространством X.*

Канонический предпучок для $\mathfrak{C}(W)$ сопоставляет всякому открытому множеству U из X $\mathbf{C}$-модуль всех непрерывных сечений для W над U.

II) $\mathfrak{A}(W)$ — *пучок ростков гладких сечений для гладкого векторного расслоения W над гладким многообразием X.*

III) $\Omega(W)$ — *пучок ростков голоморфных сечений комплексно-аналитического векторного расслоения W над комплексным многообразием X.*

Пучок $\mathfrak{C}(W)$ является тонким, если X паракомпактно. Пучок $\mathfrak{A}(W)$ всегда тонок. В обоих случаях при определении пучковых гомоморфизмов h_i (см. 2.11) можно умножать локальные сечения на (непрерывные или гладкие) функции φ_i из разбиения единицы.

Пусть W — векторное расслоение над X, ассоциированное с $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоением ξ. Следующая конструкция дает главное расслоение E над X со структурной группой и слоем $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$, ассоциированное с ξ:

Слой для E над $x \in X$ есть множество всех изоморфизмов между фиксированным векторным пространством $\mathbf{C}_q$ и слоем W_x в W над x.

Векторные расслоения W со структурными группами $\mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$ и $\mathbf{GL}^+(q, \mathbf{R})$ и слоем $\mathbf{R}^q$ (см. 0.9) определяются аналогично. Построение главного расслоения, ассоциированного с данным векторным, таково же, как и в случае комплексного слоя.

3.6a. Пусть A и B — произвольные конечномерные векторные пространства над полем $\mathbf{K}$. Прямая сумма $A \oplus B$ и тензорное произведение $A \otimes B$ являются снова векторными пространствами над $\mathbf{K}$ размерности $\dim(A \oplus B) = \dim A + \dim B$ и $\dim(A \otimes B) = \dim A \cdot \dim B$. Векторам $a \in A$, $b \in B$ соответствуют векторы $a \oplus b \in A \oplus B$ и $a \otimes b \in A \otimes B$. Произведение $a \otimes b$ линейно по каждому множителю и векторное пространство $A \otimes B$ порождается элементами вида $a \otimes b$. Имеется также векторное пространство $\mathrm{Hom}(A, B)$ над $\mathbf{K}$, элементами которого являются линейные отображения из A в B. Для всякого конечномерного векторного пространства A определено двойственное векторное пространство A^*. По определению $A^* = \mathrm{Hom}(A, \mathbf{K})$; как хорошо известно, $\dim(A^*) = \dim A$. Определено также пространство $\lambda^p A$ p-векторов. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_p \in A$ определяют вектор $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p \in \lambda^p A$, линейно зависящий от каждого аргумента. При перестановке векторов $a_1, a_2, \ldots, a_p$ вектор $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p$ умножается на знак перестановки, и $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p = 0$, если два множителя совпадают. Элементы вида $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_p$ и порождают $\lambda^p A$. Если $\dim A = q$, то $\dim \lambda^p A = \binom{q}{p}$. (Подробнее относительно этих определений из мультилинейной алгебры см. Бурбаки [1].)

3.6b. Пусть W — векторное расслоение над X. Слой W_x над точкой $x \in X$ является комплексным векторным пространством, изоморфным стандартному слою $\mathbf{C}_q$. Пусть W' — другое векторное расслоение над X со слоем W'_x и типичным слоем $\mathbf{C}_{q'}$ (см. 3.5).

Естественным образом можно определить векторные расслоения $W \oplus W'$ (*сумму Уитни* W и W'), $W \otimes W'$ (тензорное произведение), $\operatorname{Hom}(W, W')$, W^* (двойственное расслоение) и $\lambda^p W$ (расслоение p-векторов). Слоями над точкой x у этих векторных расслоений являются соответственно комплексные векторные пространства $W_x \oplus W'_x$, $W_x \otimes W'_x$, $\operatorname{Hom}(W_x, W'_x)$, W^*_x и $\lambda^p W_x$. Векторное расслоение $\lambda^p(W^*)$ называется *расслоением p-форм на* W.

В терминах допустимых карт $U \times \mathbf{C}_q$ для W и $U \times \mathbf{C}_{q'}$ для W' допустимой картой для $W \otimes W'$ является произведение $U \times (C_q \otimes C_{q'})$. Координатные преобразования для W, W' индуцируют естественным образом координатные преобразования для $W \otimes W'$. Аналогично и в других случаях. Это общий принцип, сформулированный Милнором (см. Ленг [1], гл. III, § 4 или Милнор [8]).

Если W и W' являются оба непрерывными, гладкими или комплексно-аналитическими векторными расслоениями, то такими же будут и введенные выше расслоения. Следующая теорема имеет место равно в непрерывном, гладком и комплексно-аналитическом случаях.

Теорема 3.6.1. *Пусть W, W', W'' — векторные расслоения над X. Тогда имеют место изоморфизмы*

$$(W \oplus W') \oplus W'' \cong W \oplus (W' \oplus W''), \quad W \oplus W' \cong W' \oplus W,$$
$$(W \otimes W') \otimes W'' \cong W \otimes (W' \otimes W''), \quad W \otimes W' \cong W' \otimes W,$$
$$(W \oplus W') \otimes W'' \cong (W \otimes W'') \oplus (W' \otimes W''),$$
$$(W \oplus W')^* \cong W^* \oplus W'^*, \quad (W \otimes W')^* \cong W^* \otimes W'^*,$$
$$\operatorname{Hom}(W, W') \cong W^* \otimes W', \qquad (W^*)^* \cong W.$$

Если W имеет размерность слоя, равную n, то для всех p, $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$(\lambda^p W)^* \cong \lambda^p(W^*), \quad \lambda^n(W^*) \otimes \lambda^p W \cong \lambda^{n-p}(W^*).$$

Для доказательства этой теоремы см. Бурбаки, Алгебра, гл. III, указатель терминов, *Канонические изоморфизмы*.

Операции суммы Уитни, тензорного произведения и др., определенные в этом пункте для векторных расслоений с комплексным слоем, точно так же определяются и для векторных расслоений с вещественным векторным пространством в качестве слоя. Теорема 3.6.1 сохраняет силу.

3.6c. Пусть ξ — непрерывное, гладкое или комплексно-аналитическое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X и ξ' — такое же $\mathbf{GL}(q', \mathbf{C})$-расслоение над X. Мы определим сейчас $\mathbf{GL}(q+q', \mathbf{C})$-расслоение

$\xi \oplus \xi'$ (сумму Уитни расслоений ξ и ξ') и $\mathbf{GL}(qq', \mathbf{C})$-расслоение $\xi \otimes \xi'$ (тензорное произведение расслоений ξ и ξ'). Эти расслоения снова будут непрерывными, гладкими или комплексно-аналитическими соответственно рассматриваемому случаю.

Пусть W, W' — векторные расслоения, ассоциированные с ξ и ξ'. Тогда $\xi \oplus \xi'$ определяется как $\mathbf{GL}(q+q', \mathbf{C})$-расслоение, ассоциированное с $W \oplus W'$. Оно зависит только от ξ и ξ'. Пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие пространства X, для которого ξ и ξ' могут быть представлены $\mathfrak{U}$-коциклами $\{g_{ij}\}$, $\{g'_{ij}\}$,

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathbf{GL}(q, \mathbf{C}), \quad g'_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathbf{GL}(q', \mathbf{C}).$$

Тогда $\mathbf{GL}(q+q', \mathbf{C})$-расслоение $\xi \oplus \xi'$ представляется $\mathfrak{U}$-коциклом $\{h_{ij}\}$, где

$$h_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g_{ij}(x) & 0 \\ 0 & g'_{ij}(x) \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(q+q', \mathbf{C}) \quad \text{для} \quad x \in U_i \cap U_j.$$

Аналогично $\xi \otimes \xi'$ определяется как $\mathbf{GL}(qq', \mathbf{C})$-расслоение, определяемое $W \otimes W'$; оно задается $\mathfrak{U}$-коциклом $\{h_{ij}\}$, где

$$h_{ij}(x) = g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x) \in \mathbf{GL}(qq', \mathbf{C}) \quad \text{для} \quad x \in U_i \cap U_j$$

($\otimes$ обозначает кронекеровское произведение матриц).

Для всякого непрерывного, гладкого или комплексно-аналитического $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоения ξ над X определены двойственное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение ξ^* и $\mathbf{GL}\left(\binom{q}{p}, \mathbf{C}\right)$-расслоения $\lambda^p \xi$. Они снова будут непрерывными, гладкими или комплексно-аналитическими. Пусть W — векторное расслоение, ассоциированное с ξ. Тогда ξ^* определяется как $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение, ассоциированное с W^*. Если ξ представлено $\mathfrak{U}$-коциклом $\{g_{ij}\}$, то ξ^* представляется $\mathfrak{U}$-коциклом $\{g^*_{ij}\}$, где

$$g^*_{ij}(x) = (g^{-1}_{ij}(x))^{\dagger} \in \mathbf{GL}(q, \mathbf{C}) \quad \text{для} \quad x \in U_i \cap U_j$$

— матрица, симметричная к обратной для $g_{ij}(x)$.

Аналогично $\lambda^p \xi$ определяется как $\mathbf{GL}\left(\binom{q}{p}, \mathbf{C}\right)$-расслоение, ассоциированное с $\lambda^p W$. Оно представляется $\mathfrak{U}$-коциклом $\{g^{(p)}_{ij}\}$, где

$$g^{(p)}_{ij}(x) = g_{ij}(x)^{(p)} \in \mathbf{GL}\left(\binom{q}{p}, \mathbf{C}\right) \quad \text{для} \quad x \in U_i \cap U_j$$

— матрица миноров размера $p \times p$ в матрице $g_{ij}(x)$.

Нужный $\mathfrak{U}$-коцикл можно получить также следующим способом. Выберем изоморфизм, отождествляющий векторное пространство $\lambda^p \mathbf{C}_q$ с $\mathbf{C}_{\binom{q}{p}}$ (какой изоморфизм выбрать, несущественно, согласно 3.1 (2*)). Группа $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ действует на $\mathbf{C}_q$ и, следовательно, на $\mathbf{C}_{\binom{q}{p}}$, что дает голоморфный гомоморфизм ψ_p группы $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ в $\mathbf{GL}\left(\binom{q}{p}, \mathbf{C}\right)$. Тогда $\lambda^p\xi$ представимо коциклом $\psi_p(g_{ij})$.

Мы будем писать $\mathbf{C}^* = \mathbf{GL}(1, \mathbf{C})$. Ясно, что $\lambda^0\xi$ является тривиальным $\mathbf{C}^*$-расслоением. Для $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоения ξ $\mathbf{C}^*$-расслоение $\lambda^q\xi$ представимо $\mathfrak{U}$-коциклом $\{g_{ij}^{(q)}\}$, где $g_{ij}^{(q)}(x)$ — определитель матрицы $g_{ij}(x)$, $x \in U_i \cap U_j$.

Определения этого пункта немедленно переносятся на $\mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$- и $\mathbf{GL}^+(q, \mathbf{R})$-расслоения.

3.7. В случае $q = 1$ группа $\mathbf{GL}(1, C) = \mathbf{C}^*$ совпадает с мультипликативной группой ненулевых комплексных чисел. Тензорное произведение $\xi \otimes \xi'$ двух $\mathbf{C}^*$-расслоений ξ и ξ' будет снова $\mathbf{C}^*$-расслоением. Если ξ и ξ' представимы $\mathfrak{U}$-коциклами $\{g_{ij}\}$ и $\{g'_{ij}\}$, то $\xi \otimes \xi'$ представляется $\mathfrak{U}$-коциклом $\{g_{ij}g'_{ij}\}$ (нигде не обращающиеся в нуль комплексные функции g_{ij}, g'_{ij} на $U_i \cap U_j$ непрерывны, гладки или голоморфны в зависимости от рассматриваемого случая). Таким образом, групповой операцией в $H^1(X, \mathbf{C}_c^*)$, $H^1(X, \mathbf{C}_\flat^*)$, $H^1(X, \mathbf{C}_\omega^*)$ в смысле теории пучков (см. 2.5 и 2.6) является тензорное умножение. Если ξ представимо коциклом $\{g_{ij}\}$, то обратный элемент ξ^{-1} есть $\mathbf{C}^*$-расслоение, представленное $\{g_{ij}^{-1}\}$. На самом деле, $\xi^{-1} = \xi^*$, так что $\xi \otimes \xi^* = 1$.

3.8. Мы приведем здесь несколько замечаний о $\mathbf{C}^*$-расслоениях, рассматривавшихся в 2.5. Если пространство X паракомпактно, то имеет место точная когомологическая последовательность

$$\ldots \to H^1(X, \mathbf{C}_c) \to H^1(X, \mathbf{C}_c^*) \xrightarrow{\delta^1_*} H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{C}_c) \to \ldots$$

Согласно сказанному в 2.11, пучок $\mathbf{C}_c$ тонок, поэтому группы когомологий $H^1(X, \mathbf{C}_c)$ и $H^2(X, \mathbf{C}_c)$ равны нулю. Следовательно, δ^1_* является изоморфизмом между группой непрерывных $\mathbf{C}^*$-расслоений над X и двумерной группой целочисленных когомологий. Отсюда же следует, что естественный гомоморфизм

$$H^1(X, \mathbf{C}_\flat^*) \to H^1(X, \mathbf{C}_c^*)$$

из 3.1 (1) есть изоморфизм.

Если X — комплексное многообразие, то имеет место точная последовательность

$$\ldots \to H^1(X, \mathbf{C}_\omega) \to H^1(X, \mathbf{C}_\omega^*) \xrightarrow{\delta^1_*} H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{C}_\omega).$$

Эта последовательность будет рассмотрена в 15.9.

§ 4. Характеристические классы

В п. 4.1 обсуждаются важные частные случаи редукции структурной группы расслоения. В п. 4.2 дается определение классов Чженя для непрерывных $\mathbf{U}(q)$-расслоений, основанное на фундаментальной теореме Бореля [2] о когомологиях классифицирующих пространств. В п. 4.5 определены классы Понтрягина для непрерывных $\mathbf{O}(q)$-расслоений.

4.1a. В дополнение к обозначениям из 0.9 мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть L_r есть r-мерное подпространство в $\mathbf{C}_q$, определенное в координатах $z_1, z_2, \ldots, z_q$ равенствами $z_{r+1} = z_{r+2} = \ldots = z_q = 0$. Обратимые $q \times q$-матрицы, отображающие L_r в себя, образуют подгруппу $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C})$ группы $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$. Матрицы из $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C})$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix},$$

где $A' \in \mathbf{GL}(r, \mathbf{C})$, $A'' \in \mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$, а B — произвольная комплексная матрица с r строками и $q - r$ столбцами.

Аналогично определяется подгруппа $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{R})$ группы $\mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$. Матрицы из $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{R})$ имеют указанный выше вид, где $A' \in \mathbf{GL}(r, \mathbf{R})$, $A'' \in \mathbf{GL}(q-r, \mathbf{R})$ и B — произвольная вещественная $r \times (q-r)$-матрица. Обозначим через $\mathbf{GL}^+(r, q-r; \mathbf{R})$ подгруппу, состоящую из тех $A \in \mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{R})$, для которых $A' \in \mathbf{GL}^+(r, \mathbf{R})$, $A'' \in \mathbf{GL}^+(q-r, \mathbf{R})$. Факторпространство

$$\mathfrak{G}(r, q-r; \mathbf{C}) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C}) = \mathbf{U}(q)/\mathbf{U}(r) \times \mathbf{U}(q-r)$$

является грассмановым многообразием r-мерных линейных подпространств в C_q. Аналогично вещественные грассмановы многообразия

$$\mathfrak{G}(r, q-r; \mathbf{R}) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{R})/\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{R}) = \mathbf{O}(q)/\mathbf{O}(r) \times \mathbf{O}(q-r),$$

$$\mathfrak{G}^+(r, q-r; \mathbf{R}) = \mathbf{GL}^+(q, \mathbf{R})/\mathbf{GL}^+(r, q-r; \mathbf{R}) = \\ = \mathbf{SO}(q)/\mathbf{SO}(r) \times \mathbf{SO}(q-r)$$

представляют собой многообразие r-мерных линейных подпространств в $\mathbf{R}^q$ и многообразие r-мерных линейных ориентированных подпространств в $\mathbf{R}^q$ соответственно.

Обратимые комплексные $q \times q$-матрицы, отображающие L_r в себя для всех r, образуют подгруппу $\Delta(q, \mathbf{C})$ группы $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$. Ясно, что $\Delta(q, \mathbf{C})$ состоит из всех треугольных матриц из $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ (матриц, у которых коэффициенты ниже диагонали равны 0).

Группа $\mathbf{T}^q = \Delta(q, \mathbf{C}) \cap \mathbf{U}(q)$ унитарных диагональных матриц представляет собой q-мерный тор; $\mathbf{F}(q) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C}) = \mathbf{U}(q)/\mathbf{T}^q$ является многообразием *флагов* в $\mathbf{C}_q$. Всякий такой флаг — это последовательность $0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_q = \mathbf{C}_q$ линейных подпространств ($\dim E_k = k$) в $\mathbf{C}_q$. Отметим, что в описании грассмановых многообразий и многообразий флагов мы рассматриваем линейные подпространства, т. е. подпространства, проходящие через начало координат.

4.1b. Некоторые результаты о расслоениях над топологическим пространством X зависят от предположения, что X паракомпактно (см. 2.8). Пусть I — единичный интервал $0 \leqslant t \leqslant 1$. Два непрерывных отображения $f_0, f_1 \colon X \to Y$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение $F \colon X \times I \to Y$, такое, что $F(x, 0) = f_0(x)$ и $F(x, 1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$. *Клеткой* называется пространство, гомеоморфное $\mathbf{R}^N$ для некоторого N.

I) *Пусть X — паракомпактное пространство, W — непрерывное расслоение над пространством Y и $f_0, f_1 \colon X \to Y$ — гомотопные отображения. Тогда индуцированные расслоения f_0^*W, f_1^*W* (см. 3.3) *изоморфны.*

Доказательство этого утверждения можно найти у Дольда ([3], 7.10); у Хольмана ([1], VI. 2.3); у Картана ([1], сообщение VIII) — в случае, когда X локально компактно и паракомпактно; у Стинрода ([1], 11.5) — в случае, когда X локально компактно и обладает счетной базой, и у Атьи и Ботта ([1], предложение 1.3) — в случае, когда X компактно, а W — векторное расслоение.

II) *Пусть X — паракомпактное пространство и A — замкнутое подпространство в X (возможно пустое). Пусть W — расслоение над X, слоем которого является клетка. Тогда всякое сечение s над A может быть продолжено до сечения над X.*

Если предположить, что сечение s уже распространено на некоторую окрестность множества A в X (как это бывает в большинстве приложений), то утверждение II) является частным случаем теоремы Дольда ([3], 2.8). Другие доказательства можно найти у Хольмана ([1], VI. 3.1); у Картана ([1], сообщение VIII) — для локально компактного и паракомпактного X; у Стинрода ([1], 12.2) — для нормального X со счетной базой; у Атьи и Ботта ([1], лемма 1.1) — для векторного расслоения.

Пусть теперь G — вещественная группа Ли и G^0 — замкнутая подгруппа, для которой G/G^0 — клетка. Вложением $G^0 \subset G$ индуцируется отображение

$$H^1(X, G_c^0) \to H_1(X, G_c). \tag{1}$$

III) *Если X паракомпактно, то отображение* (1) *биективно.*

Доказательство (Стинрод [1], 12.7). В силу теорем 3.4.2 и 3.4.5 из свойства продолжимости сечений II) вытекает, что всякое расслоение над X со структурной группой G изоморфно расслоению W со структурной группой G^0. Следовательно, отображение (1) сюръективно. Предположим теперь, что W, W' — расслоения над X со структурной группой G^0, изоморфные как расслоения со структурной группой G. Тогда найдется открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in I}$ пространства X, такое, что W и W' задаются координатными преобразованиями $g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to G^0$, $g'_{ij} \colon U_i \cap U_j \to G^0$ и для некоторых непрерывных функций $h_i \colon U_i \to G$

$$g'_{ij} = h_i^{-1} g_{ij} h_j \quad \text{в} \quad U_i \cap U_j \quad \text{для всех} \quad i, j \in I.$$

Пусть теперь I — единичный интервал $0 \leqslant t \leqslant 1$ и U_i^0, U_i^1 — открытые подмножества в $X \times I$, определенные равенствами

$$U_i^0 = \{(x, t) \in X \times I;\ x \in U_i,\quad 0 \leqslant t < 1\},$$
$$U_i^1 = \{(x, t) \in X \times I;\ x \in U_i,\quad 0 < t \leqslant 1\}.$$

Построим расслоение $\widetilde{W}$ над $X \times I$ со структурной группой G и координатными преобразованиями

$$g_{ij}^{00} \colon U_i^0 \cap U_j^0 \to G^0,$$
$$g_{ij}^{11} \colon U_i^1 \cap U_j^1 \to G^0,$$
$$g_{ij}^{01} \colon U_i^0 \cap U_j^1 \to G,$$

где

$$g_{ij}^{00}(x, t) = g'_{ij}(x), \quad g_{ij}^{11}(x, t) = g_{ij}(x),$$
$$g_{ij}^{01}(x, t) = h_i(x) g'_{ij}(x) = g_{ij}(x) h_j(x).$$

Тогда $\widetilde{W}$ имеет структурную группу G, которая над замкнутым подмножеством $A = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$ в $X \times I$ редуцирована к G^0. По теореме 3.4.5 и утверждению II), примененным к паракомпактному пространству $X \times I$ и замкнутому подпространству A, расслоение $\widetilde{W}$ изоморфно расслоению со структурной группой G^0, ограничения которого на $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ совпадают с W', W соответственно. Рассмотрим отображения $f_0, f_1 \colon X \to X \times I$ с $f_0(x) = x \times \{0\}$, $f_1(x) = x \times \{1\}$. Согласно I), W изоморфно W'. Следовательно, отображение (1) инъективно, что и требовалось доказать.

Если X — гладкое многообразие, то X паракомпактно (см. 2.8.2). Пусть G — вещественная группа Ли, G^0 — замкнутая подгруппа, для которой G/G^0 — клетка. Тогда имеет место [см. 3.1(1), (2)] коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, G_b^0) & \to & H^1(X, G_b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X, G_c^0) & \to & H^1(X, G_c). \end{array} \tag{1*}$$

IV) *Каждое из отображений в* (1*) *биективно.*

Доказательство. Нижняя горизонтальная строка биективна, согласно III). Прямое доказательство биективности вертикальных отображений приведено у Хольмана ([1], VI. 1.1).

В случае когда G^0 является компактной подгруппой группы G, можно дать другое доказательство биективности стрелок в (1*), основанное на теореме Стинрода (гласящей, что *всякое непрерывное сечение гладкого расслоения над X можно сколь угодно точно аппроксимировать гладкими сечениями*) и на теореме о классификации расслоений со структурной группой G^0 (см. ссылки в библиографических замечаниях в конце главы). Утверждение для общего случая следует отсюда, если применить теорему о том, что факторпространство связной группы Ли по компактной подгруппе является клеткой (см. Стинрод [1], 12.14).

Свойства III) и IV) позволяют отождествить естественным образом множества (1) и (1*). В частности, это применимо к

$G^0 = \mathbf{U}(q)$, $\quad G = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$,

$G^0 = \mathbf{U}(r) \times \mathbf{U}(q-r)$, $\quad G = \mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C})$ или $\mathbf{GL}(r, \mathbf{C}) \times \mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$,

$G^0 = \mathbf{T}^q$, $\quad G = \Delta(q, \mathbf{C})$ или $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \times \ldots \times \mathbf{C}^*$ (q раз),

$G^0 = \mathbf{O}(q)$, $\quad G = \mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$,

$G^0 = \mathbf{SO}(q)$, $\quad G = \mathbf{GL}^+(q, \mathbf{R})$,

$G^0 = \mathbf{O}(r) \times \mathbf{O}(q-r)$, $\quad G = \mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{R})$ или $\mathbf{GL}(r, \mathbf{R}) \times \mathbf{GL}(q-r, \mathbf{R})$,

$G^0 = \mathbf{SO}(r) \times \mathbf{SO}(q-r)$, $\quad G = \mathbf{GL}^+(r, q-r, \mathbf{R})$ или $\mathbf{GL}^+(r, \mathbf{R}) \times \mathbf{GL}^+(q-r, \mathbf{R})$.

4.1c. Следующие свойства выполняются в непрерывном, гладком и комплексно-аналитическом случаях.

Пусть h: $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C}) \to \mathbf{GL}(r, \mathbf{C}) \times \mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$ — гомоморфизм, задаваемый равенством $h(A) = A' \times A''$ (см. 4.1a). Ядро h состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где B — матрица с r строчками и $q-r$ столбцами, и, следовательно, может быть отождествлено с комплексным векторным пространством размерности $r(q-r)$. Это дает точную последовательность

$$0 \to \mathbf{C}_{r(q-r)} \to \mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C}) \xrightarrow{h} \mathbf{GL}(r, \mathbf{C}) \times \mathbf{GL}(q-r; \mathbf{C}) \to 0. \qquad (2)$$

Согласно 3.1(2), гомоморфизм h сопоставляет каждому $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C})$-расслоению ξ некоторое $\mathbf{GL}(r, \mathbf{C}) \times \mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$-расслоение, т. е. пару (ξ', ξ''), где ξ' есть $\mathbf{GL}(r, \mathbf{C})$-расслоение, называемое *подрасслоением* ξ, и ξ'' есть $\mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$-расслоение, называемое *факторрасслоением* для ξ.

Соглашение. Утверждение «$\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение ξ имеет подрасслоение ξ' и факторрасслоение ξ''» означает, что существует $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C})$-расслоение η, отображающееся в ξ при вложении $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C}) \subset \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$, которое имеет подрасслоение ξ' и факторрасслоение ξ''.

Пусть φ_h: $\Delta(q, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}^*$ — гомоморфизм, выделяющий k-й диагональный элемент a_{hh} в треугольной матрице $A \in \Delta(q, \mathbf{C})$. Согласно 3.1(2), гомоморфизм φ_h сопоставляет всякому $\Delta(q, \mathbf{C})$-расслоению ξ $\mathbf{C}^*$-расслоение ξ_h. Упорядоченное множество $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ называется множеством *диагональных* $\mathbf{C}^*$-расслоений для ξ.

Соглашение. Утверждение «$\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение ξ имеет в качестве диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений расслоения $\xi_1, \ldots, \xi_q$» означает, что имеется $\Delta(q, \mathbf{C})$-расслоение, которое при вложении $\Delta(q, \mathbf{C}) \subset \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ отображается на ξ и для которого упорядоченное множество диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений есть $\xi_1, \ldots, \xi_q$.

Теорема 4.1.1. *Предположим, что $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение ξ имеет в качестве диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_q$, а $\mathbf{GL}(q', \mathbf{C})$-расслоение ξ' имеет в качестве диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений $\xi'_1, \ldots, \xi'_q$. Тогда*

ξ^* *имеет в качестве диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений* $\xi_q^{-1}, \ldots, \xi_1^{-1}$,

$\xi \oplus \xi'$ *имеет $q+q'$ диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений* $\xi_1, \ldots, \xi_q, \xi'_1, \ldots, \xi'_{q'}$,

$\xi \otimes \xi'$ *имеет qq' диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений* $\xi_i \otimes \xi'_j$,

$\lambda^p \xi$ *имеет $\binom{p}{q}$ диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений* $\xi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \xi_{i_p}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant q)$.

Для доказательства достаточно применить 3.6c и 3.1(2*).

4.1d. Дальнейшее также справедливо в непрерывном, гладком и комплексно-аналитическом случаях.

Пусть W — векторное расслоение со слоем $\mathbf{C}_q$ над X, и пусть E — состоящее из изоморфизмов $\mathbf{C}_q$ в W главное расслоение (со слоем $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$) над X, построенное в 3.5. По теореме 3.4.4 имеется расслоение ${}^{[r]}W = E/\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C})$ над X, слоем которого служит многообразие Грассмана $\mathfrak{G}(r, q-r; \mathbf{C})$. Слой ${}^{[r]}W_x$ можно отождествить с многообразием Грассмана r-мерных подпространств комплексного векторного пространства W_x. Расслоения $W, E, {}^{[r]}W$ все ассоциированы с одним и тем же $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоением ξ.

Предположим теперь, что ${}^{[r]}W$ имеет сечение s. Тогда s каждому $x \in X$ сопоставляет r-мерное линейное подпространство W в W_x, зависящее непрерывно (или гладко, или комплексно-аналитично) от x. По теореме 3.4.5 сечение s определяет некоторое $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C})$-расслоение с подрасслоением ξ' и факторрасслоением ξ''. Объединение всех W'_x является векторным расслоением W' над X, ассоциированным с $\mathbf{GL}(r, \mathbf{C})$-расслоением ξ'. Объединение всех $W''_x = W_x/W'_x$ образует векторное расслоение W'' над X, ассоциированное с $\mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$-расслоением ξ''.

Замечание 1. *Всякая точка $x \in X$ обладает открытой окрестностью U, над которой W изоморфно произведению $U \times \mathbf{C}_q$. Этот изоморфизм можно выбрать так, чтобы W' определялось в $U \times \mathbf{C}_q$ уравнениями $z_{r+1} = \ldots = z_q = 0$.* Здесь $\mathbf{C}_q$ — векторное пространство наборов $z_1, \ldots, z_q$ q комплексных чисел; вид изоморфизма следует из теоремы 3.4.5.

Пусть W, $\tilde{W}$ — векторные расслоения над X. *Гомоморфизмом* $W \to \tilde{W}$ называется непрерывное (или гладкое, или голоморфное) отображение из W в $\tilde{W}$, линейно отображающее каждый слой W_x в $\tilde{W}_x$. Последовательность векторных расслоений и гомоморфизмов

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0 \tag{3}$$

называется *точной*, если для всякого $x \in X$ точна соответствующая последовательность

$$0 \to W'_x \to W_x \to W''_x \to 0. \tag{3*}$$

В этом случае мы будем писать $W'' = W/W'$ и называть W' *подрасслоением*, а W'' *факторрасслоением* расслоения W.

Пусть W — векторное расслоение над X со слоем $\mathbf{C}_q$. Сечение s расслоения ${}^{[r]}W$ определяет естественным образом точную последовательность (3) с подрасслоением W' (слой $\mathbf{C}_r$) и факторрасслоением W'' (слой $\mathbf{C}_{q-r}$). Обратно, всякая такая точная последовательность определяет сечение в ${}^{[r]}W$. Если W', W и W'' ассоциированы с $\mathbf{GL}(r, \mathbf{C})$-расслоением ξ', $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоением ξ и $\mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$-расслоением ξ'' соответственно, то точная последовательность (3) существует тогда и только тогда, когда ξ имеет подрасслоение ξ' и факторрасслоение ξ''.

Замечание 2. Согласно замечанию 1, *точная последовательность* (3) *удовлетворяет следующему условию: для каждой точки $x \in X$ найдется открытая окрестность U, над которой W', W и W'' изоморфны соответственно $U \times \mathbf{C}_r$, $U \times \mathbf{C}_q$ и $U \times \mathbf{C}_{q-r}$ и над которой точная последовательность* (3) *соответствует точной последовательности*

$$0 \to \mathbf{C}_r \to \mathbf{C}_r \oplus \mathbf{C}_{q-r} \to \mathbf{C}_{q-r} \to 0.$$

Следующую теорему предлагается доказать читателю (см. 3.6).

Теорема 4.1.2. *Рассмотрим точную последовательность векторных расслоений над X*

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0. \tag{3}$$

Пусть $\tilde{W}$ — еще одно векторное расслоение над X. Тогда имеют место точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Hom}(\tilde{W}, W') \to \mathrm{Hom}(\tilde{W}, W) \to \mathrm{Hom}(\tilde{W}, W'') \to 0, \tag{4}$$

$$0 \to W' \otimes \tilde{W} \to W \otimes \tilde{W} \to W'' \otimes \tilde{W} \to 0, \tag{5}$$

получающиеся естественным образом из (3). *Кроме того, имеет место точная последовательность, двойственная к* (3):

$$0 \to (W'')^* \to W^* \to (W')^* \to 0. \tag{6}$$

Теорема 4.1.3. *Точная последовательность векторных расслоений над X*

$$0 \to F \to W \to W'' \to 0,$$

в которой F — одномерное векторное расслоение, определяет естественным образом точную последовательность

$$0 \to \lambda^{p-1}W'' \otimes F \to \lambda^p W \to \lambda^p W'' \to 0. \tag{7}$$

Доказательство. Имеются естественные гомоморфизмы $\lambda^p W \to \lambda^p W''$ и $\lambda^{p-1} W \otimes F \to \lambda^p W$. Последний равен нулю на ядре естественного гомоморфизма из $\lambda^{p-1} W \otimes F$ в $\lambda^{p-1} W'' \otimes F$ и, следовательно, индуцирует гомоморфизм $\lambda^{p-1} W'' \otimes F \to \lambda^p W$. Этим определяются гомоморфизмы в (7). Легко проверить, что последовательность (7) точна. Переходя в этой теореме к двойственным расслоениям, получаем утверждение теоремы.

Теорема 4.1.3*. *Точная последовательность векторных расслоений над X*

$$0 \to W' \to W \to F \to 0,$$

в которой F — одномерное векторное расслоение, определяет естественным образом точную последовательность

$$0 \to \lambda^p W' \to \lambda^p W \to \lambda^{p-1} W' \otimes F \to 0. \tag{7*}$$

4.1e. Следующие результаты опять справедливы в непрерывном, гладком и комплексно-аналитическом случаях.

Рассмотрим ситуацию, изучавшуюся в начале п. 4.1d, и, исходя из векторного расслоения W (со слоем $\mathbf{C}_q$), построим расслоение ${}^{\Delta}W = E/\Delta(q, \mathbf{C})$ над X со структурной группой $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ и многообразием флагов

$$\mathbf{F}(q) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C})$$

в качестве слоя.

Слоем ${}^{\Delta}W_x$ является многообразие флагов в комплексном векторном пространстве W_x. Расслоения W и ${}^{\Delta}W$ ассоциированы с одним и тем же $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоением ξ.

Предположим теперь, что ${}^{\Delta}W$ имеет сечение s. Тогда s сопоставляет каждой точке $x \in X$ флаг $s(x)$ в W_x, который зависит непрерывно (или гладко, или комплексно-аналитично) от x. Флаг $s(x)$ представляет собой возрастающую последовательность ${}_xL_0 \subset {}_xL_1 \subset \ldots \subset {}_xL_q = W_x$ подпространств в W_x с $\dim {}_xL_r = r$ (см. 4.1a). Для каждого r объединение $\bigcup_{x \in X} {}_xL_r$, согласно 4.1d, является векторным расслоением $W_{(r)}$ над X со слоем $\mathbf{C}_r$. Имеет место точная последовательность

$$0 \to W_{(r)} \to W_{(r+1)} \to A_{r+1} \to 0,$$

где A_r — одномерное векторное расслоение и $A_1 = W_{(1)}$. Мы будем называть $A_1, \ldots, A_q$ *диагональными одномерными векторными расслоениями, определяемыми сечением* s. Согласно 3.4.5, сечение s определяет $\Delta(q, \mathbf{C})$-расслоение, отображающееся в ξ при вложении $\Delta(q, \mathbf{C}) \subset \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$. Одномерные расслоения $A_1, \ldots, A_q$ ассоциированы с диагональными $\mathbf{C}^*$-расслоениями этого $\Delta(q, \mathbf{C})$-расслоения.

Замечание. Всякая точка $x \in X$ обладает открытой окрестностью U, над которой W изоморфно произведению $U \times \mathbf{C}_q$ и над которой $W_{(r)}$ определено уравнениями $z_{r+1} = \ldots = z_q = 0$ (см. 3.4.5 и 4.1d).

4.1f. Следующие две теоремы имеют место только в непрерывном и гладком случаях. Предполагается, что X паракомпактно (в гладком случае это не является ограничением, так как всякое гладкое многообразие паракомпактно, согласно 2.8.2).

Теорема 4.1.4. *Если* $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$*-расслоение* ξ *над* X *имеет* $\mathbf{GL}(r, \mathbf{C})$*-подрасслоение* ξ' *и* $\mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$*-факторрасслоение* ξ'', *то* ξ *есть сумма Уитни* ξ' *и* ξ''.

Теорема 4.1.5. *Если* $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$*-расслоение* ξ *над* X *имеет диагональные* $\mathbf{C}^*$*-расслоения* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$, *то*

$$\xi = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \ldots \oplus \xi_q.$$

Доказательство. Обе теоремы следуют из свойств III) и IV) п. 4.1b. Множество $\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{C})$-расслоений можно отождествить с множеством $\mathbf{U}(r) \times \mathbf{U}(q-r)$-расслоений и, следовательно, с множеством $\mathbf{GL}(r, \mathbf{C}) \times \mathbf{GL}(q-r, \mathbf{C})$-расслоений. Этим доказана теорема 4.1.4. Множество $\Delta(q, \mathbf{C})$-расслоений можно отождествить с множеством $\mathbf{T}^q$-расслоений и, следовательно, с множеством $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \times \ldots \times \mathbf{C}^*$-расслоений ($q$ сомножителей). Этим доказана теорема 4.1.5.

Замечание. Приводимое ниже другое доказательство проясняет, почему теоремы 4.1.4 и 4.1.5 неверны в комплексно-аналитическом случае (Атья [3]). Рассмотрим точную последовательность (3) непрерывных, гладких или комплексно-аналитических векторных расслоений над X. Точная последовательность (4) с $W = W''$ определяет точную последовательность пучков ростков сечений (см. 3.5 и 16.1). Рассмотрим соответствующую точную когомологическую последовательность

$$H^0(X, \mathrm{Hom}(W'', W')) \to H^0(X, \mathrm{Hom}(W'', W)) \to$$

$$\to H^0(X, \mathrm{Hom}(W'', W'')) \xrightarrow{\delta_0^*} H^1(X, \mathrm{Hom}(W'', W')).$$

Тождественный гомоморфизм $W'' \to W''$ определяет элемент $I \in H^0(X, \mathrm{Hom}(W'', W''))$ и, следовательно, элемент $\delta_*^0(I) \in H^1(X, \mathrm{Hom}(W'', W'))$. Из точности последовательности вытекает, что последовательность (3) расщепляется тогда и только тогда, когда $\delta_*^0(I) = 0$, значит, W изоморфно $W' \oplus W''$, если $\delta_*^0(I) = 0$. В непрерывном и гладком случаях пучки $\mathfrak{C}(\mathrm{Hom}(W'', W'))$ и $\mathfrak{A}(\mathrm{Hom}(W'', W'))$, определенные в 3.5, являются тонкими и потому $H^1(X, \mathrm{Hom}(W'', W')) = 0$. Этим доказана теорема 4.1.4. Повторное применение этого результата доказывает теорему 4.1.5.

4.1g. Результаты п. 4.1d, а также теорема 4.1.4 справедливы и в вещественном случае. А именно, верна следующая

Теорема 4.1.6. *Пусть* ξ *есть* $\mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$*-расслоение над* X *и* W *— ассоциированное векторное расслоение со слоем* $\mathbf{R}^q$. *Рассмотрим главное расслоение* E *(со слоем* $\mathbf{GL}(q, \mathbf{R})$*) изоморфизмов* $\mathbf{R}^q$ *в* W. *Расслоение* ${}^{[r]}W = E/\mathbf{GL}(r, q-r; \mathbf{R})$ *имеет в качестве слоя над* $x \in X$ *грассманово многообразие линейных (неориентированных)* r*-мерных подпространств пространства* W_x. *Если* ${}^{[r]}W$ *имеет сечение* s, *то объединение подпространств* $s(x)$ *образует векторное расслоение* W' *над* X, *ассоциированное с* $\mathbf{GL}(r, \mathbf{R})$*-расслоением* ξ'. *Объединение* $W_x/s(x)$ *образует векторное расслоение* W'' *над* X, *ассоциированное с* $\mathbf{GL}(q-r, \mathbf{R})$*-расслоением* ξ''. *При этом* ξ *совпадает с суммой Уитни* $\xi' \oplus \xi''$; *другими словами,* W *изоморфно* $W' \oplus W''$.

Теорема остается верной, если везде $\mathbf{GL}$ заменить на $\mathbf{GL}^+$, а слово «неориентированное» заменить на «ориентированное». Теорема верна также в гладком случае.

4.2. В этом пункте мы определим классы Чженя для непрерывного $\mathbf{U}(q)$-расслоения над «допустимым» пространством X. Пространство X будем называть *допустимым*, если оно локально компактно, является объединением счетного числа компактных подмножеств и конечномерно. Из первых двух условий следует, что X паракомпактно (см. 2.8.2). В третьем условии мы используем следующее определение размерности: пространство X имеет *размерность* $\leqslant n$, если во всякое открытое покрытие $\mathfrak{U}$ пространства X можно вписать покрытие $\mathfrak{B}$, такое, что каждая точка из X лежит не более чем в $n+1$ открытых подмножествах из $\mathfrak{B}$. Гладкое n-мерное многообразие (см. 2.5) имеет размерность n и в смысле этого определения.

В дальнейшем мы будем предполагать, что все рассматриваемые расслоения определены над допустимыми пространствами.

Классы Чженя будут определены как некоторые целочисленные классы когомологий пространства X. Если явно не оговорено противное, то под группами когомологий пространства X с коэффициентами в аддитивной группе A понимаются группы когомологий пространства X с коэффициентами в постоянном пучке A

(см. 2.5, пример 1). В этом случае $H^i(X, A)$ совпадает с i-мерной группой когомологий пространства X в смысле Чеха (с произвольными носителями) с коэффициентами в A. Если A — коммутативное кольцо, то прямая сумма $\sum_i H^i(X, A)$ является градуированным кольцом по отношению к $\smile$-произведению. Группы когомологий пространства X с коэффициентами в пучке $\mathfrak{S}$ могут быть также определены с помощью знакопеременных коцепей (Серр [2]), следовательно, $H^i(X, \mathfrak{S}) = 0$ для $i > n = \dim X$. В частности, $H^i(X, A) = 0$ для $i > n$. Если X — локально конечный полиэдр, в частности если X — гладкое многообразие, то $H^i(X, A)$ естественным образом изоморфны соответствующим симплициальным группам когомологий (Стинрод и Эйленберг [1], стр. 250).

Унитарная группа $\mathbf{U}(N) = 1 \times \mathbf{U}(N)$ является нормальной подгруппой в $\mathbf{U}(q) \times \mathbf{U}(N)$. Следовательно, $\mathbf{U}(q+N)/\mathbf{U}(N)$ есть главное расслоение со структурной группой $\mathbf{U}(q)$ над многообразием Грассмана $\mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C})$. Однородное пространство $\mathbf{U}(q+N)/\mathbf{U}(N)$ является многообразием Штифеля унитарно ортогональных q-реперов в пространстве $\mathbf{C}_{q+N}$. Гомотопические группы $\pi_i(\mathbf{U}(q+N)/\mathbf{U}(N))$ равны нулю для $1 \leqslant i \leqslant 2N$ (Стинрод [1], 25.7). Расслоение $\mathbf{U}(q+N)/\mathbf{U}(N)$ ассоциировано с некоторым $\mathbf{U}(q)$-расслоением над $\mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C})$, которое называется *универсальным* $\mathbf{U}(q)$-расслоением.

Пусть X — допустимое пространство с $\dim X \leqslant 2N$. Классификационная теорема (см. Стинрод [1], 19.4; Картан [1], сообщение VIII) утверждает, что $\mathbf{U}(q)$-расслоения над X находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами непрерывных отображений из X в $\mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C})$. Более точно, всякое $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X может быть индуцировано таким отображением из универсального $\mathbf{U}(q)$-расслоения и два отображения гомотопны тогда и только тогда, когда они индуцируют одно и то же $\mathbf{U}(q)$-расслоение.

Для того чтобы определить классы Чженя для произвольного $\mathbf{U}(q)$-расслоения над X, достаточно определить классы Чженя для универсального $\mathbf{U}(q)$-расслоения над $\mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C})$. Мы изберем несколько иной подход, который дает «аксиомы» для классов Чженя вместе с доказательством единственности и существования. Этот подход позволяет избежать путаницы со знаками (сравнение с другими определениями классов Чженя можно найти у Бореля и Хирцебруха [1]).

Аксиомы классов Чженя таковы.

Аксиома I. *Для всякого непрерывного $\mathbf{U}(q)$-расслоения ξ над допустимым пространством X и для всякого целого $i \geqslant 0$ определены классы Чженя $c_i(\xi) \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$. Класс $c_0(\xi)$ равен единичному элементу, $c_0(\xi) = 1$.*

Мы будем писать $c(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\xi)$. Так как X конечномерно, то это конечная сумма. Элемент $c(\xi)$ из кольца когомологий $H^*(X, \mathbf{Z})$ называется (*полным*) *классом Чженя* для ξ. Непрерывное отображение $f\colon Y \to X$ индуцирует отображение $f^*: H^1(X, \mathbf{U}(q)_c) \to H^1(Y, \mathbf{U}(q)_c)$ и гомоморфизм

$$f^*\colon H^*(X, \mathbf{Z}) \to H^*(Y, \mathbf{Z}).$$

Аксиома II (*естественность*). $c(f^*\xi) = f^*c(\xi)$.

Аксиома III. *Если $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — непрерывные $\mathbf{U}(1)$-расслоения над X, то*

$$c(\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_q) = c(\xi_1) \ldots c(\xi_q).$$

Пусть $(z_0 : z_1 : \ldots : z_n)$ — однородные координаты в комплексном проективном пространстве $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Открытые множества U_i определенные условием $z_i \neq 0$, образуют открытое покрытие для $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Пусть η_n — C^*-расслоение, определенное коциклом $\{g_{ij}\} = \{z_j z_i^{-1}\}$. Расслоение η_n комплексно-аналитично, но его можно рассматривать и как непрерывное $\mathbf{C}^*$-расслоение и, следовательно, как $\mathbf{U}(1)$-расслоение над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Гиперплоскость $z_0 = 0$ с индуцированной ориентацией изоморфна $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$ и представляет собой $(2n-2)$-мерный целочисленный класс гомологий в $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Соответствующий класс когомологий по отношению к естественной ориентации $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ обозначим через h_n. Класс h_n является образующим для $H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$.

Аксиома IV (*нормализация*). $c(\eta_n) = 1 + h_n$.

Замечания. Пусть $j\colon \mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ — вложение гиперплоскости. Тогда $j^*h_n = h_{n-1}$ и $j^*\eta_n = \eta_{n-1}$ в соответствии с аксиомой II). Дадим две геометрические интерпретации для $U(1)$-расслоения η_n. Пусть $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ вложено в $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$ как гиперплоскость $z_{n+1} = 0$, и пусть $x_0 \in \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$ — точка $(0 : 0 : \ldots : 0 : 1)$. Имеется непрерывное отображение $\pi\colon \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C}) - \{x_0\} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, определенное равенством $\pi(z_0 : \ldots : z_n : z_{n+1}) = (z_0 : \ldots : z_n)$. Определим гомеоморфизм $h_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbf{C}$ формулой

$$h_i(z_0 : \ldots : z_n : z_{n+1}) = (z_0 : \ldots : z_n : 0) \times \frac{z_{n+1}}{z_i}.$$

Тогда

$$h_i h_j^{-1}((z_0 : \ldots : z_n : 0) \times w) = (z_0 : \ldots : z_n : 0) \times \frac{z_j}{z_i} w.$$

Следовательно, $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C}) - \{x_0\}$ представляет собой векторное расслоение H над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ со структурной группой $\mathbf{C}^*$ и слоем $\mathbf{C}$. Оно ассоциировано с $\mathbf{U}(1)$-расслоением η_n.

Вторая интерпретация связана с непрерывным отображением π: $\mathbf{C}_{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, задаваемым формулой $\pi(z_0, \ldots, z_n) = (z_0 : \ldots : z_n)$. Определим гомеоморфизм h_i: $\pi^{-1}(\mathbf{U}_i) \to U_i \times C^*$ равенством $h_i(z_0, \ldots, z_n) = (z_0 : \ldots : z_n) \times z_i$. Тогда

$$h_i h_j^{-1}((z_0 : \ldots : z_n) \times w) = (z_0 : \ldots : z_n) \times \frac{z_i}{z_j} w.$$

Следовательно, $\mathbf{C}_{n+1} - \{0\}$ есть главное расслоение E со структурной группой $\mathbf{C}^*$, ассоциированное с $\mathbf{U}(1)$-расслоением η_n^{-1}. Отсюда следует, что главное расслоение $\mathbf{U}(n+1)/\mathbf{U}(n)$ над многообразием Грассмана $\mathfrak{G}(1, n; \mathbf{C}) = \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ ассоциировано с η_n^{-1}. Следовательно, η_n^{-1} есть универсальное расслоение над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

Соглашение. Согласно 4.1b (1), непрерывные $\mathbf{U}(q)$-расслоения над X находятся во взаимно однозначном соответствии с непрерывными $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоениями. Гладкие $\mathbf{U}(q)$- и $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоения и комплексно-аналитические $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоения можно рассматривать как непрерывные расслоения (см. 3.1(1)). Следовательно, классы Чженя определены также и в этих случаях. Если W — векторное расслоение над X со слоем $\mathbf{C}_q$, ассоциированное с $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоением ξ, то мы будем называть $c(\xi)$ полным классом Чженя для W и писать $c(W) = c(\xi)$.

Единственность классов Чженя

a) Если $\xi \in H^1(X, \mathbf{U}(1)_c)$, то для достаточно больших n существует непрерывное отображение f: $X \to \mathbf{P}_n(c)$, такое, что $\xi = f^*\eta_n$. В силу аксиом II и IV $c(\xi) = f^*(1 + h_n)$ однозначно определено. В частности, $c_i(\xi) = 0$ для $i > 1$.

b) Пусть теперь $\xi \in H^1(X, \mathbf{U}(q)_c)$. Построим расслоение $Y_\xi \xrightarrow{\rho} X$ со слоем $\mathbf{F}(q) = \mathbf{U}(q)/\mathbf{T}^q$, ассоциированное с ξ. Пространство Y_ξ снова является допустимым. По теоремам 3.4.4 и 4.1.5 $\mathbf{U}(q)$-расслоение $\rho^*\xi$ равно сумме Уитни q диагональных $\mathbf{U}(1)$-расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_q$ над Y_ξ, классы Чженя для которых $c(\xi_i) = 1 + \gamma_i$, где $\gamma_i \in H^2(Y_\xi, Z)$, однозначно определены, согласно а). Из аксиом II и III следует, что

$$\rho^* c(\xi) = c(\rho^*\xi) = \prod_{i=1}^{q} (1 + \gamma_i). \tag{8}$$

Рассуждение с использованием спектральной последовательности показывает, что ρ^*: $H^*(X, \mathbf{Z}) \to H^*(Y_\xi, \mathbf{Z})$ является мономорфизмом (Борель [2]; см. также Ротенберг и Стинрод [1]). Следовательно, класс $c(\xi)$ определен однозначно. В частности, мы показали, что если ξ есть $\mathbf{U}(q)$-расслоение, то $c_i(\xi) = 0$ для $i > q$.

Замечание. С помощью рассуждения по индукции, проводимого ниже в 18.3, легко показать, что на самом деле достаточно знать, что ρ^*: $H^*(X, \mathbf{Z}) \to H^*(Y, \mathbf{Z})$ является мономорфизмом,

если ρ: $Y \to X$ — расслоение со слоем $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$, ассоциированное с $\mathbf{U}(q)$-расслоением (см. Гротендик [4]).

Существование классов Чженя

Доказательство существования проводится по тому же образцу, что и доказательство единственности. Классы Чженя для $\mathbf{U}(1)$-расслоения ξ определяются согласно а). Следует доказать (см. теорему классификации и замечание после аксиомы IV), что $c(\xi) = f^*(1 + h_n)$ зависит только от ξ и не зависит от специального выбора f и n. Ясно, что $c(\xi)$ удовлетворяет аксиоме II для $\mathbf{U}(1)$-расслоений ξ. Для $U(q)$-расслоения ξ класс $c(\xi)$ определяется с помощью (8).

А именно, пусть E — главное расслоение со слоем $\mathbf{U}(q)$, ассоциированное с ξ, и пусть $Y_\xi = E/T^q$. По теореме 3.4.4 имеется $\mathbf{T}^q$-расслоение $\check{\xi}$ над Y_ξ, отображающееся в $\rho^*\xi$ при вложении $\mathbf{T}^q \subset \mathbf{U}(q)$. Обозначим через $\xi_1, \ldots, \xi_q$ диагональные $\mathbf{U}(1)$-расслоения для $\check{\xi}$, и пусть $c(\xi_i) = 1 + \gamma_i$. Так как отображение ρ^*: $H^*(X, \mathbf{Z}) \to H^*(Y_\xi, \mathbf{Z})$ мономорфно, то $c(\xi)$ можно определить формулой (8), если показать, что элементарные симметрические функции σ_j от γ_i лежат в образе ρ^*.

Пусть N — нормализатор $\mathbf{T} = \mathbf{T}^q$ в $\mathbf{U}(q)$, так что $N = \{a \in \mathbf{U}(q);\ a^{-1}\mathbf{T}a = \mathbf{T}\}$. Известно, что $N/\mathbf{T}$ есть конечная группа Φ, изоморфная симметрической группе перестановок q объектов. Каждый элемент $\alpha \in \Phi$, представленный элементом $a \in N$, определяет послойный гомеоморфизм $\tilde{\alpha}$: $Y_\xi \to Y_\xi$. По отношению к карте $V \times (\mathbf{U}(q)/\mathbf{T})$, где V — открытое подмножество в X, $\tilde{\alpha}$ задается правым сдвигом:

$$\tilde{\alpha}(v \times g\mathbf{T}) = v \times ga\mathbf{T} = v \times g\mathbf{T}a$$
$$\text{для} \quad v \in V, \quad g \in \mathbf{U}(q), \quad g(\mathbf{T}) \in \mathbf{U}(q)/\mathbf{T}.$$

Так как гомеоморфизм $\tilde{\alpha}$ действует послойно, то он определяет автоморфизм $\tilde{\alpha}^*$ кольца когомологий $H^*(Y_\xi, \mathbf{Z})$, ограничение которого на $\rho^*H^*(X, \mathbf{Z})$ является тождественным отображением. Кроме того, имеется внешний автоморфизм $t \to a^{-1}ta$ для $\mathbf{T}$, который зависит только от α и индуцирует автоморфизм $\alpha^{\#}$ на $H^1(Y_\xi, \mathbf{T}_c)$ (см. 3.1 (2)). Так как этот внешний автоморфизм является перестановкой диагональных коэффициентов в диагональных матрицах $t \in \mathbf{T}$, то диагональные $U(1)$-расслоения в $\alpha^{\#}\check{\xi}$ получаются из $\xi_1, \ldots, \xi_q$ применением той же перестановки. Можно показать, что $\alpha^{\#}\check{\xi} = \tilde{\alpha}^*\check{\xi}$, где $\tilde{\alpha}^*$ индуцировано из $\tilde{\alpha}$, как в 3.3. Следовательно, α^* переставляет диагональные $\mathbf{U}(1)$-расслоения ξ_i, а автоморфизм в когомологиях $\tilde{\alpha}^*$ переставляет γ_i (по аксиоме II, которая уже доказана для $U(1)$-расслоений). Таким образом, Φ действует как группа всех перестановок из $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$. Для того чтобы элемент $x \in H^*(Y_\xi, \mathbf{Z})$ лежал в $\rho^*H^*(X, \mathbf{Z})$, необходимо, чтобы он был инвариантным относительно всех операций из Φ. По основополагающей теореме Бореля [2], которая доказывается с помощью спектральных последовательностей, элементарные симметрические функции σ_j от γ_i, действительно, лежат в образе ρ^*. Таким образом, это условие и достаточно. Классы Чженя для ξ можно теперь определить равенством $\sigma_j = \rho^* c_j(\xi)$. Ясно, что они не зависят от выбора E и удовлетворяют аксиомам I, II и IV.

Остается проверить, что выполнена аксиома III. Пусть ξ есть $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X, которое является суммой Уитни $\mathbf{U}(1)$-расслоений $\xi'_1, \ldots, \xi'_q$ над X. Пусть ξ_i — i-е диагональное $\mathbf{U}(1)$-расслоение для $\check{\xi}$. Тогда расслоение Y_ξ имеет сечение s: $X \to Y_\xi$, такое, что $s^*\xi_i = \xi'_i$ для $i = 1, \ldots, q$. Следовательно,

$$c(\xi) = s^*\rho^* c(\xi) = s^* \prod_{i=1}^{q} c(\xi_i) = \prod_{i=1}^{q} c(\xi'_i).$$

Замечание. Для универсального $\mathbf{U}(q)$-расслоения ξ пространства $X = \mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C})$ и Y_ξ триангулируемы. Следовательно, если для непрерывных $\mathbf{U}(q)$-расслоений над триангулируемыми пространствами X определены классы $c(\xi)$, удовлетворяющие аксиомам I — IV, то они должны совпадать с классами Чженя. Если X триангулируемо, то характеристические классы $c_i(\xi) \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$ для $\mathbf{U}(q)$-расслоения ξ над X можно определить с помощью теории препятствий (см. Стинрод [1]). Рассматривается расслоение $E/\mathbf{U}(i-1)$, ассоциированное с ξ и имеющее в качестве слоя многообразие Штифеля $\mathfrak{S}_{q,i} = \mathbf{U}(q)/\mathbf{U}(i-1)$ унитарных $(q-i+1)$-реперов в $\mathbf{C}_q$. Первой отличной от нуля гомотопической группой для $\mathfrak{S}_{q,i}$ является группа $\pi_{2i-1}(\mathfrak{S}_{q,i})$, изоморфная бесконечной циклической группе. Этим определяется первое препятствие для существования сечения в расслоении $E/\mathbf{U}(i-1)$ над $2i$-мерным остовом пространства X

$$c_i(\xi) \in H^{2i}(X, \pi_{2i-1}(\mathfrak{S}_{q,i})).$$

Для того чтобы представить $c_i(\xi)$ как элемент из $H^{2i}(X, \mathbf{Z})$, надо выбрать какой-нибудь изоморфизм между $\pi_{2i-1}(\mathfrak{S}_{q,i})$ и $\mathbf{Z}$. Образующий элемент группы $\pi_{2i-1}(\mathfrak{S}_{q,i})$, соответствующий элементу $1 \in \mathbf{Z}$, определяется следующим способом. Выберем и зафиксируем $(q-i)$-репер в $\mathbf{C}_q$. Дополнительное подпространство является комплексным векторным пространством $\mathbf{C}_i$ и потому ориентировано. Единичная сфера $\mathbf{S}^{2i-1}$ в $\mathbf{C}_i$ также ориентирована. Дополняя каждую точку этой сферы до фиксированного репера, получаем $(q-i+1)$-реперы, т. е. точки из $\mathfrak{S}_{q,i}$. Таким образом, определено отображение *ориентированной* сферы $\mathbf{S}^{2i-1}$ в $\mathfrak{S}_{q,i}$, которое и является требуемой образующей группы $\pi_{2i-1}(\mathfrak{S}_{q,i})$. Это позволяет определить элементы $c_i(\xi)$ как элементы из $H^{2i}(X, \mathbf{Z})$. Можно показать, что они удовлетворяют аксиомам I — IV и, следовательно, совпадают с классами Чженя.

4.3. Аксиомы I—III однозначно определяют классы Чженя, если определен класс $c_1(\xi)$ для $\mathbf{U}(1)$- или $\mathbf{C}^*$-расслоения ξ (аксиома IV). В этом пункте мы приведем два других определения для $c_1(\xi)$, предполагая, что базисное пространство X допустимо.

Теорема 4.3.1. *Пусть $\xi \in H^1(X, \mathbf{C}^*_c)$ — непрерывное $\mathbf{C}^*$-расслоение над X. Если δ^1_*: $H^1(X, \mathbf{C}^*_c) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ — изоморфизм, определенный в* 3.8, *то $c_1(\xi) = \delta^1_*(\xi)$.*

Доказательство. Так как δ^1_* коммутирует с отображениями, достаточно доказать, что $\delta^1_*(\eta_n) = h_n$ для расслоения η_n из аксиомы IV. Для $n \geqslant 2$ вложение j: $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ индуцирует изоморфизм j^*: $H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to H^2(\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. Поскольку $j^*\delta^1_*(\eta_n) = \delta^1_* j^*(\eta_n)$ и $j^*h_n = h_{n-1}$, достаточно доказать, что $\delta^1_*(\eta_1) = h_1$ для сферы Римана $\mathbf{S}^2 = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

Класс когомологий h_1 по определению двойствен классу гомологий, представленному одной точкой. Следовательно, в симплициальных когомологиях h_1 представляется коцепью, сопоставляющей 1 одному из 2-мерных симплексов (с ориентацией, соответствующей естественной ориентации $\mathbf{S}^2$) и сопоставляющей 0 остальным 2-мерным симплексам. Имеется естественный изоморфизм между симплициальными когомологиями и когомологиями Чеха. Сферу $\mathbf{S}^2$ можно рассматривать как комплексную плоскость, компактифицированную точкой ∞ и параметризованную параметром $z = z_1/z_0$. Триангулируем S^2 как тетраэдр с вершиной в $z = 0$ так, чтобы точка ∞ была внутренней точкой грани, противоположной вершине 0. Обозначим остальные три вершины через A, B, C в порядке следования в положительном направлении вокруг начала координат. Открытые звезды S_0, S_A, S_B, S_C вершин тетраэдра образуют открытое покрытие сферы $\mathbf{S}^2$, нерв которого изоморфен тетраэдру. Этот изоморфизм и индуцирует отождествление когомологий Чеха и симплициальных когомологий.

$\mathbf{C}^*$-расслоение η_1 можно задать следующими отображениями f_{rs} из $S_r \cap S_s$ в $\mathbf{C}^*$:

$$f_{0A} = f_{0B} = f_{0C} = z; \quad f_{A0} = f_{B0} = f_{C0} = z^{-1};$$

все другие $f_{rs} = 1$. Далее, $\delta^1_*(\eta_1)$ по определению представлено коциклом

$$C_{rst} = \frac{1}{2\pi i}(\log f_{rs} + \log f_{st} + \log f_{tr}),$$

где для любых r, s мы выбираем ветвь логарифма в односвязной области $S_r \cap S_s$. Например, выберем $\log f_{0A}$ произвольно и определим $\log f_{0B}$, $\log f_{0C}$ как результат аналитического продолжения $\log f_{0A}$ в положительном направлении вокруг начала координат ($\log f_{A0} = -\log f_{0A}, \ldots$). Если r и s оба отличны от нуля, то $\log f_{rs} = 0$. Следовательно, $c_{0CA} = 1$, $c_{rst} = +1$ (соотв. -1), если r, s, t образуют четную (соотв. нечетную) перестановку 0, C, A, и

$c_{rst} = 0$ в противном случае. Но $0CA$ является положительно ориентированным симплексом по отношению к естественной ориентации $\mathbf{S}^2$ и, следовательно, c_{0CA} представляет класс когомологий h_1. Этим завершается доказательство теоремы 4.3.1.

Пусть ξ — некоторое $\mathbf{U}(1)$-расслоение над ориентированным компактным многообразием X. Рассмотрим ассоциированное с ним расслоение $B \to X$, слоем которого является единичный круг $|z| \leqslant 1$, $z \in \mathbf{C}$. Элемент $e^{2\pi i\varphi} \in \mathbf{U}(1)$ действует на B по формуле $z \to e^{2\pi i\varphi}z$. Единичный круг естественным образом ориентирован. Многообразие B является ориентированным многообразием с краем, ориентация которого индуцирована ориентациями базы и слоя. Обозначим через S границу B. Тогда $S \to X$ является расслоением со слоем $\mathbf{S}^1$, ассоциированным с ξ. Пусть s: $X \to B - S$ — вложение многообразия X в качестве нулевого сечения в B. Следуя Тому [1], рассмотрим *гомоморфизм Гизина*

$$s_*\colon H^i(X, \mathbf{Z}) \to H^{i+2}_{\text{cp}}(B - S, \mathbf{Z}), \qquad i \geqslant 0.$$

Вторая группа представляет собой когомологии с компактными носителями. Если обозначить через D_X изоморфизм Пуанкаре групп когомологий с группами гомологий дополнительных размерностей для X и аналогично обозначить через D_{B-S} соответствующий изоморфизм для когомологий и гомологий с компактными носителями в $B - S$, то $s_*(a) = D^{-1}_{B-S}(s_x D_X(a))$, где $a \in H^i(X, \mathbf{Z})$. Пусть $\tilde{B}$ — компактное пространство, получаемое из B стягиванием S в точку. Имеется естественный изоморфизм g^*: $H^j_{\text{cp}}(B - S, \mathbf{Z}) \to H^j(\tilde{B}, \mathbf{Z})$ при $j > 0$. Расслоение ξ, рассматриваемое как расслоение над B, тривиально над $B - s(X)$ и, следовательно, может рассматриваться как расслоение $\tilde{\xi}$ над $\tilde{B}$. В этих обозначениях имеет место

Теорема 4.3.2. *Пусть $1 \in H^0(X, \mathbf{Z})$ — единичный элемент. Тогда*

$$g^* s_*(1) = c_1(\tilde{\xi})$$

и

$$s^* s_*(1) = c_1(\xi).$$

Второе равенство означает, что класс Чженя $c_1(\xi)$ является ограничением на $s(X)$ класса когомологий (с компактными носителями) из $B - S$, соответствующего классу гомологий (с компактными носителями), представляющему ориентированное подмногообразие $s(X)$.

Доказательство. Второе уравнение следует из первого. Определение Тома [1] показывает, что s_* коммутирует с непрерывными отображениями, поэтому первое равенство достаточно доказать для расслоения η_n над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. В этом случае (см. замечание после аксиомы IV) $\tilde{B} = \mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$, $S = \mathbf{S}^{2n+1}$ и $\tilde{\eta}_n = \eta_{n+1}$. Ориентация B индуцирует естественную ориентацию на $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$. Так как X совпадает с естественно ориентированной гиперплоскостью $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ в $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$, то $g^*s_*(1) = h_{n+1} = c_1(\eta_{n+1}) = c_1(\tilde{\eta}_n)$, что и требовалось доказать.

4.4. В этом пункте мы покажем, как вычислять классы Чженя расслоений ξ^*, $\xi \oplus \xi'$, $\xi \otimes \xi'$, $\lambda^p\xi$ (см. 3.6), зная классы Чженя для ξ и ξ'. С этой целью мы докажем одну лемму, которая позволяет сводить все подобные вычисления к случаю, когда все расслоения являются суммами Уитни $\mathbf{U}(1)$-расслоений.

Лемма 4.4.1. *Пусть ξ_i — непрерывные $\mathbf{U}(q_i)$-расслоения над допустимым пространством X (см. 4.2) (i пробегает конечное множество $1, 2, \ldots, N$). Тогда найдутся допустимое пространство Y и непрерывное отображение φ: $Y \to X$, такие, что*

I) φ^*: $H^*(X, \mathbf{Z}) \to H^*(Y, \mathbf{Z})$ — *мономорфизм;*

II) $\varphi^*\xi_i$ *для каждого i есть сумма $\mathbf{U}(1)$-расслоений.*

Доказательство получается повторным применением конструкции из части b) доказательства единственности классов Чженя (4.2).

Лемма 4.4.2. *Пусть ξ_1, ξ_2 — два $\mathbf{U}(1)$-расслоения над допустимым пространством X. Тогда $c_1(\xi_1 \otimes \xi_2) = c_1(\xi_1) + c_1(\xi_2)$.*

Это следует из сказанного в п. 3.7 и теоремы 4.3.1.

Примем следующее соглашение. Пусть a_i, b_i, c_i, $\ldots$, $i = 1, 2, \ldots,$ — коммутирующие между собой независимые переменные. Положим $a_0 = b_0 = c_0 = \ldots = 1$, и рассмотрим формальные разложения

$$\sum_{i=0}^{k} a_i x^i = \prod_{j=1}^{k} (1 + \alpha_j x), \qquad \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \prod_{j=1}^{m} (1 + \beta_j x) \quad \text{и т. д.}$$

Всякий многочлен, симметричный по каждой группе переменных α_j, β_j, γ_j, $\ldots$, можно однозначно записать в виде многочлена от элементарных симметрических функций a_i, b_i, c_i, $\ldots$ Если потом вместо переменных a_i, b_i, c_i, $\ldots$, подставить их значения (из некоторого коммутативного кольца), то этот полином примет определенное значение. В приложениях этими значениями будут четномерные элементы из кольца когомологий.

Теорема 4.4.3. *Пусть ξ — некоторое $\mathbf{U}(q)$-расслоение, а ξ' — некоторое $\mathbf{U}(q')$-расслоение над допустимым пространством X. Рассмотрим формальные разложения*

$$\sum_{i=0}^{q} c_i(\xi)\, x^i = \prod_{j=1}^{q} (1 + \gamma_j x), \qquad \sum_{i=0}^{q'} c_i(\xi')\, x^i = \prod_{k=1}^{q'} (1 + \delta_k x).$$

Тогда, с учетом принятого выше соглашения,

I) $\displaystyle\sum_{i=0}^{q} c_i(\xi^*)\,x^i = \prod_{j=1}^{q}(1-\gamma_j x)$, т. е. $c_i(\xi^*) = (-1)^i c_i(\xi)$;

II) $\displaystyle\sum_{i=0}^{q+q'} c_i(\xi\oplus\xi')\,x^i = \prod_{j=1}^{q}(1+\gamma_j x)\prod_{k=1}^{q'}(1+\delta_k x)$,

т. е. $c(\xi\oplus\xi') = c(\xi)\,c(\xi')$;

III) $\displaystyle\sum_{i=0}^{qq'} c_i(\xi\otimes\xi')\,x^i = \prod_{j,\,k}(1+(\gamma_j+\delta_k)\,x)$, $1\leqslant j\leqslant q$, $1\leqslant k\leqslant q'$;

IV) $\displaystyle\sum_i c_i(\lambda^p\xi)\,x^i = \prod\left(1+\left(\gamma_{j_1}+\ldots+\gamma_{j_p}\right)x\right)$,

где произведение берется по всем $\binom{q}{p}$ *комбинациям* $1\leqslant j_1<\ldots$ $\ldots<j_p\leqslant q$.

Доказательство. По теореме 4.1.1, лемме 4.4.2 и аксиоме III из 4.2 эти формулы имеют место, если ξ, ξ' являются суммами $\mathbf{U}(1)$-расслоений. Следовательно, по лемме 4.4.1 они выполняются и в общем случае.

Замечание. Формула II) есть *формула умножения Уитни* (иногда называемая «формулой двойственности»; см., например, Чжень [2]). Из формулы III) при $q'=1$ следует формула Кундерта [1]. Если ξ — фиксированное $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X, а ξ' пробегает группу всех $\mathbf{U}(1)$-расслоений над X, то $\xi\otimes\xi'$ пробегает множество всех $\mathbf{U}(q)$-расслоений над X, которые совпадают с ξ как $\mathbf{PU}(q)$-расслоения, где $\mathbf{PU}(q)$ — проективная унитарная группа. Следовательно, для всех этих $\mathbf{U}(q)$-расслоений могут быть вычислены классы Чженя. Это и составляет содержание *формулы Кундерта.*

4.5. В этом пункте определяются классы Понтрягина для $\mathbf{O}(q)$-расслоения ξ над допустимым пространством X (см. 4.2); они определяются через классы Чженя унитарных расслоений. Согласно 4.1b IV, этим определяются также классы Понтрягина для $\mathbf{GL}(q,\,\mathbf{R})$-расслоений над X. Если W — векторное расслоение над X со слоем $\mathbf{R}^q$, ассоциированное с ξ, то классами Понтрягина для W по определению служат классы Понтрягина для ξ.

Рассмотрим следующие коммутативные диаграммы вложений:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{U}(q) & \to & \mathbf{O}(2q) & \qquad & \mathbf{O}(q) & \to & \mathbf{U}(q)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathbf{GL}(q,\,\mathbf{C}) & \to & \mathbf{GL}(2q,\,\mathbf{R}) & & \mathbf{GL}(q,\,\mathbf{R}) & \to & \mathbf{GL}(q,\,\mathbf{C}).
\end{array}\tag{9}$$

В первой диаграмме горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если линейное отображение пространства $\mathbf{C}_q$ с координатами $z_1,\,\ldots,\,z_q$ рассматривать как линейное отображение пространства $\mathbf{R}^{2q}$ с координатами $x_1,\,\ldots,\,x_{2q}$, положив $z_k = x_{2k-1}+ix_{2k}$. Во второй диаграмме горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если матрицы с вещественными коэффициентами рассматривать как матрицы с комплексными коэффициентами.

Вторая диаграмма определяет отображение ψ из $H^1(X,\mathbf{O}(q)_c)$ в $H^1(X,\mathbf{U}(q)_c)$ (см. 3.1(2)). Для $\mathbf{O}(q)$-расслоения ξ над X положим

$$\check{p}(\xi) = c(\psi(\xi)) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\psi(\xi)) \in H^*(X,\,\mathbf{Z})$$

и

$$p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\psi(\xi)).$$

Рассмотрев классифицирующее пространство для $\mathbf{O}(q)$, можно доказать, что $2c_{2i+1}(\psi(\xi))=0$ (Борель [2], Ротенберг и Стинрод [1]). Элемент $p_i(\xi)\in H^{4i}(X,\mathbf{Z})$ называется *i-м классом Понтрягина* для ξ. Сумма $p(\xi) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i(\xi)$ называется (*полным*) *классом Понтрягина* для ξ. Из свойств классов Чженя сразу же следует, что

I) $p_0(\xi) = 1$.

II) $\check{p}(f^*\xi) = f^*(\check{p}(\xi))$ для любого непрерывного отображения $f\colon Y\to X$ и любого $\mathbf{O}(q)$-расслоения ξ над X.

III) $\check{p}(\xi_1\oplus\xi_2) = \check{p}(\xi_1)\,\check{p}(\xi_2)$ для $\xi_1\in H^1(X,\,\mathbf{O}(q_1)_c)$ и $\xi_2\in$ $\in H^1(X,\,\mathbf{O}(q_2)_c)$, где $\xi_1\oplus\xi_2$ — сумма Уитни ξ_1 и ξ_2.

Замечание. Класс Понтрягина $p(\xi)$ не удовлетворяет формуле умножения III. Однако верно, что

$p(\xi_1\oplus\xi_2) = p(\xi_1)\,p(\xi_2)$ по модулю элементов порядка 2 в $H^*(X,\mathbf{Z})$.

Первая из диаграмм (9) определяет отображение ρ из $H^1(X,\,\mathbf{U}(q)_c)$ в $H^1(X,\,\mathbf{O}(2q)_c)$. Если ξ есть $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X, то $\rho(\xi)$ есть $\mathbf{O}(2q)$-расслоение над X.

Теорема 4.5.1. *Пусть ξ есть $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X. Тогда*

$$\check{p}(\rho(\xi)) = 1 - p_1(\rho(\xi)) + p_2(\rho(\xi)) - p_3(\rho(\xi)) + \ldots$$
$$\ldots = (1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \ldots)(1 - c_1(\xi) + c_2(\xi) - \ldots).$$

Если c_i рассматривать формально как элементарные симметрические функции от γ_i, то $p_i(\rho(\xi))$ будут элементарными симметрическими функциями от γ_i^2 (см. 1.3).

Доказательство. Рассмотрим вложения $\mathbf{U}(q)\subset\mathbf{O}(2q)\subset$ $\subset\mathbf{U}(2q)$. Элемент $A\in\mathbf{U}(q)$ определяет элемент из $\mathbf{U}(2q)$, отображающийся хорошо известным автоморфизмом группы $\mathbf{U}(2q)$, не зависящим от A, в элемент $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & \overline{A}\end{pmatrix}$. Так как матрица A унитарна, то комплексно сопряженная матрица $\overline{A}$ совпадает с транспонированной обратной. Следовательно, $\psi\rho(\xi)$ является суммой Уитни ξ и ξ^* (см. 3.1 (2*)). Требуемый результат следует теперь из формулы умножения Уитни (теорема 4.4.3).

Замечание. Если ξ есть $\mathbf{O}(q)$-расслоение, то это же рассуждение показывает, что $\rho(\psi(\xi)) = \xi \oplus \xi$. Однако если ξ ориентировано, то, как легко проверить, естественные ориентации на $\rho\psi(\xi)$ и $\xi \oplus \xi$ отличаются на множитель $(-1)^{\frac{1}{2}q(q-1)}$.

4.6. Пусть X — гладкое m-мерное многообразие, необязательно ориентируемое (см. пример 3.2.5). Пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие X, такое, что каждое U_i допускает гладкую систему координат $x_1^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}$. *Контравариантным касательным* $\mathbf{GL}(m, \mathbf{R})$-*расслоением* ${}_{\mathbf{R}}\theta$ для X называется гладкое расслоение, задаваемое $\mathfrak{U}$-коциклом $f = \{f_{ij}\}$, где

$$f_{ij} = \left(\frac{\partial x_r^{(i)}}{\partial x_s^{(j)}}\right): U_i \cap U_j \to \mathbf{GL}(m, \mathbf{R}) \tag{10}$$

и где f_{ij} — якобиева матрица координатных преобразований от U_j к U_i. Расслоение ${}_{\mathbf{R}}\theta$ есть элемент из когомологического множества $H^1(X, \mathbf{GL}(m, \mathbf{R})_b)$, и мы будем его просто называть *касательным расслоением* для X.

Допустимая карта $\varkappa$ для X — это гладкий гомеоморфизм открытого подмножества $U_\varkappa$ из X на открытое подмножество $V_\varkappa$ из $\mathbf{R}^m$. На $U_\varkappa$ с помощью $\varkappa$ вводятся гладкие координаты. В частности, можно рассмотреть открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\varkappa\}_{\varkappa \in K}$, где K — множество всех допустимых карт для X. По формуле (10) можно построить $\mathfrak{U}$-коцикл $f = \{f_{ij}\}$.

С помощью коцикла f можно построить (см. 3.2а) векторное расслоение ${}_R\mathfrak{T}$ над X со слоем R^m и структурной группой $\mathbf{GL}(m, R)$. Расслоение ${}_R\mathfrak{T}$ представляет собой векторное расслоение контравариантных касательных векторов к X. Согласно 4.5(9), f_{ij} можно рассматривать также как отображения $U_i \cap U_j$ в $\mathbf{GL}(m, C)$. Тогда коцикл f определяет векторное расслоение ${}_C\mathfrak{T}$ со слоем C_m, которое называется *комплексификацией расслоения* ${}_R\mathfrak{T}$.

Определение. *Классами Понтрягина* $p_i(X) \in H^{4i}(X, Z)$ гладкого многообразия X называются классы Понтрягина касательного расслоения ${}_R\theta$ над X.

Ориентированное m-мерное гладкое многообразие X можно покрыть открытыми множествами U_i, допускающими гладкие системы координат $x_1^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}$, согласованные с ориентацией (ориентация определяется порядком $x_1^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}$). Отображения f_{ij} из (10) для такого покрытия дают коцикл

$$f_i: U_i \cap U \to \mathbf{GL}^+(m, R),$$

который определяет контравариантное касательное $\mathbf{GL}^+(m, \mathbf{R})$-расслоение для ориентированного многообразия X. Рассматриваемое как $\mathbf{GL}(m, \mathbf{R})$-расслоение, это расслоение совпадает с ${}_{\mathbf{R}}\theta$.

