DALE HUSEMOLLER
Department of Mathematics, Haverford College

FIBRE BUNDLES

McGraw-Hill Book Company

New York St. Louis San Francisco Toronto London Sydney

1966

Д. ХЬЮЗМОЛЛЕР

РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Перевод с английского
В. А. ИСКОВСКИХ

Под редакцией
М. М. ПОСТНИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва 1970

УДК 519.4

Автор сделал удачную попытку изложить основные положения K-теории в монографической форме. Первая часть книги покрывает материал известной книги Стинрода „Топология косых произведений“ (ИЛ, 1953) в усовершенствованном, модернизированном и упрощенном виде. Эта часть может служить прекрасным введением в теорию расслоений для читателя, обладающего лишь элементарными познаниями в топологии.

Во второй, главной части книги, кроме основ K-теории, изложены теорема периодичности Ботта и теория операций Адамса, рассматриваются проблема инварианта Хопфа и проблема векторных полей на сферах.

Третья часть посвящена общей теории характеристических классов и ее применениям в топологии гладких многообразий.

Книга будет полезна студентам старших курсов университетов, аспирантам и всем математикам, интересующимся топологией и ее приложениями.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
19-69

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория расслоенных пространств и, в частности, теория векторных расслоений, не нуждается в рекомендациях. Ни один математик, который хочет познакомиться с современным состоянием алгебраической топологии и с ее приложениями к другим отделам математики, не может обойти эту теорию. Начальный период развития теории расслоенных пространств отражен в превосходной книге Н. Стинрода „Топология косых произведений", имеющейся в русском переводе. Однако с момента выхода в свет книги Н. Стинрода теория расслоенных пространств значительно обогатилась, и к настоящему времени назрела настоятельная необходимость в новой книге по этой теории. Достаточно сказать, что знаменитая K-теория, столь плодотворно примененная М. Атьей и К. Зингером в теории эллиптических дифференциальных уравнений, появилась на свет много лет спустя после выхода книги Н. Стинрода. Поэтому с таким интересом была встречена книга Д. Хьюзмоллера, впервые после Н. Стинрода предпринявшего попытку изложить теорию расслоенных пространств в виде замкнутой в себе монографии.

Общей теории расслоенных пространств и векторных расслоений посвящена первая часть книги Д. Хьюзмоллера. Этот классический материал изложен в ней в основном с современных позиций и в достаточной мере систематично. Первая часть книги вполне пригодна для самостоятельного изучения и, скажем, для включения в программу кандидатского экзамена. Вторая часть книги („Элементы K-теории") резко распадается на две половины. В первой половине (гл. 8, 9, 10 и 14) изложение сохраняет систематичность, хотя и утрачивает полноту (например, опущена теорема периодичности для действительных расслоений и все связанное с истолкованием K-теории как экстраординарной теории когомологий). Указанные главы также доступны для самостоятельного изучения и могут быть с пользой включены в программу кандидатского экзамена.

Этого нельзя сказать об остальных главах (гл. 11, 12, 13 и 15) части II. Две из них (гл. 11 и 15) посвящены проблеме векторных полей на сферах. В гл. 11 излагается классическое построение $\rho(n)-1$ векторных полей на сфере S^n, принадлежащее Радону и Гурвицу (правда, автор этих имен не упоминает). Здесь автор следует недавно появившейся журнальной публикации М. Атьи, Р. Ботта и А. Шапиро о модулях Клиффорда. Изложение в этой главе ведется с излишней (для целей K-теории) общностью и в нем недостаточно подчеркнуты основные идеи. Читатель, пожелавший четко выяснить из этой главы, как же все-таки строятся $\rho(n)-1$ векторных полей на сфере S^n, должен будет проделать довольно большую (хотя и вполне посильную) дополнительную работу. В гл. 15, посвященной вопросу о несуществовании на сфере S^n более чем $\rho(n)-1$ векторных полей, изложение уже настолько эскизно, что восстановить на ее основе полные доказательства для неискушенного читателя попросту невозможно. Единственное, что можно вынести из этой главы, — это общий ход доказательства и более или менее четкое представление об отдельных его этапах. Вместе с тем эта глава, быть может, наиболее интересная во всей книге, поскольку в ней (хотя и в эскизном виде) излагаются многие важнейшие понятия теории векторных расслоений (пространства Тома, послойный гомотопический тип и т. п.).

Главы 12 и 13 в основном посвящены довольно подробному изложению теории комплексных представлений классических групп Ли. Однако о связи между этой теорией и K-теорией в них говорится очень бегло.

Часть III („Характеристические классы“) по объему совершенно не соответствует важности рассматриваемых в ней вопросов. Неудивительно поэтому, что здесь автор также часто весьма краток и далек от систематичности. Для первоначального изучения теории характеристических классов эта часть книги, по-видимому, мало пригодна, хотя более опытный читатель может найти здесь немало интересного.

Затруднения при чтении книги может вызвать также и тот факт, что автор довольно небрежен в обозначениях и терминологии. Одни и те же объекты в разных частях книги часто обозначаются и называются по-разному. В переводе эта особенность книги несколько смягчена, но полностью устранить ее оказалось невозможным.

Оригинал книги содержит довольно много опечаток и ошибок. По возможности они в переводе исправлены. Наиболее серьезные изменения текста оговорены в примечаниях редактора. Кое-где редактор счел необходимым дополнить текст автора. Эти случаи также, как правило, специально оговорены.

Основной текст книги (где автор придерживается систематического способа изложения) по существу не требует от читателя никаких особых предварительных знаний, кроме, быть может, некоторой общетопологической подготовки. Поэтому для начального изучения теории расслоенных пространств эта книга в целом вполне пригодна. Хочется надеяться, что, когда читатель освоит начала теории и приступит к изучению глав, написанных более бегло, красота и изящество теории расслоенных пространств пленят его настолько, что он не пожалеет труда, чтобы полностью разобраться в затронутых в этих главах вопросах либо с помощью журнальной литературы, либо на основе самостоятельных размышлений.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Впервые понятие расслоенного пространства возникло в 1930-х годах в связи с задачами топологии и геометрии многообразий. К 1950 г. это понятие было уже четко сформулировано. Была получена гомотопическая классификация расслоенных пространств и в работах таких математиков, как Чжэнь Шэн-шэнь, Л. С. Понтрягин, Э. Штифель, Х. Уитни и др., развита теория характеристических классов. Результаты этих исследований были подытожены в появившейся в 1950 г. книге Н. Стинрода „Топология косых произведений“.

Примерно около 1955 г. в работах Дж. Милнора появилась конструкция универсального расслоенного пространства для любой топологической группы. Эту конструкцию мы включили в часть I настоящей книги вместе с элементарным доказательством универсальности расслоения.

В течение пяти лет от 1950 до 1955 г. Ф. Хирцебрух прояснил понятие характеристического класса и использовал их ? в доказательстве общей теоремы Римана — Роха для алгебраических многообразий. Эти результаты опубликованы в его монографии, изданной в серии Ergebnisse. Основанное на подходе Ф. Хирцебруха, обновленном А. Гротендиком, систематическое изложение теории характеристических классов и их приложений к многообразиям содержится в части III этой книги.

В начале 1960-х годов в работах А. Гротендика, М. Атьи и Ф. Хирцебруха были заложены основы так называемой K-теории. Эта теория является экстраординарной теорией когомологий, описывающей классы стационарно эквивалентных векторных расслоений, и известная теорема периодичности Ботта очевидным образом интерпретируется как некоторая теорема K-теории. Элементы K-теории изложены в части II этой книги; там же доказано (следуя Атье) несуществование элементов с инвариантом Хопфа, равным единице, и дан набросок решения проблемы векторных полей на сферах (по Дж. Адамсу).

Я хочу горячо поблагодарить С. Эйленберга, который оказывал мне большую поддержку в течение последних лет, и

Дж. Мура, который прочел часть рукописи и сделал много полезных замечаний. Беседы с Дж. Адамсом, Р. Боттом, А. Дольдом и Ф. Хирцебрухом помогли мне улучшить многие части рукописи. В процессе написания этой книги я частично находился под влиянием принстонских заметок Дж. Милнора и лекций Ф. Хирцебруха, прочитанных им в летней школе Американского математического общества в 1963 г.

Д. Хьюзмоллер

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГОМОТОПИЙ

В этой вводной главе рассматриваются некоторые вопросы теории гомотопий, используемые в последующих разделах книги. Более подробное изложение можно найти, например, в книгах Ху Сы-цзяна [1] и Хилтона [1]. В частности, гл. I—V книги Ху Сы-цзяна являются хорошим введением в гомотопическую теорию расслоенных пространств.

1. ГОМОТОПИИ И КАТЕГОРИИ

Гомотопия $f_t\colon X \to Y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — это по определению непрерывное однопараметрическое семейство отображений пространства X в пространство Y. Два отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$ называются *гомотопными*, если существует такая гомотопия $f_t\colon X \to Y$, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Это отношение на множестве всех отображений пространства X в пространство Y является отношением эквивалентности и потому разбивает это множество на *гомотопические классы* отображений $X \to Y$.

На всем протяжении этой книги мы наряду с языком теории множеств будем пользоваться также языком теории категорий. Хорошее изложение теории категорий имеется, например, в статье Маклейна [1].

В дальнейшем мы в основном будем иметь дело с категорией $\mathscr{Tp}$ топологических пространств, морфизмами которой являются непрерывные отображеиия, а композицией морфизмов — обычная композиция отображений, и с ее факторкатегорией $\mathscr{H}$, объектами которой служат те же топологические пространства, а морфизмами — гомотопические классы их отображений (композиция классов определяется естественным образом). Соответствуюшие категории пунктированных пространств (т. е. пространств с отмеченными точками) мы будем обозначать символами $\mathscr{Tp}_0$ и $\mathscr{H}_0$ соответственно.

Следующее понятие часто встречается в теории расслоенных пространств.

1.1. Определение. Пусть X — некоторое множество и Φ — семейство пространств M, являющихся (как множества) подмножествами множества X. Тогда на X можно определить топологию, считая подмножество $U \subset X$ открытым тогда и только тогда, когда для каждого $M \in \Phi$ пересечение $U \cap M$ открыто в M. Эта топология называется *Ф-топологией* множества X. Топология множества X называется *Ф-определённой*, если Φ состоит из подпространств пространства X, и если эта топология совпадает с соответствующей Ф-топологией.

В частности, хаусдорфово пространство X называется *каонным* [1]) пространством, если его топология Ф-определена по отношению к семейству Φ всех его компактных подпространств.

Если пространство X является индуктивным пределом пространств $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, то его топология Ф-определена по отношению к семейству $\Phi = \{M_1, M_2, \ldots\}$.

Важными примерами индуктивных пределов являются пространства

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2 &\subset \ldots \subset \mathbf{R}^n \subset \ldots \subset \mathbf{R}^\infty = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbf{R}^n,\\
\mathbf{C}^1 \subset \mathbf{C}^2 &\subset \ldots \subset \mathbf{C}^n \subset \ldots \subset \mathbf{C}^\infty = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbf{C}^n,\\
S^1 \subset S^2 &\subset \ldots \subset S^n \subset \ldots \subset S^\infty = \bigcup_{n \geqslant 1} S^n,\\
RP^1 \subset RP^2 &\subset \ldots \subset RP^n \subset \ldots \subset RP^\infty = \bigcup_{n \geqslant 1} RP^n,\\
CP^1 \subset CP^2 &\subset \ldots \subset CP^n \subset \ldots \subset CP^\infty = \bigcup_{n \geqslant 1} CP^n,
\end{aligned}$$

где, как обычно, $\mathbf{R}^n$ — действительное n-мерное пространство, $\mathbf{C}^n$ — комплексное n-мерное пространство, S^n — единичная n-мерная сфера, RP^n — действительное проективное пространство прямых в $\mathbf{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат, и CP^n — комплексное проективное пространство комплексных прямых в $\mathbf{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Пространство RP^n можно рассматривать также как факторпространство сферы S^n, полученное отождествлением диаметрально противоположных точек x и $-x$, а пространство CP^n — как факторпространство сферы $S^{2n+1} \subset \mathbf{C}^{n+1}$, полученное отождествлением точек окружностей $ze^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Без труда доказывается, что каждое локально компактное пространство каонно. Пространства S^∞, RP^∞ и CP^∞ также каонны, хотя они и не локально компактны.

2. КЛЕТОЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

В теории расслоенных пространств часто возникает вопрос о продолжении отображения с подпространства на большее пространство. В случае когда рассматриваемые пространства

---

[1]) У автора *k*-space. — *Прим. ред.*

являются клеточными разбиениями (CW-комплексами в терминологии Дж. Г. К. Уайтхеда), а подпространства — их подразбиениями, на этот вопрос можно дать более или менее удовлетворительный ответ (см. Дж. Г. К. Уайтхед [1]).

Нам придется иметь дело и с *относительными клеточными разбиениями*, т. е. с парамн (X, A), где A — такое замкнутое подмножество пространства X, что его дополнение $X \setminus A$ является объединением непересекающихся клеток, каждая из которых приклеивается к пространству A посредством некоторого отображения ее границы. При этом требуется выполнение некоторых условий, аналогичных условию точечной конечности и условию на топологию для обычных клеточных разбиений. В частности, для любого клеточного разбиения X и любого $n \geqslant 0$ пара (X, X^n), где X^n — n-мерный остов разбиения X, является относительным клеточным разбиением. Читатель без труда может перенести все основные результаты Дж. Г. К. Уайтхеда [1] на относительные клеточные разбиения.

Теоремы о продолжении отображенний клеточных разбиений основываются на следующем предложении:

2.1. Предложение. *Пусть (X, A) — относительное клеточное разбиение, имеющее единственную клетку C с характеристическим отображением u_C: $I^n \to X = A \cup C$. Данное отображение f: $A \to Y$ тогда и только тогда продолжается до некоторого отображения g: $X \to Y$, когда отображение fu_C: $\partial I^n \to Y$ гомотопически тривиально (гомотопно отображению в точку).*

Пространство Y называется *связным в размерности n*, если каждое отображение $S^{n-1} \to Y$ гомотопически тривиально, т. е. продолжается до некоторого отображения $B^n \to Y$, где B^n — единичный n-мерный шар. Из предложения 2.1 без труда вытекает

2.2. Теорема. *Пусть (X, A) — произвольное относительное клеточное разбиение, и пусть Y — пространство, связное в каждой размерности, в которой разбиение (X, A) имеет клетки. Тогда всякое отображение $A \to Y$ продолжается до отображения $X \to Y$.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что клеточное разбиение тогда и только тогда *стягиваемо*, т. е. гомотопически эквивалентно точке, когда оно связно в каждой размерности.

Из предложения 2.1 легко вытекает также справедливость для клеточных разбиений теоремы о продолжении гомотопии; см. Хилтон [1], стр. 97.

При изучении векторных расслоений над клеточными разбиениями нам понадобятся некоторые теоремы, в литературе, по-видимому, явно нигде не сформулированные. Мы изложим эти теоремы здесь с полными доказательствами.

Пусть C — произвольная клетка клеточного разбиения X, и пусть $u_C\colon B^n \to X$ — ее характеристическое отображение. Точку $u_C(0)$ условимся называть *центром* клетки C.

2.3. Теорема. *Для любого конечномерного относительного клеточного разбиения (X, A) существует такое открытое подмножество $V \subset X$, содержащее A, что A является его сильным деформационным ретрактом. При этом множество V можно выбрать так, что оно не будет содержать центров клеток из $X \setminus A$, а ретрагирующую гомотопию h_t — так, что для каждого открытого подмножества $U_A \subset A$ будет существовать открытое подмножество $U_X \subset V$, обладающее тем свойством, что $U_X \cap A = U_A$ и $h_t(U_X) \subset U_X$ для всех $t \in I$.*

Доказательство. Будем доказывать эту теорему индукцией по наибольшей размерности клеток из $X \setminus A$. Пусть n — эта размерность. Случай $n = -1$ очевиден. Предполагая, что теорема доказана для размерности $n-1$, рассмотрим относительное клеточное разбиение (X^{n-1}, A), получающееся из разбиения (X, A) удалением всех n-мерных клеток. По предположению индукции существует открытое подмножество V' пространства X^{n-1}, содержащее множество A, не содержащее центров клеток из $X^{n-1} \setminus A$ и ретрагирующееся на A посредством некоторой гомотопии $h'_t\colon V' \to V'$, обладающей тем свойством, что для любого открытого подмножества $U_A \subset A$ найдется открытое подмножество $U' \subset V'$, для которого $U' \cap A = U_A$ и $h'_t(U') \subset U'$ при всех $t \in I$.

Для любой n-мерной клетки C из $X \setminus A$ мы через $u_C\colon B^n \to X$ будем обозначать соответствующее характеристическое отображение, через V'_C — открытое подмножество $u_C^{-1}(V')$ границы ∂B^n шара B^n, через U'_C — его подмножество $u_C^{-1}(U')$ и через M_C — замкнутое подмножество шара B^n, состоящее из всевозможных точек вида ty, где $t \in [0, 1]$ и $y \in \partial B^n \setminus V'_C$. Ясно, что условия

$$V \cap X^{n-1} = V'$$

и

$$u_C^{-1}(V) = B^n \setminus M_C \quad \text{для любой клетки} \quad C$$

однозначно определяют в X некоторое открытое подмножество V, а условия

$$U_X \cap X^{n-1} = U'$$

и

$$u_C^{-1}(U_X) = \{y;\ y \neq 0,\ y/\|y\| \in U'_C\} \text{ для любой клетки } C$$

— некоторое открытое множество $U_X \subset V$ (заметим, что $y \in B^n \setminus M_C$ тогда и только тогда, когда $y \neq 0$ и $y/\|y\| \in V'_C$).

Ретрагирующую гомотопию h_t: $V \to V$ мы определим, положив

$$h_t(u_C(y)) = u_C(2ty/\|y\| + (1-2t)y) \text{ при } y \in B^n,\ t \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right];$$

$$h_t(x) = x \quad \text{при} \quad x \in V',\ t \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right];$$

$$h_t(x) = h'_{2t-1}(h_{1/2}(x)) \text{ при } x \in V',\ t \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].$$ V

Ясно, что эта гомотопия действительио определяет A как сильный деформационный ретракт множества V, причем в силу радиального характера ее построения $h_t(U_X) \subset U_X$. Кроме того, ясно, что $u_C(0) \notin V$ для всех клеток C из $X \setminus A$. Тем самым теорема полностью доказана.

2.4. Замечание. Если множество U_A стягиваемо, то построенное при доказательстве теоремы 2.3 множество U_X также стягиваемо.

2.5. Теорема. *Любое конечное клеточное разбиение X, состоящее из m клеток, может быть покрыто m стягиваемыми открытыми множествами.*

Доказательство. Если $m = 1$, то X является точкой и теорема тривиальна. Пусть теорема уже доказана для всех клеточных разбиений, имеющих меньше m клеток, и пусть X — клеточное разбиение, содержащее точно m клеток. Рассмотрим в X произвольную клетку C максимальной размерности. Тогда X можно представить в виде объединения некоторого подразбиения A, имеющего $m-1$ клеток, и клетки C, приклеенной к нему с помощью отображения u_C. Стягиваемые открытые множества $V'_1, \ldots, V'_{m-1}$, покрывающие по предположению индукции разбиение A, можно на основании теоремы 2.3 и замечания 2.4 распространить до стягиваемых открытых множеств $V_1, \ldots, V_{m-1}$ пространства X, также покрывающих A. Присоединив к ним открытое подмножество $V_m = C$, мы и получим искомую систему стягиваемых открытых множеств $V_1, \ldots, V_m$, покрывающих X.

2.6. Теорема. *Любое n-мерное клеточное разбиение X можно покрыть $n+1$ открытыми множествами $V_0, \ldots, V_n$, каждая компонента линейной связности которых стягиваема.*

Доказательство. При $n=0$ теорема очевидна. Пусть $V'_0, \ldots, V'_{n-1}$ — открытое покрытие $n-1$-мерного остова разбиения X, состоящее из множеств, каждая компонента линейной связности которых стягиваема. Согласно теореме 2.3, подразбиеине X^{n-1} обладает в X открытой окрестностью V, сильным деформационным ретрактом которой оно является. Кроме того, согласно той же теореме, компоненты множества V'_i могут быть распространены до некоторых открытых стягиваемых множеств в V, очевидно, не пересекающихся. Объединение этих множеств мы обозначим через V_i, $i=0, \ldots, n-1$. В качестве V_n возьмем объединение открытых n-мерных клеток разбиения X. Каждая компонента линейной связности множества V_n является открытой n-мерной клеткой и, следовательно, стягиваема. Таким образом, множества $V_0, \ldots, V_n$ составляют открытое покрытие пространства X с требуемыми свойствами.

3. ПРОСТРАНСТВА Map (X, Y) И Map$_0$ (X, Y)

Множество Map (X, Y) всех отображений пространства X в пространство Y может быть снабжено несколькими естественными топологиями. Для наших целей наиболее подходящей является так называемая „компактно-открытая“ топология. Напомним ее определение. Для любых подмножеств $K \subset X$ и $V \subset Y$ обозначим через $\langle K, V\rangle$ подмножество в Map (X, Y), состоящее из всех отображений f, для которых $f(K) \subset V$. *Компактно-открытая топология* на множестве Map (X, Y) по определению порождена всеми подмножествами вида $\langle K, V\rangle$, где K — произвольное компактное подмножество пространства X, а V — произвольное открытое подмножество пространства Y.

Подмножество Map$_0(X, Y)$ пространства Map (X, Y), состоящее из отображений $f \in$ Map (X, Y), переводящих отмеченную точку в отмеченную, снабжается естественной топологией подпространства.

Пространства Map (X, Y) представляют интерес для теории гомотопий благодаря существованию естественного отображения

$$\theta\colon \operatorname{Map}(Z \times X, Y) \to \operatorname{Map}(Z, \operatorname{Map}(X, Y)),$$

которое сопоставляет произвольному отображению $f\colon Z \times X \to Y$ отображение $Z \to$ Map (X, Y), переводящее точку $z \in Z$ в отображение $x \mapsto f(z, x)$. Для хаусдорфовых пространств отображение θ является гомеоморфизмом на его образ. Кроме того, легко доказывается следующее

3.1. Предложение. *Отображение*

$$\theta\colon \operatorname{Map}(Z \times X,\ Y) \to \operatorname{Map}(Z,\ \operatorname{Map}(X,\ Y))$$

тогда и только тогда биективно, когда отображение

$$\sigma\colon \operatorname{Map}(X,\ Y) \times X \to Y,$$

определенное формулой $\sigma(f,\ x) = f(x)$, *непрерывно.*

Отметим, что для локально компактных пространств отображение σ всегда непрерывно. Полагая в этом случае $Z = I$, где I — замкнутый единичный интервал, мы получаем, что каждую гомотопию из X в Y, т. е. отображение $X \times I \to Y$, можно рассматривать как некоторый путь в пространстве $\operatorname{Map}(X,\ Y)$, и, наоборот, каждый такой путь соответствует однозначно определенной гомотопии из X в Y.

Отображение, аналогичное θ, можно определить также и для пространств отображений, сохраняющих отмеченные точки. С этой целью следует рассмотреть так называемое *приведенное произведение*

$$Z \wedge X = (Z \times X)/(Z \vee X)$$

пространств Z и X, где $Z \vee X$ — объединение пространств X и Z (предполагаемых непересекающимися) с отождествленными отмеченными точками (это объединение иногда называют *букетом* или $\vee$-*произведением* пространств X и Z). Отображение, аналогичное отображению θ, представляет собой отображение

$$\operatorname{Map}_0(Z \wedge X,\ Y) \to \operatorname{Map}_0(Z,\ \operatorname{Map}_0(X,\ Y)).$$

В случае когда пространства X и Z компактны или являются клеточными разбиениями, это отображение гомеоморфно.

Рассматривая единичный интервал $I = [0,\ 1]$ как пространство с отмеченной точкой 0, а окружность S^1 как его фактор-пространство $[0,\ 1]/\{0,\ 1\}$, мы можем определить следующие функторы из $\mathcal{P}\!\mathit{r}_0$ в $\mathcal{P}\!\mathit{r}_0$, имеющие важное значение в теории гомотопий.

3.2. Определение. *Конусом* CX над пространством X называется приведенное произведение $X \wedge I$. *Надстройкой* SX над пространством X называется приведенное произведение $X \wedge S^1$. *Пространством путей* PX пространства X называется пространство $\operatorname{Map}_0(I,\ X)$. *Пространством петель* ΩX пространства X называется пространство $\operatorname{Map}_0(S^1,\ X)$. Всюду здесь X предполагается пространством с отмеченной точкой x_0.

Точками пространств CX и SX являются классы $\langle x, t\rangle$ пар $(x, t) \in X \times I$, причем $\langle x_0, t\rangle = \langle x, 0\rangle$ при всех x и t; для SX, кроме того, $\langle x, 1\rangle = \langle x, 0\rangle$. Точка $\langle x, 0\rangle$ является при этом отмеченной точкой пространств CX и SX. Для каждого отображения $f\colon X \to Y$ формула $Cf(\langle x, t\rangle) = \langle f(x), t\rangle$ определяет некоторое отображение $Cf\colon CX \to CY$ и, аналогично, формула $Sf(\langle x, t\rangle) = \langle f(x), t\rangle$ — некоторое отображение $Sf\colon SX \to SY$. Легко проверить, что тем самым получаются некоторые функторы $C\colon \mathscr{P}\!\mathscr{T}_0 \to \mathscr{P}\!\mathscr{T}_0$ и $S\colon \mathscr{P}\!\mathscr{T}_0 \to \mathscr{P}\!\mathscr{T}_0$. Формула $\omega(x) = \langle x, 1\rangle$ определяет некоторое отображение $\omega\colon X \to CX$, обладающее тем свойством, что $SX = CX/\omega(X)$ (для множеств это равенство очевидно; совпадение топологий вытекает из равенства $S^1 = [0, 1]/\{0, 1\}$).

Пространство путей PX можно рассматривать как подпространство пространства $\mathrm{Map}(I, X)$, состоящее из тех путей $u\colon I \to X$, для которых $u(0) = x_0$. Сопоставив каждому отображению $f\colon X \to Y$ отображение $Pf\colon PX \to PY$, определенное формулой $(Pf)u = fu$, и отображение $\Omega f\colon \Omega X \to \Omega Y$, определенное формулой $(\Omega f)u = fu$, мы получим функторы $P\colon \mathscr{P}\!\mathscr{T}_0 \to \mathscr{P}\!\mathscr{T}_0$ и $\Omega\colon \mathscr{P}\!\mathscr{T}_0 \to \mathscr{P}\!\mathscr{T}_0$. Формула $\pi(u) = u(1)$ определяет некоторое отображение $\pi\colon PX \to X$, обладающее тем свойством, что пространство ΩX совпадает с подпространством $\pi^{-1}(x_0) \subset PX$.

3.3. Предложение. *Отображения ω и π определяют морфизмы функторов*

$$\omega\colon 1_{\mathscr{P}\!\mathscr{T}_0} \to C, \qquad \pi\colon P \to 1_{\mathscr{P}\!\mathscr{T}_0}.$$

Доказательство. Для любого отображения $f\colon X \to Y$ в каждой точке $x \in X$ имеет место равенство $\omega(f(x)) = \langle f(x), 1\rangle = (Cf)\,\omega(x)$. Аналогично $f\pi(u) = fu(1) = \pi((Pf)\,u)$ для каждого пути $u \in PX$.

3.4. Предложение. *Для каждого сохраняющего отмеченные точки отображения $f\colon X \to Y$ следующие условия равносильны:*

(1) *отображение f гомотопно постоянному отображению;*

(2) *существует такое отображение $g\colon CX \to Y$, что $g\omega = f$;*

(3) *существует такое отображение $h\colon X \to PY$, что $\pi h = f$.*

Доказательство. Условие (1) означает, что существует такое отображение $f^*\colon X \times I \to Y$, что $f^*(x, 0) = y_0$, $f^*(x, 1) = f(x)$ и $f^*(x_0, t) = y_0$. Но существование такого отображения равносильно существованию некоторого отображения $g\colon CX \to Y$, обладающего тем свойством, что $g\langle x, 1\rangle = f(x)$. Следовательно, условия (1) и (2) равносильны. С другой стороны, существование отображения f^* равносильно существованию отображения $h\colon X \to PY$, обладающего тем свойством, что $h(x)(1) = f(x)$. Следовательно, условия (1) и (3) также равносильны.

3.5. Предложение. *Пространства CX и PX стягиваемы.*

Доказательство. Определим гомотопию h_s: $CX \to CX$ формулой $h_s(\langle x, t\rangle) = \langle x, st\rangle$. Из этой формулы видно, что h_1 является тождественным отображением, а h_0 — постоянным. Аналогичным образом формула $k_s(u)(t) = u(st)$ определяет стягивающую гомотопию k_s: $PX \to PX$.

Из предложения 3.1 без труда вытекает также следующая

3.6. Теорема. *Пусть $[X, Y]_0$ — множество гомотопических классов отображений пространства X в пространство Y, сохраняющих отмеченные точки. Тогда формула*

$$\alpha[f\langle x, t\rangle] = [(\theta f)(x)(t)]$$

определяет естественное биективное отображение

$$\alpha\colon [SX, Y]_0 \to [X, \Omega Y]_0.$$

4. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВ

Пусть Y — произвольное пунктированное пространство. *Умножением* на пространстве Y называется произвольное отображение φ: $Y \times Y \to Y$. Для каждого пунктированного пространства X отображение φ определяет посредством композиции некоторое отображение φ_X: $[X, Y]_0 \times [X, Y]_0 \to [X, Y]_0$. Если для всех X отображение φ_X задает на множестве $[X, Y]_0$ строение группы, то пара (Y, φ) называется *гомотопически ассоциативным H-пространством*. Примером гомотопически ассоциативного H-пространства является пространство петель ΩY, умножение φ: $\Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$ в котором определено формулой

$$\varphi(u, v)(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ v(2t-1), & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Коумножением на пунктированном пространстве X называется произвольное отображение ψ: $X \to X \vee X$. Для каждого пространства Y коумножение определяет посредством композиции некоторое отображение ψ^Y: $[X, Y]_0 \times [X, Y]_0 \to [X, Y]_0$. Если для всех Y отображение ψ^Y задает на множестве $[X, Y]_0$ строение группы, то пара (X, ψ) называется *гомотопически ассоциативным ко-H-пространством*. Примером гомотопически ассоциативного ко-H-пространства является надстройка SX, коумножение ψ: $SX \to SX \vee SX$ в которой определено формулой

$$\psi(\langle x, t\rangle) = \begin{cases} (\langle x, 2t\rangle, x_0) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ (x_0, \langle x, 2t-1\rangle) & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко доказывается следующее весьма важное

? **4.1. Предложение.** *Пусть (X, ψ) — гомотопически ассоциативное ко-H-пространство и (Y, φ) — гомотопически ассоциативное H-пространство. Тогда отображения ψ^Y и φ_X задают на множестве $[X, Y]_0$ одно и то же строение группы, причем эта группа коммутативна.*

Сфера S^n является, очевидно, надстройкой SS^{n-1} над сферой S^{n-1}. Следовательно, на ней существует естественное строение гомотопически ассоциативного ко-H-пространства.

4.2. Определение. *Гомотопической группой* $\pi_n(X)$, $n \geqslant 1$, пунктированного пространства X называется группа $[S^n, X]_0$, определенная ко-H-пространством S^n.

Соответствие $X \to \pi_n(X)$ является функтором из категории пунктированных пространств $\mathscr{H}_0$ (морфизмами которой являются гомотопические классы отображений, сохраняющих отмеченные точки) в категорию групп.

Следующее предложение полезно для вычисления гомотопических групп пространств S^∞, RP^∞, CP^∞.

4.3. Предложение. *Предположим, что пространство X является таким объединением подпространств $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \ldots \subset X_q \subset X_{q+1} \subset \ldots$, что каждое компактное подмножество $K \subset X$ содержится в некотором подпространстве X_q. Тогда, если для любого целого числа $n \geqslant 1$ существует такое число $q(n)$, что естественное вложение $X_q \to X_k$ индуцирует при $q(n) \leqslant q \leqslant k$ изоморфизм $\pi_n(X_q) \to \pi_n(X_k)$, то вложение $X_q \to X$ индуцирует для всех $q \geqslant q(n)$ изоморфизм $\pi_n(X_q) \to \pi_n(X)$.*

Подробное изложение вопросов, затронутых в этом пункте, имеется в книге Ху Сы-цзяна [1, гл. IV].

5. РАССЛАИВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Говорят, что отображение p: $E \to B$ удовлетворяет относительно пространства W *аксиоме о накрывающей гомотопии*, если для любого отображения g: $W \to E$ и любой гомотопии f_t: $W \to B$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, удовлетворяющей соотношению $pg = f_0$, существует такая гомотопия g_t: $W \to E$, что $g_0 = g$ и $pg_t = f_t$ при всех $t \in I$.

5.1. Определение. Отображение, удовлетворяющее аксиоме о накрывающей гомотопии относительно любых клеточных разбиений, называется *расслаивающим отображением* (в смысле Серра).

Для того чтобы узнать, будет ли отображение расслаивающим, достаточно проверить для него аксиому о накрывающей гомотопии относительно лишь отдельных клеток.

Следующая теорема полезна для построения примеров расслаивающих отображений.

5.2. Теорема. *Если для отображения p: $E \to B$ существует такое открытое покрытие $\{U_i\}$, $i \in \mathcal{I}$, пространства B, что каждое из отображений p: $p^{-1}(U_i) \to U_i$, $i \in \mathcal{I}$, является расслаивающим, то отображение p: $E \to B$ также является расслаивающим.*

Полезное (хотя и простое) свойство расслаивающих отображений указывает следующая

5.3. Теорема. *Пусть p: $E \to B$ — расслаивающее отображение, $F = p^{-1}(b_0)$ — слой над точкой $b_0 \in B$ и $x_0 \in F$ — отмеченная точка. Тогда существует такой естественный гомоморфизм групп ∂: $\pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0)$, что имеет место точная последовательность*

$$\ldots \to \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \to \pi_{n-1}(E, x_0) \to \ldots.$$

Читателю предлагается применить эту теорему к следующим расслаивающим отображениям:

(1) Экспоненциальное отображение p: $\mathbf{R} \to S^1$, определенное формулой $p(t) = \exp 2\pi i t$. Слоем этого отображения является группа целых чисел $\mathbf{Z}$.

(2) Отображение p: $S^n \to RP^n$, сопоставляющее каждой точке $x \in S^n$ прямую, проходящую через начало координат и точку x. Слоем является группа $\mathbf{Z}_2$.

(3) Отображение Хопфа p: $S^{2n+1} \to CP^n$, сопоставляющее каждой точке $x \in S^{2n+1}$ комплексную прямую, проходящую через начало координат и точку x. Слоем является окружность S^1.

Д-во 5.3.: $S^n = SS^{n-1}$. Пусть $\langle f \rangle \in \pi_n(B, b_0)$. Строим $g: S^n \to B$; $g(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & \text{при } 0 \le t \le 1/2 \\ f(x, 2-2t) & \text{при } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$; $\langle g \rangle = \langle b_0 \rangle$, поэтому $\exists\, \varphi: S^n \to E$, $g = p\varphi$.

Тогда $\partial: \langle f \rangle \longmapsto \langle \varphi| \quad \rangle$

ЧАСТЬ I

Общая теория расслоенных пространств

Глава 2

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАССЛОЕНИЯХ

Расслоение — это в сущности произвольное отображение, рассматриваемое как объект некоторой специальной категории. На понятии расслоения основываются более сложные понятия векторного расслоения и расслоения со структурной группой. В этой главе излагаются общие свойства расслоений, являющиеся фундаментом более углубленного их изучения в следующих двух главах. Понятие расслоения и различные его обогащения подробно иллюстрируются здесь на примерах.

1. РАССЛОЕНИЯ И ИХ СЕЧЕНИЯ

1.1. Определение. *Расслоением* называется тройка (E, p, B), где $p\colon E \to B$ — произвольное отображение. При этом пространство B называется *базой расслоения*, пространство E — *пространством расслоения*, а отображение p — *проекцией расслоения*. Для каждой точки $b \in B$ пространство $p^{-1}(b)$ называется *слоем расслоения над точкой* b.

Интуитивно расслоение можно представлять как объединение слоев $p^{-1}(b)$, $b \in B$, параметризованных базой B и „склеенных“ топологией пространства E. Для обозначения расслоений обычно используются греческие буквы (ξ, η, ζ, λ, μ и т. п.), при этом пространство расслоения ξ обозначается через $E(\xi)$, а база — через $B(\xi)$.

1.2. Пример. Расслоение вида $(B \times F, p, B)$, где $B \times F$ — прямое произведение пространств B и F, а p — проекция на первый множитель, называется *расслоением-произведением* с базой B и слоем F.

Другие примеры расслоений будут приведены ниже.

1.3. Определение. Расслоение (E', p', B') называется *подрасслоением* расслоения (E, p, B), если пространство E' является подпространством пространства E, пространство B' — подпространством пространства B и $p' = p \mid E'$: $E' \to B'$.

Многие из расслоений, рассматриваемых в следующем разделе, строятся как подрасслоения расслоений-произведений. Прежде чем переходить к их рассмотрению, уместно ввести общее понятие „сечения". Сечения многих расслоений могут быть отождествлены с хорошо известными геометрическими объектами.

1.4. Определение. *Сечением* расслоения (E, p, B) называется произвольное отображение s: $B \to E$, для которого $ps = 1_B$. Другими словами, сечение — это такое отображение s: $B \to E$, что $s(b) \in p^{-1}(b)$ для каждой точки $b \in B$.

Пусть (E', p', B) — подрасслоение расслоения (E, p, B). Сечение s расслоения (E, p, B) тогда и только тогда является сечением расслоения (E', p', B), когда $s(b) \in E'$ для каждой точки $b \in B$.

1.5. Предложение. *Всякое сечение расслоения-произведения $(B \times F, p, B)$ имеет вид $s(b) = (b, f(b))$, где f: $B \to F$ — некоторое отображение, однозначно определенное сечением s.*

Доказательство. Любое отображение s: $B \to B \times F$ имеет вид $s(b) = (s'(b), f(b))$, где s': $B \to B$ и f: $B \to F$ — отображения, однозначно определенные отображением s. При этом $ps(b) = s'(b)$. Следовательно, s тогда и только тогда является сечением, когда $s(b) = (b, f(b))$ для каждой точки $b \in B$.

Это предложение утверждает, что соответствие, которое каждому сечению s расслоения $(B \times F, p, B)$ сопоставляет отображение $\mathrm{pr}_2 \circ s$: $B \to F$, является биективным отображением множества всех сечений на множество отображений $B \to F$.

Любое сечение s произвольного подрасслоения (E, p, B) расслоения-произведения $(B \times F, p, B)$ имеет вид $s(b) = (b, f(b))$, где f: $B \to F$ — такое отображение, что $(b, f(b)) \in E$ для каждой точки $b \in B$.

2. ПРИМЕРЫ РАССЛОЕНИЙ И СЕЧЕНИЙ

Пусть $(x \mid y)$ — евклидово скалярное произведение на пространстве $\mathbf{R}^n$ и

$$\| x \| = \sqrt{(x \mid x)}$$

— евклидова норма вектора x.

2.1. Пример. *Касательное* и *нормальное расслоения* $\tau(S^n) = (T, p, S^n)$ и $\nu(S^n) = (N, q, S^n)$ *над сферой* S^n являются по определению подрасслоениями расслоения-произведения $(S^n \times \mathbf{R}^{n+1}, p, S^n)$. Пространство T касательного расслоения состоит из всех точек $(b, x) \in S^n \times \mathbf{R}^{n+1}$, для которых $(b \mid x) = 0$, а пространство N нормального расслоения — из всех точек $(b, x) \in S^n \times \mathbf{R}^{n+1}$, для которых $x = kb$ при некотором $k \in \mathbf{R}$.

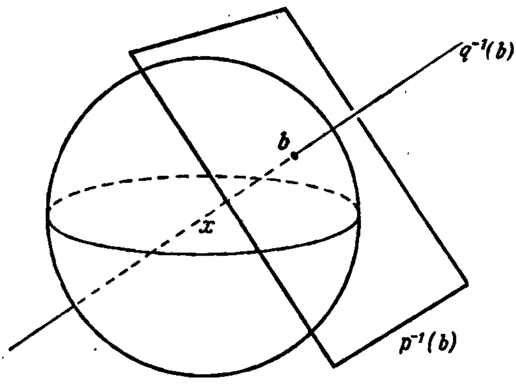

Рис. 1

Точки (b, x) пространства T называются *касательными векторами*, а точки (b, x) пространства N — *нормальными векторами* к сфере S^n в точке b. Слои $p^{-1}(b) \subset T$ и $q^{-1}(b) \subset N$ являются векторными пространствами размерности n и 1 соответственно. Сечения расслоения $\tau(S^n)$ называются *(касательными) векторными полями*, а сечения расслоения $\nu(S^n)$ — *нормальными векторными полями* на сфере S^n.

2.2. Пример. *Расслоение* $\tau_k(S^n) = (E, p, S^n)$ *на (ортонормальные) k-реперы над сферой* S^n, где $k \leqslant n$, является по определению подрасслоением расслоения-произведения $(S^n \times (S^n)^k, p, S^n)$, пространство E которого состоит из всех таких точек $(b, v_1, \ldots, v_k) \in S^n \times (S^n)^k$, что $(b \mid v_i) = 0$ и $(v_i \mid v_j) = \delta_{ij}$.

Точка $(b, v_1, \ldots, v_k)$ представляет собой ортонормальную систему, состоящую из k касательных векторов к сфере S^n в точке $b \in S^n$. Сечения расслоения $\tau_k(S^n)$ называются *полями k-реперов* на сфере S^n. Вопрос о существовании такого рода сечений весьма труден, и мы его рассмотрим в одной из следующих глав. Операция проектирования на первые k множителей показывает, что из существования сечения расслоения $\tau_l(S^n)$, где $k \leqslant l \leqslant n$, следует существование сечения расслоения $\tau_k(S^n)$.

2.3. Определение. Точки $(v_1, \ldots, v_k)$ пространства $(S^{n-1})^k$, для которых $(v_i \mid v_j) = \delta_{ij}$, называются (*ортонормальными*) *k-реперами* пространства $\mathbf{R}^n$. Совокупность всех k-реперов называется *многообразием Штифеля* и обозначается через $V_k(\mathbf{R}^n)$. Являясь замкнутым подмножеством компактного пространства, многообразие $V_k(\mathbf{R}^n)$ компактно. Для каждого репера $(v_1, \ldots, v_k)$ подпространство пространства $\mathbf{R}^n$, натянутое на векторы $v_1, \ldots, v_k$, мы будем обозначать символом $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Ясно, что каждое k-мерное линейное подпространство пространства $\mathbf{R}^n$ имеет вид $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

2.4. Определение. *Многообразием Грассмана* $G_k(\mathbf{R}^n)$ называется совокупность всех k-мерных подпространств пространства $\mathbf{R}^n$, снабженное топологией, определяемой отображением $(v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ многообразия $V_k(\mathbf{R}^n)$ на многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$. Многообразие $G_k(\mathbf{R}^n)$ также является компактным пространством.

Ясно, что $V_1(\mathbf{R}^n) = S^{n-1}$ и $G_1(\mathbf{R}^n) = RP^{n-1}$. Кроме того, для любого n имеет место естественное вложение $G_k(\mathbf{R}^n) \subset G_k(\mathbf{R}^{n+1})$, так что определено пространство $G_k(\mathbf{R}^\infty) = \bigcup_{n \geqslant k} G_k(\mathbf{R}^n)$ (снабженное топологией индуктивного предела).

2.5. Пример. *Каноническое векторное расслоение* γ_k^n *над многообразием* $G_k(\mathbf{R}^n)$ является по определению подрасслоением расслоения-произведения $(G_k(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n,\ p,\ G_k(\mathbf{R}^n))$, пространство $E(\gamma_k^n)$ которого состоит из всевозможных пар $(V, x) \in G_k(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n$ с $x \in V$. *Ортогональным дополнением* ${}^*\gamma_k^n$ расслоения γ_k^n называется подрасслоение расслоения $(G_k(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n,\ p,\ G_k(\mathbf{R}^n))$, пространство которого состоит из всевозможных пар (V, x), для которых $(V \mid x) = 0$, т. е. для которых вектор x ортогонален подпространству V. О расслоениях γ_k^n можно говорить также и при $n = \infty$. Расслоение ${}^*\gamma_k^n$ при $n = \infty$ не определено. Расслоения γ_k^n играют центральную роль в теории векторных расслоений.

В частном случае $k = 1$ каноническое векторное расслоение γ_1^n над многообразием $RP^{n-1} = G_1(\mathbf{R}^n)$ называется *каноническим линейным расслоением*.

2.6. Пример. Легко видеть, что касательное расслоение $\tau(RP^n)$ получается из касательного расслоения $\tau(S^n)$ некоторым отождествлением. Каждая точка пространства RP^n отождествляется при этом с парой $\pm b = \{b, -b\}$ диаметрально противоположных точек сферы S^n, а каждая точка пространства $E(\tau(RP^n))$ — с парой $\pm(b, x) = \{(b, x), (-b, -x)\}$, $(b, x) \in E(\tau(S^n))$. Проекция p определяется формулой

$$p(\pm(b, x)) = \pm b.$$

3. МОРФИЗМЫ РАССЛОЕНИЙ

Морфизм расслоений — это, грубо говоря, отображение, сохраняющее слои.

3.1. Определение. Пусть (E, p, B) и (E', p', B') — два расслоения. *Морфизмом* расслоения (E, p, B) в расслоение (E', p', B') называется пара (u, f) таких отображений $u\colon E \to E'$ и $f\colon B \to B'$, что $p'u = fp$.

Условие $p'u = fp$ означает, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

а также что для каждой точки $b \in B$ имеет место включение $u(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(f(b))$. Таким образом, u переводит слой над точкой $b \in B$ в слой над точкой $f(b) \in B'$. Заметим, что если сюр проекция p надъективна, то отображение f однозначно определяется отображением u.

3.2. Определение. Пусть (E, p, B) и (E', p', B) — два расслоения над одним и тем же пространством B. Морфизмом $u\colon (E, p, B) \to (E', p', B)$ расслоений *над* B (или B-*морфизмом*) называется такое отображение $u\colon E \to E'$, что $p = p'u$.

Условие $p = p'u$ означает, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

а также что для каждой точки $b \in B$ имеет место включение $u(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(b)$. Таким образом, морфизм u каждый слой переводит в слой.

Морфизмы над B — это морфизмы в смысле определения 3.1, имеющие вид $(u, 1_B)$.

3.3. Примеры. Пусть (E', p', B') — подрасслоение расслоения (E, p, B) и $f\colon B' \to B$, $u\colon E' \to E$ — соответствующие отображения вложения. Тогда $(u, f)\colon (E', p', B') \to (E, p, B)$ является морфизмом расслоений. Всякое сечение расслоения (E, p, B)

представляет собой B-морфизм s: $(B, 1, B) \to (E, p, B)$. Следовательно, каждое общее свойство морфизмов расслоений имеет место и для сечений.

Пара $(1_E, 1_B)$: $(E, p, B) \to (E, p, B)$ является морфизмом расслоений и даже B-морфизмом. Если

$$(u, f)\colon (E, p, B) \to (E', p', B')$$

и

$$(u', f')\colon (E', p', B') \to (E'', p'', B'')$$

— два морфизма расслоений, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{u'} & E'' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p''} \\ B & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B'' \end{array}$$

и потому определен морфизм расслоений $(u'u, f'f)$: $(E, p, B) \to (E'', p'', B'')$. Он называется *композицией* морфизмов (u, f) и (u', f') и обозначается символом $(u', f')(u, f)$.

3.4. Определение. *Категорией расслоений* $\mathcal{B}un$ называется категория, объектами которой являются всевозможные расслоения (E, p, B), а морфизмами — морфизмы расслоений. Композицией морфизмов является определенная выше композиция морфизмов расслоений. Для каждого пространства B подкатегория $\mathcal{B}un_B$ категории $\mathcal{B}un$, объектами которой являются расслоения с базой B, а морфизмами — B-морфизмы, называется *категорией расслоений над* B.

Морфизм расслоений (u, f): $(E, p, B) \to (E', p', B')$ называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм (u', f'): $(E', p', B') \to (E, p, B)$, что $f'f = 1_B$, $ff' = 1_{B'}$, $u'u = 1_E$ и $uu' = 1_{E'}$. Как обычно, два расслоения называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

3.5. Определение. Пространство F называется *слоем* расслоения (E, p, B), если каждый слой $p^{-1}(b)$, $b \in B$, гомеоморфен F. Каждое расслоение (E, p, B), изоморфное расслоению-произведению $(B \times F, p, B)$, называется *тривиальным расслоением*.

4. ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СУММЫ УИТНИ

4.1. Определение. *Произведением* двух расслоений (E, p, B) и (E', p', B') называется расслоение $(E \times E', p \times p', B \times B')$.

Так же как и для пространств, читатель легко может описать это умножение как функтор $\mathcal{B}un \times \mathcal{B}un \to \mathcal{B}un$. Очевидным образом определяется и произведение произвольного семейства расслоений. Оно является произведением в категории $\mathscr{B}un$ в смысле общей теории категорий.

4.2. Определение. *Суммой Уитни* $\xi_1 \oplus \xi_2$ двух расслоений $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ и $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ над одним и тем же пространством B называется расслоение $(E_1 \oplus E_2, q, B)$, где $E_1 \oplus E_2$ — подпространство прямого произведения $E_1 \times E_2$, состоящее из всевозможных точек $(x, x') \in E_1 \times E_2$, для которых $p_1(x) = p_2(x')$, и где отображение q определено формулой $q(x, x') = p_1(x) = p_2(x')$.

Слоем $q^{-1}(b)$ расслоения $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ над точкой $b \in B$ является произведение $p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b) \subset E_1 \times E_2$.

Операцию построения суммы Уитни легко можно дополнить до некоторого функтора $\oplus$: $\mathscr{B}un_B \times \mathscr{B}un_B \to \mathscr{B}un_B$. Действительно, пусть u_1: $(E_1, p_1, B) \to (E_1', p_1', B)$ и u_2: $(E_2, p_2, B) \to (E_2', p_2', B)$ — произвольные B-морфизмы. Определим B-морфизм $u_1 \oplus u_2$: $(E_1 \oplus E_2, q, B) \to (E_1' \oplus E_2', q', B)$ формулой $(u_1 \oplus u_2)(x_1, x_2) = (u_1(x_1), u_2(x_2))$. Это определение корректно, поскольку $p_1'u_1(x_1) = p_1(x_1) = p_2(x_2) = p_2'u_2(x_2)$. Кроме того, ясно, что $1_{E_1} \oplus 1_{E_2} = 1_{E_1 \oplus E_2}$. Далее для морфизмов u_1, u_2 и любых морфизмов v_1: $(E_1', p_1', B) \to (E_1'', p_1'', B)$ и v_2: $(E_2', p_2', B) \to (E_2'', p_2'', B)$ имеет место соотношение

$$(v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus u_2) = (v_1 u_1) \oplus (v_2 u_2).$$

Следовательно, $\oplus$ является функтором. Этот функтор является произведением в категории $\mathscr{B}un_B$ в смысле общей теории категорий.

Отображение u: $B \times F_1 \times F_2 \to (B \times F_1) \oplus (B \times F_2)$, определенное формулой $u(b, y_1, y_2) = (b, y_1; b, y_2)$, является гомеоморфизмом и задает B-изоморфизм расслоений

$$u: (B \times F_1 \times F_2, q, B) \to (B \times F_1, p_1, B) \oplus (B \times F_2, p_2, B).$$

Отсюда ввиду функториальности операции $\oplus$ немедленно вытекает следующее

4.3. Предложение. *Сумма Уитни $(E_1, p_1, B) \oplus (E_2, p_2, B)$ двух тривиальных расслоений (E_1, p_1, B) и (E_2, p_2, B) также является тривиальным расслоением. Его слоем служит произведение $F_1 \times F_2$ слоев F_1 и F_2 расслоений (E_1, p_1, B) и (E_2, p_2, B).*

Следующее предложение описывает сечения сумм Уитни.

4.4. Предложение. *Всякое сечение s суммы Уитни $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ имеет вид $s(b) = (s_1(b), s_2(b))$, где s_1 и s_2 — некоторые* *сечения расслоений (E_1, p_1, B) и (E_2, p_2, B), однозначно определенные сечением s.*

Доказательство. Сечение s является отображением s: $B \to E_1 \oplus E_2 \subset E_1 \times E_2$ и потому имеет вид $s(b) = (s_1(b), s_2(b))$, где s_1: $B \to E_1$ и s_2: $B \to E_2$ — некоторые отображения. Так как s является сечением, то для каждой точки $b \in B$ имеют место равенства $b = qs(b) = p_1 s_1(b) = p_2 s_2(b)$, показывающие, что отображения s_1 и s_2 являются сечениями.

Рассмотрим в заключение три важных примера сумм Уитни. В этих примерах символом θ^k обозначено расслоение-произведение $(B \times \mathbf{R}^k, p, B)$.

4.5. Пример. Формула $u((V, x), (V, x')) = (V, x + x')$, где $V \in G_k(\mathbf{R}^n)$, $(V, x) \in E(\gamma_k^n)$ и $(V, x') \in E({}^*\gamma_k^n)$ (см. пример 2.5), определяет $G_k(\mathbf{R}^n)$-изоморфизм

$$u\colon \gamma_k^n \oplus {}^*\gamma_k^n \to \theta^n.$$

Для доказательства заметим, что каждый вектор $y \in \mathbf{R}^n$ можно представить в виде $y = x + x'$, где $x \in V$, а вектор x' ортогонален к V, причем это разложение непрерывно зависит от V.

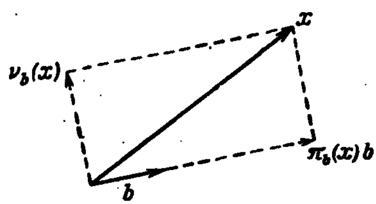

Рис. 2

4.6. В следующих двух примерах используются линейные отображения ν_b: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и π_b: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, определенные для произвольного вектора $b \in \mathbf{R}^n$, $b \neq 0$, формулами $\pi_b(x) = (b \mid x)/(b \mid b)$, $\nu_b(x) = x - \pi_b(x)\, b$, $x \in \mathbf{R}^n$. Ясно, что $(b \mid \nu_b(x)) = 0$ и $x = \nu_b(x) + \pi_b(x)\, x$ (см. рис. 2).

4.7. Пример. Формула $u((b, x), (b, x')) = (b, x + x')$, где $(b, x) \in E(\tau(S^n))$ и $(b, x') \in E(\nu(S^n))$, определяет S^n-изоморфизм

$$u\colon \tau(S^n) \oplus \nu(S^n) \to \theta^{n+1}.$$

Обратный S^n-изоморфизм v определяется формулой $v(b, x) = ((b, \nu_b(x)), (b, \pi_b(x)\, b))$.

Пусть λ — каноническое линейное расслоение над пространством RP^n.

4.8. Пример. Формулы

$$u(\pm b, (a_0, b, \ldots, a_n, b)) = \\ = (\pm (b, \nu_b(a_0, \ldots, a_n)), (\pm b, \pi_b(a_0, \ldots, a_n))),$$

$$v(\pm (b, x), (\pm b, k)) = \\ = (\pm b, (p_0(x+kb), b, \ldots, p_n(x+kb), b))$$

определяют взаимно обратные RP^n-изоморфизмы

$$(n+1)\lambda \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \tau(RP^n) \oplus \theta^1,$$

где

$$(n+1)\lambda = \underbrace{\lambda \oplus \ldots \oplus \lambda}_{n+1 \text{ раз}}.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться разложениями $a = \nu_b(a) + \pi_b(a) b$, $-a = \nu_b(-a) + \pi_b(-a) b$ и учесть, что $-\nu_b(a) = \nu_b(-a) = \nu_{-b}(-a)$ и $\pi_b(a) = \pi_{-b}(-a) = -\pi_{-b}(a)$ (см. п. 2.6 и 4.6).

5. ОГРАНИЧЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ И ИНДУЦИРОВАННЫЕ РАССЛОЕНИЯ

5.1. Определение. *Ограничением* $\xi | A$ расслоения $\xi = (E, p, B)$ на подмножестве A пространства B называется расслоение (E', p', A), где $E' = p^{-1}(A)$ и $p' = p | E'$.

5.2. Примеры. Ограничением канонического расслоения γ_k^{n+m} с базой $G_k(\mathbf{R}^{n+m})$ на многообразии $G_k(\mathbf{R}^n) \subset G_k(\mathbf{R}^{n+m})$ является каноническое расслоение γ_k^n:

$$\gamma_k^{n+m} | G_k(R^n) = \gamma_k^n.$$

Ограничением расслоения-произведения $(B \times F, p, B)$ на подмножестве $A \subset B$ является расслоение-произведение $(A \times F, p, A)$.

Операция ограничения расслоений в следующем смысле транзитивна: если $A_1 \subset A \subset B$, то для любого расслоения ξ над B имеет место равенство $\xi | A_1 = (\xi | A) | A_1$. Кроме того, $\xi | B = \xi$. Для любого B-морфизма $u\colon \xi \to \eta$ и любого $A \subset B$ отображение

$$u_A = u | E(\xi | A)\colon \xi | A \to \eta | A$$

является A-морфизмом. При этом для любых двух B-морфизмов $u\colon \xi \to \eta$ и $v\colon \eta \to \xi$ имеет место соотношение $(vu)_A = v_A u_A$ Кроме того, $(1_\xi)_A = 1_{\xi | A}$. Все это показывает, что *соответствия* $\xi \mapsto \xi | A$ и $u \mapsto u_A$ *определяют некоторый функтор* $\mathcal{B}un_B \to \mathcal{B}un_A$.

Обобщением операции ограничения является операция построения индуцированного расслоения.

5.3. Определение. Расслоением, *индуцированным* отображением $f\colon B_1 \to B$ и расслоением $\xi = (E, p, B)$, называется расслоение (E_1, p_1, B_1), где E_1 — подпространство прямого произведения $B_1 \times E$, состоящее из всевозможных пар $(b_1, x) \in B_1 \times E$, для которых $f(b_1) = p(x)$, а p_1 — отображение, определенное соответствием $(b_1, x) \mapsto b_1$. Индуцированное расслоение обозначается символом $f^*(\xi)$.

5.4. Пример. Для любого расслоения ξ над B и любого подпространства A пространства B расслоение $\xi|A$ изоморфно над A расслоению $j^*(\xi)$, где $j\colon A \to B$ — отображение вложения. Соответствующий A-изоморфизм $u\colon \xi|A \to j^*(\xi)$ определяется формулой $u(x) = (p(x), x)$.

Отображение $f_\xi\colon E(f^*(\xi)) \to E(\xi)$ пространства индуцированного расслоения $f^*(\xi)$ в пространство исходного расслоения ξ, определенное формулой $f_\xi(b_1, x) = x$, составляет вместе с отображением $f\colon B_1 \to B$ некоторый морфизм $(f_\xi, f)\colon f^*(\xi) \to \xi$, обычно называемый *каноническим морфизмом.*

5.5. Предложение. *Канонический морфизм $(f_\xi, f)\colon f^*(\xi) \to \xi$ обладает тем свойством, что для каждой точки $b_1 \in B_1$ ограничение $f_\xi\colon p_1^{-1}(b_1) \to p^{-1}(f(b_1))$ является гомеоморфизмом. Кроме того, для любого морфизма расслоений $(v, f)\colon \eta \to \xi$ существует один и только один B_1-морфизм $w\colon \eta \to f^*(\xi)$, удовлетворяющий соотношению $f_\xi w = v$.*

Доказательство. Слой $p_1^{-1}(b_1) \subset b_1 \times E$ по определению состоит из всех пар (b_1, x), для которых $p(x) = f(b_1)$. Следовательно, отображение $f_\xi\colon p_1^{-1}(b_1) \to p^{-1}(f(b_1))$, определенное формулой $f_\xi(b_1, x) = x$, является гомеоморфизмом.

Для доказательства второго утверждения положим $w(y) = (p_\eta(y), v(y))$. Так как пара (v, f) является морфизмом расслоений, то $f(p_\eta(y)) = p(v(y))$, и, следовательно, отображение $w\colon E(\eta) \to E(f^*(\xi))$ является B_1-морфизмом. Ясно, что $f_\xi w = v$. Единствениость морфизма w вытекает из соотношений $p_1(w(y)) = p_\xi(y)$ и $f_\xi w = v$, которым этот морфизм должен удовлетворять. В самом деле, если для некоторого B_1-морфизма w эти условия выполнены, то обязательно $w(y) = (p_\eta(y), v(y))$ для каждой точки $b \in E(\eta)$.

Для любого B-морфизма $u\colon \xi \to \eta$ и любого отображения $f\colon B_1 \to B$ формула $f^*(u)(b_1, x) = (b_1, u(x))$ определяет, очевидно, некоторый B_1-морфизм $f^*(u)\colon f^*(\xi) \to f^*(\eta)$. Ясно, что $f^*(1_\xi) =$

$= 1_{f^*(\xi)}$. Кроме того, для любых B-морфизмов $u\colon \xi \to \eta$ и $v\colon \eta \to \zeta$ имеет место соотношение

$$f^*(vu)(b_1, x) = (b_1, vu(x)) = f^*(v)(b_1, u(x)) = f^*(v) f^*(u)(b_1, x).$$

Это означает, что справедливо следующее

5.6. Предложение. *Каждое отображение $f\colon B_1 \to B$ определяет некоторый функтор $f^*\colon \mathscr{B}\text{ип}_B \to \mathscr{B}\text{ип}_{B_1}$. Этот функтор обладает тем свойством, что для любого B-морфизма $u\colon \xi \to \eta$ имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
& E(f^*(\eta)) \arrow[rr, "f_\eta"] \arrow[dd] & & E(\eta) \arrow[dd] \\
E(f^*(\xi)) \arrow[ur, "f^*(u)"] \arrow[rr, "f_\xi"] \arrow[dr] & & E(\xi) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr] & \\
& B_1 \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только последнее утверждение. Пусть $(b_1, x) \in E(f^*(\xi))$ — произвольная точка. Непосредственное вычисление показывает, что

$$u(f_\xi(b_1, x)) = u(x) = f_\eta(b_1, u(x)) = f_\eta(f^*(u)(b_1, x)).$$

Следовательно, $uf_\xi = f_\eta f^*$. Коммутативность других квадратов диаграммы непосредственно следует из определений.

Построенный функтор f^* называется *функтором замены базы* (определенным отображением f). Он обладает следующим свойством транзитивности:

5.7. Предложение. *Для любых двух отображений $g\colon B_2 \to B_1$ и $f\colon B_1 \to B$ и любого расслоения ξ над B расслоения $g^*(f^*(\xi))$ и $(fg)^*(\xi)$ изоморфны над B_2. Кроме того, расслоения $1^*(\xi)$ и ξ изоморфны над B.*

Доказательство. B-изоморфизм $u\colon \xi \to 1^*(\xi)$ задается формулой $u(x) = (p(x), x)$, а B_2-изоморфизм $v\colon (fg)^*(\xi) \to g^*(f^*(\xi))$ — формулой $v(b_2, x) = (b_2, (g(b_2), x))$.

5.8. Следствие. *Для любого отображения пар $f\colon (B_1, A_1) \to (B, A)$ и любого расслоения ξ над B расслоения $g^*(\xi|A)$ и $f^*(\xi)|A_1$, где $g = f|A_1\colon A_1 \to A$ — ограничение отображения f на A_1, изоморфны над A_1.*

Доказательство. Пусть $j\colon A \to B$ и $j_1\colon A_1 \to B_1$ — отображения вложения. Тогда $fj_1 = jg$, и потому имеют место A_1-изоморфизмы

$$f^*(\xi)|A_1 \approx j_1^* f^*(\xi) \approx (fj_1)^*(\xi) \approx (jg)^*(\xi) \approx g^*(j^*(\xi)) \approx g^*(\xi|A)$$

(см. пример 5.4 и предложения 5.6 и 5.7).

5.9 Предложение. *Если проекция p расслоения $\xi=(E, p, B)$ является открытым отображением, то для любого отображения f: $B_1 \to B$ проекция p_1 индуцированного расслоения $f^*(\xi) = (E_1, p_1, B_1)$ также является открытым отображением.*

Доказательство. Пусть W — произвольная открытая окрестность точки $(b_1, x) \in E_1 \subset B_1 \times E$. Нам надо найти такую окрестность V точки $b_1 = p_1(b_1, x)$, что $p_1(W) \supset V$. Вспоминая определение топологии на пространстве E_1, мы видим, что существуют такие открытые окрестности V_1 и U точек $b_1 \in B_1$ и $x \in E$ соответственно, что $(V_1 \times U) \cap E_1 \subset W$. Положим $V = V_1 \cap f^{-1}(p(U))$. Тогда для каждой точки $b_1 \in V$ будет существовать такая точка $x \in U$, что $p(x) = f(b_1)$, и, следовательно, $(b_1, x) \in W$ и $b_1 = p_1(b_1, x) \in V$. Таким образом, $p_1(W) \supset V$.

Следующее предложение будет использовано в разд. 7.

5.10. Предложение. *Пусть $\xi = (E, p, B)$ — расслоение, f: $B_1 \to B$ — некоторое отображение и (f_ξ, f): $f^*(\xi) \to \xi$ — канонический морфизм. Тогда для любого сечения s расслоения ξ отображение σ: $B_1 \to E(f^*(\xi))$, определенное формулой $\sigma(b_1) = (b_1, sf(b_1))$, является сечением индуцированного расслоения $f^*(\xi)$ и удовлетворяет соотношению $f_\xi \sigma = sf$. Если отображение f является отображением отождествления, то для любого сечения σ расслоения $f^*(\xi)$, обладающего тем свойством, что для каждого $b \in B$ отображение $f_\xi \sigma$ постоянно на множестве $f^{-1}(b)$, существует такое сечение s расслоения ξ, что $sf = f_\xi \sigma$.*

Доказательство. По условию

$$p_1 \sigma(b_1) = p_1(b_1, sf(b_1)) = b_1 \text{ и } f(b_1) = psf(b_1).$$

Поэтому σ является сечением расслоения $f^*(\xi)$. Кроме того, $f_\xi \sigma(b_1) = f_\xi(b_1, sf(b_1)) = sf(b_1)$. Для доказательства второго утверждения пропустим отображение $f_\xi \sigma$ через f, определив отображение s: $B \to E$ из соотношения $sf = f_\xi \sigma$. Нужно проверить, что s является сечением. Но $psf = pf_\xi \sigma = fp_1 \sigma = f$, и, следовательно, так как отображение f надъективно, то $ps = 1_B$.

6. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАССЛОЕНИЙ

6.1 Определение. Расслоения ξ и η над B называются *локально изоморфными*, если для каждой точки $b \in B$ существует такая открытая окрестность $U \ni b$, что ограничения $\xi|U$ и $\eta|U$ изоморфны над U.

Ясно, что изоморфные расслоения также и локально изоморфны.

6.2. Определение. Расслоение ξ над B называется *локально тривиальным*, если оно локально изоморфно некоторому расслоению-произведению $(B \times F, p, B)$. Пространство F является его *слоем* (в смысле определения 3.5).

О локальных свойствах расслоений имеет смысл говорить благодаря следующему предложению:

6.3. Предложение. *Отношение локальной изоморфности является на классе всех расслоений над B отношением эквивалентности.*

Доказательство. Не совсем тривиальна лишь проверка транзитивности. Пусть U и V — такие открытые окрестности точки $b \in B$, что ограничения $\xi|U$ и $\eta|U$ изоморфны над U, а ограничения $\eta|V$ и $\zeta|V$ изоморфны над V. Тогда на основании предложения 5.7 расслоения

$$\xi|(U \cap V), \quad \eta|(U \cap V) \text{ и } \zeta|(U \cap V)$$

будут изоморфны над $U \cap V$. Следовательно, отношение локальной изоморфности транзитивно.

6.4. Следствие. *Расслоение, локально изоморфное локально тривиальному расслоению, само локально тривиально.*

Свойство расслоений, инвариантное относительно локальных изоморфизмов, т. е. свойство, которым одновременно обладают все локально изоморфные расслоения, называется *локальным*. Например, свойство проекции p быть расслаивающим отображением является, согласно теореме 1.5.2 [1]) локальным.

6.5. Предложение. *Если расслоения ξ и η над B локально изоморфны, то для любого отображения $f: B_1 \to B$ индуцированные расслоения $f^*(\xi)$ и $f^*(\eta)$ над B_1 также локально изоморфны.*

Доказательство. В силу следствия 5.8 для каждого открытого множества $U \subset B$ имеет место изоморфизм $f^*(\xi|U) \approx$ $\approx f^*(\xi)|f^{-1}(U)$. С другой стороны, если расслоения $\xi|U$ и $\eta|U$ изоморфны над U, то расслоения $f^*(\xi)|f^{-1}(U)$ и $f^*(\eta)|f^{-1}(U)$ изоморфны над $f^{-1}(U)$.

---

[1]) Ссылка вида 1.5.2 означает теорему (пункт, пример и т. п.) 5.2 гл. 1.—*Прим. ред.*

6.6. Следствие. *Если расслоения ξ и η локально изоморфны над B, то для любого $A \subset B$ расслоения $\xi | A$ и $\eta | A$ локально изоморфны над A.*

6.7. Следствие. *Пусть ξ — локально тривиальное расслоение над B со слоем F. Тогда для любого отображения $f\colon B_1 \to B$ и любого множества $A \subset B$ расслоения $f^*(\xi)$ и $\xi | A$ также локально тривиальны и имеют слой F.*

7. ПРОДОЛЖЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

В этом разделе теорема продолжения для отображений (см. гл. 1, разд. 2) обобщается на сечения локально тривиальных расслоений. Это обобщение является основным шагом в классификации расслоенных пространств над клеточными разбиениями. Хотя теорема о гомотопической классификации расслоенных пространств имеет место (и будет нами доказана) для расслоений над произвольным пространством, результаты этого раздела полезны при получении более точной информации о гомотопических свойствах расслоенных пространств над клеточными разбиениями.

7.1. Теорема. *Пусть F — топологическое пространство и (B, A) — относительное клеточное разбиение. Предположим, что выполнено одно из следующих предположений:*

(H1). *Для каждого целого $m \leqslant \dim (B \setminus A)$ пространство F связно в размерности m.*

(H2). *Существует такое относительное клеточное разбиение (Y, X), что $B = Y \times I$ и $A = (X \times I) \cup (Y \times 0)$, где, как обычно, $I = [0, 1]$.*

Тогда для произвольного локально тривиального расслоения $\xi = (E, p, B)$ со слоем F каждое сечение s расслоения $\xi | A$ продолжается до некоторого сечения s^* расслоения ξ.

Доказательство. Докажем теорему в предположении (H1) индукцией по наибольшей размерности n клеток из $B \setminus A$. При $n = 0$ теорема тривиальна, поскольку в этом случае $B = A$. Пусть она уже доказана для всех относительных клеточных разбиений (B, A), для которых $\dim (B \setminus A) < n$, и пусть (B, A) — относительное клеточное разбиение с $\dim (B \setminus A) = n$. Рассмотрим относительное клеточное разбиение (B^{n-1}, A), получающееся из разбиения (B, A) удалением всех n-мерных клеток. Поскольку при $\dim (B \setminus A) < n$ теорема справедлива, существует сечение s' расслоения $\xi | B^{n-1}$, продолжающее сечение s расслоения $\xi | A$. Рассмотрим произвольную n-мерную клетку C из $B \setminus A$ и ее характеристическое отображение u_C: $I^n \to B$. Расслоение $u_C^*(\xi)$ над I^n локально тривиально, и потому куб I^n (являющийся компактным пространством) можно разбить на конечное число одинаковых кубиков K, длина ребра которых равна $1/k$ и которые обладают тем свойством, что для каждого из них расслоение $u_C^*(\xi)|K$ тривиально. Согласно предложению 5.10, сечение s' определяет некоторое сечение σ' расслоения $u_C^*(\xi)|\partial I^n$. Применяя предположение индукции к сечению σ', мы можем считать, что оно определено на всем $(n-1)$-мерном остове описанного выше кубильяжа, т. е. определено на границе ∂K каждого элемента K этого кубильяжа. Поскольку расслоение $u_C^*(\xi)|\partial K$ тривиально, сечение σ' над ∂K задается некоторым отображением $\partial K \to F$ (см. предложение 1.5). Но, согласно предположению (H1), это отображение можно продолжить до некоторого отображения $K \to F$. Тем самым сечение σ' также продолжится на K. Сделав это для всех K, мы получим некоторое сечение σ расслоения $u_C^*(\xi)$, продолжающее сечение σ'. Общая конструкция, изложенная в предложении 5.10, позволяет нам теперь „перенести" сечение σ на замыкание $\bar{C}$ клетки C. В результате мы получим сечение s_C расслоения $\xi|\bar{C}$, обладающее тем свойством, что $s_C|(\bar{C} \cap B^{n-1}) = s'|(\bar{C} \cap B^{n-1})$.

Искомое сечение s^* расслоения ξ определяется теперь формулами

$$s^*|B^{n-1} = s' \quad \text{и} \quad s^*|\bar{C} = s_C,$$

где C — произвольная n-мерная клетка из $B \setminus A$. В силу известных свойств слабой топологии отображение s^* непрерывно. Тем самым при $\dim(B \setminus A) < \infty$ теорема доказана.

Пусть теперь $\dim(B \setminus A) = \infty$. По уже доказанному мы можем для каждого n построить такое сечение s_n расслоения $\xi|B^n$, продолжающее сечение s, что $s_n|B^n = s_{n-1}$. Сечение s^* расслоения ξ определяется теперь формулой $s^*|B^n = s_n$.

Докажем теперь теорему в предположении (H2). Снова проведем индукцию по размерности $n = \dim(Y \setminus X)$. При $n = 0$ теорема тривиальна, поскольку в этом случае $Y = X$ и $B = A$. Пусть она справедлива для всех (Y, X), для которых $\dim(Y \setminus X) < n$, и пусть $\dim(Y \setminus X) = n$. Поскольку теорема справедлива при $\dim(Y \setminus X) < n$, существует такое сечение s' расслоения $\xi|((Y \times 0) \cup (Y^{n-1} \times I))$, что $s'|((Y \times 0) \cup (X \times I)) = s$. Пусть C — произвольная n-мерная клетка из $Y \setminus X$ и u_C: $I^n \to Y$ — ее характеристическое отображение. Расслоение $(u_C \times 1_I)^*(\xi)$ над кубом $I^n \times I$ локально тривиально, и потому этот куб можно разбить на конечное число одинаковых кубиков $K \times [(i-1)/k, i/k]$

высоты $1/k$, $1 \leqslant i \leqslant k$, обладающих тем свойством, что над каждым из них расслоение $(u_C \times 1_I)^*(\xi)$ тривиально. Согласно предложению 5.10, сечение s' определяет некоторое сечение σ' расслоения $(u_C \times 1_I)^*(\xi) | ((I^n \times 0) \cup (\partial I^n \times I))$. Применив предположение индукции к сечению σ' и параллелепипеду $I^n \times [0, 1/k]$, мы можем считать, что сечение σ' определено на каждом множестве вида $\partial K \times [0, 1/k]$ и, следовательно, на всем $(n-1)$-мерном остове параллелепипеда $I^n \times [0, 1/k]$. Сечение σ' над множеством $(\partial K \times [0, 1/k]) \cup (K \times 0)$ задается некоторым отображением $(\partial K \times [0, 1/k]) \cup (K \times 0) \to F$ (см. предложение 1.5), которое, очевидно, можно продолжить на весь куб $K \times [0, 1/k]$. Тем самым на этот куб продолжится и сечение σ'. Сделав это для каждого куба $K \times [0, 1/k]$, мы получим некоторое сечение расслоения $(u_C \times 1_I)^*(\xi)$ над параллелепипедом $I^n \times [0, 1/k]$. Повторив эту конструкцию k раз, мы, очевидно, получим некоторое сечение σ расслоения $(u_C \times 1_I)^*(\xi)$, продолжающее сечение σ'. „Спустив" это сечение на замыкание $\bar{C} \times I$ клетки $C \times (0, 1)$ (см. предложенне 5.10), мы получим такое сечение s_C расслоения $\xi | (\bar{C} \times I)$, что $s_C | (\bar{C} \times 0) = s | (\bar{C} \times 0)$ и $s_C | (Y^{n-1} \times I) = s' | (Y^{n-1} \times I)$. Искомое сечение s^* определяется теперь формулами $s^* | (Y^{n-1} \times I) = s'$ и $s^* | (\bar{C} \times I) = s_C$, где C — произвольная n-мерная клетка из $Y \setminus X$. В силу известных свойств слабой топологии отображение s^* непрерывно. Тем самым при $\dim(Y \setminus X) < \infty$ теорема доказана и в этом случае.

Пусть, наконец, $\dim(Y \setminus X) = \infty$. Согласно уже доказанному, для любого $n \geqslant 0$ существует такое сечение s_n расслоения $\xi | (Y^n \times I)$, продолжающее сечение s, что $s_n | (Y^{n-1} \times I) = s | (Y^n \times 0)$. Сечение s^* определяется теперь формулой $s^* | (Y^n \times I) = s_n$. Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание. Обе части теоремы 7.1 доказываются по существу одинаково. Они различаются только способом продолжения сечений над „маленькими" клетками.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что ограничение $\tau(S^{n+q}) | S^n$ расслоения $\tau(S^{n+q})$ на сфере S^n, стандартным образом вложенной в сферу S^{n+q}, изоморфно сумме Уитни $\tau(S^n) \oplus \theta^q$ расслоения $\tau(S^n)$ и тривиального расслоения θ^q со слоем $\mathbf{R}^q$.

2. Докажите изоморфизм $\gamma_k^{n+q} | G_k(\mathbf{R}^n) \approx \gamma_k^n$, где $G_k(\mathbf{R}^n)$ вложено в $G_k(\mathbf{R}^{n+q})$ естественным образом. Пусть $G_k(\mathbf{R}^n)$ вложено в $G_{k+q}(\mathbf{R}^{n+q})$ с помощью отображения $V \mapsto V \oplus W$, где

W — подпространство пространства $\mathbf{R}^{n+q}$, натянутое на векторы $e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}$. Докажите, что

$$\gamma_{k+q}^{n+q} \mid G_k(\mathbf{R}^n) \approx \gamma_k^n \oplus \theta^q.$$

3. Пользуясь тем фактом, что сферу S^{2n-1} можно интерпретировать как множество единичных векторов комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, докажите, что на S^{2n-1} существует векторное поле, состоящее из векторов длины 1. Интерпретируя сферу S^{4n-1} как множество единичных векторов кватернионного пространства $\mathbf{H}^n$, докажите, что на S^{4n-1} существуют три единичных векторных поля, ортогональных в каждой точке.

Указание. Рассмотрите сначала сферы S^1 и S^3.

4. Докажите, что если на сфере S^n существует векторное поле, отличное от нуля в каждой точке, то антиподальное отображение $x \longmapsto -x$ сферы S^n на себя гомотопно тождественному.

5. Пусть $\xi = (E, p, B)$ — локально тривиальное расслоение со слоем F над пространством $B = B_1 \cup B_2$, где $B_1 = A \times [a, c]$ и $B_2 = A \times [c, b]$. Докажите, что если расслоения $\xi \mid B_1$ и $\xi \mid B_2$ тривиальны, то расслоение ξ также тривиально.

Глава 3

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Векторное расслоение — это расслоение, каждый слой которого снабжен строением векторного пространства. Это понятие возникло в теории касательных векторных полей на гладких геометрических объектах, таких, как сферы, проективные пространства или, более общо, гладкие многообразия. Строение векторного расслоения настолько богато, что множество классов изоморфных k-мерных векторных расслоений над паракомпактным пространством B находится в естественном биективном соответствии с множеством классов гомотопных отображений пространства B в многообразие Грассмана k-мерных подпространств бесконечномерного пространства.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть F — либо поле действительных чисел $\mathbf{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbf{C}$, либо тело кватернионов $\mathbf{H}$.

1.1. Определение. Расслоение $\xi=(E, p, B)$ называется *k-мерным векторным расслоением*, если каждый его слой $p^{-1}(b)$ снабжен строением k-мерного векторного пространства над F и выполнено следующее условие локальной тривиальности: для каждой точки пространства B существует такая ее открытая окрестность U и такой U-изоморфизм h: $U\times F^k\to p^{-1}(U)$, что для любой точки $b\in U$ ограничение $b\times F^k\to p^{-1}(b)$ отображения h является изоморфизмом векторных пространств.

При $F=\mathbf{R}$ векторное расслоение ξ называется *действительным*, при $F=\mathbf{C}$ — *комплексным* и, наконец, при $F=\mathbf{H}$ — *кватернионным*.

U-изоморфизм h: $U\times F^k\to p^{-1}(U)$ называется *локальной координатной картой* расслоения ξ.

Рассмотренные в примерах 2.2.1, 2.2.5 и 2.2.7 расслоения являются векторными расслоениями.

1.2. Пример. Расслоение-произведение вида $(B\times F^k, p, B)$ является k-мерным векторным расслоением с естественным строением векторного пространства на каждом слое $b\times F^k=$

$= p^{-1}(b)$, $b \in B$. Условие локальной тривиальности выполнено очевидным образом (например, при $U = B$ и $h = 1$).

1.3. Пример. Касательное расслоение $\tau(S^n)$ над сферой S^n является действительным векторным расслоением. Строение векторного пространства на каждом слое индуцировано строением пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, в которое вложена сфера S^n. Для проверки условия локальной тривиальности положим $U_i = \{x \in S^n,\ x_i \neq 0\}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, и рассмотрим линейные вложения $u_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+1}$, определенные формулами

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Положив $h_i(b, x) = (b, \nu_b(u_i(x)))$ (см. п. 2.4.6), мы, как легко видеть, получим изоморфизмы $h_i\colon U_i \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(U_i) \subset E(\tau(S^n))$, обладающие всеми нужными свойствами.

Ясно, что расслоение $\tau(RP^n)$, получающееся из расслоения $\tau(S^n)$ отождествлением диаметрально противоположных точек базы и соответствующих слоев, также является действительным векторным расслоением.

1.4. Пример. Покажем, что каноническое расслоение $\gamma_k^m = (E, p, G_k(F^m))$ (см. пример 2.2.5) удовлетворяет условию локальной тривиальности. С этой целью рассмотрим отображение $\pi\colon G_k(F^m) \times F^m \to F^m$, сопоставляющее паре (V, x), $V \in G_k(F^m)$, $x \in F^m$, ортогональную проекцию вектора x на подпространство $V \subset F^m$, и для каждого подмножества $H \subset \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, состоящего из k элементов, линейное отображение $u_H\colon F^k \to F^m$, ставящее координаты точки $(x_1, \ldots, x_k)$ на места с номерами из H (в порядке их возрастания), а остальные места заполняющее нулями. Так как E является подпространством прямого произведения $G_k(F^m) \times F^m$, состоящим из пар (V, x), где $x \in V$, то слой над точкой $V \in G_k(F^m)$ имеет вид $\{V\} \times V$ и строение векторного пространства на нем индуцировано строением подпространства $V \subset F^m$. Пусть U_H — открытое подмножество многообразия $G_k(F^m)$, состоящее из точек $V \in G_k(F^m)$, для которых отображение $\pi(V, -)\colon u_H(F^k) \to V$ биективно. Тогда формула $h_H(V, x) = (V, \pi(V, x))$ определяет, очевидно, изоморфизм $h_H\colon U_H \times F^k \to p^{-1}(U_H)$, линейный на каждом слое. Подробности оставляются читателю в качестве упражнения (см. также гл. 7).

Локальная тривиальность векторного расслоения позволяет доказать следующее свойство непрерывности:

1.5. Предложение. *Проекция p произвольного векторного расслоения $\xi = (E, p, B)$ является открытым отображением. Со-*

храняющие слои отображения α: $E \oplus E \to E$ *и* s: $F \times E \to E$, *определенные алгебраическими операциями* (*т. е. формулами* $\alpha(x, x') = x + x'$ *и* $s(k, x) = kx$), *непрерывны.*

Доказательство. Для каждой локальной карты h: $U \times F^k \to p^{-1}(U)$ это предложение, очевидно, справедливо (подразумевается, конечно, что отображение α рассматривается только на $p^{-1}(U) \oplus p^{-1}(U)$, а отображение s — на $F \times p^{-1}(U)$). Поскольку семейство $\{p^{-1}(U)\}$ составляет открытое покрытие пространства E, предложение остается справедливым и для всего расслоения ξ.

Используя это предложение, можно на множестве всех сечений векторного расслоения задать некоторое алгебраическое строение.

1.6. Предложение. *Для любых сечений* s *и* s' *векторного расслоения* $\xi = (E, p, B)$ *и произвольного отображения* φ: $B \to F$ *формулы* $(s + s')(b) = s(b) + s'(b)$ *и* $(\varphi s)(b) = \varphi(b) s(b)$ *определяют некоторые сечения* $s + s'$ *и* φs *расслоения* ξ. *Отображение* 0: $b \mapsto 0 \in p^{-1}(b)$ *также является сечением расслоения* ξ.

Сечение $b \mapsto 0$ называется *нулевым сечением* векторного расслоения.

Доказательство. Пусть h: $U \times F^k \to p^{-1}(U)$ — произвольная локальная карта расслоения ξ. Тогда для любой точки $b \in U$ имеют место равенства $hs^{-1}(b) = (b, f(b))$, $hs'^{-1}(b) = (b, f'(b))$, где f: $U \to F^k$ и f': $U \to F^k$ — некоторые отображения, а потому и равенства $h^{-1}(s + s')(b) = (b, f(b) + f'(b))$, $h^{-1}(\varphi s)(b) = (b, \varphi(b) f(b))$ и $h^{-1}(0)(b) = (b, 0)$. Следовательно, отображения $s + s'$, φs и 0 непрерывны и, значит, являются сечениями.

Предложение 1.6 означает, что множество всех сечений расслоения ξ является модулем над кольцом $C_F(B(\xi))$ всех непрерывных функций на пространстве $B(\xi)$, принимающих значения в поле F.

2. МОРФИЗМЫ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Морфизмы векторных расслоений — это, грубо говоря, сохраняющие слои отображения, линейные на каждом слое.

2.1. Определение. *Морфизмом* векторного расслоения $\xi = (E, p, B)$ в векторное расслоение $\xi' = (E', p', B')$ называется такой морфизм расслоений (u, f): $\xi \to \xi'$, где f: $B \to B'$ и u: $E \to E'$ — некоторые отображения, что ограничение u: $p^{-1}(b) \to$

$\to (p')^{-1}(f(b))$, $b \in B$, отображения u на каждом слое расслоения ξ является линейным отображением этого слоя в соответствующий слой расслоения ξ'.

2.2. Определение. Пусть $\xi = (E, p, B)$ и $\xi' = (E', p', B')$ — векторные расслоения над одним и тем же пространством B. Их морфизмом *над* B (или *B-морфизмом*) называется такое отображение u: $E \to E'$, что пара $(u, 1_B)$ является морфизмом $\xi \to \xi'$. Иными словами, отображение u представляет собой B-морфизм, если $p'u = p$ и для каждой точки $b \in B$ ограничение u: $p^{-1}(b) \to (p')^{-1}(b)$ является линейным отображением.

$B \times F^{k \times m}$

2.3. Пример. Пусть $\xi = (E \times F^k, p, B)$ и $\eta = (E \times F^m, p, B)$ — расслоения-произведения. Тогда каждый B-морфизм расслоения ξ в расслоение η имеет вид $u(b, x) = (b, f(b, x))$, где $f(b, x)$ — произвольное линейное по x отображение $B \times F^k \to F^m$.

Пусть $\mathbf{L}(F^k, F^m)$ — векторное пространство всех линейных отображений из F^k в F^m. В матричном представлении пространство $\mathbf{L}(F^k, F^m)$ изоморфно пространству F^{km}. Отображение f: $B \times F^k \to F^m$ тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывно отображение $B \to \mathbf{L}(F^k, F^m)$, определенное соответствием $b \mapsto f(b, -)$, т. е. если каждый элемент соответствующей матрицы непрерывно зависит от b.

Так же как и для произвольных расслоений (см. п. 2.3.3), композиция морфизмов векторных расслоений является морфизмом векторных расслоеиий, а тождественное отображение является B-морфизмом. Для любых векторных расслоений $\xi = (E, p, B)$, $\xi' = (E', p', B')$ и произвольного отображения f: $B \to B'$ отображение u: $E \to E'$, переводящее каждую точку $x \in E$ в нуль слоя $(p')^{-1}(f(p(x)))$, составляет вместе с отображением f некоторый морфизм (u, f): $\xi \to \xi'$ векторных расслоений.

2.4. Определение. Символом $\mathscr{VB}$ мы будем обозначать *категорию векторных расслоений*, объектами которой являются векторные расслоения, а морфизмами — морфизмы этих расслоений (в смысле определения 2.1).

Аналогично для каждого пространства B мы символом $\mathscr{VB}_B$ будем обозначать подкатегорию категории $\mathscr{VB}$, состоящую из всех векторных расслоений над B и всех их B-морфизмов, а для каждого целого $k \geqslant 0$ символом $\mathscr{VB}^k$ — полную подкатегорию категории $\mathscr{VB}$, порожденную k-мерными векторными расслоениями. Наконец, символом $\mathscr{VB}_B^k$ мы будем обозначать категорию k-мерных векторных расслоений над B, являющуюся пересечением $\mathscr{VB}_B \cap \mathscr{VB}^k$ категорий $\mathscr{VB}_B$ и $\mathscr{VB}^k$.

Морфизм u: $\xi \to \xi'$ векторных расслоений над B называется *изоморфизмом*, если существует такой морфизм v: $\xi' \to \xi$, что $vu = 1_\xi$ и $uv = 1_{\xi'}$.

2.5. Теорема. *Морфизм* u: $\xi \to \xi'$ *векторных расслоений над* B *тогда и только тогда является изоморфизмом, когда для каждой точки* $b \in B$ *ограничение* u: $p^{-1}(b) \to (p')^{-1}(b)$ *является изоморфизмом векторных пространств.*

Доказательство. Необходимость очевидна, потому что отображением, обратным к ограничению u: $p^{-1}(b) \to (p')^{-1}(b)$ морфизма u, является ограничение на слое $(p')^{-1}(b)$ морфизма v: $\xi' \to \xi$, обратного к морфизму u. Для доказательства достаточности определим отображение v: $E(\xi') \to E(\xi)$, считая, что на каждом слое $(p')^{-1}(b)$ оно совпадает с обратным отображением к линейному изоморфизму u: $p^{-1}(b) \to (p')^{-1}(b)$. Чтобы показать, что v является морфизмом, обратным к морфизму u, достаточно проверить, что v непрерывно. Пусть U — такое открытое подмножество пространства B, что существуют локальные координатные карты h: $U \times F^k \to p^{-1}(U)$ и h': $U \times F^k \to (p')^{-1}(U)$ расслоений ξ и ξ' соответственно. Теорема будет доказана, если мы покажем, что для каждого такого подмножества $U \subset B$ отображение v: $(p')^{-1}(U) \to p^{-1}(U)$ непрерывно. Но, согласно сказанному в п. 2.3, отображение $(h')^{-1}uh$ задается соответствием $(b, x) \mapsto (b, f_b(x))$, где $b \mapsto f_b$ — некоторое непрерывное отображение $U \to \mathbf{L}(F^k, F^k)$. Следовательно, отображение $h^{-1}vh'$ задается соответствием $(b, x) \mapsto (b, f_b^{-1}(x))$. Поскольку соответствие $b \mapsto f_b^{-1}$ задает непрерывное отображение $U \to \mathbf{L}(F^k, F^k)$, отображение v: $(p')^{-1}(U) \to p^{-1}(U)$ также непрерывно. Тем самым теорема полностью доказана.

Легко видеть, что в категории $\mathcal{V}\mathcal{B}_B$ существуют произведения. Именно пусть $\xi_1 \oplus \xi_2$ — сумма Уитни векторных расслоений ξ_1 и ξ_2 над B, рассматриваемых как объекты категории $\mathcal{B}un_B$. Каждый слой $q^{-1}(b)$ расслоения $\xi_1 \oplus \xi_2$ является прямой суммой пространств $p_1^{-1}(a)$ и $p_2^{-1}(b)$ и потому сам является векторным пространством. Кроме того, для любых двух локальных карт h_1: $U \times F^n \to p_1^{-1}(U)$ и h_2: $U \times F^m \to p_2^{-1}(U)$ расслоений ξ_1 и ξ_2 (над одним и тем же открытым множеством $U \subset B$) отображение $h_1 \oplus h_2$: $U \times F^{n+m} \to q^{-1}(U)$ будет, очевидно, локальной картой расслоения $\xi_1 \oplus \xi_2$.

2.6. Определение. *Суммой Уитни* векторных расслоений ξ_1 и ξ_2 над пространством B называется их сумма Уитни как объектов категории $\mathcal{B}un_B$, снабженная описанным выше строением векторного расслоения. Эта сумма по-прежнему обозначается символом $\xi_1 \oplus \xi_2$.

3. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Покажем, что результаты разд. 5 гл. 2 также переносятся на категорию векторных расслоений.

3.1. Предложение. *Для любого k-мерного векторного расслоения $\xi = (E, p, B)$ над пространством B и произвольного отображения $f\colon B_1 \to B$ индуцированное расслоение $f^*(\xi) = (E_1, p_1, B_1)$ может быть снабжено таким строением векторного расслоения, что морфизм $(f_\xi, f)\colon f^*(\xi) \to \xi$ будет морфизмом векторных расслоений. Это строение единственно и обладает тем свойством, что для каждой точки $b_1 \in B_1$ ограничение $f_\xi\colon p_1^{-1}(b_1) \to p^{-1}(f(b_1))$ отображения f_ξ является изоморфизмом векторных пространств.*

Доказательство. Слой $p_1^{-1}(b_1)$ расслоения $f^*(\xi)$ над точкой $b_1 \in B_1$ имеет вид $b_1 \times p^{-1}(f(b_1)) \subset E_1 \subset B_1 \times E$. Мы определим сумму двух точек (b_1, x), $(b_1, x') \in p_1^{-1}(b_1)$ формулой $(b_1, x) + (b_1, x') = (b_1, x + x')$ и произведение точки $(b_1, x) \in p_1^{-1}(b_1)$ на элемент $k \in F$ формулой $k(b_1, x) = (b_1, kx)$. Так как $f_\xi(b_1, x) = x$, то ограничение $f_\xi\colon p_1^{-1}(b_1) \to p^{-1}(f(b_1))$ будет тогда линейным изоморфизмом, и это условие однозначно определит строение векторного пространства на каждом слое $p_1^{-1}(b_1)$.

Для завершения доказательства осталось, таким образом, лишь показать, что расслоение $f^*(\xi)$ локально тривиально. Но это очевидно, поскольку для любой локальной координатной карты $h\colon U \times F^k \to p^{-1}(U)$ расслоения ξ отображение $h^1\colon f^{-1}(U) \times F^k \to p_1^{-1}(f^{-1}(U))$, определенное формулой $h^1(b_1, x) = (b_1, h(f(b_1), x))$, является, как легко видеть, локальной координатной картой расслоения $f^*(\xi)$. Тем самым предложение 3.1 полностью доказано.

Согласно предложению 2.2.5, для произвольного морфизма расслоений $(u, f)\colon \eta \to \xi$ существует такой (однозначно определенный) морфизм $v\colon \eta \to f^*(\xi)$, что $u = f_\xi v$. Из формулы $v(y) = (p_\eta(y), u(y))$, определяющей морфизм v, непосредственно вытекает, что в случае, когда морфизм (u, f) является морфизмом векторных расслоений, морфизм v также обладает этим свойством. При этом, согласно теореме 2.5, морфизм v тогда и только тогда является изоморфизмом, когда на каждом слое он индуцирует линейный изоморфизм, что в свою очередь имеет место тогда и только тогда, когда для каждой точки

$b \in B(\eta)$ ограничение u: $p_\eta^{-1}(b) \to p_\xi^{-1}(f(b))$ морфизма u является линейным изоморфизмом. Тем самым доказана следующая

3.2. Теорема. *Пусть ξ и η — произвольные векторные расслоения и f: $B(\eta) \to B(\xi)$ — некоторое отображение. Векторные расслоения η и $f^*(\xi)$ тогда и только тогда $B(\eta)$-изоморфны, когда существует такой морфизм векторных расслоений (u, f): $\eta \to \xi$, что на каждом слое расслоения η отображение u индуцирует линейный изоморфизм.*

Полезно также заметить, что для любого B-морфизма векторных расслоений u: $\xi \to \eta$ и произвольного отображения f: $B_1 \to B$ отображение $f^*(u)$: $f^*(\xi) \to f^*(\eta)$ является B_1-морфизмом векторных расслоений. Действительно, по определению $f^*(u)(b_1, x) = (b_1, u(x))$, и потому из линейности отображения u над точкой $f(b_1)$ вытекает линейность отображения $f^*(u)$ над точкой $b_1 \in B_1$. Это замечание показывает, что отображение f^*: $\mathcal{V}\mathcal{B}_B \to \mathcal{V}\mathcal{B}_B$ является функтором (называемым *функтором замены базы*, определенным отображением f). При этом, как легко видеть, соответствие $f \longmapsto f^*$ также обладает функториальным свойством, т. е. для любого векторного расслоения ξ над B векторные расслоения $1^*(\xi)$ и ξ изоморфны над B и для любых отображений g: $B_2 \to B_1$ и f: $B_1 \to B$ векторные расслоения $g^*(f^*(\xi))$ и $(fg)^*(\xi)$ изоморфны над B.

Само собой разумеется, что все сказанное применимо, в частности, к ограничениям векторного расслоения ξ на подпространствах $A \subset B(\xi)$.

4. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Первая лемма этого раздела является аналогом для векторных расслоений упражнения 5 гл. 2, а вторая лемма — аналогом первого шага в доказательстве второй части теоремы 2.7.1.

4.1. Лемма. *Если для k-мерного векторного расслоения $\xi = (E, p, B)$ над пространством $B = B_1 \cup B_2$, где $B_1 = A \times [a, c]$ и $B_2 = A \times [c, b]$, $a < c < b$, расслоения $\xi | B_1 = (E_1, p_1, B_1)$ и $\xi | B_2 = (E_2, p_2, B_2)$ тривиальны, то тривиально и расслоение ξ.*

Доказательство. По предположению существуют B_i-изоморфизмы вида u_i: $B_i \times F^k \to E_i$, $i = 1, 2$. Пусть v_i, $i = 1, 2$, — их ограничения на $(B_1 \cap B_2) \times F^k$. Тогда отображение $h = v_2^{-1} v_1$ является $A \times \{c\}$-изоморфизмом тривиальных расслоений и, следовательно, для любой точки $(x, y) \in (B_1 \cap B_2) \times F^k$ выражается формулой $h(x, y) = (x, g(x) y)$, где g: $A \to GL(k, F)$ — некоторое отображение. Продолжим h до B_2-изоморфизма w: $B_2 \times F^k \to \to B_2 \times F^k$, полагая $w(x, t, y) = (x, t, g(x)y)$, $x \in A$, $y \in F^k$ и $t \in [c, b]$. Изоморфизмы расслоений u_1: $B_1 \times F^k \to E_1$ и $u_2 w$: $B_2 \times \times F^k \to E_2$ совпадают на пересечении $(B_1 \cap B_2) \times F^k$, являющемся замкнутым множеством. Следовательно, существует такой изоморфизм u: $B \times F^k \to E$, что $u|(B_1 \times F^k) = u_1$ и $u|(B_2 \times F^k) = u_2 w$.

4.2. Лемма. *Для любого векторного расслоения ξ над пространством $B \times I$ существует такое открытое покрытие $\{U_i\}$, $i \in \mathcal{I}$, пространства B, что ограничения $\xi|(U_i \times I)$ являются тривиальными расслоениями.*

Доказательство. Для каждой точки $(b, t) \in B \times I$ существует такая открытая окрестность $U(b)$ точки $b \in B$ и такая открытая окрестность $V(t)$ точки $t \in I$, что ограничение $\xi|(U(b) \times \times V(t))$ является тривиальным расслоением. В силу компактности отрезка $I = [0, 1]$ отсюда следует, что существует такой конечный набор чисел $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ и такие открытые окрестности $U_i(b)$ точки $b \in B$, что расслоения $\xi|(U_i(b) \times [t_{i-1}, t_i])$ тривиальны для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $U = \bigcap U_i(b)$. Применяя $n-1$ раз лемму 4.1, мы видим, что тогда тривиально и расслоение $\xi|(U \times [0, 1])$. Множества U (построенные для всех точек $b \in B$) и составляют требуемое открытое покрытие пространства B.

Изучение гомотопических свойств векторных расслоений в первую очередь основывается на следующей теореме:

4.3. Теорема. *Пусть B — произвольное паракомпактное пространство и r: $B \times I \to B \times I$ — отображение, определенное формулой $r(b, t) = (b, 1)$, $b \in B$, $t \in I$. Тогда для любого k-мерного векторного расслоения $\xi = (E, p, B \times I)$ над пространством $B \times I$ существует такое отображение u: $E \to E$, что пара (u, r) является морфизмом векторных расслоений $\xi \to \xi$, индуцирующим на каждом слое линейный изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$, $i \in \mathcal{I}$, — локально конечное открытое покрытие пространства B, состоящее из таких множеств U_i, что каждое из расслоений $\xi|(U_i \times I)$ тривиально, и пусть h_i: $U_i \times I \times F^k \to p^{-1}(U_i \times I)$ — соответствующие $U_i \times I$-изоморфизмы векторных расслоений. Такое покрытие существует в силу леммы 4.2 и паракомпактности пространства B. Пусть далее $\{\eta_i\}$, $i \in \mathcal{I}$, — огибающая единицы, подчиненная покрытию $\{U_i\}$, $i \in \mathcal{I}$, т. е. такое семейство непрерывных функций η_i, что носитель функции η_i содержится в U_i и $\max\limits_{i \in \mathcal{I}} \eta_i(b) = 1$ в каждой точке $b \in B$.

Пусть r_i: $B \times I \to B \times I$ — отображение, определенное формулой $r_i(b, t) = (b, \max(\eta_i(b), t))$, а u_i: $E \to E$ — отображение, определенное на $p^{-1}(U_i \times I)$ формулой $u_i(h_i(b, t, x)) = h_i(b, \max(\eta_i(b), t), x)$, $(b, t, x) \in U_i \times I \times F^k$, и тождественное вне $p^{-1}(U_i \times I)$. Ясно, что пара (u_i, r_i) является морфизмом расслоения ξ в себя. С другой стороны, каждая точка $b \in B$ обладает по условию окрестностью $U(b)$, пересекающейся лишь с множествами U_i, индексы которых принадлежат некоторому конечному подмножеству $\mathcal{I}(b) = \{i(1), \ldots, i(n)\}$ множества $\mathcal{I}$. Пользуясь этим и считая множество $\mathcal{I}$ упорядоченным, мы определим отображения r и u как бесконечные композиции отображений r_i и u_i соответственно, взятых в порядке убывания индексов. Это определение имеет смысл, поскольку в окрестности каждой точки все эти отображения, кроме конечного числа, являются тождественными отображениями. Другими словами, отображения r и u мы определим, считая, что $r = r_{i(n)} \ldots r_{i(1)}$ на $U(b) \times I$ и $u = u_{i(n)} \ldots u_{i(1)}$ на $p^{-1}(U(b) \times I)$ (элементы множества $\mathcal{I}(b)$ мы предполагаем занумерованными так, чтобы $i(1) < \ldots < i(n)$). Ясно, что таким образом построенные отображения r и u составляют морфизм $\xi \to \xi$. Кроме того, отображение r совпадает с отображением r, указанным в формулировке теоремы, а отображение u, являясь композицией отображений, индуцирующих на каждом слое линейный изоморфизм, также индуцирует на каждом слое линейный изоморфизм. Тем самым теорема полностью доказана.

4.4. Следствие. *В условиях теоремы* 4.3

$$\xi \approx r^*(\xi|(B \times 1)) \text{ над } B \times I.$$

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 4.3 и 3.2.

Для любого векторного расслоения $\xi = (E, p, B)$ и произвольного пространства Y мы будем символом $\xi \times Y$ обозначать расслоение $(E \times Y, p \times 1_Y, B \times Y)$. Расслоение $\xi \times Y$ является векторным расслоением, поскольку его слой над произвольной точкой $(b, y) \in B \times Y$ имеет вид $p^{-1}(b) \times y$ и потому естественным образом является векторным пространством, изоморфным слою $p^{-1}(b)$. Кроме того, для любой локальной карты h: $U \times F^k \to p^{-1}(U)$ расслоения ξ отображение $h \times 1_Y$: $U \times Y \times F^k \to p^{-1}(U) \times Y = (p \times 1_Y)^{-1}(U \times Y)$ является, очевидно, локальной картой расслоения $\xi \times Y$.

4.5. Следствие. *В условиях теоремы* 4.3

$$\xi \approx (\xi|(B \times 1)) \times I \quad \text{над} \quad B \times I.$$

Доказательство. В силу следствия 4.4 достаточно показать, что $r^*(\xi|(B\times 1))=(\xi|(B\times 1))\times I$. Но это очевидно, поскольку пространством каждого из этих расслоений является подпространство пространства $B\times I\times E(\xi|(B\times 1))$, состоящее из точек (b, t, x), для которых $(b, 1)=p(x)$, и проекция обоих расслоений определяется соответствием $(b, t, x)\mapsto(b, t)$.

4.6. Следствие. *В условиях теоремы* 4.3 *морфизм* (u, r) *индуцирует изоморфизм*

$$(u, r)\colon \xi|(B\times 0)\to\xi|(B\times 1).$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2.5, если учесть, что r определяет отождествление $B\times 0= =B\times 1=B$.

Из следствия 4.6 без труда вытекает

4.7. Теорема. *Если пространство B паракомпактно, то для любых гомотопных отображений $f, g\colon B\to B'$ и произвольного векторного расслоения ξ над пространством B' индуцированные расслоения $f^*(\xi)$ и $g^*(\xi)$ изоморфны над B.*

Доказательство. Пусть $h\colon B\times I\to B'$ — такое отображение, что $h(x, 0)=f(x)$ и $h(x, 1)=g(x)$ для любой точки $x\in B$. Тогда $f^*(\xi)\approx h^*(\xi)|(B\times 0)$ и $g^*(\xi)\approx h^*(\xi)|(B\times 1)$ (над $B=B\times 0=B\times 1$). Но, согласно следствию 4.6, $h^*(\xi)|(B\times 0)\approx$ $\approx h^*(\xi)|(B\times 1)$ (над B). Следовательно, $f^*(\xi)\approx g^*(\xi)$ над B.

4.8. Следствие. *Каждое векторное расслоение над стягиваемым паракомпактным пространством тривиально.*

Доказательство. Пусть $f\colon B\to B$ — тождественное, а $g\colon B\to B$ — постоянное отображения. Тогда для любого векторного расслоения ξ над B расслоение $f^*(\xi)$ изоморфно над B расслоению ξ, а расслоение $g^*(\xi)$ изоморфно над B расслоению-произведению $(B\times F^k, p, B)$. Но по условию отображеиия f и g гомотопны. Следовательно, согласно теореме 4.7, расслоения ξ и $(B\times F^k, p, B)$ изоморфны над B.

Теорема 4.7 является первой основной теоремой гомотопической классифнкации векторных расслоений.

5. КОНСТРУКЦИЯ ГАУССОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

5.1. Определение. *Гауссовым отображением* k-мерного векторного расслоения ξ^k в векторное пространство F^m, где $k\leqslant m\leqslant\infty$, называется произвольное отображение $g\colon E(\xi^k)\to F^m$, индуцирующее на каждом слое расслоения ξ^k линейный мономорфизм.

Для канонического векторного расслоения γ_k^m (см. п. 2.2.5) пространство $E(\gamma_k^m)$ является по определению подпространством прямого произведения $G_k(F^m) \times F^m$, состоящим из всевозможных пар (V, x) с $x \in V$. Ясно, что отображение q: $E(\gamma_k^m) \to F^m$, определенное соответствием $(V, x) \mapsto x$, является в этом случае гауссовым отображением. Оно называется *каноническим гауссовым отображением*. Оказывается, что для любого расслоения ξ^k каждое гауссово отображение является композицией канонического гауссова отображения и некоторого морфизма векторных расслоений.

5.2. Предложение. *Для любого векторного расслоения ξ^k и произвольного его гауссова отображения g: $E(\xi^k) \to F^m$ существует такой морфизм векторных расслоений (u, f): $\xi^k \to \gamma_k^m$, индуцирующий на каждом слое линейный изоморфизм, что $qu = g$. Обратно, для любого морфизма векторных расслоений (u, f): $\xi^k \to \gamma_k^m$, индуцирующего на каждом слое линейный изоморфизм, отображение qu: $E(\xi^k) \to F^m$ является гауссовым.*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Для доказательства первого определим отображение f: $B(\xi^k) \to G_k(F^m)$ формулой $f(b) = g(p^{-1}(b)) \in G_k(F^m)$, $b \in B(\xi^k)$, а отображение u: $E(\xi^k) \to E(\gamma_k^m)$ — формулой $u(x) = (f(p(x)), g(x)) \in E(\gamma_k^m)$, $x \in E(\xi^k)$.

Ясно, что $qu = g$ и что на каждом слое отображение u изоморфно. Поэтому для завершения доказательства достаточно лишь показать, что отображения u и f непрерывны. Рассмотрев произвольную локальную карту расслоения ξ^k, мы немедленно убеждаемся в непрерывности отображения f. Но тогда отображение u также, очевидно, непрерывно.

5.3. Следствие. *Гауссово отображение g: $E(\xi) \to F^m$ существует тогда и только тогда, когда существует такое отображение f: $B(\xi) \to G_k(F^m)$, что расслоения ξ и $f^*(\gamma_k^m)$ изоморфны над $B(\xi)$.*

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 5.2 и теоремы 3.2.

Наша цель состоит в том, чтобы построить гауссово отображение для каждого векторного расслоения над произвольным паракомпактным пространством. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное

5.4. Предложение. *Для любого векторного расслоения ξ над паракомпактным пространством B существует такое счетное открытое покрытие $\{W_j\}$, $j \geqslant 1$, пространства B, что каждое расслоение $\xi \mid W_j$ тривиально. Более того, если пространство B обладает таким открытым покрытием $\{U_i\}$, $i \in \mathcal{I}$, что каждое расслоение $\xi \mid U_i$ тривиально и любая точка $b \in B$ принадлежит не более чем n множествам U_i, то существует конечное покрытие $\{W_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, с указанным свойством.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$, $i \in \mathcal{I}$, — такое локально конечное открытое покрытие пространства B, что каждое расслоение $\xi \mid U_i$, $i \in \mathcal{I}$, тривиально, и пусть $\{\eta_i\}$, $i \in \mathcal{I}$, — такое разбиение единицы, что $V_i = \eta_i^{-1}((0, 1]) \subset U_i$ для любого $i \in \mathcal{I}$. Для каждой точки $b \in B$ обозначим символом $S(b)$ конечное подмножество множества $\mathcal{I}$, состоящее из всех индексов $b \in B$, для которых $\eta_i(b) > 0$, и для каждого конечного подмножества $S \subset \mathcal{I}$ символом $W(S)$ открытое подмножество пространства B, состоящее из всех точек $b \in B$, для которых $\eta_i(b) > \eta_j(b)$ при любом $i \in S$ и любом $j \notin S$. Ясно, что $W(S(b)) \subset V_i$ для любого $i \in S(b)$. Следовательно, расслоение $\xi \mid W(S(b))$ тривиально.

С другой стороны, легко видеть, что для любых различных подмножеств S и S' множества $\mathcal{I}$, не содержащихся одно в другом, пересечение $W(S) \cap W(S')$ пусто. Действительно, по условию существует такой индекс $i \in S$, что $i \notin S'$, и такой индекс $j \in S'$, что $j \notin S$. Следовательно, $\eta_i(b) > \eta_j(b)$ для любой точки $b \in W(S)$ и $\eta_j(b) > \eta_i(b)$ для любой точки $b \in W(S')$. Таким образом, никакая точка b не может принадлежать одновременно $W(S)$ и $W(S')$.

Пусть теперь W_m — объединение всех множеств $W(S(b))$, для которых множество $S(b)$ состоит из m элементов. По доказанному такие множества $W(S(b))$ либо совпадают, либо не пересекаются. Кроме того, все расслоения $\xi \mid W(S(b))$ тривиальны. Следовательно, расслоение $\xi \mid W_m$ также тривиально. Для завершения доказательства первого утверждения теоремы остается заметить, что множества W_m, $m \geqslant 1$, составляют, очевидно, открытое покрытие пространства B. Что же касается второго утверждения, то оно немедленно вытекает из того, что в условиях этого утверждения все множества W_m при $m > n$ пусты.

5.5. Теорема. *Для каждого векторного расслоения ξ^k над паракомпактным пространством B существует гауссово отобра-*

жение g: $E(\xi) \to F^\infty$. При этом если пространство B обладает таким конечным открытым покрытием $\{U_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, что все расслоения $\xi | U_i$ тривиальны, то для расслоения ξ существует гауссово отображение g: $E(\xi) \to F^{kn}$.