Теперь предположим, что $m = 2n$ четно, а X по-прежнему ориентировано.

Определение. *Почти комплексной структурой* на ориентированном гладком многообразии X называется гладкое $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоение θ над X, отображающееся в касательное $\mathbf{GL}^+(m, \mathbf{R})$-расслоение к X при вложении $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C}) \to \mathbf{GL}^+(2n, \mathbf{R})$. Если на ориентированном многообразии X существует и зафиксирована почти комплексная структура, то X называется почти комплексным многообразием с касательным $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-расслоением θ. Классами Чженя для X по определению являются классы Чженя для θ.

Отметим, что почти комплексное многообразие по определению ориентировано. Определения почти комплексной структуры в литературе несколько отличаются от данного здесь (см., например, Стинрод [1]). Приведенное определение достаточно для целей настоящей работы.

Из теоремы 4.5.1 немедленно следует

Теорема 4.6.1. *Классы Чженя c_i почти комплексного многообразия X связаны с классами Понтрягина p_i для X, рассматриваемого как гладкое многообразие, соотношением*

$$\check{p} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j c_j.$$

4.7. Пусть теперь X — комплексное многообразие комплексной размерности n (см. 2.5, пример 4). Допустимая карта для $\varkappa$ — это голоморфный гомеоморфизм открытого подмножества $U_\varkappa$ из X на открытое подмножество $V_\varkappa$ из $\mathbf{C}_n$. Карта определяет на $U_\varkappa$ комплексные координаты. Пусть $\mathfrak{U} = \{U_\varkappa\}_{\varkappa \in K}$ — открытое покрытие X, где K — множество всех допустимых карт для X.

Контравариантным касательным $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоением θ для X называется комплексно-аналитическое расслоение, задаваемое $\mathfrak{U}$-коциклом $f = \{f_{ij}\}$, где

$$f_{ij} = \left(\frac{\partial z_r^{(i)}}{\partial z_s^{(j)}}\right): U_i \cap U_j \to \mathbf{GL}(n, \mathbf{C}).$$

Как и в 4.6(10), f_{ij} — якобиева матрица координатных преобразований из U_j в U_i.

Согласно сказанному в п. 3.2а, с помощью коцикла f можно построить над X векторное расслоение $\mathfrak{T}$ со слоем $\mathbf{C}_n$, ассоциированное с θ. Расслоение $\mathfrak{T}$ является векторным расслоением контравариантных касательных векторов к X. Аналогично с помощью коцикла, образованного сопряженными матрицами $\bar f = \{\bar f_{ij}\}$, можно построить гладкое векторное расслоение $\bar{\mathfrak{T}}$ над X со слоем $\mathbf{C}_n$. Векторные расслоения, двойственные к $\mathfrak{T}$ и $\bar{\mathfrak{T}}$ (см. 3.6b), будем обозначать через $\boldsymbol{T}$ и $\bar{\boldsymbol{T}}$; $\boldsymbol{T}$ является векторным расслоением ковариантных касательных векторов к X. Заметим, что $\bar{\mathfrak{T}}$ и $\bar{\boldsymbol{T}}$ не являются комплексно-аналитичными.

Комплексное многообразие X естественным образом ориентировано (см. замечание в 0.2). Следовательно, его можно рассматривать как ориентированное гладкое многообразие с почти комплексной структурой, заданной с помощью θ.

Определение. *Классами Чженя* $c_i(X) \in H^{2i}(X, \boldsymbol{Z})$ *комплексного многообразия* X называются классы Чженя касательного расслоения θ к X. Если X рассматривать как гладкое многообразие, то над X определено векторное расслоение ${}_{\mathbf R}\mathfrak{T}_{\mathbf C}$ со слоем C_{2n} (см. 4.6). Имеются гладкие изоморфизмы

$${}_{\mathbf R}\mathfrak{T}_{\mathbf C} = \mathfrak{T} \oplus \bar{\mathfrak{T}}, \tag{11}$$

$${}_{\mathbf R}\mathfrak{T}^*_{\mathbf C} = \boldsymbol{T} \oplus \bar{\boldsymbol{T}}, \tag{12}$$

$$\lambda^r_{\mathbf R}\mathfrak{T}^*_{\mathbf C} = \sum_{p+q=r} \lambda^p \boldsymbol{T} \oplus \lambda^q \bar{\boldsymbol{T}}. \tag{13}$$

Здесь $\lambda^p\mathbf{T}$ — векторное расслоение ковариантных p-векторов на X и $\lambda^q\bar{\boldsymbol{T}} = \overline{\lambda^q\boldsymbol{T}}$. Сумма в (13) понимается в смысле Уитни.

Гладким сечением векторного расслоения $\lambda^r_{\mathbf R}\mathfrak{T}^*_{\mathbf C}$ является дифференциальная форма степени r с комплексными гладкими коэффициентами. Разложение (13) соответствует однозначному представлению такой формы в виде суммы форм степени r и типа (p, q) с $p+q=r$.

Наконец, упомянем о *главном касательном расслоении* к комплексному многообразию X. Оно ассоциировано с касательным $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоением θ и может быть построено, как в 3.5. Его слоем в точке $x \in X$ является множество всех изоморфизмов фиксированного векторного пространства $\mathbf{C}_n$ с векторным пространством $\mathfrak{T}_x$ контравариантных касательных векторов к X в точке x.

4.8. Пусть X — k-мерное гладкое *подмногообразие* m-мерного гладкого многообразия Y. По определению X является замкнутым подмножеством в Y со следующим свойством: каждая точка $x \in X$ обладает открытой окрестностью U в Y, имеющей гладкие координаты $u_1, u_2, \ldots, u_m$, в которых $U \cap X$ задается уравнениями $u_{k+1} = \ldots = u_m = 0$.

Обозначим через j: $X \to Y$ вложение подмногообразия в многообразие, и рассмотрим контравариантное касательное расслоение ${}_{\mathbf R}\mathfrak{T}$ для Y. Пусть L — ассоциированное расслоение над Y со слоем $\mathfrak{G}(k, m-k; \mathbf{R})$, построенное в п. 4.1g. Поле касательных k-плоскостей к X определяет гладкое сечение для j^*L. Следовательно, по

теореме 4.1.6 ограничение $j^*_{\mathbf R}\theta(Y)$ на X касательного расслоения ${}_{\mathbf R}\theta(Y)$ к Y допускает естественным образом подрасслоение и факторрасслоение. Подрасслоение — это в точности касательное расслоение ${}_{\mathbf R}\theta(X)$ к X. Факторрасслоение ${}_{\mathbf R}\nu$ называется *нормальным расслоением* подмногообразия X в Y. По теореме 4.1.4

$$j^*{}_{\mathbf R}\theta(Y) = {}_{\mathbf R}\theta(X) \oplus {}_{\mathbf R}\nu. \tag{14}$$

Аналогичный результат имеет место, если X и Y ориентированы. В этом случае нормальное расслоение будет $\mathbf{GL}^+(m-k, \mathbf{R})$-расслоением. В частном случае, когда $m-k=2$, нормальное расслоение можно считать $\mathbf{U}(1)$-расслоением, если воспользоваться утверждением 4.1b IV), примененным к вложению $\mathbf{U}(1) = \mathbf{SO}(2) \subset \mathbf{GL}^+(2, \mathbf{R})$ [см. 4.5(9)]. Следовательно, для нормального расслоения ${}_{\mathbf R}\nu$ определен класс Чженя.

Теорема 4.8.1. *Пусть* j: $X \to Y$ — *вложение ориентированного компактного* $(m-2)$*-мерного гладкого многообразия* X *в ориентированное компактное* m*-мерное многообразие* Y. *Пусть* $h \in H^2(Y, \mathbf{Z})$ — *класс когомологий, определенный по отношению к данным ориентациям* $(m-2)$*-мерным классом гомологий, представленным подмногообразием* X. *Пусть* ${}_{\mathbf R}\nu$ — *нормальное расслоение для* X в Y. *Тогда*

$$c_1({}_{\mathbf R}\nu) = j^*h. \tag{15}$$

Доказательство. По утверждению 4.1b IV), примененному к вложению $\mathbf{SO}(m) \subset \mathbf{GL}^+(m, \mathbf{R})$, касательное $\mathbf{GL}^+(m, \mathbf{R})$-расслоение к Y можно рассматривать как $\mathbf{SO}(m)$-расслоение. Следовательно, Y допускает риманову метрику. С помощью этой метрики можно построить замкнутую трубчатую окрестность B для X в Y. Эта окрестность B будет расслоением над X с единичным кругом $|z| \leqslant 1$, $z \in \mathbf{C}$ в качестве слоя, ассоциированным с нормальным $\mathbf{U}(1)$-расслоением ${}_{\mathbf R}\nu$ (Том [2]). Пусть $\breve{B}$ — компактное пространство, получающееся из B стягиванием границы S многообразия B в точку; $\breve{B}$ можно также получить из Y стягиванием замкнутого подмножества $Y - (B - S)$ в точку. Отображение r: $Y \to \breve{B}$ определяет гомоморфизм в когомологиях r^*: $H^*(\breve{B}, \mathbf{Z}) \to H^*(Y, \mathbf{Z})$. Поэтому в обозначениях теоремы 4.3.2

$$j^*h = j^*r^*g^*s_*(1) = s^*s_*(1) = c_1({}_{\mathbf R}\nu).$$

4.9. Пусть $X = X_k$ — комплексное подмногообразие комплексного многообразия $Y = Y_n$ $(k \leqslant n)$. По определению X — замкнутое подмножество в Y и каждая точка $x \in X$ имеет открытую окрестность U в Y с комплексными координатами $z_1, z_2, \ldots, z_n$, для которой $U \cap X$ задается уравнениями $z_{k+1} = \ldots = z_n = 0$. Рассмотрим вложение j: $X \to Y$ и касательное $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоение $\boldsymbol{\theta}(Y)$ для Y. Как и в 4.8, ограничение $j^*\theta(Y)$ расслоения $\theta(Y)$

на X допускает подрасслоение и факторрасслоение. Подрасслоением является касательное расслоение $\theta(X)$ к X. Факторрасслоение ν является комплексно-аналитическим нормальным расслоением для X в Y. Если все расслоения рассматривать как гладкие расслоения, то $j^*\theta(Y)$ является суммой Уитни $\theta(X)$ и ν.

Рассмотрим теперь частный случай, в котором $X = X_{n-1}$ является комплексным подмногообразием в $Y = Y_n$ комплексной коразмерности 1. В этом случае X называется *неособым дивизором* в Y. Имеется покрытие Y открытыми множествами U_i, такими, что $X \cap U_i$ определяется уравнением $f_i = 0$. Здесь f_i — голоморфная функция, определенная на U_i, частные производные которой отличны от нуля в каждой точке $y \in U_i \cap X$. Функции $f_{ij} = f_i f_j^{-1}$ голоморфны и не обращаются в нуль на $U_i \cap U_j$. Коцикл $\{f_{ij}\}$ определяет комплексно-аналитическое $\mathbf{C}^*$-расслоение $[X]$ над Y, зависящее только от дивизора X. Например, расслоение η_n из 4.2 определяется неособым дивизором $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$ в $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

Теорема 4.9.1. *Пусть X — неособый дивизор компактного комплексного многообразия Y, и пусть $h \in H^2(Y, \mathbf{Z})$ — класс когомологий, определенный ориентированным $(2n-2)$-мерным циклом X. Тогда $c_1([X]) = h$.*

Доказательство. Мы используем те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 4.8.1. Расслоение $[X]$ тривиально над $Y - X$, поэтому существует расслоение $[\tilde{X}]$ над B, такое, что $[X] = r^*[\tilde{X}]$. Как и в теореме 4.3.2,

$$c_1([X]) = r^* c_1([\tilde{X}]) = r^*(g^* s_*(1)) = h.$$

Наконец, пусть $X = X^{2k}$ — ориентированное гладкое подмногообразие почти комплексного многообразия $Y = Y_n$ $(2k < 2n)$, предположим, что на X задана почти комплексная структура. Пусть j — вложение X в Y.

Определение. X называется *почти комплексным подмногообразием* в Y, если существует гладкое $\mathbf{GL}(n-k, \mathbf{C})$-расслоение ν над X, такое, что

I) при вложении $\mathbf{GL}(n-k, \mathbf{C}) \subset \mathbf{GL}^+(2n-2k, \mathbf{R})$ расслоение ν отображается в нормальное расслоение к X в Y;

II) $j^*\theta(Y) = \theta(X) \oplus \nu$.

Это определение почти комплексного подмногообразия несколько грубо, однако оно достаточно для наших целей.

Согласно сказанному в п. 4.8, условие I) всегда выполняется в случае $n - k = 1$. Ясно, что комплексное подмногообразие комплексного многообразия является также и почти комплексным подмногообразием.

4.10. Определение классов Чженя с помощью теории препятствий, приведенное в конце п. 4.2, приводит к следующей теореме

(Стинрод [1], 39.7 и 41.8; другое доказательство намечено в 4.11).

Теорема 4.10.1. *Пусть V_n — компактное почти комплексное многообразие и $c_n \in H^{2n}(V_n, \mathbf{Z})$ — его $2n$-й класс Чженя. Естественная ориентация V_n определяет целое число $c_n[V_n]$ (см. 0.3), которое равно эйлеровой характеристике многообразия V_n.*

Эйлерова характеристика для $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ равна $n+1$. Этот факт можно использовать для вычисления классов Чженя и классов Понтрягина для $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$.

Теорема 4.10.2. *Пусть $h_n \in H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ — образующий элемент, определенный в 4.2. Класс Чженя комплексного многообразия $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ равен $(1+h_n)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} h_n^i$. Класс Понтрягина гладкого многообразия $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ равен $(1+h_n^2)^{n+1}$.*

Доказательство. По теореме 4.10.1 формула для класса Чженя верна для $n = 1$. Предположим, что формула уже доказана для $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$, и рассмотрим вложение j: $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Используя теорему 4.9.1, формулу умножения Уитни и тот факт, что $j^*h_n = h_{n-1}$, получаем

$$j^* c(\mathbf{P}_n(\mathbf{C})) = c(\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})) \cdot j^*(1+h_n) = j^*(1+h_n)^{n+1}.$$

Но j^*: $H^{2i}(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to H^{2i}(\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ является изоморфизмом для $i \leqslant n-1$, следовательно,

$$c(\mathbf{P}_n(\mathbf{C})) = (1+h_n)^{n+1} \bmod H^{2n}(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}).$$

По теореме 4.10.1 $c_n(\mathbf{P}_n(\mathbf{C})) = (n+1) h_n^n$. Этим завершается доказательство формулы для классов Чженя. Формула для классов Понтрягина следует немедленно из теоремы 4.6.1.

4.11. Пусть X — компактное ориентированное многообразие и ξ — $\mathbf{SO}(q)$-расслоение над X. Конструкцию теоремы 4.3.2 можно использовать для определения класса Эйлера $e(\xi) \in H^q(X, \mathbf{Z})$ для ξ. Пусть $B \to X$ — расслоение с единичным шаром $\mathbf{D}^q = \left\{(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbf{R}^q;\ \sum_{i=1}^{q} x_i^2 \leqslant 1\right\}$ в качестве слоя, ассоциированное с ξ; B — многообразие с краем и ориентацией, согласованной с ориентациями X и $\mathbf{R}^q$. Граница S многообразия B является расслоением над X со слоем $\mathbf{S}^{q-1}$. Пусть s: $X \to B - S$ — вложение X в качестве нулевого сечения в B. Имеется гомоморфизм Гизина

$$s_*: H^i(X, \mathbf{Z}) \to H_c^{i+q}(B - S, \mathbf{Z}), \qquad i \geqslant 0,$$

определенный, как в 4.3. Пусть X' — другое компактное ориентированное многообразие и $f\colon X' \to X$ — непрерывное отображение. Тогда по $\mathbf{SO}(q)$-расслоению $f^*\xi$ также можно построить B', S', s', и имеется естественное отображение $f\colon B' - S' \to B - S$. В этих обозначениях имеет место

Теорема 4.11.1 (Том [1]). *Гомоморфизм Гизина s_* является изоморфизмом для $i \geqslant 0$, и диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H^i(X, \mathbf{Z}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "s_*"'] & H^i(X', \mathbf{Z}) \arrow[d, "s'_*"] \\ H^{i+q}_{\text{ср}}(B - S, \mathbf{Z}) \arrow[r, "f^*"] & H^{i+q}_{\text{ср}}(B' - S', \mathbf{Z}) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть $1 \in H^0(X, \mathbf{Z})$ — единичный элемент. *Класс Эйлера* $e(\xi)$ для ξ определяется равенством $e(\xi) = s^* s_* 1$. Согласно 4.1b, класс Эйлера определен также для любого $\mathbf{GL}^+(q, \mathbf{R})$-расслоения ξ над X.

Теорема 4.11.2. *Пусть X, Y — компактные ориентированные многообразия, $f\colon Y \to X$ — непрерывное отображение, ξ — $\mathbf{SO}(q)$-расслоение над X, а ξ' — $\mathbf{SO}(q')$-расслоение над X. Тогда*

I) $2e(\xi) = 0$, *если q нечетно;*
II) $e(f^*\xi) = f^* e(\xi)$;
III) $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi)\, e(\xi')$;
IV) $e(\xi) = c_1(\xi)$, *если $q = 2$.*

Доказательство. Из определения s_* следует, что $s_*(s^*b \cdot c) = b \cdot s_* c$ для $b \in H^i_c(B - S, \mathbf{Z})$, $c \in H^j(X, \mathbf{Z})$. Следовательно, $s_*(2e(\xi)) = 2s_*(s^* s_* 1) = 2s_* 1 \cdot s_* 1 = 0$ для нечетных q, так как $\cup$-произведение антикоммутативно. Так как s_* — изоморфизм, то $2e(\xi) = 0$ для нечетных q. Этим доказано I). Утверждение II) следует из теоремы 4.11.1. Чтобы доказать III), рассмотрим расслоения B, B' на единичные шары для ξ, ξ' и расслоение на единичные шары C для $\xi \oplus \xi'$. Пусть $t\colon B \to C$, $t'\colon B' \to C$ — вложения, определенные прямой суммой, и $u = ts = t's'$ — вложение X в C, определенное нулевым сечением. По теореме 4.11.1 $s_* s^* 1 = t^* t'_* 1$ и, следовательно,

$$u_* 1 = t_* s_* 1 = t_*(s_* s'^* 1) = t_* t^*(t'_* 1) = t'_* 1 \cdot t_* 1.$$

Значит,

$$u^* u_* 1 = s^* t^* (t'_* 1) \cdot s'^* t'^* (t_* 1) = s^* s_* (s'^* 1) \cdot s'^* s'_* (s^* 1).$$

Таким образом, $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi)\, e(\xi')$, как и требовалось. Утверждение IV) следует из изоморфизма $\mathbf{SO}(2) \cong U(1)$ н теоремы 4.3.2.

Пусть теперь η — $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X. Вложение $\mathbf{U}(q) \subset \mathbf{SO}(2q)$ из 4.5(9) определяет $\mathbf{SO}(2q)$-расслоение $\rho(\eta)$ над X. Из свойств II, IV теоремы 4.11.2 и из принципа расщепления следует, что

$$e(\rho(\eta)) = c_q(\eta) \tag{16}$$

(ср. с доказательством единственности классов Чженя в 4.2).

Теорема 4.11.3. *Пусть $j\colon X \to Y$ — вложение ориентированного компактного k-мерного гладкого подмногообразия X в ориентированное компактное m-мерное многообразие Y. Пусть $h \in H^{m-k}(Y, \mathbf{Z})$ — класс когомологий, соответствующий ориентированному циклу X, и пусть ${}_{\mathbf{R}}\nu$ — нормальное $\mathbf{GL}^+(m-k, \mathbf{R})$-расслоение для X в Y. Тогда*

$$e({}_{\mathbf{R}}\nu) = j^* h. \tag{17}$$

Доказательство. Определение класса Эйлера показывает, что доказательство теоремы 4.8.1 проходит и в данном случае.

Рассмотрим следующий частный случай теоремы 4.11.3: Y — это произведение $X \times X$, $j\colon X \to X \times X$ — диагональное вложение и ${}_{\mathbf{R}}\nu$ совпадает с касательным расслоением ${}_{\mathbf{R}}\theta$ к X. Алгебраическое вычисление, принадлежащее Лефшецу, показывает, что

$$(h \cup h)[X \times X] = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i b_i(X)$$

есть знакопеременная сумма чисел Бетти для X. Следовательно, из теоремы 4.11.3 вытекает, что

$$e({}_{\mathbf{R}}\theta)[X] = j^* h[X] = (h \cup h)[X \times X] = E(X)$$

совпадает с эйлеровой характеристикой для X. Тем самым доказана

Теорема 4.11.4. *Пусть X — компактное ориентированное гладкое многообразие с касательным расслоением ${}_{\mathbf{R}}\theta$. Тогда $e({}_{\mathbf{R}}\theta)[X]$ равно эйлеровой характеристике $E(X)$ для X.*

Теорема 4.11.4 в совокупности с равенством (16) дает другое доказательство теоремы 4.10.

Теорема 4.11.3 в совокупности с равенством (16) дает следующее обобщение теоремы 4.9.1.

Пусть $j\colon X \to Y$ — вложение компактного комплексного подмногообразия X в компактное комплексное многообразие Y комплексной коразмерности q. Пусть $h \in H^{2q}(Y, \mathbf{Z})$ — класс когомологий, представленный ориентированным циклом X, и ν — комплексное нормальное расслоение для X в Y. Тогда

$$c_q(\nu) = j^* h. \tag{18}$$

Замечания. 1) Определение класса Эйлера, теорема 4.11.1 и теорема 4.11.2 в действительности сохраняют силу для $\mathbf{SO}(q)$-расслоения ξ над произвольным допустимым пространством X (см. 4.2). Следовательно, (16) также справедливо в этом случае.

2) В случае когда ξ есть $\mathbf{O}(q)$-расслоение, определение s_* неприменимо, так как расслоение B уже ориентированным естественным образом не является. Если же все группы когомологий берутся с коэффициентами $\mathbf{Z}_2$, то теорема 4.11 остается справедливой и в этом случае, и $s^*s_*(1) \in H^q(X, \mathbf{Z}_2)$ есть *q-й класс Уитни* $w_q(\xi)$ для ξ. Можно определить *полный класс Уитни* $w(\xi) = \sum_{i=0}^{q} w_i(\xi)$. Он обладает следующими свойствами:

I) *Для всякого непрерывного* $\mathbf{O}(q)$*-расслоения* ξ *над допустимым пространством* X *и для всякого целого числа* $i \geqslant 0$ *определен класс Уитни* $w_i(\xi) \in H^i(X, \mathbf{Z}_2)$; $w_0(\xi)$ *есть единичный элемент,* $w_0(\xi) = 1$.

II) $w(f^*\xi) = f^*w(\xi)$.

III) $w(\xi \oplus \xi') = w(\xi)\, w(\xi')$.

IV) $w(\eta_n) = 1 + h_n$, где η_n — $\mathbf{O}(1)$*-расслоение над n-мерным вещественным проективным пространством* $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$, *определенное аналогично* $\mathbf{U}(1)$*-расслоению* η_n *из* 4.2, *а* h_n — *ненулевой элемент* из $H^1(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}), \mathbf{Z}_2)$.

В случае когда X — гладкое многообразие с касательным расслоением ${}_{\mathbf{R}}\theta$, класс Уитни $w(X) = w({}_{\mathbf{R}}\theta)$ иногда называют *классом Штифеля — Уитни*.

Доказательства существования и единственности классов Уитни вполне аналогичны соответствующим доказательствам из 4.2 для классов Чженя. Имеется также определение w_1, аналогичное определению c_1 в теореме 4.3.1. Точная последовательность

$$1 \to \mathbf{SO}(q) \to \mathbf{O}(q) \xrightarrow{\rho} \mathbf{Z}_2 \to 1$$

определяет гомоморфизм ρ_*: $H^1(X, \mathbf{O}(q)_c) \to H^1(X, \mathbf{Z}_2)$, такой, что $\rho_*(\xi) = w_1(\xi)$. Следовательно, гладкое многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(X) = 0$.

3) Вложение $\mathbf{SO}(q) \subset \mathbf{O}(q)$ определяет класс Уитни и класс Понтрягина для $\mathbf{SO}(q)$-расслоения ξ. В этом случае $w_1(\xi)$ совпадает с $e(\xi)$ по модулю 2. Если ξ есть $\mathbf{SO}(2q)$-расслоение, то (см. 4.5) $\mathbf{SO}(4q)$-расслоение $\rho(\psi(\xi))$ отличается от $\xi \oplus \xi$ на множитель $(-1)^q$, учитывающий изменение ориентации, и, следовательно,

$$p_q(\xi) = (-1)^q c_{2q}(\psi(\xi)) = (-1)^{2q} e(\xi \oplus \xi) = e(\xi)^2.$$

Наконец, если ξ является $\mathbf{U}(q)$-расслоением над X, то $\rho(\xi)$ будет $\mathbf{SO}(2q)$-расслоением. В этом случае $w_{2i}(\rho(\xi))$ совпадает с редукцией по модулю 2 классов $c_i(\xi)$, и $w_{2i+1}(\rho(\xi)) = 0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Доказательства лемм 1.5.2 и 1.7.3, а также приложения мультипликативных последовательностей к когомологическим операциям можно найти у Атьи и Хирцебруха [4].

Все изложение когомологий с коэффициентами в пучках ведется в § 2 в терминах теории Чеха, и точная когомологическая последовательность устанавливается только для паракомпактных пространств (теорема 2.10.1). Для произвольного топологического пространства X первое определение групп когомологий с коэффициентами в пучке, удовлетворяющее аксиоме точности когомологической последовательности, было дано Гротендиком [2]. Эти группы определяются с помощью гомологической алгебры, или, эквивалентно, с помощью вялых резольвент (Годеман [1]). В случае когда X паракомпактно, когомологии Гротендика совпадают с когомологиями Чеха. В общем случае эти теории когомологий связаны спектральной последовательностью (Годеман [1], гл. II, 5.9.1).

Более полное изложение теории расслоенных пространств дано в книгах Стинрода [1] и Хольмана [1]. Очень удобно заменить все условия на базу (паракомпактность, допустимость и т. д.) подходящими условиями на само расслоение. Такое изложение в терминах *нумеруемых* расслоений было дано Дольдом [3]; более того, расслоенные пространства рассматриваются как частный случай более общих (не обязательно локально тривиальных) расслоений. Результаты § 3 обобщены в других направлениях Гротендиком [1], Френкелем [1], Хольманом [2].

Пусть G — топологическая группа, E — главное расслоение, ассоциированное с G-расслоением η над паракомпактным пространством Y, и $[X, Y]$ — множество гомотопических классов (см. 4.1b) непрерывных отображений $X \to Y$.

Рассмотрим свойство

(*) *Отображение* T: $[X, Y] \to H^1(X, G_c)$, *заданное равенством* $T(f) = f^*\eta$, *является естественной эквивалентностью.*

Свойство (*) выполняется для всех паракомпактных пространств X тогда и только тогда, когда E стягиваемо (Дольд [3], 7.5). В этом случае пространство единственно с точностью до гомотопической эквивалентности; оно называется *классифицирующим пространством* $B(G)$ для G. Такие пространства всегда существуют (Милнор [1], Дольд [3], 8.1). Расслоение E называется *универсальным расслоением.* В общем случае классифицирующее пространство бесконечномерно. Например,

$$B(\mathbf{U}(q)) = \lim_{N\to\infty} \mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C}), \quad B(\mathbf{O}(q)) = \lim_{N\to\infty} \mathfrak{G}(q, N; \mathbf{R}).$$

Предположим, что E линейно связно и гомотопические группы $\pi_i(E)$ тривиальны для $1 \leqslant i \leqslant n$. Доказано, что в этом случае условие (*) выполняется для некоторых категорий пространств X. Дольд ([3], 7.6) доказал это для паракомпактных пространств X, являющихся локальными ретрактами клеточных комплексов размерности $\leqslant n$; Картан ([1], сообщение VIII) доказал это для локально компактных паракомпактных X размерности $\leqslant n$; Стинрод ([1], 19.4) — для конечных клеточных комплексов размерности $\leqslant n$. В этих случаях главное расслоение E называется *n-универсальным* Если G — компактная группа Ли, то такие расслоения всегда существуют и имеют в качестве базы конечномерное гладкое многообразие (Стинрод [1], 19.6). Например, расслоение $\mathbf{U}(q+N)/\mathbf{U}(N)$ над $\mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C})$ является $2N$-универсальным (см. 4.2), а расслоение $\mathbf{O}(k+N)/\mathbf{O}(N)$ над $\mathfrak{G}(k, N; \mathbf{R})$ $(N-1)$-универсально.

Основные теоремы о классах Уитни и Чженя имеются у Стинрода [1]. Классы Уитни для многообразия можно определить с помощью операций Стинрода, не пользуясь гладкой структурой, и потому они являются топологическими инвариантами (Том [1]). Классы Понтрягина не являются топологическими инвариантами (Милнор [6]). Однако С. П. Новиков [1] недавно доказал, что рациональные классы Понтрягина являются топологическими инвариантами. Определение рациональных классов Понтрягина для комбинаторных многообразий (необязательно гладких) было дано Томом [3] и Рохлиным и Шварцем [1].

В приложениях к алгебраической геометрии над более общими полями важно иметь изложение, не использующее теории гомотопий, и классифицирующих пространств, что до некоторой степени и было проделано с помощью аксиоматического подхода в п. 4.2.

В изложении Гротендика [4] классы $c_i(\xi)$ также определены через $c_1(\xi)$ с использованием метода расщепления. Каждое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение ξ определяет в обозначениях п. 3.1с расслоение $\psi: \tilde{X} \to X$ со слоем $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$ и точную последовательность

$$0 \to \eta \to \psi^*\xi \to \bar{\xi} \to 0$$

расслоений над $\tilde{X}$. Так как $\eta^* \otimes \bar{\xi}$ является $\mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})$-расслоением, то

$$0 = c_q(\eta^* \otimes \bar{\xi}) = c_q(\eta^* \otimes \psi^*\xi) = y^q + y^{q-1}\psi^*c_1(\xi) + \dots + \psi^*c_q(\xi),$$

где $y = -c_1(\eta)$. Так как ψ^* — мономорфизм, то эта формула (*формула Хирша*) может быть взята в качестве определения классов $c_i(\xi)$ для $i > 1$. Этот же метод приложим к классам Уитни и к другим характеристическим классам, встречающимся в алгебраической геометрии (Гротендик [4]).

Превосходное изложение теории характеристических классов, основанное на сингулярной теории когомологий и включающее в себя изложение комбинаторных классов Понтрягина, дано Милнором [9].

Глава II

КОЛЬЦО КОБОРДИЗМОВ

Все многообразия, рассматриваемые в этой главе, предполагаются компактными, ориентируемыми и гладкими класса C^∞. Сформулированы некоторые результаты из теории кобордизмов Тома [2]. С их помощью доказывается, что индекс многообразия M^{4k} выражается многочленом от классов Понтрягина этого многообразия (теорема 8.2.2). Этот результат используется в п. 19.5 в качестве существенного шага при доказательстве теоремы Римана — Роха.

§ 5. Числа Понтрягина

5.1. Пусть V^n — ориентированное компактное гладкое многообразие. Значение n-мерного класса когомологий X на фундаментальном цикле ориентированного многообразия V^n будет обозначаться через $x[V^n]$. Если A — аддитивная группа и $x \in H^n(V^n, A)$, то $x[V^n] \in A$. Это определение естественным образом распространяется и на случай, когда $x \in H^n(V^n, A) \otimes B$. Тогда $x[V^n] \in A \otimes B$.

При фиксированном x это значение $x[V^n]$ зависит от ориентации. Однако если V^n связно, то оно определено с точностью до знака.

Пусть теперь размерность $n=4k$ многообразия V^n делится на 4, и пусть p_i — классы Понтрягина для V^n, $p_i \in H^{4i}(V^n, \mathbf{Z})$ (см. 4.6). Для каждого произведения $p_{j_1}p_{j_2} \dots p_{j_r}$ веса $k = j_1 + \dots + j_r$ можно образовать целое число $p_{j_1}p_{j_2} \dots p_{j_r}[V^n]$. Всего существует $\pi(k)$ таких чисел, что $\pi(k)$ — число разбиений числа k. Эти числа называются *числами Понтрягина* многообразия V^n. Рассмотрим кольцо $\mathfrak{B}$ из 1.1. Модуль $\mathfrak{B}_k$ имеет в качестве базисных элементов произведения веса k. Если сопоставить этим базисным элементам соответствующие числа Понтрягина многообразия V^{4k}, то этим самым многообразие V^{4k} индуцирует гомоморфизм модуля $\mathfrak{B}_k$ в кольцо коэффициентов B; сопоставленным элементу $a \in \mathfrak{B}_k$ элементом из B будет $a[V^{4k}] \in \mathfrak{B}$. Если размерность n многообразия V^n не делится на 4, то мы полагаем все числа Понтрягина для V^n равными нулю.

5.2. Пусть V^n и W^m — два ориентированных многообразия, и пусть $V^n \times W^m$ — их произведение, ориентированное ориентацией, (необязательно гладких) было дано Томом [3] и Рохлиным и Шварцем [1].

В приложениях к алгебраической геометрии над более общими полями важно иметь изложение, не использующее теории гомотопий, и классифицирующих пространств, что до некоторой степени и было проделано с помощью аксиоматического подхода в п. 4.2.

В изложении Гротендика [4] классы $c_i(\xi)$ также определены через $c_1(\xi)$ с использованием метода расщепления. Каждое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение ξ определяет в обозначениях п. 3.1с расслоение $\psi: \bar{X} \to X$ со слоем $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$ и точную последовательность

$$0 \to \eta \to \psi^*\xi \to \bar{\xi} \to 0$$

расслоений над $\bar{X}$. Так как $\eta^* \otimes \bar{\xi}$ является $\mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})$-расслоением, то

$$0 = c_q(\eta^* \otimes \bar{\xi}) = c_q(\eta^* \otimes \psi^*\xi) = y^q + y^{q-1}\psi^*c_1(\xi) + \ldots + \psi^*c_q(\xi),$$

где $y = -c_1(\eta)$. Так как ψ^* — мономорфизм, то эта формула (*формула Хирша*) может быть взята в качестве определения классов $c_i(\xi)$ для $i > 1$. Этот же метод приложим к классам Уитни и к другим характеристическим классам, встречающимся в алгебраической геометрии (Гротендик [4]).

Превосходное изложение теории характеристических классов, основанное на сингулярной теории когомологий и включающее в себя изложение комбинаторных классов Понтрягина, дано Милнором [9].

Глава II

КОЛЬЦО КОБОРДИЗМОВ

Все многообразия, рассматриваемые в этой главе, предполагаются компактными, ориентируемыми и гладкими класса C^∞. Сформулированы некоторые результаты из теории кобордизмов Тома [2]. С их помощью доказывается, что индекс многообразия M^{4k} выражается многочленом от классов Понтрягина этого многообразия (теорема 8.2.2). Этот результат используется в п. 19.5 в качестве существенного шага при доказательстве теоремы Римана — Роха.

§ 5. Числа Понтрягина

5.1. Пусть V^n — ориентированное компактное гладкое многообразие. Значение n-мерного класса когомологий X на фундаментальном цикле ориентированного многообразия V^n будет обозначаться через $x[V^n]$. Если A — аддитивная группа и $x \in H^n(V^n, A)$, то $x[V^n] \in A$. Это определение естественным образом распространяется и на случай, когда $x \in H^n(V^n, A) \otimes B$. Тогда $x[V^n] \in A \otimes B$.

При фиксированном x это значение $x[V^n]$ зависит от ориентации. Однако если V^n связно, то оно определено с точностью до знака.

Пусть теперь размерность $n=4k$ многообразия V^n делится на 4, и пусть p_i — классы Понтрягина для V^n, $p_i \in H^{4i}(V^n, \mathbf{Z})$ (см. 4.6). Для каждого произведения $p_{j_1}p_{j_2}\ldots p_{j_r}$ веса $k = j_1 + \ldots + j_r$ можно образовать целое число $p_{j_1}p_{j_2}\ldots p_{j_r}[V^n]$. Всего существует $\pi(k)$ таких чисел, что $\pi(k)$ — число разбиений числа k. Эти числа называются *числами Понтрягина* многообразия V^n. Рассмотрим кольцо $\mathfrak{B}$ из 1.1. Модуль $\mathfrak{B}_k$ имеет в качестве базисных элементов произведения веса k. Если сопоставить этим базисным элементам соответствующие числа Понтрягина многообразия V^{4k}, то этим самым многообразие V^{4k} индуцирует гомоморфизм модуля $\mathfrak{B}_k$ в кольцо коэффициентов B; сопоставленным элементу $a \in \mathfrak{B}_k$ элементом из B будет $a[V^{4k}] \in \mathfrak{B}$. Если размерность n многообразия V^n не делится на 4, то мы полагаем все числа Понтрягина для V^n равными нулю.

5.2. Пусть V^n и W^m — два ориентированных многообразия, и пусть $V^n \times W^m$ — их произведение, ориентированное ориентацией, которая задана ориентациями сомножителей в последовательности V^n, W^m. Тогда

$$_{\mathbf{R}}\theta(V^n \times W^m) = f^*_{\mathbf{R}}\theta(V^n) \oplus g^*_{\mathbf{R}}\theta(W^m),$$

где $f\colon V^n \times W^m \to V^n$ и $g\colon V^n \times W^m \to W^m$ — проекции, а $_{\mathbf{R}}\theta(V^n)$ — касательное $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$-расслоение к V^n (см. 4.6).

Мы обозначим через p_i классы Понтрягина для V^n через p'_i — классы для W^m и через p''_i — классы Понтрягина для $V^n \times W^m$. Тогда в целочисленном кольце когомологий произведения (по модулю кручения) имеет место следующее равенство (см. 4.5):

$$1 + p''_1 + p''_2 + \ldots = f^*(1 + p_1 + p_2 + \ldots)\, g^*(1 + p'_1 + p'_2 + \ldots) \quad (1)$$

Вводя переменную z, можно переписать (1) в виде „многочленного уравнения"

$$\sum_{k=0}^{\infty} p''_k z^k = \sum_{i=0}^{\infty} f^*(p_i)\, z^i \sum_{j=0}^{\infty} g^*(p'_j)\, z^j \quad \text{по модулю кручения.} \quad (2)$$

Кроме того, имеет место равенство

$$(f^*(x)\, g^*(y))\, [V^n \times W^m] = x\,[V^n] \cdot y\,[W^m] \quad (3)$$

для всех $x \in H^n(V^n, \mathbf{Z}) \otimes B$ и $y \in H^m(W^m, \mathbf{Z}) \otimes B$.

Пусть теперь V^{4k} и W^{4r} — ориентированные многообразия размерностей, делящихся на 4. Числа Понтрягина для ориентированного произведения $V^{4k} \times W^{4r}$ можно выразить с помощью уравнений (2) и (3) через числа Понтрягина сомножителей.

Результат проще всего описывается на языке мультипликативных последовательностей из § 1.

Лемма 5.2.1. *Пусть $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ — некоторая m-последовательность* (см. 1.2), $K_j \in \mathfrak{B}_j$. *Тогда*

$$K_{k+r}[V^{4k} \times W^{4r}] = K_k[V^{4k}] \cdot K_r[W^{4r}].$$

Доказательство. Из равенства (2) и из 1.2(3), (4), следует (по модулю кручения)

$$\sum_{l=0}^{k+r} K_l(p''_1, \ldots, p''_l)\, z^l =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} f^*(K_i(p_1, \ldots, p_i))\, z^i \cdot \sum_{j=0}^{r} g^*(K_j(p'_1, \ldots, p'_j))\, z^j.$$

Сравнивая коэффициенты при z^{k+r} в левой и правой частях этого равенства, получаем

$$K_{k+r}(p''_1, \ldots, p''_{k+r}) = f^*(K_k(p_1, \ldots, p_k)) \cdot g^*(K_r(p'_1, \ldots, p'_r)).$$

Применение равенства (3) дает теперь требуемое утверждение.

Определение. Пусть задана некоторая m-последовательность $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$. Для произвольного ориентированного многообразия V^{4k} выражение $K(V^n) = K_k[V^{4k}]$ будет называться *K-родом* многообразия V^{4k}. Для многообразий, размерность которых не делится на 4, положим K-род равным 0.

Так как все числа Понтрягина для произведения, в котором существует по крайней мере один множитель, размерность которого не делится на 4, равны 0, то имеет место следующая переформулировка леммы 5.2.1.

Лемма 5.2.2. *K-род мультипликативен*:

$$K(V^n \times W^m) = K(V^n) \cdot K(W^m).$$

Рассмотрим, в частности, специальные m-последовательности $\{L_j\}$ и $\{A_j\}$, которые обсуждались в п. 1.5 и 1.6; L-род и A-род для V^n являются рациональными числами, которые мы обозначим через $L(V^n)$ и $A(V^n)$.

Замечание. Мы покажем далее (теорема 8.2.2), что L-род для V^{4k} равен «индексу» для V^{4k} и поэтому является целым числом. Также можно доказать, что A-род любого многообразия V^{4k} является целым числом. Эти свойства целочисленности L- и A-родов далеко не тривиальны. Полиномы L_k и A_k имеют большие знаменатели (см. 1.5 и 1.6). Свойства целочисленности для L показывают, что для любого многообразия V^{4k} некоторые целочисленные линейные комбинации чисел Понтрягина с взаимно простыми коэффициентами делятся на $\mu(L_k)$ (лемма 1.5.2). Отсюда вытекает, что система $\pi(k)$ целых чисел должна удовлетворять определенным условиям для того, чтобы она могла служить системой чисел Понтрягина для некоторого V^{4k}.

§ 6. Кольцо $\widetilde{\Omega} \otimes \mathbf{Q}$

6.1. Пусть V^n и W^n — ориентированные многообразия одинаковой размерности. Определим их сумму $V^n + W^m$ как непересекающееся объединение V^n и W^n. Сумма естественным образом снова ориентирована: ее связные компоненты имеют ориентацию, определяемую ориентацией V^n или W^n. Для ориентированного многообразия V^n определено ориентированное многообразие $-V^n$; как многообразие оно идентично V^n, но имеет противоположную ориентацию. Для любого разбиения $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ числа k имеем

$$p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}[V^{4k} + W^{4k}] = p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}[V^{4k}] + p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}[W^{4k}]. \quad (1)$$

Так как классы Понтрягина не зависят от ориентации (см. 4.6), то получаем

$$p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}[-V^{4k}] = -p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}[V^{4k}]. \quad (2)$$

Для K-рода некоторой m-последовательности $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ имеем

$$K(V^n+W^n)=K(V^n)+K(W^n), \qquad (1^*)$$

$$K(-V^n)=-K(V^n). \qquad (2^*)$$

6.2. Мы введем теперь для ориентированных n-мерных многообразий следующее отношение эквивалентности: $V^n \approx W^n$ будет означать, что соответствующие числа Понтрягина для V^n и W^n совпадают. Для $n \not\equiv 0 \bmod 4$ все n-мерные многообразия образуют один-единственный класс эквивалентности, так как все их числа Понтрягина по определению равны 0.

Отношение эквивалентности $\approx$ совместимо с введенными в 6.1 операциями $+$, $-$, и множество классов эквивалентности n-мерных многообразий превращается в аддитивную группу $\tilde{\Omega}^n$. Группа $\tilde{\Omega}^n$ при $n \not\equiv 0 (\bmod 4)$ состоит из нулевого элемента. Обозначим прямую сумму всех групп $\tilde{\Omega}^n$ через $\tilde{\Omega}$, так что всякий элемент $a \in \tilde{\Omega}$ однозначно записывается в виде $a=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, где $a_n \in \tilde{\Omega}^n$ и $a_n=0$ для достаточно больших n. Имеем

$$\tilde{\Omega}=\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Omega}^n=\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\Omega}^{4k}. \qquad (3)$$

Декартово произведение совместимо с отношением эквивалентности $\approx$ (см. 9.2). Это позволяет ввести в $\tilde{\Omega}$ произведение, для которого

$$\tilde{\Omega}^n\tilde{\Omega}^m \subset \tilde{\Omega}^{n+m}. \qquad (4)$$

Разложение в прямую сумму (3) определяет на $\tilde{\Omega}$ градуировку, и имеет место

Лемма 6.2.1. *$\tilde{\Omega}$ является коммутативным градуированным кольцом без кручения.*

6.3. Для классов Понтрягина $p_i(V^{4k})$ можно формально написать (в смысле п. 4.4)

$$1+p_1z^1+p_2z^2+\ldots+p_kz^k=\prod_{i=1}^{k}(1+\beta_i z). \qquad (5)$$

Мы определим целое число $s(V^{4k})$ для ориентированного многообразия V^{4k} с классами Понтрягина $p_i(V^{4k})$ при помощи равенства

$$s(V^{4k})=(\beta_1^k+\beta_2^k+\ldots+\beta_k^k)[V^{4k}].$$

Определение. Последовательность $\{V^{4k}\}$, $k=0, 1, \ldots$, ориентированных многообразий называется *базисной последовательностью*, если $s(V^{4k}) \neq 0$ для всех k.

Теорема 6.3.1. *Пусть $\{V^{4k}\}$ — некоторая базисная последовательность ориентированных многообразий. Далее, пусть B — коммутативное кольцо, содержащее поле рациональных чисел. Тогда для любой последовательности a_k элементов из B существует, и только одна, m-последовательность $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ (с коэффициентами из B, см. 1.2), такая, что соответствующий K-род принимает на V^{4k} значения a_k.*

Доказательство: каждой m-последовательности однозначно соответствует степенной ряд

$$Q(z)=1+b_1z+b_2z^2+\ldots$$

с коэффициентами из B.

Нам надо показать, что существует в точности один степенной ряд $Q(z)$, такой, что для любого многообразия V^{4k} из нашей последовательности, классы Понтрягина которого записаны в виде (5), выполняется равенство

$$a_k=K_k[V^{4k}],$$

где K_k — это коэффициент при z^k в $\prod_{i=1}^{k} Q(\beta_i z)$. Это равенство имеет вид

$$a_k=s(V^{4k})\,b_k+\text{многочлен от } b_1, b_2, \ldots, b_{k-1} \text{ веса } k. \qquad (6_k)$$

Многочлен в формуле (6_k) зависит только от V^{4k} и имеет целочисленные коэффициенты. Поэтому коэффициенты b_k определяются однозначно по индукции.

Замечание. Предыдущее доказательство показывает, что верно и обратное: *если для некоторой последовательности $\{V^{4k}\}$ ориентированных многообразий выполняется заключение теоремы 6.3.1, то $\{V^{4k}\}$ образует базисную последовательность.*

Теорема 6.3.2. *Комплексные проективные пространства $\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C})$ комплексной размерности $2k$ образуют базисную последовательность, а именно*

$$s(\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C}))=2k+1.$$

Доказательство. Пусть h — образующий элемент в $H^2(\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. Тогда класс Понтрягина для $\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C})$ равен $(1+h^2)^{2k+1}$ (см. теорему 4.10.2) и m-последовательность, принадлежащая степенному ряду $1+z^k$, определяет «род» (см. 5.2), который на любом V^{4k} принимает значение $s(V^{4k})$, а на $\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C})$ принимает, следовательно, значения $2k+1$.

6.4. Мы определим в этом пункте структуру кольца $\tilde{\Omega}\otimes\mathbf{Q}$. Всякое ориентированное многообразие V^{4k} определяет элемент из $\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$, который мы обозначим через (V^{4k}). По определению тензорного произведения всякий элемент из $\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$ можно записать в виде $\frac{1}{m}(V^{4k})$, где m — целое число. Числа Понтрягина, K-род и число $s(V^{4k})$ можно тогда естественным образом распространить на элементы из $\tilde{\Omega}\otimes\mathbf{Q}$. (Для K-рода нужно предполагать, что кольцо коэффициентов B m-последовательности содержит рациональные числа.) Числа Понтрягина для элемента из $\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$ будут, вообще говоря, рациональными, не целыми числами. Два элемента из $\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$ совпадают тогда и только тогда, когда их числа Понтрягина совпадают.

Теорема 6.4.1. *Пусть $\{V^{4k}\}$ — некоторая базисная последовательность ориентированных многообразий. Для любого разбиения $(j)=(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ числа k обозначим через $V_{(j)}$ ориентированное произведение*

$$V_{(j)}=V^{4j_1}\times V^{4j_2}\times\ldots\times V^{4j_r}.$$

Тогда всякий элемент α из $\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$ однозначно представим в виде

$$\alpha=\sum r_{(j)}(V_{(j)}),\qquad r_{(j)}\in\mathbf{Q},\tag{7}$$

где сумма распространена на все разбиения (j) числа k.

Далее, для любой системы рациональных чисел $a_{(j)}$ существует элемент $\alpha\in\tilde{\Omega}^{4k}\otimes Q$, числа Понтрягина которого совпадают с $a_{(j)}$.

Доказательство. По элементарным теоремам о системах линейных уравнений достаточно доказать, что соотношение

$$\sum_{(j)} r_{(j)}(V_{(j)})=0$$

(суммирование по всем разбиениям числа k) влечет $r_{(j)}=0$. Пусть $\sum_{(j)} r_{(j)}(V_{(j)})=0$. Пусть $q_1, q_2, \ldots$ — последовательность переменных. Для любого целого неотрицательного числа $t\geqslant 0$ рассмотрим ту m-последовательность, которая на V^{4k} принимает значение q_k^t (теорема 6.3.1). Имеем

$$\sum_{(j)} r_{(j)}q_{(j)}^t=0.\tag{8}$$

При этом $q_{(j)}$ обозначает произведение $q_{j_1}q_{j_2}\ldots q_{j_r}$. Так как $q_{(j)}$ попарно различны, то из (8) следует, что все $r_{(j)}$ равны нулю (определитель Вандермонда), что и требовалось доказать.

Мы приведем еще следующее дополнение к теореме 6.4.1.

Теорема 6.4.2. *Для любой последовательности $\{V^{4k}\}$ многообразий имеют место следующие утверждения:*

I) *Из соотношения* (7) *следует, что*

$$s(\alpha)=r_k s(V^{4k}).\tag{7*}$$

II) *Если для всех k любой элемент α из $\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$ представим в виде* (7), *то $\{V^{4j}\}$ — базисная последовательность.*

Доказательство. I) Пусть $\{K_j\}$ — m-последовательность, принадлежащая степенному ряду $1+z^k$. Эта m-последовательность принимает на всех элементах $\alpha\in\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$ значение $s(\alpha)$, а на всех элементах из $\tilde{\Omega}^{4j}\otimes\mathbf{Q}$ с $1\leqslant j<k$ значение 0. Отсюда следует (7*).

II) Если бы $s(V^{4k})=0$ для некоторого k, то $s(\alpha)$ равнялось бы нулю на всех элементах из $\alpha\in\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$, что неверно, так как $s(\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C}))=2k+1$ (см. теорему 6.3.2).

Из теорем 6.3.2 и 6.4.1 вытекает непосредственно

Теорема 6.4.3. *Градуированное кольцо $\tilde{\Omega}\otimes\mathbf{Q}$ изоморфно градуированному кольцу $\mathbf{Q}[z_1, z_2, \ldots]$ многочленов от переменных z_i с рациональными коэффициентами. Изоморфизм сохраняет градуировку, т. е. изоморфизм отображает $\tilde{\Omega}^{4k}\otimes\mathbf{Q}$ на полиномы от z_i веса k. Для произвольной последовательности элементов $\alpha_i\in\tilde{\Omega}^{4i}$ с $s(\alpha_i)\neq 0$, $i=1, 2, \ldots$, отображение $\alpha_i\to z_i$ индуцирует изоморфизм $\tilde{\Omega}\otimes\mathbf{Q}$ на $\mathbf{Q}[z_1, z_2, \ldots]$, и всякий изоморфизм $\tilde{\Omega}\otimes\mathbf{Q}$ на $\mathbf{Q}[z_1, z_2, \ldots]$ может быть так получен.*

Замечание. Из теоремы 6.4.1 следует, в частности, что для любой системы целых чисел $a_{(j)}$, где (j) пробегает все разбиения числа K, существует зависящее только от k целое положительное число N_k, такое, что система целых чисел $N_k\cdot a_{(j)}$ является системой чисел Понтрягина для некоторого ориентированного многообразия V^{4k}. В п. 5.2 мы уже указывали на то, что не всякая система $a_{(j)}$ может служить системой чисел Понтрягина для некоторого V^{4k}. Естественно теперь поставить вопрос: каково наименьшее целое положительное число $\bar{N}_k$, такое, что всякая система $\bar{N}_k a_{(j)}$, где $a_{(j)}$ — целые, является системой чисел Понтрягина для некоторого V^{4k}? Из работы Милнора [3] следует, что число $\bar{N}_k$ равно знаменателю $\mu(L_k)$ многочлена L_k (см. лемму 1.5.2).

6.5. В этом пункте мы рассмотрим кольцевые гомоморфизмы кольца $\tilde{\Omega}\otimes\mathbf{Q}$ в поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Пусть $\{K_j(p_1, \ldots p_j)\}$ — некоторая m-последовательность с рациональными коэффициентами. Для многообразия V^n определен K-род (см. 5.2). Также K-род определен естественным образом и для любого элемента $\alpha\in\tilde{\Omega}^*\otimes\mathbf{Q}$. Отображение

$$\alpha\to K(\alpha)$$

определяет по лемме 5.2.2 и по 6.1(1*), (2*) гомоморфизм $\tilde{\Omega}\otimes\mathbf{Q}$ в $\mathbf{Q}$. Обратно, всякий гомоморфизм h из $\tilde{\Omega}\otimes\mathbf{Q}$ в $\mathbf{Q}$ получается таким образом. Действительно, пусть h — гомоморфизм. Тогда h

принимает на элементах некоторой базисной последовательности $\{V^{4k}\}$ некоторые значения $h(V^{4k})$. Существует, и только одна, m-последовательность $\{K_j\}$ с $K(V^{4k}) = h(V^{4k})$. Так как элементы (V^{4k}) порождают алгебру $\tilde{\Omega} \otimes Q$, то $K(\alpha) = h(\alpha)$ для любого $\alpha \in \tilde{\Omega} \otimes Q$. Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 6.5.1. *Кольцевые гомоморфизмы $\tilde{\Omega} \otimes \mathbf{Q}$ в поле рациональных чисел находятся во взаимно однозначном соответствии с m-последовательностями $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ с рациональными коэффициентами, а поэтому также с формальными степенными рядами с рациональными коэффициентами и со свободным членом* 1.

§ 7. Кольцо кобордизмов Ω

В § 6 мы построили кольцо $\tilde{\Omega}$ из множества классов всех ориентированных многообразий относительно отношения эквивалентности $\approx$ с помощью введенных в 6.1 операций $+$, $-$ и произведения. Однако отношение эквивалентности $\approx$ весьма формально и доказанные в § 6 теоремы носят по существу формально-алгебраический характер. Единственное не формально-алгебраическое утверждение, которое было использовано, — это существование базисной последовательности ориентированных многообразий (теорема 6.3.2). Теперь нам понадобится тот глубокий результат теории кобордизмов Тома, что отношение эквивалентности $\approx$ имеет прямой геометрический смысл.

7.1. Напомним, что определение ориентированного гладкого многообразия (см. 7.5) может быть расширено на многообразия с краем. Если X^{n+1} — компактное гладкое многообразие с краем ∂X^{n+1}, то ∂X^{n+1} будет компактным ориентированным гладким многообразием, ориентация и гладкая структура которого индуцированы ориентацией и гладкой структурой X^{n+1}.

Определение. Компактное ориентированное гладкое многообразие V^n является *краем*, если существует компактное ориентированное гладкое многообразие X^{n+1} с краем ∂X^{n+1}, совпадающим с V^n. Два многообразия V^n и W^n называются *кобордантными*, если $V^n + (-W^n)$ является краем.

Это отношение кобордантности является отношением эквивалентности, совместимым с определенными в 6.1 операциями $+$, $-$ и произведением. Классы эквивалентности n-мерных ориентированных многообразий образуют относительно операций $+$ и $-$ аддитивную группу Ω^n, нулем которой будет класс многообразий, являющихся краем. Прямая сумма

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^n$$

относительно операций $+$, $-$ и произведения будет градуированной антикоммутативной алгеброй. Имеют место соотношения

$$\Omega^n \Omega^m \subset \Omega^{n+m} \quad \text{и} \quad \alpha\beta = (-1)^{nm} \beta\alpha \quad \text{для} \quad \alpha \in \Omega^n,\ \beta \in \Omega^m. \tag{1}$$

Для приложений, которые мы имеем в виду, не обязательно знать точную структуру кольца Ω. Достаточно знать результаты Тома об $\Omega \otimes \mathbf{Q}$, которые мы и опишем в следующем пункте.

7.2. Мы хотим построить изоморфизм $\Omega \otimes \mathbf{Q} \to \tilde{\Omega} \otimes \mathbf{Q}$ между кольцом кобордизмов «по модулю кручения» и кольцом $\tilde{\Omega} \otimes \mathbf{Q}$, определенным в § 6. Первым шагом будет следующая теорема Понтрягина [2].

Теорема 7.2.1. *Числа Понтрягина многообразия V^n, являющегося краем, равны нулю.*

Доказательство. Числа Понтрягина равны нулю по определению, если размерность многообразия не делится на 4. Пусть V^{4k} является ориентированным краем многообразия с краем X^{4k+1}, и пусть j — отображение вложения V^{4k} в X^{4k+1}. Классы Понтрягина касательного расслоения ${}_{\mathbf{R}}\theta(X^{4k+1})$ к X^{4k+1} обозначим через $p_i \in H^{4i}(X^{4k+1}, \mathbf{Z})$. Следует обратить внимание на то, что это расслоение определено также и над точками края V^{4k} и что его ограничение на край является суммой Уитни двух расслоений, а именно касательного расслоения к V^{4k} и нормального расслоения к V^{4k} в X^{4k+1}. Последнее расслоение, очевидно, тривиально. Поэтому по 4.5 III классы Понтрягина для V^{4k} совпадают с $j^* p_i$. Всякое число Понтрягина для V^{4k} совпадает со значением $4k$-мерного коцикла в $H^{4k}(X^{4k+1}, \mathbf{Z})$ на цикле V^{4k}, который гомологичен нулю, и поэтому равно нулю.

Теорема Понтрягина утверждает, что кобордантность влечет отношение эквивалентности $\approx$, определенное в 6.2. Поэтому мы получаем естественный кольцевой эпиморфизм Ω на $\tilde{\Omega}$, который индуцирует кольцевой эпиморфизм

$$\varphi\colon \Omega \otimes \mathbf{Q} \to \tilde{\Omega} \otimes \mathbf{Q}. \tag{2}$$

Центральный результат Тома, на котором основаны все дальнейшие исследования о кольце кобордизмов, содержится в следующей теореме.

Теорема 7.2.2 (Том [2]). *Группы Ω^n конечны при $i \not\equiv 0 \pmod 4$. Группа Ω^{4k} является прямой суммой $\pi(k)$ (число разбиений числа k) групп Z и некоторой конечной группы.*

Мы не сможем здесь привести доказательство этой теоремы. Сделаем только следующие замечания. Доказательство Тома состоит из двух частей.

I) Показывается, что группа Ω^i изоморфна гомотопической группе $\pi_{k+i}(M(\mathbf{SO}(k)))$, $i < k$, где $M(\mathbf{SO}(k))$ — некоторый комплекс.

II) Гомотопическая группа $\pi_{k+i}M(\mathbf{SO}(k))$ вычисляется по модулю конечных групп с помощью C-теории Серра. В части I используются теоремы деформации и изотопии. Пусть $B(\mathbf{SO}(k))$ — классифицирующее пространство для группы $\mathbf{SO}(k)$ (см. библиографические замечания к гл. I). Рассмотрим расслоение $A(\mathbf{SO}(k))$ над $B(\mathbf{SO}(k))$, ассоциированное с универсальным расслоением, слоем которого является единичный шар $D^k = \{(x_1, \ldots, x_k); \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \leqslant 1\}$ в $\mathbf{R}^k$. Пусть $M(\mathbf{SO}(k))$ — комплекс, полученный стягиванием границы в точку. Теперь может быть определен гомоморфизм $\Omega^i \to \pi_{i+k}(M(\mathbf{SO}(k)))$. Пусть V^i — ориентированное гладкое многообразие. Так как $i < k$, то имеется вложение V^i в $(k+i)$-мерную сферу $\mathbf{S}^{i+k}$. С помощью соображений изотопии можно показать, что два таких вложения имеют изоморфные нормальные расслоения, и, следовательно, существует отображение $f\colon N \to A(\mathbf{SO}(k))$ трубчатой окрестности N для V^i в $\mathbf{S}^{i+k}$, которое отображает V^i в нулевое сечение в $A(\mathbf{SO}(k))$ и границу ∂N для N в границу для $A(\mathbf{SO}(k))$. Рассмотрим теперь составное отображение

$$\mathbf{S}^{i+k} \to \frac{\mathbf{S}^{i+k}}{\mathbf{S}^{i+k} - N} = \frac{N}{\partial N} \to \frac{A(\mathbf{SO}(k))}{\partial A(\mathbf{SO}(k))} = M(\mathbf{SO}(k)).$$

Это отображение определяет элемент из $\pi_{i+k}(M(\mathbf{SO}(k)))$, который зависит в действительности только от класса кобордизмов многообразия V^i. С помощью деформаций можно показать, что гомоморфизм $\Omega^i \to \pi_{i+k}(M(\mathbf{SO}(k)))$, $i < k$, является изоморфизмом.

Часть II основана на вычислении групп когомологий для $M(\mathbf{SO}(k))$ и использует свойства комплексов Эйленберга — Маклейна и алгебру Стинрода. Явные результаты для $i \leqslant 7$ таковы:

$$\Omega^0 = \mathbf{Z},\ \Omega^1 = \Omega^2 = \Omega^3 = 0,\ \Omega^4 = \mathbf{Z},\ \Omega^5 = \mathbf{Z}_2,\ \Omega^6 = \Omega^7 = 0.$$

Из теоремы 7.2.2 и формальных результатов § 6 следует теперь непосредственно

Теорема 7.2.3 (Том [2]). *Гомоморфизм* (2)

$$\varphi\colon \Omega \otimes \mathbf{Q} \to \tilde{\Omega} \otimes \mathbf{Q}$$

является изоморфизмом. Таким образом, структура алгебры $\Omega \otimes \mathbf{Q}$ дается теоремой 6.4.3. *Два ориентированных многообразия V^{4k} и W^{4k} имеют одинаковые числа Понтрягина тогда и только тогда, когда некоторое целочисленное кратное многообразия $V^{4k} + (-W^{4k})$ является краем.*

Теорему 6.5.1 также можно теперь переформулировать для кольца кобордизмов $\Omega \otimes \mathbf{Q}$. Это утверждение важно для наших приложений, поэтому мы его сформулируем еще раз:

7.3. *Пусть задана функция ψ, которая сопоставляет каждому ориентированному компактному дифференцируемому многообразию рациональное число, не равна тождественно нулю и обладает свойствами*

I) $\psi(V^n + W^n) = \psi(V^n) + \psi(W^n)$, $\psi(-V^n) = -\psi(V^n)$,

II) $\psi(V^n \times W^n) = \psi(V^n) \cdot \psi(W^n)$,

III) $\psi(V^n) = 0$, *если V^n является краем.*

Тогда $\psi(V^n)$ равно нулю на всех ориентированных многообразиях, размерность которых не делится на 4, *и существует одна и только одна m-последовательность $\{K_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ с рациональными коэффициентами такая, что для всякого ориентированного многообразия V^{4k} имеем*

$$\psi(V^{4k}) = K_k(p_1, \ldots, p_k)[V^{4k}],$$

т. е. ψ совпадает с K-родом для последовательности $\{K_j\}$.

Согласно § 1, m-последовательность $\{K_j\}$ соответствует некоторому степенному ряду $Q(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$. Коэффициенты b_i этого степенного ряда можно найти по индукции с помощью базисной последовательности ориентированных многообразий. В качестве базисной последовательности можно взять последовательность $\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C})$ комплексных проективных пространств размерности $2k$ (теорема 6.3.2).

Замечание. Свойство II) следует из свойств I), III) и следующего частного случая II*) свойства II):

II*) Существует по крайней мере одна базисная последовательность $\{V^{4k}\}$, такая, что для любого произведения многообразий V^{4k} имеем

$$\psi(V^{4j_1} \times V^{4j_2} \times \ldots \times V^{4j_r}) = \psi(V^{4j_1})\,\psi(V^{4j_2}) \ldots \psi(V^{4j_r})$$

§ 8. Индекс $4k$-мерного многообразия

8.1. Пусть $Q(x, y)$ — вещественная симметричная билинейная форма на конечномерном вещественном векторном пространстве. Пусть p^+ — число положительных и p^- — число отрицательных собственных значений для $Q(x, y)$. Разность $p^+ - p^-$ называется *индексом* $Q(x, y)$.

8.2. Как известно, каждому компактному ориентированному $4k$-мерному многообразию M^{4k} можно следующим образом сопоставить вещественную симметрическую билинейную форму: для любых элементов $x, y \in H^{2k}(M^{4k}, \mathbf{R})$ берем их $\cup$-произведение xy и по нему находим вещественное число $xy[M^{4k}]$ (см. 5.1).

Билинейная форма $xy[M^{4k}]$ определена на вещественном векторном пространстве $H^{2k}(M^{4k}, \mathbf{R})$ и является топологическим инвариантом ориентированного многообразия M^{4k}. Индекс этой формы называется *индексом* многообразия M^{4k} и обозначается через $\tau(M^{4k})$. Для многообразия, размерность которого не делится на 4, полагаем $\tau(M)$ равным нулю. Функция τ обладает перечисленными в 7.3 свойствами. Именно, имеет место

Теорема 8.2.1. *Справедливы следующие утверждения*:

I) $\tau(V^n+W^n)=\tau(V^n)+\tau(W^n)$, $\tau(-V^n)=-\tau(V^n)$,

II) $\tau(V^n\times W^m)=\tau(V^n)\cdot\tau(W^m)$,

III) $\tau(V^n)=0$, *если* V^n — *край*.

Доказательство. I) Следует из определений для V^n+W^n и $-V^n$.

II) Известно (см. Том [2]); однако доказательство там не приведено. Поэтому для полноты мы приведем доказательство этого утверждения. Нам достаточно рассмотреть только случай $M^{4k}=V^n\times W^m$. В этом случае

$$H^{2k}(M^{4k},\ \mathbf{R})\cong\sum_{s=0}^{2k}H^s(V^n,\ \mathbf{R})\otimes H^{2k-s}(W^m,\ \mathbf{R}). \tag{1}$$

Элементы $x,\ y\in H^{2k}(M^{4k},\ R)$ называются *ортогональными*, если $xy[M^{4k}]=0$. Выберем базис $\{v_i^s\}$ (соотв. $\{w_j^t\}$ в группе $H^s(V^n,\ \mathbf{R})$ (соотв. $H^t(W^m,\ \mathbf{R})$), такой, что $v_i^sv_j^{n-s}=\delta_{ij}$ для $s\neq\frac{n}{2}$ и $w_i^tw_j^{m-t}=\delta_{ij}$ для $t\neq\frac{m}{2}$.

Рассмотрим группу $A=H^{\frac{n}{2}}(V^n,\ \mathbf{R})\otimes H^{\frac{m}{2}}(W^m,\ \mathbf{R})$, полагая, $A=0$, если n и m нечетны.

Группа A ортогональна группе B, где B получается из суммы (1) выкидыванием всех слагаемых, входящих в A. В группе B возьмем в качестве базиса $\{v_i^s\otimes w_j^{2k-s}\}$ $\left(0\leqslant s\leqslant n,\ s\neq\frac{n}{2}\right)$. Тогда

$$(v_i^s\otimes w_j^{2k-s})(v_{i'}^{s'}\otimes w_{j'}^{2k-s'})[M^{4k}]=\begin{cases}\pm 1, & \text{если } s+s'=n,\ i=i',\ j=j',\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что билинейная форма $xy[M^{4k}]$, ограниченная на B, в приведенном выше базисе при подходящем упорядочивании базисных элементов задается матрицей, у которой вдоль диагонали идут блоки $+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, а все остальные элементы равны нулю. Следовательно, индекс нашей формы, ограниченной на B, равен 0. Так как A и B ортогональны и их сумма равна $H^{2k}(M^{4k},\ \mathbf{R})$, то отсюда следует, что $\tau(M^{4k})=\tau(A)$, где $\tau(A)$ — индекс нашей билинейной формы, ограниченной на A. Теперь очевидно, что $\tau(A)=0$, если n и m не делятся на 4. Если n и m делятся на 4, то $\tau(A)=$

$=\tau(V^n)\tau(W^n)$, и тем самым II) доказано. Более подробное доказательство приведено у Чженя, Хирцебруха и Серра [1].

III) доказано Томом [1]. Доказательство вкратце следующее. Предположим, что V^{4k} является ориентированным краем для X^{4k+1}, и обозначим через j: $V^{4k}\to X^{4k+1}$ соответствующее вложение. Том рассматривает следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H^{2k}(X^{4k+1},\ \mathbf{R}) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d] & H^{2k}(V^{4k},\ R) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & H^{2k+1}(X^{4k+1} \bmod V^{4k},\ \mathbf{R}) \arrow[d] \\
H_{2k+1}(X^{4k+1} \bmod V^{4k},\ \mathbf{R}) \arrow[r] & H_{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R}) \arrow[r, "j_*"] & H_{2k}(X^{4k+1},\ \mathbf{R})
\end{tikzcd}$$

Здесь строки являются отрезками точной когомологической и точной гомологической последовательностей, а вертикальные строки — изоморфизмами, возникающими из двойственности Пуанкаре. Эта диаграмма коммутативна.

Пусть A^{2k} — образ j^* в $H^{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R})$, а K_{2k} — ядро j_* в $H_{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R})$. Тогда A^{2k} двойственно к $H_{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R})/K_{2k}$ относительно двойственности между $H^{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R})$ и $H_{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R})$. С другой стороны, из диаграммы следует, что для $x\in H^{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R})$

$$x\in A^{2k}\Leftrightarrow i(x)\in K_{2k}.$$

Следовательно, если $b_{2k}=\dim H_{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R})$ есть $2k$-мерное число Бетти для V, то

$$\dim A^{2k}=\dim K_{2k}=b_{2k}-\dim K_{2k}$$

и

$$\dim A^{2k}=\frac{1}{2}b_{2k}.$$

Если $x=j^*y\in A^{2k}$ и v — фундаментальный цикл для V^{4k}, то $x^2[V^{4k}]=(j^*y^2)[v]=y^2[j_*v]=0$. Следовательно, конус $\{x\in H^{2k}(V^{4k},\ \mathbf{R})\mid x^2[V^{4k}]=0\}$ содержит линейное подпространство A^{2k} размерности $\frac{1}{2}b_{2k}$. Отсюда следует, что для билинейной формы $xy[V^{4k}]$ имеем $p^+=p^-$ и, следовательно, что $\tau(V^{4k})=0$. Это доказывает III) и заканчивает доказательство теоремы 8.2.1.

Из теоремы 7.2.3 и утверждения п. 7.3 следует теперь, что индекс τ можно выразить с помощью m-последовательности многочленов. Индекс комплексного проективного пространства $\tau(\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C}))$ равен 1 для любого k. Единственной m-последовательностью, которая принимает значение 1 для всех $\mathbf{P}_{2k}(\mathbf{C})$, является последовательность $\{L_j(p_1,\ \ldots,\ p_j)\}$ (лемма 1.5.1 и теорема 4.10.2).

Теорема 8.2.2. *Индекс компактного ориентированного гладкого многообразия M^{4k} может быть представлен линейной комбинацией чисел Понтрягина. Имеет место соотношение*

$$\tau(M^{4k})=L_k(p_1,\ \ldots,\ p_k)[M^{4k}],$$

где $\{L_j\}$ есть m-последовательность многочленов, соответствующая степенному ряду $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{th}\sqrt{z}}$.

Таблица нескольких первых многочленов L_j приведена в п. 1.5.

З а м е ч а н и е. Согласно замечанию в конце п. 7.3, при доказательстве утверждения II теоремы 8.2.1 можно было бы ограничиться доказательством того, что индекс произведения $\mathbf{P}_{2j_1}(\mathbf{C})\times\ldots\times\mathbf{P}_{2j_r}(\mathbf{C})$ равен 1.

§ 9. Виртуальный индекс

9.1. Пусть M^n — компактное ориентированное гладкое многообразие и j: $V^{n-k}\to M^n$ — вложение компактного ориентированного гладкого подмногообразия V^{n-k} в M^n.

Если ${}_{\mathbf{R}}\theta(V^{n-k})$, ${}_{\mathbf{R}}\theta(M^n)$ — касательные расслоения к V^{n-k}, M^n соответственно и ν — нормальное расслоение к V^{n-k} в M^n, то по 4.8

$$j^*_{\mathbf{R}}\theta(M^n)={}_{\mathbf{R}}\theta(V^{n-k})\oplus\nu.$$

Пусть $p(V^{n-k})$, $p(M^n)$ — полные классы Понтрягина для V^{n-k}, M^n. Тогда по 4.5, II), III) имеем

$$j^*p(M^n)=p(V^{n-k})\,p(\nu)\ \text{по модулю кручения.} \tag{1}$$

Заметим, что в коммутативном кольце четномерных когомологий всякий элемент, 0-мерная компонента которого равна 1, обладает обратным (относительно умножения). Так что, например, если известны классы Понтрягина для M и нормального расслоения ν к V^{n-k}, то с помощью формулы (1) можно найти классы Понтрягина для V^{n-k}. Если $k=1$, то нормальное расслоение тривиально и классы Понтрягина для V^{n-k} равны $i^*p_i(M^n)$ (ср. соответствующее рассуждение при доказательстве теоремы 7.2.1).

9.2. Для приложений наиболее важен случай $k=2$. Пусть, как и в 9.1, j: $V^{n-2}\to M^n$ — вложение, и пусть $v\in H^2(M^n,\mathbf{Z})$ — класс когомологий, соответствующий классу гомологий, реализованному подмногообразием V^{n-2}. Полный класс Понтрягина нормального расслоения к V^{n-2} равен $p(\nu)=j^*(1+v^2)$ (теорема 4.8.1), поэтому из формулы (1) получим

$$p(V^{n-2})=j^*\left[(1+v^2)^{-1}\,p(M^n)\right].$$

Пусть $\{L_j(p_1,\ldots,p_j)\}$ есть m-последовательность, соответствующая степенному ряду $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{th}\sqrt{z}}$; по определению m-последовательности (1.2) имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty}L_i(p_1(V^{n-2}),\ldots,p_i(V^{n-2}))=j^*\left[\frac{\operatorname{th}v}{v}\sum_{i=0}^{\infty}L_i(p_1(M^n),\ldots,p_i(M^n))\right]. \tag{2}$$

Теперь мы в состоянии получить формулу для индекса $\tau(V^{n-2})$. Воспользуемся следующим фактом (двойственность Пуанкаре): если $x\in H^{n-2}(M^n,A)\otimes B$, где A и B — аддитивные группы, то

$$j^*(x)[V^{n-2}]=vx[M^n]. \tag{3}$$

Из теоремы 8.2.2 и формул (2) и (3) следует, что

$$\tau(V^{n-2})=\varkappa^n\left[\operatorname{th}v\sum_{i=0}^{\infty}L_i(p_1(M^n),\ldots,p_i(M^n))\right]. \tag{4}$$

В (4) мы в первый раз воспользовались сокращенным обозначением $\varkappa^n$. Начиная с этого места, мы постоянно будем им пользоваться. Оно определяется следующим способом:

Пусть u^n есть n-мерная компонента элемента $u\in\sum_{k=0}^{\infty}H^k(M^n,A)\otimes B$. *Тогда* $\varkappa^n[u]=u^{(n)}[M^n]$.

Формула (4) тривиальна, если $n\not\equiv 2\bmod 4$. Левая часть тогда по определению равна нулю, в то время как выражение в скобках в правой части не содержит члена размерности n и потому $\varkappa^n[u]$ также равно нулю. Приведем явные выражения для (4) в случае $n=2$, 6, 10:

$$n=2,\qquad \tau(V^0)=v\,[M^2];$$

$$n=6,\qquad \tau(V^4)=\frac{1}{3}(-v^3+p_1v)\,[M^6];$$

$$n=10,\qquad \tau(V^8)=\frac{1}{45}(6v^5-5p_1v^3+(7p_2-p_1^2)\,v)\,[M^{10}].$$

9.3. Пусть M^n будет компактным ориентированным гладким многообразием, как и в 9.1. Пусть v_1, v_2, ..., v_r — элементы группы $H^2(M^n,\mathbf{Z})$. Предполагается, что v_1 соответствует циклу, реализованному (компактным ориентированным гладким) подмногообразием V^{n-2}, что ограничение v_2 на V^{n-2} соответствует в V^{n-2} циклу, реализованному в V^{n-2} подмногообразием V^{n-2} и т. д., что ограничение v_r на $V^{n-2(r-1)}$ соответствует в $V^{n-2(r-1)}$ циклу, реализованному подмногообразием V^{n-2r} многообразия $V^{n-2(r-1)}$. Формулу (3) предыдущего пункта можно обобщить на этот случай. Пусть $x\in H^{n-2r}(M^n,A)\otimes B$. Обозначим через j вложение V^{n-2r} в M^n. Тогда имеем

$$j^*(x)(V^{n-2r})=v_1v_2\ldots v_rx\,[M^n]. \tag{3'}$$

Повторным применением формулы (2) получаем с помощью (3′) следующее обобщение формулы (4):

$$\tau(V^{n-2r})=\varkappa^n\left[\operatorname{th}v_1\operatorname{th}v_2\ldots\operatorname{th}v_r\sum_{i=0}^{\infty}L_i(p_1(M^n)\ldots p_i(M^n))\right]. \tag{4'}$$

Согласно Тому [2], всякий двумерный целочисленный класс когомологий компактного ориентированного гладкого многообразия M^n реализуется некоторым подмногообразием V^{n-2} в M. Повторным применением этой теоремы Тома получаем, что для любой последовательности $v_1, v_2, \ldots, v_r$ элементов группы $H^2(M^n, \mathbf{Z})$ существует последовательность подмногообразий со свойствами, указанными в начале этого пункта. Из формулы (4′) видно, что $\tau(V^{n-2r})$ зависит только от (неупорядоченного) множества $(v_1, \ldots, v_r)$. Мы обозначим правую часть уравнения (4′) через $\tau(v_1, \ldots, v_r)$ и назовем $\tau(v_1, \ldots, v_r)$ *виртуальным индексом* для $(v_1, \ldots, v_r)$. По приведенной выше теореме Тома всякий виртуальный индекс является индексом некоторого подмногообразия многообразия M^n и, следовательно, целым числом.

Заметим, что известное функциональное уравнение для функции th имеет вид

$$\operatorname{th}(u+v) = \operatorname{th}(u) + \operatorname{th}(v) - \operatorname{th}(u)\operatorname{th}(v)\operatorname{th}(u+v). \tag{5}$$

Применяя это к (4′), получим следующую теорему.