Доказательство. Согласно предложению 5.4, существует такое счетное или конечное открытое покрытие $\{U_i\}$ пространства B, что все расслоения $\xi | U_i$ тривиальны. Пусть h_i: $U_i \times F^k \to E(\xi | U_i)$ — соответствующие U_i-изоморфизмы, и пусть $\{\eta_i\}$ — такое разбиение единицы, что $\eta_i^{-1}((0, 1]) \subset U_i$ для любого i. Мы определим отображение g_i: $E(\xi) \to F^k$, считая, что на $E(\xi | U_i)$ оно совпадает с отображением $(\eta_i p)(p_2 \eta_i^{-1})$, где p_2: $U \times F^k \to F^k$ — проекция на второй множитель, а вне $E(\xi | U_i)$ равно нулю. Затем мы определим отображение g: $E(\xi) \to \sum_i F^k$ как сумму $g = \sum_i g_i$ всех отображений g_i.

Так как каждое g_i: $E(\xi) \to F^k$ для любой точки $b \in B$, для которой $\eta_i(b) > 0$, индуцирует, очевидно, мономорфное отображение соответствующего слоя и так как образы различных отображений g_i принадлежат дополнительным подпространствам пространства $\sum F^k$, то отображение g гауссово. Вообще говоря, $\sum_i F^k = F^\infty$, но если покрытие $\{U_i\}$ состоит только из n множеств, то $\sum F^k = F^{nk}$.

5.6. Следствие. *Каждое векторное расслоение над паракомпактным пространством B изоморфно над B расслоению вида $f^*(\gamma_k)$, где f: $B \to G_k(F^\infty)$ — некоторое отображение.*

Теорема 5.5 вместе со следствием 5.6 составляет вторую основную теорему гомотопической классификации векторных расслоений.

Следующее понятие подсказано теоремой 5.5.

5.7. Определение. Векторное расслоение ξ над пространством B называется расслоением *конечного типа*, если существует такое открытое конечное покрытие $U_1, \ldots, U_n$ пространства B, что все расслоения $\xi | U_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, тривиальны.

В силу теоремы 12.6 и следствия 4.8 каждое векторное расслоение над конечномерным клеточным разбиением имеет конечный тип. Кроме того, справедливо следующее

5.8. Предложение. *Для любого векторного расслоения ξ над произвольным пространством B следующие условия равносильны:*

(1) *расслоение ξ имеет конечный тип;*

(2) *существует такое целое число m и такое отображение $f: B \to G_k(F^m)$, что расслоение ξ изоморфно над B расслоению $f^*(\gamma_k^m)$;*

(3) *над пространством B существует такое векторное расслоение η, что расслоение $\xi \oplus \eta$ тривиально.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 5.5 вытекает, что из свойства (1) следует свойство (2). Покажем, что из свойства (2) следует свойство (3). Действительно (см. п. 2.4.5), расслоение $\gamma_k^m \oplus {}^*\gamma_k^m$ тривиально над $G_k(F^m)$ и потому расслоение $f^*(\gamma_k^m \oplus {}^*\gamma_k^m) = f^*(\gamma_k^m) \oplus f^*({}^*\gamma_k^m)$ изоморфно над B тривиальному расслоению θ^m. Таким образом, свойство (3) выполнено с $\eta = f^*({}^*\gamma_k^m)$. Для доказательства того, что из свойства (3) следует свойство (2), достаточно заметить, что при $\xi \oplus \eta \approx \theta^m$ составное отображение $E(\xi) \to E(\xi \oplus \eta) \to B \times F^m \to F^m$, очевидно, гауссово. Наконец, тот факт, что из свойства (2) следует свойство (1), очевиден (ибо ясно, что расслоеиие γ_k^m имеет конечный тип).

6. ГОМОТОПИИ ГАУССОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть F^{ev} — подпространство пространства F^∞, состоящее из всех точек $x \in F^\infty$, для которых $x_{2i+1} = 0$, а F^{od} — подпространство пространства F^∞, состоящее из всех точек $x \in F^\infty$, для которых $x_{2i} = 0$, $i \geqslant 0$. Ясно, что $F^\infty = F^{\mathrm{ev}} \oplus F^{\mathrm{od}}$. Пусть $1 \leqslant n \leqslant \infty$. Рассмотрим гомотопии $g^{\mathrm{ev}}: F^n \times I \to F^{2n}$ и $g^{\mathrm{od}}: F^n \times I \to F^{2n}$, определенные формулами

$$g_t^{\mathrm{ev}}(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (1-t)(x_0, x_1, x_2, \ldots) + t(x_0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \ldots),$$
$$g_t^{\mathrm{od}}(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (1-t)(x_0, x_1, x_2, \ldots) + t(0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \ldots).$$

6.1. Предложение. *Гомотопии g_t^{ev} и g_t^{od} обладают следующими свойствами:*

(1) *каждое из отображений g_0^{ev} и g_0^{od} является вложением $F^n \to F^{2n}$;*

(2) $g_1^{\mathrm{ev}}(F^n) = F^{2n} \cap F^{\mathrm{ev}}$ *и* $g_1^{\mathrm{od}}(F^n) = F^{2n} \cap F^{\mathrm{od}}$;

(3) *существуют такие морфизмы векторных расслоений $(u^{\mathrm{ev}}, f^{\mathrm{ev}}): \gamma_k^n \to \gamma_k^{2n}$ и $(u^{\mathrm{od}}, f^{\mathrm{od}}): \gamma_k^n \to \gamma_k^{2n}$, что $qu^{\mathrm{ev}} = g_1^{\mathrm{ev}}$ и $qu^{\mathrm{od}} = g_1^{\mathrm{od}}$;*

(4) *отображения f^{ev} и f^{od} гомотопны естественному вложению $G_k(F^n) \to G_k(F^{2n})$.*

Доказательство. Свойства (1) и (2) немедленно следуют из формул для g_t^{ev} и g_t^{od}. Для доказательства свойства (3) достаточно воспользоваться предложением 5.2. Наконец, предусмотренные свойством (4) гомотопии очевидным образом определяются гомотопиями g_t^{ev} и g_t^{od}.

Следующая теорема описывает произвол в выборе гауссовых отображений векторных расслоений. В ее доказательстве мы пользуемся введенными выше обозначениями.

6.2. Теорема. *Если отображения $f, f_1: B \to G_k(F^n)$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, обладают тем свойством, что расслоения $f^*(\gamma_k^n)$ и $f_1^*(\gamma_k^n)$ изоморфны над B, то отображения jf и jf_1, где $j: G_k(F^n) \to G_k(F^{2n})$ — отображение вложения, гомотопны.*

Доказательство. Тот факт, что расслоения $f^*(\gamma_k^n)$ и $f_1^*(\gamma_k^n)$ изоморфны над B, означает, что существуют векторное расслоение ξ над B н два морфизма $(u, f): \xi \to \gamma_k^n$ н $(u_1, f_1): \xi \to \gamma_k^n$, являющнеся изоморфизмами на каждом слое. Пусть $g = qu: E(\xi) \to F^n$ и $g_1 = qu_1: E(\xi) \to F^n$ — соответствующие этим морфизмам гауссовы отображения. Компонируя их с отображениями g_1^{ev} и g_1^{od}, мы получим гауссовы отображения $g_1^{ev}g: E(\xi) \to F^{ev} \cap F^{2n}$ и $g_1^{od}g_1: E(\xi) \to F^{od} \cap F^{2n}$, отвечающие морфизмам $(u^{ev}u, f^{ev}f): \xi \to \gamma_k^{2n}$ и $(u^{od}u, f^{od}f): \xi \to \gamma_k^{2n}$. Рассмотрим отображение $h: E(\xi) \times I \to F^{2n}$, определенное формулой $h_t(x) = (1-t) \times \times g_1^{ev}g(x) + tg_1^{od}g_1(x)$. Так как на каждом слое $p^{-1}(b) \subset E(\xi)$ отображения $g_1^{ev}g: p^{-1}(b) \to F^{ev}$ и $g_1^{od}g_1: p^{-1}(b) \to F^{od}$ являются мономорфизмами и так как $F^{ev} \cap F^{od} = 0$, то отображение $h_t: p^{-1}(b) \to F^{2n}$ также является линейным мономорфизмом. Это означает, что отображение $h: E(\xi) \times I \to F^{2n}$ гауссово. Пусть $(w, k): \xi \to \gamma_k^{2n}$ — соответствующий морфизм расслоений. Отображение $k: B \times I \to G_k(F^{2n})$ является, очевидно, гомотопией, связывающей отображения $f^{ev}f$ и $f^{od}f_1$. С другой стороны, отображение jf гомотопно отображению $f^{ev}f$, а отображение jf_1 — отображению $f^{od}f_1$ [см. свойство (4) из предложения 6.1]. Следовательно, отображения jf и jf_1 гомотопны.

Теорема 6.2 является третьей основной теоремой гомотопической классификации векторных расслоений.

7. ФУНКТОРИАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть $\mathscr{P}$ — категория паракомпактных пространств с классами гомотопных отображений в качестве морфизмов и $\mathscr{E}ns$ — как обычно, категория множеств, морфизмами которой являются произвольные отображения множеств.

Для любого паракомпактного пространства B мы будем символом $\mathrm{Vect}_k(B)$ обозначать множество классов B-изоморфных k-мерных векторных расслоений над B. Класс в $\mathrm{Vect}_k(B)$ расслоения ξ мы будем обозначать символом $\{\xi\}$. Ясно, что любой класс $[f]\colon B_1 \to B$ гомотопных отображений определяет по формуле $\mathrm{Vect}_k([f])(\{\xi\}) = \{f^*(\xi)\}$ некоторое отображение $\mathrm{Vect}_k([f])\colon \mathrm{Vect}_k(B) \to \mathrm{Vect}_k(B_1)$. Очевидно, что отображение $\mathrm{Vect}_k([f])$ определено корректно (см. теорему 4.7 и конец разд. 3). Таким образом, мы построили некоторое отображение $\mathrm{Vect}_k\colon \mathscr{P} \to \mathscr{E}ns$.

7.1. Предложение. *Отображение* $\mathrm{Vect}_k\colon \mathscr{P} \to \mathscr{E}ns$ *является контравариантным функтором.*

Доказательство. Поскольку расслоения $1^*(\xi)$ и ξ изоморфны над B, отображение $\mathrm{Vect}_k([1])$ тождественно. Кроме того, для любых классов $[f]\colon B_1 \to B$ и $[g]\colon B_2 \to B_1$ гомотопных отображений расслоения $g^*(f^*(\xi))$ и $(fg)^*(\xi)$ изоморфны над B_2 (см. конец разд. 3), так что

$$\mathrm{Vect}_k([f][g]) = \mathrm{Vect}_k([g])\,\mathrm{Vect}_k([f]).$$

Для каждого пространства B формула $\varphi_B([f]) = \{f^*(\gamma_k)\}$ определяет, согласно теореме 4.7, некоторое отображение $\varphi_B\colon [B, G_k(F^\infty)] \to \mathrm{Vect}_k(B)$. Относительно этого отображения имеет место следующая теорема, объединяющая в единой формулировке все три основные теоремы гомотопической классификации векторных расслоений:

7.2. Теорема. *Семейство отображений* φ_B *определяет изоморфизм функторов*

$$\varphi\colon [-, G_k(F^\infty)] \to \mathrm{Vect}_k.$$

Доказательство. Прежде всего мы покажем, что φ является морфизмом функторов, т. е. что для любого гомотопического класса $[f]\colon B_1 \to B$ коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{[B, G_k(F^\infty)]} \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[d, "{[[f], G_k(F^\infty)]}"'] & \mathrm{Vect}_k(B) \arrow[d, "\mathrm{Vect}_k([f])"] \\
{[B_1, G_k(F^\infty)]} \arrow[r, "\varphi_{B_1}"] & \mathrm{Vect}_k(B_1)
\end{tikzcd}$$

Но это ясно, поскольку для произвольного гомотопического класса $[g] \in [B, G_k(F^\infty)]$ выполняются соотношения

$$\mathrm{Vect}_k([f])\,\varphi_B([g]) = \mathrm{Vect}_k([f])\,\{g^*(\gamma_k)\} = \{f^*g^*(\gamma_k)\}$$

и

$$\varphi_{B_1}[[f],\ G_k(F^\infty)]\,[g] = \varphi_{B_1}([g]\,[f]) = \{(gf)^*(\gamma_k)\}.$$

С другой стороны, каждое отображение φ_B биективно (в силу теоремы 5.5 и следствия 5.6 оно надъективно, а в силу теоремы 6.2 инъективно). Следовательно, морфизм φ является изоморфизмом.

7.3. В соответствии с общей терминологией теории категорий изоморфизм φ: $[-, G_k(F^\infty)] \to \mathrm{Vect}_k$ называется *представлением* функтора Vect_k. С содержательной точки зрения представимость функтора Vect_k означает, что проблема классификации векторных расслоений, т. е. вычисление множества $\mathrm{Vect}_k(B)$, сводится к вычислению множества $[B, G_k(F^\infty)]$ гомотопических классов отображений $B \to G_k(F^\infty)$.

8. ЯДРО, ОБРАЗ И КОЯДРО МОРФИЗМОВ ПОСТОЯННОГО РАНГА

Каждый морфизм u: $\xi \to \eta$ векторных расслоений над пространством B определяет расслоение $\mathrm{Ker}\,u$, являющееся подрасслоением расслоения ξ, расслоение $\mathrm{Im}\,u$, являющееся подрасслоением расслоения η, и расслоение $\mathrm{Coker}\,u$, являющееся факторрасслоением расслоения η. Пространство расслоения $E(\mathrm{Ker}\,u)$ состоит по определению из всех тех точек $x \in E(\xi)$, для которых $u(x) = 0$ в слое $p_\eta^{-1}(p_\xi(x))$ расслоения η. Пространство $E(\mathrm{Im}\,u)$ является по определению подпространством пространства $E(\eta)$, состоящим из всех точек вида $u(x)$, $x \in E(\xi)$. Пространство $E(\mathrm{Coker}\,u)$ является по определению факторпространством пространства $E(\eta)$ по отношению эквивалентности, в котором точки y, $y' \in E(\eta)$ тогда и только тогда эквивалентны, когда $p_\eta(y') = p_\eta(y)$ и существует такая точка $x \in E(\xi)$, что $y - y' = u(x)$. Проекция p_η расслоения η индуцирует, очевидно, некоторое отображение $E(\mathrm{Coker}\,u) \to B$, которое и принимается за проекцию расслоения $\mathrm{Coker}\,u$.

Вообще говоря, расслоения $\mathrm{Ker}\,u$, $\mathrm{Im}\,u$ и $\mathrm{Coker}\,u$ не удовлетворяют условию локальной тривиальности и потому не являются векторными расслоениями. Например, для $[0, 1]$-морфизма u: $[0, 1] \times \mathbf{R} \to [0, 1] \times \mathbf{R}$, определенного формулой $u(t, x) = (t, tx)$, как легко видеть, $\mathrm{Ker}(u)_b = 0$, $\mathrm{Im}(u)_b = \mathbf{R}$ и $\mathrm{Coker}(u)_b = 0$ при $b \neq 0$, тогда как $\mathrm{Ker}(u)_0 = \mathbf{R}$, $\mathrm{Im}(u)_0 = 0$ и $\mathrm{Coker}(u)_0 = \mathbf{R}$.

В следующем определении описан класс морфизмов u, для которых $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Im} u$ и $\operatorname{Coker} u$ будут векторными расслоениями.

Напомним, что *рангом* линейного отображения $f\colon V \to W$ называется число $\dim V - \dim\{\operatorname{Ker} f\}$, равное $\dim\{\operatorname{Im} f\}$.

8.1. Определение. Морфизм $u\colon \xi \to \eta$ векторных расслоений над пространством B называется *морфизмом постоянного ранга k*, если каждое линейное отображение $u_b\colon p_\xi^{-1}(b) \to p_\eta^{-1}(b)$, $b \in B$, имеет ранг k.

8.2. Теорема. *Для любого B-морфизма $u\colon \xi \to \eta$ постоянного ранга k расслоения* $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Im} u$ *и* $\operatorname{Coker} u$ *являются векторными расслоениями над B.*

Доказательство. Поскольку утверждение имеет локальный характер, расслоения ξ и η мы можем считать тривиальными. Иными словами, мы можем считать, что рассматриваемый B-морфизм имеет вид $u\colon B \times F^n \to B \times F^m$, а потому задается формулой $u(b, x) = (b, u_b(x))$, где $b \mapsto u_b$ — некоторое отображение $B \to \mathbf{L}(F^n, F^m)$. При этом, согласно условию, в каждой точке $b \in B$ ранг линейного отображения u_b равен k.

1 Пусть $a \in B$, и пусть $V_2 = \operatorname{Ker} u_a$ и $W_1 = \operatorname{Im} u_a$. Тогда $F^n = V_1 \oplus V_2$ и $F^m = W_1 \oplus W_2$, где $\dim V_1 = \dim W_1 = k$, $\dim V_2 = n - k$ и $\dim W_2 = m - k$. Вводя в рассмотрение векторные пространства $V = F^n \oplus W_2 = V_1 \oplus V_2 \oplus W_2$ и $W = F^m \oplus V_2 = W_1 \oplus W_2 \oplus V_2$, мы каждой точке $b \in B$ отнесем отображение $w_b\colon V \to W$, полагая $w_b | V_1 = (u_b | V_1) \oplus 0$, $w_b | V_2 = (u_b | V_2) \oplus 1_{V_2}$ и $w_b | W_2 = 0 \oplus 1_{W_2} \oplus 0$. В частности, точке $b = a$ тем самым отнесено отображение $v_a\colon V \to W$, являющееся изоморфизмом (потому что изоморфизмом является отображение $u_a | V_1\colon V_1 \to W_1$). Но ясно, что изоморфизмы составляют в $\mathbf{L}(V, W)$ открытое подмножество, а отображение $b \mapsto w_b$ пространства B в пространство $\mathbf{L}(V, W)$ непрерывно. Следовательно, точка a обладает такой окрестностью U, что для каждой точки $b \in U$ отображение w_b является изоморфизмом. Пусть $v_b\colon W \to V$ — изоморфизм, обратный к изоморфизму w_b, $b \in U$. Ясно, что отображение $b \mapsto v_b$ окрестности U в пространство $\mathbf{L}(W, V)$ также непрерывно.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при сделанных предположениях расслоения $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Im} u$ и $\operatorname{Coker} u$ тривиальны над U. Для доказательства тривиальности расслоения $\operatorname{Ker} u$ заметим, что точка $(x_1, x_2) \in V_1 \oplus V_2$ тогда и только тогда принадлежит подпространству $\operatorname{Ker} u_b$, $b \in U$, когда $w_b(x_1, x_2, 0) = x_2$, т. е. когда $(x_1, x_2) = v_b(x_2)$. Таким образом, $\operatorname{Ker} u_b = v_b(V_2)$, и потому соответствие $(b, x_2) \mapsto (b, v_b(x_2))$ определяет некоторое отображение $U \times V_2 \to E(\operatorname{Ker} u | U)$, являющееся, очевидно, U-изоморфизмом расслоений с обратным U-изоморфизмом $(b, x) \mapsto (b, w_b(x))$.

Для доказательства тривиальности (над U) расслоения $\operatorname{Im} u$ заметим, что для точки $x_1 \in V_1$ тогда и только тогда $u_b(x_1) = 0$, когда $w_b(x_1, 0, 0) = 0$, т. е. в силу изоморфности w_b, когда $x_1 = 0$. Таким образом, для каждой точки $b \in U$ отображение $u_b | V_1 \colon V_1 \to \operatorname{Im} u_b$ является изоморфизмом, и потому соответствие $(b, x) \mapsto (b, u_b(x))$ определяет U-изоморфизм расслоений $U \times V_1 \to E(\operatorname{Im} u | U)$, обратным к которому (ввиду соотношения $u_b | V_1 = w_b | V_1$, справедливого для любой точки $b \in U$) является U-изоморфизм $(b, y) \mapsto (b, v_b(y))$.

Для доказательства тривиальности (над U) расслоения $\operatorname{Coker} u$ заметим, что $\operatorname{Im} u_b \cap W_2 = 0$ для любой точки $b \in U$. Действительно, для любого элемента $u_b(x_1, x_2) \in \operatorname{Im} u_b \cap W_2$ имеет место равенство $w_b(x_1, x_2, y) = 0$, т. е., так как отображение w_b изоморфно, равенство $x_1 = x_2 = y = 0$. Поскольку $\operatorname{Im} u_b \cap W_2 = 0$, отображение $U \times W_2 \to E(\operatorname{Coker} u | U)$, определенное соответствием $(b, y) \mapsto (b, y \bmod (\operatorname{Im} u))$, мономорфно и, следовательно (по соображениям размерности), эпиморфно, т. е. является U-изоморфизмом. Обратный к нему изоморфизм индуцируется, как легко видеть, проекцией $U \times (W_1 \oplus W_2) \to U \times W_2$.

8.3. Следствие. *Если B-морфизм $u\colon \xi \to \eta$ векторных расслоений инъективен, т. е. на каждом слое расслоения ξ является мономорфизмом, то расслоения* $\operatorname{Im} u$ *и* $\operatorname{Coker} u$ *являются векторными расслоениями.*

Доказательство. Морфизм u имеет постоянный ранг $m - n$, где m и n — размерности расслоений η и ξ.

h

8.4. Следствие. *Если B-морфизм $u\colon \xi \to \eta$ векторных расслоений надъективен, т. е. на каждом слое расслоения ξ является эпиморфизмом, то расслоение* $\operatorname{Ker} u$ *является векторным расслоением.*

Доказательство. Морфизм u имеет постоянный ранг $n - m$.

m

8.5. Замечание. *Нулевым векторным расслоением* 0 называется расслоение $(B, 1, B)$. Морфизм $u\colon \xi \to \eta$ векторных расслоений над пространством B называется *B-мономорфизмом*, если $\operatorname{Ker} u = 0$, или, что то же самое, если он инъективен. Аналогично морфизм u называется *B-эпиморфизмом*, если $\operatorname{Coker} u = 0$, или, что то же самое, если он надъективен.

Известное понятие точной последовательности также автоматически переносится на любые векторные расслоения и их морфизмы постоянного ранга. Именно, по определению последовательность

$$\xi \xrightarrow{u} \eta \xrightarrow{v} \zeta$$

точна, если $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} v$, а последовательность

$$\xi_0 \xrightarrow{u_1} \xi_1 \xrightarrow{u_2} \xi_2 \to \ldots \to \xi_{n-1} \xrightarrow{u_n} \xi_n$$

точна, если $\operatorname{Im} u_i = \operatorname{Ker} u_{i+1}$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Для любой „короткой" точной последовательности векторных расслоений $0 \to \xi \xrightarrow{u} \eta \xrightarrow{v} \zeta \to 0$ расслоение ξ изоморфно расслоению $\operatorname{Ker} v$, а расслоение ζ — расслоению $\operatorname{Coker} \cancel{v}$.

u

9. РИМАНОВЫ И ЭРМИТОВЫ МЕТРИКИ НА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Пусть F — либо поле действительных чисел $\mathbf{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbf{C}$. Будем считать, что $\bar{x} = x$, если $x \in \mathbf{R}$, и $\bar{z} = x - iy$, если $z = x + iy \in \mathbf{C}$.

9.1. Определение. Пусть V — векторное пространство над полем F. *Скалярным произведением* (или *метрикой*) на V называется такое отображение $\beta\colon V \times V \to F$, что

$$\begin{aligned} &\beta(ax + a'x', y) = a\beta(x, y) + a'\beta(x', y), \\ (1)\qquad &\beta(x, by + b'y') = \bar{b}\beta(x, y) + \bar{b}'\beta(x, y'), \end{aligned}$$

$\beta(x,x) \in \mathbf{R}$

для всех $x, x', y, y' \in V$ и всех $a, a', b, b' \in F$;

(2) $\beta(x, y) = \overline{\beta(y, x)}$ для всех $x, y \in V$;

(3) $\beta(x, x) \geqslant 0$ и $\beta(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Задав на V скалярное произведение β, обычным образом можно определить понятие ортогональных векторов $x, y \in V$; именно, векторы x и y *ортогональны*, если $\beta(x, y) = 0$. Для любого подпространства W пространства V множество W^0 всех векторов $y \in V$, для которых $\beta(x, y) = 0$ при любом $x \in W$, является, очевидно, подпространством пространства V, причем $V = W \oplus W^0$.

На пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ существует естественное скалярное произведение, задаваемое формулой $\beta(x, y) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \bar{y}_i$. Мы будем называть это скалярное произведение *евклидовым* и обозначать его символом $(x \mid y)$. Аналогичная формула задает евклидово скалярное произведение и на пространствах $\mathbf{R}^\infty$ и $\mathbf{C}^\infty$.

Распространим понятие скалярного произведения на векторные расслоения.

9.2. Определение. *Метрикой* на действительном или комплексном векторном расслоении $\xi = (E, p, B)$ называется произвольное отображение $\beta\colon E(\xi \oplus \xi) \to F$, обладающее тем свойством, что для каждой точки $b \in B$ отображение $\beta \,|\, p^{-1}(b) \times p^{-1}(b)$ является скалярным произведением на слое $p^{-1}(b)$. В случае $F = \mathbf{R}$ эта метрика называется *римановой*, а в случае $F = \mathbf{C}$ — *эрмитовой*. Расслоение ξ, снабженное метрикой, называется *метризованным*.

9.3. Пример. Формула $\beta(b, x, x') = (x \,|\, x')$ задает метрику (риманову при $F = \mathbf{R}$ и эрмитову при $F = \mathbf{C}$) на тривиальном k-мерном векторном расслоении θ^k над пространством B.

9.4. Пример. Евклидова метрика на F^m индуцирует риманову метрику на каноническом расслоении γ_k^m над многообразием $G_k(F^m)$, $k \leqslant m \leqslant \infty$. Для любой точки $(V, x, x') \in E(\gamma_k^m \oplus \gamma_k^m)$ эта метрика определяется формулой $\beta(V, x, x') = (x \,|\, x')$. На каждом слое V расслоения γ_k^m метрика β индуцирует евклидово скалярное произведение.

или эрм при $F = C$

Обобщая эту конструкцию, мы без труда можем получить следующую теорему:

9.5. Теорема. *Каждое действительное или комплексное векторное расслоение, для которого существует гауссово отображение, обладает соответственно римановой или эрмитовой метрикой.*

Доказательство. Пусть g: $E(\xi) \to F^\infty$ — произвольное гауссово отображение. Определим отображение β: $E(\xi \oplus \xi) \to F$ формулой $\beta(x, x') = (g(x) \,|\, g(x'))$. Поскольку отображение g непрерывно и является мономорфизмом на каждом слое, отображение β является, очевидно, римановой или соответственно эрмитовой метрикой на расслоении ξ.

В частности, мы видим (см. теорему 5.5), что *каждое векторное расслоение над паракомпактным пространством обладает метрикой.*

Использование метрики позволяет, например, доказать следующую важную теорему:

9.6. Теорема. *Любая короткая точная последовательность*

$$0 \to \xi \xrightarrow{u} \eta \xrightarrow{v} \zeta \to 0$$

векторных расслоений над пространством B, в которой расслоение η метризовано, расщепляется, т. е. существует такой морфизм w: $\xi \oplus \zeta \to \eta$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & \eta \arrow[dr, "v"] & & \\
0 \arrow[r] & \xi \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "i"'] & & \zeta \arrow[r] & 0 \\
 & & \xi \oplus \zeta \arrow[uu, "w"] \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

где i — вложение на первое слагаемое, а j — проекция на второе слагаемое.

Доказательство. Пусть ξ' — образ расслоения ξ, так что $E(\xi') \subset E(\eta)$, и пусть $E(\zeta')$ — множество всех точек $x' \in E(\eta)$, для которых $p_\eta(x) = p_\eta(x')$ и $\beta(x, x') = 0$ при любом $x \in E(\xi')$ (здесь β — метрика на расслоении η). Ясно, что $E(\zeta')$ является пространством некоторого подрасслоения ζ' расслоения η, слоями которого являются векторные пространства. Пусть $E(\eta)_b$, $E(\xi')_b$ и $E(\zeta')_b$ — слои расслоений η, ξ' и ζ' над точкой $b \in B$, и пусть $g: E(\eta) \to E(\xi')$ — отображение, индуцирующее для каждой точки $b \in B$ проекцию пространства $E(\eta)_b$ на пространство $E(\xi')_b$. Покажем, что отображение g непрерывно. В силу локального характера свойства непрерывности мы можем без ограничения общности предполагать, что $E(\xi) = B \times F^n$ и $E(\eta) = B \times F^m$. Но в этом случае отображение $g: B \times F^m \to B \times F^n$ задается формулой $g(b, x) = \left(b, \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \beta(b, x, u(e_i))\, e_i\right)$, где $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис пространства F^n, и потому, очевидно, непрерывно. Таким образом, g представляет собой некоторый эпиморфизм $\eta \to \xi'$, и потому расслоение $\operatorname{Ker} g$ является векторным расслоением (см. следствие 8.4). Но ясно, что $\operatorname{Ker} g = \zeta'$. Следовательно, расслоение ζ' векторное.

Заметив, что морфизм $v|\zeta': \zeta' \to \zeta$ индуцирует изоморфизм слоев и потому является B-изоморфизмом, мы можем теперь определить морфизм w, полагая $w|\xi = u: \xi \to \zeta' \subset \eta$ и $w|\zeta = (v|\zeta')^{-1}: \zeta \to \zeta' \subset \eta$. Очевидно, что этот морфизм обладает всеми нужными свойствами.

В частности, мы видим, что *любая короткая точная последовательность векторных расслоений над паракомпактным пространством расщепляется.*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что k-мерное векторное расслоение ξ тогда и только тогда тривиально, когда оно обладает такими k сечениями $s_1, \ldots, s_k$, что в каждой точке $b \in B$ векторы $s_1(b), \ldots, s_k(b)$ линейно независимы.

2. Докажите, что любая метрика на векторном расслоении, для которого существует гауссово отображение, имеет вид, построенный в доказательстве теоремы 9.5.

3. *Расслоенной размерностью* $k = \dim_b B$ пространства B называется нижняя грань целых чисел m, для которых вложе-

ние $G_m(\mathbf{R}^{2m}) \to G_m(\mathbf{R}^\infty)$ индуцирует биективное отображение

$$[B,\ G_m(\mathbf{R}^{2m})] \to [B,\ G_m(\mathbf{R}^\infty)].$$

a) Докажите, что естественное вложение $G_k(\mathbf{R}^{2k}) \to G_k(\mathbf{R}^{2k+m})$ k индуцирует биективное отображение $[B,\ G_k(\mathbf{R}^{2k})] \to [B,\ G_k(\mathbf{R}^{2k+m})]$.

b) Докажите, что естественное вложение $\cancel{G_k(\mathbf{R}^{2k})} \to G_m(\mathbf{R}^{k+m})$, m≥k (см. упр. 2 гл. 2) индуцирует биективное отображение

$$[B,\ G_k(\mathbf{R}^{2k})] \to [B,\ G_m(\mathbf{R}^{k+m})].$$

c) Докажите, что при $n \geqslant k$ для любого n-мерного векторного расслоения ξ над пространством B существует такое k-мерное расслоение η, что расслоение ξ изоморфно над B расслоению $\eta \oplus \theta^{n-k}$, причем это расслоение η с точностью до изоморфизма определено однозначно.

d) Докажите, что если векторные расслоения ξ и η одинаковой размерности, большей или равной k, обладают тем свойством, что $\xi \oplus \theta^m \approx \eta \oplus \theta^m$, то эти расслоения B-изоморфны.

e) Докажите, что для любого векторного расслоения ξ над B существует такое k-мерное векторное расслоение η, что расслоение $\xi \oplus \eta$ тривиально.

Глава 4

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Расслоенным пространством (или расслоением со структурной группой) называется расслоение, для которого дополнительно задано действие некоторой топологической группы на его слоях. Теория расслоенных пространств в своих основах вполне аналогична теории векторных расслоений. В частности, строение расслоенного пространства настолько богато, что для этих пространств, так же как и для векторных расслоений, имеет место теорема о гомотопической классификации.

1. РАССЛОЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ГРУППАМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1.1. Определение. *Топологической группой* называется такое множество G, являющееся одновременно группой и топологическим пространством, что определенное соответствием $(s, t) \mapsto st^{-1}$ отображение $G \times G \to G$ непрерывно.

Условие непрерывности отображения $(s, t) \mapsto st^{-1}$ эквивалентно непрерывности отображения $G \times G \to G$, определенного соответствием $(s, t) \mapsto st$, и отображения $G \to G$, определенного соответствием $s \mapsto s^{-1}$.

Примеры. Каждый из следующих объектов является топологической группой: вещественная прямая $\mathbf{R}$ с аддитивной групповой операцией; вещественная прямая $\mathbf{R}$ без точки 0 с мультипликативной групповой операцией; полные линейные группы невырожденных матриц $GL(n, \mathbf{R})$ и $GL(n, \mathbf{C})$; ортогональная группа $O(n)$; унитарная группа $U(n)$; специальная ортогональная группа $SO(n)$; специальная унитарная группа $SU(n)$; симплектическая группа $Sp(n)$.

Ортогональная, унитарная и симплектические группы будут подробно рассмотрены в гл. 7.

1.2. Определение. Пусть G — произвольная топологическая группа. *Правым G-пространством* называется топологическое пространство X, рассматриваемое вместе с непрерывным отображением $X \times G \to X$, удовлетворяющим следующим аксиомам (здесь и далее образ точки $(x, s) \in X \times G$ при отображении $X \times G \to X$ обозначается символом xs):

(1) для любой точки $x \in X$ и любых элементов $s, t \in G$ имеет место соотношение $x(st) = (xs)t$;

(2) для любой точки $x \in X$ имеет место соотношение $x1 = x$, где 1 — единица группы G.

Удовлетворяющее этим аксиомам отображение $X \times G \to X$ называется (*правым*) *действием* группы G на пространстве X.

Левым G-пространством называется пространство X, рассматриваемое вместе с отображением $G \times X \to X$, для которого $(st)x = s(tx)$ и $1x = x$.

Любое левое G-пространство X можно превратить в правое G-пространство, положив $xs = s^{-1}x$. Поэтому достаточно рассматривать лишь правые G-пространства. R

Примеры. Пространство $\mathbf{R}^n$ естественным образом является левым $GL(n, R)$-пространством (а также левым $O(n)$-пространством).

Пространство $\mathbf{R}^n$ является также левым (или правым) $(\mathbf{R} \setminus \{0\})$-пространством относительного действия, задаваемого обычным умножением векторов на скаляры.

Более интересный пример возникает при рассмотрении пространства $V_p(\mathbf{R}^n)$ ортонормальных p-реперов n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$. Пусть $r \leqslant p$. Действуя произвольной матрицей из группы $O(r)$ на первые r векторов каждого репера из $V_p(\mathbf{R}^n)$, мы, очевидно, получим правое действие группы $O(r)$ на пространстве $V_p(\mathbf{R}^n)$. Таким образом, для любого $r \leqslant p$ пространство $V_p(\mathbf{R}^n)$ является правым $O(r)$-пространством.

1.3. Определение. Отображение $h\colon X \to Y$ одного G-пространства в другое называется *G-морфизмом*, если $h(xs) = h(x)s$ для всех $x \in X$ и всех $s \in G$.

Подпространство пространства всех отображений $X \to Y$, состоящее из G-морфизмов, мы будем обозначать символом $M_G(X, Y)$. Ясно, что композиция G-морфизмов снова является G-морфизмом. Следовательно, G-пространства и их G-морфизмы составляют категорию. Эту категорию мы будем обозначать символом $\mathcal{S}p_G$.

Точки x и x' некоторого G-пространства X называются *G-эквивалентными*, если существует такой элемент $s \in G$, что $xs = x'$. Ясно, что это отношение является отношением эквивалентности. Класс точки $x \in X$ по этому отношению, т. е. множество всех элементов вида xs, $s \in G$, обозначается через xG и называется *орбитой* точки x. Множество всех орбит xG,

$x \in X$, снабженное фактортопологией, т. е. слабейшей топологией, в которой проекция $x \mapsto xG$ непрерывна, мы будем обозначать символом $X \bmod G$. Естественную проекцию $x \mapsto xG$ мы будем обозначать символом π (а иногда и π_X). Таким образом, $\pi(x) = xG$. По определению проекция π является отображением отождествления.

1.4. Предложение. *Для любого G-пространства X отображение $x \mapsto xs$ является его гомеоморфизмом на себя. Проекция π: $X \to X \bmod G$ пространства X на пространство $X \bmod G$ является открытым отображением.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что обратным к отображению $x \mapsto xs$ служит отображение $x \mapsto xs^{-1}$. Для доказательства второго утверждения рассмотрим произвольное открытое подмножество $W \subset X$. Так как множество $\pi^{-1}\pi(W) = \bigcup_{s \in G} Ws$, являясь объединением открытых множеств Ws, открыто, то множество $\pi(W)$ открыто в пространстве $X \bmod G$.

Каждому G-пространству X мы отнесем расслоение $\alpha(X) = (X, \pi, X \bmod G)$. Так как для каждого морфизма G-пространств h: $X \to Y$ имеет место равенство $h(xG) \subset h(x)G$, $x \in X$, то формула $f(xG) = h(x)G$ корректно определяет некоторое отображение f: $X \bmod G \to Y \bmod G$. Ясно, что пара $\alpha(h) = (h, f)$ представляет собой морфизм расслоения $\alpha(X)$ в расслоение $\alpha(Y)$.

1.5. Предложение. *Построенное отображение α: $\mathcal{S}p_0 \to \mathcal{B}un$ является функтором.*

Доказательство. Нужно доказать, что $\alpha(1_X) = (1_X, 1_{X \bmod G})$ и что для любых G-морфизмов h: $X \to Y$ и k: $Y \to Z$ справедливо равенство $\alpha(kh) = \alpha(k)\alpha(h)$. Но оба эти утверждения очевидны.

1.6. Определение. Расслоение (X, p, B) называется *G-расслоением*, если X является G-пространством и существует гомеоморфизм f: $X \bmod G \to B$, индуцирующий изоморфизм $(1, f)$: $\alpha(X) \to (X, p, B)$ расслоения $\alpha(X)$ на расслоение (X, p, B).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ГЛАВНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Очевидно, что если в G-пространстве X равенство $xs = x$ возможно только при $s = 1$, то равенство $xs = xt$ возможно только при $s = t$, и наоборот.

2.1. Определение. G-пространство X называется *эффективным*, если равенство $xs = x$, $x \in X$, $s \in G$, возможно только при $s = 1$.

Пусть X — эффективное G-пространство, и пусть X^* — подпространство прямого произведения $X \times X$, состоящее из всевозможных пар вида (x, xs), где $x \in X$ и $s \in G$. Для любой точки $(x, x') \in X^*$ существует единственный элемент $\tau(x, x') \in G$, обладающий тем свойством, что $x\tau(x, x') = x'$. Построенное таким образом отображение τ: $X^* \to G$ мы будем называть *отображением сдвига*. Ясно, что оно обладает следующими свойствами:

(1) $\tau(x, x) = 1$;

(2) $\tau(x, x')\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$;

(3) $\tau(x', x) = \tau(x, x')^{-1}$.

2.2. Определение. Эффективное G-пространство X называется *главным*, если соответствующее ему отображение сдвига τ: $X^* \to G$ непрерывно. G-расслоение (X, p, B) называется *главным*, если X является главным G-пространством.

2.3. Пример. Эффективное G-пространство вида $B \times G$, действие группы G на котором задано формулой $(b, t)s = (b, ts)$, является главным. В самом деле, легко видеть, что подпространство $(B \times G)^*$ состоит из пар $((b, t), (b', t'))$, для которых $b = b'$, и отображение сдвнга задается формулой $\tau((b, t), (b, t')) = t^{-1}t'$. Следовательно, это отображение непрерывно. Соответствующее главное G-расслоение является расслоением-произведением $(B \times G, p, B)$. Оно называется *главным G-расслоением-произведением.*

2.4. Пример. Пусть G — замкнутая подгруппа топологической группы Γ. Умножение элементов группы Γ справа на элементы группы G превращает, очевндно, группу Γ в правое G-пространство. Это G-пространство эффективно, и для него множество Γ^* состоит из всех пар $(x, x') \in \Gamma \times \Gamma$, для которых $x^{-1}x' \in G$. Отображение сдвига для G-пространства Γ определяется формулой $\tau(x, x') = x^{-1}x'$ и потому непрерывно. Базой соответствующего главного G-расслоения является пространство левых смежных классов группы Γ по подгруппе G. Этот пример обобщает некоторые из примеров, рассмотренных в разд. 5 гл. 1.

2.5. Пример. Пусть G — циклическая группа второго порядка $\mathbf{Z}_2 = \{+1, -1\}$, и пусть она действует на сфере S^n согласно формуле $x(\pm 1) = \pm x$. Соответствующее отображение сдвига, определенное на пространстве $(S^n)^* = \{(x, \pm x)\} \subset S^n \times S^n$, имеет вид $\tau(x, \pm x) = \pm 1$ и, очевидно, непрерывно. Тем самым сфера S^n определена как главное $\mathbf{Z}_2$-пространство. Соответствующее главное $\mathbf{Z}_2$-расслоение имеет своей базой пространство RP^n.

2.6. Предложение. *Каждый слой главного G-расслоения $\xi = (X, p, B)$ гомеоморфен группе G.*

Доказательство. Выбрав в слое $p^{-1}(b)$, $b \in B$, произвольную точку x, определим отображение u: $G \to p^{-1}(b)$ формулой $u(s) = xs$. Ясно, что это отображение непрерывно и биективно, причем обратное отображение определяется соответствием $x \longmapsto \tau(x, x')$ и потому также непрерывно. Таким образом, отображение u гомеоморфно.

3. КАТЕГОРИИ ГЛАВНЫХ РАССЛОЕНИЙ

3.1. Определение. *Морфизмом* главных G-расслоений называется морфизм расслоений

$$(u, f): (X, p, B) \to (X', p', B'),$$

для которого отображение u: $X \to X'$ представляет собой морфизм G-пространств.

В этом случае отображение f: $B \to B'$ однозначно определено отображением u, так как $p^{-1}p(x) = xG$ и $f(xG) = u(x)G$.

При $B = B'$ и $f = 1$ морфизм u называется *B-морфизмом* (или морфизмом *над* B).

Композиция морфизмов (B-морфизмов) главных G-расслоений снова является морфизмом (или соответственно B-морфизмом) главных G-расслоений. Таким образом, главные G-расслоения образуют категорию $\mathcal{B}un(G)$, содержащую в качестве подкатегории категорию $\mathcal{B}un_B(G)$ главных G-расслоений над B. Игнорирование группы G определяет, очевидно, естественные *функторы игнорирования* $\mathcal{B}un(G) \to \mathcal{B}un$ и $\mathcal{B}un_B(G) \to \mathcal{B}un_B$.

Следующая теорема является аналогом для главных расслоений теоремы 3.2.5.

3.2. Теорема. *Каждый морфизм категории $\mathcal{B}un_B(G)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть u: $(X, p, B) \to (X', p', B')$ — произвольный B-морфизм главных G-расслоений. Покажем сначала, что u инъективен. Пусть x_1 и x_2 — такие точки пространства X, что $u(x_1) = u(x_2)$. Тогда $p(x_1) = p'u(x_2) = p(x_2)$, так что $(x_1, x_2) \in X^*$ и, следовательно, $x_1 s = x_2$ для некоторого элемента $s \in G$. Но в таком случае $u(x_1) = u(x_2) = u(x_1)s$ и, поскольку G-пространство X эффективно, $s = 1$, т. е. $x_1 = x_2$. Следовательно, морфизм u инъективен. Далее, для каждой точки $x' \in X'$ существует такая точка $x \in X$, что $p(x) = p'(x')$ и потому $p'(x') = p(x) = p'(u(x))$. Следовательно, $(u(x), x') \in (X')^*$, так что $x' = u(x)s$ для некоторого элемента $s \in G$. Поскольку $u(x)s = u(xs)$, тем самым доказано, что отображение u надъективно.

Осталось доказать непрерывность обратного отображения u^{-1}. Пусть $u(a) = a' \in X'$, и пусть V — произвольная открытая окрестность точки $a \in X$. Поскольку действие группы G на пространстве X непрерывно, существует такая открытая окрестность V_1 точки $a \in X$ и такая открытая окрестность N элемента $1 \in G$, что $V_1 N \subset V$. С другой стороны, поскольку отображение сдвига τ', соответствующее пространству X', непрерывно, существует такая окрестность W точки $a' \in X'$, что $\tau'\big((W \times W) \cap X'^*\big) \subset N$. Ввиду того что отображение u непрерывно, мы без ограничения общности (заменяя в случае необходимости V_1 на $V_1 \cap u^{-1}(W)$) можем считать, что $u(V_1) \subset W$. Согласно предложению 1.4, множество $U = p(V_1)$ является открытой окрестностью точки $b = p(a) = p'(a') \in B$, и мы можем считать (заменяя в случае необходимости W на $W \cap (p')^{-1}(U)\big)$, что $U = p'(W)$.

Поскольку $p'(W) = p(V_1)$, для каждой точки $x' \in W$ существует такая точка $x \in V_1$, что $p(x) = p'(x')$. Так как $p'u(x) = p(x) = p'(x')$, то $(u(x), x') \in W^*$ и, следовательно, $u(x)s = x'$ для некоторого элемента $s \in N$. Поэтому $x' = u(x)s = u(xs)$, где $xs \in V_1 N \subset V$, так что $u^{-1}(x') \in V$. Таким образом, $u^{-1}(W) \subset V$, и, следовательно, отображение u^{-1} непрерывно.

Отметим, что при доказательстве этой теоремы условие, что X' является главным G-пространством, мы использовали полностью, ~~тогда как от G-пространства X нам по~~надоби~~лась лишь его эффективность~~. от X нам ничего не потребовалось.

4. РАССЛОЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ ГЛАВНЫМИ РАССЛОЕНИЯМИ

Следующее предложение утверждает, что операция построения индуцированного расслоения сохраняет как G-расслоения, так и главные G-расслоения.

4.1. Предложение. *Пусть X — произвольное G-пространство и $\xi = (X, p, B)$ — ассоциированное с ним G-расслоение. Тогда для любого отображения $f\colon B_1 \to B$ пространство X_1 индуцированного расслоения $f^*(\xi) = (X_1, p_1, B_1)$ обладает естественным строением G-пространства и существует такой гомеоморфизм $g\colon X_1 \bmod G \to B_1$,* *что имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, "f_\xi"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "p_1"] & X \arrow[d] \\ X_1 \operatorname{mod} G \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

При этом действие группы G на пространстве X_1 однозначно
f_ξ *определяется требованием, чтобы отображение f было G-морфизмом. Кроме того, если G-расслоение (X, p, B) было главным, то G-расслоение (X_1, p_1, B_1) также будет главным.*

Доказательство. Определим действие группы G на пространстве X_1, полагая $(b_1, x)s = (b_1, xs)$ (эта формула имеет смысл, поскольку $p(xs) = p(x) = f(b_1)$). Тогда $f_\xi((b_1, x)s) = f_\xi(b_1, xs) = xs = f_\xi(b_1, x)s$ и, следовательно, f_ξ является G-морфизмом. С другой стороны, если пространство X_1 определено как G-пространство и отображение f_ξ является G-морфизмом, то действие группы G на пространстве X_1 задается, очевидно, формулой $(b_1, x)s = (b_1, xs)$.

Определим теперь отображение g, полагая $g((b_1, x)G) = b_1$. Поскольку пространство $X_1 \operatorname{mod} G$ снабжено фактортопологией, отображение g непрерывно. Оно надъективно, поскольку надъективно отображение p. Так как $p(x) = p(x')$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $s \in G$, что $x' = xs$, то отображение g не только надъективно, но и инъективно. Для любого открытого подмножества W пространства $X_1 \operatorname{mod} G$ множество $\pi^{-1}(W)$ открыто в пространстве X и, следовательно, множество $g(W) = p_1(\pi^{-1}(W))$ открыто в пространстве B_1 (согласно предложениям 2.5.9 и 1.4 отображение p_1 открыто). Таким образом, отображение g является гомеоморфизмом. Тот факт, что для него имеет место указанная выше коммутативная диаграмма, немедленно вытекает из определений.

Наконец, отображение сдвига $\tau_1\colon X_1^* \to G$ для G-пространства X_1 определяется, как легко видеть, формулой $\tau_1((b_1, x), (b_1, x')) = \tau(x, x')$, где $\tau\colon X^* \to G$ — отображение сдвига для G-пространства X. (Ясно, что $((b_1, x), (b_1', x')) \in X_1^*$ тогда и только тогда, когда $b_1 = b_1'$ и $(x, x') \in X^*$). Следовательно, отображение τ_1 непрерывно, если непрерывно отображение τ. Тем самым предложение полностью доказано.

Из этого предложения непосредственно вытекает, что каждое отображение $f\colon B_1 \to B$ определяет некоторый функтор $f^*\colon \mathcal{B}un_B(G) \to \mathcal{B}un_{B_1}(G)$.

4.2. Теорема. *Для любых главных G-расслоений ξ, η и произвольного их G-морфизма (v, f): $\eta \to \xi$ морфизм w, участвующий в каноническом разложении $\eta \xrightarrow{w} f^*(\xi) \xrightarrow{f_\xi} \xi$ морфизма (v, f) (см. предложение 2.5.5), является изоморфизмом главных расслоений над $B(\eta)$. Таким образом, в частности, главные G-расслоения η и $f^*(\xi)$ изоморфны.*

Доказательство. Отображение w: $X(\eta) \to X(f^*(\xi))$ задается формулой $w(x) = (p_\eta(x), v(x))$, и потому $w((xs), v(xs)) = (p_\eta(x), v(x)s) = w(x)s$. Это означает, что морфизм w является морфизмом главных G-расслоений (если расслоение $f^*(\xi)$ определено как главное G-расслоение согласно предложению 4.1) и, следовательно (теорема 3.2), является $B(\eta)$-изоморфизмом.

Отметим аналогию между только что доказанной теоремой и теоремой 3.3.2. Последняя играла важную роль в гомотопической классификации векторных расслоений. Аналогичную роль теорема 4.2 будет играть в гомотопической классификации главных расслоений и расслоенных пространств.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $\xi = (X, p, B)$ — главное G-расслоение и F — произвольное левое G-пространство. Ясно, что формула $(x, y)s = (xs, s^{-1}y)$ превращает произведение $X \times F$ в правое G-пространство. Пусть X_F — факторпространство $(X \times F) \operatorname{mod} G$, а p_F: $X_F \to B$ — отображение, композиция которого с проекцией $X \times F \to X_F$ совпадает со сквозным отображением $X \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} X \xrightarrow{p} B$. В явном виде это отображение определяется формулой

$$p_F((x, y)G) = p(x), \quad (x, y) \in X \times F.$$

5.1. Определение. Построенное расслоение (X_F, p_F, B) называется *расслоенным пространством* над B со слоем F, *ассоциированным* с главным G-расслоением ξ. Кратко это расслоенное пространство обозначается символом $\xi[F]$. Группа G называется *структурной группой* расслоенного пространства $\xi[F]$. Расслоенные пространства называются также *расслоениями со структурной группой*[1]).

Грубо говоря, каждое главное G-расслоение (X, p, B) состоит из некоторого множества экземпляров группы G, параметризованных пространством B и „склеенных“ топологией

---

[1]) В русской литературе расслоения со структурной группой называются также *косыми произведениями*. — *Прим. ред.*

пространства X. Ассоциированное с ним расслоенное пространство $\xi[F]$ состоит из экземпляров G-пространства F, также параметризованных пространством B и склеенных топологией факторпространства $X \times F \bmod G$.

5.2. Пример. Пусть ξ — главное $\mathbf{Z}_2$-пространство $S^1 \to RP^1 = S^1$, а F — отрезок $[-1, 1]$, рассматриваемый как левое $\mathbf{Z}_2$-пространство с действием, определенным формулой $(\pm 1)t = \pm t$. Тогда соответствующее расслоенное пространство $\xi[F]$

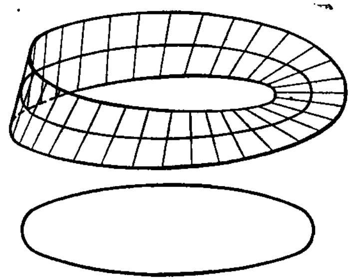

Рис. 3

(точнее, его пространство расслоения) представляет собой лист Мебиуса.

Процесс получения расслоенного пространства из главного расслоения проводится в этом случае с помощью „прикрепления" отрезка $[-1, 1]$ к двум точкам окружности S^1, лежащим над одной и той же точкой базы $RP^1 = S^1$, и „протаскивания" его в таком положении вдоль базы. В результате отрезок $[-1, 1]$ заметает, очевидно, лист Мебиуса. В общем случае строение пространства расслоения $\xi[F]$ отражает „скрученность" топологии пространства X и „скрученность" действия группы G на пространстве F.

Следующее предложение объясняет выбор термина „слой" для пространства F.

5.3. Предложение. *Каждый слой $p_F^{-1}(b)$, $b \in B$, произвольного расслоенного пространства $\xi[F] = (X_F, p_F, B)$ гомеоморфен F.*

Доказательство. Пусть $\xi = (X, p, B)$ — главное G-расслоение, с которым ассоциировано расслоенное пространство (X_F, p_F, B), и пусть x_0 и b — такие точки пространств X и B соответственно, что $p(x_0) = b$. Определим отображение $f\colon F \to X_F$ формулой $f(y) = (x_0, y)G$, $y \in F$. Поскольку $p_F((x_0, y)G) = p(x_0) = b$, мы можем рассматривать f как отображение пространства F в слой $p_F^{-1}(b)$. Для доказательства предложения достаточно, очевидно, показать, что отображение $f\colon F \to p_F^{-1}(b)$ является гомеоморфизмом.

Рассмотрим с этой целью отображение g_1: $p^{-1}(b) \times F \to F$, определенное формулой $g_1(x, y) = \tau(x_0, x) y$, где τ: $X^* \to G$ — отображение сдвига. Очевидно, что $g_1(xs, s^{-1}y) = g_1(x, y)$, так что отображение g_1 индуцирует некоторое непрерывное отображение g: $p_F^{-1} \to F$. Поскольку отображения f и g, как легко видеть, взаимно обратны, предложение тем самым полностью доказано.

6. ФУНКТОРИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть (u, f): $(X, p, B) \to (X', p', B')$ — морфизм главных расслоений и F — левое G-пространство. Морфизм (u, f) определяет G-морфизм $u \times 1_F$: $X \times F \to X' \times F$, индуцирующий некоторое отображение u_F: $X_F \to X'_F$. Это отображение вместе с отображением f задает, очевидно, морфизм расслоений (u_F, f): $\xi[F] \to \xi'[F]$, где $\xi = (X, p, B)$ и $\xi' = (X', p', B')$.

6.1. Определение. *Морфизмом* расслоенного пространства $\xi[F]$ в расслоенное пространство $\xi'[F]$ называется произвольный морфизм вида (u_F, f): $\xi[F] \to \xi'[F]$, где (u, f): $\xi \to \xi'$ — некоторый морфизм главных расслоений. При $B = B'$ и $f = 1_B$ морфизм u_F: $\xi[F] \to \xi'[F]$ называется морфизмом расслоенных пространств *над* B, или B-*морфизмом*.

Ясно, что расслоенные пространства со слоем F и структурной группой G и все их морфизмы составляют категорию. Оставшаяся часть этой главы почти целиком будет посвящена изучению этой категории.

6.2. Предложение. *Соответствия* $\xi \mapsto \xi[F]$ *и* $(u, f) \mapsto (u_F, f)$ *определяют функтор из категории главных* G-*расслоений в категорию расслоенных пространств со слоем* F *и структурной группой* G.

Доказательство. Для произвольных морфизмов (u, f): $\xi \to \xi'$ и (u', f'): $\xi' \to \xi''$ главных G-расслоений имеет место равенство $(u'u) \times 1_F = (u' \times 1_F)(u \times 1_F)$. Следовательно, переходя к индуцированным отображениям, мы получаем равенство $(u'u)_F = u'_F u_F$. Для завершения доказательства остается заметить, что отображение $(1_X)_F$ является, очевидно, тождественным отображением.

Легко видеть, что морфизм расслоенных пространств (u_F, f): $\xi[F] \to \xi'[F]$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда изоморфизмом является соответствующий морфизм (u, f): $\xi \to \xi'$ главных G-расслоений. В частности (см. теорему 3.2), *каждый морфизм расслоенных пространств над B является изоморфизмом.*

Это является примером того, что свойства расслоенных пространств представляют собой отражение свойств ассоциированных с ними главных расслоений. С другой стороны, свойства расслоенных пространств как просто расслоений отражают также и свойства действия группы G на слое F; см. упр. 4 и 5.

6.3. Предложение. *Пусть $\xi=(X, p, B)$ — главное G-расслоение и $\xi[F]$ — ассоциированное с ним расслоенное пространство. Тогда для каждого отображения $f\colon B_1 \to B$ существует канонический B_1-изоморфизм расслоений $g\colon f^*(\xi[F]) \to f^*(\xi)[F]$, обладающий тем свойством, что композиция*

$$f^*(\xi[F]) \xrightarrow{g} f^*(\xi)[F] \xrightarrow{(f_\xi)_F} \xi[F]$$

совпадает с морфизмом

$$f_{\xi[F]}\colon f^*(\xi[F]) \to \xi[F].$$

Доказательство. Точками пространства X_1 расслоения $f^*(\xi[F])$ являются по определению пары вида $(b_1, (x, y)G)$, где $f(b_1)=p_1((x, y)G)=p(x)$, а отображение $f_{\xi[F]}$ задается формулой $f_{\xi[F]}(b_1, (x, y)G)=(x, y)G$. С другой стороны, точками пространства X_2 расслоения $f^*(\xi)[F]$ являются орбиты вида $((b, x), y)G$, где $f(b)=p(x)$, а отображение $(f_\xi)_F$ задается формулой $(f_\xi)_F(((b_1, x), y)G)=(x, y)G$. Мы определим отображение g, полагая $g(b_1, (x, y)G)=((b_1, x), y)G$. Поскольку $(b_1, xs, s^{-1}y)=(b_1, x, y)$ для любых $b_1 \in B$, $x \in X$, $y \in F$ и $s \in G$, это отображение индуцируется каноническим G-изоморфизмом $B\times(X\times F)\to(B\times X)\times F$ и потому является изоморфизмом.

6.4. Следствие. *Для любого расслоенного пространства $\xi[F]$ над пространством B и любого подпространства $A\subset B$ расслоения $\xi[F]|A$ и $(\xi|A)[F]$ канонически изоморфны над A.*

7. ТРИВИАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНЫЕ РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть ξ — главное G-расслоение-произведение $(B\times G, p, B)$. Тогда для каждого левого G-пространства F расслоенное пространство $\xi[F]=(Y, q, B)$ изоморфно над B расслоению-произведению $(B\times F, p, B)$. Соответствующий B-изоморфизм $g\colon Y\to B\times F$ определяется формулой

$$g((b, s, y)G)=(b, sy).$$

7.1. Определение. Главные G-расслоения ξ и η над B называются *локально изоморфными*, если у каждой точки $b\in B$

существует такая открытая окрестность U, что расслоения $\xi|U$ и $\eta|U$ изоморфны (как главные расслоения). Расслоенные пространства $\xi[F]$ и $\eta[F]$ называются *локально изоморфными*, если локально изоморфны главные G-расслоения ξ и η.

7.2. Определение. Главное G-расслоение ξ над пространством B называется *тривиальным* (*локально тривиальным*), если оно изоморфно (локально изоморфно) главному G-расслоению-произведению. Расслоенное пространство $\xi[F]$ называется *тривиальным* (*локально тривиальным*), если тривиально (локально тривиально) главное расслоение ξ.

В силу следствия 6.4 тривиальное или локально тривиальное главное расслоение (расслоенное пространство) тривиально или соответственно локально тривиально и как просто расслоение. Обратное неверно: расслоенное пространство может быть тривиальным как расслоение, но нетривиальным как расслоенное пространство; см. упр. 4.

8. ОПИСАНИЕ СЕЧЕНИЙ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Следующая теорема имеет основное значение для классификации главных расслоений и расслоенных пространств. Она дает критерий тривиальности главного расслоения и некоторый способ построения морфизмов главных расслоений.

8.1. Теорема. *Пусть $\xi[F]$ — расслоенное пространство со слоем F, ассоциированное с главным G-расслоением $\xi=(X, p, B)$. Множество сечений расслоения $\xi[F]$ находится в биективном соответствии с множеством отображений $\varphi\colon X\to F$, для которых $\varphi(xt)=t^{-1}\varphi(x)$, $x\in X$, $t\in G$. Сечение, соответствующее отображению φ, задается формулой $s_\varphi(b)=(x, \varphi(x))G\in X_F$, где $b=xG\in B$.*

Доказательство. Так как в пространстве $X_F=X\times F \bmod G$ имеет место равенство $(xt, \varphi(xt))G=(xt, t^{-1}\varphi(x))G=(x, \varphi(x))G$, то отображение s_φ определено корректно. Оно индуцировано непрерывным отображением $x\longmapsto(x, \varphi(x))G$ и потому само непрерывно. Кроме того, ясно, что $p_F(s_\varphi(xG))=p_F((x, \varphi(x))G)=p(x)=xG$, так что отображение s_φ является сечением.

Обратно, пусть s — произвольное сечение расслоения $\xi[F]$. Для любой точки $x\in X$ существует такая точка $\varphi_s(x)\in F$, что $s(xG)=(x, \varphi_s(x))G$. Поскольку для любой точки $x\in X$ и любого элемента $t\in G$ имеет место равенство $(xt, \varphi_s(xt))G=s(xtG)=s(xG)=(x, \varphi_s(x))G=(xt, t^{-1}\varphi_s(x))G$, отображение $\varphi_s\colon X\to F$ удовлетворяет соотношению $\varphi_s(xt)=t^{-1}\varphi_s(x)$.

Ясно, что соответствия $\varphi \longmapsto s_\varphi$ и $s \longmapsto \varphi_s$ взаимно обратны. Поэтому для доказательства теоремы нужно только доказать непрерывность отображения φ_s. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in \varphi_s(x_0)$, $b_0 = p(x_0)$, $s(b_0) = (x_0, y_0)G$, и пусть W — произвольная открытая окрестность точки $y_0 \in F$. Поскольку действие группы G на пространстве F непрерывно, существует такая открытая окрестность W' точки y_0 и такая открытая окрестность N точки $1 \in G$, что $NW' \subset W$. Пусть V — окрестность точки $x_0 \in X$, для которой $\tau((V \times V) \cap X^*) \subset N$, где τ — отображение сдвига для G-пространства X. В силу непрерывности сечения s существует такая открытая окрестность U точки $b_0 \in B$, что $s(U) \subset (V \times W') \bmod G$. Заменим V на $p^{-1}(U) \cap V$. Тогда соотношение $s(U) \subset (V \times W') \bmod G$ сохранится и будет иметь место равенство $p(V) = U$. Пусть $x \in V$ и $b = p(x) \in U$. Тогда $s(b) = (x', y')G$, где $x' \in V$ и $y' \in W'$. Так как $(x', y')G = (x\tau(x, x'), y')G = (x, \tau(x, x')y')G$, то $\varphi_s(x) = \tau(x, x')y' \in NW' \subset W$. Таким образом, $\varphi_s(V) \subset W$ и, следовательно, отображение φ_s непрерывно. Тем самым теорема полностью доказана.

Заметим, что отображения φ_s: $X \to F$ являются G-морфизмами относительно действия группы G на пространстве F справа. Отсюда вытекает

8.2. Следствие. *Каждый морфизм $\xi \to \xi'$ главных G-расслоений $\xi = (X, p, B)$ и $\xi' = (X', p', B')$ имеет вид (φ_s, f), где s — некоторое сечение расслоения $\xi[X']$, а $f = (p'_X)s$ (в последнем равенстве использовано естественное отождествление $X_{X'} = X'_X$).*

Доказательство. Согласно теореме 8.1, множество сечений расслоения $\xi[X']$ находится в биективном соответствии с множеством G-морфизмов φ_s: $X \to X'$, т. е. таких отображений φ_s, что $\varphi_s(xt) = t^{-1}\varphi_s(x) = \varphi_s(x)t$. Как было замечено, в п. 3.1, каждый G-морфизм φ_s однозначно дополняется до некоторого морфизма (φ_s, f) главных G-расслоений, причем $f(xG) = \varphi_s(x)G = p'_X(\varphi_s(x))$ для любой точки $x \in X$. С другой стороны, $s(xG) = (x, \varphi_s(x))G$ и $p'_X(s(xG)) = p'_X((x, \varphi_s(X))G) = p'_X(\varphi_s(x))$. Следовательно, $f = (p'_X)s$.

Ситуация, описанная в следствии 8.2, может быть изображена диаграммой

$$\begin{tikzcd} X_{X'} = X \times X' \bmod G = X'_X \arrow[d, "p_{X'}"'] \arrow[d, shift left=20ex, "p'_X"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

Следствие 8.2 сводит проблему существования морфизмов главных расслоений $\xi \to \xi'$ к более легкой проблеме существования сечений. В частности, можно воспользоваться результатами разд. 7 гл. 2. Это следствие является решающим шагом в гомотопической классификации локально тривиальных расслоенных пространств и играет для них ту же роль, что и факт существования гауссовых отображений для векторных расслоений.

8.3. Следствие. *Для любого главного G-расслоения $\xi = (X, p, B)$ следующие утверждения равносильны:*

(1) *расслоение ξ обладает сечением;*

(2) *расслоение ξ изоморфно расслоению $f^*(\eta)$, где η есть G-расслоение-произведение над одной точкой, а f — постоянное отображение в эту точку;*

(3) *расслоение ξ тривиально.*

Доказательство. Как расслоение главное G-расслоение ξ совпадает с расслоением $\xi[G]$. Поэтому (теорема 8.1) множество сечений расслоения ξ находится в биективном соответствии с такими отображениями φ: $X \to G$, что $\varphi(xt) = t^{-1}\varphi(x) = \varphi(x)t$. Каждое такое отображение φ индуцирует, очевидно, постоянное отображение f: $B \to *$. Следовательно, согласно теореме 4.2, расслоение ξ изоморфно расслоению $f^*(\eta)$. Это доказывает равносильность утверждений (1) и (2). Тот факт, что из утверждения (3) следует утверждение (1), очевиден, а тот факт, что из утверждения (2) следует утверждение (3), непосредственно вытекает из того, что расслоение, индуцированное тривиальным расслоением, также тривиально.

9. НУМЕРИРУЕМЫЕ ГЛАВНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД ПРОСТРАНСТВОМ $B \times [0, 1]$

В этом разделе мы преследуем ту же цель, что и в разд. 4 гл. 3. Однако вместо рассмотрения произвольных расслоений над паракомпактным пространством мы предпочтем здесь рассматривать лишь нумерируемые расслоения, но зато над произвольным пространством.

9.1. Определение. Открытое покрытие $\{U_i\}_{i \in S}$ топологического пространства B называется *нумерируемым*, если существует такое (локально конечное) разбиение единицы $\{u_i\}_{i \in S}$, что $\overline{u_i^{-1}((0, 1])} \subset U_i$ для каждого $i \in S$.

Хорошо известно, что хаусдорфово пространство паракомпактно тогда и только тогда, когда каждое его открытое покрытие нумерируемо.

9.2. Определение. Главное G-расслоение ξ над пространством B называется *нумерируемым*, если существует такое нумерируемое покрытие $\{U_i\}_{i\in S}$ пространства B, что ограничение $\xi | U_i$ расслоения ξ над каждым множеством U_i является тривиальным расслоением.

Ясно, что каждое нумерируемое главное G-расслоение локально тривиально и каждое локально тривиальное главное G-расслоение над паракомпактным пространством нумерируемо.

9.3. Предложение. *Для любого отображения $f\colon B' \to B$ и произвольного нумерируемого расслоения ξ над пространством B расслоение $f^*(\xi)$ над пространством B' нумерируемо.*

Доказательство. По определению существует такое открытое покрытие $\{U_i\}_{i\in S}$ пространства B и такое локально конечное разбиение единицы $\{u_i\}_{i\in S}$, что для каждого $i\in S$ расслоение $\xi | U_i$ тривиально и имеет место включение $\overline{u_i^{-1}((0, 1])}\subset U_i$. Но тогда семейство $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in S}$ является, очевидно, открытым покрытием пространства B', а семейство $\{u_i f\}_{i\in S}$ — локально конечным разбиением единицы, причем для каждого $i\in S$ расслоение $f^*(\xi) | f^{-1}(U_i)$ тривиально и имеет место включение $\overline{(u_i f)^{-1}((0, 1])}\subset f^{-1}(U_i)$. Следовательно, расслоение $f^*(\xi)$ нумерируемо.

Гомотопическая теория нумерируемых расслоений строится совершенно аналогично гомотопической теории векторных расслоений (см. разд. 4 гл. 3). При этом сохраняются и основные этапы доказательств. Мы будем их только вкратце намечать, оставляя читателю в качестве упражнения подробное проведение соответствующих рассуждений. Однако места, в которых аналогия нарушается, мы будем излагать во всех деталях.

9.4. Лемма. *Если для главного G-расслоения ξ над пространством $B = B_1 \cup B_2$, где $B_1 = A\times[a, c]$ и $B_2 = A\times[c, b]$, $a<c<b$, расслоения $\xi | B_1$ и $\xi | B_2$ тривиальны, то тривиально и расслоение ξ.*

Эта лемма доказывается точно так же, как лемма 3.4.1, если заметить, что любой автоморфизм $h\colon B\times G \to B\times G$ ввиду соотношения $h(b, s) = h(b, 1)s$ задается формулой $h(b, s) = (b, g(b)s)$, где $g\colon B\to G$ — некоторое отображение, определяемое из условия $(b, g(b)) = h(b, 1)$.

Следующая лемма (принадлежащая Дольду [4]) аналогична лемме 3.4.2, но для ее доказательства требуются более деликатные соображения.

9.5. Лемма. *Для любого нумерируемого G-расслоения ξ над пространством $B \times I$ (где $I = [0, 1]$) существует такое нумерируемое покрытие $\{U_i\}_{i \in S}$ пространства B, что для каждого $i \in S$ расслоение $\xi \mid (U_i \times I)$ тривиально.*

Доказательство. Пусть $\{v_j\}_{j \in J}$ — такое (локально конечное) разбиение единицы для пространства $B \times I$, что все расслоения $\xi \mid v_j^{-1}(0, 1]$, $j \in J$, тривиальны. Для каждого набора r элементов $\mathbf{k} = (k(1), \ldots, k(r)) \in J^r$ определим непрерывную функцию $v_{\mathbf{k}}\colon B \to I$ формулой $v_{\mathbf{k}}(x) = \prod_{1 \leqslant q \leqslant r} \min\{v_{k(q)}(x, t)\}$, где минимум берется по всем $t \in [(q-1)/r, q/r]$. Ясно, что $v_{\mathbf{k}}(x) > 0$ тогда и только тогда, когда для каждого $q = 1, 2, \ldots, r$ имеет место включение $\{x\} \times [(q-1)/r, q/r] \subset v_{k(q)}^{-1}(0, 1]$. Следовательно, согласно лемме 9.4, расслоение $\xi \mid v_{\mathbf{k}}^{-1}(0, 1] \times I$ тривиально. Таким образом, для доказательства леммы достаточно доказать, что семейство открытых множеств $\{v_{\mathbf{k}}^{-1}(0, 1]\}$ для всех $\mathbf{k} \in J^r$ и всех r является нумерируемым покрытием пространства B.

У каждой точки $(x, t) \in B \times I$ существует окрестность, содержащаяся в одном из открытых множеств $v_i^{-1}(0, 1]$ и пересекающаяся только с конечным числом других множеств $v_j^{-1}(0, 1]$. Поскольку отрезок I компактен, отсюда следует, что для каждой точки $x \in B$ существует такая ее окрестность N и такое натуральное число r, что:

(1) для любого $q = 1, 2, \ldots, r$ существует такой индекс $k(q) \in J$, что $N \times [(q-1)/r, q/r] \subset v_{k(q)}^{-1}(0, 1]$;

(2) множество $N \times I$ пересекается только с конечным числом множеств $v_j^{-1}(0, 1]$, $j \in J$.

Из свойства (1) следует, что семейство $\{v_{\mathbf{k}}^{-1}(0, 1]\}$ является покрытием пространства B, а из свойства (2) — что для любого фиксированного r семейство $\{v_{\mathbf{k}}^{-1}(0, 1]\}_{\mathbf{k} \in J^r}$ локально конечно.

Уменьшим теперь функции $v_{\mathbf{k}}$ так, чтобы получить локально конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{v_{\mathbf{k}}^{-1}(0, 1]\}$. Рассмотрим с этой целью сумму $w_r(x)$ всех функций $v_{\mathbf{k}}(x)$, для которых $\mathbf{k} = (k(1), \ldots, k(s))$, $s < r$, и для любого $\mathbf{k} \in J^r$ положим

$$u_{\mathbf{k}}(x) = \max(0, v_{\mathbf{k}}(x) - r w_r(x)).$$

Для каждой точки $x \in B$ существует такой набор $\mathbf{k} = (k(1), \ldots, k(r))$ с наименьшим r, что $v_{\mathbf{k}}(x) > 0$. Так как r минимально, то $w_r(x) = 0$ и, следовательно, $u_{\mathbf{k}}(x) = v_{\mathbf{k}}(x)$. Поэтому множества $u_{\mathbf{k}}^{-1}(0, 1]$ также образуют открытое покрытие пространства B. Пусть, далее, $m > r$ — такое целое число, что $v_{\mathbf{k}}(x) > \frac{1}{m}$. Тогда $w_m(x) > \frac{1}{m}$, и поэтому $mw_m(y) > 1$ для всех точек y из некоторой окрестности точки x. Поскольку в этой окрестности каждая функция $u_{\mathbf{k}}$, отвечающая набору $\mathbf{k} = (k(1), \ldots, k(s))$ с $s \geqslant m$, равна нулю, тем самым доказано, что семейство функций $\{u_{\mathbf{k}}\}$ локально конечно. Поскольку оно, очевидно, является разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{v_{\mathbf{k}}^{-1}(0, 1]\}$, лемма 9.5 тем самым полностью доказаиа.

Следующая теорема, аналогичная теореме 3.4.3 для векторных расслоений, является основным этапом в построении гомотопической теории нумерируемых главных G-расслоений. Идея ее доказательства принадлежит Милнору, использовавшему аналогичные соображения в теории микрорасслоений.

9.6. Теорема. *Для любого нумерируемого главного G-расслоения ξ над пространством $B \times I$ существует G-морфизм вида (g, r): $\xi \to \xi$, где r: $B \times I \to B \times I$ — отображение, заданное формулой $r(b, t) = (b, 1)$.*

Доказательство. Согласно лемме 9.5, существует такое нумерируемое покрытие $\{U_i\}_{i \in S}$ пространства B, что все расслоения $\xi | (U_i \times I)$ тривиальны. Пусть h_i: $U_i \times I \times G \to p^{-1}(U_i \times I)$ — соответствующие $U_i \times I$-изоморфизмы главных G-расслоений. Из разбиения единицы, подчиненного покрытию $\{U_i\}$, без труда строится подчиненная этому покрытию огибающая единицы, т. е. такое семейство непрерывных функций u_i: $B \to [0, 1]$, что $u_i^{-1}(0, 1] \subset U_i$ для любого $i \in S$ и $\max\limits_{i \in S} u_i(b) = 1$ для каждой точки $b \in B$. Для каждого $i \in S$ мы определим морфизм (g_i, r_i): $\xi \to \xi$, полагая $r_i(b, t) = (b, \max(u_i(b), t))$ и $g_i(h_i(b, t, s)) = h_i(b, \max(u_i(b), t), s)$ при $(b, t, s) \in U_i \times I \times G$ (и считая g_i тождественным отображением вне $p^{-1}(U_i \times I)$). У каждой точки $b \in B$ существует такая окрестность $U(b)$, что пересечение $U(b) \cap U_i$ не пусто только для конечного множества индексов $i(1), \ldots, i(n)$. Считая множество S вполне упорядоченным, а индексы $i(1), \ldots, i(n)$ занумерованными так, что $i(1) < i(2) < \ldots < i(n)$, определим отображение r на пространстве $U(b) \times I$ формулой $r = r_{i(n)} \ldots r_{i(1)}$, а отображение g на пространстве $p^{-1}(U(b) \times I)$ формулой $g = g_{i(n)} \ldots g_{i(1)}$. Поскольку при любом $i \neq i(1), \ldots, i(n)$ отображение r_i тождественно на $U(b) \times I$, а отображение g_i тождественно на $p^{-1}(U(b)\times I)$, мы можем рассматривать отображения g и r как бесконечные композиции отображений g_i и r_i, $i\in S$. Без труда проверяется, что построенные таким образом отображения g и r составляют морфизм (g, r): $\xi\to\xi$. Тем самым теорема полностью доказана.

9.7. Следствие. *В условиях теоремы* 9.6 *главное G-расслоение ξ изоморфно над $B\times I$ главному G-расслоению $r^*(\xi)$.*

Для произвольного главного G-расслоения $\xi=(X, p, B)$ и любого локально компактного пространства W формула $(x, w)s=(xs, w)$ определяет на произведении $X\times W$ строение правого G-пространства. Отображение сдвига τ_1 для этого G-пространства имеет вид $\tau_1((x, w), (x', w))=\tau(x, x')$, где τ — отображение сдвига для G-пространства X. При этом гомеоморфизм φ: $(X\times W)\operatorname{mod}G\to(X\operatorname{mod}G)\times W$, определенный формулой $\varphi((x, w)G)=(xG, w)$, позволяет рассматривать естественное отображение отождествления $X\times W\to(X\times W)\operatorname{mod}G$ как проекцию некоторого главного G-расслоения над пространством $B\times W$. Это главное G-расслоение мы будем обозначать символом $\xi\times W$. Как правило, эта конструкция нам будет нужна лишь при $W=I$.

9.8. Теорема. *Для любого нумерируемого главного G-расслоения ξ над пространством $B\times I$ расслоения ξ, $(\xi|(B\times 1))\times I$ и $(\xi|(B\times 0))\times I$ изоморфны. Кроме того, индуцированные расслоения $\varepsilon_0^*(\xi)$ и $\varepsilon_1^*(\xi)$, где ε_i: $B\to B\times I$, $i=0, 1$, — отображения, заданные формулами $\varepsilon_i(b)=(b, i)$, также изоморфны (над B).*

Доказательство. Согласно следствию 9.7, расслоение ξ изоморфно главному G-расслоению $r^*(\xi)$, где r — отображение, определенное формулой $\tau(b, t)=(b, 1)$. С другой стороны, ясно, что расслоение $r^*(\xi)$ изоморфно расслоению $(\xi|(B\times 1))\times I$. Следовательно, главные G-расслоения ξ и $(\xi|(B\times 1))\times I$ изоморфны. Изоморфизм расслоений ξ и $(\xi|(B\times 0))\times I$ устанавливается аналогично.

Наконец, так как $r\varepsilon_0=\varepsilon_1$ и так как расслоения $r^*(\xi)|(B\times 0)$ и $\xi|(B\times 0)$ изоморфны, то расслоение $\varepsilon_1^*(\xi)=\varepsilon_0^*r^*(\xi)$ изоморфно расслоению $\varepsilon_0^*(\xi)$.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

9.9. Теорема. *Для любого нумерируемого главного G-расслоения над пространством B и любой гомотопии f_t: $B'\to B$ главные G-расслоения $f_0^*(\xi)$ и $f_1^*(\xi)$ изоморфны над B'.*

Доказательство. Пусть f — отображение $B'\times I\to B$, соответствующее гомотопии f_t, и пусть, как и выше, ε_i: $B'\to$

$\to B' \times I$ — отображения, определенные формулами $\varepsilon_i(b) = (b, i)$, $i = 0, 1$. Очевидно, что $f_i = f\varepsilon_i$. Следовательно, расслоение $f_i^*(\xi)$ изоморфно расслоению $\varepsilon_i^* f^*(\xi)$. Но, согласно теореме 9.8, расслоения $\varepsilon_0^* f^*(\xi)$ и $\varepsilon_1^* f^*(\xi)$ изоморфны. Поэтому изоморфны и расслоения $f_0^*(\xi)$ и $f_1^*(\xi)$.

10. ФУНКТОР k_G

Для каждого пространства B мы будем обозначать символом $k_G(B)$ множество классов изоморфных главных нумерируемых G-расслоений над B. Класс расслоения ξ мы будем обозначать при этом символом $\{\xi\}$. Каждому классу гомотопных отображений $[f]$: $X \to Y$ мы поставим в соответствие отображение $k_G([f])$: $k_G(Y) \to k_G(X)$, определенное формулой $k_G([f])\{\xi\} = \{f^*(\xi)\}$. Согласно теореме 4.2, класс $\{f^*(\xi)\}$ не зависит от выбора представителя в классе $\{\xi\}$, а согласно теореме 9.9, он не зависит и от выбора представителя f в классе $[f]$. Следовательно, определение отображения $k_G([f])$ корректно.

Пусть $\mathscr{H}$ — как обычно, категория всех пространств с классами гомотопных отображений в качестве морфизмов.

10.1. Теорема. *Построенные выше отображения k_G составляют контравариантный функтор*

$$k_G\colon \mathscr{H} \to \mathscr{E}ns.$$

Доказательство. Пусть f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$ — произвольные отображения, а ξ — произвольное нумерируемое главное G-расслоение над пространством Z. Тогда, согласно предложению 2.5.7, расслоения $(gf)^*(\xi)$ и $f^*(g^*(\xi))$ изоморфны над X. Следовательно, $k_G([g][f]) = k_G([f])k_G([g])$. Кроме того, расслоения ξ и $1_Z^*(\xi)$, очевидно, изоморфны. Следовательно, отображение $k_G(1_Z)$ множества $k_G(Z)$ является его тождественным отображением.

Из общих свойств функторов теперь непосредственно вытекает

10.2. Следствие. *Для любой гомотопической эквивалентности f: $X \to Y$ отображение $k_G([f])$: $k_G(Y) \to k_G(X)$ биективно.*

В свою очередь отсюда вытекает

10.3. Следствие. *Каждое нумерируемое главное G-расслоение над стягиваемым пространством X тривиально.*

Доказательство. Для топологического пространства $*$, состоящего из одной точки, множество $k_G(*)$ состоит только из одного элемента, соответствующего тривиальному расслоению. Поэтому ввиду следствия 10.2 множество $k_G(X)$ состоит из одного элемента и для любого стягиваемого пространства X.

Пусть $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ — фиксированное нумерируемое главное G-расслоение. Поставим в соответствие каждому пространству X отображение $\varphi_\omega(X)$: $[X, B_0] \to k_G(X)$, определенное формулой $\varphi_\omega(X)[u] = \{u^*(\omega)\}$. Согласно теореме 9.9, отображение $\varphi_\omega(X)$ определено корректно.

10.4. Предложение. *Отображения* $\varphi_\omega(X)$: $[X, B_0] \to k_G(X)$ *составляют морфизм*

$$\varphi_\omega\colon [-, B_0] \to k_G$$

функтора $[-, B_0]$ *в функтор* k_G.

Доказательство. Пусть f: $X \to Y$ — произвольное отображение и $[u]$ — произвольный элемент множества $[Y, B_0]$. Тогда

$$\varphi_\omega(X)[[f], B_0][u] = \varphi_\omega(X)([u][f]) = \{(uf)^*(\omega)\}$$

и

$$k_G([f])\varphi_\omega(Y)[u] = k_G([f])\{u^*(\omega)\} = \{f^*(u^*(\omega))\}.$$

Следовательно, $\varphi_\omega(X)[[f], B_0] = k_G([f])\varphi_\omega(Y)$. Но это и означает, что φ_ω представляет собой морфизм функторов.

10.5. Определение. Нумерируемое главное G-расслоение $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ называется *универсальным*, если соответствующий ему морфизм функторов φ_ω: $[-, B_0] \to k_G$ является изоморфизмом. База B_0 универсального расслоения $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ называется *классифицирующим пространством* группы G.

Заметим, что морфизм φ_ω: $[-, B_0] \to k_G$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда каждое отображение $\varphi_\omega(X)$: $[X, B_0] \to k_G(X)$ биективно.

10.6. Предложение. *Нумерируемое главное G-расслоение $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ тогда и только тогда универсально, когда выполнены следующие условия:*

(1) *для каждого нумерируемого главного G-расслоения ξ над произвольным пространством X существует такое отображение f: $X \to B_0$, что расслоение ξ изоморфно над X расслоению $f^*(\omega)$;*

(2) *если для отображений f, g: $X \to B_0$ расслоения $f^*(\omega)$ и $g^*(\omega)$ изоморфны над X, то отображения f и g гомотопны.*

Доказательство. Условие (1) означает, что отображение $\varphi_\omega(X)$ надъективно, а условне (2) — что это отображение инъективно.

10.7. Определение. Расслоение ω называется *n-универсальным*, или универсальным *до размерности* n, если отображение $\varphi_\omega(X)$ биективно для каждого клеточного разбиения X, для которого $\dim X \leqslant n$.

11. КОНСТРУКЦИЯ МИЛНОРА

В этом разделе излагается простая и элегантная конструкция некоторого G-расслоения, принадлежащая Милнору. В следующем разделе будет доказано, что построенное таким образом G-расслоение универсально.

11.1. Определение. Пусть G — произвольная топологическая группа. Рассмотрим соединение

$$E_G = G * G * G * \ldots$$

бесконечного числа экземпляров группы G. По определению каждая точка этого соединения имеет вид

$$\langle x, t\rangle = (t_0x_0,\ t_1x_1,\ \ldots,\ t_kx_k,\ \ldots),$$

где $x_i \in G$, $t_i \in [0, 1]$, причем только конечное число элементов t_i отлично от нуля и $\sum t_i = 1$. Две точки $\langle x, t\rangle$ и $\langle x', t'\rangle$ множества E_G считаются одинаковыми, если $t_i = t'_i$ для всех i и $x_i = x'_i$ для тех индексов i, для которых $t_i = t'_i > 0$. (Таким образом, у двух одинаковых точек $\langle x, t\rangle$, $\langle x', t'\rangle \in E_G$ координаты x_i и x'_i при $t_i = t'_i = 0$ могут быть различными.) На множестве E_G мы определим действие группы G формулой

$$\langle x, t\rangle\, y = \langle xy, t\rangle, \quad y \in G,$$

т. е. формулой $(t_0x_0,\ t_1x_1,\ \ldots)\, y = (t_0x_0y,\ t_1x_1y,\ \ldots)$.

Чтобы ввести на множестве E_G топологию, мы для любого $i \geqslant 0$ рассмотрим отображение $t_i\colon E_G \to [0, 1]$, сопоставляющее каждой точке $(t_0x_0,\ t_1x_1,\ \ldots)$ ее координату $t_i \in [0, 1]$, и отображение $x_i\colon t_i^{-1}(0, 1] \to G$, сопоставляющее каждой точке $(t_0x_0,\ t_1x_1,\ \ldots) \in t_i^{-1}(0, 1]$ ее координату $x_i \in G$. (Вне $t_i^{-1}(0, 1]$ отображение x_i не определено.) Ясно, что отображения t_i и x_i согласованы с действием группы G (иными словами, $x_i(ay) = x_i(a)\,y$ и $t_i(ay) = t_i(a)$ для любого элемента $y \in G$). Мы зададим на E_G слабейшую топологию, в которой отображения t_i и x_i непрерывны и множества $t_i^{-1}(0, 1]$ являются подпространствами. Легко видеть, что в этой топологии отображение $E_G \times G \to E_G$, задающее действие группы G на E_G, непрерывно. Таким образом, множество E_G является G-пространством.

Соответствующее этому G-пространству G-расслоение мы будем обозначать символом ω_G, а его базу $E_G \bmod G$ — символом B_G.

11.2. Теорема. *Построенное G-расслоение $\omega_G = (E_G, p, B_G)$ является нумерируемым главным G-расслоением.*

Доказательство. Докажем сначала, что G-расслоение ω_G главное, т. е. что соответствующее ему отображение сдвига τ непрерывно. Это отображение определено на подпространстве E_G^* произведения $E_G \times E_G$, состоящем из всевозможных пар (a, a'), для которых $p(a) = p(a')$, и, как легко видеть, на каждом открытом множестве вида $(t_i^{-1}(0, 1] \times t_i^{-1}(0, 1]) \cap E_G^*$ задается формулой $\tau(a, a') = x_i(a) x_i(a')^{-1}$. Следовательно, на каждом множестве $(t_i^{-1}(0, 1] \times t_i^{-1}(0, 1]) \cap E_G^*$ отображение τ непрерывно. Но ясно, что эти множества покрывают все пространство E_G^*. Поэтому отображение τ непрерывно и на всем пространстве E_G^*.

Докажем теперь, что расслоение ω_G локально тривиально. С этой целью заметим, что, поскольку для любого $i \geqslant 0$ имеют место соотношения $t_i(ay) = t_i(a)$, $y \in G$, формула $u_i p = t_i$ однозначно определяет некоторую непрерывную функцию $u_i \colon B_G \to [0, 1]$. Ясно, что открытые множества $V_i = u_i^{-1}(0, 1] = p(t_i^{-1}(0, 1])$ составляют покрытие пространства B_G. Покажем, что над каждым из этих множеств расслоение ω_G тривиально. Как мы знаем (следствие 8.3), для этого достаточно построить над V_i хотя бы одно сечение расслоения ω_G. Пусть отображение $s_i' \colon t_i^{-1}(0, 1] \to t_i^{-1}(0, 1]$ определено формулой $s_i'(a) = a x_i(a)^{-1}$. Поскольку для любого элемента $y \in G$ имеет место равенство

$$s_i'(ay) = ay(x_i(ay))^{-1} = ay(x_i(ay))^{-1} = \\ = ayy^{-1}x_i(a)^{-1} = ax_i(a)^{-1} = s_i'(a),$$

формула $s_i' = s_i p$ однозначно определяет некоторое отображение $s_i \colon V_i \to t_i^{-1}(0, 1] \subset E_G$. С другой стороны, ясно, что для каждой точки $a \in t_i^{-1}(0, 1]$ имеет место равенство $p(s_i'(a)) = p(a)$, а потому для каждой точки $b \in V_i$ — равенство $ps_i(b) = b$. Таким образом, для каждого i отображение s_i является сечением расслоения ω_G над V_i. Тем самым тривиальность расслоения $\omega_G \mid V_i$ полностью доказана.

Докажем, наконец, нумерируемость расслоения ω_G. Для этого достаточно доказать нумерируемость покрытия $\{V_i\}$, т. е. существование на B_G такого (локально конечного) разбиения единицы $\{v_i\}$, что $v_i^{-1}(0, 1] \subset V_i$ для любого i. С этой целью мы рассмотрим функции w_i: $B_G \to [0, 1]$, определенные формулой $w_i(b) = \max\left(0, u_i(b) - \sum_{j<i} u_j(b)\right)$. Ясно, что каждая функция w_i непрерывна и $w_i^{-1}(0, 1] \subset V_i$. Для любой точки $b \in B_G$ обозначим через m наименьший, а через n наибольший индекс i, для которого $u_i(b) \neq 0$. Тогда $\sum_{m \leqslant i \leqslant n} u_i(b) = 1$, и потому $u_m(b) = w_m(b)$. Это показывает, что открытые множества $w_i^{-1}(0, 1]$ покрывают пространство B_G. Далее, $u_i(b) = 0$ при $i > n$, и потому $w_i(b') = 0$ для всех точек b', для которых $\sum_{0 \leqslant i \leqslant n} u_i(b') > \frac{1}{2}$. Последнее неравенство определяет некоторую открытую окрестность $N_n(b)$ точки b, и, согласно сказанному, пересечение $N_n(b) \cap w_i^{-1}(0, 1]$ пусто для всех $i > n$. Следовательно, открытое покрытие $\{w_i^{-1}(0, 1)\}$ локально конечно. Полагая теперь $v_i = w_i / \sum_j w_j$, мы и получим, очевидно, требуемое разбиение единицы $\{v_i\}$. Теорема полностью доказана.

Отметим, что пространства E_G и B_G обладают естественными фильтрациями

$$\ldots \subset E_G(n) \subset E_G(n+1) \subset \ldots \subset E_G,$$
$$\ldots \subset B_G(n) \subset B_G(n+1) \subset \ldots \subset B_G,$$

где $p(E_G(n)) = B_G(n)$ и $(t_0x_0, t_1x_1, \ldots) \in E_G(n)$, если $t_i = 0$ при всех $i > n$.

11.3. Пример $G = \mathbf{Z}_2$. В этом случае пространство $E_G(n)$ с точностью до гомеоморфизма является, очевидно, n-мерной сферой S^n, а нетривиальный элемент группы $\mathbf{Z}_2$ определяет на $E_G(n) = S^n$ антиподальное отображение. Следовательно, пространство $B_G(n)$ является проективным пространством RP^n. Вложения $E_G(n) \subset E_G(n+1)$ и $B_G(n) \subset B_G(n+1)$ совпадают, как легко видеть, с естественными вложениями $S^n \subset S^{n+1}$ и $RP^n \subset RP^{n+1}$, так что $E_G = S^\infty$ и $B_G = RP^\infty$.

Расслоение (S^{n+1}, p, RP^{n+1}) универсально до размерности n (см. ниже теорему 13.1).

11.4. Пример $G = S^1$. В этом случае пространство $E_G(n)$ с точностью до гомеоморфизма совпадает, как легко видеть, с $(2n+1)$-мерной сферой S^{2n+1} (которую мы будем рассматривать как единичную сферу $(n+1)$-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^{n+1}$, т. е. будем ее точками считать такие $(n+1)$-членные последовательности $(z_0, \ldots, z_n)$ комплексных чисел, что $|z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1$), а действие группы S^1 на $E_G(n) = S^{2n+1}$ задается формулой $(z_0, z_1, \ldots, z_n)e^{i\theta} = (e^{i\theta}z_0, e^{i\theta}z_1, \ldots, e^{i\theta}z_n)$, где $(z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1}$ и $e^{i\theta} \in S^1$. Пространство $B_G(n)$ является комплексным проективным пространством CP^n, а вложения $E_G(n) \subset E_G(n+1)$ и $B_G(n) \subset B_G(n+1)$ совпадают с естественными вложениями $S^{2n+1} \subset S^{2n+3}$ и $CP^n \subset CP^{n+1}$. Следовательно, $E_G = S^\infty$ и $B_G = CP^\infty$.

Расслоение (S^{2n+1}, p, CP^n) универсально до размерности $2n$ (см. ниже теорему 13.1).

12. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ НУМЕРИРУЕМЫХ ГЛАВНЫХ G-РАССЛОЕНИЙ

В этом разделе будет доказано, что построенное выше главное G-расслоение ω_G универсально.

12.1. Предложение. *Для любого нумерируемого главного G-расслоения ξ над пространством B существует такое счетное разбиение единицы $\{u_n\}_{n \geqslant 1}$, что для каждого n расслоение $\xi \mid u_n^{-1}(0, 1]$ тривиально.*

Доказательство. По условию на пространстве B существует разбиение единицы $\{v_i\}_{i \in T}$, для которого все расслоения $\xi \mid v_i^{-1}(0, 1]$, $i \in T$, тривиальны. Для каждой точки $b \in B$ мы рассмотрим конечное множество $S(b)$ индексов $i \in T$, для которых $v_i(b) > 0$, и для каждого конечного подмножества $S \subset T$ — открытое множество $W(S)$ точек $b \in B$, для которых $v_i(b) > v_j(b)$ при любых $i \in S$ и $j \in T \setminus S$. Иначе множество $W(S)$ можно определить формулой $W(S) = u_S^{-1}(0, 1]$, где $u_S\colon B \to [0, 1]$ — непрерывное отображение, заданное равенством

$$u_S(b) = \max\left[0, \min_{i \in S,\, j \in T \setminus S} (v_i(b) - v_j(b))\right].$$

Легко видеть, что если конечные подмножества S и S' множества T не содержатся одно в другом, то пересечение $W(S) \cap W(S')$ пусто. В самом деле, в этом случае существуют индексы $i \in S \setminus S'$, $j \in S' \setminus S$ и для этих индексов $v_i(b) > v_j(b)$, если $b \in W(S)$, и $v_j(b) > v_i(b)$, если $b \in W(S')$. Поэтому никакая точка b пересечению $W(S) \cap W(S')$ принадлежать не может. В частности, пересечение $W(S) \cap W(S')$ пусто, если $S \neq S'$ и $\operatorname{Card} S = \operatorname{Card} S'$, где $\operatorname{Card} S$ обозначает, как обычно, число элементов множества S.

Пусть теперь

$$W_m = \bigcup_{\mathrm{Card}\, S=m} W(S), \quad w_m(b) = \sum_{\mathrm{Card}\, S=m} u_S(b).$$

Тогда $w_m^{-1}(0, 1] = W_m$ и функции $u_m(b) = \dfrac{w_m(b)}{\sum\limits_{n \geqslant 0} w_n(b)}$ составляют некоторое счетное разбиение единицы пространства B. Для завершения доказательства осталось показать, что для каждого n расслоение $\xi \mid W_n$ тривиально. Но это очевидно, поскольку расслоения $\xi \mid W(S)$ тривиальны, а множество W_n является объединением непересекающихся множеств $W(S)$.

Следующая теорема показывает, что для главного G-расслоения ω_G выполнено условие (1) указанного в предложении 10.6 критерия универсальности.

12.2. Теорема. *Для каждого нумерируемого главного G-расслоения ξ над пространством B существует такое отображение $f\colon B \to B_G$, что расслоение $f^*(\omega_G)$ изоморфно над B (как главное G-расслоение) расслоению ξ.*

Доказательство. Согласно теореме 4.2, для доказательства изоморфности расслоений ξ и $f^*(w_G)$ достаточно построить хотя бы один G-морфизм расслоений $(g, f)\colon \xi \to \omega_G$. При этом, согласно предложению 9.3, мы можем считать, что на B существует такое счетное разбиение единицы $\{u_n\}_{n \geqslant 1}$, что для каждого n расслоение $\xi \mid U_n$, где $U_n = u_n^{-1}(0, 1]$, тривиально. Пусть $h_n\colon U_n \times G \to E(\xi \mid U_n) \subset E(\xi)$ — соответствующие изоморфизмы.

Определим отображение $g\colon E(\xi) \to E_G$, полагая

$$g(z) = \left(u_0(p(z))\left(q_0 h_0^{-1}(z)\right), \ \ldots, \ u_n(p(z))\left(q_n h_n^{-1}(z)\right), \ \ldots\right),$$

где $q_n\colon U_n \times G \to G$ — проекция на второй множитель. Так как для тех z, для которых отображение $h_n^{-1}(z)$ не определено, имеет место равенство $u_n(p(z)) = 0$, то отображение g определено корректно. Кроме того, так как для любого n и каждого $s \in G$ справедливо соотношение $h_n(zs) = h_n(z)s$, то $g(zs) = g(z)s$. Следовательно, отображение g индуцирует отображение баз $f\colon B \to B_G$ и потому пара (g, f) является требуемым морфизмом $\xi \to \omega_G$. Теорема полностью доказана.

Пусть E_G^{od} — подпространство пространства E_G, состоящее из точек $\langle x, t \rangle \in E_G$, для которых $t_{2i+1} = 0$ при всех $i \geqslant 0$, и пусть E_G^{ev} — подпространство пространства E_G, состоящее из точек $\langle x, t \rangle \in E_G$, для которых $t_{2i} = 0$ при всех $i \geqslant 0$. Кроме того, пусть $B_G^{\mathrm{od}} = p\left(E_G^{\mathrm{od}}\right)$ и $B_G^{\mathrm{ev}} = p\left(E_G^{\mathrm{ev}}\right)$.

Рассмотрим линейные функции

$$\alpha_n: \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \to [0,\ 1],$$

задаваемые формулой $\alpha_n(t) = 2^{n+1}t - 2^{n+1} + 2$. Очевидно, что $\alpha_n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$ и $\alpha_n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 1$. Используя эти функции, мы определим некоторую гомотопию $h_s^{\mathrm{od}}: E_G \to E_G$, положив $h_s^{\mathrm{od}}\langle x, t\rangle = (t_0x_0, \ldots, t_nx_n, (1-\alpha_n(s))\,t_{n+1}x_{n+1}, 0, \alpha_n(s)\,t_{n+1}x_{n+1}, 0, t_{n+2}x_{n+2}, 0, \ldots)$, если $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant s \leqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, и $h_s^{\mathrm{od}}\langle x, t\rangle = \langle x, t\rangle$, если $s=1$. Эта гомотопия непрерывна, потому что она непрерывна на каждом элементе локально конечного открытого покрытия $\{v_i^{-1}(0, 1]\}$, где $\{v_i\}$ — разбиение единицы, построенное при доказательстве теоремы 11.2. Гомотопия h_s^{od} обладает, очевидно, тем свойством, что $h_s^{\mathrm{od}}\langle x, t\rangle y = h_s^{\mathrm{od}}\langle xy, t\rangle$, и потому индуцирует некоторую гомотопию $g_s^{\mathrm{od}}: B_G \to B_G$. Тем самым мы получаем некоторую гомотопию $\left(h_s^{\mathrm{od}}, g_s^{\mathrm{od}}\right): \omega_G \to \omega_G$ морфизмов расслоений, связывающую тождественный морфизм с морфизмом $\left(h_0^{\mathrm{od}}, g_0^{\mathrm{od}}\right)$, для которого $h_0^{\mathrm{od}}(E_G) = E_G^{\mathrm{od}}$ и $g_0^{\mathrm{od}}(B_G) = B_G^{\mathrm{od}}$. Аналогичным образом строится гомотопия $\left(h_s^{\mathrm{ev}}, g_s^{\mathrm{ev}}\right): \omega_G \to \omega_G$, связывающая тождественный морфизм с морфизмом $\left(h_0^{\mathrm{ev}}, g_0^{\mathrm{ev}}\right)$, для которого $h_0^{\mathrm{ev}}(E_G) = E_G^{\mathrm{ev}}$ и $g_0^{\mathrm{ev}}(B_G) = B_G^{\mathrm{ev}}$. При этом, в силу теоремы 9.9, расслоения $(g_0^{\mathrm{od}})^*(\omega_G)$ и $(g_0^{\mathrm{ev}})^*(\omega_G)$ оба изоморфны расслоению ω_G.

Тем самым полностью доказано следующее

12.3. Предложение. *Существуют гомотопии* $\left(h_s^{\mathrm{od}}, g_s^{\mathrm{od}}\right)$ *и* $\left(h_s^{\mathrm{ev}}, g_s^{\mathrm{ev}}\right)$ *морфизмов G-расслоений* $\omega_G \to \omega_G$, *связывающие тождественный морфизм* $1_G: \omega_G \to \omega_G$ *с такими морфизмами* $\left(h_0^{\mathrm{od}}, g_0^{\mathrm{od}}\right)$ *и* $\left(h_0^{\mathrm{ev}}, g_0^{\mathrm{ev}}\right)$, *что* $h_0^{\mathrm{od}}(E_G) = E_G^{\mathrm{od}}$, $g_0^{\mathrm{od}}(B_G) = B_G^{\mathrm{od}}$, $h_0^{\mathrm{ev}}(E_G) = E_G^{\mathrm{ev}}$, $g_0^{\mathrm{ev}}(B_G) = B_G^{\mathrm{ev}}$. *При этом расслоения* $(g_0^{\mathrm{od}})^*\omega_G$ *и* $(g_0^{\mathrm{ev}})^*\omega_G$ *изоморфны расслоению* ω_G.

Теперь мы уже можем проверить для расслоения ω_G условие (2) критерия универсальности 10.6.

12.4. Теорема. *Если для отображений* $f_0, f_1: X \to B_G$ *расслоения* $f_0^*(\omega_G)$ *и* $f_1^*(\omega_G)$ *изоморфны, то отображения* f_0 *и* f_1 *гомотопны.*

Доказательство. Согласно предложению 12.3, отображение f_0 гомотопно отображению $g_0^{od}f_0$, а отображение f_1 гомотопно отображению $g_0^{ev}f_1$. Следовательно, заменяя f_0 и f_1 на гомотопные им отображения, мы можем предполагать, что $f_0(X) \subset B_G^{od}$ и $f_1(X) \subset B_G^{ev}$.

Пусть теперь ξ — произвольное нумерируемое главное G-расслоение, изоморфное расслоениям $f_0^*(\omega_G)$ и $f_1^*(\omega_G)$ (например, одно из них). Постараемся построить хотя бы один G-морфизм (k, f): $\xi \times [0, 1] \to \omega_G$, для которого $f | (X \times 0) = f_0$ и $f | (X \times 1) = f_1$. На множествах $E(\xi) \times 0$ и $E(\xi) \times 1$ этот морфизм задается, согласно условию, формулами вида

$$k(z, 0) = (t_0(z)\, x_0(z),\ 0,\ t_2(z)\, x_2(z),\ 0,\ \ldots),$$
$$k(z, 1) = (0,\ t_1(z)\, x_1(z),\ 0,\ t_3(z)\, x_3(z),\ 0,\ \ldots).$$

Мы определим отображение k: $E(\xi) \times I \to E_G$, положив

$$k(z, s) = ((1-s)\, t_0(z)\, x_0(z),\ st_1(z)\, x_1(z),\ (1-s)\, t_2(z)\, x_2(z),\ st_3(z)\, x_3(z),\ \ldots).$$

Ясно, что это отображение непрерывно и $k(zy, s) = k(z, s)\, y$ для любого элемента $y \in G$. Поэтому отображение k индуцирует некоторое непрерывное отображение f: $X \times I \to B_G$, для которого $f(b, 0) = f_0(b)$ и $f(b, 1) = f_1(b)$, $b \in X$. Следовательно, отображения f_0 и f_1 гомотопны.

12.5. Вывод. *Построенное на основе конструкции Милнора G-расслоение ω_G универсально.*

13. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ГЛАВНЫХ G-РАССЛОЕНИЙ НАД КЛЕТОЧНЫМИ РАЗБИЕНИЯМИ

Так как все клеточные разбиения являются паракомпактными пространствами (см. Миядзаки [1]) и любое открытое покрытие паракомпактного пространства нумерируемо, то все полученные выше результаты о гомотопической классификации главных G-расслоений применимы к произвольным локально тривиальным G-расслоениям над клеточными разбиениями. Однако для таких расслоений можно доказать и следующий более точный результат:

13.1. Теорема. *Если локально тривиальное главное G-расслоение $\omega = (X_0, p_0, B_0)$ обладает тем свойством, что все гомотопические группы $\pi_i(X_0)$ тривиальны при $i \leqslant \dim B$, где B — некоторое клеточное разбиение, то построенное в разд. 10 отображение $\varphi_\omega(B)$: $[B, B_0] \to k_G(B)$ биективно.*

Доказательство. Докажем сначала надъективность отображения $\varphi_\omega(B)$. Пусть ξ — произвольное локально тривиальное главное G-расслоение над клеточным разбиением B. Поскольку пространство X_0 является G-пространством, определено расслоенное пространство $\xi[X_0]$. Для этого пространства выполнено предположение (H1) теоремы 2.7.1, и потому оно обладает сечением. Но тогда, согласно следствию 8.2, существует морфизм главных расслоений (u, f): $\xi \to \omega$, и потому в силу теоремы 4.2 имеет место равенство $\{\xi\} = \{f^*(\omega)\} = \varphi_\omega(B)([f])$.

Докажем теперь инъективность отображения $\varphi_\omega(B)$. Пусть f, g: $B \to B_0$ — такие отображения, что $\{f^*(\omega)\} = \{g^*(\omega)\}$. Составные морфизмы главных расслоений $(f^*(\omega) \times I) \mid (B \times 0) \to f^*(\omega) \to \omega$ и $(f^*(\omega) \times I) \mid (B \times 1) \to g^*(\omega) \to \omega$ определяют, согласно следствию 8.2, некоторое сечение s расслоенного пространства $(f^*(\omega) \times I)[X_0]$ над подпространством $B \times 0 \cup B \times 1$ его базы $B \times I$. Поскольку это расслоенное пространство удовлетворяет предположению (H1) теоремы 2.7.1, сечение s может быть продолжено до некоторого сечения s^* расслоения $(f^*(\omega) \times I)[X_0]$ над всем пространством $B \times I$. Но, согласно следствию 8.2, это сечение определяет некоторый морфизм главных расслоений (w, h): $f^*(\omega) \times I \to \omega$, для которого $h(b, 0) = f(b)$ и $h(b, 1) = g(b)$, $b \in B$. Следовательно, отображения f и g гомотопны.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что если G-пространство Y хаусдорфово, то для любого G-пространства X множество $M_G(X, Y)$ замкнуто в пространстве $\mathrm{Map}(X, Y)$.

2. Докажите, что если группа G конечна, то для любого G-пространства X естественное отображение $X \to X \bmod G$ замкнуто.

3. Пусть H и G — замкнутые подгруппы топологической группы Γ. В случае когда подгруппа H является нормальным делителем подгруппы G, определите пространство $\Gamma \bmod H$ как главное G/H-пространство и покажите, что соответствующее главное расслоение имеет вид $(\Gamma \bmod H, p, \Gamma \bmod G)$, где p — естественная проекция.

4. Докажите, что если группа G тривиально действует на пространстве F, т. е. $sy = y$ для всех $s \in G$ и $y \in F$, то для любого главного G-расслоения ξ расслоение $\xi[F]$ тривиально.

5. Докажите прямым построением, что если группа G действует на пространстве F, оставляя неподвижной некоторую точку $y_0 \in F$, т. е. если для всех $t \in G$ имеет место равенство

$ty_0 = y_0$, то для любого главного G-расслоения ξ расслоение $\xi[F]$ обладает сечением. Докажите то же самое, используя теорему 8.1.

6. Будут ли рассмотренные в теореме 8.1 отображения $s \mapsto \varphi_s$ и $\varphi \mapsto s_\varphi$ непрерывными, если множество сечений s и множество G-морфизмов φ снабдить компактно-открытой топологией?

7. Для произвольной дискретной группы G сформулируйте условия того, что X является G-пространством или главным G-пространством в терминах топологии пространства X и действия группы G на X.

8. Постройте универсальное расслоение для группы целых чисел $\mathbf{Z}$, классифицирующим пространством которого является окружность S^1.

9. Постройте универсальное расслоение для циклической группы $\mathbf{Z}_n$, классифицирующее пространство которого является клеточным разбиением.

10. Докажите, что для любых главных G_i-расслоений $\xi_i = (X_i, p_i, B_i)$, $i = 1, 2$, расслоение $\xi_1 \times \xi_2 = (X_1 \times X_2, p_1 \times p_2, B_1 \times B_2)$ естественным образом определяется как главное $G_1 \times G_2$-расслоение. При этом если G_i-расслоения ξ_i универсальны, то $G_1 \times G_2$-расслоение $\xi_1 \times \xi_2$ также универсально.

Используя эту теорему, докажите, что для любой конечно порожденной абелевой группы (прямой суммы циклических групп) существует универсальное расслоение, классифицирующее пространство которого является клеточным разбиением.

11. Для любого непрерывного гомоморфизма $u: G \to H$ топологических групп постройте отображение $B(u): B_G \to B_H$. При каких обстоятельствах мы здесь имеем дело с функтором?

12. Докажите, что для любого n-связного клеточного разбиения X естественное отображение $X \to X/X^n$ является гомотопической эквивалентностью. Используя теорему о клеточной аппроксимации (см. Дж. Уайтхед [2] или Хилтон [1]), докажите, что клеточное разбиение X n-связно, если X^n состоит из одной точки. Докажите, используя предыдущие утверждения, что для любого n-связного клеточного разбиения X и любого m-связного клеточного разбиения Y соединение $X * Y$ является $(n + m + 1)$-связным клеточным разбиением.

13. Докажите, что нумерируемое главное G-расслоеиие $\xi = (X, p, B)$ тогда и только тогда универсально, когда пространство X стягиваемо. *Указание*: см. Дольд [4], теорема 7.5.

Глава 5

КООРДИНАТНОЕ ОПИСАНИЕ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе мы показываем, что с точностью до изоморфизма векторные расслоения являются локально тривиальными расслоенными пространствами с конечномерным векторным пространством V в качестве слоя и полной линейной группой $GL(V)$ в качестве структурной группы. С этой целью мы исследуем, каким образом произвольное локально тривиальное расслоенное пространство склеивается из тривиальных расслоений с помощью так называемых функций перехода. Это исследование позволяет, например, доказать, что каждая непрерывная функториальная операция на векторных пространствах определяет некоторую операцию на векторных расслоениях. В частности, таким образом получаются тензорные произведения, внешние произведения и т. д. векторных расслоений.

1. АВТОМОРФИЗМЫ ТРИВИАЛЬНЫХ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Согласно сказанному в примере 3.2.3, каждый B-морфизм тривиальных векторных расслоений $u: B \times F^n \to B \times F^m$ задается формулой $u(b, x) = (b, f(b)x)$, где $f: B \to \mathbf{L}(F^n, F^m)$ — некоторое отображение. При этом u тогда и только тогда является автоморфизмом, когда $n = m$ и для каждой точки $b \in B$ отображение $f(b): F^n \to F^m$ является линейным изоморфизмом. Покажем, что аналогичный результат имеет место и для тривиальных расслоенных пространств.

1.1. Теорема. *Для любого главного G-расслоения-произведения $\xi = (B \times G, p, B)$ множество всех B-автоморфизмов $\xi \to \xi$ находится в биективном соответствии с множеством всех отображений $B \to G$. При этом B-автоморфизм расслоения ξ, соответствующий отображению $g: B \to G$, выражается формулой $h_g(b, s) = (b, g(b).s)$.*

Доказательство. Соотношение $h_g(b, st) = (b, g(b)st) = (b, g(b)s)t = h_g(b, s)t$ показывает, что для любого отображения $g\colon B\to G$ отображение h_g является B-морфизмом с обратным морфизмом $h_g^{-1}=h_{g'}$, где $g'\colon B\to G$ — отображение, определенное формулой $g'(b)=g(b)^{-1}$, $b\in B$. Обратно, пусть $h\colon \xi\to\xi$ — произвольный B-автоморфизм. Тогда $ph=p$, и потому $h(b, s)=h(b, f(b, s))$, где $f\colon B\times G\to G$ — некоторое отображение. Пусть $g(b)=f(b, 1)$. Тогда $h(b, s)=h(b, 1)s=(b, g(b))s=$ $=(b, g(b)s)=h_g(b, s)$. Тем самым теорема полностью доказана.

1.2. Следствие. *Для произвольного левого G-пространства F каждый автоморфизм расслоенного пространства $\xi[F]=(B\times F, p, B)$ выражается формулой $h_g(b, y)=(b, g(b)y)$, где $g\colon B\to G$ — некоторое отображение.*

Доказательство. Согласно теореме 1.1, автоморфизмы расслоенного пространства $\xi[F]$ индуцируются отображениями вида $(b, s, y)\mapsto(b, g(b)s, y)$. Так как $(b, g(b)s, y)\bmod G=$ $=(b, g(b)y)$, то, следовательно, эти автоморфизмы имеют вид $(b, y)\mapsto(b, g(b)y)=h_g(b, y)$.

Ясно, что для любых отображений $g, g'\colon B\to G$ имеет место равенство $h_{g'}h_g=h_{g'g}$. Кроме того, автоморфизм h_g тогда и только тогда тождествен, когда $g(b)=1$ для всех точек $b\in B$.

2. КАРТЫ И ФУНКЦИИ ПЕРЕХОДА

Пусть G — топологическая группа и Y — левое G-пространство. В этом разделе все главные расслоения предполагаются G-расслоениями, а все расслоенные пространства — имеющими в качестве слоя пространство Y. Для произвольного пространства B символом $\theta(B)$ обозначается расслоение-произведение вида $(B\times Y, p, B)$. Пространство любого расслоения вида $\eta|A$ отождествляется с соответствующим подпространством пространства расслоения η.

Поскольку мы до сих пор никак формально не связали понятие векторного расслоения с понятием расслоенного пространства, нам приходилось теорию расслоенных пространств развивать хотя и параллельно, но независимо от теории векторных расслоений. Наша ближайшая цель будет состоять в установлении связи между векторными расслоениями и расслоенными пространствами, что, в частности, объяснит, почему теория расслоенных пространств параллельна теории векторных расслоений.

2.1. Определение. Пусть η — расслоенное пространство и $U\subset B$ — некоторое открытое подмножество его базы B. *Картой* расслоенного пространства η над множеством U называется произвольный изоморфизм расслоенных пространств вида h: $\theta(U)\to\eta|U$.

Аналогично, картой n-мерного векторного расслоения $\eta = (E, p, B)$ под открытым множеством $U\subset B$ называется произвольный U-изоморфизм векторных расслоений $U\times F^n\to\eta|U$.

Для каждой карты h: $\theta(U)\to\eta|U$ расслоенного пространства η над U и произвольного открытого подмножества $V\subset U$ ограничение h на $\theta(V)$ является картой $\theta(V)\to(\eta|U)|V=\eta|V$ расслоенного пространства η над V. Аналогичное замечание справедливо, конечно, и для карт векторных расслоений.

2.2. Предложение. *Для любых двух карт h_1, h_2: $\theta(U)\to\eta|U$ расслоенного пространства η над одним и тем же открытым множеством U существует такое отображение g: $U\to G$, что $h_1(b, y)=h_2(b, g(b)y)$ для каждой точки $(b, y)\in U\times Y$. Отображение g этим свойством определено однозначно. Аналогичная формула связывает и две карты n-мерного векторного расслоения, причем в этом случае g представляет собой отображение множества U в полную линейную группу $GL(n, F)$.*

Доказательство. Согласно следствию 1.2, автоморфизм $h_2^{-1}h_1$: $\theta(U)\to\theta(U)$ определяется формулой $h_2^{-1}h_1(b, y)=(b, g(b)y)$, где g — некоторое отображенне $U\to G$. Ясно, что прн этом $h_1(b, y)=h_2(b, g(b)y)$. Случай векторного расслоения рассматривается аналогично.

2.3. Определение. *Атласом* расслоенного пространства (векторного расслоения) η с базой B называется произвольное семейство вида $\{(h_i, V_i)\}_{i\in\mathcal{J}}$, где V_i, $i\in\mathcal{J}$, — открытые множества, покрывающне все пространство B, а h_i — карты расслоенного пространства (векторного расслоения) η над множеством V_i. Покрытие $\{V_i\}$ называется *ассоциированным* с атласом $\{(h_i, V_i)\}$. Атлас называется *полным*, если он содержит все карты данного расслоенного пространства (векторного расслоения). Ясно, что расслоенное пространство (векторное расслоение) обладает не более чем одним полным атласом.

Расслоенное пространство локально тривиально тогда и только тогда, когда оно обладает хотя бы одним атласом. В этом случае оно обладает полным атласом. Каждое векторное расслоение по определению обладает атласом (см. определение 3.1.1).

Пусть $\{(h_i, V_i)\}_{i\in\mathcal{J}}$ — атлас расслоенного пространства (векторного расслоення) η. Для любых $i, j\in\mathcal{J}$ к ограничениям отображений h_i н h_j на $V_i\cap V_j$ применимо предложение 2.2. Следовательно, существуют такие однозначно определенные отображения $g_{i,j}\colon V_i \cap V_j \to G$ (где $G = GL(n, F)$, если η — векторное расслоение), что $h_j(b, y) = h_i(b, g_{i,j}(b)y)$ для любой точки $(b, y) \in (V_i \cap V_j) \times Y$. Из единственности отображений $g_{i,j}$ непосредственно вытекает, что они обладают следующими свойствами:

(T_1) $g_{i,k}(b) = g_{i,j}(b)\, g_{j,k}(b)$ для каждой точки $b \in V_i \cap V_j \cap V_k$;

(T_2) $g_{i,i}(b) = 1 \in G$ для каждой точки $b \in V_i$;

(T_3) $g_{i,j}(b) = g_{j,i}(b)^{-1}$ для каждой точки $b \in V_i \cap V_j$.

2.4. Определение. Семейство отображений $g_{i,j}\colon V_i \cap V_j \to G$, $i, j \in \mathcal{I}$, обладающих свойствами (T_1) — (T_3), называется *системой функций перехода* на пространстве B относительно его открытого покрытия $\{V_i\}_{i \in \mathcal{I}}$.

Заметим, что из свойства (T_1) уже вытекают свойства (T_2) и (T_3). Действительно, применив свойство (T_1) к случаю, когда $j = k = i$, мы получим свойство (T_2). Положив затем $k = i$, мы получим свойство (T_3).

Согласно сказанному выше, каждый атлас $\{(h_i, V_i)\}$ расслоенного пространства (векторного расслоения) η однозначно определяет некоторую систему функций перехода $\{g_{i,j}\}$ относительно ассоциированного с этим атласом открытого покрытия.

2.5. Предложение. *Пусть $\{(h_i, V_i)\}$ и $\{(h'_i, V_i)\}$ — два атласа расслоенного пространства (векторного расслоения) η с одним и тем же ассоциированным покрытием $\{V_i\}$, $i \in \mathcal{I}$. Тогда соответствующие этим атласам функции перехода $\{g_{i,j}\}$ и $\{g'_{i,j}\}$ связаны соотношениями $g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1} g_{i,j} r_j(b)$, $b \in V_i \cap V_j$, где $r_i\colon V_i \to G$ — отображения, однозначно определенные формулами $h'_i(b, y) = h_i(b, r_i(b)y)$, $b \in V_i$, $y \in Y$.*

Доказательство. Так как $h'_j(b, y) = h_j(b, r_j(b)y) = h_i(b, g_{i,j}(b) r_j(b) y)$, $h'_i(b, g'_{i,j}(b)y) = h_i(b, r_i(b) g'_{i,j}(b) y)$ и $h'_j(b, y) = h'_i(b, g'_{i,j}(b)y)$, то $r_i(b) g'_{i,j}(b) = g_{i,j}(b) r_j(b)$ для любой точки $b \in V_i \cap V_j$. Следовательно, $g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b) r_j(b)$.

Доказанное предложение мотивирует следующее

2.6. Определение. Две системы функций перехода $\{g_{i,j}\}$ и $\{g'_{i,j}\}$ относительно некоторого открытого покрытия $\{V_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ пространства B называются *эквивалентными*, если существуют отображения $r_i\colon V_i \to G$, $i \in \mathcal{I}$, удовлетворяющие в каждой точке $b \in V_i \cap V_j$ условию

(E) $g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b) r_j(b)$.

Проверка того, что это отношение действительно является отношением эквивалентности, оставляется читателю.

2.7. Теорема. *Пусть* η *и* η' — *расслоенные пространства (векторные расслоения) над пространством* B, *и пусть* $\{(h_i, V_i)\}$ — *атлас расслоения* η *с системой функций перехода* $\{g_{i,j}\}$, *а* $\{(h'_i, V_i)\}$ — *атлас расслоения* η' *с системой функций перехода* $\{g'_{i,j}\}$. *Оказывается, что расслоенные пространства (векторные расслоения)* η *и* η' *тогда и только тогда изоморфны над* B, *когда системы функций перехода* $\{g_{i,j}\}$ *и* $\{g'_{i,j}\}$ *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть существует B-изоморфизм $f\colon \eta \to \eta'$ расслоенных пространств (векторных расслоений) η и η'. Так как $h_j(b, y) = h_i(b, g_{i,j}(b)\,y)$, то $fh_j(b, y) = fh_i(b, g_{i,j}(b)\,y)$ и, следовательно, семейство $\{(fh_i, V_i)\}$ является атласом расслоенного пространства (векторного расслоения) η' с системой функций перехода $\{g_{i,j}\}$. Поэтому, применив предложение 2.5 к атласам $\{(h'_i, V_i)\}$ и $\{(fh_i, V_i)\}$, мы немедленно получим, что системы функций перехода $\{g_{i,j}\}$ и $\{g'_{i,j}\}$ эквивалентны.

Обратно, пусть $g'_{i,j} = r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b)\, r_j(b)$, $b \in V_i \cap V_j$. Для каждого $i \in \mathcal{I}$ определим отображение $f_i\colon V_i \times Y \to V_i \times Y$ формулой $f_i(b, y) = (b, r_i(b)^{-1} y)$ (мы ограничиваемся случаем, когда η является расслоенным пространством; векторные расслоения рассматриваются аналогично). Легко видеть, что равенства $f \mid (\eta \mid V_i) = h'_i f_i h_i^{-1}$ однозначно определяют некоторый морфизм $f\colon \eta \to \eta'$. Действительно, для любой точки $(b, y) \in (V_i \cap V_j) \times Y$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}(h'_j f_j h_j^{-1})(h_j(b, y)) &= h'_j f_j(b, y) = h'_j(b, r_j(b)^{-1} y) = \\ &= h'_i(b, g'_{i,j}(b)\, r_j(b)^{-1} y) = h'_i(b, r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b)\, y) = \\ &= h'_i f_i(b, g_{i,j}(b)\, y) = (h'_i f_i h_i^{-1})\, h_i(b, g_{i,j}(b)\, y) = (h'_i f_i h_i^{-1})(h_j(b, y)).\end{aligned}$$

Таким образом, отображения $h'_j f_j h_j^{-1}$ и $h'_i f_i h_i^{-1}$ совпадают на пересечении их областей определения и потому морфизм f определен корректно. Локально этот морфизм является, очевидно, B-изоморфизмом. Но тогда он является B-изоморфизмом и глобально. Следовательно, расслоенные пространства η и η' изоморфны над B.

2.8. Замечание. Согласно доказанной теореме, каждый класс изоморфных k-мерных векторных расслоений, так же как и каждый класс изоморфных расслоенных пространств со слоем F^k и структурной группой $GL(k, F)$, определяется некоторым классом эквивалентных систем функций перехода, принимающих значения в группе $GL(k, F)$. В следующем разделе будет показано, что это обстоятельство устанавливает естественное биективное соответствие между множеством всех классов изоморфных k-мерных векторных расслоений и множеством всех классов изоморфных расслоенных пространств со слоем F^k и структурной группой $GL(k, F)$.

Заметим, что то обстоятельство, что мы сравниваем лишь атласы с одним и тем же ассоциированным покрытием $\{V_i\}$, существенно общности не ограничивает, поскольку от любых двух покрытий $\{V_i\}$ и $\{V'_j\}$ всегда можно перейти к покрытию $\{V_i \cap V'_j\}$.

3. ПОСТРОЕНИЕ РАССЛОЕНИЙ С ЗАДАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПЕРЕХОДА

3.1. Замечание. Очевидно, что для любого атласа $\{(k_i, V_i)\}$ расслоенного пространства $\eta = \xi[Y]$ над B со слоем Y и структурной группой G семейство $\{(h_i, V_i)\}$, где h_i — такие отображения, что $h_i([Y]) = k_i$, является атласом главного расслоеиия ξ с теми же функциями перехода $\{g_{i,j}\}$, что и атлас $\{(k_i, V_i)\}$.

3.2. Теорема. *Пусть $\{V_i\}$, $i \in \mathcal{I}$ — открытое покрытие пространства B, G — топологическая группа, Y — левое G-пространство и $\{g_{i,j}\}$ — система функций перехода относительно покрытия $\{V_i\}$. Тогда существует одно и только одно (с точностью до B-изоморфизма) расслоенное пространство $\eta = \xi[Y]$, обладающее таким атласом $\{(h_i, V_i)\}$, что соответствующая ему система функций перехода совпадает с системой $\{g_{i,j}\}$. При этом в случае, когда $Y = F^k$, а группа G является замкнутой подгруппой группы $GL(k, F)$, расслоенное пространство η естественным образом определяется как векторное расслоение.*

Доказательство. Единственность расслоенного пространства η (когда оно существует) обеспечивается теоремой 2.7. Для доказательства его существования достаточно, очевидно, построить соответствующее главное расслоение ξ.

Пусть Z — сумма (т. е. копроизведение или, в другой терминологии, объединение непересекающихся экземпляров) пространств $\{V_i \times G\}$, $i \in \mathcal{I}$. Точками пространства Z являются по определению тройки вида (b, s, i), где $b \in V_i$, $s \in G$, $i \in \mathcal{I}$, а его топология является слабейшей топологией, в которой непрерывны все отображения вложения q_i: $V_i \times G \to Z$ (заданные формулой $q_i(b, s) = (b, s, i)$). Мы определим на пространстве Z отношение эквивалентности R, считая точки (b, s, i) и (b', s', j) тогда и только тогда R-эквивалентными, когда $b = b'$ и $s' = g_{j,i}(b)s$. Из свойств $(T_1)-(T_3)$ функций перехода непосредственно вытекает, что отношение R действительно является отношением эквивалентности. Пусть X — факторпространство $Z \bmod R$, и пусть $q\colon Z \to X$ — естественное отображение. Класс эквивалентности, содержащий элемент $(b, s, i) \in Z$, мы будем обозначать символом $\langle b, s, i\rangle$. Кроме того, для любого $i \in \mathcal{I}$ мы положим $h_i = qq_i$.

Ясно, что формула $p(\langle b, s, i\rangle) = b$ корректно определяет некоторое, очевидно открытое, отображение $p\colon X \to B$. Для любой точки $b \in V_i$ имеет место равенство $ph_i(b, s) = b$, откуда следует, что непрерывные отображения $h_i\colon V_i \times G \to X$ инъективны.

Действие группы G на пространстве Z мы определим формулой $(b, s, i)t = (b, st, i)$. Очевидно, что это действие согласовано с отношением эквивалентности R и, следовательно, переносится на пространство X. Таким образом, группа G на пространстве X действует по формуле $\langle b, s, i\rangle t = \langle b, st, i\rangle$, $t \in G$. Легко видеть, что равенство $p(x) = p(x')$, $x, x' \in X$, имеет место тогда и только тогда, когда $xt = x'$ для некоторого элемента $t \in G$, причем $xt = x$ только при $t = 1$. Другими словами, G-пространство X эффективно и $B = X \bmod G$. Кроме того, отображение сдвига для G-пространства X определяется формулой $\tau(\langle b, s_1, i\rangle, \langle b, s_2, j\rangle) = \tau(\langle b, s_1, i\rangle, \langle b, g_{i,j}(b)s_2, i\rangle) = s_1^{-1}g_{i,j}(b)s_2$ и, следовательно, непрерывно. Поэтому расслоение $\xi = (X, p, B)$ является главным G-расслоением.

Отображения $h_i\colon V_i \times G \to \xi | V_i$ являются G-изоморфизмами, ибо $h_i(b, s)t = \langle b, s, i\rangle t = \langle b, st, i\rangle = h_i(b, st)$. Следовательно, семейство $\{(h_i, V_i)\}$ представляет собой атлас расслоения ξ. При этом, поскольку $h_i(b, g_{i,j}(b)s) = \langle b, g_{i,j}(b)s, i\rangle = \langle b, s, j\rangle = h_j(b, s)$, соответствующей этому атласу системой функций перехода является данная система $\{g_{i,j}\}$. Тем самым первое утверждение теоремы 3.2 полностью доказано.

В случае когда $Y = F^k$, а $G \subset GL(k, F)$, легко видеть, что формула $a(x, y) \bmod G + a'(x, y') \bmod G = (x, ay + a'y') \bmod G$ определяет на расслоенном пространстве $\eta = \xi[F^k]$ строение векторного расслоения. Действительно, карты $h_i\colon V_i \times F^k \to p^{-1}(V_i)$ задаются формулой $h_i(b, y) = ((b, 1, i)y) \bmod G$ и потому являются V_i-изоморфизмами векторных расслоений. Тем самым теорема полностью доказана.

3.3. Замечание. Из доказанной теоремы непосредственно следует, что множество классов изоморфных расслоенных пространств со слоем F^k и структурной группой $GL(k, F)$ находится в естественном биективном соответствии с множеством классов изоморфных k-мерных векторных расслоений. Именно соответствующие друг другу классы определяются одним и тем же классом эквивалентных функций перехода относительно некоторого открытого покрытия пространства B. При этом для каждого главного $GL(k, F)$-расслоения ξ строение векторного пространства на слоях векторного расслоения $\xi[F^k]$ индуцируется естественным строением пространства F^k.

4. ФУНКЦИИ ПЕРЕХОДА И ИНДУЦИРОВАННЫЕ РАССЛОЕНИЯ

В следующем предложении вычисляются функции перехода для индуцированных расслоенных пространств.

4.1. Предложение. *Для любого расслоенного пространства $\eta = \xi[Y]$ над пространством B со слоем Y и структурной группой G, любого отображения $f: B_1 \to B$ и произвольного атласа $\{(h_i, V_i)\}$ расслоения η с функциями перехода $\{g_{i,j}\}$ семейство $\{(f^*(h_i), f^{-1}(V_i))\}$ является атласом расслоенного пространства $f^*(\eta) = f^*(\xi)[Y]$ с функциями перехода $\{g_{i,j}f\}$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.4.2 и предложению 4.6.3, формула $f^*(h_i)(b_1, y) = (b_1, h_i(f(b_1), y))$, $i \in \mathcal{I}$, определяет некоторый изоморфизм $f^*(h_i)$: $\theta(f^{-1}(V_i)) \to f^*(\eta) \mid f^{-1}(V_i)$. Следовательно, семейство $\{(f^*(h_i), f^{-1}(V_i))\}$ является атласом. Так как $h_i(b, g_{i,j}(b) y) = h_j(b, y)$, то $f^*(h_i)(b_1, g_{i,j}(f(b_1)) y) = f^*(h_j)(b_1, y)$ и потому семейство $\{g_{i,j}f\}$ является системой функций перехода этого атласа.

5. ЛОКАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОРФИЗМОВ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть $\xi = (X, p, B)$, $\eta = (X', p', B)$ и $\zeta = (X'', p'', B)$ — векторные расслоения над B с атласами $\{(h_a, U_a)\}$, $a \in A$, $\{(h'_i, V_i)\}$, $i \in \mathcal{I}$, и $\{(h''_r, W_r)\}$, $r \in R$, и системами функций перехода $\{g_{a,b}\}$, a, $b \in A$, $\{g'_{i,j}\}$, $i, j \in \mathcal{I}$, и $\{g''_{r,s}\}$, r, $s \in R$.

Для любого морфизма u: $\xi \to \eta$ векторных расслоений над каждым открытым множеством $U_a \cap V_i$ определен составной морфизм

$$(U_a \cap V_i) \times F^n \xrightarrow{h_a} \xi \mid (U_a \cap V_i) \xrightarrow{u} \eta \mid (U_a \cap V_i) \xrightarrow{(h'_i)^{-1}} \\ \to (U_a \cap V_i) \times F^m.$$

Полагая $(h_i')^{-1} uh_a(z, x) = (z, u_{i,a}(z)x)$, $z \in U_a \cap V_i$, $x \in F^n$, мы для любых $a \in A$, $i \in \mathcal{I}$ получим тем самым некоторое отображение $u_{i,a}\colon U_a \cap V_i \to \mathbf{L}(F^n, F^m)$.

5.1. Предложение. *Отображения* $u_{i,a}\colon U_a \cap V_i \to \mathbf{L}(F^n, F^m)$, $i \in \mathcal{I}$, $a \in A$, *удовлетворяют в каждой точке* $z \in U_a \cap U_b \cap V_i \cap V_j$ *соотношению*

$$\text{(C)}\quad u_{j,b}(z) = g'_{i,j}(z)\, u_{i,a}(z)\, g_{a,b}(z).$$

Соответствие $u \mapsto \{u_{a,i}\}$ *является биективным соответствием между множеством всех морфизмов* $u\colon \xi \to \eta$ *и множеством всех семейств* $\{u_{i,a}\}$ *отображений* $u_{i,a}\colon U_a \cap V_i \to \mathbf{L}(F^n, F^m)$, *удовлетворяющих соотношению* (C).

Доказательство. Для любого морфизма $u\colon \xi \to \eta$ имеют место равенства

$$h_j'(z, u_{j,b}(z)x) = uh_b(z, x) = uh_a(z, g_{a,b}(z)x) =$$
$$= h_i'(z, u_{i,a}(z)\, g_{a,b}(z)x) = h_j'(z, g'_{j,i}(z)\, u_{i,a}(z)\, g_{a,b}(z)x).$$

Поскольку морфизм h_j' является изоморфизмом, отображения $u_{i,a}$ удовлетворяют, следовательно, соотношению (C).

Обратно, любое семейство отображений $\{u_{i,a}\}$, удовлетворяющих соотношениям (C), определяет некоторый морфизм $u\colon \xi \to \eta$ по формулам $uh_a(z, x) = h_i'(z, u_{i,a}(z)x)$. Действительно, образы отображений h_a покрывают все пространство X, а соотношения (C) обеспечивают однозначность отображения u на пересечениях образов отображений h_a и h_b. Тем самым предложение 5.1 полностью доказано.

О семействе отображений $\{u_{i,a}\}$ мы будем говорить, что оно *представляет* морфизм $u\colon \xi \to \eta$ относительно заданных атласов $\{(h_a, U_a)\}$ и $\{(h_i', V_i)\}$.

Заметим, что при $\xi = \eta$ морфизм u тогда и только тогда является тождественным морфизмом, когда $u_{i,a}(z) = 1$ для каждой точки $z \in U_i \cap V_a$, $i \in \mathcal{I}$, $a \in A$. Кроме того, имеет место

5.2. Предложение. *Если семейство отображений* $\{u_{i,a}\}$ *представляет морфизм* $u\colon \xi \to \eta$, *семейство отображений* $\{v_{r,i}\}$ *представляет морфизм* $v\colon \eta \to \zeta$ *и семейство отображений* $\{w_{r,a}\}$ *представляет морфизм* $uv\colon \xi \to \zeta$, *то* $w_{r,a}(z) = v_{r,i}(z)\, u_{i,a}(z)$ *в каждой точке* $z \in U_a \cap V_i \cap W_r$.

Доказательство. Для каждой точки $z \in U_a \cap V_l \cap W_r$ имеют место равенства

$$(z, w_{r,a}(z)x) = (h''_r)^{-1} vuh_a(z, x) = \left((h''_r)^{-1} vh'_l\right)\left((h'_l)^{-1} uh_a\right)(z, x) =$$
$$= \left((h''_r)^{-1} vh'_l\right)(z, u_{l,a}(z)x) = (z, v_{r,l}(z)u_{l,a}(z)x).$$

Следовательно, $w_{r,a}(z) = v_{r,l}(z)u_{l,a}(z)$.

Заметим, что теорема 3.2.5 является очевидным следствием предложений 5.1 и 5.2.

6. ОПЕРАЦИИ НА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

В этом пункте мы показываем, что всякая непрерывная операция на векторных пространствах определяет некоторую операцию на векторных расслоениях. В частности, имеет смысл говорить о прямой сумме $\xi \oplus \eta$ векторных расслоений ξ и η (являющейся их суммой Уитни), о векторном расслоении $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ и о r-й внешней степени $\Lambda^r \xi$ расслоения ξ.

Напомним, что категорию всех векторных расслоений над пространством B мы условились обозначать символом $\mathscr{V}\mathscr{B}_B$. В случае когда B сводится к одной точке, категория $\mathscr{V}\mathscr{B}_B$ естественным образом отождествляется с категорией векторных пространств. Пусть $\mathscr{V}\mathscr{B}_B(p, q)$ — категория, являющаяся прямым произведением p экземпляров категории $\mathscr{V}\mathscr{B}_B$ и q экземпляров двойственной категории $\mathscr{V}\mathscr{B}_B^*$.

В следующем определении уточняется понятие непрерывности для операций над векторными пространствами.

6.1. Определение. Функтор $F\colon \mathscr{V}\mathscr{B}_0(p, q) \to \mathscr{V}\mathscr{B}_0$, где 0 — пространство, состоящее из одной точки, называется *непрерывным*, если для каждого семейства отображений $u_i\colon Z \to \mathrm{L}(V_i, W_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p+q$, соответствие $z \to F(u_1, \ldots, u_{p+q})$ определяет непрерывное отображение пространства Z в пространство $\mathrm{L}(F(V_1, \ldots, V_p, W_{p+1}, \ldots, W_{p+q}), F(W_1, \ldots, W_p, V_{p+1}, \ldots, V_{p+q}))$.

Легко видеть, что функторы $V \oplus W$, $V \otimes W$ и $\mathrm{Hom}(V, W)$ непрерывны.

Следующая теорема показывает, что каждый непрерывный функтор на категории $\mathscr{V}\mathscr{B}_0$ определяет некоторый функтор на категории $\mathscr{V}\mathscr{B}_B$.

6.2. Теорема. *Для каждого непрерывного функтора $F\colon \mathscr{V}\mathscr{B}_0(p, q) \to \mathscr{V}\mathscr{B}_0$ и каждого пространства B существует такой функтор $F_B\colon \mathscr{V}\mathscr{B}_B(p, q) \to \mathscr{V}\mathscr{B}_B$, что для произвольного отображения $f\colon B_1 \to B$ расслоение $F_{B_1}(f^*(\xi_1), \ldots, f^*(\xi_{p+q}))$ изоморфно над B_1 расслоению $f^*F_B(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$. При этом $F_0 = F$.*

Доказательство. Мы ограничимся случаем $p=q=1$. Пусть ξ и ξ' — векторные расслоения над B с атласами $\{(h_a, U_a)\}$ и $\{(k_a, U_a)\}$ и функциями перехода $\{g_{a,b}\}$ и $\{f_{a,b}\}$, $a, b \in A$, соответственно. За векторное расслоение $F_B(\xi, \xi')$ мы примем расслоение, определенное (очевидно, непрерывными) функциями перехода $\{F(g_{a,b}, f_{b,a})\}$, $a, b \in A$.

Аналогично для любых морфизмов $u\colon \xi \to \eta$ и $u'\colon \eta' \to \xi'$ мы рассмотрим системы функций $\{u_{i,a}\}$ и $\{u'_{i,a}\}$, представляющие эти морфизмы относительно атласов $\{(h_a, U_a)\}$, $\{(k_a, U_a)\}$ и некоторых атласов $\{(h'_i, V_i)\}$ и $\{(k'_i, V_i)\}$. Ясно, что семейство отображений $F(u_{i,a}, u'_{i,a})$ удовлетворяет условию (С) из предложения 5.1 и потому определяет некоторый морфизм $F_B(u, u')\colon F_B(\xi, \xi') \to F_B(\eta, \eta')$. Из замечания, сделанного в конце п. 5.1, непосредственно вытекает, что $F(1, 1) = 1$, а из предложения 5.2 — что для любых морфизмов $u\colon \xi \to \eta$, $u'\colon \eta' \to \xi'$, $v\colon \eta \to \zeta$ и $v'\colon \zeta' \to \eta'$ имеет место равенство $F_B(vu, u'v') = F_B(v, v')\, F_B(u, u')$. Таким образом, F_B действительно является функтором.

Для завершения доказательства осталось показать, что для любого отображения $f\colon B_1 \to B$ расслоения $F_B(f^*(\xi), f^*(\xi'))$ и $f^*(F_B(\xi, \xi'))$ изоморфны над B_1.

Но это очевидно, поскольку семейство $\{F(g_{a,b}f, f_{b,a}f)\}$, $a, b \in A$, является системой функций перехода для каждого из этих расслоений относительно открытого покрытия $\{f^{-1}(U_a)\}$, $a \in A$ (см. предложение 4.1).

Следующая теорема позволяет ответить на вопрос, в какой мере функтор F_B однозначно определяется функтором F.

6.3. Теорема. *Пусть $F, G\colon \mathcal{VB}_0(p, q) \to \mathcal{VB}_0$ — произвольные непрерывные функторы. Тогда для каждого морфизма функторов $\varphi\colon F \to G$ и любого пространства B существует такой морфизм $\varphi_B\colon F_B \to G_B$ функтора F_B в функтор G_B, что для любых расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}$ ограничение морфизма*

$$\varphi_B(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})\colon F_B(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) \to G_B(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$$

на слое расслоения $F_B(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$ над произвольной точкой $z \in B$ совпадает с морфизмом [1])

$$\varphi(\xi_{1,z}, \ldots, \xi_{p+q,z})\colon F(\xi_{1,z}, \ldots, \xi_{p+q,z}) \to G(\xi_{1,z}, \ldots, \xi_{p+q,z}).$$

Этим свойством морфизм φ_B определяется однозначно.

---

[1]) Символом $\xi_{i,z}$ здесь обозначен слой расслоения ξ_i над точкой $z \in B$. — *Прим. ред.*

Доказательство. В случае когда все ξ_i являются расслоениями-произведениями, морфизм $\varphi_B(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$ определяется, очевидно, формулой

$$\varphi_B(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = 1_B \times \varphi\left(F^{r(1)}, \ldots, F^{r(p+q)}\right),$$

где $r(i)$ — размерность расслоения ξ_i. Ввиду свойства локальной тривиальности векторных расслоений тем самым морфизм $\varphi_B(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$ определен и для любых векторных расслоений $\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}$. Единственность морфизма φ_B очевидна.

6.4. Следствие. *Для любых двух морфизмов функторов* φ: $F \to G$ *и* ψ: $G \to H$ *имеет место равенство* $(\psi\varphi)_B = \psi_B\varphi_B$. *Для любого изоморфизма* φ: $F \to G$ *морфизм* φ_B: $F_B \to G_B$ *также является изоморфизмом. В частности, для тождественного морфизма* φ: $F \to F$ *морфизм* φ_B: $F_B \to F_B$ *является изоморфизмом*.

Доказательство немедленно вытекает из единственности морфизма φ_B.

6.5. Замечание. С точностью до изоморфизма функтор F_B определен функтором F однозначно.

Разберем теперь несколько примеров.

6.6. Пример. Сумма Уитни $\xi \oplus \eta$ векторных расслоений ξ и η над B является продолжением на векторные расслоения операции прямой суммы векторных пространств. Действительно, слоем расслоения $\xi \oplus \eta$ над произвольной точкой $z \in B$ является, как мы знаем, прямая сумма слоев векторных расслоений ξ и η. Из обычных свойств прямой суммы векторных пространств вытекают на основании теоремы 6.3 и следствия 6.4 изоморфизмы

$$\xi \oplus \eta \approx \eta \oplus \xi, \quad \xi \oplus (\eta \oplus \zeta) \approx (\xi \oplus \eta) \oplus \zeta.$$

6.7. Пример. Функтор тензорного умножения непрерывен на категории векторных пространств. Следовательно, для любых двух векторных расслоений ξ и η определено их *тензорное произведение* $\xi \otimes \eta$. Как известно, любое билинейное отображение векторных пространств пропускается через их тензорное произведение. Поэтому произвольный билинейный на слоях морфизм u: $\xi \oplus \eta \to \zeta$ определяет некоторый морфизм v: $\xi \otimes \eta \to \zeta$. Кроме того,

$$\xi \otimes \eta \approx \eta \otimes \xi, \quad \xi \otimes (\eta \otimes \zeta) \approx (\xi \otimes \eta) \otimes \zeta,$$

$$\xi \otimes \theta^1 \approx \xi, \quad \xi \otimes (\eta \oplus \zeta) \approx (\xi \otimes \eta) \oplus (\xi \otimes \zeta),$$

где ξ, η, ζ — произвольные векторные расслоения над B, а θ^1 — тривиальное линейное расслоение над B. Все это в равной мере справедливо как для действительных, так и для комплексных векторных расслоений.

6.8. Пример. Функтор $\mathrm{Hom}(V, W)$ непрерывен на категории векторных пространств. Следовательно, для любых векторных расслоений ξ и η над B определено векторное расслоение $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$. Слоем этого расслоения над произвольной точкой $b \in B$ является векторное пространство всех гомоморфизмов $\xi_b \to \eta_b$, где ξ_b и η_b — слои расслоений ξ и η над точкой $b \in B$. Сечения s расслоения $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ естественным образом отождествляются с морфизмами $u: \xi \to \eta$.

6.9. Пример. Операция построения r-й внешней степени $\wedge^r V$ непрерывна на категории векторных пространств. Следовательно, для любого векторного расслоения ξ определена его *r-я внешняя степень* $\wedge^r \xi$.

Важное соотношение между функторами, рассмотренными в примерах 6.6, 6.7 и 6.9, устанавливает следующее

6.10. Предложение. *Для любых линейных расслоений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и любого $r \leqslant n$ имеет место изоморфизм*

$$\wedge^r (\lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n) \approx \bigoplus_{i(1) < \ldots < i(r)} (\lambda_{i(1)} \otimes \ldots \otimes \lambda_{i(r)}).$$

Доказательство. Это соотношение хорошо известно для векторных пространств. Поэтому (следствие 6.4) оно справедливо и для векторных расслоений.

7. ФУНКЦИИ ПЕРЕХОДА ДЛЯ МЕТРИЗОВАННЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть F, как и выше, — либо поле действительных чисел $\mathbf{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbf{C}$, либо тело кватернионов $\mathbf{H}$. Для каждого $z \in F$ мы положим $\bar{z} = z$, если $z \in \mathbf{R}$, $\bar{z} = z_1 - iz_2$, если $z = z_1 + iz_2 \in \mathbf{C}$, и $\bar{z} = z_0 - iz_1 - jz_2 - kz_3$, если $z = z_0 + iz_1 + jz_2 + kz_3 \in \mathbf{H}$. Тогда на векторном пространстве F^n формула $(x \mid y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$ определяет, очевидно, скалярное произведение. Пусть $\| x \| = (x \mid x)^{1/2}$ — норма вектора $x \in F^n$ относительно этого скалярного произведения.

Следующие подгруппы полной линейной группы будут в дальнейшем играть основную роль.

7.1. Определение. *Ортогональной группой $O(k)$ степени k* называется подгруппа полной линейной группы $GL(k, \mathbf{R})$, состоящая из всех матриц $u \in GL(k, \mathbf{R})$, для которых $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$ при любых $x, y \in \mathbf{R}^k$.

Унитарной группой $U(k)$ *степени* k называется подгруппа полной линейной группы $GL(k, \mathbf{C})$, состоящая из всех матриц $u \in GL(k, \mathbf{C})$, для которых $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$, $x, y \in \mathbf{C}^k$.

Симплектической группой $Sp(k)$ *степени* k называется подгруппа полной линейной группы $GL(k, \mathbf{H})$, состоящая из всех матриц $u \in GL(k, \mathbf{H})$, для которых $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$, $x, y \in \mathbf{H}$.

Группы $O(k)$, $U(k)$ и $Sp(k)$ являются замкнутыми и ограниченными подмножествами пространства всех матриц порядка k. Следовательно, эти группы компактны.

7.2. Определеиие. *Специальной ортогональной группой* $SO(k)$ *степени* k называется замкнутая подгруппа группы $O(k)$, состоящая из матриц $u \in O(k)$, для которых $\det u = 1$.

Специальной унитарной группой $SU(k)$ *степени* k называется замкнутая подгруппа группы $U(k)$, состоящая из матриц $u \in U(k)$, для которых $\det u = 1$.

Группы $O(k)$, $SO(k)$, $U(k)$, $SU(k)$ и $Sp(k)$ будут подробно изучены в последующих главах. Они являются важнейшими примерами так называемых классических групп.

Следующее предложение показывает, что стандартный процесс ортонормализации применим и к сечениям метризованных векторных расслоений.

7.3. Предложеиие. *Пусть* ξ — *метризованное*[1] *векторное расслоение над пространством* B *и* $s_1, \ldots, s_m$ — *такие его сечения, что векторы* $s_1(b), \ldots, s_m(b)$ *линейно независимы для каждой точки* $b \in B$. *Тогда существуют такие сечения* $s_1^*, \ldots, s_m^*$ *расслоения* ξ, *являющиеся линейными комбинациями сечений* $s_1, \ldots, s_m$ *с непрерывными функциями в качестве коэффициентов, что* $\beta(s_i^*, s_j^*) = \delta_{i,j}$, *где* β — *метрика расслоения* ξ.

Доказательство. Сечение s_1^* мы определим формулой $s_1^*(b) = \beta(s_1(b), s_1(b))^{-1/2} s_1(b)$, $b \in B$. Это законно, поскольку $\beta(s_1(b), s_1(b)) \neq 0$. Пусть уже построены сечения $s_1^*, \ldots, s_{k-1}^*$. Определим сечение s_k^*, принимая за вектор $s_k^*(b)$, $b \in B$, линейную комбинацию $s_k(b) - \sum_{1 \leqslant j \leqslant k-1} (s_k(b) \mid s_j^*(b))\, s_j^*(b)$, деленную на ее длину. Очевидно, что s_k^* обладает всеми нужными свойствами. Продолжая этот процесс, мы и получим, таким образом, все сечения $s_1^*, \ldots, s_m^*$.

---

[1]) Случай $F = \mathbf{H}$ здесь не исключается. Метрика в кватернионных расслоениях определяется очевидным образом (ср. определение 3.9.2). — *Прим. ред.*

Согласно следующей теореме, векторные расслоения над паракомпактным пространством допускают в качестве структурной группы ортогональную (унитарную или симплектическую) группу.

7.4. Теорема. *Для любого метризованного векторного расслоения ξ над произвольным пространством B существует такой атлас $\{(h_i^*, V_i)\}$, что $(x \mid y) = \beta(h_i^*(b, x), h_i^*(b, y))$ для всех $x, y \in F^n$ и $b \in V_i$, где β — метрика расслоения ξ. Функции перехода $\{g_{i,j}\}$, соответствующие этому атласу, принимают значения в группе $O(n)$, если $F = \mathbf{R}$, в группе $U(n)$, если $F = \mathbf{C}$, и в группе $Sp(n)$, если $F = \mathbf{H}$.*

Доказательство. Пусть $\{(h_i, V_i)\}$ — произвольный атлас расслоения ξ. Ясно, что для любого i формула $h_i(b, e_j) = s_j(b)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, определяет над открытым множеством V_i сечения s_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, обладающие тем свойством, что для каждой точки $b \in V_i$ векторы $s_j(b)$ составляют базис соответствующего слоя. Применив к этим сечениям предложение 7.3, мы получим сечения $s_1^*, \ldots, s_n^*$, для которых $\beta(s_i^*(b), s_j^*(b)) = \delta_{i,j}$ в каждой точке $b \in V_i$. Определим отображение $h_i^*\colon V_i \times F^n \to \xi \mid V_i$, полагая $h_i^*(b, a_1, \ldots, a_n) = a_1 s_1^*(b) + \ldots + a_n s_n^*(b)$. Ясно, что h_i^* является картой расслоения ξ над V_i, а семейство $\{(h_i^*, V_i)\}$ — атласом с требуемыми свойствами.

Для доказательства последнего утверждения напомним, что $h_i(b, g_{i,j}(b)x) = h_j(b, x)$ для любой точки $b \in V_i \cap V_j$ и любой точки $x \in F^n$. Поэтому $(x \mid y) = \beta(h_j^*(b, x), h_j^*(b, y)) = \beta(h_i^*(b, g_{i,j}(b)x, h_i^*(b, g_{i,j}(b)y)) = (g_{i,j}(b)x \mid g_{i,j}(b)y)$.

7.5. Замечание. Согласно теореме 3.9.5, каждое векторное расслоение над паракомпактным пространством обладает метрикой [1]) и потому к нему применима теорема 7.4.

7.6. Определение. Для любого векторного расслоения $\xi = (E, p, B)$ *сопряженным* векторным расслоением $\bar{\xi}$ называется векторное расслоение с теми же самыми E, p и B, с той же самой операцией сложения в слоях, но для которого операция умножения на скаляр $a \in F$ совпадает в каждом слое с операцией умножения на сопряженный скаляр $\bar{a}$ для расслоеиия ξ.

Для действительных векторных расслоений $\xi = \bar{\xi}$.

---

[1]) Это верно и при $F = \mathbf{H}$. — *Прим. ред.*

7.7. Определение. Одномерное векторное расслоение называется *линейным расслоением*[1]).

7.8. Теорема. *Для любого действительного или комплексного линейного метризованного расслоения линейное расслоение $\xi \otimes \bar{\xi}$ тривиально.*

Доказательство. Метрика $\beta: \xi \oplus \xi \to F$, где $F = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, определяет, очевидно, морфнзм линейных расслоений $u: \xi \otimes \bar{\xi} \to B \times F$, являющийся на каждом слое эпиморфизмом, а потому и изоморфизмом. Следовательно, согласно теореме 3.2.5, морфизм u является изоморфизмом.

7.9. Замечаиие. Теорема 7.8 применима, в частности, ко всем линейным расслоениям ξ над паракомпактными пространствами.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассмотрите установленное в теореме 1.1 и следствии 1.2 соответствие $g \mapsto h_g$ и исследуйте вопрос, когда оно является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{Map}(B, G)$ на пространство $\mathrm{Hom}(B \times G, B \times G)$, снабженное компактно-открытой топологией.

2. Докажите, что локально тривиальное расслоенное пространство η над пространством B со структурной группой G и функциями перехода $\{g_{i,j}\}$, $i, j \in I$, построенными относительно некоторого открытого покрытия $\{V_i\}$ пространства B, тогда и только тогда тривиально, когда существуют такие отображения $r_i: V_i \to G$, что $g_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1} r_j(b)$ для любой точки $b \in V_i \cap V_j$.

3. Постройте атласы и найдите функции перехода для канонических главных расслоений $p: S^n \to RP^n$ и $p: S^{2n+1} \to CP^n$.

4. Пусть U и V — такие открытые подмножества пространства B, что $B = U \cup V$ и число компонент связности пересечения $U \cap V$ конечно. Для любой дискретной группы G определите с точностью до изоморфизма все главные G-расслоения ξ над B, для которых G-расслоения $\xi | U$ и $\xi | V$ тривиальны.

5. Докажите, что для любого действительного k-мерного векторного расслоения ξ, обладающего таким атласом $\{(h_i, V_i)\}$, что соответствующие функции перехода $\{g_{i,j}\}$ принимают значения в группе $O(k)$, существует метрика. Эта метрика единственным образом определяется требованием, чтобы все отображения h_i, $i \in \mathcal{I}$, были изометричны на слоях.

---

[1]) Этот термин автором уже использовался.—*Прим. ред.*

Глава 6

ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ ГРУППЫ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе изучается связь между главными G-расслоениями и главными H-расслоениями для произвольной замкнутой подгруппы H группы G. Вначале эта связь выясняется для произвольных главных расслоений, а затем с помощью классифицирующих пространств и координатных описаний более удобные результаты получаются для нумерируемых локально тривиальных главных G-расслоений. Все это можно рассматривать как обобщение результатов разд. 7 предыдущей главы.

1. РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА, СЛОЯМИ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\xi=(X, p, B)$ — главное G-расслоение и H — замкнутая подгруппа группы G. Ясно, что отношение эквивалентности на X, определенное действием группы H, согласовано с проекцией $p: X\to B$, так что определено расслоение $\xi \operatorname{mod} H = (X \operatorname{mod} H, q, B)$, проекция q которого индуцирована проекцией p.

1.1. Теорема. *Для любого главного G-расслоения $\xi=(X, p, B)$ и любой замкнутой подгруппы H группы G расслоение $\xi \operatorname{mod} H$ канонически изоморфно над B расслоенному пространству $\xi[G \operatorname{mod} H]$, где $G \operatorname{mod} H$ — однородное G-пространство правых смежных классов группы G по подгруппе H.*

Доказательство. Определим отображение $h: X \operatorname{mod} H\to X_{G \operatorname{mod} H}$ формулой $h(xH)=(x, eH)G$. Поскольку для каждого элемента $v\in H$ справедливо соотношение $(xv, eH)G = (xv, v^{-1}eH)G=(x, eH)G$, это определение корректно. Поскольку топология пространства $X \operatorname{mod} H$ является топологией отождествления, отображение h непрерывно. Так как $(x, uH)G = (xu^{-1}, eH)G$ для каждого $u\in G$, то отображение h надъективно. Если $h(xH)=h(x'H)$, то $(x, eH)G=(x', eH)G$ и, следовательно, $x'=xv$ для некоторого $v\in H$. Поэтому отображение h инъективно. Для завершения доказательства осталось доказать непрерывность обратного отображения h^{-1}. Рассмотрим непрерывные отображения g_1: $X \times G \to X$ и g_2: $X \times (G \bmod H) \to X \bmod H$, определенные соответственно формулами $g_1(x, u) = xu$ и $g_2(x, uH) = xuH$, $x \in X$, $u \in G$. Поскольку $g_2(x, uH) = g_2(xv, v^{-1}uH)$, то g_2 индуцирует некоторое отображение $(X \times (G \bmod H)) \bmod G \to X \bmod H$, совпадающее, очевидно, с отображением h^{-1}. Поэтому отображение g^{-1} непрерывно.

1.2. Следствие. *Главное G-расслоение ξ, рассматриваемое как расслоенное пространство, изоморфно над B расслоенному пространству $\xi[G]$, где группа G рассматривается как G-пространство относительно умножения слева.*

Это следствие легко доказывается и непосредственно.

2. РАСШИРЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ ГЛАВНЫХ РАССЛОЕНИЙ

2.1. Определение. Пусть $\xi = (X, p, B)$ — главное G-расслоение и $\eta = (Y, q, B)$ — главное H-расслоение, где H — замкнутая подгруппа группы G. Если существует такой гомеоморфизм f пространства Y на замкнутое подпространство пространства X, что $f(ys) = f(y)s$ для любых $y \in Y$, $s \in H$, то расслоение η называется *сокращением* расслоения ξ, а расслоение ξ — *расширением* расслоения η.

Грубо говоря, расслоение η получается в результате сокращения структурной группы G расслоения ξ до группы H, а расслоение ξ — в результате расширения структурной группы H расслоения η до группы G.

В следующих двух теоремах рассматривается вопрос о существовании расширений и сокращений.

2.2. Теорема. *Для каждого главного H-расслоения $\eta = (Y, q, B)$, где H — произвольная замкнутая подгруппа группы G, существует его расширение $\xi = (X, p, B)$ со структурной группой G. При этом если расслоение η тривиально, локально тривиально или нумерируемо, то расслоение ξ также тривиально, локально тривиально или нумерируемо.*

Доказательство. Подгруппа H естественным образом действует слева на группе G. Поэтому определено расслоенное пространство $\xi = \eta[G]$ для которого $X = (Y \times G) \bmod H$. Мы определим действие группы G справа на X формулой $((y, s)H)t = (y, st)H$, $y \in Y$, s, $t \in G$. Это определение корректно, ибо $(y', s')H = (y, s)H$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $r \in H$, что $y' = yr$ и $s' = r^{-1}s$. Очевидно, что расслоение ξ определяется тем самым как эффективное G-расслоение. Отображение сдвига τ для него задается формулой $\tau((y, s)H, (y', s')H) = s^{-1}\tau_1(y, y')s'$, где τ_1 — отображение сдвига для расслоения η, и потому непрерывно. Следовательно, ξ является главным G-расслоением. Далее ясно, что формула $f(y)=(y, e)H$ определяет гомеоморфное отображение пространства Y на некоторое подмножество $f(Y)$ пространства X. Так как множество $Y\times(G\setminus H)$ открыто в $Y\times G$, то его проекция $X\setminus f(Y)$ открыта в X. Следовательно, множество $f(Y)$ замкнуто. Наконец, для любого элемента $r\in H$ и любой точки $y\in Y$ имеет место равенство $f(yr)=(yr, e)H=(yr, r^{-1})Hr=(y, e)Hr=f(y)r$. Следовательно, расслоение ξ является расширением расслоения η.

Очевидно, что если η тривиально, то ξ также тривиально. Поэтому (см. следствие 4.6.4) если η локально тривиально или нумерируемо, то ξ также локально тривиально или нумерируемо соответственно. Тем самым теорема полностью доказана.

2.3. Теорема. *Для замкнутой подгруппы H группы G и главного G-расслоения $\xi=(X, p, B)$ тогда и только тогда существует главное H-расслоение $\eta=(Y, q, B)$, являющееся сокращением расслоения ξ, когда расслоение $\xi \bmod H$ (или, что равносильно, расслоение $\xi[G \bmod H]$) обладает сечением. При этом если расслоение ξ тривиально и, кроме того, тривиально главное H-расслоение $(G, \bar{p}, G \bmod H)$, где $\bar{p}\colon G\to G \bmod H$ — естественная проекция, то расслоение η также тривиально. Если расслоение ξ локально тривиально или нумерируемо, а главное H-расслоение $(G, \bar{p}, G \bmod H)$ локально тривиально, то расслоение η также локально тривиально или нумерируемо.*

Доказательство. Пусть расслоение η существует, и пусть $f\colon Y\to X$ — соответствующий гомеоморфизм. Тогда композиция σ^* гомеоморфизма f и естественного отображения $X\to X \bmod H$ удовлетворяет, очевидно, соотношению $\sigma^*(ys)=\sigma^*(y)s$, $y\in Y$, $s\in H$, и потому определяет некоторое сечение расслоения $\xi \bmod H$ (или $\xi[G \bmod H]$).

Обратно, каждое сечение σ расслоения $\xi \bmod H=\xi[G \bmod H]$ определяет на основании теоремы 4.8.1 некоторое отображение $g\colon X\to G \bmod H$, обладающее тем свойством, что $g(xs)=s^{-1}g(x)=g(x)s$ для любых $x\in X$, $s\in G$. Пусть $\eta=(Y, p, B)$ — расслоение, для которого $Y=g^{-1}(eH)\subset X$ и $q=p\,|\,Y$. Легко видеть, что если $y_1, y_2\in Y$ — такие точки, что $q(y_1)=q(y_2)$, то $y_2=y_1s$ для некоторого элемента $s\in H$. Действительно, $p(y_1)=p(y_2)$, и потому существует такой элемент $s\in G$, что $y_2=y_1s$. С другой стороны, $eH=g(y_2)=g(y_1s)=s^{-1}g(y_1)=s^{-1}eH$ и потому $s\in H$. Таким образом, η является H-расслоением. Его отображением сдвига является ограничение на Y отображения сдвига для главного G-пространства X. Поэтому это отображение непрерывно, так что H-расслоение p главное. Ясно, что оно является сокращением главного G-расслоения ξ.

Наконец если расслоение ξ тривиально, то оно обладает сечением (следствие 4.8.3), т. е. существует некоторый G-морфизм $X \to G$. Аналогично если тривиально расслоение $(G, \bar{p}, G \operatorname{mod} H)$, то существует H-морфизм $G \to H$. Композиция отображения $Y \to X$ (являющегося по условию H-морфизмом) с морфизмами $X \to G$ и $G \to H$ представляет собой некоторый H-морфизм $Y \to H$. Этому H-морфизму соответствует некоторое сечение расслоения η, и, следовательно, расслоение η тривиально (следствие 4.8.3). Утверждения, касающиеся локальной тривиальности и нумерируемости, непосредственно вытекают теперь из следствия 4.6.4.

2.4. Следствие. *Пусть B — клеточное разбиение, и пусть $\pi_i(G \operatorname{mod} H) = 0$ для всех $i < \dim B$. Тогда для каждого главного G-расслоения над B существует главное H-расслоение, являющееся его сокращением.*

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 2.3 и теоремы 2.7.1.

3. СОКРАЩЕНИЕ И РАСШИРЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ ГРУПП РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Следующая теорема утверждает, что расслоенные пространства, рассматриваемые как расслоения, не меняются при изменении структурной группы.

3.1. Теорема. *Пусть ξ — главное G-расслоение, H — замкнутая подгруппа группы G и η — главное H-расслоение, являющееся сокращением расслоения ξ. Тогда для любого левого G-пространства F существует естественный B-изоморфизм расслоений $g\colon \eta[F] \to \xi[F]$ (при построении расслоенного пространства $g[F]$ пространство F естественным образом рассматривается как H-пространство).*

Доказательство. Пусть $f\colon Y \to X$ — гомеоморфизм, определяющий расслоение η как сокращение расслоения ξ. Ясно, что формула $g((y, z)H) = (f(y), z)G$ определяет отображение $g\colon Y_F \to X_F$, где $Y_F = (Y \times F) \operatorname{mod} H$ и $X_F = (X \times F) \operatorname{mod} G$ (см. определение 4.5.1). Это отображение индуцировано непрерывным отображением $f \times 1_F$ и потому само непрерывно. Очевидно, что g является B-морфизмом расслоений. Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что отображение g надъективно, инъективно и открыто.

Ясно, что для любой точки $x \in X$ существует такая точка $y \in Y$ и такой элемент $s \in G$, что $x = f(y)s$. Следовательно, отображение g надъективно. С другой стороны, отношение $\mathrm{mod}\, G$ на $X \times F$ индуцирует, очевидно, отношение $\mathrm{mod}\, H$ на $f(Y) \times F$. Поэтому отображение g инъективно.

Таким образом, нам осталось лишь показать, что отображение g открыто. Пусть $g((y_0, z_0)H) = (x_0, z_0)G$, где $x_0 = f(y_0)$. Рассмотрим произвольную открытую окрестность W точки $(y_0, z_0)H$ в пространстве Y_F. Нам нужно доказать, что точка (x_0, z_0) является внутренней точкой множества $g(W)$. Пусть q_1: $Y \times F \to Y_F$ и p_1: $X \times F \to X_F$ — естественные проекции, а W_1 и W_2 — такие открытые окрестности точки $y_0 \in Y$ и точки $z_0 \in F$ соответственно, что $q_1(W_1 \times W_2) \subset W$. Пусть, далее, N — такая симметричная открытая окрестность единицы группы G, а V — такая открытая окрестность точки $z_0 \in F$, что $NV \subset W_2$. Наконец, пусть U — такая окрестность точки $x_0 \in X$, что $p(U) \subset \subset q(W_1)$ и $\tau((U \times U) \cap X^*) \subset N$, где τ — отображение сдвига для ξ. Заменив W_1 на $W_1 \cap q^{-1}(p(U)) \cap f^{-1}(U)$, а U на $p^{-1}(q_1(W)) \cap U$, мы можем тогда без ограничения общности считать, что $p(U) = q_1(W_1)$ и $f(W_1) \subset U$. Но тогда для каждой точки $(x, z) \in \in U \times V$ будет существовать такая точка $y \in W_1$, что $f(y) \in U$ и $f(y) = xs$, где $s \in G$. Поэтому $g((y, s^{-1}z)H) = (f(y), s^{-1}z)G = = (x, z)G = p_1(x, z)$. С другой стороны, по определению $s = = \tau(x, f(y))$. Поскольку $x \in U$, $f(y) \in U$, отсюда следует, что $s \in N$ и потому $s^{-1}z \in W_2$. Следовательно, $(y, s^{-1}z) \in W_1 \times W_2$. Тем самым доказано, что $p_1(U \times V) \subset g(q_1(W_1 \times W_2))$. Но по условию $q_1(W_1 \times W_2) \subset W$. Следовательно, $p_1(U \times V) \subset g(W)$. Для завершения доказательства остается заметить, что множество $p_1(U \times V)$ (содержащее точку $(x_0, z_0)G$) открыто.

3.2. Следствие. *В условиях теоремы* 3.1 *расслоенное пространство* $\eta[G]$, *рассматриваемое как расслоение, изоморфно над B расслоению ξ. Более того, существует B-изоморфизм g: $Y_G \to \to X_G = X$, являющийся изоморфизмом G-пространств.*

Доказательство. Требуемым B-изоморфизмом является построенное при доказательстве теоремы 3.1 отображение g. Поскольку для любых $y \in Y$, s, $t \in G$ имеет место равенство

$$g((y, s)H)t = ((f(y), s)G)t = f(y)st = (f(y), st)G = g((y, st)H),$$

изоморфизм g является изоморфизмом G-пространств.

4. КООРДИНАТНОЕ ОПИСАНИЕ СОКРАЩЕНИЯ СТРУКТУРНОЙ ГРУППЫ

Для локально тривиальных расслоений теорема 2.3 может быть переформулирована следующим образом:

4.1. Теорема. *Для локально тривиального главного G-расслоения $\xi = (X, p, B)$ с атласом $\{(h_i, V_i)\}$, $i \in \mathfrak{I}$, и функциями пере-*

хода $\{g_{i,j}\}$ тогда и только тогда существует главное H-расслоение η, где H — некоторая замкнутая подгруппа группы G, являющееся сокращением расслоения ξ, когда существуют такие отображения r_i: $V_i \to G$, что $r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b) r_j(b) \in H$ для любой точки $b \in V_i \cap V_j$ и любых $i, j \in \mathcal{Y}$.

Доказательство. Если сокращение η существует, то, согласно следствию 3.2, расслоения ξ и $\eta[G]$ изоморфны как расслоенные пространства со структурной группой G. Следовательно (теорема 5.2.7), требуемые отображения r_i существуют.

Обратно, если отображения r_i существуют, то отображения $g'_{i,j}$: $V_i \cap V_j \to H$, определенные для $b \in V_i \cap V_j$ формулой $g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b) r_j(b)$, составляют систему функций перехода со значениями в H и потому (теорема 5.3.2) определяют некоторое главное H-расслоение $\eta = (Y, q, B)$. При этом ясно, что естественные вложения $V_i \times H \to V_i \times G$ определяют некоторое отображение f: $Y \to X$, являющееся H-гомеоморфизмом на замкнутое подпространство. Следовательно, расслоение η является сокращением расслоения ξ.

Для любых расслоенных пространств из теоремы 4.1 непосредственно следует, что если функции перехода расслоенного пространства $\xi[F]$ со структурной группой G принимают значения в подгруппе H группы G, то это расслоенное пространство изоморфно расслоенному пространству $\eta[F]$ со структурной группой H.

Для векторных расслоений над паракомпактными пространствами мы этой теоремой по существу уже пользовались; см. разд. 7 гл. 5.

5. КЛАССИФИЦИРУЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА И СОКРАЩЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ ГРУППЫ

Пусть $\omega_G = (X_0, p_0, B_G)$ — универсальное расслоение для группы G и $\omega_H = (Y_0, q_0, B_H)$ — универсальное расслоение для ее замкнутой подгруппы H. Согласно следствию 3.2, расслоенное пространство $\omega_H[G]$ является нумерируемым главным G-расслоением над пространством B_H. Поэтому, согласно классификационной теореме 4.11.2, существует такой морфизм главных G-расслоений (h_0, f_0): $\omega_H[G] \to \omega_G$, что расслоение $f_0^*(\omega_G)$ изоморфно над B_H расслоению $\omega_H[G]$.

5.1. Теорема. *Пусть $\xi = (X, p, B)$ — произвольное нумерируемое главное G-расслоение над пространством B, и пусть f: $B \to B_G$ — его классифицирующее отображение, т. е. такое отображение,* *что расслоение $f^*(\omega_G)$ изоморфно над B расслоению ξ. Тогда главные H-расслоения $\eta=(Y, q, B)$, являющиеся сокращениями расслоения ξ, находятся в естественном биективном соответствии с гомотопическими классами таких отображений $g\colon B\to B_H$, что отображение f гомотопно отображению f_0g, где f_0 — построенное выше отображение $B_H\to B_G$. В частности, для расслоения ξ тогда и только тогда существует хотя бы одно его сокращение η, когда можно построить гомотопически коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B_G \\ & B_H \arrow[ur, "f_0"'] & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть η — произвольное нумерируемое главное H-расслоение. Оно однозначно определяет гомотопический класс отображений $g\colon B\to B_H$, обладающих тем свойством, что расслоение $g^*(\omega_H)$ изоморфно расслоению η. Для любого такого отображения g расслоенное пространство $g^*(\omega_H[G])$, а следовательно и расслоенное пространство $g^*(f_0^*(\omega_G))$, изоморфно над B расслоенному пространству $\eta[G]$. С другой стороны, если расслоение η является сокращением расслоения ξ, то, согласно следствию 3.2, расслоение $\eta[G]$ изоморфно над B расслоению ξ, а потому и расслоению $f^*(\omega_G)$. Следовательно, согласно классификационной теореме 4.11.2, отображение f_0g гомотопно отображению f.

Обратно, пусть существует такое отображение $g\colon B\to B_H$, что отображение f_0g гомотопно отображению f, и пусть $\eta=g^*(\omega_H)$. Положим $\eta=(Y, q, B)$ и $f_0^*(\omega_G)=(X_1, p_1, B_H)$. Пусть $h'\colon Y\to X_1$ — композиция отображения $Y=(Y\times H)\operatorname{mod} H\to(Y_0\times G)\operatorname{mod} H$, индуцированного вложением $Y_0\times H\to Y_0\times G$, и изоморфизма $\omega_H[G]\to f_0^*(\omega_G)$. Применив к отображению h' функтор g^*, мы получим некоторый H-морфизм $h''=g^*(h')$, областью определения которого является пространство Y, а областью значений — пространство расслоения $g^*(f_0^*(\omega_G))$. Композиция этого морфизма с B-изоморфизмом $g^*(f_0^*(\omega_G))\to\xi$ будет, как легко видеть, H-отображением $h\colon Y\to X$, являющимся гомеоморфизмом иа замкнутое подпространство. Следовательно, расслоение η является сокращением расслоения ξ. Тем самым теорема полностью доказана.

Заметим, что в случае, когда универсальное расслоение ω_G построено по Милнору (см. разд. 11 гл. 4), имеет место естественное вложение $E_H\subset E_G$ и отображение $f_0\colon B_H\to B_G$ индуцировано этим вложением.

8 Зак. 422

Вложения $F^1 \subset F^2 \subset \ldots \subset F^k \subset \ldots$ определяют на векторном пространстве $F^\infty = \bigcup_{k \geqslant 1} F^k$ топологию индуктивного предела (см. определение 1.1.1). Кроме того, ясно, что скалярные произведения на пространствах F^k индуцируют некоторое скалярное произведение на пространстве F^∞.

1.1. Определение. Символами U_F (или $U_F(\infty)$) и SU_F (или $SU_F(\infty)$) мы будем обозначать группы $\bigcup_{k \geqslant 1} U_F(k)$ и $\bigcup_{k \geqslant 1} SU_F(k)$, снабженные топологией индуктивного предела. Эти группы мы будем называть *бесконечными классическими группами.*

При фиксированном F мы будем группы U_F и SU_F обозначать символами O и SO, когда $F = \mathbf{R}$, и символами U и SU, когда $F = \mathbf{C}$. Группу U_F при $F = \mathbf{H}$ мы будем обозначать символом Sp.

Напомним, что символом $V_k(F^n)$ мы обозначаем многообразие Штифеля, состоящее из всевозможных ортонормальных k-реперов $(v_1, \ldots, v_k)$, $(v_i \mid v_j) = \delta_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, в пространстве F^n. Оно естественным образом вкладывается в пространство F^{kn}. Его топология индуцируется по определению этим вложением. Многообразие $V_k(F^n)$ мы будем рассматривать также и при $n = \infty$ и будем в этом случае считать, что оно снабжено топологией индуктивного предела, определенной естественными вложениями

$$V_k(F^k) \subset V_k(F^{k+1}) \subset \ldots \subset V_k(F^n) \subset \ldots \subset V_k(F^\infty) = \bigcup_{n \geqslant 1} V_k(F^n).$$

Ясно, что формула $\eta(u) = (u(e_1), \ldots, u(e_k))$, $u \in U_F(n)$, определяет некоторое отображение η: $U_F(n) \to V_k(F^n)$ (иногда мы будем это отображение обозначать также символом η_k^n). Отображение η, очевидно, непрерывно, надъективно, и для него имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_F(n) & \xrightarrow{\eta_k^n} & V_k(F^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_F(n+1) & \xrightarrow{\eta_k^{n+1}} & V_k(F^{n+1}) \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются вложениями.

Согласно сказанному выше, для любого $m \leqslant n$ группа $U_F(m)$ естественно вкладывается в группу $U_F(n)$. При этом вложении группа $U_F(m)$ действует на векторах $e_1, \ldots, e_m$, оставляя векторы $e_{m+1}, \ldots, e_n$ неподвижными. Однако группу $U_F(m)$ при

$m \leqslant n$ можно вложить в группу $U_F(n)$ и многими другими способами. Например, можно считать, что группа $U_F(m)$ действует на векторах $e_{n-m+1}, \ldots, e_n$, оставляя неподвижными векторы $e_1, \ldots, e_{n-m}$. Образ группы $U_F(m)$ при этом вложении мы будем обозначать символом $1_{n-m} \times U_F(m)$.

1.2. Предложение. *Равенство $\eta_k^n(u) = \eta_k^n(v)$, $u, v \in U_F(n)$, имеет место тогда и только тогда, когда $u = vw$, где $w \in 1_k \times U_F(n-k)$. Другими словами, для любого элемента $u \in U_F(n)$ множество $(\eta_k^n)^{-1}\eta_k^n(u)$ совпадает со смежным классом $u(1_k \times U_F(n-k))$ этого элемента по подгруппе $1_k \times U_F(n-k)$.*

Доказательство. Очевидно, что $\eta_k^n(u) = \eta_k^n(v)$ тогда и только тогда, когда $u(e_i) = v(e_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$, т. е. когда $v^{-1}u(e_i) = e_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$.

Пространство правых смежных классов группы $U_F(n)$ по подгруппе $1_k \times U_F(n-k)$ мы будем обозначать символом $U_F(n) \operatorname{mod} U_F(n-k)$ или символом $U_F(n)/U_F(n-k)$. Согласно предложению 1.2, отображение η_k^n индуцирует некоторое непрерывное биективное отображение

$$\theta_k^n \colon U_F(n) \operatorname{mod} U_F(n-k) \to V_k(F^n).$$

Поскольку пространство $V_k(F^n)$ компактно, это отображение является гомеоморфизмом. Таким образом, имеет место следующая

1.3. Теорема. *Отображение $\theta_k^n \colon U_F(n) \operatorname{mod} U_F(n-k) \to V_k(F^n)$, задаваемое формулой $\theta_k^n(u(1_k \times U_F(n-k))) = (u(e_1), \ldots, u(e_k))$, является гомеоморфизмом. При этом имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} U_F(n) \operatorname{mod} U_F(n-k) \arrow[r, "\theta_k^n"] \arrow[d] & V_k(F^n) \arrow[d] \\ U_F(n+1) \operatorname{mod} U_F(n+1-k) \arrow[r, "\theta_k^{n+1}"] & V_k(F^{n+1}) \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которой либо являются вложениями, либо индуцированы вложениями.

При $n \to \infty$ гомеоморфизмы θ_k^n индуцируют некоторый гомеоморфизм $\theta_k \colon U_F \operatorname{mod}(1_k \times U_F) \to V_k(F^\infty)$, ибо, как легко видеть, фактортопология пространства $U_F \operatorname{mod}(1_k \times U_F)$ совпадает с его топологией индуктивного предела.

1.4. Предложение. *При* $F=\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$ *вложение* $SU_F(n)\subset U_F(n)$ *индуцирует для любого* $k\neq n$ *некоторое отображение*

$$SU_F(n)\bmod SU_F(n-k)\to U_F(n)\bmod U_F(n-k),$$

являющееся гомеоморфизмом.

Доказательство. Если элементы u и v принадлежат одному смежному классу по подгруппе $SU_F(n-k)$, т. е. если $u=vw$, где $w\in SU_F(n-k)$, то они принадлежат одному смежному классу и по подгруппе $U_F(n-k)\supset SU_F(n-k)$. Следовательно, вложение $SU_F(n)\subset U_F(n)$ действительно индуцирует некоторое отображение $SU_F(n)\bmod SU_F(n-k)\to U_F(n)\bmod U_F(n-k)$. Если $\det u=\det v=1$, то $\det w=1$, и потому это отображение инъективно. Так как для каждого элемента $u\in U_F(n)$ существуют такие элементы $v\in U_F(n)$ и $w\in U_F(n-k)$, что $u=vw$ и $\det v=1$, то это отображение надъективно. Поскольку это биективное непрерывное отображение компактных пространств, оно гомеоморфно.

1.5. Примеры. Доказанные результаты вместе с некоторыми элементарными соображениями позволяют утверждать, что имеют место следующие отождествления:

(1) при $k=n$

$O(n)=V_n(\mathbf{R}^n)$, $U(n)=V_n(\mathbf{C}^n)$, $Sp(n)=V_n(\mathbf{H}^n)$;

(2) при $k<n$

$V_k(\mathbf{R}^n)=O(n)/O(n-k)=SO(n)/SO(n-k)$,
$V_k(\mathbf{C}^n)=U(n)/U(n-k)=SU(n)/SU(n-k)$,
$V_k(\mathbf{H}^n)=Sp(n)/Sp(n-k)$;

(3) при $k=1$

$V_1(\mathbf{R}^n)=S^{n-1}=O(n)/O(n-1)=SO(n)/SO(n-1)$,
$V_1(\mathbf{C}^n)=S^{2n-1}=U(n)/U(n-1)=SU(n)/SU(n-1)$,
$V_1(\mathbf{H})=S^{4n-1}=Sp(n)/Sp(n-1)$;

(4) при $n=1$ или 2

$SO(1)=SU(1)=1$, $O(1)=\mathbf{Z}_2$,
$U(1)=SO(2)=S^1$ — окружность,
$Sp(1)=SU(2)=S^3$ — мультипликативная группа кватернионов с нормой, равной 1;

(5) при $k=n-1$

$SO(n)=V_{n-1}(\mathbf{R}^n)$, $SU(n)=V_{n-1}(\mathbf{C}^n)$;

(6) при $F=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ группы SU_F и U_F связаны точными последовательностями

$SO(n)\to O(n)\xrightarrow{\det}\mathbf{Z}_2$,
$SU(n)\to U(n)\xrightarrow{\det}S^1$.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ГРАССМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Согласно определению 2.2.3, для каждого k-репера $(v_1, \ldots, v_k) \in V_k(F^n)$ символом $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ или $p(v_1, \ldots, v_k)$ обозначается k-мерное подпространство пространства F^n, порожденное векторами $v_1, \ldots, v_k$. Пусть, как и в определении 2.2.4, $G_k(F^n)$ — множество всех k-мерных подпространств пространства F^n, снабженное слабейшей топологией, в которой проекция $p: V_k(F^n) \to G_k(F^n)$ непрерывна. Поскольку каждое k-мерное подпространство пространства F^n обладает ортонормальным базисом, отображение p надъективно, а потому надъективно и отображение

$$p\theta_k^n:\ U_F(n)/U_F(n-k) \to G_k(F^n).$$

2.1. Предложение. *Для смежных классов*

$$u,\ v \in U_F(n)/U_F(n-k)$$

тогда и только тогда имеет место равенство $p\theta_k^n(u) = p\theta_k^n(v)$, *когда представители* u' *и* v' *этих смежных классов связаны соотношением* $v' = u's_1s_2$, *где* $s_1 \in 1_k \times U_F(n-k)$ *и* $s_2 \in U_F(k)$.

Доказательство. Пусть $\theta_k^n(u) = (u_1, \ldots, u_k) \in V_k(F^n)$ и $\theta_k^n(v) = (v_1, \ldots, v_k) \in V_k(F^n)$. Равенство $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент $s \in U_F(k)$, что $u_i = s(v_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. С другой стороны, так как $u_i = u'(e_i)$ и $v_i = v'(e_i)$, то, согласно предложению 1.2, существует такой элемент $s_1 \in 1_k \times U_F(n-k)$, что $u_i = u's_1(e_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $s(v_i) = v's_1(e_i)$, $k+1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, равенство $u_i = s(v_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, имеет место тогда и только тогда, когда $u's_1 = sv'$, т. е. когда $v' = u's_1s^{-1}$.

Это предложение означает, что отображение $p\theta_k^n$ индуцирует некоторое непрерывное биективное отображение

$$\psi_k^n:\ U_F(n)/(U_F(k) \times U_F(n-k)) \to G_k(F^n).$$

Так как ψ_k^n — отображение компактных пространств, то оно является гомеоморфизмом. Таким образом, справедлива

2.2. Теорема. *Отображение*

$$\psi_k^n:\ U_F(n)/(U_F(k) \times U_F(n-k)) \to G_k(F^n),$$

задаваемое формулой.

$$\psi_k^n(u \bmod U_F(k) \times U_F(n-k)) = \langle u(e_1), \ldots, u(e_k) \rangle,$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что главное G-расслоение ξ тогда и только тогда тривиально, когда оно может быть сокращено до главного H-расслоения с единичной группой H.

2. Докажите, что каждое главное G-расслоение тогда и только тогда может быть сокращено до главного H-расслоения, где H — замкнутая подгруппа группы G, когда отображение f_0: $B_H \to B_G$ обладает гомотопически обратным слева отображением g_0: $B_G \to B_H$, т. е. когда существует такое отображение g_0, что $g_0 f_0 \sim 1$. В случае когда такое отображение существует, укажите гомотопический критерий единственности сокращенного расслоения.

3. Определите понятия сокращения и расширения главных расслоений по отношению к произвольному (непрерывному) гомоморфизму групп h: $H \to G$. Как при этом изменятся теоремы 2.2, 2.3, 3.1, 4.1 и 5.1?

Глава 7

ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

В этой главе изучаются расслоенные пространства, слоями которых служат классические группы, и на основании этого изучения вычисляются некоторые гомотопические группы многообразий Штифеля и классических групп. Кроме того, доказывается общая теорема о гомотопической классификации произвольных расслоенных пространств над пространством, являющимся надстройкой. Непосредственным следствием этой теоремы (и результатов вычислений гомотопических групп классических групп) является полная классификация всех векторных расслоений над сферами размерностей $\leqslant 4$.

1. КЛАССИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И МНОГООБРАЗИЯ ШТИФЕЛЯ

В этом параграфе рассматриваются классические группы $SO(k)$, $O(k)$, $SU(k)$, $U(k)$ и $Sp(k)$ (см. определения 5.7.1 и 5.7.2). Как и выше, символ F обозначает либо поле $\mathbf{R}$, либо поле $\mathbf{C}$, либо тело $\mathbf{H}$. Символом $U_F(k)$ мы будем обозначать при $F=\mathbf{R}$ группу $O(k)$, при $F=\mathbf{C}$ группу $U(k)$ и при $F=\mathbf{H}$ группу $Sp(k)$. Аналогично символом $SU_F(k)$ мы будем при $F=\mathbf{R}$ обозначать группу $SO(k)$, а при $F=\mathbf{C}$ — группу $SU(k)$. Таким образом, $U_F(k)$ — это группа всех линейных преобразований u: $F^k \to F^k$, сохраняющих скалярное произведение, т. е. таких, что $(u(x) \mid u(x)) = (x \mid y)$ для всех $x, y \in F^k$, а $SU_F(k)$ — ее подгруппа, состоящая из преобразований $u \in U_F(k)$ с $\det u = 1$.

Векторное пространство F^k мы будем рассматривать как подпространство пространства F^{k+1}, состоящее из векторов с нулевой $(k+1)$-й координатой. Поскольку скалярное произведение $(x \mid y)$ векторов $x, y \in F^k$ совпадает с их скалярным произведением в F^{k+1}, это вложение определяет естественные вложения $U_F(k) \subset U_F(k+1)$ и $SU_F(k) \subset SU_F(k+1)$. При этом элемент $u \in U_F(k+1)$ (соответственно элемент $u \in SU_F(k+1)$) тогда и только тогда принадлежит подгруппе $U_F(k)$ (соответственно подгруппе $SU_F(k)$), когда $u(e_{k+1}) = e_{k+1}$, где e_i, как обычно, — единичный вектор $(0, \ldots, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)$.

является гомеоморфизмом. При этом имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_F(n)/U_F(n-k) & \xrightarrow{\theta_k^n} & V_k(F^n), \\ \downarrow & & \downarrow p \\ U_F(n)/(U_F(k)\times U_F(n-k)) & \xrightarrow{\psi_k^n} & G_k(F^n) \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются естественными проекциями, а также коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_F(n)/(U_F(k)\times U_F(n-k)) & \xrightarrow{\psi_k^n} & G_k(F^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_F(n+1)/(U_F(k)\times U_F(n+1-k)) & \xrightarrow{\psi_k^{n+1}} & G_k(F^{n+1}) \end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются вложениями.

2.3. Замечание. При $F=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ мы оставляем читателю определение и изучение пространства $SG_k(F^n)$, состоящего из *ориентированных* k-мерных подпространств пространства F^n, т. е. из подпространств, для каждого из которых задан класс ортонормальных базисов, эквивалентных относительно действия группы $SU_F(k)$. Аналогично пространству $G_k(F^n)$ для этого пространства имеет место гомеоморфизм

$$\psi_k^n\colon U_F(n)/(SU_F(k)\times U_F(n-k))\to SG_k(F^n).$$

Следующая теорема непосредственно вытекает из того факта, что однородные пространства компактных групп определяют главные расслоения.

2.4. Теорема. *Расслоения* $(V_k(F^n), p, G_k(F^n))$ *и* $(V_k(F^n), p, SG_k(F^n))$ *являются главными* $U_F(k)$- *и* $SU_F(k)$-*расслоениями соответственно.*

Отметим, что определено естественное отображение $SG_k(F^n)\to G_k(F^n)$, возникающее при игнорировании ориентаций. При этом прообраз каждой точки пространства $G_k(\mathbf{R}^n)$ состоит точно из двух точек, соответствующих двум возможным ориентациям подпространства, а прообразом каждой точки пространства $G_k(\mathbf{C}^n)$ является окружность.

2.5. Примеры. Имеют место следующие отождествления: $SG_1(\mathbf{R}^n)=S^{n-1}$, $G_1(\mathbf{R}^n)=RP^{n-1}$ (действительное проективное $(n-1)$-мерное пространство), $SG_1(\mathbf{C}^n)=S^{2n-1}$, $G_1(\mathbf{C}^n)=CP^{n-1}$

(комплексное проективное $(n-1)$-мерное пространство), $G_1(\mathbf{H}^n) = HP^{n-1}$ (кватернионное проективное $(n-1)$-мерное пространство).

3. ЛОКАЛЬНАЯ ТРИВИАЛЬНОСТЬ ПРОЕКЦИИ МНОГООБРАЗИИ ШТИФЕЛЯ НА ГРАССМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Каждому элементу $a=[a_{i,j}] \in U_F(k)$ мы отнесем преобразование многообразия $V_k(F^n)$, определенное формулой $(v_1, \ldots, v_k)\, a = (v'_1, \ldots, v'_k)$, где

$$v'_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} a_{i,j} v_i.$$

Ясно, что тем самым многообразие $V_k(F^n)$ определяется как правое $U_F(k)$-пространство. Элементарные соображения линейной алгебры показывают, что точки $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ и $\langle v'_1, \ldots, v'_k\rangle$ многообразия $G_k(F^n)$, соответствующие точкам $(v_1, \ldots, v_k)$ и $(v'_1, \ldots, v'_k)$ многообразия $V_k(F^n)$, тогда и только тогда совпадают, когда существует такой элемент $a \in U_F(k)$, что $(v_1, \ldots, v_k)\, a = (v'_1, \ldots, v'_k)$. Если этот элемент существует, то он определен однозначно.

3.1. Предложение. *Если $(v_1, \ldots, v_k)\, a = (v'_1, \ldots, v'_k)$, то для каждого вектора $x \in F^n$ справедливо соотношение*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} (x \mid v_i)\, v_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} (x \mid v'_i)\, v'_i.$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением:

$$\sum_j (x \mid v'_j)\, v'_j = \sum_{i,j,m} (x \mid a_{i,j} v_i)\, a_{m,j} v_m =$$

$$= \sum_{i,m} \Big(\sum_j \bar{a}_{i,j} a_{m,j}\Big) (x \mid v_i)\, v_m = \sum_{i,m} \delta_{i,m} (x \mid v_i)\, v_m = \sum_i (x \mid v_i)\, v_i.$$

Определим теперь отображение $\pi'\colon V_k(F^n) \times F^n \to F^n$ формулой

$$\pi'((v_i), x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} (x \mid v_i)\, v_i, \qquad (v_i) \in V_k(F^n), \ x \in F^n.$$

Согласно предложению 3.1, для любого вектора $x \in F^n$ отображение $(v_i) \mapsto \pi'((v_i), x)$ постоянно на каждом слое проекции $p\colon V_k(F^n) \to G_k(F^n)$. Поскольку пространство F^n локально компактно, то, следовательно, отображение π' индуцирует некоторое отображение π: $G_k(F^n) \times F^n \to F^n$. Образ точки (W, x), $W \in G_k(F^n)$, $x \in F^n$, при этом отображении мы будем обозначать через $\pi_W(x)$. Если $W = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, то $\pi_W(x) = \pi'((v_i), x)$ и $(v_i \mid x - \pi_W(x)) = 0$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$. Мы положим $\nu_W(x) = x - \pi_W(x)$.

3.2. Определение. Вектор $\pi_W(x)$ **называется** *ортогональной*, а вектор $\nu_W(x)$ — *нормальной* проекциями вектора $x \in F^n$ на подпространство $W \in G_k(F^n)$.

Рассмотрим теперь отображение σ': $V_k(F^n) \times V_k(F^n) \to \mathbf{R}$, определенное формулой

$$\sigma'((v_1, \ldots, v_k), (v'_1, \ldots, v'_k)) = \| \det [(v_i \mid v'_j)] \|.$$

Так как норма определителя каждого элемента группы $U_F(k)$ равна единице, то $\sigma'((v_1, \ldots, v_k)a, (v'_1, \ldots, v'_k)b) = \sigma'((v_1, \ldots, v'_k), (v'_1, \ldots, v'_k))$ для любых $a, b \in U_F(k)$. Следовательно, σ' определяет некоторое отображение σ: $G_k(F^n) \times G_k(F^n) \to \mathbf{R}$, причем $\sigma(W, W') \geqslant 0$ для любых $W, W' \in G_k(F^n)$. Для произвольного подмножества $S \subset F^n$ мы символом S^* будем обозначать его ортогональное дополнение, т. е. подпространство пространства F^n, состоящее из всех $v \in F^n$, для которых $(v \mid S) = 0$.

3.3. Предложение. *Для любых k-мерных подпространств W, $W' \in G_k(F^n)$ следующие условия равносильны:*

(1) $\sigma(W, W') > 0$;

(2) $\pi_{W'}(W) = W'$, (2′) $\pi_W(W') = W$;

(3) $W \cap W'^* = 0$, (3′) $W' \cap W^* = 0$.

Доказательство. По соображениям симметрии, достаточно доказать равносильность условий (1), (2) и (3). Ясно, что условие $\sigma(W, W') > 0$ равносильно тому, что при $W = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ векторы $\pi_{W'}(v_1), \ldots, \pi_{W'}(v_k)$ составляют базис пространства W', что очевидным образом равносильно условию (2). Аналогично, если $\pi_{W'}(W) = W'$, то $\nu_{W'}(x) \neq x$ для каждого $x \in W$, и потому $(x \mid W') \neq 0$. Обратно, если $(x \mid W') \neq 0$, то $\nu_{W'}(x) \neq x$, и потому $\pi_{W'}(W) = W'$. Следовательно, условия (2) и (3) также равносильны.

Подпространства W и W', удовлетворяющие условиям предложения 3.3, называются *сцепленными*.

3.4. Следствие. *Если подпространства W, $W' \in G_k(F^n)$ сцеплены, то любые достаточно близкие к ним, т. е. принадлежащие некоторым их окрестностям N и N' в $G_k(F^n)$, подпространства V и V' также сцеплены.*

3.5. Определение. Пусть $\tilde{V}_k(F^n)$ — подпространство пространства $(F^n)^k$, состоящее из всех линейно независимых k-реперов пространства F^n. Ясно, что формула $GS(y_1, \ldots, y_k) = (v_1, \ldots, v_k)$, где

$$v_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, \quad v_j = \frac{y_j - \sum\limits_{i<j} (y_i \mid v_i)\, v_i}{\left\| y_j - \sum\limits_{i<j} (y_i \mid v_i)\, v_i \right\|},$$

задает иекоторое непрерывиое отображение $GS\colon \tilde{V}_k(F^n) \to V_k(F^n)$. Мы будем называть это отображеиие *отображением Грама — Шмидта.*

Для любого подпростраиства $W \in G_k(F^n)$ мы будем символом $O(W)$ обозначать множество всех подпространств W', сцепленных с подпространством W. Согласно следствию 3.4, множество $O(W)$ открыто. Выбрав в W ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_k$, мы каждому подпространству $W' \in O(W)$ отнесем линейное отображение $f_{(v_1, \ldots, v_k), W'}\colon W \to F^n$, определенное формулой $f_{(v_1, \ldots, v_k), W'}(v_i) = v_i'$, где $(v_1', \ldots, v_k') = GS(\pi_{W'}(v_1), \ldots, \pi_{W'}(v_k))$ (согласно предложению 3.3, это определение корректно). Ясно, что $f_{(v_1, \ldots, v_k), W'}(W) = W'$. Кроме того, отображение $f_{(v_1, \ldots, v_k), W'}$ сохраняет скалярное произведеиие и непрерывно зависит от $(v_1, \ldots, v_k) \in V_k(F^n)$ и $W' \in O(W)$.

3.6. Теорема. *Тройка* $(V_k(F^n), p, G_k(F^n))$ *является локально тривиальным главным расслоением.*

Доказательство. Для каждого подмножества $H \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ (или $H \subset \{1, 2, \ldots\}$, если $n = \infty$), состоящего из k элементов, обозначим символом O_H открытое множество $O(F_H)$ многообразия $G_k(F^n)$, где $F_H = \sum\limits_{i \in H} Fe_i \subset F^n$. Пусть $i(1) < \ldots < i(k)$ — элементы множества H. Определим непрерывное отображение $f\colon O_H \times V_k(F^n) \to p^{-1}(O_H)$ формулой $f(W, v_1, \ldots, v_k) = (v_1', \ldots, v_k')$, где $v_i' = f_{(e_{i(1)}, \ldots, e_{i(k)}), W}(v_i)$. Ясно, что для этого отображеиия имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
O_H \times V_k(F^n) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(O_H) \subset V_k(F^n) \arrow[d, "p"] \\
& O_H \subset G_k(F^n)
\end{tikzcd}$$

т. е. отображение f является O_H-морфизмом. Более того, очевидно, что оно является гомеоморфизмом. Поскольку множества O_H покрывают все пространство $G_k(F^n)$, этим доказано, что отображение $p\colon V_k(F^n) \to G_k(F^n)$ локально тривиально, Далее, ясно, что отображение f перестановочно с действием справа группы $U_k(F)$ на многообразии $V_k(F^n)$. Следовательно, локально тривиальное расслоение $(V_k(F^n), p, G_k(F^n))$ является главным.

3.7. Следствие. *Проекция $p\colon V_k(F^n) \to G_k(F^n)$ является расслаивающим отображением.*

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 3.6 и 1.5.2.

3.8. Теорема. *Отображение $q\colon V_{k+1}(F^n) \to V_k(F^n)$, определенное формулой $q(v_1, \ldots, v_{k+1}) = (v_1, \ldots, v_k)$, локально тривиально.*

Доказательство. Пусть, как и выше, $H \subset \{1, \ldots, n\}$ — произвольное подмножество, состоящее из k элементов, и пусть $H' = \{1, \ldots, n\} \setminus H$. Рассмотрим подпространство $F_{H'} = \sum_{i \in H'} Fe_i$ и открытое подмножество $O_H^* = p^{-1}(O_H)$ многообразия $V_k(F^n)$. Ясно, что формула $g(v_1, \ldots, v_k, x) = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$, где $v_{k+1} = f_{(v_1, \ldots, v_k), W^*}(x)$, определяет гомеоморфизм $g\colon O_H^* \times V_1(F^{n-k}) \to q^{-1}(O_H^*)$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
O_H^* \times V_1(F^{n-k}) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & q^{-1}(O_H^*) \subset V_{k+1}(F^n) \arrow[dl, "q"] \\
& O_H \subset V_k(F^n) &
\end{tikzcd}$$

Следовательно, отображение q локально тривиально.

Отметим, что слоем отображения q является при $F = \mathbf{R}$ сфера $V_1(\mathbf{R}^{n-k}) = S^{n-k-1}$, при $F = \mathbf{C}$ сфера $V_1(\mathbf{C}^{n-k}) = S^{2n-2k-1}$ и при $F = \mathbf{H}$ сфера $V_1(\mathbf{H}^{n-k}) = S^{4n-4k-1}$.

3.9. Следствие. *Проекция $q\colon V_{k+1}(F^n) \to V_k(F^n)$ является расслаивающим отображением.*

3.10. Замечание. Теоремы 3.6 и 3.8 обычно доказываются с помощью некоторых довольно глубоких свойств групп Ли. Наше же геометрическое доказательство совершенно элементарно.

4. СТАБИЛИЗАЦИЯ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

Пусть c — размерность векторного пространства F над полем $\mathbf{R}$, где, как обычно, $F=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$. Рассмотрим расслаивающие отображения

$$V_{n+1}(F^{n+1})=U_F(n+1)\xrightarrow{p}V_1(F^{n+1})=S^{(n+1)c-1},$$
$$V_n(F^{n+1})=SU_F(n+1)\xrightarrow{p}V_1(F^{n+1})=S^{(n+1)c-1},$$

являющиеся композициями отображений $V_{k+1}(F^{n+1})\to V_k(F^{n+1})$ (второе из этих отображений определено только при $F=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Слоем первого отображения p является группа $U_F(n)$, а второго — группа $SU_F(n)$.

4.1. Теорема. *Гомоморфизмы групп $\pi_i(U_F(n))\to\pi_i(U_F(n+q))$ и $\pi_i(SU_F(n))\to\pi_i(SU_F(n+q))$, индуцированные вложениями $U_F(n)\to U_F(n+q)$ и $SU_F(n)\to SU_F(n+q)$, являются изоморфизмами при $i\leqslant c(n+1)-3$ и эпиморфизмами при $i\leqslant c(n+1)-2$.*

Доказательство. Поскольку вложения $U_F(n)\to U_F(n+q)$ и $SU_F(n)\to SU_F(n+q)$ являются композициями вложений $U_F(n)\to U_F(n+1)\to\ldots\to U_F(n+q)$ и $SU_F(n)\to SU_F(n+1)\to\ldots$ $\ldots\to SU_F(n+q)$, достаточно доказать теорему лишь при $q=1$ (при $q=\infty$ следует воспользоваться предложением 1.4.3, условия которого, как легко видеть, в нашем случае выполнены).

Считая, что $q=1$, рассмотрим точную гомотопическую последовательность (см. теорему 1.5.3) расслаивающего отображения p. Для группы $U_F(n)$ эта последовательность имеет вид

$$\ldots\to\pi_{i+1}(S^{(n+1)c-1})\to\pi_i(U_F(n))\to\pi_i(U_F(n+1))\to$$
$$\to\pi_i(S^{(n+1)c-1})\to\ldots,$$

а для группы $SU_F(n)$ — вид

$$\ldots\to\pi_{i+1}(S^{(n+1)c-1})\to\pi_i(SU_F(n))\to\pi_i(SU_F(n+1))\to$$
$$\to\pi_i(S^{(n+1)c-1})\to\ldots.$$

Поэтому гомоморфизмы $\pi_i(U_F(n))\to\pi_i(U_F(n+1))$ и $\pi_i(SU_F(n))\to$ $\to\pi_i(SU_F(n+1))$ являются эпиморфизмами, если $\pi_i(S^{(n+1)c-1})=0$, т. е. если $i\leqslant(n+1)c-2$, и изоморфизмами, если, кроме того, $\pi_{i+1}(S^{(n+1)c-1})=0$, т. е. если $i\leqslant(n+1)c-3$.

4.2. Замечание. При фиксированном i неравенство $i\leqslant$ $\leqslant(n+1)c-3$ определяет так называемую „стационарную область“ значений n. Для n, принадлежащих этой области, гомоморфизмы $\pi_i(U_F(n)) \to \pi_i(U_F)$ и $\pi_i(SU_F(n)) \to \pi_i(SU_F)$ являются изоморфизмами. В вещественном случае эта область определяется неравенством $n \geqslant i+2$, в комплексном случае — неравенством $2n \geqslant i+1$ и в кватернионном — неравенством $4n \geqslant i+1$.

5. ТРИВИАЛЬНОСТЬ ПЕРВЫХ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП МНОГООБРАЗИЙ ШТИФЕЛЯ

Рассмотрим теперь расслаивающее отображение

$$U_F(k+m) \to V_k(F^{k+m})$$

со слоем $U_F(m)$, также являющееся композицией отображений $V_{k+1}(F^n) \to V_k(F^n)$.

5.1. Теорема. *Для всех $i \leqslant (m+1)c-2$ имеет место равенство $\pi_i(V_k(F^{k+m}))=0$.*

Доказательство. Точная гомотопическая последовательность расслоения $U_F(m+k) \to V_k(F^{k+m})$ имеет вид

$$\ldots \to \pi_i(U_F(m)) \xrightarrow{\alpha} \pi_i(U_F(m+k)) \to \pi_i(V_k(F^{k+m})) \to$$
$$\to \pi_{i-1}(U_F(m)) \xrightarrow{\beta} \ldots .$$

Согласно теореме 4.1, при $i \leqslant c(m+1)-2$ отображение α является эпиморфизмом, а отображение β — изоморфизмом. Следовательно, $\pi_i(V_k(F^{k+m}))=0$ при $i \leqslant c(m+1)-2$.

Отметим, что $\pi_i(V_k(F^\infty))=0$ для всех i. В вещественном случае $\pi_i(V_k(\mathbf{R}^{k+m}))=0$ при $i \leqslant m-1$, в комплексном случае $\pi_i(V_k(\mathbf{C}^{k+m}))=0$ при $i \leqslant 2m$ и в кватернионим $\pi_i(V_k(\mathbf{H}^{k+m}))=0$ при $i \leqslant 4m+2$.

6. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ И КЛАССИФИЦИРУЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

Из теорем 5.1, 3.6 и 4.13.1 немедленно вытекает

6.1. Теорема. *Главное расслоение $V_k(F^{k+m}) \to G_k(F^{k+m})$ универсально для группы $U_F(k)$ в размерностях $\leqslant c(m+1)-2$, а расслоение $V_k(F^\infty) \to G_k(F^\infty)$ универсально в любой размерности. Главное расслоение $V_k(F^{k+m}) \to SG_k(F^{k+m})$ универсально для группы $SU_F(k)$ в размерностях $\leqslant c(m+1)-2$, а расслоение $V_k(F^\infty) \to SG_k(F^\infty)$ универсально в любой размерности.*

Читателю предлагается сравнить пространство $V_k(F^{mk})$ с пространством $U_F(k) * \ldots * U_F(k)$ и построить естественное отображение универсального расслоения $V_k(F^\infty) \to G_k(F^\infty)$ в универсальное расслоение Милнора.

7. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

В теореме 3.7.2 векторные расслоения над паракомпактными пространствами были расклассифицированы с помощью универсального расслоения $\gamma_n^k = (E,\ p,\ G_k(F^n))$, где $n = \infty$. С другой стороны, согласно теореме 6.1, расслоение $\alpha_k^n = (V_k(F^n),\ p,\ G_k(F^n))$ при каждом значении n является универсальным $U_F(k)$-расслоением в размерностях $\leqslant c(n-k+1)-2$, причем, согласно замечанию 5.3.3, расслоенное пространство $\alpha_k^n[F^k]$ мы можем рассматривать как векторное расслоение. Мы определим морфизм расслоений $u\colon \alpha_k^n[F^k] \to \gamma_k^n$ формулой

$$u((v_1, \ldots, v_k, y) \operatorname{mod} U_F(k)) = (\langle v_1, \ldots, v_k\rangle,\ y_1 v_1 + \ldots + y_k v_k).$$ $(v_1, \ldots, v_k, y)$

Это определение корректно, поскольку из соотношений

$$(v_1, \ldots, v_k)\, a = (v_1', \ldots, v_k') \text{ и } ay = y', \text{ где } a \in U_F(k),$$

вытекает, что $\sum\limits_m y_m' v_m = \sum\limits_{m,\,l} a_{m,\,l}\, y_l v_m = \sum\limits_l y_l v_l'$.

7.1. Предложение. *Морфизм $u\colon \alpha_k^n[F^k] \to \gamma_k^n$ является изоморфизмом векторных расслоений.*

Доказательство. Ясно, что u является морфизмом векторных расслоений, индуцирующим на каждом слое изоморфизм. Остается применить теорему 3.2.5.

В силу предложения 7.1 теорему 6.1 мы можем для векторных расслоений переформулировать следующим образом:

7.2. Теорема. *Для любого n-мерного клеточного разбиения X, где $n \leqslant c(m+1)-2$, множество гомотопических классов отображений $f\colon X \to G_k(F^{k+m})$ находится в естественном биективном соответствии с множеством классов изоморфных k-мерных векторных расслоений над разбиением X. Это соответствие индуцируется отображением $f \longmapsto f^*(\gamma_k^{k+m})$.*

7.3. Замечание. Обращая доказательство предложения 7.1, можно каждому k-мерному векторному расслоению ξ сопоставить некоторое ассоциированное с ξ главное $U_F(k)$-расслоение $\mathbf{Pr}\,\xi$. Пространство расслоения $\mathbf{Pr}\,\xi$ определяется как подпространство пространства расслоения $\xi \oplus \ldots \oplus \xi$ (k слагаемых), состоящее из ортонормальных k-реперов $(v_1, \ldots, v_k)$, все векторы которых принадлежат одному слою. Действие группы $U(k)$ на этом пространстве определяется формулой $(v_1, \ldots, v_k)\, a = (v_1', \ldots, v_k')$, где $v_j' = \sum\limits_i a_{i,\,j} v_i$. Если векторное расслоение ξ тривиально, то $U_F(k)$-расслоение $\mathbf{Pr}\,\xi$ также тривиально. Кроме того, соответствие $\xi \mapsto \mathbf{Pr}\,\xi$ перестановочно с операцией ограничения расслоений. Следовательно, расслоение $\mathbf{Pr}\,\xi$ является главным локально тривиальным $U_F(k)$-расслоением. Вопрос о функториальности операции $\mathbf{Pr}$ предлагается исследовать читателю самостоятельно.

Соответствие $\xi \mapsto \mathbf{Pr}\,\xi$ аналогично соответствию $F^k \mapsto V_k(F^k)$ для векторных пространств. Аналогичным образом можно распространить на векторные расслоения и соответствия $F^k \mapsto V_m(F^k)$ и $F^k \to G_m(F^k)$, т. е. для любого k-мерного векторного расслоения ξ построить ассоциированные расслоения, слоями которых являются многообразия Штифеля или Грассмана слоев расслоения ξ. Такого рода ассоциированные расслоения нам будут нужны ниже, в гл. 15.

7.4. Пример. Для касательного расслоения $\tau(S^n)$ расслоением $\mathbf{Pr}\,\tau(S^n)$ является расслоение $V_{n+1}(\mathbf{R}^{n+1}) \to V_1(\mathbf{R}^{n+1})$. Аналогично расслоение $V_{k+1}(\mathbf{R}^{n+1}) \to V_1(\mathbf{R}^{n+1}) = S^n$ можно рассматривать как расслоение, слоями которого являются многообразия Штифеля слоев расслоения $\tau(S^n)$ (т. е. касательных пространств сферы S^n).

8. ОПИСАНИЕ ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНЫХ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ НАД НАДСТРОЙКОЙ

Надстройкой[1]) SX над пространством X называется фактор-пространство произведения $X \times [-1, +1]$, получающееся стягиванием в точку каждого из подпространств $X \times \{-1\}$ и $X \times \{+1\}$. Образ точки $(x, t) \in X \times [-1, +1]$ в SX мы будем обозначать символом $\langle x, t \rangle$. Для каждого подмножества $J \subset [-1, +1]$ мы символом XJ будем обозначать образ произведения $X \times J$ в SX. Множества $X[0, 1]$ и $X[-1, 0]$ мы будем называть соответственно *верхним и нижним конусами* надстройки и будем обозначать их символами SX_+ и SX_-. Ясно, что они являются стягиваемыми пространствами.

8.1. Определение. Расслоение ξ над надстройкой SB называется *регулярным*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ расслоения $\xi \mid B(-\varepsilon, +1]$ и $\xi \mid B[-1, \varepsilon)$ тривиальны. Другими словами, расслоение ξ регулярно, если для него существует атлас вида $\{(h_1, B(-\varepsilon, +1]), (h_2, B[-1, \varepsilon))\}$.

Легко видеть, что любое нумерируемое главное G расслоение над пространством SB регулярно. Система функций перехода для атласа $\{(h_1, B(-\varepsilon, +1]), (h_2, B[-1, \varepsilon))\}$ регуляр-

[1]) Заметим, что эта надстройка отличается (впрочем, не очень существенно) от надстройки, определенной в п. 3.2 гл. 1.— *Прим. ред.*

ного расслоения ξ состоит из единственного отображения $g_{1,2}$: $B(-\varepsilon, \varepsilon) \to G$. Согласно общему определению функций перехода, отображение $g_{1,2}$ связано с отображениями h_1 и h_2 соотношением $h_2(\langle b, t\rangle, s) = h_1(\langle b, t\rangle, g_{1,2}\langle b, t\rangle s)$, где $\langle b, t\rangle \in \in B(-\varepsilon, \varepsilon)$ и $s \in G$. Пусть c_ξ: $B \to G$ — ограничение отображения $g_{1,2}$ на $B = B[0] \subset SB$.

8.2. Теорема. *Регулярные главные G-расслоения ξ и ξ' над пространством SB тогда и только тогда изоморфны, когда существует такой элемент $s \in G$, что отображение $c_{\xi'}$: $b \mapsto c_{\xi'}(b)$ гомотопно отображению $sc_\xi s^{-1}$: $b \mapsto sc_\xi(b)s^{-1}$.*

Доказательство. Если расслоения ξ и ξ' изоморфны, то, как следует из теоремы 5.2.7, для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют такие отображения r_1: $B(-\varepsilon, +1] \to G$ и r_2: $B[-1, \varepsilon) \to G$, что $c_{\xi'}(b) = r_1(b) c_\xi(b) r_2(b)^{-1}$, где $r_k(b) = r_k(b, 0)$, $k = 1, 2$, $b \in B$. Пусть b_0 — фиксированная точка пространства B. Ясно, что без ограничения общности мы можем предполагать, что $c_\xi(b_0) = c_{\xi'}(b_0) = 1$, и потому $r_1(b_0) = r_2(b_0)$. Пусть $s \in G$ — элемент $r_1(b_0) = r_2(b_0)$. Так как отображения r_1 и r_2 определены на стягиваемых пространствах $B(-\varepsilon, +1]$ и $B[-1, \varepsilon)$, то существуют такие гомотопии $h_{i,t}$: $B \to G$, $i = 1, 2$, что $h_{i,t}(b_0) = s$ для любого $t \in [0, 1]$ и $h_{i,1}(b) = s$, $h_{i,0}(b) = r_i(b)$ для любой точки $b \in B$. Теперь ясно, что отображения $b \mapsto h_{1,t}(b) c_\xi(b) h_{1,t}(b)^{-1}$ составляют гомотопию, связывающую отображение $c_{\xi'}$ с отображением $sc_\xi s^{-1}$.

Обратно, пусть отображения $c_{\xi'}$ и $sc_\xi s^{-1}$ гомотопны. Заменив функцию перехода $g'_{1,2}$ на эквивалентную функцию $sg'_{1,2}s^{-1}$, мы без ограничения общности можем считать, что гомотопны сами отображения c_ξ и $c_{\xi'}$. Но тогда отображение $c_{\xi'}c_\xi^{-1}$ будет гомотопно постоянному отображению в единичный элемент группы G, и потому будет существовать такое отображение r_1: $B(-\varepsilon, +1] \to G$, что $r_1 | B(-\varepsilon, \varepsilon) = g'_{1,2} g_{1,2}^{-1}$. Поскольку в каждой точке $x \in B(-\varepsilon, \varepsilon)$ имеет место равенство $g'_{1,2}(x) = r_1(x) g_{1,2}(x) r_2(x)^{-1}$, где r_2: $B[-1, \varepsilon) \to G$ — постоянное отображение в единичный элемент группы G, то, согласно теореме 5.2.7, расслоения ξ и ξ' изоморфны.

8.3. Следствие. *Для любой линейно связной группы G соответствие $\xi \mapsto c_\xi$ определяет биективное отображение множества классов изоморфных регулярных главных G-расслоений ξ над пространством SB на множество гомотопических классов $[B, G]$ отображений $B \to G$.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 8.2, заметив, что любой путь $u(t)$, соединяющий в группе единичный элемент с элементом s, определяет по формуле $u(t)\,c_\xi u(t)^{-1}$ гомотопию, связывающую отображение c_ξ с отображением $sc_\xi s^{-1}$.

8.4. Следствие. *Для любой линейно связной группы G соответствие $\xi \mapsto c_\xi$ определяет биективное отображение множества классов изоморфных локально тривиальных главных G-расслоений ξ над сферой S^n на множество элементов гомотопической группы $\pi_{n-1}(G)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $S^n = SS^{n-1}$ (и учесть, что линейно связные группы гомотопически просты, и потому $\pi_{n-1}(G) = [S^{n-1}, G]$).

8.5. Определение. Отображение $c_\xi \colon B \to G$, соответствующее главному G-расслоению ξ над SB, называется *характеристическим отображением* для этого расслоения (а также для любого расслоенного пространства $\xi[F]$, ассоциированного с главным расслоением ξ).

Ясно, что все сказанное автоматически справедливо и для k-мерных векторных расслоений (при $G = U_F(k)$). Впрочем, отображение, характеристическое для векторного расслоения, будет характеристическим и для ассоциированного главного $U_F(k)$-расслоения, и обратно.

9. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ДЛЯ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ СФЕРЫ S^n

9.1. Обозначение. Для любых точек $a, b \in S^n$, $a \neq -b$, мы будем символом $R(b, a)$ обозначать такой элемент группы $SO(n+1)$, что

(**R**1) все векторы y, ортогональные векторам a и b (т. е. такие, что $(a \mid y) = (b \mid y) = 0$), вращение $R(b, a)$ оставляет на месте: $R(b, a)\,y = y$;

(**R**2) в плоскости векторов a, b преобразование $R(b, a)$ является вращением на угол, меньший π, переводящим вектор a в вектор b.

Ясно, что этими свойствами преобразование $R(b, a)$ однозначно определено. В явном виде оно задается формулой

$$R(b, a)\,x = x - \frac{((a+b) \mid x)}{1 + (a \mid x)}\,(a+b) + 2\,(a \mid x)\,b.$$

Действительно, как легко непосредственно проверяется, определенное этой формулой преобразование, во-первых, обладает свойствами (**R**1) и (**R**2) и, во-вторых, $\| R(b, a) e_i \| = 1$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$.

9.2. Главиое расслоеиие, ассоциированиое с расслоением $\tau(S^n)$. Как мы знаем (см. пример 7.4), главным $SO(n)$-расслоением, ассоциированиым с расслоеиием $\tau(S^n)$, является расслоение $(SO(n+1), p, S^n)$, проекция $p\colon SO(n+1) \to S^n$ которого задается формулой $p(u) = u(e_{n+1})$. Слоем этого расслоения над точкой $e_{n+1} \in S^n$ является группа $SO(n)$, вложенная в группу $SO(n+1)$. Аналогичным образом определяется и главное $O(n)$-расслоение $(O(n+1), p, S^n)$, ассоциированное с расслоением $\tau(S^n)$.

9.3. Обозначеиие. Символом φ мы будем обозначать отображение $\varphi\colon S^n \setminus \{-e_{n+1}\} \to SO(n+1)$, определенное формулой $\varphi(x) = R(x, e_{n+1})$. Пусть $r(x) = \varphi(e_n)^2 x$. Простые вычисления показывают, что $\varphi(e_n)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, -x_n)$ и, следовательно, что $r(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_{n-1}, -x_{n+1})$. В частности, $r^2 = 1$.

$n+1$ n

9.4. Локальиые координатиые карты расслоеиия $SO(n+1) \to S^n$. Определим отображения

$$h_1\colon (S^n \setminus \{-e_{n+1}\}) \times SO(n) \to SO(n+1)$$

и

$$h_2\colon (S^n \setminus \{e_{n+1}\}) \times SO(n) \to SO(n+1)$$

формулами $h_1(x, u) = \varphi(x) u$ и $h_2(x, u) = r\varphi(r(x)) u$. Легко видеть, что нмеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(S^n \setminus \{-e_{n+1}\}) \times SO(n) \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & SO(n+1) \arrow[dl, "p"] \\
& S^n &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(S^n \setminus \{e_{n+1}\}) \times SO(n) \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & SO(n+1) \arrow[dl, "p"] \\
& S^n &
\end{tikzcd}$$

Действнтельно, $ph_1(x, u) = p(\varphi(x) u) = \varphi(x) u(e_{n+1}) = \varphi(x) e_{n+1} = x$ и $ph_2(x, u) = r\varphi(r(x)) u(e_{n+1}) = r\varphi(r(x)) e_{n+1} = r(r(x)) = x$. Кроме того, ясно, что отображения h_1 и h_2 перестановочны с действием группы $SO(n)$ справа. Следовательно, эти отображения являются картами расслоения $(SO(n+1), p, S^n)$. Соответствующая функция перехода $g_{1,2}$: $S^n \setminus \{e_{n+1}, -e_{n+1}\} \to SO(n)$ определяется из соотношения $h_1(x, g_{1,2}(x)u) = h_2(x, u)$ и имеет вид $g_{1,2}(x) = (\varphi(x))^{-1} r\varphi(r(x))$. Ограничение отображения $g_{1,2}$ на сфере S^{n-1} является по определению характеристическим отображением c_n для главного расслоения $(SO(n+1), p, S^n)$. Таким образом,

$$c_n(x) = (\varphi(x))^{-1} r\varphi(r(x)), \qquad x \in S^{n-1}.$$

По определению это отображение является характеристическим отображением $c_{\tau(S^n)}$ и для касательного расслоения $\tau(S^n)$.

9.5. Теорема. *В явном виде характеристическое отображение c_n для касательного расслоения $\tau(S^n)$ задается формулой*

$$c_n(x) = R(x, e_n)^2, \qquad x \in S^{n-1}.$$

Доказательство. Прежде всего

$$c_n(e_n) = (\varphi(e_n))^{-1} r(\varphi(-e_n)) = \varphi(e_n)^{-1} \varphi(e_n) = R(e_n, e_n)^2.$$

Таким образом, доказываемое равенство при $x = e_n$ справедливо. Поэтому будем в дальнейшем считать, что $x \neq e_n$.

Если вектор $y \in S^{n-1}$ ортогонален векторам x и e_n (т. е. $(y \mid x) = (y \mid e_n) = 0$), то $c_n(x)y = y = R(x, e_n)^2 y$. Следовательно, равенство $c_n(x)y = R(x, e_n)^2 y$ нам осталось доказать лишь для векторов y, принадлежащих окружности $(\mathbf{R}e_n \oplus \mathbf{R}x) \cap S^n$. Вместо этого нам будет удобнее доказать это равенство для всех векторов y, принадлежащих двумерной сфере

$$S^2 = (\mathbf{R}e_{n+1} \oplus \mathbf{R}e_n \oplus \mathbf{R}x) \cap S^n.$$

Ясно, что эта сфера инвариантна относительно преобразований $c_n(x)$ и $R(x, e_n)^2$. Кроме того, по доказанному $c_n(x)e_{n+1} = e_{n+1} = R(x, e_n)^2 e_{n+1}$. Поскольку вращения двумерной сферы совпадают, если они одинаково преобразуют две различные не диаметрально противоположные точки, для доказательства равенства $c_n(x) = R(x, e_n)^2$ на сфере S^2 достаточно поэтому показать, что $c_n(x)e_n = R(x, e_n)^2 e_n$, т. е. что

$$R(x, e_{n+1}) R(x, e_n)^2 e_n = rR(r(x), e_{n+1}) e_n.$$

С этой целью мы введем на сфере S^2 сферические координаты (θ, φ) так, чтобы $e_{n+1} = (0, \pi/2)$, $e_n = (0, 0)$ и $x = (\theta, 0)$ (см. рис. 4 для случая $0 < \theta \leqslant \pi/2$).