Теорема 9.3.1. *Виртуальный индекс является функцией, которая каждому (неупорядоченному) набору r элементов $v_1, \ldots, v_r$ 2-мерных целочисленных классов когомологий компактного ориентированного гладкого многообразия M^n сопоставляет целое число $\tau(v_1, v_2, \ldots, v_r)$. Он равен нулю, если $n - 2r \not\equiv 0 \bmod 4$. Он также равен нулю, если $2r > n$ или если одно из v_i равно нулю. Функция τ удовлетворяет следующему функциональному уравнению, соответствующему функциональному уравнению для функции* th:

$$\tau(v_1, \ldots, v_r, u+v) = \tau(v_1, \ldots, \tau_r, u) + \tau(v_1, \ldots, v_r, v) - \\ - \tau(v_1, \ldots, v_r, u, v, u+v). \tag{6}$$

В частности, если $n = 4k+2$, то

$$\tau(u+v) = \tau(u) + \tau(v) - \tau(u, v, u+v). \tag{6′}$$

9.4. Рассмотрим в качестве примера к теореме 9.3.1 произведение ориентированных поверхностей $M^{4k+2} = F_1 \times \ldots \times F_{2k+1}$ произвольных родов. Пусть x_i — те двумерные классы когомологий для $H^2(M^{4k+2}, \mathbf{Z})$, которые соответствуют ориентированным подмногообразиям

$$F_1 \times F_2 \times \ldots \times \hat{F}_i \times \ldots \times F_{2k+1}$$

многообразия M^{4k+2} ($\hat{F}_i$ обозначает, что F_i выкинуто). Мы хотим вычислить $\tau(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{2k+1}x_{2k+1})$, где a_i — целые числа, воспользовавшись формулой (4). Так как все классы Понтрягина

для M^{4k+2} за исключением $p_0 = 1$ равны 0, то

$$\begin{aligned}\tau(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{2k+1}x_{2k+1}) &= \\ &= \varkappa^{4k+2}[\operatorname{th}(a_1x_1 + \ldots + a_{2k+1}x_{2k+1})] = \\ &= \frac{\operatorname{th}^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)}\varkappa^{4k+2}\left[(a_1x_1 + \ldots + a_{2k+1}x_{2k+1})^{2k+1}\right] = \\ &= a_1a_2 \ldots a_{2k+1}\operatorname{th}^{(2k+1)}(0).\end{aligned}$$

Тем самым мы доказали, что индекс компактного ориентированного гладкого многообразия V^{4k}, которое можно вложить в произведение $(2k+1)$-двумерных ориентированных сфер $\mathbf{S}^2$ так, чтобы индекс пересечения с каждым сомножителем равнялся 1, равен значению $(2k+1)$-й производной функции $\operatorname{th}(x)$ в точке 0. По приведенной в 9.3 теореме Тома такое многообразие V^{4k} существует для любого k.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Все результаты о кобордизмах, использованные в этой главе, принадлежат Тому [1], [2]. Правда, у него несколько иные предположения гладкости, однако можно показать, что все его результаты (в частности, теорема 7.2.2) остаются справедливыми, если под дифференцируемостью понимать дифференцируемость класса C^∞. Полное изложение теории кобордизмов с этой точки зрения дано в лекциях Милнора [9].

Том определил также кольцо неориентированных кобордизмов $\mathfrak{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{N}^n$. Здесь $\mathfrak{N}^n$ представляет собой группу компактных неориентированных гладких многообразий размерности n относительно следующего отношения эквивалентности: $V^n \sim_2 W^n$, если $V^n + W^n$ является краем компактного неориентированного многообразия X^{n+1}. По классам Штифеля — Уитни $w_i \in H^i(V^n, \mathbf{Z}_2)$ определяются числа Штифеля — Уитни $w_{j_1}w_{j_2} \ldots w_{j_r}[V^n] \in \mathbf{Z}_2$. Том доказал, что $V^n \sim_2 W^n$ тогда и только тогда, когда V^n и W^n имеют одинаковые числа Штифеля — Уитни, и что $\mathfrak{N}$ является кольцом многочленов $\mathbf{Z}_2[x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, \ldots]$ над $\mathbf{Z}_2$ с одной образующей x_i для каждого $i \neq 2^r - 1$. Кроме того, он показал, что в качестве четномерных образующих x_{2n} можно взять вещественные проективные пространства $\mathbf{P}_{2n}(\mathbf{R})$ (Том [2]). Явное построение других образующих для $\mathfrak{N}$ было дано Дольдом [1] (см. также Милнор [7]).

Теперь полностью известна структура колец Ω и $\widetilde{\Omega}$, определенных в 6.2. Милнор [3] доказал следующий, более точный вариант теоремы 6.4.3: $\widetilde{\Omega}$ изоморфно градуированному кольцу $\mathbf{Z}[z_1, z_2, \ldots]$, причем изоморфизмом служит отображение, сопоставляющее одночлену z_i компактное ориентированное гладкое многообразие V^{4i}, такое, что

$$s(V^{4i}) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } 2i+1 \text{ не является степенью простого числа;} \\ \pm q, & \text{если } 2i+1 \text{ есть степень простого числа } q. \end{cases}$$

Группу Ω^{4k} можно представить в виде прямой суммы

$$\Omega^{4k} = \widetilde{\Omega}^{4k} \oplus T^{4k},$$

где T^j — подгруппа элементов конечного порядка в Ω^j (и $T^j = \Omega^j$, если $j \not\equiv 0 \bmod 4$). Милнор [3] доказал, что T^j не содержит элементов нечетного порядка, и явно построил образующие для $\widetilde{\Omega}^{4k}$. После этого Уолл [1] доказал, что T^i не содержит элементов порядка 4 и нашел полную систему образующих для Ω. Из его результатов следует, что $V^n \sim W^n$ тогда и только тогда, когда V^n и W^n имеют одинаковые числа Понтрягина и Штифеля — Уитни. Относительно дальнейшего развития теории кобордизмов см. Атья [4], Коинер и Флойд [1], Милнор [4], Уолл [2][1]).

Из теоремы об индексе 8.2.2 следуют различные факты о поведении индекса ориентированного гладкого многообразия V. Например, пусть $f\colon W \to V$ — гладкое покрытие степени n. Тогда $p_i(W) = f^* p_i(V)$, и из теоремы об индексе вытекает, что $\tau(W) = n\tau(V)$. Остается ли верным этот результат, если V и W — топологические многообразия (ие гладкие)?

Пусть E, B, F — компактные связные ориентированные многообразия (необязательно гладкие), и пусть $E \to B$ — расслоение со слоем F, для которого фундаментальная группа $\pi_1(B)$ действует тривиально иа кольце когомологий $H^*(F, R)$. Тогда имеется прямое топологическое доказательство того, что $\tau(E) = \tau(B)\tau(F)$ (см. Чжень, Хирцебрух и Серр [1]).

Из теоремы об индексе следует, что L-род ориентированного гладкого многообразия M зависит только от ориентированного гомотопического типа M. Согласно Кану [1], L-род с точностью до рациональных кратных является единственной рациональной линейной комбинацией чисел Понтрягина, которая является инвариантом ориентированного гомотопического типа. Далеко идущие обобщения теоремы об индексе (имеющие отношение к дифференциальным операторам и к действиям конечных групп на многообразиях) были получены Атьёй и Зингером. Они обсуждаются в приложении 1 (§ 25).

---

1) Более поздние результаты по теории кобордизмов см., например, в обзорах Стонга [1] и Брёкера и Тома Дика [1]. — *Прим. перев.*

Глава III

РОД ТОДДА

В этой главе M_n будет компактным гладким (класса C^∞) почти комплексным многообразием. Касательное $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоение к M_n (см. 4.6) будет обозначаться через $\theta(M_n)$. Мы будем исследовать «род», ассоциированный с мультипликативной последовательностью $\{T_j(c_1, \ldots, c_j)\}$, определенной в 1.7, а также «обобщенные роды», ассоциированные с m-последовательностью $\{T_j(y;\ c_1, \ldots, c_j)\}$ из 1.8.

§ 10. Определение рода Тодда

10.1. Пусть X — допустимое пространство (см. 4.2), и пусть ξ — непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X с классами Чженя $c_i \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$. *Полный класс Тодда* для ξ по определению равен

$$\operatorname{td}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j), \tag{1}$$

где $\{T_j(c_1, \ldots, c_j)\}$—$m$-последовательность из 1.7. Если ξ' — непрерывное $\mathbf{GL}(q', \mathbf{C})$-расслоение над X, то по 1.2 классы Тодда удовлетворяют равенству

$$\operatorname{td}(\xi \oplus \xi') = \operatorname{td}(\xi)\operatorname{td}(\xi'). \tag{2}$$

Если $q = 1$ и $c_1(\xi) = d \in H^2(X, \mathbf{Z})$, то

$$\operatorname{td}(\xi) = \frac{d}{1 - e^{-d}}.$$

Заметим, что $\operatorname{td}(\xi)$ начинается с 1 и, следовательно, поскольку X конечномерно, существует обратный элемент $(\operatorname{td}(\xi))^{-1}$. Полный класс Тодда можно определить также и с помощью формальных разложений: если

$$\sum_{j=0}^{q} c_j x^j = \prod_{i=1}^{q} (1 + \gamma_i x),$$

то

$$\operatorname{td}(\xi) = \prod_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}}.$$

и явно построил образующие для $\tilde{\Omega}^{4k}$. После этого Уолл [1] доказал, что T^i не содержит элементов порядка 4 и нашел полную систему образующих для Ω. Из его результатов следует, что $V^n \sim W^n$ тогда и только тогда, когда V^n и W^n имеют одинаковые числа Понтрягина и Штифеля — Уитни. Относительно дальнейшего развития теории кобордизмов см. Атья [4], Коннер и Флойд [1], Милнор [4], Уолл [2][1]).

Из теоремы об индексе 8.2.2 следуют различные факты о поведении индекса ориентированного гладкого многообразия V. Например, пусть f: $W \to V$ — гладкое покрытие степени n. Тогда $p_i(W) = f^* p_i(V)$, и из теоремы об индексе вытекает, что $\tau(W) = n\tau(V)$. Остается ли верным этот результат, если V и W — топологические многообразия (не гладкие)?

Пусть E, B, F — компактные связные ориентированные многообразия (необязательно гладкие), и пусть $E \to B$ — расслоение со слоем F, для которого фундаментальная группа $\pi_1(B)$ действует тривиально на кольце когомологий $H^*(F, R)$. Тогда имеется прямое топологическое доказательство того, что $\tau(E) = \tau(B)\tau(F)$ (см. Чжень, Хирцебрух и Серр [1]).

Из теоремы об индексе следует, что L-род ориентированного гладкого многообразия M зависит только от ориентированного гомотопического типа M. Согласно Кану [1], L-род с точностью до рациональных кратных является единственной рациональной линейной комбинацией чисел Понтрягина, которая является инвариантом ориентированного гомотопического типа. Далеко идущие обобщения теоремы об индексе (имеющие отношение к дифференциальным операторам и к действиям конечных групп на многообразиях) были получены Атьёй и Зингером. Они обсуждаются в приложении 1 (§ 25).

---

1) Более поздние результаты по теории кобордизмов см., например, в обзорах Стонга [1] и Брёкера и Тома Дика [1]. — *Прим. перев.*

Глава III

РОД ТОДДА

В этой главе M_n будет компактным гладким (класса C^∞) почти комплексным многообразием. Касательное $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоение к M_n (см. 4.6) будет обозначаться через $\theta(M_n)$. Мы будем исследовать «род», ассоциированный с мультипликативной последовательностью $\{T_j(c_1, \ldots, c_j)\}$, определенной в 1.7, а также «обобщенные роды», ассоциированные с m-последовательностью $\{T_j(y; c_1, \ldots, c_j)\}$ из 1.8.

§ 10. Определение рода Тодда

10.1. Пусть X — допустимое пространство (см. 4.2), и пусть ξ — непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X с классами Чженя $c_i \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$. *Полный класс Тодда* для ξ по определению равен

$$\operatorname{td}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(c_1, \ldots, c_j), \tag{1}$$

где $\{T_j(c_1, \ldots, c_j)\}$ — m-последовательность из 1.7. Если ξ' — непрерывное $\mathbf{GL}(q', \mathbf{C})$-расслоение над X, то по 1.2 классы Тодда удовлетворяют равенству

$$\operatorname{td}(\xi \oplus \xi') = \operatorname{td}(\xi)\operatorname{td}(\xi'). \tag{2}$$

Если $q = 1$ и $c_1(\xi) = d \in H^2(X, \mathbf{Z})$, то

$$\operatorname{td}(\xi) = \frac{d}{1 - e^{-d}}.$$

Заметим, что $\operatorname{td}(\xi)$ начинается с 1 и, следовательно, поскольку X конечномерно, существует обратный элемент $(\operatorname{td}(\xi))^{-1}$. Полный класс Тодда можно определить также и с помощью формальных разложений: если

$$\sum_{j=0}^{q} c_j x^j = \prod_{i=1}^{q} (1 + \gamma_i x),$$

то

$$\operatorname{td}(\xi) = \prod_{i=1}^{q} \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}}.$$

Аналогично определяется (*полный*) *характер Чженя* для ξ, а именно:

$$\operatorname{ch}(\xi)=\sum_{i=1}^{q} e^{\gamma_i}. \tag{3}$$

По 4.4.3 характер Чженя удовлетворяет равенствам

$$\begin{gathered}\operatorname{ch}(\xi\oplus\xi')=\operatorname{ch}(\xi)+\operatorname{ch}(\xi'),\\ \operatorname{ch}(\xi\otimes\xi')=\operatorname{ch}(\xi)\operatorname{ch}(\xi').\end{gathered} \tag{4}$$

Если $q=1$ и $c_1(\xi)=d\in H^2(X,\mathbf{Z})$, то $\operatorname{ch}(\xi)=e^d$. В общем случае

$$\operatorname{ch}(\xi)=q+\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{ch}_k(\xi),$$

где

$$\operatorname{ch}_k(\xi)=\frac{s_k}{k!}\in H^{2k}(X,\mathbf{Z})\otimes\mathbf{Q}\quad\text{и}\quad s_k=\sum_{k=1}^{q}\gamma_i^k,\ k\geqslant 1.$$

Симметрические функции s_k и c_i связаны между собой формулами Ньютона (ср. 1.4 (10))

$$s_k-c_1s_{k-1}+\ldots+(-1)^k c_k k=0,\ k\geqslant 1.$$

Связь характеров Чженя с классами Тодда дается следующей теоремой.

Теорема 10.1.1. *Пусть ξ — непрерывное* $\mathbf{CL}(q,\mathbf{C})$*-расслоение над допустимым пространством X. Тогда*

$$\sum_{r=0}^{q}(-1)^r\operatorname{ch}\lambda^r\xi^*=(\operatorname{td}(\xi))^{-1}c_q(\xi).$$

Доказательство. Если $\sum\limits_{j=0}^{q}c_j(\xi)x^j=\prod\limits_{i=1}^{q}(1+\gamma_i x)$, то по 4.4.3

$$\operatorname{ch}\lambda^r\xi^*=\sum e^{-(\gamma_{i_1}+\ldots+\gamma_{i_r})},$$

где суммирование ведется по всем комбинациям $i_1,\ldots,i_r$ с $1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant q$. Следовательно,

$$\sum_{r=0}^{q}(-1)^r\operatorname{ch}\lambda^r\xi^*=\prod_{i=1}^{q}(1-e^{-\gamma_i})=$$

$$=(\gamma_1\ldots\gamma_q)\prod_{i=1}^{q}\frac{1-e^{-\gamma_i}}{\gamma_i}=(\operatorname{td}(\xi))^{-1}c_q(\xi).$$

10.2. Пусть M_n — почти комплексное многообразие (4.6). Оно естественным образом ориентировано. Если $u\in H^*(M_n)$ и $u^{(2n)}$ есть $2n$-мерная компонента для u, то мы будем писать $\varkappa_n(u)=u^{(2n)}[M_n]$. Пусть $c_i\in H^{2i}(M_n,\mathbf{Z})$ — классы Чженя для $\theta(M_n)$.

Всякое произведение $c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_r}$ веса $n=j_1+\ldots+j_r$ определяет целое число $c_{j_1}c_{j_2}\ldots c_{j_r}[M_n]$. Всего существует $\pi(n)$ таких чисел, где $\pi(n)$ — число разбиений числа n. Они называются *числами Чженя* для M_n. Например, по теореме 4.10.1 число Чженя $c_n[M_n]$ совпадает с эйлеровой характеристикой для M_n. Рассмотрим кольцо $\mathfrak{B}=B[c_1,c_2,\ldots]$ из 1.1 (см. также 1.3). Как и в 5.1, всякий элемент $b\in\mathfrak{B}_n$ определяет некоторый элемент $b[M_n]\in B$.

Произведение $V_n\times W_m$ двух почти комплексных многообразий естественным образом снова почти комплексно. Пусть f — проекция $V_n\times W_m$ на V_n, а g — проекция на W_m. Касательное $\mathbf{GL}(n+m,\mathbf{C})$-расслоение произведения совпадает с суммой Уитни $f^*(\theta(V_n))\oplus g^*(\theta(W_m))$. Как и в 5.2, верна

Лемма 10.2.1. *Пусть $\{K_j(c_1,\ldots,c_j)\}$ — некоторая m-последовательность* (см. 1.2, 1.3; $K_j\in\mathfrak{B}_j$). *Тогда*

$$K_{n+m}[V_n\times W_m]=K_n[V_n]\cdot K_m[W_m].$$

$K_n[M_n]$ будем называть *K-родом* для M_n.

Рассмотрим m-последовательности

$$\{T_j(c_1,\ldots,c_j)\},\ \{T_j(y;c_1,\ldots,c_j)\},$$

определенные в 1.7, 1.8 и соответствующие степенным рядам

$$Q(x)=\frac{x}{1-\exp(-x)}\quad\text{и}\quad Q(y;x)=\frac{x(y+1)}{1-\exp(-x(y+1))}-xy.$$

Рациональное число $T_n[M_n]$ будет обозначаться через $T[M_n]$ и называться *родом Тодда* (или *T-родом*) для M_n. По 1.8 $T_n(y,c_1,\ldots,c_n)[M_n]$ является многочленом степени n от y с рациональными коэффициентами. Этот многочлен будем обозначать через

$$T_y(M_n)=\sum_{p=0}^{n}T^p(M_n)\,y^p$$

и называть *обобщенным родом Тодда* (или *T_y-родом*) для M_n. По определению $T_0(M_n)=T^0(M_n)=T(M_n)$.

По лемме 10.2.1 имеем

$$T_y(V_n\times W_m)=T_y(V_n)\,T_y(W_m);$$

в частности,

$$T(V_n\times W_m)=T(V_n)\,T(W_m).$$

Рациональные числа $T^p(M_n)$ удовлетворяют следующей *формуле двойственности* (см. 1.8 (13)):

$$T^p(M_n)=(-1)^n\,T^{n-p}(M_n).$$

Далее, выполняются соотношения (см. 1.8 (16), теорему 4.10.1 и теорему 8.2.2)

$$T_{-1}(M_n)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p T^p(M_n)=c_n[M_n], \tag{5}$$

$$T_1(M_n)=\sum_{p=0}^{n}T^p(M_n)=\tau(M_n). \tag{6}$$

Таким образом, $T_{-1}(M_n)$ совпадает с эйлеровой характеристикой для M_n, а $T_1(M_n)$ является индексом для M_n. Заметьте, что по приведенной выше формуле двойственности $T_1(M_n)=0$, если n нечетно.

10.3. Полный класс Чженя комплексного проективного пространства $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ равен $(1+h_n)^{n+1}$ (см. теорему 4.10.2). Из лемм 1.7.1 и 1.8.1 следует

Теорема 10.3.1. *T-род является единственным родом m-последовательности с рациональными коэффициентами, который принимает значение 1 на всех комплексных проективных пространствах; T_y-род является единственным родом m-последовательности с коэффициентами в $\mathbf{Q}[y]$, который на $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ принимает значение $1-y+y^2+\ldots+(-1)^n y^n$.*

§ 11. Виртуальный обобщенный род Тодда

11.1. Пусть V_{n-k} — (компактное) почти комплексное подмногообразие почти комплексного многообразия M_n и $j\colon V_{n-k}\to M_n$ — отображение вложения. Расслоение $j^*\theta(M_n)$ является суммой Уитни расслоения $\theta(V_{n-k})$ и почти комплексного нормального расслоения ν многообразия V_{n-k} в M_n (см. 4.9). Отсюда следует (4.4.3, II), что

$$j^*c(M_n)=c(V_{n-k})\,c(\nu).$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда $k=1$. По теореме 4.8.1 $c(\nu)=1+j^*v$, где v — двумерный класс когомологий, $v\in H^2(M_n,\mathbf{Z})$, соответствующий ориентированному подмногообразию V_{n-1} в ориентированном многообразии M_n. Следовательно,

$$1+c_1(V_{n-1})+c_2(V_{n-1})+\ldots=$$
$$=j^*[(1+c_1(M_n)+c_2(M_n)+\ldots)(1+v)^{-1}]. \tag{1}$$

Теперь можно получить формулу для T_y-рода многообразия V_{n-1}. T_y-род соответствует степенному ряду $Q(y;x)=\frac{x}{R(y;x)}$ [см. 10.2(1)], где

$$R(y;x)=\frac{e^{x(y+1)}-1}{e^{x(y+1)}+y}, \tag{2}$$

$$R(1;x)=\operatorname{th}x,\ R(-1;x)=x(1+x)^{-1},\ R(0;x)=1-e^{-x}.$$

Из (1) вытекает, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}T_i(y;c_1(V_{n-1}),\ldots,c_i(V_{n-1}))=j^*\left(\frac{R(y;v)}{v}\sum_{i=0}^{\infty}T_i(y;c_1(M_n),\ldots)\right). \tag{3}$$

Как и в 9.2, отсюда далее следует, что

$$T_y(V_{n-1})=\varkappa_n\left[R(y;v)\sum_{j=0}^{\infty}T_j(y;c_1(M_n),\ldots,c_j(M_n))\right]. \tag{4}$$

Формула (4) при $y=1$ переходит в формулу 9.2 (4) в силу 1.8 (16). При $y=-1$ получается формула для эйлеровой характеристики $E(V_{n-1})$:

$$(-1)^{n-1}E(V_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i v^{n-i}c_i(M_n)[M_n]. \tag{5}$$

Разумеется, формулу (5) можно вывести и непосредственно из (1). Для $y=0$ получаем

$$T(V_{n-1})=\varkappa_n[(1-e^{-v})\operatorname{td}(\theta(M_n))]. \tag{6}$$

11.2. Переходим теперь к определению виртуального T_y-рода. Для $v_1,\ldots,v_r\in H^2(M_n,\mathbf{Z})$ положим

$$T_y(v_1,\ldots,v_r)_M=\varkappa_n\left[R(y,v_1)\ldots R(y;v_r)\sum_{j=0}^{\infty}T_j(y;c_1(M_n),\ldots,c_j(M_n))\right]. \tag{7}$$

Здесь нижний индекс M указывает, в каком многообразии строится виртуальный род. Мы будем его иногда опускать, если из контекста ясно, какое многообразие имеется в виду.

Из 1.8 следует, что $T_y(v_1,\ldots,v_n)_M$ является многочленом с рациональными коэффициентами относительно y степени $n-r$. Так как $R(y;x)$ делится на x, то $T_y(v_1,\ldots,v_r)_M=0$ для $r>n$. Для $r=n$ имеем $T_y(v_1,\ldots,v_n)_M=v_1v_2\ldots v_n[M_n]$. Мы будем называть $T_y(v_1,\ldots,v_r)_M$ *виртуальным T_y-родом* для $(v_1,\ldots,v_r)$. Виртуальный T_y-род не зависит от порядка $v_1,\ldots,v_r$. Мы будем далее называть *виртуальным почти комплексным подмногообразием* многообразия M_n комплексной размерности n всякий набор r элементов из $H^2(M_n,\mathbf{Z})$. Мы будем писать

$$T_y(v_1,\ldots,v_r)_M=\sum_{p=0}^{n-r}T^p(v_1,\ldots,v_r)_M\,y^p. \tag{8a}$$

Рациональное число

$$T(v_1,\ldots,v_r)_M=T_0(v_1,\ldots,v_r)_M=T^0(v_1,\ldots,v_r)_M \tag{8b}$$

будет называться *виртуальным родом Тодда виртуального подмногообразия* $(v_1,\ldots,v_r)$. Выполняется формула двойственности

$$T^p(v_1,\ldots,v_r)_M=(-1)^{n-r}T^{n-r-p}(v_1,\ldots,v_r)_M. \tag{9}$$

Из формулы 11.1(3) и определения виртуального T_y-рода вытекает

Теорема 11.2.1. *Пусть V_{n-1} — почти комплексное подмногообразие многообразия M_n, j: $V_{n-1} \to M_n$ — вложение и $v \in H^2(M_n, Z)$ — соответствующий V_{n-1} класс когомологий. Далее, пусть $v_2, \ldots, v_r \in H^2(M_n, \mathbf{Z})$. Тогда*

$$T_y(j^*v_2, \ldots, j^*v_r)_V = T_y(v, v_2, \ldots, v_r)_M.$$

В частности,

$$T_y(V_{n-1}) = T_y(v)_M.$$

11.3. Виртуальный T-род удовлетворяет функциональному уравнению, частным случаем которого является функциональное уравнение для индекса 9.3(6). Для $R(x) = \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+y}$, где a и y — параметры, выполняется равенство

$$R(u+v) = R(u) + R(v) + (y-1)R(u)R(v) - yR(u)R(v)R(u+v). \tag{10}$$

Положив $a = 1 + y$, получим функциональное уравнение для $R(y; x)$. При $y = 1$ — это функциональное уравнение для $\operatorname{th} x$ при $y = 0$ — функциональное уравнение для $1 - e^{-x}$ и при $y = -1$ — функциональное уравнение для $x(1+x)^{-1}$. Таким образом, имеет место

Теорема 11.3.1. *Виртуальный T_y-род удовлетворяет функциональному уравнению*

$$T_y(v_1, \ldots, v_r, u+v) = T_y(v_1, \ldots, v_r, u) + T_y(v_1, \ldots, v_r, v) + \\ + (y-1)T_y(v_1, \ldots, v_r, u, v) - yT_y(v_1, \ldots, v_r, u, v, u+v),$$

где $v_1, \ldots, v_r, u, v$ — элементы из $H^2(M_n, \mathbf{Z})$.

В частном случае $r = 0$ имеем

$$T_y(u+v) = T_y(u) + T_y(v) - (y-1)T_y(u, v) - yT_y(u, v, u+v).$$

При $y = 1$ получаем уравнение для виртуального индекса

$$\tau(u+v) = \tau(u) + \tau(v) - \tau(u, v, u+v).$$

При $y = 0$ получаем уравнение для виртуального рода Тодда

$$T(u+v) = T(u) + T(v) - T(u, v).$$

При $y = -1$ получаем уравнение для виртуальной эйлеровой характеристики

$$T_{-1}(u+v) = T_{-1}(u) + T_{-1}(v) - 2T_{-1}(u, v) + T_{-1}(u, v, u+v).$$

§ 12. T-характеристика $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоения

12.1. Пусть ξ — непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над M_n. Так как всякое гладкое или комплексно-аналитическое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение можно рассматривать как непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение, то все определения и теоремы настоящего параграфа применимы и в дифференцируемом и комплексно-аналитическом случаях. Пусть

$$c(M_n) = \sum_{i=0}^{n} c_i, \quad c(\xi) = \sum_{i=0}^{q} d_i, \tag{1}$$

где $c_i, d_i \in H^{2i}(M_n, \mathbf{Z})$ и $c_0 = d_0 = 1$.

Определим рациональное число $T(M_n, \xi)$ с помощью равенства

$$T(M_n, \xi) = \varkappa_n[\operatorname{ch}(\xi)\operatorname{td}(\theta(M_n))]. \tag{2}$$

$T(M_n, \xi)$ называется *T-характеристикой* $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоения ξ над M_n. В частном случае $\mathbf{C}^*$-расслоения ξ с классом Чженя $1 + d$, $d \in H^2(M_n, \mathbf{Z})$ равенство (2) переходит в равенство

$$T(M_n, \xi) = \varkappa_n(e^d \operatorname{td}(\theta(M_n))]. \tag{3}$$

Так как $\mathbf{C}^*$-расслоения над M_n взаимно однозначно соответствуют элементам d из $H^2(M_n, \mathbf{Z})$ (по 3.8), то в формуле (3) вместо $T(M_n, \xi)$ мы будем писать также $T(M_n, d)$. Из определений следует, что

$$T(M, d) = T(M) - T(-d)_M. \tag{4}$$

Если ξ есть $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение, а ξ' есть $\mathbf{GL}(q', \mathbf{C})$-расслоение над M_n, то из первого уравнения 10.1 (4) вытекает, что

$$T(M_n, \xi \oplus \xi') = T(M_n, \xi) + T(M_n, \xi'). \tag{5}$$

Если ξ есть $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над V_n, а η есть $\mathbf{GL}(r, \mathbf{C})$-расслоение над W_m, то по 10.1(2) и 10.1(4)

$$T(V_n \times W_m, f^*(\xi) \otimes g^*(\eta)) = T(V_n, \xi)\, T(W_m, \eta), \tag{6}$$

где f и g — проекции на первый и второй множители, как и в 5.2.

12.2. Чтобы распространить результаты п. 12.1 на случай T_y-характеристики $T_y(M_n, \xi)$, необходимо ввести в рассмотрение расслоение θ^* над M_n, двойственное к касательному расслоению. Пусть $\lambda^p(\theta^*)$ есть p-я внешняя степень (см. 3.6) расслоения θ^*. Рассмотрим формальные разложения

$$\sum_{j=0}^{n} c_j x^j = \prod_{i=1}^{n}(1 + \gamma_i x) \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{q} d_j x^j = \prod_{i=1}^{q}(1 + \delta_i x)$$

(см. 12.1 (1)). Тогда классы Чженя для θ^* будут элементарными симметрическими функциями от $-\gamma_i$, а классы Чженя для

$\lambda^p(\theta^*)$ — элементарными симметрическими функциями от $-(\gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \ldots + \gamma_{i_p})$ (см. 4.4).

Поэтому из 1.8 (15) следует, что

$$T(M_n, \lambda^p(\theta^*)) = T^p(M_n). \tag{7}$$

Рассмотрим, далее, тензорное произведение расслоения $\lambda^p(\theta^*)$ с ξ. Рациональное число $T(M_n, \lambda^p(\theta^*)\otimes\xi)$ обозначим через $T^p(M_n, \xi)$ и положим

$$T_y(M_n, \xi) = \sum_{p=0}^{n} T^p(M_n, \xi)\, y^p. \tag{8}$$

$T_y(M_n, \xi)$ называется *T_y-характеристикой* **GL** $(q, \mathbf{C})$-расслоения ξ над M_n. Из равенств (2) и 10.1 (4) следует, что

$$T^p(M_n, \xi) = \varkappa_n[\mathrm{ch}(\xi)\,\mathrm{ch}(\lambda^p(\theta^*))\,\mathrm{td}(\theta(M_n))]. \tag{9}$$

Тривиальное обобщение вычисления, использованного в 1.8 для доказательства формулы (15), дает

$$T_y(M_n, \xi) = \varkappa_n\left[\left(\sum_{i=1}^{q} e^{(1+y)\,\delta_i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} T_j(y;\, c_1, \ldots, c_j)\right)\right]. \tag{10}$$

Заметим, что $T_{-1}(M_n, \xi)$ при $y=-1$ зависит только от ранга q расслоения ξ и равно q-кратной эйлеровой характеристике M_n. Заменяя в формуле (10) y на $\frac{1}{y}$ и умножая обе части равенства на $(-y)^n$, найдем, что правая часть (10) перейдет в

$$\varkappa_n\left[\left(\sum_{i=1}^{q} e^{-(1+y)\,\delta_i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} T_j(y;\, c_1, \ldots, c_j)\right)\right],$$

и с помощью теоремы 4.4.3, I) получим формулу двойственности

$$y^n T_{\frac{1}{y}}(M_n, \xi) = (-1)^n T_y(M_n, \xi^*).$$

Следовательно,

$$T^p(M_n, \xi) = (-1)^n T^{n-p}(M_n, \xi^*). \tag{11}$$

В частности, при $p=0$

$$T(M_n, \xi) = (-1)^n T(M_n, \lambda^n(\theta^*)\otimes\xi^*). \tag{12}$$

Обратно (11) можно вывести из (12): заменим в (12) ξ на $\xi\otimes\lambda^p(\theta^*)$ и вспомним, что $\lambda^n(\theta)\otimes(\xi\otimes\lambda^p(\theta^*))^* = \xi^*\otimes\lambda^n(\theta^*)\otimes\lambda^p(\theta) = \xi^*\otimes\lambda^{n-p}(\theta^*)$.

Расслоение $\lambda^n(\theta^*)$ является $\mathbf{C}^*$-расслоением и называется *каноническим* $\mathbf{C}^*$*-расслоением* для M_n. По теореме 4.4.3 его класс Чженя равен $1-c_1(M_n)$.

Для расслоения ξ над M_n с формальными корнями $\delta_1, \ldots, \delta_q$ положим

$$\mathrm{ch}_{(y)}(\xi) = e^{(1+y)\,\delta_1} + \ldots + e^{(1+y)\,\delta_q} \in H^*(M_n, \mathbf{Z})\otimes\mathbf{Q}.$$

Тогда, как и в 10.1 (4), $\mathrm{ch}_{(y)}(\xi\oplus\xi') = \mathrm{ch}_{(y)}(\xi) + \mathrm{ch}_{(y)}(\xi')$, $\mathrm{ch}_{(y)}(\xi\otimes\xi') = \mathrm{ch}_{(y)}(\xi)\cdot\mathrm{ch}_{(y)}(\xi')$; из этих соотношений следует, что

$$T_y(M_n, \xi\oplus\xi') = T_y(M_n, \xi) + T_y(M_n, \xi'), \tag{13}$$

$$T_y(V_n\times W_m, f^*(\xi)\otimes g^*(\eta)) = T_y(V_n, \xi)\,T_y(W_m, \eta). \tag{14}$$

В равенствах (13) и (14) мы воспользовались теми же обозначениями, что и в равенствах (5) и (6) из 12.1.

12.3. Пусть ξ есть **GL** $(q, \mathbf{C})$-расслоение над M_n. Для $v_1, \ldots, v_r \in H^2(M_n, \mathbf{Z})$ можно определить виртуальную T_y-характеристику для ξ относительно виртуального подмногообразия $(v_1, \ldots, v_r)$ (ср. 11.2). Обобщением равенства 11.2 (7) является следующее определение:

$$T_y(v_1, \ldots, v_r \mid \xi)_M = \varkappa_n\left[\mathrm{ch}_{(y)}(\xi)\prod_{i=1}^{r} R(y;\, v_i)\sum_{j=0}^{\infty} T_j(y;\, c_1(M_n), \ldots)\right]. \tag{15}$$

Как и в 11.1, мы будем опускать индекс M, если ясно, о каком многообразии идет речь. Если ξ — тривиальное **GL** $(q, \mathbf{C})$-расслоение, то $T_y(v_1, \ldots, v_r \mid \xi) = qT_y(v_1, \ldots, v_r)$. Естественно, при $y=0$ мы будем писать

$$T_0(v_1, \ldots, v_r \mid \xi) = T(v_1, \ldots, v_r \mid \xi)$$

и называть $T(v_1, \ldots, v_r \mid \xi)$ *виртуальной T-характеристикой.*

Обобщением теоремы 11.2.1 является следующая

Теорема 12.3.1. *Пусть V_{n-1} — почти комплексное подмногообразие многообразия M_n, $j\colon V_{n-1}\to M_n$ — вложение и $v\in H^2(M_n, \mathbf{Z})$ — класс когомологий, соответствующий V_{n-1}. Пусть, далее, заданы элементы $v_2, \ldots, v_r \in H^2(M_n, \mathbf{Z})$. Наконец, пусть ξ —* **GL** $(q, \mathbf{C})$*-расслоение над M_n. Тогда*

$$T_y(j^*v_2, \ldots, j^*v_r \mid j^*\xi)_V = T_y(v, v_2, \ldots, v_r \mid \xi)_M.$$

В частности,

$$T_y(V_{n-1}, j^*\xi) = T_y(v \mid \xi)_M.$$

Функциональное уравнение из теоремы 11.3.1 также может быть перенесено на случай виртуальной T-характеристики.

Теорема 12.3.2. *В обозначениях теоремы* 11.3.1 *пусть ξ —* **GL** $(q, \mathbf{C})$*-расслоение над M_n. Тогда*

$$\begin{aligned} T_y(v_1, \ldots, v_r, u+v \mid \xi)_M &= T_y(v_1, \ldots, v_r, u \mid \xi)_M + \\ &+ T_y(v_1, \ldots, v_r, v \mid \xi)_M + (y-1)\,T_y(v_1, \ldots, v_r, u, v \mid \xi)_M - \\ &- yT_y(v_1, \ldots, v_r, u, v, u+v \mid \xi)_M. \end{aligned}$$

Доказательство проводится с помощью функционального уравнения 11.3 (10) и того замечания, что выражение в квадратных скобках в формуле (15), из которого виртуальная T_y-характеристика получается применением $\varkappa_n$, всегда содержит множитель $\mathrm{ch}_{(y)}\xi$.

$T_y(v_1, \ldots, v_r|, \xi)_M$ является многочленом степени $n-r$ по y с рациональными коэффициентами. Он равен тождественно 0, если $r>n$. Если $r=n$, то

$$T_y(v_1, \ldots, v_n|, \xi)_M = q\cdot(v_1, \ldots, v_n[M_n]).$$

Для виртуальных подмногообразий выполняется также и формула двойственности:

$$y^{n-r}T_{\frac{1}{y}}(v_1, \ldots, v_r|, \xi)_M = (-1)^{n-r}\,T_y(v_1, \ldots, v_r|, \xi^*)_M. \qquad (16)$$

Теорема 12.3.3. *Пусть η — $\mathbf{C}^*$-расслоение над M_n с классом Чженя $1+v$, $v\in H^2(M_n, \mathbf{Z})$. Пусть ξ — $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над M_n и $v_1, \ldots, v_r$ — элементы из $H^2(M_n, \mathbf{Z})$. Тогда имеет место формула*

$$T_y(v_1, \ldots, v_r|, \xi)_M = T_y(v_1, \ldots, v_r, v|, \xi)_M +$$
$$+ T_y(v_1, \ldots, v_r|, \xi\otimes\eta^{-1})_M + yT_y(v_1, \ldots, v_r, v|, \xi\otimes\eta^{-1})_M.$$

Доказательство. В формуле для виртуальной T_y-характеристики (15) выражение в квадратных скобках содержит множитель $\sum_{j=0}^{\infty} T_j(y;\, c_1(M_n), \ldots)$. Этот множитель является одним и тем же для всех четырех членов доказываемого равенства. Аналогично все четыре члена содержат общее произведение $\prod_{i=1}^{r} R(y;\, v_i)$, а так как $\mathrm{ch}_{(y)}(\xi\otimes\eta^{-1}) = \mathrm{ch}_{(y)}(\xi)\,\mathrm{ch}_{(y)}(\eta)^{-1}$, то также и множитель $\mathrm{ch}_y(\xi)$. Поэтому достаточно доказать, что

$$1 = R(y;\, x) + \mathrm{ch}_{(y)}(\eta^{-1}) + yR(y;\, v)\,\mathrm{ch}_{(y)}(\eta^{-1}).$$

Но $\mathrm{ch}_{(y)}(\eta^{-1}) = e^{-(1+y)v}$, поэтому предыдущее равенство следует из 11.1 (2).

Рассмотрим теперь частный случай предыдущей теоремы, когда $r=0$. Пусть класс когомологий $v\in H^2(M_n, \mathbf{Z})$ соответствует почти комплексному подмногообразию V_{n-1} многообразия M_n, и пусть j — отображение вложения; далее, пусть η — $\mathbf{C}^*$-расслоение над M_n с классом Чженя $1+v$. Тогда по теореме 12.3.1

$$T_y(M_n, \xi) = T_y(V_{n-1}, j^*\xi) + T_y(M_n, \xi\otimes\eta^{-1}) +$$
$$+ yT_y(V_{n-1}, j^*(\xi\otimes\eta^{-1})). \qquad (17)$$

Сравнивая коэффициенты, получим

$$T^p(M_n, \xi) =$$
$$= T^p(V_{n-1}, j^*\xi) + T^p(M_n, \xi\otimes\eta^{-1}) + T^{p-1}(V_{n-1}, j^*(\xi\otimes\eta^{-1})). \qquad (18)$$

Здесь положено $T^p(M_n, \xi)=0$ при $p<0$ и $p>n$ и $T^p(V_{n-1}, j^*\xi)=0$ при $p<0$ и $p>n-1$. Формула (18) содержит формулу (4) из 12.1 в качестве частного случая.

§ 13. Расщепление многообразия и принцип расщепления

13.1. Рассуждения настоящего параграфа справедливы для непрерывных, гладких и комплексно-аналитических расслоений (ср. 3.1, 3.2). Пусть X — соответственно топологическое пространство, гладкое многообразие или комплексное многообразие. Пусть над X задано $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение ξ. Рассмотрим ассоциированное с ξ главное расслоение L со слоем $\mathbf{GL}(g, \mathbf{C})$ и построим расслоение

$$E = L/\Delta(q, \mathbf{C})$$

с многообразием флагов $\mathbf{F}(q) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C})$ в качестве слоя:

$$E \xrightarrow{\varphi} X, \text{ слой } \mathbf{F}(q). \qquad (1)$$

Главное расслоение, ассоциированное с касательным расслоением к комплексному многообразию $\mathbf{F}(q)$, обозначим через $\mathbf{T}(q)$ (ср. 4.7):

$$\mathbf{T}(q) \to \mathbf{F}(q), \text{ слой } \mathbf{GL}(m, \mathbf{C}). \qquad (2)$$

Здесь $m = q(q-1)/2$ — комплексная размерность многообразия $\mathbf{F}(q)$.

Группа $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ действует левыми сдвигами на $\mathbf{F}(q)$, а поэтому также и на $\mathbf{T}(q)$. Исходя из произведения $L\times T(q)$, известным образом (см. 3.2d) строится ассоциированное к ξ расслоение $\mathfrak{E}(q)$:

$$\mathfrak{E}(q) \to X, \text{ слой } \mathbf{T}(q). \qquad (3)$$

$\mathfrak{E}(q)$ является главным расслоением над E со слоем $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$.

В результате получается следующая коммутативная диаграмма, в которой каждая стрелка является проекцией расслоения на свою базу:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{E}(q) \arrow[rr, "\text{слой } \mathbf{GL}(m,\, \mathbf{C})"] \arrow[dr, "\text{слой } \mathbf{T}(q)"'] & & E \arrow[dl, "\varphi"', "\text{слой } \mathbf{F}(q)"] \\
& X &
\end{tikzcd} \qquad (4)$$

Над каждой точкой из X имеем ситуацию, описываемую диаграммой (2).

$\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-расслоение, ассоциированное с главным расслоением $\mathfrak{E}(q)$ над E будет обозначаться через ξ^{Δ} и называться *расслоением вдоль слоев* $\mathbf{F}(q)$ расслоения E.

Расслоение $\varphi^*\xi$ над E допускает естественным образом в качестве структурной группы $\Delta(q, \mathbf{C})$ (теорема 3.4.4). Оно определяет, таким образом, последовательность q диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_q$ (ср. 4.1с).

Теорема 13.1.1. *В приведенных выше обозначениях* $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-*расслоение* ξ^Δ *над* E *допускает в качестве структурной группы* $\Delta(m, \mathbf{C})$. *Соответствующие* m *диагональных* $\mathbf{C}^*$-*расслоений равны* $\xi_i \otimes \xi_j^{-1}$, $i > j$, *в следующей последовательности:* $\xi_i \otimes \xi_j^{-1}$ *стоит раньше, чем* $\xi_{i'} \otimes \xi_{j'}^{-1}$, *если* $j > j'$ *или* $j = j'$ *и* $i < i'$.

Доказательство. Мы проведем доказательство индукцией по q. Теорема тривиальна при $q = 1$.

a) Построим расслоение $\bar{X} = L/\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})$. Слоем для $\bar{X}$ является комплексное проективное пространство $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$, так как по 4.1а имеем

$$\mathfrak{G}(1, q-1; \mathbf{C}) = \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C}) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C}). \tag{5}$$

Любая матрица A из $\mathbf{GL}(1; q-1; \mathbf{C})$ имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & a_{12}, \ldots, a_{1q} \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right).$$

Сопоставляя матрице A матрицу $A'' \in \mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})$, получаем гомоморфизм h: $\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C}) \to \mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})$, при котором $\Delta(q, \mathbf{C})$ отображается на $\Delta(q-1, \mathbf{C})$. Имеем

$$\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C}) = \mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})/\Delta(q-1, \mathbf{C}) = \mathbf{F}(q-1). \tag{6}$$

b) Очевидно, что E является расслоением над $\bar{X}$ с

$$\mathbf{F}(q-1) = \mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C})$$

в качестве слоя и $\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})$ в качестве структурной группы (ср. 3.2с). Так как ядро гомоморфизма h действует тривиально на $\mathbf{F}(q-1)$, то E можно рассматривать как расслоение со структурной группой $\mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})$ (ср. (6)).

Если X есть точка, то $E = \mathbf{F}(q)$, $\bar{X} = \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$. В частности, получаем, что $\mathbf{F}(q)$ является расслоением над $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{F}(q-1)$ и со структурной группой $\mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})$:

$$\pi\colon\ \mathbf{F}(q) \to \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C}),\ \text{слой}\ \mathbf{F}(q-1). \tag{7}$$

Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\text{слой } \mathbf{F}(q-1)", "\bar{\varphi}"'] \arrow[dr, "\varphi", "\text{слой } \mathbf{F}(q)"'] & & \bar{X} \arrow[dl, "\text{слой } \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})", "\psi"'] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{8}$$

Над каждой точкой пространства X имеем ситуацию, аналогичную ситуации (7).

c) Структурная группа расслоения $\psi^*\xi$ может быть естественным образом редуцирована к $\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})$. Таким образом, над $\bar{X}$ определены $\mathbf{C}^*$-подрасслоение η и $\mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})$-факторрасслоение $\bar{\xi}$. Расслоения E и $\bar{X}$ над X ассоциированы с ξ, а расслоение E над $\bar{X}$ ассоциировано с $\bar{\xi}$. Расслоение $\bar{\varphi}^*\bar{\xi}$ над E допускает $\Delta(q-1, \mathbf{C})$ в качестве структурной группы. Соответствующие диагональные $\mathbf{C}^*$-расслоения равны $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_q$. Далее, $\bar{\varphi}^*\eta = \xi_1$.

d) Рассмотрим теперь главное расслоение $\mathbf{T}$, ассоциированное с касательным расслоением к комплексному многообразию $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$:

$$\mathbf{T} \to \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C}),\ \text{слой}\ \mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C}). \tag{9}$$

Группа $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ действует на $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$, а поэтому также и на $\mathbf{T}$. Можно показать, что $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ действует транзитивно на $\mathbf{T}$, т. е. любую точку из $\mathbf{T}$ можно перевести в любую другую точку. Поэтому $\mathbf{T}$ можно представить как факторпространство группы $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$, а именно как факторпространство по подгруппе H тех элементов, которые фиксируют заданную точку y_0 из $\mathbf{T}$. Если элемент из $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ оставляет неподвижной точку y_0, то, очевидно, он оставляет на месте весь проходящий через y_0 слой в (9). Представим $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$, согласно (5), в виде факторпространства, и выберем в качестве y_0 точку из слоя расслоения (9), лежащую над точкой из $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$, соответствующей классу смежности $\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})$.

Требуемая подгруппа H будет тогда подгруппой группы $\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})$, и легко видеть, что H совпадает с подгруппой матриц следующего вида:

$$\left(\begin{array}{c|c} a & a_{12}, \ldots, a_{1q} \\ \hline 0 & aI \end{array}\right), \quad I \text{ — единичная матрица.}$$

H является нормальной подгруппой группы $\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})$ и совпадает с ядром гомоморфизма, отображающего матрицу A на $a^{-1}A''$ (в обозначениях из **a)**). «Поделив» в формуле (5) числитель и знаменатель на H, получим

$$(\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/H)/(\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})/H) = \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C}).$$

Таким образом, (9) совпадает с

$$\mathbf{T} = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/H \to (\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/H)/(\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})/H). \tag{9*}$$

e) С помощью главного расслоения L над X построим пространство L/H. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} L/H \arrow[rr, "\text{слой } \mathbf{GL}(q-1,\, \mathbf{C})"] \arrow[dr, "\text{слой } \mathbf{T}"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "\text{слой } \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Над каждой точкой из X имеем ситуацию, описываемую диаграммой (9).

L/H является главным расслоением над $\overline{X}$. Из **c**) и **d**) следует, что оно ассоциировано с $\eta^{-1} \otimes \bar{\xi}$. Мы будем называть $\eta^{-1} \otimes \bar{\xi}$ расслоением вдоль слоев $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$ расслоения $\overline{X}$ (ср. (8)).

f) Мы проведем теперь конструкции, описываемые формулами (1)—(4), для $\mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})$-расслоения $\bar{\xi}$ над $\overline{X}$ и все, что касается $\bar{\xi}$, будем обозначать чертой сверху. Таким образом, положим $\overline{m} = (q-1)(q-2)/2$. Имеем $m = q(q-1)/2 = \overline{m} + (q-1)$. Легко показать, что структурную группу $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-расслоения ξ^{Δ} (расслоения вдоль слоев $\mathbf{F}(q)$ расслоения E) можно редуцировать к группе $\mathbf{GL}(\overline{m}, q-1; \mathbf{C})$, причем так, чтобы $\bar{\xi}^{\Delta}$ (расслоение вдоль слоев $\mathbf{F}(q-1)$ расслоения E) было подрасслоением, а $\bar{\varphi}^*(\eta^{-1} \otimes \bar{\xi})$ — факторрасслоением. Здесь $\eta^{-1} \otimes \bar{\xi}$ является расслоением вдоль слоев $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$ расслоения $\overline{X}$.

Мы предполагаем теперь, что наша теорема уже доказана для $q-1$. Так как $\bar{\varphi}\bar{\xi}$ имеет в качестве диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений последовательность $\xi_2, \ldots, \xi_q$, то $\bar{\xi}^{\Delta}$ допускает в качестве структурной группы $\Delta(\overline{m}, \mathbf{C})$ с диагональными $\mathbf{C}^*$-расслоениями $\xi_i \otimes \xi_j^{-1}$ $(i > j \geqslant 2)$ в последовательности, указанной в формулировке теоремы. Но

$$\bar{\varphi}^*(\eta^{-1} \otimes \bar{\xi}) = \xi_1^{-1} \otimes \bar{\varphi}^* \bar{\xi}.$$

Поэтому $\bar{\varphi}^*(\eta^{-1} \otimes \bar{\xi})$ допускает группу $\Delta(q-1, \mathbf{C})$ в качестве структурной группы с диагональными расслоениями

$$\xi_2 \otimes \xi_1^{-1}, \ \ldots, \ \xi_q \otimes \xi_1^{-1}.$$

Тем самым теорема доказана.

13.2. Теорема 13.1.1 справедлива и в комплексно-аналитическом случае. Так как это обстоятельство для нас особенно важно, то мы выделим его в виде отдельной теоремы:

Теорема 13.2.1. *Пусть X — комплексное многообразие, ξ — комплексно-аналитическое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X и L — главное расслоение над X, ассоциированное с ξ. Рассмотрим расслоение $E = L/\Delta(q, \mathbf{C})$, имеющее многообразие флагов $\mathbf{F}(q) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C})$ в качестве слоя:*

$$\varphi\colon E \to X, \ \text{слой } \mathbf{F}(q). \tag{1*}$$

E является комплексным многообразием, и φ — голоморфное отображение E на X. Структурную группу комплексно-аналитического расслоения $\varphi^*\xi$ над E можно естественным образом (комплексно-аналитически) редуцировать к $\Delta(q, \mathbf{C})$. Обозначим q диагональных комплексно-аналитических $\mathbf{C}^*$-расслоений, в их естественном порядке следования, через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$. Тогда расслоение ξ^{Δ} вдоль слоев расслоения (1) является комплексно-аналитическим $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-расслоением $(m = q(q-1)/2)$, структурная группа которого может быть комплексно-аналитически редуцирована к $\Delta(m, \mathbf{C})$; при этом m диагональных комплексно-аналитических $\mathbf{C}^*$-расслоений совпадают с $\xi_i \otimes \xi_j^{-1}$ $(i > j)$ в порядке следования, указанном в теореме* 13.1.1.

Замечание: В предыдущем пункте мы привели прямое доказательство теоремы 13.1.1, предоставив читателю проверку отдельных утверждений. А. Борель заметил, что тот факт, что структурная группа расслоения ξ^{Δ} может быть редуцирована к $\Delta(m, \mathbf{C})$, можно вывести непосредственно из одной теоремы Ли. Эта теорема Ли гласит (см. Шевалле [1]):

Пусть H — разрешимая связная комплексная группа Ли и ρ — голоморфный гомоморфизм H в $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$. Тогда существует элемент $a \in \mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$, такой, что $a\rho(H)a^{-1} \subset \Delta(m, \mathbf{C})$.

Интересующее нас утверждение о ξ^{Δ} получается отсюда следующим образом.

Выделим в $F(q) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C})$ точку, соответствующую классу смежности $\Delta(q, \mathbf{C})$, и обозначим ее через e_0. Группа $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ действует на $F(q)$, и $\Delta(q, \mathbf{C})$ совпадает с подгруппой, оставляющей неподвижной точку e_0 (группа изотропии). Группа $\Delta(q, \mathbf{C})$ действует на контравариантном касательном пространстве $\mathbf{C}_m(e_0)$ точки e_0 и тем самым гомоморфно и голоморфно отображается в $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$, $m = \frac{1}{2} q(q-1)$. Так как группа $\Delta(q, \mathbf{C})$ разрешима, то из теоремы Ли мы получаем, что в $\mathbf{C}_m(e_0)$ можно найти флаг линейных подпространств $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_m = \mathbf{C}_m(e_0)$, которые инвариантны при всех операциях из $\Delta(q, \mathbf{C})$, т. е. инвариантный флаг. Группа $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$ действует транзитивно на $\mathbf{F}(q)$, поэтому этот флаг можно перенести во все точки из $\mathbf{F}(q)$. Эта операция однозначна, так как флаг инвариантен относительно действия группы изотропии. Тем самым показано, что $\mathbf{F}(q)$ обладает комплексно-аналитическим полем флагов, которое переходит в себя под действием операторов из $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$. Отсюда уже легко следует интересующее нас утверждение о ξ^{Δ}.

Обобщения теоремы 13.1.1 и связи с теорией корней для групп Ли обсуждаются в работе Борель и Хирцебрух [1].

13.3. Пусть X — почти комплексное многообразие комплексной размерности n и ξ — гладкое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X. Проведем конструкцию п. 13.1 и получим гладкое многообразие E, которое является расслоением над X с многообразием флагов $\mathbf{F}(q)$ в качестве слоя, проекция которого есть гладкое отображение на X. Ясно, что E допускает почти комплексную структуру, при которой касательное $\mathbf{GL}(n+m)$-расслоение $\theta(E)$ $(m = q(q-1)/2)$ содержит в качестве подрасслоения расслоение ξ^Δ «вдоль слоев», а соответствующее факторрасслоение изоморфно $\varphi^*\theta(X)$. Пусть ξ_i, $i = 1, \ldots, q$ — диагональные $\mathbf{C}^*$-подрасслоения расслоения $\varphi^*\xi$ над E, и пусть $c(\xi_i) = 1 + \gamma_i$, $\gamma_i \in H^2(E, \mathbf{Z})$. Из теоремы 13.1.1 следует, что полный класс Чженя многообразия E равен

$$c(E) = \varphi^* c(X) \prod_{q \geqslant i > j \geqslant 1} (1 + \gamma_i - \gamma_j). \tag{10}$$

Если в качестве ξ выбрано касательное расслоение $\theta(X)$, то почти комплексное многообразие E будет обозначаться через X^Δ. В этом случае $\varphi^*\xi = \varphi^*\theta(X)$ допускает в качестве структурной группы $\Delta(n, \mathbf{C})$ и соответствующие n диагональных $\mathbf{C}^*$-расслоений совпадают с $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Следовательно, $\theta(E)$ допускает $\Delta(n(n+1)/2, \mathbf{C})$ в качестве структурной группы, и соответствующие диагональные расслоения равны $\xi_i \otimes \xi_j^{-1}$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n \geqslant i > j \geqslant 1)$. Из (10) следует, что полный класс Чженя многообразия X^Δ равен

$$c(X^\Delta) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \gamma_i) \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (1 + \gamma_i - \gamma_j). \tag{11}$$

13.4. Рассуждения предыдущего пункта переносятся на комплексно-аналитический случай. Пусть X — комплексное многообразие комплексной размерности n с касательным комплексно-аналитическим расслоением $\theta(X)$, и пусть ξ — комплексно-аналитическое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X. Тогда E будет естественным образом комплексным многообразием комплексной размерности $n+m$, $m = q(q-1)/2$, которое проекцией φ голоморфно отображается на X, и E является комплексно-аналитическим расслоением над X со слоем $\mathbf{F}(q)$. Касательное комплексно-аналитическое $\mathbf{GL}(n+m, \mathbf{C})$-расслоение $\theta(E)$ допускает в качестве структурной группы $\mathbf{GL}(m, n; \mathbf{C})$, так как E обладает комплексно-аналитическим полем m-мерных касательных элементов (поле касательных к слоям расслоения E). Соответствующее комплексно-аналитическое подрасслоение есть $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-расслоение ξ^Δ, а комплексно-аналитическое факторрасслоение есть $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоение $\varphi^*\theta(X)$.

Классы Чженя комплексного многообразия E определены формулой (10) предыдущего пункта. В частности, если $\xi = \theta(X)$ есть касательное расслоение, мы снова положим $E = X^\Delta$. В этом случае как подрасслоение ξ^Δ, так и факторрасслоение $\varphi^*\xi = \varphi^*\theta(X)$ допускают в качестве комплексно-аналитической структурной группы соответствующие треугольные подгруппы. Тем самым доказано, что и структурная группа комплексно-аналитического расслоения $\theta(X^\Delta)$ может быть комплексно-аналитически редуцирована к $\Delta(n(n+1)/2, \mathbf{C})$. Соответствующими диагональными расслоениями являются комплексно-аналитические $\mathbf{C}^*$-расслоения $\xi_i \otimes \xi_j^{-1}$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ $(n \geqslant i > j \geqslant 1)$. Классы Чженя для X^Δ задаются формулой (11) предыдущего пункта, если $c(\xi_i) = 1 + \gamma_i$.

13.5a. Почти комплексное многообразие X комплексной размерности n называется *расщепляющим многообразием*, если его гладкое касательное расслоение $\theta(X)$ допускает $\Delta(n, \mathbf{C})$ в качестве структурной группы. В этом случае определены n диагональных расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H^1(X, \mathbf{C}^*_b)$ и $\theta(X)$ является суммой Уитни расслоений ξ_i. Положим $c(\xi_i) = 1 + a_i$, $a_i \in H^2(X, \mathbf{Z})$. Тогда

$$c(X) = \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i). \tag{12}$$

13.5b. Комплексное многообразие X комплексной размерности n называется *комплексно-аналитическим расщепляющим многообразием*, если комплексно-аналитическое $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоение $\theta(X)$ допускает в качестве структурной группы группу $\Delta(n, \mathbf{C})$, т. е. если $\theta(X)$ лежит в образе отображения

$$H^1(X, \Delta(n, \mathbf{C})_\omega) \to H^1(X, \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})_\omega).$$

Тогда определены n диагональных расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H^1(X, \mathbf{C}^*_\omega)$. Вообще говоря, $\theta(X)$ не является комплексно-аналитической суммой Уитни расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Однако если рассматривать все расслоения как непрерывные (или как гладкие), то $\theta(X)$ совпадает с суммой Уитни $\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_n$. Класс Чженя для X задается формулой (12).

В пп. 13.3 и 13.4 приведена конструкция, сопоставляющая всякому почти комплексному многообразию X (почти комплексное) расщепляющее многообразие X^Δ и всякому комплексному многообразию X комплексно-аналитическое расщепляющее многообразие X^Δ.

В дальнейшем это обстоятельство будет использовано решающим образом. Оказывается, что некоторые теоремы достаточно доказывать только для расщепляющих многообразий.

13.6. Пусть X — компактное почти комплексное расщепляющее многообразие комплексной размерности n. Мы воспользуемся обозначениями п. 13.5a и приведем одну формулу, с помощью которой можно выразить род Тодда $T(X)$ через виртуальные индексы:

$$(1+y)^n T(X) = \sum_{l=0}^{n} y^l \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n} T_y(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l})_X. \qquad (13)$$

Для доказательства воспользуемся определением виртуального T_y-рода из 11.2(7), применим (12) и получим для правой части формулы (13)

$$\varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} (1+yR(y;\, a_i)) \prod_{i=1}^{n} Q(y;\, a_i) \right] = \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} (Q(y;\, a_i) + a_i y) \right] =$$

$$= \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{(1+y)\, a_i}{1-\exp(-(1+y)\, a_i)} \right] = (1+y^n)\, \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-\exp(-a_i)} \right] =$$

$$= (1+y)^n\, T(X).$$

При $y=1$ виртуальный T_y-род переходит в виртуальный индекс

$$2^n T(X) = \sum_{l=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant n} \tau(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l})_X. \qquad (13^*)$$

Так как виртуальные индексы являются целыми числами (теорема 9.3.1), то отсюда следует

Теорема 13.6.1. *Род Тодда компактного почти комплексного расщепляющего многообразия, умноженный на 2^n, является целым числом.*

Формулу (13) можно обобщить на случай виртуального T-рода. Если $b_1, \ldots, b_r \in H^2(X, \mathbf{Z})$, $r \leqslant n$, то

$$(1+y)^{n-r}\, T(b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_r)_X =$$

$$= \varkappa_n \left[\prod_{i=1}^{r} R(y;\, b_i)(1+yR(y;\, b_i))^{-1} \prod_{j=1}^{n} (1+yR(y;\, a_j)) \prod_{k=1}^{n} Q(y;\, a_k) \right]. \quad (14)$$

Из (14) и определения виртуального T_y-рода следует, что $(1+y)^{n-r} T(b_1, \ldots, b_r)_X$ можно представить в виде линейной комбинации виртуальных T_y-родов, причем коэффициенты в этих линейных комбинациях являются многочленами по y с целыми коэффициентами. Полагая в (14) $y=1$, получим представление $2^{n-r} T(b_1, \ldots, b_r)_X$ в виде линейной комбинации виртуальных индексов с целыми коэффициентами. Тем самым доказана

Теорема 13.6.2. *Пусть X — компактное почти комплексное расщепляющее многообразие, и пусть $b_1, \ldots, b_r$ — элементы из $H^2(X, \mathbf{Z})$. Тогда виртуальный род Тодда $T(b_1, \ldots, b_r)_X$, умноженный на 2^{n-r}, есть целое число.*

§ 14. Мультипликативные свойства рода Тодда

14.1. Некоторые алгебраические замечания. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — переменные над полем $\mathbf{K}$ характеристики 0. Рассмотрим поле $\mathbf{K}(c_1, \ldots, c_n)$. Воспользовавшись новой переменной x, напишем разложение

$$1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = (1+\gamma_1 x) \ldots (1+\gamma_n x)$$

и добавим элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ к полю $\mathbf{K}(c_1, \ldots, c_n)$. Получим поле $\mathbf{K}(c_1, \ldots, c_n)(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, которое является алгебраическим расширением степени $n!$ поля $\mathbf{K}(c_1, \ldots, c_n)$. При этом $n!$ элементов $\gamma_1^{a_1}\gamma_2^{a_2} \ldots \gamma_{n-1}^{a_{n-1}}$, $0 \leqslant a_i \leqslant n-i$, образуют аддитивный базис этого расширения. Легко доказать следующую лемму.

Лемма 14.1.1. *Всякий формальный степенной ряд P от $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ с коэффициентами в $\mathbf{K}$ может быть однозначно записан в следующем виде:*

$$P = \sum_{0 \leqslant a_i \leqslant n-i} \rho_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \gamma_1^{a_1}\gamma_2^{a_2} \ldots \gamma_{n-1}^{a_{n-1}}, \qquad (1)$$

где $\rho_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$ — формальные степенные ряды от $c_1, \ldots, c_n$ с коэффициентами из $\mathbf{K}$. Если P имеет целые коэффициенты, то и степенные ряды $\rho_{a_1 \ldots a_{n-1}}$ имеют целые коэффициенты.

Определим *индикатор* $\rho(P)$ равенством

$$\rho(P) = (-1)^{n(n-1)/2} \rho_{n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 1}.$$

Для всякой перестановки s: $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \to (\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \ldots, \gamma_{j_n})$ имеем представление, соответствующее (1),

$$P = \sum_{0 \leqslant a_i \leqslant n-i} \rho^{(s)}_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \gamma_{j_1}^{a_1}\gamma_{j_2}^{a_2} \ldots \gamma_{j_{n-1}}^{a_{n-1}} \qquad (1s)$$

и s-индикатор для P определяется равенством

$$\rho^{(s)}(P) = (-1)^{n(n-1)/2} \rho^{(s)}_{n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 1}.$$

$n!$ элементов $\gamma_{j_1}^{a_1}\gamma_{j_2}^{a_2} \ldots \gamma_{j_{n-1}}^{a_{n-1}}$, $0 \leqslant a_i \leqslant n-i$ также образуют базис нашего расширения, и ясно, что все эти элементы, кроме $\gamma_{j_1}^{n-1}\gamma_{j_2}^{n-2}, \ldots, \gamma_{j_{n-1}}$, имеют индикатор 0. Индикатор элемента $\gamma_{j_1}^{n-1}\gamma_{j_2}^{n-2}, \ldots, \gamma_{j_{n-1}}$ равен ± 1.

Отсюда следует, что

$$\rho^{(s)}(P) = \rho(s(P)) = \pm \rho(P). \qquad (2)$$

При этом $s(P)$ обозначает степенной ряд, получающийся из P подстановкой s.

Лемма 14.1.2. *Если существуют различные i и j, такие, что P остается инвариантным при перестановке γ_i и γ_j, то индикатор $\rho(P)$ равен нулю.*

Доказательство. Лемму, очевидно, достаточно доказать только для многочленов P. Если P остается инвариантным при перестановке γ_i и γ_j, $i \neq j$, то в силу (2) можно, не умаляя общности, предполагать, что $i = n-1$, $j = n$. По теории Галуа многочлен P принадлежит тогда полю, порожденному над $\mathbf{K}(c_1, \ldots c_n)$ элементами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-2}$. Следовательно, его индикатор равен нулю.

Следствие. *Пусть s — перестановка* $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \to (\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \ldots, \gamma_{j_n})$. *Тогда*

$$\rho(\gamma_1^{n-1}\gamma_2^{n-2} \ldots \gamma_{n-1}) = \operatorname{sign}(s)\, \rho(s(\gamma_1^{n-1}\gamma_2^{n-2} \ldots \gamma_{n-1})). \tag{3}$$

Доказательство. Формулу (3) достаточно доказать для случая, когда s является транспозицией (i, j). В этом случае

$$\gamma_1^{n-1}\gamma_2^{n-2} \ldots \gamma_{n-1} + \gamma_{j_1}^{n-1}\gamma_{j_2}^{n-2} \ldots \gamma_{j_{n-1}}$$

инвариантно относительно действия s, и (3) следует из предыдущей леммы. Теперь легко получить формулу для $\rho(P)$. Из (2) и (3) видно, что

$$\rho(P) = \operatorname{sign}(s)\, \rho^{(s)}(P) = \operatorname{sign}(s) \cdot \rho(s(P)). \tag{2*}$$

Отсюда

$$n!\, \rho(P) = \rho\left(\sum_s \operatorname{sign}(s) \cdot s(P)\right), \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем $n!$ перестановкам s. Выражение $\sum_s \operatorname{sign}(s) \cdot s(P)$, очевидно, знакопеременно. Отношение

$$q(P) = \left(\sum_s \operatorname{sign}(s) \cdot s(P)\right) \Big/ \prod_{i>j} (\gamma_i - \gamma_j)$$

поэтому симметрично и является, следовательно, формальным степенным рядом от $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Таким образом,

$$n!\, \rho(P) = \rho\left(\prod_{i>j} (\gamma_i - \gamma_j)\right) q(P). \tag{4*}$$

Полагая $P = \gamma_1^{n-1}\gamma_2^{n-2} \ldots \gamma_{n-1}$, получаем $\rho(P) = (-1)^{n(n-1)/2}$ и

$$\sum_s \operatorname{sign}(s) \cdot s(P) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i>j} (\gamma_i - \gamma_j).$$

Из (4) следует тогда, что $\rho\left(\prod_{i>j} (\gamma_i - \gamma_j)\right) = n!$ и (4*) дает для произвольного степенного ряда P искомую формулу

$$\rho(P) = \left(\sum_s \operatorname{sign}(s) \cdot s(P)\right) \Big/ \prod_{i>j} (\gamma_i - \gamma_j). \tag{5}$$

Лемма 14.1.3. *Пусть* $P = \prod_{i>j} \frac{\gamma_j - \gamma_i}{\exp(\gamma_j - \gamma_i) - 1}$. *Тогда* $\rho(P) = 1$.

Доказательство. Положим $2a = \sum_{i>j} (\gamma_i - \gamma_j)$. Тогда по 1.7

$$P = e^a \prod_{i>j} \frac{\gamma_i - \gamma_j}{2 \operatorname{sh}((\gamma_i - \gamma_j)/2)}$$

и по (5)

$$\rho(P) = \left(\sum_s \operatorname{sign}(s)\, e^{s(a)}\right) \Big/ \prod_{i>j} 2 \operatorname{sh}((\gamma_i - \gamma_j)/2).$$

Положим $x_i = \exp(-\gamma_i/2)$. Тогда

$$e^a (x_1 \ldots x_n)^{n-1} = (x_1^2)^{n-1} (x_2^2)^{n-2} \ldots x_{n-1}^2,$$

$$2x_i x_j \operatorname{sh}((\gamma_i - \gamma_j)/2) = x_j^2 - x_i^2.$$

Откуда и следует наше утверждение (определители Вандермонда).

14.2. Теперь вернемся к многообразию флагов $\mathbf{F}(n) = \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})/\Delta(n, \mathbf{C})$. Применяя теорему 13.2.1 к тому случаю, когда X является точкой, мы видим, что $\mathbf{F}(n)$ есть комплексно-аналитическое расщепляющее многообразие. Полный класс Чженя для $\mathbf{F}(n)$ равен

$$c(\mathbf{F}(n)) = \prod_{i>j} (1 + \gamma_i - \gamma_j), \tag{6}$$

где γ_i — элементы из $H^2(\mathbf{F}(n), \mathbf{Z})$, $c(\xi_i) = 1 + \gamma_i$ (см. 13.2) и

$$\sum_{i=1}^{n} (1 + \gamma_i) = 1. \tag{7}$$

По А. Борелю [2] кольцо когомологий $H^*(\mathbf{F}(n), \mathbf{Z})$ порождено элементами γ_i с (7) в качестве единственного соотношения, т. е.

$$H^*(\mathbf{F}(n), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n]/I^+(c_1, \ldots, c_n),$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ рассматриваются как переменные, а I^+ обозначает идеал, порожденный элементарными симметрическими функциями $c_1, \ldots, c_n$ от γ_i. Применяя результаты из 14.1, легко видеть, что $n!$ элементов $\gamma_1^{a_1}\gamma_2^{a_2} \ldots \gamma_{n-1}^{a_{n-1}}$, $0 \leqslant a_i \leqslant n - i$, образуют аддитивный базис кольца когомологий $H^*(\mathbf{F}(n), \mathbf{Z})$.

Произвольный многочлен P от γ_i с целыми коэффициентами определяет некоторый элемент из кольца когомологий. Чтобы найти представление этого элемента в указанном выше базисе, нужно воспользоваться представлением (1) предыдущего пункта: по модулю идеала I^+ коэффициенты ρ в (1) совпадают со своими постоянными членами.

Эйлерова характеристика для $\mathbf{F}(n)$ равна $n!$, так как $H^*(\mathbf{F}(n), \mathbf{Z})$ содержит только элементы четных степеней. Поэтому, согласно формуле (6) и теореме 4.10.1,

$$n! = \prod_{i>j} (\gamma_i - \gamma_j)[\mathbf{F}(n)]. \tag{8}$$

В 14.1 было показано, что $\rho\left(\prod_{i>j}(\gamma_i - \gamma_j)\right) = n!$. Отсюда следует, что $(-1)^{n(n-1)/2}\gamma_1^{n-1}\gamma_2^{n-2}\ldots\gamma_{n-1}$ является образующим элементом для $H^m(\mathbf{F}(n), \mathbf{Z})$, соответствующим естественной ориентации. Наконец, из леммы 14.1.3 и из (6) следует, что род Тодда для $\mathbf{F}(n)$ равен 1.

14.3. Вернемся снова к ситуации, описанной в 13.3.

Теорема 14.3.1. *Пусть ξ — гладкое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над компактным n-мерным почти комплексным многообразием X. Пусть L — главное расслоение, ассоциированное с ξ. Расслоение $E = L/\Delta(q, \mathbf{C})$ имеет в качестве слоя многообразие флагов $\mathbf{F}(q)$ и естественным образом может рассматриваться как почти комплексное многообразие размерности $n + \frac{1}{2}q(q-1)$. Проекцию E на X обозначим через φ. Пусть, далее, задано $\mathbf{GL}(l, \mathbf{C})$-расслоение ζ над X. Тогда для T-характеристики для ζ имеем*

$$T(E, \varphi^*\zeta) = T(X, \zeta)\,T(\mathbf{F}(q)) = T(X, \zeta). \tag{9}$$

Пусть заданы элементы $b_1, \ldots, b_r \in H^2(X, \mathbf{Z})$. Тогда для виртуальной T-характеристики имеем следующее обобщение формулы (9):

$$T(\varphi^*b_1, \ldots, \varphi^*b_r \mid, \varphi^*\zeta)_E = T(b_1, \ldots, b_r \mid, \zeta)_X. \tag{10}$$

Доказательство. Так как (9) есть частный случай, то достаточно доказать формулу (10). Пусть $c(\varphi^*\xi) = 1 + \varphi^*c_1 + \ldots$ $\ldots + \varphi^*c_q = \prod_{i=1}^{q}(1+\gamma_i)$, и пусть $m = q(q-1)/2$. Из определения 12.3 (15) и формулы 13.3 (10) следует, что

$$T(\varphi^*b_1, \ldots, \varphi^*b_r \mid, \varphi^*\zeta)_E =$$
$$= \varkappa_{n+m}\left[\varphi^*\left(\operatorname{ch}\zeta \cdot \prod_{i=1}^{r}(1 - e^{-b_i}) \cdot \operatorname{td}(X)\right) \prod_{i>j} \frac{\gamma_j - \gamma_i}{\exp(\gamma_j - \gamma_i) - 1}\right].$$

Первый множитель $\varphi^*(\;)$ выражения в [ ] обозначим временно через φ^*A, а второе произведение $\prod_{i>j}$ — через P. Применим теперь алгебраические замечания п. 14.1, причем n из 14.1 заменим на q. Переменные $c_1, \ldots, c_q$ из 14.1 заменим на $\varphi^*c_1, \ldots, \varphi^*c_q$. Тогда P

имеет вид 14.1 (1). Коэффициенты $\rho_{a_1a_2\ldots a_{q-1}}$ являются многочленами от $\varphi^*c_1, \ldots, \varphi^*c_q$. Теперь мы должны от $\varphi^*(A)\cdot P$ взять член комплексной размерности $n+m$. Так как все произведения, которые содержат множители вида φ^*x, $x \in H^*(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$ исчезают, как только их комплексная размерность больше чем n, то

$$\varkappa_{n+m}[\varphi^*(A)\cdot P]_E = \varkappa_{n+m}[(-1)^m \varphi^*(A)\cdot\rho(P)\,\gamma_1^{q-1}\gamma_2^{q-2}\ldots\gamma_{q-1}].$$

Далее, по лемме 14.1.3, $\rho(P) = 1$. Так как $(-1)^m\gamma_1^{q-1}\gamma_2^{q-2}\ldots\gamma_{q-1}$ при ограничении на слой $\mathbf{F}(q)$ дает естественную образующую группы $H^m(\mathbf{F}(q), \mathbf{Z})$ (ср. 14.2), то последнее выражение $\varkappa_{n+m}[\varphi^*(A)\cdot P]_E$ равно $\varkappa_n[A]_X$. Тем самым формула (10) доказана.

Формулы (19) и (10), кроме всего прочего, показывают, что род Тодда многообразия X совпадает с родом Тодда для E и что виртуальный род Тодда для $(b_1, \ldots, b_r)$, сосчитанный в X, совпадает с родом Тодда для $(\varphi^*b_1, \ldots, \varphi^*b_r)$, сосчитанным в E. Для произвольного почти комплексного многообразия X мы можем в качестве E взять расщепляющее многообразие X^Δ (ср. 13.3). Таким образом, из теорем 13.6.1 и 13.6.2 следует

Теорема 14.3.2. *Род Тодда произвольного компактного почти комплексного многообразия X, умноженный на 2^n, является целым числом. Более общим образом, виртуальный род Тодда для $(b_1, \ldots, b_r)$, $b_i \in H^2(X, \mathbf{Z})$, умноженный на 2^{n-r}, является целым числом.*

14.4. Формула (10) теоремы 14.3.1 может быть обобщена так:

$$T_y(\varphi^*b_1, \ldots, \varphi^*b_r \mid, \varphi^*\zeta)_E = T_y(b_1, \ldots, b_r \mid, \zeta)\cdot T_y(\mathbf{F}(q)). \tag{10*}$$

Для доказательства формулы (10*) достаточно следующим образом обобщить лемму 14.1.3.

Пусть y — переменная над полем рациональных чисел и в качестве поля $\mathbf{K}$ п. 14.1 взято кольцо многочленов от y над рациональными числами[1]). Положим

$$P = \prod_{i>j} Q(y;\, \gamma_i - \gamma_j),$$

где $Q(y;\, x) = \dfrac{x(y+1)}{1 - \exp(-x(y+1))} - xy$. Тогда

$$\rho(P) = \frac{1-(-1)^n y^n}{1+y}\cdot\frac{1-(-1)^{n-1}y^{n-1}}{1+y}\ldots\frac{1-y^2}{1+y}. \tag{11}$$

Следовательно, $T_y(\mathbf{F}(n))$ есть многочлен от y, задаваемый формулой (11), т. е.

$$T_y(\mathbf{F}(n)) = T_y(\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C}))\cdot T_y(\mathbf{P}_{n-2}(\mathbf{C}))\ldots T_y(\mathbf{P}_1(\mathbf{C})).$$

[1]) Которое, конечно, не будет полем, и потому нужно проверить, что результаты п. 14.1 сохраняют силу в случае $K = \mathbf{Q}[y]$. Это легко проверяется. — *Прим. перев.*

Вообще заметим, что для K-рода мультипликативной последовательности $\{K_j(c_1, \ldots, c_j)\}$ с характеристическим рядом $B(x) = K(1+x)$ равенство

$$K(E) = K(X) \cdot K(\mathbf{F}(q))$$

можно доказать методом, использованным при доказательстве теоремы 14.3.1, всякий раз когда $\rho\Big(\prod_{q \geqslant i > j \geqslant 1} B(\gamma_i - \gamma_j)\Big)$ является элементом основного поля и не зависит от $c_1, \ldots, c_q$. Ясно тогда, что этот элемент равен $K(\mathbf{F}(q))$. (Мы используем здесь обозначения из 14.1, n заменено на q.)