Пусть сначала $0 < \theta \leqslant \pi/2$. Ясно, что в этом случае $R(x, e_n)^2(0, 0) = (2\theta, 0)$. Кроме того, преобразование $R(x, e_{n+1})$ является поворотом на $\pi/2$ от e_{n+1} к x вокруг оси $(\theta + \pi/2, 0)$

и потому $R(x, e_{n+1})(2\theta, 0) = (\theta + \pi/2, \theta - \pi/2)$, ибо по условию $2\theta \leqslant \theta + \pi/2$. С другой стороны, $r(\theta, \varphi) = (\pi - \theta, -\varphi)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, и, следовательно, преобразование $R(r(x), e_{n+1})$ является поворотом на $\pi/2$ от e_{n+1} к $(\pi - \theta, 0)$ вокруг оси $(\pi/2 - \theta, 0)$. Поэтому $R(r(x), e_{n+1})(0, 0) = (\pi/2 - \theta, \pi/2 - \theta)$ и $rR(r(x), e_{n+1})(0, 0) = = r(\pi/2 - \theta, \pi/2 - \theta) = (\pi/2 + \theta, \theta - \pi/2)$. Тем самым в этом случае соотношение $c_n(x) e_n = R(x, e_n)^2 e_n$ проверено.

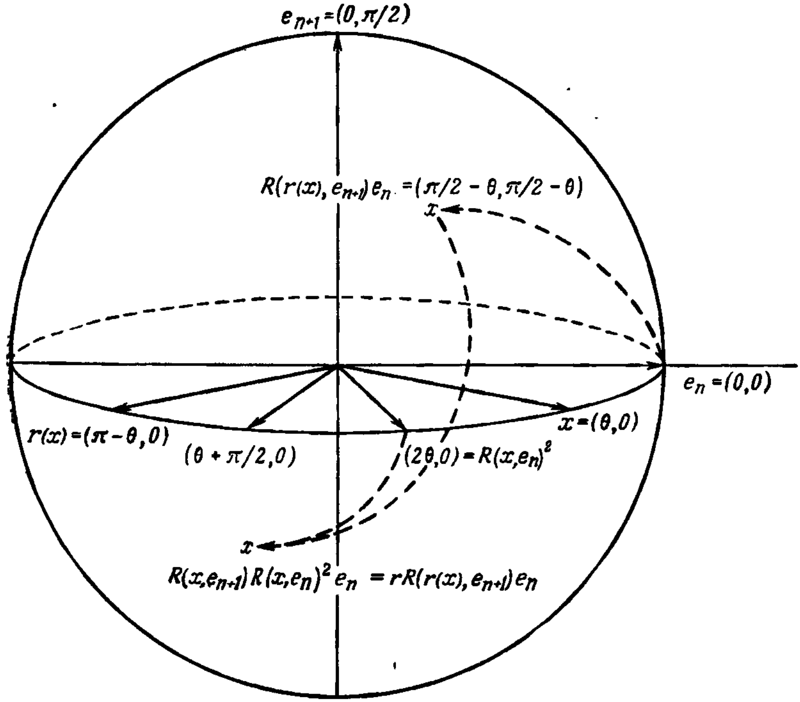

Рис. 4.

Пусть теперь $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$. Тогда $R(x, e_n)^2(0, 0) = (2\theta - 2\pi, 0)$, а $R(x, e_{n+1})$ является поворотом на $\pi/2$ от e_{n+1} к x вокруг оси $(\theta - 3\pi/2, 0)$, и потому $R(x, e_{n+1})(2\theta - 2\pi, 0) = (\theta - 3\pi/2, \theta - \pi/2)$, ибо $\theta - 3\pi/2 \leqslant 2\theta - 2\pi$. С другой стороны, $r(\theta, \varphi) = (-\pi - \theta, -\varphi)$ при $-\pi \leqslant \theta \leqslant 0$, и потому преобразование $R(r(x), e_{n+1})$ является поворотом на $\pi/2$ от e_{n+1} к $(\pi - \theta, 0)$ вокруг оси $(\pi/2 - \theta, 0)$. Следовательно, $R(r(x), e_{n+1})(0, 0) = (\pi/2 - \theta, \pi/2 - \theta)$ и $rR(r(x), e_{n+1})(0, 0) = = r(\pi/2 - \theta, \pi/2 - \theta) = (\theta - 3\pi/2, \theta - \pi/2)$. Тем самым теорема полностью доказана.

9.6. Следствие. *Для каждой точки* $x \in S^{n-1}$ *в группе* $SO(n)$ *имеет место соотношение*

$$c_{\tau(S^n)}(-x) = c_{\tau(S^n)}(x).$$

Доказательство. Нам надо показать, что для любого вектора y имеет место равенство $R(-x, e_n)^2 y = R(x, e_n)^2 y$. Поскольку для векторов, ортогональных векторам e_n и x, это равенство очевидно, нам достаточно рассмотреть случай, когда y лежит в плоскости векторов e_n и x. Пусть θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, — угол в этой плоскости между векторами e_n и x. Тогда преобразование $R(x, e_n)^2$ в плоскости (e_n, x) является поворотом на угол 2θ. Аналогично, поскольку угол между векторами e_n и $-x$ равен $\pi - \theta$, преобразование $R(-x, e_n)^2$ является поворотом на угол $2\theta - 2\pi$. Следовательно, $R(x, e_n)^2 = R(-x, e_n)^2$.

9.7. Отображения α и β. Символом α мы будем обозначать отображение $\alpha: S^n \to O(n+1)$, сопоставляющее каждой точке $x \in S^n$ отражение относительно гиперплоскости, ортогональной вектору x. Поскольку для любой точки $y \in S^n$ имеет место равенство $y = (y \mid x)x + (y - (y \mid x)x)$, то $\alpha(x)y = y - 2(y \mid x)x$. Аналогично символом β мы будем обозначать отображение $\beta: S^n \to O(n+1)$, сопоставляющее каждой точке $x \in S^n$ симметрию относительно прямой $0x$. Ясно, что $\beta(x)y = 2(y \mid x)x - y$ и потому $\alpha(x)y = -\beta(x)y$. Кроме того, $\alpha(x)y = y$ или $\beta(x)y = -y$ тогда и только тогда, когда $(x \mid y) = 0$.

9.8. Предложение. *Для любых точек* $x_1, x_2 \in S^{n-1}$ *имеет место соотношение*

$$R(x_1, x_2)^2 = \alpha(x_1)\alpha(x_2) = \beta(x_1)\beta(x_2).$$

Доказательство. Очевидно, что $\alpha(x_1)\alpha(x_2) = \beta(x_1)\beta(x_2)$. Кроме того, если вектор y ортогонален к векторам x_1 и x_2, то $R(x_1, x_2)^2 y = \alpha(x_1)\alpha(x_2)y = \beta(x_1)\beta(x_2)y = y$. Следовательно, нам достаточно показать, что $R(x_1, x_2)^2 x_2 = \beta(x_1)\beta(x_2)x_2 = \beta(x_1)x_2$. Но это очевидно.

9.9. Следствие. *Характеристическое отображение* $c_n = c_{\tau(S^n)}$ *выражается через отображения* α *и* β *по формулам*

$$c_n(x) = \alpha(x)\alpha(e_n) = \beta(x)\beta(e_n).$$

10. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В этом разделе мы пользуемся понятием степени deg отображения $S^{n-1} \to S^{n-1}$. Определение этого понятия и доказательства его свойств см., например, в книге Стинрода и Эйленберга [1].

10.1. Теорема. *Пусть* p: $SO(n) \to S^{n-1}$ — *проекция* $u \mapsto u(e_n)$, *и пусть* c_{n-1}: $S^{n-1} \to SO(n)$ — *характеристическое отображение. Тогда степень отображения* pc_{n-1} *равна* $1 + (-1)^n$.

Доказательство. Пусть $H^{n-1}_{\pm}$ — замкнутые подпространства сферы S^{n-1}, состоящие из точек $x \in S^{n-1}$, для которых $\pm x_n \geqslant 0$. Ясно, что отображения pc_{n-1}: $H^{n-1}_{\pm} \setminus S^{n-2} \to S^{n-1} \setminus \{-e_n\}$ являются гомеоморфизмами и потому индуцируют некоторые гомеоморфизмы f_1: $H^{n-1}_{+}/S^{n-2} \to S^{n-1}$ и f_2: $H^{n-1}_{-}/S^{n-2} \to S^{n-1}$. Очевидно, что степень гомеоморфизма f_1 равна 1. С другой стороны, поскольку $c_{n-1}(x) = c_{n-1}(-x)$, то степень гомеоморфизма f_2 совпадает со степенью отображения $x \mapsto -x$, $x \in S^{n-1}$, которая, как известно, равна $(-1)^n$.

Поскольку имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{pc_{n-1}} & S^{n-1} \\ \downarrow & & \uparrow{\scriptstyle f_1 \vee f_2} \\ S^{n-1}/S^{n-2} & = & S^{n-1} \vee S^{n-1} \end{array}$$

отсюда непосредственно следует, что $\deg pc_{n-1} = 1 + (-1)^n$.

Таким образом, степень отображения pc_{n-1} равна двум, если n четно, и нулю, если n нечетно.

Типом некоторого отображения f: $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ называется пара $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, где a — степень отображения $x \mapsto f(x, y_0)$, а b — степень отображения $y \mapsto f(x_0, y)$ (легко видеть, что степени a и b от выбора точек x_0 и y_0 не зависят).

10.2. Следствие. *Тип отображения* $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, *заданного соответствием* $(x, y) \mapsto \alpha(x) y$, *равен* $(1 + (-1)^n, -1)$.

Доказательство. Согласно теореме 10.1 и следствию 9.9, для любого вектора $y \in S^{n-1}$ отображение $x \mapsto \alpha(x)\alpha(e_{n-1}) y$ имеет степень $1 + (-1)^n$. С другой стороны, для любого вектора $x \in S^{n-1}$ отображение $y \mapsto \alpha(x) y$ является отражением относительно гиперплоскости и потому имеет степень -1.

10.3. Следствие. *Тип отображения* $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, *заданного соответствием* $(x, y) \mapsto \beta(x) y$, *равен* $(1 + (-1)^n, -(-1)^n)$.

Доказательство. Так как $\beta(x) y = -\alpha(x) y$, то степени отображений $x \mapsto \beta(x) y$ и $y \mapsto \beta(x) y$ получаются из степеней отображений $x \mapsto \alpha(x) y$ и $y \mapsto \alpha(x) y$ умножением на степень отображения $x \mapsto -x$, т. е. на $(-1)^n$.

Следующая теорема очень полезна для явного вычисления гомотопических групп.

Пусть $\xi[F] = (E_F, p_F, S^n)$ — локально тривиальное расслоенное пространство над сферой S^n со структурной группой G и слоем F, c_ξ: $S^{n-1} \to G$ — его характеристическое отображение (т. е. характеристическое отображение ассоциированного главного G-расслоения ξ) и c_F: $S^{n-1} \to F$ — отображение, определенное формулой $c_F(x) = c_\xi(x) y_0$, где y_0 — некоторая фиксированная точка слоя F.

10.4. Теорема. *В точной гомотопической последовательности*

$$Z = \pi_n(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, y_0) \xrightarrow{\alpha} \pi_{n-1}(E_F) \to 0$$

расслоенного пространства $\xi[F]$ *группа* $\operatorname{Im} \partial = \operatorname{Ker} \alpha$ *порождается гомотопическим классом* $[c_F]$ *отображения* c_F.

Доказательство. Достаточно показать, что для некоторого отображения f: $S^n \to S^n$ степени ± 1 имеет место равенство $\partial([f]) = [c_F]$ (действительно, класс $[f]$ является образующей группы $\pi_n(S^n)$). Мы примем за f гомеоморфизм $H^n_+/S^{n-1} \to S^n$, индуцированный отображением f': $(H^n_+, S^{n-1}) \to (S^n, \{-e_n\})$, определенным формулой $f'(x) = R(x, e_n)^2 e_n$.

Поскольку расслоенное пространство $\xi[F]$ локально тривиально, оно обладает атласом вида $\{(h_1, S^{n-1}[-1, \varepsilon)), (h_2, S^{n-1}(-\varepsilon, 1])\}$, где $\varepsilon > 0$. Пусть h_1: $H^n_- \times F \to p_F^{-1}(H^n_-)$ и h_2: $H^n_+ \times F \to p_F^{-1}(H^n_+)$ — ограничения гомеоморфизмов h_1 и h_2 на $H^n_- \times F$ и $H^n_+ \times F$ соответственно. Согласно определению характеристического отображения, для любой точки $x \in S^{n-1} = H^n_+ \cap H^n_-$ имеет место равенство $h_2(x, y) = h_1(x, c_\xi(x) y)$. Рассмотрим отображение g: $(H^n_+, S^{n-1}) \to (E_F, F)$, определенное формулой

$$g(x) = \begin{cases} h_2(f(x), y_0), & \text{если } f(x) \in H^n_+, \\ h_1(f(x), c_\xi(h(x)) y_0), & \text{если } f(x) \in H^n_-, \end{cases}$$

где $h(x)$ — точка сферы S^{n-1}, в которой эту сферу первый раз пересекает большая окружность, соединяющая точку e_n с точкой x. Это определение корректно, поскольку при $f(x) \in H^n_+ \cap H^n_-$ имеет место равенство $f(x) = h(x)$, а $h_1(x', c_\xi(x') y_0) = h_2(x', y_0)$ для любой точки $x' \in H^n_+ \cap H^n_-$. Ясно, что $pg = f$ и $g(S^{n-1}) \subset F$, так что $[g \mid S^{n-1}] = \partial [f]$. С другой стороны, так как для любой точки $x \in S^{n-1}$ имеют место равенства $f(x) = -e_n$ и $h(x) = x$, то $g(x) = h_1(-e_n, c_\xi(x) y_0)$. Это показывает, что отображение $g \mid S^{n-1}$, рассматриваемое как отображение в F, совпадает с отображением c_F. Следовательно, $\partial([f]) = [c_F]$.

11. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ МНОГООБРАЗИЙ ШТИФЕЛЯ

Пусть $j\colon V_k(F^n) \to V_{k+1}(F^{n+1})$ — отображение, определенное формулой $j(v_1, \ldots, v_k) = (v_1, \ldots, v_k, e_{n+1})$. Это отображение можно рассматривать как отображение вложения слоя расслаивающего отображения $p\colon V_{k+1}(F^{n+1}) \to V_1(F^{n+1})$, $p(v_1, \ldots, v_{k+1}) = v_{k+1}$, над точкой e_{n+1} в многообразие $V_{k+1}(F^{n+1})$. Следовательно, имеет место точная последовательность гомотопических групп

$$\ldots \to \pi_{i+1}(V_1(F^{n+1})) \to \pi_i(V_k(F^n)) \xrightarrow{j_*} \pi_i(V_{k+1}(F^{n+1})) \to$$
$$\to \pi_i(V_1(F^{n+1})) \to \ldots .$$

Поскольку $V_1(F^{n+1}) = S^{c(n+1)-1}$, отсюда немедленно вытекает следующее

11.1. Предложение. *При* $i \leqslant c(n+1) - 3$ *гомоморфизм*

$$j_*\colon \pi_i(V_k(F^n)) \to \pi_i(V_{k+1}(F^{n+1}))$$

является изоморфизмом.

При $F = \mathbf{R}$, т. е. при $c = 1$, отсюда индукцией по k вытекает, что $\pi_i(V_k(\mathbf{R}^n)) = 0$, когда $i \leqslant (n-k) - 1$ (ибо $\pi_i(V_1(\mathbf{R}^n)) = \pi_i(S^{n-1}) = 0$). Впрочем, это нам уже известно (см. теорему 5.1). Вычислим теперь первую нетривиальную группу.

11.2. Предложение. *Группа* $\pi_{n-k}(V_k(\mathbf{R}^n))$ *изоморфна группе* $\mathbf{Z}$, *если* $k = 1$ *или если число* $n-k$ *четно, и изоморфна группе* $\mathbf{Z}_2$, *если* $k \geqslant 2$ *и число* $n-k$ *нечетно.*

Доказательство. При $k = 1$ мы имеем $\pi_{n-1}(V_1(\mathbf{R}^n)) = \pi_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbf{Z}$. Если же $k \geqslant 2$, то $n - k \leqslant (n+1) - 3$, и потому, согласно предложению 11.1 (примененному $k-2$ раз), группа $\pi_{n-k}(V_k(\mathbf{R}^n))$ изоморфна группе $\pi_{n-2}(V_2(\mathbf{R}^n))$. Таким образом, нам остается лишь вычислить группу $\pi_{n-2}(V_2(\mathbf{R}^n))$.

$\pi_{m-2}(V_2(R^n$, где $m=n-k+$

Аналогично стр. 137 здесь и везде меняется из n

Ясно, что отображение $V_2(\mathbf{R}^n) \to S^{n-1}$ является расслоением со слоем $F = S^{n-2}$, ассоциированным с главным расслоением $V_n(\mathbf{R}^n) \to S^{n-1}$. Поэтому рассмотренное в теореме 10.4 отображение c_F определяется для этого расслоения формулой $c_F(x) = \alpha(x)\alpha(e_{n-1})y_0$, $x \in S^{n-2}$, т. е. совпадает (со сдвигом размерностей) с отображением pc_{n-1} из теоремы 10.1. Следовательно, $\deg c_F = 1 + (-1)^{n-1}$. С другой стороны, согласно теореме 10.4, в точной последовательности

$$\mathbf{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-2}(S^{n-2}) \to \pi_{n-2}(V_2(\mathbf{R}^n)) \to 0$$

имеет место равенство $\partial[1] = [c_F]$. Следовательно, эта последовательность имеет вид

$$\mathbf{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z} \xrightarrow{\alpha} \pi_{n-2}(V_2(\mathbf{R}^n)) \to 0,$$

где $\partial(1) = 0$ при n, а значит и $n-2$, четном и $\partial(1) = 2$ при n, а значит и $n-2$, нечетном. Поэтому $\pi_{n-2}(V_2(\mathbf{R}^n)) = \mathbf{Z}$, когда $n-2$ четно и $\pi_{n-2}(V_2(\mathbf{R}^n)) = \mathbf{Z}_2$, когда $n-2$ нечетно. Тем самым предложение 11.2 полностью доказано.

При $F = \mathbf{C}$, т. е. при $c = 2$, предложение 11.1 применимо при $i \leqslant 2n-1$. Поскольку $\pi_i(V_1(\mathbf{C}^n)) = \pi_i(S^{2n-1}) = 0$ при $i \leqslant 2n-2$, отсюда следует, что $\pi_i(V_k(\mathbf{C}^n)) = 0$ при $i \leqslant 2(n-k)$ (теорема 5.1). Кроме того, поскольку $2(n-k)+1 \leqslant 2n-1$ для любого $k \geqslant 1$, группа $\pi_{2(n-k)+1}(V_k(\mathbf{C}^n))$ изоморфна группе $\pi_{2(n-1)+1}(V_1(\mathbf{C}^n)) = \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbf{Z}$, так что имеет место следующее

11.3. Предложение. *Для любого $k \geqslant 1$ группа $\pi_{2(n-k)+1}(V_k(\mathbf{C}^n))$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$.*

При $F = \mathbf{H}$, т. е. при $c = 4$, предложение 11.1 применимо при $i \leqslant 4n+1$. Отсюда, как и выше, мы, во-первых, снова получаем, что $\pi_i(V_k(\mathbf{H}^n)) = 0$ при $i \leqslant 4(n-k)+2$, и, во-вторых, что имеет место следующее

11.4. Предложение. *Для любого $k \geqslant 1$ группа $\pi_{4(n-k)+3}(V_k(\mathbf{H}^n))$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$.*

12. НЕКОТОРЫЕ ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

Вычислим гомотопические группы классических групп в малых размерностях.

12.1. π_0 для классических групп. Неравенство $0 < c(n+1) - 3$ справедливо при всех $n \geqslant 1$, если $c = 2, 4$, и при всех $n \geqslant 2$, если $c = 1$. Поскольку группы $SO(1)$, $SO(2)$, $U(1)$, $SU(1)$ и $Sp(1)$

связны, а группы $O(1)$ и $O(2)$ состоят из двух компонент (см. примеры 1.5), отсюда следует, что и $\pi_0(SO(n))=\pi_0(U(n))=$ $=\pi_0(SU(n))=\pi_0(Sp(n))=0$ для всех $n\geqslant 1$.

12.2. Соотношения между $\pi_i(U_F(n))$ и $\pi_i(SU_F(n))$. Слоем расслаивающего отображения $O(n)\xrightarrow{\det}\mathbf{Z}_2$ является группа $SO(n)$, и потому его точная гомотопическая последовательность имеет вид

$$0\to\pi_{i+1}(\mathbf{Z}_2)\to\pi_i(SO(n))\to\pi_i(O(n))\to\pi_i(\mathbf{Z}_2).$$

Следовательно, для любого $i\geqslant 1$ вложение $SO(n)\to O(n)$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп

$$\pi_i(SO(n))\approx\pi_i(O(n)).$$

Аналогично слоем расслаивающего отображения $U(n)\xrightarrow{\det}S^1$ является группа $SU(n)$, и потому имеет место точная последовательность

$$0\to\pi_{i+1}(S^1)\to\pi_i(SU(n))\to\pi_i(U(n))\to\pi_i(S^1).$$

Следовательно, для любого $i\geqslant 2$ вложение $SU(n)\to U(n)$ индуцирует изоморфизм гомотопических групп

$$\pi_i(SU(n))\to\pi_i(U(n)).$$

Кроме того, при $i=1$ имеет место точная последовательность

$$0\to\pi_1(SU(n))\to\pi_1(U(n))\to\pi_1(S^1)=\mathbf{Z}\to 0.$$

12.3. π_1 для классических групп. Очевидно, что $\pi_1(O(1))=$ $=\pi_1(SO(1))=0$ и $\pi_1(O(2))=\pi_1(SO(2))=\mathbf{Z}$, ибо $O(1)=\mathbf{Z}_2$, $SO(1)=1$, $SO(2)=S^1$, и имеет место точная последовательность $SO(2)\to O(2)\to\mathbf{Z}_2$. Далее $U(1)=S^1$ и $Sp(1)=S^3$. Поскольку $1\leqslant c(n+1)-2$ при $c=2$, 4, отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
&\pi_1(U(n))=\pi_1(U(1))=\mathbf{Z} &&\text{при}\quad 1\leqslant n\leqslant\infty,\\
&\pi_1(SU(n))=\pi_1(SO(1))=0 &&\text{при}\quad 1\leqslant n\leqslant\infty,\\
&\pi_1(Sp(n))=\pi_1(Sp(1))=0 &&\text{при}\quad 1\leqslant n\leqslant\infty.
\end{aligned}$$

Для вычисления группы $\pi_1(SO(3))$ покажем, что пространство группы $SO(3)$ гомеоморфно проективному пространству RP^3. Действительно, каждый элемент $u\in SO(3)$ оставляет инвариантной некоторую точку x_u сферы $\|x\|=1$ и поворачивает плоскость, ортогональную к x_u, на некоторый угол θ_u. Мы отнесем элементу u точку $\theta_u x_u$ шара $B(0,\pi)\subset\mathbf{R}^3$, диаметрально противоположные точки границы которого отождествлены. Ясно, что это соответствие является гомеоморфизмом. С другой стороны, при отождествлении диаметрально противоположных точек границы шара получается пространство RP^3. Следовательно, группа $SO(3)$ гомеоморфна пространству RP^3. Поскольку $\pi_1(RP^3)=\mathbf{Z}_2$, тем самым доказано, что $\pi_1(SO(3))=\mathbf{Z}_2$. Так как $1\leqslant(n+1)-3$ при $3\leqslant n\leqslant\infty$, отсюда вытекает, что при таких n

$$\pi_1(O(n))=\pi_1(SO(n))=\pi_1(SO(3))=\pi_1(RP^3)=\mathbf{Z}_2.$$

12.4. π_2 для классических групп. Покажем, что $\pi_2(U_F(n))=\pi_2(SU_F(n))=0$ при $n\geqslant 1$. Действительно, $\pi_2(SU(1))=\pi_2(U(1))=\pi_2(S^1)=0$. Аналогично показывается, что $\pi_2(SO(n))=\pi_2(O(n))=0$ при $n\leqslant 3$. Так как $Sp(1)=SU(2)=S^3$ и $2\leqslant c(n+1)-3$ при $c=2, 4$, то $\pi_2(SU(n))=\pi_2(U(n))=\pi_2(Sp(n))=0$ при $1\leqslant n\leqslant\infty$. Таким образом, остаются лишь группы $SO(n)$ и $O(n)$ при $n\geqslant 4$. Рассмотрим расслаивающее отображение $SO(4)\to S^3$ со слоем $SO(3)$. Его точная гомотопическая последовательность имеет вид

$$0\to\pi_2(SO(3))\to\pi_2(SO(4))\to\pi_2(S^3)\to 0.$$

Следовательно, $\pi_2(SO(4))=\pi_2(O(4))=0$, ибо $\pi_2(SO(3))=\pi_2(RP^3)=\pi_2(S^3)=0$. Поскольку $2\leqslant(n+1)-3$ при $n\geqslant 4$, отсюда следует, что $\pi_2(O(n))=\pi_2(SO(n))$ при $n\geqslant 4$.

Можно показать, что группа π_2 равна нулю не только для классических групп, но и для любых компактных групп Ли.

12.5. Что касается групп π_i при бо́льших i, то здесь в первую очередь можно отметить, что

$$\pi_i(O(2))=\pi_i(SO(2))=\pi_i(U(1))=0 \text{ для всех } i>1$$

(как мы уже знаем, прн $i=1$ эти группы равны $\mathbf{Z}$).

При $n>2$ мы ограничимся вычислением групп π_3 и π_4.

12.6. π_3 для унитарных и симплектических групп. Так как $SU(2)=Sp(1)=S^3$, то $\pi_3(U(2))=\pi_3(SU(2))=\pi_3(Sp(1))=\mathbf{Z}$. Далее, так как $3\leqslant 2n-1$ при $n\geqslant 2$ в комплексном случае и $3\leqslant 4n+1$ в кватернионном случае, то, согласно теореме 4.1,

$$\pi_3(Sp(n))=\mathbf{Z} \quad \text{при } n\geqslant 1,$$
$$\pi_3(SU(n))=\pi_3(U(n))=\mathbf{Z} \quad \text{при } n\geqslant 2$$

(ясно, что $\pi_3(U(1))=\pi_3(SU(1))=0$).

Рассматривая сферу S^3 как единичную сферу $\|x\|=1$ пространства $\mathbf{H}$, определим отображения

$$r\colon S^3\to SO(4) \text{ и } s\colon S^3\to SO(4)$$

формулами $r(x)y=xyx^{-1}$ и $s(x)y=xy$, где $x\in S^3\subset\mathbf{H}$ и $y\in\mathbf{R}^4=\mathbf{H}$.

12.7. Предложение. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & SO(4) \\ RP^3 \arrow[r, "r'"] & SO(3) \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

где r' — некоторый однозначно определенный гомеоморфизм, f — естественная проекция и g — естественное вложение, для которого $g(u)1 = 1 \in \mathbf{H} = \mathbf{R}^4$, $u \in SO(3)$.

Доказательство. Так как $r(x)1 = 1$ и $r(x) = r(-x)$, то отображение r' существует (и, очевидно, определяется единственным образом). Если $r(x)y = y$ для всех $y \in \mathbf{H}$, то $xy = yx$, что возможно тогда и только тогда, когда x — действительное число и, следовательно, равно ± 1. Это означает, что отображение r' инъективно. Формула $r(\cos\theta + i\sin\theta) = j\cos 2\theta + k\sin 2\theta$, и аналогичные формулы, получающиеся циклическими перестановками кватернионных единиц i, j, k, показывают, что образ отображения r содержит все вращения вокруг осей i, j, k. Поэтому отображение r' надъективно и, следовательно, является гомеоморфизмом, поскольку пространство RP^3 компактно.

Заметим, что мы заново доказали гомеоморфность пространств $SO(3)$ и RP^3 (см. п. 12.3).

12.8. Следствие. *Группа $\pi_3(SO(3))$ является бесконечной циклической группой, порожденной гомотопическим классом отображения r: $S^3 \to SO(3)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что индуцированные гомоморфизмы $(r')_*$: $\pi_3(RP^3) \to \pi_3(SO(3))$ и f_*: $\pi_3(S^3) \to \pi_3(RP^3)$ являются изоморфизмами.

Пусть теперь p: $SO(4) \to S^3$ — отображение, определенное формулой $p(u) = u(1)$ (мы отождествляем здесь $\mathbf{R}^4$ с $\mathbf{H}$). Ясно, что $ps = 1$, так что s является сечением главного $SO(3)$-расслоения p: $SO(4) \to S^3$.

12.9. Предложение. *Пространство группы $SO(4)$ гомеоморфно произведению $S^3 \times SO(3)$. Группа $\pi_3(SO(4))$ является прямой суммой двух бесконечных циклических групп, образующими которых служат гомотопические классы $[r]$ и $[s]$.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из следствия 4.8.3. Согласно этому утверждению, $\pi_3(SO(4)) = \pi_3(S^3) \oplus \pi_3(SO(3))$. Поэтому для завершения доказательства достаточно заметить, что гомотопический класс $[s]$ порождает, очевидно, образ гомоморфизма $\pi_3(S^3) \to \pi_3(SO(4))$, а гомотопический класс $[r]$ — образ гомоморфизма $\pi_3(SO(3)) \to \pi_3(SO(4))$.

12.10. Предложение. *Характеристическое отображение $c_4: S^3 \to SO(4)$ главного $SO(4)$-расслоения $SO(5) \to S^4$ задается формулой*

$$c_4(x) = r(x)^{-1} s(x)^2, \qquad x \in S^3.$$

Доказательство. По определению $r(x)^{-1} s(x)^2 y = x^{-1}x^2yx = xyx$. Если векторы x и y ортогональны, то $xyx = y\bar{x}x = y$. Если y лежит на большой окружности, соединяющей 1 с x, то $xy = yx$ и отображение $y \mapsto xyx = x^2y$ является поворотом в этом круге на угол, равный удвоенному углу от 1 до x, что легко можно усмотреть, введя в $(1, x)$-плоскости полярные координаты. Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 9.5.

12.11. Предложение.

$$\pi_3(SO(n)) = \mathbf{Z} \text{ при } n \geqslant 5.$$

Доказательство. Из предложения 12.10 непосредственно вытекает, что $[c_4] = -[r] + 2[s]$. С другой стороны, согласно теореме 10.4, в точной последовательности

$$\pi_4'(S^4) \xrightarrow{\partial} \pi_3(SO(4)) \to \pi_3(SO(5)) \to 0$$

образ гомоморфизма ∂ порождается классом $[c_F]$. Поэтому $\pi_3(SO(5)) \approx \operatorname{Coker} \partial = \mathbf{Z}$. Наконец, поскольку $3 \leqslant n-2$ при $n \geqslant 5$, то, согласно теореме 4.1, $\pi_3(SO(n)) = \pi_3(SO(5))$.

Аналогичным образом можно вычислить и группы π_4 (см. ниже, упр. 6).

Добавление редактора перевода

Согласно следствию 8.4, полученные результаты позволяют дать полную классификацию всех локально тривиальных главных $U_F(n)$-расслоений (или, что равносильно, всех векторных расслоений) над сферами S^m размерности $m \leqslant 4$ (правда, при $F = \mathbf{R}$ необходимо некоторое дополнительное рассмотрение, поскольку группа $O(n)$ несвязна).

Случай $m = 1$. При $F = \mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ над окружностью S^1 любое векторное расслоение тривиальио. Прн $F = \mathbf{R}$ и любом $n \geqslant 1$, кроме тривиального, имеется еще одно n-мерное векторное расслоение. Пусть (E, p, S^1) — ассоциированное с ним расслоение на $n-1$-мерные сферы[1]). Тогда при $n = 1$ пространство E является окружиостью, а отображение p: $E \to S^1$ — двулистным накрытием. При $n > 1$ пространство E получается из произведения сферы S^{n-1} на отрезок $[0, 1]$ посредством обращающего

---

[1]) Определение см. на стр. 365. — *Прим. ред.*

ориентацию отождествления его краев $S^{n-1}\times\{0\}$ и $S^{n-1}\times\{1\}$. В частности, при $n=2$ пространство E является бутылкой Клейна.

Случай $m=2$. При $F=\mathbf{H}$ любое векторное расслоение над сферой S^2 тривиально. При $F=\mathbf{C}$ множество классов изоморфных n-мерных векторных расслоений над S^2 находится для любого $n\geqslant 1$ в биективном соответствии с множеством целых чисел $\mathbf{Z}$.

Пусть $F=\mathbf{R}$. В этом случае при $n=1$ любое расслоение тривиально (это общий факт: над m-мерной сферой S^m при $m>1$ каждое линейное действительное расслоение тривиально).

Действительное n-мерное векторное расслоение называется *ориентируемым*, если у него существует атлас, для которого соответствующие функции перехода принимают значения в группе $SO(n)$. Другими словами, векторное расслоение ориентируемо, если оно изоморфно как расслоение расслоенному пространству со структурной группой $SO(n)$. Ориентируемое векторное расслоение называется *ориентированным*, если для него задан атлас, обладающий указанными свойствами, т. е. если оно определено как расслоенное пространство со структурной группой $SO(n)$. Ориентированные векторные расслоения называются *изоморфными*, если они изоморфны как расслоенные пространства со структурной группой $SO(n)$. Согласно следствию 8.4, классы изоморфных ориентированных n-мерных векторных расслоений над сферой S^m находятся в биективном соответствии с элементами группы $\pi_{m-1}(SO(n))$. В частности, при $m=2$ и $n=2$ эти классы находятся в биективном соответствии с целыми числами.

С другой стороны, легко видеть, что любое действительное векторное расслоение над сферой S^m, $m>1$, ориентируемо (вообще любое действительное векторное расслоение над односвязным пространством ориентируемо).

Следовательно, каждому действительному двумерному векторному расслоению над S^2 мы, ориентировав это расслоение, можем сопоставить некоторое число $k\in\mathbf{Z}$. Без труда проверяется, что при другой ориентации получается число $-k$. Таким образом, множество классов изоморфных действительных двумерных ($n=2$) векторных расслоений над сферой S^2 находится в биективном соответствии с множеством $\mathbf{Z}^+$ неотрицательных целых чисел. При этом числу $k=0$ соответствует тривиальное расслоение. Расслоения, соответствующие числам $k>0$ (точнее, ассоциированные с ними расслоения иа окружности), можно описать следующим образом.

Пусть S^3 — единичная сфера пространства кватернионов $\mathbf{H}$ и S^1 — вложенная в нее окружность комплексных чисел, по модулю равных 1. Сфера S^3 является по умножению группой, а окружность S^1 — ее подгруппой. Соответствующее фактор-пространство S^3/S^1 гомеоморфно двумерной сфере S^2. Для любого $k>0$ рассмотрим в S^1 циклическую подгруппу $\{\zeta\}$, порожденную первообразным корнем из единицы степени k. Пусть $E_k = S^3/\{\zeta\}$ и p_k: $E_k \to S^2$ — естественная проекция. Читателю предлагается самостоятельно проверить, что (E_k, p_k, S^2) является расслоенным пространством со слоем S^1 и структурной группой $SO(2)$, обладающим тем свойством, что ассоциированному с ним двумерному векторному расслоению отвечает инвариант k. Построенное пространство E_k является так называемым *линзовым пространством* типа $(k, 1)$.

При $k=1$ пространство E_k является сферой S^3, а расслоение (E_k, p_k, S^2) — известным расслоением Хопфа (S^3, p, S^2).

При $k=2$ пространство E_k гомеоморфно группе $SO(3)$, а расслоение (E_k, p_k, S^2) изоморфно стандартному главному расслоению $(SO(3), p, S^2)$ (таким образом, инварианту $k=2$ отвечает касательное расслоение $\tau(S^2)$ сферы S^2).

При $n>2$ существуют только два неизоморфных действительных n-мерных векторных расслоения над сферой S^2: тривиальное и нетривиальное. Пусть (E, p, S^2) — расслоение на $n-1$-мерные $(n>2)$ сферы S^{n-1}, ассоциированное с нетривиальным n-мерным векторным расслоением над сферой S^2. Можно показать, что при $n=3$ пространство E представляет собой так называемую „связную сумму" двух экземпляров $(CP^2)_1$ и $(CP^2)_2$ комплексной проективной плоскости CP^2, т. е. получается вырезанием из плоскостей $(CP^2)_1$ и $(CP^2)_2$ по открытому четырехмерному шару с последующим отождествлением краев получившихся многообразий.

Случай $m=3$. Любое векторное расслоение над сферой S^3 тривиально.

Случай $m=4$. При $F=\mathbf{H}$ множество классов изоморфных n-мерных $(n \geqslant 1)$ векторных расслоений над сферой S^4 находится в биективном соответствии с множеством $\mathbf{Z}$ целых чисел. Это же верно и при $F=\mathbf{C}$, если только $n>1$. Любое линейное комплексное расслоение над сферой S^4 тривиально.

Пусть $F=\mathbf{R}$. Любое линейное или двумерное расслоение над сферой S^4 тривиально. (Это общий факт: любое двумерное расслоение над сферой S^m тривиально при $m>2$). При $n=3$ множество классов изоморфных действительных векторных расслоений над сферой S^4 находится в биективном соответствии с множеством $\mathbf{Z}$ целых чисел (в этом случае при изменении ориентации характеристическое отображение ориентированного векторного расслоения не меняется). Пусть E_k — пространство расслоения на сферы S^2, ассоциированного с трехмерным векторным расслоением над S^4, которому отвечает число k. Используя стандартную технику гомотопической топологии, можно без труда показать, что группа $\pi_3(E_k)$ является циклической группой порядка $|k|$. Следовательно, пространства E_{k_1} и E_{k_2} при $|k_1| \neq |k_2|$ не гомеоморфны. Напротив, пространства E_k и $-E_k$ гомеоморфны. Более того, легко показывается, что изоморфны даже соответствующие расслоения (но, конечно, этот изоморфизм не является изоморфизмом над S^4). Таким образом, существует бесконечно много негомеоморфных топологических пространств, расслаивающихся на двумерные сферы с базой S^4.

При $n=4$ классы изоморфных действительных ориентированных четырехмерных векторных расслоений над сферой S^4 находятся в биективном соответствии с парами (k_1, k_2) целых чисел. При изменении ориентации пара (k_1, k_2) переходит, как можно показать, в пару $(k_1+k_2, -k_2)$. Таким образом, классы изоморфных действительных четырехмерных векторных расслоений над сферой S^4 находятся в биективном соответствии с парами вида (k_1, k_2), где $k_1 \in \mathbf{Z}$, а $k_2 \in \mathbf{Z}^+$.

Пространства $E_{k,1}$ расслоений на трехмерные сферы, ассоциированных с четырехмерными векторными расслоениями над сферой S^4, которым отвечают пары вида $(k, 1)$, сыграли большую роль в развитии современной топологии гладких многообразий. Именно, Милнор [3] показал, что эти пространства (естественным образом являющиеся гладкими многообразиями) все гомеоморфны, но, вообще говоря, не диффеморфны стандартной семимерной сфере S^7 (диффеоморфизма заведомо не существует, если число k^2+k не делится на 7). Это явилось первым примером гомеоморфных, но не диффеоморфных гладких многообразий.

Наконец, при $n \geqslant 5$ множество классов изоморфных действительных n-мерных векторных расслоений над сферой S^4 находится в биективном соответствии с множеством $\mathbf{Z}$ (в этом случае, также как в случае $n=3$, характеристическое отображение не зависит от выбора ориентации).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверьте формулу для отображения $R(a, b)$ из п. 9.1.

2. Докажите, что для любого отображения $f\colon B_1 \to B$ и произвольного регулярного главного G-расслоения ξ над пространством SB с характеристическим отображением $c_\xi\colon B \to G$

составное отображение $c_\xi f\colon B_1 \to G$ является характеристическим отображением для расслоения $(Sf)^*(\xi)$.

3. Пусть G-расслоение $\omega_0 = (E_0, p_0, B_0)$ универсально в размерностях $\leqslant n$, и пусть $\partial\colon \pi_n(B_0) \to \pi_{n-1}(G)$ — граничный гомоморфизм его точной гомотопической последовательности. Докажите, что для любого отображения $f\colon S^n \to B_0$ имеет место формула $\partial[f] = [c]$, где $c\colon S^{n-1} \to G$ — характеристическое отображение для расслоения $f^*(\omega_0)$.

4. Перенесите результаты разд. 9—10 на расслоения $U(n) \to S^{2n-1}$ и $Sp(n) \to S^{4n-1}$.

5. Используя отождествление $\mathbf{C}^2 = \mathbf{H}$, покажите, что $SU(2) = Sp(1)$. Затем докажите, что $\pi_i(U(2)) = \pi_i(S^3)$ при $i \geqslant 2$.

6. Известно, что $\pi_{k+1}(S^k) = \mathbf{Z}_2$ при $k \geqslant 3$. Зная это, вычислите группы $\pi_4(Sp(k))$, $\pi_4(U(2))$, $\pi_4(SU(2))$ и $\pi_4(SO(k))$ при $1 \leqslant k \leqslant 4$.

7. Вычислите группы $\pi_{2(n-k)+2}(V_k(\mathbf{C}^n))$ и $\pi_{4(n-k)+4}(V_k(\mathbf{H}^n))$.

8. Докажите, что вложение $O(n) \to O(n+1)$ порождает точную последовательность

$$0 \to \mathbf{Z} \to \pi_{n-1}(O(n)) \to \pi_{n-1}(O(n+1)) \to 0$$

для n четного и точную последовательность

$$0 \to \mathbf{Z}_2 \to \pi_{n-1}(O(n)) \to \pi_{n-1}(O(n+1)) \to 0$$

для n нечетного.

ЧАСТЬ II

Элементы K-теории

Глава 8

СТАЦИОНАРНЫЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Векторные расслоения ξ и η называются стационарно эквивалентными, если существуют такие целые числа m и n, что векторные расслоения $\xi \oplus \theta^m$ и $\eta \oplus \theta^n$ изоморфны.[1] Отношение стационарной эквивалентности является отношением эквивалентности, и классы стационарно эквивалентных векторных расслоений над конечномерным клеточным разбиением X образуют кольцо $\tilde{K}(X)$ со сложением $\oplus$ и умножением $\otimes$. В этой главе изучается связь между отношениями изоморфности и стационарной эквивалентности векторных расслоений и рассматриваются некоторые элементарные свойства колец $\tilde{K}(X)$.

1. ТРИВИАЛЬНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть, как и выше, $F = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ и $c = \dim_{\mathbf{R}} F$. В этом разделе мы, используя теорему 2.7.1 и $(ck-2)$-связиость пространства $F^k \setminus \{0\}$, показываем, что векторные расслоения достаточно большой размерности разлагаются в сумму Уитни некоторого тривиального расслоения и векторного расслоения меньшей размерности. Всюду в дальнейшем символом ξ_0 обозначается подрасслоеиие векторного расслоения ξ, состоящее из отличных от нуля векторов. Считается, что все рассматриваемые векторные расслоения имеют одну и ту же базу X, являющуюся n-мерным клеточным разбиением.

1.1. Предложение. *Если $n \leqslant ck-1$, то для любого k-мерного векторного расслоения ξ существует такое векторное расслоение η, что расслоение ξ изоморфно расслоению $\eta \oplus \theta^1$.*

---

[1] Здесь и ниже символом θ^n обозначается тривиальное n-мерное векторное расслоение. — *Прим. ред.*

Доказательство. Слоем расслоения ξ_0 является $(ck-2)$-связное пространство $F^k \setminus \{0\}$. Следовательно, согласно теореме 2.7.1 (случай (**H**1)), расслоение ξ_0 обладает сечением s. Иными словами, векторное расслоение ξ обладает нигде не обращающимся в нуль сечением s. Ясно, что формула $u(b, a) = as(b)$, $(b, a) \in X \times F$, определяет некоторый мономорфизм u: $\theta^1 \to \xi$. Согласно теореме 3.8.2, коядро η мономорфизма u также является векторным расслоением, и потому, согласно теореме 3.9.6 (эта теорема применима, ибо клеточное разбиение X паракомпактно), векторные расслоення ξ н $\eta \oplus \theta^1$ нзоморфны.

Для каждого действительного числа $x \in \mathbf{R}$ мы символом $\langle x \rangle$ будем обозначать нанменьшее целое число n, обладающее тем свойством, что $x \leqslant n$.

1.2. Теорема. *Каждое k-мерное векторное расслоение ξ^k изоморфно векторному расслоению вида $\eta^m \oplus \theta^{k-m}$, где $m = \langle ((n+1)/c) - 1 \rangle$, а η^m — некоторое m-мерное векторное расслоение.*

Доказательство. Индукцией по $k \geqslant m$ из предложения 1.1 немедленно вытекает, что при $n \leqslant c(m+1) - 1$ расслоение ξ^k изоморфио расслоению вида $\eta^m \oplus \theta^{k-m}$.

Замечание. Для действительных векторных расслоений число m равно n, так что каждое действительное векторное расслоение ξ^k изоморфно расслоению вида $\eta^n \oplus \theta^{k-n}$. Для комплексных расслоений число m приблизительно равно $n/2$, а для кватернионных $n/4$.

1.3. Замечание. При $n = 0$ теорема 1.2 утверждает, что всякое векторное расслоение над точкой тривиально, или, другимн словами, что оно имеет базис. Таким образом, эта теорема может рассматриваться как естественное обобщение на векторные расслоения теоремы о существовании базиса для векторных пространств. Ниже мы докажем теорему (теорема 1.5), в аналогичном смысле являющуюся обобщением на векторные расслоения теоремы о равномощностн базисов векторных пространств.

1.4. Предложение. *Если $n \leqslant ck - 2$, то для любых двух мономорфизмов u, v: $\theta^1 \to \xi^k$ векторных расслоений расслоения* Coker u *и* Coker v *изоморфны над X.*

Доказательство. Элементарные соображения (по существу уже использованные при доказательстве предложения 1.1) показывают, что мономорфизмы $\theta^1 \to \xi^k$ находятся в биектнвном соответствии с сеченнями расслоения $\xi_0 = \xi_0^k$. Пусть s — такое сечение расслоения $\xi_0 \times I = (\xi \times I)_0$ над $X \times \{0, 1\}$, что сечение

$s^*|(X \times 0)$ соответствует мономорфизму u, а сечение $s^*|(X \times 1)$ — мономорфизму v. Так как $\dim(X \times I) = n+1 \leqslant ck-1$, то сечение s может быть распространено до некоторого сечения s^{**} расслоения $\xi_0 \times I$ над всем пространством $X \times I$. Пусть $w: \theta^1 \to \xi \times I$ — мономорфизм, соответствующий сечению s^*. Ясно, что расслоение $\operatorname{Coker} w|(X \times 0)$ изоморфно расслоению $\operatorname{Coker} u$, а расслоение $\operatorname{Coker} w|(X \times 1)$ — расслоению $\operatorname{Coker} v$. Поэтому, согласно следствию 3.4.6, векторные расслоения $\operatorname{Coker} u$ и $\operatorname{Coker} v$ также изоморфны.

1.5. Теорема. *Если для векторных расслоений ξ_1^k и ξ_2^k размерности $k \geqslant m = \langle (n+2)/c - 1 \rangle$ существует такое число l, что расслоения $\xi_1^k \oplus \theta^l$ и $\xi_2^k \oplus \theta^l$ изоморфны, то векторные расслоения ξ_1^k и ξ_2^k также изоморфны.*

Доказательство. Индукцией по l из предложения 1.4 немедленно получаем, что при $n \leqslant c(k+1) - 2$, т. е. при $\langle (n+2)/c \rangle - 1 \leqslant k$, векторные расслоения ξ_1^k и ξ_2^k изоморфны.

1.6. Замечание. Таким образом, в частности, в представлении $\eta^{n+1} \oplus \theta^{k-n-1}$ произвольного действительного векторного расслоения ξ^k размерности $k \geqslant n+1$ векторное расслоение η^{n+1} с точностью до изоморфизма однозначно определяется расслоением ξ^k. Аналогичное утверждение для представления вида $\eta^n \oplus \theta^{k-n}$, вообще говоря, неверно. Например, расслоения $\tau(S^n) \oplus \theta^1$ и $\theta^n \oplus \theta^1 = \theta^{n+1}$, как мы знаем, изоморфны для всех $n \geqslant 1$ (см. пример 2.4.7), в то время как расслоение $\tau(S^n)$ тривиально лишь при $n = 1$, 3 и 7.

Отметим, что все результаты этого пункта получены совершенно элементарно, т. е. без использования общей теории расслоенных пространств. В следующем пункте мы покажем, как эти результаты можно получить из теорем о гомотопической классификации векторных расслоений.

2. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И СУММЫ УИТНИ

2.1. Определение. *Классифицирующим отображением* для векторного расслоения ξ над пространством X мы будем называть каждое отображение $f: X \to G_k(F^{k+m})$, для которого индуцированное векторное расслоение $f^*(\gamma_k^{k+m})$ изоморфно расслоению ξ.

Теорема о гомотопической классификации векторных расслоений (теорема 3.7.2) утверждает, что каждое k-мерное векторное расслоение над клеточным разбиением X размерности

$n \leqslant c(m+1)-2$ обладает единственным с точностью до гомотопии классифицирующим отображением $f\colon X \to G_k(F^{k+m})$.

Рассмотрим вопрос о вычислении классифицирующего отображения для суммы Уитни $\xi \oplus \eta$ по классифицирующим отображениям для слагаемых ξ и η. Пусть $\gamma_k^n = (E_1, p_1, G_k(F^n))$, $\gamma_l^m = (E_2, p_2, G_l(F^m))$ и $\gamma_{k+l}^{m+n} = (E, p, G_{l+k}(F^{m+n}))$. Ясно, что для отображений $w\colon E_1 \times E_2 \to E$ и $d\colon G_k(F^n) \times G_l(F^m) \to G_{k+l}(F^{n+m})$, определенных формулами $d(W_1, W_2) = W_1 \oplus W_2$ и $w((W_1, x_1), (W_2, x_2)) = (W_1 \oplus W_2, x_1 + x_2)$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\quad w \quad} & E \\ \downarrow{\scriptstyle p_1 \times p_2} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G_k(F^n) \times G_l(F^m) & \xrightarrow{d} & G_{k+l}(F^{m+n}) \end{array}$$

так что пара (w, d) представляет собой морфизм векторных расслоений $\gamma_k^n \times \gamma_l^m \to \gamma_{k+l}^{m+n}$. Пусть, далее, Δ — диагональное отображение $X \to X \times X$.

2.2. Теорема. *Отображение $d(f \times g)\Delta$, где $f\colon X \to G_k(F^n)$ — классифицирующее отображение для ξ, а $g\colon X \to G_l(F^m)$ — классифицирующее отображение для η, является классифицирующим отображением для $\xi \oplus \eta$.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм векторных расслоений $h\colon f^*(\gamma_k^n) \oplus g^*(\gamma_l^m) \to (d(f \times g)\Delta)^*(\gamma_{k+l}^{m+n})$, определенный формулой $h((b, W, y), (b, W', y')) = (b, W \oplus W', y + y')$. Ясно, что морфизм h на каждом слое является линейным изоморфизмом. Следовательно, согласно теореме 3.2.5, этот морфизм является изоморфизмом. Таким образом, векторное расслоение $(d(f \times g)\Delta)^*(\gamma_{k+l}^{n+m})$ изоморфно векторному расслоению $\xi \oplus \eta$.

2.3. Следствие. *Если $f\colon X \to G_k(F^n)$ — классифицирующее отображение для векторного расслоения ξ, то для любого $m \geqslant 0$ отображение $if\colon X \to G_k(F^{n+m})$, где $i\colon G_k(F^n) \to G_k(F^{n+m})$ — естественное вложение, также является классифицирующим отображением для ξ.*

Доказательство. Отображение i можно рассматривать как отображение $d\colon G_k(F^n) \times G_0(F^m) \to G_k(F^{n+m})$. Кроме того, для единственно возможного отображения $g\colon X \to G_0(F^m)$ имеет место равенство $g^*(\gamma_0^m) = 0$. Поскольку $\xi \oplus 0 = \xi$, следствие 2.3 немедленно вытекает теперь из теоремы 2.2.

2.4. Следствие. *Если $f\colon X \to G_k(F^n)$ — классифицирующее отображение для векторного расслоения ξ, то для любого $m \geqslant 0$*

отображение $jf: X \to G_{k+m}(F^{n+m})$, *где* $j: G_k(F^n) \to G_{k+m}(F^{n+m})$ — *естественное вложение* $W \mapsto W \oplus F^m$, *является классифицирующим отображением для расслоения* $\xi \oplus \theta^m$, *где* θ^m, *как всегда,* — *m-мерное тривиальное векторное расслоение.*

Доказательство. Отображение j можно рассматривать как отображение $d: G_k(F^m) \times G_m(F^m) \to G_{k+m}(F^{n+m})$. Кроме того, для единственно возможного отображения $g: X \to G_m(F^m)$ имеет место изоморфизм $g^*(\gamma_m^m) \approx \theta^m$.

2.5. Замечание. Пусть $\tau: G_k(F^n) \to G_{n-k}(F^n)$ — отображение, определенное формулой $\tau(W) = W^*$, где W^* — ортогональное дополнение подпространства W в пространстве F^n. Ясно, что при $l = n - k$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G_k(F^n) & \xrightarrow{i} & G_k(F^{n+m}) \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} \\ G_l(F^n) & \xrightarrow{j} & G_{l+m}(F^{n+m}) \end{array}$$

2.6. Теорема. *Для каждого клеточного разбиения X размерности $n \leqslant \min[c(m+1)-2, c(k+1)-2]$ отображения*

$$i_*: [X, G_k(F^{k+m})] \to [X, G_k(F^{k+m+1})],$$
$$j_*: [X, G_k(F^{k+m})] \to [X, G_{k+1}(F^{k+m+1})]$$

биективны.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из следствия 2.3 и теоремы о гомотопической классификации векторных расслоений. Второе утверждение вытекает из первого, поскольку в коммутативной диаграмме, указанной в замечании 2.5, отображение τ является гомеоморфизмом.

2.7. Следствие. *При $n \leqslant c(m+1)-2$ отображение*

$$j_*i_*: [X, G_m(F^{2m})] \to [X, G_{m+1}(F^{2m+2})]$$

биективно.

Отметим, что теорема 1.5 предыдущего раздела является непосредственным следствием теоремы 2.6.

3. ФУНКТОР K

Нам понадобится одна общая алгебраическая конструкция, относящаяся к *полукольцам*, т. е. к множествам с двумя операциями — сложеием и умножением, удовлетворяющими всем аксиомам колец, за исключением аксиомы о неограниченной возможности вычитания. Примером полукольца является множество $\{0, 1, 2, \ldots\}$ всех натуральных чисел с обычным сложением и умножением. По аналогии с кольцами определяются *полукольца с единицей* и *коммутативные полукольца*. Относительно каждой из двух операций полукольцо с единицей является полугруппой (множеством с одной ассоциативной бинарной операцией, обладающим нулевым элементом).

3.1. Пример. Пусть X — топологическое пространство и $\mathrm{Vect}_F(X)$ — множество классов изоморфных F-векторных расслоений над X, где, как всегда, $F = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$. (На разных компонентах пространства X векторные расслоения могут иметь разные размерности.) Множество $\mathrm{Vect}_F(X)$ при $F = \mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ является, очевидно, коммутативным полукольцом относительно операций $\oplus$ и $\otimes$. При $F = \mathbf{H}$ множество $\mathrm{Vect}_{\mathbf{H}}(X)$ является лишь полугруппой с операцией $\oplus$.

В дальнейшем классы изоморфных векторных расслоений мы будем, как правило, обозначать теми же символами, что и сами расслоения.

Гомоморфизмом полукольца S в полукольцо S' мы будем называть произвольное отображение $f\colon S \to S'$, для которого

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{и} \quad f(0) = 0.$$

3.2. Пример. Для каждого пунктированного пространства X отображение $\dim\colon \mathrm{Vect}_F(X) \to \mathbf{Z}$, сопоставляющее произвольному векторному расслоению его размерность на компоненте линейной связности, содержащей отмеченную точку, является при $F = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ гомоморфизмом полуколец (а при $F = \mathbf{H}$ — гомоморфизмом полугрупп). Для линейно связных пространств X гомоморфизм $\dim$ определен и без предположения о пунктированности.

Существует стандартный способ построения по произвольному полукольцу наименьшего в некотором смысле кольца. В применении к полукольцу натуральных чисел этот способ дает кольцо всех целых чисел. Аналогичным образом по произвольной коммутативной полугруппе строится некоторая группа (обязательно абелева).

3.3. Определение. *Пополнением* полукольца S до кольца называется пара (S^*, θ), где S^* — некоторое кольцо, а $\theta\colon S \to S^*$ — такой гомоморфизм полуколец, что для произвольного гомоморфизма $f\colon S \to R$ полукольца S в некоторое кольцо R существует один и только один гомоморфизм колец $g\colon S^* \to R$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & S^* \arrow[dr, "g"] & \\ S \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "f"] & & R \end{tikzcd}$$

т. е. такой, что $g\theta = f$.

Два пополнения (S^*, θ) и (S_1^*, θ_1) называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм f: $S^* \to S_1^*$, что $\theta_1 f = \theta$.

Пополнения полугрупп и изоморфизмы их пополнений определяются аналогично. Легко доказывается, что *для любого коммутативного полукольца (коммутативной полугруппы) S существует единственное с точностью до изоморфизма пополнение.*

Действительно, определим на множестве всевозможных пар $(a, b) \in S \times S$ отношение эквивалентности, считая пары (a, b) и (a', b') тогда и только тогда эквивалентными, когда существует такой элемент $c \in S$, что $a + b' + c = a' + b + c$. Без труда проверяется, что это отношение действительно является отношением эквивалентности. Обозначая символом $\langle a, b\rangle$ класс эквивалентности пары (a, b) (неформально этот класс следует представлять себе как разность $a - b$), мы определим в множестве S^* всех классов $\langle a, b\rangle$ операции сложения и умножения по формулам

$$\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle,$$
$$\langle a, b\rangle \langle c, d\rangle = \langle ac + bd, bc + ad\rangle$$

(в случае, когда S — полугруппа, определяется только сложение). Тривиальным образом проверяется, что относительно этих операций множество S^* является коммутативным кольцом (абелевой группой). Противоположным к элементу $\langle a, b\rangle$ будет класс $\langle b, a\rangle$, а роль нуля играет класс $\langle 0, 0\rangle$. Более формально кольцо S^* можно определить как факторгруппу свободной абелевой группы, порожденной множеством элементов полукольца S, по подгруппе, порожденной элементами вида $(a + b) + (-1)a + (-1)b$, $a, b \in S$, умножение в которой по линейности распространено с полукольца S. Детали этого построения (в частности, проверку возможности распространения умножения) мы оставляем читателю. Гомоморфизм θ: $S \to S^*$ определяется формулой $\theta(a) = \langle a, 0\rangle$. Проверку того, что этот гомоморфизм обладает требуемым свойством, мы также оставляем читателю.

Пусть теперь (S_1^*, θ_1) — любое другое пополнение полукольца S. Тогда, очевидно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S^* \arrow[d, shift right, "f"'] \\ S \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dr, "\theta_1"'] & \\ & S_1^* \arrow[u, shift right, "g"'] \end{tikzcd}$$

причем обе композиции gf и fg являются тождественными отображениями. Следовательно, пополнение (S_1^*, θ_1) изоморфно пополнению (S^*, θ).

3.4. Определение. Для произвольного пространства X символом $K_F(X)$ мы будем обозначать кольцо (при $F = \mathbf{H}$ — группу), являющееся пополнением полукольца (полугруппы) $\mathrm{Vect}_F(X)$. Образ произвольного расслоения $\xi \in \mathrm{Vect}_F(X)$ в кольце $K_F(X)$ при отображении θ мы будем, как правило, обозначать тем же символом ξ. Таким образом, каждый элемент кольца $K_F(X)$ будет иметь вид $\xi - \eta$, где $\xi, \eta \in \mathrm{Vect}_F(X)$.

Ясно (ср. разд. 7 гл. 3), что Vect_F является контравариантным функтором из категории топологических пространств в категорию полуколец (или полугрупп): для произвольного отображения $f: Y \to X$ гомоморфизм

$$\mathrm{Vect}_F(f): \mathrm{Vect}_F(X) \to \mathrm{Vect}_F(Y)$$

сопоставляет векторному расслоению ξ над пространством X расслоение $f^*(\xi)$ над пространством Y. (Напомним, что мы условились не различать векторное расслоение ξ и класс векторных расслоений, изоморфных ξ.)

Аналогичным образом K_F является контравариантным функтором из категории топологических пространств в категорию колец (или при $F = \mathbf{H}$ — групп): для каждого отображения $f: Y \to X$ гомоморфизм $K_F(f)$ определяется как гомоморфизм, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Vect}_F(X) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mathrm{Vect}_F(f)"'] & K_F(X) \arrow[d, "K_F(f)"] \\ \mathrm{Vect}_F(Y) \arrow[r, "\theta"] & K_F(Y) \end{tikzcd}$$

Иными словами, $K_F(f)(\xi - \eta) = f^*(\xi) - f^*(\eta)$ для любого элемента $\xi - \eta \in K_F(X)$. Функториальное тождество $K_F(fg) = K_F(g)K_F(f)$ для произвольных отображений $f: Y \to X$ и $g: Z \to Y$ немедленно вытекает из единственности предусмотренного определением 3.3 морфизма g. По аналогичным соображениям и $K_F(1_X) = 1_{K_F(X)}$.

Согласно определению пополнения, гомоморфизм $\dim\colon \mathrm{Vect}_F(X) \to \mathbf{Z}$ (для любого пунктированного или линейно связного пространства X) индуцирует такой гомоморфизм $\dim\colon K_F(X) \to \mathbf{Z}$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & K_F(X) \arrow[dr, "\dim"] & \\
\mathrm{Vect}_F(X) \arrow[ur] \arrow[rr, "\dim"] & & \mathbf{Z}
\end{tikzcd},$$

В явном виде этот гомоморфизм определяется формулой

$$\dim(\xi - \eta) = \dim \xi - \dim \eta.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что все рассматриваемые пространства X линейно связны.

Единицей 1 кольца $K_F(X)$ является, очевидно, тривиальное линейное расслоение. Таким образом, $\dim(1) = 1$. Как и для произвольных колец с единицей, соответствие $n \mapsto n \cdot 1$, $n \in \mathbf{Z}$, определяет некоторый гомоморфизм $\varepsilon\colon \mathbf{Z} \mapsto K_F(X)$. Ясно, что $\dim \circ \varepsilon = 1_{\mathbf{Z}}$ и $\varepsilon(n) = \theta^n$, $n \geqslant 0$. Кроме того, для произвольного отображения $f\colon Y \to X$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & K_F(X) \arrow[dr, "\dim"] \arrow[dd, "K_F(f)"] & \\
\mathbf{Z} \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \mathbf{Z} \\
 & K_F(Y) \arrow[ur, "\dim"'] &
\end{tikzcd}$$

3.5. Определение. Ядро гомоморфизма $\dim\colon K_F(X) \to \mathbf{Z}$ обозначается символом $\tilde{K}_F(X)$. Из сказанного выше непосредственно следует, что в кольце $K_F(X)$ это ядро выделяется прямым слагаемым:

$$K_F(X) = \tilde{K}_F(X) \oplus \mathbf{Z}.$$

Кроме того, для произвольного непрерывного отображения $f\colon Y \to X$ гомоморфизм $K_F(f)$ индуцирует, очевидно, некоторый гомоморфизм $\tilde{K}_F(f)\colon \tilde{K}_F(X) \to \tilde{K}_F(Y)$. Следовательно, $\tilde{K}_F$ также является контравариантным функтором. Он называется *приведенным K_F-функтором*. Гомоморфизм $K_F(f)$ часто обозначается символом $f^!$.

Для того чтобы дать прямое геометрическое описание функтора K_F, введем следующее

3.6. Определение. Векторные расслоения ξ и η над линейно связным пространством X называются *стационарно эквивалентными* (обозначение: $\xi \sim \eta$), если существуют такие целые числа q и n, что векторные расслоения $\xi \oplus \theta^n$ и $\eta \oplus \theta^q$ изоморфны над X. Векторное расслоение ξ, стационарно эквивалентное тривиальному, называется *стационарно тривиальным.*

Отношение стационарной эквивалентности является, очевидно, отношением эквивалентности, причем изоморфные векторные расслоения, очевидно, стационарно эквивалентны. Следовательно, стационарную эквивалентность можно рассматривать как отношение эквивалентности на множестве $\mathrm{Vect}_F(X)$.

3.7. Замечание. В терминах стационарной эквивалентности теорема 1.2 утверждает, что *каждое векторное расслоение над n-мерным клеточным разбиением стационарно эквивалентно некоторому k-мерному векторному расслоению, где k—такое число, что $n \leqslant c(k+1)-1$.* Аналогично теорема 1.5 утверждает, что *при $n \leqslant c(k+1)-2$ два k-мерных векторных расслоения ξ и η тогда и только тогда изоморфны, когда они стационарно эквивалентны.*

3.8. Теорема. *Если линейно связное пространство X обладает тем свойством, что*

(S) *для каждого векторного расслоения ξ над X существует такое векторное расслоение η, что расслоение $\xi \oplus \eta$ изоморфно тривиальному расслоению θ^m (при некотором m), то отображение*

$$\alpha \colon \mathrm{Vect}_F(X) \to \tilde{K}_F(X),$$

определенное формулой

$$\alpha(\xi) = \xi - \dim \xi,$$

надъективно и $\alpha(\xi) = \alpha(\eta)$ тогда и только тогда, когда расслоения ξ и η стационарно эквивалентны.

В этой теореме под разностью $\xi - \dim \xi$ понимается элемент $\xi - \theta^{\dim \xi}$ кольца $\tilde{K}_F(X)$ (иными словами, как и выше, считается, что кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$ вложено в кольцо $K_F(X)$ посредством гомоморфизма ε).

Теорема 3.8 показывает, что *множество классов стационарно эквивалентных векторных расслоений над линейно связным пространством X, обладающим свойством* (S), *естественным образом отождествляется с кольцом $\tilde{K}_F(X)$.*

Доказательство. Каждый элемент кольца $\tilde{K}_F(X)$ имеет вид $\xi - \eta$, где $\dim \xi = \dim \eta$. Пусть η'—такое векторное расслоение, что расслоение $\eta \oplus \eta'$ изоморфно тривиальному расслоению θ^m. Тогда в кольце $\tilde{K}_F(X)$ имеют место равенства $\xi-\eta=\xi\oplus\eta'-\eta\oplus\eta'=\xi\oplus\eta'-m=\xi\oplus\eta'-\dim(\xi\oplus\eta')=\alpha(\xi\oplus\eta')$. Следовательно, отображение α надъективно.

Пусть теперь $\xi=\xi^n$ и $\eta=\eta^m$ — такие векторные расслоения, что $\xi-n=\alpha(\xi)=\alpha(\eta)=\eta-m$. Согласно изложенной в п. 3.3 конструкции, существует такое векторное расслоение ζ, что расслоения $\xi\oplus\theta^m\oplus\zeta$ и $\eta\oplus\theta^n\oplus\zeta$ изоморфны. Пусть ζ' — такое расслоение, что $\zeta\oplus\zeta'\approx\theta^q$. Тогда расслоение $\xi\oplus\theta^m\oplus\theta^q=$ $=\xi\oplus\theta^{m+q}$ изоморфно расслоению $\eta\oplus\theta^n\oplus\theta^q=\eta\oplus\theta^{n+q}$, так что расслоения ξ и η стационарно эквивалентны. Обратно, если расслоения $\xi\oplus\theta^n$ и $\eta\oplus\theta^m$ изоморфны, то $\alpha(\xi)=\alpha(\xi\oplus\theta^n)=$ $=\alpha(\eta\oplus\theta^m)=\alpha(\eta)$.

3.9. Пример. Поскольку для касательного расслоения $\tau(S^n)$ сферы S^n имеет место формула $\tau(S^n)\oplus\theta^1\approx\theta^{n+1}$, это расслоение для всех n стационарно тривиально. С другой стороны, оно тривиально только при $a=1$, 3 или 7.

3.10. Замечание. Аналогично теореме классификации расслоенных пространств с заданной структурной группой G и слоем F и теореме классификации векторных расслоений заданной размерности справедлива (по крайней мере для конечных клеточных разбиений) теорема классификации векторных расслоений с точностью до стационарной эквивалентности. Иными словами, *функтор* $\tilde{K}_F$ *представим*, т. е. существует такое пространство $B_{(F)}$, что для любого X кольцо $\tilde{K}_F(X)$ находится в естественном биективном соответствии с множеством $[X, B_{(F)}]$ гомотопических классов отображений $X\to B_{(F)}$. Мы докажем эту теорему в следующем разделе.

4. ПРЕДСТАВИМОСТЬ ФУНКТОРА $\tilde{K}_F$

Имеются по крайней мере две категории пространств, в которых функтор $\tilde{K}_F$ представим: категория связных клеточных разбиений ограниченной размерности и категория всех конечных связных клеточных разбиений. Эти категории пересекаются, но ни одна из них не содержится в другой.

Для любого линейно связного пространства X и любого $n\geqslant 0$ мы рассмотрим отображение

$$\varphi_X^n\colon [X, G_n(F^{2n})]\to\tilde{K}_F(X),$$

определенное формулой

$$\varphi_X^n([g])=g^*(\gamma_n^{2n})-n,\qquad [g]\in[X, G_n(F^{2n})].$$

4.1. Предложение. *Для каждой категории, состоящей из линейно связных паракомпактных пространств X и любого $n \geqslant 0$, семейство отображений $\varphi_X = \varphi_X^n$ является морфизмом функторов (при условии, что функторы $[-, G_n(F^{2n})]$ и $\tilde{K}_F(-)$ считаются принимающими значения в категории множеств).*

Доказательство. Пусть $f\colon Y \to X$ — произвольное отображение линейно связных паракомпактных пространств. Тогда $(gf)^*(\gamma_n^{2n}) \approx f^*(g^*(\gamma_n^{2n}))$ для любого отображения $g\colon X \to G_n(F^{2n})$, и потому имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [X, G_n(F^{2n})] & \xrightarrow{\varphi_X} & \tilde{K}_F(X) \\ {\scriptstyle [f, G_n(F^{2n})]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{K}_F(f)} \\ [Y, G_n(F^{2n})] & \xrightarrow{\varphi_Y} & \tilde{K}_F(Y) \end{array}$$

Следовательно, семейство $\varphi = \{\varphi_X\}$ действительно является морфизмом функторов.

4.2. Теорема. *На категории связных клеточных разбиений размерности $\leqslant c(n+1)-2$ морфизм функторов $\varphi\colon [-, G_n(F^{2n})] \to \tilde{K}_F(-)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно предложению 3.5.8, каждое конечномерное клеточное разбиение X удовлетворяет условию (S) теоремы 3.8. Поэтому каждый элемент кольца $\tilde{K}_F(X)$ имеет вид $\xi - \dim \xi$. С другой стороны, согласно теореме классификации 3.7.2, как она сформулирована в п. 2.1, любое расслоение ξ над клеточным разбиением X размерности $\leqslant c(n+1)-2$ имеет вид $g^*(\gamma_n^{2n})$. Следовательно, отображение φ_X^n надъективно. Далее, согласно той же теореме 3.8, $\xi - \dim \xi = \eta - \dim \eta$ тогда и только тогда, когда расслоения ξ и η стационарно эквивалентны. Следовательно, если $\varphi_X^n([f]) = \varphi_X^n([g])$, то расслоения $f^*(\gamma_n^{2n})$ и $g^*(\gamma_n^{2n})$ стационарно эквивалентны и, следовательно, изоморфны (см. замечание 3.7), что, согласно теореме 4.13.1, возможно только при $[f] = [g]$. Таким образом, для каждого клеточного разбиения X размерности $\leqslant c(n+1)-2$ отображение φ_X^n биективно. Следовательно, морфизм функторов φ^n является изоморфизмом.

4.3. Определение. Символом $B_{(F)}$ мы будем обозначать объединение возрастающей последовательности пространств $G_1(F^2) \subset G_2(F^4) \subset \ldots \subset G_n(F^{2n}) \subset \ldots$, снабженное топологией индуктивного предела. При $F = \mathbf{R}$ пространство $B_{(F)}$ мы будем обозначать символом B_O, при $F = \mathbf{C}$ — символом B_U, а при $F = \mathbf{H}$ — символом B_{Sp}.

4.4. Предложение. *Для каждого конечного связного клеточного разбиения X существует такое целое число k, что для всех $q \geqslant k$ естественное вложение $G_q(F^{2q}) \to B_{(F)}$ индуцирует биективное отображение*

$$[X,\ G_q(F^{2q})] \to [X,\ B_{(F)}].$$

Доказательство. Пусть $\dim X \leqslant c(k+1) - 2$. Тогда, согласно следствию 2.7, естественные вложения индуцируют биективные отображения

$$[X,\ G_k(F^{2k})] \to \ldots \to [X,\ G_q(F^{2q})] \to \ldots .$$

Поскольку клеточное разбиение X конечно и, следовательно, компактно, для каждого отображения $f\colon X \to B_{(F)}$ существует такое $n \geqslant k$, что $f(X) \subset G_n(F^{2n})$. Поэтому для любого $q \geqslant k$ отображение $[X,\ G_q(F^{2q})] \to [X,\ B_{(F)}]$ надъективно. Аналогично, поскольку для любой гомотопии отображений $X \to B_{(F)}$ существует такое $n \geqslant k$, что эта гомотопия происходит в $G_n(F^{2n})$, отображение $[X,\ G_q(F^{2q})] \to [X,\ B_{(F)}]$ инъективно.

Для любого конечного связного клеточного разбиения X и любого целого числа q, удовлетворяющего неравенству $c(q+1) - 2 \geqslant \dim X$, композиция θ_X отображений

$$[X,\ B_{(F)}] \xrightarrow{\alpha_q} [X,\ G_q(F^{2q})] \xrightarrow{\varphi^q} \widetilde{K}_F(X),$$

где α_q — отображение, обратное к биективному отображению $[X,\ G_q(F^{2q})] \to [X,\ B_{(F)}]$, не зависит, очевидно, от q. Ясно, что отображения θ_X составляют морфизм $\theta\colon [-,\ B_{(F)}] \to \widetilde{K}(-)$ (где снова функторы $[-,\ B_{(F)}]$ и $\widetilde{K}_F(-)$ считаются принимающими значения в категории множеств).

4.5. Теорема. *На категории конечных связных клеточных разбиений морфизм функторов $\theta\colon [-,\ B_{(F)}] \to \widetilde{K}_F(-)$ является изоморфизмом. Более того, пространство $B_{(F)}$ может быть снабжено таким строением H-пространства, что θ будет даже изоморфизмом этих функторов, рассматриваемых как функторы со значениями в категории абелевых групп.*

Доказательство. Из теоремы 4.2 немедленно вытекает, что на любой подкатегории, категории конечных связных клеточных разбиений, состоящей из конечного числа разбиений, морфизм θ будет изоморфизмом. Поэтому он будет изоморфизмом и на всей категории конечных связных клеточных разбиений. Для доказательства второго утверждения теоремы рассмотрим линейные отображения $f_{od}\colon F^\infty \to F^\infty$ и $f_{ev}\colon F^\infty \to F^\infty$, определенные формулами $f_{od}(e_i) = e_{2i-1}$ и $f_{ev}(e_i) = e_{2i}$, $i \geqslant 1$. Ясно, что эти отображения инъективны, причем $f_{od}(F^n) \subset F^{2n}$, $f_{ev}(F^n) \subset F^{2n}$ для любого $n \geqslant 0$. Кроме того, $f_{od}(F^n) \cap f_{ev}(F^n) = 0$. Следовательно, формула $\psi_n(W, W') = f_{od}(W) + f_{ev}(W')$, где $(W, W') \in G_n(F^{2n}) \times G_n(F^{2n})$, корректно определяет некоторое отображение

$$\psi_n\colon G_n(F^{2n}) \times G_n(F^{2n}) \to G_{2n}(F^{4n}).$$

Очевидно, что для этого отображения $\psi_n^*(\gamma_{2n}^{4n}) = \gamma_n^{2n} \times \gamma_n^{2n}$. Кроме того, ясно, что отображения ψ_n и ψ_{n+k} связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
G_n(F^{2n}) \times G_n(F^{2n}) & \xrightarrow{\psi_n} & G_{2n}(F^{4n}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
G_{n+k}\left(F^{2(n+k)}\right) \times G_{n+k}\left(F^{2(n+k)}\right) & \xrightarrow{\psi_{n+k}} & G_{2(n+k)}\left(F^{4(n+k)}\right)
\end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются вложениями. Поэтому отображения ψ_n единственным образом определяют некоторое отображение $\psi\colon B_{(F)} \times B_{(F)} \to B_{(F)}$, обладающее тем свойством, что для любого $n \geqslant 0$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
G_n(F^{2n}) \times G_n(F^{2n}) & \xrightarrow{\psi_n} & G_{2n}(F^{4n}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
B_{(F)} \times B_{(F)} & \xrightarrow{\psi} & B_{(F)}
\end{array}$$

вертикальные стрелки которой являются вложениями.

Тот факт, что построенное отображение ψ удовлетворяет аксиомам H-пространства, мы доказывать не будем. Это утверждение равносильно, как известно, тому, что для любого клеточного разбиения X множество $[X, B_{(F)}]$ является группой относительно операции сложения, определенной формулой $[f] + [g] = [\psi(f \times g)\Delta]$, где Δ, как всегда, — диагональное отображение. Мы ограничимся лишь доказательством того, что $[X, B_{(F)}]$ является группой для конечных связных разбиений X. Мы докажем это, показав, что при биективном отображении θ_X сложение в множестве $[X, B_{(F)}]$ переходит в сложение в группе $\widetilde{K}_F(X)$. Одновременно мы тем самым докажем, что θ_X является изоморфизмом групп.

Для любых элементов $[f], [g] \in [X, B_{(F)}]$ существует такое целое число n, что отображения f и g можно рассматривать как отображения $f, g\colon X \to G_n(F^{2n})$, и, следовательно, можно считать, что $\theta([f]) = f^*(\gamma_n^{2n}) - n$ и $\theta([g]) = g^*(\gamma_n^{2n}) - n$. С другой стороны,

$$(\psi_n(f \times g)\Delta)^*(\gamma_{2n}^{4n}) = \Delta^*(f^*(\gamma_n^{2n}) \times g^*(\gamma_n^{2n})) = f^*(\gamma_n^{2n}) \oplus g^*(\gamma_n^{2n}).$$

Поэтому

$$\theta([\psi(f\times g)\Delta])=\theta([\psi_n(f\times g)\Delta])=$$
$$=f^*(\gamma_n^{2n})\oplus g^*(\gamma_n^{2n})-2n=(\psi^*(\gamma_n^{2n})-n)+(g^*(\gamma_n^{2n})-n)=\theta([\psi])+\theta([g]).$$

Тем самым теорема полностью доказана.

4.6. Замечание. Естественное разложение $K_F(X)=\tilde{K}_F(X)\oplus\mathbf{Z}$ показывает, что на категории связных конечных клеточных разбиений имеет место изоморфизм функторов

$$\theta\colon [-,\ B_{(F)}\times\mathbf{Z}]\to K_F(X).$$

4.7. Замечание. В случае линейно связного пунктированного пространства X множество $[X,\ B_{(F)}]$ в изоморфизме $\theta\colon [X,\ B_{(F)}]\to\tilde{K}_F(X)$ можно заменить множеством $[X,\ B_{(F)}]_0$ гомотопических классов отображений, сохраняющих отмеченные точки. Отмеченной точкой в $B_{(F)}$ считается при этом точка, определенная точками $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} Fe_i$ пространств $G_n(F^{2n})$.) Это равносильно рассмотрению стационарной эквивалентности расслоений с фиксированной тривиализацией над отмеченной точкой. Читатель легко может самостоятельно проверить, что в этом варианте действительно получаются те же самые классы стационарной эквивалентности.

4.8. Замечание. Из теоремы 4.5 следует, что $\tilde{K}_F(X)=0$, если X стягиваемо. Кроме того,

$$\tilde{K}_F(S^0)=\mathbf{Z}.$$

5. ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП И ГРУППЫ $\tilde{K}_F(S^i)$

Следующая теорема выясняет строение групп $\tilde{K}_F(S^i)$.

5.1. Теорема. *Для любого $i\geqslant 1$ имеет место изоморфизм групп*

$$\tilde{K}_F(S^i)\approx\pi_{i-1}(\acute{U}_F).$$

Доказательство. Согласно замечанию 4.8, имеет место изоморфизм групп

$$\theta^{-1}\colon \tilde{K}_F(S^i)\to[S^i,\ B_{(F)}]_0.$$

С другой стороны, согласно предложению 1.4.1, строение группы на множестве $[S^i,\ B_{(F)}]_0$, определенное H-пространством $B_{(F)}$, совпадает со строением, определенным ко-H-пространством S^i. Иными словами, $[S^i,\ B_{(F)}]_0=\pi_i(B_{(F)})$. Далее, согласно предложению 4.4 (справедливому, очевидно, и для пунктированных пространств), для достаточно большого n имеет место изоморфизм $[S^i, B_{(F)}]_0 \approx [S^i, G_n(F^{2n})]$. Таким образом, группа $\tilde{K}_F(S^i)$ изоморфна группе $\pi_i(G_n(F^{2n}))$.

Рассмотрим теперь точную гомотопическую последовательность

$$\cdots \to \pi_i(V_n(F^{2n})) \to \pi_i(G_n(F^{2n})) \xrightarrow{\partial}$$
$$\xrightarrow{\partial} \pi_{i-1}(U_F(n)) \to \pi_{i-1}(V_n(F^{2n})) \to \cdots;$$

главного $U_F(n)$-расслоения $V_n(F^{2n}) \to G_n(F^{2n})$. Поскольку, согласно теореме 7.5.1, при $i < c(n+1) - 2$ имеет место равенство $\pi_{i-1}(V_n(F^{2n})) = \pi_i(V_n(F^{2n})) = 0$, отображение ∂: $\pi_i(G_n(F^{2n})) \to \to \pi_{i-1}(U_F(n))$ является изоморфизмом. Для завершения доказательства остается заметить, что, согласно теореме 7.4.1, вложение $U_F(n) \to U_F$ индуцирует при $i - 1 < c(n+1) - 3$ изоморфизм $\pi_{i-1}(U_F(n)) \to \pi_{i-1}(U_F)$.

5.2. Следствие. *При $i = 0, 1, 2, 3$ и 4 группы $\tilde{K}_F(S^i)$ имеют следующий вид:*

$$\begin{array}{lll}
\tilde{K}_{\mathbf{R}}(S^0) = \mathbf{Z}, & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^0) = \mathbf{Z}, & \tilde{K}_{\mathbf{H}}(S^0) = \mathbf{Z}, \\
\tilde{K}_{\mathbf{R}}(S^1) = \mathbf{Z}_2, & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^1) = 0, & \tilde{K}_{\mathbf{H}}(S^1) = 0, \\
\tilde{K}_{\mathbf{R}}(S^2) = \mathbf{Z}_2, & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^2) = \mathbf{Z}, & \tilde{K}_{\mathbf{H}}(S^2) = 0, \\
\tilde{K}_{\mathbf{R}}(S^3) = 0, & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^3) = 0, & \tilde{K}_{\mathbf{H}}(S^3) = 0, \\
\tilde{K}_{\mathbf{R}}(S^4) = \mathbf{Z}, & \tilde{K}_{\mathbf{C}}(S^4) = \mathbf{Z}, & \tilde{K}_{\mathbf{H}}(S^4) = \mathbf{Z}.
\end{array}$$

Доказательство. Непосредственно следует (при $i > 0$) из доказанной теоремы и результатов разд. 12 гл. 7. По поводу случая $i = 0$ см. замечание 4.8.

5.3. Обозначения. Группы $\tilde{K}_{\mathbf{C}}$ часто обозначаются через $\widetilde{KU}$ (или просто через $\tilde{K}$), группы $\tilde{K}_{\mathbf{R}}$ — через $\widetilde{KO}$, а группы $\tilde{K}_{\mathbf{H}}$ — через $\widetilde{KSp}$. Мы будем пользоваться всеми этими обозначениями.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что на категории всех конечных клеточных разбиений морфизм θ: $[-, B_{(F)} \times \mathbf{Z}] \to K_F(-)$ является изоморфизмом функторов.

2. Какие изменения надо внести в рассуждения разделов 3 и 4, если в определении групп $K_F(X)$ использовать только векторные расслоения постоянной размерности?

3. Опишите расслоения, являющиеся образующими указанных в следствии 5.2 групп.

Глава 9

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ K-ТЕОРИЯ

В этой главе мы рассмотрим процедуру тривиализации расслоений над X, приводящую к расслоениям над X/A, где A — произвольное замкнутое подмножество пространства X, и к новому определению группы $K(X, A) = \tilde{K}(X/A)$. Для любой пары (X, A) конечных клеточных разбиений это позволяет определить точную последовательность вида

$$\cdots \leftarrow K(A) \leftarrow K(X) \leftarrow K(X, A) \leftarrow K(SA) \leftarrow K(SX) \leftarrow \cdots,$$

показывающую, что в определенном смысле K-группы составляют теорию когомологий.

1. СЖАТИЕ ТРИВИАЛИЗОВАННЫХ РАССЛОЕНИЙ

1.1. Определение. Пусть $\xi = \xi^n$ — векторное расслоение над пространством X и A — подпространство пространства X. *Тривиализацией* расслоения ξ над A называется произвольное отображение $t\colon E(\xi \mid A) \to F^n$, ограничение [1] $\xi_b \to F^n$ которого на каждом слое расслоения $\xi \mid A$ является линейным изоморфизмом.

Тривиализация позволяет сжать все слои расслоения ξ над A в один слой над отмеченной точкой $*$ пространства X/A.

1.2. Определение. Пусть t — тривиализация над A векторного расслоения ξ над X. *Сжатием* расслоения ξ относительно тривиализации t называется тройка $(\xi/t, u, r)$, состоящая из некоторого векторного расслоения ξ/t над X/A, из некоторого отображения $u\colon E(\xi) \to E(\xi/t)$, составляющего вместе с естественным отображением $p_A\colon X \to X/A$ морфизм $(u, p_A)\colon \xi \to \xi/t$ векторных расслоений и обладающего тем свойством, что для каждой точки $x \in A$ ограничение отображения u на слое ξ_x расслоения ξ является линейным изоморфизмом этого слоя на соответствующий слой $(\xi/t)_{p_A(x)}$ расслоения ξ/t, и, наконец, из такого изоморфизма [2] $r\colon (\xi/t)_* \to F^n$, что $t = r u \mid E(\xi \mid A)$.

---

[1]) Символом ξ_b здесь обозначается слой расслоения ξ над точкой b.— *рим. ред.*

[2]) Символ $(\xi/t)_*$ обозначает слой расслоения ξ/t над естественной отмеченной точкой $*$ пространства X/A (являющейся образом подпространства A).— *Прим. ред.*

1.3. Предложение. *Для векторного расслоения ξ над X тогда и только тогда существует его сжатие $(\xi/t, u, r)$ относительно тривиализации t над замкнутым подпространством $A \subset X$, когда тривиализацию t можно продолжить до тривиализации t' расслоения ξ над некоторым открытым множеством U, содержащим A. Для любых двух сжатий $(\xi/t, u, r)$ и $((\xi/t)', u', r')$ расслоения ξ относительно t существует однозначно определенный изоморфизм векторных расслоений v: $\xi/t \to (\xi/t)'$, для которого имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
& \xi/t \arrow[dd, "v"] & (\xi/t)_* \arrow[l] \arrow[dd, "v"] \arrow[dr, "r"] & \\
\xi \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & & & F^n \\
& (\xi/t)' & (\xi/t)'_* \arrow[l] \arrow[ur, "r'"'] &
\end{tikzcd}$$

Каждое векторное расслоение над X/A изоморфно расслоению вида ξ/t, где ξ — некоторое векторное расслоение над X, а t — его тривиализация над A.

Доказательство. Пусть сжатие $(\xi/t, u, r)$ существует. Ясно, что для расслоения ξ/t можно найти такую координатную карту (V, φ), что множество V содержит точку $* \in X/A$, а изоморфизм векторных расслоений φ: $V \times F^n \to (\xi/t) \mid V$ обладает тем свойством, что ограничение изоморфизма φ^{-1} на слое $(\xi/t)_*$ расслоения ξ/t совпадает с отображением r. Положим $U = p_A^{-1}(V)$ и $t' = \varphi^{-1}(u \mid E(\xi \mid u))$. Очевидно, что $A \subset U$ и t' является тривиализацией ξ над U, продолжающей тривиализацию t.

Обратно, пусть тривиализация t' существует. Построим расслоение ξ/t, принимая за пространство $E(\xi/t)$ факторпространство пространства $E(\xi)$, получающееся отождествлением точек x и x', для которых $t(x) = t(x')$, а за проекцию $E(\xi/t) \to X/A$ отображение, индуцированное проекцией $E(\xi) \to X$ расслоения ξ. За отображение u: $E(\xi) \to E(\xi/t)$ мы примем естественную проекцию, а за отображение r — отображение $t \circ (u \mid (\xi/t)_*)^{-1}$. Каждый слой расслоения ξ/t естественным образом определяется как векторное пространство, причем отображение u на нем будет линейным изоморфизмом. Таким образом, для доказательства того, что тройка $(\xi/t, u, r)$ является сжатием расслоения ξ, остается лишь показать, что расслоение ξ/t представляет собой векторное расслоение, т. е. что оно локально тривиально в окрестности каждой точки пространства X/A. Но в точках пространства X/A, отличных от точки $*$, расслоение ξ/t по существу совпадает с расслоением $\xi \mid (X \setminus A)$, и потому за его координатные карты можно принять координатные карты расслоения $\xi|(X \setminus A)$. Что же касается точки $*$, то над ее окрестностью $V = p_A(U)$ координатная карта расслоения ξ/t очевидным образом строится по тривиализации t' расслоения ξ над U. Тем самым первое утверждение предложения 1.3 полностью доказано.

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что изоморфизм v должен быть равен $u'u^{-1}$ над точками пространства X/A, отличными от точки $*$, и должен быть равен $r'r^{-1}$ над точкой $*$. Тот факт, что так действительно получается изоморфизм векторных расслоений, проверяется непосредственно.

Наконец, пусть η — произвольное векторное расслоение над пространством X/A, и пусть $\xi = p_A^*(\eta)$. По определению точками пространства $E(\xi|A)$ являются пары (a, x), где $a \in A$ и $x \in \eta_*$. Мы определим тривиализацию t расслоения ξ над A формулой $t(a, x) = r(x)$, где $r\colon \eta_* \to F^n$ — произвольный изоморфизм. Ясно, что тройка $(\eta, (p_A)_\eta, r)$ является сжатием расслоения ξ относительно тривиализации t.

Предложение 1.3 тем самым полностью доказано.

З а м е ч а н и е. Если X является клеточным разбиением, а A — его подразбиением, то тривиализация t' существует для любой тривиализации t над A расслоения ξ[1]).

1.4. Предложение. *Пусть ξ и ξ' — векторные расслоения над X и X' с тривиализациями t и t' над замкнутыми подпространствами $A \subset X$ и $A' \subset X'$. Тогда для любого морфизма векторных расслоений $(v, f)\colon \xi \to \xi'$, удовлетворяющего соотношениям $f(A) \subset A'$ и $t = t'v$, существует единственный морфизм векторных расслоений $(w, g)\colon \xi/t \to \xi'/t'$, для которого отображение g индуцировано отображением f и имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r, "{(v, f)}"] \arrow[d, "{(u, p_A)}"'] & \xi' \arrow[d, "{(u', p_{A'})}"] \\ \xi/t \arrow[r, "{(w, g)}"] & \xi'/t' \end{tikzcd}$$

В случае когда морфизм (v, f) является изоморфизмом и $f(A) = A'$, морфизм (w, g) также представляет собой изоморфизм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия, наложенные на морфизм (w, g), однозначно определяют отображения w и g. Тот факт,

---

[1]) Достаточно заметить, что в этом случае подпространство A обладает в X окрестностью U, деформационным ретрактом которой оно является. — *Прим ред.*

что построенные таким образом отображения w и g составляют морфизм векторных расслоений, проверяется автоматически. Последнее утверждение очевидно.

1.5. Предложение. *Для любых векторных расслоений ξ и ξ' над X и любых их тривиализаций t и t' над A расслоение $(\xi/t)\oplus(\xi'/t')$ изоморфно расслоению $(\xi\oplus\xi')/(t\oplus t')$, а расслоение $(\xi/t)\otimes(\xi'/t')$ изоморфно расслоению $(\xi\otimes\xi')/(t\otimes t')$.*

Доказательство очевидно.

1.6. Предложение. *Для любого векторного расслоения ξ над X и любой гомотопии t_s: $E(\xi|A)\to F^n$ тривиализаций расслоения ξ над A векторные расслоения ξ/t_0 и ξ/t_1 изоморфны над X/A.*

Доказательство. Гомотопию t_s можно рассматривать как тривиализацию t расслоения $\xi\times I$ над $A\times I$. Поскольку пространства $(X\times I)/(A\times I)$ и $(X/A)\times I$ естественно гомеоморфны, отсюда следует, что расслоение ξ/t_0 изоморфно расслоению $((\xi\times I)/t)|(X\times 0)$, а расслоение ξ/t_1—расслоению $((\xi\times I)/t)|(X\times 1)$. Следовательно, расслоения ξ/t_0 и ξ/t_1 изоморфны (см. следствие 3.4.6) [1]).

1.7. Замечание. Тривиализации t расслоения ξ над A можно отождествлять с изоморфизмами t: $\xi|A\to\theta^n$. Более того, в случае клеточной пары (X, A) (а только этот случай нас по существу и интересует) тривиализации t можно рассматривать как морфизмы векторных расслоений t: $\xi\to\theta^n$, являющиеся изоморфизмами над A. Это непосредственно вытекает из следующего общего предложения:

1.8. Предложение. *Пусть (X, A)—относительное клеточное разбиение и ξ_0, ξ_1—векторные расслоения над X. Тогда для любого морфизма векторных расслоений u: $\xi_0|A\to\xi_1|A$ существует морфизм векторных расслоений v: $\xi_0\to\xi_1$, продолжающий морфизм u.*

Доказательство. Морфизм u мы можем рассматривать как сечение расслоения $\mathrm{Hom}(\xi_0, \xi_1)$ над A. Поскольку слои расслоения $\mathrm{Hom}(\xi_0, \xi_1)$, являясь векторными пространствами, стягиваемы, сечение u может быть продолжено до некоторого сечения v этого расслоения над всем X (см. теорему 2.7.1).

Легко можно дать и прямое доказательство предложения 1.8 индуктивным построением продолжения v от клетки к клетке.

---

[1]) Строго говоря, здесь следует предполагать, что пространство X паракомпактно. — *Прим. ред.*

1.9. Соглашение. Расслоения ξ/t мы будем рассматривать и в случае, когда A пусто: $A=\varnothing$. По определению пространством $X/\varnothing$ является пространство X^+, получающееся из пространства X присоединением отдельно расположенной точки $*$, а расслоением ξ/t над $X/\varnothing$ является расслоение, совпадающее с ξ на X и имеющее слой F^n иад точкой $*$.

2. ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ОТНОСИТЕЛЬНОЙ K-ТЕОРИИ

Цель этого раздела — получить для групп $\tilde{K}_F$ (которые мы здесь будем обозначать просто через $\tilde{K}$) ряд точных последовательностей. Все эти последовательности возникают с помощью стандартных гомотопических конструкций из точной последовательности, указываемой следующим предложением:

2.1. Предложение. *Для любого подразбиения A конечного клеточного разбиения X отображения $A\to X\to X/A$ индуцируют точную последовательность групп*

$$\tilde{K}(X/A)\xrightarrow{\beta}\tilde{K}(X)\xrightarrow{\alpha}\tilde{K}(A).$$

Если подразбиение A стягиваемо, то гомоморфизм

$$\beta\colon\ \tilde{K}(X/A)\to\tilde{K}(X)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Так как композиция отображений $A\to X\to X/A$ является постоянным отображением, то гомоморфизм $\alpha\beta$ равен нулю и, следовательно, $\operatorname{Im}\beta\subset\operatorname{Ker}\alpha$. Обратно, пусть $\xi\in\operatorname{Ker}\alpha$, т. е. пусть ξ — такое расслоение над X, ограничение $\xi|A$ которого стационарно тривиально. (Мы пользуемся здесь интерпретацией групп $\tilde{K}(X)$, указанной в теореме 8.3.8.) Это означает, что для некоторых k и m имеет место изоморфизм вида u: $(\xi\oplus\theta^k)|A\to\theta^m$. Композиция изоморфизма u с проекцией $\theta^m\to F^m$ определяет некоторую тривиализацию t расслоения $\xi\oplus\theta^k$ над A. Соответствующее расслоение $(\xi\oplus\theta^k)/t$ является, очевидно, векторным расслоением над X/A, для которого индуцированное проекцией $X\to X/A$ расслоение над X стационарно эквивалентно расслоению ξ. Следовательно, $\xi\in\operatorname{Im}\beta$. Тем самым первое утверждение предложения 2.1 полностью доказано.

Пусть теперь подразбиение A стягиваемо. Согласно уже доказанному утверждению, гомоморфизм β: $\tilde{K}(X/A)\to\tilde{K}(X)$ является в этом случае эпиморфизмом. Покажем, что этот гомоморфизм является и мономорфизмом. Пусть ξ — такое векторное расслоение над X/A, что расслоение $p_A^*(\xi)$ стационарно тривиально, т. е. для некоторого k расслоение $p_A^*(\xi \oplus \theta^k) = p_A^*(\xi) \oplus \theta^k$ тривиально над X. Согласно предложению 1.3, расслоение $\xi \oplus \theta^k$ изоморфно расслоению вида $p_A^*(\xi \oplus \theta^k)/t$, где t — некоторая тривиализация расслоения $p_A^*(\xi \oplus \theta^k)$ над A. Но поскольку A стягиваемо, любые две тривиализации расслоения $p_A^*(\xi \oplus \theta^k)$ над A гомотопны. Поэтому без ограничения общности (см. предложение 1.6) мы можем считать, что тривиализация t является ограничением некоторой тривиализации расслоения $p_A^*(\xi \oplus \theta^k)$ над всем пространством X. При переходе к X/A эта тривиализация определяет, очевидно, некоторую тривиализацию расслоения $\xi \oplus \theta^k$ над X/A. Следовательно, расслоение $\xi \oplus \theta^k$ тривиально над X/A, т. е. расслоение ξ стационарно тривиально. Тем самым предложение 2.1 полностью доказано.

2.2. Следствие. *Имеет место точная последовательность*

$$K(X, A) \to K(X) \to K(A),$$

где по определению $K(X, A) = \tilde{K}(X/A)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что гомоморфизмы $K(X) \to K(A)$ и $\tilde{K}(X) \to \tilde{K}(A)$, индуцированные вложением $A \to X$, имеют одно и то же ядро.

Напомним теперь известные гомотопические конструкции, позволяющие применить предложение 2.1 к исследованию произвольного отображения $f\colon X \to Y$.

2.3. Определение. *Цилиндром* Z_f произвольного пунктированного (т. е. сохраняющего отмеченные точки) отображения $f\colon X \to Y$ называется факторпространство пространства $(X \times I) \cup Y$, получающееся отождествлением точек $(x, 1) \in X \times I$ с точками $f(x) \in Y$ и точек $(*, t)$ с одной точкой $*$. Аналогично *конусом* C_f отображения f называется факторпространство пространства $CX \cup Y$, получающееся отождествлением точек $\langle x, 1 \rangle \in CX$ с точками $f(x) \in Y$.

Легко видеть, что для любого клеточного отображения $f\colon X \to Y$ клеточных разбиений пространства Z_f и C_f естественным образом определяются как клеточные разбиения. В дальнейшем мы будем считать пространства X и Y конечными клеточными разбиениями, а отображение f — клеточным отображением.

2.4. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "a(f)"] & & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "u"] & Z_f \arrow[r, "w"] & C_f \arrow[d, "b(f)"'] \arrow[dr, "a(a(f))"] & \\
 & & SX \arrow[d, "Sf"'] & C_{a(f)} \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "b(a(f))"] \\
 & & SY & SY \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd}$$

отображение u которой сопоставляет точке $x \in X$ класс точки $(x, 0)$ в Z_f, отображение v сопоставляет точке $y \in Y$ ее класс в Z_f, отображение w является проекцией $Z_f \to Z_f/u(X) = C_f$, отображение $a(f)$ сопоставляет точке $y \in Y$ ее класс в C_f (так что пространство $C_{a(f)}$ является факторпространством пространства $CX \cup CY$, получающимся отождествлением $\langle x, 1\rangle = \langle f(x), 1\rangle$), отображение $b(f)$ сопоставляет точке $y \in Y$ точку $x \in SX$, а точке $\langle x, t\rangle \in CX$ точку $b(f)(x, t) = \langle x, t\rangle \in SX$, отображение r переводит все пространство CY в точку $*$ и индуцирует на пространстве CX естественную проекцию $CX \to SX$ и, наконец, отображение j представляет собой гомеоморфизм, определенный формулой $j(\langle x, t\rangle) = \langle x, 1-t\rangle$.

2.5. Предложение. *Отображение v является гомотопической эквивалентностью, а отображения $a(f)$ и f индуцируют точную последовательность*

$$\tilde{K}(C_f) \to \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X).$$

Доказательство. Определим отображение v': $Z_f \to Y$, полагая $v'(y) = y$ и $v'(x, t) = f(x)$. Очевидно, что $v'v = 1$. Определим гомотопию k_s: $Z_f \to Z_f$, полагая $k_s(y) = y$ и $k_s(x, t) = (x, 1 - s(1-t))$. Ясно, что $k_0 = vv'$ и $k_1 = 1$. Следовательно, отображение v является гомотопической эквивалентностью.

Таким образом, в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{K}(Y) \arrow[dl, "f^!"'] & \\
\tilde{K}(X) & \tilde{K}(Z_f) \arrow[l] \arrow[u, "v^!"'] & \tilde{K}(C_f) \arrow[l] \arrow[ul, "a(f)^!"']
\end{tikzcd}$$

вертикальная стрелка является изоморфизмом. С другой стороны, нижняя строка этой диаграммы является, согласно предложению 2.1, точной последовательностью. Следовательно, точной последовательностью является и последовательность

$$\tilde{K}(X) \leftarrow \tilde{K}(Y) \leftarrow \tilde{K}(C_f).$$

2.6. Предложение. *Имеет место точная последовательность*

$$\tilde{K}(SX) \xrightarrow{b(f)^!} \tilde{K}(C_f) \xrightarrow{a(f)^!} \tilde{K}(Y).$$

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 2.1, поскольку отображение $a(f)$ является вложением, а проекция $C_f \to C_f/a(f)(Y) = SX$ совпадает с отображением $b(f)$.

2.7. Предложение. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} SX \arrow[d, "Sf"'] & C_{a(f)} \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "b(a(f))"] \\ SY & SY \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до гомотопии, причем морфизм $r^!$: $\tilde{K}(SX) \to \tilde{K}(C_{a(f)})$ является изоморфизмом.

Доказательство. Определим гомотопию h_s: $C_{a(f)} \to SY$, полагая $h_s\langle x, t\rangle = \langle f(x), (1-s)t\rangle$ и $h_s\langle y, t\rangle = \langle y, 1-st\rangle$. Это определение корректно, ибо $\langle f(x), (1-s)1\rangle = \langle y, 1-1s\rangle$ при $\langle x, 1\rangle = \langle y, 1\rangle$. Поскольку $h_0 = (Sf)r$ и $h_1 = jb(a(f))$, первое утверждение тем самым полностью доказано.

Далее, отображение r можно, очевидно, рассматривать как проекцию $C_{a(f)} \to C_{a(f)}/CY$. Поскольку пространство CY стягиваемо, отсюда в силу предложения 2.1 следует, что гомоморфизм $r^!$: $\tilde{K}(SY) \to \tilde{K}(C_{a(f)})$ является изоморфизмом.

Подытожим полученные результаты.

2.8. Теорема. *Для любого клеточного отображения f: $X \to Y$ конечных клеточных разбиений имеет место точная последовательность*

$$\tilde{K}(SY) \xrightarrow{Sf^!} \tilde{K}(SX) \xrightarrow{b(f)^!} \tilde{K}(C_f) \xrightarrow{a(f)^!} \tilde{K}(Y) \xrightarrow{f^!} \tilde{K}(X).$$

Для любого подразбиения A конечного клеточного разбиения X существует такой гомоморфизм δ: $\tilde{K}(SX) \to \tilde{K}(X/A)$, что имеет место точная последовательность

$$\tilde{K}(SX) \to \tilde{K}(SA) \xrightarrow{\delta} \tilde{K}(X/A) \to \tilde{K}(X) \xrightarrow{j^!} \tilde{K}(A),$$

где j: $A \to X$ — отображение вложения.

Доказательство. Точность последовательности $\widetilde{K}(SX) \to \widetilde{K}(C_f) \to \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X)$ следует из предложений 2.5 и 2.6. Согласно предложению 2.7, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{K}(C_{a(f)}) \arrow[dr] & \\
\widetilde{K}(SY) \arrow[r] \arrow[ur] & \widetilde{K}(SX) \arrow[r] \arrow[u] & \widetilde{K}(C_f)
\end{tikzcd}$$

верхняя последовательность которой точна (предложение 2.6), а вертикальная стрелка является изоморфизмом. Следовательно, нижняя последовательность также точна.

Для доказательства второго утверждения достаточно доказать точность последовательности $\widetilde{K}(SA) \to \widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(X)$. С этой целью рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j"] & X \arrow[r] \arrow[dr] & C_j \arrow[r, "b(j)"] \arrow[d, "q"] & SA \\
 & & X/A &
\end{tikzcd}$$

отображение q которой является естественной проекцией $C_j \to C_j/CA = X/A$. Поскольку конус CA стягиваем, гомоморфизм $q^!$: $\widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(C_j)$ является, согласно предложению 2.1, изоморфизмом. Таким образом, в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(SA) \arrow[r, "b(j)^!"] \arrow[dr, "\delta"] & \widetilde{K}(C_j) \arrow[r, "a(j)^!"] & \widetilde{K}(X) \\
 & \widetilde{K}(X/A) \arrow[u, "q^!"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

верхняя строчка является точной последовательностью (предложение 2.6), а вертикальная стрелка — изоморфизмом. Следовательно, нижняя последовательность также точна.

2.9. Замечание. Для любого векторного расслоения ξ над надстройкой SX расслоения $\xi | CA_+$ и $\xi | CA_-$ тривиальны и их склейка над A определяет некоторый автоморфизм u: $\theta^n \to \theta^n$ над A и потому некоторую тривиализацию t: $\theta^n | A \to F^n$ расслоения θ^n над A. Читателю предлагается доказать, что *класс стационарной эквивалентности расслоения ξ переходит при гомоморфизме δ в класс стационарной эквивалентности расслоения θ^n/t над X/A.*

2.10. Замечание. По тем же соображениям, что и в следствии 2.2, для любого подразбиения A конечного клеточного разбиения X имеет место точная последовательность

$$K(SX) \to K(SA) \to K(X, A) \to K(X) \to K(A).$$

Если в этой последовательности вместо K написать H^n, а вместо KS написать $H^nS = H^{n-1}$, то получится отрезок точной когомологической последовательности пары (X, A). Это наводит на мысль о возможности интерпретировать группы K как своего рода группы когомологий. (Ср. Атья, Хирцебрух [2].)

3. УМНОЖЕНИЯ В K-ТЕОРИИ

В этом разделе мы предполагаем, что $F = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. По-прежнему все пространства будут предполагаться конечными клеточными разбиениями.

Как мы знаем, операция тензорного умножения векторных расслоений позволяет рассматривать группу $K(X)$ как кольцо. Ядро $\widetilde{K}(X)$ гомоморфизма $\dim\colon K(X) \to \mathbf{Z}$ будет, очевидно, идеалом этого кольца. Заметим, что задание умножения в кольце $K(X)$ равносильно заданию некоторого гомоморфизма групп $K(X) \otimes K(X) \to K(X)$ (образ элемента $a \otimes b$ при этом гомоморфизме и является произведением ab).

Для любых двух пространств X и Y мы символами $p_X\colon X \times Y \to X$ и $p_Y\colon X \times Y \to Y$ будем обозначать естественные проекции произведения $X \times Y$ на его множители.

3.1. Определение. *Внешним K-умножением* называется гомоморфизм групп $K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$, сопоставляющий каждому элементу $a \otimes b \in K(X) \otimes K(Y)$ элемент $p_X^!(a)\, p_Y^!(b)$ кольца $K(X \times Y)$. Элемент $p_X^!(a)\, p_Y^!(b)$ называется *внешним K-произведением* элементов a и b. Как правило, мы будем его обозначать просто символом ab.

Поскольку $\dim(p_X^!(a)\, p_Y^!(b)) = \dim a \dim b$, внешнее K-умножение индуцирует *внешнее $\widetilde{K}$-умножение*

$$\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \times Y).$$

Однако это $\widetilde{K}$-умножение не очень удобно, поскольку прямое произведение не является в смысле теории категорий произведением в категории пунктированных пространств. Поэтому целесообразно его несколько видоизменить.

2. **3.3. Предложение.** *Для любых пунктированных клеточных разбиений X и Y гомоморфизм групп $(q_X^!, q_Y^!)\colon \widetilde{K}(X \vee Y) \to$*

$\to \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y)$, *где* $q_X\colon X \to X \vee Y$ *и* $q_Y\colon Y \to X \vee Y$ — *естественные вложения, является изоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку каждое векторное расслоение над $X \vee Y$, а следовательно, и его класс стационарной эквивалентности однозначно определяются его ограничениями на X и Y, гомоморфизм $(q_X^!, q_Y^!)$ является мономорфизмом. С другой стороны, если ξ и η — такие расслоения над X и Y, что $\dim \xi = \dim \eta$, то соотношения $\zeta \mid X = \xi$ и $\zeta \mid Y = \eta$ однозначно определяют некоторое расслоение ζ над $X \vee Y$. Следовательно, гомоморфизм $(q_X^!, q_Y^!)$ является эпиморфизмом.

Читатель легко может дать чисто функториальное доказательство предложения 3.2, использующее лишь точную последовательность из предложения 2.1.

3.3. Следствие. *Гомоморфизм групп*

$$(q_1^!, \ldots, q_n^!)\colon \tilde{K}(X_1 \vee \ldots \vee X_n) \to \tilde{K}(X_1) \oplus \ldots \oplus \tilde{K}(X_n),$$

где $q_i\colon X_i \to X_1 \vee \ldots \vee X_n$ — *естественные вложения, является изоморфизмом.*

3.4. Предложение. *Вложение* $X \vee Y \subset X \times Y$ *определяет расщепляющуюся точную последовательность*

$$0 \to \tilde{K}(X \wedge Y) \to \tilde{K}(X \times Y) \to \tilde{K}(X \vee Y) \to 0.$$

Доказательство. Согласно предложению 2.1, последовательность $\tilde{K}(X \wedge Y) \to \tilde{K}(X \times Y) \to \tilde{K}(X \vee Y)$ точна. С другой стороны, очевидно, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}(X \wedge Y) \arrow[r] & \tilde{K}(X \times Y) \arrow[r] & \tilde{K}(X \vee Y) \arrow[dl, "{(q_X^!, q_Y^!)}"] \\
& \tilde{K}(X) \oplus \tilde{K}(Y) \arrow[u, "p_X^! \oplus p_Y^!"] &
\end{tikzcd}$$

Следовательно, гомоморфизм $\tilde{K}(X \times Y) \to \tilde{K}(X \vee Y)$ обладает правым обратным гомоморфизмом $(p_X^! \oplus p_Y^!)(q_X^!, q_Y^!)$ и потому является эпиморфизмом. Заменив теперь $\tilde{K}$ на $\tilde{K}S$, мы аналогично получим, что эпиморфизмом является и первая стрелка точной последовательности

$$\tilde{K}(S(X \times Y)) \to \tilde{K}(S(X \vee Y)) \to \tilde{K}(X \wedge Y) \to \tilde{K}(X \times Y)$$

(см. теорему 2.8). Следовательно, морфизм $\tilde{K}(X \wedge Y) \to \tilde{K}(X \times Y)$ является мономорфизмом. Таким образом, рассматриваемая последовательность точна. Она расщепляется, потому что эпиморфизм $\tilde{K}(X \times Y) \to \tilde{K}(X \vee Y)$ обладает правым обратным гомоморфизмом.

3.5. Предложение. *Композиция*

$$\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \times Y) \to \tilde{K}(X \vee Y)$$

внешнего $\tilde{K}$-умножения $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \times Y)$ с гомоморфизмом $\tilde{K}(X \times Y) \to \tilde{K}(X \vee Y)$ является нулевым гомоморфизмом.

Доказательство. Пусть $q\colon X \vee Y \to X \times Y$ — естественное вложение. Тогда для любых элементов $a \in \tilde{K}(X)$ и $b \in \tilde{K}(Y)$ элемент $a \otimes b \in \tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)$ переходит при рассматриваемой композиции в элемент $q^! p_X^!(a) \cdot q^! p_Y^!(b) \in \tilde{K}(X \vee Y)$ (напомним, что $q^!$ является гомоморфизмом колец). Но последний элемент при проекциях $q_X^!$ и $q_Y^!$ групп $\tilde{K}(X \vee Y)$ на ее прямые слагаемые $\tilde{K}(X)$ и $\tilde{K}(Y)$ (предложение 3.2) переходит, очевидно, в нуль (ибо при $q_X^!$ в нуль переходит элемент $q^! p_Y^!(b)$, а при $q_Y^!$ — элемент $q^! p_X^!(a)$. Следовательно, он сам равен нулю.

3.6. Определение. Согласно предложениям 3.5 и 3.4, существует единственный гомоморфизм групп $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \wedge Y)$, композиция которого с мономорфизмом $\tilde{K}(X \wedge Y) \to \tilde{K}(X \times Y)$ является внешним $\tilde{K}$-умножением. Начиная с этого места, *внешним $\tilde{K}$-умножением* мы будем называть именно этот гомоморфизм $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y) \to \tilde{K}(X \wedge Y)$.

3.7. Определение. В частности, для любых пар (X, A) и (Y, B) конечных клеточных разбиений определено $\tilde{K}$-умножение

$$\tilde{K}(X/A) \otimes \tilde{K}(Y/B) \to \tilde{K}((X/A) \wedge (Y/B)) = \tilde{K}((X \times Y)/(X \times B) \cup (A \times Y)).$$

Поскольку $K(X, A) = \tilde{K}(X/A)$ и т. д., это $\tilde{K}$-умножение представляет собой гомоморфизм

$$K(X, A) \otimes K(Y, B) \to K(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)).$$

Мы будем называть этот гомоморфизм *относительным K-умножением.*

Добавление редактора перевода

Говорят, что элемент $a \in K(X)$ *аннулируется* на подразбиении $A \subset X$, если при гомоморфизме $K(X) \to K(A)$ он переходит в нуль. Согласно следствию 2.2, это имеет место тогда и только тогда, когда $a = \beta(a')$, где $a' \in K(X, A)$.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K(X, A) \otimes K(Y, B) & \longrightarrow & K(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(X) \otimes K(Y) & \longrightarrow & K(X \times Y) \end{array}$$

верхняя горизонтальная стрелка которой является относительным K-умножением, нижняя горизонтальная стрелка — внешним K-умножением, а вертикальные стрелки — естественными гомоморфизмами. Легко видеть, что эта диаграмма коммутативна. Поэтому если элемент $a \in K(X)$ аннулируется на A, а элемент $b \in K(Y)$ аннулируется на B, то элемент $ab \in K(X \times Y)$ аннулируется на $(X \times B) \cup (A \times Y)$.

В частности, если элемент $a \in K(X)$ аннулнруется на p-мерном остове X^p разбиения X, а элемент $b \in K(Y)$ аннулируется на q-мерном остове Y^q разбиения Y, то элемент ab аннулируется на $(p+q+1)$-мериом остове произведения $X \times Y$ (ибо $(X \times Y)^{p+q+1} \subset (X \times Y^q) \cup (X^p \times Y)$).

С другой стороны, ясио, что имеет место коммутатнвная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & K(X \times X) \arrow[d, "\Delta^!"] \\ K(X) \otimes K(Y) \arrow[ur] \arrow[r] & K(X) \end{tikzcd}$$

верхняя стрелка которой является внешним K-умножением, ннжняя — обычным умножением в кольце $K(X)$, а $\Delta^!$ представляет собой гомоморфизм, индуцированный диагональным умножением. Следовательно,

если элемент $a \in K(X)$ аннулируется на p-мерном остове X^p, а элемент $b \in K(X)$ аннулируется на q-мерном остове X^q, то элемент $ab \in K(X)$ аннулируется на $(p+q+1)$-мерном остове X^{p+q+1}.

В частности,

если $\dim X \leqslant p+q$, *то* $ab = 0$.

4. ФУНКТОР $L(X, A)$

Можно дать прямое геометрическое определение групп $K(X, A)$, аналогичное первоначальному определению групп $K(X)$. Это определение осиовывается на рассмотреиии пар (ξ_0, ξ_1)

векторных расслоений над X, для которых задан некоторый изоморфизм α: $\xi_0 | A \to \xi_1 | A$. В этом разделе строится группа $L(X, A)$, элементами которой являются классы эквивалентности таких пар. В следующем разделе будет показано, что эта группа изоморфна группе $K(X, A)$. Все это будет делаться для произвольного $F = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$.

4.1. Определение. Пусть (X, A) — произвольная пара пространств. *Разностным морфизмом* (над (X, A)) называется такой морфизм векторных расслоений α: $\xi_0 \to \xi_1$ над X, что его ограничение $\alpha | A$: $\xi_0 | A \to \xi_1 | A$ является изоморфизмом. Два разностных морфизма α: $\xi_0 \to \xi_1$ и β: $\eta_0 \to \eta_1$ называются *изоморфными*, если существуют такие изоморфизмы u_i: $\xi_i \to \eta_i$, $i = 0, 1$ (над X), что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \xi_0 | A & \xrightarrow{\alpha} & \xi_1 | A \\ \downarrow{\scriptstyle u_0} & & \downarrow{\scriptstyle u_1} \\ \eta_0 | A & \xrightarrow{\beta} & \eta_1 | A \end{array}$$

4.2. Обозначения. Символом $S_F(X, A)$ (или просто $S(X, A)$) мы будем обозначать множество классов изоморфных разностных морфизмов над (X, A) F-векторных расслоений над X. Ясно, что сумма Уитни $\alpha \oplus \beta$: $\xi_0 \oplus \eta_0 \to \xi_1 \oplus \eta_1$ двух разностных морфизмов α: $\xi_0 \to \xi_1$ и β: $\eta_0 \to \eta_1$ является разностным морфизмом, причем если морфизмы α и β изоморфны соответственно морфизмам α' и β', то морфизм $\alpha \oplus \beta$ изоморфен морфизму $\alpha' \oplus \beta'$. Тем самым на множестве $S(X, A)$ определяется операция сложения, относительно которой это множество является, очевидно, коммутативной полугруппой. Аналогично, для любого отображения пар f: $(Y, B) \to (X, A)$ и любого разностного морфизма α: $\xi_0 \to \xi_1$ над (X, A) морфизм $f^*(\alpha)$: $f^*(\alpha_0) \to \to f^*(\alpha_1)$ является разностным морфизмом над (Y, B). Ясно, что соответствие $\alpha \to f^*(\alpha)$ согласовано с отношением изоморфности разностных морфизмов и сохраняет суммы Уитни. Следовательно, оно определяет некоторый гомоморфизм полугрупп f^*: $S(X, A) \to S(Y, B)$.

4.3. Предложение. *Полугруппы $S(X, A)$ вместе с индуцированными морфизмами f^* составляют контравариантный функтор из категории пар пространств и их отображений в категорию коммутативных полугрупп и их гомоморфизмов.*

Доказательство очевидно.

Тождественные изоморфизмы 1: $\xi \to \xi$ определяют в полугруппе $S(X, A)$ некоторые специальные элементы. В следующем предложении описываются разностные морфизмы, изоморфные тождественному изоморфизму $1\colon \xi \to \xi$.

4.4. Предложение. *Разностный морфизм* $\alpha\colon \xi_0 \to \xi_1$ *над* (X, A) *тогда и только тогда изоморфен тождественному изоморфизму* $1\colon \xi \to \xi$, *когда его ограничвние* $\alpha | A\colon \xi_0 | A \to \xi_1 | A$ *продолжается до некоторого изоморфизма* $\xi_0 \to \xi_1$ *над* X. *В этом случае расслоение* ξ *обязательно изоморфно расслоениям* ξ_0 *и* ξ_1.

Доказательство. Если изоморфизм $u\colon \xi_0 \to \xi_1$ продолжает изоморфизм $\alpha | A$, то пара $(u, 1)$ является изоморфизмом разностных морфизмов $\alpha\colon \xi_0 \to \xi_1$ и $1\colon \xi_1 \to \xi_1$. Обратно, если (u_0, u_1) — изоморфизм разностных морфизмов $\alpha\colon \xi_0 \to \xi_1$ и $1\colon \xi \to \xi$, то морфизм $u_1^{-1} u_0$ является изоморфизмом $\xi_0 \to \xi_1$, продолжающим изоморфизм $\alpha | A\colon \xi_0 | A \to \xi_1 | A$.

4.5. Определение. Разностные морфизмы $\alpha\colon \xi_0 \to \xi_1$ и $\beta\colon \eta_0 \to \eta_1$ называются *эквивалентными*, если существуют такие расслоения ζ и ζ', что разностные морфнзмы $\alpha \oplus 1\colon \xi_0 \oplus \zeta \to \xi_1 \oplus \zeta$ и $\beta \oplus 1\colon \eta_0 \oplus \zeta' \to \eta_1 \oplus \zeta'$ изоморфны (определяют один и тот же элемент полугруппы $S(X, A)$). Поскольку изоморфные разностные морфизмы, очевидно, эквивалентны, это отношение эквивалентности индуцирует некоторое отношение эквивалентности на полугруппе $S(X, A)$. Соответствующее фактормножество этой полугруппы мы будем обозначать символом $L_F(X, A)$ (илн просто $L(X, A)$). Элемент множества $L(X, A)$, определяемый разностным морфнзмом $\alpha\colon \xi_0 \to \xi_1$, мы будем обозначать через $[\alpha\colon \xi_0 \to \xi_1]$.

Очевидно, что введенное на $S(X, A)$ отношение эквивалентностн согласовано с операцией сложения, так что множество $L(X, A)$ естественным образом превращается в коммутативную полугруппу. Это отношение эквивалентности сохраняется также и при гомоморфизмах $f^*\colon S(X, A) \to S(Y, B)$, индуцированных отображеннями $f\colon (Y, B) \to (X, A)$. Поэтому любое такое отображение f ннդуцирует гомоморфизм полугрупп $f^*\colon L(X, A) \to L(Y, B)$.

4.6. Предложение. *Полугруппы* $L(X, A)$ *вместе с индуцированными морфизмами* f^* *составляют контравариантный функтор из категории пар пространств в категорию коммутативных полугрупп.*

Доказательство очевидно.

4.7. Замечание. Нулевым элементом полугруппы $L(X, A)$ является, очевидно, класс, состоящий из всевозможных изоморфизмов $\alpha\colon \xi_0 \to \xi_1$ над X.

12 Зак. 422

4.8. Случай $A=\varnothing$. Вычислим полугруппу $L(X, \varnothing)$. Ясно, что полугруппа $S(X, \varnothing)=\mathrm{Vect}_F(X)\times \mathrm{Vect}_F(X)$ совпадает с полугруппой пар классов изоморфных векторных расслоений. Пары (ξ_0, ξ_1), (η_0, η_1) определяют один и тот же элемент полугруппы $L(X, \varnothing)$ тогда и только тогда, когда существуют такие расслоения ζ_1 и ζ_2, что для любого $i=0, 1$ расслоение $\xi_i\oplus\zeta_1$ изоморфно расслоению $\eta_i\oplus\zeta_2$. В этом случае расслоения $\xi_0\oplus\eta_1\oplus(\zeta_1\oplus\zeta_2)$ и $\xi_1\oplus\eta_0\oplus(\zeta_1\oplus\zeta_2)$ изоморфны и, следовательно, в полугруппе $K(X)$ имеет место равенство $\xi_0-\xi_1=\eta_0-\eta_1$. Обратно, если $\xi_0-\xi_1=\eta_0-\eta_1$ в $K(X)$, т. е. если существует такое расслоение ζ, что расслоения $\xi_0\oplus\eta_1\oplus\zeta$ и $\eta_0\oplus\xi_1\oplus\zeta$ изоморфны, то для любого $i=0, 1$ расслоенне $\xi_i\oplus\zeta_1$, где $\zeta_1=$ $=\eta_1\oplus\zeta$, изоморфно расслоению $\eta_i\oplus\zeta_2$, где $\zeta_2=\xi_1\oplus\zeta$, и потому пары (ξ_0, ξ_1) и (η_0, η_1) определяют один и тот же элемент полугруппы $L(X, \varphi)$. Такнм образом, соответствие $(\xi_0, \xi_1)\mapsto$ $\mapsto\xi_0-\xi_1$ индуцирует отождествление $L(X, \varnothing)=K(X)$.

4.9. Замечание. В случае когда пара (X, A) является относительным клеточным разбиением, каждый морфизм $\alpha\colon \xi_0|A\mapsto$ $\mapsto\xi_1|A$ (в частности, каждый изоморфизм) продолжается, согласно предложению 1.8, до некоторого морфизма $\alpha'\colon \xi_0\mapsto\xi_1$. Поэтому в этом случае разностные морфизмы можно определять как тройки (ξ_0, α, ξ_1), где ξ_0, ξ_1 — векторные расслоения над X, а $\alpha\colon \xi_0|A\to\xi_1|A$ — произвольный изоморфизм их ограничений над A.

Кроме того, в этом случае каждую тривиализацию t над A некоторого векторного расслоения ξ над X можно рассматривать как разностный морфизм вида $\alpha\colon \xi\to\theta^n$.

В случае когда (X, A) — конечная клеточная пара, элементы полугруппы $L(X, A)$, имеющие вид $[\alpha\colon \xi\to\theta^n]$, т. е. отвечающие тривиализациям векторных расслоений над A, исчерпывают всю эту полугруппу. Действнтельно, являясь конечным клеточным разбиением, пространство X удовлетворяет условию (S) из теоремы 3.8, н потому для любого разностного морфизма $\alpha\colon \xi_0\to\xi_1$ существует такой эквивалентный ему разностный морфизм $\alpha\oplus 1\colon \xi_0\oplus\zeta\to\xi_1\oplus\zeta$, что расслоение $\xi_1\oplus\zeta$ изоморфно тривиальному расслоению θ^n.

5. СРАВНЕНИЕ ФУНКТОРОВ $K(X, A)$ И $L(X, A)$

В этом разделе строится изоморфизм функторов $\Delta\colon L(X, A)\to$ $\to K(X, A)$, совпадающий при $A=\varnothing$ с тождественным отображением $L(X, \varnothing)\to K(X, \varnothing)=K(X)$ (напомним, что, согласно п. 4.8, имеет место равенство $L(X, \varnothing)=K(X)$). Все пары (X, A) предполагаются при этом конечными клеточными парами.

5.1. Теорема. *Для каждой пары* (X, A) *формула*

$$\Delta([\alpha\colon \xi \to \theta^n]) = \{\xi/\alpha\} - n,$$

где $\{\xi/\alpha\} - n$ *— класс расслоения* ξ/α[1] *в группе* $K(X, A) = \tilde{K}(X/A)$, *корректно определяет некоторое отображение* $\Delta\colon L(X, A) \to K(X, A)$, *являющееся изоморфизмом полугрупп, тождественным при* $A = \varnothing$. *Семейство отображений* Δ *для всевозможных пар* (X, A) *представляет собой изоморфизм функторов* $L(X, A) \to K(X, A)$, *рассматриваемых как функторы со значениями в категории коммутативных полугрупп.*

Доказательство. Пусть $[\alpha\colon \xi \to \theta^m] = [\beta\colon \eta \to \theta^n]$, т. е. пусть существуют такие векторные расслоения ζ_1 и ζ_2, что морфизм $\alpha \oplus 1\colon \xi \oplus \zeta_1 \to \theta^m \oplus \zeta_1$ изоморфен морфизму $\beta \oplus 1\colon \eta \oplus \zeta_2 \to \theta^n \oplus \zeta_2$. Поскольку в этом случае расслоения $\theta^m \oplus \zeta_1$ и $\theta^n \oplus \zeta_2$ изоморфны, т. е. расслоения ζ_1 и ζ_2 стационарно эквивалентны, существует такое векторное расслоение ζ, что расслоение $\zeta_1 \oplus \zeta$ изоморфно расслоению θ^p, а расслоение $\zeta_2 \oplus \zeta$ — расслоению θ^q. Но тогда разностный морфизм $\alpha \oplus 1\colon \xi \oplus \theta^p \to \theta^k$, где $k = m + p = n + q$, будет изоморфен разностному морфизму $\beta \oplus 1\colon \eta \oplus \theta^q \to \theta^k$, и потому в группе $K(X, A)$ будет иметь место равенство

$$\{\xi/\alpha\} - m = \{(\xi \oplus \theta^p)/(\alpha \oplus 1)\} - k = \{(\eta + \theta^q)/(\beta \oplus 1)\} - k = \{\eta/\beta\} - m,$$

т. е. равенство $\Delta[\alpha\colon \xi \to \theta^m] = \Delta[\beta\colon \eta \to \theta^n]$. Следовательно, отображение Δ определено корректно (как было уже выше отмечено, любой элемент группы $L(X, A)$ имеет вид $[\alpha\colon \xi \to \theta^m]$).

Поскольку для любых тривиализаций $\alpha\colon \xi \to \theta^m$ и $\beta\colon \eta \to \theta^n$ расслоения $(\xi \oplus \eta)/(\alpha \oplus \beta)$ и $(\xi/\alpha) \oplus (\eta/\beta)$ изоморфны (см. предложение 1.5), для любых элементов $a = [\alpha\colon \xi \to \theta^m]$ и $b = [\beta\colon \eta \to \theta^n]$ полугруппы $L(X, A)$ в группе $K(X, A)$ имеет место равенство $\Delta(a) + \Delta(b) = \Delta(a + b)$ (ибо $a + b = [\alpha \oplus \beta\colon \xi \oplus \eta \to \theta^{n+m}]$). Таким образом, отображение Δ является гомоморфизмом полугрупп.

Поскольку для произвольного отображения пар $f\colon (Y, B) \to (X, A)$ расслоения $f^*(\xi/\alpha)$ и $f^*(\xi)/f^*(\alpha)$ изоморфны (предложение 1.4), то $f^!(\{\xi/\alpha\} - m) = \{f^*(\xi)/f^*(\alpha)\} - m$. Следовательно, $f^!\Delta = \Delta f^*$, так что отображения Δ определяют морфизм функторов.

Для завершения доказательства осталось, таким образом, лишь показать, что отображение $\Delta\colon L(X, A) \to K(X, A)$ биективно. Поскольку каждый элемент группы $K(X, A) = \tilde{K}(X/A)$ имеет вид $\{\eta\} - m$, где η — некоторое расслоение над X/A, и

---

[1]) Под ξ/α здесь понимается расслоение ξ/t над X/A, соответствующее тривиализации t, определенной изоморфизмом $\alpha \mid A\colon \xi \mid A \to \theta^n$. — *Прим. ред.*

поскольку, согласно предложению 1.3, каждое векторное расслоение над X/A изоморфно расслоению вида ξ/α, где α — некоторая тривиализация α: $\xi \to \theta^m$ расслоения ξ над A, отображение Δ надъективно. Пусть теперь $\Delta[\alpha: \xi \to \theta^m] = \Delta[\beta: \eta \to \theta^n]$ в $K(X, A)$, т. е. пусть $\{\xi/\alpha\} - m = \{\eta/\beta\} - n$. Тогда расслоения $(\xi/\alpha) \oplus \theta^p \approx (\xi \oplus \theta^p)/(\alpha \oplus 1)$ и $(\eta/\beta) \oplus \theta^q \approx (\eta \oplus \theta^q)/(\beta \oplus 1)$ изоморфны над X/A. Следовательно, тривиализации $\alpha \oplus 1$: $\xi \oplus \theta^p \to \theta^{p+m}$ и $\beta \oplus 1$: $\eta \oplus \theta^q \to \theta^{q+n}$ также изоморфны, и потому в полугруппе $L(X, A)$ имеет место равенство $[\alpha: \xi \to \theta^m] = [\beta: \eta \to \theta^n]$. Следовательно, отображение Δ инъективно. Тем самым теорема 5.1 полностью доказана.

Замечание. В частности, мы видим, что полугруппа $L(X, A)$ является группой.

5.2. Следствие. *Для произвольного элемента* $[\alpha: \xi_0 \to \xi_1]$ *группы* $L(X, A)$ *имеет место равенство*

$$j^! \Delta([\alpha: \xi_0 \to \xi_1]) = \{\xi_0\} - \{\xi_1\} \in K(X),$$

где j: $X \to (X, A)$ — *естественное вложение.*

Доказательство. По определению

$$\Delta([\alpha: \xi_0 \to \xi_1]) = \{(\xi_0 \oplus \zeta)/\alpha \oplus 1\} - m,$$

где ζ — такое расслоение, что $\xi_1 \oplus \zeta \approx \theta^m$. Поэтому

$$j^! \Delta([\alpha: \xi_0 \to \xi_1]) = \{p_A^*((\xi_0 \oplus \zeta)/\alpha \oplus 1)\} - \{\theta^m\} =$$
$$= \{\xi_0 \oplus \zeta\} - \{\xi_1 \oplus \zeta\} = \{\xi_0\} - \{\xi_1\}.$$

5.3. Следствие. *При* $A = *$ *для произвольного элемента* $[\alpha: \xi_0 \to \xi_1]$ *группы* $L(X, *)$ *имеет место равенство*

$$\Delta([\alpha: \xi_0 \to \xi_1]) = \{\xi_0\} - \{\xi_1\} \in K(X, *) = \tilde{K}(X).$$

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 5.2, поскольку естественное вложение j: $X \to (X, *)$ индуцирует, очевидно, вложение $\tilde{K}(X) = K(X, *) \to K(X)$.

5.4. Следствие. *Если разностные морфизмы* α_0: $\xi_0 \to \xi_1$ *и* α_1: $\xi_0 \to \xi_1$ *над* A *гомотопны, то в группе* $L(X, A)$ *имеет место равенство*

$$[\alpha_0: \xi_0 \to \xi_1] = [\alpha_1: \xi_0 \to \xi_1].$$

Доказательство. Пусть ζ — такое расслоение, что $\xi_1 \oplus \zeta \approx \theta^m$. Ясно, что гомотопия α_t: $\xi_0 \to \xi_1$, связывающая разностные морфизмы α_0 и α_1, определяет гомотопию $\alpha_t \oplus 1$: $\xi_0 \oplus \zeta \to \xi_1 \oplus \zeta$, связывающую тривиализации $\alpha_0 \oplus 1$ и $\alpha_1 \oplus 1$ расслоения $\xi_0 \oplus \zeta$. Поэтому, согласно предложению 1.6, в группе $K(X, A)$

имеет место равенство $\{(\xi_0\oplus\zeta)/(\alpha_0\oplus 1)\}-m=\{(\xi_1\oplus\zeta)/(\alpha_1\oplus 1)\}-m$, т. е. равенство $\Delta([\alpha_0\colon \xi_0\to\xi_1])=\Delta([\alpha_1\colon \xi_0\to\xi_1])$. Для завершения доказательства остается заметить, что отображение Δ инъективно.

5.5. Следствие. *Если разностные морфизмы* $\alpha\colon \xi_0\to\xi_1$ *и* $\beta\colon \xi_1\to\xi_0$ *над* A *обладают тем свойством, что* $\beta|A=(\alpha|A)^{-1}$, *или если морфизм* β *сопряжен*[1]) *с морфизмом* α *относительно некоторых метрик на* ξ_0 *и* ξ_1, *то в группе* $L(X, A)$ *имеет место равенство*

$$[\alpha\colon \xi_0\to\xi_1]=-[\beta\colon \xi_1\to\xi_0].$$

Доказательство. При $A=\varnothing$ и $A=*$ это утверждение очевидным образом справедливо. С другой стороны, ясно, что для любого непустого A имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L(X/A, *) & \xrightarrow{\Delta} & K(X/A, *) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(X, A) & \xrightarrow{\Delta} & K(X, A) \end{array}$$

Поскольку обе горизонтальные стрелки и правая вертикальная стрелка этой диаграммы являются изоморфизмами, ее левая вертикальная стрелка $L(X/A, *)\to L(X, A)$ также является изоморфизмом. Поэтому если следствие верно при $A=*$, то оно верно и при любом $A\neq\varnothing$.

6. УМНОЖЕНИЯ В $L(X, A)$

Пусть снова $F=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Нам понадобится следующая лемма из теории векторных пространств, являющаяся частным случаем так называемой „формулы Кюннета".

6.1. Лемма. *Для любых линейных отображений* $\alpha\colon U\to U'$ *и* $\beta\colon V\to V'$, *по крайней мере одно из которых является изоморфизмом, имеет место точная последовательность*

$$0\to U\otimes V\xrightarrow{(\alpha\otimes 1,\, 1\otimes\beta)}(U'\otimes V)\oplus(U\otimes V')\xrightarrow{1\otimes\beta-\alpha\otimes 1}U'\otimes V'\to 0.$$

Доказательство. Пусть изоморфизмом является отображение α. Тогда $(\alpha\otimes 1,\ 1\otimes\beta)$ — мономорфизм, $1\otimes\beta$ —

---

[1]) Морфизм векторных расслоений $\beta\colon \xi_1\to\xi_0$ называется *сопряженным* с морфизмом $\alpha\colon \xi_0\to\xi_1$, если на каждом слое индуцированное морфизмом β линейное отображение сопряжено с линейным отображением, индуцированным морфизмом α. Сопряженный морфизм β обозначается символом α^*. — *Прим. ред.*

$-\alpha\otimes 1$ — эпиморфизм и $(1\otimes\beta-\alpha\otimes 1)(\alpha\otimes 1, 1\otimes\beta)=0$. Пусть $\{e_i\}$, $i\in\mathcal{I}$, — базис пространства U. Ясно, что любой элемент пространства $(U'\otimes V)\oplus(U\otimes V')$ имеет вид $\sum\alpha(e_i)\otimes y_i + \sum e_i\otimes y_i'$. Если этот элемент принадлежит подпространству $\operatorname{Ker}(1\otimes\beta-\alpha\otimes 1)$, то $\sum\alpha(e_i)\otimes(\beta(y_i)-y_i')=0$, и потому $\beta(y_i)=y_i'$. Следовательно, $(\alpha\otimes 1, 1\otimes\beta)\left(\sum e_i\otimes y_i\right)=\sum\alpha(e_i)\otimes\otimes y_i+\sum e_i\otimes y_i'$. Тем самым лемма полностью доказана.

Для любых векторных расслоений ξ и η над пространствами X и Y мы будем символом $\xi\otimes\eta$ обозначать векторное расслоение $p_X^*(\xi)\otimes p_Y^*(\eta)$ над пространством $X\times Y$, где $p_X\colon X\times Y\to X$ и $p_Y\colon X\times Y\to Y$ — естественные проекции. Таким образом, элемент $\{\xi\otimes\eta\}$ группы $K(X\times Y)$, определенный расслоением $\xi\otimes\eta$, является не чем иным, как внешним K-произведением элементов $\{\xi\}\in K(X)$ и $\{\eta\}\in K(Y)$ (в смысле определения 3.1).

Пусть теперь $\alpha\colon\xi_0\to\xi_1$ — разностный морфизм над (X, A) и $\beta\colon\eta_0\to\eta_1$ — разностный морфизм над (Y, B).

Рассмотрим последовательность

$$(\alpha, \beta)\colon\ 0\to\xi_0\otimes\eta_0\xrightarrow{(1\otimes\beta,\,\alpha\otimes 1)}(\xi_0\otimes\eta_1)\oplus(\xi_1\otimes\eta_0)\xrightarrow{-\alpha\otimes 1+1\otimes\beta}$$
$$\to\xi_1\otimes\eta\to 0.$$

Из леммы 6.1 непосредственно вытекает, что эта последовательность точна над $(X\times B)\cup(A\times Y)$.

Предполагая, что на расслоениях ξ_0, ξ_1, η_0 и η_1 заданы метрики, рассмотрим теперь морфизм

$$\alpha\beta=\begin{bmatrix}1\otimes\beta & -\alpha^*\otimes 1\\ \alpha\otimes 1 & 1\otimes\beta^*\end{bmatrix}\colon(\xi_0\otimes\eta_0)\oplus(\xi_1\otimes\eta_1)\to(\xi_0\otimes\eta_1)\oplus(\xi_1\otimes\eta_0),$$

индуцирующий на слагаемом $\xi_0\otimes\eta_0$ морфизм $(1\otimes\beta, \alpha\otimes 1)$, а на слагаемом $\xi_1\otimes\eta_1$ морфизм $(\alpha^*\otimes 1, 1\otimes\beta^*)$. Легко видеть[1]), что $\alpha\beta$ является разностным морфизмом над $(X\times Y, (X\times B)\cup\cup(A\times Y))$.

6.2. Предложение. *Соответствие* $(\alpha, \beta)\mapsto\alpha\beta$ *согласовано с отношением эквивалентности, определяющим группу* $L(X, A)$, *и задает, следовательно, некоторое отображение*

$$L(X, A)\otimes L(Y, B)\to L(X\times Y, (A\times Y)\cup(X\times B)).$$

[1]) Компонентами $(\xi_0\otimes\eta_0)\oplus(\xi_1\otimes\eta_1)\to\xi_0\otimes\eta_1$ и $(\xi_0\otimes\eta_0)\oplus(\xi_1\otimes\eta_1)\to\to\xi_1\otimes\eta_0$ морфизма $\alpha\beta$ являются, очевидно, морфизмы $1\otimes\beta-\alpha^*\otimes 1$ и $\alpha\otimes 1+1\otimes\beta^*$ из последовательностей (α^*, β) и $(-\alpha, \beta^*)$ соответственно. Поэтому эти морфизмы, а следсвательно, и морфизм $\alpha\beta$ являются над $(X\times B)\cup(A\times Y)$ эпиморфнзмами. Являясь эпимэрфизмом векторных расслоеиий одной и той же размерности, морфизм $\alpha\beta$ иад $(X\times B)\cup(A\times Y)$ будет, следовательно, изоморфизмом. — *Прим. ред.*

Это отображение линейно по каждому множителю, т. е. является умножением.

Доказательство. Если хотя бы один из разностных морфизмов $\alpha\colon \xi_0 \to \xi_1$ или $\beta\colon \eta_0 \to \eta_1$ является изоморфизмом над X или над Y соответственно, то последовательность (α, β) точна над $X \times Y$ и, следовательно[1], морфизм $\alpha\beta$ является изоморфизмом над всем пространством $X \times Y$. Таким образом, если $\alpha = 0$ в $L(X, A)$ или $\beta = 0$ в $L(Y, B)$, то $\alpha\beta = 0$ в $L(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$. Поскольку соответствие $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$, очевидно, линейно по α и β, предложение 6.2 тем самым полностью доказано.

6.3. Определение. Построенное умножение

$$L(X, A) \otimes L(Y, B) \to L(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$$

называется *внешним L-умножением.*

Сравним это умножение с построенным выше (см. определение 3.7) внешним относительным K-умножением

$$K(X, A) \otimes K(Y, B) \to K(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)).$$

6.4. Теорема. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} L(X, A) \otimes L(Y, B) & \to & L(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)) \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta \otimes \Delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\ K(X, A) \otimes K(Y, B) & \to & K(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)) \end{array}.$$

Доказательство. При $A = B = \varnothing$ эта диаграмма коммутативна, ибо в кольце $K(X \times Y)$ справедливо соотношение

$$(\{\xi_0\} - \{\xi_1\})(\{\eta_0\} - \{\eta_1\}) = \{(\xi_0 \otimes \eta_0) \oplus (\xi_1 \otimes \eta_1)\} - \{(\xi_0 \otimes \eta_1) \oplus (\xi_1 \otimes \eta_0)\}.$$

При $A = *$ или $\varnothing$ и $B = *$ или $\varnothing$ имеет место мономорфизм $K(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)) \to K(X \times Y)$, и, следовательно, рассматриваемая диаграмма также коммутативна. Случай любых A и B сводится к рассмотренным в силу соотношений

$$K(X, A) = \tilde{K}(X/A), \quad K(Y, B) = \tilde{K}(Y/B)$$

и

$$K(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)) = \tilde{K}((X/A) \times (Y/B)).$$

---

[1] Здесь требуется не столько точность последовательностя (α, β), сколько точность последовательностей (α^*, β) и $(-\alpha, \beta^*)$ (см. предыдущее примечание), которая также, конечно, имеет место. — *Прим. ред.*

7. СКЛЕИВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Напомним, что тройка $(X;\ X_1,\ X_0)$ называется *клеточной триадой*, если X_1 и X_0 являются подразбиениями клеточного разбиения X и $X = X_0 \cup X_1$. Рассмотрим вопрос о «склейке» векторного (действительного или комплексного) расслоения ξ_1 над X_1 с векторным расслоением ξ_0 над X_0 при помощи некоторого изоморфизма

$$\xi_1 | (X_0 \cap X_1) \to \xi_0 | (X_0 \cap X_1).$$

7.1. Предложение. *Для любой клеточной триады* $(X;\ X_1,\ X_0)$, *любых векторных расслоений* ξ_1 *и* ξ_0 *над* X_1 *и* X_0 *соответственно и любого изоморфизма* α: $\xi_1 | A \to \xi_0 | A$, *где* $A = X_0 \cap X_1$, *существует тройка* $(\xi,\ u_1,\ u_0)$, *состоящая из векторного расслоения* ξ *над* X *и таких изоморфизмов векторных расслоений* u_0: $\xi_0 \to \xi | X_0$ *и* u_1: $\xi_1 \to \xi | X_1$, *что* $u_0\alpha = u_1$ *над* A. *Любая другая тройка* $(\eta,\ v_1,\ v_0)$, *обладающая этими свойствами, изоморфна тройке* $(\xi,\ u_1,\ u_0)$ *в том смысле, что существует изоморфизм* w: $\eta \to \xi$, *для которого* $u_0 = wv_0$ *и* $u_1 = wv_1$.

Доказательство. Расслоение ξ мы построим, принимая за пространство $E(\xi)$ пространство, полученное отождествлением точек $x \in E(\xi_1 | A) \subset E(\xi_1)$ с точками $\alpha(x) \in E(\xi_0 | A) \subset E(\xi_0)$, а за проекцию $E(\xi) \to X$ отображение, естественным образом индуцированное проекциями расслоений ξ_1 и ξ_0. Ясно, что каждый слой расслоения ξ является векторным пространством и имеют место естественные изоморфнзмы u_i: $\xi_i \to \xi | X_i$, $i = 0,\ 1$, причем $u_0\alpha = u_1$ над A.

Таким образом, для завершения доказательства существования тройки $(\xi,\ u_1,\ u_0)$ осталось доказать, что расслоение ξ является локально тривиальным, или, иными словами, что над некоторой окрестностью произвольной точки $x \in X$ расслоение ξ обладает координатной картой. Поскольку при $x \notin A$ это очевидно, мы без ограничения общности можем при этом предполагать, что $x \in A$. Пусть U — такая открытая окрестность точки $x \in A$ в пространстве X, что, во-первых, существует ретракция r: $U \cap X_0 \to U \cap A$ и, во-вторых, расслоения ξ_i обладают над $U \cap X_i$ координатными картами φ_i: $(U \cap X_i) \times F^n \to \xi_i | (U \cap X_i)$. Над пересечением $U \cap A$ карты φ_1 и φ_0 связаны, очевидно, соотношением $\alpha\varphi_1(x,\ v) = \varphi_0(x,\ f(x)v)$, $x \in U \cap A$, $v \in F^n$, где f: $U \cap A \to GL(F^n)$ — некоторое отображение. С другой стороны, ясно, что наряду с φ_0 координатной картой расслоения ξ_0 над $U \cap X_0$ будет и отображение, определенное соответствием $(x,\ v) \mapsto \varphi_0(x,\ f(r(x))\,v)$, $(x,\ v) \in (U \cap X_0) \times F^n$. Поэтому без ограничения общности мы можем предполагать, что $\alpha\varphi_1(x,\ v) = \varphi_0(x,\ v)$ для любой точки $(x,\ v) \in$

$\in (U \cap A) \times F^n$. Но тогда соотношения $\varphi|((U \cap X_i) \times F^n) = u_i\varphi_i$, $i = 0, 1$, очевидно, однозначно определяют некоторую координатную карту φ: $U \times F^n \to \xi|U$ расслоения ξ над U. Тем самым существование тройки (ξ, u_1, u_0) полностью доказано.

Для доказательства единственности достаточно заметить, что, поскольку пространство $E(\eta)$ является объединением замкнутых подмножеств $E(\eta|X_i)$, $i = 0, 1$, изоморфизмы $u_i v_i^{-1}$: $\eta|X_i \to \xi|X_i$ однозначно определяют изоморфизм w: $\eta \to \xi$.

7.2. Обозначения. Расслоение ξ, построенное в предложении 7.1, мы будем обозначать через $\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha} \xi_0$. Согласно предложению 7.1, с точностью до изоморфизма оно определено однозначно. Мы будем говорить, что оно получено *склейкой* расслоений ξ_1 и ξ_0 по подпространству A с помощью склеивающего изоморфизма α.

Из единственности склейки немедленно вытекает следующее

7.3. Предложение. *Каждое расслоение ξ над пространством X изоморфно расслоению* $(\xi|X_1) \bigcup\limits_{1} (\xi|X_0)$.

Поведение склеек при непрерывных отображениях описывается следующим предложением:

7.4. Предложение. *Пусть расслоения ξ_0 и ξ_1 склеиваются с помощью склеивающего изоморфизма α, а расслоения η_0 и η_1 — с помощью склеивающего изоморфизма β. Пусть, далее, (w_0, f_0): $\xi_0 \to \eta_0$ и (w_1, f_1): $\xi_1 \to \eta_1$ — такие морфизмы векторных расслоений, что, во-первых, $f_0\alpha = \beta f_1$ над A и, во-вторых, $f_0 = f|X_0$ и $f_1 = f|X_1$, где f: $(X; X_1, X_0) \to (Y; Y_1, Y_0)$ — некоторое отображение триад. Тогда существует один и только один морфизм векторных расслоений (w, f): $\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha} \xi_0 \to \eta_1 \bigcup\limits_{\beta} \eta_0$, для которого имеют место коммутативные диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \xi_i & \xrightarrow{(w_i,\, f_i)} & \eta_i \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (u_i,\,1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (v_i,\,1)} \\ \xi_1 \bigcup\limits_{\alpha} \xi_0 & \xrightarrow{(w,\, f)} & \eta_1 \bigcup\limits_{\beta} \eta_0 \end{array} \qquad (i = 0, 1).$$

В случае когда морфизмы (w_0, f_0) и (w_1, f_1) являются изоморфизмами, морфизм (w, f) также представляет собой изоморфизм.

Доказательство. Существование и единственность морфизма (w, f) непосредственно следуют из построения пространства $E\left(\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha} \xi_0\right)$.

7.5. Предложение. *Для любых* (ξ_1, α, ξ_0) *и* (η_1, β, η_0) *расслоение* $(\xi_1 \oplus \eta_1) \bigcup\limits_{\alpha \oplus \beta} (\xi_0 \oplus \eta_0)$ *изоморфно расслоению* $\left(\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha} \xi_0\right) \oplus \left(\eta_1 \bigcup\limits_{\beta} \eta_0\right)$, *а расслоение* $(\xi_1 \otimes \eta_1) \bigcup\limits_{\alpha \otimes \beta} (\xi_0 \otimes \eta_0)$ — *расслоению* $\left(\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha} \xi_0\right) \otimes \left(\eta_1 \bigcup\limits_{\beta} \eta_0\right)$.

Доказательство немедленно вытекает из свойства единственности склейки[1]).

7.6. Предложение. *Для любых расслоений* ξ_0 *и* ξ_1 *над* X_0 *и* X_1 *и любой гомотопии* α_t: $\xi_1 | A \to \xi_0 | A$ *склеивающих изоморфизмов расслоения* $\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha_0} \xi_0$ *и* $\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha_1} \xi_0$ *изоморфны.*

Доказательство. Гомотопию α_t мы можем рассматривать как склеивающий изоморфизм

$$\alpha \colon (\xi_1 \times I) | (A \times I) \to (\xi_0 \times I) | (A \times I),$$

причем расслоение $\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha_0} \xi_0$ будет изоморфно расслоению $\left[(\xi_1 \times I) \bigcup\limits_{\alpha} (\xi_0 \times I)\right] | (X \times 0)$, а расслоение $\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha_1} \xi_0$ — расслоению $\left[(\xi_1 \times I) \bigcup\limits_{\alpha} (\xi_0 \times I)\right] | (X \times 1)$. Поэтому, согласно следствию 3.4.6, расслоение $\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha_0} \xi_0$ изоморфно расслоению $\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha_1} \xi_0$.

8. ФУНКТОРЫ $L_n(X, A)$

В этом разделе вкратце излагается (по существу без доказательств) одно важное обобщение функторов $L(X, A)$.

Мы будем рассматривать *цепные комплексы*

$$\xi \colon 0 \to \xi_0 \xrightarrow{\alpha_1} \xi_1 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} \xi_n \to 0$$

длины n, состоящие из векторных расслоений над X и ацикличные (т. е. являющиеся точными последовательностями) над A.

Комплексы ξ и η мы будем называть *изоморфными*, если существуют изоморфизмы u_i: $\xi_i \to \eta_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, для которых

---

[1]) Имеет место также столь же очевидный изоморфизм $\left(\xi_1 \bigcup\limits_{\alpha} \xi_0\right)^* \approx \xi_1^* \bigcup\limits_{(\alpha^*)^{-1}} \xi_0^*$. — *Прим. ред.*

имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \xi_0|A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "u_0"] & \xi_1|A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "u_1"] & \ldots \arrow[r, "\alpha_n"] & \alpha_n|A \arrow[r] \arrow[d, "u_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \eta_0|A \arrow[r, "\beta_1"] & \eta_1|A \arrow[r, "\beta_2"] & \ldots \arrow[r, "\beta_n"] & \eta_n|A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

8.1. Обозначения. Символом $S_n(X, A)$ мы будем обозначать множество классов изоморфных комплексов длины n, определенных над X и ацикличных над A. Очевидным образом определяемая сумма Уитни $\xi \oplus \eta$ комплексов ξ и η индуцирует на множестве $S_n(X, A)$ операцию сложения, относительно которой это множество является коммутативной полугруппой. Любое отображение $f\colon (Y, B) \to (X, A)$ очевидным образом сопоставляет каждому комплексу ξ над (X, A) комплекс $f^*(\xi)$ над (Y, B) и потому индуцирует некоторый морфизм полугрупп $f^*\colon S_n(X, A) \to S_n(Y, B)$. Ясно, что тем самым $S_n(X, A)$ определяется как контравариантный функтор.

Комплекс $0 \to \xi_0 \xrightarrow{\alpha_1} \xi_1 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} \xi_n \to 0$ называется *элементарным*, если $\xi_i = 0$ при $i \neq k-1$, k и морфизм $\alpha_k\colon \xi_{k-1} \to \xi_k$ является изоморфизмом над X. Два комплекса ξ и η называются *эквивалентными*, если существуют такие элементарные комплексы $\delta_1, \ldots, \delta_p$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$, что $\xi \oplus \delta_1 \oplus \ldots \oplus \delta_p = \eta \oplus \varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus \varepsilon_q$ в $S_n(X, A)$.

8.2. Определение. Факторполугруппа полугруппы $S_n(X, A)$ по этому отношению эквивалентности обозначается символом $L_n(X, A)$.

Отметим, что полугруппа $L_1(X, A)$ совпадает с полугруппой $L(X, A)$, определенной в разд. 4. Можно показать, что нулем полугруппы $L_n(X, A)$ служит класс эквивалентности комплексов ξ, ацикличных на всем X.

Рассматривая каждый комплекс длины n как комплекс длины $n+1$, мы получаем естественный морфизм $L_n(X, A) \to L_{n+1}(X, A)$. Композиция этих морфизмов дает естественный морфизм $L_1(X, A) \to L_n(X, A)$.

Для конечных клеточных пар справедлива следующая

8.3. Теорема. *Естественный морфизм* $L_1(X, A) \to L_n(X, A)$ *является изоморфизмом.*

Доказательство этой теоремы мы предоставим читателю. Оно основывается на следующей лемме, легко вытекающей из теоремы 2.7.1:

8.4. Лемма. *Если для векторных расслоений ξ и η над клеточным разбиением X имеет место неравенство $\dim \eta > \dim \xi + \dim X$, то любой мономорфизм из $\xi | A \to \eta | A$ продолжается до некоторого мономорфизма $\xi \to \eta$ над всем X.*

Изоморфизм, обратный к изоморфизму $L_1(X, A) \to L_n(X, A)$, строится следующим образом: предполагая, что все расслоения ξ_i, составляющие комплекс $\xi \in S_n(X, A)$, снабжены некоторой метрикой, определим комплекс $\eta = (0 \to \eta_0 \xrightarrow{\beta} \eta_1 \to 0)$ над X формулами

$$\eta_0 = \sum_i \xi_{2i}, \quad \eta_1 = \sum_i \xi_{2i+1},$$

$$\beta(x_0, x_2, x_4, \ldots) = (\alpha_1(x_0), \alpha_2^*(x_2) + \alpha_3(x_2), \alpha_4^*(x_4) + \alpha_5(x_4), \ldots),$$

где $\alpha_i^*\colon \xi_i \to \xi_{i-1}$ — морфизмы, сопряженные к морфизмам $\alpha_i\colon \xi_{i-1} \to \xi_i$. Так как $\xi_{2i+1} = \alpha_{2i}(\xi_{2i}) \oplus \alpha_{2i+1}^*(\xi_{2i+2})$ над A, то комплекс η ацикличен над A. Поэтому соответствие $\xi \mapsto \eta$ определяет некоторое отображение $L_n(X, A) \to L_1(X, A)$. Это отображение и является изоморфизмом, обратным к изоморфизму $L_1(X, A) \to L_n(X, A)$.

Для функторов $L_n(X, A)$ имеет место теорема, аналогичная теореме 5.1 для функтора $L(X, A)$. Введем сначала следующее

8.5. Определение. *Эйлеровой характеристикой* для функтора L_n называется такой морфизм функторов $\chi\colon L_n \to K$, что $\chi(\xi) = \sum_{a \leqslant i \leqslant n} (-1)^i \xi_i$ при $A = \varnothing$.

Следующая теорема доказывается с помощью теорем 8.3 и 5.1:

8.6. Теорема. *Для функтора L_n существует единственная эйлерова характеристика. Она является изоморфизмом функторов.*

Комплексы ξ и η над (X, A) называются *гомотопными*, если над $(X \times I, A \times I)$ существует такой комплекс ζ, что $\xi = \zeta | (X \times 0, A \times 0)$ и $\eta = \zeta | (X \times 1, A \times 1)$.

Из теоремы 8.6 без труда вытекает

8.7. Следствие. *Гомотопные комплексы определяют один и тот же элемент полугруппы $L_n(X, A)$.*

Заметим, что тот факт, что построенное выше отображение $L_n(X, A) \to L_1(X, A)$ является изоморфизмом, обратным к изоморфизму $L_1(X, A) \to L_n(X, A)$, без труда вытекает из теоремы 8.6 и следствия 8.7.

8.8. Умножения. Из формулы Кюннета следует, что

$$\xi \otimes \eta \in S_{n+m}(X \times Y,\ (X \times B) \cup (A \times Y))$$

для любых $\xi \in S_n(X, A)$ и $\eta \in S_m(Y, B)$. Следовательно, операция $\otimes$ индуцирует некоторое умножение $L_n(X, A) \otimes L_m(Y, B) \to L_{n+m}(X \times Y,\ (X \times B) \cup (A \times Y))$. Легко видеть, что с внешним K-умножением это умножение связано формулой $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$, где χ — эйлерова характеристика.

9. ПОЛУТОЧНЫЕ ФУНКТОРЫ

Дольд [5] заметил, что основные результаты разд. 2 и 3 имеют по существу весьма общий характер. Мы сейчас вкратце изложим (снова без доказательств) важнейшие из его результатов.

9.1. Определение. Пусть $\mathscr{W}$ — категория пунктированных конечных клеточных разбиений, морфизмами которой являются классы гомотопных (относительно отмеченных точек) пунктированных отображений. Контравариантный функтор U, определенный в категории $\mathscr{W}$ и принимающий значения в категории абелевых групп, называется *полуточным*, если для каждого подразбиения A клеточного разбиения X имеет место точная последовательность

$$U(A) \leftarrow U(X) \leftarrow U(X/A).$$

9.2. Пример. Обычные приведенные группы сингулярных когомологий $\tilde{H}^n(-;\ G)$ являются полуточным функтором. Действительно, естественная проекция $X \to X/A$ индуцирует, очевидно, изоморфизм

$$\tilde{H}^n(X/A;\ G) \to \tilde{H}^n(X,\ A;\ G),$$

и потому свойство полуточности функтора $\tilde{H}^n$ следует из классической точной последовательности групп когомологии пары $(X,\ A)$.

9.3. Пример. Согласно предложению 2.1, действительные, комплексные и кватернионные $\tilde{K}$-группы являются полуточными функторами.

9.4. Пример. Для любого гомотопически ассоциативного и гомотопически коммутативного H-пространства H функтор $U_H = [-,\ H]_0$ полуточен.

9.5. Пример. Пусть U — произвольный полуточный функтор и Z — некоторое конечное клеточное разбиение. Тогда, сопоставив каждому пространству X группу $U(X \wedge Z)$ и каждому отображеиию $f: Y \to X$ гомоморфизм $U(f \wedge 1_Z)$, мы получим некоторый новый полуточный функтор.

9.6. Предложение. *Если функтор U полуточен, то для любого пространства X, состоящего из одной точки, $U(X)=0$. Аналогично, $U(f)=0$ для любого отображения f, гомотопного нулю.*

Доказательство очевидно.

В силу этого предложения к произвольиому полуточному фуиктору можно примеиить изложеиные в разд. 2 коиструкции. В результате получается следующая

9.7. Теорема. *Для любого полуточного функтора U и любого клеточного отображения f: $X \to Y$ конечных клеточных разбиений имеет место точная последовательность*

$$U(X) \xleftarrow{U(f)} U(Y) \xleftarrow{U(a(f))} U(C_f) \xleftarrow{U(b(f))} U(SX) \xleftarrow{U(Sf)} U(SY).$$

Эта теорема соответствует первому утверждеиию теоремы 2.8. Второму утверждению теоремы 2.8 соответствует

9.8. Теорема. *Для любой конечной клеточной пары (X, A) существует такой кограничный морфизм $U(SA) \to U(X/A)$, что имеет место точная последовательность*

$$U(A) \leftarrow U(X) \leftarrow U(X/A) \leftarrow U(SA) \leftarrow (SX).$$

Формулировку и доказательство аиалогов предложеиий 3.2 и 3.4 для произвольных полуточных функторов мы оставляем читателю.

Следующая важиая теорема едииствеиности используется, например, в некоторых доказательствах теоремы периодичности Ботта (см. гл. 10). Она позволяет также сравнить иад полем рациональных чисел K-группы с группами когомологий.

9.9. Теорема. *Если для морфизма φ: $U \to V$ полуточных функторов все морфизмы $\varphi(S^m)$, $m \geqslant 0$, являются изоморфизмами, то для любого X морфизм $\varphi(X)$ также является изоморфизмом.*

Эта теорема доказывается индукцией по числу клеток клеточного разбиеиия X.

Отметим в заключение, что теорема 9.7 (а следовательно, и предложение 2.6) тесно связана со следующей фундаментальной для этого круга вопросов теоремой, известной как теорема о точной последовательности Пуппе (см. Пуппе [1]):

9.10. Теорема. *Для любого отображения $f: X \to Y$ и любого пространства Z имеет место точная последовательность пунктированных множеств*

$$[X, Z]_0 \xleftarrow{f^*} [Y, Z]_0 \xleftarrow{a(f)^*} [C_f, Z]_0 \xleftarrow{b(f)^*} [SX, Z]_0 \xleftarrow{(Sf)^*} [SY, Z]_0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Перенесите результаты этой главы на векторные расслоения над парой (X, A), где X — произвольное компактное пространство и A — его замкнутое подпространство.

2. Восстановите доказательства, опущенные в разд. 8 и 9.

Глава 10

ТЕОРЕМА БОТТА О ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

В этой главе излагается элементарное доказательство теоремы периодичности для комплексных векторных расслоений, принадлежащее Атье и Ботту. Это доказательство отчетливо выясняет, в частности, роль расслоения Хопфа в явлении периодичности.

1. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ ПЕРИОДИЧНОСТИ

Полагая $k=2$ при $F=\mathbf{C}$ и $k=8$ при $F=\mathbf{R}$, рассмотрим естественные отображения

$$X\vee S^k\to X\times S^k\to X\wedge S^k.$$

Как мы знаем (предложение 9.3.4), эти отображения порождают расщепляющуюся точную последовательность

$$0\to\tilde{K}(X\wedge S^k)\to\tilde{K}(X\times S^k)\to\tilde{K}(X\vee S^k)\to 0.$$

Но, согласно предложению 9.3.2,

$$\tilde{K}(X\vee S^k)=\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(S^k).$$

Следовательно,

$$\tilde{K}(X\times S^k)=\tilde{K}(X\wedge S^k)\oplus\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(S^k),$$

и потому

$$K(X\times S^k)=\tilde{K}(X\wedge S^k)\oplus\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(S^k)\oplus\mathbf{Z}.$$

С другой стороны,

$$K(X)=\tilde{K}(X)\oplus\mathbf{Z}\quad\text{и}\quad K(S^k)=\tilde{K}(S^k)\oplus\mathbf{Z},$$

так что

$$K(X)\otimes K(S^k)=\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(S^k)\oplus\tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(S^k)\oplus\mathbf{Z}.$$

Вспоминая определения внешних K- и $\tilde{K}$-умножений (см. определение 9.3.1 и замечание 9.3.6), мы немедленно получаем отсюда коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
K(X)\otimes K(S^k)=\big(\tilde{K}(X)\otimes\tilde{K}(S^k)\big) & \oplus & \tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(S^k)\oplus\mathbf{Z}\\
\downarrow & & \downarrow\\
K(X\times S^k)=\tilde{K}(X\wedge S^k) & \oplus & \tilde{K}(X)\oplus\tilde{K}(S^k)\oplus\mathbf{Z}
\end{array}$$

левая вертикальная стрелка которой является внешним K-умножением

$$K(X) \otimes K(S^k) \to K(X \times S^k),$$

а правая — внешним $\tilde{K}$-умножением

$$\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(S^k) \to \tilde{K}(X \wedge S^k)$$

на слагаемом $\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(S^k)$ и тождественным отображением на остальных трех слагаемых.

Следовательно, имеет место

1.1. Предложение. *Внешнее K-умножение $K(X) \otimes K(S^k) \to K(X \times S^k)$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда изоморфизмом является внешнее $\tilde{K}$-умножение*

$$\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(S^k) \to \tilde{K}(X \wedge S^k).$$

Знаменитая теорема периодичности Ботта допускает много равносильных формулировок. Одной из них является следующая

1.2. Теорема. *Для любого компактного пространства X внешнее K-умножение μ: $K(X) \otimes K(S^k) \to K(X \times S^k)$ (т. е. умножение $KU(X) \otimes KU(S^2) \to KU(X \times S^2)$ в комплексном случае и умножение $KO(X) \otimes KO(S^8) \to KO(X \times S^8)$ в действительном случае) является изоморфизмом. При этом группа $KU(S^2)$ является свободной абелевой группой с двумя образующими 1 и η, где $\eta = \eta_1$ — класс комплексного векторного расслоения Хопфа, а группа $KO(S^8)$ — свободной абелевой группой с двумя образующими 1 и η, где $\eta = \eta_8$ — класс векторного расслоения Хопфа над числами Кэли, рассматриваемого как действительное восьмимерное расслоение.*

В силу предложения 1.1 теорема 1.2 равносильна следующей теореме:

1.3. Теорема. *Для любого компактного пространства X отображение $\tilde{K}(X) \to \tilde{K}(X \wedge S^k)$, сопоставляющее произвольному элементу $a \in \tilde{K}(X)$ элемент $a \otimes (\eta - 1) \in \tilde{K}(X \wedge S^k)$, является изоморфизмом.*

Мы докажем теорему 1.2 только для комплексных векторных расслоений (когда $k = 2$).

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД ПРОСТРАНСТВОМ $X \times S^2$

2.1. Обозначения. Сферу S^2 мы будем отождествлять со сферой Римана комплексного переменного (т. е. плоскостью комплексных чисел, пополненной точкой ∞). Символом D_0 мы будем обозначать единичный круг $|z| \leqslant 1$, а символом D_∞ — его внешность $|z| \geqslant 1$. Пересечение $D_0 \cap D_\infty$ является, таким образом, единичной окружностью S^1.

2.2. Обозначения. Для любого компактного пространства X мы символами π_0: $X \times D_0 \to X$, π_∞: $X \times D_\infty \to X$ и π: $X \times S^1 \to X$ будем обозначать естественные проекции на X. Отметим, что

$$(X \times D_0) \cup (X \times D_\infty) = X \times S^2 \quad \text{и} \quad (X \times D_0) \cap (X \times D_\infty) = X \times S^1.$$

Символом s: $X \to X \times S^2$ мы будем обозначать отображение, определенное формулой $s(x) = (x, 1)$. Этими обозначениями мы без дальнейших оговорок будем пользоваться на протяжении всей этой главы.

В первую очередь мы опишем все векторные расслоения над пространством $X \times S^2$.

2.3. Предложение. *Любое комплексное векторное расслоение ξ над пространством $X \times S^2$ изоморфно расслоению вида $\pi_0^*(\zeta) \underset{u}{\cup} \pi_\infty^*(\zeta)$, где $\zeta = s^*(\xi)$, а u — некоторый автоморфизм $\pi^*(\zeta) \to \pi^*(\zeta)$, тождественный над $X \times 1$. Гомотопический класс автоморфизма u однозначно определен расслоением ξ.*

Доказательство. Отображение s мы можем рассматривать не только как отображение $X \to X \times S^2$, но и как отображение $X \to X \times D_0$, а также как отображение $X \to X \times D_\infty$. Поскольку отображения $s\pi_0$: $X \times D_0 \to X \times D_0$ и $s\pi_\infty$: $X \times D_\infty \to X \times D_\infty$, очевидно, гомотопны тождественным отображениям, естественный изоморфизм $\xi|(X \times 1) \to \pi^*(\zeta)|(X \times 1)$ продолжается до некоторых изоморфизмов

$$u_0: \xi|(X \times D_0) \to \pi_0^*(\zeta) \quad \text{и} \quad u_\infty: \xi|(X \times D_\infty) \to \pi_\infty^*(\zeta).$$

Два таких продолжения над $X \times D_0$ (над $X \times D_\infty$) отличаются на некоторый автоморфизм расслоения ξ над $X \times D_0$ (соответственно над $X \times D_\infty$), являющийся тождественным над $X \times 1$. Поэтому гомотопический класс автоморфизма $u = u_\infty^{-1} u_0$ над $X \times S^1$ определен однозначно. Кроме того, ясно, что тройка (ξ, u_0, u_∞) обладает указанными в предложении 9.7.1 свойствами (по отношению к триаде $(X \times S^2; X \times D_0, X \times D_\infty)$, расслоениям $\pi_0^*(\zeta)$, $\pi_\infty^*(\zeta)$ и изоморфизму u). Поэтому расслоение ξ изоморфно расслоению $\pi_0^*(\zeta)\bigcup_u \pi_\infty^*(\zeta)$.

Нашей ближайшей задачей будет теперь изучение склеивающих автоморфизмов вида u: $\pi^*(\zeta)\to\pi^*(\zeta)$, где ζ — пока произвольное векторное расслоение над X. Каждое такое склеивающее отображение u задается непрерывным семейством невырожденных линейных преобразований вида $u(x, z)$: $\zeta_x\to\zeta_x$, где $x\in X$ и $|z|=1$.

2.4. Определение. *Склеивающим полиномом Лорана* для расслоения ζ называется склеивающий автоморфизм вида

$$u(x, z)=\sum_{|k|\leqslant h} a_k(x)z^k,$$

где a_k: $\zeta\to\zeta$ — морфизмы расслоения ζ. Склеивающий полином Лорана u называется *полиномиальным склеивающим автоморфизмом*, если

$$u(x, z)=a_0(x)+a_1(x)z+\ \dots\ +a_n(x)z^n,$$

и *линейным склеивающим автоморфизмом*, если

$$u(x, z)=a(x)+b(x)z.$$

Для любого $z\in S^1$ склеивающий автоморфизм u: $\pi^*(\zeta)\to\pi^*(\zeta)$ индуцирует некоторый автоморфизм

$$u(-, z)\colon \zeta\to\zeta$$

расслоения ζ. В случае когда автоморфизм u полиномиален, морфизмы $u(-, z)$ естественным образом определены для любого $z\in\mathbf{C}$ (но, вообще говоря, автоморфизмами, конечно, не являются).

Важнейшим свойством склеивающих полиномов Лорана является тот факт, что любое комплексное векторное расслоение ξ над $X\times S^2$ изоморфно расслоению вида $\pi_0^*(\zeta)\bigcup_u\pi_\infty^*(\zeta)$, где u — некоторый склеивающий полином Лорана. Именно имеет место

2.5. Предложение. *Любое комплексное векторное расслоение ξ над $X\times S^2$ изоморфно расслоению вида $\pi_0^*(\zeta)\bigcup_v\pi_\infty^*(\zeta)$, где $\zeta=s^*(\xi)$, а v — некоторый склеивающий полином Лорана.*

Доказательство. Согласно предложению 2.3, расслоение ξ изоморфно расслоению $\pi_0^*(\zeta)\bigcup_u\pi_\infty^*(\zeta)$, где u — некоторый склеивающий автоморфизм. Определим морфизмы a_k: $\zeta \to \zeta$ формулой

$$a_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S^1} z^{-k} u(x, z) \frac{dz}{z}$$

и положим

$$u_n(x, z) = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} s_k(x, z),$$

где

$$s_k(x, z) = \sum_{|j| \leqslant k} a_j z^j.$$

Отображения $u_n(x, z)$ представляют собой частные суммы Чезаро ряда Фурье отображения $u(x, z)$, и, следовательно, согласно классической теореме Фейера (тривиальным образом обобщенной на многомерный случай), последовательность u_n равномерно по x и z сходится к отображению u. Ясно, что гомотопические классы склеивающих автоморфизмов являются открытыми множествами в равномерной топологии пространства всех морфизмов расслоения $\pi^*(\zeta)$. Поэтому для достаточно большого n отображение $u_n = v$ является автоморфизмом, гомотопным автоморфизму u. Но если склеивающие автоморфизмы u и v гомотопны, то расслоения $\pi_0^*(\zeta) \bigcup\limits_u \pi_\infty^*(\zeta)$ и $\pi_0^*(\zeta) \bigcup\limits_v \pi_\infty^*(\zeta)$ изоморфны. Следовательно, расслоения ξ и $\pi_0^*(\zeta) \bigcup\limits_v \pi_\infty^*(\zeta)$ также изоморфны.

2.6. Пример. Пусть γ — линейное каноническое расслоение над $S^2 = CP^1$ и η — расслоение, двойственное к расслоению γ. Легко видеть, что расслоение γ получается склеиванием двух тривиальных расслоений над D_0 и D_∞ при помощи склеивающего автоморфизма $u(z) = z$, а расслоение η получается из тех же тривиальных расслоений при помощи склеивающего автоморфизма $u(z) = z^{-1}$. Действительно, по определению пространство $E(\gamma)$ является подпространством произведения $CP^1 \times \mathbf{C}^2$, состоящим из точек $(\langle z_0, z_1\rangle, (w_0, w_1))$, для которых $z_0 w_1 - z_1 w_0 = 0$. Кроме того, расслоение γ обладает атласом, состоящим из двух карт (h_0, V_0) и (h_1, V_1), где V_i, $i = 0, 1$, — открытые множества пространства CP^1, определяемые условием $z_i \neq 0$, $i = 0, 1$, а h_i: $V_i \times \mathbf{C} \to E(\gamma | V_i)$ — изоморфизмы, задаваемые формулами

$$h_0(\langle z_0, z_1\rangle, a) = \left(\langle z_0, z_1\rangle, \left(a, \frac{z_1 a}{z_0}\right)\right)$$

и

$$h_1(\langle z_0, z_1\rangle, a) = \left(\langle z_0, z_1\rangle, \left(\frac{z_0 a}{z_1}, a\right)\right),$$

Поэтому склеивающий автоморфизм $u(z)$ для расслоения γ является не чем иным, как ограничением при $|z|=1$ функции перехода $g_{0,1}(\langle z_0, z_1\rangle)$, соответствующей этому атласу, и поэтому удовлетворяет соотношению $h_0(\langle z_0, z_1\rangle, a) = h_1(\langle z_0, z_1\rangle, u(z)a)$, где $z = z_1/z_0$. Следовательно, $u(z) = z$. Тот факт, что склеивающий автоморфизм для двойственного расслоения определяется формулой $u(z) = z^{-1}$, вытекает отсюда в силу перестановочности склейки с тензорным умножением (предложение 9.7.5) и определения двойственного расслоения [1]).

2.7. Обозначение. Для произвольного комплексного векторного расслоения ζ над X и произвольного склеивающего автоморфизма u: $\pi^*(\zeta) \to \pi^*(\zeta)$ расслоение $\pi_0^*(\zeta) \bigcup_u \pi_\infty^*(\zeta)$ мы будем обозначать символом $[\zeta, u]$. В частности,

$$\gamma = [\theta^1, z], \quad \eta = \left[\theta^1, \frac{1}{z}\right].$$

Ясно, что для расслоения $\gamma \otimes \eta$ склеивающий автоморфизм определяется формулой $u(z) = z \cdot \frac{1}{z} = 1$. С другой стороны, очевидно, что $[\theta^1, 1] = \theta^1$. Следовательно,

$$\gamma \otimes \eta = \theta^1.$$

Иными словами,

$$\eta = \gamma^{-1} \quad \text{в кольце } K(S^2).$$

Пусть $\varkappa$: $X \times S^2 \to S^2$ — естественная проекция. Тогда для любого векторного расслоения ξ над $X \times S^2$ и любого векторного расслоения β над S^2 определено расслоение $\xi \otimes \varkappa^*(\beta)$ над $X \times S^2$. Мы будем обозначать это расслоение символом $\xi \hat{\otimes} \beta$.

2.8. Предложение. *Для любого расслоения* $\xi = [\zeta, u]$ *над* $X \times S^2$ *расслоение* $[\zeta, uz^n]$ *изоморфно расслоению* $\xi \hat{\otimes} \gamma^n$ *при* $n > 0$ *и расслоению* $\xi \hat{\otimes} \eta^{-n}$ *при* $n < 0$, *где* γ^n *и* η^n — n-*кратные тензорные степени расслоений* γ *и* η *соответственно.*

Доказательство. Расслоение $[\zeta, uz^n] = \pi_0^*(\zeta) \bigcup_{uz^n} \pi_\infty^*(\zeta)$ изоморфно, очевидно, расслоению $(\pi_0^*(\zeta) \otimes \theta^1) \bigcup_{u \otimes z^n} (\pi_\infty^*(\zeta) \otimes \theta^1)$,

---

[1]) Можно непосредственно воспользоваться формулой, указанной в примечании редактора к предложению 9.7.5, учитывая при этом, что оператор умножения на z сам себе двойствен, а обратным к нему оператором служит оператор умножения на z^{-1}. — *Прим. ред.*

а потому (см. предложение 9.7.5) и расслоению $\left[\pi_0^*(\zeta)\bigcup_u \pi_0^*(\zeta)\right]\otimes$ $\otimes[\theta^1, z^n]=[\zeta, u]\otimes[\theta^1, z^n]$. Но ясно, что $[\theta^1, z^n]=\varkappa^*[\theta^1, z^n]$, где слева θ^1 — тривиальное расслоение над пространством X, а справа — над пространством $\{*\}$, состоящим из одной точки. С другой стороны, над пространством $\{*\}\times S^2$ расслоение $[\theta^1, z^n]=\theta^1\bigcup_{z^n}\theta^1$ изоморфно (при $n>0$) расслоению

$$(\theta^1\otimes\ldots\otimes\theta^1)\bigcup_{z\otimes\ldots\otimes z}(\theta^1\otimes\ldots\otimes\theta^1)=\left(\theta^1\bigcup_z\theta^1\right)\otimes\ldots$$
$$\ldots\otimes\left(\theta^1\bigcup_z\theta^1\right)=[\theta^1, z]\otimes\ldots\otimes[\theta^1, z]=\gamma^n.$$

Таким образом,

$$[\theta^1, z^n]=\gamma^n, \quad n>0.$$

Аналогично доказывается, что

$$[\theta^1, z^{-n}]=\eta^n, \quad n>0.$$

Тем самым предложение 2.8 полностью доказано.

В частности, это предложение позволяет полностью описать все расслоения ξ над $X\times S^2$, отвечающие одночленным автоморфизмам, т. е. автоморфизмам вида az^n, где a — некоторый автоморфизм расслоения ξ. Действительно, легко видеть, что $[\zeta, a]=\pi^*(\zeta)$, где $\pi\colon X\times S^2\to X$ — естественная проекция. Поэтому все указанные расслоения имеют либо вид $\pi^*(\xi)\mathbin{\hat\otimes}\gamma^n$ (если $n>0$), либо вид $\pi^*(\zeta)\mathbin{\hat\otimes}\eta^{-n}$ (если $n<0$). В кольце $K(X\times S^2)$ это означает, что

$$[\zeta, az^n]=\begin{cases}\mu(\zeta\otimes\gamma^n), & \text{если } n\geqslant 0,\\ \mu(\zeta\otimes\eta^{-n}), & \text{если } n\leqslant 0,\end{cases}$$

где μ — умножение $K(X)\otimes K(S^2)\to K(X\times S^2)$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СКЛЕИВАЮЩИХ АВТОМОРФИЗМОВ

Согласно предложению 2.5, каждое комплексное векторное расслоение ξ над $X\times S^2$ изоморфно расслоению вида $[\zeta, z^{-n}p]$, где p — некоторый склеивающий полином. С другой стороны, согласно предложению 2.8, расслоение $[\zeta, z^{-n}p]$ изоморфно над $X\times S^2$ тензорному произведению $[\zeta, p]\mathbin{\hat\otimes}\eta^n$. Таким образом, описание всех векторных расслоений над $X\times S^2$ сводится к описанию расслоений вида $[\zeta, p]$. В этом разделе мы покажем, что все такие расслоения сводятся к расслоениям с линейным p, подобно тому как дифференциальные уравнения n-го порядка сводятся к линейным уравнениям.

3.1. Обозначения. Пусть $p = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} p_k z^k$ — произвольный склейвающий полиномиальный автоморфизм для комплексного векторного расслоения ζ над X. Символом $L^n(p)$ мы будем обозначать линейный склеивающий автоморфизм для комплексного векторного расслоения $L^n(\zeta) = \underbrace{\zeta \otimes \ldots \otimes \zeta}_{n+1 \text{ раз}}$, задаваемый матрицей

$$L^n(p) = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \ldots & p_{n-1} & p_n \\ -z & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -z & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $L^n(p)$ разлагается, очевидно, в произведение

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1^*(z) & \ldots & p_n^*(z) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(z) & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -z & 1 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 \ldots & -z & 1 \end{bmatrix},$$

где $p_r^*(z) = \sum\limits_{r \leqslant k \leqslant n} p_k z^{k-r}$. Таким образом,

$$L^n(p) = (1_{n+1} + N_1)(p \oplus 1_n)(1_{n+1} + N_2),$$

где N_1 и N_2 — нильпотентные матрицы. Отсюда непосредственно вытекает, что формула [1])

$$L_t^n(p) = (1_{n+1} + tN_1)(p \oplus 1_n)(1_{n+1} + tN_2)$$

определяет некоторую гомотопию склеивающих автоморфизмов для расслоения $L^n(\zeta)$. Поэтому справедливо

3.2. Предложение. *Для любого склеивающего полиномиального автоморфизма*

$$p(z) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} p_k z^k$$

[1]) Для любой нильпотентной матрицы N порядка $n+1$ матрица $1_{n+1} + tN$ невырождена. — *Прим. ред.*

расслоение $[L^n(\xi),\ L^n(p)]$ *изоморфно над* $X\times S^2$ *расслоению*

$$[L^n(\zeta),\ p\oplus 1_n]=[\zeta,\ p]\oplus\underbrace{\zeta\oplus\ldots\oplus\zeta}_{n\ \text{раз}}.$$

Рассматривая полином $p(z)$ как полином степени $n+1$, мы можем наряду с автоморфизмом $L^n(p)$ построить также и автоморфизм $L^{n+1}(p)$. Связь между соответствующими расслоениями над $X\times S^2$ описывается следующим предложением:

3.3. Предложение. *Расслоение* $[L^{n+1}(\zeta),\ L^{n+1}(p)]$ *изоморфно расслоению* $[L^n(\zeta),\ L^n(p)]\oplus[\zeta,\ 1]$.

Доказательство. Достаточно заметить, что матрица

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \ldots & p_{n-1} & p_n & 0\\ -z & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ . & . & \ldots & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & -z & 1 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -(1-t)z & 1\end{bmatrix}$$

определяет гомотопию склеивающих автоморфизмов, связывающую автоморфизм $L^{n+1}(p)$ с автоморфизмом $L^n(p)\oplus 1$. Поэтому расслоение $[L^{n+1}(\zeta),\ L^{n+1}(p)]$ изоморфно расслоению

$$[L^{n+1}(\zeta),\ L^n(p)\oplus 1]=[L^n(\zeta),\ L^n(p)]\oplus[\zeta,\ 1].$$

3.4. Предложение. *Расслоение* $[L^{n+1}(\zeta),\ L^{n+1}(zp)]$ *изоморфно расслоению* $[L^n(\zeta),\ L^n(p)]\oplus(\zeta,\ z)$.

Доказательство. Матрица

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/2)t & -\sin(\pi/2)t & 0 & \ldots & 0\\ \sin(\pi/2)t & \cos(\pi/2)t & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ . & . & . & \ldots & .\\ 0 & . & & 1 & 0\\ 0 & \ldots & . & \ldots 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & p_0 & p_1 & \ldots & p_{n-1} & p_n\\ -z & 1-t & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -z & 1 & \ldots & 0 & 0\\ . & . & . & \ldots & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -z & 1\end{bmatrix}$$

определяет гомотопию склеивающих автоморфизмов, связывающую автоморфизм $L^{n+1}(zp)$ с автоморфизмом $L^n(p)\oplus z$.

Поэтому расслоение $[L^{n+1}(\zeta),\ L^{n+1}(zp)]$ изоморфно расслоению $[L^{n+1}(\zeta),\ L^{n}(p)\oplus z]=[L^{n}(\zeta),\ L^{n}(p)]\oplus[\zeta,\ z]$.

3.5. Следствие[1]). *Расслоение* $\gamma^2=\gamma\otimes\gamma$ *стационарно эквивалентно расслоению* $\gamma\oplus\gamma$.

Доказательство. Согласно предложению 3.2, расслоение $[L^2(\theta^1),\ L^2(z^2)]$ изоморфно расслоению $[\theta^1,\ z^2]\oplus\theta^1\oplus\theta^1=$ $=\gamma^2\oplus\theta^2$. (Предостережение: индекс 2 у γ^2 означает тензорный квадрат, а у θ^2 — размерность.) С другой стороны, дважды применив предложение 3.4, мы получим, что расслоение $[L^2(\theta^1),\ L^2(z^2)]$ изоморфно расслоению $[L^0(\theta^1),\ L^0(1)]\oplus[\theta^1,\ z]\oplus$ $\oplus[\theta^1,\ z]=\theta^1\oplus\gamma\oplus\gamma$.

Замечание. На самом деле верно и даже более сильное утверждение, а именно что расслоение $\gamma\oplus\gamma$ изоморфно расслоению $\gamma^2\oplus\theta^1$. Действительно, ясно, что матрица

$$\begin{bmatrix} z & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\\ -\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\end{bmatrix}$$

определяет гомотопию склеивающих автоморфизмов, связывающую автоморфизм, имеющий матрицу $\begin{bmatrix} z^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, с автоморфизмом, имеющим матрицу $\begin{bmatrix} z & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}$.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СКЛЕИВАЮЩИХ АВТОМОРФИЗМОВ

Пусть $p(x,\ z)=a(x)z+b(x)$ — линейный склеивающий автоморфизм для расслоения ζ над X. В этом разделе мы покажем, что расслоение ζ можно разложить в такие суммы Уитни $\zeta_+^0\oplus\zeta_-^0$ и $\zeta_+^\infty\oplus\zeta_-^\infty$, что отображение $p\,|\,\zeta_+^0\colon\ \zeta_+^0\to\zeta_+^\infty$ невырождено при $|z|\geqslant 1$, а отображение $p\,|\,\zeta_-^0\colon\ \zeta_-^0\to\zeta_-^\infty$ невырождено при $|z|\leqslant 1$. Затем мы выведем отсюда, что расслоение $[\zeta,\ a(x)z+b(x)]$ изоморфно расслоению $[\zeta_+^0,\ z]\oplus[\zeta_-^0,\ 1]$.

Если $p(x,\ z)$ имеет вид $z+b(x)$, то слоем расслоения ζ_+ в точке x является сумма собственных подпространств отображения $b(x)$ для собственных значений λ с $|\lambda|<1$, а слоем

---

[1]) Здесь текст автора изменен. — *Прим ред*

расслоения ζ_- — сумма собственных подпространств отображения $b(x)$ для собственных значений λ с $|\lambda|>1$.

Приводимое ниже доказательство этих фактов принадлежит Дж. Адамсу. Автор весьма благодарен ему за разрешение изложить его здесь.

4.1. Обозначение. Для любой точки $x\in X$ каждый полиномиальный склеивающий автоморфизм $p(x, z)$ представляет собой при $|z|=1$ линейное невырожденное отображение. Следовательно, поскольку пространство X по условию компактно, существует такое $\varepsilon>0$, что для любого $x\in X$ линейное отображение $p(x, z)$ невырождено и при $1-\varepsilon\leqslant|z|\leqslant 1+\varepsilon$. В частности, это верно и для линейных склеивающих автоморфизмов $p(x, z)=a(x)z+b(x)$.

Любому такому автоморфизму $p(x, z)$ мы отнесем морфизмы p_0 и p_∞ расслоения ζ, положив для любой точки $x\in X$

$$p_0(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}(a(x)z+b(x))^{-1}a(x)\,dz$$

и

$$p_\infty(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}a(x)(a(x)z+b(x))^{-1}\,dz.$$

Ясно, что в этих формулах интегрирование можно производить вместо окружности $|z|=1$ по любой окружности $|z|=r$, где $1-\varepsilon<r<1+\varepsilon$.

4.2. Предложение. *Для всех $x\in X$ и всех $z\in S^1$ имеет место соотношение*

$$p(x, z)\,p_0(x)=p_\infty(x)\,p(x, z).$$

Кроме того, линейные отображения $p_0(x)$ и $p_\infty(x)$ являются проекторами, т. е. $p_0(x)p_0(x)=p_0(x)$ и $p_\infty(x)p_\infty(x)=p_\infty(x)$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что при $z\neq w$ имеют место тождества

$$\text{(R)}\quad (aw+b)^{-1}a(az+b)^{-1}=(az+b)^{-1}a(aw+b)^{-1}=\\ =\frac{(az+b)^{-1}}{w-z}+\frac{(aw+b)^{-1}}{z-w}.$$

Действительно,

$$\frac{(az+b)^{-1}}{w-z}+\frac{(aw+b)^{-1}}{z-w}=\\ =(aw+b)^{-1}\frac{aw+b}{w-z}(az+b)^{-1}+(aw+b)^{-1}\frac{az+b}{z-w}(az+b)^{-1}=\\ =(aw+b)^{-1}a(az+b)^{-1}.$$

Тем самым одно из тождеств (R) доказано. Другое следует из доказанного по соображениям симметрии.

Заметим, что первое из тождеств (R) очевидным образом справедливо и при $z = w$.

Умножая это тождество слева и справа на $(az + b)$ и интегрируя по w, мы немедленно получаем, что

$$(az + b)\, p_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} (az + b)(aw + b)^{-1} a\, dw = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} a (aw + b)^{-1} (az + b)\, dw = p_\infty (az + b),$$

т. е. что $p(x, z)\, p_0(x) = p_\infty(x)\, p(x, z)$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ — такое число, что для всех $x \in X$ линейное отображение $p(x, z)$ невырождено при $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$, и пусть $1 - \varepsilon < r_2 < r_1 < 1 + \varepsilon$. Используя тождества (R), мы получаем, что

$$p_0 p_0 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|z|=r_1} \int\limits_{|w|=r_2} (az + b)^{-1} a (aw + b)^{-1} a\, dz\, dw = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|z|=r_1} \int\limits_{|w|=r_2} \left[\frac{1}{w - z} (az + b)^{-1} a + \frac{1}{z - w} (aw + b)^{-1} a\right] dz\, dw = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r_2} (aw + b)^{-1} a\, dw = p_0,$$

ибо

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r_1} \frac{dz}{z - w} = 1, \quad \text{а} \quad \int\limits_{|w|=r_2} \frac{dw}{w - z} = 0$$

(так как по условию $r_2 < r_1$). Равенство $p_\infty p_\infty = p_\infty$ доказывается аналогично.

4.3. Замечание. Легко видеть, что морфизмы векторных расслоений p_0: $\zeta \to \zeta$ и p_∞: $\zeta \to \zeta$ имеют постоянный ранг (это общее свойство любых морфизмов, являющихся проекторами). Действительно, пусть $s_1, \ldots, s_n$ — локальные сечения расслоения ζ, обладающие тем свойством, что векторы $s_1(x), \ldots, s_r(x)$ составляют базис подпространства $\operatorname{Ker} p_0(x)$, а векторы $s_{r+1}(x), \ldots, s_n(x)$ — базис подпространства $\operatorname{Im} p_0$. Тогда для любой точки y, достаточно близкой к точке x, векторы $(1 - p_0(y))\, s_1(y), \ldots, (1 - p_0(y))\, s_r(y)$ будут составлять базис подпространства $\operatorname{Ker} p_0$, а векторы $p_0(y)\, s_{r+1}(y), \ldots, p_0(y)\, s_n(y)$ — базис подпространства $\operatorname{Im} p_0$. Следовательно, ранг морфизма p_0 постоянен.

4.4. Обозначения. В силу только что сделанного замечания определены векторные расслоения $\operatorname{Im} p_0$, $\operatorname{Im} p_\infty$, $\operatorname{Ker} p_0$ и $\operatorname{Ker} p_\infty$. Мы положим

$$\operatorname{Im} p_0 = \zeta_+^0, \quad \operatorname{Im} p_\infty = \zeta_+^\infty,$$
$$\operatorname{Ker} p_0 = \zeta_-^0, \quad \operatorname{Ker} p_\infty = \zeta_-^\infty.$$

Таким образом,

$$\zeta = \zeta_+^0 \oplus \zeta_-^0 = \zeta_+^\infty \oplus \xi_-^\infty.$$

Так как $p(x, z)\,p_0(x) = p_\infty(x)\,p(x, z)$, то автоморфизм p индуцирует для любого $z \in S^1$ некоторые морфизмы

$$p_+(-, z)\colon \zeta_+^0 \to \zeta_+^\infty,$$
$$p_-(-, z)\colon \zeta_-^0 \to \zeta_-^\infty,$$

линейно зависящие от z (и потому определенные для любого $z \in \mathbf{C}$).

4.5. Предложение. *Морфизм* $p_+(-, z)\colon \zeta_+^0 \to \zeta_+^\infty$ *является изоморфизмом при* $|z| \geqslant 1$, *а морфизм* $p_-(-, z)\colon \zeta_-^0 \to \zeta_-^\infty$ *является изоморфизмом при* $|z| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $x \in X$, и пусть v — такой вектор слоя ζ_x, что $(a(x)\,w + b(x))\,v = 0$, где w — некоторое комплексное число. Тогда имеем соотношение $(a(x)\,z + b(x))\,v = (z - w)\,a(x)\,v$, и потому $(a(x)\,z + b(x))^{-1}\,a(x)\,v = (z - w)^{-1}\,v$

для любого $z \neq w$, для которого линейное отображение $a(x)\,z + b(x)$ невырождено. В частности, если $|w| \neq 1$, то это тождество имеет место для любого z, для которого $|z| = 1$. Интегрируя его по окружности $|z| = 1$, мы, следовательно, получим, что

$$p_0(x)\,v = \begin{cases} v, & \text{если } |w| < 1, \\ 0, & \text{если } |w| > 1. \end{cases}$$

Таким обра о, если $|v| < 1$, то $v \in \zeta_+^0$ и потому $v \notin \zeta_-^0$. Поскольку $\operatorname{Ker} p_-(x, w) = \operatorname{Ker} p(x, w) \cap \zeta^0$, тем самым доказано, что при $|w| < 1$ (а значит, и при $|w| \leqslant 1$) линейное отображение $p_-(x, w)$ мономорфно (и, следовательно, изоморфно). Если $|w| > 1$, то $v \in \zeta_-^0$ и потому $v \notin \zeta_+^0$. Следовательно, при $|w| > 1$ (а значит, и при $|w| \geqslant 1$) линейное отображение $p_+(x, w)$ мономорфно (и, следовательно, изоморфно).

4.6. Предложение. *Расслоение* $[\zeta, p]$ *изоморфно расслоению* $[\zeta_+^0, z] \oplus [\zeta_-^0, 1]$.

Доказательство. Пусть $p_+(-, z) = a_+z + b_+$ и $p_-(-, z) = a_-z + b_-$. Из предложения 4.5 непосредственно следует, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $|z| = 1$ морфизмы $a_+z + tb_+ \colon \zeta_+^0 \to \zeta_+^\infty$ и $ta_-z + b_- \colon \zeta_-^0 \to \zeta_-^\infty$ являются изоморфизмами. Положим $p_+^t(-, z) = a_+z + tb_+$, $p_-^t(-, z) = ta_-z + b_-$ и $p^t = p_+^t \oplus p_-^t$. Согласно только что сказанному, p^t является при $0 \leqslant t \leqslant 1$ некоторым склеивающим автоморфизмом $\pi_0^*(\zeta) \to \pi_0^*(\zeta)$. Следовательно, расслоения $[\zeta, p^0]$ и $[\zeta, p^1]$ изоморфны. Но по определению $p^1 = p$ и $p(-, z) = a_+z \oplus b_-$. Поэтому $[\zeta, p^1] = [\zeta, p]$ и $[\zeta, p^0] = \left(\zeta_+^0 \bigcup_{a_+z} \zeta_+^\infty\right) \oplus \left(\zeta_-^0 \bigcup_{b_-} \zeta_-^\infty\right)$. С другой стороны, морфизмы $a_+ \colon \zeta_+^0 \to \zeta_+^\infty$ и $b_- \colon \zeta_-^0 \to \zeta_-^\infty$ являются, очевидно, изоморфизмами (ибо $a_+ = p_+^0(-, 1)$, а $b_- = p_-^0(-, 0)$), и, следовательно, расслоение $\zeta_+^0 \bigcup_{a_+z} \zeta_+^\infty$ изоморфно расслоению $[\zeta_+^0, z]$, а расслоение $\zeta_-^0 \cup \zeta_-^\infty$ — расслоению $[\zeta_-^0, 1]$. Таким образом, расслоение $[\zeta, p]$ изоморфно расслоению $[\zeta_+^0, z] \oplus [\zeta_-^0, 1]$.

4.7. Обозначения. Полученные результаты применимы, в частности, к линейным склеивающим автоморфизмам $L^n(p)$, отвечающим склеивающим полиномиальным автоморфизмам p степени $\leqslant n$. Подрасслоения ζ_+^0 и ζ_-^0 для соответствующего расслоения $L^n(\zeta) = (n+1)\zeta$ мы будем обозначать соответственно символами $L^n(\zeta, p)_+$ и $L^n(\zeta, p)_-$. Таким образом,

$$(*) \qquad L^n(\zeta) = L^n(\zeta, p)_+ \oplus L^n(\zeta, p)_-$$

и, согласно предложению 4.6, расслоение $[L^n(\zeta), L^n(p)]$ изоморфно расслоению

$$[L^n(\zeta, p)_+, z] \oplus [L^n(\zeta, p)_-, 1].$$

4.8. Предложение. *Для любого склеивающего полиномиального автоморфизма* p *степени* $\leqslant n$ *имеют место равенства*

$$L^{n+1}(\zeta, p)_+ = L^n(\zeta, p)_+, \qquad L^{n+1}(\zeta, p)_- = L^n(\zeta, p)_- \oplus \zeta,$$

$$L^{n+1}(\zeta, zp)_+ = L^n(\zeta, p)_+ \oplus \zeta, \qquad L^{n+1}(\zeta, zp)_- = L^n(\zeta, p)_-.$$

Доказательство. [1]) Ясно, что при гомотопии линейного связывающего автоморфизма p морфизмы p_0 и p_∞ не

---

[1]) Добавлено редактором перевода. — *Прим. ред.*

меняются. Поэтому эти морфизмы одинаковы для автоморфизма $L^{n+1}(p)$ и автоморфизма $L^n(p)\oplus 1$ (см. доказательство предложения 3.3). Обозначив подрасслоения ζ^0_+ и ζ^0_-, построенные для линейного связывающего автоморфизма p, символами $\zeta^0_{+,p}$ и $\zeta^0_{-,p}$, мы можем, следовательно, написать, что

$$L^{n+1}(\zeta)^0_{\pm,L^{n+1}(p)} = (L^n(\zeta)\oplus\zeta)^0_{\pm,L^n(p)\oplus 1}.$$

Но, как легко видеть, во-первых,

$$(L^n(\zeta)\oplus\zeta)^0_{\pm,L^n(p)\oplus 1} = L^n(\zeta)_{\pm,L^n(p)}\oplus\zeta^0_{\pm,1}$$

и, во-вторых,

$$\zeta^0_{+,1}=0,\quad \zeta^0_{-,1}=\zeta.$$

С другой стороны, по определению

$$L^{n+1}(\zeta)^0_{\pm,L^{n+1}(p)} = L^{n+1}(\zeta,p)_\pm,$$

$$L^n(\zeta)^0_{\pm,L^n(p)} = L^n(\zeta,p)_\pm.$$

Следовательно,

$$L^{n+1}(\zeta,p)_+ = L^n(\zeta,p)_+,\qquad L^{n+1}(\zeta,p)=L^n(\zeta,p)_-\oplus\zeta.$$

Вторая пара равенств доказывается аналогично (с использованием гомотопии, построенной при доказательстве предложения 3.4).

Добавление редактора перевода

Полученные результаты позволяют, в частности, полностью вычислить кольцо $K(S^2)$. Любое k-мерное векторное расслоение ξ над сферой S^2 имеет, очевидно, вид $[\theta^k, u]$, где θ^k — тривиальное k-мерное расслоение над одноточечным пространством, а u: $\pi^*(\theta^k)\to\pi^*(\theta^k)$ — некоторый склеивающий автоморфизм. Согласно предложению 2.4, мы можем без ограничения общности считать, что $u=z^{-n}p$, где $p=p(z)$ — некоторый многочлен степени $\leqslant 2n$. Тогда $[\theta^k, u]=[\theta^k, p]\otimes\eta^n$ (предложение 2.8), так что остается лишь исследовать расслоения вида $[\theta^k, p]$. Но, согласно предложению 3.2, любое такое расслоение стационарно эквивалентно расслоению $[L^{2n}(\theta^k), L^{2n}(p)]$ (ибо расслоения $[\theta^k, 1]$, очевидно, тривиальны). Поскольку $L^{2n}(\theta^k)=\theta^{2nk}$, тем самым все сводится к расслоениям вида $[\theta^k, p]$ с линейным склеивающим автоморфизмом p. Но, согласно предложению 4.6, любое такое расслоение изоморфно расслоению вида $[(\theta^k)^0_+, z]\oplus[(\theta^k)^0_-, 1]$. Поскольку любое расслоение над пространством, состоящим из одной точки, тривиально, это означает, что нам достаточно рассмотреть лишь расслоения вида $[\theta^k, z]$. Но ясно, что любое такое расслоение изоморфно расслоению $[\theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^1, z \oplus \ldots \oplus z]$, т. е. (см. предложение 9.7.4 и пример 2.6) расслоению $\gamma \oplus \ldots \oplus \gamma$.

Тем самым доказано, что любой элемент кольца $K(S^2)$ является многочленом от γ и η (и, конечно, класса 1 расслоения θ^1) и, следовательно, многочленом от 1, $\gamma-1$ и $\eta-1$. При этом $\gamma=\eta^{-1}$ и $\gamma^2-1=2\gamma-2$ (см. следствие 3.5 и теорему 8.3.8) и потому

$$(\gamma-1)^2=\gamma^2-2\gamma+1=0,$$
$$(\eta-1)^2=\gamma^{-2}(\gamma-1)^2=0,$$
$$(\eta-1)(\gamma-1)=-\gamma^{-1}(\gamma-1)^2=0,$$
$$(\eta-1)+(\gamma-1)=\gamma^{-1}(\gamma-1)^2=0.$$

Следовательно, любой элемент кольца $K(S^2)$ имеет вид

$$(*) \qquad k+l(\eta-1),$$

где k и l — целые числа. Но, согласно следствию 8.3.2, группа $K(S^2)=\mathbf{Z}\oplus\tilde{K}(S^2)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. Поэтому представление (*) единственно. Тем самым кольцо $K(S^2)$ полностью вычислено.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ПЕРИОДИЧНОСТИ

Теперь у нас уже все готово для построения морфизма ν: $K(X\times S^2)\to K(X)\otimes K(S^2)$, обратного к морфизму периодичности μ: $K(X)\otimes K(S^2)\to K(X\times S^2)$. Как и выше, элемент группы $K(X)$, определяемый векторным расслоением ξ, мы будем обозначать тем же символом ξ.

5.1. Обозначения. Пусть u — склеивающий автоморфизм для некоторого векторного расслоения ζ над X, и пусть $p_n(x, z)$ — такой склеивающий полиномиальный автоморфизм степени n, что склеивающий полином Лорана $z^{-n}p_n(x, z)$ гомотопен автоморфизму u (согласно предложению 2.5, для достаточно большого n такой автоморфизм непременно существует). Рассмотрим в группе $K(X)\otimes K(S^2)$ элемент $\nu_n(\zeta, u)$, определенный формулой

$$\nu_n(\zeta, u)=L^{2n}(\zeta, p_n)_+\otimes(\eta^{n-1}-\eta^n)+\zeta\otimes\eta^n.$$

Так как в кольце $K(S^2)$ имеет место равенство $(1-\eta)\eta=1-\eta$, то $\eta^{n-1}-\eta^n=1-\eta$. Таким образом,

$$\nu_n(\zeta, u)=L^{2n}(\zeta, p_n)_+\otimes(1-\eta)+\zeta\otimes\eta^n.$$

Ясно, что (при данном n) элемент $\nu_n(\zeta, u)$ не зависит от выбора автоморфизма p_n. Более того, оказывается, что этот элемент не зависит и от n.

5.2. Предложение. *Если для некоторого n элемент $\nu_n(\zeta, u)$ определен, то определен и элемент $\nu_{n+1}(\zeta, u)$, причем*

$$\nu_n(\zeta, u) = \nu_{n+1}(\zeta, u).$$

Доказательство. Многочлен Лорана $z^{-n}p_n$, гомотопный автоморфизму u, мы можем написать в виде $z^{-(n+1)}p_{n+1}$, где $p_{n+1} = zp_n$. Поэтому если элемент $\nu_n(\zeta, u)$ определен, то определен и элемент $\nu_{n+1}(\zeta, u)$. Кроме того, поскольку в кольце $K(X)$ имеют место соотношения

$$L^{2n+2}(\zeta, p_{n+1})_+ = L^{2n+2}(\zeta, zp_n)_+ = L^{2n+1}(\zeta, zp_n)_+ = L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \oplus \zeta$$

(см. предложение 4.8), то

$$\begin{aligned}\nu_{n+1}(\zeta, u) &= L^{2n+2}(\zeta, p_{n+1})_+ \otimes (\eta^n - \eta^{n+1}) + \zeta \otimes \eta^{n+1} = \\ &= L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \otimes (\eta^{n-1} - \eta^n) + \zeta \otimes (\eta^n - \eta^{n+1}) + \zeta \quad \eta^{n+1} = \\ &= L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \otimes (\eta^{n-1} - \eta^n) + \zeta \otimes \eta^n = \nu_n(\zeta, u).\end{aligned}$$

5.3. Замечания. Таким образом, вместо $\nu_n(\zeta, u)$ мы можем писать просто $\nu(\zeta, u)$. Пусть теперь u' — склеивающий автоморфизм, близкий к автоморфизму u, и пусть $p_n = z^n f_n$ и $q_n = z^n g_n$, где f_n — полином Лорана, аппроксимирующий автоморфизм u, а g_n — полином Лорана, аппроксимирующий автоморфизм u'. Ясно, что при u, достаточно близком к u' (и достаточно большом n), формула $p_n^t = tp_n + (1-t)q_n$ будет определять гомотопию склеивающих автоморфизмов, соединяющую автоморфизм p_n с автоморфизмом q_n, и потому будет иметь место равенство $\nu(\zeta, u) = \nu(\zeta, u')$. Но тогда это равенство будет выполняться и для любых гомотопных автоморфизмов u и u'. Этим доказано, что элемент $\nu(\zeta, u)$ зависит только от расслоения $\xi = [u, \zeta]$ и не зависит от выбора склеивающего автоморфизма u. Мы положим

$$\nu(\xi) = \nu(u, \zeta).$$

Легко видеть, что построенное таким образом отображение

$$\nu\colon \operatorname{Vect}(X \times S^2) \to K(X) \otimes K(S^2)$$

обладает тем свойством, что

$$\nu(\xi \oplus \xi') = \nu(\xi) + \nu(\xi').$$

Следовательно, отображение ν индуцирует некоторый вполне определенный гомоморфизм групп

$$\nu\colon K(X \times S^2) \to K(X) \otimes K(S^2).$$

Теперь мы уже в состоянии доказать теорему периодичности.

5.4. Теорема. *Внешнее K-умножение*

$$\mu\colon K(X) \otimes K(S^2) \to K(X \times S^2)$$

является изоморфизмом, обратным к которому служит морфизм ν.

Доказательство. Для доказательства равенства $\nu\mu = 1$ достаточно доказать, что для произвольного векторного расслоения ζ над X имеет место равенство $\nu\mu(\zeta \otimes 1) = \zeta \otimes 1$ и $\nu\mu(\zeta \otimes \eta) = \zeta \otimes \eta$ (см. выше описание группы $K(S^2)$). Так как $\mu(\zeta \otimes 1) = [\zeta, 1]$ (см. конец разд. 2), то

$$\nu\mu(\zeta \otimes 1) = \nu(\zeta, 1) = L^0(\zeta, 1)_+ \otimes (1 - \eta) + \zeta \otimes 1 = \zeta \otimes 1,$$

ибо, как легко видеть, $L^0(\zeta, 1)_+ = 0$. Аналогично

$$\mu(\zeta \otimes \eta) = [\zeta, z^{-1}]$$

и

$$\nu\mu(\zeta \otimes \eta) = \nu(\zeta, z^{-1}) = L^2(\zeta, 1)_+ \otimes (1 - \eta) + \zeta \otimes \eta = \zeta \otimes \eta,$$

ибо $L^2(\zeta, 1)_+ = L^0(\zeta, 1)_+ = 0$. Таким образом, $\nu\mu = 1$.

Заметим теперь, что, согласно предложению 4.6,

$$\text{(a)} \qquad [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, z] = [L^{2n}(\zeta), L^{2n}(p_n)] - [L^{2n}(\zeta, p_n)_-, 1],$$

а, согласно предложению 3.2,

$$\text{(b)} \qquad [L^{2n}(\zeta), L^{2n}(p_n)] = [\zeta, p_n(x, z)] + 2n[\zeta, 1].$$

Поэтому для расслоення

$$\nu(\xi) = \nu([\zeta, u]) = \nu([\zeta, z^{-n}p_n]) = L^{2n}(\zeta, p_n)_+ \otimes (\eta^{n-1} - \eta^n) + \zeta \otimes \eta^n$$

будет иметь место равенство (см. опять конец разд. 2)

$$\begin{aligned}
\mu\nu(\xi) &= [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, z^{1-n}] - [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, z^{-n}] + [\zeta, z^{-n}] = \\
&\qquad\qquad \text{(предложение 2.8)} \\
&= [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, z] \mathbin{\hat\otimes} \eta^n - [L^{2n}(\zeta, p_n)_+, 1] \mathbin{\hat\otimes} \eta^n + [\zeta, 1] \mathbin{\hat\otimes} \eta^n = \\
&\qquad\qquad \text{(соотношение (a))} \\
&= [L^{2n}(\zeta), L^{2n}(p_n)] \mathbin{\hat\otimes} \eta^n - [L^{2n}(\zeta, p_n)_- - \\
&\qquad - L^{2n}(\zeta, p_n)_+, 1] \mathbin{\hat\otimes} \eta^n + [\zeta, 1] \mathbin{\hat\otimes} \eta^n = \\
&\qquad\qquad \text{(соотношение (b) и формула (*) из п. 4.7)}
\end{aligned}$$

$$= [\zeta, p_n] \hat{\otimes} \eta^n + 2n[\zeta, 1] \hat{\otimes} \eta^n - [L^{2n}(\zeta), 1] \hat{\otimes} \eta^n + [\zeta, 1] \hat{\otimes} \eta^n =$$
$$= [\zeta, z^{-n}p_n] + (2n+1)[\zeta, 1] \hat{\otimes} \eta^n - (2n+1)[\zeta, 1] \otimes \eta^n =$$
(предложение 2.8 и определение расслоения $L^{2n}(\zeta)$)
$$= [\zeta, z^{-n}p_n] = \xi.$$

Таким образом, $\mu\nu = 1$. Тем самым теорема периодичности полностью доказана.

В качестве следствия этой теоремы вычислим кольцо $\tilde{K}(S^m)$.

5.5. Теорема. *Кольцо $\tilde{K}(S^{2n+1})$ равно нулю; кольцо $\tilde{K}(S^{2n})$ является по сложению бесконечной циклической группой, а произведение любых двух его элементов равно нулю.*

Естественное отображение

$$\underbrace{S^2 \times \ldots \times S^2}_{n \text{ раз}} \to S^{2n}$$

индуцирует морфизм

$$\tilde{K}(S^{2n}) \to \tilde{K}(S^2 \times \ldots \times S^2),$$

при котором образующая β_{2n} группы $\tilde{K}(S^{2n})$ переходит в произведение $a_1 \ldots a_n$, где $a_i = \{\zeta_i\} - 1$, а ζ_i — линейное расслоение над $S^2 \times \ldots \times S^2$, являющееся образом расслоения η при гомоморфизме $\tilde{K}$-групп, индуцированном проекцией на i-й множитель.

Доказательство. Так как $S^i \wedge S^2 = S^{i+2}$, а, согласно теореме периодичности для $\tilde{K}$-групп (теорема 1.3), умножение на элемент $\beta_2 = \eta - 1$ индуцирует аддитивный изоморфизм $\tilde{K}(S^i) \to \tilde{K}(S^i \wedge S^2)$, то группа $\tilde{K}(S^m)$ при нечетном m изоморфна группе $\tilde{K}(S^1) = 0$ (см. следствие 8.5.2), а при четном m — группе $\tilde{K}(S^0) = \mathbf{Z}$.

Поскольку $S^{2n} = S^2 \wedge \ldots \wedge S^2$, то, согласно предложению 9.3.4 (примененному $n-1$ раз), отображение $\tilde{K}(S^{2n}) \to \tilde{K}(S^2 \times \ldots \times S^2)$ мономорфно. Так как образ элемента β_{2n} при этом мономорфизме совпадает, очевидно, с образом внешнего $\tilde{K}$-произведения элементов β_{2n-2} и β_2 при мономорфизме $\tilde{K}(S^{2n-2} \times S^2) \to \tilde{K}(S^2 \times \ldots \times S^2)$, то очевидная индукция показывает, что этот образ равен $a_1 \ldots a_n$.

Накоиец, поскольку $(\eta - 1)^2 = 0$, то $(a_1 \ldots a_n)^2 = 0$ и потому $\beta_{2n}^2 = 0$. Следовательно, умножение в кольце $\tilde{K}(S^{2n})$ тривиально[1]).

5.6. Замечание. Изложенное доказательство теоремы периодичности принадлежит Атье и Ботту [1]. Они пришли к нему при исследовании краевых задач для комплексных эллиптических операторов. Весной 1966 г. при исследовании действительных эллиптических операторов Атья нашел аналогичное доказательство теоремы периодичности и для действительного случая.

Впервые доказательство теоремы периодичности было дано Боттом в работе [3] на основе чисто геометрических рассуждений. Немного позднее Дж. Мур доказал эту теорему, используя теорию гомологий, см. Мур [1].

[1]) Тривиальность умножения в кольце $\tilde{K}(S^{2n})$ вытекает также из замечаний, сделанных в добавлении редактора перевода к разд. 3 гл. 9, поскольку все элементы этого кольца, очевидно, аннулируются на $2n-1$-мерном остове сферы S^{2n} (состоящем из одной точки). — *Прим. ред.*

Глава 11

АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА

Векторные расслоения над сферами и проективными пространствами можно, в частности, строить методами теории квадратичных форм (алгебр Клиффорда). В этой главе мы изучаем общие свойства алгебр Клиффорда и полностью вычисляем алгебры Клиффорда, возникающие в топологии. Топологические приложения алгебр Клиффорда будут изложены в следующих главах. В этой главе мы ограничимся лишь их применением к задаче построения векторных полей на сферах. Кроме того, мы с помощью алгебр Клиффорда дадим одну конкретную интерпретацию группы $\mathrm{Spin}(n)$.

1. ЕДИНИЧНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА СФЕРАХ, I

В этом разделе рассматривается классическая проблема существования на сфере S^n одного единичного касательного векторного поля.

1.1. Предложение. *Если на сфере S^{n-1} существует k ортонормальных касательных векторных полей $v_1, \ldots, v_k$, то для любого $q>0$ на сфере S^{nq-1} также существует k ортонормальных векторных полей $v_1^*, \ldots, v_k^*$.*

Доказательство. Векторные поля v_i можно рассматривать как такие отображения v_i: $S^{n-1} \to \mathbf{R}^n$, что $(x \mid v_i(x))=0$ и $(v_i(x) \mid v_j(x))=\delta_{i,j}$, $x \in S^{n-1}$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant k$. С другой стороны, сферу S^{nq-1} можно представлять в виде соединения q сфер S^{n-1}, т. е. каждую точку $x \in S^{nq-1}$ можно записывать в виде

$$x=(\alpha(1)\, x(1), \ldots, \alpha(q)\, x(q)),$$

где $x(i) \in S^{n-1}$ и $\sum\limits_i \alpha(i)=1$, $\alpha(i) \geqslant 0$. Поэтому формула

$$v_i^*(\alpha(1)\, x(1), \ldots, \alpha(q)\, x(q))=\alpha(1)\, v_i(x(1))+\ldots+\alpha(q)\, v_i(x(q))$$

определяет некоторые отображения

$$v_i^*\colon S^{nq-1} \to \mathbf{R}^{nq}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $(x \mid v_i^*(x)) = 0$ и $(v_i^*(x) \mid v_j^*(x)) = \delta_{i,j}$, $1 \leqslant i$, $j \leqslant k$, $x \in S^{nq-1}$.

1.2. Следствие. *На каждой нечетномерной сфере S^{2q-1} существует единичное касательное векторное поле.*

Доказательство. Согласно предложению 1.1, достаточно показать, что единичное касательное векторное поле существует на окружности S^1. Пусть $v(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Ясно, что $(x \mid v(x)) = 0$ и $\|v(x)\| = 1$ для каждой точки $x = (x_1, x_2) \in S^1$. Следовательно, отображение v представляет собой единичное касательное поле на S^1. Геометрически оно является вращением на $\pi/2$. (См. также упр. 1 в конце главы.)

Рассмотрим теперь вопрос о существовании единичного касательного поля на четномерных сферах.

1.3. Предложение. *Если на сфере S^n существует единичное касательное поле $v(x)$, то антиподальное отображение $x \longmapsto -x$ этой сферы на себя гомотопно тождественному.*

Доказательство. Формула $h_t(x) = (\cos \pi t)\, x + (\sin \pi t)\, v(x)$ определяет гомотопию $h_t\colon S^n \to S^n$, для которой $h_0(x) = x$ и $h_1(x) = -x$. При этой гомотопии точка x движется по большому кругу, проходящему через точку x в направлении вектора $v(x)$.

Поскольку степень отображения $x \longmapsto -x$ сферы S^n на себя равна, как известно, $(-1)^{n+1}$, из предложения 1.3 непосредственно следует, что на четномерных сферах единичных касательных векторных полей не существует.

Резюмируя все доказанное, мы получаем следующую теорему:

1.4. Теорема. *Для сферы S^n следующие условия равносильны:*

(1) *Размерность n сферы S^n нечетна.*
(2) *Отображение $x \longmapsto -x$ имеет степень 1.*
(3) *Отображение $x \longmapsto -x$ гомотопно тождественному.*
(4) *На сфере S^n существует единичное касательное векторное поле.*

Равносильны, конечно, и отрицания этих условий:

(1) *Размерность n сферы S^n четна.*
(2) *Отображение $x \longmapsto -x$ имеет степень -1.*
(3) *Отображение $x \longmapsto -x$ не гомотопно тождественному.*
(4) *На сфере S^n не существует единичного касательного векторного поля.*

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ УМНОЖЕНИЯ

В этом разделе задача построения ортогональных векторных полей на сферах сводится к чисто алгебраической задаче о существовании ортогональных умножений.

2.1. Определение. Отображение $\mu\colon \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется *ортогональным умножением*, если μ билинейно и $\|\mu(y, x)\| = \|y\| \|x\|$ для любых точек $y \in \mathbf{R}^k$ и $x \in \mathbf{R}^n$.

При фиксированном $y \in S^{k-1} \subset \mathbf{R}^k$ отображение $x \mapsto \mu(y, x)$, а при фиксированном $x \in S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ отображение $y \to \mu(y, x)$ являются ортогональными линейными отображениями (изометриями), ибо они сохраняют скалярное произведение

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Ортогональное умножение μ называется *нормализованным*, если $\mu(e_k, x) = x$ для каждой точки $x \in \mathbf{R}^n$, где $e_k = (0, \ldots, 0, 1)$. Для любого ортогонального умножения μ отображение $\mu(y, u^{-1}(x))$, где $u(x) = \mu(e_k, x)$, является нормализованным ортогональным умножением.

2.2. Теорема. *Если существует ортогональное умножение $\mu\colon \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, то на сфере S^{n-1} существует $k-1$ ортонормальных векторных полей.*

Доказательство. Согласно сделанному выше замечанию, можно считать, что умножение μ нормализовано. Поскольку для каждой точки $x \in S^{n-1}$ векторы

$$\mu(e_1, x), \ \ldots, \ \mu(e_{k-1}, x), \ \mu(e_k, x) = x$$

ортонормальны, формула

$$v_i(x) = \mu(e_i, x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

определяет $k-1$ ортонормальных векторных полей на сфере S^{n-1}.

2.3. Замечание. Векторные поля v_i, построенные в теореме 2.2, обладают тем свойством, что $v_i(-x) = -v_i(x)$. Следовательно, поля $v_1(x), \ldots, v_{k-1}(x)$ определяют ортогональные векторные поля и на проективном пространстве RP^{n-1}.

Заметим, что обычное умножение на скаляр $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ задает некоторое ортогональное умножение $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$. Поэтому следствие 1.2 вытекает из теоремы 2.2.

Алгебраическое описание всех возможных ортогональных умножений дается следующей теоремой:

2.4. Теорема. *Множество всех нормализованных ортогональных умножений* μ: $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *находится в естественном биективном соответствии с множеством таких наборов* $u_1, \ldots, u_{k-1}$ *элементов группы* $O(n)$, *что* $u_i^2 = -1$ *и* $u_i u_j + u_j u_i = 0$ *при* $i \neq j$. *Это сооответствие определяется формулой*

$$u_i(x) = \mu(e_i, x).$$

Доказательство. Очевидно, что формула $u_i(x) = \mu(e_i, x)$ определяет биективное соответствие между множеством всех нормализованных билинейных отображений μ: $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и множеством всевозможных наборов $u_1, \ldots, u_{k-1}$ линейных отображений $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. При этом отображение μ тогда и только тогда будет ортогональным умножением (т. е. будет обладать тем свойством, что $\|\mu(y, x)\| = 1$ при $\|x\| = \|y\| = 1$), когда для любой точки $(a_1, \ldots, a_k) \in S^{k-1}$ линейное отображение $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i$ (где $u_k = 1$) принадлежит группе $O(n)$.