T_y-род, как род в смысле 10.2, обладает тем свойством, что род произведения равен произведению родов сомножителей (лемма 10.2.1). Как мы только что видели, для случая расслоения E над X с многообразием флагов $\mathbf{F}(q)$ в качестве слоя T_y-род ведет себя мультипликативно:

$$T_y(E) = T_y(X)\, T_y(F(q)).$$

Естественно возникает вопрос: для каких расслоений E над X с данным слоем F имеет место равенство $T_y(E) = T_y(X) T_y(F)$? При этом подразумевается, что E, X, F — компактные почти комплексные многообразия и что структура расслоения совместима с почти комплексными структурами. Мы приведем один частный случай, в котором T_y-род ведет себя мультипликативно.

Пусть ξ — гладкое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над компактным почти комплексным многообразием X и L — ассоциированное с ξ главное расслоение; $E' = L/\mathbf{GL}(1, q-1; \mathbf{C})$ является ассоциированным с ξ расслоением над X с комплексным проективным пространством $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$ в качестве слоя и E' можно естественным образом снабдить почти комплексной структурой. Тогда

$$T_y(E') = T_y(X)\, T_y(\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})).$$

Доказательство. $E = L/\Delta(q, \mathbf{C})$ является расслоением над E' со слоем $\mathbf{F}(q-1)$ (см. 13.1(8)). Так как T_y ведет себя мультипликативно, когда слоем является многообразие флагов, то

$$T_y(E) = T_y(X)\, T_y(\mathbf{F}(q)) \quad \text{и} \quad T_y(E) = T_y(E')\, T_y(\mathbf{F}(q-1)).$$

Далее, $T_y(\mathbf{F}(q)) = T_y(\mathbf{F}(q-1))\, T_y(\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C}))$. Отсюда следует, что

$$T_y(E') = T_y(X)\, T_y(\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})), \tag{12}$$

поскольку $T_y(\mathbf{F}(q-1))$ начинается с 1.

По поводу дальнейших результатов о мультипликативных свойствах T_y-рода см. работу Борель и Хирцебрух [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Аналог кольца кобордизмов для почти комплексных многообразий предложен Милнором [3]. Его можно определить с помощью понятия слабой комплексной структуры (Борель и Хирцебрух [1], часть III). *Слабая комплексная структура* на вещественном векторном расслоении ξ состоит в задании тривиального векторного расслоения α и комплексной структуры на $\xi \oplus \alpha$, т. е. комплексного векторного расслоения η и изоморфизма $\rho(\eta) = \xi \oplus \alpha$ (см. 4.5). Компактное гладкое многообразие X называется *слабо почти комплексным*, если его касательное расслоение ${}_{\mathbf{R}}\theta$ снабжено слабой почти комплексной структурой. В этом случае $\rho(\eta) = {}_{\mathbf{R}}\theta \oplus \alpha$, и $c(\eta)$ называется *полным классом Чженя* слабо почти комплексного многообразия X. Слабая комплексная структура индуцирует ориентацию в X и определяет целые числа $c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_r}[X]$, $2(i_1 + i_2 + \ldots + i_r) = \dim X$, которые называются *числами Чженя* для X.

Определение слабой почти комплексной структуры можно распространить на многообразия с краем и с его помощью определить отношение эквивалентности $V \sim W$ между слабо почти комплексными многообразиями. Классы эквивалентности образуют кольцо комплексных кобордизмов Γ. Изложение этого круга вопросов, непосредственно обобщающееся также и на другие структуры на многообразиях, дано Милнором [4]. Из результатов С. П. Новикова [2] и Милнора [3] следует, что $V \sim W$ тогда и только тогда, когда V и W имеют одинаковые числа Чженя. В частности, род Тодда $T(V)$ является инвариантом класса комплексных кобордизмов для V.

Милнор [3] доказал, что Γ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}[y_1, y_2, \ldots]$, причем изоморфизм $\mathbf{Z}[y_1, y_2, \ldots] \to \Gamma$ получается, если одночлену y_n сопоставить компактное почти комплексное многообразие Y_n с такими свойствами: Y_n имеет касательное $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоение θ и, в обозначениях из 10.1,

$$s(Y_n) = s_n(\theta)[Y] = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } n+1 \text{ не является степенью} \\ & \text{никакого простого числа,} \\ \pm q, & \text{если } n+1 \text{ является степенью} \\ & \text{простого числа } q. \end{cases}$$

На самом деле в качестве многообразий Y_n всегда можно брать многообразия, получающиеся операциями перехода к обратному, взятия сумм и произведений из многообразий следующего типа (см. Хирцебрух [6]): комплексные проективные пространства $\mathbf{P}_r(\mathbf{C})$, для которых $s(\mathbf{P}_r(\mathbf{C})) = r+1$, и гиперповерхности $\mathbf{H}_{(r,t)}$ степени $(1,1)$ в $\mathbf{P}_r(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_t(\mathbf{C})$, $r > 1$, $t > 1$, для которых $s(\mathbf{H}_{(r,t)}) = -\binom{r+t}{r}$. Таким образом, в качестве образующих Y_n для Γ можно взять линейные комбинации алгебраических многообразий. Многообразия Y_{2k} порождают часть без кручения $\widetilde{\Omega}$ в Ω (см. библиографические замечания к гл. II). Из теоремы 20.2.2 следует, что род Тодда всякого алгебраического многообразия является целым числом; следовательно, то же верно и для линейной комбинации алгебраических многообразий. Поэтому из приведенного выше результата вытекает, что $T(X)$ является целым числом для любого компактного почти комплексного многообразия X. Аналогично вторая часть теоремы 14.3.2 выполняется без множителя 2^{n-r}. Это же можно обобщить на случай виртуальной T_y-характеристики непрерывного $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоения ξ над X: виртуальная T_y-характеристика $T_y(b_1, \ldots, b_r |, \xi)$, где $b_i \in H^2(X, \mathbf{Z})$, является многочленом по y с целыми коэффициентами. Дальнейшие теоремы целочисленности, которые можно вывести из целочисленности рода Тодда, можно найти в частях II и III работы Борель и Хирцебрух [1]. Другой подход к теоремам целочисленности для произвольных гладких многообразий см. в Атья и Хирцебрух [1, 2] и в приложении 1 (§ 26).

Глава IV

ТЕОРЕМА РИМАНА — РОХА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

В этой главе V — комплексное n-мерное многообразие. Доказательство теоремы Римана — Роха основано на различных результатах о компактных комплексных многообразиях, принадлежащих Картану, Дольбо, Кодаире, Серру и Спенсеру. Эти результаты собраны в § 15. В двух местах во время доказательства приходится делать дополнительные предположения о V: сначала, что V — кэлерово многообразие (15.6—15.9), а затем, что V — алгебраическое многообразие.

§ 15. Когомологии компактных комплексных многообразий

15.1. Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V, и пусть $\Omega(W)$ — пучок ростков голоморфных сечений W (см. 3.5).

Группы когомологий V с коэффициентами в пучке $\Omega(W)$ ростков голоморфных сечений расслоения W (ср. 3.5) будем для краткости обозначать через $H^i(V, W)$. Будет показано, что они равны нулю при i, большем, чем комплексная размерность многообразия V, и что для компактного многообразия V они суть конечномерные пространства над $\mathbf{C}$. Изоморфные расслоения W, W' имеют, очевидно, изоморфные пучки сечений $\Omega(W)$ и $\Omega(W')$ и дают изоморфные группы когомологий. На этом основании изоморфные расслоения будут часто отождествляться.

Тривиальное одномерное расслоение будет обозначаться через $\mathbf{1}$. Пучок $\Omega(\mathbf{1})$ — это пучок ростков голоморфных функций $\mathbf{C}_\omega$. Этот пучок будет также обозначаться через Ω.

$H^0(V, W)$ является комплексным векторным пространством всех глобальных (т. е. определенных на всем V) голоморфных сечений расслоения W. В частности, $H^0(V, \mathbf{1})$ является комплексным векторным пространством всех определенных на всем V голоморфных функций. Если V компактно, то $H^0(V, \mathbf{1})$ имеет размерность d, где d — число связных компонент многообразия V.

15.2. Рассмотрим пучок $\mathbf{C}_\omega^*$ ростков не обращающихся в нуль голоморфных функций над комплексным многообразием V (см. 2.5). Множество классов изоморфизмов комплексно-аналитических

$\mathbf{C}^*$-расслоений над V образует абелеву группу $H^1(V, \mathbf{C}_\omega^*)$, в которой групповая операция совпадает с тензорным произведением (см. 3.7).

Дивизор D многообразия V задается так называемыми мероморфными *функциями положения* на V:

Пусть $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — *открытое покрытие многообразия* V. *Для каждого* $i \in I$ *пусть на* U_i *задана мероморфная функция* f_i, *не равная тождественно нулю, так чтобы на* $U_i \cap U_j$ *функция* f_i/f_j *не имела ни нулей, ни полюсов.*

Следует еще определить, когда две такие системы мероморфных функций определяют один и тот же дивизор. Это, конечно, делается обычным образом. Дивизоры можно определить также и с помощью пучков.

Пусть $\mathfrak{G}$ — пучок ростков не равных тождественно нулю мероморфных функций (пучковая операция — обыкновенное умножение ростков); $\mathbf{C}_\omega^*$ является подпучком пучка $\mathfrak{G}$. После введения пучка $\mathfrak{D} = \mathfrak{G}/\mathbf{C}_\omega^*$ получим точную последовательность

$$0 \to \mathbf{C}_\omega^* \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{D} \to 0. \tag{1}$$

Дивизоры — это элементы абелевой группы $H^0(V, \mathfrak{D})$. Мы будем записывать эту группу аддитивно. Сложение двух дивизоров, заданных мероморфными функциями f_i, f'_i на одном и том же покрытии $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, соответствует умножению функций $f_i f'_i$ на U_i. Точная последовательность (1) порождает когомологическую точную последовательность

$$H^0(V, \mathfrak{G}) \xrightarrow{h} H^0(V, \mathfrak{D}) \xrightarrow{\delta^0_*} H^1(V, \mathbf{C}_\omega^*). \tag{2}$$

$H^0(V, \mathfrak{G})$ является мультипликативной группой не равных тождественно нулю ни на какой компоненте связности мероморфных функций многообразия V. Мероморфная функция $f \in H^0(V, \mathfrak{G})$ определяет дивизор $(f) = hf$, который называется *дивизором мероморфной функции*. Два дивизора называются *линейно эквивалентными*, если их разность является дивизором мероморфной функции $f \in H^0(V, \mathfrak{G})$. *Классы дивизоров по отношению линейной эквивалентности образуют абелеву группу* $H^0(V, \mathfrak{D})/hH^0(V, \mathfrak{G})$, *которая* в силу точности последовательности (2) *изоморфна некоторой подгруппе группы* $H^1(V, C_\omega^*)$.

Если D — дивизор, то мы обозначаем через $[D]$ комплексно-аналитическое C_ω^*-расслоение $(\delta_0^* D)^{-1}$. Единственное с точностью до изоморфизма ассоциированное с $[D]$ комплексно-аналитическое 1-мерное расслоение обозначается через $\{D\}$.

Если дивизор D относительно покрытия $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ задается мероморфными функциями f_i, то $[D]$ задается коциклом

$$f_{ij} = f_i/f_j, \quad f_{ij}\colon U_i \cap U_j \to C^*. \tag{3}$$

Дивизор D называется *голоморфным*, если все функции f_i голоморфны. Это понятие, естественно, зависит только от самого дивизора D.

Замечание. Часто в литературе голоморфные дивизоры называются «неотрицательными», а если по крайней мере одна функция f_i имеет нули, — «положительными». Мы не используем эту терминологию, так как будем употреблять слово «положительный» в другом смысле (18.1).

Голоморфный дивизор D называется *неособым дивизором*, если он относительно подходящего покрытия $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ может быть задан функциями f_i, удовлетворяющими следующим условиям:

Или $f_i \equiv 1$ или в U_i можно ввести локальные комплексные координаты так, чтобы f_i равнялось одной из координат.

Пусть D — неособый дивизор и $\dim V = n$.

Множество всех точек x многообразия V, для которых $f_i(x) = 0$, $x \in U_i$ по крайней мере для одного i (а значит, и для всех i, таких, что $x \in U_i$), является комплексным подмногообразием размерности $n-1$. Мы будем обозначать это комплексное подмногообразие тем же символом D в согласии с терминологией п. 4.9.

Пусть D — произвольный дивизор на V, заданный функциями f_i. Рассмотрим множество $L(D)$ тех мероморфных функций g на V, для которых все функции gf_i голоморфны в U_i. Множество $L(D)$ зависит, очевидно, только от дивизора. Ясно, что $L(D)$ относительно сложения мероморфных функций является комплексным векторным пространством.

Теперь может быть сформулирована

Проблема Римана — Роха. *Определить размерность пространства $L(D)$.*

Теорема 15.2.1. *Для всякого дивизора D комплексного многообразия V комплексные векторные пространства $L(D)$ и $H^0(V, \{D\})$ изоморфны.*

Доказательство. $H^0(V, \{D\})$ является векторным пространством глобальных голоморфных сечений одномерного расслоения $\{D\}$. Дивизор D представим в подходящем покрытии $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ функциями f_i. Тогда можно считать, что $\{D\}$ получен из $\bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbf{C}$ идентификацией $u \times k \in U_j \times \mathbf{C}$ с $u \times f_i(u)/f_j(u)\, k \in U_i \times \mathbf{C}$ (см. (3) и 3.2. а)). Но сечение s расслоения $\{D\}$ задается функциями s_i (s_i голоморфна в U_i), для которых $s_i = \frac{f_i}{f_j} s_j$ в $U_i \cap U_j$. Сопоставим сечению s глобальную мероморфную функцию

$$h(s) = \frac{s_i}{f_i} = \frac{s_j}{f_j} \in L(D).$$

$h(s)$ принадлежит $L(D)$, и h является изоморфизмом $H^0(V, \{D\})$ на $L(D)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть $|D|$ — комплексное проективное пространство, ассоциированное с векторным пространством $H^0(V, \{D\})$. Оно получается отождествлением a с ca, где $a \in H^0(V, \{D\})$, $a \neq 0$, $c \in \mathbf{C}$, $c \neq 0$. Тогда $\dim |D| + 1 = \dim H^0(V, \{D\})$. Из приведенного выше доказательства следует, что *если V компактно и связно*, то точки $|D|$ находятся во взаимно однозначном соответствии с голоморфными дивизорами, лежащими в том же классе дивизоров, что и D.

Предыдущая теорема мотивирует следующее обобщение проблемы Римана — Роха. Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V, и пусть $H^0(V, W)$ — векторное пространство голоморфных сечений расслоения W над V, введенное в 15.1.

Обобщенная проблема Римана — Роха. *Определить размерность векторного пространства $H^0(V, W)$.*

15.3a. Пусть $\dim V = n$, и пусть $\lambda^p \boldsymbol{T}$ — комплексно-аналитическое векторное расслоение ковариантных касательных p-векторов (см. 4.7). Тогда $\boldsymbol{T} = \lambda^1 \boldsymbol{T}$ есть векторное расслоение ковариантных касательных векторов, а $\lambda^0 \boldsymbol{T}$ — тривиальное одномерное расслоение; $\lambda^n \boldsymbol{T}$ — также одномерное расслоение, оно называется *каноническим* расслоением для V и обозначается через K.

Если V обладает мероморфной n-формой (с дивизором E), то одномерное расслоение K ассоциировано с комплексно-аналитическим $\mathbf{C}^*$-расслоением $[E]$, так что $K = \{E\}$.

Для комплексно-аналитического векторного расслоения W над V группы когомологий $H^q(V, W \otimes \lambda^p \boldsymbol{T})$ будут обозначаться также через $H^{p,q}(V, W)$. Таким образом,

$$H^{0,q}(V, W) = H^q(V, W).$$

15.3b. Для комплексного векторного расслоения W над V можно следующим образом построить сопряженное векторное расслоение $\overline{W}$. Предположим, что W получено из непересекающегося объединения $\bigcup U_i \times \mathbf{C}_q$ отождествлениями с помощью координатных преобразований

$$g_{ij}\colon\ U_i \cap U_j \to \mathbf{GL}(q, \mathbf{C}).$$

Тогда $\overline{W}$ обозначает то векторное расслоение, которое получается из того же объединения отождествлением с помощью

$$\bar{g}_{ij}\colon\ U_i \cap U_j \to \mathbf{GL}(q, \mathbf{C}).$$

Здесь $\bar{g}_{ij}(x)$ — это матрица, которая получается из $g_{ij}(x)$ сопряжением всех коэффициентов.

Если W было комплексно-аналитическим, то $\overline{W}$ не обязано быть комплексно-аналитическим, и его следует понимать как гладкое расслоение. Как гладкие векторные расслоения W и $\overline{W}$ *антиизоморфны*, т. е. существует гладкий гомеоморфизм W на $\overline{W}$, который антиизоморфно отображает каждый слой W_x на $\overline{W}_x$. При этом под антиизоморфизмом двух векторных пространств A и B понимается взаимно однозначное отображение $\varkappa$ пространства A на B, такое, что

$$\varkappa(a+a')=\varkappa(a)+\varkappa(a'),\quad \varkappa(ca)=\bar{c}(\varkappa a);\quad a,\ a'\in A,\quad c\in \mathbf{C}.$$

В локальном представлении в виде прямого произведения $U_i\times \mathbf{C}_q$ антиизоморфизм $\varkappa$ задается сопряжением.

15.3с. Пусть гладкое векторное расслоение W над X задано по отношению к подходящему покрытию $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ гладкими координатными преобразованиями

$$f_{ij}\colon\ U_i\cap U_j\to \mathbf{GL}(q,\ \mathbf{C}).$$

Тогда структурную группу можно редуцировать к $\mathbf{U}(q)$ (см. 4.1b), т. е. существуют гладкие отображения

$$h_i\colon\ U_i\to \mathbf{GL}(q,\ \mathbf{C}),$$

такие, что

$$h_i(x)f_{ij}(x)h_j^{-1}(x)\in U(q)\quad \text{для}\quad x\in U_i\cap U_j.$$

Положим

$$g_i=\bar{h}_i^{\dagger}h_i\colon\ U_i\to \mathbf{GL}(q,\ \mathbf{C}),$$

где $\dagger$ — транспонирование.

Двойственное векторное расслоение W^* задается координатными преобразованиями

$$\left(f_{ij}^{-1}\right)^{\dagger}\colon\ U_i\cap U_j\to \mathbf{GL}(q,\ \mathbf{C}).$$

Если точке из W, имеющей вид $u\times t$ в локальном представлении W в виде прямого произведения $U_i\times \mathbf{C}_q$, сопоставить точку

$$u\times \overline{g_i(u)\cdot t},$$

то мы получим антиизоморфизм $\psi\colon\ W\to W^*$. Мы будем называть ψ *эрмитовым* антиизоморфизмом, соответствующим данной редукции структурной группы. Он позволяет ввести на каждом слое W_x расслоения W эрмитову метрику, положительно определенная эрмитова форма которой равна $\psi(a)\cdot a$. Здесь $a\in W_x$, элемент $\psi(a)$ принадлежит двойственному векторному пространству, $\psi(a)\cdot a$ — значение линейной формы $\psi(a)$ на a. Имеется соответствующий эрмитов антиизоморфизм $\psi^{-1}\colon\ W^*\to W$.

15.4. В этом пункте мы дадим обзор результатов Дольбо [1], [2], Кодаиры [3], Серра [3] относительно групп когомологий $H^{p,q}(V,W)$.

Над комплексным многообразием V рассмотрим пучок $\mathfrak{A}^{p,q}$ ростков гладких форм типа p, q.

Оператор d на дифференциальных формах многообразия V может быть записан в виде суммы

$$d=\partial+\bar{\partial},$$

где ∂ — дифференцирование по переменным z, $\bar{\partial}$ — дифференцирование по переменным $\bar{z}$.

Имеем

$$\partial\partial=\bar{\partial}\bar{\partial}=\partial\bar{\partial}+\bar{\partial}\partial=0.$$

Оператор $\bar{\partial}$ отображает всякую форму типа (p,q) в форму типа $(p,q+1)$ и индуцирует поэтому гомоморфизм пучков

$$\bar{\partial}\colon\ \mathfrak{A}^{p,q}\to \mathfrak{A}^{p,q+1}.$$

Ядро гомоморфизма $\bar{\partial}\colon\ \mathfrak{A}^{p,0}\to\mathfrak{A}^{p,1}$ есть $\Omega(\lambda^p\boldsymbol{T})$ — пучок ростков голоморфных p-форм. Действительно, для формы типа $(p,0)$ обращение в нуль под действием $\bar{\partial}$ эквивалентно голоморфности. С помощью вложения $\Omega(\lambda^p\boldsymbol{T})$ в $\mathfrak{A}^{p,0}$ и гомоморфизмов $\bar{\partial}$ получаем следующую последовательность пучков над V:

$$0\to\Omega(\lambda^p\boldsymbol{T})\to\mathfrak{A}^{p,0}\to\mathfrak{A}^{p,1}\to\ \ldots\ \to\mathfrak{A}^{p,q}\to\ \ldots\ . \tag{4}$$

Как только что показано, эта последовательность точна в своем начале. Впервые доказанная Гротендиком «лемма Пуанкаре» утверждает, что вся последовательность (4) точна (см. Картан [4], Дольбо [1]).

Пусть теперь задано *комплексно-аналитическое* векторное расслоение W над V со слоем $\mathbf{C}_r$. Рассмотрим гладкое векторное расслоение $W\otimes\lambda^p\boldsymbol{T}\otimes\overline{\lambda^q\boldsymbol{T}}$, и обозначим пучок ростков гладких сечений этого расслоения через $\mathfrak{A}^{p,q}(W)$. Имеем $\mathfrak{A}^{p,1}(\mathbf{1})=\mathfrak{A}^{p,q}$. Сечения пучка $\mathfrak{A}^{p,q}(W)$, т. е. гладкие сечения векторного расслоения $W\otimes\lambda^p\boldsymbol{T}\otimes\overline{\lambda\boldsymbol{T}}$, называются *гладкими дифференциальными формами* (кратко: *формами*) *типа* (p,q) с коэффициентами в W. Положим

$$\left.\begin{aligned}&A^{p,q}(W)=\Gamma\left(V,\ \mathfrak{A}^{p,q}(W)\right)\text{ — }\mathbf{C}\text{-модуль глобальных форм типа } (p,\ q) \text{ с коэффициентами в } W,\\ &A^{p,q}=A^{p,q}(\mathbf{1})\text{ — }\mathbf{C}\text{-модуль обычных глобальных форм типа } (p,\ q).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Локально форма типа (p,q) с коэффициентами в W может рассматриваться относительно локального представления W в виде прямого произведения $U_i\times\mathbf{C}_r$ как набор r обычных локальных форм типа (p,q). На таком наборе r форм действует $\bar{\partial}$. Так как преобразование от одного локального представления $U_i\times\mathbf{C}_r$

к другому $U_j \times \mathbf{C}_r$ является голоморфным отображением $U_i \cap U_j$ в $\mathbf{CL}(r, \mathbf{C})$ и так как $\bar{\partial}$ равен нулю на голоморфных функциях, то операция $\bar{\partial}$ не зависит от выбора локального представления. Поэтому $\bar{\partial}$ индуцирует гомоморфизм пучков

$$\bar{\partial}\colon \mathfrak{A}^{p,q}(W) \to \mathfrak{A}^{p,q+1}(W),$$

и из точной последовательности (4) следует сразу же, что точна последовательность

$$0 \to \Omega(W \otimes \lambda^p \boldsymbol{T}) \to \mathfrak{A}^{p,0}(W) \to \mathfrak{A}^{p,1}(W) \to \ldots \to \mathfrak{A}^{p,q}(W) \to \ldots. \tag{6}$$

Пучок ростков гладких сечений любого векторного расслоения над V является тонким пучком (см. 3.5). Этим показано, что (6) является тонкой резольвентой для пучка $\Omega(W \otimes \lambda^p \boldsymbol{T})$, и из теоремы 2.12.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 15.4.1 (Дольбо — Серр). *Комплексное векторное пространство $H^{p,q}(V, W)$ естественным образом изоморфно q-й группе когомологий $\bar{\partial}$-резольвенты* (6), *т. е.*

$$H^{p,q}(V, W) \cong Z^{p,q}(W)/\bar{\partial}(A^{p,q-1}(W)), \tag{7}$$

где $Z^{p,q}(W)$ обозначает модуль тех глобальных форм типа (p, q) с коэффициентами в W, которые обращаются в нуль под действием $\bar{\partial}$.

Из этой теоремы немедленно следует, что группы когомологий $H^{p,q}(V, W)$ равны нулю, если p или q больше, чем комплексная размерность многообразия V.

До конца этого параграфа будем предполагать, что V компактно. Пусть $n = \dim V$.

Рассмотрим двойственное к W векторное расслоение W^*. Тогда естественным образом для $\alpha \in A^{p,q}(W)$, $\beta \in A^{r,s}(W^*)$ можно определить произведение $\alpha \wedge \beta$, которое лежит в $A^{p+r,q+s}(\mathbf{1})$. Для $W = \mathbf{1}$ речь идет об обычном внешнем произведении форм. Это произведение обладает свойствами

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) &= \bar{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge \bar{\partial}\beta, \\ \alpha \wedge \beta &= (-1)^{(p+q)(r+s)} \beta \wedge \alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Для $r = n - p$ и $s = n - q$ имеем $\alpha \wedge \beta \in A^{n,n}(\mathbf{1})$ и определен интеграл

$$\iota(\alpha, \beta) = \int_V \alpha \wedge \beta.$$

Если $\alpha = \bar{\partial}\gamma$, $\gamma \in A^{p,q-1}(W)$ и если, далее, $\bar{\partial}\beta = 0$, то из (8) и теоремы Стокса следует, что

$$\iota(\alpha, \beta) = \int_V \bar{\partial}(\gamma \wedge \beta) = \int_V d(\gamma \wedge \beta) = 0.$$

Аналогично $\iota(\alpha, \beta) = 0$ для $\beta = \bar{\partial}\gamma$, $\gamma \in A^{n-p,n-q-1}(W^*)$ и $\bar{\partial}\alpha = 0$.

Билинейная форма ι индуцирует поэтому в силу (7) спаривание $H^{p,q}(V, W)$ и $H^{n-p,n-q}(V, W^*)$ со значениями в $\mathbf{C}$. Таким образом, для $a \in H^{p,q}(V, W)$ и $b \in H^{n-p,n-q}(V, W^*)$ определено число $\iota(a, b)$, которое зависит только от a и b; $\iota(a, b)$ линейно по a и по b.

Кодаира распространил теорию гармонических форм на формы с коэффициентами в W. Введем в W произвольную (фиксированную) эрмитову метрику. Этим (15.3c) индуцируется изоморфизм $\boldsymbol{T} \cong \boldsymbol{T}^*$. Этот изоморфизм и теорема 3.6.1 дают изоморфизмы

$$\lambda^p \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^q \boldsymbol{T}} \cong \lambda^p \boldsymbol{T} \otimes \lambda^n \boldsymbol{T}^* \otimes \lambda^n \boldsymbol{T} \otimes \lambda^q \boldsymbol{T}^* \cong$$
$$\cong \lambda^{n-p} \boldsymbol{T}^* \otimes \lambda^{n-q} \boldsymbol{T} \cong \lambda^{n-q} \boldsymbol{T} \otimes \lambda^{n-p} \boldsymbol{T}.$$

В результате получается оператор двойственности

$$*\colon \lambda^p \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^q \boldsymbol{T}} \to \lambda^{n-q} \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^{n-p} \boldsymbol{T}}.$$

Изоморфизм $**$ расслоения $\lambda^p \boldsymbol{T} \otimes \lambda^q \boldsymbol{T}$ на себя есть умножение на $(-1)^{p+q}$.

Редуцируем теперь структурную группу векторного расслоения W к унитарной группе, и получим тем самым эрмитовы антиизоморфизмы (ср. 15.3c)

$$\psi\colon W \to W^*, \quad \psi^{-1}\colon W^* \to W.$$

Пусть $\varkappa$ — сопряжение, являющееся антиизоморфизмом $\lambda^r \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^s \boldsymbol{T}}$ на $\lambda^s \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^r \boldsymbol{T}}$. Положим $\# = \psi \otimes (\varkappa *)$ и $\tilde{\#} = \psi^{-1} \otimes (\varkappa *)$, и получим антиизоморфизмы

$$\#\colon W \otimes \lambda^p \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^q \boldsymbol{T}} \to W^* \otimes \lambda^{n-p} \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^{n-q} \boldsymbol{T}},$$
$$\tilde{\#}\colon W^* \otimes \lambda^r \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^s \boldsymbol{T}} \to W \otimes \lambda^{n-r} \boldsymbol{T} \otimes \overline{\lambda^{n-s} \boldsymbol{T}}.$$

Для $r = n - p$ и $s = n - q$ изоморфизм $\tilde{\#}\#$ есть умножение на $(-1)^{p+q}$.

$\#$ и $\tilde{\#}$ индуцируют антиизоморфизмы соответствующих пучков

$$\#\colon \mathfrak{A}^{p,q}(W) \to \mathfrak{A}^{n-p,n-q}(W^*),$$
$$\tilde{\#}\colon \mathfrak{A}^{r,s}(W^*) \to \mathfrak{A}^{n-r,n-s}(W).$$

Так как расслоения W и W^* комплексно-аналитические, то имеем гомоморфизмы пучков

$$\bar{\partial}\colon \mathfrak{A}^{p,q}(W) \to \mathfrak{A}^{p,q+1}(W), \quad \bar{\partial}\colon \mathfrak{A}^{r,s}(W^*) \to \mathfrak{A}^{r,s+1}(W^*).$$

Положим

$$\vartheta = -\,\widetilde{\#}\,\bar{\partial}\,\#$$

и получим гомоморфизм

$$\vartheta\colon \mathfrak{A}^{p,\,q}(W) \to \mathfrak{A}^{p,\,q-1}(W).$$

Если $\alpha, \beta \in A^{p,\,q}(W)$ — глобальные формы типа (p, q) с коэффициентами в W, то можно ввести их скалярное произведение

$$(\alpha, \beta) = \iota(\alpha, \#\beta) = \int\limits_V \alpha \wedge \#\beta.$$

Тогда $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$ и $(\alpha, \alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. По отношению к этому скалярному произведению ϑ и $\bar{\partial}$ — сопряженные операции:

$$(\alpha, \vartheta\beta) = (\bar{\partial}\alpha, \beta), \quad \alpha \in A^{p,\,q}(W), \quad \beta \in A^{p,\,q-1}(W). \tag{9}$$

Доказательство. Имеем

$$(\alpha, \vartheta\beta) = -\int\limits_V \alpha \wedge \#\,\widetilde{\#}\,\bar{\partial}\,\#\,\beta = (-1)^{p+q+1}\int\limits_V \alpha \wedge \bar{\partial}\,\#\,\beta.$$

Следовательно,

$$(\bar{\partial}\alpha, \beta) - (\alpha, \vartheta\beta) = \int\limits_V (\bar{\partial}\alpha \wedge \#\beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \bar{\partial}\,\#\,\beta) =$$

$$= \int\limits_V \bar{\partial}(\alpha \wedge \#\beta) = \int\limits_V d(\alpha \wedge \#\beta) = 0$$

по теореме Стокса.

Наконец, определим комплексный оператор Лапласа — Бельтрами $\square = \vartheta\bar{\partial} + \bar{\partial}\vartheta$, который отображает $A^{p,\,q}(W)$ в себя. Подпространство тех элементов α из $A^{p,\,q}(W)$, для которых $\square\alpha = 0$, обозначим через $B^{p,\,q}(W)$. Это — подпространство *комплексно-гармонических форм*. Из (9) следует, как обычно, что $\square\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\vartheta\alpha = \bar{\partial}\alpha = 0$.

Методы теории гармонических интегралов показывают, что $A^{p,\,q}(W)$ является прямой суммой трех попарно ортогональных относительно введенного скалярного произведения векторных пространств

$$A^{p,\,q}(W) = \bar{\partial}A^{p,\,q-1}(W) \oplus \vartheta A^{p,\,q+1}(W) \oplus B^{p,\,q}(V, W).$$

Отсюда следует, что $Z^{p,\,q}(W) = \bar{\partial}A^{p,\,q-1}(W) \oplus B^{p,\,q}(V, W)$, и, наконец, по теореме 15.4.1

$$H^{p,\,q}(V, W) \cong Z^{p,\,q}(W)/\bar{\partial}A^{p,\,q-1}(W) \cong B^{p,\,q}(V, W).$$

Из того факта, что $\square$ является эллиптическим дифференциальным оператором на компактном многообразии, Кодаира выводит, что $B^{p,\,q}(V, W)$ конечномерно и, следовательно, что $H^{p,\,q}(V, W)$ таково же. [См. также Спенсер [2]; общее определение эллиптичности дифференциального оператора приведено в приложении 1 (см. 25.1): там же имеются ссылки на литературу, где доказывается конечномерность (см. 25.2).]

Для пучков $\mathfrak{A}^{p,\,q}(W^*)$ также существуют операторы ϑ, $\bar{\partial}$ и $\square$. Оператор $\#$ индуцирует антиизоморфизм $B^{p,\,q}(V, W)$ на $B^{n-p,\,n-q}(V, W^*)$. Подытожим результаты, о которых мы здесь говорили, в следующих двух теоремах.

Теорема 15.4.2 (Кодаира [3]). *Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над компактным комплексным многообразием V. Тогда $H^{p,\,q}(V, W)$ является конечномерным комплексным векторным пространством, которое* (после введения эрмитовой метрики в W и унитарной структуры в W, ср. 15.3с) *изоморфно векторному пространству комплексно-гармонических форм типа (p, q) с коэффициентами в W. В частности, $H^p(V, W) = H^{0,\,p}(V, W)$ конечномерно, причем $H^{p,\,q}(V, W) = 0$, если $p > n$ или $q > n$.*

Теорема 15.4.3 (Серр [3]). *Предположения те же, что и в предыдущей теореме. Векторные пространства $H^{p,\,q}(V, W)$ и $H^{n-p,\,n-q}(V, W^*)$ изоморфны. Они являются двойственными друг другу векторными пространствами относительно спаривания ι.*

В частности, $H^p(V, W)$ и $H^{n-p}(V, W^* \otimes K)$ — двойственные векторные пространства, где $K = \lambda^n\boldsymbol{T}$ — каноническое одномерное расслоение для V.

Мы положим $\dim H^{p,\,q}(V, W) = h^{p,\,q}(V, W)$ и $\dim H^{p,\,q}(V, 1) = h^{p,\,q}(V)$ («число» комплексно-гармонических форм типа (p, q) многообразия V).

Замечания. Как показывают примеры, вообще говоря, $h^{p,\,q}(V) \neq h^{q,\,p}(V)$; однако в 15.6 будет показано, что $h^{p,\,q}(V) = h^{q,\,p}(V)$, если V — кэлерово многообразие. Этот факт будет использован в доказательстве теоремы 15.8.2. Имеется обобщение теоремы 15.4.2, принадлежащее Картану и Серру [1] и приведенное в приложении 1 (23.1).

15.5. Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над компактным комплексным многообразием V_n. Так как $H^i(V, W)$ конечномерны и равны 0 при $i > n$, то можно определить эйлерову характеристику (см. 2.10)

$$\chi(V, W) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \dim H^i(V, W) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H^i(V, W).$$

Определим $\chi^p(V, W)$ равенством

$$\chi^p(V, W) = \chi(V, W \otimes \lambda^p\boldsymbol{T}) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q h^{p,\,q}(V, W). \tag{10}$$

Тогда

$$\chi^0(V, W) = \chi(V, W), \quad \chi^p(V, W) = 0 \text{ для } p < 0 \text{ и для } p > n. \quad (11)$$

Для $W = 1$ мы, естественно, будем писать

$$\chi^p(V, 1) = \chi^p(V) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{p, q}(V).$$

С помощью переменной y определим многочлены

$$\chi_y(V, W) = \sum_{p=0}^{n} \chi^p(V, W) y^p, \quad \chi_y(V) = \sum_{p=0}^{n} \chi^p(V) y^p. \quad (12)$$

Мы назовем $\chi_y(V, W)$ *χ_y-характеристикой* векторного расслоения W, а $\chi_y(V)$ — *χ_y-родом* многообразия V. По определению

$$\chi_0(V, W) = \chi^0(V, W) = \chi(V, W) \quad \text{и} \quad \chi_0(V) = \chi^0(V) = \chi(V);$$
$$\chi(V) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{0, q}(V) \quad (13)$$

называется *арифметическим родом* V.

Теорема двойственности Серра 15.4.3 дает формулы

$$\chi^p(V, W) = (-1)^n \chi^{n-p}(V, W^*),$$
$$\chi(V, W) = (-1)^n \chi(V, K \otimes W^*). \quad (14)$$

Отметим еще раз, что *арифметический род $\chi(V)$ компактного комплексного многообразия V определен как эйлерова характеристика V с коэффициентами в пучке ростков голоморфных функций Ω.*

15.6. Пусть V_n — компактное комплексное многообразие. Эрмитова метрика на V в локальных координатах z^α, $\alpha = 1, \ldots, n$, имеет вид

$$ds^2 = 2 \sum g_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) dz^\alpha \cdot d\bar{z}^\beta, \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}. \quad (15)$$

Всякой эрмитовой метрике ds^2 можно сопоставить внешнюю дифференциальную форму

$$\omega = i \sum g_{\alpha\beta}(z, \bar{z}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \quad (16)$$

которая в вещественных координатах x^α, $\alpha = 1, \ldots, 2n$, $z^\alpha = x^{2\alpha-1} + ix^{2\alpha}$ переходит в вещественную дифференциальную форму. Эрмитова метрика называется *кэлеровой*, если $d\omega = 0$. Форма ω представляет тогда (в силу естественного изоморфизма де Рама) элемент из группы когомологий $H^2(V, \mathbf{R})$, который называется *фундаментальным классом* кэлеровой метрики. Ниже мы примем следующую терминологию: под *многообразием с кэлеровой метрикой* будет пониматься компактное комплексное многообразие, на котором задана определенная кэлерова метрика. *Кэлерово* же *многообразие* — это компактное комплексное многообразие, на котором может быть введена по крайней мере одна кэлерова метрика.

Сделаем краткий обзор основных свойств кэлеровых многообразий, необходимых для дальнейшего. Более полное изложение можно найти у А. Вейля [2].

15.7. Пусть V — многообразие с кэлеровой метрикой. Тогда $h^{p, q}(V)$ могут быть вычислены с помощью заданной кэлеровой метрики. Возьмем в качестве W из 15.4 тривиальное одномерное расслоение 1. Последующие рассуждения относятся к этому случаю.

Комплексный оператор Лапласа — Бельтрами $\square$ для кэлеровой метрики равен $\frac{\Delta}{2}$, где Δ — вещественный оператор Лапласа $d\delta + \delta d$, $\delta = -{*}d{*}$. Оператор $\square$ перестановочен поэтому с сопряжением, и отображение $\alpha \to \bar{\alpha}$ определяет антиизоморфизм $B^{p, q}$ (гармонических форм типа (p, q)) на $B^{q, p}$. Таким образом, для компактного кэлерова многообразия V имеем

$$h^{p, q}(V) = h^{q, p}(V), \quad h^{p, q}(V) = \dim B^{p, q}. \quad (17)$$

По теории де Рама и Ходжа имеется естественный изоморфизм

$$H^r(V, \mathbf{C}) \cong \sum_{p+q=r} B^{p, q}. \quad (18)$$

Таким образом, для r-го числа Бетти $b_r(V)$ имеем

$$b_r(V) = \sum_{p+q=r} h^{p, q}. \quad (18^*)$$

При изоморфизме (18) $B^{p, q}$ отображается на подпространство тех элементов из $H^r(V, \mathbf{C})$, которые могут быть представлены в смысле де Рама формой α типа (p, q) с $d\alpha = 0$. Элементы этого подпространства, которые, очевидно, не зависят от выбора кэлеровой метрики, называются *элементами типа* (p, q).

Элемент из $H^{p+q}(V, \mathbf{Z})$ или из $H^{p+q}(V, \mathbf{R})$, рассматриваемый как элемент из $H^{p+q}(V, \mathbf{C})$ типа (p, q), сам называется элементом типа (p, q).

Формулы (17), (18*), вообще говоря, неверны для произвольных компактных комплексных многообразий. Для кэлерова многообразия по (17) $h^{0, q} = h^{q, 0}$. Для произвольного компактного комплексного многообразия V по определению $h^{q, 0}$ равно $\dim H^0(V, \lambda^q T)$, т. е. равно размерности комплексного векторного пространства голоморфных q-форм на V, которые называют также *формами первого рода и степени q на V*. Положим $g_q = h^{q, 0}$. Итак, имеет место

Теорема 15.7.1. *Арифметический род* $\chi(V_n)$ *компактного комплексного кэлерова многообразия* V *равен* $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_i$, *где* g_i — *число комплексно линейно независимых форм первого рода и степени* i *на* V.

15.8. Компактному комплексному многообразию V мы сопоставили в 15.5 многочлен $\chi_y(V)$. При $y=0$ значение этого многочлена совпадает с арифметическим родом для V.

Следующие две теоремы дают значения многочлена $\chi_y(V)$ для $y=-1$ и $y=1$.

Теорема 15.8.1. *Для компактного комплексного многообразия* V_n

$$\chi_{-1}(V_n)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\chi^p(V_n)=\sum_{p,\,q}(-1)^{p+q}h^{p,\,q}(V_n)$$

равняется обычной эйлеровой характеристике $E(V)$.

Доказательство (по Серру [3], стр. 26). Пусть $\Omega^p=\Omega(\lambda^p\boldsymbol{T})$ — пучок ростков голоморфных p-форм. Тогда с помощью оператора d получаем следующую точную последовательность:

$$0\to\mathbf{C}\to\Omega^0\to\Omega^1\to\ \ldots\ \to\Omega^n\to 0.$$

$E(V_n)$ есть эйлерова характеристика для когомологий с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbf{C}$. Наше утверждение следует поэтому из теоремы 2.10.3.

Замечание. Если многообразие V_n кэлерово, то теорема 15.8.1 немедленно следует из (18*).

Теорема 15.8.2 (ср. Ходж [4]). *Для компактного кэлерова многообразия* V_n

$$\chi_1(V_n)=\sum_{p=0}^{n}\chi^p(V_n)=\sum_{p,\,q}(-1)^q h^{p,\,q}(V_n)$$

равняется индексу $\tau(V_n)$, *определенному в* 8.2.

Доказательство. Если n нечетно, то по теореме двойственности Серра 15.4.3 имеем

$$\chi^p(V_n)=(-1)^n\chi^{n-p}(V_n)=-\chi^{n-p}(V_n)$$

и, следовательно, $\sum_{p=0}^{n}\chi^p(V_n)=0$.

С другой стороны, $\tau(V_n)=0$ по определению. Таким образом, в случае нечетных n теорема справедлива для любого компактного комплексного многообразия.

Пусть теперь n четно. Мы должны воспользоваться некоторыми фактами о многообразиях с кэлеровыми метриками. (См. по этому поводу Экман и Гугенхаймер [1, 2], Гугенхаймер [1], Ходж [1] и А. Вейль [2]). У Экмана и Гугенхаймера и у Ходжа на многообразии V_n (с локальными координатами $z_j=x_{2j-1}+ix_{2j}$) используется ориентация, задаваемая формой $dx_1\wedge dx_3\wedge\ \ldots\ \wedge dx_{2n-1}\wedge dx_2\wedge\ \ldots\ \wedge dx_{2n}$.

Мы будем использовать уже определенную естественную ориентацию, которая задается формой $dx_1\wedge dx_2\wedge\ \ldots\ \wedge dx_{2n}$. Эти две ориентации отличаются на знак $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Чтобы упростить последующие формулы, мы будем всегда предполагать, что $n=2m$.

Пусть $B^{p,\,q}$ — комплексное векторное пространство гармонических форм типа (p,q). Фундаментальная форма ω, определенная в 15.6, является гармонической формой типа (1.1), произведение которой с любой другой гармонической формой снова гармонично. Сопоставляя форме $\alpha\in B^{p,\,q}$ форму $L\alpha=\omega\alpha\in B^{p+1,\,q+1}$, получим гомоморфизм

$$L\colon\ B^{p,\,q}\to B^{p+1,\,q+1}.$$

Так как форма ω вещественна, то $\overline{L\alpha}=L\bar\alpha$. По 15.4 мы имеем антиизоморфизм

$$\#\colon\ B^{p,\,q}\to B^{n-p,\,n-q},$$

для которого $\#\alpha=\overline{*\alpha}=*\bar\alpha$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\Lambda\colon\ B^{p,\,q}\to B^{p-1,\,q-1},$$

определяемый равенством $\Lambda=(-1)^{p+q}\#L\#$. Имеем

$$\Lambda=(-1)^{p+q}*L*\quad\text{и}\quad\overline{\Lambda\alpha}=\Lambda\bar\alpha.$$

Ядро гомоморфизма Λ обозначим через $B_0^{p,\,q}$; его элементы называются *эффективными* гармоническими формами типа (p,q).

Имеют место следующие утверждения:

(a) $\Lambda L^k\colon B_0^{p-k,\,q-k}\to B^{p-1,\,q-1}$, $p+q\leqslant n$, $k\geqslant 1$ *равно* L^{k-1}, *с точностью до отличной от нуля константы.*

(b) $L^k\colon B_0^{p-k,\,q-k}\to B^{p,\,q}$, $p+q\leqslant n$ *является мономорфизмом.*

(c) *Для* $p+q\leqslant n$ *имеем разложения в прямую сумму*

$$B^{p,\,q}=B_0^{p,\,q}\oplus LB_0^{p-1,\,q-1}\oplus\ldots\oplus L^rB_0^{p-r,\,q-r},\quad r=\min(p,q).$$

Положим $B_k^{p,\,q}=L^kB_0^{p-k,\,q-k}$. Элементы из $B_k^{p,\,q}$ называются *гармоническими формами типа* (p,q) *и класса* k. Следующая формула является основной для доказательства:

(d) $\#\varphi=(-1)^{q+k}\bar\varphi$, *если* $\varphi\in B_k^{p,\,q}$ *и* $p+q=n$.

Следует обратить внимание на то, что $\bar{\varphi}$ принадлежит к $B_k^{q,p}$.

Группа когомологий $H^n(V_n, \mathbf{C})$ есть комплексное векторное пространство (см. 15.7(18)).

(e) $H^n(V_n, \mathbf{C}) = \sum\limits_{\substack{p+q=n \\ k \leqslant \min(p, q)}} B_k^{p,q}$.

Напомним, что для гармонических форм α, β одинаковой полной степени определено скалярное произведение

$$(\alpha, \beta) = \int\limits_{V_n} \alpha \wedge \# \beta.$$

(f) *Слагаемые в прямой сумме* (e) *попарно ортогональны относительно этого скалярного произведения.*

Доказательство. Скалярное произведение может быть отлично от нуля, только если $\alpha \wedge \# \beta$ имеет тип (n, n). Поэтому $B_k^{p,q}$ и $B_{k'}^{p',q'}$ ортогональны для $(p, q) \neq (p', q')$. Для $\alpha \in B_k^{p,q}$ и $\beta \in B_{k'}^{p,q}$ с $k > k'$ и $p+q=n$ имеем $(\alpha, \beta) = (L^k \alpha_0, L^{k'} \beta_0)$, где α_0, β_0 эффективны $(\Lambda\alpha_0 = \Lambda\beta_0 = 0)$. Так как L и Λ сопряжены друг с другом $(L\alpha, \varphi) = (\alpha, \Lambda\varphi)$, то по (a)

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \Lambda^k L^{k'} \beta_0) = 0.$$

Группы когомологий $H^n(V_n, \mathbf{R})$ отождествляются с вещественным векторным пространством вещественных гармонических форм.

(g) *Имеет место разложение в прямую сумму*

$$H^n(V_n, \mathbf{R}) = \sum E_k^{p,q}, \quad p+q=n, \quad k \leqslant p \leqslant q,$$

где $E_k^{p,q}$ — *вещественное векторное пространство тех вещественных гармонических форм* α, *которые можно записать в виде* $\alpha = \varphi + \bar{\varphi}$ *с* $\varphi \in B_k^{p,q}$.

Ясно, что $\tau(V_n)$ является индексом (см. 8.1) квадратичной формы $Q(\alpha, \beta) = \int\limits_{V_n} \alpha \wedge \beta$, $\alpha, \beta \in H^n(V_n, \mathbf{R})$. Из (d) и (f) следует, что вещественные векторные пространства в сумме (g) попарно ортогональны относительно этой квадратичной формы. Поэтому из (d) вытекает, что форма $(-1)^{q+k} Q(\alpha, \beta)$, ограниченная на $E_k^{p,q}$, положительно определена. Таким образом,

$$\tau(V_n) = \sum (-1)^{q+k} \dim_{\mathbf{R}} E_k^{p,q}$$

(суммирование распространено на $p+q=n$, $k \leqslant p \leqslant q$).

Ясно, что $\dim_{\mathbf{R}} E_k^{p,q} = 2\dim_{\mathbf{C}} B_k^{p,q}$ для $p<q$ и $\dim_{\mathbf{R}} E_k^{m,m} = \dim_{\mathbf{C}} B_k^{m,m}$, $n=2m$. Поэтому

(h) $\tau(V_n) = \sum (-1)^{q+k} \dim_{\mathbf{C}} B_k^{p,q}$, $p+q=n$, $k \leqslant \min(p, q)$.

Положим, как и прежде, $h^{p,q} = \dim_{\mathbf{C}} B^{p,q}$. Из (b) и (c) следует, что

(i) $h^{p-k,\, q-k} - h^{p-k-1,\, q-k-1} = \dim_{\mathbf{C}} B_k^{p,q}$ *для* $p+q \leqslant n$.

Так как $h^{r,s} = h^{s,r} = h^{n-r,\, n-s}$, то имеем для $p+q=n$

(j) $h^{p-k-1,\, q-k-1} = h^{p+k+1,\, q+k+1}$.

Из (h), (i), (j) следует, наконец, что

$$\tau(V_n) = \sum_{\substack{k \geqslant 0 \\ p+q=n}} (-1)^{q-k} h^{p-k,\, q-k} + \sum_{\substack{k \geqslant 0 \\ p+q=n}} (-1)^{q+k+1} h^{p+k+1,\, q+k+1} =$$

$$= \sum_{p+q \leqslant n} (-1)^q h^{p,q} + \sum_{p+q>n} (-1)^q h^{p,q} = \sum_{p,q} (-1)^q h^{p,q},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 15.8.2 будет использована существенным образом в 19.5 при доказательстве теоремы Римана — Роха.

Проблема. Найти прямое доказательство теоремы 15.8.2, годящееся для произвольного компактного комплексного многообразия V_n. Одно непрямое доказательство намечено в приложении 1 (п. 25.4).

15.9. Пусть V — кэлерово многообразие (15.6). Рассмотрим точную последовательность когомологий (см. 2.5(11) и теорему 2.10.1), индуцированную точной последовательностью $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C}_\omega \to \mathbf{C}_\omega^* \to 0$, $\mathbf{C}_\omega = \Omega$:

$$H^1(V, \mathbf{C}_\omega^*) \xrightarrow{\delta_*^1} H^2(V, \mathbf{Z}) \to H^2(V, \Omega). \tag{19}$$

Теперь $H^2(V, \Omega) = H^2(V, \mathbf{1}) = B^{0,2}(V)$. Следовательно (Кодаира и Спенсер [2]), элемент $a \in H^2(V, Z)$ тогда и только тогда отображается в нуль из $H^2(V, \Omega)$, когда a имеет тип (1.1).

По теореме 4.3.1 если $\xi \in H^1(V, \mathbf{C}_\omega^*)$ — комплексно-аналитическое $\mathbf{C}^*$-расслоение, то $\delta_*^1(\xi) = c_1(\xi)$. Если F — комплексно-аналитическое одномерное векторное расслоение над V и ξ — ассоциированное $\mathbf{C}^*$-расслоение, то $c_1(\xi)$ называется *классом когомологий* для F. Из точности последовательности (19) следует (см. теорему 4.3.1)

Теорема 15.9.1 (Лефшец и Ходж, Кодаира и Спенсер [2]). *Элемент a из $H^2(V, \mathbf{Z})$, где V — компактное кэлерово многообразие, является классом когомологий комплексно-аналитического $\mathbf{C}^*$-расслоения тогда и только тогда, когда a имеет тип* (1.1).

Замечание. Дольбо ([2], теорема 2.3) доказал эту теорему также и в некэлеровом случае.

15.10. Пусть V — кэлерово многообразие с $h^{p,q} = 0$ для $p \neq q$. Тогда в существенном $\chi_y(V)$ совпадает с многочленом Пуанкаре

$P_t(V) = \sum b_r t^r$ для V (где коэффициент при t^r равен r-му числу Бетти для V). Точнее

$$\chi^p(V) = \sum_q (-1)^q h^{p,q} = (-1)^p h^{p,p} = (-1)^p b_p.$$

Нечетные числа Бетти для V равны нулю, поэтому

$$\chi_{-t^2}(V) = P(t;\ V) = \sum b_r t^r. \tag{20}$$

Кэлеровыми многообразиями с этим специальным свойством являются, например, комплексные проективные пространства и многообразия флагов $\mathbf{F}(n)$. Для $\mathbf{F}(n)$ это можно увидеть следующим способом. Кольцо когомологий $H^*(F(n), \mathbf{Z})$ порождается элементами $\gamma_i \in H^2(\mathbf{F}(n), \mathbf{Z})$, которые являются классами когомологий комплексно-аналитических $\mathbf{C}^*$-расслоений над $\mathbf{F}(n)$ (см. 14.2). По «только тогда» части теоремы 15.9.1 элементы γ_i имеют тип (1.1), а поэтому все классы когомологий для $F(n)$ имеют тип (p, p). Заметим, что для комплексных проективных пространств и для многообразий флагов многочлены χ_y и T_y (см. 14.4) совпадают; оба в существенном равны многочлену Пуанкаре.

15.11. Если V_n и V'_m — кэлеровы многообразия, то

$$h^{p,q}(V_n \times V'_m) = \sum_{\substack{r+u=p \\ s+v=q}} h^{r,s}(V_n)\, h^{u,v}(V'_m). \tag{21}$$

Сопоставляя каждому кэлерову многообразию V многочлен $\Pi_{y,z}(V) = \sum_{p,q} h^{p,q} y^p z^q$ от двух переменных y, z, можем записать (21) в виде

$$\Pi_{y,z}(V_n \times V'_m) = \Pi_{y,z}(V_n)\, \Pi_{y,z}(V'_m). \tag{22}$$

Полагая в (22) $z = -1$, получим

$$\chi_y(V_n \times V'_m) = \chi_y(V_n)\, \chi_y(V'_m), \tag{23}$$

так как $\Pi_{y,-1} = \chi_y$.
Это еще одно свойство, общее для χ_y и T_y.

§ 16. Дальнейшие свойства χ_y-характеристики

В этом параграфе V всегда — комплексное многообразие.

16.1. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to W' \xrightarrow{h'} W \xrightarrow{h} W'' \to 0 \tag{1}$$

комплексно-аналитических векторных расслоений над V (ср. 4.1d). Из (1) возникает точная последовательность пучков

$$0 \to \Omega(W') \xrightarrow{h'} \Omega(W) \xrightarrow{h} \Omega(W'') \to 0. \tag{2}$$

Действительно, всякий росток $s' \in \Omega(W')$ голоморфных сечений в W' отображается на росток $h'(s') \in \Omega(W)$, а всякий росток $s \in \Omega(W)$ отображается на росток $h(s) \in \Omega(W'')$. Последовательность $0 \to \Omega(W') \to \Omega(W) \to \Omega(W'')$, очевидно, точна. Остается только доказать, что всякий росток $s'' \in \Omega(W'')$ может быть записан в виде $s'' = h(s)$, $s \in \Omega(W)$. Но это следует немедленно из замечания 2 из 4.1d.

Теорема 16.1.1. *Пусть задана точная последовательность* (1) *комплексно-аналитических векторных расслоений над компактным комплексным многообразием V. Тогда*

$$\chi(V,\ W) = \chi(V,\ W') + \chi(V,\ W''). \tag{3}$$

Более общим образом

$$\chi^p(V,\ W) = \chi^p(V,\ W') + \chi(V,\ W''), \tag{3*}$$

так что

$$\chi_y(V,\ W) = \chi_y(V,\ W') + \chi_y(V,\ W'').$$

Доказательство. Пучки, входящие в точную последовательность (2), по теореме 15.4.2 имеют тип (F). Формула (3) следует из теоремы 2.10.2. Чтобы получить (3*), достаточно заменить последовательность (1) на последовательность

$$0 \to W' \otimes \lambda^p T \to W \otimes \lambda^p \mathbf{T} \to W'' \otimes \lambda^p \mathbf{T} \to 0, \tag{1*}$$

которая точна по теореме 4.1.2; (3*) получается применением (3) к (1*).

Теорема 16.1.2. *Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над компактным комплексным многообразием V, структурная группа которого может быть комплексно-аналитически редуцирована к треугольной группе $\Delta(q, \mathbf{C})$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_q$ — соответствующие диагональные одномерные расслоения* (см. 4.1e). *Пусть W' — еще одно комплексно-аналитическое расслоение над V. Тогда*

$$\chi(V,\ W' \otimes W) = \chi(V,\ W' \otimes A_1) + \chi(V,\ W' \otimes A_2) + \ldots$$
$$\ldots + \chi(V,\ W' \otimes A_q).$$

Доказательство индукцией по q. Теорема тривиальна при $q = 1$. Пусть она уже доказана для $q - 1$. Расслоение W имеет A_1 в качестве подрасслоения, факторрасслоение W/A_1 допускает треугольную группу $\Delta(q-1, \mathbf{C})$ в качестве структурной группы и имеет диагональные расслоения $A_2, \ldots, A_q$. Имеем точную последовательность

$$0 \to A_1 \to W \to W/A_1 \to 0.$$

Равенство (3), примененное к точной последовательности

$$0 \to W' \otimes A_1 \to W' \otimes W \to W' \otimes W/A_1 \to 0,$$

дает

$$\chi(V,\ W' \otimes W) = \chi(V,\ W' \otimes A_1) + \chi(V,\ W' \otimes W/A_1).$$

По предположению индукции

$$\chi(V,\ W' \otimes W/A_1) = \chi(V,\ W' \otimes A_2) + \ldots + \chi(V,\ W' \otimes A_q),$$

чем и завершается доказательство.

16.2. Пусть W — векторное расслоение над комплексным многообразием V и S — неособый дивизор в V (см. 15.2), который в подходящем покрытии $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ многообразия V задается голоморфными функциями s_i, определенными на V_i. Тогда $\mathbf{C}^*$-расслоение $[S]$ задается коциклом $\{s_{ij}\} = \{s_i/s_j\}$. С помощью этого коцикла можно явно построить ассоциированное с $[S]$ одномерное векторное расслоение $\{S\}$, производя отождествления в $\bigcup (U_i \times \mathbf{C})$ (см. 3.2а) и (15.2). Отображения s_i: $U_i \to \mathbf{C}$ определяют глобальное голоморфное сечение s расслоения $\{S\}$, которое равно 0 в точках из S и только там. Пусть $(W \otimes \{S\})_S$ — ограничение векторного расслоения $W \otimes \{S\}$ на S и $\Omega((W \otimes \{S\})_S)$ — пучок ростков голоморфных сечений этого расслоения над S. Тривиальное расширение этого пучка на S до пучка на V обозначим через $\widehat{\Omega}((W \otimes \{S\})_S)$ (см. теорему 2.4.3).

Имеет место следующая

Теорема 16.2.1. *Пусть V — комплексное многообразие и S — неособый дивизор на V. Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0 \to \Omega(W) \to \Omega(W \otimes \{S\}) \to \widehat{\Omega}((W \otimes \{S\})_S) \to 0 \tag{4}$$

комплексно-аналитических пучков над V.

Доказательство. Каждому локальному сечению s' из W сопоставим локальное сечение $s' \otimes s$ из $W \otimes \{S\}$. Так как s является глобальным сечением в $\{S\}$, не равным тождественно нулю ни на каком открытом подмножестве из V, то мы получаем мономорфизм h': $\Omega(W) \to \Omega(W \otimes \{S\})$.

На дополнении к S в V этот мономорфизм h' является изоморфизмом, так как сечение там нигде не обращается в 0. Факторпучок $\Omega(W \otimes \{S\})/\Omega(W)$, таким образом, обращается в 0 на дополнении к S. Из-за единственности тривиального расширения пучков достаточно доказать, что над S имеет место следующая точная последовательность ($|S$ обозначает ограничение пучка на S):

$$0 \to \Omega(W)\,|_S \xrightarrow{h'} \Omega(W \otimes \{S\})\,|_S \xrightarrow{h} \Omega((W \otimes \{S\})_S) \to 0, \tag{5}$$

где h — гомоморфизм, который получается ограничением сечения расслоения $W \otimes \{S\}$ над открытым множеством U из V на $U \cap S$ [это ограничение будет сечением расслоения $(W \otimes \{S\})_S$ над $U \cap S$].

Для доказательства точности последовательности (5) сопоставим каждой точке $x \in S$ окрестность U_x в V, над которой W и $\{S\}$ представлены в виде прямого произведения. Выберем некоторые определенные представления $U_x \times \mathbf{C}_q$ и $U_x \times \mathbf{C}$. Пусть окрестность U_x выбрана настолько малой, что она содержится в одном из множеств U_i покрытия. Сечение s задается тогда голоморфной функцией $s_x = s_i | U_x$. Теперь $W \otimes \{S\}$ можно отождествить над U_x с прямым произведением $U_x \times (\mathbf{C}_q \otimes \mathbf{C})$. Отобразим $\mathbf{C}_q \otimes \mathbf{C}$ изоморфно на $\mathbf{C}_q$ с помощью отображения $(z_1, \ldots, z_q) \otimes z \to (z_1 z, \ldots, z_q z)$ и тем самым получим над U_x представление $U_x \times \mathbf{C}_q$ для $W \otimes \{S\}$. Локальное голоморфное сечение W [соотв. $W \otimes \{S\}$] задается для этого разложения в прямое произведение набором q голоморфных функций $(g_1, \ldots, g_q)$ [соотв. $(f_1, \ldots, f_q)$]. Гомоморфизм h' задается равенством

$$(f_1, \ldots, f_q) = h'(g_1, \ldots, g_q) = (s_x g_1, \ldots, s_x g_q).$$

Гомоморфизм h есть ограничение $(f_1, \ldots, f_q)$ на S; он является отображением на, так как всякий росток голоморфных функций на S можно получить из ростка голоморфных функций на V. Ограничение $(f_1, \ldots, f_q)$ на S равно нулю в точности тогда, когда все f_i делятся на s_x, т. е. принадлежат образу h'. Тем самым точность последовательности (5) доказана.

Если V компактно, то неособый дивизор S сам является компактным комплексным многообразием и W_S будет комплексно-аналитическим векторным расслоением над S. В дальнейшем мы будем писать $\chi(S, W)$ вместо $\chi(S, W_S)$, и аналогично для $\chi^p(S, W)$ и $\chi_y(S, W)$. В этих обозначениях если в (4) заменить W на $W \otimes \{S\}^{-1}$ и применить теоремы 2.6.3 и 2.10.2, то получится следующая теорема (см. Кодаира и Спенсер [3]).

Теорема 16.2.2. *Пусть V — компактное комплексное многообразие и S — неособый дивизор в V. Далее, пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V. Тогда*

$$\chi(V,\ W) = \chi(V,\ W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi(S,\ W). \tag{6}$$

В частности, если W — тривиальное одномерное расслоение, то

$$\chi(V) = \chi(V,\ \{S\}^{-1}) + \chi(S). \tag{6*}$$

16.3. Пусть V и S имеют тот же смысл, что и в теореме 16.2.2. До конца настоящего параграфа всегда будет предполагаться, что V компактно. Комплексно-аналитическое контравариантное касательное векторное расслоение к V [соотв. к S] обозначим через

$\mathfrak{T}(V)$ [соотв. $\mathfrak{T}(S)$]. Комплексно-аналитическое векторное расслоение контравариантных p-векторов будет обозначаться через $\lambda^p(\mathfrak{T}(V))$ [соотв. $\lambda^p(\mathfrak{T}(S))$].

Соответствующие расслоения ковариантных p-векторов обозначаются через $\lambda^p(\boldsymbol{T}(V))$, $\lambda^p(\boldsymbol{T}(S))$, как и в 4.7. Имеет место точная последовательность (п. 4.9)

$$0 \to \mathfrak{T}(S) \to \mathfrak{T}(V)_S \to \{S\}_S \to 0. \qquad (7)$$

По теореме 4.1.3* имеется точная последовательность расслоений

$$0 \to \lambda^p \mathfrak{T}(S) \to \lambda^p(\mathfrak{T}(V)_S) \to \lambda^{p-1}(\mathfrak{T}(S)) \otimes \{S\}_S \to 0 \qquad (8)$$

и, по двойственности, для ковариантных p-векторов

$$0 \to \lambda^{p-1}(\boldsymbol{T}(S)) \otimes \{S\}_S^{-1} \to \lambda^p(\boldsymbol{T}(V)_S) \to \lambda^p(\boldsymbol{T}(S)) \to 0. \qquad (8')$$

Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V. Можно образовать тензорное произведение каждого члена последовательности (8′) с ограничением W на S. Мы получим снова точную последовательность. Применяя к этой точной последовательности теорему 16.1.1, получим формулу

$$\chi(S,\ W \otimes \lambda^p(\boldsymbol{T}(V))) = \chi^{p-1}(S,\ W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi^p(S,\ W). \qquad (9)$$

Заменяя теперь в формуле (6) W на $W \otimes \lambda^p(\boldsymbol{T}(V))$ и сравнивая результат с (9), приходим к важной четырехчленной формуле Кодаиры и Спенсера ([3], формула (4))

$$\chi^p(V,\ W) = \chi^p(V,\ W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi^p(S,\ W) + \chi^{p-1}(S,\ W \otimes \{S\}^{-1}). \qquad (10_p)$$

Эта формула выполняется для всех $p \geqslant 0$, если только при $p = 0$ последний член интерпретировать как нуль. Член $\lambda^p(S, W)$ равен нулю для $p = n = \dim V$, а для $p > n$ все четыре члена равны нулю. Если y — переменная, то, умножая (10_p) на y^p и суммируя, получим

$$\chi_y(V,\ W) = \chi_y(V,\ W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi_y(S,\ W) + y\chi_y(S,\ W \otimes \{S\}^{-1}). \qquad (10^*)$$

16.4. Повторно применяя равенство (10_p), можно представить целое число $\chi^p(S, W)$, $p \geqslant 0$, в виде целочисленной линейной комбинации целых чисел вида $\chi^q(V, A)$, где A пробегает некоторые комплексно-аналитические векторные расслоения над V. Прежде всего из $(10_0) = (6)$ получаем, что

$$\chi^0(S,\ W) = \chi^0(V,\ W) - \chi^0(V,\ W \otimes \{S\}^{-1}). \qquad (11_0)$$

Вычисляя $\chi^1(S, W)$ по формуле (10_1) и подставляя вместо $\chi^0(S, W \otimes \{S\}^{-1})$ его выражение, вычисленное по формуле (11_0), находим

$$\chi^1(S,\ W) = \chi^1(V,\ W) - \chi^1(V,\ W \otimes \{S\}^{-1}) - \\ - \chi^0(V,\ W \otimes \{S\}^{-1}) + \chi^0(V,\ W \otimes \{S\}^{-2}). \qquad (11_1)$$

Продолжая этот процесс, получим формулу

$$\chi^p(S,\ W) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [\chi^{p-i}(V,\ W \otimes \{S\}^{-i}) - \chi^{p-i}(V,\ W \otimes \{S\})]^{-(i+1)}, \qquad (11_p)$$

которая справедлива для любого $p \geqslant 0$. Левая часть равенства (11_p) равна 0 при $p \geqslant n$, так как S имеет комплексную размерность $n-1$, в то время как правая часть формально не сокращается. Это означает, что для любого векторного расслоения W и одномерного расслоения $\{S\}$, построенного по неособому дивизору S, между членами $\chi^k(V, W \otimes \{S\}^r)$ существуют определенные соотношения. Остаются ли эти соотношения справедливыми, если в них $\{S\}$ заменить произвольным одномерным расслоением F? Мы увидим, что ответ положителен, если V — алгебраическое многообразие.

16.5. Пусть $\mathbf{Z}\{y\}$ — область целостности всех формальных степенных рядов $a_0 + a_1y + a_2y^2 + \ldots$ с целыми коэффициентами a_i. Кольцо многочленов $\mathbf{Z}[y]$ есть подкольцо кольца $\mathbf{Z}\{y\}$. Из (11_p) невозможно получить выражения для $\chi_y(S, W)$ в виде конечной линейной комбинации многочленов $\chi_y(V, A)$. Однако в области $\mathbf{Z}\{y\}$ имеет место следующая формула:

$$\chi_y(S,\ W) = \sum_{i=0}^{\infty} (-y)^i [\chi_y(V,\ W \otimes \{S\}^{-i}) - \chi_y(V,\ W \otimes \{S\}^{-(i+1)})]. \qquad (11^*)$$

Правая часть в (11*) представляет собой формальный степенной ряд, который в действительности является многочленом степени не выше $n-1$. Коэффициент при y^p этого степенного ряда задается формулой (11_p).

§ 17. Виртуальная χ_y-характеристика

17.1. Мы введем в этом пункте формализм, который позволит дать удобные определения для виртуального χ_y-рода и виртуальной χ_y-характеристики и, кроме того, упростит соответствующие вычисления.

Пусть E — кольцо, содержащее кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$. Число 1 будет единицей кольца E. Рассмотрим кольца $\mathbf{Z}\{y\}$ и $E\{y\}$ формальных степенных рядов с коэффициентами в $\mathbf{Z}$ (соотв. в E). $\mathbf{Z}\{y\}$ является подкольцом кольца $E\{y\}$. Мы назовем отображение

$$h\colon\ E\{y\} \to \mathbf{Z}\{y\}$$

допустимым аддитивным гомоморфизмом (для краткости *d-гомоморфизмом*), если

I) $h(u+v) = h(u) + h(v)$ для $u,\ v \in E\{y\}$,
II) $h(uv) = uh(v)$ для $u \in \mathbf{Z}\{y\}$, $v \in E\{y\}$.

Другими словами, $E\{y\}$ и $\mathbf{Z}\{y\}$ являются модулями над $\mathbf{Z}\{y\}$, и d-гомоморфизм — это гомоморфизм $\mathbf{Z}\{y\}$-модуля $E\{y\}$ в $\mathbf{Z}\{y\}$-модуль $\mathbf{Z}\{y\}$. Из II) следует, что $h(u) = uh(1)$ для $u \in \mathbf{Z}\{y\}$.

Лемма 17.1.1. *Пусть задан аддитивный гомоморфизм h_0 из E в $\mathbf{Z}\{y\}$. Тогда существует, и только один, d-гомоморфизм h из $E\{y\}$ в $\mathbf{Z}\{y\}$, который на E совпадает с h_0.*

Доказательство. Для $v = e_0 + e_1 y + e_2 y^2 + \ldots$, $e_i \in E$, определим

$$h(v) = h_0(e_0) + h_0(e_1)\, y + h_0(e_2)\, y^2 + \ldots;$$

$h_0(e_i)$ в правой части этого ряда являются степенными рядами по y, и правая часть представляет собой степенной ряд по y, так как при формальном перемножении коэффициент при любом y^p, $p \geqslant 0$, будет конечной суммой. Следовательно, h корректно определено. Легко видеть, что h является d-гомоморфизмом и совпадает с h_0 на E. Предполагая, что h' — другой d-гомоморфизм, совпадающий с h_0 на E из I) и II), выводим, что h' совпадает с h на многочленах из $E\{y\}$, и поэтому $h' = h$, что и требовалось доказать.

Пусть заданы d-гомоморфизм h: $E\{y\} \to \mathbf{Z}\{y\}$ и фиксированный элемент $t \in E\{y\}$. Тогда можно определить новый d-гомоморфизм h_t равенством

$$h_t(u) = h(tu).$$

Непосредственным следствием леммы 17.1.1 является

Лемма 17.1.2. *Если для d-гомоморфизмов h и h' из $E\{y\}$ в $\mathbf{Z}\{y\}$ найдется элемент $t \in E\{y\}$, такой, что*

$$h'(u) = h(tu) \text{ для всех } u \in E,$$

то $h' = h_t$, т. е. соотношение $h'(u) = h(tu)$ выполняется для всех $u \in E\{y\}$.

В наших приложениях кольцо E имеет специальный вид. А именно, пусть $f_1, \ldots, f_r, w$ — переменные. Рассмотрим кольцо E, порожденное над $\mathbf{Z}$ этими переменными, вместе с $f_1^{-1}, \ldots, f_r^{-1}$. Произвольный d-гомоморфизм из $E\{y\}$ в $\mathbf{Z}\{y\}$ однозначно определен своими значениями на элементах $w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \ldots f_r^{\lambda_r}$, где μ, λ_i — целые числа, μ неотрицательны, так как эти элементы образуют аддитивный базис для E. Приписывая этим произведениям произвольные значения в $\mathbf{Z}\{y\}$, получим один и только один аддитивный гомоморфизм из E в $\mathbf{Z}\{y\}$ и поэтому по лемме 17.1.1 один и только один d-гомоморфизм из $E\{y\}$ в $\mathbf{Z}\{y\}$, который принимает эти значения.

Пусть V — компактное комплексное многообразие, $F_1, \ldots, F_r$ — комплексно-аналитические одномерные векторные расслоения над V и W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V.

Определим с помощью этих данных два d-гомоморфизма h и $\hat{h}$ из $E\{y\}$ в $\mathbf{Z}\{y\}$, где E — построенное выше кольцо, задав следующие значения этих d-гомоморфизмов на базисных произведениях:

$$\begin{aligned} h\left(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \ldots f_r^{\lambda_r}\right) &= \chi\left(V,\ W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes F_r^{\lambda_r}\right), \quad h(1) = \chi(V), \\ \hat{h}\left(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \ldots f_r^{\lambda_r}\right) &= \chi_y\left(V,\ W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes F_r^{\lambda_r}\right), \quad \hat{h}(1) = \chi_y(V). \end{aligned} \tag{1}$$

Степени в правой части понимаются в смысле тензорных произведений. Для одномерных расслоений определены и отрицательные степени. Легко проверяется следующее утверждение:

Пусть $u \in E\{y\}$ — степенной ряд с постоянным членом u_0. Тогда

$$\hat{h}(u) \in \mathbf{Z}\{y\}. \tag{2}$$

является степенным рядом с постоянным членом $h(u_0)$.

Соглашение. В случае когда над компактным комплексным многообразием V задано конечное число комплексно-аналитических одномерных расслоений и одно векторное расслоение, мы обозначаем эти расслоения прописными латинскими буквами и вводим переменные, находящиеся во взаимно однозначном соответствии с расслоениями и обозначаемые соответствующими строчными латинскими буквами. После этого вводим описанное выше кольцо E и d-гомоморфизмы h и $\hat{h}$, которые мы будем также обозначать через h_V и $\hat{h}_V$, если может возникнуть неясность.

Если S — неособый дивизор на V, то заданные на V расслоения можно ограничить на S. Мы обозначим эти ограничения теми же буквами, что и соответствующие расслоения на V. Применяя (1) к комплексному многообразию S, определим следующим образом d-гомоморфизмы h_S и $\hat{h}_S$:

$$\begin{aligned} h_S\left(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \ldots f_r^{\lambda_r}\right) &= \chi\left(S,\ W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes F_r^{\lambda_r}\right), \quad h_S(1) = \chi(S), \\ \hat{h}_S\left(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \ldots f_r^{\lambda_r}\right) &= \chi_y\left(S,\ W^{\mu} \otimes F_1^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes F_r^{\lambda_r}\right), \quad \hat{h}_S(1) = \chi_y(S). \end{aligned} \tag{3}$$

В соответствии с нашим соглашением сопоставим одномерному расслоению $\{S\}$ над V переменную s. Формула 16.5(11*) может быть тогда переписана следующим образом:

$$\chi_y(S,\ W) = \hat{h}_V\left(w\, \frac{1 - s^{-1}}{1 + ys^{-1}}\right). \tag{4}$$

Обратим внимание на то, что в кольце $E\{y\}$ всякий элемент с постоянным членом 1 имеет мультипликативный обратный. В частности, имеет место формула

$$\chi_y(S) = \hat{h}_V\left(\frac{1 - s^{-1}}{1 + ys^{-1}}\right)$$

и по 16.2(6), (6′)

$$\chi(S,\ W) = h_V(w(1 - s^{-1})), \quad \chi(S) = h_V(1 - s^{-1}).$$

17.2. Теперь мы в состоянии определить виртуальную χ_y-характеристику. Пусть V — компактное комплексное многообразие комплексной размерности n. Пусть $F_1, \ldots, F_r$ — комплексно-аналитические одномерные расслоения над V, W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V. Набор $(F_1, \ldots, F_r)$ называется *виртуальным подмногообразием* в V комплексной размерности $n-r$. Мы допускаем и случай $r > n$.

Определение (ср. 17.1(4)). Положим

$$\chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V = \hat{h}_V\left(w \prod_{i=1}^{r} \frac{1-f_i^{-1}}{1+yf_i^{-1}}\right).$$

$\chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V$ является бесконечным степенным рядом по y с целыми коэффициентами. Мы будем называть его *виртуальной χ_y-характеристикой* векторного расслоения W, ограниченного на виртуальное подмногообразие $(F_1, \ldots, F_r)$. Эта характеристика, очевидно, не зависит от порядка следования F_i. В случае когда W является тривиальным одномерным расслоением, мы обозначаем виртуальную χ_y-характеристику через $\chi_y(F_1, \ldots, F_r)_V$ и называем ее *виртуальным χ_y-родом* виртуального подмногообразия $(F_1, \ldots, F_r)$. Положим

$$\chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V = \sum_{p=0}^{\infty} \chi^p(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V\, y^p$$

и

$$\chi_y(F_1, \ldots, F_r)_V = \sum_{p=0}^{\infty} \chi^p(F_1, \ldots, F_r)_V\, y^p.$$

Вместо χ^0 всегда будем писать просто χ. Согласно 17.1(2)

$$\chi(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V = h_V\left(w \prod_{i=1}^{r}(1-f_i^{-1})\right).$$

Целое число $\chi(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V$ называется *виртуальной χ-характеристикой* векторного расслоения W, ограниченного на виртуальное подмногообразие $(F_1, \ldots, F_r)$. Целое число $\chi(F_1, \ldots, F_r)_V$ называется *виртуальным арифметическим родом* виртуального подмногообразия $(F_1, \ldots, F_r)$.

В частности, виртуальный арифметический род $\chi(F)_V$ одномерного векторного расслоения F над V определен равенством

$$\chi(F)_V = \chi(V) - \chi(V, F^{-1}).$$

Пусть теперь S — неособый дивизор на V. Тогда $\chi_y(S, W)$ определено и является многочленом степени $\leqslant n-1$. Формула 17.1(4) утверждает, что

$$\chi_y(S, W) = \chi_y(\{S\} \mid W)_V. \tag{4'}$$

В этом случае виртуальная χ_y-характеристика является многочленом.