Напомним теперь, что линейное отображение v: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда ортогонально, когда $vv^* = 1$, где v^* — отображение, сопряженное с отображением v. Поэтому отображение μ тогда и только тогда является ортогональным умножением, когда для любой точки $(a_1, \ldots, a_k) \in S^{k-1}$ имеет место равенство

$$1 = \left(\sum_i a_i u_i\right)\left(\sum_j a_j u_j^*\right) =$$
$$= \sum_i a_i^2 u_i u_i^* + \sum_{i<j} a_i a_j (u_i u_j^* + u_j u_i^*).$$

Положив $(a_1, \ldots, a_k) = e_i$, мы немедленно получим отсюда, что $u_i u_i^* = 1$, если умножение μ ортогонально. Следовательно, для ортогонального умножения $u_i \in O(n)$ (что, впрочем, ясно и непосредственно). Поэтому если умножение μ ортогонально, то для любой точки $(a_1, \ldots, a_k) \in S^{k-1}$ должно иметь место равенство $\sum_{i<j} a_i a_j (u_i u_j^* + u_j u_i^*) = 0$, что возможно лишь тогда, когда $u_i u_j^* + u_j u_i^* = 0$ для всех $i < j$ и всех j. В частности, это равенство должно иметь место при $j = k$. Поскольку по условию $u_k = 1$, это означает, что $u_i = -u_i^* = -u_i^{-1}$, т. е. что $u_i^2 = -1$. Если теперь $i<j<k$, то $u_i u_j^* + u_j u_i^* = u_i(-u_j) + u_j(-u_i)$ и потому $u_i u_j + u_j u_i = 0$. Обратно, если $u_i^2 = -1$ при $i < k$ и, кроме того, $u_i \in O(n)$, то $u_i u_i^* = 1$ и $u_i u_j^* + u_j u_i^* = 0$ для всех $i < j$ и всех j, и потому умножение μ ортогонально.

Доказанная теорема, естественно, приводит к задаче изучения алгебр над полем $\mathbb{R}$, обладающих такой системой образующих $e_1, \ldots, e_k$, что $e_i^2 = -1$, $e_i e_j + e_j e_i = 0$ при $i \neq j$. Эти алгебры называются *алгебрами Клиффорда*. (Формально несколько более общее определение, пригодное для алгебр над произвольным основным кольцом, будет дано ниже.) Пользуясь языком теории представлений, можно теорему 2.4 сформулировать как утверждение о биективном соответствии между множеством всех нормализованных ортогональных умножений $\mu\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и множеством всех представлений алгебры Клиффорда с $k-1$ образующими в ортогональной группе $O(n)$.

2.5. Замечание. В соответствии с общим понятием модуля над алгеброй действительное линейное пространство M является ***модулем над алгеброй Клиффорда***, если заданы такие линейные преобразования $u_1, \ldots, u_{k-1}$, что

$$u_i^2 = -1 \quad \text{и} \quad u_i u_j + u_j u_i = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Таким образом, каждое нормализованное ортогональное умножение определяет пространство $\mathbb{R}^n$ как модуль над алгеброй Клиффорда. Оказывается, что таким способом получаются *все* модули над алгеброй Клиффорда, поскольку на любом таком модуле M существует скалярное произведение $(x \mid y)$, обладающее тем свойством, что $(u_i(x) \mid u_i(y)) = (x \mid y)$ для любых векторов $x, y \in M$ и любого i. Действительно, пусть Γ_{k-1} — подгруппа группы линейных преобразований пространства M, порожденная преобразованиями $\pm u_i$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Каждый элемент группы Γ_{k-1} имеет вид $\pm u_{i_1} \ldots u_{i_r}$, где $i_1 < \ldots < i_r$, и, следовательно, порядок этой группы не превосходит 2^k. Пусть теперь $\langle x \mid y \rangle$ — произвольное скалярное произведение на пространстве M. Мы определим новое скалярное произведение $(x \mid y)$, полагая $(x \mid y) = \sum_{\sigma \in \Gamma_{k-1}} \langle \sigma(x) \mid \sigma(y) \rangle$. Ясно, что $(\sigma(x) \mid \sigma(y)) = (x \mid y)$ для любого элемента $\sigma \in \Gamma_{k-1}$. В частности,

$$(u_i(x) \mid u_i(y)) = (x \mid y).$$

Таким образом,

если пространство $\mathbb{R}^n$ является модулем над алгеброй Клиффорда от $k-1$ образующих, то на сфере S^{n-1} существует $k-1$ ортонормальных векторных полей.

3. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые ниже R-модули M предполагаются *унитарными*, т. е. обладающими тем свойством, что $1x = x$ для любого элемента $x \in M$.

3.1. Определение. *Квадратичной формой* над кольцом R называется пара (M, f), состоящая из некоторого R-модуля M и симметрического билинейного функционала f на этом модуле, т. е. такого отображения $f\colon M \times M \to R$, что

$$(1)\qquad f(ax + a'x', y) = af(x, y) + a'f(x', y), \quad a, a' \in R,\ x, x', y \in M,$$

$$(2)\qquad f(x, by + b'y') = bf(x, y) + b'f(x, y'), \quad b, b' \in R,\ x, y, y' \in M,$$

$$(3)\qquad f(x, y) = f(y, x), \qquad x, y \in M.$$

Большая часть результатов этого раздела остается справедливой и для *кососимметрических форм*, получающихся при замене аксиомы (3) аксиомой $f(x, y) = -f(y, x)$, а также для *полуторалинейных форм* над полем $\mathbf{C}$, получающихся при замене аксиомы (3) аксиомой $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$, а аксиомы (2) аксиомой $f(x, by) = \bar{b}f(x, y)$, $x, y \in M$, $b \in \mathbf{C}$.

3.2. Замечание. Часто квадратичную форму определяют как пару (M, Q), где $Q\colon M \to R$ — такое отображение, что $Q(ax) = a^2Q(x)$ и функционал $f_Q(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ симметричен и билинеен. Если $1/2 \in R$, то оба определения квадратичной формы равносильны, ибо

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\left(f(x + y, x + y) - f(x, x) - f(y, y)\right).$$

Пусть $\langle x, u\rangle = u(x)$ — каноническое спаривание $M \times M^+ \to R$, где M^+ — двойственный к M модуль. *Корреляцией* квадратичной формы (M, f) называется такой (очевидно, однозначно определенный) гомоморфизм $c_f\colon M \to M^+$, что

$$\langle x, c_f(y)\rangle = f(x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in M.$$

(Для случая полуторалинейных форм за модуль M^+ следует принять модуль антилинейных функционалов.)

3.3. Определение. Квадратичная форма (M, f) называется *невырожденной*, если ее корреляция c_f является мономорфизмом, и *неособой* если ее корреляция c_f является изоморфизмом.

Квадратичная форма (M, f) тогда и только тогда невырождена, когда равенство $f(x, y)=0$ для всех $y \in M$ возможно лишь при $x=0$. Квадратичная форма (M, f) тогда и только тогда является неособой формой, когда для любого линейного функционала u: $M \to R$ существует один и только один элемент $y \in M$, обладающий тем свойством, что $u(x)=f(x, y)$ для всех $x \in M$. Если R — поле, то квадратичная форма тогда и только тогда невырождена, когда она является неособой формой.

Если модуль M имеет базис $e_1, \ldots, e_n$, то элементы $f(e_i, e_j)$ полностью определяют квадратичную форму (M, f). В самом деле, если $x=\sum x_i e_i$ и $y=\sum y_i e_i$, то

$$f(x, y)=f\left(\sum x_i e_i, \sum y_i e_i\right)=\sum_{i, j} f(e_i, e_j) x_i y_j.$$

При этом элементы $f(e_i, e_j)$ не удовлетворяют, вообще говоря, никаким соотношениям, кроме соотношения $f(e_i, e_j)=f(e_j, e_i)$, равносильного симметричности функционала f. Если R является областью целостности, то форма (M, f) тогда и только тогда невырождена, когда $\det[f(e_i, e_j)] \neq 0$, и тогда и только тогда является неособой формой, когда определитель $\det[f(e_i, e_j)]$ обратим в кольце R.

3.4. Примеры. На n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ имеются стандартные квадратичные формы $(x \mid y)$ и $-(x \mid y)$.

3.5. Пример. Для любой квадратичной формы (M, f) и любого подмодуля E модуля M пара (E, f_E), где $f_E=f \mid (E \times E)$, является квадратичной формой на E.

3.6. Определение. *Ортогональным разложением* $M=E_1 \perp \ldots \perp E_r$ *квадратичной формы* (M, f) называется такое разложение модуля M в прямую сумму $E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$ его подмодулей, что $f(x, y)=0$ для любых элементов $x \in E_i$ и $y \in E_j$, $i \neq j$.

Следующий общий результат о разложении квадратичных форм часто бывает полезен.

3.7. Предложение. *Пусть (M, f) — квадратичная форма и E — такой подмодуль модуля M, что квадратичная форма (E, f_E) является неособой. Тогда квадратичная форма (M, f) обладает ортогональным разложением вида $M=E \perp E^*$, где E^* — подмодуль модуля M, состоящий из всех элементов $y \in M$, для которых $f(x, y)=0$ при каждом $x \in E$. При этом если форма (M, f) неособая, то форма (E^*, f_{E^*}) также неособая.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что $M=E \oplus E^*$. Так как квадратичная форма (E, f_E) неособая, то равенство $f(E, y)=0$ для элемента $y \in E$ возможно только при $y=0$. Следовательно, $E \cap E^* = 0$. Далее для любого элемента $x \in M$ отображение $y \mapsto f(x, y)$, $y \in E$, является линейным функционалом на E, и потому существует такой элемент $x_1 \in E$, что для всех $y \in E$ имеет место равенство $f(x, y) = f(x_1, y)$, т. е. равенство $f(x - x_1, y) = 0$. Следовательно, элемент $x_2 = x - x_1$ принадлежит подмодулю E^*. Тем самым равенство $M = E \oplus E^*$ полностью доказано.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим произвольный линейный функционал $u: E^* \to R$. Нам нужно доказать, что существует такой элемент $y \in E^*$, что $f(x, y) = \langle x, u \rangle$ для любого $x \in E^*$. Продолжим с этой целью функционал u на весь модуль M, полагая $u(E) = 0$. Поскольку форма (M, f) неособая, существует такой однозначно определенный элемент $y \in M$, что $f(x, y) = \langle x, u \rangle$ для всех $x \in M$. При этом $f(x, y) = 0$, если $x \in E$. Следовательно, $y \in E^*$.

3.8. **Определение.** Квадратичная форма (M, f) называется *одномерной*, если $M = Re$. Такая форма однозначно определяется элементом $f(e, e)$. Она невырождена, если элемент $f(e, e)$ не является делителем нуля в кольце R, и является неособой формой, если элемент $f(e, e)$ обратим в кольце R.

3.9. **Теорема.** *Любая квадратичная форма (M, f) над полем R характеристики $\neq 2$ разлагается в ортогональную сумму одномерных форм, т. е. для нее существует ортогональное разложение $M = E_1 \perp \ldots \perp E_r$, все слагаемые E_i которого одномерны.*

Доказательство. Если существует такой элемент $x \neq 0$, что $f(x, y) = 0$ для любого $y \in M$, то $M = L \perp Rx$, где L — подпространство пространства M, дополнительное к x. Если такого x не существует, то форма (M, f) невырождена, и потому существует такой элемент x, что $f(x, x) \neq 0$. (В противном случае $f(x, y) = \frac{1}{2}(f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y)) = 0$ при всех $x, y \in M$, так что форма (M, f) была бы даже тождественно равна нулю.) Но если $f(x, x) \neq 0$, то форма (Rx, f_{Rx}) неособая и потому, согласно предложению 3.7, снова имеет место разложение $M = L \perp Rx$, где $L = (Rx)^*$. Применяя то же рассуждение к форме (L, f_L), мы после конечного числа шагов получим требуемое разложение.

В более привычных терминах теорема 3.9 утверждает, что в пространстве M существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что $f(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

При $R=\mathbf{C}$ мы можем e_i заменить на $e_i/f(e_i, e_i)^{1/2}$, если только $f(e_i, e_i)\neq 0$. Аналогично при $R=\mathbf{R}$ мы можем e_i заменить на $e_i/(-f(e_i, e_i))^{1/2}$, если $f(e_i, e_i)<0$, и на $e_i/f(e_i, e_i)^{1/2}$, если $f(e_i, e_i)>0$. В результате получается следующая теорема (хорошо известная из элемеитарного курса линейной алгебры):

3.10. Теорема. *Для каждой квадратичной формы* (M, f) *над полем* $\mathbf{C}$ *существует такой базис* $e_1, \ldots, e_n$ *пространства* M, *что* $f(x, y)=x_1y_1+\ldots+x_ry_r$, *где* $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$ *и* $y=y_1e_1+\ldots+y_ne_n$.

Аналогично для каждой квадратичной формы (M, f) *над полем* $\mathbf{R}$ *существует такой базис* $e_1, \ldots, e_n$ *пространства* M, *что*

$$f(x, y)=-x_1y_1-\ldots-x_ky_k+x_{k+1}y_{k+1}+\ldots+x_ry_r,$$

где k — *размерность наибольшего подпространства* E *пространства* M, *обладающего тем свойством, что* $f(x, x)<0$ *для любого отличного от нуля элемента* $x\in E$.

Целое число k называется *индексом* квадратичной формы (M, f).

4. АЛГЕБРА КЛИФФОРДА КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Для квадратичной формы (M, f) часто приходится рассматривать линейные отображения $u\colon M\to A$ модуля M в некоторую R-алгебру A, обладающие тем свойством, что $u(x)^2=f(x, x)1$. Алгебра Клиффорда является универсальным объектом по отношению к таким отображениям u.

4.1. Определение. *Алгеброй Клиффорда* квадратичной формы (M, f) называется пара $(C(f), \theta)$, где $C(f)$ — некоторая R-алгебра, а $\theta\colon M\to C(f)$ — некоторое линейное отображение, обладающее тем свойством, что $\theta(x)^2=f(x, x)1$ для любого элемента $x\in M$, и *универсальное* по отношению к этому свойству, т. е. такое, что для каждого линейного отображения $u\colon M\to A$ модуля M в некоторую R-алгебру A, обладающего тем свойством, что $u(x)^2=f(x, x)1$, существует один и только один гомоморфизм алгебр $u'\colon C(f)\to A$, для которого $u'\theta=u$, т. е., иными словами, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & C(f) \arrow[dr, "u'"] & \\ M \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rr, "u"] & & A \end{tikzcd}$$

4.2. Теорема. *Алгебра Клиффорда* $(C(f), \theta)$ *существует для каждой квадратичной формы* (M, f). *Для любых алгебр Клиффорда* $(C(f), \theta)$ *и* $(C(f)', \theta')$ *одной и той же квадратичной формы* (M, f)

существует один и только один изоморфизм алгебр u: $C(f) \to C(f)'$, *обладающий тем свойством, что* $\theta' = u\theta$.

Доказательство. Пусть $T(M) = \sum_{k \geqslant 0} T^k(M)$, где $T^k(M)$ — k-кратное тензорное произведение модуля M на себя. Очевидно, что $T(M)$ является R-алгеброй относительно тензорного умножения $\otimes$. Пусть $C(f)$ — факторалгебра алгебры $T(M)$ по идеалу, порожденному элементами вида $x \otimes x - f(x, x)\,1$, и пусть θ — композиция вложения $M = T^1(M) \subset T(M)$ и естественной проекции $T(M) \to C(f)$. Покажем, что пара $(C(f), \theta)$ является алгеброй Клиффорда квадратичной формы (M, f). Пусть u: $M \to A$ — произвольное линейное отображение R-модуля M в некоторую R-алгебру A, обладающее тем свойством, что $u(x)^2 = f(x, x)\,1$. Поскольку это отображение линейно, его можно разложить в композицию $M \to T(M) \xrightarrow{u''} A$. Поскольку $u(x)^2 = f(x, x)\,1$, отображение u'' индуцирует некоторое отображение u': $C(f) \to A$, причем отображение u будет тогда композицией $M \xrightarrow{\theta} C(f) \xrightarrow{u'} A$. При этом отображение u', обладающее этим свойством, определено однозначно, потому что подмодуль $\operatorname{Im} \theta$ порождает всю алгебру $C(f)$.

Пусть теперь $(C(f), \theta)$ и $(C(f)', \theta')$ — две алгебры Клиффорда квадратичной формы (M, f). В силу свойства универсальности существуют такие гомоморфизмы алгебр u: $C(f) \to C(f)'$ и v: $C(f)' \to C(f)$, что $\theta' = u\theta$ и $\theta = v\theta'$, и потому $\theta = vu\theta$ и $\theta' = uv\theta'$. Следовательно, гомоморфизмы vu и uv являются гомоморфизмами u' для тождественного гомоморфизма 1. Поскольку гомоморфизм u' определен однозначно, это возможно лишь при $vu = 1$ и $uv = 1$. Следовательно, гомоморфизмы u и v являются изоморфизмами.

4.3. $\mathbf{Z}_2$-градуировка алгебры $C(f)$. Согласно свойству универсальности, примененному к морфизму $-\theta$: $M \to C(f)$, существует такой (очевидно, инволютивный) автоморфизм β: $C(f) \to C(f)$ алгебры $C(f)$, что $\beta\theta(x) = -\theta x$ для любого элемента $x \in M$. Как правило, элемент $\beta(x)$, $x \in C(f)$, мы будем обозначать символом $\bar{x}$. Подалгебру алгебры $C(f)$, состоящую из элементов $x \in C(f)$, для которых $\bar{x} = x$, мы будем обозначать символом $C(f)^0$, а подмодуль, состоящий из элементов x, для которых $\bar{x} = -x$, — символом $C(f)^1$. Подалгебра $C(f)^0$ является образом в $C(f)$ подалгебры $\sum_{k \geqslant 0} T^{2k}(M)$ тензорной алгебры $T(M)$, а подмодуль $C(f)^1$ — образом подмодуля $\sum_{k \geqslant 0} T^{2k+1}(M)$. Следовательно, имеет место **разложение $C(f) = C(f)^0 \oplus C(f)^1$, являющееся, очевидно, $\mathbf{Z}_2$-градуировкой (см. следующий пункт).**

4.4. $\mathbf{Z}_2$-градуированные алгебры. Алгебра A называется *$\mathbf{Z}_2$-градуированной*, если $A = A^0 \oplus A^1$, причем $A^i A^j \subset A^{i+j}$ для любых $i, j \in \mathbf{Z}_2$. Элементы слагаемого A^i называются при этом *однородными элементами степени i*. *Гомоморфизмом* $\mathbf{Z}_2$-градуированиых алгебр A и B называется такой гомоморфизм алгебр $f: A \to B$, что $f(A^i) \subset B^i$ для любого $i \in \mathbf{Z}_2$. *Тензорным произведением* двух $\mathbf{Z}_2$-градуированных алгебр A и B называется их тензорное произведение $A \otimes B$ как модулей, снабженное градуировкой, определенной формулами

$$(A \otimes B)^0 = (A^0 \otimes B^0) \oplus (A^1 \otimes B^1),$$
$$(A \otimes B)^1 = (A^1 \otimes B^0) \oplus (A^0 \otimes B^1)$$

и умножением, определенным формулой

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = (-1)^{ij}(xx') \otimes (yy'), \quad x' \in A^i, \quad y \in B^j.$$

Однородные элементы $x \in A^i$ и $y \in A^j$ $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгебры A называются *кососоммутирующими*, если $xy = (-1)^{ij} yx$. Неоднородные элементы $x, y \in A$ называются *кососоммутирующими*, если кососоммутируют их однородные компоненты. Если любые элементы $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгебры A кососоммутируют, то алгебра называется *кососоммутативной*[1]).

4.5. Пример. Пусть (M, f) и (N, g) — квадратичные формы. Каждый гомоморфизм модулей $u: M \to N$, для которого $f(x, x') = g(u(x), u(x'))$ при всех $x, x' \in M$, очевидным образом определяет некоторый гомоморфизм $\mathbf{Z}_2$-градуированных алгебр

$$C(u): C(f) \to C(g).$$

4.6. Предложение. *Пусть $f: A \to C$ и $g: B \to C$ — такие гомоморфизмы $\mathbf{Z}_2$-градуированных алгебр, что для любых элементов $x \in A$, $y \in B$ элемент $f(x)$ кососоммутирует с элементом $g(y)$. Тогда $h: A \otimes B \to C$, определенное формулой $h(x \otimes y) = f(x) g(y)$, является гомоморфизмом $\mathbf{Z}_2$-градуированных алгебр.*

Доказательство. Так как соответствие $(x, y) \to f(x) g(y)$ определяет билинейное отображение $A \times B \to C$, то h является гомоморфизмом $\mathbf{Z}_2$-градуированных модулей. Далее, для любых элементов $x \otimes y_i \in A \otimes B^i$ и $x_j \otimes y \in A^j \otimes B$ имеет место равенство

$$h((x \otimes y_i)(x_j \otimes y)) = (-1)^{ij} h((xx_j) \otimes (y_i y)) =$$
$$= (-1)^{ij} f(x) f(x_j) g(y_i) g(y) = f(x) g(y_i) f(x_j) g(y) =$$
$$= h(x \otimes y_i) h(x_j \otimes y).$$

---

[1]) Заметим, что алгебра $C(f)$ не кососоммутативна. — *Прим. ред.*

Следовательно, гомоморфизм h является гомоморфизмсм алгебр.

Пусть (M, f) — квадратичная форма, допускающая ортогональное разложеиие $M = E_1 \perp E_2$, и пусть $(C(f_i), \theta_i)$ — алгебра Клифморда формы (E_i, f_i), где $f_i = f_{E_i}$, $i = 1, 2$. Определим гомоморфизм модулей $\varphi\colon M \to C(f_1) \otimes C(f_2)$, полагая $\varphi(x_1, x_2) = (\theta_1(x_1) \otimes 1) + (1 \otimes \theta_2(x_2))$. Так как

$$\varphi(x_1, x_2)^2 = \theta_1(x_1)^2 \otimes 1 + \theta_1(x_1) \otimes \theta_2(x_2) - \\ - \theta_1(x_1) \otimes \theta_2(x_2) + 1 \otimes \theta_2(x_2)^2 = \theta_1(x_1)^2 \otimes 1 + 1 \otimes \theta_2(x_2)^2 = \\ = f_1(x_1, x_1)\,1 + f_2(x_2, x_2)\,1 = f((x_1, x_2), (x_1, x_2))\,1,$$

то существует такой гомоморфизм алгебр $u\colon C(f) \to C(f_1) \otimes C(f_2)$, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} & C(f) \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\varphi"'] & C(f_1) \otimes C(f_2) \end{tikzcd}$$

4.7. Теорема. *Построенный гомоморфизм u является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $q_i\colon E_i \to M$ — гомоморфизмы вложения, определенные формулами $q_1(x_1) = (x_1, 0)$ и $q_2(x_2) = (0, x_2)$, и пусть $C(q_i)\colon C(f_i) \to C(f)$, $i = 1, 2$, — соответствующие гомоморфизмы $\mathbf{Z}_2$-градуированных алгебр Клиффорда. Если элементы $z, z' \in M$ обладают тем свойством, что $f(z, z') = 0$, то $(\theta(z) + \theta(z'))^2 = f(z + z', z + z') = f(z, z) + f(z', z') = \theta(z)^2 + \theta(z')^2$ и потому $\theta(z)\theta(z') + \theta(z')\theta(z) = 0$. Следовательно, для любых элементов $y_i \in E_i$, $i = 1, 2$, имеет место равенство $C(q_1)(x_1)\,C(q_2)(x_2) = -C(q_2)(x_2)\,C(q_1)(x_1)$, где $x_i = \theta_i(y_i)$. Поскольку подмодуль $\operatorname{Im}\theta_1$ порождает алгебру $C(f_1)$, а подмодуль $\operatorname{Im}\theta_2$ — алгебру $C(f_2)$, это означает, что для гомоморфизмов $C(q_1)$ и $C(q_2)$ выполнены условия предложения 4.6. Следовательно, формула

$$v(x_1 \otimes x_2) = C(q_1)(x_1)\,C(q_2)(x_2)$$

определяет некоторый гомоморфизм $\mathbf{Z}_2$-градуированных алгебр $v\colon C(f_1) \otimes C(f_2) \to C(f)$.

Рассмотрим теперь в алгебре $C(f)$ элементы вида $\theta(x_1, 0) = C(q_1)\,\theta_1(x_1)$ и $\theta(0, x_2) = C(q_2)\,\theta_2(x_2)$.

По определению

$$v u \theta(x_1, 0) = v \varphi(x_1, 0) = v(\theta_1(x_1) \otimes 1) = \theta(x_1, 0)$$

и аналогично $v u \theta(0, x_2) = \theta(0, x_2)$. С другой стороны, ясно, что элементы $\theta(x_1, 0)$ и $\theta(0, x_2)$ порождают алгебру $C(f)$. Следовательно, $vu = 1$. Аналогично элементы вида $\theta_1(x_1) \otimes 1$ и $1 \otimes \theta_2(x_2)$ порождают тензорное произведение $C(f_1) \otimes C(f_2)$ и удовлетворяют соотношениям

$$uv(\theta_1(x_1) \otimes 1) = u\theta(x_1, 0) = \varphi(x_1, 0) = \theta_1(x_1) \otimes 1$$

и

$$uv(1 \otimes \theta_2(x_2)) = u\theta(0, x_2) = \varphi(0, x_2) = 1 \otimes \theta_2(x_2).$$

Следовательно, $uv = 1$ и потому u и v являются взаимно обратными изоморфизмами.

4.8. Следствие. *Если квадратичная форма (M, f) разлагается в ортогональную сумму форм $(E_1, f_1), \ldots, (E_r, f_r)$, то алгебра $C(f)$ изоморфна тензорному произведению $C(f_1) \otimes \ldots \otimes C(f_r)$, причем существует такой изоморфизм u: $C(f) \to C(f_1) \otimes \ldots \otimes C(f_r)$, что*

$$u(\theta(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0)) = 1 \otimes \ldots \otimes \theta_j(x_j) \otimes \ldots \otimes 1.$$

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 4.7 индукцией по r.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

5.1. Предложение. *Если квадратичная форма (M, f) одномерна (т. е. $M = Re$), то $C(f) = R1 \oplus Re$ и $e^2 = a$, где $a = f(e, e)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что при $M = Re$ тензорная алгебра $T(M)$ является свободной алгеброй, порожденной элементом e, а алгебра $C(f)$ является ее факторалгеброй по идеалу, порожденному злементом $e \otimes e - a1$.

Можно, впрочем, и непосредственно без труда проверить, что для алгебры $R1 \oplus Re$, где $e^2 = a$, выполнено свойство универсальности.

Заметим, что $\dim_R C(f) = 2$ и $C(f)^0 = R1$, $C(f)^1 = Re$.

5.2. Теорема. *Пусть (M, f) — такая квадратичная форма, что модуль M обладает базисом $e_1, \ldots, e_r$, для которого $f(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Тогда алгебра Клиффорда $C(f)$ порождена r образующими $e_1, \ldots, e_r$, подчиненными соотношениям $e_i^2 = a_i$ и $e_i e_j + e_j e_i = 0$ при $i \neq j$, где $a_i = f(e_i, e_i)$. Базис алгебры $C(f)$ состоит из единицы и всех элементов вида $e_{i_1} \ldots e_{i_s}$, где $i_1 < \ldots < i_s$ и $1 \leqslant s \leqslant r$. Следовательно, размерность алгебры $C(f)$ равна 2^r.*

Доказательство. Тот факт, что алгебра $C(f)$ имеет r образующих, подчиненных соотношениям $e_i^2 = a_i$, очевиден. Так как $f(e_i, e_j) = 0$, то $f(e_i + e_j, e_i + e_j) = f(e_i, e_i) + f(e_j, e_j)$, откуда непосредственно следует, что $e_i e_j + e_j e_i = 0$ в алгебре $C(f)$. Рассмотрим теперь изоморфизм $u\colon C(f) \to C(f_1) \otimes \ldots \otimes C(f_r)$. По определению $u\left(e_{i_1} \ldots e_{i_s}\right) = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$, где $x_i = e_{i_j}$ при $i = i_j$ и $x_i = 1$ при $i \neq i_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Но из предложения 5.1 непосредственно вытекает, что элементы $u\left(e_{i_1} \ldots e_{i_s}\right)$, $i_1 < \ldots < i_s$, $1 \leqslant s \leqslant r$, вместе с единицей 1 составляют базис алгебры $C(f_1) \otimes \ldots \otimes C(f_r)$. Поэтому элементы $e_{i_1} \ldots e_{i_s}$ вместе с единицей 1 составляют базис алгебры $C(f)$. Тем самым теорема 5.2 полностью доказана.

Пусть символы $\underset{\mathbf{R}}{\otimes}$ и $\underset{\mathbf{C}}{\otimes}$ обозначают обычное тензорное умножение над полями $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ соответственно, а символ $F(n)$ — алгебру матриц порядка n над телом $F = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$.

5.3. Обозначения. В дальнейшем особую роль будут играть действительные алгебры Клиффорда

$$C_k = C(-(x \mid y)) \quad \text{и} \quad C'_k = C((x \mid y)),$$

где $-(x \mid y)$ и $(x \mid y)$ — стандартные билинейные формы на пространстве $\mathbf{R}^k$. Эти алгебры имеют одну и ту же комплексификацию $C_k^c = C_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} = C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$, являющуюся комплексной алгеброй Клиффорда $C(-(z \mid w)) = C((z \mid w))$, где $(z \mid w)$ — стандартная билинейная (неэрмитова) форма на $\mathbf{C}^k$.

Следующее предложение является первым шагом к вычислению алгебр C_k, C'_k и C_k^c.

5.4. Предложение. *Имеют место следующие изоморфизмы алгебр над полем* $\mathbf{R}$:

$$C_1 \approx \mathbf{C}, \quad C_2 \approx \mathbf{H}, \quad C'_1 \approx \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}, \quad C'_2 \approx \mathbf{R}(2).$$

Аналогично над полем $\mathbf{C}$:

$$C_1^c \approx \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}, \quad C_2^c \approx \mathbf{C}(2).$$

Доказательство. Согласно предложению 5.1, $C_1 = \mathbf{R}1 \oplus \mathbf{R}e$, где $e^2 = -1$. Следовательно, $C_1 \approx \mathbf{C}$. Далее, согласно теореме 5.2, $C_2 = \mathbf{R}1 \oplus \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e_2 \oplus \mathbf{R}e_1 e_2$, где $e_1^2 = e_2^2 = -1$ и $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$. Следовательно, соответствия $1 \longmapsto 1$, $e_1 \longmapsto i$, $e_2 \longmapsto j$ и $e_1 e_2 \longmapsto k$ определяют изоморфизм $\mathbf{R}$-алгебр $C_2 \approx \mathbf{H}$.

Аналогично $C_1' = \mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}e$, где $e^2 = 1$. Следовательно, соответствия $1 \mapsto (1, 1)$, $e \mapsto (1, -1)$ задают изоморфизм $C_1' \approx \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$. Точно так же $C_2' = \mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e_2 + \mathbf{R}e_1e_2$, причем $e_1^2 = e_2^2 = 1$ и $e_1e_2 = -e_2e_1$. Следовательно, соответствия

$$e_1 \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

задают изоморфизм $C_2' \approx \mathbf{R}(2)$.

Изоморфизмы для алгебр C_1^c и C_2^c следуют из доказанных изоморфизмов в силу общих соотношений $F \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}(n) = F(n)$ и $F \otimes_{\mathbf{R}} (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}) = F \oplus F$, где $F = \mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$.

Для дальнейшего вычисления алгебр C_k и C_k' нам будет нужно следующее

5.5. Предложение. *Имеют место изоморфизмы*

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \approx \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{H} \approx \mathbf{C}(2), \quad \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{H} \approx \mathbf{R}(4).$$

Доказательство. Первые два изоморфизма немедленно следуют в силу предложения 5.4 из соотношения $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} C_k \approx \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} C_k'$, $k = 1, 2$. Для доказательства третьего изоморфизма рассмотрим гомоморфизм алгебр w: $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{H} \to \mathbf{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{H}) = \mathbf{R}(4)$, определенный формулой $[w(x_1 \otimes x_2)]x = x_1 x \bar{x}_2$. Ясно, что $w(i \otimes i)1 = 1$, $w(i \otimes i)i = i$, $w(i \otimes i)j = -j$, $w(i \otimes i)k = -k$ и аналогично для $w(k \otimes k)$ и $w(j \otimes j)$. Точно так же $w(i \otimes j)1 = k$, $w(i \otimes j)i = j$, $w(i \otimes j)j = i$, $w(i \otimes j)k = -1$ и аналогично для $w(j \otimes k)$ и $w(i \otimes k)$. Кроме того, $w(1 \otimes 1) = 1$. Отсюда легко следует, что, комбинируя с различными знаками элементы $1 \otimes 1$, $i \otimes j$, $j \otimes k$ и $i \otimes k$, мы можем получить в образе гомоморфизма w любую матрицу, имеющую только один отличный от нуля элемент. (Например, матрица $w(1 \otimes 1 + i \otimes i + j \otimes j + k \otimes k)$ имеет отличный от нуля элемент, а именно элемент 4 в левом верхнем углу, тогда как все остальные ее элементы равны нулю.) Поскольку такие матрицы порождают всю алгебру $\mathbf{R}(4)$, то гомоморфизм w является эпиморфизмом, а следовательно (по „размерностным соображениям“), и изоморфизмом.

Основой вычисления алгебр C_k и C_k' является следующая теорема периодичности:

5.6. Теорема. *Имеют место изоморфизмы алгебр*

$$C_{k+2} \approx C_k' \otimes_{\mathbf{R}} C_2, \quad C_{k+2}' \approx C_k \otimes_{\mathbf{R}} C_2'.$$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — образующие алгебры C_k, а $e'_1, \ldots, e'_k$ — образующие алгебры C'_k. Определим линейное отображение u': $\mathbf{R}^{k+2} \to C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C_2$, полагая $u'(e_i) = 1 \otimes e_i$ при $1 \leqslant i \leqslant 2$ и $u'(e_i) = e'_{i-2} \otimes e_1e_2$ при $3 \leqslant i \leqslant k+2$. Поскольку $u'(e_i)^2 = (1 \otimes e_i)(1 \otimes e_i) = 1 \otimes e_i^2 = -1$ при $i \leqslant 2$ и $u'(e_i)^2 = e'^2_{i-2} \otimes e_1e_2e_1e_2 = 1 \otimes (-1) = -1$ при $i \geqslant 3$, отображение u' продолжается [1]) до некоторого гомоморфизма алгебр u: $C_{k+2} \to C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C_2$. Легко видеть, что гомоморфизм u переводит различные элементы базиса алгебры C_{k+2} в различные элементы базиса алгебры $C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C_2$. Поэтому этот гомоморфизм является мономорфизмом и, следовательно (по „размерностным соображениям"), изоморфизмом.

Аналогично показывается, что соотношения $v(e'_i) = 1 \otimes e'_i$ при $1 \leqslant i \leqslant 2$ и $v(e'_i) = e_{i-2} \otimes e'_1e'_2$ при $3 \leqslant i \leqslant k+2$ определяют некоторый изоморфизм v: $C'_{k+2} \to C_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C'_2$.

5.7. Следствие. *Имеют место изоморфизмы*

$$C_{k+4} \approx C_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{H}(2), \quad C'_{k+4} \approx C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{H}(2).$$

Доказательство. Согласно предложению 5.4, $C_2 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C'_2 \approx \mathbf{H} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{R}(2) \approx \mathbf{H}(2)$. Поэтому, согласно теореме 5.6,

$$C_{k+4} \approx C'_{k+2} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C_2 \approx C_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} (C'_2 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C_2) \approx C_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{H}(2)$$

и аналогично $C'_{k+4} \approx C_{k+2} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C'_2 \approx C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{H}(2)$.

5.8. Следствие. *Имеют место изоморфизмы*

$$C_{k+8} \approx C_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{R}(16), \quad C'_{k+8} \approx C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{R}(16).$$

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 5.7, поскольку

$$\mathbf{H}(2) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{H}(2) = \mathbf{H} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{H} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{R}(2) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{R}(2) \approx \mathbf{R}(4) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{R}(4) \approx \mathbf{R}(16).$$

5.9. Следствие. *Имеет место изоморфизм*

$$C^c_{k+2} \approx C^c_k \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathbf{C}(2).$$

---

[1]) Строго говоря, для этого нужно еще проверить, что $u'(e_i)u'(e_j) + u'(e_j)u'(e_i) = 0$ при $i \neq j$. — *Прим. ред.*

Доказательство. Согласно теореме 5.6,

$$C_{k+2}^c = C_{k+2} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} \approx C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C_2 = (C'_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}) \underset{\mathbf{C}}{\otimes} (C_2 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}) = C_k^c \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathbf{C}(2).$$

Из этих результатов непосредственно вытекает следующая

5.10. Таблица алгебр Клиффорда

k	C_k	C'_k	C_k^c
1	$\mathbf{C}$	$\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$	$\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$
2	$\mathbf{H}$	$\mathbf{R}(2)$	$\mathbf{C}(2)$
3	$\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$	$\mathbf{C}(2)$	$\mathbf{C}(2) \oplus \mathbf{C}(2)$
4	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{C}(4)$
5	$\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{H}(2) \oplus \mathbf{H}(2)$	$\mathbf{C}(4) \oplus \mathbf{C}(4)$
6	$\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{H}(4)$	$\mathbf{C}(8)$
7	$\mathbf{R}(8) \oplus \mathbf{R}(8)$	$\mathbf{C}(8)$	$\mathbf{C}(8) \oplus \mathbf{C}(8)$
8	$\mathbf{R}(16)$	$\mathbf{R}(16)$	$\mathbf{C}(16)$

6. МОДУЛИ КЛИФФОРДА

6.1. Определение. $\mathbf{Z}_2$-*градуированным модулем* над $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгеброй A называется R-модуль M, разложенный в такую прямую сумму $M = M^0 \oplus M^1$, что $A^i M^j \subset M^{i+j}$ для любых $i, j \in \mathbf{Z}_2$; $\mathbf{Z}_2$-градуированный модуль над алгеброй Клиффорда $C(f)$ называется *модулем Клиффорда*.

В основном нас будут интересовать модули Клиффорда над алгебрами C_k и C_k^c.

В следующих двух предложениях мы сводим изучение модулей Клиффорда над этими алгебрами к изучению обычных (не градуированных) модулей.

6.2. Предложение. *Для любой квадратичной формы (M, f) над полем R характеристики $\neq 2$ гомоморфизм φ подмодуля $C(f)^1$ алгебры $C(f)$ в подалгебру $C(-xy \oplus f)^0$ алгебры $C(-xy \oplus f) = C(-xy) \otimes C(f)$, определенный формулой*

$$\varphi(x) = e_0 \otimes x, \quad x \in C(f)^1.$$

где e_0 — стандартная образующая алгебры $C(-xy)$ (т. е. образующая, для которой $e_0^2 = -1$), единственным образом продолжается до (неградуированного) изоморфизма алгебр $\varphi\colon C(f) \to C(-xy \oplus f)^0$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства M, обладающий тем свойством, что $f(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Так как

$$\varphi(e_i)^2 = (e_0 \otimes e_i)(e_0 \otimes e_i) = -e_0^2 \otimes e_i^2 = e_i^2$$

здесь мы пользуемся отождествлением $C(f) = 1 \otimes C(f)$), то гомоморфизм φ продолжается (очевидно, единственным образом) до гомоморфизма алгебр. Поскольку различные элементы базиса алгебры $C(f)$ гомоморфизм φ переводит в различные элементы базиса алгебры $C(-xy \oplus f)^0$, этот гомоморфизм является мономорфизмом. Но так как $\dim C(-xy \oplus f)^0 = \dim C(f)$, то φ является и изоморфизмом.

В случае алгебр C_k изоморфизм φ: $C_{k-1} \to C_k^0$ в явном виде задается, очевидно, формулой

$$\varphi(x_0 + x_1) = x_0 + e_k x_1, \qquad x_0 + x_1 \in C_{k-1}^0 \oplus C_{k-1}^1.$$

В этом случае можно непосредственно доказать предложение 6.2, заметив, что отображение φ, определяемое этой формулой, очевидным образом является линейным изоморфизмом и что

$$\begin{aligned}\varphi(x_0 + x_1)\varphi(y_0 + y_1) &= (x_0 + e_k x_1)(y_0 + e_k y_1) = \\ &= x_0 y_0 + e_k x_1 e_k y_1 + e_k(x_1 y_0 + x_0 y_1) = \\ &= (x_0 y_0 + x_1 y_1) + e_k(x_1 y_0 + x_0 y_1) = \varphi((x_0 + x_1)(y_0 + y_1)).\end{aligned}$$

Для произвольной $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгебры A символом $M(A)$ мы будем обозначать свободную абелеву группу, порожденную *неприводимыми* (т. е. не имеющих собственных подмодулей) $\mathbf{Z}_2$-градуированными A-модулями, а символом $N(A)$ — свободную абелеву группу, порожденную неприводимыми (обычными) A-модулями.

6.3. Предложение. *Для любой квадратичной формы* (M, f) *функтор* R, *сопоставляющий каждому градуированному модулю* $M = M^0 + M'$ *над* $C(f)$ *модуль* M^0 *над* $C(f)^0$, *индуцирует изоморфизм групп*

$$M(C(f)) \approx N(C(f)^0).$$

Доказательство. Пусть S — функтор, сопоставляющий каждому $C(f)^0$-модулю L градуированный $C(f)$-модуль $C(f) \underset{C(f)^0}{\otimes} L$. Ясно, что естественное отображение $C(f) \underset{C(f)^0}{\otimes} M^0 \to M$ задает изоморфизм функторов $SR \to 1$, а естественное отображение $L \to 1 \otimes L$ — изоморфизм функторов $1 \to RS$. Предложение 6.3 следует отсюда очевидным образом.

Положим $M_k = M(C_k)$, $M_k^c = M(C_k^c)$, $N_k = N(C_k)$ и $N_k^c = N(C_k^c)$. Согласно предложениям 6.1 и 6.3, имеют место изоморфизмы групп

$$M(C_k) \approx N(C_k^0) \approx N(C_{k-1}),$$
$$M(C_k^c) \approx N(C_k^{c0}) \approx N(C_{k-1}^c).$$

Таким образом, справедливо следующее

6.4. Предложение. *Имеют место изоморфизмы*

$$M_k \approx N_{k-1}, \quad M_k^c \approx N_{k-1}^c.$$

Из общей теории матричных алгебр известно строение всех неприводимых (унитарных) модулей над алгебрами $F(n)$ и $F(n) \oplus F(n)$. В случае алгебры $F(n)$ существует только один такой модуль, а именно пространство F^n с естественным действием на нем алгебры $F(n)$. Размерность этого модуля (над F) равна n. В случае алгебры $F(n) \oplus F(n)$ существуют два неприводимых модуля. Как векторные пространства эти модули также являются пространством F^n, а действие алгебры $F(n) \oplus F(n)$ на них индуцировано проекциями этой алгебры на ее слагаемые. Размерность (над F) каждого из этих модулей также равна n[1]).

Поскольку алгебры C_k и C_k^c изоморфны алгебрам вида $F(n)$ или $F(n) \oplus F(n)$ (см. таблицу 5.10 и следствия 5.8 и 5.9), отсюда немедленно следует, что группы N_k (а потому в силу предложения 6.4 и группы M_k) изоморфны либо группе $\mathbf{Z}$, либо группе

---

[1]) Пусть F_i, $i = 1, \ldots, n$, — совокупность всех матриц из $F(n)$, все столбцы которых, за исключением i-го, равны нулю. Ясно, что $F(n) F_i \subset F_i$. Поэтому для любого элемента x некоторого $F(n)$-модуля M множество $F_i x$ является подмодулем модуля M. Следовательно, если модуль M неприводим, то либо $F_i x = 0$, либо $F_i x = M$. Поскольку модуль M унитарен, равенство $F_i x = 0$ для всех i невозможно (при $x \neq 0$). Будем для простоты считать, что $F_1 x = M$. Пусть $E_i \in F_1$, $i = 1, \ldots, n$, — матрица из F_1, все элементы которой равны нулю, за исключением i-го элемента первого столбца, равного единице. Ясно, что матрицы $E_1, \ldots, E_n$ составляют базис линейного пространства F_1. Поэтому элементы $E_1 x, \ldots, E_n x$ порождают модуль M (как линейное пространство). Пусть эти элементы линейно зависимы, и пусть в соответствующую линейную комбинацию входит с отличным от нуля коэффициентом, скажем, элемент $E_1 x$. Применяя к этой комбинации оператор E_1, мы немедленно получим, что $E_1 x = 0$. Но тогда $E_i x = E_i E_1 x = 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$ и, следовательно, $F_1 x = 0$. Таким образом, элементы $E_1 x, \ldots, E_n x$ линейно независимы, т. е. составляют F-базис модуля M. Следовательно, модуль M изоморфен (как линейное пространство) пространству F^n. Кроме того, при изоморфизме $M \to F^n$, определенном базисом $E_1 x, \ldots, E_n x$, действие алгебры $F(n)$ на M переходит, как легко видеть, в стандартное действие алгебры $F(n)$ на F^n.

Случай алгебры $F(n) \oplus F(n)$ рассматривается аналогично (за F_i здесь принимаются пространства F_i в каждом из слагаемых). — *Прим. ред.*

$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. Окончательный результат можно представить в виде следующей таблицы, в которой a_k — размерность над $\mathbf{R}$ компоненты M^0 неприводимого $\mathbf{Z}_2$-градуированного C_k-модуля M, а a_k^c — размерность над $\mathbf{C}$ компоненты M^0 неприводимого C_k^{c0}-модуля M:

6.5. Таблица модулей Клиффорда

k	C_k	N_k	M_k	a_k	C_k^c	N_k^c	M_k^c	a_k^c
1	$\mathbf{C}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	1	$\mathbf{C}\oplus\mathbf{C}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	1
2	$\mathbf{H}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	2	$\mathbf{C}(2)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	1
3	$\mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	4	$\mathbf{C}(2)\oplus\mathbf{C}(2)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	2
4	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	4	$\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	2
5	$\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	8	$\mathbf{C}(4)\oplus\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	4
6	$\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	8	$\mathbf{C}(8)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	4
7	$\mathbf{R}(8)\oplus\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	8	$\mathbf{C}(8)\oplus\mathbf{C}(8)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	8
8	$\mathbf{R}(16)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	8	$\mathbf{C}(16)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	8

Кроме того,

$$N_{k+8}\approx N_k,\ M_{k+8}\approx M_k,\ a_{k+8}=16a_k$$

и аналогично

$$N_{k+2}^c\approx N_k^c,\ M_{k+2}^c\approx M_k^c,\ a_{k+2}^c=2a_k^c.$$

Для дальнейшего нам необходимо еще вычислить центр алгебры C_k, т. е. множество всех ее элементов, перестановочных с каждым другим элементом.

6.6. Предложение. *Центром алгебры C_k является при $k=2r$ подалгебра* $\mathbf{R}1$, а *при $k=2r+1$ — подалгебра* $\mathbf{R}1+\mathbf{R}e_1\ldots e_k$. *Центром алгебры C_k^0 является при $k=2r+1$ подалгебра* $\mathbf{R}1$, *а при $k=2r$ — подалгебра* $\mathbf{R}1+\mathbf{R}e_1\ldots e_k$.

Доказательство. Элемент $x\in C_k$ тогда и только тогда принадлежит центру алгебры C_k, когда $e_ix=xe_i$ для всех $1\leqslant i\leqslant k$. Но если $x=\sum a_{i_1,\ldots,i_k}e_1^{i_1}\ldots e_k^{i_k}$, то

$$e_sxe_s^{-1}=-e_sxe_s=\sum(-1)^{i_s}a_{i_1,\ldots,i_k}e_1^{i_1}\ldots e_k^{i_k}+\\ +\sum(-1)^{i_s+1}a_{i_1,\ldots,i_k}e_1^{i_1}\ldots e_k^{i_k},$$

где первая сумма распространена на все индексы $i_1,\ldots,i_k$, для которых число $i_1+\ldots+i_k$ четно, а вторая — на все индексы $i_1,\ldots,i_k$, для которых это число нечетно. Следовательно, равенства $e_sxe_s^{-1}=x$, $1\leqslant s\leqslant k$, при четном k имеют место тогда и только тогда, когда $a_{i_1, \ldots, i_k} = 0$ при $(i_1, \ldots, i_k) \neq \neq (0, \ldots, 0)$, а при нечетном k — тогда и только тогда, когда $a_{i_1, \ldots, i_k} = 0$ при $(i_1, \ldots, i_k) \neq (0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1)$. Тем самым первое утверждение полностью доказано.

Второе утверждение следует из первого в силу изоморфизма $C_k \approx C^0_{k+1}$, установленного в предложении 6.2.

6.7. Функториальные свойства групп M и N. Напомним, что алгебра A называется *полупростой*, если любой A-модуль разлагается в прямую сумму неприводимых A-модулей. Известно, что алгебры $F(n)$ и $F(n) \oplus F(n)$ полупросты [1]). В частности, полупросты все алгебры Клиффорда C_k и C^c_k.

Каждый модуль над полупростой алгеброй A естественным образом отождествляется с некоторым элементом группы $N(A)$ (имеющим неотрицательные коэффициенты). Это позволяет нам отнести любому гомоморфизму $u\colon A \to B$ полупростых алгебр некоторый гомоморфизм групп $u^*\colon N(B) \to N(A)$, сопоставляющий произвольному B-модулю L (рассматриваемому как элемент группы $N(B)$) векторное пространство L, определенное как A-модуль формулой

$$ax = u(a)x, \quad a \in A, \quad x \in L.$$

Аналогичным образом по гомоморфизму $u\colon A \to B$ $\mathbf{Z}_2$-градуированных алгебр определяется гомоморфизм $u^*\colon M(B) \to M(A)$.

Ясно, что тем самым M и N определяются как контравариантные функторы из категории полупростых ($\mathbf{Z}_2$-градуированных) алгебр в категорию абелевых групп.

6.8. Примеры.

(1) Для любого $b \in R \setminus \{0\} \subset C_k$ формула $\alpha_b(a) = bab^{-1}$ определяет изоморфизмы $\alpha_b\colon C_k \to C_k$ и $\alpha^0_b = \alpha_b \mid C^0_k\colon C^0_k \to C^0_k$.

(2) Формула $\beta(x_0 + x_1) = x_0 - x_1$, $x_0 \in C^0_k$, $x_1 \in C^1_k$, определяет изоморфизм $\beta\colon C_k \to C_k$

(3) Согласно предложению 6.2, формула

$$\varphi(x_0 + x_1) = x_0 + e_{k+1}x_1, \quad x_0 \in C^0_k, \quad x_1 \in C^1_k,$$

определяет изоморфизм $\varphi\colon C_k \to C^0_{k+1}$.

Согласно п. 6.7, эти изоморфизмы индуцируют изоморфизмы

$$\alpha^*_b\colon M_k \to M_k, \quad \alpha^{0*}_b\colon N_k \to N_k,$$
$$\beta^*\colon M_k \to M_k, \quad \beta^*\colon N_k \to N_k.$$
$$\varphi^*\colon N(C^0_{k+1}) \to N_k.$$

---

[1]) Для доказательства достаточно тривиальным образом обобщить соображения, развитые в примечании на стр. 230. — *Прим. ред.*

Кроме того, ясно, что формулы

$$c(M)^0 = M^1,$$
$$c(M)^1 = M^0$$

определяют инволютивный автоморфизм $c\colon M_k \to M_k$.

6.9. Предложение. *Имеют место коммутативные диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
M_{k+1} \arrow[d, "c"'] & M_{k+1} \arrow[l, "1"'] \arrow[r, "R"] \arrow[d, "\alpha_b^*"] & N(C_{k+1}^0) \arrow[d, "\alpha_b^{0*}"] \\
M_{k+1} & M_{k+1} \arrow[l, "1"'] \arrow[r, "R"] & N(C_{k+1}^0)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
N(C_{k+1}^0) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\alpha_{e_{k+1}}^{0*}"] & N_k \arrow[d, "\beta^*"] \\
N(C_{k+1}^0) \arrow[r, "\varphi^*"] & N_k
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Правый верхний квадрат коммутативен для любого $\mathbf{Z}_2$-градуированного C-модуля $M = M^0 \oplus M^1$, потому что умножение на b индуцирует изоморфизмы $M^0 \to M^1$ и $M^1 \to M^0$. Коммутативность левого квадрата немедленно следует из определения автоморфизмов α_b^0 и α_b. Коммутативность нижней диаграммы проверяется непосредственным подсчетом:

$$\begin{aligned}
\alpha_{e_{k+1}}^0 \varphi(x_0 + x_1) &= e_{k+1}(x_0 + e_{k+1}x_1)(-e_{k+1}) = \\
&= -e_{k+1}^2 x_0 + e_{k+1}^2 x_1 = x_0 - e_{k+1}x_1 = \\
&= \beta\varphi(x_0 + x_1).
\end{aligned}$$

Согласно таблице 6.5, группы M_{4m} и M_{2m}^c являются группами с двумя образующими m_1 и m_2, которые соответствуют двум различным неприводимым $\mathbf{Z}_2$-градуированным модулям над алгебрами C_{4m} и C_{2m}^c соответственно.

6.10. Предложение. *Автоморфизм c групп M_{4m} и M_{2m}^c переставляет образующие m_1 и m_2:*

$$c(m_1) = m_2, \quad c(m_2) = m_1.$$

Доказательство. Согласно предложению 6.9, действию автоморфизма c на модуле M_{4m} соответствует действие автоморфизма β^* на модуле N_{4m-1}. С другой стороны, согласно предложению 6.6, центр алгебры C_{4m-1} порождается элементами 1 и $\omega = e_1 \dots e_{4m-1}$. Поскольку $\omega^2 = 1$, умножения на

$\frac{1+\omega}{2}$ и $\frac{1-\omega}{2}$ определяют проекции алгебры C_{4m-1} на ее два идеала, являющиеся прямыми слагаемыми. Легко видеть, что эти идеалы и являются неприводимыми C_{4m-1}-модулями, порождающими группу M_{4m-1}. Поэтому для доказательства предложения достаточно показать, что автоморфизм β переставляет эти два идеала. Но это очевидно, ибо $\beta(\omega)=\omega$. Случай алгебры C_{2m}^c рассматривается аналогично (в этом случае $\omega = ie_1 \ldots e_{2m-1}$).

Пусть теперь $L_k = \operatorname{Coker}(i^*: M_{k+1} \to M_k)$, где $i^*: M_{k+1} \to M_k$ — гомоморфизм, индуцированный вложением $i: C_k \to C_{k+1}$. Аналогично пусть $L_k^c = \operatorname{Coker}(i^*: M_{k+1}^c \to M_k^c)$, где i — вложение $C_k^c \to C_{k+1}^c$.

6.11. Предложение. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
M_{k+1} \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\varphi^* R \pi^*"'] & M_k \arrow[d, "\varphi^* R"] \arrow[dr] & \\
N_k \arrow[r] & N_{k-1} \arrow[r] & L_k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где $\pi: C_{k+1} \to C_{k+1}$ — такой автоморфизм, что $\pi(e_i)=e_i$ при $i \leqslant k-1$ и $\pi(e_k)=e_{k+1}$, $\pi(e_{k+1})=e_k$.

Аналогичная диаграмма в комплексном случае также коммутативна.

Доказательство. Ясно, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M_{k+1} \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "R\pi^*"'] & M_k \arrow[d, "R"] \\
N(C_{k+1}^0) \arrow[r, "j^*"] & N(C_k^0)
\end{tikzcd}$$

где $j(e_i)=e_i$ при $i \leqslant k-1$ и $j(e_k)=e_{k+1}$. Для доказательства предложения достаточно „склеить" эту диаграмму с диаграммой, получающейся применением функтора N к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
C_{k-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"] & C_k \arrow[d, "\varphi"] \\
C_k^0 \arrow[r, "j"] & C_{k+1}^0
\end{tikzcd}$$

Таким образом,

$$L_k \approx \operatorname{Coker}(N_k \to N_{k-1})$$

и

$$L_k^c \approx \operatorname{Coker}(N_k^c \to N_{k-1}^c).$$

Из полученных результатов вытекают следующие

6.12. Таблицы модулей L_k и L_k^c

k	C_k	N_k	M_k	L_k	a_k
1	$\mathbf{C}(1)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	1
2	$\mathbf{H}(1)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	2
3	$\mathbf{H}(1)\oplus\mathbf{H}(1)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	0	4
4	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	4
5	$\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	0	8
6	$\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	0	8
7	$\mathbf{R}(8)\oplus\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	0	8
8	$\mathbf{R}(16)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	8

Кроме того, $C_{k+8} \approx C_k \underset{\mathbf{R}}{\otimes} C_8$, $N_{k+8} \approx N_k$, $M_{k+8} \approx M_k$, $L_{k+8} \approx L_k$ и $a_{k+8} = 16a_k$.

k	C_k^c	N_k^c	M_k^c	L_k^c	a_k^c
1	$\mathbf{C}(1)\oplus\mathbf{C}(1)$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	0	1
2	$\mathbf{C}(2)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	1

Кроме того, $C_{k+2}^c \approx C_k^c \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \mathbf{C}(2)$, $N_{k+2}^c \approx N_k^c$, $M_{k+2}^c \approx M_{k+2}^c \approx M_k^c$, $L_{k+2}^c \approx L_k^c$ и $a_{k+2}^c = 2a_k^c$.

В доказательстве здесь нуждаются лишь утверждения, относящиеся к коядрам L_k и L_k^c. Мы ограничимся рассмотрением случая алгебр C_k.

Чтобы найти L_k, мы, согласно сказанному в конце предыдущего пункта должны рассмотреть неприводимые C_k-модули и найти их разложения как C_{k-1}-модулей. C_1

Пусть $k = 1, 2$. Неприводимым модулем над алгеброй $C_1 = \mathbf{C}$ является поле $\mathbf{C}$, являющееся как модуль над алгеброй $C_0 = \mathbf{R}$ суммой двух модулей $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}$. Поэтому $L_1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_2$. Аналогично, неприводимым модулем над алгеброй $C_2 = \mathbf{H}$ является тело $\mathbf{H}$, являющееся как модуль над $C_1 = \mathbf{C}$ суммой двух модулей $\mathbf{C}$ и $\mathbf{C}$. Поэтому $L_2 = \mathbf{Z}_2$.

Пусть $k = 5, 6$. Неприводимым модулем над алгеброй $C_5 = \mathbf{C}(4)$ является пространство $\mathbf{C}^4 = \mathbf{H}^2$, являющееся неприводимым модулем и над алгеброй $C_4 = \mathbf{H}(2)$. Аналогично, неприводимый C_6-модуль $\mathbf{R}^8 = \mathbf{C}^4$ неприводим и как C_5-модуль. Поэтому $L_5 = L_6 = 0$.

Пусть $k = 3, 7$. В этом случае имеются два неприводимых C_k-модуля (ибо $C_3 = \mathbf{H}\oplus\mathbf{H}$, $C_7 = \mathbf{R}(8)\oplus\mathbf{R}(8)$), каждый из которых определяет один и тот же C_{k-1}-модуль. Следовательно, гомоморфизмы $N_3 \to N_2$ и $N_7 \to N_6$ являются эпиморфизмами, и потому $L_3 = L_7 = 0$.

Пусть $k = 4, 8$. Здесь удобнее воспользоваться исходным определением $L_k = \operatorname{Coker}(M_{k+1} \to M_k)$. Пусть z — образующая группы M_{4m+1}, $m = 1, 2$. Ясно, что $c(z) = z$. Поэтому ее образ в M_{4m} также инвариантен относительно c и потому, согласно предложению 6.10, принадлежит циклической подгруппе, порожденной элементом $m_1 + m_2$. Более того, по соображениям размерности он должен совпадать с этим элементом. Следовательно, $L_4 = L_8 = \mathbf{Z}$.

7. ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДУЛЕЙ КЛИФФОРДА

7.1. Определение. *$\mathbf{Z}_2$-градуированным тензорным произведением* $M \otimes N$ $\mathbf{Z}_2$-градуированного A-модуля M и $\mathbf{Z}_2$-градуированного B-модуля N называется модуль над $\mathbf{Z}_2$-градуированной алгеброй $A \otimes B$, который является как $\mathbf{R}$-модуль обычным тензорным произведением модулей M и N и в котором градуировка определена формулами

$$(M \otimes N)^0 = (M^0 \otimes N^0) \oplus (M^1 \otimes N^1),$$
$$(M \otimes N)^1 = (M^1 \otimes N^0) \oplus (M^0 \otimes N^1),$$

а действие алгебры $A \otimes B$ — формулой

$$(a \otimes b)(x \otimes y) = (-1)^{ij}(ax \otimes by),$$
$$b \in B^i, \quad x \in M^j.$$

Таким образом, в частности, для любых $\mathbf{Z}_2$-градуированных C_k- и C_l-модулей M и N определен $C_k \otimes C_l$-модуль $M \otimes N$. Рассмотрим теперь изоморфизм $\varphi_{k,l}\colon C_{k+l} \to C_k \otimes C_l$, определенный формулами

$$\varphi_{k,l}(e_i) = e_i \otimes 1 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$
$$\varphi_{k,l}(e_i) = 1 \otimes e_{i-k} \quad \text{при} \quad k+1 \leqslant i \leqslant k+l.$$

Ясно, что соответствие $(M, N) \to \varphi^*_{k,l}(M \otimes N)$ билинейно относительно операции $\otimes$ и потому продолжается до некоторого гомоморфизма групп

$$M_k \otimes_{\mathbf{Z}} M_l \to M_{k+l}.$$

Аналогичным образом определяется гомоморфизм групп

$$M_k^c \otimes_{\mathbf{Z}} M_l^c \to M_{k+l}^c.$$

Тем самым в группах $M_* = \sum_{k\geqslant 0} M_k$ и $M^c_* = \sum_{k\geqslant 0} M^c_k$ возникает (как легко видеть, ассоциативное) умножение, относительно которого они являются, очевидно, градуированными кольцами.

7.2. Предложение. *Для любых элементов* $u \in M_k$ (*или* M^c_k) *и* $v \in M_l$ (*или* M^c_l) *имеют место равенства*

(1) $c(uv) = uc(v)$,

(2) $ui^*(v) = i^*(uv)$, *где* $i^*\colon M_p \to M_{p-1}$, $p = l$, $k+l$, — *гомоморфизм, индуцированный вложением* $i\colon C_{p-1} \to C_p$,

(3) $uv = vu$ *при* kl *четном и* $uv = c(vu)$ *при* kl *нечетном.*

Доказательство. Равенства (1) и (2) очевидны. Для доказательства соотношений (3) воспользуемся диаграммой

$$\begin{tikzcd}
 & C_k \otimes C_l \arrow[dd, "T"] \\
C_{k+l} \arrow[ur, "\varphi_{k,l}"] \arrow[dr, "\varphi_{l,k}"'] & \\
 & C_l \otimes C_k
\end{tikzcd}$$

гомоморфизм T которой определен формулой $T(x_p \otimes y_q) = (-1)^{pq} y_q \otimes x_p$, $x_p \in C^p_k$, $y_q \in C^q_l$. Рассмотрим автоморфизм $\sigma = \varphi^{-1}_{k,l} T \varphi_{l,k}$ алгебры C_{k+l}, возникающий из этой диаграммы. Легко видеть, что $\sigma(e_i) = e_{l+i}$ при $1 \leqslant i \leqslant k$ и $\sigma(e_i) = e_{i-k}$ при $k+1 \leqslant i \leqslant k+l$. Таким образом, на образующих $e_1, \ldots, e_{k+l}$ автоморфизм σ индуцирует перестановку, являющуюся произведением kl транспозиций. Но ясно, что любая транспозиция образующих индуцируется некоторым внутренним автоморфизмом α_b, $b \in \mathbf{R}^k \setminus 0$. Например, транспозиция e_1 и e_2 индуцируется автоморфизмом α_b, отвечающим элементу $b = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$. Следовательно, автоморфизм σ является композицией kl автоморфизмов α_b. Поэтому автоморфизм $\sigma^*\colon M_{k+l} \to M_{k+l}$, индуцированный автоморфизмом σ, является композицией kl автоморфизмов α^*_β, т. е. (см. предложение 6.9) имеет вид c^{kl}. Поскольку $T^*(N \otimes M) = M \otimes N$ и $\sigma^* \varphi^*_{k,l} = \varphi^*_{l,k} T^*$, тем самым доказано, что $\varphi^*_{l,k}(N \otimes M) = c^{kl} \varphi^*_{k,l}(M \otimes N)$ для любых модулей M и N. Для завершения доказательства остается заметить, что это соотношение в точности равносильно соотношению (3).

Пусть λ — одна из двух образующих группы M_8, а μ — одна из двух образующих группы M^c_2.

7.3. Предложение. *Умножение на λ определяет изоморфизм $M_k \approx M_{k+8}$, а умножение на μ — изоморфизм $M_k^c \approx M_{k+2}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k \neq 4m$. Пусть z — образующая группы M_k. По определению размерность 0-компоненты соответствующего неприводимого модуля равна a_k. Поскольку размерность неприводимого модуля, определяющего элемент λ, равна 16, размерность 0-компоненты модуля, представляющего элемент $\lambda z \in M_k$, равна $16a_k$. Так как $16a_k = a_{k+8}$, этот модуль должен быть неприводимым модулем, определяющим образующую группы M_{k+8}. Следовательно, отображение $M_k \to M_{k+8}$, задаваемое умножением на λ, является изоморфизмом групп.

При $k = 4m$ группа M_k имеет две образующие m_1 и m_2, причем $c(m_1) = m_2$ и $c(m_2) = m_1$ (предложение 6.10). Следовательно, в силу соотношения (1) из предложения 7.2 $\lambda m_2 = \lambda c(m_1) = c(\lambda m_1)$ и потому $\lambda m_1 = c(\lambda m_2)$. Поскольку, согласно предложению 6.10, тем же соотношениям удовлетворяют и образующие группы M_{k+8}, отсюда на основании размерностных соображений, аналогичных уже использованным в случае $k \neq 4m$, немедленно вытекает, что λm_1 и λm_2 являются образующнми группы M_{k+8} и, значнт, отображение $M_k \to M_{k+8}$ является изоморфизмом. Случай групп M_k^c рассматривается аналогично.

Из утверждения (2) предложения 7.2 вытекает, что образ гомоморфизма $i^*: M_* \to M_*$ является идеалом кольца M_*. Поэтому определено градуированное факторкольцо $L_* = \sum_{k \geqslant 0}' L_k$. Кольцо $L_*^c = \sum_{k \geqslant 0} L_k^c$ определяется аналогично.

7.4. Теорема. *В градуированном кольце L_* существует система образующих, состоящая из единицы $1 \in L_0$ и трех элементов $\lambda_1 \in L_1$, $\lambda_4 \in L_4$, $\lambda_8 \in L_8$, удовлетворяющих соотношениям $2\lambda_1 = 0$, $\lambda_1^3 = 0$, $\lambda_1\lambda_4 = 0$, $\lambda_4^2 = 4\lambda_8$.*

Градуированное кольцо L_*^c является кольцом многочленов от элемента $\mu \in L_2^c$.

Гомоморфизм колец $c: L_* \to L_*^c$, определенный операцией комплексификации модулей, задается формулами

$$c(\lambda_1) = 0, \quad c(\lambda_4) = 2\mu^2, \quad c(\lambda_8) = \mu^4.$$

Гомоморфизм групп $r: L_*^c \to L_*$, индуцированный вложением алгебры C_k в алгебру C_k^c, задается формулами

$$r(\mu) = r(\mu^3) = 0, \quad r(\mu^2) = \lambda_4, \quad r(\mu^4) = 2\lambda_8.$$

Доказательство. Поскольку [1] $L_1 = \mathbf{Z}_2$, в этой группе существует единственный элемент $\lambda_1 \neq 0$ и $2\lambda_1 = 0$. Поскольку $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, то λ_1^2 является нетривиальным элементом группы $L_2 = \mathbf{Z}_2$. Поскольку $L_3 = 0$, то $\lambda_1^3 = 0$.

Рассмотрим в алгебре C_k при $k = 4m$ элемент $\omega = e_1 \ldots e_k$. Ясно, что $\omega^2 = 1$. Поэтому для любого $\mathbf{Z}_2$-градуированного C_k-модуля M элемент ω действует на его 0-компоненте M^0 как умножение на $\varepsilon = \pm 1$. При $\varepsilon = +1$ мы будем модуль M называть $+1$-*модулем*, а при $\varepsilon = -1$ — соответственно -1-*модулем*. Поскольку $e_i\omega = \omega e_i$, то для любого ε-модуля M модуль $c(M)$ является $-\varepsilon$-модулем. Кроме того, произведение $M \otimes N$ ε-модуля M и ε'-модуля N является, очевидно, $\varepsilon\varepsilon'$-модулем.

Пусть λ_4 — элемент группы L_4, определенный неприводимым C_4-модулем M, являющимся -1-модулем. Так как $L_5 = 0$, то $\lambda_1\lambda_4 = 0$. Пусть, кроме того, λ_8 — элемент группы L_8, определенный неприводимым C_8-модулем W, являющимся $+1$-модулем. Так как C_8-модуль $M \otimes M$ является $+1$-модулем размерности $8^2 = 4 \cdot 16$, то $M \otimes M = W \oplus W \oplus W \oplus W$. Следовательно, $\lambda_4^2 = 4\lambda_8$. Наконец, тот факт, что в кольце L_* никаких дополнительных образующих или дополнительных соотношений не имеется, непосредственно вытекает из предложения 7.3.

Рассмотрим теперь комплексный случай. Пусть $\omega = e_1 \ldots \ldots e_k \in C_k^c$, где $k = 2q$. Ясно, что $\omega^2 = (-1)^q$, и потому на 0-компоненте M_0 каждого C_k^c-модуля M элемент ω действует как умножение на $\varepsilon = \pm i^q$.

Как и выше, мы будем M называть ε-*модулем*, если ω действует на M^0 как умножение на ε. Пусть μ_q — элемент группы L_{2q}^c, определенный неприводимым C_{2q}^c-модулем, являющимся i^q-модулем. Размерностные соображения немедленно показывают, что $\mu_q = \mu_1^q$. Значит L_*^c является кольцом многочленов от $\mu = \mu_1$.

Ясно, что для любого действительного ε-модуля M над алгеброй C_{4m} модуль $M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ является комплексным $(-1)^m \varepsilon$-модулем над алгеброй C_{4m}^c. Отсюда в силу уже неоднократно использовавшихся размерностных соображений непосредственно вытекает, что при гомоморфизме комплексификации c: $L_k \to L_k^c$ элемент λ_4 переходит в элемент $2\mu^2$, а элемент λ_8 — в элемент μ^4. 1
Равенство $c(\lambda_4) = 0$ очевидно.

Формулы для гомоморфизма r вытекают из соотношений

$$rc(y) = 2y, \quad cr(x) = x + \bar{x},$$

[1] Компоненты L_k кольца L_* совпадают, очевидно, с коядрами L_k из табл. 6.12. — *Прим. ред.*

где $\bar{x}$ — элемент, сопряженный к x, и того факта, что $\bar{\mu} = -\mu$. Тем самым теорема 7.4 полностью доказана.

7.5 Замечание. В статье Атьи, Ботта и Шапиро [1] доказано, что имеют место изоморфизмы

$$L_k \approx \widetilde{KO}(S^k), \quad L_k^c \approx \tilde{K}(S^k).$$

Их доказательство существенно опирается на теорему 7.4 и теорему Ботта о периодичности.

8. ЕДИНИЧНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА СФЕРАХ, II

Пусть $\rho(n)$ — такое наибольшее целое число, что на сфере S^{n-1} можно изложенным в разд. 2 методом построить $\rho(n)-1$ ортонормальных касательных векторных полей. Иными словами, $\rho(n)$ — это наибольшее число k, для которого существует ортогональное умножение $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. С другой стороны, согласно замечанию 2.5, ортогональное умножение $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ существует тогда и только тогда, когда пространство $\mathbf{R}^n$ является C_{k-1}-модулем. Обозначив через b_k минимум размерностей n, для которых $\mathbf{R}^n$ обладает строением C_{k-1}-модуля, мы получаем, таким образом, что число $\rho(n)$ определяется уравнением $b_{\rho(n)} = n$.

Из полученных выше результатов (таблица 6.5) немедленно вытекает следующая

8.1. Таблица чисел b_k.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_{k-1}	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$	$\mathbf{H}(2)$	$\mathbf{C}(4)$	$\mathbf{R}(8)$	$\mathbf{R}(8) \oplus \mathbf{R}(8)$	$\mathbf{R}(16)$
b_k	1	2	4	4	8	8	8	8	16

Кроме того, $b_{k+8} = 16 b_k$.

8.2. Теорема. *Если* $n = 2^{c(n)} 16^{d(n)} m$, *где* $0 \leqslant c(n) \leqslant 3$, *а число* m *нечетно, то* $\rho(n) = 2^{c(n)} + 8d(n)$.

Доказательство. Доказываемая формула непосредственно проверяется (с помощью табл. 8.1) при $1 \leqslant n \leqslant 8$. Случай $n \geqslant 8$ сводится к случаю $n \leqslant 8$ ввиду соотношения $b_{k+8} = 16 b_k$.

Адамс доказал, что на сфере S^{n-1} на самом деле не существует $\rho(n)$ ортонормальных касательных полей; см. гл. 15.

9. ГРУППА Spin(k)

Определим на алгебре $T(M)=\sum_{k\geqslant 0} T^k(M)$ операцию $*$, полагая $(x_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_p)^*=x_p\otimes\ldots\otimes x_1$. Поскольку

$$(x\otimes x-f(x,\ x)\,1)^*=x\otimes x-f(x,\ x),$$

эта операция задает некоторую операцию $*\colon C_k\to C_k$. По определению

$$(e_{i_1}\ldots e_{i_r})^*=e_{i_r}\ldots e_{i_1}=(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}e_{i_1}\ldots e_{i_r}.$$

Ясно, что $*$ является инволютивным антиавтоморфизмом, т. е. $*^2=1$ и $(xy)^*=y^*x^*$.

9.1. Определение. Ясно, что каждая точка пространства $\mathbf{R}^k\subset C_k$, отличная от точки 0, является обратимым элементом алгебры C_k. В частности, все точки $x\in S^{k-1}$ обратимы в C_k. Поэтому сфера S^{k-1} порождает в мультипликативной группе обратимых элемеитов алгебры C_k некоторую подгруппу $\operatorname{pin}(k)$. Пусть $\operatorname{Spin}(k)$ — подгруппа $\operatorname{pin}(k)\cap C_k^0$ группы $\operatorname{pin}(k)$.

Элемент $u\in C_k$ тогда и только тогда принадлежит группе $\operatorname{pin}(k)$, когда $u=x_1\ldots x_m$, где $x_i\in S^{k-1}$, $1\leqslant i\leqslant m$. При этом $uu^*=1$ тогда и только тогда, когда m четно, т. е. когда $u\in C_k^0$, и $uu^*=-1$ тогда и только тогда, когда m нечетно, т. е. когда $u\in C_k^1$. Таким образом, $uu^*=1$ для всех $u\in\operatorname{Spin}(k)$.

Ясно, что формула

$$\varphi(u)\,x=uxu^*,\quad u\in\operatorname{pin}(k),\quad x\in\mathbf{R}^k,$$

определяет иекоторое отображение

$$\varphi\colon \operatorname{pin}(k)\to O(k).$$

Действительно, для любого $u\in\operatorname{pin}(k)$ отображение $\varphi(u)\colon \mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^k$, очевидно, линейно и

$$\|\varphi(u)\,x\|^2=(uxu^*)(uxu^*)=uxxu^*=-xx=\|x\|^2.$$

9.2. Теорема. *Отображение* $\varphi\colon \operatorname{pin}(k)\to O(k)$ *является непрерывным эпиморфизмом групп. При этом* $\varphi^{-1}(SO(k))=\operatorname{Spin}(k)$, *так что* φ *индуцирует эпиморфизм* $\varphi_0\colon \operatorname{Spin}(k)\to SO(k)$. *Ядром* $\operatorname{Ker}\varphi_0$ *эпиморфизма* φ_0 *является подгруппа* $\{1,\ -1\}$.

При $k\geqslant 2$ *группа* $\operatorname{Spin}(k)$ *линейно связна и односвязна* $(\pi_0(\operatorname{Spin}(k))=\pi_1(\operatorname{Spin}(k))=0)$ *и потому является универсальной накрывающей группой группы* $SO(k)$.

Доказательство. Так как $\varphi(uv)x = uvx(uv)^* = uvxv^*u^* = u(\varphi(v)x)u^* = \varphi(u)\varphi(v)x$, то отображение φ является гомоморфизмом групп. Непрерывность этого гомоморфизма очевидна.

Далее легко видеть, что для любой точки $u \in S^{k-1}$ линейное преобразование $\varphi(u)$ является отражением относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору u. Действительно, если вектор $x \in \mathbf{R}^k$ мы представим в виде $x = tu + u'$, где $t \in \mathbf{R}$ и $(u \mid u') = 0$, то будет иметь место равенство

$$\varphi(u)x = u(tu + u')u^* = tuuu^* + uu'u^* = -tu + u'.$$

Поскольку отражения порождают всю группу $O(k)$, отображение φ эпиморфно.

Так как для любой точки $u \in S^{k-1}$ линейное преобразование $\varphi(u)$ является отражением, то $\det \varphi(u) = -1$. Следовательно, $\det(u_1 \ldots u_r) = (-1)^r$ для любых $u_i \in S^{k-1}$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Таким образом, элемент $u \in \mathrm{pin}(k)$ тогда и только тогда принадлежит группе $\mathrm{Spin}(k)$, когда $\varphi(u) \in SO(k)$.

Если $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi_0$, то $ue_iu^* = e_i$, т. е. $ue_i = e_iu$, ибо $uu^* = 1$. Обратно, если $ue_i = e_iu$, то $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi_0$. Следовательно, $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi_0$ тогда и только тогда, когда u принадлежит пересечению центра алгебры C_k с подалгеброй C_k^0, т. е. когда $u \in \mathbf{R}1$. Поэтому $u = \pm 1$, так как $uu^* = u^2 = 1$.

Поскольку отображение $\varphi\colon \mathrm{Spin}(k) \to SO(k)$, очевидно, локально тривиально, а группа $SO(k)$ при $k \geqslant 2$ линейно связна, для доказательства последнего утверждения достаточно показать, что в группе $\mathrm{Spin}(k)$ существует путь, соединяющий $+1$ с -1. Но ясно, что такой путь определяется, например, формулой

$$(e_1 \cos t + e_2 \sin t)(e_1 \cos t - e_2 \sin t) = -\cos 2t - e_1e_2 \sin 2t,$$

где t меняется от 0 до $\pi/2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя тот факт, что на сфере S^3 существуют три касательных ортонормальных векторных поля, а на сфере S^7 существует семь касательных ортонормальных векторных полей, докажите, что для любого $n = 2^c 16^d m$, где $0 \leqslant c \leqslant 3$ и m нечетно, на сфере S^{n-1} существует $2^c - 1$ касательных ортонормальных векторных полей.

2. Докажите, что каждый изоморфизм квадратичных форм u: $(M, f) \to (N, g)$ представляет собой изоморфизм модулей u: $M \to N$, для которого выполнено соотношение

$$g(u(x), u(x')) = f(x, x'), \qquad x, x' \in M.$$

3. Опишите в явном виде гомоморфизм i: $C_{k-1} \to C_k$ для алгебр C_k из табл. 5.10.

4. Для точек $x, y \in S^{k-1} \subset C_k$ проверьте формулу $xy + yx = 2(x \mid y)$ прямым вычислением.

5. Докажите, что $\pi_i(SO(k)) = \pi_i(\mathrm{Spin}(k))$ при $i \geqslant 2$.

6. Вычислите ядро гомоморфизма φ: $\mathrm{pin}(k) \to O(k)$.

7. Учитывая сказанное в примере 4.5, разъясните, в каком смысле соответствие $(M, f) \to C(f)$ является функтором.

Глава 12

ОПЕРАЦИИ АДАМСА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Каждому представлению M топологической группы G и каждому главному расслоению α над пространством X можно сопоставить расслоенное пространство $\alpha[M]$ над X, являющееся векторным расслоением. Более того, для каждого α соответствие $M \to \alpha[M]$ продолжается до некоторого гомоморфизма групп $R(G) \to K(X)$, где $R(G)$ — кольцо представлений группы G. Это позволяет весьма детально изучить группу $K(X)$. В частности, используя известные операции на $R(G)$, можно получить ряд важных операций иа $K(X)$.

1. λ-КОЛЬЦА

1.1. Определение. *λ-полукольцом* называется коммутативное полукольцо R, рассматриваемое вместе с семейством отображений $\lambda^i\colon R \to R$, $i \geqslant 0$, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $\lambda^0(x) = 1$ и $\lambda^1(x) = x$ для любого $x \in R$,

(2) $\lambda^k(x+y) = \sum\limits_{i+j=k} \lambda^i(x)\lambda^j(y)$ для любых $x, y \in R$.

Гомоморфизмом λ-полуколец $u\colon (R, \lambda^i) \to (R', \lambda^i)$ называется такой гомоморфизм полуколец $u\colon R \to R'$, что $\lambda^i(u(x)) = u(\lambda^i(x))$ для всех $x \in R$ и любого $i \geqslant 0$. Если полукольцо R является кольцом, то λ-полукольцо (R, λ^i) называется *λ-кольцом.*

1.2. Пример. Полукольцо классов изоморфных векторных расслоений $\mathrm{Vect}_F(X)$ при $F = \mathbf{R}$ и $F = \mathbf{C}$ является λ-полукольцом относительно отображений λ^i, определенных формулой $\lambda^i[\xi] = [\wedge^i \xi]$, где $\wedge^i \xi$ — внешняя i-я степень векторного расслоения ξ [см. пример 5.6.9]. Аксиомы (1) и (2) для этих λ^i немедленно вытекают в силу теоремы 5.6.3 из соответствующих свойств операций Λ^i для векторных пространств.

Поскольку для любого отображения $f\colon Y \to X$ и любого векторного расслоения ξ над X расслоения $f^*(\Lambda^i \xi)$ и $\Lambda^i f^*(\xi)$ изоморфны над Y, гомоморфизм $\mathrm{Vect}_F(f)\colon \mathrm{Vect}_F(X) \to \mathrm{Vect}_F(Y)$, индуцированный отображением f, является гомоморфизмом λ-полуколец.

Оказывается, что строение λ-кольца можно ввести и на кольцах $K_F(X)$. Для этого нам понадобится следующая общая конструкция.

Пусть R — произвольное λ-полукольцо. Рассмотрим полугруппу (в случае, когда R — кольцо, группу) $1+R[[t]]^+$ формальных степенных рядов над R вида $1+a_1t+a_2t^2+\ldots$ и определим отображение

$$\lambda_t\colon R \to 1+R[[t]]^+$$

формулой

$$\lambda_t(x)=\sum_{i\geqslant 0}\lambda^i(x)\,t^i.$$

Из аксиомы (2) немедленно вытекает, что $\lambda_t(x+y)=\lambda_t(x)\lambda_t(y)$, т. е. что λ_t является морфизмом полугрупп.

1.3. Предложение. *Для любого λ-полукольца (R, λ^i) на пополнении $\hat{R}$ полукольца R можно единственным образом определить операции $\hat{\lambda}^i$, относительно которых кольцо $\hat{R}$ является λ-кольцом, а естественный гомоморфизм $\theta\colon R \to \hat{R}$ — гомоморфизмом λ-полуколец.*

Доказательство. Поскольку $R \subset \hat{R}$, отображение λ_t мы можем рассматривать как гомоморфизм полугрупп $\lambda_t\colon R \to 1+\hat{R}[[t]]^+$. Поскольку полугруппа $1+\hat{R}[[t]]^+$ является группой, а кольцо $\hat{R}$ — пополнением полукольца R, этот гомоморфизм полугрупп единственным образом продолжается до некоторого гомоморфизма групп $\hat{\lambda}_t\colon \hat{R} \to 1+\hat{R}[[t]]^+$. Для любого элемента $x \in \hat{R}$ мы положим

$$\hat{\lambda}_t(x)=\sum_{i\geqslant 0}\hat{\lambda}^i(x)\,t^i.$$

Ясно, что определенные таким образом отображения $\hat{\lambda}^i\colon \hat{R} \to \hat{R}$ удовлетворяют аксиомам (1) и (2) и что отображение θ является морфизмом λ-полуколец. Единственность отображений $\hat{\lambda}^i$ непосредственно вытекает из единственности отображения $\hat{\lambda}_t$.

1.4. Пример. В частности, кольца $K(X)=KU(X)$ и $KO(X)$ являются λ-кольцами, причем $\lambda^i[\xi]=[\Lambda^i\xi]$ для любого векторного расслоения ξ. Для произвольного отображения $f\colon Y\to X$ гомоморфизмы $f^!\colon K(X)\to K(Y)$ и $f^!\colon KO(X)\to KO(Y)$ являются гомоморфизмами λ-колец.

2. ψ-ОПЕРАЦИИ АДАМСА В λ-КОЛЬЦЕ

2.1. Определение. Для любого λ-кольца R формула

$$\psi_{-t}(x)=-t\left(\frac{d}{dt}\lambda_t(x)\right)\Big/\lambda_t(x)$$

определяет некоторый степенной ряд

$$\psi_{-t}(x)=\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\psi^k(x)t^k.$$

Тем самым для любого $k\geqslant 1$ определено некоторое отображение $\psi^k\colon R\to R$. Отображения ψ^k называются *операциями Адамса* на λ-кольце R. Для $k=0$ мы полагаем по определению $\psi^0(x)=0$ для любого $x\in R$.

2.2. Предложение. *Отображение $\psi^k\colon R\to R$ аддитивно, и для каждого гомоморфизма λ-колец $u\colon R\to R$ имеет место соотношение $u(\psi^k(x))=\psi^k(u(x))$, $x\in R$.*

Доказательство. По определению

$$\psi_{-t}(x+y)=-t\left(\frac{d}{dt}\lambda_t(x+y)\right)\Big/\lambda_t(x+y)=$$

$$=-t\left[\left(\frac{d}{dt}\lambda_t(x)\right)\lambda_t(y)+\lambda_t(x)\left(\frac{d}{dt}\lambda_t(y)\right)\right]\Big/\lambda_t(x)\lambda_t(y)=$$

$$=-t\left(\frac{d}{dt}\lambda_t(x)\right)\Big/\lambda_t(x)-t\left(\frac{d}{dt}\lambda_t(y)\right)\Big/\lambda_t(y)=$$

$$=\psi_{-t}(x)+\psi_{-t}(y).$$

Сравнивая коэффициенты этих степенных рядов, мы немедленно получаем, что $\psi^k(x+y)=\psi^k(x)+\psi^k(y)$. Аналогично, так как гомоморфизм u перестановочен с отображением λ_t, а значит,
ψ_{-t} и с отображением ψ_t, то $u(\psi^k(x))=\psi^k(u(x))$ для любого $x\in R$.

2.3. Предложение. *Если $\lambda^i(x)=0$ при $i>1$, то $\psi^k(x)=x^k$.*

Доказательство. По условию $\lambda_t(x)=1+tx$ и потому $\frac{d}{dt}\lambda_t(x)=x$. Следовательно, $\psi_{-t}(x)=-\frac{tx}{1+tx}=\sum\limits_{k\geqslant 1}(-1)^k x^k t^k$.

2.4. Замечание. Пусть s_k^n — такие многочлены, что

$$x_1^k + \ldots + x_n^k = s_k^n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

где σ_i — элементарные симметрические функции. Тогда, как легко видеть (см. предложение 1.8 следующей главы),

$$\psi^k(x) = s_k^n(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x)) \quad \text{для любого } n \geqslant k.$$

2.5. Предложение. *Отображения λ^i и ψ^k связаны соотношением*

$$\psi^k(x) - \lambda^1(x)\psi^{k-1}(x) + \ldots + (-1)^{k-1}\lambda^{k-1}(x)\psi^1(x) + \\ + (-1)^k k\lambda^k(x) = 0.$$

Доказательство. Так как $\lambda_t(x)\psi_{-t}(x) + t\frac{d}{dt}\lambda_t(x) = 0$, то

$$\left(\sum_{i\geqslant 0}\lambda^i(x)t^i\right)\left(\sum_{j\geqslant 1}(-1)^j\psi^j(x)t^j\right) + t\sum_{k\geqslant 0}(k+1)\lambda^{k+1}(x)t^k = 0$$

и потому $\sum_{k\geqslant 1}\left(\sum_{i+j=k}(-1)^j\lambda^i(x)\psi^j(x) + k\lambda^k(x)\right)t^k = 0.$

2.6. Примеры. При $k = 1$ мы получаем, что

$$\psi^1(x) - \lambda^1(x) = 0.$$

Следовательно,

$$\psi^1(x) = 1.$$

Аналогично $\psi^2(x) - \lambda^1(x)\psi^1(x) + 2\lambda^2(x) = 0$ при $k = 2$, так что

$$\psi^2(x) = x^2 - 2\lambda^2(x),$$

и $\psi^3(x) - \lambda^1(x)\psi^2(x) + \lambda^2(x)\psi^1(x) - 3\lambda^3(x) = 0$ при $k = 3$, так что

$$\psi^3(x) = x^3 + 3\lambda^3(x) - 3x\lambda^2(x).$$

2.7. Определение. λ-полукольцо (R, λ^i) называется λ-полукольцом *с линейными элементами*, если в R выделено некоторое мультипликативио замкнутое подмножество L, все элементы x которого обладают тем свойством, что $\lambda^i(x) = 0$ при $i > 1$. Элементы подмножества L называются при этом *линейными элементами.*

В случае $R = \mathrm{Vect}_F(X)$ или $K_F(X)$, где $F = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, за подмножество L принимается по определению множество всех элементов, определенных линейными расслоениями.

2.8. Определение. λ-полукольцо R называется *расщепляемым*, если для каждого конечного множества элементов $x_1, \ldots, x_r \in R$ существует такой мономорфнзм $u\colon R \to R'$ λ-полукольца R в λ-

полукольцо R' с линейными элементами, что каждый элемент $u(x_i)$ является суммой линейных элементов из R'.

В расщепляемых λ-кольцах операции ψ^k обладают важными дополнительными свойствами.

2.9. Теорема. *Для любого расщепляемого λ-полукольца R отображения ψ^k: $R \to R$ являются гомоморфизмами полуколец и удовлетворяют соотношению*

$$\psi^k\psi^l = \psi^{kl}.$$

Доказательство. Пусть x, $y \in R$, и пусть u: $R \to R'$ — такой мономорфизм полуколец, что

$$u(x) = x_1 + \ldots + x_r \quad \text{и} \quad u(y) = y_1 + \ldots + y_s,$$

где $x_1, \ldots, x_r$, $y_1, \ldots, y_s$ — линейные элементы полукольца R. Тогда

$$u(\psi^k(xy)) = \psi^k(u(x)\,u(y)) = \sum_{i,j} \psi^k(x_iy_j) = \sum_{i,j} x_i^ky_j^k =$$
$$= \Big(\sum_i x_i^k\Big)\Big(\sum_j y_j^k\Big) = \Big(\sum_i \psi^k(x_i)\Big)\Big(\sum_j \psi^k(y_j)\Big) =$$
$$= \psi^k(u(x))\,\psi^k(u(y)) = u(\psi^k(x)\,\psi^k(y)).$$

Аналогично

$$u(\psi^k\psi^l(x)) = \psi^k\psi^l(u(x)) = \psi^k\psi^l(x_1 + \ldots + x_r) =$$
$$= \psi^k(x_1^l + \ldots + x_r^l) = x_1^{kl} + \ldots + x_r^{kl} =$$
$$= \psi^{kl}(x_1 + \ldots + x_r) = u(\psi^{kl}(x)).$$

Так как u является мономорфизмом, то, следовательно,

$$\psi^k(xy) = \psi^k(x)\,\psi^k(y) \quad \text{и} \quad \psi^k\psi^l(x) = \psi^{kl}(x).$$

Одной из основных целей этой главы является доказательство того, что операции ψ^k в λ-кольцах $K(X)$ и $KO(X)$ обладают указанными в теореме 2.9 свойствами, хотя кольца $K(X)$ и $KO(X)$, вообще говоря, и не расщепляемы.

2.10. Замечание. Если операции ψ^k на λ-полукольце R обладают свойствами, указанными в теореме 2.9, т. е.

(1) операции ψ^k являются морфизмами полуколец;

(2) имеют место равенства $\psi^k\psi^l = \psi^{kl}$,

то операции ψ^k в каждом λ-полукольце R', для которого существует мономорфизм λ-полуколец u: $R' \to R$, также обладают этими свойствами.

2.11. Определение. λ-полукольцо R с линейными элементами называется *λ-полукольцом с сопряжением*, если для него задан инволютивный λ-полукольцевой автоморфизм $*$: $R \to R$ (называемый *сопряжением*), такой что $xx^* = 1$ для всех $x \in L$.

2.12. Замечание. λ-кольца $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(X)$ и $K_{\mathbf{C}}(X)$ являются λ-кольцами с сопряжением относительно операции комплексного сопряжения векторных расслоений.

Для λ-полуколец с сопряжением мы определим операции ψ^k для отрицательных k формулой $\psi^{-k}(x) = \psi^k(x^*)$. Ясно, что $\psi^{-k}(x) = \psi^k(x)^*$, так что операции ψ^{-k} будут обладать свойствами (1) и (2) из п. 2.10, если этими свойствами обладают операции ψ^k.

3. ОПЕРАЦИИ γ^k

Как мы видели, операции ψ^k на λ-кольце R являются полиномиальными комбинациями операций λ^i. В теории колец представлений групп $\mathrm{Spin}(n)$ и в теории погружений гладких многообразий полезны также и некоторые другие операции, являющиеся линейными комбинациями операций λ^i.

3.1. Определение. Рассмотрим для λ-кольца R степенной ряд

$$\gamma_t(x) = \lambda_{t/(1-t)}(x).$$

Пусть $\gamma_t(x) = \sum_{i \geqslant 0} \gamma^i(x) t^i$. Тем самым для любого $i \geqslant 0$ в кольце R определяется некоторая операция γ^i: $R \to R$.

Таким образом,

$$\sum_{i \geqslant 0} \gamma^i(x) t^i = \sum_{i \geqslant 0} \lambda^i(x) t^i (1-t)^{-i} = \\ = \sum_{i \geqslant 0} \lambda^i(x) t^i (1 + it + \ldots).$$

Кроме того, ясно, что $\lambda_s(x) = \gamma_{s/(1+s)}(x)$.

3.2. Предложение. *Операции γ^i на λ-кольце R обладают следующими свойствами:*

(1) $\gamma^0(x) = 1$ и $\gamma^1(x) = x$ *для любого* $x \in R$;

(2) $\gamma^k(x+y) = \sum_{i+j=k} \gamma^i(x)\gamma^j(y)$ *для любых* x, $y \in R$;

(3) $\gamma^k(x) = \lambda^k(x) + \sum_{i<k} a_{i,k}\lambda^i(x)$,

$\lambda^k(x) = \gamma^k(x) + \sum_{i<k} b_{i,k}\gamma^i(x)$,

где $a_{i,k}$ и $b_{i,k}$ — некоторые целые числа.

Доказательство. Первые два соотношения непосредственно вытекают из соотношений

$$\gamma^0(x)=\lambda^0(x), \qquad \gamma^1(x)=\lambda^1(x),$$
$$\gamma_t(x+y)=\gamma_t(x)\gamma_t(y).$$

Последнее соотношение немедленно получается сравнением коэффициентов степенных рядов $\lambda_{t/(1-t)}(x)$ и $\gamma_{s/(1+s)}(x)$.

Операции γ^i используются в приложениях K-теории к задачам погружения многообразий. Нам они понадобятся в разд. 10 гл. 13.

3.3. Примеры. По определению

$$\begin{aligned}\gamma^0(x)+\gamma^1(x)t+\gamma^2(x)t^2+\gamma^3(x)t^3+\ldots &= \\ =\lambda^0(x)+\lambda^1(x)t(1+t+t^3+\ldots)&+\lambda^2(x)t^2(1+2t+\ldots)+ \\ &+\lambda^3(x)t^3(1+3t+\ldots)+\ldots.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\gamma^0(x)=\lambda^0(x)=1,\\ &\gamma^1(x)=\lambda^1(x)=x,\\ &\gamma^2(x)=\lambda^2(x)+\lambda^1(x),\\ &\gamma^3(x)=\lambda^3(x)+2\lambda^2(x)+\lambda^1(x),\\ &\gamma^4(x)=\lambda^4(x)+3\lambda^3(x)+3\lambda^2(x)+\lambda^1(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

4. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О G-МОДУЛЯХ

Пусть, как всегда, $F=\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$. Очевидно, что каждое конечномерное векторное F-пространство M обладает единственной топологией, в которой любой изоморфизм $F^n\to M$ является гомеоморфизмом. Эта топология индуцируется произвольной нормой в пространстве M.

В определениях и результатах этого и следующих трех разделов случай $F=\mathbf{H}$ требует некоторых изменений, вызванных некоммутативностью умножения кватернионов. Читателю предлагается самостоятельно внести эти изменения.

4.1. Определение. *Модулем* над топологической группой G (или, короче, *G-модулем*) называется конечномерное векторное пространство M, одновременно являющееся G-пространством, на котором группа G действует линейно.

Линейное преобразование G-модуля M, определенное элементом $s\in G$, мы будем обозначать символом s_M. Таким образом, по определению $s_M(x)=sx$ для любого элемента $x\in M$

Тот факт, что M является G-пространством, означает, что $1_M = 1$, $(st)_M = s_M t_M$ и $(s^{-1})_M = (s_M)^{-1}$. Кроме того, отображение $G \times M \to M$, определенное формулой $(s, x) \to s_M(x)$, непрерывно.

4.2. Пример. Обычное действие матриц на пространстве F^n превращает это пространство в $U_F(n)$-модуль, а также и в $SU_F(n)$-модуль.

Другие примеры G-модулей появятся далее по ходу дела.

4.3. Определение. Отображение $f\colon M \to N$ называется *G-гомоморфизмом* G-модулей (над F), если оно F-линейно и $f(sx) = sf(x)$ для любых элементов $s \in G$, $x \in M$.

Очевидно, что тождественное отображение $M \to M$ является G-гомоморфизмом и композиция $vu\colon M \to L$ произвольных G-гомоморфизмов $u\colon M \to N$ и $v\colon N \to L$ также является G-гомоморфизмом. Таким образом, все G-модули и все их G-гомоморфизмы составляют категорию.

Каждый G-гомоморфизм обладает ядром, образом и коядром, естественным образом являющимися G-модулями. Множество $\mathrm{Hom}_G(M, N)$ всех G-гомоморфизмов $M \to N$ является подпространством (при $F = \mathbf{H}$ лишь подгруппой) пространства $\mathrm{Hom}_F(M, N)$.

4.4. Определение. *Прямой суммой* G-модулей M и N называется пространство $M \oplus N$, действие группы G на котором определено формулой

$$s(x, y) = (sx, sy), \qquad s \in G, \ (x, y) \in M \oplus N.$$

Прямая сумма G-модулей является в категории G-модулей одновременно и произведением, и копроизведением. Разумеется, можно рассматривать и прямые суммы более чем двух слагаемых.

4.5. Определение. Пусть $F \neq \mathbf{H}$. *Тензорным произведением* G-модулей M и N и *внешней степенью* G-модуля M называются соответственно тензорное произведение $M \otimes N$ пространств M и N и внешняя степень $\Lambda^r M$ пространства M, действия группы G на которых определены формулами

$$s(x \otimes y) = sx \otimes sy, \qquad s \in G, \ x \in M, \ y \in N,$$

$$s(x_1 \wedge \ldots \wedge x_r) = sx_1 \wedge \ldots \wedge sx_r, \qquad s \in G, \ x_1, \ldots, x_r \in M.$$

Введенные операции над G-модулями связаны рядом соотношений. Например, имеет место следующее

4.6. Предложение. *Для любых одномерных G-модулей $M_1, \ldots, M_n$ G-модуль $\Lambda^r(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n)$ изоморфен G-модулю* $\sum_{i_1 < \ldots < i_r} M_{i_1} \otimes \ldots \otimes M_{i_r}$.

Доказательство. Изоморфизм $\Lambda^r(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n) \to \to \sum_{i_1 < \ldots < i_r} M_{i_1} \otimes \ldots \otimes M_{i_r}$ задается соответствием

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_r.$$

4.7. Определение. Для любых G-модулей M и N линейное пространство $\mathrm{Hom}_F(M, N)$ является G-модулем относительно действия группы G, определенного формулой

$$sf = s_N f s_M^{-1}, \quad s \in G, \ f \in \mathrm{Hom}_F(M, N).$$

Ясно, что $f \in \mathrm{Hom}_G(M, N)$ тогда и только тогда, когда $sf = f$ для каждого элемента $s \in G$.

Так как пространство F можно рассматривать как G-модуль с тождественным действием $sa = a$, то, в частности, двойственный к M модуль $M^+ = \mathrm{Hom}_F(M, \overline{F})$ антилинейных функционалов также является G-модулем.

4.8. Определение. G-модуль M называется *простым*, если он не имеет собственных G-подмодулей, т. е. таких подпространств $N \subset M$, что $sN = N$ при всех $s \in G$.

4.9. Предложение. *Если G-модуль M прост, то каждый G-гомоморфизм f: $M \to N$ либо тривиален, либо является мономорфизмом. Аналогично каждый G-гомоморфизм g: $L \to M$ либо тривиален, либо является эпиморфизмом.*

Доказательство. Поскольку ядро $\mathrm{Ker}\, f$ является, очевидно, G-подмодулем, то либо $\mathrm{Ker}\, f = M$, либо $\mathrm{Ker}\, f = 0$. Аналогично образ $\mathrm{Im}\, g$ также является G-подмодулем и потому либо $\mathrm{Im}\, g = 0$, либо $\mathrm{Im}\, g = M$.

Из этого предложения вытекает

4.10. Теорема (лемма Шура). *Каждый G-гомоморфизм f: $M \to N$ простых G-модулей M и N либо тривиален, либо является G-изоморфизмом. Если $M = N$ и $F = \mathbf{C}$, то f является умножением на некоторое число из* $\mathbf{C}$.

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из предложения 4.9. Для доказательства второго утверждения, выбрав произвольное собственное значение λ линейного преобразования f, рассмотрим G-подмодуль $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda) = L \subset M$. Так как $L \neq 0$, то $L = M$ и потому $f(x) = \lambda x$.

Доказательство следующего предложения проводится непосредственно, и мы оставляем его читателю (см. Картан, Эйленберг [1, гл. I]).

4.11. Предложение. *Для любого G-модуля M следующие утверждения равносильны:*

(1) *Модуль M является суммой простых G-подмодулей.*

(2) *Модуль M является прямой суммой простых G-подмодулей.*

(3) *Для каждого простого G-подмодуля $N \subset M$ существует такой G-подмодуль $N' \subset M$, что*

$$M = N \oplus N'.$$

4.12. Определение. G-модуль M называется *полупростым*, если он удовлетворяет условиям предложения 4.11.

В разд. 6 мы покажем, что для компактной группы G каждый G-модуль полупрост.

5. КОЛЬЦО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ G И ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Для произвольной топологической группы G мы символом $\mathbf{M}_F(G)$ будем обозначать множество классов $[M]$ изоморфных G-модулей M над F. Ясно, что относительно операций

$$[M] + [N] = [M \oplus N],$$
$$[M][N] = [M \otimes N] \quad (\text{при } F \neq \mathbf{H})$$

множество $\mathbf{M}_F(G)$ является полукольцом (при $F = \mathbf{H}$ — полугруппой). При $F \neq \mathbf{H}$ полукольцо $\mathbf{M}_F(G)$ является λ-полукольцом относительно отображений $\lambda^i[M] = [\wedge^i M]$.

5.1. Определение. *Кольцом представлений* $R_F(G)$ топологической группы G называется пополнение (см. определение **8.3.3**) полукольца $\mathbf{M}_F(G)$.

Элементы кольца $R_F(G)$ имеют вид $[M] - [N]$, где M и N — произвольные G-модули, и существует естественный гомоморфизм $\mathbf{M}_F(G) \to R_F(G)$. Согласно предложению 1.3, кольцо $R_F(G)$ при $F \neq \mathbf{H}$ естественным образом превращается в λ-кольцо.

5.2. Определение. Для произвольного непрерывного гомоморфизма $u\colon G \to H$ топологических групп и любого H-модуля M символом $u^*(M)$ мы будем обозначать G-модуль, получающийся из линейного пространства M, если задать на нем действие группы G формулой

$$sx = u(s)_M(x), \quad x \in M, \quad s \in G.$$

Ясно, что для любых H-модулей M и N имеют место равенства

$$u^*(M\oplus N)=u^*(M)\oplus u^*(N),$$
$$u^*(M\otimes N)=u^*(M)\otimes u^*(N),$$
$$u^*(\Lambda^r M)=\Lambda^r u^*(M).$$

Следовательно, формула $\mathbf{M}_F(u)[M]=[u^*(M)]$ определяет некоторый гомоморфизм λ-полуколец

$$\mathbf{M}_F(u)\colon \mathbf{M}_F(H)\to\mathbf{M}_F(G).$$

Индуцированный этнм гомоморфизмом гомоморфизм λ-колец $R_F(H)\to R_F(G)$ мы будем обозначать символом $R_F(u)$. Этот гомоморфизм однозначно определяется требованием коммутативности днаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_F(H) & \xrightarrow{\mathbf{M}_F(H)} & \mathbf{M}_F(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_F(H) & \xrightarrow{R_F(u)} & R_F(G) \end{array}$$

Без труда проверяется, что имеет место следующее

5.3. Предложеиие. *R_F является контравариантным функтором из категории топологических групп в категорию λ-колец (при $F=\mathbf{H}$ в категорию групп).*

Аналогично обозначениям для K-групп условимся обозначать кольцо $R_{\mathbf{C}}(G)$ символом $R(G)$, кольцо $R_{\mathbf{R}}(G)$ символом $RO(G)$ и группу $R_{\mathbf{H}}(G)$ символом $RSp(G)$.

5.4. Замечание. Связь между векторными расслоениями и G-модулями осуществляется следующим образом: по каждому локально тривиальному главному G-расслоению α над пространством X и по каждому G-модулю M можно построить, как мы знаем, расслоенное пространство $\alpha[M]$. Поскольку действие группы G на пространстве M линейно, расслоенное пространство $\alpha[M]$ естественным образом является векторным расслоением. Далее, так как

$$\alpha[M\oplus N]\approx\alpha[M]\oplus\alpha[N],$$
$$\alpha[M\otimes N]\approx\alpha[M]\otimes\alpha[N],$$
$$\alpha[\Lambda^i M]\approx\Lambda^i\alpha[M],$$

то отображение $\tilde{\alpha}\colon M_F(G)\to \mathrm{Vect}_F(X)$, индуцированное соответствием $M\mapsto\alpha[M]$, является гомоморфизмом λ-полуколец. Морфизм $\tilde{\alpha}$ продолжается до некоторого морфизма λ-колец $R_F(G)\to K_F(X)$, который мы будем обозначать тем же символом $\tilde{\alpha}$.

5.5. Пример. Будем рассматривать группу $\mathbf{Z}_2$ как подгруппу $\{1, -1\}$ единичной окружности S^1 комплексной плоскости. Тогда отображение α: $S^1 \to S^1 \operatorname{mod} \mathbf{Z}_2$ является главным $\mathbf{Z}_2$-расслоением. Легко видеть, что для стандартного представления $M = \mathbf{R}$ группы $O(1) = \mathbf{Z}_2$ в пространстве $\mathbf{R}$ векторное расслоение $\alpha[M]$ представляет собой каноническое линейное расслоение над $S^1 = RP^1$.

6. ПОЛУПРОСТОТА G-МОДУЛЕЙ ДЛЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП G.

Все топологические группы в этом разделе предполагаются компактными.

6.1. Мера Хаара. Пусть V — нормированное векторное пространство над F и G — компактная топологическая группа. Рассмотрим нормированное пространство $\mathbf{C}_V(G)$ всех непрерывных отображений f: $G \to V$ с нормой

$$\|f\| = \sup \|f(S)\|, \quad s \in G.$$ S мал.

При $V = \mathbf{R}$ положим $\mathbf{C}(G) = \mathbf{C}_{\mathbf{R}}(G)$.

Мерой Хаара на группе G называется линейное отображение μ: $\mathbf{C}(G) \to \mathbf{R}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) если $f \geqslant 0$, то $\mu(f) \geqslant 0$, причем если $f(s) > 0$ хотя бы одного элемеита $s \in G$, то $\mu(f) > 0$;

(2) $\mu(1) = 1$;

(3) $\mu(L_a f) = \mu(f)$, где $L_a f(s) = f(as)$ — сдвиг на элемент $a \in G$.

Известно (см., например, Понтрягин [1]), что такая мера всегда существует и единственна.

Число $\mu(f)$ называется *интегралом Хаара* функции f по группе G.

Для каждого конечномерного нормированного линейного пространства V мера Хаара однозначно определяет некоторую меру μ_V: $\mathbf{C}_V(G) \to V$, удовлетворяющую для произвольного $\mathbf{R}$-линейного отображения u: $V \to \mathbf{R}$ соотношению $u\mu_V(f) = \mu(uf)$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный базис пространства V и $f = f_1 e_1 + \ldots + f_n e_n \in \mathbf{C}_V(G)$, то по определению $\mu_V(f) = \mu(f_1) e_1 + \ldots + \mu(f_n) e_n$. ?

6.2. Определение. Скалярное произведение β (см. определение 3.9.1) на модуле M называется *G-инвариантным*, если $\beta(sx, sy) = \beta(x, y)$ для любых элементов $x, y \in M$ и $s \in G$. Линейное отображение c_β: $M \to M^+$, определенное формулой $c_\beta(x)(y) = \beta(x, y)$, называется *корреляцией* скалярного произведения β. Ясно, что скалярное произведение β тогда н только тогда G-инвариантно, когда его корреляция c_β является G-гомоморфизмом.

6.3. Предложение. *На любом G-модуле M существует G-инвариантное скалярное произведение β.*

Доказательство. Пусть $\beta'(x, y)$ — произвольное скалярное произведение на M. Поскольку для любых элементов x, $y \in M$ отображение $s \longmapsto \beta'(sx, sy)$ непрерывно, для него существует интеграл Хаара $\beta(x, y)$ по группе G. Из свойств меры μ немедленно следует, что $\beta(x, y)$ является G-инвариантным скалярным произведением на M.

6.4. Следствие. *Каждый простой G-модуль M изоморфен двойственному G-модулю M^+.*

Доказательство. Для любого G-инвариантного скалярного произведения β корреляция c_β: $M \to M^+$ является в силу леммы Шура G-изоморфизмом.

6.5. Теорема. *Каждый G-модуль M является полупростым G-модулем.*

Доказательство. Пусть L — произвольный простой G-подмодуль G-модуля M. Рассмотрим множество L' всех элементов $y \in M$, для которых $\beta(x, y) = 0$ при любом $x \in L$, где β — произвольное G-инвариантное скалярное произведение на M. Ясно, что L' является G-подмодулем и $L \cap L' = 0$. Кроме того, для каждого элемента $x \in M$ функционал $y \longmapsto \beta(x, y)$, $y \in L$, принадлежит G-модулю L^+ и потому при изоморфизме, обратном к изоморфизму c_β: $L \to L^+$ (см. следствие 6.4), переходит в некоторый элемент $z \in L$. Таким образом, для любого элемента $x \in M$ существует такой элемент $z \in L$, что $\beta(x, y) = \beta(z, y)$ для всех $y \in L$. Следовательно, элемент $z' = x - z$ принадлежит подмодулю L', так что $x = z + z'$, где $z \in L$, $z' \in L'$. Тем самым доказано, что $M = L \oplus L'$. Следовательно, G-модуль M полупрост (см. предложение 4.11).

6.6. Следствие. *Множество классов изоморфных простых G-модулей порождает группу $R_F(G)$.*

7. ХАРАКТЕРЫ И СТРОЕНИЕ ГРУППЫ $R_F(G)$

Следствие 6.6 утверждает, что классы изоморфных простых G-модулей порождают абелеву группу $R_F(G)$. В этом разделе мы покажем, что эти классы являются свободными образующими группы $R_F(G)$. Для этого мы воспользуемся характерами представлений группы G (термин „представление“ мы употребляем как синоним термина „G-модуль“). Группу G мы по-прежнему считаем произвольной компактной группой.

7.1. Определение. *Характером* χ_M представления M называется элемент кольца $\mathbf{C}_F(G)$, определенный соответствием $s \longmapsto \operatorname{Tr} s_M$. Подкольцо кольца $\mathbf{C}_F(G)$, порожденное характерами χ_M, обозначается символом $\operatorname{ch}_F(G)$.

Из известных свойств следа Tr немедленно вытекает следующее

7.2. Предложение. *Если G-модули M и N изоморфны, то $\chi_M = \chi_N$. Для любых G-модулей M и N имеют место равенства*

$$\chi_{M \oplus N} = \chi_M + \chi_N, \quad \chi_{M \otimes N} = \chi_M \chi_N.$$

Кроме того, $\chi_M(tst^{-1}) = \chi_M(s)$ для любых элементов $s, t \in G$.

Мы видим, в частности, что соответствие $[M] \longmapsto \chi_M$ определяет некоторый эпиморфизм колец $R_F(G) \to \operatorname{ch}_F(G)$.

7.3. Обозначения. Для каждого элемента $u \in \operatorname{Hom}_F(M, N)$ линейное отображение $s_N u s_M^{-1}$ непрерывно зависит от элемента $s \in G$. Его интеграл Хаара $\tilde{u}$ по группе G является, очевидно, некоторым элементом G-модуля $\operatorname{Hom}_G(M, N)$, причем $\tilde{u} = u$ тогда и только тогда, когда $u \in \operatorname{Hom}_G(M, N)$.