Тот факт, что $\chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V$ является многочленом степени $\leqslant n-r$ и, в частности, что $\chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V$ тождественно равно нулю для $r > n$, будет доказан в теореме 19.2.1 для случая, когда V — алгебраическое многообразие.

Обобщением формулы (4′) является следующая теорема, которая оправдывает введенные определения.

Теорема 17.2.1. *Пусть символы V, W, $F_1, \ldots, F_r$ имеют тот же смысл, что и в начале настоящего пункта. Пусть S — неособый дивизор на V и $\{S\} = F_1$. Тогда*

$$\chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V = \chi_y((F_2)_S, \ldots, (F_r)_S \mid, W_S)_S.$$

Доказательство. Положим

$$\hat{R}(x) = \frac{1-x^{-1}}{1+yx^{-1}}. \tag{5}$$

Тогда по определению

$$\chi_y((F_2)_S, \ldots, (F_r)_S \mid, W_S)_S = \hat{h}_S\left(w \prod_{i=2}^{r} \hat{R}(f_i)\right).$$

Из (1), (3) и (4) легко следует, что

$$\hat{h}_S(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \ldots f_r^{\lambda_r}) = \hat{h}_V(w^{\mu} f_1^{\lambda_1} \ldots f_r^{\lambda_r} \hat{R}(f_1)).$$

Из леммы 17.1.2 для $t = \hat{R}(f_1)$ получаем

$$\hat{h}_S\left(w \prod_{i=2}^{r} \hat{R}(f_i)\right) = \hat{h}_V\left(w \prod_{i=1}^{r} \hat{R}(f_i)\right) = \chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V,$$

что и требовалось доказать.

Из определения виртуальной χ_y-характеристики следует

Лемма 17.2.2. *Если одно из F_i является тривиальным расслоением 1, то*

$$\chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V = 0.$$

17.3. Мы докажем, что для виртуальной χ_y-характеристики выполняется функциональное уравнение, которое мы получили в 11.3 для виртуальной T_y-характеристики.

Теорема 17.3.1. *Пусть V — компактное комплексное многообразие, W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V и $F_1, \ldots, F_r, A, B$ — одномерные комплексно-аналитические расслоения над V. Тогда*

$$\begin{aligned}\chi_y(F_1, \ldots, F_r, A \otimes B \mid, W)_V &= \\ = \chi_y(F_1, \ldots, F_r, A \mid, W)_V &+ \chi_y(F_1, \ldots, F_r, B \mid, W)_V + \\ + (y-1)\,\chi_y(F_1, \ldots, F_r, A, B \mid, W)_V &- \\ - y\chi_y(F_1, \ldots, F_r, A, B, A \otimes B \mid, W)_V.&\end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Положим для краткости $u = w\prod_{i=1}^{r}\widehat{R}(f_i)$. Тогда по (5) доказываемое равенство превратится в

$$\hat{h}(u\widehat{R}(ab)) = \hat{h}(u\widehat{R}(a)) + \hat{h}(u\widehat{R}(b) + (y-1)\hat{h}(u\widehat{R}(a)\widehat{R}(b)) - \\ - y\hat{h}(u\widehat{R}(a)\widehat{R}(b)\widehat{R}(ab)).$$

Согласно 17.1, множители y и $y-1$ можно внести под знак $\hat{h}$, и достаточно доказать, что

$$\widehat{R}(ab) = \widehat{R}(a) + \widehat{R}(b) + (y-1)\widehat{R}(a)\widehat{R}(b) - y\widehat{R}(a)\widehat{R}(b)\widehat{R}(ab).$$

Но это функциональное уравнение нам уже встречалось в 11.3.

Замечание. Функциональное уравнение (6) является соотношением между пятью формальными степенными рядами. Так как не известно, обрываются ли, сходятся ли эти степенные ряды, то, вообще говоря, нельзя подставлять в них вместо y численные значения. Однако можно сравнивать коэффициенты в (6). В результате получаются соотношения между $\chi^p(\ldots|, W)$ для пяти участвующих виртуальных многообразий. Для $\chi^0 = \chi$ это дает

$$\chi(F_1, \ldots, F_r, A\otimes B|, W)_V = \\ = \chi(F_1, \ldots, F_r, A|, W)_V + \chi(F_1, \ldots, F_r, B|, W)_V - \\ - \chi(F_1, \ldots, F_r, A, B|, W)_V. \qquad (6')$$

Это хорошо известное из алгебраической геометрии уравнение для виртуального арифметического рода соответствует в нашем формализме тождеству

$$1-(ab)^{-1} = (1-a^{-1}) + (1-b^{-1}) - (1-a^{-1})(1-b^{-1}).$$

17.4. Пусть V_m — компактное комплексно-аналитическое расщепляющее многообразие (см. 13.5b). По определению касательное $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-расслоение к V_m допускает в комплексно-аналитическом смысле треугольную группу $\Delta(m, \mathbf{C})$ в качестве структурной группы. Определены m диагональных комплексно-аналитических одномерных расслоений $A_1, \ldots, A_m$ (см. 4.1e). Комплексно-аналитическое векторное расслоение $\lambda^p\boldsymbol{T}$ ковариантных p-векторов к V_m допускает в качестве структурной группы треугольную группу $\Delta\left(\binom{m}{p}, \mathbf{C}\right)$, и соответствующие $\binom{m}{p}$ диагональных комплексно-аналитических одномерных расслоений совпадают с

$$A_{i_1}^{-1}\otimes A_{i_2}^{-1}\otimes\ldots\otimes A_{i_p}^{-1},\ i_1 < i_2 < \ldots < i_p$$

(теорема 4.1.1). Отсюда следует по теореме 16.1.2, что для $p \geqslant 0$

$$\chi^p(V_m, W) = \chi(V_m, W\otimes\lambda^p\boldsymbol{T}) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p}\chi(V_m, W\otimes A_{i_1}^{-1}\otimes \\ \otimes A_{i_2}^{-1}\otimes\ldots\otimes A_{i_p}^{-1}) \qquad (7)$$

и с применением нашего формализма (ср. 17.1)

$$\chi_y(V_m, W) = h\left(w\prod_{i=1}^{m}(1+ya_i^{-1})\right). \qquad (8)$$

В п. 13.6 мы доказали формулу (13) о роде Тодда почти комплексного расщепляющего многообразия. Теперь мы выведем соответствующую формулу для арифметического рода $\chi(V_m)$ комплексно-аналитического расщепляющего многообразия V_m.

Теорема 17.4.1. *Пусть V_m — комплексно-аналитическое расщепляющее многообразие с диагональными одномерными комплексно-аналитическими расслоениями $A_1, \ldots, A_m$. Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V_m. Тогда*

$$(1+y)^m\chi(V_m, W) = \sum_{l=0}^{m}y^l\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_l}\chi_y(A_{i_1}, \ldots, A_{i_l}|, W)_V. \qquad (9)$$

Доказательство. Заметим сначала, что формула (9) снова является соотношением между формальными степенными рядами. В обозначениях из 17.1 правая часть может быть записана следующим образом:

$$\sum_{l=0}^{m}y^l\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_l}\hat{h}(w\widehat{R}(a_{i_1})\ldots\widehat{R}(a_{i_l})) = (\text{по определению } \widehat{R}, \text{ см. } (5))$$

$$= \hat{h}\left(\sum_{l=0}^{m}y^l\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_l}w\widehat{R}(a_{i_1})\ldots\widehat{R}(a_{i_l})\right) = (\text{по } 17.1.\ \text{II}))$$

$$= \hat{h}\left(w\prod_{i=1}^{m}(1+y\widehat{R}(a_i))\right) =$$

$$= \hat{h}\left(w\prod_{i=1}^{m}(1+y)(1+ya_i^{-1})^{-1}\right) = (1+y)^m\,\hat{h}\left(w\prod_{i=1}^{m}(1+ya_i^{-1})^{-1}\right).$$

Легко убедиться с помощью (8), что

$$\hat{h}(w^\mu a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\ldots a_r^{\lambda_r}) = h\left(w^\mu a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\ldots a_r^{\lambda_r}\prod_{i=1}^{m}(1+ya_i^{-1})\right).$$

Поэтому, применяя лемму 17.1.2 с

$$t = \prod_{i=1}^{m}(1+ya_i^{-1}),$$

получим

$$(1+y)^m \hat{h}\left(w \prod_{i=1}^{m} (1+ya_i^{-1})^{-1}\right) =$$

$$= (1+y)^m h\left(w \prod_{i=1}^{m} (1+ya_i^{-1})^{-1}(1+ya_i^{-1})\right) = (1+y)^m h(w) =$$

$$= (1+y)^m \chi(V, W),$$

что и требовалось доказать.

§ 18. Обзор фундаментальных теорем Кодаиры

18.1. Пусть V — компактное кэлерово многообразие (см. 15.6). Обозначим через $H^{1,1}(V, \mathbf{R})$ (соотв. $H^{1,1}(V, \mathbf{Z})$) подгруппу элементов типа (1, 1) в $H^2(V, \mathbf{R})$ (соотв. в $H^2(V, \mathbf{Z})$) (см. 1.5). Мы введем в $H^{1,1}(V, \mathbf{R})$ «архимедово полуупорядочение».

Определение. Элемент $x \in H^{1,1}(V, \mathbf{R})$ называется *положительным* ($x > 0$), если он может служить фундаментальным классом некоторой кэлеровой метрики на V.

Для положительных элементов выполняются следующие свойства:

(0) По крайней мере один элемент из $H^{1,1}(V, \mathbf{R})$ положителен.

(1) Нулевой элемент из $H^{1,1}(V, \mathbf{R})$ неположителен.

(2) Если $x > 0$ и $y > 0$, то $x + y > 0$.

(3) Если $x > 0$ и $r > 0$, $r \in \mathbf{R}$, то $rx > 0$.

(4) Если $x, y \in H^{1,1}(V, \mathbf{R})$ и $x > 0$, то найдется (зависящее от x и y) целое положительное число g, такое, что $gx - y > 0$.

Определение. Элемент $x \in H^{1,1}(V, \mathbf{Z})$ называется *положительным*, если x, рассматриваемый как элемент из $H^{1,1}(V, \mathbf{R})$, положителен. Комплексно-аналитическое одномерное расслоение F над V называется *положительным*, если его класс когомологий $c_1(F)$, который по теореме 15.9.1 принадлежит $H^{1,1}(V, \mathbf{Z})$, положителен.

Кэлерово многообразие V называется *многообразием Ходжа* (см. Ходж [2]), если в $H^{1,1}(V, \mathbf{Z})$ существует по крайней мере один положительный элемент, т. е. если V допускает кэлерову метрику, фундаментальный класс которого принадлежит образу естественного гомоморфизма $H^2(V, \mathbf{Z}) \to H^2(V, \mathbf{R})$. Как известно, существуют компактные комплексные многообразия, которые не кэлеровы, а также существуют кэлеровы многообразия, не являющиеся многообразиями Ходжа.

Комплексное проективное пространство $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ является кэлеровым многообразием и автоматически многообразием Ходжа, так как $H^{1,1}(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$, поэтому любой элемент из $H^{1,1}(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{R}) = H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{R})$ после умножения на подходящее

положительное вещественное число попадает в образ гомоморфизма $H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \to H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{R})$. Положительными элементами в $H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ являются в точности положительные целочисленные кратные элемента h_n, класса когомологий ориентированной гиперплоскости $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$ в ориентированном многообразии $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ (см. 4.2).

Алгебраическое многообразие V (см. 0.1) *является многообразием Ходжа*, так как V может рассматриваться как подмногообразие в $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ для достаточно большого m, и тогда ограничение $h_m \in H^2(\mathbf{P}_m(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ на V даст положительный элемент из $H^{1,1}(V, \mathbf{Z})$. Одномерное комплексно-аналитическое расслоение F над V называется *проективно индуцированным*, если оно может быть получено ограничением на V одномерного расслоения H на $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ при подходящем вложении V в проективное пространство $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$, где H — одномерное расслоение, ассоциированное с $\mathbf{C}^*$-расслоением η_m (см. 4.2), определяемое гиперплоским сечением $\mathbf{P}_{m-1}(\mathbf{C})$ в $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$. Проективно индуцированное одномерное расслоение положительно; однако, вообще говоря, существуют положительные одномерные расслоения над V, которые не являются проективно индуцированными. Проективно индуцированные расслоения задаются дивизорами (а именно «гиперплоскими сечениями»). Имеет место

Теорема 18.1.1 (Бертини). *Для любого проективно индуцированного одномерного расслоения F над алгебраическим многообразием V существует неособый дивизор S, такой, что $F = \{S\}$.*

Замечание. Теорему Бертини часто формулируют также так: *«Общее» гиперплоское сечение S неособого связного алгебраического подмногообразия V_n проективного пространства $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ неособо и при $n \geqslant 2$ связно.*

Доказательство см. у Акидзуки [1] и Зарисского [2, 3]. Тот факт, что S неособо, доказывается легко; то, что S при $n \geqslant 2$ связно, нам не понадобится.

Кодаира [6] доказал следующую фундаментальную теорему. Другое доказательство, применимое к нормальным комплексным пространствам, дано Грауэртом [3].

Теорема 18.1.2. *Компактное комплексное многообразие является алгебраическим тогда (и только тогда), когда оно является многообразием Ходжа.*

Доказательство Кодаиры этой теоремы существенно использует одну теорему об обращении в нуль некоторых групп когомологий, которая сама по себе представляет большой интерес. Мы рассмотрим эту последнюю теорему в следующем пункте, а потом обсудим важные для нашей работы следствия из теоремы 18.1.2.

18.2. В п. 14.2 мы сформулировали обобщенную проблему Римана — Роха. Примеры показывают, что $H^0(V, W)$ зависит не только от непрерывного векторного расслоения W. Точнее, имеет место следующее утверждение:

Существуют алгебраическое многообразие V и два комплексно-аналитических векторных расслоения W и W' над V, которые изоморфны как непрерывные расслоения и для которых $\dim H^0(V, W) \neq \neq \dim H^0(V, W)$.

Тем не менее оказывается, что $\chi(V, W)$ зависит только от непрерывного расслоения W и даже $\chi(V, W)$ зависит только от классов Чженя для W. Во многих важных случаях можно доказать, что группы когомологий $H^i(V, W)$ для $i > 0$ все равны нулю. В этих случаях $\dim H^0(V, W) = \chi(V, W)$ и вычисление $\chi(V, W)$ с помощью классов Чженя дает решение проблемы Римана — Роха.

Теорема 18.2.1. *Пусть F — одномерное комплексно-аналитическое векторное расслоение над компактным комплексным многообразием V. Если одномерное расслоение F^{-1} положительно, то группы когомологий $H^i(V, F)$ равны нулю для всех $i \neq n$.*

Эту теорему получил Кодаира [4]. Он доказал ее с помощью дифференциально-геометрических методов, восходящих к С. Бохнеру.

Другое доказательство дали Акидзуки и Накано [1]. Они доказали даже, что если F^{-1} положительно, то группы $H^{p,q}(V, F)$ (см. 15.3а) равны нулю при $p + q < n$.

Применяя теорему двойственности Серра 15.4.3, видим, что теорема 18.2.1 эквивалентна следующей теореме.

Теорема 18.2.2 (Кодаира). *Если расслоение $F \otimes K^{-1}$ положительно, то группы когомологий $H^i(V, F)$ равны нулю для всех $i > 0$. В этом случае*

$$\dim H^0(V, F) = \chi(V, F).$$

Разумеется, эти теоремы содержательны только тогда, когда V является многообразием Ходжа. Из теоремы 18.2.2 и из 18.1 (4) немедленно следует (см. также Гриффитс [3])

Теорема 18.2.3 (Кодаира). *Пусть над многообразием Ходжа V задано одномерное комплексно-аналитическое векторное расслоение F. Далее пусть E — положительное одномерное расслоение над V. Тогда группы когомологий $H^i(V, F \otimes E^k)$ равны нулю для всех $i > 0$ и для всех достаточно больших k.*

Теорема 28.2.2 важна для доказательства основной теоремы Кодаиры 18.1.2 (многообразие Ходжа является алгебраическим многообразием). Кодаира [6] доказывает также следующую теорему:

Теорема 28.2.4. *Пусть дано многообразие Ходжа V. Тогда существует положительный элемент $x_0 \in H^{1,1}(V, \mathbf{Z})$, такой, что всякое одномерное расслоение F, для которого $c_1(F) - x_0 > 0$, проективно индуцировано.*

Из предыдущей теоремы следует

Теорема 18.2.5. *Пусть V — алгебраическое многообразие и F — одномерное векторное расслоение над V. Тогда существуют проективно индуцированные одномерные расслоения A и B, такие, что $F = A \otimes B^{-1}$. В качестве следствия получаем, что F можно записать в виде*

$$F = \{S\} \otimes \{T\}^{-1},$$

где S и T — неособые дивизоры в V.

Доказательство. Выберем проективно индуцированное одномерное расслоение E над V, такое, что $c_1(E) - x_0 > 0$. Для достаточно большого k имеем $kc_1(E) - c_1(F) - x_0 > 0$. По теореме 18.2.4 тогда $B = E^k \otimes F^1$ и $A = E^k$ — проективно индуцированные одномерные расслоения. Имеем $F = A \otimes B^{-1}$. Следствие вытекает из теоремы Бертини (18.1.1) с $A = \{S\}$ и $B = \{T\}$.

Замечание. Этим доказано также, что F можно представить дивизором. Отсюда следует также, что группа классов дивизоров для V, естественно, изоморфна с $H^1(V, \mathbf{C}^*_\omega)$ (см. 15.2 и Кодаира и Спенсер [2]). Тот факт, что всякий дивизор D на алгебраическом многообразии линейно эквивалентен дивизору вида $S - T$, где S и T неособы, может быть доказан элементарно (см. Зариский [4]).

Начиная с этого места, мы не будем различать многообразия Ходжа и алгебраические многообразия. Во многих случаях (см. следующий пункт) можно показать, что заданное компактное многообразие V допускает метрику Ходжа; в этих случаях V будет автоматически алгебраическим.

18.3. Пусть L — комплексно-аналитическое расслоение над алгебраическим многообразием V с комплексным проективным пространством $\mathbf{P}_r(\mathbf{C})$ в качестве слоя и проективной группой $\mathbf{PGL}(r + 1, \mathbf{C})$ в качестве структурной группы. Ясно, что L является компактным комплексным многообразием. С помощью какой-нибудь метрики Ходжа на V и стандартной метрики Ходжа на $\mathbf{P}_r(\mathbf{C})$ можно построить метрику Ходжа на L. Это дает такую теорему:

Теорема 18.3.1 (Кодаира). *Комплексно-аналитическое расслоение L над алгебраическим многообразием V со слоем $\mathbf{P}_r(\mathbf{C})$ и структурной группой $\mathbf{PGL}(r + 1, \mathbf{C})$ само является алгебраическим многообразием.*

Детали доказательства см. у Кодаиры ([6], теорема 8).

А. Борель следующим образом обобщил предыдущую теорему (также с использованием основной теоремы 18.1.2 Кодаиры).

Теорема 18.3.1* (А. Борель). *Пусть L — комплексно-аналитическое расслоение над алгебраическим многообразием V с алгебраическим многообразием F в качестве слоя и со связной структурной группой. Предположим, что первое число Бетти для F равно нулю. Тогда L алгебраично.*

Мы будем применять теорему Бореля только в том случае, когда $\mathbf{F}(q)$ является многообразием флагов $\mathbf{F}(q) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C})$, а L ассоциировано с главным $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоением ξ над V. В этом случае алгебраичность L можно доказать непосредственно индукцией по q с помощью теоремы 18.3.1.

А именно рассмотрим ассоциированное с L расслоение L' со слоем $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$. Тогда L будет комплексно-аналитическим расслоением над L' со слоем $\mathbf{F}(q-1) = \mathbf{GL}(q-1, \mathbf{C})/\Delta(q-1, \mathbf{C})$. По теореме 18.3.1 L' алгебраично, а по индукции и L алгебраично.

Тот факт, что $\mathbf{F}(q)$ алгебраично, в этом доказательстве не был использован. Это можно получить, положив V равным точке. Тогда $L = \mathbf{F}(q)$.

Замечание. Если в этой теореме всюду алгебраичность заменить на кэлеровость, то получится частный случай одной теоремы Бланшара [2].

§ 19. Виртуальная χ_y-характеристика для алгебраических многообразий

Мы определили в § 17 виртуальную χ_y-характеристику $\chi_y(F_1, \ldots, F_r |, W)_V$ компактного комплексного многообразия V, комплексно-аналитических одномерных расслоений $F_1, \ldots, F_r$ и комплексно-аналитического векторного расслоения W над V; $\chi_y(F_1, \ldots, F_r |, W)_V$ по определению является формальным степенным рядом от переменной y с целыми коэффициентами. Для алгебраического многообразия V можно получить специальные утверждения о виртуальной χ_y-характеристике, используя теорему 18.2.5.

19.1. Нульмерное компактное комплексное многообразие состоит из конечного числа изолированных точек.

Лемма 19.1.1. *Для нульмерного компактного комплексного многообразия V, состоящего из k точек, для одномерных расслоений $F_1, \ldots, F_r$ и для векторного расслоения W со слоем $\mathbf{C}_q$ над V имеем*

I) $\chi_y(V, W) = qk$;

II) $\chi_y(F_1, \ldots, F_r |, W) = 0$ *при* $r \geqslant 1$.

Доказательство: I) $\chi_y(V, W) = \chi(V, W) = \dim H^0(V, W) = qk$.

II) Над V все одномерные расслоения тривиальны, поэтому II) следует из леммы 17.2.2.

19.2. По определению $\chi_y(V, W)$ является многочленом (т. е. обрывающимся степенным рядом) с целыми коэффициентами. Мы теперь докажем индукцией по размерности n многообразия V, что также и виртуальная χ_y-характеристика в случае алгебраического многообразия всегда является многочленом.

Теорема 19.2.1. *Пусть V — алгебраическое многообразие размерности n; $F_1, \ldots, F_r$ $(r \geqslant 1)$ — комплексно-аналитические одномерные расслоения над V; W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V со слоем $\mathbf{C}_q$. Тогда*

a) *виртуальная χ_y-характеристика $\chi_y(F_1, \ldots, F_r |, W)$ равна нулю при $r > n$. Если $r \leqslant n$, то она является многочленом от y степени $\leqslant n-r$ с целыми коэффициентами.*

b) *Если $r = n \geqslant 1$, то обозначим классы когомологий для F_i через $f_i \in H^2(V, \mathbf{Z})$. Тогда*

$$\chi_y(F_1, \ldots, F_r |, W) = \chi(F_1, \ldots, F_r |, W) = q \cdot f_1 f_2 \ldots f_n [V].$$

Доказательство a) проводится индукцией по размерности многообразия V.

Утверждение a) по лемме 19.1.1 имеет место для $\dim V = 0$; предположим, что оно уже доказано для $\dim V < n$. По теореме 18.2.5 $\{S\} = F_1 \otimes \{T\}$, где S и T — неособые дивизоры на V. Из функционального уравнения (6) теоремы 17.3.1 получаем

$$\begin{aligned} \chi_y(\{S\}, F_2, \ldots, F_r |, W) &= \chi_y(F_1, \ldots, F_r |, W) + \\ &+ \chi_y(\{T\}, F_2, \ldots, F_r |, W) + (y-1)\chi_y(\{T\}, F_1, \ldots, F_r |, W) - \\ &- y\chi_y(\{S\}, \{T\}, F_1, \ldots, F_r |, W). \qquad (*) \end{aligned}$$

Это функциональное уравнение содержит 5 членов. Мы должны доказать, что второй член является многочленом степени $\leqslant n-r$. По предположению индукции и теореме 17.2.1 члены 1, 3, 4, 5 являются многочленами степени $\leqslant n-r$ и равны нулю при $r > n$. (В случае $r=1$ член 1 равен $\chi_y(S, W_S)$, а член 3 равен $\chi_y(T, W_T)$, следовательно, эти члены являются многочленами степени $\leqslant n-1$ по определению χ_y-характеристики (не виртуальной).) Таким образом, и член 2 является многочленом степени $\leqslant n-r$ и равен нулю при $r > n$, что и требовалось доказать.

b) Опять по теореме 18.2.5 имеются неособые дивизоры S и T на V, такие, что $\{S\} = F_1 \otimes \{T\}$.

Тогда a) дает для $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned} \chi(\{S\}, F_2, \ldots, F_n |, W) &= \chi(F_1, F_2, \ldots, F_n |, W) + \\ &+ \chi(\{T\}, F_2, \ldots, F_n |, W) \qquad (1) \end{aligned}$$

и для $n = 1$

$$\chi(\{S\} |, W) = \chi(F_1 |, W) + \chi(\{T\} |, W). \qquad (2)$$

По формуле (2) и лемме 19.1.1 в случае $n=1$ имеем

$$\chi(F_1 \mid, W) = qs - qt = qf_1[V_1],$$

где s и t — количество точек в S и T. Следовательно, b) справедливо, если $\dim V = 1$. Предположим теперь, что b) доказано для $1 \leqslant \dim V < n$. Применим предположение индукции к (1) и, воспользовавшись теоремами 17.2.1, 4.9.1 и 9.2(3), получим

$$\begin{aligned}\chi(F_1, F_2, \ldots, F_n \mid, W) &= q\cdot(f_2 \ldots f_n)_S[S] - q\cdot(f_2 \ldots f_n)_T[T] = \\ &= q\cdot c_1(\{S\}) f_2 \ldots f_n[V] - q\cdot c_1(\{T\}) f_2 \ldots f_n[V] = \\ &= q\cdot f_1 f_2 \ldots f_n V.\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. В случае $n=1$ из теоремы 19.2.1b) следует теорема Римана — Роха (см. 0.5). Пусть F — одномерное комплексно-аналитическое векторное расслоение над алгебраической кривой V с классом когомологий $f \in H^2(V, \mathbf{Z})$. Выберем в качестве W тривиальное расслоение 1. Тогда виртуальный χ-род для F^{-1} равен

$$\chi(F^{-1}) = -f[V].$$

Но по 17.2 $\chi(F) = \chi(V) - \chi(V, F^{-1})$; следовательно, подставляя F^{-1} вместо F, получим

$$\chi(V, F) = \chi(V) + f[V]. \tag{3}$$

По теореме 15.7.1 $\chi(V) = 1 - g_1 = 1 - p$, где $p =$ (половина первого числа Бетти для V) = (род V). Целое число $f[V]$ называется степенью F. Если F представлен дивизором, что всегда возможно, то $\deg F$ равно числу нулей минус число полюсов дивизора. Из теоремы двойственности 15.4.3 следует, что

$$\begin{aligned}\chi(V, F) &= \dim H^0(V, F) - \dim H^1(V, F) = \\ &= \dim H^0(V, F) - \dim H^0(V, K \otimes F^{-1})\end{aligned}$$

и, следовательно, (3) превращается в

$$\dim H^0(V, F) - \dim H^0(V, K \otimes F^{-1}) = 1 - p + \deg(F).$$

19.3. Обозначим через $(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V$ набор, состоящий из алгебраического многообразия V, комплексно-аналитического векторного расслоения W над V и одномерных комплексно-аналитических векторных расслоений $F_1, \ldots, F_r$ над V. Мы допускаем и случай $r=0$, но в этом случае будем писать (V, W) вместо $(\ldots \mid, W)_V$.

Т е о р е м а 9.3.1. *Пусть G — функция, сопоставляющая всякому множеству $(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V$ степенной ряд по переменной y с рациональными коэффициентами. Предположим, что $G(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V$ не зависит от порядка следования F_i и что*

I) $G(V, W) = \chi_y(V, W)$;

II) *G удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\begin{aligned}G(F_1, \ldots, F_r, A \otimes B \mid, W)_V &= \\ = G(F_1, \ldots, F_r, A \mid, W)_V &+ G(F_1, \ldots, F_r, B \mid, W)_V + \\ +(y-1)\, G(F_1, \ldots, F_r, A, B \mid, W)_V &- G(F_1, \ldots, F_r, A, B, A \otimes B \mid, W)_V;\end{aligned}$$

III) *если S — неособый дивизор на V и $F_1 = \{S\}$, то*

$$G(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V = G((F_2)_S, \ldots, (F_r)_S \mid, W_S)_S$$

(для $r=1$ это означает, что $G(F_1 \mid, W)_V = G(S, W_S)$). Если $F_1 = \{0\} = 1$, то $G(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V = 0$.

Тогда для всех $(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V$ с $r \geqslant 1$

$$\chi_y(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V = G(F_1, \ldots, F_r \mid, W)_V.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. χ_y обладает свойствами II) и III), поэтому функция $\chi_y - G$ обладает свойствами II) и III). Значит, достаточно доказать, что всякая функция G', которая обладает свойствами II), III) и свойством

$$\text{I}') \qquad G'(V, W) = 0,$$

тождественно равна нулю.

Мы докажем это индукцией по размерности n многообразия V. По теореме 18.2.5 имеются неособые дивизоры S и T на V, такие, что $\{S\} = F_1 \otimes \{T\}$. Тогда из II) следует соотношение (*) из 19.2, в котором χ_y заменено на G'. В этом соотношении пять членов, и мы должны показать, что второй член равен нулю. Из предположения индукции и условия III) следует, что члены 1, 3, 4, 5 равны нулю. [При $r=1$ для доказательства того, что члены 1 и 3 равны нулю, надо воспользоваться условием I$'$.] Следовательно, член 2 равен нулю, что и требовалось доказать.

В следующей теореме мы будем рассматривать только виртуальный χ_y-род, т. е. векторное расслоение W будет тривиальным одномерным расслоением. Виртуальное подмногообразие (см. 17.2) в V будет обозначаться через $(F_1, \ldots, F_r)_V$. Мы допускаем также случай $r=0$ и в этом случае будем писать V вместо $(\ldots)_V$. По теореме 19.2.1 степенной ряд $\chi_y(F_1, \ldots, F_r)_V$ является на самом деле многочленом с целыми коэффициентами. Следовательно, вместо y можно подставлять значения y_0. Если y_0 рационально, то и $\chi_{y_0}(F_1, \ldots, F_r)_V$ будет рациональным числом; если y_0 — целое число, то таким же будет и $\chi_{y_0}(F_1, \ldots, F_r)_V$.

Теорема 19.3.2. *Пусть G — функция, сопоставляющая каждому множеству $(F_1, \ldots, F_r)_V$ рациональное число, не зависящее от порядка следования F_i. Предположим, что*

I) $G(V) = \chi_{y_0}(V)$ *для некоторого рационального* y_0;

II) G *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$G(F_1, \ldots, F_r, A \otimes B)_V = G(F_1, \ldots, F_r, A)_V + G(F_1, \ldots, F_r, B)_V + \\ + (y_0 - 1)\, G(F_1, \ldots, F_r, A, B)_V - y_0 G(F_1, \ldots, F_r, A, B, A \otimes B)_V;$$

III) *если S — неособый дивизор на V и $F_1 = \{S\}$, то*

$$G(F_1, \ldots, F_r)_V = G((F_2)_S, \ldots, (F_r)_S)_S$$

(для $r = 1$ это значит, что $G(F_1)_V = G(S)$). Если $F_1 = \{0\} = 1$, то $G(F_1, \ldots, F_r)_V = 0$.

Тогда для всех $(F_1, \ldots, F_r)_V$ с $r \geqslant 1$

$$\chi_{y_0}(F_1, \ldots, F_r)_V = G(F_1, \ldots, F_r)_V.$$

Доказательство в точности такое же, как у теоремы 19.3.1.

Замечание. Причина, по которой мы выбираем W тривиальным расслоением, состоит в том, что мы будем применять теорему 19.3.2 именно в сформулированном выше виде. То же самое доказательство показывает, что верна формулировка теоремы 19.3.2 для произвольных $(F_1, \ldots, F_r | , W)_V$, которая, однако, не является более общей, так как вместе с заключением усиливаются и исходные предположения. Индукционный метод доказательства теорем 19.2.1, 19.3.1, 19.3.2 часто используется в алгебраической геометрии. Некоторые результаты достаточно доказывать для алгебраических многообразий (не виртуальных), а потом теорема 18.2.5 позволяет распространить их на виртуальные многообразия. Мы сформулировали этот индукционный принцип только в той общности, которая нужна для целей этой книги, правда, за счет некоторых повторений в формулировках и доказательствах.

19.4. Пусть $(F_1, \ldots, F_r | , W)_V$ таково же, как и в 19.2, и пусть $f_i \in H^2(V, \mathbf{Z})$ — классы когомологий для F_i. Комплексно-аналитическое векторное расслоение W ассоциировано с комплексно-аналитическим $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоением ξ, которое можно рассматривать как непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение. В 12.3 была определена виртуальная T_y-характеристика $T_y(f_1, \ldots, f_r | \xi)\, V$. Мы будем писать

$$\begin{gathered} T_y(F_1, \ldots, F_r | , W)_V = T_y(f_1, \ldots, f_r | \xi)_V, \\ T_y(V, W) = T_y(V, \xi). \end{gathered} \tag{4}$$

По теоремам 12.3.1 и 12.3.2 T_y-характеристика обладает всеми свойствами, требуемыми от функции G в теореме 19.3.1, кроме свойства

I) $T_y(V, W) = \chi_y(V, W)$,

которое еще не доказано. Однако заметим уже теперь, что *для доказательства совпадения T_y и χ_y для всех $(F_1, \ldots, F_r | , W)_V$ достаточно доказать* I).

19.5. Виртуальный T_y-род является многочленом по y с рациональными коэффициентами, поэтому можно подставлять вместо y значения y_0. Если y_0 — произвольное, но фиксированное, рациональное число, то по теоремам 11.2.1 и 11.3.1 $T_{y_0}(F_1, \ldots, F)_V$ обладает всеми свойствами функции G из теоремы 19.3.2, кроме свойства

I) $T_{y_0}(V) = \chi_{y_0}(V)$,

которое еще не доказано. Заметим, однако, что достаточно доказать I) для всех алгебраических многообразий V, чтобы получить, что χ_{y_0} и T_{y_0} совпадают для всех $(F_1, \ldots, F_r)_V$.

Мы покажем теперь, что I) имеет место для $y_0 = 1$ и $y_0 = -1$. Из теоремы об индексе 8.2.2 следует (см. 10.2(6)), что для $y_0 = 1$

$$T_1(V) = \tau(V) = \text{индекс } V.$$

Из теоремы 4.10.1 вытекает (см. 10.2(5)), что для $y_0 = 1$

$$T_{-1}(V) = E(V) = \text{эйлерова характеристика } V.$$

Из теоремы 15.8.1 и теоремы Ходжа об индексе 15.8.2 следуют соответствующие результаты для χ_y-рода:

$$\begin{gathered} \chi_1(V) = \tau(V), \\ \chi_{-1}(V) = E(V). \end{gathered}$$

Для $y_0 = 1$ или $y_0 = -1$ функция T_{y_0} удовлетворяет всем условиям на функцию G из теоремы 19.3.2, поэтому имеет место

Теорема 19.5.1. *Виртуальный T_y-род и виртуальный χ_y-род совпадают для $y_0 = 1$ и для $y_0 = -1$:*

Пусть V — алгебраическое многообразие, $F_1, \ldots, F_r$ — одномерные комплексно-аналитические расслоения над V с классами когомологий $f_1, \ldots, f_r \in H^2(V, \mathbf{Z})$. Тогда

$$\chi_1(F_1, \ldots, F_r)_V = T_1(F_1, \ldots, F_r)_V = \tau(f_1, \ldots, f_r)_V$$

и

$$\chi_{-1}(F_1, \ldots, F_r)_V = T_{-1}(F_1, \ldots, F_r)_V = T_{-1}(f_1, \ldots, f_r)_V.$$

§ 20. Теорема Римана — Роха для алгебраических многообразий и одномерных векторных комплексно-аналитических расслоений

Мы теперь в состоянии доказать, что для алгебраического многообразия V род Тодда $T(V)$ и арифметический род $\chi(V)$ совпадают. Отсюда следует теорема Римана — Роха для одномерных векторных комплексно-аналитических расслоений над V.

20.1. Мы докажем сначала совпадение $T(V)$ и $\chi(V)$ для алгебраических многообразий, являющихся комплексно-аналитическими расщепляющими многообразиями.

Теорема 20.1.1. *Пусть V — алгебраическое многообразие, которое является комплексно-аналитическим расщепляющим многообразием. Тогда*

$$\chi(V)=T(V).$$

Доказательство. Над V определены диагональные одномерные комплексно-аналитические расслоения $A_1, \ldots, A_m$, $m = \dim V$. По формуле 13.6(13) и теореме 17.4.1 имеем

$$(1+y)^m T(V)=\sum_{l=0}^{m} y^l \sum_{i_1<\ldots<i_l} T_y(A_{i_1}, \ldots, A_{i_l})_V,$$

$$(1+y)^m \chi(V)=\sum_{l=0}^{m} y^l \sum_{i_1, \ldots, i_l} \chi_y(A_{i_1}, \ldots, A_{i_l})_V.$$

T_y являются многочленами. Так как V алгебраично, то и χ_y — многочлены (теорема 19.2.1). Эти два равенства показывают, что для доказательства равенства $T(V)=\chi(V)$ достаточно найти $y_0 \neq -1$, такое, что T_{y_0} и χ_{y_0} совпадают для алгебраического многообразия и его виртуальных подмногообразий $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_l})_V$. По теореме 19.5.1 χ_{y_0} и T_{y_0} совпадают в этом смысле для $y_0 = 1$. Этим завершается доказательство.

Замечание. Интересно заметить, что совпадения T_{y_0} и χ_{y_0} для $y_0=-1$ недостаточно для доказательства теоремы. Совпадение T_{y_0} и χ_{y_0} для $y_0=1$ основано на теореме 8.2.2 о том, что индекс гладкого многообразия представим многочленом от классов Понтрягина. Эта теорема в свою очередь доказывалась с помощью теории кобордизмов Тома.

20.2. В п. 13.4 мы построили по произвольному компактному комплексному многообразию V_n компактное комплексно-аналитическое расщепляющее многообразие V^{Δ}; V^{Δ} является комплексно-аналитическим расслоением над V с многообразием флагов $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})/\Delta(n, \mathbf{C})$ в качестве слоя. С помощью этой конструкции мы можем свести доказательство равенства $\chi(V)=T(V)$, где V — произвольное алгебраическое многообразие, к теореме 20.1.1. Для этого мы используем следующую теорему.

Теорема 20.2.1. *Пусть ξ — комплексно-аналитическое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над алгебраическим многообразием V. Рассмотрим ассоциированное с ξ расслоение V' с многообразием флагов $\mathbf{F}(q)=\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C})$ в качестве слоя. Тогда компактное комплексное многообразие V' алгебраично и*

$$\chi(V')=\chi(V).$$

Доказательство. Алгебраичность V' следует из теоремы 18.3.1. Пусть φ — проекция V' на V. Расслоение $\varphi^*\xi$ над V' допускает в качестве структурной группы треугольную группу $\Delta(q, \mathbf{C})$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_q$ — соответствующие диагональные $\mathbf{C}^*$-расслоения, а γ_i — их классы когомологий, которые мы рассмотрим как элементы из $H^2(V', \mathbf{C})$. Расслоения ξ_i — комплексно-аналитические, поэтому элементы γ_i имеют тип $(1, 1)$ (см. теорему 15.9.1). Гомоморфизм φ^* мономорфно отображает кольцо когомологий $H^*(V, \mathbf{C})$ в кольцо когомологий $H^*(V', \mathbf{C})$ (см. Борель [2]). Так как φ — комплексно-аналитическое отображение, то при гомоморфизме φ^* элемент типа (p, q) переходит в элемент типа (p, q). Хорошо известно, что кольцо когомологий $H^*(V', \mathbf{C})$ порождается $\varphi^*H^*(V, \mathbf{C})$ и γ_i (см. Борель [2]). Так как все γ_i имеют тип $(1, 1)$, то ясно, что все классы когомологий типа $(0, p)$ из $H^*(V', \mathbf{C})$ содержатся в $\varphi^*H^*(V, \mathbf{C})$. Поэтому $h^{0,p}(V')=h^{0,p}(V)$, что и требовалось доказать.

Теорема 20.2.2. *Для алгебраического многообразия V арифметический род $\chi(V)$ совпадает с родом Тодда $T(V)$.*

Доказательство. Построим по V расщепляющее многообразие V^{Δ}. По предыдущей теореме V^{Δ} — алгебраическое многообразие и

$$\chi(V)=\chi(V^{\Delta}). \tag{1}$$

По теореме 14.3.1

$$T(V)=T(V^{\Delta}). \tag{2}$$

По теореме 20.1.1

$$\chi(V^{\Delta})=T(V^{\Delta}). \tag{3}$$

Из (1)—(3) и следует наше утверждение.

20.3. Теорема 20.2.2 утверждает что χ_y-род и T_y-род для алгебраического многообразия совпадают при $y=0$. Отсюда вытекает как следствие (см. 19.5)

Теорема 20.3.1. *Для алгебраического многообразия V и комплексно-аналитических одномерных расслоений $F_1, \ldots, F_r$ над V имеем*

$$\chi(F_1, \ldots, F_r)_V = T(F_1, \ldots, F_r)_V.$$

При $r=1$ эта теорема утверждает, что

$$\chi(F)_V=T(F)_V.$$

Виртуальный род одномерного расслоения можно выразить через (не виртуальный) род многообразия.

По 17.2 и 12.1(4) имеем

$$\chi(F)_V=\chi(V)-\chi(V, F^{-1}),$$

$$T(F)_V=T(V)-T(V, F^{-1}).$$

Таким образом, заменяя F на F^{-1}, из теорем 20.2.2 и 20.3.1 получаем формулу

$$\chi(V,\ F) = T(V,\ F). \tag{4}$$

Формула (4) — это теорема Римана — Роха для алгебраического многообразия V и комплексно-аналитического одномерного расслоения F над V.

Вспоминая (см. 15.9), что классом когомологий для F является первый класс Чженя для $\mathbf{C}^*$-расслоения, ассоциированного с F, можем сформулировать полученный результат так:

Теорема 20.3.2. *Пусть V — алгебраическое многообразие размерности n и F — комплексно-аналитическое одномерное расслоение над V с классом когомологий $f \in H^2(V, \mathbf{Z})$. Группы когомологий $H^i(V, F)$ для V с коэффициентами в пучке ростков голоморфных сечений расслоения F являются конечномерными комплексными векторными пространствами, которые равны 0 при $i > n$. Характеристика Эйлера — Пуанкаре*

$$\chi(V,\ F) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(V,\ F)$$

может быть следующим образом представлена в виде многочлена от класса когомологий f и классов Чженя c_i многообразия V:

$$\chi(V,\ F) = \varkappa_n \left[e^f \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}} \right]. \tag{4*}$$

Формулу (4*) *надо понимать так:*
Запишем формально

$$1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = (1 + \gamma_1 x) \ldots (1 + \gamma_n x), \quad c_i \in H^{2i}(V,\ \mathbf{Z}). \tag{5}$$

В выражении в квадратных скобках рассмотрим член степени n от f и γ_i. Он симметричен по γ_i и является, следовательно, многочленом от f и c_i с рациональными коэффициентами. Если произведения понимаются в смысле $\smile$-произведения кольца когомологий $H^*(V, \mathbf{Z})$, то полученный многочлен представляет собой элемент из $H^{2n}(V, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$. Значение этого элемента на $2n$-мерном цикле многообразия V, определяемом естественной ориентацией, и есть целое число $\chi(V, F)$.

Эта теорема при $F = 1\ (f = 0)$ дает теорему 20.2.2.

Формула (4*) может быть записана также в следующем виде (см. 1.7):

$$\chi(V,\ F) = \varkappa_n \left[e^{f + \frac{1}{2} c_1} \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i/2}{\operatorname{sh} \gamma_i/2} \right]. \tag{6}$$

Степенной ряд $\frac{x}{\operatorname{sh} x}$ есть степенной ряд от x^2. Элементарные симметрические функции от γ_i^2 представляют собой классы Понтрягина $p_1, p_2, \ldots$ многообразия V, которые зависят только от гладкой структуры многообразия V (см. 4.6). Поэтому мы получаем в качестве следствия

$\chi(V, F)$ есть многочлен от $f + \frac{1}{2} c_1$ и от классов Понтрягина p_i многообразия V.

В терминах многочленов A_i (см. 1.6) получаем из формулы (6)

$$\chi(V,\ F) = \sum \frac{1}{2^{4s} r!} \left(f + \frac{1}{2} c_1 \right)^r A_s(p_1,\ \ldots,\ p_s)[V], \tag{6*}$$

где суммирование распространено на все r, s, такие, что $r + 2s = n = \dim V$.

Равенство $\chi(V, F) = T(V, F)$ дает в качестве непосредственного следствия:

Число $\chi(V, F)$ зависит только от класса когомологий f для F.

Этот результат был доказан Серром и Кодаирой и Спенсером [4].

20.4. В этом и следующих пунктах мы сделаем несколько замечаний о связи изложенных результатов с классической теорией (см. 0.1—0.5).

Пусть F и G — два фиксированных комплексно-аналитических одномерных расслоения над алгебраическим многообразием V. Тогда $\chi(V, F \otimes G^k)$ есть целое число, зависящее от k. По теореме 20.3.2

$$\chi(V,\ F \otimes G^k) = T(V,\ F \otimes G^k).$$

По определению T ясно, что $\chi(V, F \otimes G^k)$ есть многочлен по k степени $\leqslant n = \dim V$. Обозначая далее классы когомологий для F и G через f и g, легко видеть, что коэффициент при k^n в этом многочлене равен $\frac{1}{n!} g^n[V]$. Естественно, что постоянный член этого многочлена равен $\chi(V, F)$.

Итак,

$$\begin{gathered} \chi(V,\ F \otimes G^k) = a_0 + a_1 k + \ldots + a_n k^n, \\ a_0 = \chi(V,\ F), \quad a_n = \frac{1}{n!} g^n [V]. \end{gathered} \tag{7}$$

a_i являются рациональными числами, которые по (4*) можно представить в виде многочленов от f и g и классов Чженя для V.

Замечание. Тот факт, что $\chi(V, F \otimes G^k)$ есть многочлен по k, и формулу для a_n можно легко вывести непосредственно из теоремы 19.2.1. Формула (4*) для этого не нужна. Разумеется, таким образом не получается точной информации о всех коэффициентах a_i. Ж.-П. Серр также доказал, что для алгебраического многообразия V $\chi(V, F\otimes G^k)$ является многочленом по k, и отсюда вывел с помощью многообразия Пикара для V, что $\chi(V, F)$ зависит только от класса когомологий f для F (см. конец предыдущего пункта).

Пусть теперь G — положительное одномерное расслоение (см. 18.1). Тогда найдется целое число k_0, зависящее от F и G, такое, что одномерное расслоение $F\otimes G^k\otimes K^{-1}$ положительно при $k>k_0$ (K — каноническое одномерное расслоение, см. 15.3а). Таким образом, по теореме 18.2.2

$$\dim H^0(V, F\otimes G^k)=\chi(V, F\otimes G^k) \quad \text{для} \quad k\geqslant k_0.$$

Итак, для произвольного одномерного расслоения F и для положительного одномерного расслоения G для достаточно больших k имеем

$$\dim H^0(V, F\otimes G^k)=a_0+a_1k+\ldots+a_nk^n; \tag{8}$$

коэффициент a_0 не зависит от G и совпадает с $\chi(V, F)$. В случае когда G проективно индуцировано, т. е. принадлежит классу гиперплоского сечения в подходящем вложении V в комплексное проективное пространство, это — известные факты классической теории (гильбертова характеристическая функция, постулирование). В этом случае, как хорошо известно, a_0 в (8) не зависит от G (будем писать $a_0=a_0(F)$), и в рамках классической теории $\chi(V, F)$ можно определить равенством

$$\chi(V, F)=a_0(F). \tag{9}$$

По двойственности Серра (15.5(14)), или, если угодно, по 12.2(12)

$$a_0(F)=(-1)^n a_0(K\otimes F^{-1}). \tag{10}$$

В классической теории арифметический род определяется двумя способами:

$$p_a(V)=(-1)^n(-1+a_0(1)) \quad \text{и} \quad P_a(V)=-(-1)^n+a_0(K). \tag{11}$$

Давно было открытой проблемой, совпадают ли $p_a(V)$ и $P_a(V)$? Севери (см., например, Севери [1]) предполагал, что для связного V

$$p_a(V)=P_a(V)=g_n-g_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}g_1,$$

т. е., что

$$p_a(V)=P_a(V)=(-1)^n(-1+\chi(V)). \tag{12}$$

Эти уравнения получаются из (10) при $F=\mathbf{1}$. Равенства (12) утверждают, что три определения для арифметического рода в классической теории совпадают между собой. Этот результат был получен Кодаирой и Спенсером [1] описанным выше путем. Подробнее об истории вопроса см. работы Кодаиры [1, 2, 5].

Теорема 20.2.2 утверждает, что четвертое определение арифметического рода, а именно определение рода Тодда, совпадает с предыдущими (ср. 0.2).

20.5. Пусть V есть n-мерное алгебраическое многообразие и K — каноническое одномерное расслоение над V. Если c_1 — первый класс Чженя для V, то по теореме 4.4.3 (см. также 12.2 и 15.9) K имеет класс когомологий $-c_1$. Определены *кратные роды* для

$$P^i=\dim H^0(V, K^i),$$

где K^i — i-я степень для K в смысле тензорного умножения векторных расслоений.

Имеем

$$P^1=\dim H^0(V, K)=\dim H^n(V, \mathbf{1})=g=(\text{геометрический род } V)$$

(i в P^i является индексом, а не показателем степени).

В одном интересном частном случае кратные роды могут быть вычислены с помощью теоремы Римана — Роха 20.3.2 и теоремы 18.2.2.

А именно предположим, что расслоение K положительно. Тогда

$$\chi(V, K^i)=P^i \quad \text{для} \quad i\geqslant 2,$$

$$\chi(V, K^i)=\varkappa_n\left[\exp\left(-\frac{1}{2}(2i-1)c_1\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j/2}{\operatorname{sh}\gamma_j/2}\right], \tag{13}$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{P^i}{i^n}=\frac{1}{n!}(-c_1^n)[V]\neq 0.$$

Это предположение выполняется, например, в случае, если V есть факторпространство ограниченной области пространства $\mathbf{C}_n$ по дискретной группе автоморфизмов области, не имеющей неподвижных точек (Кодаира [6]). Кратный род P^i в этом случае совпадает с числом комплексно-линейно независимых автоморфных форм веса i.

20.6. Пусть F — комплексно-аналитическое одномерное расслоение над n-мерным алгебраическим многообразием V. Тогда $\chi(V, F)$ вычисляется по формуле (4*) теоремы 20.3.2, где f — класс когомологий для F. В формуле (4*) перед произведением стоит множитель e^f. Однако в кольце когомологий для V имеем

$$e^f=(1-(1-e^{-f}))^{-1}=\sum_{j=0}^{n}(1-e^{-f})^j.$$

Из этой формулы следует по определению виртуального рода Тодда (и с учетом того факта, что виртуальные T- и χ-роды совпадают) следующая формула:

$$\chi(V,\ F)=\chi(V)+\chi(F)_V+\chi(F,\ F)_V+\ \dots\ +\chi\underbrace{(F,\ F,\ \dots,\ F)_V}_{n\ \text{раз}}, \qquad (14)$$

предугаданная Севери [1].

Сопоставим алгебраическому многообразию V числа

$$\psi_j=\chi\underbrace{(K,\ K,\ \dots,\ K)}_{j\ \text{раз}},\quad \psi_0=\chi(V).$$

Они связаны с классическими инвариантами Ω_i соотношениями

$$\psi_n=\Omega_0=(-c_1)^n[V],\ \ \psi_j=(-1)^{n-j}\,\Omega_{n-j}+1.$$

Формула (14) с F, замененным на K, дает

$$(-1)^n\,\psi_0=\sum_{j=0}^{n}\psi_j \qquad (14')$$

(Севери). Максвелл и Тодд [1] нашли все универсальные соотношения между числами ψ_j. Все эти соотношения легко доказываются с помощью виртуального рода Тодда. Приведем еще один пример.

Определение виртуального рода Тодда показывает, что

$$\psi_j=\varkappa_n\left[(1-e^{c_1})^j\prod_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}\right].$$

Это выражение имеет множитель $(1-e^{c_1})^j$, поэтому выражение для $\sum\limits_{j=0}^{n}2^{n-j}\psi_j$ имеет множитель

$$\sum_{j=0}^{n}2^{n-j}(1-e^{c_1})^j=2^{n+1}/(1+e^{c_1}).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{n}2^{n-j}\psi_j=\varkappa_n\left[2^{n+1}\frac{e^{c_1/2}}{1+e^{c_1}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i/2}{\operatorname{sh}\gamma_i/2}\right].$$

Так как $\dfrac{e^{c_1/2}}{1+e^{c_1}}$ есть четная функция от c_1, то выражение в [ ] не содержит членов нечетной степени по c_1 и γ_j. Таким образом, получаем

$$\sum_{j=0}^{n}2^{n-j}\psi_j=0, \qquad (15)$$

если n нечетно.

Замечание. Вычисления, проведенные в этом пункте, можно было бы провести, не предполагая равенства T-рода χ-роду. Для этого нужно было бы применить формализм § 17, теорему 19.2.1 и формулу двойственности 15.5(14). Таким образом можно получить все соотношения Максвелла — Тодда. Однако после того, как T и χ идентифицированы, значительно проще производить вычисления с помощью T-рода. Вычисления в формализме § 17 в точности аналогичны вычислениям с T-родом. Читатель, вероятно, заметил, что степенные ряды § 17 в точности соответствуют множителям в вычислениях с T-родом [соотв. с T_y-родом], т. е. выражениям, которые стоят перед $\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}$ $\left[\text{соотв. перед } \prod\limits_{i=1}^{n}Q(y,\ \gamma_i)\right]$ (см. 1.8). Например, если нам дано одномерное комплексное векторное расслоение F, то в формализме § 17 ему соответствовала переменная f, а в вычислениях с T-родом — множитель e^f (f — класс когомологий для F).

20.7. В заключение этого параграфа мы сделаем несколько замечаний о теореме Римана — Роха для алгебраических поверхностей. Пусть V — алгебраическая поверхность, т. е. алгебраическое многообразие комплексной размерности 2, и F — комплексно-аналитическое одномерное векторное расслоение над V с классом когомологий $f\in H^2(V,\mathbf{Z})$. Тогда по формуле (4*) теоремы 20.3.2 с использованием двойственности Серра имеем

$$\dim H^0(V,\ F)-\dim H^1(V,\ F)+\dim H^0(V,\ K\otimes F^{-1})=$$
$$=\frac{1}{2}(f^2+fc_1)[V]+\frac{1}{12}(c_1^2+c_2^2)[V]. \qquad (16)$$

Чтобы выразить это в классических обозначениях, предположим V связным. Определим *избыточность* для F (см. Зарисский [1]) равенством

$$\sup(F)=\dim H^1(V,\ F).$$

Целое число $f^2[V]$ называется *виртуальной степенью* $g(F)$ для F. Теперь формулу (16) легко привести к обычной форме теоремы Римана — Роха.

Иначе можно было бы воспользоваться 20.6(14); в результате получаем

$$\dim H^0(V,\ F)+\dim H^0(V,\ K\otimes F^{-1})=$$
$$=\chi(V)+\chi(F)_V+g(F)+\sup F. \qquad (17)$$

В классической терминологии $\chi(F)=1-\pi(F)$, где $\pi(F)$ — „виртуальный род для F“ а $\chi(V)=1+p_a(V)$. Обратим внимание еще на то (см. 15.2), что

$$\dim|F|+1=\dim H^0(V,F),\ \ \dim|K\otimes F^{-1}|+1=\dim H^0(V,K\otimes F^{-1}),$$

так что (17) перейдет в следующую формулу классической теории:

$$\dim|F|+\dim|K\otimes F^{-1}|=p_a(V)-\pi(F)+g(F)+\sup(F). \quad (18)$$

Из формулы (18) еще не следует в отличие от формулы (16), что $\chi(V)=T(V)$. Это уравнение в классической теории появляется в следующем виде.

Определим *линейный род*

$$p^{(1)}=g(K)+1=c_1^2[V]+1.$$

Из (18), где F заменено на K, получается другое определение

$$1-\pi(K)=1-p^{(1)}=\chi(K).$$

Инвариант Цойтена — Сегре I для K определяется равенством $c_2[V]=I+4$, а арифметический род $p_a(V)$ равен $p_a(V)=\chi(V)-1$. Следовательно, соотношение

$$\chi(V)=\frac{1}{12}(c_1^2+c_2)[V]=T(V)$$

перейдет в

$$12p_a+9=p^{(1)}+I. \quad (19)$$

Это соотношение принадлежит М. Нётеру (см. Зарисский [1]).

§ 21. Теорема Римана — Роха для алгебраических многообразий и комплексно-аналитических векторных расслоений

21.1. Мы докажем в этом пункте основную теорему о том, что

$$\chi(V,W)=T(V,W), \quad (1)$$

где V — алгебраическое многообразие, а W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V. Эта теорема будет называться *теоремой Римана — Роха для векторных расслоений* (или кратко *теоремой РР*).

Теорема 21.1.1. *Пусть V — алгебраическое многообразие размерности n и W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V со слоем C_q. Пусть $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — классы Чженя для V и $d_0, d_1, \ldots, d_q$ — классы Чженя для W ($c_0=d_0=1$; $c_i, d_i\in H^{2i}(V,\mathbf{Z})$). Группы когомологий $H^i(V,W)$ являются конечномерными векторными пространствами, тривиальными для $i>n$. Характеристика Эйлера — Пуанкаре*

$$\chi(V,W)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim H^i(V,W)$$

может быть выражена как многочлен $T(V,W)$ от классов Чженя c_i и d_i

$$\chi(V,W)=\varkappa_n\left[(e^{\delta_1}+\ldots+e^{\delta_q})\prod_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}\right]=$$
$$=\varkappa_n\left[e^{c_1/2}(e^{\delta_1}+\ldots+e^{\delta_q})\prod_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i/2}{\operatorname{sh}\gamma_i/2}\right]=T(V,W). \quad (1^*)$$

Уравнение (1*) *следует понимать следующим образом. Рассмотрим формальные разложения*

$$\sum_{i=0}^{n}c_ix^i=\prod_{i=1}^{n}(1+\gamma_ix), \qquad \sum_{i=0}^{q}d_ix^i=\prod_{i=1}^{q}(1+\delta_ix).$$

Тогда однородная часть степени n для выражения в квадратных скобках является многочленом от c_i и d_i. Этим определяется элемент из $H^{2n}(V,\mathbf{Z})\otimes\mathbf{Q}$, и надо взять его значение на фундаментальном $2n$-мерном цикле многообразия.

Прежде чем доказывать теорему, сделаем несколько замечаний и обсудим один частный случай. Разумеется, теорема 20.3.2 содержится в качестве частного случая в теореме РР. Из теоремы РР также следует, что число $\chi(V,W)$ зависит только от непрерывного векторного расслоения W и даже только от классов Чженя для W. Этот факт в противоположность случаю одномерного расслоения, по-видимому, не был доказан без использования теоремы РР. Это, возможно, связано с тем, что для $\mathbf{GL}(q,\mathbf{C})$-расслоений не существует (для фиксированных V и $q>1$) алгебраического многообразия, точки которого классифицировали бы комплексные аналитические $\mathbf{GL}(q,\mathbf{C})$-расслоения над V, тривиальные в топологическом смысле. Для $q=1$ такое алгебраическое многообразие существует, оно называется *многообразием Пикара* для V (см. Серр [1], Кодаира и Спенсер [2]).

Теорема 21.1.1 известна для $n=1$, т. е. для алгебраических кривых. В этом случае А. Вейль доказал следующее:

Теорема 21.1.2 (А. Вейль [1]). *Пусть W и W' — векторные расслоения над связной алгебраической кривой V со слоями $\mathbf{C}_r$ и $\mathbf{C}_{r'}$. Пусть $d_1\in H^2(V,\mathbf{Z})$ — первый класс Чженя для W, а $d_1'\in H^2(V,\mathbf{Z})$ — первый класс Чженя для W'. Тогда*

$$\chi(V,W\otimes W'^*)=\dim H^0(V,W\otimes W'^*)-\dim H^0(V,K\otimes W^*\otimes W')=$$
$$=r'd_1[V]-rd_1'[V]+rr'(1-p),$$

где p — род V.

Доказательство с помощью теоремы РР. Обозначим формальные корни для W, W' через δ_i, δ_i'. Тогда получим, используя теорему 4.4.3 или формулу 10.1 (4),

$$\chi(V, W\otimes W^*) = \varkappa_1\left[e^{c_1/2}\left(e^{\delta_1}+\ldots+e^{\delta_r}\right)\left(e^{-\delta'_1}+\ldots+e^{-\delta'_{r'}}\right)\right] = \varkappa_1\left[(1+c_1/2)(r+d_1)(r'-d'_1)\right],$$

что и требовалось доказать.

Приступим теперь к доказательству теоремы РР.

Мы должны показать, что $\chi(V, W) = T(V, W)$. Пусть ξ — ассоциированное с W комплексно-аналитическое $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над V. Рассмотрим ассоциированное с ξ расслоение E с многообразием флагов $\mathbf{F}(q) = \mathbf{GL}(q, \mathbf{C})/\Delta(q, \mathbf{C})$ в качестве слоя, и обозначим через φ проекцию E на V. По теореме 14.3.1

$$T(V, W) = T(E, \varphi^*W). \tag{2}$$

По одной теореме А. Бореля, которую мы приведем в следующем пункте,

$$\chi(V, W) = \chi(E, \varphi^*W)\,\chi(F(q)).$$

Так как арифметический род для $\mathbf{F}(q)$ равен 1 (см. 15[10]), то

$$\chi(V, W) = \chi(E, \varphi^*W). \tag{3}$$

Расслоение ψ^*W комплексно-аналитически допускает треугольную группу $\Delta(q, \mathbf{C})$ в качестве структурной группы. Тем самым над E определены q диагональных одномерных комплексно-аналитических расслоений $A_1, \ldots, A_q$ и по формуле 12.15 и теореме 16.1.2

$$T(E, \varphi^*W) = \sum_{i=1}^{q} T(E, A_i) \quad \text{и} \quad \chi(E, \varphi^*W) = \sum_{i=1}^{q}\chi(E, A_i). \tag{4}$$

Так как E по теореме 18.3.1* является алгебраическим многообразием, то по теореме 20.3.a

$$\chi(E, A_i) = T(E, A_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant q. \tag{5}$$

Из (2)—(5) следует, что $\chi(V, W) = T(V, W)$, что и требовалось доказать.

21.2. А. Борель доказал следующую теорему, которая была использована при доказательстве основной теоремы 21.1.1 и которая ранее не была опубликована.

Теорема 21.2.1. *Пусть E — комплексно-аналитическое расслоение над компактным комплексным многообразием V с компактным связным кэлеровым многообразием F в качестве слоя и со связной структурной группой. Тогда E автоматически будет компактным комплексным многообразием. Пусть φ — проекция E на V. Пусть над V задано комплексно-аналитическое векторное расслоение W. Тогда*

$$\chi_y(E, \varphi^*W) = \chi_y(V, W)\,\chi_y(F). \tag{6}$$

В частности, при $y = 0$

$$\chi(E, \varphi^*W) = \chi(V, W)\,\chi(F), \quad \chi(E) = \chi(V)\,\chi(F). \tag{7}$$

Следствие. *Если E, V и F — кэлеровы многообразия, то для индекса τ имеем*

$$\tau(E) = \tau(V)\,\tau(F). \tag{8}$$

По теореме 15.8.2 следствие есть просто частный случай, когда $y = 1$, W тривиально. Доказательство теоремы 21.2.1, принадлежащее А. Борелю, использует спектральную последовательность для $\bar\partial$-когомологий комплексно-аналитического расслоения. Оно приведено в приложении 2.

Замечания. 1) В случае когда F есть многообразие флагов, приведенная выше формула (6) соответствует формулам (10), (10*) из 14.3 и 14.4.

В работе Чжень, Хирцебрух и Серр [1] показано, что формула (8) справедлива в случае, когда E, V, F — компактные связные ориентированные многообразия, если только ориентация E индуцирована ориентациям V и F и если фундаментальная группа $\pi_1 V$ действует тривиально на когомологиях слоя $H^*(F)$.

2) Теорема 20.2.1 является частным случаем теоремы 21.2.1. В теореме 20.2.1 мы доказали в точности ту часть теоремы 21.2.1, которая нам была нужна.

3) Для доказательства теоремы РР в предыдущем пункте нам достаточно знать формулу (7) только для того случая, когда F есть многообразие флагов. По индукции (см. 18.3) достаточно поэтому доказать уравнение (7) для случая, когда F есть комплексное проективное пространство. В этом случае $\chi(F) = 1$, и можно показать, что

$$\dim H^i(V, W) = \dim H^i(E, \varphi^*W), \tag{9}$$

что влечет за собой уравнение $\chi(V, W) = \chi(E, \varphi^*W)$.

Прямое доказательство формулы (9) дано в приложении 1 (23.2(2)).

21.3. Теорема РР позволяет полностью идентифицировать χ- и T-теории. Имеем

$$\chi(V, W\otimes\lambda^p\boldsymbol{T}) = T(V, W\otimes\lambda^p\boldsymbol{T})$$

и, следовательно,

$$\chi^p(V, W) = T^p(V, W).$$

Так как χ^p и T^p являются коэффициентами многочленов χ_y и T_y, то

$$\chi_y(V, W) = T_y(V, W).$$

Заметим, что $\chi^p(V, W)$ зависит только от непрерывного векторного расслоения W. В случае когда W — одномерное расслоение, этот факт можно доказать непосредственно [Кодаира и Спенсер [4]). Приведем явную формулу для $\chi^p(V)$ (в случае $W = 1$) (см. 12.2(9)):

$$\chi^p(V) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{p,q}(V) =$$

$$= \varkappa_n \left[\sum e^{-(\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_p})} \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}} \right] =$$

$$= \varkappa_n \left[\sum e^{\frac{1}{2}(\pm\gamma_{i_1} \pm \dots \pm \gamma_{i_n})} \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i/2}{\operatorname{sh} \gamma_i/2} \right]. \qquad (10)$$

Последняя сумма распространена на все комбинации знаков, в которых минус встречается в точности p раз.

Из 19.4 следует, что χ_y и T_y совпадают также и в виртуальном случае, так что мы приходим к следующей теореме.

Теорема 21.3.1. *Пусть V — алгебраическое многообразие, $F_1, \dots, F_r$ — комплексно-аналитические одномерные расслоения над V, W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над W. Тогда*

$$\chi_y(F_1, \dots, F_r \,|, W)_V = T_y(F_1, \dots, F_r \,|, W)_V. \qquad (11)$$

Замечание. Полагая в предыдущей формуле $r = 0$ (см. 19.3) и $y = 0$, получим в точности теорему РР. Таким образом, формула (11) является наиболее общим результатом этой главы. Однако эта формула не является существенным обобщением теоремы РР. Центральным результатом является теорема РР.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теперь имеются по крайней мере четыре других доказательства теоремы Римана — Роха. Атья и Зингер [1] доказали, что равенство $\chi(V, W) = T(V, W)$ имеет место для комплексно-аналитического векторного расслоения W над произвольным компактным комплексным многообразием V. Их метод основан частично на доказательстве теоремы об индексе 8.2.2 гл. 2 и описан в § 25. Из рассуждений п. 21.3 легко следует тогда, что χ-теория и T-теория совпадают на любом компактном комплексном многообразии, т. е. теорема 21.3.1 справедлива для компактного комплексного многообразия V. В частности, $\chi_1(V) = T_1(V) = \tau(V)$, так что теорема Ходжа об индексе 15.8.2 справедлива, если V — компактное комплексное многообразие.

Прямое доказательство того, что $\chi(V) = T(V)$, не использующее теоремы об индексе, принадлежит Уошницеру. Доказательство проводится для того случая, когда V — алгебраическое многообразие или даже неособое алгебраическое многообразие, определенное над алгебраически замкнутым полем **K**.

Из результатов Чжоу и Серра следует, что $\chi(V)$ и $T(V)$ могут быть определены и в этом случае (см. Серр [2, 4], Борель — Серр [2], Гротендик [4]). Опубликованный вариант (Уошницер [2]) содержит аксиоматическое описание арифметического рода $\chi(V)$, но, к сожалению, не содержит доказательства того, что $T(V)$ удовлетворяет этим аксиомам.

Теорема Гротендика — Римана — Роха описана в § 23. Она относится к собственным отображениям $f: V \to X$ алгебраических многообразий (см. Борель и Серр [2]). Если X — точка, то эта теорема превращается в теорему Римана — Роха для алгебраического векторного расслоения W над неособым проективным многообразием V, определенным над алгебраически замкнутым полем **K**. Если $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, то из результатов Серра [4] о сравнении аналитических и алгебраических пучков следует теорема Римана — Роха для комплексно-аналитических векторных расслоений W над алгебраическим многообразием V.

Другое доказательство теоремы Гротендика — Римана — Роха для случая $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ дано в Атья и Хирцебрух [8]. В случае когда $f: V \to X$ — вложение, доказательство проходит для произвольных компактных комплексных многообразий V, X. Для произвольных f нужно предполагать, что V, X — алгебраические многообразия. Этот подход дает самое короткое из известных доказательств теоремы Римана — Роха, но, как и в этой книге, он годится только, когда V — (комплексное) алгебраическое многообразие.

Приложение 1

Р. Шварценбергер

§ 22. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ РИМАНА—РОХА

Мы рассмотрим три типичных приложения теоремы Римана — Роха. В первом из них теорема Римана — Роха используется для вычисления инвариантов полных пересечений в проективном пространстве (22.1). Во втором — для вычисления инвариантов алгебраических многообразий, возникающих из ограниченных однородных симметрических областей Э. Картана (22.2—22.3). Третье приложение относится к изучению комплексных векторных расслоений над проективным пространством (22.4).

22.1. Рассмотрим r неособых гиперповерхностей $F^{(a_1)}, \ldots, F^{(a_r)}$ степеней $a_1, \ldots, a_r$ в комплексном проективном пространстве $\mathbf{P}_{n+r}(\mathbf{C})$. Пересечение $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)} = F^{(a_r)} \cap \ldots \cap F^{(a_r)}$ будет алгебраическим многообразием размерности n, если гиперповерхности находятся в общем положении. Проблема состоит в вычислении χ_y-характеристики для алгебраического многообразия $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$. Оказывается, что она зависит только от целых чисел $a_1, \ldots, a_r, n$ и не зависит от специального выбора гиперповерхностей $F^{(a_1)}, \ldots$ $\ldots, F^{(a_r)}$.

Пусть H — одномерное расслоение над $\mathbf{P}_{n+r}(\mathbf{C})$, ассоциированное с $\mathbf{C}^*$-расслоением η_{n+r} (см. 4.2). Тогда H соответствует классу дивизоров гиперплоскости $\mathbf{P}_{n+r-1}(\mathbf{C})$ и имеет класс когомологий $c_1(\eta_{n+r}) = h \in H^2(\mathbf{P}_{n+r}(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. Одномерное расслоение H^{a_i} соответствует классу дивизоров гиперповерхности $F^{(a_i)}$. Если $j\colon V_n^{(a_1, \ldots, a_r)} \to \mathbf{P}_{n+r}(\mathbf{C})$ — вложение, то мы будем писать $\tilde{h}$ вместо j^*h и $\tilde{H}$ вместо j^*H.

Рассмотрим случай $r = 1$. По 4.8.1 существует точная последовательность векторных расслоений над $F^{(a_1)}$

$$0 \to \mathfrak{T}(F) \to j^*\mathfrak{T}(P) \to j^*H^{a_1} \to 0,$$

где $\mathfrak{T}(F)$ и $\mathfrak{T}(P)$ — касательные расслоения к $F^{(a_1)}$ и $\mathbf{P}_{n+1}(\mathbf{C})$. Следовательно,

$$c(\mathfrak{T}(F)) = j^*\left(c(\mathfrak{T}(P)) \cdot c\left(H^{a_1}\right)^{-1}\right) = (1 + \tilde{h})^{n+2}(1 + a_1\tilde{h})^{-1}.$$

Теорему 4.8.1 можно применить r раз и получить полный класс Чженя для алгебраического многообразия $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$:

$$c(\mathfrak{T}(V_n)) = (1 + \tilde{h})^{n+r+1}(1 + a_1\tilde{h})^{-1} \ldots (1 + a_r\tilde{h})^{-1}. \tag{1}$$

Теорема 22.1.1. *Пусть V_n — полное пересечение r гиперповерхностей степеней $a_1, \ldots, a_r$, находящихся в общем положении в $\mathbf{P}_{n+r}(\mathbf{C})$, и пусть z — переменная. Тогда χ_y — характеристика одномерного расслоения $\tilde{H}^k$ над V_n — задается формулой*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_y(V_n, \tilde{H}^k) z^{n+r} = \frac{(1 + zy)^{k-1}}{(1 - z)^{k+1}} \prod_{i=1}^{r} \frac{(1 + zy)^{a_i} - (1 - z)^{a_i}}{(1 + zy)^{a_i} + y(1 - z)^{a_i}}. \tag{2}$$

Доказательство (Хирцебрух [3], § 2.1). По теореме Римана — Роха 21.3.1

$$\chi_y(V_n, \tilde{H}^k) = T_y(V_n, \tilde{H}^k).$$

Пусть $R(x) = \left[(1 - e^{-x(y+1)})^{-1}(y + 1) - y\right]^{-1}$. Тогда из (1) следует, что

$$T_y(V_n, \tilde{H}^k) = \varkappa_n\left[e^{(1+y)k\tilde{h}}\left(\tilde{h}R(\tilde{h})^{-1}\right)^{n+r+1} \prod_{i=1}^{r} (a_i\tilde{h})^{-1} R(a_i\tilde{h})\right] =$$

$$= \varkappa_n\left[e^{(1+y)k\tilde{h}}\tilde{h}^{n+1}R(\tilde{h})^{-n-r-1} \prod_{i=1}^{r} a_i^{-1}R(a_i\tilde{h})\right].$$

Член степени n является кратным $\tilde{h}^n$ и $\tilde{h}^n[V_n] = a_1a_2 \ldots a_r$. Поэтому $T_y(V_n, \tilde{H}^k)$ совпадает с коэффициентом при x^{-1} в

$$e^{(1+y)kx}R(x)^{-n-r-1} \prod_{i=1}^{r} R(a_ix).$$

Этот коэффициент можно сосчитать как вычет при $x = 0$. Подстановка $z = R(x)$ дает

$$e^{(1+y)x} = \frac{1 + zy}{1 - z}, \qquad dz = (1 + zy)(1 - z)\,dx,$$

$$R(ax) = \frac{(1 + zy)^a - (1 - z)^a}{(1 + zy)^a + y(1 - z)^a}.$$

Следовательно, $T_y(V_n, \tilde{H}^k)$ является вычетом для

$$z^{-n-r-1}\frac{(1 + zy)^{k-1}}{(1 - z)^{k+1}} \prod_{i=1}^{r} \frac{(1 + zy)^{a_i} - (1 - z)^{a_i}}{(1 + zy)^{a_i} + (1 - z)^{a_i}}$$

при $z = 0$, как и требовалось.

Следствие. *Если $y = 0$, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(V_n, \tilde{H}^k) z^{n+r} = (1 - z)^{-k-1} \prod_{i=1}^{r} \left(1 - (1 - z)^{a_i}\right).$$

Аналогично, случаи $y=-1$, $y=+1$ дают уравнения для эйлеровой характеристики и для индекса многообразия $V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$.

Замечание. Теорема 22.1.1 может быть доказана непосредственно, исходя из четырехчленной формулы 16.3(10), и это доказательство было получено раньше доказательства теоремы Римана — Роха. Легко показать, что теорема имеет место также и при $r=0$. Следствие дает в случаях $r=0$ и $r=1$ хорошо известные формулы для $\chi(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), H^k)$ и $\chi(V_n^{(r)}, \tilde{H}^k)$, которые, например, были использованы у Хирцебруха и Кодаиры [1] и у Брискорна [1].

Теорему 22.1.1 можно использовать для вычисления чисел $h^{p,q}$ для V_n (см. 15.4). Это возможно в силу следующей теоремы.

Теорема 22.1.2. *Пусть* $V_n = V_n^{(a_1, \ldots, a_r)}$ — *полное пересечение. Тогда* $h^{p,q}(V_n) = \delta_{p,q}$ *для* $p+q \neq n$ *и*

$$\chi^p(V_n) = (-1)^{n-p} h^{p,n-p}(V_n) + (-1)^p \quad \text{для} \quad 2p \neq n,$$

$$\chi^m(V_n) = (-1)^m h^{m,m}(V_n) \quad \text{для} \quad 2m = n.$$

Доказательство можно найти у Хирцебруха [3], § 2.2. Оно проводится индукцией с использованием теоремы Лефшеца о гиперплоских сечениях (Ботт [4]).

22.2. Пусть M — ограниченная область в $\mathbf{C}_n$, снабженная эрмитовой метрикой Бергмана (Кодаира [6], стр. 42). Эта метрика является кэлеровой, и она инвариантна относительно комплексно-аналитических гомеоморфизмов многообразия M. Пусть $I(M)$ — группа всех таких гомеоморфизмов, и пусть $Y = M/\Delta$ — фактор-пространство относительно действия подгруппы Δ группы $I(M)$. Каноническое отображение $p: M \to Y$ является накрытием компактного комплексного многообразия Y, если

(a) Δ *действует дискретно, т. е. любое компактное подмножество из* M *пересекается лишь с конечным числом своих образов относительно* Δ;

(b) M/Δ *компактно*;

(c) Δ *действует свободно, т. е. только тождественный элемент из* Δ *имеет неподвижные точки.*

Из свойств (a)—(c) вытекает (см. Кодаира [6], стр. 41), что каноническое одномерное расслоение K над Y является положительным (см. 18.1). Следовательно, из теоремы 18.1.2 следует, что Y является алгебраическим многообразием.

Голоморфная функция f на M называется *автоморфной формой относительно* Δ *веса* r, если для всех $x \in M$, $\gamma \in \Delta$

$$f(\gamma x) = J_\gamma^{-r}(x) f(x),$$

где $J_\gamma(x)$ — якобиан преобразования γ в точке x. Комплексное векторное пространство всех автоморфных форм относительно Δ веса r изоморфно $H^0(Y, K_Y^r)$. Размерность этого векторного пространства, т. е. число линейно независимых автоморфных форм относительно Δ веса r, обозначается через $\Pi_r(M, \Delta)$. Так как K_Y положительно, то теоремы 18.2.1 и 18.2.2 показывают, что группы когомологий для Y с коэффициентами в пучке ростков голоморфных сечений расслоения K_Y^r равны нулю во всех размерностях $\neq 0$, если $r \geqslant 2$, и равны нулю во всех размерностях $\neq n$, если $r \leqslant -1$. Следовательно (см. 20.5(13)),

$$\begin{aligned} &\Pi_r(M, \Delta) = 0 \quad \text{для} \quad r \leqslant -1, \\ &\Pi_0(M, \Delta) = 1, \\ &\Pi_1(M, \Delta) = g_n, \\ &\Pi_r(M, \Delta) = \chi(Y, K_Y^r) \quad \text{для} \quad r \geqslant 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь g_n — число линейно независимых голоморфных форм степени n на $Y = M/\Delta$.

Предположим теперь, что ограниченная область M *однородна*, т. е. что M допускает транзитивную группу комплексно-аналитических гомеоморфизмов. Классы Чженя c_i для Y можно представить дифференциальными формами, так что любое разбиение $\pi = (j_1, \ldots, j_p)$ числа n определяет дифференциальную форму $P(\pi)$ степени $2n$ и типа (n, n), которая представляет класс когомологий $c_{j_1} \ldots c_{j_p}$. Так как M однородно, то $p^*P(\pi) = s(\pi) \cdot V$, где $s(\pi)$ — вещественное число, зависящее только от M и от разбиения π, а V — инвариантный элемент объема на M по отношению к метрике Бергмана (Хирцебрух [5], § 2).

Теорема 22.2.1. *Пусть* Δ_1, Δ_2 — *две подгруппы группы* $I(M)$, *удовлетворяющие условиям* (a)—(c), v_i — *объем* $Y_i = M/\Delta_i$ *по отношению к метрике Бергмана на ограниченной однородной области* M, *и пусть* $c = v_1/v_2$. *Тогда*

$$\chi_y(Y_1) = c\chi_y(Y_2), \quad \Pi_r(M, \Delta_1) = c\Pi_r(M, \Delta_2) \quad \text{для} \quad r \geqslant 2.$$

Доказательство. Пусть $s_i(\pi)$ — числа Чженя $c_{j_1} \ldots c_{j_p}[Y_i]$ для Y_i, соответствующие разбиению π. Тогда $s_i(\pi) = s(\pi) v_i$ и

$$s_1(\pi) = cs_2(\pi) \quad \text{для всех} \quad \pi = (j_1, \ldots, j_p).$$

Следовательно, это же выполняется и для любой линейной комбинации чисел Чженя. В частности, формулы (3) и теорема Римана — Роха показывают, что указанная пропорциональность имеет место для $\chi_y(Y_i)$ и для $\Pi_r(M, \Delta_i)$, $r \geqslant 2$.

Предположим, теперь, что ограниченная однородная область M еще и *симметрична*, т. е. что для любой точки $x \in M$ существует комплексно-аналитический гомеоморфизм $\sigma_x: M \to M$, который имеет x в качестве изолированной неподвижной точки и является инволюцией ($\sigma_x^2 = 1$). Следующий частный случай одной теоремы Бореля показывает, что при этом предположении всегда существуют алгебраические многообразия вида M/Δ.

Теорема 22.2.2 (Борель [4]). *Пусть M — ограниченная однородная симметрическая область, и пусть $I(M)$ — группа комплексно-аналитических гомеоморфизмов для M. Тогда*

I) *$I(M)$ содержит подгруппу Δ, удовлетворяющую условиям* (a)—(c).

II) *Если Δ является подгруппой группы $I(M)$, удовлетворяющей условиям* (a) *и* (b), *то Δ содержит нормальную подгруппу конечного индекса, удовлетворяющую условиям* (a)—(c).

Замечание. В рассматриваемом случае (a) выполняется тогда и только тогда, когда Δ — дискретная подгруппа группы $I(M)$, а условие (b) эквивалентно компактности $I(M)/\Delta$ (Борель [4], стр. 112).

22.3. Пусть M — ограниченная однородная симметрическая область в $\mathbf{C}_n$. Тогда M разлагается в произведение $M = N_1 \times \ldots \times N_s$ неприводимых ограниченных однородных симметрических областей N_k. Каждая из областей N_k является факторпространством $N = G/H$ некоторой простой некомпактной группы Ли G с тривиальным центром по максимальной компактной связной подгруппе H, центр которой имеет вещественную размерность единица. Можно сопоставить G некоторую компактную группу Ли G', которая также содержит H. Факторпространство $N' = G'/H$ является компактным неприводимым однородным эрмитовым симметрическим многообразием, которое содержит открытое подмножество, комплексно-аналитически гомеоморфное N (Борель [1]). Полное описание этой конструкции можно найти у Хелгасона ([1], стр. 321).

У Бореля и Хирцебруха ([1], часть 1, стр. 520) показано, что каноническое одномерное расслоение для N' отрицательно в смысле Кодаиры (и, следовательно, N' является алгебраическим многообразием).

Пусть $e \in N \subset N'$ — точка, соответствующая единичному элементу групп G, G'. По формуле Э. Картана тензор кривизны в e, ассоциированный с инвариантной метрикой на N', является отрицательным кратным тензора кривизны в e, ассоциированного с инвариантной метрикой на N (см. Хирцебрух [5]).

Пусть $M' = N'_1 \times \ldots \times N'_s$ и $e = (e_1 \ldots e_s) \in M$. Тогда M можно рассматривать как открытое подмножество в M', и инвариантные дифференциальные формы, представляющие заданное число Чженя для M и M', отличаются в точке e на некоторый положительный множитель со знаком $(-1)^n$. Это является следствием приведенного выше свойства тензоров кривизны. Как и в теореме 22.2.1, применение теоремы Римана — Роха дает:

Теорема 22.3.1. *Пусть M — ограниченная однородная симметрическая область в $\mathbf{C}_n$, и пусть $I(M)$ — группа комплексно-аналитических гомеоморфизмов для M. Пусть $Y = M/\Delta$ — факторпространство по подгруппе $\Delta \subset I(M)$, удовлетворяющей условиям* (a)—(c) *п.* 22.2, *и пусть M' — компактное симметрическое многообразие, соответствующее M. Тогда существует вещественное число c, такое, что*

$$\chi_y(Y) = c\chi_y(M'), \quad \Pi_r(M, \Delta) = c\chi(M', K_{M'}^r) \quad \text{для} \quad r \geqslant 2.$$

Если n четно, то $c > 0$. Если n нечетно, то $c < 0$.

В действительности многообразия M' полностью расклассифицированы (см. Хелгасон [1], стр. 354). Пусть $M' = N'_1 \times \ldots \times N'_s$. Тогда каждое N' является одним из многообразий следующего списка:

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & \mathbf{U}(p+q)/\mathbf{U}(p) \times \mathbf{U}(q), \\ \text{II)} & \mathbf{SO}(2p)/\mathbf{U}(p), \\ \text{III)} & \mathbf{Sp}(p)/\mathbf{U}(p), \\ \text{IV)} & \mathbf{SO}(p+2)/\mathbf{SO}(p) \times \mathbf{SO}(2), \quad p \neq 2, \\ \text{V)} & \mathbf{E}_6/\mathbf{Spin}(10) \times \mathbf{T}^1, \\ \text{VI)} & \mathbf{E}_7/\mathbf{E}_6 \times T^1. \end{array} \tag{4}$$

Тот факт, что каждое из этих N' приводит к ограниченной однородной симметрической области, был доказан Э. Картаном с помощью явной конструкции в каждом отдельном случае. Первое общее доказательство принадлежит Хариш-Чандре ([1], стр. 591) (см. Хелгасон [1], стр. 312). Числа Бетти $b_r(N')$ для N' могут быть подсчитаны с помощью формулы Хирша, и можно показать, что числа $h^{p,q}(N')$, определенные в 15.4, равны нулю для $p \neq q$ (см. 15.10, Борель [2] и Борель и Хирцебрух [1], § 14). Отсюда следует, что $\chi(N') = 1$ (на самом деле N' — даже рациональное алгебраическое многообразие). Таким образом, мы видим, что константа c в теореме 22.3.1 совпадает с $\chi(Y)$. Отсюда видно также, что индекс $\tau = \tau(N') = \Sigma(-1)^j b_{2j}(N')$ равен нулю, кроме следующих случаев:

I) *если* $p = 2s$ *и* $q = 2t$, *или если* $p = 2s+1$, $q = 2t$, *или если* $p = 2t$, $q = 2s+1$; *тогда* $\tau = \dfrac{(s+t)!}{s!\,t!}$;

IV) *если* $p = 4s$; *тогда* $\tau = 2$; (5)

V) $\tau = 3$.

Пусть Δ — подгруппа группы $I(M)$, удовлетворяющая условиям (a)—(c) п. 22.2. Такая подгруппа существует по теореме 22.2.2. По этой же теореме существует нормальная подгруппа Γ группы Δ сколь угодно большого индекса μ, которая будет свободно действовать на M. Тогда M/Γ будет μ-листным накрытием для $Y = M/\Delta$, и из теоремы Римана — Роха следует, что $\chi_y(M/\Gamma) = \mu\chi_y(Y)$. В силу теоремы 22.3.1 и упомянутых выше равенств $\chi(M') = 1$ и $c = \chi(M)$

$$\chi_y(M/\Gamma) = \mu\chi_y(Y) = \mu\chi(Y)\chi_y(M'),$$

где $\chi(Y) > 0$, если n четно, и $\chi(Y) < 0$, если n нечетно. В частности, если M есть произведение многообразий из списка (5), то n четно и $\tau(M/\Gamma) = \mu\chi(Y)\tau(M')$, $\chi(Y) > 0$, $\tau(M') > 0$. Этим способом можно строить алгебраические многообразия M/Γ со сколь угодно большим индексом.

Первый пример получим, взяв $M' = \mathbf{U}(3)/\mathbf{U}(2) \times \mathbf{U}(1) = \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$. В этом случае $\chi(M') = 1$ и M совпадает с открытым единичным шаром $\mathbf{B}_2 \subset \mathbf{C}_2$. Таким образом, существуют алгебраические поверхности M/Γ со сколь угодно большим индексом. Это опровергает одну гипотезу Цаппы [1]. Подробности можно найти у А. Бореля [4].

Теоремой 22.3.1 можно воспользоваться также для вычисления целых чисел $\Pi_r(M, \Delta)$. Ввиду (3) предположим $r \geqslant 2$. Для простоты пусть M — неприводимая ограниченная однородная симметрическая область. Тогда M — одно из многообразий, перечисленных в (4). Значения для $\Pi_r(M, \Delta)$ были подсчитаны Хирцебрухом [4, 5] с помощью формул для $\chi(M', (K_{M'})^r)$. Последние могут быть найдены с помощью теоремы Римана — Роха и связаны с формулами Г. Вейля о степенях неприводимых представлений (Борель и Хирцебрух [1]).

Ответ для каждого случая следующий:

$$\text{I)}\quad \Pi_r(M, \Delta) = (-1)^{pq}\chi(M/\Delta)\prod \frac{r(p+q)-i-j}{p+q-i-j},$$

где произведение берется по всем $0 \leqslant i \leqslant p-1$, $1 \leqslant j \leqslant q$.

$$\text{II)}\quad \Pi_r(M, \Delta) = (-1)^{\frac{1}{2}p(p-1)}\chi(M/\Delta)\prod \frac{2(r-1)(p-1)+i+j}{i+j},$$

где произведение берется по всем $0 \leqslant i < j \leqslant p-1$.

$$\text{III)}\quad \Pi_r(M, \Delta) = (-1)^{\frac{1}{2}p(p+1)}\chi(M/\Delta)\prod \frac{2(r-1)(p+1)+i+j}{i+j},$$

где произведение берется по всем $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$.

$$\text{IV)}\quad \Pi_r(M, \Delta) = (-1)^p\chi(M/\Delta)\left(\binom{rp-1}{p} + \binom{rp}{p}\right).$$

$$\text{V)}\quad \Pi_r(M, \Delta) = \chi(M/\Delta)\prod \frac{12(r-1)+\mu_k}{\mu_k},$$

где произведение берется по всем $1 \leqslant k \leqslant 16$, *а соответствующими значениями для* μ_k *являются* 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 11.

$$\text{VI)}\quad \Pi_r(M, \Delta) = -\chi(M/\Delta)\prod \frac{18(r-1)+\mu_k}{\mu_k},$$

где произведение берется по всем $k = 1, \ldots, 27$, *а соответствующими значениями для* μ_k *являются* 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 17.

Замечание. Другой метод вычисления чисел $\Pi_r(M, \Delta)$, годящийся и в том случае, когда условие с) опущено, принадлежит Селбергу [1].

Исэ [2] обобщил формулы I)—VI) на более общие типы автоморфных форм. Он также пользуется принципом пропорциональности. Ленглендс [1] получил эти формулы и соответствующие формулы, когда условие с) опущено, с использованием формулы следов Селберга и результатов Хариш-Чандры[1]).

22.4. В этом пункте теорема Римана — Роха $\chi(V, W) = T(V, W)$ будет применена к случаю $V = \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Для любого n мы будем рассматривать $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$ как гиперплоскость в $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Соответствующий класс дивизоров определяет одномерное расслоение H над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ с классом когомологий $h \in H^2(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. Пусть W — непрерывное комплексное векторное расслоение над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{C}_q$ и с классом Чженя $1 + d_1h + \ldots + d_sh^s$, $d_j \in \mathbf{Z}$, $s \leqslant q$, $s \leqslant n$. Тогда в $H^*(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{C}) = H^*(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C}$ имеется разложение

$$1 + d_1h + \ldots + d_sh^s = (1+\delta_1h)\ldots(1+\delta_sh),$$

где $\delta_j \in \mathbf{C}$ и, следовательно, по 10.1 и 4.4.3

$$T(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), M \otimes H^r) = \varkappa_n\left[\sum_{j=1}^{q} e^{(\delta_j+r)h}\left(\frac{h}{1-e^{-h}}\right)^{n+1}\right] = \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{(\delta_j+r)h}}{(1-e^{-h})^{n+1}}\,dh,$$

где $\delta_{s+1} = \ldots = \delta_q = 0$, а интегрирование проводится по малой окружности вокруг начала кординат. Подстановка $z = 1 - e^{-h}$ дает

$$T(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), W \otimes H^r) = \sum_{j=1}^{q}\binom{n+\delta_j+r}{n}.$$

1) Хирцебруху [7] принадлежит другой вывод этих формул, основанный на теореме об индексе Атьи — Зингера. — *Прим. перев.*

Если W есть комплексно-аналитическое векторное расслоение, то из теоремы Римана — Роха следует, что число $\sum_{j=1}^{q}\binom{n+\delta_j+r}{n}$, которое, вообще говоря, рационально со знаменателем $n!$, является целым для всех r. То же самое заключение остается в силе и для непрерывного векторного расслоения W по теоремам целочисленности из 26.1. Тем самым доказана

Теорема 22.4.1 *Пусть W — непрерывное комплексное векторное расслоение над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ с классом Чженя*

$$1+d_1h+\ldots+d_sh^s=(1+\delta_1h)\ldots(1+\delta_sh),$$

где $d_j\in\mathbf{Z}$, $\delta_j\in\mathbf{C}$, $s\leqslant n$. Пусть r — целое число. Тогда симметрическая функция от δ_j

$$\binom{n+r+\delta_1}{n}+\ldots+\binom{n-r+\delta_s}{n}$$

является целым числом.

Примеры. Рассмотрим случай $q=2$. Тогда $\binom{n+\delta_1}{n}+\binom{n+\delta_2}{n}$ является целым числом. Это влечет следующие ограничения на целые числа $d_1=\delta_1+\delta_2$, $d_2=\delta_1\delta_2$:

$n=2$ никаких ограничений,

$n=3$ $d_1d_2\equiv 0 \pmod 2$,

$n=4$ $d_2(d_2+1-3d_1-2d_1^2)\equiv 0 \pmod{12}$.

Пусть W — касательное расслоение к $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$. Тогда $s=2$, $d_1=d_2=3$ и d_1d_2 нечетно. Следовательно, W не является ограничением на $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$ никакого непрерывного векторного расслоения над $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$. Аналогично можно показать, что для всех $n\geqslant 3$ касательное расслоение к $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$ не является ограничением никакого векторного расслоения к $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. Пример непрерывного векторного расслоения W над $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{C}_2$, которое не является ограничением на $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ никакого векторного расслоения над $\mathbf{P}_4(\mathbf{C})$, дается следующей классической конструкцией. Рассмотрим линейный комплекс в $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$, т. е. множество прямых, удовлетворяющих уравнению $\sum a_{ij}p_{ij}=0$, где p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12} — плюккеровы координаты. Прямые линейного комплекса, которые проходят через точку $x\in\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$, образуют плоский пучок. Он определяет алгебраическое расслоение B над $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Имеется ассоциированное векторное расслоение W над $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{C}_2$ и с $d_1=d_2=2$. Таким образом, $d_2(d_2+1-3d_1-2d_1^2)\equiv 2 \pmod{12}$ и W не является ограничением никакого векторного расслоения над $\mathbf{P}_4(\mathbf{C})$.

В общем случае теорема 22.4.1 дает условия, необходимые для того, чтобы целые числа $d_1,\ldots,d_s$ могли служить классами Чженя непрерывных комплексных векторных расслоений над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{C}_q$. Эти условия трудно проверять для конкретных q, n, но для фиксированного q они становятся все более ограничительными, когда $n\to\infty$. Действительно, из одной леммы алгебраической теории чисел (указанием на которую автор обязан Дж. Касселсу) следует, что если $\sum_{j=1}^{s}\binom{n+\delta_j}{n}$ является целым числом для всех n, то каждое δ_j — целое число. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 22.4.2. *Пусть W — непрерывное векторное расслоение над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{C}_q$, причем W является ограничением на $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ непрерывного векторного расслоения над $\mathbf{P}_N(\mathbf{C})$ со сколь угодно большим N. Тогда найдутся целые $r_1,\ldots,r_q$, такие, что $c(W)=c(H^{r_1}\oplus\ldots\oplus H^{r_q})$.*

Дальнейшие результаты о комплексных векторных расслоениях над $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ можно найти у Хоррокса [1, 2] и Шварценбергера [1]. О классификации комплексно-аналитических векторных расслоений над алгебраическими кривыми, где также используется теорема Римана — Роха, см. Атья [1, 2], Гротендик [3], Нарасимхан и Сешадри [1, 2] и Тюрин [1, 2].

§ 23. Теорема Римана — Роха в форме Гротендика

Обобщение теоремы Римана — Роха, принадлежащее Гротендику, существенно опирается на теорию когерентных аналитических пучков над комплексными многообразиями. Обзор их свойств приведен в 23.1—23.3 вместе с доказательством равенства 21.2(9). Сама теорема Гротендика — Римана — Роха описана в 23.4—23.6. Во всем этом параграфе все алгебраические многообразия предполагаются связными.

23.1. Пусть X_n — комплексное многообразие размерности n, а Ω — пучок ростков голоморфных функций над X_n (см. 15.1). Каждый стебель Ω_x пучка Ω является кольцом с единицей 1.

Определение. Пучок $\mathfrak{S}=(S,\pi,X_n)$ абелевых групп называется *аналитическим пучком* над X_n, если

I) *Каждый стебель S_x пучка $\mathfrak{S}$ есть модуль относительно кольца Ω_x (единичный элемент $1\in\Omega_x$ действует тождественно).*

II) *Отображение из $\bigcup_{x\in X}\Omega_x\times S_x$ (рассматриваемого как подпространство в $\Omega\times S$) в S, задаваемое мультипликативной структурой модуля, непрерывно.*

Наиболее важную роль играют когерентные аналитические пучки. Далее, Ω_p обозначает прямую сумму $\Omega \oplus \ldots \oplus \Omega p$ экземпляров Ω.

Определение. Аналитический пучок $\mathfrak{S}$ над X_n называется *когерентным*, если для всякой точки $x \in X_n$ существуют открытая окрестность U точки x и точная последовательность пучков над U

$$\Omega_p | U \to \Omega_q | U \to \mathfrak{S} | U \to 0.$$

За основными свойствами когерентных аналитических пучков мы отсылаем к Грауэрту и Реммерту [1]. Определение, данное там, на первый взгляд более ограничительно, чем приведенное выше. Однако из теоремы Оки о пучке соотношений, определяемых системой голоморфных функций (см. Картан [3], сообщение XIV), следует, что Ω когерентно в смысле Грауэрта и Реммерта [1]. Отсюда можно вывести, что два определения когерентности эквивалентны (см. Серр [2], гл. I, пред. 7). Заметим, что когерентность — чисто локальное свойство.

Пучок $\Omega(W)$ ростков голоморфных сечений комплексно-аналитического векторного расслоения W над X_n со слоем $\mathbf{C}_q$ локально изоморфен Ω_q. Поэтому $\Omega(W)$ — когерентный аналитический пучок. Если $\mathfrak{S}$ — произвольный пучок над X_n, то группы когомологий X_n с коэффициентами в $\mathfrak{S}$ могут быть определены с помощью *знакопеременных* коцепей (см. Серр [3]). Отсюда с учетом общих фактов теории размерности следует, что $H^q(X_n, \mathfrak{S}) = 0$ для $q > 2n$. Для когерентных аналитических пучков более точный результат был доказан Мальгранжем [1].

Теорема 23.1.1. *Пусть $\mathfrak{S}$ — когерентный аналитический пучок над n-мерным комплексным многообразием X_n. Тогда*

$$H^q(X_n, \mathfrak{S}) = 0$$

для $q > n$.

Соответствующая теорема конечности принадлежит Картану и Серру [1] (см. также Картан [4]).

Теорема 23.1.2. *Пусть $\mathfrak{S}$ — когерентный аналитический пучок над компактным комплексным многообразием X. Тогда для всех $q \geqslant 0$ комплексное векторное пространство $H^q(X, \mathfrak{S})$ конечномерно.*

Теоремы 23.1.1 и 23.1.2 обобщают результаты, полученные для частного случая $\mathfrak{S} = \Omega(W)$ в теореме 15.4.2. Доказательство теоремы 23.1.2 использует теорию голоморфно полных многообразий (многообразий Штейна). Из теоремы B (Серр [1] и Картан [3], сообщение XIX) вытекает, что если $\mathfrak{S}$ — когерентный аналитический пучок над голоморфно полным многообразием X, то $H^q(X, \mathfrak{S}) = 0$ для $q > 0$. Если теперь X — компактное комплексное

многообразие, то существует конечное покрытие $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ пространства X, такое, что все пересечения $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_p}$ голоморфно полны. Например, это будет автоматически выполняться, если в качестве U_i взять единичные шары по отношению к некоторой аналитической системе координат. Теперь из спектральной последовательности Лере (см. Годеман [1], гл. II, 5.2.3) следует, что $H^q(X, \mathfrak{S}) = H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{S})$ для $q \geqslant 0$. Это один из основных моментов в доказательстве Картана — Серра.

23.2. Пусть f: $X \to Y$ — голоморфное отображение комплексных многообразий и $\mathfrak{S}$ — аналитический пучок над X; q-й прямой образ пучка $\mathfrak{S}$ — это аналитический пучок $f_*^q\mathfrak{S}$ над Y, определяемый с помощью следующего предпучка. Для открытого подмножества U из Y рассмотрим группу когомологий $H^q(f^{-1}(U), \mathfrak{S})$ как модуль над кольцом голоморфных функций на $f^{-1}(U)$. Голоморфную функцию g: $U \to \mathbf{C}$ можно поднять до голоморфной функции gf: $f^{-1}(U) \to \mathbf{C}$ и тем самым $H^q(f^{-1}(U), \mathfrak{S})$ можно рассматривать как модуль над кольцом голоморфных функций на U. Эти модули определяют предпучок, ассоциированный с которым пучок и есть $f_*^q\mathfrak{S}$. По определению $f_*^q\mathfrak{S}$ будет аналитическим пучком на Y.

Рассмотрим точную последовательность аналитических пучков над X

$$0 \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0.$$

По теореме 2.8.2 открытое подмножество $f^{-1}(U)$ паракомпактно для любого открытого подмножества U из Y. Поэтому по теореме 2.10.1 имеет место точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(f^{-1}(U), \mathfrak{S}') \to H^0(f^{-1}(U), \mathfrak{S}) \to H^0(f^{-1}(U), \mathfrak{S}'') \to \\ \to H^1(f^{-1}(U), \mathfrak{S}') \to \ldots \to H^q(f^{-1}(U), \mathfrak{S}') \to H^q(f^{-1}(U), \mathfrak{S}) \to \\ \to H^q(f^{-1}(U), \mathfrak{S}'') \to H^{q+1}(f^{-1}(U), \mathfrak{S}') \to \ldots \end{aligned}$$

и, следовательно, точная последовательность аналитических пучков над Y

$$\begin{gathered} 0 \to f_*^0\mathfrak{S}' \to f_*^0\mathfrak{S} \to f_*^0\mathfrak{S}'' \to f_*^1\mathfrak{S}' \to \ldots \\ \ldots \to f_*^q\mathfrak{S}' \to f_*^q\mathfrak{S} \to f_*^q\mathfrak{S}'' \to f_*^{q+1}\mathfrak{S}' \to \ldots \end{gathered} \tag{1}$$

Теорема 23.2.1. *Пусть f: $X \to Y$ — голоморфное отображение комплексных многообразий и $\mathfrak{S}$ — аналитический пучок над X. Предположим, что $f_*^i\mathfrak{S} = 0$ для всех $i > 0$. Тогда векторные пространства $H^q(Y, f_*^0\mathfrak{S})$ и $H^q(X, \mathfrak{S})$ изоморфны для всех $q \geqslant 0$.*

Высшие прямые образы пучков появились уже в фундаментальных работах Лере [1, 2]. Точная последовательность (1) и теорема 23.2.1 являются переформулировками результатов Лере о непрерывных отображениях.

Теорема 23.2.1 следует немедленно из спектральной последовательности Лере (см. Картан [2] и Годеман [1], гл. II, 4.17.1). Прямое доказательство можно найти у Грауэрта и Реммерта ([1], стр. 417).

Доказательство теоремы Римана — Роха, приведенное в 21.1, опирается на один результат А. Бореля (теорему 21.2.1). Как замечено в 21.2, для того чтобы завершить непосредственное доказательство теоремы Римана — Роха, достаточно доказать равенство 21.2(9). Мы докажем сначала лемму.

Лемма 23.2.2. *Пусть X — комплексно-аналитическое расслоение над комплексным многообразием Y со слоем $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ и с проекцией f. Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над Y. Тогда существует естественный изоморфизм между аналитическими пучками $\Omega(W)$ и $f^0_*\Omega(f^*W)$. Аналитические пучки $f^i_*\Omega(f^*W)$ равны нулю при $i>0$.*

Доказательство. Пусть U — открытое подмножество в Y. Голоморфное сечение s расслоения W над U определяет голоморфное сечение sf расслоения f^*W над $f^{-1}U$. Так как каждый слой $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ компактен и связен, этим определяется изоморфизм $H^0(U, \Omega(W)) \to H^0(f^{-1}(U), \Omega(f^*W))$.

Это доказывает первую часть леммы. Вторая часть чисто локальна, поэтому можно предполагать, что U — голоморфно полное открытое подмножество, над которым W и X тривиальны. Мы хотим доказать, что $H^i(f^{-1}(U), \Omega(f^*W))=0$ для $i>0$. Так как $f^*W|f^{-1}(U)$ есть сумма тривиальных одномерных расслоений, то достаточно доказать, что $H^i(f^{-1}(U), 1)=0$ для $i>0$. Теперь $H^r(U, 1)=0$ для $r>0$ (23.1) и $H^s(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), 1)=0$ для $s>0$ (15.10). Следовательно, в этом случае может быть применена формула Кюннета (см. Кауп [1], § 7, теорема 1) для аналитических пучков, что дает

$$H^i(f^{-1}(U), 1) = H^i(U \times \mathbf{P}_n(\mathbf{C}), 1) = \sum_{r+s=i} H^r(U, 1) \otimes H^s(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}), 1) = 0 \quad \text{для } i>0.$$

Замечание. Формула Кюннета для пучков получена Гротендиком (см. Ботт [1] и Борель и Серр [2]). Доказательство этой формулы для аналитических когерентных пучков было дано Сэмпсоном и Уошнидером [3]. Использованная выше формула для аналитических когерентных пучков верна при некоторых предположениях конечности относительно рассматриваемых групп когомологий; в нашем случае эти группы равны нулю. Подробности см. у Каупа [1].

Лемма 23.2.2 и теорема 23.2.1 для $\mathfrak{S} = \Omega(f^*W)$ дают следующую теорему.

Теорема 23.2.3. *Пусть X — комплексно-аналитическое расслоение над комплексным многообразием Y со слоем $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ и проекцией f. Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над Y. Тогда векторные пространства $H^q(Y, W)$ и $H^q(X, f^*W)$ изоморфны для всех $q \geqslant 0$.*

В качестве следствия мы получаем равенство 21.2(9), необходимое для завершения доказательства теоремы Римана — Роха:

$$\dim H^q(Y, W) = \dim H^q(X, f^*W). \tag{2}$$

Прямые образы $f^q_*\mathfrak{S}$ обладают специальными свойствами, если $\mathfrak{S}$ — когерентный пучок. Пусть X — комплексное многообразие размерности n, $\mathfrak{S}$ — когерентный аналитический пучок над X и f: $X \to Y$ — голоморфное отображение комплексных многообразий. Следующие теоремы превращаются в теоремы 23.1.1 и 23.1.2, если Y состоит из одной точки.

Теорема 23.2.4. *В указанных выше условиях $f^q_*\mathfrak{S}=0$ для $q>n$.*

Теорема 23.2.5. *В указанных выше условиях если f — собственное отображение, то пучок $f^q_*\mathfrak{S}$ когерентен для всех $q \geqslant 0$.*

Теорема 23.2.4 есть непосредственное следствие теоремы 23.1.1. Теорема 23.2.5 представляет собой глубокий результат Грауэрта [2][1]). Для алгебраических многообразий теорему 23.2.5 можно доказать алгебраически (Борель и Серр [2], теорема 1), если использовать связь между когерентными аналитическими пучками и когерентными алгебраическими пучками (Серр [4]).

23.3. Пусть X — комплексное многообразие, $C(X)$ — множество классов изоморфизмов когерентных аналитических пучков над X, $F(X)$ — свободная абелева группа, порожденная $C(X)$. Всякий элемент из $F(X)$ является конечной линейной комбинацией $\sum n_i\mathfrak{S}_i$, $n_i \in \mathbf{Z}$, где $\mathfrak{S}_i$ — когерентные аналитические пучки над X. Пусть $R(X)$ — подгруппа, порожденная элементами $\underline{\mathfrak{S}} - \underline{\mathfrak{S}'} - \underline{\mathfrak{S}''}$, где

$$0 \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0$$

— точная последовательность когерентных аналитических пучков над X. *Группой Гротендика когерентных аналитических пучков над X* называется факторгруппа $K_\omega(X) = F(X)/R(X)$.

Пусть X — компактное комплексное многообразие и $b \in K_\omega(X)$ — элемент, представляемый линейной комбинацией $\sum_i n_i\mathfrak{S}_i$ когерентных аналитических пучков $\mathfrak{S}_i$ на X. Теоремы 23.1.1 и 23.1.2 показывают, что $\mathfrak{S}_i$ имеют тип (F) и, следовательно,

[1]) См. также Кнорр [1]. — *Прим. перев.*

$\chi(X, \mathfrak{S}_i)$ определено (см. 2.10). Целое число

$$\chi(X, b) = \sum_i n_i \chi(X, \mathfrak{S}_i)$$

зависит только от элемента b.

Пусть f: $X \to Y$ — собственное голоморфное отображение комплексных многообразий. Если $\mathfrak{S} \in C(X)$, то по теоремам 23.2.4 и 23.2.5 $f_*^q \mathfrak{S} \in C(Y)$ для $q \geqslant 0$ и $f_*^q \mathfrak{S} = 0$ для $q > \dim X$. Рассмотрим гомоморфизм $f_!$: $F(X) \to F(Y)$, определенный на образующих группы $F(X)$ равенством

$$f_!(\mathfrak{S}) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q f_*^q(\mathfrak{S}), \qquad n = \dim X.$$

Точная последовательность (1) показывает, что $f_!$ отображает подгруппу $R(X)$ в $R(Y)$. Следовательно, $f_!$ индуцирует гомоморфизм

$$f_!: K_\omega(X) \to K_\omega(Y).$$

С помощью спектральной последовательности Лере можно доказать (см. Борель и Серр [2], стр. 111), что если f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ — собственные голоморфные отображения комплексных многообразий X, Y, Z, то

$$(gf)_! = g_! f_!. \tag{3}$$

Рассмотрим частный случай, когда Y состоит из одной точки, а f — постоянное отображение. В этом случае f собственно тогда и только тогда, когда X компактно. Когерентный аналитический пучок над Y представляет собой конечномерное комплексное векторное пространство и, следовательно, $K_\omega(Y) = \mathbf{Z}$. Таким образом,

$$f_!(b) = \chi(X, b). \tag{4}$$

Гомоморфизм $f_!$ аналогичен гомоморфизму Гизина f_* для когомологий. Если X и Y — компактные связные ориентированные многообразия (не обязательно комплексные) и f: $X \to Y$ — непрерывное отображение, то определен гомоморфизм $H^*(Y, \mathbf{Z})$-модулей

$$f_*: H^*(X, \mathbf{Z}) \to H^*(Y, \mathbf{Z}),$$

который отображает классы коразмерности q в классы коразмерности q. Как и в 4.3, $f_*(x) = D_Y^{-1}(f_* D_X(x))$ для $x \in H^*(X, \mathbf{Z})$, где D_X, D_Y — изоморфизмы двойственности от когомологий к гомологиям. Гомоморфизм f_*: $H^*(X, \mathbf{Q}) \to H^*(Y, \mathbf{Q})$ определяется аналогичным образом. Если q: $Y \to Z$ — еще одно непрерывное отображение связных компактных ориентированных многообразий, то

$$(gf)_* = g_* f_*. \tag{5}$$

Рассмотрим частный случай, когда Y — точка, f — постоянное отображение, а X — компактное связное ориентированное многообразие (вещественной) размерности m. В этом случае

$$f_*(v) = \varkappa^m[v] \cdot 1, \qquad v \in H^*(X), \tag{6}$$

где $1 \in H^0(Y)$ — единичный элемент, а $\varkappa^m[\ \ ]$ определено, как в 9.2.

23.4. Пусть X — комплексное многообразие, $C'(X)$ — множество классов изоморфизмов комплексно-аналитических векторных расслоений над X и $F'(X)$ — свободная абелева группа, порожденная $C'(X)$. Точно так же, как и 23.3, мы можем определить группу Гротендика $K'_\omega(X)$ комплексно-аналитических векторных расслоений над X. Имеется естественный гомоморфизм h: $K'_\omega(X) \to K_\omega(X)$, задаваемый равенством $h(W) = \Omega(X)$.

Теорема 23.4.1. *Пусть X — алгебраическое многообразие. Тогда h — изоморфизм.*

Основным моментом в доказательстве теоремы 23.4.1 служит следующая лемма.

Лемма 23.4.2. *Пусть $\mathfrak{S}$ — когерентный аналитический пучок над n-мерным алгебраическим многообразием X. Тогда существуют комплексно-аналитические векторные расслоения W_0, W_1, ..., W_n над X и точная последовательность*

$$0 \to \Omega(W_n) \to \Omega(W_{n-1}) \to \dots \to \Omega(W_0) \to \mathfrak{S} \to 0 \tag{7}$$

аналитических пучков над X.

Лемма 23.4.2 показывает, что гомоморфизм h сюръективен. После этого надо показать, что элемент $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i W_i$ из $K'_\omega(X)$, определяемый точной последовательностью (7), зависит только от $\mathfrak{S}$. Доказательство этого факта для того случая, когда $\mathfrak{S}$ — когерентный алгебраический пучок над X, приведено у Бореля и Серра [2]. Указанное выше утверждение следует тогда из соответствия между когерентными аналитическими пучками и когерентными алгебраическими пучками над алгебраическим многообразием (Серр [4]). Подобное замечание относится ко всем другим результатам, упоминаемым в этом параграфе, включая саму теорему Римана — Роха в форме Гротендика (23.4.3). Доказательства чисто алгебраические и приложимы к неособым неприводимым проективным многообразиям, определенным над произвольным алгебраически замкнутым полем $\mathbf{K}$. Все формулируется в терминах топологии Зарисского, когерентных алгебраических пучков и алгебраических векторных расслоений со слоем $\mathbf{K}_q$. Кольцо когомологий $H^*(X, \mathbf{Z})$ заменяется кольцом Чжоу $A(X)$ классов алгебраических циклов относительно рациональной эквивалентности. В случае когда $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, результаты Серра, упоминавшиеся выше, позволяют переформулировать алгебраические утверждения, используя комплексно-аналитическую терминологию, принятую в этой книге.

Пусть $\mathfrak{S}$ — когерентный аналитический пучок над X с заданной с помощью векторных расслоений резольвентой (7). Тогда можно определить характер Чженя для $\mathfrak{S}$ по формуле $\operatorname{ch}(\mathfrak{S}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{ch}(W_i)$. По теореме 23.4.1 это не зависит от выбора резольвенты. Если

$$0 \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0$$

— точная последовательность когерентных аналитических пучков, то (см. 10.1)

$$\operatorname{ch}(\mathfrak{S}) = \operatorname{ch}(\mathfrak{S}') + \operatorname{ch}(\mathfrak{S}'').$$

Следовательно, для любого алгебраического многообразия X характер Чженя определяет гомоморфизм

$$\operatorname{ch}\colon K_\omega(X) \to H^*(X, \mathbf{Q}).$$

Пусть $\operatorname{td}(X)$ [соотв. $\operatorname{td}(Y)$] — полный класс Тодда для касательного расслоения к X [соотв. Y], определенный в 10.1. Теперь может быть сформулирована теорема Римана — Роха в форме Гротендика:

Теорема 23.4.3 (теорема Гротендика — Римана — Роха, или сокращенно теорема ГРР). *Пусть X, Y — алгебраические многообразия и $f\colon X \to Y$ — голоморфное отображение. Тогда для всех $b \in K_\omega(X)$ в $H^*(Y, \mathbf{Q})$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ch}(f_! b) \cdot \operatorname{td}(Y) = f_*(\operatorname{ch}(b) \cdot \operatorname{td}(X)). \tag{8}$$

Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — голоморфные отображения алгебраических многообразий. Из (3) и (5) следует, что если теорема ГРР справедлива для f и для g, то она справедлива и для $gf\colon X \to Z$. Так как X — алгебраическое многообразие, то существует голоморфное вложение $X \to \mathbf{P}_N(\mathbf{C})$ при некотором N.

Отображение $f\colon X \to Y$ можно разложить тогда в композицию вложения $X \to Y \times \mathbf{P}_N(\mathbf{C})$ и проектирования $Y \times \mathbf{P}_N(\mathbf{C}) \to Y$. Поэтому достаточно доказать теорему ГРР для двух случаев:

I) $f\colon X \to Y$ — вложение. Для этого случая имеются алгебраическое доказательство у Бореля и Серра [2] и комплексно-аналитическое доказательство у Атьи и Хирцебруха [8]. Частный случай, когда X — неособый дивизор на Y и $b \in K \in K_\omega(X)$ возникает из ограничения векторного расслоения на Y, будет рассмотрен в 23.5.

II) $f\colon Y \times \mathbf{P}_N(\mathbf{C}) \to Y$ — проекция в прямом произведении. Алгебраическое доказательство дано у Бореля и Серра [2].

Мы формулировали теорему ГРР только для алгебраических многообразий. Возможно сформулировать ее для собственных голоморфных отображений $f\colon X \to Y$ комплексных многообразий; единственный вопрос здесь в том, как определить $\operatorname{ch}(\mathfrak{S})$ для произвольного аналитического когерентного пучка $\mathfrak{S}$ над компактным комплексным многообразием X, а это можно сделать, рассматривая резольвенты с помощью вещественно-аналитических и с помощью гладких векторных расслоений. К моменту написания настоящего приложения этот вариант теоремы ГРР доказан только, когда f — вложение (Атья и Хирцебрух [8]). Два частных случая обсуждаются в 23.5; два приложения описаны в 23.6.

23.5. Предположим сначала, что Y — алгебраическое многообразие с комплексно-аналитическим касательным расслоением θ и что $j\colon X \to Y$ — вложение X в Y в качестве подмногообразия. Тогда $j^*\theta$ имеет подрасслоение, изоморфное касательному расслоению к X, факторрасслоение по которому изоморфно комплексно-аналитическому нормальному расслоению ν (см. 4.9). Таким образом, по 10.1 $\operatorname{td}(X) = \operatorname{td}(\nu)^{-1} \cdot j^* \operatorname{td}(Y)$ и (8) превращается в

$$\operatorname{ch}(j_! b) \cdot \operatorname{td}(Y) = j_*(\operatorname{ch}(b) \cdot \operatorname{td}(\nu))^{-1} j_* \operatorname{td}(Y).$$

Теперь j_* является $H^*(Y, \mathbf{Q})$-гомоморфизмом, а $\operatorname{td}(Y)$ обратим в $H^*(Y, \mathbf{Q})$. Поэтому теорема ГРР дает

$$\operatorname{ch}(j_! b) = j_* \operatorname{ch}(b) \cdot (\operatorname{td}\nu))^{-1} \quad \text{для всех} \quad b \in K_\omega(X). \tag{9}$$

Мы докажем следующий частный случай формулы (9). Пусть X — неособый дивизор S на Y и $\{S\}$ — соответствующее одномерное расслоение (см. 15.2). Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над Y и $b \in K_\omega(S)$ — элемент, представимый когерентным аналитическим пучком $\Omega(j^*(W \otimes \{S\}))$ над S. Пусть U — открытое подмножество в Y, такое, что $V = U \cap S$ голоморфно полно. Тогда в обозначениях п. 16.2

$$j_*^q \Omega(j^*(W \otimes \{S\}))(U) = H^q(V, j^*(W \otimes \{S\})) = 0 \quad \text{для} \quad q > 0$$

и, таким образом, $j_! b$ может быть представлено тривиальным расширением $j_*^0 \Omega(j^*(W \otimes \{S\})) = \widehat{\Omega}((W \otimes \{S\})_S)$ пучка $\Omega(j^*(W \otimes \{S\}))$ с S до Y. Согласно 16.2(4), существует резольвента для $\widehat{\Omega}((W \otimes \{S\})_S)$ с помощью векторных расслоений над Y:

$$0 \to \Omega(W) \to \Omega(W \otimes \{S\}) \to \widehat{\Omega}((W \otimes \{S\})_S) \to 0$$

и, следовательно, $\operatorname{ch}(j_! b) = \operatorname{ch}(W \otimes \{S\}) - \operatorname{ch}(W) = (e^h - 1)\operatorname{ch} W$, где $h \in H^2(Y, \mathbf{Z})$ — класс когомологий для S.

С другой стороны, $c_1\nu = j^*h$ по теореме 4.8.1 и $j_* 1 = h$ по теореме 4.9.1. Следовательно, правая часть формулы (9) равна

$$j_*\left(j^* \operatorname{ch}(W \otimes \{S\}) \cdot (\operatorname{td}(\nu))^{-1}\right) = j_* j^* \left(\operatorname{ch}(W) \cdot e^h \left(\frac{h}{1 - e^{-h}}\right)^{-1}\right) =$$

$$= (e^h - 1)\operatorname{ch}(W).$$

Это доказывает (9) в нашем частном случае, а также помогает объяснить тот факт, почему в теореме ГРР возникает класс Тодда.

Рассмотрим теперь частный случай теоремы ГРР, когда Y состоит из одной точки, а f — постоянное отображение. Пусть $b \in K_\omega(X)$ — элемент, представленный пучком ростков голоморфных сечений $\Omega(W)$ комплексно-аналитического векторного расслоения W над X. Ввиду (4) левая часть равенства (8) превратится в $\chi(X, W)$. Следовательно, теорема Римана — Роха в форме Гротендика влечет теорему 21.1.1 (РР):

$$\chi(X, W) = T(X, W).$$

23.6. Пусть E, F, V — алгебраические многообразия, и пусть φ: $E \to V$ — голоморфное расслоение со слоем F и связной структурной группой (см. теорему 18.3.1*). Как и в лемме 23.2.2, пусть U — голоморфно полное открытое подмножество в V, над которым E тривиально. Тогда по теореме Кюннета о когерентных аналитических пучках, которая уже использовалась в доказательстве леммы 23.2.2, имеем

$$H^i(\varphi^{-1}(U), \mathbf{1}) = H^0(U, \mathbf{1}) \otimes H^i(F, \mathbf{1}).$$

Следовательно, $\varphi_*^i\Omega(\mathbf{1}) = \Omega(W_i)$ для некоторого комплексно-аналитического векторного расслоения W_i над V, размерность слоя которого равна $\dim H^i(F, \mathbf{1})$. Тот факт, что структурная группа для E связна, показывает, что W_i тривиально. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch}_0(\varphi_!\,\Omega(\mathbf{1})) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(F, \mathbf{1}) = \chi(F) = T(F), \\ &\operatorname{ch}_j(\varphi_!\Omega(\mathbf{1})) = 0 \quad \text{для} \quad j > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

С другой стороны, теорема ГРР, примененная к отображению φ: $E \to V$ и к пучку $\Omega(\mathbf{1})$ над E, дает

$$\operatorname{ch}(\varphi_!\Omega(\mathbf{1}))\operatorname{td}(V) = \varphi_*\operatorname{td}(E) = \varphi_*\operatorname{td}(\theta)\cdot\operatorname{td}(V),$$

где θ — расслоение над E, состоящее из касательных векторов «вдоль слоев».

Следовательно, (10) влечет

$$T(F)\cdot\operatorname{td}(V) = \varphi_*\operatorname{td}(E), \qquad (11$$

$$T(F)\cdot 1 = \varphi_*\operatorname{td}(\theta), \tag{11*}$$

где $1 \in H^0(V, \mathbf{Q})$ — единичный элемент.

Формула (11*) выражает строгую мультипликативность, изученную Борелем и Хирцебрухом [1], § 21. Если ζ — непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над V, то, умножая обе части формулы (11) на $\operatorname{ch}(\zeta)$, находим

$$T(F)\cdot(\operatorname{ch}(\zeta)\cdot\operatorname{td}(V)) = \varphi_*(\operatorname{ch}(\varphi^*\zeta)\cdot\operatorname{td}(E)).$$

Приравнивая значения обоих выражений на гомологиях максимальной размерности, получаем следующее свойство мультипликативности рода Тодда (ср. с теоремой 14.3.1):

Теорема 23.6.1 (Борель и Серр [2], предл. 16). *Пусть E, F, V — алгебраические многообразия, и пусть φ: $E \to V$ — голоморфное расслоение со слоем F и со связной структурной группой. Пусть ζ — непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над V. Тогда $T(F)\cdot T(V, \zeta) = T(E, \varphi^*\zeta)$.*

Второе приложение теоремы ГРР относится к моноидальным преобразованиям. Пусть X — подмногообразие коразмерности q алгебраического многообразия, Y, i: $X \to Y$ — вложение, ν — комплексно-аналитическое нормальное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X, и пусть f: $X' \to X$ — ассоциированное с ним расслоение над X со слоем $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$. Существуют алгебраическое многообразие Y', называемое *моноидальным преобразованием Y вдоль X*, вложение j: $X' \to Y'$ и отображение g: $Y' \to Y$, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{j} & Y' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array} \tag{12}$$

коммутативна. Пусть U — открытое подмножество в Y, допускающее локальные аналитические координаты. Если U не пересекается с X, то $g^{-1}(U)$ биголоморфно эквивалентно U. Если U пересекается с X, то существуют голоморфные функции $f_1, \ldots, f_q$ на U, такие, что $U \cap X$ совпадает с подмногообразием $\{u \in U;\ f_1(u) = \ldots = f_q(u) = 0\}$ и дифференциалы $df_1, \ldots, df_q$ линейно независимы в каждой точке из $U \cap X$. В терминах однородных координат $z = (z_1 : \ldots : z_q)$ на $\mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$ открытое подмножество $g^{-1}(u)$ биголоморфно эквивалентно подмногообразию $\{(u, z) \in U \times \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C});\ z_i f_j(u) = z_j f_i(u),\ 1 \leqslant i < j \leqslant q\}$ в $U \times \mathbf{P}_{q-1}(\mathbf{C})$.

Пусть $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ — комплексно-аналитические касательные векторные расслоения к Y, Y', и пусть $\mathfrak{N}$ — нормальное векторное расслоение к X в Y, ассоциированное с ν. Пусть H — одномерное расслоение над Y', определяемое неособым дивизором X' на Y'. Одна лемма Портьюса [1] утверждает, что в $K_\omega(Y')$ выполняется равенство

$$\Omega(g^*\mathfrak{T}) - \Omega(\mathfrak{T}') = j_!(\Omega(f^*\mathfrak{N}) - \Omega(j^*H)).$$

По теореме РР для вложений (9) класс Чженя для правой части этого равенства равен

$$j_*\left((f^*\operatorname{ch}(\nu) - j^*e^h)\cdot j^*\left(\frac{1-e^{-h}}{h}\right)\right),$$

где $h \in H^2(Y', \mathbf{Z})$ — класс когомологий для H. Тем самым получена

Теорема 23.6.2 (Портьюс [1]). *Пусть X — подмногообразие в алгебраическом многообразии Y, и пусть* (12) — *диаграмма, определяющая моноидальное преобразование Y вдоль X, ν — нормальное расслоение к X в Y, $h \in H^2(Y', \mathbf{Z})$ — класс когомологий цикла X', θ, θ' — касательные расслоения к Y, Y'. Тогда*

$$g^* \operatorname{ch}(\theta) - \operatorname{ch}(\theta') = \frac{1 - e^{-h}}{h} \cdot j_*(f^* \operatorname{ch}(\nu) - j^* e^h). \tag{13}$$

Характер Чженя для Y' может быть выражен через характер Чженя для Y с помощью формулы (13). Одно усиление теоремы РР (включающее случай целочисленных когомологий, см. Портьюс [1] и Атья и Хирцебрух [8]) позволяет дать аналогичную формулу для классов Чженя для Y, Y', предугаданную Тоддом [5] и Сегре [1]. Теорема РР для вложений доказана у Атьи и Хирцебруха [8] для произвольных компактных комплексных многообразий. Следовательно, формула (13), а также формула Тодда — Сегре справедливы для моноидальных преобразований компактного комплексного многообразия Y вдоль подмногообразия X. В некоторых частных случаях это было проверено Ван де Веном [1]. Вычисление, принадлежащее Хирцебруху (неопубликовано), показывает, что из формулы Тодда — Сегре следует, что $T(Y') = T(Y)$, т. е. что род Тодда инвариантен при моноидальных преобразованиях. В частном случае квадратичного преобразования (X — точка) это можно доказать непосредственно с помощью леммы 1.7.2.

Если Y — алгебраическое многообразие, то инвариантность рода Тодда можно получить проще: либо из бирациональной инвариантности арифметического рода (см. 0.1 и Сэмпсон и Уошницер [2]), либо применяя теорему ГРР к отображению g: $Y' \to Y$. Тогда $g^q_* \Omega(1) = 0$ для $q > 0$ и теорема ГРР дает $g_* \operatorname{td}(Y') = \operatorname{td}(Y)$; равенство $T(Y') = T(Y)$ получается отсюда приравниванием коэффициентов в максимальных размерностях.

§ 24. Кольцо Гротендика непрерывных векторных расслоений

Определение группы $K'_\omega(X)$ комплексно-аналитических векторных расслоений над комплексным многообразием X, данное в 23.4, принадлежит Гротендику. Его конструкцию можно повторить и в непрерывном случае и получить *кольцо Гротендика непрерывных векторных расслоений* (см. Атья и Хирцебрух [1, 3]), хотя, собственно говоря, элементами кольца Гротендика являются не сами векторные расслоения. По сравнению с аналитическим случаем здесь есть одно небольшое упрощение; а именно по теореме 4.1.4 последовательность

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

непрерывных комплексных векторных расслоений над паракомпактным пространством X точна тогда и только тогда, когда $W = W' \oplus W''$. Во всем этом параграфе мы будем предполагать X компактным пространством, так что, если X конечномерно, то X допустимо в смысле п. 4.2.

24.1. Пусть X — компактное пространство и $C(X)$ — множество классов изоморфизмов непрерывных комплексных векторных расслоений над X (см. 3.5). Сумма Уитни $\oplus$ превращает $C(X)$ в полугруппу. Пусть $F(X)$ — свободная абелева группа, порожденная $C(X)$, и пусть $R(X)$ — подгруппа, порожденная всеми элементами вида $W - W' - W''$, где $W = W' \oplus W''$. Положим $K(X) = F(X)/R(X)$. Тензорное произведение векторных расслоений определяет на $K(X)$ кольцевую структуру. Это и есть кольцо Гротендика непрерывных комплексных векторных расслоений над X. Если X состоит из одной точки, то $K(X) = \mathbf{Z}$. Если X — комплексное многообразие, то существует гомоморфизм $K'_\omega(X) \to K(X)$, состоящий в «забывании» комплексно-аналитической структуры.

Естественное отображение $C(X) \to F(X)$ определяет гомоморфизм полугрупп i: $C(X) \to K(X)$. Пусть G — аддитивная группа и f: $C(X) \to G$ — гомоморфизм полугрупп. Тогда найдется единственный гомоморфизм $\bar f$: $K(X) \to G$, такой, что $\bar f = f_i$. Это универсальное свойство позволяет продолжать на $K(X)$ гомоморфизмы, заданные на $C(X)$. Если X конечномерно, то класс Чженя и класс Тодда дают гомоморфизмы

$$c: K(X) \to G(X, \mathbf{Z}),$$
$$\operatorname{td}: K(X) \to G(X, \mathbf{Q}),$$

где $G(X, A)$ обозначает множество сумм вида $1 + h_1 + h_2 + \ldots + h_i \in H^{2i}(X, A)$ с групповой операцией, индуцированной $\cup$-произведением. Аналогично, характер Чженя определяет кольцевой гомоморфизм

$$\operatorname{ch}: K(X) \to H^*(X, \mathbf{Q}), \tag{1}$$

а отображение f: $X \to X'$ индуцирует кольцевой гомоморфизм

$$f^!: K(X') \to K(X),$$

который зависит только от гомотопического класса отображения f.

Согласно 4.2, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K(X') & \xrightarrow{f^!} & K(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \operatorname{ch}} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{ch}} \\ H^*(X', \mathbf{Q}) & \xrightarrow{f^*} & H^*(X, \mathbf{Q}) \end{array} \tag{2}$$

Если X бесконечномерно, то $H^*(X, \mathbf{Q})$ следует заменить на прямое произведение $H^{**}(X, \mathbf{Q})$ (разрешить бесконечные суммы).

Кольцо Гротендика можно также определить для пары (X, Y), где X — компактное пространство, а Y — замкнутое подпространство. Если Y пусто, то положим $K(X, \varnothing) = K(X)$. Если Y состоит из одной точки, то положим $K(X, \{x_0\})$ равным ядру гомоморфизма $i^!$: $K(X) \to K(\{x_0\}) = \mathbf{Z}$, индуцированного вложением i: $\{x_0\} \to X$. В общем случае пусть $X \cup TY$ — пространство, полученное приклеиванием к X конуса с основанием Y и с вершиной z_0, и пусть $K(X, Y) = K(X \cup TY, \{z_0\})$. Имеется каноническое отображение $X \cup TY \to X/Y$, которое стягивает конус TY в точку y_0 и индуцирует изоморфизм

$$K(X/Y, \{y_0\}) \to K(X, Y).$$

Характер Чженя может быть определен и в относительном случае. Он является кольцевым гомоморфизмом

$$\mathrm{ch}\colon K(X, Y) \to H^*(X, Y; \mathbf{Q}).$$

Отображение компактных пар f: $(X, Y) \to (X', Y')$ индуцирует кольцевой гомоморфизм

$$f^!\colon K(X', Y') \to K(X, Y),$$

зависящий только от гомотопического класса отображения f. В частности, вложения i: $(Y, \varnothing) \to (X, \varnothing)$, j: $(X, \varnothing) \to (X, Y)$ определяют последовательность

$$K(X, Y) \xrightarrow{j^!} K(X) \xrightarrow{i^!} K(Y), \tag{3}$$

которая является точной последовательностью $K(X)$-модулей. Если Y является ретрактом для X, т. е. если существует отображение f: $X \to Y$, такое, что $fi(y) = y$ для всех $y \in Y$, то можно показать, что имеется точная последовательность

$$0 \to K(X, Y) \xrightarrow{j^!} K(X) \underset{f^!}{\overset{i^!}{\rightleftarrows}} K(Y) \to 0,$$

расщепляющаяся с помощью $f^!$.

Определение относительных колец Гротендика $K(X, Y)$ является первым шагом в построении *экстраординарной теории когомологий* $K^*(X, Y)$, которая удовлетворяет всем аксиомам Эйленберга — Стинрода, кроме аксиомы размерности. Дальнейшие подробности можно найти у Атьи и Хирцебруха [3].

24.2. Пусть X — компактное пространство, Y — замкнутое подпространство, E и F — непрерывные комплексные векторные расслоения над X и α: $E|Y \to F|Y$ — изоморфизм между ограничениями E и F на Y. В этом пункте мы построим некоторый элемент $d(E, F, \alpha)$ из $K(X, Y)$, который можно рассматривать как первое препятствие к распространению изоморфизма α на все X. По поводу первоначальной конструкции (немного отличной от описываемой здесь) см. Атья и Хирцебрух [7].

Пусть I — единичный отрезок. Образуем подпространство $Z = X \times 0 \cup X \times 1 \cup Y \times I$ в $X \times I$. На Z определим комплексное векторное расслоение L, взяв E над $X \times 1$, F над $X \times 0$ и воспользовавшись α, чтобы соединить их вдоль $Y \times I$. Точнее, пусть

$$I_0 = I - \{0\}, \quad I_1 = I - \{1\},$$
$$Z_0 = X \times 0 \cup Y \times I_1, \quad Z_1 = X \times 1 \cup Y \times I_0,$$
$$E_0 = F, \quad E_1 = E,$$

и пусть f_0: $Z_0 \to X$, f_1: $Z_1 \to X$, f: $Z \to X$ индуцированы проекцией $X \times I \to X$. Тогда $f_i^*(E_i)$ будет расслоением над открытым множеством Z_i, $i = 1, 2$, и α индуцирует изоморфизм $f_1^*(E_1) \to f_0^*(E_0)$ на открытом множестве $Z_0 \cap Z_1 = Y \times (I_0 \cap I_1)$. Это и дает требуемое расслоение L над Z. Элемент $L - f^*F$ из $K(Z)$ тривиален при ограничении на $X \times 0$. Так как f: $Z \to X = X \times 0$ — отображение ретракции, то мы получаем распадающуюся короткую точную последовательность

$$0 \to K(Z, X \times 0) \to K(Z) \underset{f^!}{\rightleftarrows} K(X \times 0) \to 0.$$

Таким образом $L - f^*F$ переходит в нуль, и это распадение определяет элемент $d(E, F, \alpha)$ из $K(Z, X \times 0) = K(X, Y)$. Элемент $d(E, F, \alpha)$ называется *разностным расслоением* для тройки (E, F, α). Легко проверяются следующие свойства разностного расслоения (Атья и Хирцебрух [7], предл. 3.3).

Теорема 24.2.1. I) *Если f: $(X, Y) \to (X', Y')$ — отображение пар, то $d(f^*E', f^*F', f^*\alpha') = f^! d(E', F', \alpha')$.*

II) *$d(E, F, \alpha)$ зависит только от гомотопического класса отображения α.*

III) *если $Y \neq \varnothing$, то $d(E, F, \alpha) = E - F$.*

IV) *если $j^!$: $K(X, Y) \to K(X)$ то же самое, что в (3), то $j^! d(E, F, \alpha) = E - F$.*

V) *$d(E, F, \alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда существует векторное расслоение G над X, такое, что $\alpha \oplus 1$ распространяется до изоморфизма $E \oplus G \to F \oplus G$ на всё X.*

VI) $d(E_1 \oplus E_2, F_1 \oplus F_2, \alpha_1 \oplus \alpha_2) = d(E_1, F_1, \alpha_1) + d(E_2, F_2, \alpha_2)$.

VII) $d(E, F, \alpha) + d(E, F, \alpha^{-1}) = 0$.

VIII) *Если β: $F|Y \to G|Y$ — изоморфизм над Y, то*

$$d(E, G, \beta\alpha) = d(E, F, \alpha) + d(F, G, \beta).$$

24.3. Имеется важный частный случай, в котором характер Чженя для разностного расслоения может быть найден с помощью 24.2.1, IV).

Пусть W — вещественное векторное расслоение со слоем $\mathbf{R}^{2q}$ и со структурной группой $\mathbf{SO}(2q)$ над компактным пространством X. Пусть $B(W)$ и $S(W)$ — расслоения на шары и на единичные сферы, ассоциированные с W, и пусть π: $B(W)\to X$ — проекция. Мы будем рассматривать разностные расслоения $d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha)$, где E и F — непрерывные комплексные векторные расслоения над X, а α — некоторый изоморфизм

$$\pi^*E\,|\,S(W)\to\pi^*F\,|\,S(W).$$

Характер Чженя для такого разностного расслоения будет относительным классом

$$\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha)\in H^*(B(W), S(W); \mathbf{Q}). \tag{4}$$

Кольцо когомологий для $H^*(B(W), S(W); \mathbf{Q})$ описано Томом [1]. Оно является свободным модулем над $H^*(B(W), \mathbf{Q}) = H^*(X, \mathbf{Q})$, порожденным классом

$$U\in H^{2q}(B(W), S(W); \mathbf{Q}).$$

Отображение Тома φ_*: $H^i(X, \mathbf{Q})\to H^{i+2q}(B(W), S(W); \mathbf{Q})$ определяется равенством $\varphi_*(x) = (\pi^*x)\cdot U$ и является изоморфизмом для всех i. Пусть j: $(B(W), \varnothing)\to(B(W), S(W))$ — вложение. Сравнение с 4.11 показывает, что класс Эйлера $e(W)$ для W можно определить равенством

$$j^*U = \pi^*e(W). \tag{5}$$

Отсюда следует, что

$$j^*\varphi_*(x) = \pi^*(x\cdot e(W))\quad\text{для}\quad x\in H^*(X, \mathbf{Q}). \tag{6}$$

Теорема 24.3.1. *Пусть E, F — комплексные векторные расслоения над X, а W — вещественное ориентированное векторное расслоение над X. Пусть $B(W)$ и $S(W)$ — соответствующие расслоения на единичные шары и единичные сферы, π: $B(W)\to X$ — проекция и α: $\pi^*E\,|\,S(W)\to\pi^*F\,|\,S(W)$ — некоторый изоморфизм. Тогда*

$$e(W)\cdot\varphi_*^{-1}\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha) = \operatorname{ch}E - \operatorname{ch}F.$$

Доказательство. Имеем, согласно 24.2.1, IV),

$$j^*\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha) = \operatorname{ch} j^! d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha) = \operatorname{ch}\pi^*E - \operatorname{ch}\pi^*F$$

и, следовательно,

$$j^*\varphi_*\varphi_*^{-1}\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha) = \pi^*(\operatorname{ch}E - \operatorname{ch}F).$$

Ввиду (6) это дает

$$\pi^*(e(W)\cdot\varphi_*^{-1}\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha)) = \pi^*(\operatorname{ch}E - \operatorname{ch}F),$$

откуда вытекает нужный результат, так как π^* — изоморфизм.

Рассмотрим один случай, когда 24.3.1 дает явную формулу для $\varphi_*^{-1}\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha)$. Предположим, что W индуцировано с помощью отображения f: $X\to\mathfrak{G}^+(2q, N; \mathbf{R})$ из стандартного векторного расслоения W' над $\mathfrak{G}^+(2q, N; \mathbf{R})$ со слоем $\mathbf{R}^{2q}$ (см. 4.1a). Тогда f индуцирует отображение

$$g\colon (B(W), S(W))\to(B(W'), S(W')).$$

Предположим, что E', F' — комплексные векторные расслоения над $\mathfrak{G}^+(2q, N; \mathbf{R})$, такие, что $E = f^*E'$, $F = f^*F'$ и что α': $E'\,|\,S(W')\to F'\,|\,S(W')$ является изоморфизмом, для которого $\alpha = g^*\alpha'$.

Тогда по 24.2.1, 1)

$$\varphi_*^{-1}\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha) = f^*\varphi_*'^{-1}\operatorname{ch} d(\pi'^*E', \pi'^*F', \alpha').$$

Если N достаточно велико, то кольцо $H^*\mathfrak{G}^+(2q, N; \mathbf{R}), \mathbf{Q})$ не имеет делителей нуля в размерностях $\leqslant\dim X$ (Борель [2]). Поэтому из теоремы 24.3.1 следует, что

$$\varphi_*^{-1}\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha) = f^*\,\frac{\operatorname{ch}E' - \operatorname{ch}F'}{e(W')}, \tag{7}$$

где правая часть определена однозначно. Заметим, что, как следует из формулы (7), при сделанных выше предположениях $\varphi_*^{-1}\operatorname{ch} d(\pi^*E, \pi^*F, \alpha)$ не зависит от специального выбора изоморфизма α.

24.4. Пример разностного расслоения, которое удовлетворяет предположениям п. 24.3, дается следующей конструкцией, принадлежащей Кошулю. Пусть A — комплексное векторное пространство размерности q и λ^rA — r-я внешняя степень для A. Для всякого $u\in A$ определены линейные отображения

$$\beta_r\colon \lambda^{r-1}A\to\lambda^rA,\qquad r\geqslant 1, \tag{8}$$

такие, что $\beta_r(u_1\wedge\ldots\wedge u_{r-1}) = u\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{r-1}$. Так как внешнее умножение не зависит от выбора базиса, то эти отображения определены и для векторных расслоений и формула (8) дает следующую теорему.

Теорема 24.4.1. *Пусть E — непрерывное комплексное векторное расслоение со слоем $\mathbf{C}_q$ над топологическим пространством X, и пусть s — сечение в E, нигде не обращающееся в нуль. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0\to\lambda^0E\xrightarrow{\beta_1}\lambda^1E\to\ldots\to\lambda^{q-1}E\xrightarrow{\beta_q}\lambda^qE\to 0,$$

где β_r — задается внешним умножением на s.

Пусть теперь X — компактное пространство, $B(E)$ и $S(E)$ — расслоения на шары и на единичные сферы, ассоциированные с вещественным векторным расслоением E над X, и пусть π: $B(E)\to X$ — проекция. Для расслоения π^*E над $S(E)$ существует каноническое нигде не обращающееся в нуль сечение, и поэтому имеется точная последовательность

$$0\to F_0\,\big|\,S(E)\xrightarrow{\beta_1}F_1\,\big|\,S(E)\to\ldots\to F_{q-1}\,\big|\,S(E)\xrightarrow{\beta_r}F_q\,\big|\,S(E)\to 0,$$

где $F_r = \pi^* \lambda^r E$. Эрмитовы метрики на каждом F_r позволяют определить сопряженные гомоморфизмы β_r^*: $F_r \mid S(E) \to F_{r-1} \mid S(E)$. Гомоморфизм

$$\beta\colon \sum_s F_{2s} \Big| S(E) \to \sum_s F_{2s+1} \Big| S(E),$$

определенный равенством $\beta(f_0, f_2, f_4, \ldots) = (\beta_1 f_0 - \beta_2^* f_2, \beta_3 f_2 - - \beta_4^* f_4, \ldots)$, является изоморфизмом, и его гомотопический класс не зависит от выбора эрмитовых метрик на F_r. По теореме 24.2.1 существует однозначно определенный элемент

$$d(E) = d\left(\sum_s F_{2s}, \sum_s F_{2s+1}, \beta\right) \in K(B(E), S(E)),$$

и он ведет себя функториально по отношению к отображениям $f\colon X \to X'$.

Теорема 24.2.2. *Пусть η — непрерывное $\mathbf{U}(q)$-расслоение над компактным пространством X, E — векторное расслоение, ассоциированное с η, и*

$$\varphi_*\colon H^*(X, \mathbf{Q}) \to H^*(B(E), S(E); \mathbf{Q})$$

— изоморфизм Тома. Тогда

$$\varphi_*^{-1} \operatorname{ch} d(E) = (-1)^q (\operatorname{td} \eta^*)^{-1}.$$

Доказательство (ср. Атья и Хирцебрух [7], предл. 3.5). Пусть η индуцирован из универсального $\mathbf{U}(q)$-расслоения ξ над $\mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C})$ с помощью отображения $f\colon X \to \mathfrak{G}(q, N; \mathbf{C})$. Рассуждения п. 24.3 показывают, что

$$\varphi_*^{-1} \operatorname{ch} d(E) = f^* \frac{\sum_{r=0}^{q} (-1)^r \operatorname{ch} \lambda^r \xi}{c_q \xi},$$

где правая часть корректно определена при достаточно больших N. Искомый результат следует теперь из теоремы 10.1.1.

24.5. Элемент $d(E)$ можно использовать для определения гомоморфизма $K(X)$-модулей

$$\varphi_!\colon K(X) \to K(B(E), S(E)).$$

Положим

$$\varphi_! a = (-1)^q d(E)^* \cdot \pi^! a$$

для $a \in K(X)$. Тогда $\operatorname{ch} \varphi_! a = \varphi_*((\operatorname{td} \eta)^{-1} \cdot \operatorname{ch} a)$.

На самом деле $\varphi_!$ является изоморфизмом, аналогичным изоморфизму Тома для когомологий. Доказательство этого факта можно получить редукцией к частному случаю, когда X — точка. В этом случае доказательство основано на следующей теореме периодичности Ботта.

Теорема 24.5.1 (Ботт [2], [5]). *Пусть X — компактное пространство. Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} K(X) \otimes K(\mathbf{S}^2) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\operatorname{ch} \otimes \operatorname{ch}"'] & K(X \times \mathbf{S}^2) \arrow[d, "\operatorname{ch}"] \\ H^*(X, \mathbf{Q}) \otimes H^*(\mathbf{S}^2, \mathbf{Q}) \arrow[r, "\alpha"] & H^*(X \times \mathbf{S}^2, \mathbf{Q}), \end{tikzcd}$$

в которой β индуцировано тензорным умножением расслоений, α индуцировано $\smile$-произведением и α и β являются изоморфизмами.

Элементарное доказательство теоремы 24.5.1 было дано Атьей и Боттом [1]. По поводу соответствующей теоремы периодичности для кольца Гротендика вещественных векторных расслоений см. Вуд [1].

Теорема 24.5.2. *Пусть η — непрерывное $\mathbf{U}(q)$-расслоение над $2n$-мерной сферой $\mathbf{S}^{2n}$. Тогда $(\operatorname{ch}_n \eta)[\mathbf{S}^{2n}]$ — целое число. Это эквивалентно также тому, что $c_n(\eta)[\mathbf{S}^{2n}]$ делится на $(n-1)!$.*

Доказательство. Пусть $h \in K(\mathbf{S}^2)$ — элемент, соответствующий $\mathbf{U}(1)$-расслоению η_1 над $\mathbf{S}^2 = \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, определенному в 4.2. Тогда 1 и h — образующие для $K(\mathbf{S}^2)$ и, следовательно, $(\operatorname{ch}_1 g)[\mathbf{S}^2]$ является целым числом для всех $g \in K(\mathbf{S}^2)$.

Из теоремы 24.5.1 следует, что $(\operatorname{ch}_n f)[\mathbf{S}^2 \times \ldots \times \mathbf{S}^2]$ является целым для всех $f \in K(\mathbf{S}^2 \times \ldots \times \mathbf{S}^2)$. Представим $\mathbf{S}^{2n}$ как редуцированное произведение n экземпляров $\mathbf{S}^2$, и рассмотрим отображение $p\colon \mathbf{S}^2 \times \ldots \times \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^{2n}$. Тогда $(\operatorname{ch}_n p^! b)[\mathbf{S}^2 \times \ldots \times \mathbf{S}^2]$ будет целым, а следовательно, и $(\operatorname{ch}_n b)[\mathbf{S}^{2n}]$ будет целым для всех $b \in \in K(\mathbf{S}^{2n})$. Последнее утверждение следует из формулы Ньютона (см. 10.1)

$$n! \operatorname{ch}_n b = (-1)^{n-1} n c_n(b) + \text{произведения членов меньших степеней.}$$

Теорема 24.5.2 также принадлежит Ботту, который первоначально доказал ее с помощью теории Морса (Ботт [3]). Из этой теоремы следует, что сфера $\mathbf{S}^{2n}$ не допускает почти комплексной структуры, если $n \geqslant 4$, так как если бы θ было комплексно-аналитическим касательным расслоением, то из 4.11(16) следовало бы, что $(c_n \theta)[\mathbf{S}^{2n}] = 2$. Кервэр и Милнор вывели из теоремы 24.5.2, что $\mathbf{S}^{2n-1}$ параллелизуема тогда и только тогда, когда $n = 1, 2, 4$ (Кервэр [1], Милнор [2]; см. также Борель и Хирцебрух [1], § 26.11, и Атья и Хирцебрух [5]).

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi_!\colon K(X) \to K(B(E), S(E))$, где X — точка. Тогда $K(B(E), S(E)) = K(\mathbf{S}^{2q}, y_0)$ для некоторой точки $y_0 \in \mathbf{S}^{2q}$ и $\varphi_!\colon \mathbf{Z} \to K(\mathbf{S}^{2q}, y_0)$ является гомоморфизмом, таким, что $(\operatorname{ch}_q \varphi_! 1)[\mathbf{S}^{2q}] = 1$. В этом случае можно показать, что $p^!\colon K(\mathbf{S}^{2q}) \to \to K(\mathbf{S}^2 \times \ldots \times \mathbf{S}^2)$ будет мономорфизмом, а $\varphi_!\colon \mathbf{Z} \to K(\mathbf{S}^{2q}, y_0) \to$

изоморфизмом. Часто удобно ввести элемент $h = 1 + \varphi_! 1 \in K(\mathbf{S}^{2q})$. Для $q = 1$ этот элемент совпадает с элементом, введенным при доказательстве теоремы 24.5.2. Аналогичное рассуждение с редуцированными произведениями показывает, что теорема 24.5.1 остается в силе, если $\mathbf{S}^2$ заменить на $\mathbf{S}^{2q}$ для любого $q > 0$.

Теорема периодичности Ботта является основным средством для определения полной экстраординарной теории когомологий $K^*(X, Y)$ (см. 24.1), а следовательно, для доказательства изоморфизма Тома, упомянутого выше.

Мы приведем еще одно приложение — к доказательству дифференцируемого аналога теоремы Римана — Роха.

Пусть j: $X \to Y$ — вложение компактных связных ориентированных гладких многообразий, и пусть нормальное расслоение E для X в Y допускает комплексную структуру, т. е. E ассоциировано с некоторым $\mathbf{U}(q)$-расслоением η, как в теореме 24.4.2. Тогда имеется отображение r: $Y \to B(E)/S(E)$, при котором все точки вне $B(E) \subset Y$ стягиваются в отмеченную точку; тем самым определен гомоморфизм $r^!$: $K(B(E), S(E)) \to K(Y)$. Определим $j_!$: $K(X) \to K(Y)$ равенством $j_! a = r^! \varphi_! a$; тогда

$$\operatorname{ch} j_! a = r^* \varphi_* \left((\operatorname{td} \eta)^{-1} \cdot \operatorname{ch} a \right) = j_* \left((\operatorname{td} \eta)^{-1} \cdot \operatorname{ch} a \right),$$

где j_*: $H^*(X, \mathbf{Q}) \to H^*(Y, \mathbf{Q})$ — гомоморфизм Гизина. Это — дифференцируемый аналог теоремы Римана — Роха для вложений [23.5(9)]. Приведем два следствия, относящихся к случаю, когда X — почти комплексное многообразие.

Теорема 24.5.3. *Пусть X — связное почти комплексное многообразие. Тогда существуют вложение j: $X \to \mathbf{S}^{2N}$ и гомоморфизм $j_!$: $K(X) \to K(\mathbf{S}^{2N})$, такие, что* $\operatorname{ch} j_! a = j_*(\operatorname{td}(X) \cdot \operatorname{ch} a)$.

Доказательство. Пусть θ — касательное $\mathbf{U}(n)$-расслоение для X. Для достаточно больших q найдется $\mathbf{U}(q)$-расслоение η над X, такое, что $\theta + \eta$ будет тривиальным $\mathbf{U}(n+q)$-расслоением, а η будет нормальным расслоением для некоторого гладкого вложения $X \to \mathbf{C}_{n+q}$. Мы можем рассмотреть $\mathbf{S}^{2N}$ как одноточечную компактификацию для $\mathbf{C}_N$, $N = n + q$. Теорема следует теперь из равенства $\operatorname{td} \theta \cdot \operatorname{td} \eta = 1$.

Теорема 24.5.4. *Пусть X — почти комплексное многообразие, и пусть η — $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X. Тогда $T(X, \eta)$ — целое число.*

Следствие. *Род Тодда для X цел.*

Доказательство. Пусть j: $X \to \mathbf{S}^{2N}$ — вложение, построенное в теореме 24.5.3. Тогда η определяет элемент $a \in K(X)$ и

$$T(X, \eta) = \varkappa_N [j_* (\operatorname{td}(X) \cdot \operatorname{ch} a)] = \varkappa_N [\operatorname{ch} j_! a]$$

будет целым по теореме 24.5.2.

Теорема 24.5.3 принадлежит Атье и Хирцебруху [1, 8]. Она является частным случаем теоремы о непрерывных отображениях гладких многообразий, приведенной в 26.5. Аналогично, теорема 24.5.4 является частным случаем более общих теорем целочисленности для гладких многообразий (см. 26.1—26.2).

§ 25. Теорема Атьи и Зингера об индексе

25.1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в $\mathbf{R}^n$. Для всякой последовательности $t = (t_1, \ldots, t_n)$ целых неотрицательных чисел положим

$$|t| = t_1 + \ldots + t_n,$$
$$D^t = (-i)^{|t|} \frac{\partial^{|t|}}{\partial x_1^{t_1} \ldots \partial x_n^{t_n}}, \quad i^2 = -1. \tag{1}$$

Пусть A и B — конечномерные комплексные векторные пространства, и пусть $C^\infty(U, A)$ — пространство гладких (т. е. бесконечно дифференцируемых) функций из $U \subset \mathbf{R}^n$ в A, где U — открытое подмножество.

Линейное отображение

$$D\colon C^\infty(U, A) \to C^\infty(U, B)$$

называется *линейным дифференциальным оператором порядка* r, если существуют функции $g_t \in C^\infty(U, \operatorname{Hom}(A, B))$, такие, что

$$Df = \sum_{|t| \leqslant r} g_t D^t f.$$

Дифференциальный оператор D порядка r определяет линейное отображение $\sigma_r(D)(v) \in \operatorname{Hom}(A, B)$ для всех $v = (u, (y_1, \ldots, y_n)) \in U \times \mathbf{R}^n$ по формуле

$$\sigma_r(D)(v) = \sum_{|t|=r} g_t(u) y_1^{t_1} \ldots y_n^{t_n}. \tag{2}$$

Оператор D называется *эллиптическим* порядка r, если для всех $u \in U$ и всех ненулевых

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \quad v = (u, y),$$

гомоморфизм $\sigma_r(D)(v)$ обратим. Гомоморфизм $\sigma_r(D)$ называется *символом* для D. Заметим, что символ зависит от выбора r: если D рассматривается как дифференциальный оператор порядка $r+1$, то его символ $\sigma_{r+1}(D)$ равен нулю.

Теперь пусть X — гладкое многообразие, ${}_{\mathbf{R}}\theta^*$ — кокасательное расслоение для X (см. 4.6), $B(X)$ и $S(X)$ — расслоения на шары и сферы, ассоциированные с ${}_{\mathbf{R}}\theta^*$, и π: $B(X) \to X$ — проекция. Пусть E и F — гладкие комплексные векторные расслоения над X и

$\Gamma(E)$, $\Gamma(F)$ — соответствующие векторные пространства глобальных гладких сечений. Линейное отображение

$$D\colon\ \Gamma(E)\to\Gamma(F)$$

называется *дифференциальным оператором порядка* r, если существует открытое покрытие для X координатными окрестностями U_j, такое, что $E=U_j\times A$, $F=U_j\times B$ над U_j и D задается дифференциальным оператором $D_j\colon C^\infty(U_j, A)\to C^\infty(U_j, B)$ порядка r.