Для любых G-модулей M и N символом $\langle \chi_M, \chi_N \rangle$ мы будем обозначать интеграл Хаара функции $s \longmapsto \chi_M(s) \chi_N(s^{-1})$.

В следующей теореме устанавливаются так называемые *соотношения ортогональности Шура.*

7.4. Теорема. *Если простые G-модули M и N не изоморфны, то $\langle \chi_M, \chi_N \rangle = 0$. Если же модули M и N изоморфны, то $\langle \chi_M, \chi_N \rangle = 1$, если $F = \mathbf{C}$, и $\langle \chi_M, \chi_N \rangle > 0$, если $F = \mathbf{R}$.*

Доказательство. Пусть модули M и N не изоморфны. Поскольку функция $\chi_M(s) \chi_N(s^{-1})$ является суммой функций вида $a(s) b(s^{-1})$, где $a(s)$ и $b(s)$ — элементы матриц линейных преобразований s_M: $M \to M$ и s_N: $N \to N$ (в некоторых базисах), для доказательства равенства $(\chi_M, \chi_N) = 0$ достаточно доказать, что для любых матричных элементов $a(s)$ и $b(s)$ интеграл Хаара функции $a(s) b(s^{-1})$ равен нулю.

Рассмотрим произвольный F-линейный функционал f: $M \to F$ и произвольный элемент $y \in N$. Ясно, что формула $u(x) = f(x) y$, $x \in M$, определяет некоторое F-линейное отображение $u \in \operatorname{Hom}_F(M, N)$. Пусть $\tilde{u}$ — соответствующий этому F-линейному отображению G-гомоморфизм $M \to N$, получающийся интегрированием линейного преобразования $s_N u s_M^{-1}$ (см. п. 7.3). Так как G-модули M и N не изоморфны, то, согласно лемме Шура, $\tilde{u} = 0$. Другими словами, интеграл по группе G любого элемента матрицы преобразования $s u s_M^{-1}$ равен нулю.

Но ясно, что при соответствующем выборе j и y среди элементов матрицы преобразования $s_N u s_M^{-1}$ будет находиться и функция $b(s)a(s^{-1})$. Следовательно, интеграл от этой функции, а потому и интеграл от функции $a(s)b(s^{-1})$, равен нулю.

Пусть теперь $M = N$ и пусть $F = \mathbf{C}$. Выбрав произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства M, рассмотрим линейные преобразования $E_{i,j}$: $M \to M$, определенные формулой $E_{i,j}e_k = \delta_{i,k}e_j$. Пусть $E'_{i,j}$ — интеграл по группе G от $s_M E_{i,j} s_M^{-1}$, а $E''_{i,j}$ — интеграл по группе G от $s_M^{-1}E_{i,j}s_M$. Согласно теореме 4.10, G-эндоморфизм $E'_{i,j}$ является умножением на некоторое число $\lambda'_{i,j}$, а G-эндоморфизм $E''_{i,j}$ — умножением на некоторое число $\lambda''_{i,j}$. С другой стороны, очевидные вычисления показывают, что элемент матрицы $E'_{i,j}$ с индексами (k, l) равен элементу матрицы $E''_{k,l}$ с индексами (i, j). Следовательно, $\lambda'_{i,j}\delta_{k,l} = \lambda''_{k,l}\delta_{i,j}$, что возможно лишь тогда, когда $\lambda'_{i,j} = \lambda''_{i,j} = 0$ при $i \neq j$ и $\lambda'_{i,i} = \lambda''_{i,i} = \lambda$. Так как $E_{1,1} + \ldots + E_{n,n} = 1$, то $E'_{1,1} + \ldots + E'_{n,n} = 1$ и потому $n\lambda = 1$, т. е. $\lambda = 1/n$.

Ясно, что для любых элементов $a(s)$ и $b(s)$ матрицы линейного преобразования s_M интеграл от функции $a(s)b(s^{-1})$ является одним из элементов матрицы какого-то преобразования $E'_{i,j}$, причем если элементы $a(s)$ и $b(s)$ диагональны, то этот элемент диагонален лишь при $a = b$. Следовательно, интеграл от функции $a(s)b(s^{-1})$ для диагональных элементов $a(s)$ и $b(s)$ равен нулю, если $a \neq b$, и равен $\lambda = 1/n$, если $a = b$. Поэтому $\langle\chi_M, \chi_N\rangle = n(1/n) = 1$.

Заметим, что для любого (не обязательно простого) G-модуля N над полем $\mathbf{C}$ отсюда следует, что число (χ_N, χ_N) строго положительно. (Для доказательства достаточно разложить G-модуль N в прямую сумму простых G-модулей и воспользоваться доказанными соотношениями.)

Пусть, наконец, $F = \mathbf{R}$. Для любого простого G-модуля M над $\mathbf{R}$ рассмотрим G-модуль $N = M \otimes \mathbf{C}$ над $\mathbf{C}$. Ясно, что $\langle\chi_M, \chi_M\rangle = \langle\chi_N, \chi_N\rangle$. Поэтому $\langle\chi_M, \chi_M\rangle > 0$.

7.5. Следствие. *Классы изоморфных простых G-модулей M являются свободными образующими абелевой группы $R_F(G)$, и гомоморфизм колец $R_F(G) \to \mathrm{ch}_F(G)$, определенный соответствием $[M] \mapsto \chi_M$, является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно следствию 6.6, классы простых G-модулей порождают группу $R_F(G)$. Пусть некоторая их линейная комбинация $\sum_L a_L[L]$ равна нулю в $R_F(G)$. Тогда

$\sum\limits_L a_L\chi_L = 0$ в $\mathrm{ch}_F(G)$, и потому $\left\langle \sum\limits_L a_L\chi_L, \chi_M \right\rangle = a_M \langle \chi_M, \chi_M \rangle = 0$ для любого простого модуля M. Следовательно, $a_M = 0$. Одновременно доказано, что отображение $R_F(G) \to \mathrm{ch}_F(G)$ является изоморфизмом.

7.6. Следствие. *Если для G-модулей M и N имеет место равенство $\chi_M = \chi_N$, то эти модули изоморфны.*

Доказательство. Согласно следствию 7.5, модули M и N являются прямыми суммами одних и тех же простых G-модулей.

7.7. Следствие. *Если гомоморфизм компактных групп $u\colon G \to H$ обладает тем свойством, что для каждого элемента $t \in H$ существует элемент $s \in H$, для которого $sts^{-1} \in u(G)$, то индуцированный* R *этим гомоморфизмом гомоморфизм $R_F(u)\colon F_F(H) \to R_F(G)$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Если $R_F(u)[M] = R_F(u)[N]$, то $\chi_M u = \chi_{u^*(M)} = \chi_{u^*(N)} = \chi_N u$, и потому $\chi_M = \chi_N$, поскольку подгруппа N $u(G)$ пересекается с каждым классом сопряженных элементов группы H, а характеры постоянны на таких классах [см. предложение 7.2].

7.8. Следствие. *Для любого внутреннего автоморфизма $u\colon G \to G$ группы G гомоморфизм $R_F(u)$ является тождественным автоморфизмом кольца $R_F(G)$.*

Доказательство. Согласно предложению 7.2, автоморфизм u индуцирует тождественный автоморфизм кольца $\mathrm{ch}_F(G)$. Следовательно, этот автоморфизм индуцирует тождественный автоморфизм кольца $R_F(G)$.

Это следствие легко также вытекает и непосредственно из определения кольца $R_F(G)$.

8. МАКСИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ

Торы составляют один из важнейших классов компактных групп.

8.1. Определение. *Тором* $\mathbf{T}^n$ размерности n называется фактор-группа топологической группы $\mathbf{R}^n$ по ее дискретной подгруппе $\mathbf{Z}^n$. Топологическая группа, изоморфная n-мерному тору $\mathbf{T}^n$, также называется тором.

Мы будем предполагать известными следующие результаты из теории групп Ли, доказательства которых можно найти, например, у Шевалле [1].

8.2. Необходимые факты из теории групп Ли.

(1) *При $n \neq m$ торы $\mathbf{T}^n$ и $\mathbf{T}^m$ не изоморфны.*

Следовательио, имеет смысл говорить о *размерности* произвольного тора.

(2) *Топологическая группа тогда и только тогда является тором, когда она является компактной абелевой связной группой Ли.*

(3) *Каждый элемент компактной связной группы Ли G принадлежит некоторой подгруппе $T \subset G$, являющейся тором.*

(4) *Замкнутая подгруппа группы Ли является группой Ли.*

Мы примем следующее определение максимального тора топологической группы:

8.3. Определеиие. Подгруппа T компактной группы G называется *максимальным тором*, если она является тором и $G = \bigcup\limits_{s \in G} sTs^{-1}$.

Условие $G = \bigcup\limits_{s \in G} sTs^{-1}$ означает, что каждый класс сопряженных элементов группы G пересекается с подгруппой T. Поскольку подгруппа T связна, отсюда следует, что группа G тоже связна.

Максимальными торами обладают топологические связные группы весьма широкого класса. В частности, *каждая компактная связная группа Ли обладает максимальным тором.* Важность максимальных торов в теории представлений определяется тем фактом, что к вложению $T \to G$ макснмальиого тора T в группу G применимо следствие 7.7.

8.4. Примеры. Максимальными торами групп $U(n)$ и $SU(u)$ являются, как легко видеть, их подгруппы, состоящие из всех диагональных матриц. Обозначая через $D(\theta)$ матрицу вида

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

рассмотрим матрицы $D(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ порядка $2r$, являющиеся прямыми суммами матриц $D(\theta_1), \ldots, D(\theta_r)$, и матрицы $D(\theta_1, \ldots, \theta_r, *)$ порядка $2r+1$, являющиеся прямыми суммами матриц $D(\theta_1), \ldots, D(\theta_r)$, и матрицы первого порядка 1. Как можно показать, максимальным тором группы $SO(2r)$ является подгруппа, состоящая из всех матриц вида $D(\theta_1, \ldots, \theta_r)$, а максимальным тором группы $SO(2r+1)$ — подгруппа, состоящая из всех матриц вида $D(\theta_1, \ldots, \theta_r, *)$.

Нам понадобится также следующая теорема, являющаяся простой перефразировкой хорошо известной в теории чисел теоремы Кронекера (см. Харди, Райт [1, теорема **442**, стр. **380**]):

8.5. Теорема. *Если числа* $1, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ *линейно независимы над полем рациональных чисел* $\mathbf{Q}$, *то множество* $\{a^k\}$, $k \geqslant 0$, *где* a — *точка тора* $\mathbf{T}^n$, *соответствующая точке* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, *всюду плотно в* $\mathbf{T}^n$.

8.6. Определение. Элемент a топологической группы G называется *образующей*, если миожество $\{a^k\}$, $k \geqslant 0$, всюду плотно в группе G.

В этой терминологии теорема 8.5 утверждает, что *каждый тор обладает образующей*.

8.7. Теорема. *Пусть* G — *топологическая группа с максимальным тором* T. *Тогда всякий другой тор* $T' \subset G$ *содержится в одном из торов вида* sTs^{-1}, $s \in G$. *Тор* T' *максимален тогда и только тогда, когда* $T' = sTs^{-1}$ *для некоторого элемента* $s \in G$.

Доказательство. Пусть a — образующая тора T'. По определению максимального тора существует такой элемент $s \in G$, что $a \in sTs^{-1}$, и потому $a^k \in sTs^{-1}$ для всех $k \geqslant 0$. Следовательно, $T' \subset sTs^{-1}$.

Если $T' = sTs^{-1}$, $s \in G$, то $G = \bigcup\limits_{s \in G} sT's^{-1}$, и потому тор T' максимален. Обратно, если тор T' максимален, то $T' \subset sTs^{-1}$ и $T \subset tT't^{-1}$ для иекоторых элементов $s, t \in G$. Следовательно, $T \subset tsT(ts)^{-1}$, и потому $T = tsT(ts)^{-1}$ (ибо торы T и $tsT(ts)^{-1}$ имеют одну и ту же размерность). Но это возможно лишь при $T' = sTs^{-1}$.

8.8. Замечанне. Согласио теореме 8.7, максимальные торы группы G являются максимальными элементами частично упорядоченного по включению множества всех торов, содержащихся в группе G. Таким образом, если в группе G существуют максимальные торы, то частично упорядоченное множество торов, содержащихся в группе G, обладает максимальными элементами. Согласно одной теореме Э. Картана (см. Хант [1]), каждый максимальный элемент частично упорядоченного множества торов связной группы Ли является максимальным тором в смысле определения 8.3.

8.9. Определение. *Рангом* топологической группы G, обладающей максимальным тором T, называется размерность этого тора.

Согласно теореме 8.7, ранг группы G не зависит от выбора максимального тора $T \subset G$.

Можно усилить теорему 8.7 в плане замечания 8.8, доказав, что каждый максимальный тор компактной группы Ли является максимальным элементом множества всех замкнутых абелевых подгрупп этой группы. Для этого нам понадобится следующая

8.10. Лемма. *Если связная компонента T единицы абелевой группы Ли G является тором, а факторгруппа G/T представляет собой конечную циклическую группу, то группа G обладает образующей.*

Доказательство. Пусть a — образующая тора T и $b \in G$ — произвольный элемент, образ которого в G/T является образующей циклической группы G/T. Тогда $b^m \in T$, где m — порядок группы G/T, и потому в торе T существует такой элемент c, что $b^m c^m = a$.

Ясно, что элемент bc является образующей группы G.

8.11. Теорема. *Для любого тора T, содержащегося в связной компактной группе Ли G, и любого элемента $s \in G$, перестановочного со всеми элементами из T, существует такой тор $T' \subset G$, что $T \subset T'$ и $s \in T'$.*

Доказательство. Пусть A — замкнутая подгруппа группы G, порожденная тором T и элементом s, и пусть T_0 — связная компонента единицы группы A. Группа T_0 является связной компактной абелевой группой. Кроме того, она, будучи замкнутой (в силу компактности) подгруппой группы Ли G, сама является группой Ли. Следовательно, T_0 — тор. Рассмотрим факторгруппу A/T_0. Эта факторгруппа компактна и дискретна и потому конечна. Пусть A' — подгруппа группы A, порожденная тором T_0 и элементом s. Согласно лемме 8.10, группа A' обладает некоторой образующей x, и потому в группе G существует тор T', содержащий группу A'. По построению $T^0 \subset T'$ и $s \in T'$.

8.12. Замечание. Таким образом, для любого максимального тора T каждый элемент $s \in G$, перестановочный со всеми элементами из T, содержится в T. Следовательно, каждый максимальный тор является максимальным элементом частично упорядоченного множества абелевых подгрупп связной компактной группы Ли. Обратное ие верно: существуют максимальные замкнутые абелевы подгруппы, не являющиеся торами.

Символом N_T мы будем обозначать *нормализатор* тора $T \subset G$, т. е. множество всех элементов $s \in G$, для которых $sTs^{-1} = T$. Ясно, что тор T является нормальным делителем подгруппы N_T, и потому определена факторгруппа N_T/T.

8.13. Определение. Факторгруппа N_T/T называется *группой Вейля* $W(G)$ компактной группы G.

При $s \in N_T$ отображение $t \mapsto sts^{-1}$ является автоморфизмом группы T, тождественным при $s \in T$. Следовательно, группа $W(G)$ действует как группа автоморфизмов тора T. В следующей главе группы Вейля (и их действия на максимальных торах) будут вычислены для классических групп $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ и $\mathrm{Spin}(n)$.

8.14. Теорема. *Группа Вейля $W(G)$ любой компактной группы G конечна. Каждый ее отличный от единицы элемент определяет нетривиальный автоморфизм тора T.*

Доказательство. Второе утверждение немедленно следует из замечания 8.12. Чтобы доказать конечность группы $W(G)$, заметим, что группа N_T, а потому и группа $W(G)$ компактны. С другой стороны, действие произвольного элемента $u \in W(G)$ на торе T^n определяет некоторое линейное преобразование θ_u: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, для которого $\theta_u(\mathbf{Z}^n) \subset \mathbf{Z}^n$. Ясно, что соответствие $u \mapsto \theta_u | \mathbf{Z}^n$ инъективно и определяет непрерывное вложение компактной группы $W(G)$ в дискретное пространство целочисленных матриц. Но это возможно только в случае, когда группа $W(G)$ конечна.

8.15. Замечание. Пусть T — максимальный тор и W — группа Вейля группы G. Согласно следствию 7.7, гомоморфизм $R(G) \to R(T)$, индуцированный вложением $T \to G$, является мономорфизмом. Группа W действует на T и, следовательно, на $R(T)$. Подкольцо $R(T)^W$ кольца $R(T)$, состоящее из элементов, инвариантных относительно группы W, содержит образ кольца $R(G)$, ибо, согласно следствию 7.8, внутренние автоморфизмы группы G индуцируют тождественный автоморфизм кольца $R(G)$. Таким образом, мы можем считать, что

$$R(G) \subset R(T)^W.$$

В соответствии с этим нашим первым шагом в вычислении колец $R(G)$ будет вычисление кольца $R(T)$.

9. КОЛЬЦО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТОРА

Мы начнем с изложения некоторых общих результатов о кольцах представлений абелевых групп над полем комплексных чисел.

9.1. Теорема. *Если группа G абелева, то любой простой G-модуль M над полем $\mathbf{C}$ одномерен и каждое преобразование s_M, $s \in G$, является умножением на некоторое число $\lambda_s \in \mathbf{C}$. Соответствие $s \mapsto \lambda_s$ представляет собой гомоморфизм группы G в мультипликативную группу $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Так как группа G абелева, то для каждого элемента $s \in G$ отображение s_M: $M \to M$ является G-гомоморфизмом и потому, согласно теореме 4.10, представляет собой умножение на некоторое комплексное число λ_s. Но тогда каждое одномерное подпространство пространства M является G-подмодулем и потому совпадает с M. Следовательно, $\dim_{\mathbf{C}} M = 1$. Наконец, ясно, что $\lambda_s\lambda_t x = \lambda_{s+t}x$.

9.2. Пример. Каждому набору целых чисел $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$ отвечает одномерное представление тора $\mathbf{T}^n$, определенное формулой

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) z = \exp[2\pi i (k_1\theta_1 + \ldots + k_n\theta_n)] z, \qquad (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbf{T}^n.$$

Это представление мы будем обозначать символом $M(k_1, \ldots, k_n)$.

Так как $s(x \otimes y) = sx \otimes sy$, то

$$M(k_1, \ldots, k_n) \otimes M(l_1, \ldots, l_n) = M(k_1 + l_1, \ldots, k_n + l_n).$$

9.3. Теорема. *Каждый простой $\mathbf{T}^n$-модуль изоморфен одному из модулей вида $M(k_1, \ldots, k_n)$. Кольцо $R(\mathbf{T}^n)$ является кольцом многочленов*

$$\mathbf{Z}\left[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}\right],$$

где α_i — класс модулей, изоморфных модулю

$$M(0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 9.1 и из того факта, что каждый гомоморфизм $\mathbf{T}^n \to \mathbf{C}^*$ имеет вид

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \to \exp[2\pi i (k_1\theta_1 + \ldots + k_n\theta_n)].$$

Для доказательства второго утверждения заметим, что произведение $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}$ определяется модулем $M(k_1, \ldots, k_n)$. Поэтому эти произведения составляют $\mathbf{Z}$-базис кольца $R(\mathbf{T}^n)$.

9.4. Замечание. Согласно замечанию 8.15, из теоремы 9.3 вытекает, что для любой группы G кольцо $R(G)$ является подкольцом кольца многочленов $\mathbf{Z}\left[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}\right]$, где n — ранг группы G. Это уже дает некоторую информацию о строении кольца $R(G)$.

9.5. Теорема. *Кольцо комплексных представлений $R(G)$ произвольной топологической группы G с максимальным тором T является расщепляемым λ-кольцом с сопряжением. Для кольца действительных представлений $RO(G)$ операция комплексификации $\varepsilon_U([L]) = [L \otimes \mathbf{C}]$ задает мономорфизм λ-колец ε_U: $RO(G) \to R(G)$.*

Доказательство. Тот факт, что кольцо $R(G)$ расщепляется, следует из существования мономорфизма $R(G) \to R(T)$, поскольку все элементы кольца $R(T)$, имеющие вид $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} = [M(k_1, \ldots, k_n)]$, линейны. Сопряжение * на кольце $R(G)$ задается формулой $[M]^* = [\bar{M}]$, где $\bar{M}$ — модуль, комплексно сопряженный с модулем M (по определению ax в $\bar{M}$ равно $\bar{a}x$ в M). Очевидно, что $(\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n})^* = \alpha_1^{-k_1} \ldots \alpha_n^{-k_n}$.

Наконец, пусть ε_O: $R(G) \to RO(G)$ — гомоморфизм колец, задаваемый ограничением поля $\mathbf{C}$ до поля $\mathbf{R}$. Ясно, что $\varepsilon_O(\varepsilon_U(x)) = 2x$.

Поскольку группа $R(G)$ является свободной абелевой группой (следствие 7.5), гомоморфизм ε_U является мономорфизмом. Таким образом, к кольцам $R(G)$ и $RO(G)$ применима теорема 2.9 и замечание 2.12.

10. ОПЕРАЦИИ ψ^k НА КОЛЬЦАХ $K(X)$ И $KO(X)$

Вернемся теперь к кольцам $K(X)$ и $KO(X)$. Мы хотим доказать, что в этих кольцах имеет место соотношение $\psi^k\psi^l = \psi^{kl}$ и что операции ψ^k являются гомоморфизмами колец. Для этого мы воспользуемся тем, что, согласно сказанному выше, это справедливо для колец представлений $R(G)$ и $RO(G)$ произвольной компактной группы Ли G с максимальным тором.

Докажем сначала несколько предварительных результатов.

10.1. Предложение. *Для любого n-мерного векторного расслоения ξ и произвольного линейного расслоения ζ над одним и тем же пространством X расслоения $\Lambda^{n+1}(\xi \oplus \zeta)$ и $\Lambda^n(\xi) \otimes \zeta$ изоморфны над X.*

Доказательство. Соответствующее утверждение для векторных пространств, очевидно, справедливо. Поэтому оно справедливо и для векторных расслоений (см. следствие 5.6.4).

10.2. Следствие. *Каждый класс векторных расслоений $\{\xi\}$ в кольце $KO(X)$ имеет вид $a_1 - a_2$, где a_1 — класс некоторого ориентируемого векторного расслоения*[1]*, а a_2 — класс некоторого линейного расслоения.*

Доказательство. Применим предложение 10.1 к расслоению $\zeta = \Lambda^n \xi$, где n — размерность расслоения ξ. Тогда

---

[1]) Напомним, что действительное векторное расслоение называется *ориентируемым*, если его можно определить как $SO(n)$-расслоение. — *Прим. ред.*

расслоение $\xi \oplus \Lambda^n \xi$ ориентируемо и $\{\xi\} = \{\xi \oplus \Lambda^n \xi\} - \{\Lambda^n \xi\}$ в $KO(X)$.

Как и выше, k-ю тензорную степень расслоения ζ мы будем обозначать символом ζ^k.

10.3. Предложение. *Для любого n-мерного векторного расслоения ξ и произвольного линейного расслоения ζ над одним и тем же пространством X расслоения $\Lambda^k(\xi) \otimes \zeta^k$ и $\Lambda^k(\xi \otimes \zeta)$ изоморфны над X. В кольцах $K(X)$ и $KO(X)$ имеет место соотношение*

$$\psi^k(\{\xi\}\{\zeta\}) = \psi^k(\{\xi\})\,\psi^k(\{\zeta\}).$$

Доказательство. Для векторных пространств имеет место функторнальный изоморфизм $\Lambda^k(\xi \otimes \zeta) \approx \Lambda^k(\xi) \otimes \zeta^k$. Поэтому аналогичный изоморфизм имеет место и для векторных расслоений.

Таким образом,

$$\lambda^k(\{\xi\}\{\zeta\}) = \lambda^k(\{\xi\})\{\zeta\}^k \quad \text{в} \quad K(X) \text{ и } KO(X).$$

Ввиду соотношений, указанных в предложении 2.5, отсюда индукцией по k немедленно вытекает, что $\psi^k(\{\xi\}\{\zeta\}) = \psi^k(\{\xi\})\,\psi^k(\{\zeta\})$.

10.4. Обозначения. Символом ρ_m мы будем обозначать при $F = \mathbf{C}$ стандартное представление группы $U(m)$ как группы линейных преобразований пространства $\mathbf{C}^m$ и его класс в кольце $R(U(m))$, а при $F = \mathbf{R}$ — стандартное представление группы $SO(m)$ как группы линейных преобразований пространства $\mathbf{R}^m$ и его класс в кольце $RO(SO(m))$. В обозначениях, введенных в замечании 5.4, любое m-мерное векторное расслоение ξ над пространством X (при $F = \mathbf{R}$ любое ориентированное векторное расслоение) изоморфно расслоению $\tilde{\alpha}(\rho_m)$, где α — главное расслоение, ассоциированное с расслоением ξ.

Отсюда вытекает, что для любых (ориентированных при $F = \mathbf{R}$) векторных расслоений ξ и η над пространством X при $F = \mathbf{C}$ гомоморфизм $(\widetilde{\alpha \oplus \beta})\colon R(U(m) \oplus U(n)) \to K(X)$, а при $F = \mathbf{R}$ гомоморфизм $(\widetilde{\alpha \oplus \beta})\colon RO(SO(m) \oplus SO(n)) \to KO(X)$, где m и n — размерности расслоений ξ и η, а α и β — ассоциированные главные расслоения, обладают тем свойством, что

$$(\widetilde{\alpha \oplus \beta})(\rho_m \oplus 0) = \tilde{\alpha}(\rho_m) = \{\xi\}$$

и

$$(\widetilde{\alpha \oplus \beta})(0 \oplus \rho_n) = \tilde{\beta}(\rho_n) = \{\eta\}.$$

Теперь мы уже без труда можем доказать нашу основную теорему.

10.5. Теорема. *Операции Адамса ψ^k в кольцах $K(X)$ и $KO(X)$ являются гомоморфизмами колец и удовлетворяют соотношению $\psi^k\psi^l = \psi^{kl}$.*

Доказательство. Согласно теореме 9.5, операции ψ^k в кольцах $R(U(m)\oplus U(n))$ и $RO(SO(m)\oplus SO(n))$ обладают этими свойствами (заметим, что если линейные группы G и G' обладают максимальными торами T и T', то группа $G\oplus G'$ обладает максимальным тором $T\oplus T'$). В силу соотношения $\psi^k(\alpha\oplus\beta) = (\widetilde{\alpha\oplus\beta})\psi^k$ и сделанных выше замечаний отсюда следует, что теорема 10.5 справедлива для кольца $K(X)$ и для подгруппы кольца $KO(X)$, порожденной ориентируемыми действительными расслоениями. Для завершения доказательства остается теперь воспользоваться следствием 10.2 и предложением 10.3.

10.6. Замечание. Согласно замечанию 2.12, на кольцах $K(X)$ и $KO(X)$ определены также и операции ψ^{-k}, $k\geqslant 0$, причем операция ψ^{-1} на линейных расслоениях ξ действует как комплексное сопряжение. Для этих операций теорема 10.5 также справедлива.

11. ОПЕРАЦИИ ψ В КОЛЬЦЕ $\tilde{K}(S^n)$

Вычислим сначала для любых пространств X действие операций ψ^k на линейных расслоениях.

11.1. Предложение. *Для любого линейного расслоения ζ над пространством X имеют место соотношения*

$$\psi^k(\{\zeta\}) = \{\zeta\}^k.$$

При этом если $(\{\zeta\}-1)^2 = 0$, *то*

$$\psi^k(\{\zeta\}-1) = k(\{\zeta\}-1).$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предложения 2.3. Второе проверяется непосредственным вычислением:

$$\psi^k(\{\zeta\}-1) = \{\zeta\}^k - 1 = (\{\zeta\}-1+1)^k - 1 = k(\{\zeta\}-1).$$

Напомним [см. теорему 10.5.5], что $\tilde{K}(S^{2m+1}) = 0$ и $\tilde{K}(S^{2m}) = \mathbf{Z}\beta_{2m}$, где $\beta_{2m}^2 = 0$, причем при естественном мономорфизме

$$\tilde{K}(S^{2m}) \to \tilde{K}(S^2\times\ldots\times S^2)$$

образующая β_{2m} переходит в элемент $a_1, \ldots, a_m$ кольца $\tilde{K}(S^2 \times \ldots \times S^2)$, являющийся произведением таких элементов a_i, что $a_i^2 = 0$ и $a_i = \{\zeta_i\} - 1$, где ζ_i — некоторое линейное расслоение над $S^2 \times \ldots \times S^2$. Следовательно, элемент $\psi^k(\beta_{2m})$ переходит при указанном мономорфизме в произведение $\psi^k(a_1) \ldots \psi^k(a_m) = k^m a_1 \ldots a_m$ (см. предложение 11.1). Тем самым доказана

11.2. Теорема. *Для образующей* β_{2m} *бесконечной циклической группы* $\tilde{K}(S^{2m})$ *имеет место соотношение*

$$\psi^k(\beta_{2m}) = k^m \beta_{2m}.$$

Глава 13

КОЛЬЦА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

В предыдущей главе было выяснено, какое важное значение для изучения колец $K(X)$ имеют кольца $R(G)$. В этой главе мы займемся систематическим вычислением колец $R(G)$ для классических групп $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$ и $\operatorname{Spin}(n)$. Кроме этого, мы изучим действительные представления группы $\operatorname{Spin}(n)$, успешно использованные Боттом в решении проблемы векторных полей.

1. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей и $R[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от n неизвестных. Пусть, далее, S_n — группа всех биективных отображений $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, т. е., иначе говоря, симметричная группа всех перестановок из n элементов. Каждая перестановка $\tau \in S_n$ определяет автоморфизм кольца $R[x_1, \ldots, x_n]$, переводящий многочлен $P \in R[x_1, \ldots, x_n]$ в многочлен ${}^{\tau}P(x_1, \ldots, x_n) = P(x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_n})$.

1.1. Определение. Многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется *симметрическим*, если ${}^{\tau}P(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n)$ для каждой перестановки $\tau \in S_n$.

1.2. Пример. В кольце $R[x_1, \ldots, x_n, z]$ рассмотрим произведение $\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (z + x_i)$. Запишем это произведение в виде многочлена от z с коэффициентами в кольце $R[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\prod (z + x_i) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \sigma_i(x_1, \ldots, x_n) z^{n-i}.$$

Так как произведение $\prod (z + x_i)$ инвариантно относительно действия группы S_n, то все коэффициенты $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ являются симметрическими многочленами. Они называются *элементар-*

ными симметрическими функциями. Вместо σ_i мы иногда будем писать σ_i^n, чтобы указать на число переменных, от которых зависит функция σ_i.

1.3. Замечания. Ясно, что $\sigma_0^n = 1$, $\sigma_1^n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$, $\sigma_n^n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$ и, вообще, $\sigma_k^n(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, где суммирование распространено на все индексы $i_1, \ldots, i_k$, удовлетворяющие неравенствам $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$. Условимся считать, что $\sigma_i^n = 0$ при $i > n$. Очевидно, что $\sigma_i^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sigma_i^n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ и что функции σ_i^n являются однородными многочленами степени i.

1.4. Пример. Для любого многочлена $g(y_1, \ldots, y_m)$ многочлен $g(\sigma_1^n, \ldots, \sigma_m^n)$ является симметрическим многочленом от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

1.5. Определение. *Весом* одночлена $y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}$ в кольце $R[y_1, \ldots, y_m]$ называется число $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m$. *Весом* произвольного многочлена называется наибольший из весов одночленов, входящих в этот многочлен с отличными от нуля коэффициентами.

Если многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$ имеет вес k, то симметрический многочлен $g(\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_m(x_1, \ldots, x_n))$ от $x_1, \ldots, x_n$ имеет степень k.

1.6. Теорема. *Подкольцо $R[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ кольца $R[x_1, \ldots, x_n]$ содержит все симметрические многочлены и является кольцом многочленов от элементарных симметрических функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.*

Доказательство. Первое утверждение мы докажем индукцией по числу переменных n и по степени k симметрического многочлена. Если $n = 1$, то $\sigma_1(x) = x_1$ и теорема очевидна. Пусть теперь f — симметрический многочлен степени k от n переменных. Предполагая, что теорема уже доказана для всех симметрических многочленов от n переменных степени, не превосходящей $k-1$, и для всех симметрических многочленов от $n-1$ переменных, мы можем написать, что $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1', \ldots, \sigma_{n-1}')$, где $\sigma_i'(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sigma_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \sigma_i^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Рассмотрим симметрический многочлен $f_1(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - g(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$. Ясно, что $f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$, так что многочлен f_1 делится на x_n. Но, являясь симметрическим многочленом, многочлен f_1 делится тогда и на $\sigma_n = x_1, \ldots, x_n$. Таким образом, $f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_n f_2(x_1, \ldots, x_n) + g(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$, где f_2 — некоторый симметрический многочлен степени, меньшей k. По предположению индукции $f_2(x_1, \ldots, x_n) = g_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и, значит, $f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_n g_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) + g(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) = h(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Для доказательства алгебраической независимости многочленов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ мы снова воспользуемся индукцией по n. При $n=1$ имеем только один многочлен $\sigma_1 = x_1$, и теорема очевидна. Предположим теперь, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0$, где f — некоторый многочлен, степень которого по σ_n имеет наименьшее возможное значение m. Разложив многочлен f по степеням многочлена σ_n, мы получим, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f_m(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})(\sigma_n)^m + \ldots + f_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) = 0$. Положив здесь $x_n = 0$ и учитывая, что тогда $\sigma_n = 0$, мы немедленно получим, что $f_0(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}) = 0$. Следовательно, по предположению индукции многочлен f_0 тождественно равен нулю. Поэтому многочлен $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ можно сократить на σ_n, что противоречит минимальности его степени m.

1.7. Следствие. *Существуют такие „универсальные“ многочлены s^n_k от n переменных, что $x_1^k + \ldots + x_n^k = s^n_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.*

Более или менее явную формулу для многочленов s^n_k можно получить, используя кольцо формальных степенных рядов $R[[t]]$. Напомним, что формальный ряд $a_0 + a_1 t + \ldots$ тогда и только тогда обратим в кольце $R[[t]]$, когда его свободный член a_0 обратим в кольце R. В частности, множество $1 + R[[t]]^+$ всех формальных рядов вида $1 + a_1 t + \ldots$ является группой по умножению.

1.8. Предложение. *В группе $1 + R[[t]]^+$ имеет место тождество*

$$\sum_{k\geqslant 0} s^n_k(y_1, \ldots, y_n)(-t)^k = -t\left[\frac{d}{dt} f(t)\right]/f(t),$$

где $f(t) = 1 + y_1 t + \ldots + y_n t^n$.

Доказательство. Мы докажем это тождество в кольце $R[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \subset R[x_1, \ldots, x_n]$, а затем заменим σ_i на y_i. Итак, пусть $f(t) = 1 + \sigma_1 t + \ldots + \sigma_n t^n$. Тогда $f(t) = (1 + x_1 t) \ldots (1 + x_n t)$, и потому

$$-t\left[\frac{d}{dt} f(t)\right]/f(t) = -t\frac{d}{dt}\ln(f(t)) =$$

$$= -\frac{tx_1}{1+x_1 t} - \ldots - \frac{tx_n}{1+x_n t} = \sum_{k\geqslant 1}(x_1^k + \ldots + x_n^k)(-t)^k =$$

$$= \sum_{k\geqslant 1} s^n_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(-t)^k.$$

2. МАКСИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ ГРУПП $SU(n)$ И $U(n)$

Для ортонормального базиса $x_1, \ldots, x_n$ пространства $\mathbf{C}^n$ мы символом $T(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать подгруппу группы $U(n)$, состоящую из всех $u \in U(n)$, для которых $u(x_j) = a_j x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где a_j — некоторые числа (зависящие от u), а символом $ST(x_1, \ldots, x_n)$ — подгруппу $T(x_1, \ldots, x_n) \cap SU(n)$ группы $SU(n)$. Напомним, что каждый ортонормальный базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства $\mathbf{C}^n$ имеет вид $w(e_1), \ldots, w(e_n)$, где $w \in U(n)$, а $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис пространства $\mathbf{C}^n$. При этом элемент w однозначно определяется базисом $x_1, \ldots, x_n$. Если $w \in SU(n)$, то базис $x_1, \ldots, x_n$ называется *специальным*.

2.1. Теорема. *Подгруппа $T(x_1, \ldots, x_n)$ для любого базиса $x_1, \ldots, x_n$ является максимальным тором группы $U(n)$, а подгруппа $ST(x_1, \ldots, x_n)$ для любого специального базиса $x_1, \ldots, x_n$ — максимальным тором группы $SU(n)$. Ранг группы $U(n)$ равен n, а ранг $SU(n)$ равен $n-1$. Группой Вейля групп $U(n)$ и $SU(n)$ является симметрическая группа перестановок координат $(a_1, \ldots, a_n)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что каждый элемент $u \in T(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно определяется числами a_j, удовлетворяющими соотношениям $u(x_j) = a_j x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, причем набор $(a_1, \ldots, a_n)$ чисел $a_j \in \mathbf{C}$ тогда и только тогда соответствует некоторому элементу $u \in T(x_1, \ldots, x_n)$, когда $|a_j| = 1$ для всех j. Для элементов из $ST(x_1, \ldots, x_n)$ при этом добавляется еще соотношение $a_1 \ldots a_n = 1$. Следовательно, группа $T(x_1, \ldots, x_n)$ является n-мерным тором, а группа $ST(x_1, \ldots, x_n)$ — $(n-1)$-мерным тором. Далее ясно, что

$$wT(e_1, \ldots, e_n)w^{-1} = T(w(e_1), \ldots, w(e_n))$$

для любого элемента $w \in U(n)$ и

$$wST(e_1, \ldots, e_n)w^{-1} = ST(w(e_1), \ldots, w(e_n))$$

для любого элемента $w \in SU(n)$. Поэтому, не уменьшая общности, мы можем ограничиться лишь торами $T(e_1, \ldots, e_n)$ и $ST(e_1, \ldots, e_n)$.

Пусть u — произвольный элемент группы $U(n)$. Как известно, в пространстве $\mathbf{C}^n$ существует базис $x_1, \ldots, x_n$, состоящий из собственных векторов линейного преобразования u. Это означает, что $u(x_j) = a_j x_j$, т. е. что $u \in T(x_1, \ldots, x_n)$. С другой стороны, существует такой элемент $w \in U(n)$, что $x_j = w(e_j)$, и, значит, $u \in wT(e_1, \ldots, e_n)w^{-1}$. Следовательно, $U(n) = \bigcup_{w \in U(n)} wT(e_1, \ldots, e_n)w^{-1}$, так что тор $T(e_1, \ldots, e_n)$ является максимальным тором группы $U(n)$. Если $u \in SU(n)$, то векторы x_j мы можем умножить на подходящее число a с $|a|=1$, так чтобы преобразование w стало принадлежать группе $SU(n)$ и имело бы место равенство $a_1 \ldots a_n = 1$. Поэтому $SU(n) = \bigcup_{w \in SU(n)} wST(e_1, \ldots, e_n)w^{-1}$, так что тор $ST(e_1, \ldots, e_n)$ является максимальным тором группы $SU(n)$.

Чтобы вычислить группы Вейля, мы рассмотрим произвольный элемент u тора $ST(e_1, \ldots, e_n)$ (или тора $T(e_1, \ldots, e_n)$), для которого $a_j \neq a_k$ при $j = k$. Если w и w^{-1} принадлежит тору $ST(e_1, \ldots, e_n)$ (соответственно тору $T(e_1, \ldots, e_n)$), то $wuw^{-1}(e_j) = b_j e_j$ и потому $uw^{-1}(e_j) = b_j w^{-1}(e_j)$. Но по определению $u(e_j) = a_j e_j$ и $a_j \neq a_k$ при $j \neq k$. Следовательно, для любого j существует такое k и такое комплексное число a (где $|a|=1$), что $w^{-1}(e_j) = ae_k$ (причем $b_j = a_k$). Если при этом $w \notin ST(e_1, \ldots, e_n)$ (или соответственно $w \notin T(e_1, \ldots, e_n)$), то $j \neq k$ хотя бы для одного значения j. Тем самым доказано, что группа Вейля W группы $SU(n)$ (или $U(n)$) мономорфно отображается в группу всех перестановок множества $\{e_1, \ldots, e_n\}$. С другой стороны, ясно, что это отображение эпиморфно. Например, элемент $w \in SU(n)$, для которого $w(e_1) = e_2$, $w(e_2) = -e_1$ и $w(e_i) = e_i$ при $i \geqslant 3$, определяет элемент группы w, которому соответствует транспозиция первых двух элементов миожества $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

wuw^{-1} u

3. КОЛЬЦА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $SU(n)$ И $U(n)$

Теперь у нас уже все готово для вычисления колец $R(U(n))$ и $R(SU(n))$. В доказываемой ниже теореме символом λ_i обозначается элемент кольца $R(U(n))$ или кольца $R(SU(n))$, определенный i-й внешней степенью $\bigwedge^i \mathbf{C}^n$ пространства $\mathbf{C}^n$, стандартным образом рассматриваемого как модуль над группой $U(n)$ (или группой $SU(n)$ соответственно); если, как и в п. 12.10.4, обозначить через ρ_n элемент λ-кольца $R(U(n))$ или λ-кольца $R(SU(n))$, соответствующий модулю $\mathbf{C}^n$, то будет иметь место равенство $\lambda_i = \lambda^i(\rho_n)$.

3.1. Теорема. *Элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ кольца $R(U(n))$ алгебраически независимы, и это кольцо является кольцом многочленов $\mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}]$. Вложение кольца $R(U(n))$ в кольцо многочленов $R(\mathbf{T}^n) = \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$ определяется формулами*

$$\lambda_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}.$$

Кольцо $R(SU(n))$ является кольцом многочленов $\mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]$.

Доказательство. Пространство $\mathbf{C}^n$, рассматриваемое как $T(e_1, \ldots, e_n)$-модуль, является прямой суммой одномерных подмодулей, соответствующих элементам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Отсюда в силу предложения 12.4.6 и определения элементов λ_k немедленно вытекает, что элементы λ_k являются элементарными симметрическими функциями $\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}$ от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и, следовательно, алгебраически независимы (см. теорему 12.9.3 и теорему 1.6). Кроме того, ясно, что элемент $\lambda_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ соответствует одномерному представленню, определенному формулой $uy = (\det u)y$, $u \in U(n)$, и потому элемент λ_n^{-1} соответствует одномерному представлению $uy = (\det u)^{-1} y$. Поскольку $\mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}] \subset R(U(n)) \subset R(\mathbf{T}^n)^W \subset R(\mathbf{T}^n)$, для доказательства равенства $R(U(n)) = \mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}]$ нам осталось, таким образом, лишь показать, что $\mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}] \supset R(\mathbf{T}^n)^W$, т. е. что кольцо $\mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}]$ содержит все многочлены $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ от $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$, инвариантные относительно любых перестановок элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Но ясно, что любой такой многочлен имеет вид $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \lambda_n^{-k} g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где g — некоторый многочлен от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, инвариантный относительно любых перестановок элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и потому имеющий вид $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (теорема 1.6). Следовательно, $f \in \mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}]$.

Для вычисления кольца $R(SU(n))$ достаточно теперь заметить, что кольцо $R(ST(e_1, \ldots, e_n))$ является факторкольцом кольца $R(T(e_1, \ldots, e_n))$ по идеалу, порожденному элементом $\lambda_n - 1 = \alpha_1 \ldots, \alpha_n - 1$.

4. МАКСИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ ГРУППЫ $Sp(n)$

4.1. Описание группы $Sp(n)$. При отождествлении пространства $\mathbf{H}$ с пространством $\mathbf{C}^{2n}$ умножение на кватернионную единицу j переходит в антилинейное отображение $J\colon \mathbf{C}^{2n} \to \mathbf{C}^{2n}$, для которого $J(e_i) = e_{i+n}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $J(e_i) = -e_{i-n}$ при $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$. Это отображение обладает тем свойством, что $J^2 = -1$. Соответствующая отображению J форма $\beta(x, y) = (x \mid J(y))$ на пространстве $\mathbf{C}^n$ *косоэрмитова*, т. е. $\beta(y, x) = -(J^2(y) \mid J(x)) = -(J(y) \mid x) = -\overline{\beta(x, y)}$. В координатах $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{C}^{2n}$ эта форма имеет вид

$$\beta(x, y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i \bar{y}_{i+n} - x_{i+n} \bar{y}_i).$$

С другой стороны, отождествление $\mathbf{H}^n = \mathbf{C}^{2n}$ позволяет также рассматривать группу $Sp(n)$ как подгруппу группы $U(2n)$. Легко видеть при этом, что элемент $u \in U(2n)$ тогда и только тогда принадлежит $Sp(n)$, когда $uJ = Ju$, или, другими словами, когда $\beta(u(x), u(y)) = \beta(x, y)$. Для диагональных матриц $u = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{2n}) \in U(2n)$ условие $uJ = Ju$ означает, что $a_i = \bar{a}_{i+n}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.

Пусть $T(x_1, \ldots, x_n)$ — подгруппа группы $Sp(n)$, состоящая из элементов $u \in Sp(n)$, для которых $u(x_k) = \exp(2\pi i\theta_k) x_k$, где $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — произвольные действительные числа, а $(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторый ортонормальный базис пространства $\mathbf{H}^n$ (ср. разд. 2). Отметим, что любой ортонормальный базис $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{H}^n$ имеет вид $(w(e_1), \ldots, w(e_n))$, где $(e_1, \ldots, e_n)$ — канонический базис пространства $\mathbf{H}^n$, а w — некоторый элемент группы $Sp(n)$.

4.2. Теорема. *Для любого ортонормального базиса $x_1, \ldots, x_n$ пространства $\mathbf{H}^n$ группа $T(x_1, \ldots, x_n) \subset Sp(n)$ является максимальным тором группы $Sp(n)$. Ранг группы $Sp(n)$ равен n. Ее группа Вейля порождается всевозможными перестановками координат $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ и всевозможными отображениями вида $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \to (\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_n)$. Порядок группы Вейля равен $2^n n!$.*

Доказательство. Поскольку, так же как и в случае группы $U(n)$, имеет место равенство $wT(x_1, \ldots, x_n) w^{-1} = T(w(x_1), \ldots, w(x_n))$, мы можем ограничиться рассмотрением подгруппы $T(e_1, \ldots, e_n)$. Тот факт, что эта подгруппа является n-мерным тором, очевиден, поскольку она состоит из всех диагональных элементов $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_{2n})$ группы $U(2n)$, для которых $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$ и $a_i = \bar{a}_{i+n}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Для доказательства того, что тор $T(e_1, \ldots, e_n)$ максимален, достаточно показать, что каждый элемент $w \in Sp(n)$ принадлежит одному из торов $T(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим с этой целью произвольный собственный нормированный вектор x_1 линейного преобразования w пространства $\mathbf{C}^{2n}$. Легко видеть, что вектор $J(x_1)$ также будет собственным вектором этого преобразования. Действительно, если $w(x_1) = a_1 x_1$, то $w(J(x_1)) = J(w(x_1)) = J(a_1 x_1) = \bar{a}_1 J(x_1)$. Отсюда очевидной индукцией следует, что пространство $\mathbf{C}^{2n}$ обладает базисом, состоящим из собственных векторов вида $x_1, J(x_1), \ldots, x_n, J(x_n)$. Но тогда ясно, что векторы $x_1, \ldots, x_n$ составляют ортонормальный базис пространства $\mathbf{H}^n$, обладающий тем свойством, что $w \in T(x_1, \ldots, x_n)$. Максимальность тора $T(e_1, \ldots, e_n)$ тем самым полностью доказана.

Для вычисления группы Вейля рассмотрим произвольный элемент $u \in T(e_1, \ldots, e_n)$, для которого $a_j \neq a_k$ при $k \neq j$, где a_k — такие комплексные числа, что $u(e_k) = a_k e_k$ (таким образом,

$a_k = \exp(2\pi_i\theta_k))$. Если $wuw^{-1} \in T(e_1, \ldots, e_n)$, то $wuw^{-1}(e_k) = b_k e_k$ и потому $uw^{-1}(e_k) = b_k w^{-1}(e_k)$.

Следовательно, для любого k существует такое l и такое комплексное число a, что $w^{-1}(e_k) = ae_l$, причем b_k будет равно либо a_l, либо $\bar{a}_l$. Таким образом, автоморфизм $u \to wuw^{-1}$ переставляет координаты и, возможно, переводит их в сопряженные. С другой стороны, ясно, что все такие перестановкн координат и все их сопряжения действительно можно получить подходящим выбором элемента w. Следовательно, группа Вейля W имеет описанный в теореме вид.

5. НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА В КОЛЬЦАХ МНОГОЧЛЕНОВ

Для вычисления кольца $R(Sp(n))$ нам понадобятся некоторые формальные тождества в кольце $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$.

5.1. Предложение. *Существует такой многочлен $f_m(y) \in \mathbf{Z}[y]$, что $x^m + x^{-m} = f_m(x + x^{-1})$. Этот многочлен определяется рекуррентной формулой*

$$f_{m+1}(y) = yf_m(y) - f_{m-1}(y)$$

с начальными условиями $f_0(y) = 1$ и $f_1(y) = y$.

Доказательство. Так как

$$(x^m + x^{-m})(x + x^{-1}) = (x^{m+1} + x^{-(m+1)}) + (x^{m-1} + x^{-(m-1)}),$$

то многочлены f_m (если они существуют) действительно удовлетворяют соотношению $y f_m(y) = f_{m+1}(y) + f_{m-1}(y)$. С другой стороны, это соотношение единственным образом определяет некоторые многочлены, которые и являются искомыми.

5.2. Предложение. *Любой многочлен $f \in R[x, x^{-1}]$, где R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, удовлетворяющий соотношению $f(x) = f(1/x)$, принадлежит подкольцу $R[x + x^{-1}] \subset R[x, x^{-1}]$.*

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum\limits_m a_m x^m$. Так как $f(x) = f(1/x)$, то $a_m = a_{-m}$. Следовательно, $f(x) = \sum\limits_{m \geqslant 0} a_m (x^m + x^{-m}) = \sum\limits_{m \geqslant 0} a_m f_m(x + x^{-1})$, где f_m — многочлены, указанные в предложении 5.1.

5.3. Следствие. *Если многочлен $f \in R[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$ обладает тем свойством,* что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_r) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_i^{-1}, \ldots, \alpha_r)$$

для каждого i, то $f \in R[\alpha_1 + \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n + \alpha_n^{-1}]$.

Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные симметрические функции от r переменных $\alpha_1 + \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r + \alpha_r^{-1}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — первые r элементарных симметрических функций от $2r$ переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r^{-1}$ (случай 1) или от $2r+1$ переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r^{-1}, 1$ (случай 2).

5.4. Предложение. *Имеют место включения* $\lambda_1 \ldots \lambda_r \in \mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r]$. *Более того, для любого* $k \leqslant r$ *имеет место равенство*[1])

$$\lambda_k = \sigma_k + \sum_{l<k} a_{kl}\sigma_l,$$

где $a_{kl} \in \mathbf{Z}$. *Многочлены* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *алгебраически независимы и* $\mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r] = \mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$.

Доказательство. Достаточно доказать равенства $\lambda_k = \sigma_k + \sum_{l<k} a_{kl}\sigma_l$, так как все другие утверждения отсюда уже легко следуют. Ясно, что каждый одночлен вида $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant r$ и $\varepsilon_j = \pm 1$, встречается в многочлене σ_k один и только один раз. С другой стороны, многочлен λ_k является, очевидно, суммой одночленов вида $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_l}^{\varepsilon_l}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant r$ и $l \leqslant k$, причем каждый одночлен такого вида с $l = k$ входит в λ_k один и только один раз. Поэтому многочлен $\lambda_k - \sigma_k$ содержит только одночлены $\alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_l}^{\varepsilon_l}$ с $l < k$. С другой стороны, если такой одночлен входит в $\lambda_k - \sigma_k$ с некоторым коэффициентом a, то любой одночлен, получающийся из этого всевозможными перестановками индексов $i_1, \ldots, i_l$ и всевозможными изменениями знаков показателей ε_j, также входит в $\lambda_k - \sigma_k$ с коэффициентом a. Из этого замечания уже непосредственно вытекает (посредством очевидной индукции), что $\lambda_k - \sigma_k = \sum_{l<k} a_{kl}\sigma_l$.

Добавление редактора перевода

Целью раздела 5 является по существу вычисление подкольца $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]^W$ кольца $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$, состоящего из всех многочленов, инвариантных относительно группы W, порожденной перестановками образующих

[1]) В этом равенстве суммирование производится от $l = 0$, причем по определению считается, что $\sigma_0 = 1$. — *Прим. ред.*

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и подстановками вида $\alpha_j \mapsto \alpha_j^{\varepsilon_j}$, где $\varepsilon_j = \pm 1$. Это вычисление производится в два шага. Первый шаг: из следствия 5.3 тривиальным образом вытекает, что

$$\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]^W = \mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r].$$

Действительно, включение $\mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r] \subset \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$ очевидно. С другой стороны, любой многочлен $f \in \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]^W$ принадлежит, согласно следствию 5.3, кольцу $\mathbf{Z}[\alpha_1 + \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r + \alpha_r^{-1}]$ и, очевидно, инвариантен относительно всех перестановок элементов $\alpha_1 + \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r + \alpha_r^{-1}$. Следовательно, $f \in \mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r]$.

Второй шаг (независимый от первого), которому посвящено предложение 5.4, состоит в доказательстве алгебраической независимости многочленов $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ и в установлении равенства

$$\mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r] = \mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_r].$$

Следует подчеркнуть, что по существу здесь доказаны две теоремы: одна, относящаяся к случаю, когда под $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ понимаются первые r элементарных симметрических функций от $2r$ переменных $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}$, и вторая, относящаяся к случаю, когда под $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ понимаются первые r элементарных симметрических функций от $2r+1$ переменных $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, 1$. Например, в первом случае $\lambda_1 = \sigma_1$, $\lambda_2 = \sigma_2 + r$, а во втором $\lambda_1 = \sigma_1 + 1$, $\lambda_2 = \sigma_2 + \sigma_1 + r$. В обоих случаях многочлены $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ оказываются алгебраически независимыми.

Аналогичным образом можно вычислить и кольцо $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]^W$, отвечающее группе W, порожденной всевозможными перестановками образующих $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и всеми подстановками $\alpha_j \mapsto \alpha_j^{\varepsilon_j}$, где $\varepsilon_j = \pm 1$ и $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = 1$. В первую очередь устанавливается, что это кольцо порождено многочленами $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \sigma_r^+$ и σ_r^-, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}$, как и выше, — элементарные симметрические функции от $\alpha_1 + \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r + \alpha_r^{-1}$, а σ_r^+ и σ_r^- — многочлены, определенные формулами

$$\sigma_r^+ = \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = +1}} \alpha_1^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r}, \quad \sigma_r^- = \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = -1}} \alpha_1^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r}.$$

(С многочленом σ_r многочлены σ_r^+ и σ_r^- связаны соотношением $\sigma_r = \sigma_r^+ + \sigma_r^-$.) Затем вводятся многочлены

$$\lambda_r^+ = \sum_{\substack{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = +1}} \alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_r}^{\varepsilon_r}, \quad \lambda_r^- = \sum_{\substack{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = -1}} \alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_r}^{\varepsilon_r}$$

(связанные с многочленом λ_r, построенным для случая 1, соотношением $\lambda_r = \lambda_r^+ + \lambda_r^-$) и устанавливается, что $\lambda_r^\pm = \sigma_r^\pm + \sum_{l<r} a_l\sigma_l$. Следовательно, в этом случае кольцо $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]^W$ порождается многочленами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r^+, \lambda_r^-$ (эти многочлены алгебраически зависимы: например, как далее будет показано, $(\lambda_r^+ + \lambda_{r-2} + \ldots)(\lambda_r^- + \lambda_{r-2} + \ldots) = (\lambda_{r-1} + \lambda_{r-3} + \ldots)^2$).

Основную трудность здесь представляет собой, конечно, доказательство того, что любой инвариантный многочлен f выражается через многочлены $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \sigma_r^+, \sigma_r^-$. По-видимому, проще всего это можно доказать, заметив, что любой многочлен из кольца $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$ единственным образом выражается как многочлен от $\alpha_1 + \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r + \alpha_r^{-1}, \alpha_1 - \alpha_1^{-1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_r - \alpha_r^{-1}$, линейный по $\alpha_1 - \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r - \alpha_r^{-1}$. Отсюда легко вытекает, что любой многочлен, инвариантный относительно группы W и меняющий знак при подстановках $\alpha_j \mapsto \alpha_j^{\varepsilon_j}$ с $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = -1$, имеет вид $(\alpha_1 - \alpha_1^{-1}) \ldots (\alpha_r - \alpha_r^{-1}) g = (\sigma_r^+ - \sigma_r^-) g$, где g — некоторый многочлен от $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Этим свойством обладает, в частности, многочлен $f - f'$, где f — произвольный инвариантный относительно группы W многочлен, а f' — результат применения к нему подстановки $\alpha_1 \mapsto \alpha_1^{-1}$, $\alpha_i \mapsto \alpha_i$, $i \geqslant 2$. Поскольку многочлен $f + f'$ выражается, согласно доказанному выше, через $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, отсюда следует, что многочлен $f = \frac{f+f'}{2} + \frac{f-f'}{2}$ выражается через $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \sigma_r, \sigma_r^+, \sigma_r^-$, т. е. через $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1}, \sigma_r^+, \sigma_r^-$.

6. КОЛЬЦО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $Sp(n)$

Пусть λ_i — элемент кольца $R(Sp(n))$, соответствующий i-й внешней степени $\Lambda^i \mathbf{C}^{2n}$ пространства $\mathbf{C}^{2n} = \mathbf{H}^n$, стандартным образом определенного как $Sp(n)$-модуль.

6.1. Теорема. *Кольцо $R(Sp(n))$ является кольцом многочленов $\mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. При вложении кольца $R(Sp(n))$ в кольцо $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$ элемент λ_k соответствует k-й элементарной симметрической функции от $2n$ переменных $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$.*

Доказательство. Пространство $\mathbf{C}^{2n} = \mathbf{H}$, рассматриваемое как $T(e_1, \ldots, e_n)$-модуль, является прямой суммой $2n$ одномерных подмодулей, соответствующих элементам $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$. Поэтому, согласно предложению 12.4.6, элементы λ_k

являются элементарными симметрическими функциями от элементов $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$. Таким образом, $\mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \subset R(Sp(n)) \subset \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]^W$.

С другой стороны, поскольку группа Вейля W порождается всевозможными перестановками элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и подстановками вида $\alpha_i \to \alpha_i^{\pm 1}$, то, согласно следствию 5.3, $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]^W = \mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические функции от n переменных $\alpha_1 + \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n + \alpha_n^{-1}$. Для завершения доказательства остается заметить, что, согласно предложению 5.4, $\mathbf{Z}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \mathbf{Z}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$.

7. МАКСИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ И ГРУППА ВЕЙЛЯ ГРУППЫ $SO(n)$

Для произвольного ортонормального базиса $x_1, \ldots, x_n$ пространства $\mathbf{R}^n$ мы будем символом $T(x_1, \ldots, x_n)$ обозначать подгруппу группы $SO(n)$, состоящую из таких элементов $u \in SO(n)$, что $u(\mathbf{R}x_{2i-1} \oplus \mathbf{R}x_{2i}) \subset \mathbf{R}x_{2i-1} \oplus \mathbf{R}x_{2i}$ при $1 \leqslant i \leqslant n/2$. Очевидно, что $u|(\mathbf{R}x_{2i-1} \oplus \mathbf{R}x_{2i}) \in SO(2)$, и если n нечетно, то $u(x_n) = x_n$. Пусть, как всегда, $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда любой другой ортонормальный базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства $\mathbf{R}^n$ имеет вид $w(e_1), \ldots, w(e_n)$, где $w \in O(n)$. Если $w \in SO(n)$, то базис $x_1, \ldots, x_n$ мы будем называть *специальным*. Ясно, что базис $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда специален, когда $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = ae_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ с $a > 0$. Очевидно, что $T(x_1, \ldots, x_n) = wT(e_1, \ldots, e_n)w^{-1}$.

Произвольный элемент группы $SO(2)$ имеет вид

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & -\cos 2\pi\theta \end{bmatrix}.$$

Для любых $\theta_1, \ldots, \theta_r$ мы символом $D(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ будем обозначать элемент $\operatorname{diag}(D(\theta_1), \ldots, D(\theta_r))$ группы $SO(2r)$ и элемент $\operatorname{diag}(D(\theta_1), \ldots, D(\theta_r), 1)$ группы $SO(2r+1)$ (ср. п. 12.8.4). Тогда группа $T(e_1, \ldots, e_n)$ состоит, очевидно, из всевозможных преобразований вида $D(\theta_1, \ldots, \theta_r)$, $0 \leqslant \theta_i < 1$.

7.1. Теорема. *Для любого специального базиса $x_1, \ldots, x_n$ пространства $\mathbf{R}^n$ подгруппа $T(x_1, \ldots, x_n)$ является максимальным тором группы $SO(n)$. Ранг группы $SO(n)$ равен r, если $n = 2r$ или $2r+1$. Группа Вейля W группы $SO(2r+1)$ порождается всевозможными перестановками координат $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ и всеми подстановками вида $(\theta_1, \ldots, \theta_r) \to (\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_r)$. Ее порядок равен $2^r r!$. Группа Вейля W группы $SO(2r)$ порож-*

дается всевозможными перестановками координат $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ *и всеми подстановками вида* $(\theta_1, \ldots, \theta_r) \to (\varepsilon_1\theta_1, \ldots, \varepsilon_r\theta_r)$, *где* $\varepsilon_i = \pm 1$ *и* $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = 1$. *Ее порядок равен* $2^{r-1}r!$.

Доказательство. Ясно, что группа $T(e_1, \ldots, e_n)$ является r-мерным тором как при $n = 2r$, так и при $n = 2r + 1$. Поскольку $wT(e_1, \ldots, e_n)w^{-1} = T(w(e_1), \ldots, w(e_n))$, для доказательства максимальности тора $T(e_1, \ldots, e_n)$ достаточно показать, что каждый элемент $u \in SO(n)$ принадлежит некоторому тору $T(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $c = a + bi$ — комплексное собственное значение линейного преобразования u, отвечающее собственному вектору $x_1 + ix_2$. Так как $u(x_1 + ix_2) = (a + ib)(x_1 + ix_2) = (ax_1 - bx_2) + i(bx_1 + ax_2)$ и $|a + ib| = 1$, то на $\mathbf{R}x_1 \oplus \mathbf{R}x_2$ преобразование u имеет вид $D(\theta_1)$ для некоторого $0 < \theta_1 < 1$. Если же все собственные значения преобразования u действительны (и равны, следовательно, ± 1), то векторы x_1 и x_2, обладающие этим свойством, также, очевидно, существуют (причем $\theta_1 = 0$ или $1/2$). Применяя то же самое рассуждение к ограничению преобразования u на ортогональном дополнении к $\mathbf{R}x_1 + \mathbf{R}x_2$, мы очевидной индукцией построим такой специальный базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства $\mathbf{R}^n$, что $u \in T(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, тор $T(e_1, \ldots, e_n)$ максимален.

Вычислим теперь группу Вейля. Так же, как в случае группы $SU(n)$, все перестановки координат $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ индуцируются, очевидно, некоторыми внутренними автоморфизмами группы $SO(n)$. Далее, так как $\operatorname{diag}(-1, 1)D(\theta)\operatorname{diag}(-1, 1) = D(-\theta)$, то, трансформируя матрицу $D(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ с помощью матрицы $\operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, -1)$, мы при $n = 2r + 1$ получим, очевидно, матрицу $D(-\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$, а при $n = 2r$ — матрицу $D(-\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{r-1}, -\theta_r)$. Отсюда вытекает, что группа Вейля группы $SO(n)$, во всяком случае, не меньше группы, указанной в формулировке теоремы. Покажем, что она и не больше. Пусть $u = D(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ — элемент из $T(e_1, \ldots, e_n)$, для которого $\theta_i \neq \theta_j$ при $i \neq j$, и пусть w — такой элемент группы $SO(n)$, что $wuw^{-1} \in T(e_1, \ldots, e_n)$. Преобразование u, рассматриваемое в силу естественного вложения как элемент группы $U(n)$, имеет собственные векторы $e_{2j-1} \pm ie_{2j}$ с собственными значениями $\exp(\pm 2\pi i\theta_j)$, где $1 \leqslant j \leqslant r = [n/2]$. Поэтому, согласно результату, полученному при доказательстве теоремы 2.1, отображение $u \mapsto wuw^{-1}$ индуцирует некоторую перестановку элементов e_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Но любая такая перестановка представляет собой перестановку параметров, сопровождаемую некоторой подстановкой вида $(\theta_1, \ldots, \theta_r) \mapsto (\pm\theta_1, \ldots, \pm\theta_r)$. Тем самым теорема 7.1 полностью доказана.

8. МАКСИМАЛЬНЫЕ ТОРЫ И ГРУППА ВЕЙЛЯ ГРУППЫ Spin (n)

8.1. Обозначения. Пусть φ: $\operatorname{Spin}(n) \to SO(n)$ — эпиморфизм, определенный формулой $\varphi(u)x = uxu^*$, $u \in \operatorname{Spin}(n)$, $x \in \mathbf{R}^n$ (см. разд. 9 гл. 11). Рассмотрим гомоморфизм ω_j: $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \operatorname{Spin}(n)$, задаваемый формулой

$$\omega_j(\theta) = \cos 2\pi\theta e_{2j-1} + \sin 2\pi\theta e_{2j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n/2.$$

Ясно, что $\omega_j\left(\theta + \frac{1}{2}\right) = -\omega_j(\theta)$. Кроме того,

$$[\varphi\omega_j(\theta)]\, e_k = \begin{cases} e_k, & \text{если } k \neq 2j-1,\ 2j, \\ e_{2j-1}\cos 4\pi\theta + e_{2j}\sin 4\pi\theta, & \text{если } k = 2j-1, \\ -e_{2j-1}\sin 4\pi\theta + e_{2j}\cos 4\pi\theta, & \text{если } k = 2j. \end{cases}$$

Другими словами, $\varphi\omega_j(\theta) = D(0, \ldots, 0, 2\theta, 0, \ldots, 0)$ для всех $\theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Определим теперь отображение ω: $\mathbf{T}^r \to \operatorname{Spin}(n)$, $r = [n/2]$, формулой $\omega(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \omega_1(\theta_1) \ldots \omega_r(\theta_r)$, $(\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \mathbf{T}^r$ и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & T' = T'(e_1, \ldots, e_n) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \operatorname{Spin}(n) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbf{T}^r \arrow[ur, "\omega"] \arrow[dr, "\varphi\omega"'] & & \\
 & T = T(e_1, \ldots, e_n) \arrow[r] & SO(n)
\end{tikzcd}$$

где $T' = \omega(\mathbf{T}^r)$.

Ядро $\operatorname{Ker}\omega$ отображения ω состоит, как легко видеть, из элементов $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ тора $\mathbf{T}^r$, для которых $\theta_i \equiv 0$ или $\frac{1}{2} \pmod 1$ и $\theta_1 + \ldots + \theta_r \equiv 0 \pmod 1$; число таких элементов равно 2^{r-1}. Ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ отображения φ состоит из двух элементов $+1$ и -1. Отображение $\varphi\omega$: $\mathbf{T}^r \to T(e_1, \ldots, e_n)$ задается формулой

$$\varphi\omega(\theta_1, \ldots, \theta_r) = (2\theta_1, \ldots, 2\theta_r).$$

Мы видим, в частности, что $T' = T'(e_1, \ldots, e_n)$ является r-мерным тором.

8.2. Предложение. *Тор $T'(e_1, \ldots, e_n)$ является максимальным тором группы* Spin (n). *Группа Вейля группы* Spin (n) *совпадает с группой Вейля группы $SO(n)$.*

Доказательство. Пусть u — такой элемент группы $\operatorname{Spin}(n)$, что $uT'(e_1, \ldots, e_n)u^{-1} = T'(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда

$$\varphi(u)\,\varphi(T'(e_1, \ldots, e_n))\,\varphi(u)^{-1} = \varphi(T'(e_1, \ldots, e_n)),$$

т. е.

$$\varphi(u)\,T(e_1, \ldots, e_n)\,\varphi(u)^{-1} = T(e_1, \ldots, e_n).$$

Следовательно, $N_{T'} = \varphi^{-1}(N_T)$ и $T' = \varphi^{-1}(T)$. Поэтому группа $N_{T'}/T'$ изоморфна группе N_T/T и $\bigcup\limits_{u \in \mathrm{Spin}(n)} uTu^{-1} = \mathrm{Spin}(n)$.

Кольцо [1]) представлений $R(T)$ тора $T = T(e_1, \ldots, e_n)$ является, согласно теореме 12.9.3, кольцом многочленов $Z[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$, где α_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, — базисные одномерные представления, задаваемые формулами

$$D(\theta_1, \ldots, \theta_r) z = \exp(2\pi i \theta_i) z, \quad z \in \mathbf{C}$$

(см. пример 12.9.2). Аналогичные базисные представления для тора $\mathbf{T}^r$ мы обозначим символами $\alpha_1^{1/2}, \ldots, \alpha_r^{1/2}$. Эти обозначения оправдываются тем, что при гомоморфизме $R(T) \to R(\mathbf{T}^r)$, индуцированном отображением $\varphi\omega$: $\mathbf{T}^r \to T$, образующие α_i переходят в квадраты $(\alpha_i^{1/2})^2$ образующих $\alpha_i^{1/2}$. Поэтому этот гомоморфизм является мономорфизмом и кольцо $R(T)$ мы можем отождествить с подкольцом $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$ кольца

$$\mathbf{Z}[\alpha_1^{1/2}, \alpha_1^{-1/2}, \ldots, \alpha_r^{1/2}, \alpha_r^{-1/2}] = R(\mathbf{T}^r).$$

Рассмотрим теперь кольцо представлений $R(T')$ тора T'. Из сказанного выше непосредственно следует, что на этом торе можно задать такие координаты $0 \leqslant \theta_1' \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant \theta_r' \leqslant 1$, что отображение ω: $\mathbf{T}^r \to T'$ будет задаваться соответствием $(\theta_1, \ldots, \theta_r) \mapsto (2\theta_1, \ldots, 2\theta_{r-1}, \theta_1 + \ldots + \theta_r)$, а отображение φ: $T' \to T$ — соответствием $(\theta_1', \ldots, \theta_r') \mapsto D(\theta_1', \ldots, \theta_{r-1}', 2\theta_r' - \theta_1' - \ldots - \theta_{r-1}')$. Поэтому базисные образующие $\alpha_1', \ldots, \alpha_{r-1}', \alpha_r'$ кольца $R(T')$, соответствующие этим координатам, будут обладать тем свойством, что при гомоморфизме $R(T') \to R(\mathbf{T}^r)$, индуцированном отображением ω, они будут переходить в элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, (\alpha_1 \ldots \alpha_2)^{1/2}$ кольца $R(\mathbf{T}^r)$. Это показывает, что гомоморфизм $R(T') \to R(\mathbf{T}^r)$ является мономорфизмом, причем если его считать вложением, то кольцо $R(T')$ совпадет с подкольцом

$$\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r-1}^{-1}, (\alpha_1 \ldots \alpha_r)^{1/2}, (\alpha_1 \ldots \alpha_r)^{-1/2}] = \\ = \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, (\alpha_1 \ldots \alpha_r)^{1/2}]$$

кольца $\mathbf{Z}[\alpha_1^{1/2}, \alpha_1^{-1/2}, \ldots, \alpha_r^{1/2}, \alpha_r^{-1/2}]$. Кроме того, при гомоморфизме $R(T) \to R(T')$, индуцированном отображением φ, базисные образующие $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ и α_r кольца $R(T)$ будут переходить в элементы $\alpha_1' = \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}' = \alpha_{r-1}$ и $(\alpha_r')^2 (\alpha_{r-1}')^{-1} \ldots (\alpha_1')^{-1} = \alpha_r$ кольца $R(T')$. Тем самым доказано следующее

[1]) Отсюда и до конца раздела текст автора изменен. — *Прим. ред.*

8.3. Предложение. *Гомоморфизм* $\varphi\colon T' \to T$ *индуцирует вложение кольца* $R(T) = \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$ *в кольцо* $R(T') = \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, (\alpha_1 \ldots \alpha_r)^{1/2}]$.

9. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $SO(n)$ И $\mathrm{Spin}(n)$

Все модули над группой $\mathrm{Spin}(n)$ разбиваются естественным образом на два класса: класс модулей, на которые элемент $-1 \in \mathrm{Spin}(n)$ действует тождественно, и класс, где элемент -1 действует не тождественно. Первый класс состоит из модулей, получающихся из $SO(n)$-модулей с помощью естественного гомоморфизма $\varphi\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$, второй возникает из модулей Клиффорда над алгеброй C_k (см. гл. 11).

9.1. Предложение. *Для любого* $\mathrm{Spin}(n)$*-модуля* M *существует такой* $SO(n)$*-модуль* M_1 *и такой* C_{n-1}*-модуль* M_2, *что модуль* M *разлагается в прямую сумму* $M_1 \oplus M_2$ *модуля* M_1, *рассматриваемого как* $\mathrm{Spin}(n)$*-модуль в силу гомоморфизма* $\varphi\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$, *и модуля* M_2, *рассматриваемого как* $\mathrm{Spin}(n)$*-модуль в силу гомоморфизма* $\mathrm{Spin}(n) \to C_{n-1}$, *являющегося композицией вложения* $\mathrm{Spin}(n) \subset C_n^0$ *и изоморфизма* $C_n^0 \approx C_{n-1}$.

Доказательство. Поскольку $(-1)^2 = 1$, модуль M разлагается в прямую сумму подмодулей M_1 и M_2, на первом из которых элемент $-1 \in \mathrm{Spin}(n)$ действует тождественно, а на втором — как умножение на число -1. Ясно, что модуль M_1 является $SO(n)$-модулем. Покажем, что M_2 можно определить как C_{n-1}-модуль. С этой целью заметим, что линейные преобразования модуля M_2, соответствующие элементам e_ie_n группы $\mathrm{Spin}(n)$, обладают всеми свойствами линейных преобразований u_i из теоремы 11.2.4 и, следовательно, определяют на M_2 некоторое ортогональное умножение. Но тогда, как мы знаем (см. замечание 11.2.5), пространство M_2 естественным образом определяется как C_{n-1}-модуль. Для завершения доказательства остается заметить, что это строение C_{n-1}-модуля переходит, очевидно, в исходное строение $\mathrm{Spin}(n)$-модуля при гомоморфизме $\mathrm{Spin}(n) \to C_{n-1}$, являющемся композицией вложения $\mathrm{Spin}(n) \subset C_n^+$ и изоморфизма $C_n^+ \approx C_{n-1}$ (см. предложение 11.6.2).

9.2. Некоторые $SO(n)$-модули. Рассматривая пространство $\mathbf{R}^n$ обычным образом как $SO(n)$-модуль, обозначим через λ_i элементы колец $R(SO(n))$ и $R(\mathrm{Spin}(n))$, соответствующие модулям

$\Lambda^i \mathbf{R}^n$. При отождествлении кольца $R(SO(n))$ с подкольцом кольца $R(T)=\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$, а кольца $R(\mathrm{Spin}(n))$ с подкольцом кольца $R(T')=\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, (\alpha_1\ldots\alpha_r)^{1/2}]$, где $r=[n/2]$, элементы λ_i перейдут в i-е элементарные симметрические функции от $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}$ при $n=2r$ и от $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, 1$ при $n=2r+1$. Это непосредственно следует из того, что действие матрицы $D(\theta_j)$ на вектор $e_{2j-1}-ie_{2j}$ является умножением на $\exp(2\pi i\theta_j)$, а действие на вектор $e_{2j-1}+ie_{2j}$ — умножением на $\exp(-2\pi i\theta_j)$.

Для любого k формула $f(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k})=\mathrm{sgn}(\sigma)\, e_{j_1}\wedge\ldots \ldots\wedge e_{j_{n-k}}$, где $j_1, \ldots, j_{n-k}$ — числа из $\{1, \ldots, n\}$, отличные от чисел $i_1, \ldots, i_n$, а σ — перестановка индексов $\{1, \ldots, n\}$, определяемая формулами $\sigma(p)=i_p$ при $p\leqslant k$ и $\sigma(p)=j_{p-k}$ при $k<p\leqslant n$, задает линейный изоморфизм $f\colon \Lambda^k\mathbf{R}^n\to\Lambda^{n-k}\mathbf{R}^n$, для которого $ff=(-1)^{k(n-k)}$. Так как $e_1\wedge\ldots\wedge e_n=u(e_1)\wedge\ldots \ldots\wedge u(e_n)$ для каждого $u\in SO(n)$, то f является даже изоморфизмом $SO(n)$-модулей. Следовательно, для любого $k<n/2$ в кольцах $R(SO(n))$ и $R(\mathrm{Spin}(n))$ имеет место равенство

$$\lambda_k=\lambda_{n-k}.$$

При $n=2r$ мы можем рассмотреть также линейный автоморфизм $f\colon \Lambda^r\mathbf{R}^{2r}\to\Lambda^r\mathbf{R}^{2r}$, для которого $ff=(-1)^{rr}=(-1)^r$. Если $r\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$, то автоморфизм f имеет два собственных значения ±1 и пространство $\Lambda^r\mathbf{R}^{2r}\otimes\mathbf{C}$ распадается в прямую сумму соответствующих собственных подпространств M^r_+ и M^r_-. Аналогично, если $r\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,2)$, то f имеет собственные значения $\pm i$ и пространство $\Lambda^r\mathbf{R}^{2r}\otimes\mathbf{C}$ распадается в прямую сумму соответствующих собственных подпространств M^r_+ и M^r_-. Очевидно, что в обоих случаях подпространства M^r_+ и M^r_- инвариантны относительно группы $SO(n)$, т. е. являются $SO(n)$-модулями. Пусть λ_r^+ и λ_r^- — соответствующие этим модулям элементы колец $R(SO(n))$ и $R(\mathrm{Spin}(n))$. Тогда $\lambda_r=\lambda_r^+ + \lambda_r^-$.

Легко видеть, что соответствие $e_1\mapsto -e_1$, $e_i\mapsto e_i$ при $i\geqslant 2$ индуцирует изоморфизм пространства M^r_+ на пространство M^r_-. Тривиальное вычисление показывает, что при $r\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$ этот изоморфизм является $SO(n)$-изоморфизмом. Следовательно, $\lambda_r^+=\lambda_r^-$. Таким образом, $\lambda_r=2\lambda_r^+$ при $r\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)$.

9.3. Некоторые $\mathrm{Spin}(n)$-модули. Так как $\mathrm{Spin}(n+1)$ является подгруппой группы обратимых элементов алгебры

$C_{n+1}^0 \approx C_n$, то каждый C_n-модуль естественным образом является действительным $\mathrm{Spin}(n+1)$-модулем, и каждый C_n^c-модуль — комплексным $\mathrm{Spin}(n+1)$-модулем. С другой стороны, мы знаем (см. табл. 11.6.5), что над алгеброй $C_{2r}^c \doteq \mathbf{C}(2^r)$ (см. табл. 11.5.10) существует единственный простой C_{2r}^c-модуль (являющийся 2^r-мерным векторным пространством). Этот модуль, рассматриваемый как $\mathrm{Spin}(2r+1)$-модуль, мы будем обозначать символом Δ. Аналогично над алгеброй $C_{2r-1}^c = \mathbf{C}(2^{r-1}) \oplus \oplus \mathbf{C}(2^{r-1})$ существует два простых модуля (каждый из которых 2^{r-1}-мерен). В одном из них элемент $i^r e_1 \ldots e_{2r}$ алгебры $(C_{2r}^c)^0$ действует тождественно, а во втором — умножением на -1. Соответствующий первому C_{2r-1}^c-модулю $\mathrm{Spin}(2r)$-модуль мы будем обозначать символом Δ^+, а соответствующий второму — символом Δ^-.

Кольцо $R(\mathrm{Spin}(n))$ мы будем считать подкольцом кольца представлений $R(T')$ максимального тора $T' \subset \mathrm{Spin}(n)$ (см. предложение 8.2), которое, как мы знаем, само является подкольцом $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, (\alpha_1 \ldots \alpha_r)^{1/2}]$ кольца $R(\mathbf{T}^r) = \mathbf{Z}[\alpha_1^{1/2}, \alpha_1^{-1/2}, \ldots, \alpha_r^{1/2}, \alpha_r^{-1/2}]$. Аналогично кольцо $R(SO(n))$ мы будем считать подкольцом кольца представлений $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$ максимального тора $T \subset SO(n)$. Оказывается, что при этих отождествлениях имеет место следующее

9.4. Предложение. *В кольце* $R(\mathrm{Spin}(2r+1))$ *имеют место равенства*

$$\Delta = \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} (\alpha_j^{1/2} + \alpha_j^{-1/2}) = \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2},$$

в кольце $R(\mathrm{Spin}(2r))$ — *равенства*

$$\Delta^+ = \sum_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = 1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2},$$

$$\Delta^- = \sum_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = -1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2}$$

а в кольце $R(SO(2r))$ — *равенства*

$$\lambda_r^+ = \sum_{\substack{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = +1}} \alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_r}^{\varepsilon_r},$$

$$\lambda_r^- = \sum_{\substack{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \\ \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = -1}} \alpha_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots \alpha_{i_r}^{\varepsilon_r}.$$

Доказательство. Вложение $T' \subset \mathrm{Spin}(n)$ и изоморфизм $C_n^0 \otimes \mathbf{C} \approx C_{n-1}^c$ определяют алгебру C_{n-1}^c как T'-модуль (элементы из T' действуют на C_{n-1}^c умножением слева). Пусть $n = 2r+1$. Разложение матрицы порядка 2^r в прямую сумму одностолбцовых матриц и изоморфизм $C_{2r}^c \approx \mathbf{C}(2^r)$ определяют разложение алгебры C_{2r}^c в прямую сумму 2^r подпространств, каждое из которых изоморфно пространству $\mathbf{C}^{2r}$. Легко видеть, что эти подпространства являются T'-модулями, изоморфными модулю Δ (рассматриваемому как T'-модуль). Таким образом, T'-модуль C_{n-1}^c является (при $n = 2r+1$) прямой суммой 2^r модулей Δ. Аналогично доказывается, что T'-модуль C_{n-1}^c при $n = 2r$ является прямой суммой 2^{r-1} модулей $\Delta = \Delta^+ \oplus \Delta^-$.

Заметим теперь, что в силу гомоморфизма ω: $\mathbf{T}^r \to T'$ (см. п. 8.1) алгебру C_{n-1}^c мы можем считать $\mathbf{T}^r$-модулем. Тривиальное вычисление показывает, что для любого элемента $(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ матрица соответствующего линейного преобразования пространства C_{n-1}^c обладает тем свойством, что все ее диагональные элементы равны одному и тому же числу $\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \cos 2\pi\theta_j$. Следовательно, след этого преобразования равен $2^{2r} \prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \cos 2\pi\theta_j$ при $n = 2r+1$ и $2^{2r-1} \prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \cos 2\pi\theta_j$ при $n = 2r$. В силу сказанного выше отсюда непосредственно вытекает, что характер $\mathbf{T}^r$-модуля Δ определяется (при любом n) формулой

$$\chi(\theta_1, \ldots, \theta_r) = 2^r \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \cos 2\pi\theta_j = \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(e^{2\pi i\theta_j} + e^{-2\pi i\theta_j}\right).$$

Но тот же характер имеет, очевидно, и $\mathbf{T}^r$-модуль, соответствующий элементу $\prod\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(\alpha_j^{1/2} + \alpha_j^{-1/2}\right)$ кольца $R(\mathbf{T}^r)$. Следовательно, в кольце $R(\mathbf{T}^r)$ (а потому и в кольце $R(\mathrm{Spin}(n))$) имеет место равенство

$$\Delta = \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \left(\alpha_j^{1/2} + \alpha_j^{-1/2}\right) = \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2}.$$

В частности, при $n = 2r$

$$\Delta^+ + \Delta^- = \Delta = \sum_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = +1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2} + \sum_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r = -1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2}.$$

Слагаемые слева и справа в этой формуле инварианты относительно действия группы Вейля. Поэтому элемент Δ^+

равен одной из сумм $\sum\limits_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r=1}$ и $\sum\limits_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r=-1}$, а элемент Δ^- — другой.

Чтобы определить, какой из этих сумм равен элемент Δ^+, вычислим значение характера представления Δ^+ на элементе $\left(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right)$. Поскольку $\omega\left(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right)=e_1 \ldots e_{2r}$, то в $\mathbf{T}^r$-модуле Δ^+ элементу $\left(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right)\in \mathbf{T}^r$ соответствует умножение на i^r. Следовательно, характер представления Δ^+ принимает на элемеите $\left(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right)$ зиачение $2^{r-1}i^r$. С другой стороны ясно, что то же значение принимает на элементе $\left(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right)$ характер представления $\sum\limits_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r=+1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2}$, тогда как характер представления $\sum\limits_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r=-1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2}$ принимает зиачение $-2^{r-1}i^r$. Следовательно, $\Delta^+=\sum\limits_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r=+1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2}$ и потому $\Delta^-=\sum\limits_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r=-1} \alpha_1^{\varepsilon_1/2} \ldots \alpha_r^{\varepsilon_r/2}$.

Формулы для представлеиий λ_r^+ и λ_r^- доказываются аналогично.

После этих предварительиых результатов мы уже можем приступить к вычислению колец $R(SO(n))$ и $R(\mathrm{Spin}(n))$.

10. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЛЕЦ $R(SO(n))$ И $R(\mathrm{Spin}(n))$

Пусть ρ_n — комплексификация стандартного представления групп $SO(n)$ и $\mathrm{Spin}(n)$ как групп лииейных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$. Рассмотренные в п. 9.2 представления λ_i являются, таким образом, не чем иным, как представлениями $\lambda^i(\rho_n)$.

Рассмотрим прежде всего вопрос о поведении представлений $\lambda^k(\rho_n)$ при естественных гомоморфизмах $R(\mathrm{Spin}(n))\to R(\mathrm{Spin}(n-1))$ и $R(SO(n))\to R(SO(n-1))$. Оказывается, что ответ на этот вопрос удобнее дать не для представлеиий $\lambda^k(\rho_n)$, а для представленнй $\gamma^k(\rho_n)$, через которые они лииейно выражаются (см. разд. 3 гл. 12).

В следующем предложении снмволом n обозначается элемент кольца $R(G)$, определенный тривиальным n-мерным G-модулем, (т. е. n-мерным пространством $\mathbf{C}^n$, на котором группа G действует тождественно). Это обозначение согласовано с тем, что тривиальный одномерный модуль определяет единицу кольца R. Заметим, что $\lambda_t(n) = (1+t)^n$ и потому $\gamma_t(n) = (1-t)^{-n}$.

10.1. Предложение. *Элемент* $\gamma^i(\rho_n - n)$ *колец* $R(\mathrm{Spin}(n))$ *и* $R(SO(n))$ *при гомоморфизмах* $R(\mathrm{Spin}(n)) \to R(\mathrm{Spin}(n-1))$ *и* $R(SO(n)) \to R(SO(n-1))$ *переходит в элемент* $\gamma^i(\rho_{n-1} - (n-1))$.

Доказательство. Представление ρ_n, рассматриваемое на торе T' (или торе T соответственно), является при $n = 2r$ суммой одномерных представлений $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}$, а при $n = 2r+1$ суммой этих представлений плюс одномерное тривиальное представление 1. Следовательно,

$$\lambda_t(\rho_n) = \begin{cases} (1+\alpha_1 t)(1+\alpha_1^{-1}t)\ldots(1+\alpha_r t)(1+\alpha_r^{-1}t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n = 2r \\ (1+\alpha_1 t)(1+\alpha_1^{-1}t)\ldots(1+\alpha_r t)(1+\alpha_r^{-1}t)(1+t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n = 2r+1. \end{cases}$$

Поскольку

$$\lambda_t(\rho_n - n) = \lambda_t(\rho_n)\,\lambda_t(n)^{-1},$$

отсюда вытекает, что для любого n

$$\lambda_t(\rho_n - n) = (1+\alpha_1 t)(1+\alpha_1^{-1}t)\ldots(1+\alpha_r t)(1+\alpha_r^{-1}t)(1+t)^{-2r}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma_t(\rho_n - n) &= \lambda_{t/(1-t)}(\rho_n - n) = \left(1 + \frac{t}{1-t}\alpha_1\right)\left(1 + \frac{t}{1-t}\alpha_1^{-1}\right)\ldots \\ &\qquad \ldots\left(1 + \frac{t}{1-t}\alpha_r\right)\left(1 + \frac{t}{1-t}\alpha_r^{-1}\right)(1-t)^{2r} = \\ &= (1-t+\alpha_1 t)(1-t+\alpha_1^{-1}t)\ldots(1-t+\alpha_r t)(1-t+\alpha_r^{-1}t). \end{aligned}$$

Из этой формулы предложение 10.1 вытекает уже непосредственно, поскольку для колец $R(\mathrm{Spin}(n))$ и $R(SO(n))$, рассматриваемых как подкольца колец

$$R(T') = \mathbf{Z}\left[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, (\alpha_1 \ldots \alpha_r)^{1/2}\right]$$

и

$$R(T) = \mathbf{Z}\left[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}\right]$$

соответственно, естественные гомоморфизмы $R(\mathrm{Spin}(n)) \to R(\mathrm{Spin}(n-1))$, $R(SO(n)) \to R(SO(n-1))$ являются при $n = 2r+1$ вложениями, а при $n = 2r$ индуцированы соответствиями $\alpha_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1} \mapsto \alpha_{r-1}, \alpha_r \mapsto 1$.

10.2. Замечание. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t в соответствующих формальных рядах (см. аналогичное рассуждение в доказательстве предложения 12.3.2), мы немедленно получаем, что

$$\gamma^k(\rho_n - n) = \lambda^k(\rho_n) + \sum_{i<k} a_{i,k}\lambda^i(\rho_n)$$

и

$$\lambda^k(\rho_n) = \gamma^k(\rho_n - n) + \sum_{i<k} b_{i,k}\gamma^i(\rho_n - n),$$

где $a_{i,k}$ и $b_{i,k}$ — некоторые целые числа.

Перейдем теперь к основной теореме этого раздела.

10.3. Теорема[1]**.** *Кольцо* $R(\mathrm{Spin}(2r+1))$ *является кольцом многочленов* $\mathbf{Z}[\lambda^1(\rho_{2r+1}), \ldots, \lambda^{r-1}(\rho_{2r+1}), \Delta_{2r+1}]$, *а кольцо* $R(SO(2r+1))$ — *кольцом многочленов* $\mathbf{Z}[\lambda^1(\rho_{2r+1}), \ldots, \lambda^r(\rho_{2r+1})]$. *При этом в кольце* $R(\mathrm{Spin}(2r+1))$ *имеет место равенство*

$$\Delta_{2r+1}^2 = 1 + \lambda^1(\rho_{2r+1}) + \ldots + \lambda^r(\rho_{2r+1}).$$

Кольцо $R(\mathrm{Spin}(2r))$ *представляет собой кольцо многочленов* $\mathbf{Z}\left[\lambda^1(\rho_{2r}), \ldots, \lambda^{r-2}(\rho_{2r}), \Delta_{2r}^+, \Delta_{2r}^-\right]$, *а кольцо* $R(SO(2r))$ *порождается элементами* $\lambda^1 = \lambda^1(\rho_{2r}), \ldots, \lambda^{r-1} = \lambda^{r-1}(\rho_{2r})$, $\lambda_+^r = \lambda_+^r(\rho_{2r})$, $\lambda_-^r = \lambda_-^r(\rho_{2r})$, *связанными единственным соотношением*

$$(\lambda_+^r + \lambda^{r-2} + \ldots)(\lambda_-^r + \lambda^{r-2} + \ldots) = (\lambda^{r-1} + \lambda^{r-3} + \ldots)^2.$$

При этом в кольце $R(\mathrm{Spin}(2r))$ *имеют место равенства*

$$\Delta_{2r}^+\Delta_{2r}^+ = \lambda_+^r(\rho_{2r}) + \lambda^{r-2}(\rho_{2r}) + \ldots,$$
$$\Delta_{2r}^+\Delta_{2r}^- = \lambda^{r-1}(\rho_{2r}) + \lambda^{r-3}(\rho_{2r}) + \ldots,$$
$$\Delta_{2r}^-\Delta_{2r}^- = \lambda_-^r(\rho_{2r}) + \lambda^{r-2}(\rho_{2r}) + \ldots.$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 2r+1$. Докажем прежде всего равенство

$$\Delta_{2r+1}^2 = 1 + \lambda^1(\rho_{2r+1}) + \ldots + \lambda^r(\rho_{2r+1}).$$

Рассмотрим с этой целью многочлен

$$\lambda_t(\rho_{2r+1}) = (1 + \alpha_1 t)(1 + \alpha_1^{-1}t)\ldots(1 + \alpha_r t)(1 + \alpha_r^{-1}t)(1 + t).$$

---

[1]) В формулировке этой теоремы элемент Δ кольца $R(\mathrm{Spin}(2r+1))$ (см. п. 9.3) обозначается символом Δ_{2r+1}. Аналогичный смысл имеют обозначения Δ_{2r}^+, Δ_{2r}^-, $\lambda_+^r(\rho_{2r})$ и $\lambda_-^r(\rho_{2r})$. — *Прим. ред.*

Так как коэффициентом при t^j в этом многочлене является элемент $\lambda^j = \lambda^j(\rho_{2r+1})$, то для значения $\lambda_1(\rho_{2r+1})$ выражения $\lambda_t(\rho_{2r+1})$ при $t = 1$ мы получаем

$$\lambda_1(\rho_{2r+1}) = 1 + \lambda^1 + \ldots + \lambda^{2r+1} = 2\left(1 + \lambda^1 + \ldots + \lambda^r\right)$$

(здесь мы используем доказанную в п. 9.2 формулу $\lambda^j = \lambda^{n-j}$). С другой стороны, так как $(1+\alpha_j)(1+\alpha_j^{-1}) = \alpha_j + 2 + \alpha_j^{-1} = (\alpha_j^{1/2} + \alpha_j^{-1/2})^2$, то, согласно предложению 9.4,

$$\lambda_1(\rho_{2r+1}) = 2\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} (\alpha_j^{1/2} + \alpha_j^{-1/2})^2 = 2\Delta_{2r+1}^2.$$

Следовательно, $\Delta_{2r+1}^2 = 1 + \lambda^1(\rho_{2r+1}) + \ldots + \lambda^r(\rho_{2r+1})$.

Вычислим теперь кольцо $R(SO(2r+1))$. Будем рассуждать, как и при вычислении кольца $R(Sp(n))$ (см. теорему 6.1). В первую очередь ясно, что элементы $\lambda^1 = \lambda^1(\rho_{2r+1}), \ldots, \lambda^r = \lambda^r(\rho_{2r+1})$, являясь элементарными симметрическими функциями элементов $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, 1$ (см. п. 9.2), алгебраически независимы (предложение 5.4). Поэтому они порождают подкольцо $\mathbf{Z}[\lambda^1, \ldots, \lambda^r]$ кольца $R(SO(2r+1))$. Далее, поскольку группа Вейля W группы $SO(2r+1)$ (рассматриваемая как группа автоморфизмов кольца $R(T) = \mathbf{Z}\left[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}\right]$) порождается всевозможными перестановками элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и подстановками вида $\alpha_j \longmapsto \alpha_j^{-1}$, то, согласно предложению 5.2, кольцо $\mathbf{Z}\left[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}\right]^W$, в котором содержится кольцо $R(SO(2r+1))$ (см. замечание 12.8.15), совпадает с кольцом $\mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r]$, где, как и выше, σ_j — элементарные симметрические функции от $\alpha_1 + \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r + \alpha_r^{-1}$. Но, согласно предложению 5.3, $\mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_r] = \mathbf{Z}[\lambda^1, \ldots, \lambda^r]$. Следовательно, $R(SO(2r+1)) = \mathbf{Z}[\lambda^1(\rho_{2r+1}), \ldots, \lambda^r(\rho_{2r+1})]$.

Чтобы вычислить кольцо $R(\mathrm{Spin}(2r+1))$, мы прежде всего заметим, что, согласно результатам п. 9.1 и 9.3, каждый элемент кольца $R(\mathrm{Spin}(2r+1))$ может быть представлен в виде $a\Delta_{2r+1} + b$, где $a \in \mathbf{Z}$ и $b \in R(SO(2r+1))$. Следовательно, кольцо $R(\mathrm{Spin}(2r+1))$ порождается элементами $\lambda^1, \ldots, \lambda^r, \Delta_{2r+1}$, а потому в силу уже доказанного соотношения — и элементами $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-1}, \Delta_{2r+1}$. Таким образом, нам нужно только доказать, что последние элементы алгебраически независимы. Рассмотрим[1]) с этой целью автоморфизм τ кольца $R(\mathbf{T}^r) = \mathbf{Z}\left[\alpha_1^{1/2}, \alpha_1^{-1/2}, \ldots, \alpha_r^{1/2}, \alpha_r^{-1/2}\right]$, индуцированный соответствиями $\alpha_1^{1/2} \longmapsto -\alpha_1^{1/2}, \alpha_2^{1/2} \longmapsto \alpha_2^{1/2}, \ldots, \alpha_r^{1/2} \longmapsto \alpha_r^{1/2}$. При этом автоморфизме элементы $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$ остаются на месте, а элемент Δ_{2r+1} переходит в элемент $-\Delta_{2r+1}$ (предложение 9.4).

[1]) Здесь текст автора несколько изменен. — *Прим. ред.*

Пусть элементы $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-1}, \Delta_{2r+1}$ связаны некоторым полиномиальным соотношением

$$f(\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-1}, \Delta_{2r+1}) = 0.$$

Поскольку $\Delta^2_{2r+1} = 1 + \lambda^1 + \ldots + \lambda^r$, это соотношение мы можем переписать в виде

$$f_1(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) + \Delta_{2r+1} f_2(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) = 0.$$

Применив к нему автоморфизм τ, мы получим соотношение

$$f_1(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) - \Delta_{2r+1} f_2(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) = 0.$$

Следовательно, $f_1(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) = 0$ и $f_r(\lambda^1, \ldots, \lambda^r) = 0$. Поскольку элементы $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$ алгебраически независимы, отсюда следует, что многочлены f_1 и f_2 тождественно равны нулю. Но тогда, как легко видеть, тождественно будет равен нулю и многочлен f.

Тем самым при $n = 2r + 1$ теорема полностью доказана.

Пусть теперь $n = 2r$. Аналогично формуле для Δ^2_{2r+1} легко доказывается, что

$$\Delta^2_{2r} = 2 + 2\lambda^1(\rho_{2r}) + \ldots + 2\lambda^{r-1}(\rho_{2r}) + \lambda^r_+(\rho_{2r}) + \lambda^r_-(\rho_{2r}).$$

С другой стороны, согласно предложению 9.4,

$$(*) \qquad \Delta^2_{2r} = \sum_{\varepsilon_j,\ \delta_j = \pm 1} \alpha_1^{(\varepsilon_1+\delta_1)/2} \ldots \alpha_r^{(\varepsilon_r+\delta_r)/2}.$$

Для каждого члена этой суммы обозначим через u число индексов j с $\varepsilon_j = \delta_j = 1$, через a — число индексов j с $\varepsilon_j = +1$, $\delta_j = -1$, через b — число индексов j с $\varepsilon_j = -1$, $\delta_j = 1$, через v — число индексов j с $\varepsilon_j = \delta_j = -1$, через $O(\varepsilon)$ — число индексов j с $\varepsilon_j = -1$, через $O(\delta)$ — число индексов j с $\delta_j = -1$. Тогда $u + a + b + v = r$ и $O(\varepsilon) = b + v$, $O(\delta) = a + v$. Из формул для Δ^+_{2r} и Δ^-_{2r}, указанных в предложении 9.4, непосредственно следует, что член суммы $(*)$ тогда и только тогда входит в аналогичную сумму для $(\Delta^+_{2r})^2$, когда оба числа $O(\varepsilon)$ и $O(\delta)$ четны; он входит в сумму для $\Delta^+_{2r}\Delta^-_{2r}$ тогда и только тогда, когда одно из чисел $O(\varepsilon)$ и $O(\delta)$ четно, а другое нечетно; наконец, он входит в сумму для $(\Delta^-_{2r})^2$ тогда и только тогда, когда оба числа $O(\varepsilon)$ и $O(\delta)$ нечетны.

Представим теперь элемент $\Delta^2_{2r} = (\Delta^+_{2r} + \Delta^-_{2r})^2$ в виде суммы

$$\Delta^2_{2r} = \left((\Delta^+_{2r})^2 + (\Delta^-_{2r})^2\right) + 2\Delta^+_{2r}\Delta^-_{2r}$$

двух слагаемых $(\Delta^+_{2r})^2 + (\Delta^-_{2r})^2$ и $2\Delta^+_{2r}\Delta^-_{2r}$. Согласно только что сказанному, член суммы $(*)$ тогда и только тогда принадлежит первому (второму) слагаемому, когда числа $O(\varepsilon)$ и $O(\delta)$ имеют одинаковую (разную) четность, т. е. когда число $O(\varepsilon)+O(\delta)$ четно (нечетно). С другой стороны, ясно, что если член суммы (*) мы представим в виде $\alpha_1^{\eta_1}\dots\alpha_r^{\eta_r}$, где $\eta_j=0,\ \pm1$, то число u будет равно числу показателей η_j, равных 1, число $a+b$ будет равно числу показателей η_j, равных 0, и число v будет равно числу показателей η_j, равных -1. Отсюда уже легко следует, что

$$\Delta_{2r}^{+}\Delta_{2r}^{-}=\lambda^{r-1}(\rho_{2r})+\lambda^{r-3}(\rho_{2r})+\dots,$$
$$(\Delta_{2r}^{+})^2+(\Delta_{2r}^{-})^2=\lambda_{+}^{r}(\rho_{2r})+\lambda_{-}^{r}(\rho_{2r})+2\left(\lambda^{r-2}(\rho_{2r})+\lambda^{r-4}(\rho_{2r})+\dots\right).$$

Действительно, если член $\alpha_{i_1}^{\eta_1}\dots\alpha_{r_l}^{\eta_r}$ суммы (*) входит в

$$\lambda^{r-i}=\sum\alpha_{j_1}^{\pm1}\dots\alpha_{j_{r-i}}^{\pm1},$$

то $u+v\equiv r-i \pmod 2$, т. е. $i\equiv O(\varepsilon)+O(\delta)\pmod 2$.

Таким образом, указанная в формулировке теоремы формула для $\Delta_{2r}^{+}\Delta_{2r}^{-}$ уже доказана. Чтобы доказать аналогичные формулы для $(\Delta_{2r}^{+})^2$ и $(\Delta_{2r}^{-})^2$, нам нужно „расщепить" только что полученную формулу для $(\Delta_{2r}^{+})^2+(\Delta_{2r}^{-})^2$. Для этого мы рассмотрим в кольце $R(\mathrm{Spin}(2r))$ элемент $(\Delta_{2r}^{+})^2-(\Delta_{2r}^{-})^2$.

Согласно [1]) предложению 9.4,

$$(\Delta_{2r}^{+})^2-(\Delta_{2r}^{-})^2=\sum_{\substack{\varepsilon_j,\,\delta_j=\pm1\\ \varepsilon_1\dots\varepsilon_r=\pm1\\ \delta_1\dots\delta_r=+1}}\alpha_1^{(\varepsilon_1+\delta_1)/2}\dots\alpha_r^{(\varepsilon_r+\delta_r)/2}-$$
$$-\sum_{\substack{\varepsilon_j',\,\delta_j'=\pm1\\ \varepsilon_1'\dots\varepsilon_r'=\pm1\\ \delta_1'\dots\delta_r'=-1}}\alpha_1^{(\varepsilon_1'+\delta_1')/2}\dots\alpha_r^{(\varepsilon_r'+\delta_r')/2}.$$

Легко видеть, что каждый член первой суммы, для которого хоть один показатель $\eta_j=(\varepsilon_j+\delta_j)/2$ равен нулю, совпадает с некоторым членом второй суммы и наоборот. Например, член первой суммы с $\varepsilon_1=-\delta_1$ равен члену второй суммы, отвечающему показателям

$$\varepsilon_1'=-\varepsilon_1,\quad \delta_1'=-\delta_1,$$
$$\varepsilon_j'=\varepsilon_j,\quad \delta_j'=\delta_j\quad\text{при}\quad j>1.$$

Таким образом, в выражении для $(\Delta_{2r}^{+})^2-(\Delta_{2r}^{-})^2$ после сокращения подобных членов остается от первой суммы сумма

---

[1]) Здесь текст автора изменен. — *Прим. ред.*

$$\sum_{\substack{\eta_j=\pm 1\\ \eta_1\dots\eta_r=1}} \alpha_1^{\eta_1}\dots\alpha_r^{\eta_r}=\lambda_+^r,$$

а от второй суммы — сумма

$$\sum_{\substack{\eta_j=\pm 1\\ \eta_1\dots\eta_r=-1}} \alpha_1^{\eta_1}\dots\alpha_r^{\eta_r}=\lambda_-^r.$$

Следовательно, $(\Delta_{2r}^+)^2-(\Delta_{2r}^-)^2=\lambda_+^r-\lambda_-^r$. Требуемые выражения для $(\Delta_{2r}^+)^2$ и $(\Delta_{2r}^-)^2$ следуют отсюда (и из полученной выше формулы для $(\Delta_{2r}^+)^2+(\Delta_{2r}^-)^2$) непосредственно.

Вычислим теперь кольцо $R(SO(2r))$. Оно содержит элементы $\lambda^1=\lambda^1(\rho_{2r}),\ \dots,\ \lambda^{r-1}(\rho_{2r})=\lambda^{r-1}(\rho_{2r}),\ \lambda_+^r=\lambda_+^r(\rho_{2r}),\ \lambda_-^r=\lambda_-^r(\rho_{2r})$ и содержится в кольце $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]^W$, где W — группа Вейля группы $SO(2r)$. С другой стороны, рассуждения, аналогичные проведенным в разд. 5, показывают (см. добавление редактора к разд. 5), что кольцо $\mathbf{Z}[\alpha, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]^W$ порождается элементами $\lambda^1, \dots, \lambda^{r-1}, \lambda_+^r, \lambda_-^r$. Следовательно, кольцо $R(SO(2r))$ совпадает с кольцом $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]^W$ и порождается элементами $\lambda^1, \dots, \lambda^{r-1}, \lambda_+^r, \lambda_-^r$. Поскольку $(\Delta_{2r}^+)^2(\Delta_{2r}^-)^2=(\Delta_{2r}^+\Delta_{2r}^-)^2$, эти элементы удовлетворяют соотношению

$$(**)\quad (\lambda_+^r+\lambda^{r-2}+\dots)(\lambda_-^r+\lambda^{r-2}+\dots)=(\lambda^{r-1}+\lambda^{r-3}+\dots)^2.$$

Таким образом, нам осталось лишь показать, что других нетривиальных соотношений между этими элементами не имеется.

С этой целью заметим, что гомоморфизм $R(SO(2r+1))\to R(SO(2r))$, индуцированный вложением $SO(2r)\to SO(2r+1)$, является, очевидно, мономорфизмом (см. следствие 12.7.7) и переводит элементы $\lambda^1(\rho_{2r+1}), \dots, \lambda^r(\rho_{2r+1})$ в элементы $\lambda^1, \dots, \lambda^{r-1}, \lambda_+^r+\lambda_-^r$. Следовательно, элементы $\lambda^1, \dots, \lambda^{r-1}, \lambda_+^r+\lambda_-^r$ алгебраически независимы. С другой стороны, из (**) следует, что любой элемент из $R(SO(2r))$ может быть записан в виде

$$f_1+(\lambda_+^r-\lambda_-^r)f_2,$$

где f_1 и f_2 — некоторые многочлены от $\lambda^1, \dots, \lambda^{r-1}, \lambda_+^r+\lambda_-^r$. Поэтому нам достаточно доказать, что соотношение вида

$$f_1+(\lambda_+^r-\lambda_-^r)f_2=0$$

может иметь место лишь при $f_1=f_2=0$. Для этого нам в свою очередь достаточно найти автоморфизм кольца $R(SO(2r))$, переставляющий элементы λ_+^r и λ_-^r и оставляющий элементы $\lambda^1, \dots, \lambda^{r-1}$ на месте. Но такой автоморфизм можно задать, например, соответствием $\alpha_1\mapsto\alpha_1^{-1}, \alpha_2\mapsto\alpha_2, \dots, \alpha_r\mapsto\alpha_r$.

Тем самым кольцо $R(SO(2r))$ полностью вычислено.

Вычислим, наконец, кольцо $R(\mathrm{Spin}(2r))$. Из результатов п. 9.1 и 9.3 непосредственно вытекает, что это кольцо порождается своим подкольцом $R(SO(2r))$ и элементами Δ_{2r}^{+} и Δ_{2r}^{-}. Следовательно, согласно только что доказанному, оно порождается элементами $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-1}, \lambda_{+}^{r}, \lambda_{-}^{r}, \Delta_{2r}^{+}, \Delta_{2r}^{-}$. Поскольку элементы $\lambda_{+}^{r}, \lambda_{-}^{r}$ и λ^{r-1} выражаются через $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-2}, \Delta_{2r}^{+}$ и Δ_{2r}^{-}, это кольцо порождается и элементами $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-2}, \Delta_{2r}^{+}, \Delta_{2r}^{-}$. Таким образом, для завершения доказательства остается лишь показать, что эти элементы алгебраически независимы.

С этой целью мы рассмотрим подкольцо $R(\mathrm{Spin}(2r+1))$ кольца $R(\mathrm{Spin}(2r))$. Мы уже знаем, что $R(\mathrm{Spin}(2r+1)) = \mathbf{Z}[\lambda^1(\rho_{2r+1}), \ldots, \lambda^{r-1}(\rho_{2r+1}), \Delta_{2r+1}]$, причем при естественном отображении $R(\mathrm{Spin}(2r+1)) \to R(\mathrm{Spin}(2r))$ элементы $\lambda^1(\rho_{2r+1}), \ldots, \lambda^{r-1}(\rho_{2r+1}), \Delta_{2r+1}$ переходят в элементы

$$\lambda^1 = \lambda^1(\rho_{2r}), \ldots, \lambda^{r-1} = \lambda^{r-1}(\rho_{2r}), \quad \Delta_{2r} = \Delta_{2r}^{+} + \Delta_{2r}^{-}.$$

Отсюда сразу же вытекает, что нетривиальное полиномиальное соотношение $f(\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-2}, \Delta_{2r}^{+}, \Delta_{2r}^{-}) = 0$, симметричное по Δ_{2r}^{+} и Δ_{2r}^{-}, невозможно. Действительно, по основной теореме о симметрических функциях (теорема 1.6) такое соотношение равносильно некоторому (также нетривиальному) соотношению между $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-2}, \Delta_{2r}^{+} + \Delta_{2r}^{-} = \Delta_{2r}$ и $\Delta_{2r}^{+}\Delta_{2r}^{-} = \lambda^{r-1} + \lambda^{r-3} + \ldots$. Аналогично любое соотношение, антисимметричное по Δ_{2r}^{+} и Δ_{2r}^{-}, равносильно соотношению вида $(\Delta_{2r}^{+} - \Delta_{2r}^{-})g = 0$, где $g = g(\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-2})$ и потому также не может быть нетривиальным. Таким образом, для доказательства алгебраической независимости элементов $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-2}, \Delta_{2r}^{+}, \Delta_{2r}^{-}$ достаточно доказать, что любое полиномиальное соотношение между этими элементами является суммой симметричного и антисимметричного соотношений. Но это сразу же следует из существования автоморфизма кольца $R(\mathrm{Spin}(n))$, оставляющего на месте элементы $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r-2}$ и переставляющего элементы Δ_{2r}^{+} и Δ_{2r}^{-} (такой автоморфизм можно задать, например, соответствиями $\alpha_1 \mapsto \alpha_1^{-1}$, $\alpha_i \mapsto \alpha_i$ при $i \geqslant 2$).

Тем самым теорема 10.3 полностью доказана.

11. СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ И КОМПЛЕКСНЫМИ КОЛЬЦАМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

До сих пор мы имели дело только с кольцами представлений над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Рассмотрим теперь (сначала в общем виде) связь между кольцом комплексных представлений $R(G)$ и кольцами $RO(G)$ и $RSp(G)$ действительных и кватернионных представлений.

11.1. Обозначения. Мы будем иметь дело со следующими естественными гомоморфизмами (морфизмами функторов):

$$\varepsilon_U\colon RO \to R, \quad \varepsilon_O\colon R \to RO, \quad \varepsilon_{Sp}\colon R \to RSp, \quad \varepsilon_U\colon RSp \to R.$$

Первый морфизм ε_U индуцируется операцией тензорного умножения на **C**, а морфизм ε_{Sp} — операцией тензорного умножения на **H**. Морфизм ε_O возникает при ограничении поля **C** до поля **R**, а последний морфизм ε_U — при ограничении тела **H** до поля **C**. Первый морфизм ε_U и морфизм ε_O являются морфизмами λ-колец.