Рассмотрим π^*E, π^*F как подпространства в $B(X)\times E$ и $B(X)\times F$, соответственно, и определим гомоморфизм

$$\sigma_r(D)\colon\ \pi^*E\to\pi^*F,$$

называемый *символом* для D, положив

$$\sigma_r(D)(v,\ s(x_0))=\left(v,\ \frac{i^r}{r!}D(f^r s)(x_0)\right), \tag{3}$$

где $x_0\in X$, $v\in B(X)$, $\pi(v)=x_0$, $s\in\Gamma(E)$ и f — гладкая функция, такая, что $f(x_0)=0$, $df=v$. В терминах локальных координат $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки x_0 имеем $D^t(f^r, s)_{x_0}=0$ для $|t|>r$ и

$$D^t(f^r s)_{x_0}=(-i)^r\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_0}^{t_1}\cdots\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{x_0}^{t_n} r!\ s(x_0)$$

для $|t|=r$. Следовательно, $\sigma_r(D)(v, s(x_0))$ зависит только от координат $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ для df и от значения $s(x_0)$ для s.

Это показывает, что гомоморфизм расслоений $\sigma_r(D)$ корректно определен и что он совпадает в точке x_0 с гомоморфизмом, определенным по формуле (2).

Если E, F, G — комплексные векторные расслоения над X и если $D_1\colon \Gamma(E)\to\Gamma(F)$ и $D_2\colon\Gamma(F)\to\Gamma(Q)$ — дифференциальные операторы порядков r_1 и r_2, то D_2D_1 будет дифференциальным оператором порядка r_1+r_2 и

$$\sigma_{r_1+r_2}(D_2D_1)=\sigma_{r_2}(D_2)\,\sigma_{r_1}(D_1).$$

Определение. Дифференциальный оператор D *эллиптичен* порядка r, если $\sigma=\sigma_r(D)\,|\,S(X)$ — изоморфизм.

Замечание. Если D эллиптичен, то E и F имеют одинаковую размерность слоя. Мономорфизм векторных расслоений, имеющих одинаковую размерность слоя, обязан быть изоморфизмом. Следовательно, D эллиптичен, если E и F имеют одинаковую размерность слоя и если из того, что $s\in\Gamma(E)$ — сечение с $s(x)\neq 0$ и f — гладкая функция с $f(x)=0$, $df(x)\neq 0$, следует, что $D(f^r s)(x)\neq 0$.

25.2. Предположим теперь, что X компактно и снабжено римановой метрикой. Наличие элемента объема позволяет определить интегрирование по X. Предположим, что комплексные векторные расслоения E, F снабжены эрмитовыми метриками $H(,)$. Дифференциальный оператор $D^*\colon\ \Gamma(F)\to\Gamma(E)$ называется *формально сопряженным к* D, если для всех $s\in\Gamma(E)$, $t\in\Gamma(F)$

$$\int\limits_X H(Ds,\ t)=\int\limits_X H(s,\ D^*t).$$

Эрмитовы метрики на E и F определяют эрмитовы метрики на π^*E, π^*F; следовательно, определен гомоморфизм, сопряженный к символу $\sigma_r(D)^*\colon\ \pi^*F\to\pi^*E$.

Теорема 25.2.1. *Пусть X — компактное гладкое многообразие, снабженное римановой метрикой, и пусть E, F — гладкие комплексные векторные расслоения над X, снабженные эрмитовыми метриками. Тогда для D существует и единствен формально сопряженный оператор D^* и $\sigma_r(D^*)=\sigma_r(D)^*$.*

Доказательство см. у Пале [1].

Если D — дифференциальный оператор порядка r, то по 25.1 $D^*D\colon\ \Gamma(E)\to\Gamma(E)$ — дифференциальный оператор порядка $2r$. По отношению к эрмитовым метрикам на E и F

$$H(e,\ \sigma_{2r}(D^*D)\,e)=H(\sigma_r(D)\,e,\ \sigma_r(D)\,e)$$

для всех $e\neq 0$ в π^*E. Следовательно, если D эллиптичен, то D^*D *строго эллиптичен*, т. е. $H(e, \sigma_{2r}(D^*D)e)>0$ для всех $e\neq 0$ в π^*E. Обратно если E и F имеют одинаковую размерность слоя и если D^*D строго эллиптичен, то $\sigma_r(D)\,|\,S(X)$ — мономорфизм и, следовательно, D эллиптичен.

Пусть $\ker D$ и $\operatorname{coker} D$ — ядро и коядро дифференциального оператора D. Если D эллиптичен, то D^* тоже эллиптичен, ядро $\ker D$ конечномерно и $\dim\ker D^*=\dim\operatorname{coker} D$ (см. Пале [1], Гельфанд [1]). *Индекс* (или *аналитический индекс*) $\tau(D)$ для D определяется как

$$\tau(D)=\dim\ker D-\dim\operatorname{coker} D=\dim\ker D-\dim\ker D^*. \tag{4}$$

Векуа и Гельфанд [1] предположили, что целое число $\tau(D)$ может быть выражено через топологические инварианты. Эта гипотеза была проверена в частных случаях Аграновичем [1], Дыниным [1], Вольпертом [1] и другими.

25.3. Пусть X — компактное гладкое m-мерное многообразие, не обязательно ориентируемое, и пусть ${}_{\mathbf{R}}\theta$ — касательное $\mathbf{GL}(m, \mathbf{R})$-расслоение для X. Пусть T^* — пространство ковариантных касательных векторов для X, и пусть $\pi^*\colon\ T^*\to X$ — проекция; T^* можно рассматривать как $2m$-мерное многообразие с касательным $\mathbf{GL}(2nr, \mathbf{R})$-расслоением $\pi^*_{\mathbf{R}}\theta\oplus\pi^*_{\mathbf{R}}\theta^*$. Риманова метрика на X

определяет изоморфизм ${}_{\mathbf{R}}\theta \cong {}_{\mathbf{R}}\theta^*$ и, следовательно, изоморфизм (в обозначениях п. 4.5)

$$\pi_{\mathbf{R}}^*\theta + \pi_{\mathbf{R}}^*\theta^* \cong \pi_{\mathbf{R}}^*\theta \oplus \pi_{\mathbf{R}}^*\theta \cong \rho(\pi^*\psi({}_{\mathbf{R}}\theta)).$$

Следовательно, $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-расслоение $\eta = \pi^*\psi({}_{\mathbf{R}}\theta)$ задает на многообразии T^* почти комплексную структуру. Подробное исследование этой почти комплексной структуры на T^* проведено у Домбровского [1].

В терминах локальных координат $x_1, \ldots, x_m$ элемент v из слоя расслоения T^*, лежащего над точкой $(0, \ldots, 0)$, имеет вид $\sum_{j=1}^{m} v_j\,dx_j$. Упорядочение координат $(x_1, v_1, \ldots, x_m, v_m)$ определяет ориентацию в T^*, индуцированную η. Эта ориентация индуцирует ориентацию на $B(X)$ и на $S(X)$ и, следовательно, определяет фундаментальный класс в

$$H_{2m}(B(X), S(X); \mathbf{Q}).$$

Значение класса когомологий $u \in H^*(B(X), S(X); \mathbf{Q})$ на этом фундаментальном классе будет обозначаться через $\varkappa^{2m}[u]$. Пусть D: $\Gamma(E) \to \Gamma(F)$ — эллиптический дифференциальный оператор порядка r с символом $\sigma_r(D)$. Согласно 24.2, ограничение $\sigma = \sigma_r(D) \mid S(X)$ определяет разностное расслоение $d(\pi^*E, \pi^*F, \sigma)$ в $K(B(X), S(X))$ с характером Чженя

$$\operatorname{ch} D \in H^*(B(X), S(X); \mathbf{Q}).$$

Относительную группу когомологий $H^*(B(X), S(X); \mathbf{Q})$ можно рассматривать как модуль над $H^*(B(X), \mathbf{Q})$, используя относительное $\smile$-произведение. *Топологическим индексом* для D называется

$$\gamma(D) = \varkappa^{2m}[\operatorname{ch} D \cdot \operatorname{td} \eta]. \tag{5}$$

Теорема 25.3.1 (Атья и Зингер [1]). *Пусть E, F — гладкие комплексные векторные расслоения над компактным гладким многообразием X и D: $\Gamma(E) \to \Gamma(F)$ — эллиптический оператор. Тогда*

$$\tau(D) = \gamma(D).$$

Следствие. *$\gamma(D)$ — целое число.*

Из теоремы Атьи — Зингера об индексе вытекает теорема 21.1.1(РР) для произвольных комплексных компактных многообразий V. Кроме того, из нее следует теорема об индексе из гл. 2 (теорема 8.2.2). Эти следствия доказаны в 25.4. Доказательство теоремы 25.3.1 весьма коротко обсуждается в 25.5. В некоторых случаях можно прямо доказать, что $\gamma(D) = 0$. Из теоремы 25.3.1 следует тогда, что $\tau(D) = 0$. Например, имеет место

Лемма 25.3.2. *Пусть D — эллиптический дифференциальный оператор на компактном гладком многообразии нечетной размерности. Тогда $\gamma(D) = 0$.*

Доказательство. Пусть оператор D: $\Gamma(E) \to \Gamma(F)$ эллиптичен порядка r. Если $v \in S(X)$, $\pi v = x$, то символ $\sigma_r(D)(x, v)$: $E_x \to F_x$ является однородным многочленом степени r от локальных координат $v_1, \ldots, v_m$ в слое над $B(X)$. Следовательно,

$$\sigma_r(D)(x, -v) = (-1)^r \sigma_r(D)(x, v). \tag{6}$$

Пусть f: $(B(X), S(X)) \to (B(X), S(X))$ — отображение, сопоставляющее точке x из некоторого слоя точку $-x$ из того же слоя, и пусть β: $\pi^*F \to \pi^*F$ — скалярное умножение на $(-1)^r$. Тогда (6) дает

$$\beta\sigma_r(D) = f^*\sigma_r(D)\colon f^*\pi^*E \to f^*\pi^*F,$$

и так как $\pi f = \pi$ и $f^*\pi^* = \pi^*$, то

$$d(\pi^*E, \pi^*F, f^*\sigma) = d(\pi^*E, \pi^*F, \beta\sigma).$$

Из теоремы 24.2.1 следует, поскольку β гомотопно тождественному отображению, что

$$d(f^*\pi^*E, f^*\pi^*F, f^*\sigma) = d(\pi^*E, \pi^*F, \sigma),$$
$$f^* \operatorname{ch} D = \operatorname{ch} D.$$

С другой стороны, $\operatorname{td}\eta$ является классом из $H^*(B(X), \mathbf{Q}) = H^*(X, \mathbf{Q})$ и поэтому $f^* \operatorname{td}\eta = \operatorname{td}\eta$. Если X нечетномерно, то f меняет ориентацию и, следовательно, $-\gamma(D) = \gamma(D)$.

Если X ориентируемо, то ${}_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}$ ассоциированно с $\mathbf{SO}(m)$-расслоением ${}_{\mathbf{R}}\theta$. Имеется изоморфизм Тома

$$\varphi_*\colon H^*(X, \mathbf{Q}) \to H^*(B(X), S(X); \mathbf{Q}), \tag{7}$$

определенный ориентацией X, если ориентация $B(X)$ задана упорядочением координат $(x_1, \ldots, x_m, v_1, \ldots, v_m)$. Эта ориентация отличается от использованной раньше на множитель $(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}$. Следовательно,

$$\gamma(D) = \varphi_*^{-1}\left((-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \operatorname{ch} D \cdot \operatorname{td}\eta\right)[X] =$$
$$= \varkappa^m\left[\varphi_*^{-1}\left((-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} \operatorname{ch} D\right) \operatorname{td}\psi({}_{\mathbf{R}}\theta)\right]. \tag{8}$$

Класс Тодда $\operatorname{td}\psi({}_{\mathbf{R}}\theta)$ может быть записан как многочлен от классов Понтрягина $p_j(X) = (-1)^j c_{2j}(\psi({}_{\mathbf{R}}\theta))$ для X: если

$$p(X) = \prod_j (1 + y_j^2) \in H^*(X, \mathbf{Q}),$$

то (см. 4.5)

$$c(\psi({}_{\mathbb R}\theta))=\prod_j(1-y_j^2)=\prod_j(1+y_j)(1-y_j)$$

и

$$\operatorname{td}\psi({}_{\mathbb R}\theta)=\prod_j\left(\frac{y_j}{1-e^{-y_j}}\right)\prod_j\left(\frac{-y_j}{1-e^{y_j}}\right)=\prod_j\left(\frac{\frac{1}{2}y_j}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}y_j}\right)^2. \tag{9}$$

Правая часть равенства является симметрической функцией от y_j^2 и, следовательно, является многочленом от $p_j(X)$ (ср. с соответствующей формулой в 1.7).

25.4. В этом пункте мы наметим два важных приложения теоремы Атьи — Зингера. Подробности можно найти у Пале [1] и у Картана и Шварца [1].

а) Пусть V_n — компактное комплексное многообразие размерности n, W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над V_n со слоем $\mathbf{C}_q$. Мы хотим показать, что из теоремы 25.3.1 следует теорема Римана — Роха $\chi(V_n, W)=T(V_n, W)$. Пусть $\boldsymbol T$ — комплексное ковариантное касательное векторное расслоение к V_n. В обозначениях п. 15.4 $\Gamma(W\otimes\lambda^p\overline{\boldsymbol T})=A^{0,p}(W)$. Дифференциальный оператор

$$\bar\partial+\vartheta\colon\ \Gamma\Big(\sum_p W\otimes\lambda^p\overline{\boldsymbol T}\Big)\to\Gamma\Big(\sum_p W\otimes\lambda^p\overline{\boldsymbol T}\Big)$$

самосопряжен (15.4(9)). Так как $\bar\partial$ имеет степень $+1$, а ϑ — степень -1, то дифференциальный оператор $\bar\partial+\vartheta$ отображает формы нечетной степени в формы четной степени, и наоборот. Пусть

$$E=\sum_s W\otimes\lambda^{2s}\overline{\boldsymbol T},\quad F=\sum_s W\otimes\lambda^{2s+1}\overline{\boldsymbol T},$$

$$D=\bar\partial+\vartheta\colon\ \Gamma(E)\to\Gamma(F).$$

Дифференциальный оператор D имеет порядок 1. Разложение

$$A^{0,p}(W)=\bar\partial A^{0,p-1}(W)\oplus\vartheta A^{0,p+1}(W)\oplus B^{0,p}(V,W)$$

из 15.4 показывает, что если $\bar\partial\alpha+\vartheta\beta=0$, $\alpha\in A^{0,p-1}(W)$, $\beta\in A^{0,p+1}(W)$, то $\bar\partial\alpha=\vartheta\beta=0$. Следовательно,

$$\ker D=\sum_s B^{0,2s}(V,W),$$

$$\ker D^*=\sum_s B^{0,2s+1}(V,W).$$

По теореме 15.4.1 имеем

$$\tau(D)=\dim\ker D-\dim\ker D^*=$$
$$=\sum_p(-1)^p\dim H^p(V,W)=\chi(V,W). \tag{10}$$

Пусть ${}_{\mathbb R}\mathfrak T^*_{\mathbf C}$ — комплексификация вещественного кокасательного расслоения ${}_{\mathbb R}\mathfrak T^*$ для X. Изоморфизм ${}_{\mathbb R}\mathfrak T^*_{\mathbf C}=\boldsymbol T\oplus\overline{\boldsymbol T}$ (см. 4.7(12)) определяет отображение $p\colon {}_{\mathbb R}\mathfrak T^*_{\mathbf C}\to\overline{\boldsymbol T}$. Индуцированное отображение ${}_{\mathbb R}\mathfrak T^*\to\overline{\boldsymbol T}$ может быть использовано для того, чтобы отождествить расслоение на шары $B(X)=B({}_{\mathbb R}\mathfrak T^*)$ с $B(\overline{\boldsymbol T})$. Произведем это отождествление на время вычисления символа для дифференциального оператора D. Согласно (3), значение символа для $\bar\partial\colon\Gamma(\lambda^{r-1}\overline{\boldsymbol T})\to\Gamma(\lambda^r,\overline{\boldsymbol T})$ на элементе $df\in B({}_{\mathbb R}\mathfrak T^*_{\mathbf C})$ задается формулой $(u_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_{r-1}\in\lambda^{r-1}\overline{\boldsymbol T})$

$$\sigma_1(\bar\partial)(df,\ u_1\wedge\ldots\wedge u_{r-1})=i\,\bar\partial f\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{r-1},$$

а на элементе $p(df)=\bar\partial f\in B(\overline{\boldsymbol T})$ — формулой

$$\sigma_1(\bar\partial)(\bar\partial f,\ u_1\wedge\ldots\wedge u_{r-1})=i\,\bar\partial f\wedge u_1\wedge\ldots\wedge u_{r-1}.$$

Изоморфизм $\lambda^r\overline{\boldsymbol T}\to\lambda^r\boldsymbol T^*$ (см. 15.3с) индуцирует в каждом $\lambda^r\overline{\boldsymbol T}$ эрмитовы метрики, такие, что ϑ, определенное по формуле 15.4(9), будет формальным сопряжением для $\bar\partial$ в смысле п. 25.2. Следовательно, в обозначениях п. 24.4

$$\sigma_1(\bar\partial)=i\beta_r,$$

$$\sigma_1(D)\,|\,S(X)=$$
$$=i\beta\colon\ \pi^*\sum_s W\otimes\lambda^{2s}\overline{\boldsymbol T}\,|\,S(X)\to\pi^*\sum_s W\otimes\lambda^{2s+1}\overline{\boldsymbol T}\,|\,S(X)$$

Согласно 24.4 β является изоморфизмом, следовательно D эллиптичен. Иначе можно показать явным вычислением, что оператор $D^*D=\square$ строго эллиптичен, что опять дает эллиптичность D.

Как и в теореме 24.4.2, имеем

$$\varphi_*^{-1}\operatorname{ch}(D)=\varphi_*^{-1}\operatorname{ch}d\Big(\pi^*\sum_s W\otimes\lambda^{2s}\overline{\boldsymbol T},\ \pi^*\sum_s W\otimes\lambda^{2s+1}\overline{\boldsymbol T},\ \beta\Big)=$$
$$=(-1)^n\operatorname{ch}W\cdot(\operatorname{td}\theta^*)^{-1},$$

где θ — касательное $\mathbf U(n)$-расслоение для V_n. Тогда

$$\gamma(D)=\varkappa_n\big[(-1)^{2n}\operatorname{ch}W\cdot(\operatorname{td}\theta^*)^{-1}\cdot\operatorname{td}\theta\cdot\operatorname{td}\bar\theta\big]=$$
$$=\varkappa_n[\operatorname{ch}W\cdot\operatorname{td}\theta]=T(V_n,W). \tag{11}$$

Соотношения (10) и (11) показывают, что теорема 25.3.1 влечет теорему Римана — Роха для произвольного компактного комплексного многообразия V_n. Та же самая теорема, примененная к векторному расслоению $W\otimes\lambda^p\boldsymbol T$, дает

$$\chi^p(V_n,W)=T^p(V_n,W)\quad\text{и}\quad\chi_y(V_n,W)=T_y(V_n,W).$$

В частности, беря $y=1$, видим, что теорема Ходжа 15.8.2 об индексе справедлива для произвольного компактного комплексного многообразия.

b) Пусть теперь X — компактное ориентированное гладкое многообразие размерности $2n$. Мы хотим показать, что теоремы 4.11.4 и 8.2.2 следуют обе из теоремы 25.3.1.

Пусть ${}_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}^*_{\mathbf{C}}$ — комплексификация вещественного ковариантного касательного векторного расслоения (см. 4.6). Положим

$$W = \sum_r \lambda^r_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}^*_{\mathbf{C}}.$$

Сечением расслоения W будет комплекснозначная дифференциальная форма на X. Внешний дифференциал

$$d\colon \Gamma(W) \to \Gamma(W)$$

является дифференциальным оператором степени 1 (см. 2.12). Уравнение (3) показывает, что если $v = df$, $\pi(v) = x$, $f(x) = 0$ и $\omega \in \Gamma(W)$, то символ для d задается формулой

$$\sigma_1(d)(v, \omega(x)) = (v, iv \wedge \omega(x)).$$

Риманова метрика на X определяет гомоморфизм

$$*\colon \lambda^r_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}^*_{\mathbf{C}} \to \lambda^{2n-r}{}_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}^*_{\mathbf{C}}$$

и, следовательно, гомоморфизм $*\colon \Gamma(W) \to \Gamma(W)$. Так как X имеет четную размерность, то формальный сопряженный δ к d в смысле п. 25.2 определен равенством $\delta = -{*d*}$. Как и в 15.4, мы имеем $dd = \delta\delta = 0$ и $(d+\delta)(d+\delta) = d\delta + \delta d = \Delta$. Форма ω из $\Gamma(W)$ называется *гармонической*, если $\Delta\omega = 0$. Форма ω гармонична тогда и только тогда, когда $d\omega = \delta\omega = 0$. Если через $B^r(X)$ обозначить векторное пространство гармонических форм степени r, то имеет место естественный изоморфизм (де Рам [1], Ходж [1]; (см. 15.7)

$$H^r(X, \mathbf{C}) = B^r(X)$$

и, следовательно,

$$\dim B^r(X) = b_r(X),$$

где $b_r(X)$ есть r-е число Бетти для X.

Дифференциальный оператор $d + \delta\colon \Gamma(W) \to \Gamma(W)$ самосопряжен, поэтому естественно искать разложения $W = E \oplus F$, такие, что оператор

$$D = d + \delta\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

эллиптичен. Рассмотрим эндоморфизмы пространства W, определяемые с помощью $*$ и $\alpha = i^{r(r+1)-n}*\colon \lambda^r_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}^*_{\mathbf{C}} \to \lambda^{2n-r}{}_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}^*_{\mathbf{C}}$. Так как X имеет четную размерность, то $** = (-1)^r$ и $\alpha^2 = (-1)^{r^2} ** = 1$. Собственные пространства для инволюций $**$ и α и дают требуемое разложение для W.

1) Положим $E = \sum_s \lambda^{2s}_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}^*_{\mathbf{C}}$, $F = \sum_s \lambda^{2s+1}{}_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}^*_{\mathbf{C}}$ и

$$D = d + \delta\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F).$$

В обозначениях п. 24.4 символ оператора D есть $i\beta$, следовательно, D эллиптичен. Иначе, можно показать, что оператор $D^*D = \Delta$ строго эллиптичен, что тоже дает эллиптичность для D. Как и в а),

$$\gamma(D) = \dim\ker D - \dim\ker D^* = \sum_r (-1)^r \dim B^r(X).$$

Следовательно, $\gamma(D)$ есть эйлерова характеристика $E(X)$ для X. По теореме 10.1.1 если ${}_{\mathbf{R}}\theta$ — касательное $\mathbf{SO}(2n)$-расслоение для X, то

$$\operatorname{ch} E - \operatorname{ch} F = c_{2n}(\psi({}_{\mathbf{R}}\theta)) \cdot (\operatorname{td}({}_{\mathbf{R}}\theta))^{-1} = (-1)^n (e({}_{\mathbf{R}}\theta))^2 (\operatorname{td}\psi({}_{\mathbf{R}}\theta))^{-1}.$$

Согласно 24.3(7) и 25.3(8), $\gamma(D) = e({}_{\mathbf{R}}\theta)[X]$. Следовательно, из теоремы 25.3.1 следует теорема 4.11.4 для многообразий четной размерности. Случай нечетной размерности покрывается леммой 25.3.2.

2) Пусть теперь E и F — собственные подпространства для α, соответствующие собственным значениям $+1$, -1. Те же рассуждения, что и в 1), показывают, что дифференциальный оператор $d + \delta\colon \Gamma(W) \to \Gamma(W)$ эллиптичен. Имеем $\alpha(d+\delta) = -(d+\delta)\alpha$, поэтому определен дифференциальный оператор

$$D = d + \delta\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F).$$

Символы для D и $d + \delta$ образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \pi^*E \arrow[r, "\sigma_1(D)"] \arrow[d] & \pi^*F \arrow[d] \\ \pi^*W \arrow[r, "\sigma_1(d+\delta)"] & \pi^*W \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки являются вложениями. Так как символ $\sigma_1(d+\delta)$ является изоморфизмом над $S(X)$, то символ $\sigma_1(D)$ будет мономорфизмом. Это же рассуждение показывает, что символ $\sigma_1(D^*)$ также является мономорфизмом, а значит (25.2.1), $\sigma_1(D)$ — эпиморфизм. Следовательно, D эллиптичен.

Ядром для D служит пространство гармонических форм ω, таких, что $\alpha\omega = \omega$, а ядром для D^* — пространство гармонических форм ω, таких, что $\alpha\omega = -\omega$. Таким образом (ср. с доказательством теоремы 15.8.2),

$$\tau(D) = \dim\ker D - \dim\ker D^* = \dim B^n_+(X) - \dim B^n_-(X).$$

где $B^n_\pm(X)$ является подпространством $\{\omega \in B^n(X) \mid \alpha\omega = \pm\omega\}$ в $B^n(X)$. Гомоморфизм $\alpha\colon \lambda^n_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}_{\mathbf{C}} \to \lambda^n_{\mathbf{R}}\mathfrak{T}_{\mathbf{C}}$ определен формулой $\alpha = i*$ для нечетных n и формулой $\alpha = *$ для четных n. Если n нечетно, то отображение $\omega \to \bar{\omega}$ дает изоморфизм $B^n_+ \to B^n_-$ и, следовательно, $\tau(D) = 0$. Разложение в прямую сумму

$$H^n(X, \mathbf{C}) = B^n_+(X) \oplus B^n_-(X)$$

индуцирует для четных n соответствующее разложение в прямую сумму

$$H^n(X, \mathbf{R}) = B^n_{+, \mathbf{R}}(X) \oplus B^n_{-, \mathbf{R}}(X),$$

где $B^n_{\pm, \mathbf{R}}$ — подпространство $\{\omega \in B^n_{\pm}(X) \mid \omega = \bar{\omega}\}$ в $B^n_{\pm}(X)$.

Скалярное произведение $(\omega_1, \omega_2) = \int\limits_X \omega_1 \wedge * \omega_2$ на $B^n_{\mathbf{R}}(X) = H^n(X, R)$ положительно определено, и если n четно, то $B^n_{+, \mathbf{R}}(X)$ и $B^n_{-, \mathbf{R}}(X)$ ортогональны относительно этого скалярного произведения. Квадратичная форма $Q(\omega_1, \omega_2) = \int\limits_X \omega_1 \wedge \omega_2$ положительно определена на $B^n_{+, \mathbf{R}}(X)$ и отрицательно определена на $B^n_{-, \mathbf{R}}(X)$. Следовательно, если n четно, то $\dim B^n_{+}(X)$ и $\dim B^n_{-}(X)$ совпадают с числами p_+ и p_- положительных и отрицательных собственных значений для Q. Поэтому, $\tau(D) = p_+ - p_-$ совпадает с индексом многообразия X, определенным в 8.2.

Вычисление на классифицирующем пространстве $\mathfrak{G}^+(2n, N; \mathbf{R})$, аналогичное проведенному в 1) и приведенное с полными подробностями у Пале [1], показывает, что

$$\operatorname{ch} E - \operatorname{ch} F = \prod_{j=1}^{n} (e^{-y_j} - e^{y_j}),$$

где

$$p(X) = \prod_{j=1}^{n} (1 + y_j^2), \quad e({}_{\mathbf{R}}\theta^*) = \prod_{j=1}^{n} y_j,$$

и, следовательно, по 24.3 (7) и 24.4 (7)

$$\varphi_*^{-1} \operatorname{ch} D = \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-y_j} - e^{y_j}}{y_j},$$

$$\gamma(D) = \varkappa^{2n}\left[(-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-y_j} - e^{y_j}}{y_j} \cdot \frac{y_j}{1 - e^{-y_j}} \cdot \frac{-y_j}{1 - e^{y_j}}\right] =$$

$$= \varkappa^{2n}\left[\prod_{j=1}^{n} y_j \frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2} y_j}{\operatorname{sh}\frac{1}{2} y_j}\right] = \varkappa^{2n}\left[2^n \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2} y_j \left(\operatorname{th}\frac{1}{2} y_j\right)^{-1}\right] =$$

$$= \varkappa^{2n}\left[\prod_{j=1}^{n} y_j / \operatorname{th} y_j\right] = L(X).$$

Следовательно, из теоремы 25.3.1 следует теорема 8.2.2. Случай нечетномерного X снова покрывается леммой 25.3.2.

25.5. Существуют два доказательства теоремы Атьи и Зингера. Первое доказательство, построенное по образцу доказательства теоремы 8.2.2, кратко изложено у Атьи и Зингера [1][1]). Подробности можно найти у Пале [1] и Картана и Шварца [1]. Второе доказательство должно появиться в новой работе Атьи и Зингера[2]).

Исходным пунктом для обоих доказательств служит тот факт, что формула (8) определяет индекс $\gamma(b)$ для любого элемента $b \in K(B(X), S(X))$. Мы хотим распространить аналитический индекс $\tau(D)$ аналогичным образом, так чтобы он стал функцией τ: $K(B(X), S(X)) \to \mathbf{Q}$. Известно, что гомотопные операторы имеют одинаковый аналитический индекс и что символы, которые определяют одинаковое разностное расслоение, гомотопны. Таким образом, индекс будет зависеть только от разностного расслоения, если гомотопия между символами может быть поднята до гомотопии между операторами. Далее, функция τ будет определена, если всякий элемент $b \in K(B(X), S(X))$ является разностным расслоением, построенным по эллиптическому оператору. Однако в общем случае ни одно из этих утверждений не имеет места для эллиптических дифференциальных операторов. Необходимо ввести эллиптические интегральные операторы[3]) (см. Сили [1]). Этот класс включает в себя эллиптические дифференциальные операторы, и, кроме того, он достаточно велик, чтобы оба наши утверждения выполнялись в этом классе. Таким образом, аналитический индекс определяет гомоморфизм τ: $K(B(X), S(X)) \to \mathbf{Q}$, который всегда принимает целые значения.

Оставшаяся часть доказательства посвящена тому, чтобы показать, что два гомоморфизма

$$\gamma\colon\ K(B(X), S(X)) \to \mathbf{Q},$$
$$\tau\colon\ K(B(X), S(X)) \to \mathbf{Q}$$

совпадают. Мы очень кратко изложим оба метода. В первом методе многообразие X предполагается ориентированным и четномерным.

a) По 25.4 b) существует дифференциальный оператор D_0 на X, топологический индекс которого совпадает с L-родом. Пусть $b_0 \in K(B(X), S(X))$ — соответствующее разностное расслоение. Кольцо $K(B(X), S(X))$ является $K(X)$-модулем (24.5), и функция γ полностью определена своими значениями на подгруппе $K(X) \cdot b_0$ конечного индекса. Определим функцию $\gamma(X, \ )$: $K(X) \to \mathbf{Q}$ формулой $\gamma(X, b) = \gamma(bb_0)$. В действительности это не что иное, как T_y-характеристика для b при $y = 1$ (она определена и для гладких многообразий, и по 12.2 (13) определение может быть

[1]) Полное изложение см. в Атья и Зингер [2]. — *Прим. перев.*

[2]) См. Атья и Зингер [3]. — *Прим. перев.*

[3]) Которые также часто называются псевдоэллиптическими операторами. — *Прим. перев.*

естественным образом расширено на элементы $b \in K(X)$). Этот гомоморфизм обладает следующими свойствами:

1) $\gamma(X+Y, b+c) = \gamma(X, b) + \gamma(Y, c)$, где в левой части равенства «$+$» обозначает дизъюнктное объединение;

2) $\gamma(X \times Y, b \otimes c) = \gamma(X, b)\gamma(X, c)$, где $\otimes$ — тензорное произведение; это следует из 12.2(14) при $y = 1$;

3) $\gamma(X, b) = 0$, если существуют многообразие X' с границей $\partial X' = X$ и элемент $b' \in K(X')$, ограничение которого на X совпадает с b; это доказывается с помощью более сложного варианта теоремы 7.2.1;

4) $\gamma(\mathbb{S}^{2n}, h) = 2^n$, где $h \in K(\mathbb{S}^{2n})$ — определенный в 24.5 элемент, такой, что $\varkappa^{2n}[\operatorname{ch} h] = 1$; по 12.2(10) мы имеем

$$\gamma(\mathbb{S}^{2n}, h) = \varkappa^{2n}\left[\sum e^{2\delta_i}\right] = 2^n \varkappa^{2n}[\operatorname{ch} h] = 2^n,$$

если $\operatorname{ch} h = \sum e^{\delta_i}$;

5) $\gamma(\mathbb{P}_{2n}(\mathbb{C}), 1) = 1$. Это следует из теоремы 1.5.1.

Следующий и самый трудный этап доказательства состоит в том, чтобы показать, что аналитический индекс τ также обладает свойствами 1)—5). Наконец, показывается, что функция $K(X) \to \mathbf{Q}$ однозначно определяется свойствами 1)—5). Как и в 7.1, мы рассмотрим группы кобордизмов Ω_n. Для всякого $n \geqslant 0$ группа Ω_n строится из пар (X, b), где X — компактное ориентированное n-мерное гладкое многообразие, а $b \in K(X)$. Пара (X, b) является границей, если существуют многообразие X и элемент $b' \in K(X')$, такие, что $X = \partial X'$ и $b = b' | X$. Группы $\Omega_n \otimes \mathbf{Q}$ вычисляются так же, как и в теореме 7.2.3: элемент из $\Omega_n \otimes \mathbf{Q}$ однозначно определяется смешанными числами Понтрягина — Чженя

$$p_{j_1}(X) \ldots p_{j_r}(X) \cdot \operatorname{ch}_{k_1}(b) \ldots \operatorname{ch}_{k_s}(b)[X].$$

Свойства 1)—3) показывают, что γ определяет функцию $\Omega = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Omega_n \to \mathbf{Q}$.

Свойств 4), 5) достаточно, чтобы определить γ на образующих кольца $\Omega \otimes \mathbf{Q}$ и, следовательно, чтобы определить γ однозначно. Общую теорию таких групп кобордизмов для пар можно найти у Коннера и Флойда [1]. Теорема для нечетномерного X следует из рассмотрения $X \times \mathbb{S}^1$.

b) Второе доказательство того, что гомоморфизмы γ и τ совпадают, не использует теории кобордизмов. Согласно 25.3, расслоение на единичные шары $B(X)$ является почти комплексным многообразием с границей $S(X)$. Для удобства мы будем писать T^*X вместо $B(X) - S(X)$ и $K(T^*X)$ вместо $K(B(X), S(X))$. Пусть $V = \mathbb{R}^N$, так что $K(T^*V) = K(S^{2N}, y_0) = \mathbf{Z}$. Вложение $X \subset V$ определяет вложение j: $T^*X \to T^*V$. Теперь из подходящего аналога теоремы 24.5.3, относящегося к многообразиям с краем, следует, что существует гомоморфизм

$$j_!\colon (T^*X) \to K(T^*V) = \mathbf{Z},$$

такой, что $j_! a = \varkappa^{2m}[\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{td} \eta]$, где m — размерность X и η — касательное $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$-расслоение для T^*X. По 25.3(5) гомоморфизм $j_!$ совпадает с гомоморфизмом γ: $K(T^*X) \to \mathbf{Q}$. Заметим, в частности, что γ всегда принимает целые значения, так что для приложения теоремы Атьи — Зингера к теоремам целочисленности (см. 26.2 и Майер [1]) доказательства в полном объеме не требуется.

Остается доказать, что гомоморфизм $j_!$ совпадает с аналитическим индексом τ: $K(T^*X) \to \mathbf{Z}$. Первая часть доказательства состоит в том, чтобы распространить определение на операторы на некомпактных многообразиях U, V. Это сделано Сили [1]. В результате получена диаграмма гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccccc}
K(T^*X) & \xrightarrow{\varphi_!} & K(T^*U) & \xrightarrow{r^!} & K(T^*V) & \xrightarrow{\psi_!} & K(y_0) \\
\downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\
\mathbf{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbf{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbf{Z} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbf{Z}
\end{array}$$

в которой U является трубчатой окрестностью X в V, $\varphi_!$ — изоморфизмы Тома (см. 24.5) и $r^!$ индуцировано отображением $T^*V \to T^*U$, стягивающим все, что вне TU, в точку. Вторая и более трудная часть доказательства состоит в проверке того, что каждый квадрат этой диаграммы коммутативен.

Техника, развитая в этом доказательстве, была усовершенствована Атьей, чтобы получить обобщение теоремы Атьи — Зингера об индексе, относящееся к многообразиям с границей, к семействам эллиптических операторов и к действиям компактных групп Ли на гладких многообразиях.

25.6. Последнее кратко может быть описано следующим образом. Пусть X — компактное пространство, G — компактная группа Ли, действующая на X. Тогда *векторное G-расслоение* над X состоит из комплексного векторного расслоения E над X вместе с действием G на E, согласованным с действием G на X, т. е. задаваемого линейными отображениями g: $E_x \to E_{gx}$, $g \in G$, $x \in X$. Определения п. 24.1 могут быть имитированы и в этом случае и приводят к *кольцу Гротендика $K_G(X)$ векторных G-расслоений над X*. В частном случае, когда G состоит из единичного элемента, $K_G(X)$ совпадает с $K(X)$. Когда X — точка, то $K_G(X)$ совпадает с кольцом $R(G)$ представлений группы G. Если Y есть G-инвариантное замкнутое подпространство в X, то определены относительные группы $K_G(X, Y)$. Заметим, что группы $K_G(X)$, $K_G(X, Y)$ зависят не только от G, X, Y, но и от действия G на X. Все результаты K-теории, упомянутые в § 24, распространены (Атьей и Сигалом) на случай K_G-теории.

Предположим теперь, что X — компактное гладкое многообразие и что G действует гладко на X. Если E — гладкое векторное

G-расслоение над X (т. е. E и действие G на E гладки), то определено действие G на пространстве $\Gamma(E)$ гладких сечений расслоения E:

$$(gs)(x) = g \cdot s(g^{-1}x), \quad g \in G, \quad s \in \Gamma(E), \quad x \in X.$$

Пусть E, F — гладкие векторные G-расслоения над X и

$$D\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

— эллиптический дифференциальный оператор, совместимый с действием G на X. Тогда G действует линейно на конечномерных векторных пространствах $\ker D$ и $\operatorname{coker} D$.

Аналитическим индексом для D будет элемент

$$\tau(D) = \ker D - \operatorname{coker} D$$

из кольца представлений $R(G)$ группы G. Если G состоит из одного тождественного элемента, то $R(G) = \mathbf{Z}$ и это определение совпадает с 25.2(4).

С другой стороны, можно определить *топологический индекс* $\gamma(D) \in R(G)$, который сводится к определенному в 25.3, если G — единичная группа. Определение зависит не только от символа D и классов Понтрягина для X, но и от множеств X^g неподвижных точек для элементов $g \in G$.

Второе доказательство теоремы Атьи — Зингера об индексе (см. 25.5) может быть проведено в рамках K_G-теории. Оно показывает, что $\tau(D) = \gamma(D)$ для всякого эллиптического дифференциального оператора D, согласованного с действием группы G. На X существует G-инвариантная метрика, и, следовательно, на $B(X)$ существует действие G, при котором $S(X)$ G-инвариантно. Эллиптические интегральные, или псевдоэллиптические операторы Сили позволяют определить гомоморфизмы

$$\tau\colon K_G(B(X), S(X)) \to R(G),$$
$$\gamma\colon K_G(B(X), S(X)) \to R(G),$$

о которых доказывается, что они совпадают.

Рассмотрим частный случай, когда G — циклическая группа и когда образующая $g\colon X \to X$ имеет только простые неподвижные точки (*простой неподвижной точкой x* называется такая неподвижная точка, что $\det(1 - dg_x) \neq 0$, где dg_x — индуцированное отображение в касательном пространстве к точке x; из этого определения следует, что x — изолированная неподвижная точка). В этом частном случае равенство $\tau(D) = \gamma(D)$ получается также из *теоремы Лефшеца о неподвижной точке*, принадлежащей Атье и Ботту. Эта последняя теорема, которая доказывается совсем другими методами, применима к более общим отображениям $f\colon X \to X$ (снова имеющим только простые неподвижные точки, но не обязательно являющиеся образующими циклической группы, действующей на X). Как и в 25.4, отсюда можно получить различные приложения, рассматривая различные дифференциальные операторы D.

Так, оператор из 25.4a дает теорему о неподвижных точках голоморфного отображения $f\colon V \to V$ компактного комплексного многообразия V, аналогичную теореме РР. Оператор из 25.4b дает: 1) теорему, аналогичную теореме Хирцебруха об индексе, и 2) первоначальную теорему Лефшеца о неподвижной точке для компактного ориентированного гладкого многообразия. Полное изложение этих результатов с наметками доказательств общей формулы можно найти у Атьи и Ботта [3][1]).

§ 26. Теоремы целочисленности для гладких многообразий

26.1. Из теоремы Атьи — Зингера об индексе следует, в частности (см. 25.4a), что T-характеристика $T(V_n, \eta)$ комплексно-аналитического $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоения η над компактным комплексным многообразием V является целым числом. Это частный случай более общей теоремы, относящейся к непрерывным $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоениям над компактными ориентированными гладкими многообразиями.

Пусть $\{A_k(p_1, \ldots, p_k)\}$ — мультипликативная последовательность с характеристическим степенным рядом $Q(z) = \dfrac{2\sqrt{z}}{\operatorname{sh} 2\sqrt{z}}$, определенная в 1.6. Степенной ряд $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{z}}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\sqrt{z}}$ определяет мультипликативную последовательность $\{\hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j)\}$ с $A_j = 2^{4j}\hat{A}_j$.

Во всем этом параграфе мы будем предполагать, что X — компактное ориентированное гладкое многообразие размерности m с классами Понтрягина p_i.

Теорема 26.1.1. *Пусть d — элемент из $H^2(X, \mathbf{Z})$, редукция которого по модулю 2 совпадает с классом Уитни $w_2(X)$, и пусть η — непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X. Тогда*

$$\hat{A}\left(X, \frac{1}{2}d, \eta\right) = \varkappa^m \left[e^{\frac{1}{2}d} \cdot \operatorname{ch}\eta \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j) \right]$$

— целое число.

Замечание. Так как X ориентировано, то $w_{2i+1}(X)$ является редукцией $\bmod 2$ целочисленного класса Штифеля — Уитни W_{2i+1}.

[1]) См. также Атья и Ботт [4]. — *Прим. перев.*

Точная последовательность $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2 \to 0$ определяет когомологический кограничный гомоморфизм δ, такой, что $\delta w_{2i}(X) = W_{2i+1}(X)$. Поэтому элемент $d \in H^{2i}(X, \mathbf{Z})$, ограничение которого mod 2 есть $w_{2i}(X)$, существует тогда и только тогда, когда $W_{2i+1}(X) = 0$. В частности, теорема 26.1.1 применима, только если $W_3(X) = 0$.

Если m нечетно, то $\hat{A}\left(X, \frac{1}{2}d, \eta\right) = 0$. Поэтому достаточно доказать теорему для четного m. В 26.3 — 26.5 мы укажем три доказательства теоремы 26.1.1. Отметим сначала два важных частных случая, в которых она уже была доказана в 24.5.

1) Пусть X — почти комплексное многообразие с касательным $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$-расслоением θ и η — непрерывное $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X. Пусть $d = c_1(\theta)$ и $p_i = p_i(\rho(\theta))$. Тогда равенство 1.7(12) показывает, что

$$\operatorname{td}\theta = e^{\frac{1}{2}d} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j)$$

и, следовательно, $\hat{A}\left(X, \frac{1}{2}d, \eta\right) = T(X, \eta)$. Так как редукция $c_1(\theta)$ по модулю 2 совпадает с $w_2(X)$, то из теоремы 26.1.1 следует теорема 24.5.4: характеристика Тодда $T(X, \eta)$ является целым числом.

2) Пусть η — непрерывное $\mathbf{U}(q)$-расслоение над $2n$-мерной сферой S^{2n}. Классы Понтрягина $p_i(S^{2n})$ равны нулю для $i > 0$ (теорема (7.2.1)) и, следовательно, $\hat{A}(S^{2n}, 0, \eta) = \varkappa^{2n}[\operatorname{ch}\eta] = (\operatorname{ch}_n \eta)[S^{2n}]$. Таким образом, из теоремы 26.1.1 следует теорема 24.5.2: $(\operatorname{ch}_n\eta)[S^{2n}]$ является целым числом.

26.2. Теорема целочисленности 26.2.1 сама является частным случаем *нестабильной* теоремы целочисленности, принадлежащей Майеру [1]. Пусть ξ — $\mathbf{SO}(k)$-расслоение над X с $k = 2s$ или $2s + 1$. Рассмотрим формальное разложение $p(\xi) = \prod_{i=1}^{s}(1 + y_i^2)$.

Теорема 26.2.1 (Майер [1]). *Пусть d — элемент из $H^2(X, \mathbf{Z})$, редукция которого* mod 2 *совпадает с $w_2(X) + w_2(\xi)$, а η — непрерывное $\mathbf{GL}(q, \mathbf{C})$-расслоение над X. Тогда*

$$2^s \varkappa^m \left[e^{\frac{1}{2}d} \cdot \operatorname{ch}\eta \cdot \prod_{i=1}^{s} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}y_i\right) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(p_1, \ldots, p_j) \right]$$

является целым числом.

Иногда теорема 26.2.1 может быть улучшена на множитель 2 (Майер [1]). Вот некоторые следствия теоремы 26.2.1:

1) если $\xi = 0$, то получается теорема 26.1.1;

2) если $k = m$ и ξ — касательное расслоение к X, то получается целочисленность L-рода (см. 1.5 и 8.2);

3) если ξ — нормальное расслоение к вложению или погружению X в S^{m+k}, то получаются теоремы невложимости Атьи и Хирцебруха [2] и теоремы непогружаемости Сандерсона и Шварценбергера [1].

Доказательство теоремы 26.2.1 получается применением теоремы Атьи и Зингера об индексе; оно намечено в 26.3.

26.3. Пусть X — компактное ориентированное гладкое многообразие размерности $m = 2n$ и W — комплексное векторное расслоение над X, ассоциированное с $\mathbf{U}(q)$-расслоением η. Если $\mathbf{Spin}(2n)$ — универсальная накрывающая группа для $\mathbf{SO}(2n)$, то существует точная последовательность

$$1 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Spin}(2n) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{SO}(2n) \to 1.$$

Касательное расслоение к X дает элемент ${}_{\mathbf{R}}\theta \in H^1(X, \mathbf{SO}(2n)_c)$. Можно показать, что имеет место когомологическая точная последовательность множеств с отмеченными элементами и с кограничным оператором δ: $H^1(X, \mathbf{SO}(2n)_c) \to H^2(X, \mathbf{Z}_2)$, таким, что $\delta({}_{\mathbf{R}}\theta) = w_2(X)$. Следовательно, ${}_{\mathbf{R}}\theta$ ассоциировано с $\mathbf{Spin}(2n)$-расслоением тогда и только тогда, когда $w_2(X) = 0$ (см. Борель и Хирцебрух [1], § 26.3).

Предположим, что $w_2(X) = 0$. В этом случае можно с помощью двух неприводимых спинорных представлений группы $\mathbf{Spin}(2n)$ построить такие комплексные векторные расслоения W^+ и W^- и такой эллиптический дифференциальный оператор (оператор Дирака, см. Пале [1]) D: $\Gamma(W^+) \to \Gamma(W^-)$, что $\gamma(D) = \hat{A}(X, 0, \eta)$. По теореме Атьи — Зингера $\gamma(D)$ есть целое число. Это дает следующий частный случай теоремы 26.1.1.

Теорема 26.3.1. *Пусть X — компактное ориентированное гладкое многообразие размерности $2n$ с $w_2(X) = 0$. Пусть η — непрерывное $\mathbf{U}(q)$-расслоение над X, и пусть $d \in H^2(X, \mathbf{Z})$. Тогда* $\hat{A}(X, d, \eta)$ — целое число.

Доказательство. Существует $\mathbf{U}(1)$-расслоение ξ с $c_1(\xi) = d$ (см. 3.8). Тогда $\hat{A}(X, d, \eta) = \hat{A}(X, 0, \xi \otimes \eta)$ есть, по предыдущему, целое число.

Следствие. *Если $w_2(X) = 0$, то $\hat{A}$-род для X является целым числом.*

Доказательства теорем 26.1.1 и 26.2.1 аналогичны. Пусть λ_{2n}: $\mathbf{Spin}(2n+2) \to \mathbf{SO}(2n+2)$ и λ_{2n+k}: $\mathbf{Spin}(2n+k+2) \to \mathbf{SO}(2n+k+2)$ суть 2-листные накрытия, и пусть

$$\mathbf{G}_{2n} = \lambda_{2n}^{-1}(\mathbf{SO}(2n) \times \mathbf{SO}(2)), \quad \mathbf{G}_{2n,k} = \lambda_{2n+k}^{-1}(\mathbf{SO}(2n) \times \mathbf{SO}(k) \times \mathbf{SO}(2)).$$

Тогда группа $\mathbf{G}_{2n}$ изоморфна комплексной спинорной группе $\mathbf{Spin}^c(2n)$, определенной у Атьи, Ботта и Шапиро [1] (см.

также Хирцебрух [8] и Майер [1]). Имеется точная последовательность

$$1 \to \mathbf{U}(1) \to \mathbf{G}_{2n} \to \mathbf{SO}(2n) \to 1,$$

и касательное расслоение ${}_R\theta$ к X ассоциировано с G_{2n}-расслоением тогда и только тогда, когда $w_2(X)$ является редукцией mod 2 целочисленного класса $d \in H^2(X, \mathbf{Z})$. Доказательство теоремы 26.1.1 проходит теперь аналогично доказательству теоремы 26.3.1, но с использованием неприводимых представлений группы $\mathbf{G}_{2n}$. Аналогично, ${}_R\theta \oplus \xi$ ассоциировано с $G_{2n,k}$-расслоением тогда и только тогда, когда $w_2(X)+\xi$ является редукцией mod 2 целочисленного класса, и доказательство теоремы 26.2.1 проходит с использованием неприводимых представлений группы $\mathbf{G}_{2n,k}$. Иначе, теоремы 26.1.1 и 26.2.1 могут быть получены прямым применением теоремы 26.3.1 к некоторым расслоениям над X (см. Робертс [1]).

В некоторых случаях теоремы 26.2.1 и 26.3.1 могут быть улучшены на множитель два. Следующая теорема, впервые полученная Атьей и Хирцебрухом [1], обобщает теорему Рохлина [1]. Доказательство, использующее комплексные спинорные представления и теорему Атьи — Зингера, было дано Майером [1] (см. также Пале [1]).

Теорема 26.3.2. *Пусть X — компактное ориентированное гладкое многообразие, такое, что $\dim X \equiv 4 \bmod 8$ и $w_2(X)=0$. Пусть ξ — непрерывное $\mathbf{O}(k)$-расслоение над X. Тогда $\hat{A}(X, 0, \psi(\xi))$ — четное целое число.*

26.4. Второе доказательство теоремы 26.1.1 можно найти в частях II и III работы Бореля и Хирцебруха [1]. Они выводят теорему 26.1.1 из целочисленности рода Тодда. Доказательство целочисленности рода Тодда (по модулю степеней двойки) было дано в 14.3; оно основано на теореме об индексе (8.2.2) и, следовательно, на теории кобордизмов. Другое, прямое доказательство целочисленности рода Тодда было дано Милнором [3]; оно включает в себя полное вычисление кольца комплексных кобордизмов (см. библиографические замечания к гл. III), из которого следует, что для каждого почти комплексного многообразия можно найти алгебраическое многообразие с теми же числами Чженя. По теореме РР род Тодда будет тогда целым числом и для почти комплексных многообразий.

26.5. Более прямое доказательство теорем целочисленности принадлежит Атье и Хирцебруху [1]. Как было замечено в 25.5, для теорем целочисленности не необходимо использование полной теоремы Атьи — Зингера; достаточен метод п. 24.5.

Всякое m-мерное гладкое многообразие можно вложить в $\mathbf{S}^{2m}$. Из теоремы 24.5.2 следует, что $(\mathrm{ch}_m b)[\mathbf{S}^{2m}]$ будет целым для всех $b \in K(\mathbf{S}^{2m})$. Следовательно, теорема 26.1.1 является следствием теоремы 24.5.2 и следующего обобщения теоремы 24.5.3.

Теорема 26.5.1. *Пусть X, Y — компактные связные ориентированные гладкие многообразия, такие, что $\dim Y - \dim X = 2N$, $j\colon X \to Y$ — вложение и $d \in H^2(Y, \mathbf{Z})$ — элемент, редукция которого mod 2 равна $w_2(X) - j^* w_2(Y)$. Тогда для всякого $a \in K(X)$ найдется элемент $j_! a$, такой, что*

$$\mathrm{ch}\, j_! a \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}_i(p_1(Y), \ldots, p_i(Y)) = j_*\left(\mathrm{ch}\, a \cdot e^{\frac{1}{2} d} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}_i(p_1(X), \ldots, p_i(X))\right), \qquad (1)$$

где $j_*\colon H^*(X, \mathbf{Q}) \to H^*(Y, \mathbf{Q})$ — гомоморфизм Гизина.

Пусть ν — нормальное $\mathbf{SO}(2N)$-расслоение для X в Y. Редукция mod 2 для d совпадает с $w_2(\nu)$, и (1) может быть записано в виде

$$\mathrm{ch}\, j_! a = j_*\left(\mathrm{ch}\, a \cdot \left(e^{-\frac{1}{2} d} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}_i(p_1(\nu), \ldots, p_i(\nu))\right)^{-1}\right). \qquad (1^*)$$

Пусть B и S — расслоения на единичные шары и единичные сферы, ассоциированные с ν; отождествим B с трубчатой окрестностью X в Y. Имеется отображение $r\colon Y \to B/S$, получаемое стягиванием дополнения к $B - S$ в Y в точку, и, следовательно, определен гомоморфизм $r^!\colon K(B, S) \to K(Y)$. Чтобы построить элемент $j_! a \in K(Y)$, удовлетворяющий (1*), достаточно построить элемент $b \in K(B, S)$, такой, что

$$\mathrm{ch}\, b = \varphi_*\left(\left(e^{-\frac{1}{2} d} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}_i(p_1(\nu), \ldots, p_i(\nu))\right)^{-1}\right),$$

где $\varphi_*\colon H^i(X, \mathbf{Q}) \to H^{i+2N}(Y, \mathbf{Q})$ — изоморфизм Тома (24.3). Существование такого b доказывается с помощью представлений группы $\mathbf{Spin}^c(2N)$, упомянутых в 26.3.

Этот же метод, примененный к кольцу Гротендика вещественных векторных расслоений, дает первоначальное доказательство теоремы 26.3.2. Теорема 26.5.1 также может быть обобщена:

Теорема 26.5.2 (Атья и Хирцебрух [1]): *Пусть X, Y — компактные связные ориентированные гладкие многообразия, такие, что $\dim X \equiv \dim Y \bmod 2$. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, и пусть $d \in H^2(X, \mathbf{Z})$ — элемент, редукция которого mod 2 совпадает с $w_2(X) - f^* w_2(Y)$. Тогда для всякого элемента $a \in K(X)$ найдется элемент $f_! a \in K(Y)$, такой, что*

$$\mathrm{ch}\, f_! a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \hat{A}_i(p_1(Y), \ldots, p_i(Y)) = f^*\left(\mathrm{ch}\, a \cdot e^{\frac{1}{2} d} \sum_{i=0}^{\infty} \hat{A}_i(p_1(X), \ldots, p_i(X))\right),$$

где $f_*\colon H^*(X, \mathbf{Q}) \to H^*(Y, \mathbf{Q})$ — гомоморфизм Гизина.

Доказательство. Разложим f в композицию вложения $X \to Y \times \mathbf{S}^{2N}$ и проекции $Y \times \mathbf{S}^{2N} \to Y$. Теорема справедлива для вложения (теорема 26.5.1) и для проекции (теорема 24.5.1). Следовательно, она верна для f.

В частном случае, когда X, Y — связные почти комплексные многообразия и $d = c_1(X) - f^* c_1(Y)$, теорема 26.5.2 дает следующий гладкий аналог теоремы Гротендика — Римана — Роха: *для всякого элемента $a \in K(X)$ существует элемент $f_! a \in K(X)$, такой, что*

$$\operatorname{ch} f_! a \cdot \operatorname{td}(Y) = f_* (\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{td}(X)).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В тех случаях, когда не приведены явные ссылки, излагаемый в этом приложении материал основан либо на приложении ко второму немецкому изданию, либо на следующих источниках: Милнор [8], Ботт [6], Атья, Ботт и Зингер [1], Хирцебрух, Брискорн, Ламотке и Майер [1], Пале [1], Атья [8], Атья и Сегал [1]. Превосходный обзор многих работ, упомянутых в этом приложении, можно найти в серии рефератов Ботта [7].

Теорема Атьи — Зингера об индексе для случая действия компактных групп Ли и формула неподвижных точек Атьи — Ботта были только вскользь упомянуты в 25.6. Пока нет полного изложения этих вопросов[1]), могут быть полезны следующие работы: Атья и Ботт [3] и доклад Ботта [8] на семинаре Бурбаки. Кроме того, в заметках Атьи и Сегала [1] приведена явная конструкция для топологического индекса $\gamma(D)$ в случае, когда G — тор или циклическая группа, а также ряд замечаний относительно общего случая произвольной компактной группы Ли.

В обзорной лекции Хирцебруха [7] эти теоремы сформулированы для гладкого отображения $f\colon X \to X$ в двух случаях: когда f *имеет только простые неподвижные точки* (формула для неподвижных точек, см. 25.6) и когда f *имеет конечный порядок* (теорема об индексе для циклической группы G). Основная часть лекции посвящена приложениям к случаю, когда V_n — компактное комплексное многообразие, K — каноническое одномерное расслоение и $f^{(i)}\colon H^i(V, K^r) \to H^i(V, K^r)$ — отображение, индуцированное $f\colon V \to V$. Рассматриваемые теоремы дают в этом случае явное выражение для комплексного числа

$$\chi(V, K^r, f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{trace} f^{(i)}$$

через характеристические классы для V и неподвижные множества для f. Эта формула сводится к теореме Римана — Роха $\chi(V, K^r) = T(V, K^n)$, если f — тождественное отображение.

Намечено приложение, принадлежащее совместно Атье, Ботту и Хирцебруху, к дискретным группам Δ, действующим в ограниченной однородной симметрической области M и удовлетворяющим условиям (a) и (b) п. 22.2. Формула для $\chi(V, K^r, f)$ применяется в этом случае к $V = M/\Gamma$, где Γ — подгруппа в Δ, такая же, как в теореме 22.2.2. Это позволяет вычислить размерность $\Pi_r(M, \Delta)$ пространства автоморфных форм веса r. Результаты согласуются с результатами, полученными впервые Ленглендсом [1], и сводятся к результатам п. 22.3, если Δ действует свободно на M.

[1]) Такое полное изложение появилось: Атья и Ботт [4]; см. также библиографические замечания переводчика в конце книги. — *Прим. перев.*

Приложение 2

ОДНА СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЛЯ КОМПЛЕКСНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЙ

А. Борель

Обсуждаемая спектральная последовательность связывает $\bar\partial$-когомологии комплексно-аналитического расслоения с соответствующими когомологиями базы и слоя. Слой расслоения предполагается компактным и связным. В дополнение к обычным степеням, связанным со слоем и с базой, имеется еще биградуировка, задаваемая типом дифференциальных форм. Точные формулировки приведены в 2.1, а доказательства в § 3—6. Доказательства более или менее очевидны, хотя и используются довольно громоздкие обозначения. Интересным моментом является точность последовательности 3.7(4), которая по существу является следствием свойств гладкости для оператора Грина.

Основные приложения теоремы 2.1 касаются мультипликативности χ_y-рода (8.1) и $\bar\partial$-когомологий многообразий Калаби — Экмана (9.5).

Предполагается знакомство со спектральными последовательностями расслоенных пространств. В остальном мы следуем обозначениям этой книги с небольшими отклонениями, которые точно указаны. В ссылках на разделы этого приложения используется обычный шрифт, а в ссылках на другие разделы книги — жирный шрифт.

Настоящее приложение является переработанным вариантом написанной в 1953 г. статьи, на которую есть ссылка в первом издании этой книги, но которая так и не была опубликована.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Все многообразия предполагаются хаусдорфовыми и паракомпактными; гладкость означает диффереицируемость класса C^∞. Пучки на многообразии M всегда суть $\mathbf{C}_b(M)$-модули (где $\mathbf{C}_b(M)$ — пучок ростков гладких комплекснозначных функций на M), и тензорные произведения пучков берутся над $\mathbf{C}_b(M)$.

1.2. Пусть M — комплексное многообразие, W — комплексное векторное расслоение над M и $\mathfrak{W}$ — пучок ростков гладких сечений для W. Пусть $A_M^{p,q}(W)$ — пространство гладких внешних дифференциальных форм на M типа (p, q) с коэффициентами в W (см. **15.4**), и пусть $\mathfrak{A}_M^{p,q}(W)$ — пучок ростков таких форм. Если

Доказательство. Разложим f в композицию вложения $X \to Y \times S^{2N}$ и проекции $Y \times S^{2N} \to Y$. Теорема справедлива для вложения (теорема 26.5.1) и для проекции (теорема 24.5.1). Следовательно, она верна для f.

В частном случае, когда X, Y — связные почти комплексные многообразия и $d = c_1(X) - f^* c_1(Y)$, теорема 26.5.2 дает следующий гладкий аналог теоремы Гротендика — Римана — Роха: *для всякого элемента $a \in K(X)$ существует элемент $f_! a \in K(X)$, такой, что*

$$\operatorname{ch} f_! a \cdot \operatorname{td}(Y) = f_* (\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{td}(X)).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В тех случаях, когда не приведены явные ссылки, излагаемый в этом приложении материал основан либо на приложении ко второму немецкому изданию, либо на следующих источниках: Милнор [8], Ботт [6], Атья, Ботт и Зингер [1], Хирцебрух, Брискорн, Ламотке и Майер [1], Пале [1], Атья [8], Атья и Сегал [1]. Превосходный обзор многих работ, упомянутых в этом приложении, можно найти в серии рефератов Ботта [7].

Теорема Атьи — Зингера об индексе для случая действия компактных групп Ли и формула неподвижных точек Атьи — Ботта были только вскользь упомянуты в 25.6. Пока нет полного изложения этих вопросов¹), могут быть полезны следующие работы: Атья и Ботт [3] и доклад Ботта [8] на семинаре Бурбаки. Кроме того, в заметках Атьи и Сегала [1] приведена явная конструкция для топологического индекса $\gamma(D)$ в случае, когда G — тор или циклическая группа, а также ряд замечаний относительно общего случая произвольной компактной группы Ли.

В обзорной лекции Хирцебруха [7] эти теоремы сформулированы для гладкого отображения $f\colon X \to X$ в двух случаях: когда f *имеет только простые неподвижные точки* (формула для неподвижных точек, см. 25.6) и когда f *имеет конечный порядок* (теорема об индексе для циклической группы G). Основная часть лекции посвящена приложениям к случаю, когда V_n — компактное комплексное многообразие, K — каноническое одномерное расслоение и $f^{(i)}\colon H^i(V, K^r) \to H^i(V, K^r)$ — отображение, индуцированное $f\colon V \to V$. Рассматриваемые теоремы дают в этом случае явное выражение для комплексного числа

$$\chi(V, K^r, f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{trace} f^{(i)}$$

через характеристические классы для V и неподвижные множества для f. Эта формула сводится к теореме Римана — Роха $\chi(V, K^r) = T(V, K^n)$, если f — тождественное отображение.

Намечено приложение, принадлежащее совместно Атье, Ботту и Хирцебруху, к дискретным группам Δ, действующим в ограниченной однородной симметрической области M и удовлетворяющим условиям (a) и (b) п. 22.2. Формула для $\chi(V, K^r, f)$ применяется в этом случае к $V = M/\Gamma$, где Γ — подгруппа в Δ, такая же, как в теореме 22.2.2. Это позволяет вычислить размерность $\Pi_r(M, \Delta)$ пространства автоморфных форм веса r. Результаты согласуются с результатами, полученными впервые Ленглендсом [1], и сводятся к результатам п. 22.3, если Δ действует свободно на M.

¹) Такое полное изложение появилось: Атья и Ботт [4]; см. также библиографические замечания переводчика в конце книги. — *Прим. перев.*

Приложение 2

ОДНА СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЛЯ КОМПЛЕКСНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ РАССЛОЕНИЙ

А. Борель

Обсуждаемая спектральная последовательность связывает $\bar\partial$-когомологии комплексно-аналитического расслоения с соответствующими когомологиями базы и слоя. Слой расслоения предполагается компактным и связным. В дополнение к обычным степеням, связанным со слоем и с базой, имеется еще биградуировка, задаваемая типом дифференциальных форм. Точные формулировки приведены в 2.1, а доказательства в § 3—6. Доказательства более или менее очевидны, хотя и используются довольно громоздкие обозначения. Интересным моментом является точность последовательности 3.7(4), которая по существу является следствием свойств гладкости для оператора Грина.

Основные приложения теоремы 2.1 касаются мультипликативности χ_y-рода (8.1) и $\bar\partial$-когомологий многообразий Калаби — Экмана (9.5).

Предполагается знакомство со спектральными последовательностями расслоенных пространств. В остальном мы следуем обозначениям этой книги с небольшими отклонениями, которые точно указаны. В ссылках на разделы этого приложения используется обычный шрифт, а в ссылках на другие разделы книги — жирный шрифт.

Настоящее приложение является переработанным вариантом написанной в 1953 г. статьи, на которую есть ссылка в первом издании этой книги, но которая так и не была опубликована.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Все многообразия предполагаются хаусдорфовыми и паракомпактными; гладкость означает дифферецируемость класса C^∞. Пучки на многообразии M всегда суть $\mathbf{C}_\flat(M)$-модули (где $\mathbf{C}_\flat(M)$ — пучок ростков гладких комплекснозначных функций на M), и тензорные произведения пучков берутся над $\mathbf{C}_\flat(M)$.

1.2. Пусть M — комплексное многообразие, W — комплексное векторное расслоение над M и $\mathfrak{W}$ — пучок ростков гладких сечений для W. Пусть $A_M^{p,q}(W)$ — пространство гладких внешних дифференциальных форм на M типа (p, q) с коэффициентами в W (см. **15.4**), и пусть $\mathfrak{A}_M^{p,q}(W)$ — пучок ростков таких форм. Если

$W = \mathbf{1}$ — тривиальное расслоение $M \times \mathbf{C}$, то мы будем опускать W в указанных выше обозначениях. Имеем

$$\mathfrak{A}_M^{p,q}(W) \cong \mathfrak{W} \otimes \mathfrak{A}_M^{p,q}, \quad A_M^{p,q}(W) \cong \Gamma(\mathfrak{A}_M^{p,q}(W)). \tag{1}$$

Пусть $A_M^i(W)$ обозначает сумму $A_M^{p,q}(W)$ для $p+q=i$, $A_M(W)$ — сумму всех $A_M^i(W)$, и аналогично для пучков.

Пусть U — открытое подмножество в M, над которым W можно отождествить (*и* отождествлено) с тривиальным расслоением $U \times \times \mathbf{C}_d$. Напомним, что $A_U^{p,q}(W|_U)$ можно канонически отождествить с набором d обыкновенных внешних дифференциальных форм типа (p, q) на U. Если $\omega \in A_U^{p,q}(W|_U)$ соответствует $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$, то $\bar\partial\omega$ соответствует $(\bar\partial\omega_1, \ldots, \bar\partial\omega_1)$.

Предположим далее, что U является координатной окрестностью с локальными координатами $z_1, \ldots, z_n$. Для подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ из $\{1, \ldots, n\}$ положим

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k}, \quad d\bar z_I = d\bar z_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{i_k}.$$

Тогда формы ω_i могут быть однозначно записаны в виде

$$\omega_i = \sum_{I,J} f_{i,I,J} \cdot dz_I \wedge d\bar z_J, \tag{2}$$

где I (соотв. J) пробегает подмножества, состоящие из p (соотв. q) элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, а $f_{i,I,J}$ — гладкая комплексно-значная функция на U.

1.3. Прямая сумма пространств $H^{p,q}(M)$ (соотв. $H^{p,q}(M, W)$ см. **15.4**) обозначается через $H_{\bar\partial}(M)$ (соотв. $H_{\bar\partial}(M, W)$), а $h^{p,q}$ или $h^{p,q}(M)$ (соотв. $h^{p,q}(W)$ или $h^{p,q}(M, W)$) обозначает размерность $H^{p,q}(M)$ (соотв. $H^{p,q}(M, W)$). Пространство $H_{\bar\partial}(M)$) можно естественно рассматривать как антикоммутативную биградуированную алгебру. Если $W = M \times F$ — тривиальное расслоение, то $H_{\bar\partial}(M, W) \cong H_{\bar\partial}(M) \otimes F$, как следует сразу же из определений.

1.4. Предположим теперь M компактным. Тогда пространства $H^{p,q}(M, W)$ конечномерны (**15.4.2**). Пусть, далее, G — группа Ли, непрерывно действующая на M биголоморфными преобразованиями, и пусть φ: $G \to \operatorname{Aut} M$ — отображение, определяющее это действие. Тогда φ индуцирует непрерывное представление φ^0 группы G на $H^{p,q}(M)$. *Если M кэлерово, то φ^0 постоянно на каждой связной компоненте для G*; действительно, в этом случае $H_{\bar\partial}(M)$ канонически отождествляется с обычной алгеброй когомологий $H^*(M, \mathbf{C})$ для M (см., например, А. Вейль [2], гл. 4); отождествление производится с помощью изоморфизма, который коммутирует с естественным действием G на $H_{\bar\partial}(M)$ и на $H^*(M, \mathbf{C})$; наше утверждение является тогда следствием аксиомы гомотопии.

В некэлеровом случае это утверждение может быть неверно, как показывает один пример Кодаиры (см. также Гугенхайм и Спенсер [1]).

1.5. Пусть $\xi = (E, B, F, \pi)$ — комплексно-аналитическое расслоение (см. **3.2**), где E — пространство расслоения, B — база, F — слой и π: $E \to B$ — проекция. Мы будем предполагать, что слой F компактен и связен. По определению (см. **3.2**) структурная группа G для ξ — это комплексная группа Ли, действующая на F посредством голоморфного отображения ψ: $G \times F \to F$. Пусть ξ определено с помощью координатных функций $f_{\alpha\beta}$: $U_\alpha \cap U_\beta \to G$, где $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ — подходящее покрытие для B. Ясно, что $\bigcup_{b \in B} H^{p,q}(F_b)$ можно рассматривать как пространство гладкого векторного расслоения над B, координатные функции $f^0_{\alpha\beta}$ которого получаются композицией $f_{\alpha\beta}$ с заданным представлением φ^0 группы G в $\mathbf{GL}(H^{p,q}(F))$. Это векторное расслоение мы будем обозначать через $\mathbf{H}^{p,q}(F)$, а прямую сумму $\sum \mathbf{H}^{p,q}(F)$ — через $\mathbf{H}_{\bar\partial}(F)$.

Если φ^0 постоянно на связных компонентах группы G, в частности если слой кэлеров, то $\mathbf{H}_{\bar\partial}(F)$ будет голоморфным комплексным векторным расслоением над B (с локально постоянными координатными функциями).

Действительно, в этом случае $f^0_{\alpha\beta}$ будут локально постоянными функциями; следовательно, их можно рассматривать как голоморфные отображения $U_\alpha \cap U_\beta$ в $\mathbf{GL}(H_{\bar\partial}(F))$.

§ 2. Спектральная последовательность

2.1. Теорема. *Пусть $\xi = (E, B, F, \pi)$ — комплексно-аналитическое расслоение, в котором E, B, F связны и F компактно. Пусть W — комплексное векторное расслоение на B и $\mathbb{W} = \pi^* W$ — его прообраз на E. Предположим, что каждая связная компонента структурной группы G расслоения ξ действует тривиально на $H_{\bar\partial}(F)$. Тогда существует спектральная последовательность (E_r, d_r) $(r \geqslant 0)$ со следующими свойствами:*

1) *E_r 4-градуированно: по степени слоя, степени базы и по типу. Пусть ${}^{p,q}E_r^{s,t}$ — подпространство элементов из E_r типа (p, q) степени слоя s и степени базы t. Тогда*

$${}^{p,q}E_r^{s,t} = 0,$$

если $p + q \neq s + t$ или если один из индексов p, q, s, $t < 0$. Дифференциал d_r отображает ${}^{p,q}E_r^{s,t}$ в ${}^{p,q+1}E_r^{s+r,\, t-r+1}$.

2) *Если $p + q = s + t$, то*

$${}^{p,q}E_2^{s,t} \cong \sum_{i \geqslant 0} H^{i,\, s-i}(B, W \otimes \mathbf{H}^{p-i,\, q-s+i}(F)).$$

3) *Спектральная последовательность сходится к* $H_{\bar\partial}(E, \hat{W})$. *Для всех* $p, q \geqslant 0$ *имеем*

$$\operatorname{Gr} H^{p, q}(E, \hat{W}) = \sum_{s+t=p+q} {}^{p, q}E_\infty^{s, t}$$

для некоторой фильтрации группы $H^{p, q}(E, \hat{W})$.

4) *Если* $W = 1$, *то* (E_r, d_r) *являются дифференциальными антикоммутативными алгебрами, и изоморфизм* 3) *сохраняет умножения.*

2.2. Замечания. 1) В наших предположениях о G расслоение $\mathbf{H}_{\bar\partial}(F)$ голоморфно, поэтому свойство 2) имеет смысл. Это свойство автоматически выполнено, если F кэлерово.

2) Свойство 2.1,2) показывает, что в E_2 есть 4-градуировка, более тонкая, чем указанная в 2.1,1), а именно 4-градуировка, задаваемая типом дифференциальных форм на B и на F. Доказательство показывает, что эта 4-градуировка имеется и в E_0 и E_1.

Так как ${}^{p, q}E_r^{s, t} = 0$, за исключением случая $p + q = s + t$, то индекс t на самом деле лишний и было бы более правильно говорить, что спектральная последовательность 3-градуирована с помощью типа (p, q) и s, где s ассоциировано с фильтрацией, связанной со спектральной последовательностью. Общая степень будет $p + q$. Мы добавили степень t, чтобы сохранить большую аналогию с обычной спектральной последовательностью расслоенных пространств. Однако мы опустим t в § 4—6.

§ 3. Вспомогательные пучки и точные последовательности

3.1. По § 6 включительно ξ, W, $\hat{W}$, G будут такими же, как и в 2.1; $\mathfrak{W}$ — пучок ростков гладких сечений для W; $\mathbf{C}_b$ обозначает $\mathbf{C}_b(B)$. Заметим, что до 6.1 нам не нужно будет никаких предположений о действии G на $H_{\bar\partial}(F)$.

Пусть $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — локально конечное открытое покрытие пространства B координатными окрестностями, над которыми W и ξ тривиальны. Пусть

$$\varphi_\alpha \colon W|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbf{C}_m \qquad (\alpha \in \mathcal{A})$$

и

$$\psi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F \qquad (\alpha \in \mathcal{A})$$

— допустимые тривиализации и

$$\varphi_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbf{GL}(m, \mathbf{C}) \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

и

$$\psi_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to G \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

— соответствующие функции перехода.

Для всякого $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ отображение $\psi_{\alpha\beta}(z)$ индуцирует автоморфизм A_F, который иногда обозначается через $\psi'_{\alpha\beta}(z)$.

Через $(z_1^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)$ обозначается множество локальных координат на U_α, а через $\eta_{\alpha\beta}$ — замена локальных координат в $U_\alpha \cap U_\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$.

3.2. Пусть φ — комплексное касательное векторное расслоение вдоль слоев ξ (см. Борель и Хирцебрух [1], § 7.4). Пусть $\varphi^{a, b}$ — расслоение на формы типа (a, b), ассоциированное с φ. Таким образом, $\varphi^{a, b} = (\lambda^a\varphi) \wedge \lambda^b\bar\varphi$, где $\bar\varphi$ — сопряженное расслоение к φ. Пусть $\mathcal{F}^{a, b}$ — пространство гладких сечений для $\varphi^{a, b}$. Для всякого $z \in B$ ограничение x_z элемента $x \in \mathcal{F}^{a, b}$ на слой $F_z = \pi^{-1}(z)$ является формой на F_z типа (a, b). Таким образом, x можно рассматривать как семейство форм типа (a, b) на слоях, параметризованное пространством B и гладкое в очевидном смысле; x будет называться *послойной формой типа* (a, b) (на B). Имеется $\mathbf{C}_b$-линейное отображение $\bar\partial_F \colon \mathcal{F}^{a, b} \to \mathcal{F}^{a, b+1}$, характеризующееся тем, что $r_z(\bar\partial_F x) = \bar\partial(r_z x)$ (по поводу всего этого см. Кодаира и Спенсер [5], I, § 2).

Пусть $\mathfrak{F}^{a, b}$ — пучок ростков послойных форм типа (a, b). Имеем $\Gamma(\mathfrak{F}^{a, b}) = \mathcal{F}^{a, b}$, и $\bar\partial_F$ является отображением сечений, индуцированным гомоморфизмом $\mathbf{C}_b$-модулей $\mathfrak{F}^{a, b}$ в $\mathfrak{F}^{a, b+1}$, который также будем обозначать через $\bar\partial_F$. Пусть $\mathfrak{Z}^{a, b} \subset \mathfrak{F}^{a, b}$ — его ядро. По определению *последовательность*

$$0 \to \mathfrak{Z}^{a, b} \xrightarrow{i} \mathfrak{F}^{a, b} \xrightarrow{\bar\partial_F} \bar\partial_F(\mathfrak{F}^{a, b}) \to 0, \tag{1}$$

где i — вложение, *точна*.

3.3. Более общим образом мы будем рассматривать послойные $\hat{W}$-формы типа (a, b). Их можно определить как гладкие сечения в $\hat{W} \otimes \varphi^{a, b}$ (см. Кодаира и Спенсер [5], I, § 2); здесь $\hat{W}$ может быть любым комплексным векторным расслоением на E. Если x — такая форма, что $r_z(x)$ будет формой типа (a, b) на F_z с коэффициентами в тривиальном расслоении $V_z \times F_z$, где V_z — слой над z в $\hat{W}$. Ясно, что можно отождествить эти формы с сечениями пучка $\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{F}^{a, b}$.

3.4. Пусть

$$M^{a, b, c, d} = \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{F}^{a, b} \otimes \mathfrak{A}_b^{c, d}) \quad (a, b, c, d \in \mathbf{Z};\ a, b, c, d \geqslant 0).$$

Элементы этой группы можно рассматривать как «формы типа (c, d) на B с коэффициентами в послойных $\hat{W}$-формах типа (a, b)». В обозначениях п. 3.1 элемент $h \in M^{a, b, c, d}$ задается своими ограничениями h_α на открытые подмножества U_α и h_α — это набор дифференциальных m-форм $h_{\alpha, i}$, которые могут быть записаны в виде

$$h_{\alpha, i} = \sum_{I, J} h_{\alpha, i, I, J}\, dz_I^{\alpha} \wedge d\bar{z}_J^{\alpha},$$

где I и J пробегают соответственно подмножества, состоящие из c и d элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, и где $h_{\alpha, i, I, J} \in \mathscr{F}^{a, b}(U_\alpha)$ — послойная форма типа (a, b) на U_α.

Таким образом, h_α отождествлена с W-дифференциальной формой типа $(a + c, b + d)$ на $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Конечно, это отождествление зависит существенно от локальных тривиализаций, и саму форму h нельзя рассматривать как дифференциальную форму. Точнее, h_α и h_β связаны преобразованиями, определенными с помощью $\varphi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta}$ и $\eta_{\alpha\beta}$. Однако если мы хотим описать дифференциальную форму h_α на $U_\beta \cap U_\alpha$ с помощью локальных координат (z_i^{β}) и локальных тривиализаций над U_β, то мы должны учесть производные $\psi_{\alpha\beta}$ по z. Поэтому в новых координатах h_α будет равно сумме h_β и дифференциальных форм, степень базы которых $> c + d$.

3.5. Хотя это и не понадобится в дальнейшем, заметим, не входя в подробности, что если разрешить векторным расслоениям иметь бесконечномерные слои, то мы могли бы рассматривать также элементы из $M^{a, b, c, d}$ как формы на B типа (c, d) с коэффициентами в векторном расслоении.

Действительно, $A_F^{a, b}$ является естественным образом пространствами Фреше (см. Серр [3]), и всякий автоморфизм многообразия F индуцирует гомеоморфизм $A_F^{a, b}$. Таким образом, функции $\psi'_{\alpha, \beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \operatorname{Aut} A_F^{a, b}$ позволяют определить над B ассоциированное расслоение $\mu^{a, b}$ со слоем $A_F^{a, b}$. Далее, эти функции являются гладкими в том смысле, что если $\rho\colon U_\alpha \cap U_\beta \to A_F^{a, b}$ — гладкое отображение, то $\psi_{\alpha, b} \circ \rho$ также будет гладким. Таким образом, имеет смысл говорить о гладких сечениях расслоения $\mu^{a, b}$. Можно проверить, что элементы из $M^{a, b, c, d}$ являются в точности формами на B типа (c, d) с коэффициентами в $W \otimes \mu^{a, b}$.

3.6. Пучок $\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}$ локально свободен над $\mathbf{C}_b$, следовательно, последовательность

$$0 \to \mathfrak{W} \otimes \mathfrak{Z}^{a, b} \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d} \to \mathfrak{W} \otimes \mathfrak{F}^{a, b} \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d} \to \mathfrak{W} \otimes \bar{\partial}_F(\mathfrak{F}^{a, b}) \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d} \to 0, \tag{2}$$

полученная из 3.2(1) тензорным умножением на $\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}$, также точна. Более того, так как пучок $\mathfrak{A}_B^{c, d}$ тонкий (см. **3.5**), то последовательность

$$0 \to \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{Z}^{a, b} \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}) \to \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{F}^{a, b} \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}) \to \\ \to \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \bar{\partial}_F(\mathfrak{F}^{a, b}) \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}) \to 0, \tag{3}$$

полученная из (2), точна (см. **2.10.1**, **2.11.1**).

3.7. Пусть σ — отображение, сопоставляющее всякой $\bar{\partial}$-замкнутой форме на E ее класс $\bar{\partial}$-когомологий. Это отображение индуцирует $\mathbf{C}_b$-гомоморфизм, также обозначаемый через σ, пучка $\mathfrak{Z}^{a, b}$ в пучок $\mathfrak{H}^{a, b}(F)$ ростков гладких сечений расслоения $\mathbf{H}^{a, b}(F)$, определенного в 1.5. Мы утверждаем, что *последовательность*

$$0 \to \bar{\partial}_F(\mathfrak{F}^{a, b-1}) \xrightarrow{i} \mathfrak{Z}^{a, b} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{H}^{a, b}(F) \to 0 \qquad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 1) \tag{4}$$

точна.

То, что $\sigma \circ i = 0$, ясно. Далее, так как $H^{a, b}(F)$ конечномерно, то легко видеть, что σ эпиморфно. Остается доказать, что $\operatorname{im} i \supset \ker \sigma$.

Это сводится к следующему утверждению.

Пусть $z \in B$ и U — открытая окрестность точки z в B, ω — послойная форма типа (a, b) над U, т. е. отображение, сопоставляющее $x \in U$ форму $\omega(x)$ типа (a, b) на F, гладко зависящую от x. Предположим, что для каждого x существует форма ν_x на F типа $(a, b-1)$, такая, что $\omega(x) = \bar{\partial}\nu_x$. Тогда найдутся окрестность V точки z и послойная форма τ на V типа $(a, b-1)$, такие, что $\omega(x) = \bar{\partial}\tau(x)$ для всех $x \in V$. Другими словами, можно выбрать ν_x гладко зависящим от x. Но это утверждение содержится в теоремах 7, 8 работы Кодаиры и Спенсера [7].

3.8. Точно так же, как точность последовательности (3) была выведена из точности последовательности (1), выводится из 3.7 точность последовательности

$$0 \to \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \bar{\partial}_F(\mathfrak{F}^{a, b-1}) \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}) \to \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{Z}^{a, b} \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}) \xrightarrow{\sigma} \\ \to \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{H}^{a, b}(F) \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}) \to 0. \tag{5}$$

С другой стороны, существует естественный изоморфизм

$$\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{H}^{a, b}(F) = \mathfrak{S}(W \otimes \mathbf{H}^{a, b}(F)), \tag{6}$$

где $\mathfrak{S}(W \otimes \mathbf{H}^{a, b}(F))$ — пучок ростков гладких сечений пучка $W \otimes \mathbf{H}^{a, b}(F)$. Следовательно мы имеем

$$\Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{H}^{a, b}(F) \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}) \cong A_B^{c, d}(W \otimes \mathbf{H}^{a, b}(F)) \cong \\ \cong \Gamma(\mathfrak{S}(W \otimes \mathbf{H}^{a, b}(F)) \otimes \mathfrak{A}_B^{c, d}). \tag{7}$$

§ 4. Фильтрация. Доказательство свойств 2.1,1), 3), 4)

4.1. Назовем открытое подмножество $U \subset E$ *малым*, если ξ и W тривиальны над $\pi(U)$ и если допустимые тривиализации ξ над $\pi(U)$ переводят U в произведение координатных окрестностей для B и F. Для всякого малого открытого множества U и положительного целого числа k обозначим через $L_k(U)$ подмножество элементов из $A_U(\hat{W}|_U)$, которые в локальных координатах (z_i) на B и (y_j) на F выражаются в виде сумм одночленов $dz_I \wedge d\bar{z}_J \wedge dy_{I'} \wedge \wedge d\bar{y}_{J'}$, таких, что $|I|+|J| \geqslant k$, где $|A|$ — мощность конечного множества A. Ясно, что $L_k(U)$ инвариантно относительно замены координат (хотя множество элементов, для которых $|I|+|J|=k$, не инвариантно; поэтому фильтрация, определенная ниже, не получается из градуировки). Пусть

$$L_k = \{\omega \in A_E(\hat{W});\ \omega|_U \in L_k(U) \text{ для всякого малого открытого } U \text{ из } E\}. \quad (1)$$

Конечно, достаточно проверить это условие для U, пробегающих некоторое открытое покрытие многообразия E. Имеем

$$L_0 = A_E(\hat{W}),\ L_k = 0 \quad (k > \dim_{\mathbf{R}} B);\ L_k \supset L_{k+1},\ \bar{\partial} L_k \subset L_k \quad (k \geqslant 0), \quad (2)$$

что показывает, что L_k определяют убывающую ограниченную фильтрацию дифференциального $\mathbf{C}$-модуля $(A_E(\hat{W}), \bar{\partial})$ подмодулями, инвариантными относительно $\bar{\partial}$. Соответствующая спектральная последовательность и есть спектральная последовательность (E_r, d_r) теоремы 2.1. Ясно, что

$$L_k = \sum_{p,q} {}^{p,q}L_k, \quad {}^{p,q}L_k = L_k \cap A_E^{p,q}(\hat{W}),$$

что означает, что фильтрация согласована с биградуировкой, задаваемой типом форм, и, следовательно, согласована с общей степенью. Кроме того, $\bar{\partial}$ является однородным гомоморфизмом степени 1 по q и степени 0 по p. Следовательно, эта биградуировка присутствует в спектральной последовательности. Обозначим через ${}^{p,q}E_r^{s,t}$ или через ${}^{p,q}E_r^s$ (см. 2.2(2)) подпространство элементов из E_r типа (p, q), общей степени $s+t$ и степени s в градуировке, определяемой фильтрацией. Как обычно, s и t называются соответственно степенью на базе и степенью по слою. Конечно, ${}^{p,q}E_r^{s,t} = 0$, если $p+q \neq s+t$.

Утверждения 2.1, 1), 3) следуют из стандартных общих фактов о сходящихся спектральных последовательностях, возникающих из фильтрованных градуированных дифференциальных модулей. Если $W = 1$ — тривиальное расслоение со слоем $\mathbf{C}$, то $A_E(\hat{W})$ будет антикоммутативной дифференциальной алгеброй; снова по общим принципам произведение распространяется на спектральную последовательность, и мы имеем 2.1, 4). Итак, остается доказать 2.1, 2).

4.2. Мы приведем сейчас несколько иное определение фильтрации, которое будет полезным для дальнейшего.

Пусть $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Отождествим V_α с $U_\alpha \times F$ с помощью ψ_α. Обозначим через $M_\alpha^{a,b,c,d}$ пространство W форм типа (c, d) на B с коэффициентами в формах типа (a, b) для слоя (см. де Рам [1], гл. II, § 7). Используя ψ_α, мы видим, что

$$M_\alpha^{a,b,c,d} \cong \Gamma_{U_\alpha}(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{F}^{a,b} \otimes \mathfrak{A}_B^{c,d}), \quad (3)$$

$$A_{V_\alpha}(\hat{W}|_{U_\alpha}) = \sum_{a,b,c,d} M_\alpha^{a,b,c,d}. \quad (4)$$

Тогда

$$L_s = \{\omega \in A_E(\hat{W});\ \omega|_{V_\alpha} \in L_{s,\alpha}\ (\alpha \in \mathscr{A})\}, \quad (5)$$

где

$$L_{s,\alpha} = \sum_{c+d \geqslant s} M_\alpha^{a,b,c,d}. \quad (6)$$

Заметим, что, как и раньше, изоморфизм (3) и разложение в прямую сумму (4) зависят от тривиализаций ψ_α, однако условие $\omega|_{V_\alpha} \in L_{s,\alpha}$ от них не зависит.

§ 5. Члены E_0, E_1

5.1. Лемма. *Существует канонический изоморфизм*

$${}^{p,q}k_0^s:\ {}^{p,q}E_0^s \xrightarrow{\sim} \sum_i \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{F}^{p-i,\,q-s+i} \otimes \mathfrak{A}_B^{i,\,s-i}) \qquad (p, q, s \geqslant 0).$$

Сумма k_0 отображений ${}^{p,q}k_0^s$ переводит d_0 в $\bar{\partial}_F$.

Мы сохраним предыдущие обозначения. Пусть $\omega \in {}^{p,q}L_s$, и пусть ω_α — ограничение формы ω на $\pi^{-1}(U_\alpha)$, $\alpha \in \mathscr{A}$. Можно написать (4.2):

$$\omega_\alpha = \sum_i \omega_\alpha^{p-i,\,q-s+i,\,i,\,s-i} \bmod L_{s+1,\alpha}, \quad (1)$$

где

$$\omega_\alpha^{a,b,c,d} \in M_\alpha^{a,b,c,d} = \Gamma_{U_\alpha}(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{F}^{a,b} \otimes \mathfrak{A}_B^{c,d}). \quad (2)$$

Мы утверждаем, что для всякого i формы $\omega_\alpha^{p-i,\,q-s+i,\,i,\,s-i}$, $\alpha \in \mathscr{A}$, определяют сечение $\omega^{p-i,\,q-s+i,\,i,\,s-i}$ в $\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{F}^{p-i,\,q-s+i} \otimes \mathfrak{A}_B^{i,\,s-i}$. Действительно, пусть α и β таковы, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$. Тогда элементы ω_α и ω_β представляют одну и ту же дифференциальную форму, и поэтому они связаны преобразованием $f_{\alpha,\beta}$, получающимся из координатных преобразований $\psi_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$. В $f_{\alpha\beta}$ входят также производные от $\psi_{\alpha\beta}$ по локальным координатам на B.

Однако, как уже было замечено в 3.4, каждый член, в который входит такая производная, имеет строго большую степень по базе, т. е. принадлежит $L_{s+1,\alpha}$. Таким образом, при переходе от $\omega_\alpha^{p-i,\,q-s+i,\,i,\,s-i}$ к $\omega_\beta^{p-i,\,q-s+i,\,i,\,s-i}$ можно пренебрегать этими производными и применять только преобразования, определенные $\psi_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$. Но это в точности совпадает с тем, как нужно склеивать сечения пучка $\mathfrak{W}\otimes\mathfrak{F}^{p-i,\,q-s+i}\otimes\mathfrak{A}_B^{i,\,s-i}$ над U_α и U_β, чтобы получить сечение над $U_\alpha\cup U_\beta$.

Сопоставим теперь форме ω сумму форм $\omega^{p-i,\,q-s+i,\,i,\,s-i}$. Это определяет отображение

$$^{p,\,q}k^s\colon\ ^{p,\,q}L_s\to\sum_i\Gamma\left(\mathfrak{W}\otimes\mathfrak{F}^{p-i,\,q-s+i}\otimes\mathfrak{A}_B^{i,\,s-i}\right),$$

которое, очевидно, линейно и имеет ядро $^{p,\,q}L_{s+1}$. Поэтому оно определяет инъективные линейные отображения

$$^{p,\,q}k_0^s\colon\ ^{p,\,q}E_0^s\cong{}^{p,\,q}L_s/^{p,\,q}L_{s+1}\to\sum_i\Gamma\left(\mathfrak{W}\otimes\mathfrak{F}^{p-i,\,q-s+i}\otimes\mathfrak{A}_B^{i,\,s-i}\right).$$

Чтобы вычислить $d_0(\bar\omega)$, $\bar\omega\in{}^{p,\,q}E_0^s$, мы должны применить $\bar\partial$ к представителю ω элемента $\bar\omega$ из L_s и потом редуцировать $\operatorname{mod} L_{s+1}$. В локальных координатах это означает, что мы можем пренебречь дифференцированиями по локальным координатам на B и принять во внимание только координаты слоя. Но $\bar\partial_F$ именно таким образом и определен, следовательно,

$$^{p,\,q}k_0^s(d_0\bar\omega)=\bar\partial_F\left(^{p,\,q}k_0^s(\bar\omega)\right).$$

Остается показать, что $^{p,\,q}k_0^s$ эпиморфны. Пусть $u\in M^{a,\,b,\,c,\,d}$; положим $p=a+c$, $q=b+d$, $s=c+d$. Мы должны найти $\omega\in{}^{p,\,q}L_s$, такое, что $^{p,\,q}k^s(\omega)=u$.

Существует счетное локально конечное покрытие $\mathscr{V}=(V_j)_{j=1,2,\dots}$ пространства E малыми открытыми подмножествами (см. 4.1), такое, что для каждого j найдется $\alpha=\alpha(j)\in\mathscr{A}$, для которого $\pi(V_j)\subset U_\alpha$. Так как E паракомпактно, то можно найти последовательность открытых покрытий $\mathscr{V}^{(l)}=(V_j^{(l)})_{l=1,2,\dots}$, такую, что

$$V_j^{(1)}=V_j,\ \bar V_j^{(l)}\subset V_j^{(l-1)}\quad(j,\ l\geqslant 1).$$

Положим

$$V_j^{(\infty)}=\bigcap_{l\geqslant 1}V_j^{(l)},\ j\geqslant 1.$$

Так как $\mathscr{V}$ локально конечно, то ясно, что V_j^∞ также образуют покрытие пространства E, хотя и необязательно открытое. Следовательно, если (n_j) — произвольная последовательность положительных чисел, то объединение множеств $V_j^{(n_j)}$ будет образовывать открытое покрытие. Форма ω определена своими ограничениями на элементы такого покрытия.

В каждом V_j выберем и зафиксируем одну локальную систему координат. Ограничения u_j формы u на V_j могут быть тогда отождествлены с некоторыми дифференциальными формами, которые мы также будем обозначать через u_j, с коэффициентами в общем слое расслоения W. По определению $\omega^{(1)}=u_1$ на V_1. Если $V_1\cap\cap V_2^{(2)}=\varnothing$, то положим $\omega^{(2)}=u_1$ на V_1, $\omega^{(2)}=u_2$ на $V_2^{(2)}$. Предположим теперь, что $V_1\cap V_2^{(2)}\neq\varnothing$. В этом пересечении мы имеем $\omega^{(1)}=u_2+\sigma$, где σ — форма, степень по базе которой $>c+d$. Мы можем найти форму τ на $V_2^{(1)}$, которая совпадает с σ на $\bar V_1^{(2)}\cap\bar V_2^{(2)}$ (эта задача расширения тривиальна, так как σ уже определена на открытой окрестности множества $V_1^{(2)}\cap V_2^{(2)}$). Определим тогда $\omega^{(2)}$ как такую дифференциальную форму на $V_1^{(2)}\cup V_2^{(2)}$, которая совпадает с u_1 на $V_1^{(2)}$ и с $u_2+\tau$ на $V_2^{(2)}$.

Пусть теперь $l\geqslant 2$. Предположим, что имеются последовательность из l положительных целых чисел $n_{j,\,l}$ $(j=1,2,\dots,l)$ и дифференциальная форма $\omega^{(l)}$, определенная на $V_{(l)}=\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant l}V_j^{n_{j},\,l}$, такие, что

$$(\omega^{(l)}-u_j)\big|_{V_j^{(n_j,\,l)}}\in L_{s+1}\left(V_j^{(n_j,\,l)}\right),\ 1\leqslant j\leqslant l.\tag{3}$$

Пусть теперь I — множество целых чисел j между 1 и l, для которых

$$V_{l+1}\cap V_j^{(n_j,\,l)}\neq\varnothing.$$

В пересечении

$$V_{l+1}\cap V_{(l)}=V_{l+1}\cap\left(\bigcup_{j\in I}V_j^{(n_j,\,l)}\right)$$

разность $\sigma=\omega^{(l)}-u_{l+1}$ принадлежит к L_{s+1}. Как и прежде, мы можем найти форму τ на V_{l+1}, которая совпадает с σ на

$$\bar V_{l+1}^{(2)}\cap\left(\bigcup_{j\in I}\bar V_j^{(n_j,\,l+1)}\right).$$

Определим последовательность $(n_{j,\,l+1})$ из $l+1$ целых чисел равенствами

$$n_{j,\,l+1}=n_{j,\,l}+1,\quad j\in I;\quad n_{j,\,l+1}=n_{j,\,l},\quad 1\leqslant j\leqslant l,\quad j\notin I;\quad n_{l+1,\,l+1}=2.$$

Определим $\omega^{(l+1)}$ на

$$V_{(l+1)}=\bigcup_{1\leqslant j\leqslant l+1}V_j^{(n_j,\,l+1)}$$

как форму, совпадающую с $\omega^{(l)}$ на $V^{(n_j,\, l+1)}$ для $j \leqslant l$ и с $u_{l+1}+\tau$ на $V^{(2)}_{l+1}$. Тогда она удовлетворяет условию (3) с l, замененным на $l+1$.

Для того чтобы перейти от области определения $\omega^{(l)}$ к области определения $\omega^{(l+1)}$, нам, возможно, придется выкинуть некоторое $V_j^{(n_j,\, l)}$, но не в случае, когда $V_j \cap V_{l+1} = \varnothing$. Так как наше покрытие локально конечно, то для данного $m \geqslant 1$ найдется $l(m)$, такое, что $V_m \cap V_l = \varnothing$ для всех $l \geqslant l(m)$. В качестве следствия получаем, что для фиксированного j последовательность $n_{j,\, l}$ стабилизируется и найдется целое n_j, такое, что $V_{(j}^{n_j)}$ принадлежит к области определения формы $\omega^{(l)}$ для всех $l \geqslant 1$. По построению мы имеем тогда $\omega^{(l)} = \omega^{(l')}$ на $V_j^{(n_j)}$ для $l,\ l' \geqslant n_j$. Следовательно, существует дифференциальная форма ω на E, такая, что $\omega = \omega^{(n_j)}$ на $V_n^{(n_j)}$ для всех j. Из (3) следует тогда, что ${}^{p,\,q}k^s(\omega) = u$.

5.2. Лемма. *Отображение* ${}^{p,\,q}k_0^s$ *из* 5.1 *индуцирует изоморфизм* ${}^{p,\,q}E_1^s$ *на* $\sum\limits_i A_B^{i,\, s-i}(W \otimes \mathbf{H}^{p-i,\, q-s+i}(F))$.

Это следует из 5.1, если воспользоваться точностью последовательностей (3), (5) из § 3 и изоморфизмами 3.8(7).

§ 6. Член E_2. Доказательство свойства 2.1,2)

Обозначим через k_0 (соотв. k_1) прямую сумму отображений ${}^{p,\,q}k_0^s$ (соотв. ${}^{p,\,q}k_1^s$). В силу наших предположений о структурной группе для ξ образ k_1 является пространством форм на B с коэффициентами в голоморфном векторном расслоении (1.5), следовательно, он является дифференциальным модулем относительно $\bar\partial$. Утверждение 2.1,2) вытекает из следующей леммы.

6.1. Лемма. *Отображение k_1 переводит d_1 в $\bar\partial$. Для всех $p,\ q,\ s$ оно индуцирует изоморфизм*

$$
{}^{p,\,q}k_2^s\colon E_2^s \xrightarrow{\sim} \sum_i H^{i,\, s-i}(B,\ W \otimes \mathbf{H}^{p-i,\, q-s+i}(F)).
$$

Второе утверждение непосредственно следует из первого, которое мы и будем доказывать.

Пусть $\varkappa_1^0$ — каноническое отображение пространства $Z(E_0)$ d_0-коциклов в E_0 на E_1. В силу 5.1 и 5.2 мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{c+d \geqslant s} \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{A}_B^{c,\, d}) & \xrightarrow{\sigma} & \sum\limits_{c+d \geqslant s} \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \bar{\mathfrak{H}}(F) \otimes \mathfrak{A}_B^{c,\, d}) \\
\uparrow{\scriptstyle k_0} & & \uparrow{\scriptstyle k_1} \\
Z(E_0^s) & \xrightarrow{\varkappa_1^0} & E_1^s
\end{array}
\qquad (1)
$$

где

$$
\mathfrak{Z} = \sum \mathfrak{Z}^{a,\, b},\quad E_i^s = \sum_{p,\, q} {}^{p,\,q}E_i^s,\quad i = 0,\ 1,\ \ldots, \qquad (2)
$$

а σ то же самое, что и в 3.8(5). Обозначим через μ_u проекцию L_u на $E_0^u = L_u/L_{u+1}$ $(u = 0,\ 1,\ \ldots)$.

Пусть $a,\ b,\ c,\ d$ — положительные целые числа; положим $p = a + c$, $q = b + d$, $s = c + d$. Пусть $u \in \Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{H}^{a,\, b}(F) \otimes \mathfrak{A}_B^{c,\, d})$ и u' — элемент из $\Gamma(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{Z}^{a,\, b} \otimes \mathfrak{A}_B^{c,\, d})$, такой, что $\sigma(u') = u$; такой элемент существует по 3.8. Пусть $v = k_1^{-1}(u)$ и $v' = k_0^{-1}(u')$. Мы должны показать, что

$$
k_1(d_1 v) = \bar\partial u. \qquad (3)
$$

По определению $v' \in Z(E_0^s)$. Следовательно, существует $v'' \in L_s$, такое, что $\bar\partial(v'') \in L_{s+1}$ и $\mu_s v'' = v'$. По предыдущему мы имеем

$$
u = k_1 \cdot \varkappa_1^0 \cdot \mu_s(v'') = \sigma \cdot k_0 \cdot \mu_s(v''). \qquad (4)
$$

С другой стороны, определение d_1 дает $d_1 v = \varkappa_1^0 \mu_{s+1}(\bar\partial v'')$ и, следовательно, по (1)

$$
k_1(d_1 v) = \sigma \cdot k_0 \cdot \mu_{s+1}(\bar\partial v''). \qquad (5)
$$

Далее, (3) эквивалентно равенству

$$
\sigma \cdot k_0 \cdot \mu_{s+1}(\bar\partial v'') = \bar\partial u. \qquad (6)
$$

Это достаточно доказать для ограничения v'' на $\mu^{-1}(U_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathscr{A}$. Мы можем написать (по 4.2)

$$
v'' = v^{a,\, b,\, c,\, d} + v^{a-1,\, b,\, c+1,\, d} + v^{a,\, b-1,\, c,\, d+1} \bmod L_{s+2,\, \alpha},
$$

где $v^{e,\, f,\, g,\, k} \in \Gamma_{U_\alpha}(\mathfrak{W} \otimes \mathfrak{B}^{e,\, f} \otimes \mathfrak{A}_B^{j,\, k})$; по построению $v^{a,\, b,\, c,\, d}$ может быть отождествлено с u'. Тогда мы имеем

$$
\bar\partial v'' = \bar\partial u' + \bar\partial(v^{a-1,\, b,\, c+1,\, d} + v^{a,\, b-1,\, c,\, d+1}) \bmod L_{s+2,\, \alpha}.
$$

Так как мы вычисляем $\bmod L_{s+2,\, \alpha}$, то можно пренебрегать членами, степень на базе которых $> c + d + 1$; это означает, что мы также имеем

$$
\bar\partial v'' = \bar\partial u' + \bar\partial_F(v^{a-1,\, b,\, c+1,\, d} + v^{a,\, b-1,\, c,\, d+1}) \bmod L_{s+2,\, \alpha},
$$

$$
k_0 \mu_{s+1} \bar\partial(v'') = \bar\partial u' + \bar\partial_F(v^{a-1,\, b,\, c+1,\, d} + v^{a,\, b-1,\, c,\, d+1}).
$$

Второй член в правой части равенства является $\bar\partial_F$-кограницей и потому аннулируется отображением σ; следовательно,

$$
\sigma k_0 \mu_{s+1} \bar\partial(v'') = \sigma \bar\partial u'.
$$

Но ясно, что

$$
\sigma \cdot \bar\partial(u') = \bar\partial(\sigma(u')) = \bar\partial u,
$$

откуда и следует (6).

Замечание. Аналогичное доказательство позволяет построить с помощью дифференциальных форм спектральную последовательность для вещественных когомологий гладких расслоенных пространств. Основной дифференциальной алгеброй служит пространство вещественных дифференциальных форм на E, фильтрованное по степеням координат, связанных с базой, как и в 4.1. Доказательство практически то же самое, только проще обозначения, так как теперь не нужны W и тип форм. Если F компактно, то точность последовательности, аналогичной 3.7, 4), опять вытекает из свойств гладкости оператора Грина (см. де Рам [1], стр. 157). В общем случае это следует из одного результата Ван Эста [1], следствие 1 теоремы 1).

§ 7. Элементарные свойства и приложения спектральной последовательности

Мы сохраним обозначения и предположения п. 2.1.

7.1. *Если расслоение $\mathbf{H}_{\bar\partial}(F)$ тривиально, в частности если структурная группа для ξ связна, то*

$$ {}^{p,q}E_2^{s,t} \cong \sum_i H^{i,s-i}(B, W) \otimes H^{p-i,q-s+i}(F). $$

Это следует из 2.1, 2) и 1.3.

7.2. *Пространство ${}^{p,q}E_r^{p+q,0}$ является факторпространством пространства ${}^{p,q}E_{r-1}^{p+q,0}$ $(r \geqslant 3)$. Композиция естественных отображений*

$$ H^{p,q}(B, W) \cong {}^{p,q}E_2^{p+q,0} \to {}^{p,q}E_\infty^{p+q,0} \subset H^{p,q}(E, \hat W) $$

совпадает с π^*. Она инъективна, если $q = 0$.

Первое утверждение следует обычным образом из построения спектральной последовательности и из стандартных фактов о краевых гомоморфизмах. Так как никакой элемент типа $(p, 0)$ не может быть d_r-кограницей, то отсюда следует второе утверждение.

7.3. При наших предположениях о G расслоение $\mathbf{H}_{\bar\partial}(F)$ имеет в качестве структурной группы дискретную группу G/G^0, где G^0 — компонента связности единичного элемента. Обычным образом существует гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(B)$ в $\mathrm{Aut}\,\mathbf{H}_{\bar\partial}(F)$, и расслоение $\mathbf{H}_{\bar\partial}(F)$ можно рассматривать как локальную систему координат. Отсюда легко вывести, что в случае, когда B компактно, $H^{0,0}(B, \mathbf{H}^{p,q}(F))$ изоморфно пространству $H^{p,q}(F)^\pi$ неподвижных точек относительно действия $\pi_1(B)$. Таким образом,

$$ {}^{p,q}E_2^{0,p+q} \cong H^{p,q}(F)^\pi. $$

7.4. *Пространство ${}^{p,q}E_r^{0,p+q}$ может быть отождествлено с пространством d_{r-1}-коциклов в ${}^{p,q}E_{r-1}^{0,p+q}$ $(r \geqslant 3)$. Если $W = 1$ и B компактно, то композиция естественных отображений*

$$ H^{p,q}(E) \to {}^{p,q}E_\infty^{0,p+q} \subset {}^{p,q}E_2^{p,p+q} = H^{p,q}(F)^\pi \subset H^{p,q}(F) $$

совпадает с гомоморфизмом, индуцированным вложением слоя.

Это опять следует из элементарных фактов о спектральных последовательностях.

7.5. *Если структурная группа для ξ связна, то*

$$ h^{p,q}(E, \hat W) \leqslant \sum_{\substack{a+c=p \\ b+d=q}} h^{c,d}(B, W) \cdot h^{a,b}(F). $$

Это является следствием утверждения 7.1 и соотношения

$$ h^{p,q}(E, \hat W) = \dim {}^{p,q}E_\infty \leqslant \dim {}^{p,q}E_2, $$

в котором мы положили

$$ {}^{p,q}E_r = \sum_{s,t \geqslant 0} {}^{p,q}E_r^{s,t}. $$

7.6. Наконец, заметим, что *если G связно и $i^*\colon H_{\bar\partial}(E) \to H_{\bar\partial}(F)$ эпиморфно, то $H_{\bar\partial}(E)$ аддитивно изоморфно $H_{\bar\partial}(B) \otimes H_{\bar\partial}(F)$.* Действительно, E_2 как алгебра отождествляется с тензорным произведением алгебр $H_{\bar\partial}(F) \otimes 1$ и $1 \otimes H_{\bar\partial}(B)$, которые состоят из универсальных коциклов.

§ 8. Мультипликативное свойство χ_y-рода

8.1. Теорема. *Пусть $\xi = (E, B, F, \pi)$ — комплексно-аналитическое расслоенное пространство со связной структурной группой, в котором E, B, F компактны и связны, а F кэлерово. Пусть W — комплексно-аналитическое векторное расслоение над B. Тогда $\chi_y(E, \pi^* W) = \chi_y(B, W) \cdot \chi_y(F)$.*

По поводу обозначений χ_y и χ^p см. 15.5. Так как G связно и F кэлерово, то G действует тривиально на $\bar\partial$-когомологиях общего слоя (см. 1.4), следовательно, мы можем применить 2.1; более того, мы имеем (7.1)

$$ E_2 \cong H_{\bar\partial}(B, W) \otimes H_{\bar\partial}(F). \tag{1} $$

Положим в обозначениях из 7.4

$$ \chi^p(E_r) = \sum_q (-1)^q \dim {}^{p,q}E_r, $$

$$ \chi_y(E_r) = \sum_p \chi^p(E_r) \cdot y^p. $$

Из 2.1, 3) следует, что

$$ \chi_y(E, \pi^* W) = \chi_y(E_\infty). \tag{2} $$

Простое вычисление, использующее (1), дает

$$\chi_y(E_2) = \chi_y(B,\ W)\cdot\chi_y(F) \tag{3}$$

Пусть ${}^{(p)}E_r = \sum_q {}^{p,\,q}E_r$ $(r \geqslant 2)$. Это — градуированное пространство, эйлерова характеристика которого равна $\chi({}^{(p)}E_r) = \chi^p(E_r)$; оно инвариантно относительно d_r, а его группа гомологий совпадает с ${}^{(p)}E_{r+1}$. По хорошо известному и элементарному результату имеем $\chi({}^{(p)}E_r) = \chi({}^{(p)}E_{r+1})$. Следовательно, $\chi^p(E_r) = \chi^p(E_{r+1})$, $r \geqslant 2$, что вместе с (2) и (3) и завершает доказательство.

§ 9. $\bar\partial$-когомологии многообразий Калаби — Экмана

9.1. Мы будем обозначать через $A^0(X)$ компоненту связности единичного элемента в группе $A(X)$ комплексно-аналитических гомеоморфизмов компактного связного комплексного многообразия X. Хотя это на самом деле и не нужно для дальнейшего, напомним, что по известной теореме Бохнера — Монтгомери $A(X)$ является комплексной группой Ли. Если X является пространством комплексно-аналитического расслоения (X, Y, F, π), то всякий элемент из $A^0(X)$ коммутирует с π и, следовательно, имеется естественный гомоморфизм π^0: $A^0(X) \to A^0(Y)$ (см. Бланшар [3], стр. 160). В частности, если M и N — связные комплексно-аналитические компактные многообразия, то $A^0(M\times N) = A^0(M)\times A^0(N)$ (Бланшар (3), стр. 161).

9.2. Пусть $\mathbf{M}_{u,\,v}$ $(u, v \in \mathbf{Z};\ u, v \geqslant 0)$ — произведение $\mathbf{S}^{2u+1}\times\mathbf{S}^{2v+1}$, снабженное одной из комплексных структур, введенных Калаби и Экманом [1]. Его можно представить как пространство главного комплексно-аналитического расслоения $\xi_{u,\,v}$ над $\mathbf{B}_{u,\,v} = \mathbf{P}_u(\mathbf{C})\times\mathbf{P}_v(\mathbf{C})$ с одномерным комплексным тором $\mathbf{T}$ в качестве слоя. Мы имеем

$$A^0(\mathbf{M}_{u,\,v}) = (\mathbf{GL}(u+1,\ \mathbf{C})\times\mathbf{GL}(v+1,\ \mathbf{C}))/\Gamma,$$

где Γ — бесконечная циклическая дискретная центральная подгруппа (Бланшар [1]), а отображение

$$\nu_{u,\,v}\colon\ A^0(\mathbf{M}_{u,\,v}) \to A^0(\mathbf{B}_{u,\,v}) = \mathbf{PGL}(u+1,\ \mathbf{C})\times\mathbf{PGL}(v+1,\ \mathbf{C}),$$

ассоциированное с проекцией $\pi_{u,\,v}\colon \mathbf{M}_{u,\,v} \to \mathbf{B}_{u,\,v}$ (см. 9.1), совпадает с очевидным гомоморфизмом.

Для $u=0$ или $v=0$ $\mathbf{M}_{u,\,v}$ есть многообразие Хопфа. Пусть $\sigma_{u,\,v}$ — отображение, являющееся композицией проекции $\pi_{u,\,v}$ и проекции многообразия $\mathbf{B}_{u,\,v}$ на первый множитель. Тогда $\sigma_{u,\,v}$ является проекцией в комплексно-аналитическом расслоении $\eta_{u,\,v}$ со слоем $\mathbf{M}_{0,\,v}$. Чтобы это увидеть, можно воспользоваться следующим фактом (Бланшар [1]): $\mathbf{M}_{u,\,v}$ является базой комплексно-аналитического главного расслоения, пространство которого совпадает с $\mathbf{M}_{u,\,0}\times\mathbf{M}_{0,\,v}$, слоем служит комплексный одномерный тор, а проекция ν такова, что

$$\pi_{u,\,v}\circ\nu = \pi_{u,\,0}\times\pi_{0,\,v}\colon\ \mathbf{M}_{u,\,0}\times\mathbf{M}_{0,\,v} \to \mathbf{B}_{u,\,v}.$$

9.3. Лемма. *Группа $A^0(\mathbf{M}_{u,\,v})$ действует тривиально на $H_{\bar\partial}(\mathbf{M}_{u,\,v})$.*

Наше расслоенное пространство имеет связную структурную группу и кэлеров слой (а именно $\mathbf{T}$); поэтому 2.1 применимо. По 9.1 $A^0(\mathbf{M}_{u,\,v})$ является группой автоморфизмов всей расслоенной структуры, поэтому она действует на спектральной последовательности. Это действие тривиально на $E_2 = H_{\bar\partial}(\mathbf{B}_{u,\,0})\otimes H_{\bar\partial}(\mathbf{T})$, так как и $\mathbf{B}_{u,\,v}$ и $\mathbf{T}$ кэлеровы (см. 1.4); поэтому действие тривиально и на E_∞. Но $E_\infty = \mathrm{Gr}(H_{\bar\partial}(\mathbf{M}_{u,\,v}))$; в силу полной приводимости любая компактная подгруппа из $A^0(\mathbf{M}_{u,\,v})$ действует тривиально на $H_{\bar\partial}(\mathbf{M}_{u,\,v})$. Таким образом, ядром действия $A^0(\mathbf{M}_{u,\,v})$ на $H_{\bar\partial}(\mathbf{M}_{u,\,v})$ будет нормальная подгруппа, содержащая все компактные подгруппы, т. е. она будет совпадать со всей группой.

9.4. Лемма. *$H^{1,\,0}(\mathbf{M}_{0,\,v}) = 0$ при $v \geqslant 1$.*

Эта лемма известна. Для полноты напомним ее доказательство. Многообразие $\mathbf{M}_{0,\,v}$ может быть определено как факторпространство $\mathbf{C}_{v+1} - \{0\}$ по дискретной подгруппе, порожденной гомотетией $\gamma\colon z \to c\cdot z$, $c \neq 1$. Пусть ω — голоморфный дифференциал на $\mathbf{M}_{0,\,v}$. Его прообраз ω^* в $\mathbf{C}_{v+1} - \{0\}$ может быть записан в виде $\omega^* = g_1\cdot dz_1 + \ldots + g_{v+1}\cdot dz_{v+1}$, где z_i — координаты, а g_i голоморфны в $\mathbf{C}_{v+1} - \{0\}$. Форма ω^* инвариантна относительно γ; отсюда следует, что

$$g_i(c^n\cdot z) = c^{-n}\cdot g_i(z),\quad n\in\mathbf{Z},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ v+1;$$

это показывает, что если $g_i \not\equiv 0$, то g_i не ограничена в окрестности начала координат, что противоречит теореме Гартогса.

$\bar\partial$-когомологии многообразия $\mathbf{M}_{u,\,v}$ порождаются элементами, тип которых будет указан индексами.

9.5. Теорема. *Пусть $u \leqslant v$. Тогда*

$$H_{\bar\partial}(\mathbf{M}_{u,\,v}) \cong \mathbf{C}[x_{1,\,1}]/(x_{1,\,1}^{u+1}) \otimes \Lambda(x_{v+1,\,v},\ x_{0,\,1}).$$

Рассмотрим сначала случай, когда $u=0$. В спектральной последовательности для расслоения $\xi_{0,\,v}$ имеем

$$E_2 \cong \mathbf{C}[x_{1,\,1}]/(x_{1,\,1}^{v+1}) \otimes \Lambda(x_{1,\,0},\ x_{0,\,1}),$$

где первый множитель в правой части равенства представляет собой когомологии базы $\mathbf{P}_v(\mathbf{C})$, а второй — когомологии слоя $\mathbf{T}$. Элемент $x_{0,\,1}$ порождает ${}^{0,\,1}E_2^{0,\,1}$ и переводится отображением d_2 в ${}^{0,\,2}E_2^{2,\,0}$, что есть нуль; следовательно, $d_2(x_{0,\,1}) = 0$. Если бы

$d_2(x_{1,0})=0$, то $x_{1,0}$ был бы универсальным циклом и принадлежал бы E_∞ (см. 7.4), что противоречит 9.4. Следовательно, можно предполагать, что $d_2(x_{1,0})=x_{1,1}$. Простое вычисление показывает тогда, что

$$E_3\cong\Lambda(y_{v+1,v},\ x_{0,1}),$$

где

$$y_{v+1,v}=\varkappa_3^2(x_{1,1}^{v+1}\otimes x_{1,0})\in{}^{v+1,v}E_3^{2v,1}.$$

Так как $y_{v+1,v}$ и $x_{0,1}$ имеют степень слоя 1, то они являются d_r-коциклами для $r\geqslant 3$; следовательно, $E_3=E_\infty$. Так как E_∞ — свободная антикоммутативная градуированная алгебра, то $E_\infty\cong$ $\cong H_{\bar\partial}(\mathbf{M}_{u,v})$ также и мультипликативно.

Если теперь $0<u\leqslant v$, то рассмотрим расслоение $\eta_{u,v}$ многообразия $\mathbf{M}_{u,v}$ над $\mathbf{P}_u(\mathbf{C})$ со слоем $\mathbf{M}_{0,v}$ (см. 9.2). Его структурная группа связна, и действие на $\bar\partial$-когомологии слоя тривиально, поскольку база односвязна. Мы можем, следовательно, применить 2.1; получаем

$$E_2=\mathbf{C}[x_{1,1}]/(x_{1,1}^{u+1})\otimes\Lambda(x_{v+1,v},\ x_{0,1}).$$

Как и прежде, x_{01} является d_2-коциклом, следовательно, универсальным коциклом. Если $u\leqslant v$, то в спектральной последовательности нет элемента типа $(v+1, v+1)$ со строго положительной степенью базы; следовательно, $x_{v+1,v}$ также является универсальным коциклом. Так как базисные элементы — универсальные коциклы, то отсюда следует, что $d_r=0$, $r\geqslant 2$. Мы имеем, следовательно, $E_2=E_\infty$, по крайней мере аддитивно. Но представители классов $x_{v+1,v}$, $x_{0,1}$ в $H_{\bar\partial}(\mathbf{M}_{u,v})$ обращаются в нуль при возведении в квадрат, и имеется представитель $y_{1,1}$ для $x_{1,1}$, а именно $\pi_{u,v}^*(x_{1,1})$, такой, что $y_{1,1}^{u+1}=0$. Отсюда немедленно следует, что E_∞ и $H_{\bar\partial}(\mathbf{M}_{u,v})$ изоморфны как алгебры, что и доказывает теорему.

Замечание. $\bar\partial$-когомологии для многообразий Хопфа $\mathbf{M}_{0,v}$ вычислены у Кодаиры и Спенсера ([5], § 15) для случая $v=1$ и у Исэ [1] для любого v. Теорема 4 из Исэ [1] дает также описание $\bar\partial$-когомологий многообразий Хопфа с коэффициентами в одномерном векторном расслоении.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

С тем чтобы дать представление о последних (после 1966 г.) работах, касающихся теоремы Римана — Роха, прилагаемый в конце книги список литературы дополнен переводчиком. Список добавленной литературы не претендует на полноту. Следующие ниже краткие комментарии к этому списку расположены в том же порядке, что и соответствующий материал в приложении 1.

а) *Теорема Римана — Роха в форме Гротендика.* Изложенная в § 23 теория Гротендика была обобщена на семинаре Гротендика 1966—1967 гг. (SGA6) в Институте высших исследований (Бертело, Гротендик и Иллюзи [1*]). В этой работе теорема Римана — Роха устанавливается в контексте теории схем Гротендика. Основные результаты получены для нётеровых схем. При некоторых упрощающих предположениях (для регулярных схем) эта теория изложена в статье Ю. И. Манина [1*].

По сравнению со случаем неособого алгебраического проективного многообразия, рассмотренным в § 23, возникают различные принципиальные и технические трудности. Одна из них — несовпадение группы K, построенной по локально свободным пучкам, с группой K, построенной по когерентным пучкам. Другая проблема — это определение объекта, играющего роль касательного расслоения для необязательно регулярных схем. В аффинном случае требуемый объект (кокасательный комплекс) был построен в работах Квиллена и Андрэ.

б) *Кольцо Гротендика непрерывных векторных расслоений.* Экстраординарная теория когомологии (K-теория), построенная в § 24 с помощью непрерывных векторных расслоений, весьма интенсивно изучалась в последние годы алгебраическими топологами. Наряду с экстраординарными теориями когомологий, возникшими из теории кобордизмов, K-теория является основным аппаратом современной алгебраической топологии. См., например, доклады на международном конгрессе в Ницце.

в) *Теорема Атьи — Зингера об индексе.* Появилось подробное изложение работ Атьи — Зингера об индексе (Атья и Зингер [2*, 3*], Атья и Сегал [2*]). Кроме подробного доказательства теоремы 25.3.1, в этих работах содержится ряд важных обобщений теоремы об индексе. Обобщения связаны с рассмотрением эллиптических комплексов вместо операторов и с изучением эквивариантных аналогов индекса, индексов семейства эллиптических комплексов, вещественных аналогов индекса. В этих же работах дается много приложений теорем об индексах. Особенно многочисленны приложения эквивариантных аналогов индекса.

С эквивариантными аналогами индекса тесно связана формула Лефшеца — Атьи — Ботта (Лефшец, Атья и Ботт [4*]), которая доказывается совсем иначе, чем теорема об индексе. Для теории Атьи — Ботта построен также инфинитезимальный аналог, в котором рассматриваются векторные поля, а не действия групп (Ботт [9*, 10*], Баум [1*], Баум и Ботт [1*]). Недавно Ботт применил эту теорию к слоениям (см. его доклад на международном конгрессе в Ницце).

О приложениях этого круга идей к топологическим вопросам теории векторных полей см. Атья [10*] и доклад Атьи на конгрессе в Ницце. По поводу семейств эллиптических операторов см. также Ши [1*].

Интересное приложение идей индекса к комбинаторным задачам принадлежит Рэю и Зингеру [1*]. Они предложили аналитическую конструкцию для известного комбинаторного инварианта многообразий кручения Радемайстера — Франца. Хотя окончательно еще не доказано, что их аналитическое кручение совпадает с кручением Радемайстера — Франца, однако показано, что оба инварианта обладают одинаковыми свойствами.

В заключение обратим внимание на работу Хирцебруха [9*], в первой половине которой описан путь, приведший его к открытию теоремы Римана — Роха.

ЛИТЕРАТУРА[1])

AMS — Amer. Math. Soc.

Агранович М. С.
[1] Об индексе эллиптических операторов, *ДАН*, **142** (1962), 983—985.
Адамс (Adams J. F.)
[1] On Chern characters and the structure of the unitary group, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 57 (1961), 189—199.
[2] On formulae of Thom and Wu, *Proc. London Math. Soc.*, **11** (1961), 741—752.
[3] Vector fields on spheres, *Ann. Math.*, **75** (1962), 603—632. [Русский перевод: Векторные поля на сферах, *Математика*, 7 : 6 (1963), 48—49.]
Акидзуки (Akizuki Y.)
[1] Theorems of Bertini on linear systems, *J. Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 170—180.
Акидзуки и Накано (Akizuki Y., Nakano S.)
[1] Note on Kodaira — Spencer's proof of Lefschetz theorems, *Proc. Japan. Acad.*, **30** (1954), 266—272.
Атья (Atiyah M. F.)
[1] Complex fibre bundles and ruled surfaces, *Proc. London Math. Scc.*, **5** (1955), 407—434.
[2] Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. London Math. Soc.*, **7** (1957), 414—452.
[3] Complex analytic connections in fibre bundles, *Trans. AMS*, **85**, (1957), 181—207.
[4] Bordism and cobordism, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **57** (1961), 200—208.
[5] Thom complexes, *Proc. London Math. Soc.*, **11** (1961), 291—310. [Русский перевод: Пространства Тома, *Математика*, 10:5 (1966), 48—69.]
[6] Vector bundles and the Künneth formula, *Topology*, **1** (1962), 245—248.
[7] On the *K*-theory of compact Lie groups. *Topology*, **4** (1965), 95—99. [Русский перевод: О *K*-теории компактных групп Ли, Приложение к книге М. Ф. Атья, Лекции по *K*-теории, «Мир», 1967.]
[8] Лекции по *K*-теории, «Мир», 1967 (1965).
[9*] Global aspects of the theory of elliptic differential operators, Труды Международного конгресса математиков, Москва, 1966, «Мир», 1968, 57—64.
[10*] Vector fields on manifolds, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, h. 200, 1970, 1—25.
Атья и Ботт (Atiyah M. F., Bott R.)
[1] On the periodicity theorem for complex vector bundles, *Aca Math.*, **112** (1964), 229—247.
[2] The index problem for manifolds with boundary, Bombay Colloquium on Differential Analysis, 1964, 175—186.
[3] A Lefschetz fifed pount formula for elliptic differential operators, *Bull. AMS*, 72 (1966), 245—250.
[4*] A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I, II, *Ann. Math.*, **86** (1967), 374—407; 88 (1968), 451—491.

[1]) Звездочкой отмечена литература, добавленная переводчиком. Для переводных книг в круглых скобках указан год оригинального издания. — *Прим. ред.*

Атья, Ботт и Зингер (Atiyah M. F., Bott R., Singer I. M.)
[1*] Topoology seminar, Harvard, 1962.
Атья, Ботт и Шапиро (Atiyah M. F., Bott R., Shapiro A.)
[1] Clifford modules, *Topology*, **3** (1964), Suppl. 1, 3—38.
Атья и Зингер (Atiyah M. F., Singer I. M.)
[1] The index of elliptic operators on compact manifolds, *Bull. AMS*, **69** (1963), 422—433.
[2*] The index of elliptic operators. I, III, IV, V, *Ann. Math.*, **87** (1968), 484—530; **87** (1968), 546—604; **93** (1971), 119—138; **93** (1971), 139—149. [Русский перевод: Индекс эллиптических операторов. I, *УМН*, **23** (1968), № 5, 99 — III, *УМН*, **24** (1969), № 1, 127—182.]
[3*] Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Hautes Etudes Sci., Paris, 37, 1969.
Атья и Сегал (Atiyah M. F., Segal G. B.)
[1] Equivariant *K*-theory, Oxford, 1965. [Русский перевод: Эквивариантная *K*-теория, приложение к книге М. Атья, Лекции по *K*-теории, «Мир», 1967.]
[2*] The index of elliptic operators. II, *Ann. Math.*, **87** (1968), 531—545. [Русский перевод: Индекс эллиптических операторов. II, *УМН*, 23 (1968); № 6, 135—149.]
[3*] Equivariant *K*-theory and completion, *J. Diff. Geom.*, **3** (1969), 1—18.
Атья и Хирцебрух (Atiyah M. F., Hirzebruch F.)
[1] Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, *Bull. AMS*, **65** (1959), 276—281.
[2] Quelques théorèmes de non-plongement pour les variétés différentiables, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 383—396. [Русский перевод: Несколько теорем о непогружаемости дифференцируемых многообразий, *Математика*, 5:3 (1961), 3—5.]
[3] Vector bundles and homogeneous speces, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, v. 3, AMS, 1961, 7—38.
[4] Cohomologie — Operationen und charakteristische Klassen, *Math. Z.*, **77** (1961), 149—187.
[5] Bott periodicity and the parallelisability of the spheres, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **57** (1961), 223—226.
[6] Charakteristische Klassen und Anwendungen, *Enseignement Mathématique*, 7 (1961), 188—213.
[7] Analytic cycles on complex maifolds, *Topology*, **1** (1962), 25—45.
[8] The Riemann-Roch theorem for analytic embeddings, *Topology*, **1** (1962), 151—165.
[9*] Spin- manifolds and group actions, Essays of Topology and Related Topics, Memoires dédiés à Georges de Rham, Springer, 1970, 18—28.
Баум (Baum P.)
[2*] Vector fields and Gauss-Bonnet, *Bull. AMS*, **76** (1970), 1202—1211.
Баум и Ботт (Baum P., Bott R.)
[1*] On the zeroes of meromorphic vector fields, Essays on Topology and Related Topics, Memoires dédiés à Georges de Rham, Springer, 1970, 29—47.
Бертело, Гротендик и Иллюзи (Berthelot P., Grothendieck A., Illusie L.)
[1*] Théorie des intersections et théoréme de Riemann-Roch, SGA6, Lecture Notes in Mathematics, 225, Springer, 1971.
Бланшар (Blanchard A.)
[1] Automorphismes des variétés fibrées analytiques complexes, *C. R.*, **233** (1951), 1337—1339.
[2] Espaces fibrés kählériens compacts, *C. R.*, 238 (1954), 2281—2283.
[3] Sur les variétés analytiques complexes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Super.*, **73** (1956), 157—202.
Борель (Borel A.)
[1] Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **80** (1952), 167—182.

[2] Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Ann. Math.*, **57** (1953), 115—207. [Русский перевод: О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли, Сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, 1958, 163—246.]
[3] Topology of Lie groups and characteristic classes, *Bull. AMS*, **61** (1965), 397—432.
[4] Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, *Topology*, **2** (1963), 111—122.

Борель и Серр (Borel A., Serre J.-P.)
[1] Groupes de Lie et puissances reduites de Steenrod, *Am. J. Math.*, **75** (1953), 409—418. [Русский перевод: Группы Ли и приведенные степени Стинрода, Сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, 1958, 247—281.]
[2] Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck), *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 97—136. [Русский перевод: Теорема Римана — Роха, *Математика*, 5:5 (1961), 17—54.]

Борель и Хирцебрух (Borel A., Hirzebruch F.)
[1] Characteristic classes and homogeneous spaces. I, II, III, *Am. J. Math.*, **80** (1958), 458—538; **81** (1959), 315—382; **82** (1960), 491—504.

Ботт (Bott R.)
[1] Homogeneous vector bundles, *Ann. Math.*, **66** (1957), 203—248.
[2] The stable homotopy of the classical groups, *Ann. Math.* **70** (1959), 313—337.
[3] The space of loops on a Lie group. *Mich. Math. J.*, **5** (1958), 35—61.
[4] On a theorem of Lefschetz, *Mich. Math. J.*, **6** (1959), 211—216.
[5] Quelques remarques sur les théorèmes de periodicité, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1959), 293—310.
[6] Lectures on $K(X)$, Harvard, 1962. [Русский перевод: K-теория, *Математика*, **11**:2 (1967), 3—57; **11**:3 (1967), 3—36.]
[7] *Math. Rev.*, **22** (1961), 171—174; **22** (1961), 1153—1155; **28** (1964), 129—130.
[8] Report on the fixed point formula, Séminaire Bourbaki, 9295, 1965/66.
[9*] Vector fields and characteristics numbers, *Mich. Math. J.*, **14** (1967), 231—244.
[10*] A residue formula for holomorphic vector fields, *J. Diff. Geom.*, **1** (1967), 311—330.

Брёкер и Том Дик (Bröcker T., Tom Diek T.)
[1*] Kobordismentheorie, Lecture Notes in Mathematics, 178, Springer, 1970.

Брискорн (Brieskorn E.)
[1] Ein Satz über die komplexen Quadriken, *Math. Ann.*, **155** (1964), 184—193.
[2] Über holomorphe P_n-Bündel über P_1, *Math. Ann.*, **157** (1965), 343—357.

Бурбаки (Bourbaki N.)
[1] Алгебра, Физматгиз, 1962.

Ван дер Варден (van der Waerden B. L.)
[1] Birationale Transformationen von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.*, **51** (1948), 502—523.
[2] Birational invariants of algebraic manifolds, *Acta Salmantic., sec. mat.*, **2** (1947), 1—56.

Ван де Вен (van de Ven A. J. H. M.)
[1] Characteristic classes and monoidal transformations, *Indag. Math.*, **18** (1956), 571—578.
[2] An interpretation of the formulae of Kundert concerning higher obstructions, *Indag. Math.*, **19** (1957), 196—200.

Ван Эст (van Est)
[1] *Proc. Konikl. Neder. Ak. van Wet., ser. A*, **61** (1958), 399—413.

Вейль А. (Weil A.)
[1] Généralisation des fonctions abéliennes, *J. Math. Pures Appl.*, **17** (1938), 47—87.
[2] Введение в теорию кэлеровых многообразий, ИЛ, 1961 (1958).

Вейль Г. (Weyl H.)
[1] Die Idee der Riemannschen Fläche, Berlin, Teubner, 1913 (3rd edition, Stuttgart, Teubner, 1955).

Вольперт А. И.
[1] Индекс систем двумерных интегральных уравнений, *ДАН*, **142** (1962), 776—777.
[2] Эллиптические системы на сфере и двумерные сингулярные интегральные уравнения, *Матем. сб.*, **59** (1962), 195—214.

Вольф (Wolf J. A.)
[1] On the classification of hermitian symmetric spaces, *J. Math. Mech.*, **13** (1964), 489—495.

Вуд (Wood R.)
[1] Banach algebras and Bott periodicity, *Topology*, **4** (1965).

Гамкрелидзе Р. В.
[1] Вычисление циклов Чженя для алгебраических многообразий, *ДАН*, **90** (1953), 719—723.
[2] Циклы Чженя комплексных алгебраических многообразий, *ИАН, сер. матем.*, **20** (1956), 685—706.

Гарабедян, Спенсер (Garabedian P. R., Spencer D. C.)
[1] A complex tensor calculus for Kähler manifolds, *Acta Math.*, **89** (1953), 279—331.

Гельфанд И. М.
[1] Об эллиптических уравнениях, *УМН*, **15** (1960), № 3, 121—132.

Годеман (Godement R.)
[1] Алгебраическая топология и теория пучков, ИЛ, 1961 (1958).

Грауэрт (Grauert H.)
[1] Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complex, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 341—350.
[2] Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, *Publ. Math., I. H. E. S.*, **5**, 1960. [Русский перевод: Теорема из теории аналитических пучков и пространства модулей комплексных структур, Сб. «Комплексные пространства», «Мир», 1965, 202—299.]
[3] Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.*, **146** (1962), 331—368.

Грауэрт, Реммерт (Grauert H., Remmert R.)
[1] Bilder und Urbilder analytischer Garben, *Ann. Math.*, 68 (1958), 393—443.
[2] Komplexe Räume, *Math. Ann.*, **136** (1958), 245—318.

Гриффитс (Griffiths P. A.)
[1] On the differential geometry of homogeneous vector bundles, *Trans. AMS.*, **109** (1963), 1—34.
[2] Deformations of holomorphic mappings, *Illinois J. Math.*, **8** (1964), 139—151.
[3] Hermitian differential geometry and the theory of positive and ample holomorphic vector bundles, *J. Math. Mech.*, **14** (1965), 117—140.

Гротендик (Grothendiek A.)
[1] A general theory of fibre spaces with structure sheaf, Lawrence, Kansas, University of Kansas, 1955 (2nd edition, 1958).
[2] О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, 1961 (1957).
[3] Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphere de Riemann, *Am. J. Math.*, **79** (1957), 121—138.
[4] La théorie des classes de Chern, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 137—154.

Гугенхайм, Спенсер (Gugenheim V. K. A. M., Spencer D. C.)
[1] Chain homotopy and the de Rham theory, *Proc. AMS*, **7** (1956), 144—152.

Гуггенхаймер (Guggenheimer H.)
[1] Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik, *Comment. Math. Helv.*, **25** (1951), 257—297.
[2] Modifications of Kähler manifolds, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **41** (1956), 87—93.

Дольбо (Dolbeault P.)
[1] Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, *C. R.*, **236** (1953), 175—177.
[2] Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complex, I, II, *Ann. Math.*, **64** (1956), 83—130; **65** (1957), 282—330.
Дольд (Dold A.)
[1] Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}$, *Math. Z.*, **65** (1956), 25—35.
[2] Vollständigkeit der Wuschen Relationen zwischen den Stiefel-Whitneyschen Zahlen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.*, **65** (1956), 200—206.
[3] Partitions of unity in the theory of fibrations, *Ann. Math.*, **78** (1963), 223—255.
Домбровский (Dombrowski P.)
[1] On the geometry of the tangent bundle, *J. Reine Angew. Math.*, **210** (1962), 73—88.
Дынин А. С.
[1] Сингулярные операторы произвольного порядка на многообразии, *ДАН*, **141** (1961), 21—23.
[2] Об индексе семейства псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем, *ДАН*, **186** (1969), 506—508.
Дьёдонне (Dieudonné J.)
[1] Une généralisation des espaces compacts, *J. Math. Pures Appl.*, **64** (1956), 83—130; **65** (1944), 65—76.
Зарисский (Zariski O.)
[1] Algebraic surfaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **5**, Berlin, Springer, 1935 (2nd edition Springer, 1971.)
[2] Pencils on an Algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini, *Trans. AMS*, **50** (1941), 48—70.
[3] The theorem of Bertini on the variable singular points of a linear system of varieties, *Trans. AMS*, **56** (1944), 130—140.
[4] Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi, *Ann. Math.*, **55** (1952), 552—592.
Исэ (Ise M.)
[1] On the geometry of Hopf manifolds, *Osaka Math. J.*, **12** (1960), 387—402.
[2] Generalised automorphic forms and certain holomorphic vector bundles, *Am. J. Math.*, **86** (1964), 70—108.
Калаби и Экман (Calabi E., Eckmann B.)
[1] A class of compact complex manifolds, *Ann. Math.*, **58** (1953), 494—500.
Кан (Kahn P. J.)
[1] Characteristic numbers and oriented homotopy type, *Topology*, **3** (1965), 81—95.
[2] Characteristic numbers and homotopy type, *Mich. Math. J.*, **12** (1965), 49—60.
Картан (Cartan H.)
[1] Espaces fibrés et homotopie, Séminaire E. N. S., 1949—1950, 2nd edition, Paris, 1956.
[2] Cohomologie des groupes, siute spectrale, faisceaux, Séminaire E. N. S., 1950—1951, 2nd edition, Paris, 1955.
[3] Théorie des fonctions de plusieurs variables, Séminaire E. N. S., 1951—1952, Paris, 1952.
[4] Théorie des fonctions automorphes et des espaces analytiques, Séminaire E. N. S., 1953—1954, Paris, 1954.
[5] Variétés analytiques complexes et cohomologie, Centre Belge Rech. Math., Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, 1953, 41—55.
[6] Fonctions automorphes, Séminaire E. N. S., 1957—1958, Paris, 1958.
Картан и Серр (Cartan H., Serre J.-P.)
[1] Un théoréme de finitude concernant les vaiétés analytiques compacts, *C. R.*, **237** (1953), 128—130.
Картан и Шварц (Cartan N., Schwartz L.)
[1] Le théorème d'Atiyah-Singer, Séminaire E. N. S., 1963—1964, Paris, 1964

Кауп (Kaup L.)
[1] Eine Künnethformel für kohärente analytische Garben, Erlangen, Thesis, 1965.
Кервэр (Kervaire M.)
[1] Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **44** (1958), 280—283.
Кнорр (Knorr K.)
[1*] Über den Grauertschen Kohärenzsatz bei eigentlichen holomorphen Abbildungen. II, *Annali della Scuola Normale Supiriore di Pisa*, ser. III, **23** (1966), No. 1, 1—32. [Русский перевод: Теорема Грауэрта о когерентности для собственных голоморфных отображений. I, II, *Математика*, **14** : 6 (1970), 38—63; **15** : 5 (1971), 23—48.]
Кодаира (Kodaira K.)
[1] The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces, *Am. J. Math.*, **73** (1951), 813—875.
(1960), 505—521.
[2] The theorem of Riemann-Roch for adjoint systems on 3-dimensional algebraic varieties, *Ann. Math.*, **456** (1952), 288—342.
[3] On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 865—868. [Русский перевод: О группах когомологий компактных аналитических многообразий с коэффициентами в некоторых аналитических пучках, *Математика*, **2** : 6 (1958), 115—120.]
[4] On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 1268—1273. [Русский перевод: О дифференциально-геометрическом методе в теории аналитических пучков, *Математика*, **2** : 6 (1958), 126—131.]
[5] Some results in the transcendental theory of algebraic varieties, *Ann. Math.*, **59** (1954), 86—134.
[6] On Kähler varieties of restricted type (an intrinstic characterisation of algebraic varieties), *Ann. Math.*, **60** (1954), 28—48.
[7] Characteristic linear systems of complete continuous systems, *Am. J. Math.*, **78** (1956), 716—744.
[8] On compact complex analytic surfaces, I, II, III, *Ann. Math.*, **71** (1960), 111—152; **77** (1963), 563—626; **78** (1963), 1—40.
[9] On stability of compact submanifolds of complex manifolds, *Am. J. Math.*, **85** (1963), 79—94.
[10] On the structure of compact complex analitic surfaces. I, *Am. J. Math.*, **86** (1964), 751—798.
Кодаира и Спенсер (Kodaira K., Spencer D. C.)
[1] On arithmetic genera of algebraic varieties, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 641—649.
[2] Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties, Divisor class groups on algebraic vaireties, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 868—877. [Русский перевод: Группы расслоенных пространств комплексных прямых на компактных келеровых многообразиях, *Математика*, **2** : 6 (1958), 118—121.]
[3] On a theorem of Lefschetz and the lemma of Enriques-Severi-Zariski, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 1273—1278. [Русский перевод: О теореме Лефшеца и лемме Энриквеса — Севери — Зарисского, *Математика*, **2** : 6 (1958), 131—136.]
[4] On the variation of almost complex structure. Algebraic Geometry, Princeton University Press, 1957, 139—150.
[5] On deformations of complex analytic structures. I, II, *Ann. Math.*, **67** (1958), 328—466.
[6] A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces, *Acta Math.*, **100** (1958), 281—294.
[7] On deformations of complex analytic structures. III. Stability theorems for complef structures, *Ann. Math.*, **71** (1960), 43—76.

Коннер и Флойд (Conner P. E., Floyd E. E.)
[1] Гладкие периодические отображения, «Мир», 1969 (1964).
Кундерт (Kundert E.)
[1] Über schnittflachen in speziellen Faserungen und Felder reeller und komplexer Linienelemente, *Ann. Math.*, **54** (1951), 215—246.
Кэлер (Kähler E.)
[1] The dimension of spaces of holomorphic forms, *Am. J. Math.*, **85** (1963), 1—19.
[2] Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik, Abhandl. Math. Seminar Hamburg. Univ., **9** (1932), 173—186.
Ланглендс (Langlands R. P.)
[1] The dimension of spaces of holomorphic forms, *Am. J. Math.*, 85 (1963), 99—125.
Ленг (Lang S.)
[1] Введение в теорию дифференцируемых многообразий, «Мир», 1967 (1962).
Лере (Leray J.)
[1] L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, *J. Math. Pures Appl.*, **29** (1950), 1—139.
[2] L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, *J. Math. Pures Appl.*, **29** (1950), 169—213.
Майер (Mayer K. H.)
[1] Elliptische Differentialoperatoren und Ganzzahligkeitssätze für charakteristiche Zahlen, *Topology*, **4** (1965).
Мальгранж (Malgrange B.)
[1] Faisceaux sur des variétés analytiques réeles, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 231—237.
Манин Ю. И.
[1*] *K*-функтор в алгебраической геометрии, *УМН*, **24** (1969), № 5, 3—86.
Милнор (Milnor J.)
[1] Construction of universal bundles. I, II, *Ann. Math.*, **63** (1963), 272—284, 430—436.
[2] Some consequences of a theorem of Bott, *Ann. Math.*, **68** (1958), 444—449.
[3] On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, *Am. J. Math.*, **82** (1960), 505—521.
[4] A survey of cobordism theory, *Enseignement Mathematique*, 8 (1962), 16—23.
[5] Spin structures on manifolds, *Enseignement Mathematique*, **9** (1963), 198—203.
[6] Microbundles. I, *Topology*, **3** (1964), Suppl., 1, 53—80.
[7] On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and of spin maifolds, *Topology*, **3** (1965), 223—230.
[8] Der Ring der Vektorraumbundel eines topologischen Raumes, Lecture Notes, Bonn, 1959.
[9] Lectures on characteristic classes, Princeton University, 1957. [Русский перевод: Лекции о характеристических классах. I, II, *Математика*, 3:4 (1959), 3—53; **9**:4 (1965), 3—40.]
Морита (Morita K.)
[1] Star-finite coverings and the star-finite property, *Math. Japan.*, **1** (1948), 60—68.
[2] On spaces having the weak topology with respect to closed coverings. II, *Proc. Japan Acad.*, **30** (1954), 711—717.
Накано (Nakano S.)
[1] On complex analytic vector bundles, *J. Math. Soc. Japan*, 7 (1955), 1—12.
[2] Tangential vector bundle and Todd canonical systems of an algebraic variety, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto* (*A*), **29** (1955), 145—149.
[3] An example of deformations of complex analytic bundles, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto* (*A*), **31** (1958), 181—190.

Нарасимхан и Сешадри (Narasimhan M. S., Seshadri C. S.)
[1] Holomorphic vector bundles on a compact Riemann surface, *Math. Ann.*, **155** (1964), 69—80.
[2] Stable bundles and unitary bundles on a compact Riemann surface, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **52** (1964), 207—210.
Нёрлунд (Nörlund N.)
[1] Differenzenrechnung, Berlin, Springer, 1924.
Новиков С. П.
[1] Топологическая инвариантность классов Понтрягина, *ДАН*, **163** (1965), 298—300.
[2*] Гомотопические свойства комплексов Тома, *Матем. сб.*, **57** (1962), 407—442.
Пале (Palais R. S.)
[1] Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе, «Мир», 1970 (1965).
Понтрягин Л. С.
[1] Непрерывные группы, 3-е изд., «Наука», 1973.
[2] Характеристические циклы дифференцируемых многообразий, *Матем. сб.*, **21** (1947), 233—284.
Портьюс (Porteous I. R.)
[1] Blowing up Chern classes, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **56** (1960), 118—124.
Рам (de Rham G.)
[1] Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956 (1954).
Рам и Кодаира (de Rham G., Kodaira K.)
[1] Harmonic integrals, Princeton, 1950.
Робертс (Roberts R. S.)
[1] Bundles of Grassmannians and integrality theorems.
Ротенберг и Стинрод (Rothenberg M., Steenrod N.)
[1] The cohomology of the classifying space of an *H*-space, *Bull. AMS*, **71** (1965), 872—875.
Рохлин В. А.
[1] Новые результаты теории 4-мерных многообразий, *ДАН*, **84** (1952), 221—224.
[2] О характеристических классах Понтрягина, *ДАН*, **113** (1957), 276—279.
Рохлин В. А., Шварц А. С.
[1] Комбинаторная инвариантность классов Понтрягина, *ДАН*, **114** (1957), 480—493.
Рэй и Зингер (Ray D., Singer I. M.)
[1*] *R*-Torsion and the Laplacian on Riemann Manifolds, *Advances in Mathematic*, **7** (1971), 145—210.
Сандерсон и Шварценбергер (Sanderson B. J., Schwarzenberger R. L. E.)
[1] Non-immersion theorems for differentiable manifolds, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **59** (1963), 319—322.
Севери (Severi F.)
[1] La geometrie algebrique Italienne, Colloque de geometrie algebrique, Liege, 1950, 9—55. [Русский перевод: Итальянская алгебраическая геометрия, ее строгость, методы и проблемы, *Математика*, **3**:1 (1959), 111—141.
[2] Il teorema di Riemann — Roch per curve, superficie e varieta, Efgebnisse der Mathematik 17, Springer, 1958.
Сегре (Segre B.)
[1] Dilatazioni e varietà canoniche sulla varieta algebriche, *Ann. di Mat.*, **37** (1954), 139—155.
Селберг (Selberg A.)
[1] Seminars on analytic functions, v. 2, Princeton, 1957, 152—161.
Серр (Serre J.-P.)
[1] Quelques problèémes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonction de plusieures variables, Liege, Georges Thone, Paris, Masson & Cie, 1953, 57—68. [Русский перевод: Некоторые задачи, связанные

с изучением в целом многообразий Штейна, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, 1958, 363—371.]
[2] Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. Math.*, **61** (1955), 197—278. [Русский перевод: Когерентные алгебраические пучки, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, 1958, 372—450.]
[3] Un théorème de dualité, *Comment. Math. Helv.*, **29** (1955), 9—26.
[4] Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, **6** (1956), 1—42.

Сили (Seeley R.)
[1] Integro-differential operators on vector bundles, *Trans. AMS*, **117** (1965), 167—205.

Спенсер (Spencer D. C.)
[1] Cohomology and the Riemann-Roch theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 660—669.
[2] Dirichlet's principle on manifolds, Studies in mathematics and mechanics presented to Richard von Mises, New York, Academic Press, 1954, 127—134.

Стинрод (Steenrod N.)
[1] Топология косых произведений, ИЛ, 1953 (1951).

Стинрод и Эйленберг (Steenrod N., Eilenberg S.)
[1] Основания алгебраической топологии, Физматгиз, 1958 (1952).

Стонг (Stong R. E.)
[1] Relations among characteristic numbers, *Topology*, **4** (1965).
[2*] Notes on cobordism theory, Princeton University Press, 1968.

Сэмпсон и Уошницер (Sampson J. H., Washnitzer G.)
[1] A Vietoris mapping theorem for algebraic projective fibre bundles, *Ann. Math.*, **68** (1958), 348—371.
[2] Cohomology of monoidal transformations, *Ann. Math.*, **69** (1959), 605—629.
[3] A Künneth formula for coherent algebraic sheaves, *Illinois J. Math.*, **3** (1959), 389—402.

Тодд (Todd J. A.)
[1] The arithmetical invariants of algebraic loci, *Proc. London Math. Soc.*, **43** (1937), 190—225.
[2] Birational transformations with isolated fundamental points, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **45** (1939), **5** (1938), 117—124.
[3] The geometric invariants of algebraic loci, *Proc. London Math. Scc.*, **45** (1939), 410—434.
[4] Invariant and covariant systems on an algebraic variety, *Proc. London Math. Soc.*, **46** (1940), 199—230.
[5] Birational transformations with a fundamental surface, *Proc. London Math. Soc.*, 47 (1941), 81—100.
[6] Canonical systems on algebraic varieties, *Bol. Soc. Mat. Mexicane*, **2** (1957), 26—44.

Том (Thom R.)
[1] Espaces fibrés en spheres et carrés de Steenrod, *Ann. Sci. École Norm. Super.*, **69** (1952), 109—182.
[2] Quelques propriétés globales des variétés différentiable, *Comment. Math. Helv.*, 28 (1954), 17—86. [Русский перевод: Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, 1958, 293—351.]
[3] Les classes characteristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Symp. Intern. Top. Alg., Universidad de Mexico, 1958, 54—67.

Тюрин А. Н.
[1] Классификация двумерных векторных расслоений над алгебраическими кривыми произвольного рода, *ИАН*, сер. матем., **28** (1964), 21—52.
[2] О классификации векторных расслоений над алгебраической кривой, *ИАН*, сер. матем., **29** (1965), 657—688.

Уолл (Wall C. T. C.)
[1] Determination of the cobordism ring, *Ann. Math.*, **72** (1960), 292—311.
[2] Cobordism exact sequences for differential and combinatorial manifolds, *Ann. Math.*, 77 (1963), 1—15.

Уошницер (Washnitzer G.)
[1] The characteristic classes of an algebraic fiber bundle, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 433—436.
[2] Geometric syzygies, *Am. J. Math.*, **81** (1959), 171—248.

Френкель (Frenkel J.)
[1] Cohomologie non abélienne et espace fibrés, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 135—220.

Хариш-Чандра (Harish-Chandra)
[1] Representations of semi-simple Lie groups. VI. Integrable and square integrable representations, *Am. J. Math.*, **78** (1956), 564—628.

Хелгасон (Helgason S.)
[1] Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, «Мир», 1964 (1962).

Хирцебрух (Hirzebruch F.)
[1] On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 951—956.
[2] Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 110—114.
[3] Der Satz von Rienmann-Roch in Faisceau-theoretischer Formulirung, Proc. Intern. Congress Math. 1954, v. III, 457—473, North Holland Pulishing Co., 1956.
[4] Characteristic numbers of homogeneous domains, Seminars on analytic functions, v. 2, 92—104, Institute for Advanced Study, 1957.
[5] Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch, Symp. Intern. Top. Alg. 1956, 129—144, Universidad de Mexico, 1958.
[6] Komplexe Manningfaltigkeiten, Proc. Intern. Congress Math. 1958, 119—136, Cambridge University Press, 1960.
[7] Elliptische Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten, Festchrift zur Gedächtnisfeier fur Karl Weierstrass, Westdeutscher Verlag, 1966, 583—608.
[8] A Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds, Séminaire Bourbaki, **11** (1958/59).
[9*] The Signature Theorem: Reminiscences and Recreation, Prospects in Mathematics, Annals of Mathematics Studies, 70, Princeton University Press, 1971.

Хирцебрух, Брискорн, Ламотке и Майер (Hirzebruch F., Brieskorn E., Lamotke K., Mayer K. H.)
[1] Seminar, Bonn. 1963.

Хирцебрух и Кодаира (Hirzebruch F., Kodaira K.)
[1] On the complex projective spaces, *J. Math. Pure Appl.*, 36 (1957), 201—216.

Ходж (Hodge W. V. D.)
[1] The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge University Press, 1941 (2nd edition 1952.)
[2] A special type of Kähler manifold, *Proc. London Math. Soc.*, **1** (1951), 104—117.
[3] The characteristic classes of algebraic varieties, *Proc. London Math. Soc.*, **1** (1951), 138—151.
[4] The topological invariants of algebraic varieties, Proc. Intern. Congress Math. 1950, v. 1, 182—191, AMS, 1952.

Ходж и Атья (Hodge W. V. D., Atiyah M. F.)
[1] Integrals of the second kind on an algebraic variety, *Ann. Math.*, **62** (1955), 56—91.

Хольман (Holmann H.)
[1] Vorlesung über Faserbündel, Münster, Aschendorf, 1962.
[2] Seifertsche Faserräume, *Math. Ann.*, **157** (1964), 138—166.

Хоррокс (Horrocks G.)
[1] Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, *Proc. London Math. Soc.*, **14** (1964), 689—713.

[2] On extending vector bundles over projective space, *Quart. J. Math. Oxford*, 17 (1966), 14—18.

Цаппа (Zappa G.)

[1] Sopra una probabile diseguaglinza tra i caratteri invariantivi di una superficie algebrica, *Rend. Mat. e Appl.*, **14** (1955), 455—464.

Чжень (Chern S. S.)

[1] Characteristic classes of Hermitian manifolds, *Ann. Math.*, **47** (1946), 85—121.

[2] On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties, *Am. J. Math.*, 75 (1953), 565—597.

Чжень, Хирцебрух и Серр (Chern S. S., Hirzebruch F., Serre J.-P.)

[1] On the index of a fibered manifold, *Proc. AMS*, 8 (1957), 587—596.

Чжоу (Chow W. L.)

[1] On compact complex analytic varieties, *Am. J. Math.*, **71** (1949), 893—914.

Шевалле (Chevalley C.)

[1] Теория групп Ли, ИЛ, т. 3, 1958 (1955).

Ши (Shih W.)

[1*] Fiber cobordism and the index of a family of elliptic differential operators, *Bull. Am. Math. Soc.*, **72** (1966), 984—991.

Экман (Eckmann B.)

[1] Quelques propriétés globales des variétés kähleriennes, *C. R.*, **229** (1949), 577—579.

Экман и Гуггенхаймер (Eclmann B., Guggenheimer H.)

[1] Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion. I, II, *C. R.*, **229** (1949), 464—466, 489—491.

[2] Sur les variétés closes à métrique hermitienne sans torsion, *C. R.*, **229** (1949), 503—505.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