11.2. Замечание. Для любого главного G расслоения α над произвольным пространством X имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} RO(G) \arrow[r, "\varepsilon_U"] \arrow[d] & R(G) \arrow[d] \\ KO(X) \arrow[r, "\varepsilon_U"] & K(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R(G) \arrow[r, "\varepsilon_O"] \arrow[d] & RO(G) \arrow[d] \\ K(X) \arrow[r, "\varepsilon_O"] & KO(X) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R(G) \arrow[r, "\varepsilon_{Sp}"] \arrow[d] & RSp(G) \arrow[d] \\ K(X) \arrow[r, "\varepsilon_{Sp}"] & KSp(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} RSp(G) \arrow[r, "\varepsilon_U"] \arrow[d] & R(G) \arrow[d] \\ KSp(X) \arrow[r, "\varepsilon_U"] & K(X) \end{tikzcd}$$

вертикальные стрелки которых являются построенными в замечании 12.5.4 гомоморфизмами $\bar{\alpha}$.

Как и для векторных расслоений, имеет место очевидное

11.3. Предложение. *Для колец $R(G)$ и $RO(G)$ имеют место соотношения $\varepsilon_O\varepsilon_U = 2$ и $\varepsilon_U\varepsilon_O = 1 + \psi_{-1}$, где ψ_{-1} — операция в λ-кольце $R(G)$, индуцированная операцией перехода к сопряженному представлению.*

Аналогично для колец $R(G)$ и $RSp(G)$ имеют место соотношения $\varepsilon_{Sp}\varepsilon_U = 2$ и $\varepsilon_U\varepsilon_{Sp} = 1 + \psi_{-1}$.

Следующая теорема отвечает на вопрос, когда комплексное представление является комплексификацией действительного представления или ограничением кватернионного представления. Эта теорема справедлива для любой компактной связной группы Ли (напомним, что любая такая группа обладает максимальным тором).

11.4. Теорема. *Комплексный G-модуль M тогда и только тогда является комплексификацией некоторого действительного*

G-модуля, когда на M существует G-инвариантная невырожденная симметрическая форма β. Комплексный G-модуль M тогда и только тогда является ограничением некоторого кватернионного G-модуля, когда на M существует G-инвариантная невырожденная кососимметрическая форма γ.

Доказательство. Пусть η — некоторая G-инвариантная эрмитова форма на модуле M. Если M является комплексификацией действительного модуля L, комплексификация формы $\mathrm{Re}\{\eta \mid L \times L\}$ будет, очевидно, невырожденной симметрической G-инвариантной формой на M. Если модуль M является ограничением некоторого кватернионного модуля, то формула $\gamma(x, y) = \mathrm{Re}\{\eta(x, jy) - \eta(y, jx)\}$, где $j \in \mathbf{H}$ — кватернионная единица, будет определять на M невырожденную G-инвариантную кососимметрическую форму. Таким образом, условия теоремы необходимы.

Для доказательства достаточности предположим, что на комплексном G-модуле M существует невырожденная G-инвариантная билинейная форма $\alpha(x, y)$, обладающая тем свойством, что $\alpha(y, x) = \varepsilon\alpha(x, y)$, где $\varepsilon = \pm 1$. Ясно, что эту форму можно записать в виде $\eta(u(x), y)$, где u — некоторый действительный G-автоморфизм $u\colon M \to M$. Тогда $\eta(u(x), y) = \alpha(x, y) = \varepsilon\alpha(y, x) = \varepsilon\eta(u(y), x) = \varepsilon\eta(x, u(y))$ и потому $\eta(u^2(x), y) = \eta(x, u^2(y))$. Таким образом, автоморфизм u^2 самосопряжен и, следовательно, имеет действительные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, и M разлагается в ортогональную прямую сумму $M_1 \oplus \ldots \oplus M_r$ соответствующих собственных подпространств $M_1, \ldots, M_r$. Поскольку из равенства $u^2(x) = \lambda_i x$ вытекает равенство $u^2(u(x)) = \lambda_i u(x)$, все подпространства M_i инвариантны относительно u. Далее, так как для любого не равного нулю вектора $x \in M$ число $\eta(u(x), u(x)) = \varepsilon\eta(u^2(x), x) = \varepsilon\lambda_i\eta(x, x)$ положительно, то $\operatorname{sgn}\varepsilon = \operatorname{sgn}\lambda_i$ для всех i. Следовательно, формула $u^* \mid M_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} u \mid M_i$ определяет на M некоторый G-инвариантный автоморфизм u^*, для которого $(u^*)^2 = \varepsilon$.

При $\varepsilon = 1$ модуль M разлагается в прямую сумму собственных подпространств M_+ и M_- автоморфизма u^*, отвечающих собственным значениям $+1$ и -1. Так как $u^*(ix) = -iu^*(x)$, то $iM_\pm = M_\mp$ и потому модуль M G-изоморфен модулю $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} M_+$.

При $\varepsilon = -1$ мы положим $jx = u^*(x)$. Тем самым на M будет определено умножение на все элементы из $\mathbf{H}$, продолжающее умножение на элементы из $\mathbf{C}$, так что модуль M будет ограничением некоторого кватернионного модуля.

11.5. Следствие. *Любой комплексный G-модуль M, являющийся либо комплексификацией действительного G-модуля, либо ограничением кватернионного G-модуля, изоморфен двойственному G-модулю M^+.*

Доказательство. Корреляция $M \to M^+$ невырожденной G-инвариантной симметрической или кососимметрической формы на M является изоморфизмом G-модулей.

11.6. Следствие. *Каждый простой комплексный G-модуль M, для которого $M \approx M^+$, является либо комплексификацией некоторого (простого) действительного G-модуля (и в этом случае внешняя степень $\Lambda^2 M$ модуля M не содержит тривиального одномерного G-модуля), либо ограничением некоторого (простого) кватернионного G-модуля (и в этом случае симметрическая степень S^2M модуля M не содержит тривиального одномерного G-модуля).*

Доказательство. Естественное спаривание $M \otimes M^+ \to \mathbf{C}$ определяет тривиальный одномерный G-подмодуль модуля $(M \otimes M^+)^+ \approx M \otimes M$. Но модуль $M \otimes M$ изоморфен прямой сумме модулей $\Lambda^2 M \oplus S^2M$, и, следовательно, одно из слагаемых содержит этот тривиальный одномерный G-подмодуль. Если его содержит слагаемое S^2M, то на M существует невырожденная симметрическая форма и потому, согласно теореме 11.4, модуль M является комплексификацией некоторого действительного G-модуля. Если же его содержнт слагаемое $\Lambda^2 M$, то на M существует невырожденная кососимметрическая форма, и потому модуль M является ограничением кватернионного G-модуля.

11.7. Следствие. *Для любого комплексного G-модуля M разность между числом простых подмодулей модуля M, являющихся комплексификациями действительных G-модулей, и числом его простых подмодулей, являющихся ограничениями кватернионных G-модулей, равна кратности, с которой 1 входит в $\psi^2 M$ в кольце $R(G)$.*

Доказательство. Согласно следствию 11.6, если модуль M прост, то элемент $\psi^2 M = M \otimes M - 2\lambda^2(M)$ кольца $R(G)$ будет содержать 1 с кратностью $+1$, если M является комплексификацией действительного модуля, с кратностью -1, если M является ограничением кватернионного модуля, и с кратностью 0, если модули M и M^+ не изоморфны. Для завершения доказательства остается заметить, что любой G-модуль является прямой суммой своих простых подмодулей (теорема 6.5).

12. ПРИМЕРЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И КВАТЕРНИОННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

12.1. Примеры. Обычное действие группы $SO(n)$ на пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\Lambda^i \mathbf{R}^n$ определяет элементы кольца $RO(SO(n))$, комплексификациями которых являются элементы ρ_n и $\lambda^i(\rho_n)$ кольца $R(SO(n))$. Поскольку элементы $\lambda^i(\rho_n)$ порождают $R(SO(2r+1))$, отсюда следует, что гомоморфизм ε_U: $RO(SO(2r+1)) \to R(SO(2r+1))$ является изоморфизмом (так как $\varepsilon_O\varepsilon_U = 2$, а группа $R(G)$ является свободной абелевой группой, то гомоморфизм ε_U всегда является мономорфизмом). При $n = 2r$ модуль $\Lambda^r \mathbf{R}^{2r}$ распадается над $\mathbf{R}$ и над $\mathbf{C}$, когда r четно, и распадается только над $\mathbf{C}$, когда r нечетио. Таким образом, гомоморфизм ε_U: $RO(SO(2r)) \to R(SO(2r))$ является изоморфизмом при r четном и имеет коядро порядка 2 при r нечетном.

12.2. Пример. Действие группы $Sp(n)$ на пространстве $\mathbf{H}^n$ определяет элемент кольца $RSp(Sp(n))$, переходящий при гомоморфизме ε_U: $RSp(Sp(n)) \to R(Sp(n))$ в элемент кольца $R(Sp(n))$, внешние степени которого порождают все кольцо $R(Sp(n))$.

12.3. Примеры. Напомним, что $\mathrm{Spin}(n) \subset C_n^+ \approx C_{n-1}$ и что простые C_{n-1}-модули находятся в естественном биективном соответствии с простыми $\mathrm{Spin}(n)$-модулями, не являющимися $SO(n)$-модулями. Отсюда следует (табл. 11.6.5), что Spin-модули Δ_{8k-1}, Δ_{8k}^+, Δ_{8k}^-, Δ_{8k+1} являются комплексификациями действительных Spin-модулей, а Spin-модули Δ_{8k+3}, Δ_{8k+4}^+, Δ_{8k+4}^-, Δ_{8k+4}, являются ограничениями кватернионных Spin-модулей.

12.4. Таблица действительных Spin-представлений

n	Действительные Spin-модули	Размерность
$8m+1$	Δ_{8m+1}	16^m
$8m+2$	$\Delta_{8m+2}^+ + \Delta_{8m+2}^-$	$2 \cdot 16^m$
$8m+3$	$2\Delta_{8m+3}$	$4 \cdot 16^m$
$8m+4$	$2\Delta_{8m+4}^+$, $2\Delta_{8m+4}^-$	$4 \cdot 16^m$
$8m+5$	$2\Delta_{8m+5}$	$8 \cdot 16^m$
$8m+6$	$\Delta_{8m+6}^+ + \Delta_{8m+6}^-$	$8 \cdot 16^m$
$8m+7$	Δ_{8m+7}	$8 \cdot 16^m$
$8m+8$	Δ_{8m+8}^+, Δ_{8m+8}^-	$8 \cdot 16^m$

Эта таблица получается из табл. 11.6.5 тензорным умножением простых C_{n-1}-модулей на $\mathbf{C}$ и сравнением получающихся комплексных модулей с простыми C^c_{n-1}-модулями Δ_n или Δ_n^+ и Δ_n^-.

Другой подход к решению вопроса, является ли данное Spin-представление действительным, основывается на следствии 11.7. Для этого нам необходимо научиться вычислять операции ψ^k в кольцах $R(G)$.

Пусть G — произвольная компактная группа, T^r — ее максимальный тор, $R(T^r)=\mathbf{Z}[\beta_1, \beta_1^{-1}, \ldots, \beta_r, \beta_r^{-1}]$ — кольцо представлений тора T^r и $R(G)$ — кольцо представлений группы G, рассматриваемое как подкольцо кольца $R(T^r)$ (замечание 12.9.4).

12.5. Предложение. *Для любого элемента*

$$a=P(\beta_1, \beta_1^{-1}, \ldots, \beta_r, \beta_r^{-1})$$

кольца $R(G)$, где P — некоторый многочлен, элемент $\psi^k(a)$ выражается формулой

$$\psi^k(a)=P(\beta_1^k, \beta_1^{-k}, \ldots, \beta_r^k, \beta_r^{-k}).$$

Доказательство. Ясно, что операции ψ^k согласованы с вложением кольца $R(G)$ в кольцо $R(T^r)$. С другой стороны, согласно предложению 12.2.3, для любого одномерного элемента β имеет место равенство $\psi^k(\beta)=\beta^k$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\psi^k(a)&=\psi^k P(\beta_1, \beta_1^{-1}, \ldots, \beta_r, \beta_r^{-1})=\\&=P(\psi^k(\beta_1), \psi^k(\beta_1^{-1}), \ldots, \psi^k(\beta_r)\,\psi^k(\beta_r^{-1}))=\\&=P(\beta_1^k, \beta_1^{-k}, \ldots, \beta_r^k, \beta_r^{-k}).\end{aligned}$$

12.6. Следствие. *В кольце $R(\mathrm{Spin}(m))\subset\mathbf{Z}[\alpha_1^{1/2}, \alpha_1^{-1/2}, \ldots, \alpha_r^{1/2}, \alpha_r^{-1/2}]$, $r=[m/2]$, для элемента Δ_m имеют место равенства*

$$\psi^k(\Delta_m)=\prod_{1\leqslant j\leqslant r}(\alpha_j^{k/2}+\alpha_j^{-k/2}).$$

В частности,

$$\psi^2(\Delta_m)=\prod_{1\leqslant j\leqslant r}(\alpha_j+\alpha_j^{-1}).$$

12.7. Замечание. Из теоремы 10.3 непосредственно вытекает, что кратность, с которой одномерное тривиальное представление входит в $\psi^2(\Delta_m)$, равна свободному члену $P(0, \ldots, 0)$ многочлена $P(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, выражающего элемент $\psi^2(\Delta_m)$ кольца $R(\mathrm{Spin}(m))$ через элементарные симметрические функции σ_k.

от переменных $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}$. Чтобы найти эти кратности, рассмотрим корни $z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_r, z_r^{-1}$ уравнения $x^{2r}+1=0$. Так как

$$(x-z_1)(x-z_1^{-1}) \ldots (x-z_r)(x-z_r^{-1}) = \\ = \sum_{0\leqslant k\leqslant 2r} (-1)^k \sigma_k(z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_r, z_r^{-1})\, x^{2r-k} = 1+x^{2r},$$

то $\sigma_k(z_1, z_1^{-1}, \ldots, z_r, z_r^{-1})=0$ при $0<k<2r$, откуда немедленно вытекает, что $P(0, \ldots, 0) = \prod_{1\leqslant j\leqslant r} (z_j+z_j^{-1})$.

Дальнейшее вычисление мы проведем, следуя предложению Хирцебруха, высказанному им после лекции Адамса в летней школе в Сиеттле в 1963 г. Хирцебрух предложил рассмотреть многочлен $f_r(x)$ с корнями $z_1+z_1^{-1}, \ldots, z_r+z_r^{-1}$. Свободный член этого многочлена как раз и равен

$$(-1)^r P(0, \ldots, 0) = (-1)^r \prod_{1\leqslant j\leqslant r} (z_j+z_j^{-1}).$$

Согласно предложению 5.1, существует такой многочлен f_r степени r, что $x^r+x^{-r}=f_r(x+x^{-1})$. Поскольку $0=z_j^r+z_j^{-r}= =f(z_j+z_j^{-1})$, этот многочлен и является нужным нам многочленом с корнями $z_1+z_1^{-1}, \ldots, z_r+z_r^{-1}$. Для вычисления его свободного члена мы положим $x=i$. Так как $i+i^{-1}=0$, то $f_r(0)=f_r(i+i^{-1})=i^r+i^{-r}=i^r(1+(-1)^r)$. Тем самым мы доказали следующее

12.8. Предложение. *Одномерное тривиальное представление входит в Δ_{2r} или Δ_{2r+1}*

с кратностью 2, *если* $r\equiv 0 \pmod 4$,
с кратностью -2, *если* $r\equiv 2 \pmod 4$,
с кратностью 0, *если* $r\equiv 1, 3 \pmod 4$.

Ввиду равенства $\Delta_{2r}=\Delta_{2r}^{+}+\Delta_{2r}^{-}$ отсюда в силу следствия 11.7 снова вытекает, что представления Δ_{8r}^{+} и Δ_{8r}^{-} являются комплексификациями действительных представлений, а представления Δ_{8r+4}^{+} и Δ_{8r+4}^{-} — ограничениями кватернионных представлений. Однако на основании этих вычислений мы ничего не можем сказать о представлениях Δ_{8r+2}^{+} и Δ_{8r+2}^{-}, а также о представлениях Δ_{8r+6}^{+} и Δ_{8r+6}^{-}. Например, эти вычисления не противоречат предположению, что оба представления Δ_n^{+} и Δ_n^{-} при $n=8r+2$ или $8r+6$ являются существенно комплексными представлениями или одно из них является комплексификацией действительного представления, а другое — ограничением кватернионного представления.

13. СПИНОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И K-ГРУППЫ СФЕР

Следующее предложение непосредственно вытекает из полученных результатов о строении колец $R(\mathrm{Spin}(k))$ и $RO(\mathrm{Spin}(k))$:

13.1. Предложение. (1) *Вложение* $\mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{Spin}(2n+1)$ *определяет мономорфизм колец* $R(\mathrm{Spin}(2n+1)) \to R(\mathrm{Spin}(2n))$, *и кольцо* $R(\mathrm{Spin}(2n))$ *является свободным* $R(\mathrm{Spin}(2n+1))$-*модулем с двумя образующими* 1 *и* Δ_{2n}^{+}.

(2) *Вложение* $\mathrm{Spin}(8n) \to \mathrm{Spin}(8n+1)$ *определяет мономорфизм колец* $RO(\mathrm{Spin}(8n+1) \to RO(\mathrm{Spin}(8n))$, *и кольцо* $RO(\mathrm{Spin}(8n))$ *является свободным* $RO(\mathrm{Spin}(8n+1))$-*модулем с двумя образующими* 1 *и* Δ_{8n}^{+}.

(3) *На кольце* $R(\mathrm{Spin}(2n))$ *существует инволюция, кольцом инвариантных элементов которой является кольцо* $R(\mathrm{Spin}(2n+1))$ *и которая переводит элемент* $\Delta_{2n}^{\pm}$ *в элемент* $\Delta_{2n}^{\mp}$. *Аналогично на кольце* $RO(\mathrm{Spin}(8n))$ *существует инволюция, кольцом инвариантных элементов которой является кольцо* $RO(\mathrm{Spin}(8n+1))$ *и которая переводит элемет* $\Delta_{8n}^{\pm}$ *в элемент* $\Delta_{8n}^{\mp}$.

13.2. Обозначение. Обозначим через α_k главное $\mathrm{Spin}(k)$-расслоение над сферой S^k с проекцией

$$\mathrm{Spin}(k+1) \to \mathrm{Spin}(k+1)/\mathrm{Spin}(k) = S^k.$$

13.3. Теорема. *Главное расслоение* α_k *индуцирует изоморфизмы групп*

$$\tilde{\alpha}_{2n}\colon R(\mathrm{Spin}(2a))/R(\mathrm{Spin}(2n+1)) \to K(S^{2n}),$$

$$\tilde{\alpha}_{8n}\colon RO(\mathrm{Spin}(8n))/RO(\mathrm{Spin}(8n+1)) \to KO(S^{8n}).$$

Эту теорему мы приводим без доказательства (см. Атья, Ботт и Шапиро [1]) [1]). В этой же работе рассмотрены (в связи с теоремой о периодичности) и мультипликативные свойства гомоморфизма $\tilde{\alpha}_k$.

---

[1]) Суть этой теоремы состоит в том, что расслоении $\alpha_{2n}[\Delta_{2n}^{+}]$ и $\alpha_{8n}[\Delta_{2n}^{+}]$ являются образующими бесконечных циклических групп $\tilde{K}(S^{2n})$ и $\tilde{K}O(S^{8n})$. — *Прим. ред.*

Глава 14

ИНВАРИАНТ ХОПФА

В этой главе с помощью K-теории изучается инвариант Хопфа отображений $S^{2n-1} \to S^n$ и устанавливаются его простейшие свойства. Основная цель этой главы состоит в изложении принадлежащего Атье элементарного доказательства несуществования элементов с инвариантом Хопфа, равным единице. Равносильность K-определения инвариаита Хопфа с обычным гомологическим определением будет доказана с помощью характера Чжэия в разд. 10 гл. 18.

1. ИНВАРИАНТ ХОПФА В K-ТЕОРИИ

Напомиим (см. теорему 10.5.5), что группа $\tilde{K}(S^{2n})$ является бесконечной циклической группой. Мы фиксируем образующую β_{2n} этой группы, требуя, чтобы для любых n и m внешнее K-произведение $\beta_{2n}\beta_{2m}$ было равно $\beta_{2(n+m)}$ и чтобы образующая β_2 отвечала каноническому линейному расслоению над $CP^1 = S^2$.

1.1. Обозначения. Пусть n — произвольное четное число. Поскольку $\tilde{K}(S^{2n-1}) = \tilde{K}(S^{n+1}) = 0$ (теорема 10.5.5), произвольное отображение f: $S^{2n-1} \to S^n$ определяет точную последовательность

$$0 \to \tilde{K}(S^{2n}) \xrightarrow{\psi} \tilde{K}(C_f) \xrightarrow{\varphi} \tilde{K}(S^n) \to 0$$

(см. теорему 9.2.8). Следовательно, группа $\tilde{K}(C_f)$ является свободной абелевой группой с двумя образующими. Одну из образующих этой группы мы можем выбрать каноническим образом. β_n
Именно мы можем принять за нее элемент $b_f = \psi(\beta_{2n})$. Другую образующую a_f мы выберем так, чтобы $\varphi(a_f) = \cancel{0}$. Этим условием образующая a_f определена с точностью до произвольного кратного mb_f образующей b_f. Иногда вместо b_f и a_f мы будем писать $b(f)$ и $a(f)$.

Умножение в кольце $\tilde{K}(C_f)$ определяется, как легко видеть, следующей таблицей умножения образующих:

$$b_f^2 = 0, \quad a_f b_f = 0, \quad a_f^2 = h_f b_f,$$

где h_f — некоторое целое число [1]).

1.2. Определение. *Инвариантом Хопфа* отображения $f: S^{2n-1} \to S^n$ называется такое целое число h_f, что $a_f^2 = h_f b_f$ в группе $K(C_f)$. Поскольку $a_f^2 = (a_f + mb_f)^2$, инвариант Хопфа h_f не зависит от выбора элемента a_f.

Замечание. Аналогичная конструкция при нечетном n приводит для любого отображения f к числу $h_f = 0$. Поэтому интересен лишь случай, когда n четно.

Наша ближайшая цель будет состоять в доказательстве гомотопической инвариантности числа $h_f = h(f)$. Для этого нам понадобится отображение $j_t: X \to (X \times I)_* = (X \times I)/(* \times I)$, сопоставляющее произвольной точке $x \in X$ точку $j_t(x)$ пространства $(X \times I)_*$, определенную точкой $(x, t) \in X \times I$ пространства $X \times I$. Ясно, что j_t гомотопически обратно к проекции $\langle x, t \rangle \mapsto x$.

1.3. Предложение. *Для любой сохраняющей отмеченные точки гомотопии* $f: S^{2n-1} \to S^n$ *имеет место равенство*

$$h(f_0) = h(f_1).$$

Доказательство. Рассматривая гомотопию f_t как отображение $f: (S^{2n-1} \times I)_* \to S^n$, мы для любого t можем написать коммутативную диаграмму

$$\begin{CD}
(S^{2n-1} \times I)_* @>{f}>> S^n @>>> C_f @>>> S(S^{2n-1} \times I)_* @>>> S^{n+1} \\
@A{j_t}AA @A{1}AA @A{k_t}AA @A{Sj_t}AA @A{1}AA \\
S^{2n-1} @>{f_t}>> S^n @>>> C_{f_t} @>>> S^{2n} @>>> S^{n+1}
\end{CD}$$

Эта диаграмма индуцирует коммутативную диаграмму $\tilde{K}$-групп

---

[1]) Поскольку отображения ψ и φ являются гомоморфизмами колец и $\beta_{2n}^2 = \beta_n^2 = 0$, то $\psi(b_f^2) = \beta_{2n}^2 = 0$, $\varphi(a_f^2) = \beta_n^2 = 0$. Следовательно, $b_f^2 = 0$ и $a_f^2 = h_f b_f$. Равенство, $a_f b_f = 0$ вытекает из того, что элемент a_f аннулируется на $(n-1)$-мерном остове (ибо этим свойством обладает элемент β_n), а элемент b_f аннулируется на $(2n-1)$-мерном остове (ибо этим свойством обладает элемент β_{2n}). Поэтому (см. добавление редактора перевода к разд. 3 гл. 9) элемент $a_f b_f$ аннулируется на $(3n-1)$-мерном остове и потому равен нулю (ибо $\dim C_f = 2n$). — *Прим. ред.*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \tilde{K}(S(S^{2n-1}\times I)_*) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \tilde{K}(C_f) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr] & \\
 & & & \tilde{K}(S^n) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{K}(S^{2n}) \arrow[r] & K(C_{f_t}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

гомоморфизм $\beta = (Sj_t)^!$ которой является изоморфизмом колец (обратным изоморфизмом является гомоморфизм $(Sp)^!$, где $p\colon (S^{2n-1}\times I)_* \to S^{2n-1}$ — проекция). Следовательно, морфизм $\alpha = (k_t)^!$ также является изоморфизмом колец. Пусть $b(f)$ и $a(f)$ — такие элементы кольца $\tilde{K}(C_f)$, что $b(f) = \psi\beta^{-1}(\beta_{2n})$ и $\varphi a(f) = 0$. Ясно, что элементы $\alpha(b(f))$ и $\alpha(a(f))$ являются элементами $b(f_t)$ и $a(f_t)$ для отображения f_t в смысле п. 1.1. Поэтому $h(f_t) = h$, где h — такое число, что $a(f)^2 = hb(f)$. Следовательно, число $h(f_t)$ не зависит от t. β_n

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИНВАРИАНТА ХОПФА

Согласно предложению 1.3, инвариант Хопфа мы можем рассматривать как отображение $h\colon \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbf{Z}$.

2.1. Предложение. *Отображение* $h\colon \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbf{Z}$ *является гомоморфизмом групп.*

Доказательство. Пусть $f_i\colon S^{2n-1} \to S^n$, $i = 1, 2$, — два отображения, сохраняющие отмеченные точки. По определению $[f_1] + [f_2] = [(f_1 \vee f_2)\theta]$, где $\theta\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1} \vee S^{2n-1}$ — отображение, стягивающее экватор в точку. Пусть $q_i\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1} \vee S^{2n-1}$ — отображения вложения, $g = (f_1 \vee f_2)\theta$ и $r_i\colon C_{f_i} \to C_g$ — отображения вложения, индуцированные отображениями q_i. Тогда для любого $i = 1, 2$ имеет место коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \tilde{K}(S^{2n}) \arrow[rr] & & \tilde{K}(C_g) \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & \tilde{K}(S^{2n}) \otimes \tilde{K}(S^{2n}) \arrow[u, "\theta^!"] \arrow[d, "q_i^!"] \arrow[rr] & & \tilde{K}(C_{f_1\vee f_2}) \arrow[u, "r^!"] \arrow[d, "r_i^!"] \arrow[r] & \tilde{K}(S^n) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{K}(S^{2n}) \arrow[rr] & & \tilde{K}(C_{f_i}) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Группа $\tilde{K}(C_{f_1 \vee f_2})$ имеет, как легко видеть, три свободные образующие a, b_1 и b_2, удовлетворяющие соотношениям $r_1^!(a)=a(f_1)$, $r_2^!(a)=a(f_2)$, $r_1^!(b_1)=b(f_1)$, $r_2^!(b_2)=b(f_2)$ и $r_1^!(b_2)=$ $=r_2^!(b_1)=0$. Перемножаются эти образующие по формулам [1] $ab_1=ab_2=b_1^2=b_2^2=0$ и $a^2=h_1b_1+h_2b_2$, где h_1, h_2 — некоторые целые числа. При этом $a(f_i)^2=r_i^!(a)^2=h_ir_i^!(b_i)=h(f_i)\,b(f_i)$, так что $h_i=h(f_i)$ при $i=1,\ 2$. С другой стороны, $\theta^!(\beta_{2n}\otimes 1)=$ $=\theta^!(1\otimes\beta_{2n})=\beta_{2n}$, и потому $r^!(b_i)=b(g)$ для любого $i=1,2$. Кроме того, $r^!(a)=a(g)$. Следовательно, $a(g)^2=r^!(a^2)=r^!(h_1b_1+$ $+h_2b_2)=(h_1+h_2)\,b(g)$, т. е. $h(g)=h(f_1)+h(f_2)$.

2.2. Предложение. *Для любых трех отображений*

$$u\colon S^{2n-1}\to S^{2n-1},\quad f\colon S^{2n-1}\to S^n,\quad v\colon S^n\to S^n$$

имеет место равенство

$$h_{vfu}=(\deg v)^2\,h_f\deg u.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $h_{vf}=$ $=(\deg v)^2h_f$ и $h_{fu}=h_f\deg u$. Мы докажем первое из этих равенств, оставляя второе читателю. Коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
S^{2n-1} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & S^n \arrow[r] \arrow[d, "v"] & C_f \arrow[r] \arrow[d, "w"] & S^{2n} \arrow[r] \arrow[d] & S^{n+1} \arrow[d] \\
S^{2n-1} \arrow[r] & S^n \arrow[r] & C_{vf} \arrow[r] & S^{2n} \arrow[r] & S^{n+1}
\end{tikzcd}$$

порождает коммутативную диаграмму K-групп

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{K}(C_f) \arrow[r] & \tilde{K}(S^n) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{K}(S^{2n}) \arrow[u] \arrow[d] & & \\
 & \tilde{K}(C_{vf}) \arrow[r] \arrow[uu, "w^!"] & \tilde{K}(S^n) \arrow[r] \arrow[uu, "v^!"] & 0
\end{tikzcd}$$

Следовательно [2], $w^!(b_{vf})=b_f$ и $w^!(a_{vf})-(\deg v)\,a_f=mb_f$, где m — некоторое целое число. Поэтому

$$(\deg v)^2a_f^2=w^!(a_{vf}^2)=h_{vf}w^!(b_{vf})=h_{vf}b_f.$$

Таким образом, $h_{vf}=(\deg v)^2h_f$.

---

[1] Это доказывается так же, как аналогичные формулы для образующих a_f и b_f (см. прим. ред. на стр. 304). — *Прим. ред.*

$\tilde{K}$

[2] Читателю следует здесь самостоятельно доказать, что гомоморфизм $v^!\colon \tilde{K}(S^n)\to\tilde{K}(S^n)$ является умножением на $\deg v$. — *Прим. ред.*

3. ИНВАРИАНТ ХОПФА И ТИП

3.1. Обозначение. Напомним, что *соединением* $X * Y$ двух пространств X и Y называется факторпространство пространства $X \times [0, 1] \times Y$, получающееся отождествлением точек $(x, 0, y)$ с точками $(x', 0, y)$ и точек $(x, 1, y)$ с точками $(x, 1, y')$, где $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$. Точки пространства $X * Y$ обозначаются символом $\langle x, t, y\rangle$. Если X и Y — пространства с отмеченными точками x_0 и y_0, то дополнительно отождествляются все точки вида (x_0, t, y_0) и результат этого отождествления принимается за отмеченную точку пространства $X * Y$. *Надстройкой* SZ над пространством Z называется факторпространство пространства $Z \times [0, 1]$, получающееся отождествлением точек $(z, 0)$ с точками $(z', 0)$ и точек $(z, 1)$ с точками $(z', 1)$, где $z, z' \in Z$. Точки пространства SZ обозначаются символами $\langle z, t\rangle$. Если Z — пространство с отмеченной точкой z_0, то дополнительно отождествляются все точки вида (z_0, t) и результат этого отождествления принимается за отмеченную точку пространства SZ. Ясно, что $SZ = Z * pt$, где pt — произвольная точка.

Пусть B^n и B^m — шары единичного радиуса, границами которых являются сферы S^{n-1} и S^{m-1}.

3.2. Предложение. *Формула* $u\langle x, t, y\rangle = \left(2\min\left(t, \frac{1}{2}\right)x, 2\min\left(1-t, \frac{1}{2}\right)y\right)$ *определяет гомеоморфизм*

$$u\colon S^{n-1} * S^{m-1} \to \partial(B^m \times B^n) = (B^n \times S^{m-1}) \cup (S^{n-1} \times B^m),$$

а формула $v\langle x, t, y\rangle = \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)x, \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)y\right)$ *определяет гомеоморфизм*

$$v\colon S^{n-1} * S^{m-1} \to S^{n+m-1}.$$

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что отображения u и v непрерывны и биективны. Поскольку это отображения компактных пространств, они являются гомеоморфизмами.

3.3. Определение. Говорят, что отображение $H(f)\colon X * Y \to SZ$ получено применением *конструкции Хопфа* к отображению $f\colon X \times Y \to Z$, если $H(f)\langle x, t, y\rangle = \langle f(x, y), t\rangle$. Легко видеть, что если f сохраняет отмеченные точки, то $H(f)$ также сохраняет отмеченные точки.

3.4. Предложение. *Для любой гомотопии* $f_s\colon X \times Y \to Z$ *семейство отображений* $H(f_s)\colon X * Y \to SZ$ *также является гомо-*

топией. Если гомотопия f_s сохраняет отмеченные точки, то гомотопия $H(f_s)$ также сохраняет отмеченные точки.

Доказательство. Гомотопия $f_s\colon X\times Y\to Z$ определяет по формуле $(x, t, y, s)\longmapsto (f_s(x, y), t)$ некоторое отображение $X\times I\times Y\times I\to Z\times I$. Так как пространство I компактно, то топология пространства $(X*Y)\times I$ является топологией отождествления и потому отображение, сопоставляющее точке $(\langle x, t, y\rangle, s)$ точку $H(f_s)\langle x, y, t\rangle$, непрерывно.

Следующая теорема связывает тип (см. разд. 10 гл. 7) отображения $f\colon S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ с инвариантом Хопфа отображения $H(f)\colon S^{2n-1}\to S^n$.

3.5. Теорема. *Если отображение $f\colon S^{n-1}\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ имеет тип (d_1, d_2), то инвариант Хопфа отображения $H(f)$ равен d_1d_2.*

Доказательство. Пусть $B_1=B_2=B^n$, $S_1=S_2=S^{n-1}$, и пусть H_+ и H_- — верхняя и нижняя полусферы сферы $SS^{n-1}=S^n$. Пользуясь предложением 3.2, будем рассматривать отображение $H(f)$ как отображение

$$H(f)\colon (B_1\times S_2)\cup(S_1\times B_2)\to S^n=H_+\cup H_-.$$

Конус $C_{H(f)}=(B_1\times B_2)\bigcup\limits_{H(f)} S^n$ этого отображения обозначим через X, а соответствующее отображение отождествления

$$(B_1\times B_2,\ B_1\times S_2,\ S_1\times B_2)\to(X, H_+, H_-)$$

— через g. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\begin{array}{c}
\tilde K(S^n)\otimes\tilde K(S^n)\\
\downarrow\\
\tilde K(B_2, S_2)\otimes\tilde K(B_1, S_1)\\
\downarrow{\scriptstyle\approx}\\
\tilde K(B_1\times B_2,\ B_1\times S_2)\otimes\tilde K(B_1\times B_2,\ S_1\times B_2)\\
\downarrow\\
\tilde K(B_1\times B_2,\ (B_1\times S_2)\cup(S_1\times B_2))\\
\downarrow{\scriptstyle\approx}\\
\tilde K(S^{2n})
\end{array}$$

Пусть a_1 — образ элемента β_n в группе $\tilde K(B_1\times B_2,\ S_1\times B_2)$, а a_2 — образ элемента β_n в группе $\tilde K(B_1\times B_2,\ B_1\times S_2)$. Ясно, что $\tilde K$-произведение a_1a_2 является образующей группы $\tilde K$ $(B_1\times B_2,$

$(B_1 \times S_2) \cup (S_1 \times B_2))$ и эта образующая проектируется в β_{2n}. Следовательио, композиция рассматриваемых гомоморфизмов переводит элемент $\beta_n \otimes \beta_n$ в элемент β_{2n}.

Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\tilde{K}(X) \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[d] & & \tilde{K}(X, H_-) \arrow[r, "g_1^!"] \arrow[d] & \tilde{K}(B_1 \times B_2, S_1 \times B_2) \arrow[d, "\approx"] \\
\tilde{K}(S^n) & & \tilde{K}(H_+, S^{n-1}) \arrow[r, "g_1^!"] \arrow[dl, "\approx"'] \arrow[d] & \tilde{K}(B_1, S_1) \arrow[d] \\
& \tilde{K}(S^n, H) \arrow[ul, "\approx"] & \tilde{K}(SS^{n-1}) \arrow[r, "g_1^!"] & \tilde{K}(SS^{n-1})
\end{tikzcd}$$

где g_1 — отображение $(B_1 \times B_2, S_1 \times B_2) \to (X, H_-)$, индуцированное отображением g. Ясно, что гомоморфизм $g_1^!$: $\tilde{K}(S^n) \to \tilde{K}(S^n)$ является умножением на d_1. Поэтому $g_1^!(\alpha_1(a)) = d_1 a_1$, где $a = a_{H(f)}$. Аналогично показывается, что $g_2^!(\alpha_2(a)) = d_2 a_2$, где g_2: $(B_1 \times B_2, B_1 \times S_2) \to (X, H_+)$. С другой стороны, очевидно, что элемент a^2, который, как мы знаем, лежит в образе гомоморфизма $\tilde{K}(S^{2n}) \to \tilde{K}(X)$, переходит при гомоморфизме $\tilde{K}(X) \to \tilde{K}(X, H_+ \cup H_-)$ в элемент $\alpha_1(a)\alpha_2(a)$ группы $\tilde{K}(X, H_+ \cup H_-) = \tilde{K}(X, S^n)$. Следовательно, при гомоморфизме $g^!$: $\tilde{K}(X) \to K(B_1 \times B_2, (S_1 \times B_2) \cup (B_1 \times S_2))$ элемент a^2 переходит в элемент $d_1 d_2 (a_1 a_2)$, являющийся, согласно сказанному выше, образом элемента $d_1 d_2 \beta_{2n}$ при изоморфизме $\tilde{K}(S^{2n}) \to \tilde{K}(B_1 \times B_2, S_1 \times B_2 \cup B_1 \times S_2)$. Поэтому $a_{H(f)}^2 = d_1 d_2 b_{H(f)}$.

3.6. Следствие. *Для любого (четного) n существует отображение $S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным произвольному наперед заданному четному числу.*

Доказательство. В силу теоремы 3.5 и следствия 7.10.2 существует отображение $S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным —2. Но тогда, согласно предложеиию 2.2, существует отображение и с произвольным четным инвариантом Хопфа [1]).

3.7. Следствие. *При $n = 2$, 4 и 8 существуют отображения $S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным единице, а значит, с любым инвариантом Хопфа.*

Доказательство. Согласно таблице 11.6.5, иад алгебрами Клиффорда C_1, C_3 и C_7 квадратичной формы $-(x \mid x)$

[1]) Вместо предложения 2.2 здесь проще воспользоваться непосредственно предложением 2.1. — *Пред. ред.*

существуют неприводимые модули размерностей 2, 4 и 8 соответственно. Следовательно, при $m=2$, 4 и 8 существует (см. замечание 11.2.5) ортогональное умножение $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$. Это умножение, обладающее двусторонней единицей, определяет отображение $S^{m-1} \times S^{m-1} \to S^{m-1}$ типа (1,1). Для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 3.5.

3.8. Замечание. Ортогоиальные умножения $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ при $m=2, 4$ и 8 определяются соответственно умножением комплексных чисел, кватернионов и чисел Кели.

4. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ С ИНВАРИАНТОМ ХОПФА, РАВНЫМ 1

Согласно следствию 3.7, при $n=2$, 4 и 8 существуют отображения $S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным единице. Следуя Атье, мы докажем сейчас, что ни при каких других n отображений $S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным единице, не существует.

4.1. Согласно п. 1.1, для любого отображения $f\colon S^{4n-1} \to S^{2n}$ с инвариантом Хопфа ± 1 имеет место точная последовательность

$$0 \to \tilde{K}(S^{4n}) \to \tilde{K}(C_f) \to \tilde{K}(S^{2n}) \to 0,$$

группа $\tilde{K}(C_f)$ которой обладает свободными образующими a_f и b_f, связанными соотношением $a_f^2 = \pm b_f$. Из свойств операций Адамса в кольце $\tilde{K}(S^m)$ (см. теорему 12.11.2) и определения элементов a_f и b_f немедленно вытекает, что

$$\psi^k(b_f) = k^{2n} b_f \quad \text{и} \quad \psi^k(a_f) = k^n a_f + q(k)\, b_f,$$

где $q(k)$ — некоторое целое число.

4.2. Лемма. *Число $q(2)$ нечетно.*

Доказательство. Согласно п. 12.2.6,

$$\psi^2(a_f) = a_f^2 - 2\lambda_2(a_f).$$

С другой стороны, легко видеть [1]), что $\lambda_2(a_f) = -2^{n-1} a_f + m b_f$. Следовательно,

$$\psi^2(a_f) = \pm b_f - 2(-2^{n-1} a_f + m b_f) = 2^n a_f + (-2m \pm 1)\, b_f.$$

Таким образом, число $q(2) = \pm 1 - 2m$ нечетно.

---

[1]) Достаточно показать, что $\lambda_2(\beta_{2n}) = -2^{n-1}\beta_{2n}$. Но $2\lambda_2(\beta_{2n}) = \beta_{2n}^2 - \psi^2(\beta_{2n}) = -\psi^2(\beta_{2n}) = -2^n\beta_{2n}$. — *Прим. ред.*

4.3. Теорема (Адамс, Атья). *Если существует отображение $S^{2m-1} \to S^m$ с инвариантом Хопфа, равным единице, то $m=2$, 4 или 8.*

Доказательство. Полагая $m=2n$ и пользуясь формулами из п. 4.1, мы для любого нечетного числа k получим

$$\begin{aligned}\psi^2\psi^k(a_f) &= \psi^2(k^n a_f + q(k)\, b_f) = \\ &= 2^n k^n a_f + k^n q(2)\, b_f + 2^{2n} q(k)\, b_f, \\ \psi^k\psi^2(a_f) &= \psi^k(2^n a_f + q(2)\, b_f) = \\ &= 2^n k^n a_f + 2^n q(k)\, b_f + k^{2n} q(2)\, b_f.\end{aligned}$$

С другой стороны, согласно теореме 12.10.5, имеет место соотношение $\psi^2\psi^k = \psi^{2k} = \psi^k\psi^2$. Следовательно, $k^n q(2) + 2^{2n} q(k) = 2^n q(k) + k^{2n} q(2)$, т. е. $k^n(k^n-1)\, q(2) = 2^n(2^n-1)\, q(k)$. Поскольку, согласно лемме 4.2, число $q(2)$ нечетно (это единственное место, где мы используем условие $h_f = \pm 1$), отсюда следует, что число 2^n делит число k^n-1, т. е., иными словами, $k^n \equiv 1 \pmod{2^n}$. Поскольку это должно иметь место для всех нечетных чисел k, отсюда вытекает (см., например, Бурбаки [1, гл. VII]), что $n \equiv 0 \pmod{2^{n-2}}$. Но при $n \geqslant 5$ имеет место неравенство $n < 2^{n-2}$, и поэтому это сравнение невозможно. Оно невозможно и при $n=3$. Таким образом, остаются только значения $n=1$, 2 и 4.

Эту теорему можно было доказать, используя некоторые более тонкие результаты теории чисел, на основе только одного соотношения $\psi^2\psi^3 = \psi^3\psi^2$.

Из теоремы 4.3 немедленно вытекает следующий результат о сферах, которые могут быть H-пространствами.

4.4. Следствие. *Из всех сфер только сферы S^1, S^3 и S^7 могут нести строение H-пространства.*

Доказательство. Каждое строение H-пространства $\varphi\colon S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ является отображением типа (1,1), и, следовательно, применяя к нему конструкцию Хопфа, мы получаем отображение $S^{2n-1} \to S^n$ с инвариантом Хопфа, равным единице (теорема 3.5). Таким образом, согласно теореме 4.3, число n должно быть равным 2, 4 или 8. С другой стороны, согласно следствию 3.7, на сферах S^1, S^3 и S^7 строение H-пространства действительно существует.

Теорема 4.3 впервые была доказана Адамсом [5] с помощью вторичных когомологических операций в обычных группах когомологий.

Глава 15

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА СФЕРАХ

В гл. 11 было показано (теорема 11.8.2), что на сфере S^{n-1} существует $\rho(n)-1$ ортонормальных касательных векторных полей. Цель этой главы — изложить основные идеи доказательства того, что на сфере S^{n-1} не существует $\rho(n)$ ортонормальных (а потому и $\rho(n)$ линейно независимых) касательных векторных полей (см. Адамс [6]).

Доказательство этого факта использует такие понятия, как пространства Тома, S-двойственность, послойная гомотопическая эквивалентность и спектральная последовательность в K-теории. Весь этот материал мы сможем изложить здесь лишь в самых общих чертах и, как правило, без доказательств.

Теорема о несуществовании $\rho(n)$ векторных полей равносильна утверждению о несуществовании сечений для расслаивающего отображения $V_{\rho(n)+1}(\mathbf{R}^n)\to V_1(\mathbf{R}^n)=S^{n-1}$. Одним из важнейших шагов в доказательстве этой теоремы является теорема о том, что сечение расслоения $V_k(\mathbf{R}^n)\to V_1(\mathbf{R}^n)$ существует тогда и только тогда, когда между стянутыми проективными пространствами существует отображение, обладающее некоторыми специальными свойствами.

1. ПРОСТРАНСТВА ТОМА ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть ξ — произвольное действительное векторное расслоение с базой $B(\xi)$. С ним ассоциировано расслоение $P(\xi)$ на проективные пространства, расслоение $S(\xi)$ на сферы и расслоение $D(\xi)$ на единичные шары (в определении расслоений $S(\xi)$ и $D(\xi)$ предполагается, что на ξ задана некоторая риманова метрика).

Если α — главное $O(n)$-расслоение, ассоциированное с расслоением ξ, то расслоение $P(\xi)$ является расслоенным пространством $\alpha[RP^{n-1}]$, расслоение $S(\xi)$ — расслоенным пространством $\alpha[S^{n-1}]$ и расслоение $D(\xi)$ — расслоенным пространством $\alpha[D^n]$.

Обозначая пространства расслоений $P(\xi)$, $S(\xi)$ и $D(\xi)$ теми же символами $P(\xi)$, $S(\xi)$ и $D(\xi)$, мы можем написать коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} B(\xi) \arrow[r, "f_1"] & S(\xi\oplus\theta^1) \\ S(\xi) \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "p_2"] & D(\xi) \arrow[u, "q_1"] \arrow[d, "q_2"] \\ P(\xi) \arrow[r, "f_3"] & P(\xi\oplus\theta^1), \end{tikzcd}$$

где f_2 и f_3 — отображения вложения, f_1 — сечение, определенное (в понятных обозначениях) формулой $f_1(b) = (0, 1)$, p_1 — проекция $S(\xi) \to B(\xi)$, p_2 — отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in S(\xi)$ прямую, соединяющую точку 0 с точкой x, q_1 — отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in D(\xi)$ вектор $((1-\|x\|)x, 2\|x\|-1)$, деленный на его длину, и q_2 — отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in D(\xi)$ прямую, соединяющую точку 0 с точкой $(x, 1-\|x\|)$.

1.1. Предложение. *Отображения*

$$q_1\colon\ D(\xi)\setminus \operatorname{Im} f_2 \to S(\xi\oplus\theta^1)\setminus \operatorname{Im} f_1$$

и

$$q_2\colon\ D(\xi)\setminus \operatorname{Im} f_2 \to P(\xi\oplus\theta^1)\setminus \operatorname{Im} f_3$$

являются гомеоморфизмами. Эти гомеоморфизмы индуцируют гомеоморфизмы $D(\xi)/S(\xi) \to S(\xi\oplus\theta^1)/B(\xi)$ *и* $D(\xi)/S(\xi) \to P(\xi\oplus\theta^1)/P(\xi)$.

Доказательство. Гомеоморфность отображений q_1 и q_2 доказывается непосредственным построением обратных отображений. Индуцированные отображения $D(\xi)/S(\xi) \to S(\xi\oplus\theta^1)/B(\xi)$ и $D(\xi)/S(\xi) \to P(\xi\oplus\theta^1)/P(\xi)$, очевидно, являются непрерывными биективными отображениями, обладающими тем свойством, что обратные отображения непрерывны всюду, за исключением, быть может, отмеченной точки. С другой стороны, для любой открытой окрестности V подпространства $S(\xi)$ в пространстве $D(\xi)$ множество $q_1(V)$, очевидно, открыто в $S(\xi\oplus\theta^1)$, а множество $q_2(V)$ открыто в $P(\xi\oplus\theta^1)$. Поэтому указанные обратные отображения непрерывны и в отмеченных точках.

1.2. Определение. *Пространством Тома* $T(\xi)$ действительного векторного расслоения ξ называется факторпространство $D(\xi)/S(\xi)$.

Согласно предложению 1.1, пространство Тома $T(\xi)$ мы можем отождествить с пространствами $S(\xi\oplus\theta^1)/B(\xi)$ и $P(\xi\oplus\theta^1)/P(\xi)$. Поскольку пространство $P(\xi\oplus\theta^1)/P(\xi)$ не зависит от выбора римановой метрики иа расслоеиии ξ, пространство Тома $T(\xi)$ также не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от выбора этой метрики.

1.3. Предложеиие. *Если база $B(\xi)$ действительного векторного расслоения ξ компактна, то пространство Тома $T(\xi)$ расслоения ξ гомеоморфно одноточечной компактификации пространства $E(\xi)$ расслоения ξ.*

Доказательство. Ясно, что простраиства $D(\xi) \setminus S(\xi)$ и $E(\xi)$ гомеоморфны. С другой стороны, факторпространство $D(\xi)/S(\xi)$ является одноточечиой компактификацией пространства $D(\xi) \setminus S(\xi)$.

1.4. Пример. Для тривиального n-мериого расслоения θ^n над пространством X простраиство $T(\theta^n)$ гомеоморфно пространству $S^n(X \cup \{\infty\})$. В частности, если X состоит только из одной точки, то $T(\theta^n) = S^n$. Таким образом, пространства Тома можно рассматривать как обобщенные надстройки.

1.5. Предложение. *Для любых действительных векторных расслоений ξ и η над компактным пространством X пространство Тома $T(\xi \times \eta)$ гомеоморфно пространству $T(\xi) \wedge T(\eta)$.*

Доказательство. Согласио предложению 1.3, простраиство $T(\xi \times \eta)$ гомеоморфио одноточечной компактификации пространства $E(\xi \times \eta) = E(\xi) \times E(\eta)$. С другой стороны, ясно, что одноточечная компактификация произведения $E(\xi) \times E(\eta)$ гомеоморфна простраиству $T(\xi) \wedge T(\eta)$.

В явном виде гомеоморфизм $T(\xi \times \eta) \to T(\xi) \wedge T(\eta)$ можно описать как гомеоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом

$$f\colon (D(\xi \times \eta), S(\xi \times \eta)) \to (D(\xi) \times D(\eta), S(\xi) \times D(\eta) \cup D(\xi) \times S(\eta)),$$

определенным формулой на слое!

это – ? обратный гомеоморфизм!

$$f(x, y) = \max(\|x\|, \|y\|)(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{-1/2}(x, y).$$

1.6. Следствие. *Пространство Тома $T(\xi \oplus \theta^n)$ расслоения $\xi \oplus \theta^n$ гомеоморфно n-кратной надстройке $S^n(T(\xi))$ над пространством Тома $T(\xi)$ расслоения ξ.*

Доказательство. Расслоение $\xi \oplus \theta^n$ изоморфно расслоению $\xi \times \mathbf{R}^n$, где $\mathbf{R}^n$ рассматривается как n-мерное векторное расслоение иад одной точкой.

Пусть ξ_k — каноническое линейиое расслоение над действительным проективным пространством RP^k, и пусть $m\xi_k = \underbrace{\xi_k \oplus \ldots \oplus \xi_k}_{m \text{ раз}}$. Поскольку пространство RP^k можно рассматривать как факторпространство сферы S^k, получающееся отождествлением диаметрально противоположных точек, пространство $E(m\xi_k)$ расслоения $m\xi_k$ является факторпространством произведения $S^k \times \mathbf{R}^m$, получающимся отождествлением точек (x, y) и $(-x, -y)$, $x \in S^k$, $y \in \mathbf{R}^m$. Аналогично, пространство $D(m\xi_k)$ является факторпространством произведения $S^k \times D^m$, получающимся отождествлением точек (x, y) и $(-x, -y)$, $x \in S^k$, $y \in D^m$. Точку пространства $D(m\xi_k)$, соответствующую точке $(x, y) \in S^k \times D^m$, мы будем обозначать символом $\langle x, y\rangle$. Ясно, что $\langle x, y\rangle \in S(m\xi_k)$ тогда и только тогда, когда $\|y\| = 1$.

1.7. Пример. Рассмотрим отображение $f\colon S^k \times D^m \to S^{k+m}$, определенное формулой $f(x, y) = (y, (1 - \|y\|^2)x)$. Ясно, что $f(S^k \times S^{m-1}) = S^{m-1} \subset S^{k+m}$. Так как $f(-x, -y) = -f(x, y)$, то отображение f индуцирует, следовательно, некоторое отображение $g\colon D(m\xi_k) \to RP^{k+m}$, для которого $g(S(m\xi_k)) = RP^{m-1}$. Очевидно, что отображения $f\colon S^k \times \operatorname{int} D^m \to S^{k+m} \setminus S^{m-1}$ и $g\colon D(m\xi_k) \setminus S(m\xi_k) \to RP^{k+m} \setminus RP^{m-1}$ являются гомеоморфизмами. Следовательно, индуцированное отображеннем g фактор-отображение

$$h\colon T(m\xi_k) \to RP^{m+k}/RP^{m-1}$$

является гомеоморфизмом. В силу следствия 1.6 отсюда вытекает

1.8. Теорема. *Пространство Тома $T(m\xi_k \oplus \theta^n)$ гомеоморфно n-кратной надстройке $S^n(RP^{m+k}/RP^{m-1})$ над стянутым проективным пространством RP^{m+k}/RP^{m-1}.*

2. S-КАТЕГОРИЯ

В этом разделе все пространства предполагаются пространствами с отмеченными точками и все отображения и гомотопии — сохраняющими отмеченные точки.

Функтор надстройки определяет, очевидно, некоторое отображение $S\colon [X, Y] \to [SX, SY]$. При этом множество $[SX, SY]$ является группой и для любого $k \geqslant 1$ отображение $S\colon [S^kX, S^kY] \to [S^{k+1}X, S^{k+1}Y]$ является гомоморфизмом групп.

2.1. Определение. Прямой предел последовательности абелевых групп

$$[S^2X, S^2Y] \to [S^3X, S^3Y] \to \dots \to [S^nX, S^nY] \to \dots$$

обозначается символом $\{X, Y\}$. Элементы группы $\{X, Y\}$ называются *S-отображениями* (или *стационарными отображениями*) пространства X в пространство Y.

Гомоморфизмы $S\colon [S^kX, S^kY] \to [S^{k+1}X, S^{k+1}Y]$ определяют, очевидно, некоторый изоморфизм $S\colon \{X, Y\} \to \{SX, SY\}$.

2.2. Теорема. *Если пространство X является n-мерным клеточным разбиением, а пространство Y является r-связным пространством и $n-1<2r-1$, то естественное отображение $[X, Y] \to \{X, Y\}$ биективно.*

Эта теорема принадлежит Спеньеру и Уайтхеду. Ее доказательство можно найти, например, в книге Спеньера [3].

Идея этого доказательства заключается в том, чтобы установить биективность отображения $S\colon [X, Y] \to [SX, SY] = [X, \Omega SY]$. Поскольку условия теоремы выполнены для X и Y, то они выполнены также и для SX и SY; теорема вытекает отсюда очевидным образом. Биективность же отображения $[X, Y] \to [X, \Omega SY]$ легко устанавливается, например, с помощью точной последовательности, являющейся обобщением на случай расслоения $ESY \to SY$ известной последовательности Вана.

Ясно, что композиция отображений

$$[S^nX, S^nY] \times [S^nY, S^nZ] \to [S^nX, S^nZ]$$

определяет некоторую композицию S-отображений

$$\{X, Y\} \times \{Y, Z\} \to \{X, Z\},$$

причем относительно этой композиции совокупность всех пространств и всех их S-отображений является категорией. Эта категория называется *S-категорией* (или *стационарой категорией*). О пространствах, изоморфных в этой категории, говорят, что они имеют один и тот же *стационарный гомотопический тип*.

2.3. Предложение. *Композиция S-отображений*

$$\{X, Y\} \times \{Y, Z\} \to \{X, Z\}$$

биаддитивна.

Доказательство. Поскольку пространство S^kX является ко-H-пространством, отображение

$$[S^kX, S^kY] \times [S^kY, S^kZ] \to [S^kX, S^kZ]$$

аддитивно по первому аргументу. Аналогично, поскольку пространство ΩS^kZ является H-пространством, отображение

$$[S^{k-1}X, S^{k-1}Y] \times [S^{k-1}Y, \Omega S^kZ] \to [S^{k-1}X, \Omega S^kZ]$$

аддитивно по второму аргументу. Для завершения доказательства остается перейти к прямому пределу.

2.4. Предложение. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *произвольное отображение и* $\alpha_f\colon Y \to C_f$ — *соответствующее отображение вложения. Тогда для любого отображения* $g\colon Z \to Y$, *для которого отображение* $\alpha_f g$ *гомотопно нулю, существует такое отображение* $h\colon SZ \to SX$, *что отображение* $(Sf)h$ *гомотопно отображению* Sg.

Доказательство. Поскольку отображение $\alpha_f g$ гомотопно нулю, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1"] & Y \arrow[r, "\alpha_g"] \arrow[d] & C_g \arrow[r, "\beta_g"] \arrow[d] & SZ \arrow[r, "Sg"] \arrow[d, "h"] & SY \arrow[d, "S1"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\alpha_f"] & C_f \arrow[r, "\beta_f"] & SX \arrow[r, "Sf"] & SY \end{tikzcd}$$

Ясно, что взятое из этой диаграммы отображение h обладает требуемым свойством.

2.5. Теорема. *Для любого отображения* $f\colon X \to Y$ *и любого пространства* Z *последовательность Пуппе* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha_f} C_f \xrightarrow{\beta_f} SX \xrightarrow{Sf} SY$ *индуцирует точные последовательности*

$$\{X, Z\} \leftarrow \{Y, Z\} \leftarrow \{C_f, Z\} \leftarrow \{SX, Z\} \leftarrow \{SY, Z\}$$

и

$$\{Z, X\} \to \{Z, Y\} \to \{Z, C_f\} \to \{Z, SX\} \to \{Z, SY\}.$$

Доказательство. Первая последовательность является пределом обычных последовательностей Пуппе и потому точна. С другой стороны, вторая последовательность является итерацией последовательности

$$\{Z, X\} \to \{Z, Y\} \to \{Z, C_f\}.$$

Остается заметить, что в силу предложения 2.4 последовательность $\{Z, X\} \to \{Z, Y\} \to \{Z, C_f\}$ точна.

Построенные последовательности называются *стационарными последовательностями Пуппе*.

3. СТАЦИОНАРНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ АТЬИ

Рассмотрим всевозможные отображения $u\colon X \wedge X' \to S^n$, которые условимся называть *n-спариваниями*. Каждое такое отображение определяет два гомоморфизма групп $u_Z\colon \{Z, X'\} \to \{X \wedge Z, S^n\}$ и $u^Z\colon \{Z, X\} \to \{Z \wedge X', S^n\}$, задаваемые формулами $u_Z(\{f\})=\{u(f\wedge 1)\}$ и $u^Z(\{g\})=\{u(g\wedge 1)\}$ соответственно. При $Z=S^k$ мы вместо u_Z и u^Z будем писать u_k и u^k.

Мы предлагаем следующее определеиие S-двойствениости, которое независимо было предложено Фрейдом.

3.1. Определение. n-спаривание $u\colon X\wedge X'\to S^n$ называется *n-двойственностью*, если отображения $u_k\colon \{S^k, X'\}\to\{X\wedge S^k, S^n\}$ и $u^k\colon \{S^k, X\}\to\{S^k\wedge X', S^n\}$ являются изоморфизмами групп.

Если существует хотя бы одна n-двойствеииость $u\colon X\wedge X'\to S^n$, то пространство X' иазывается *n-двойственным* пространству X. Пространство X' называется *стационарно двойственным* (или *S-двойственным*) пространству X, если существует такое n, что некоторая иадстройка над пространством X n-двойствениа к иекоторой иадстройке над пространством X'.

Отметим, что это определение двойственности аналогично определению двойствениости в линейной алгебре, где она задается невырожденым морфизмом $V\otimes V'\to F$. Невырожденность этого морфизма означает, что соответствующий морфизм корреляции является изоморфизмом. Если $X\wedge X'$ представлять себе как тензориое произведение, то гомоморфизмы u_k и u^k как раз и будут аиалогами морфизма корреляции.

3.2. Пример (Спеньер и Уайтхед [1]). Если конечные разбиеиия X и X' могут быть вложены в сферу S^n так, чтобы отображение вложеиия $g\colon X'\to S^n\setminus X$ было гомотопической эквивалентностью, то существует n-двойственность $X\wedge X'\to S^n$.

3.3. Замечание. Ситуация, описанная в примере 3.2, была первоначально принята Спеньером и Уайтхедом в качестве определения n-двойственности. Позднее Спеньер [2] модифицировал это определение, рассмотрев n-спариваиия с некоторыми условиями на гомологии и когомологии соответствующего $\wedge$-произведения. Двойственность в смысле Спеиьера автоматически является двойственностью в смысле определения 3.2. Из иекоторых доказываемых ниже результатов (раздел 8) без труда следует, что обратиое также верно.

3.4. Предложение. *Если пространства X, X' и Z являются конечными клеточными разбиениями, то для любой n-двойственности $u\colon X\wedge X'\to S^n$ гомоморфизмы*

$$u_Z\colon \{Z, X'\}\to\{X\wedge Z, S^n\}$$

и

$$u^Z\colon \{Z, X\}\to\{Z\wedge X', S^n\}$$

являются изоморфизмами.

Доказательство легко проводится индукцией по числу клеток разбиения Z с использованием последовательностей Пуппе для характеристических отображений клеток.

Это предложение показывает, что для любых n-двойственностей $u\colon X \wedge X' \to S^n$ и $v\colon Y \wedge Y' \to S^n$ между конечными клеточными разбиениями определен изоморфизм

$$D_n(u, v) = u_{Y'}^{-1} v^X\colon \{X, Y\} \to \{Y', X'\}.$$

3.5. Определение. Изоморфизм $D_n(u, v)$ называется *двойственностью отображений*, индуцированной двойственностями u и v.

По определению имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \{X, Y\} \arrow[rr, "D_n(u,v)"] \arrow[dr, "v^X"'] & & \{Y', X'\} \arrow[dl, "u_{Y'}"] \\ & \{X \wedge Y', S^n\} & \end{tikzcd}$$

Ясно, что $D_n(u, u)\{1\} = \{1\}$ и для любых n-двойственностей $u\colon X \wedge X' \to S^n$, $v\colon Y \wedge Y' \to S^n$ и $w\colon Z \wedge Z' \to S^n$ справедливо соотношение $D_n(u, w)(\{g\}\{f\}) = (D_n(u, v)\{f\})(D_n(v, w)\{g\})$.

Следующая теорема является основой, на которую опирается сведение проблемы векторных полей к некоторой задаче о стянутых проективных пространствах. Она принадлежит Атье [2] и представляет собой обобщение одного результата Милнора и Спеньера [1].

Напомним, что произвольное компактное (гладкое) многообразие X можно вложить в некоторое пространство $\mathbf{R}^n$. С другой стороны, для каждого многообразия $X \subset \mathbf{R}^n$ можно говорить о *нормальном расслоении* ν над X, слоем которого над произвольной точкой $x \in X$ является пространство всех векторов из $\mathbf{R}^n$, нормальных к многообразию X в точке x. Ясно, что сумма Уитни $\nu \oplus \tau(X)$, где $\tau(X)$, — как обычно, касательное векторное расслоение над X, является тривиальным расслоением. Это свойство можно принять за определение нормального расслоения, не зависящее от вложения X в $\mathbf{R}^n$. Оно определяет расслоение ν с точностью до стационарной эквивалентности.

3.6. Теорема. *Пространство Тома $T(\nu)$ нормального расслоения ν над компактным многообразием X стационарно двойственно пространству $X/\partial X$, где ∂X — край многообразия X.*

Этот результат получается с помощью вложения многообразия X в некоторый куб пространства $\mathbf{R}^n$ таким образом, что ∂X оказывается частью многообразия X, расположенной в границе куба.

Поскольку пространства Тома можно рассматривать как обобщенные надстройки, можно думать, что они должны быть тесно связаны со стационарной двойственностью. Следующая теорема Атьи является наиболее важным результатом в этом направлении.

3.7. Теорема. *Если векторные расслоения ξ и η над замкнутым гладким многообразием X обладают тем свойством, что сумма Уитни $\xi \oplus \eta \oplus \tau(X)$ является тривиальным расслоением над X, то их пространства Тома $T(\xi)$ и $T(\eta)$ стационарно двойственны друг другу* [1]).

Покажем, что эта теорема без особого труда вытекает из теоремы 3.6. Действительно, без ограничения общности можно предполагать, что ξ является дифференцируемым векторным расслоением с гладкой римановой метрикой. Тогда $D(\xi)$ является компактным гладким многообразием с краем $\partial D(\xi) = S(\xi)$. Касательным расслоением над $D(\xi)$ является, как легко видеть, расслоение $\pi^*(\xi \oplus \tau(X))$, где π: $D(\xi) \to X$ — естественная проекция, а нормальным — расслоение $\pi^*(\eta)$. Поэтому в силу теоремы 3.6 пространство Тома $T(\pi^*(\eta))$ стационарно двойственно пространству $T(\xi) = D(\xi)/S(\xi)$. Для завершения доказательства остается заметить, что проекция π: $D(\xi) \to X$ является гомотопической эквивалентностью, и потому пространство $T(\pi^*(\eta))$ гомеоморфно пространству $T(\eta)$.

4. ПОСЛОЙНЫЙ ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП

Послойный гомотопический тип является одним из важнейших общих понятий теории расслоений, которое, собственно говоря, следовало бы рассмотреть еще в главе 2.

4.1. Определение. Пусть p: $E \to X$ и p': $E' \to X$ — произвольные расслоения над пространством X. Гомотопия f_t: $E \to E'$ называется *послойной*, если $p' f_t = p$ для всех $t \in I$. Морфизмы расслоений f, g: $E \to E'$ называются *послойно гомотопными*, если существует такая послойная гомотопия f_t: $E \to E'$, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Морфизм f: $E \to E'$ называется *послойной гомотопической эквивалентностью*, если существует такой морфизм g: $E' \to E$, что морфизмы gf и fg послойно гомотопны тождественному морфизму. Расслоения E и E' принадлежат по

---

[1]) Из следствия 1.6 немедленно вытекает, что имеет место и следующее более общее утверждение: если расслоение $\xi \oplus \eta \oplus \tau(X)$ стационарно эквивалентно тривиальному расслоению, то пространства $T(\xi)$ и $T(\eta)$ стационарно двойственны. Именно в этой форме теорема 3.7 и будет использована ниже. — *Прим. ред.*

определению одному и тому же *послойному гомотопическому типу*, если существует хотя бы одна послойная гомотопическая эквивалентность $f\colon E \to E'$.

Без труда проверяется, что расслоения и классы послойно гомотопных отображений образуют категорию. Ее изоморфизмами являются послойные гомотопические эквивалентности.

Общая теория послойной гомотопической эквивалентности развита Дольдом (Дольд [4]). Здесь мы ограничимся лишь одной нужной нам теоремой (см. Дольд [1]).

4.2. Лемма. *Пусть Y и Y' — локально компактные пространства и $f\colon D^n \times Y \to D^n \times Y'$ — такой D^n-морфизм тривиальных расслоений $D^n \times Y \to D^n$ и $D^n \times Y' \to D^n$, что*

(1) *для каждой точки $x \in D^n$ отображение $\{x\} \times Y \to \{x\} \times Y'$ является гомотопической эквивалентностью;*

(2) *существуют такой S^{n-1}-морфизм расслоений $g'\colon S^{n-1} \times Y' \to S^{n-1} \times Y$ и такая послойная гомотопия $h'_t\colon S^{n-1} \times Y \to S^{n-1} \times Y$, что $h'_0 = g'f$ и $h'_1 = 1$.*

Тогда существуют такое продолжение $g\colon D^n \times Y' \to D^n \times Y$ отображения g' и такое продолжение $h_t\colon D^n \times Y \to D^n \times Y$ гомотопии h'_t, что $h_0 = gf$ и $h_1 = 1$.

Доказательство этой леммы см. Дольд [1, стр. 118—120]. Оно основывается на представлении отображения g' как отображения $S^{n-1} \to I(Y', Y) \subset \mathrm{Map}(Y', Y)$, где $I(Y', Y)$ — подпространство пространства $\mathrm{Map}(Y', Y)$, состоящее из гомотопических эквивалентностей, и на доказательстве того, что это отображение гомотопно постоянному. Это позволяет определить отображение g, а после некоторых хлопот и гомотопию h_t.

Одним из основных результатов о послойной гомотопической эквивалентности является следующая теорема Дольда.

4.3. Теорема. *Пусть $p\colon E \to B$ и $p'\colon E' \to B$ — локально тривиальные расслоения над конечным клеточным разбиением B с локально компактными слоями. Тогда любой морфизм расслоений $f\colon E \to E'$, являющийся на каждом слое E_b, $b \in B$, гомотопической эквивалентностью $E_b \to E'_b$, является послойной гомотопической эквивалентностью.*

Эта теорема доказывается индукцией по числу клеток разбиения B с использованием леммы 4.2 и того факта, что над стягиваемым пространством любое локально тривиальное расслоение послойно гомотопически эквивалентно некоторому тривиальному расслоению. Подробное проведение этого доказательства мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Нужно еще, чтобы E_b и Y бы локально компактны

4.4. Следствие. *Если для локально тривиального расслоения $p: E \to B$ над конечным клеточным разбиением B существует такое отображение $u: E \to Y$, что на каждом слое E_b, $b \in B$, его ограничение $E_b \to Y$ является гомотопической эквивалентностью, то расслоение $p: E \to B$ послойно гомотопически эквивалентно тривиальному расслоению $B \times Y \to B$.*

Для доказательства достаточно заметить, что морфизм $(p, u): E \to B \times Y$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 4.3.

5. СТАЦИОНАРНАЯ ПОСЛОЙНАЯ ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

5.1. Определение. Векторные расслоения ξ и η над пространством X называются ***стационарно послойно гомотопически эквивалентными***, если существуют такие целые числа n и m, что расслоения на сферы $S(\xi \oplus \theta^m)$ и $S(\eta \oplus \theta^n)$ имеют один и тот же послойный гомотопический тип.

Очевидно, что отношение стационарной послойной гомотопической эквивалентности является отношением эквивалентности. Класс стационарно послойно гомотопически эквивалентных расслоений, содержащий векторное расслоение ξ, мы будем обозначать символом $J(\xi)$. Соответственно этому множество всех таких классов (для расслоений над данным пространством X) мы будем обозначать символом $J(X)$. Если каждое векторное расслоение над X имеет конечный тип, то имеет место естественное надъективное отображение

$$\widetilde{KO}(X) \to J(X),$$

возникающее при интерпретации группы $\widetilde{KO}(X)$ как группы классов стационарно эквивалентных векторных расслоений над X (теорема 8.3.8).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь таких пространств X.

5.2. Предложение. *Операция суммы Уитни индуцирует на множестве $J(X)$ сложение, относительно которого это множество является абелевой группой. Естественное отображение*

$$\widetilde{KO}(X) \to J(X)$$

является при этом эпиморфизмом групп.

Доказательство. Достаточно, очевидно, показать, что из равенства $J(\xi) = J(\xi')$ следует равенство $J(\xi \oplus \eta) = J(\xi' \oplus \eta)$. При этом, заменив в случае надобности ξ на $\xi \oplus \theta^n$, а ξ' на

$\xi \oplus \theta^m$, мы можем без ограничения общности предполагать, что существуют послойные гомотопические эквивалентности $f\colon S(\xi) \to S(\xi')$ и $f'\colon S(\xi') \to S(\xi)$. Пусть $h_t\colon S(\xi) \to S(\xi)$ и $h'_t\colon S(\xi') \to S(\xi')$ — такие послойные гомотопии, что $h_0 = f'f$, $h_1 = 1$, $h'_0 = ff'$ и $h'_1 = 1$. Определим отображения $g\colon S(\xi \oplus \eta) \to \to S(\xi' \oplus \eta)$ и $g'\colon S(\xi' \oplus \eta) \to S(\xi \oplus \eta)$, полагая

$$g(x\cos\theta,\ y\sin\theta) = (f(x)\cos\theta,\ y\sin\theta),$$
$$g'(x'\cos\theta,\ y\sin\theta) = (f'(x')\cos\theta,\ y\sin\theta),$$

где $x \in S(\xi)$, $x' \in S(\xi')$, $y \in S(\eta)$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Ясно, что гомотопии

$$k_t(x\cos\theta,\ y\sin\theta) = (h_t(x)\cos\theta,\ y\sin\theta),$$
$$k'_t(x'\cos\theta,\ y\sin\theta) = (h'_t(x')\cos\theta,\ y\sin\theta)$$

являются послойными гомотопиями и обладают тем свойством, что $k_0 = g'g$, $k_1 = 1$, $k'_0 = gg'$ и $k'_1 = 1$. Следовательно, $J(\xi \oplus \eta) = J(\xi' \oplus \eta)$.

5.3. Замечание. Для любого конечного клеточного разбиения X группа $J(X)$ является подгруппой некоторой другой группы $\tilde{K}_{\mathrm{Top}}(X)$. Опишем вкратце построение этой группы. Пусть $F_n(X)$ — множество всех послойных гомотопических типов расслоений со слоем S^{n-1}. Можно считать, что функции перехода таких расслоений принимают значения в полугруппе $H(n)$ гомотопических эквивалентностей [1]) $S^{n-1} \to S^{n-1}$. Изложенные в гл. 3 и 4 конструкции, перенесенные на этот случай, показывают, что контравариантный функтор $F_n(X)$ представим, т. е. для любого X имеет место равенство $F_n(X) = [X, B_{H(n)}]$, где $B_{H(n)}$ — „классифицирующее пространство“ для полугруппы $H(n)$ (Дольд и Лашоф [1]). Вложение $H(n) \to H(n+r)$ индуцирует некоторое отображение $B_{H(n)} \to B_{H(n+r)}$, так что имеет место последовательность

$$B_{H(1)} \to B_{H(2)} \to \ldots \to B_{H(n)} \to \ldots.$$

Индуктивный предел B_H этой последовательности естественным образом определяется как H-пространство, причем вложение $O(n) \to H(n)$ индуцирует отображение H-пространств $B_O \to B_H$. По аналогии с группой $\widetilde{KO}(X)$ обозначим группу $[X, B_H]$ через $\tilde{K}_{\mathrm{Top}}(X)$ и назовем ее группой *стационарных послойно гомотопических классов расслоений на сферы*. Ясно, что

[1]) Вообще говоря, не сохраняющих отмеченных точек. — *Прим. ред.*

при естественном гомоморфизме $\widetilde{KO}(X)=[X, B_O]\to[X, B_H]=$ $=\widetilde{K}_{\mathrm{Top}}(X)$, индуцированном отображением $B_O\to B_H$, группа $\widetilde{KO}(X)$ отображается в точности на группу $J(X)$. Подробное описание построения пространства B_H можно найти у Сташефа [1].

6. ГРУППЫ $J(S^k)$ И $\widetilde{K}_{\mathrm{Top}}(S^k)$

В этом разделе мы интерпретируем элементы групп $J(S^k)$ и $\widetilde{K}_{\mathrm{Top}}(S^k)$ как элементы некоторых гомотопических групп сфер, откуда, в частности, будет следовать, что эти группы конечны. Отсюда мы выведем, что для любого конечного клеточного разбиения X группа $J(X)$ конечна.

6.1. Предложение. *Для каждого целого числа k группы $\pi_k(B_{H(n)})$ и $\pi_{k-1}(H(n))$ изоморфны. При $2\leqslant k\leqslant n-2$ эти группы изоморфны группе $\pi_{n+k-2}(S^{n-1})$, а при $k=1$ и $n\geqslant 1$ они изоморфны группе $\mathbf{Z}_2$.*

Доказательство. Изоморфизм между группами $\pi_k(B_{H(n)})$ и $\pi_{k-1}(H(n))$ осуществляется граничным оператором точной гомотопической последовательности универсального $H(n)$-расслоения над $B_{H(n)}$. Полугруппа $H(n)$ состоит, очевидно, из двух компонент $H^+(n)$ и $H^-(n)$, соответствующих отображениям степени $+1$ и -1. Следовательно, $\pi_0(H(n))=\mathbf{Z}_2$.

Пусть M_n^d — компонента линейной связности пространства $\mathrm{Map}_0(S^{n-1}, S^{n-1})$, состоящая из отображений степени d, и пусть $M_n^1\to H^+(n)$ и $M_n^{-1}\to H^-(n)$ — естественные вложения. Отображение $\pi\colon H^+(n)\to S^{n-1}$, сопоставляющее каждому отображению $f\in H^+(n)$ его значение $f(*)$ в отмеченной точке $*$, является, очевидно, расслаивающим отображением со слоем $\pi^{-1}(*)=M_n^1$. Соответствующая точная последовательность гомотопических групп имеет при $k\leqslant n-3$ вид

$$0=\pi_{k+1}(S^{n-1})\to\pi_k(M_n^1)\to\pi_k(H^+(n))\to\pi_k(S^{n-1})=0.$$

Следовательно, при $k\leqslant n-3$ группы $\pi_k(M_n^1)$ и $\pi_k(H^+(n))=$ $=\pi_k(H(n))$ изоморфны. С другой стороны, поскольку пространство $\mathrm{Map}_0(S^{n-1}, S^{n-1})$ гомеоморфно H-пространству $\Omega^{n-1}S^{n-1}$, группа $\pi_k(M_n^1)$ при $k>0$ изоморфна группе

$\pi_k(\hat{M}_n^1)$

$$\pi_k(M_n^0)=\pi_k(\Omega^{n-1}S^{n-1})=\pi_{n+k-1}(S^{n-1}).$$

6.2. Замечание. Можно показать, что изоморфизм между группами $\pi_k(M_n^1)$ и $\pi_{n+k-1}(S^{n-1})$ в явном виде задается соответствием $[f] \to [g]$, где $[f] \in \pi_k(M_n^1)$, а g — отображение сферы $S^{n+k-1} = \partial(B^{k+1} \times B^{n-1}) = (S^k \times B^{n-1}) \cup (B^{k+1} \times S^{n-2})$ в сферу S^{n-1}, определенное формулой [1])

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x)\,y', & \text{если} \quad (x, y) \in S^k \times B^{n-1}, \\ *, & \text{если} \quad (x, y) \in B^{k+1} \times S^{n-2}, \end{cases}$$

где y' — точка сферы $S^{n-1} = B^{n-1}/\partial B^{n-1}$, соответствующая точке $y \in B^{n-1}$. Доказательство мы оставляем читателю.

Этот изоморфизм тесно связан с классическим J-гомоморфизмом Уайтхеда.

6.3. Определение. *J-гомоморфизмом* называется гомоморфизм $J: \pi_r(O(n)) \to \pi_{r+n}(S^n)$, определенный формулой $J([f]) = [g]$, где $[f] \in \pi_r(O(n))$, а $g: S^{r+n} = S^r * S^{n-1} \to SS^{n-1} = S^n$ — отображение, получающееся применением конструкции Хопфа (определение 14.3.3) к отображению $(x, y) \mapsto f(x)\,y$, $x \in S^r$, $y \in S^{n-1}$.

По существу J-гомоморфизм при $r > 0$ является, конечно, гомоморфизмом $J: \pi_r(SO(n)) \to \pi_{r+n}(S^n)$.

Легко видеть, что для любых r и n имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_r(SO(n-1)) & \xrightarrow{J} & \pi_{r+n-1}(S^{n-1}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle E} \\ \pi_r(SO(n)) & \xrightarrow{J} & \pi_{r+n}(S^n) \end{array}$$

где i_* — гомоморфизм, индуцированный естественным вложением $SO(n-1) \subset SO(n)$, а E — надстроечный гомоморфизм (для доказательства достаточно заметить, что соответствие $\langle x, t, \langle z, \tau\rangle\rangle \mapsto$ $\mapsto \langle\langle x, \tau, z\rangle, t\rangle$ определяет гомеоморфизм $S^k * SS^{n-2} \to S(S^k * S^{n-2})$). Поэтому для стационарных гомотопических групп $\pi_r(O) = \pi_{r+n}(SO(n))$ и $\Pi_r = \pi_{r+n}(S^n)$, $n \geqslant r+2$, гомоморфизм J индуцирует так называемый *стационарный J-гомоморфизм* π_r

$$J: \pi_r(O) \to \Pi_r.$$

6.4. Предложение. *Гомоморфизм* $J: \pi_r(SO(n)) \to \pi_{r+n}(S^n)$ *разлагается в композицию*

$$\pi_r(SO(n)) \xrightarrow{\varepsilon_*} \pi_r(M_{n+1}^1) \xrightarrow{\theta} \pi_{r+n}(S^n)$$

гомоморфизма $\varepsilon_*: \pi_r(SO(n)) \to \pi_r(M_{n+1}^1)$, *индуцированного естественным вложением* $\varepsilon: SO(n) \to M_{n+1}^1$, *и изоморфизма* θ $\pi_r(M_{n+1}^1) \to \pi_{r+n}(S^n)$.

---

[1]) Здесь и далее (до конца п. 6.4) текст автора изменен. — *Прим. ред.*

Доказательство. Используя указанный в предложении 14.3.2 гомеоморфизм, мы в силу замечания 6.2 немедленно получаем, что для любого элемента $[f]$ группы $\pi_r(SO(n))$ элемент $\theta\varepsilon_*[f]$ группы $\pi_{r+n}(S^n)$ задается отображением g сферы $S^{r+n}=S^r * S^{n-1}$ в сферу $S^n=SS^{n-1}$, определенным формулой

$$g\langle x, t, y\rangle = \begin{cases} \langle f(x)y, 2t\rangle, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\ x\in S^r,\ t\in[0,1],\ y\in S^{n-1}, \\ *, & \text{если } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

С другой стороны, по определению $J[f]=[g']$, где

$$g'\langle x, t, y\rangle = \langle f(x)y, t\rangle, \quad x\in S^r,\ t\in[0,1],\ y\in S^{n-1}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что отображения g и g' связаны гомотопией $h_s\colon S^{r+n}\to S^n$, $0\leqslant s\leqslant 1$, определенной формулой

$$h_s\langle x, t, y\rangle = \begin{cases} \langle f(x)y, (2-s)t\rangle, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2-s}, \\ *, & \text{если } \frac{1}{2-s}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

Переходя в этом предложении к стационарным группам, мы немедленно получаем, что *для любого r имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \pi_r(O) \arrow[d, "\varepsilon_*"'] \arrow[dr, "J"] & \\ & \Pi_r \\ \pi_r(H) \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

гомоморфизм θ которой является изоморфизмом

6.5. Замечание. Согласно предложению 6.1, $\tilde{K}_{\mathrm{Top}}(S^{r+1}) = \pi_r(H)$, а, согласно теореме 8.5.1, $\widetilde{KO}(S^{r+1})=\pi_r(O)$. Следовательно, полученную коммутативную диаграмму мы можем переписать в следующем виде:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{KO}(S^{r+1}) \arrow[d, "\varepsilon_*"'] \arrow[dr, "J"] & \\ & \Pi_r \\ \tilde{K}_{\mathrm{Top}}(S^{r+1}) \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

причем гомоморфизм ε_*: $\widetilde{KO}(S^{r+1}) \to \widetilde{K}_{\mathrm{Top}}(S^{r+1})$ будет не чем иным, как указанным в конце предыдущего раздела гомоморфизмом, индуцированным естественным отображением $B_O \to B_H$.

В частности, мы видим, что *группа* $J(S^{r+1}) = \operatorname{Im} \varepsilon_*$ *изоморфна подгруппе* $\operatorname{Im} J$ *группы* Π_r.

6.6. Теорема. *Для любого конечного клеточного разбиения* X *группы* $\widetilde{K}_{\mathrm{Top}}(X)$ *и* $J(X)$ *конечны.*

Доказательство. Так как $\widetilde{K}_{\mathrm{Top}}(X)$ является полуточным функтором и так как группы $\widetilde{K}_{\mathrm{Top}}(S^m)$ (будучи изоморфными конечиым группам Π_{m-1}) конечны, то индукция по числу клеток, основывающаяся на последовательности Пуппе, немедленно показывает, что группа $\widetilde{K}_{\mathrm{Top}}(X)$ конечна. Следовательно, группа $J(X)$ как подгруппа конечной группы также конечна.

7. ПРОСТРАНСТВА ТОМА И ПОСЛОЙНЫЙ ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП

В следующем предложении устанавливается связь между стационарной послойной гомотопической эквивалентностью векториых расслоений и стационарным гомотопическим типом соответствующих пространств Тома.

7.1. Предложение. *Если для векторных расслоений* ξ *и* η *расслоения на сферы* $S(\xi)$ *и* $S(\eta)$ *принадлежат одному и тому же послойному гомотопическому типу, то пространства Тома* $T(\xi)$ *и* $T(\eta)$ *принадлежат одному и тому же гомотопическому типу. Если* $J(\xi) = J(\eta)$, *то пространства* $T(\xi)$ *и* $T(\eta)$ *имеют один и тот же стационарный гомотопический тип.*

Доказательство. Пусть f: $S(\xi) \to S(\eta)$ и g: $S(\eta) \to S(\xi)$ — взаимно обратные послойные гомотопические эквивалентности. Ясио, что отображения f и g можно радиально продолжить до некоторых отображений f': $D(\xi) \to D(\eta)$ и g': $D(\eta) \to D(\xi)$. Аналогично, гомотопии, связывающие отображения fg и gf с тождественными отображениями, можно радиально продолжить до некоторых гомотопий, связывающих отображения $f'g'$ и $g'f'$ с тождественными отображениями. Переходя к фактор-пространствам, мы, следовательно, получим из отображений f' и g' иекоторые отображения $\bar{f}$: $T(\xi) \to T(\eta)$ и $\bar{g}$: $T(\eta) \to T(\xi)$, гомотопически обратные друг к другу.

Для доказательства второго утверждения заметим, что при $J(\xi) = J(\eta)$ расслоения $S(\xi \oplus \theta^n)$ и $S(\eta \oplus \theta^m)$ имеют один и тот же послойный гомотопический тип. Следовательно, по уже доказанному, пространства $S^nT(\xi) = T(\xi \oplus \theta^n)$ и $S^mT(\eta) = T(\eta \oplus \theta^m)$ будут принадлежать одному гомотопическому типу.

Это предложение может быть (по крайней мере частично) обращено. Введем предварительно следующее

7.2. Определение. Пространство X (с отмеченной точкой) называется *приводимым*, если для некоторого $n \geqslant 0$ существует такое отображение $f\colon S^n \to X$, что гомоморфизм $f_*\colon \tilde{H}_i(S^n) \to \tilde{H}_i(X)$ является изоморфизмом для каждого $i \geqslant n$. Пространство X называется *стационарно приводимым* (или *S-приводимым*), если для некоторого целого числа k пространство S^kX приводимо.

Можно ввести и двойственное понятие:

7.3. Определение. Пространство X (с отмеченной точкой) называется *коприводимым*, если для некоторого $n \geqslant 0$ существует такое отображение $g\colon X \to S^n$, что гомоморфизм $g^*\colon \tilde{H}^i(S^n) \to \tilde{H}^i(X)$ является изоморфизмом для каждого $i \leqslant n$ [1]. Пространство X называется *стационарно коприводимым* (или *S-коприводимым*), если для некоторого целого числа k пространство S^kX коприводимо.

В следующих двух предложениях показано, что приводимость клеточного разбиения связана с отщепляемостью „верхней" клетки, а коприводимость — с отщепляемостью „нижней" клетки.

7.4. Предложение. *Клеточное разбиение X размерности n, имеющее единственную n-мерную клетку, тогда и только тогда приводимо, когда существует такое отображение $f\colon S^n \to X$, что имеет место гомотопически коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "v"] & \\ S^n \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1"] & & S^n = X/X^{n-1} \end{tikzcd}$$

где $v\colon X \to X/X^{n-1}$ — естественное отображение отождествления.

Доказательство. Если пространство X приводимо, то по определению существует отображение $f\colon S^n \to X$, для которого гомоморфизм $f_*\colon \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_n(X)$ является изоморфизмом. Докажем, что для этого отображения композиция vf гомотопна

---

[1] В частности, любое пространство, имеющее точно две компоненты линейной связности, коприводимо (с $n = 0$). — *Прим. ред.*

тождественному отображению. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{H}_n(S^n) \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, "(vf)_*"] & & \\
\cdots \arrow[r] & \tilde{H}_n(X^{n-1}) \arrow[r] & \tilde{H}_n(X) \arrow[r, "v_*"] & \tilde{H}_n(S^n) \arrow[r] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

v_*

Так как $\tilde{H}_n(X^{n-1})=0$, то гомоморфизм v_* является мономорфизмом. Если бы он не был эпиморфизмом, то группа $\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1})$ содержала бы элементы конечного порядка, что невозможно, поскольку эта группа является, очевидно, свободной абелевой группой. Следовательно, гомоморфизм v_* является изоморфизмом. Поэтому изоморфизмом является и гомоморфизм $(vf)_*$ и, значит, отображение vf гомотопно тождественному. Обратно, если существует такое отображение f, что отображение vf гомотопно тождественному, то гомоморфизм f_* будет изоморфизмом, и потому клеточное разбиение X (имеющее по условию размерность n) будет приводимо.

7.5. Предложение. *Клеточное разбиение X с $X^n=S^n$ коприводимо тогда и только тогда, когда существует такое отображение $g\colon X\to S^n$, что имеет место гомотопически коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "g"] & \\
X^n = S^n \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "1"] & & S^n
\end{tikzcd}$$

где $u\colon X^n\to X$ — отображение вложения.

Доказательство вполне аналогично доказательству предложения 7.4 (следует только принять во внимание, что группа $\tilde{H}^{n+1}(X/X^n)$ свободна).

7.6. Замечание. Пусть ξ — действительное векторное расслоение над X. Аналогично предложению 7.5 без труда доказывается, что пространство $T(\xi)=D(\xi)/S(\xi)$ тогда и только тогда коприводимо, когда существует такое отображение $g\colon (D(\xi),\ S(\xi))\to$ $\to (S^n,\ *)$, что для любой точки $x\in X$ отображение

$$g\mid D(\xi_x)\colon\ (D(\xi_x),\ S(\xi_x))\to(S^n,\ *)$$

индуцирует гомотопическую эквивалентность $D(\xi_x)/S(\xi_x)\to S^n$. Отображение g^* определяет некоторую ориентацию расслоения ξ и элемент $g^*(s)$, где $s\in\tilde{H}^n(S^n)$ — образующая, является так называемым *классом Тома* [1]) этого ориентированного векторного

[1]) См. прим. ред. на стр. 366. — *Прим. ред.*

расслоения. Таким образом, пространство Тома $T(\xi)$ может быть коприводимо только для ориентируемых векторных расслоений ξ.

В следующей теореме устанавливается частичное обращение предложения 7.1.

7.7. Теорема. *Для любого векторного расслоения ξ над связным конечным клеточным разбиением X следующие утверждения равносильны:*

(1) $J(\xi)=0$ *в* $J(X)$;

(2) *пространство* $T(\xi)$ *стационарно коприводимо;*

(3) *пространства* $T(\xi)$ *и* $T(0)=X^+$ *имеют один и тот же стационарный гомотопический тип.*

Напомним, что X^+ — это пространство X, к которому присоединена изолированная отмеченная точка.

Доказательство. В силу предложения 7.1 из утверждения (1) вытекает утверждение (3). Кроме того, поскольку пространство X^+ коприводимо (с $n=0$), из утверждения (3) вытекает утверждение (2). Поэтому нам нужно только доказать, что из утверждения (2) вытекает утверждение (1).

Пусть $m > \dim X$ — такое число, что пространство Тома $T(\eta)=T(\xi\oplus\theta^m)=S^mT(\xi)$ расслоения $\eta=\xi\oplus\theta^m$ коприводимо, и пусть g: $(D(\eta), S(\eta))\to(S^n, *)$ — соответствующее отображение. Ясно, что для любой точки $x\in X$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [S(\eta),\ S^{n-1}] & \to & [D(\eta)/S(\eta),\ S^n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [S(\eta_x),\ S^{n-1}] & \to & [D(\eta_x)/S(\eta_x),\ S^n] \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются изоморфизмами[1]. Поэтому отображение g определяет отображение f: $S(\eta)\to S^{n-1}$, ограничение которого $f|S(\eta_x)$: $S(\eta_x)\to S^{n-1}$ для любой точки $x\in X$ является гомотопической эквивалентностью (замечание 7.6). Для завершения доказательства остается воспользоваться следствием 4.4.

8. СТАЦИОНАРНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ И СТАЦИОНАРНАЯ ПРИВОДИМОСТЬ

Пусть u: $X\wedge X'\to S^n$ — произвольное n-спаривание. Для любых пространств W и Z это спаривание определяет отображение $[W,\ Z\wedge X]\to[W\wedge X',\ S^nZ]$, переводящее элемент $[f]$: $W\to Z\wedge X$

[1] Эти изоморфизмы устанавливаются процессом „радиального продолжения" (ср. доказательство предложения 7.1). — *Прим. ред.*

в элемент $[(1 \wedge u)(f \wedge 1)]$. В S-категории эти отображения индуцируют некоторый морфизм

$$\delta^W(u)_Z\colon \{W,\ Z \wedge X\} \to \{W \wedge X',\ S^n Z\}.$$

Индукцией по числу клеток с помощью последовательности Пуппе можно легко доказать следующее

8.1. Предложение. *Если n-спаривание u: $X \wedge X' \to S^n$ является n-двойственностью, то для любых конечных клеточных разбиений W и Z отображение*

$$\delta^W(u)_Z\colon \{W,\ Z \wedge X\} \to \{W \wedge X',\ S^n Z\}$$

является изоморфизмом.

Кроме того, легко видеть, что справедливо

8.2. Предложение. *Для любых конечных клеточных разбиений W и Z, любых n-двойственностей u: $X \wedge X' \to S^n$ и v: $Y \wedge Y' \to S^n$ и любых отображений f: $Y \to X$ и g: $X' \to Y'$, связанных соотношением $D_n(v,\ u)\{f\} = \{g\}$, имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \{W,\ Z \wedge Y\} & \xrightarrow{\delta} & \{W \wedge Y',\ S^n(Z)\} \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ \{W,\ Z \wedge X\} & \xrightarrow{\delta} & \{W \wedge X',\ S^n(Z)\} \end{array}$$

8.3. Гомологии и когомологии. Напомним, что $\tilde{H}^i(X,\ G) = [X,\ K(G,\ i)]_0$, причем для конечного клеточного разбиения X разбиение $K(G,\ i)$ можно в этом равенстве заменить некоторым его остовом $K(G,\ i)^*$, являющимся (для конечно порожденной группы G) конечным клеточным разбиением.

Аналогично, группы $\tilde{H}_i(X,\ G)$ можно отождествить (Уайтхед [5]) с группами $\pi_{k+i}(K(G,\ k) \wedge X)$, где k — некоторое достаточно большое число, причем вместо клеточного разбиения $K(G,\ k)$ здесь опять можно взять некоторый его остов $K(G,\ k)^*$.

Поэтому, согласно предложению 8.2, примененному к произвольной r-двойственности u: $X \wedge X' \to S^r$ и к некоторому гомеоморфизму v: $S^n \wedge S^m \to S^r$, где $r = n + m$, будет иметь место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_k(S^n) = \{S^{k+q},\ K(\mathbf{Z},\ q)^* \wedge S^n\} & \xrightarrow{\delta} & \{S^{k+q} \wedge S^m,\ S^r K(\mathbf{Z},\ q)^*\} = \tilde{H}^{r-k}(S^m) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ \tilde{H}_k(X) = \{S^{k+q},\ K(\mathbf{Z},\ q)^* \wedge X\} & \xrightarrow{\delta} & \{S^{k+q} \wedge X',\ S^r K(\mathbf{Z},\ q)^*\} = \tilde{H}^{r-k}(X') \end{array}$$

Следовательно, отображение f_*: $\tilde{H}_i(S^n) \to \tilde{H}_i(X)$ тогда и только тогда является изоморфизмом для всех $i \leqslant n$, когда отображение

$g^*\colon \tilde{H}^j(S^m) \to \tilde{H}^j(X')$ является изоморфизмом для всех $j \geqslant m$. Тем самым доказана следующая

8.4. Теорема. *Если конечные клеточные разбиения X и X' стационарно двойственны, то разбиение X тогда и только тогда стационарно приводимо, когда стационарно коприводимо разбиение X'.*

9. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ПРИВОДИМОСТЬ

Рассмотрим отображение $\theta\colon RP^{n-1} \to O(n)$, сопоставляющее каждой прямой $L \in RP^{n-1}$ отражение $\theta(L)$ в гиперплоскости, перпендикулярной к прямой L. Аналитически отображение θ задается формулой $\theta(\{x, -x\})\, y = y - 2(x|y)\, x$, $x \in S^{n-1}$, $y \in \mathbf{R}^n$. Ясно, что для любого k отображение θ согласовано с вложениями $RP^{n-k-1} \subset RP^{n-1}$ и $O(n-k) \subset O(n)$ и потому индуцирует некоторое отображение

$$\theta\colon RP^{n-1}/RP^{n-k-1} \to O(n)/O(n-k) = V_k(\mathbf{R}^n).$$

Иными словами, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
RP^{n-k-1} & \xrightarrow{\theta} & O(n-k) \\
\downarrow & & \downarrow \\
RP^{n-1} & \xrightarrow{\theta} & O(n) \\
\downarrow & & \downarrow \\
RP^{n-1}/RP^{n-k-1} & \xrightarrow{\theta} & V_k(\mathbf{R}^n)
\end{array}$$

В явном виде отображение $\theta\colon RP^{n-1}/RP^{n-k-1} \to V_k(\mathbf{R}^n)$ задается формулой $\theta(\{x, -x\}) = (v_1, \ldots, v_k)$, где $v_i = \theta(\{x, -x\})\, e_{n-k+i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

9.1. Предложение. *При $k = 1$ отображение*

$$\theta\colon S^{n-1} = RP^{n-1}/RP^{n-2} \to V_1(\mathbf{R}^n) = S^{n-1}$$

является гомеоморфизмом.

Доказательство. По определению $\theta(\{x, -x\})\, e_n = e_n - 2(x|e_n)\, x = e_n - 2x_n x = (-2x_1x_n, \ldots, -2x_{n-1}x_n, 1 - 2x_n^2)$. Поэтому для любой точки $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S^{n-1}$ с $y_n \neq 1$ существует одна и только одна точка x с $x_n > 0$, для которой $\theta(\{x, -x\})\, e_n = y$. С другой стороны, $\theta(\{x, -x\})\, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, если $x_n = 0$.

9.2. Предложение. *При* $i < 2n-2k-1$ *отображение* θ *индуцирует изоморфизм*

$$\theta_*\colon \pi_i(RP^{n-1}/RP^{n-k-1}) \to \pi_i(V_k(\mathbf{R}^n)).$$

Доказательство. При $k=1$ предложение вытекает из предложения 9.1. С другой стороны, для любого $k>1$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
RP^{n-2}/RP^{n-k-1} & \xrightarrow{\theta} & V_{k-1}(\mathbf{R}^{n-1}) \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow \\
RP^{n-1}/RP^{n-k-1} & \xrightarrow{\theta} & V_k(\mathbf{R}^n) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\
RP^{n-1}/RP^{n-2} & \xrightarrow{\theta} & V_1(\mathbf{R}^n)
\end{array}$$

причем, согласно теореме 7.5.1, пространство $V_{k-1}(\mathbf{R}^{n-1})$ является $(n-k-1)$-связным пространством. Кроме того, отображение u является корасслаивающим отображением, а отображение v — расслаивающим отображением. Следовательно, применив точную последовательность Серра (см. Серр [1]) и теорему Уайтхеда, мы немедленно получим, что из справедливости предложения при $k-1$ вытекает его справедливость и при k.

9.3. Замечание. Напомним, что $\rho(n) = 2^c + 8d$, если $n = (2a+1)\,2^{c+4d}$, где $0 \leqslant c \leqslant 3$. Поэтому если $n \neq 1, 2, 3, 4$, то $2\rho(n)+2 < n$, т. е. $n-1 < 2n-2(\rho(n)+1)-1$. Следовательно, согласно предложению 9.2, группа $\pi_{n-1}(RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2})$ изоморфна группе $\pi_{n-1}(V_{\rho(n)+1}(\mathbf{R}^n))$. Отсюда вытекает

Это неверно

9.4. Теорема. *Для расслоения* $q\colon V_{\rho(n)+1}(\mathbf{R}^n) \to S^{n-1}$, $n>4$, *тогда и только тогда существует сечение, когда существует отображение*

$$S^{n-1} \to RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2},$$

композиция которого с отображением $RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2} \to RP^{n-1}/RP^{n-2} = S^{n-1}$ *является отображением степени* 1.

Доказательство. Согласно замечанию 9.3, каждому сечению s соответствует некоторое отображение $S^{n-1} \to RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2}$, композиция которого с отображением θ гомотопна сечению s. Но тогда его композиция с отображением $RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2} \to S^{n-1}$ будет, очевидно, гомотопна тождественному отображению и потому ее степень будет равна единице.

Обратно, композиция произвольного, удовлетворяющего условиям теоремы отображения $S^{n-1}\to RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2}$ с отображением θ является отображением s': $S^{n-1}\to V_{\rho(n)+1}(\mathbf{R}^n)$, обладающим тем свойством, что его композиция qs' с отображением q гомотопна тождественному отображению 1 сферы S^{n-1}. Но, как мы знаем, отображение q является расслаивающим отображением. Поэтому гомотопию, связывающую отображения qs' и 1, можно „поднять" в пространство $V_{\rho(n)+1}(\mathbf{R}^n)$. В результате, получится гомотопия, связывающая отображение s' с некоторым сечением s.

9.5. Замечание. Как мы знаем, вопрос о существовании сечения отображения $V_{\rho(n)+1}(\mathbf{R}^n)\to S^{n-1}$ равносилен вопросу о существовании $\rho(n)$ ортонормальных векторных полей на сфере S^{n-1}. С другой стороны, согласно предложению 7.4, существование отображения $S^{n-1}\to RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2}$, обладающего указанным в теореме 9.4 свойством, равносильно приводимости пространства $RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2}$. Таким образом, доказательство несуществования $\rho(n)$ векторных полей на сфере S^{n-1} сводится к доказательству неприводимости пространства $RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2}$. Другими словами, надо доказать, что у клеточного разбиения $RP^{n-1}/RP^{n-\rho(n)-2}$ не отщепляется верхняя клетка. К сожалению, доказать это с помощью когомологических операций должно быть очень трудно, ибо когомологическую операцию можно представлять себе как перемещение „вверх" клеток малых размерностей с нетривиальным „попаданием" на клетки высокой размерности, так что эти операции скорее пригодны для доказательства некоприводимости, чем для доказательства неприводимости. В связи с этим наша ближайшая цель будет состоять в сведении проблемы векторных полей к некоторой проблеме коприводимости.

10. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И КОПРИВОДИМОСТЬ

Более подробное изложение материала этого раздела см. Морин [1].

Мы начнем с отыскания пространств, стационарно двойственных пространствам RP^n/RP^{n-k}.

10.1. Предложение. *Пусть r — порядок элемента $J(\xi_{k-1})$ в группе $J(RP^{k-1})$, где ξ_{k-1} — каноническое линейное расслоение над RP^{k-1}. Тогда для любого $p\geqslant 0$ пространства RP^{n+rp}/RP^{n-k+rp}*

и RP^n/RP^{n-k} *имеют один и тот же стационарный гомотопический тип. Кроме того, при* $rp > n+1$ *пространство* $RP^{rp+k-n-2}/RP^{rp-n-2}$ *стационарно двойственно пространству* RP^n/RP^{n-k}.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что, согласно теореме 1.8, пространство RP^n/RP^{n-k} гомеоморфно пространству $T((n-k+1)\xi_{k-1})$, а пространство RP^{n+rp}/RP^{n-k+rp} гомеоморфно пространству $T((n-k+1)\xi_{k-1}\oplus \oplus rp\xi_{k-1})$. С другой стороны, согласно предложению 7.1, пространство $T((n-k+1)\xi_{k-1}\oplus rp\xi_{k-1})$ имеет тот же стационарный гомотопический тип, что и пространство $T((n-k+1)\xi_{k-1}\oplus\theta^{rp}) = S^{rp}(RP^n/RP^{n-k})$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим над RP^{k-1} векторное расслоение η, обладающее тем свойством, что расслоение $(n+1)\xi_{k-1}\oplus\eta$ стационарно эквивалентно тривиальному расслоению (существование такого расслоения немедленно вытекает из теоремы 8.3.8). Пусть τ — касательное расслоение $\tau(RP^{k-1})$. Поскольку, согласно п. 2.4.8, расслоение τ стационарно эквивалентно расслоению $k\xi_{k-1}$, расслоение $\tau\oplus(n-k+1)\xi_{k-1}\oplus\eta$ стационарно эквивалентно тривиальному расслоению. Поэтому, согласно теореме двойственности Атьи (теорема 3.7)[1], пространство Тома $T((n-k+1)\xi_{k-1}) = RP^n/RP^{n-k}$ стационарно двойственно пространству Тома $T(\eta)$. С другой стороны, $J(\eta) = J((-n-1)\xi_{k-1}) = J((rp-n-1)\xi_{k-1})$. Поэтому (см. предложение 7.1) пространство $T(\eta)$ имеет тот же стационарный гомотопический тип, что и пространство $T((rp-n-1)\xi_{k-1})$ (существующее при $rp > n+1$). Для завершения доказательства остается заметить, что $T((rp-n-1)\xi_{k-1}) = RP^{rp+k-n-2}/RP^{rp-n-2}$.

Следующая теорема, принадлежащая Атье и Джеймсу, сводит проблему о несуществовании векторных полей к вопросу о некоприводимости некоторого стянутого проективного пространства.

10.2. Теорема. *Если на сфере* S^{n-1} *существует* $\rho(n)$ *ортонормальных касательных векторных полей, то существует такое целое число* $m \geqslant 1$, *что* $\rho(m) = \rho(n)$ *и пространство* $RP^{m+\rho(m)}/RP^{m-1}$ *коприводимо.*

Доказательство. Согласно предложению 11.1.1, если на сфере S^{n-1} существует $\rho(n)$ ортонормальных векторных полей, то столько же ортонормальных векторных полей существует и на сфере S^{qn-1} при любом $q \geqslant 1$. Поэтому если $qn \geqslant 2(\rho(n)+1)$,

[1]) См. прим. ред. на стр. 320. — *Прим. ред.*

то, согласно предложению 9.4, стянутое проективное пространство $RP^{qn-1}/RP^{qn-\rho(n)-2}$ приводимо. Но, согласно предложению 10.1, при $rp > qn$, где r — порядок элемента $J(\xi_{\rho(n)})$ в группе $J(RP^{\rho(n)})$, стянутое проективное пространство $RP^{qn-1}/RP^{qn-\rho(n)-2}$ стационарно двойственно пространству $RP^{m+\rho(n)}/RP^{m-1}$, где $m = rp - qn$. Поэтому при $m \geqslant \rho(n) + 3$ пространство $RP^{m+\rho(n)}/RP^{m-1}$ стационарно коприводимо. С другой стороны, из теоремы 2.2 немедленно следует, что для достаточно больших m пространство $RP^{m+\rho(n)}/RP^{m-1}$ тогда и только тогда стационарно коприводимо, когда оно коприводимо.

Таким образом, для завершения доказательства нам осталось лишь показать, что среди чисел m вида $rp - qn$ существуют сколь угодно большие числа, для которых $\rho(m) = \rho(n)$, т. е. которые имеют вид $m = tn$, где t — нечетное число. Но ясно, что если число p взять делящимся на $2n$, а q — нечетным, то это условие будет удовлетворено со сколь угодно большим t.

11. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ГРУППА $J(RP^k)$

11.1. Замечание. Напомним (см. замечаиие 11.2.5), что ортогональные умножения

$$\mathbf{R}^{k+1} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

находятся в биективном соответствии с C_k-модулями. Пусть, как и в разд. 6 гл. 11, символ N_k обозначает абелеву свободную группу, образующими которой являются неприводимые C_k-модули, и пусть c_k — размерность неприводимого C_k-модуля (в обозначениях разд. 6 гл. 11 $c_k = a_{k+1}$). Тогда размерность произвольного C_k-модуля делится на c_k и потому ортогональное умножение $\mathbf{R}^{k+1} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ существует тогда и только тогда, когда число n делится на c_k. При этом если $n = c_k$, то при $k \equiv 3 \pmod 4$ существует два неизоморфных умножения $\mathbf{R}^{k+1} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, а при $k \not\equiv 3 \pmod 4$ — только одно такое умножение.

Согласно таблице 11.65, числа c_k имеют следующие значения:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
c_k	1	2	4	4	8	8	8	8	16

причем $c_{k+8} = 16c_k$.

Следующее предложение является по существу простой переформулировкой предложения 11.8.2:

11.2. Предложение. *Число c_k имеет вид 2^e, где e — число таких целых чисел m из интервала $0 < m \leqslant k$, что $m \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 8$. Число $\rho(n)$ равно наибольшему числу вида $k+1$, для которого число c_k делит число n.*

Заметим теперь, что каждый C_k-модуль M, определяет некоторую тривиализацию

$$\tau_M\colon m\xi_k \to \mathbf{R}^m$$

расслоения $m\xi_k$, где $m = \dim_{\mathbf{R}} M$. Действительно, пусть $\mathbf{R}^{k+1} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ — ортогональное умножение, соответствующее C_k-модулю M, и пусть $S^k \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ — его ограничение на $S^k \times \mathbf{R}^m \subset \mathbf{R}^{k+1} \times \mathbf{R}^m$. По определению каждая точка пространства $E(m\xi_k)$ имеет вид $(L, x_1, \ldots, x_m)$, где $L \in RP^k$, $x_1, \ldots, x_m \in L$. Следовательно, соответствие $(x, y) \mapsto (\{x, -x\}, y_1x, \ldots, y_mx)$, где $x \in S^k$, а $y_1, \ldots, y_m$ — координаты точки $y \in \mathbf{R}^m$, определяет некоторое отображение $S^k \times \mathbf{R}^m \to E(m\xi_k)$ (являющееся, очевидно, отображением отождествления). Тривиализация τ_M определяется теперь как отображение, замыкающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
S^k \times \mathbf{R}^m \arrow[d] \arrow[dr] & \\
E(m\xi_k) \arrow[r, "\tau_M"'] & \mathbf{R}^m
\end{tikzcd}$$

В частности, мы видим, что расслоение $c_k\xi_k$ тривиально над RP^k. Следовательно, *порядок элемента группы $\widetilde{KO}(RP^k)$, определенного расслоением ξ_k, является делителем числа c_k.*

Заметим, что $\tau_{M \oplus N} = \tau_M \oplus \tau_N$.

Поскольку для любого $l \geqslant k$ имеет место равенство $\xi_l \mid RP^k = \xi_k$, тривиализацию τ_M мы можем рассматривать как тривиализацию расслоения $m\xi_l$ над $RP^k \subset RP^l$ (см. определение 9.1.7), так что будет определено векторное расслоение $m\xi_l/\tau_M$ (см. определение 9.1.2).

11.3. Предложение. *Для каждого $l \geqslant k$ существует один и только один гомоморфизм групп $\theta'_{k,l}\colon N_k \to \widetilde{KO}(RP^l/RP^k)$, обладающий тем свойством, что $\theta'_{k,l}(M) = m\xi_l/\tau_M$ для каждого C_k-модуля M. Кроме того, существует такой (также единственный)* *гомоморфизм* $\theta_{k,l}\colon N_k/r(N_l)\to \widetilde{KO}(RP^l/RP^k)$, *где* $r\colon N_l\to N_k$ — *гомоморфизм, индуцированный вложением* $C_k\to C_l$, *что имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} N_k \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & \widetilde{KO}(RP^l/RP^k) \\ N_k/r(N_l) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

вертикальный морфизм которой является естественным гомоморфизмом факторизации.

Доказательство. Поскольку N_k является свободной абелевой группой, порожденной неприводимыми C_k-модулями, существует один и только один такой морфизм $\theta'_{k,l}\colon N_k\to\widetilde{KO}(RP^l/RP^k)$, что для любого неприводимого C_k-модуля M имеет место равенство $\theta'_{k,l}(M)=m\xi_k/\tau_M$. Но так как $\tau_{M\oplus N}=\tau_M\oplus\tau_N$ и расслоение $(\dim M\oplus N)\,\xi_l/\tau_{M\oplus N}$ изоморфно расслоению $((\dim M)\,\xi_l/\tau_M)\oplus\oplus((\dim N)\,\xi_l/\tau_N)$, то это равенство будет иметь место и для любого C_k-модуля M. Далее, поскольку размерность каждого модуля $M\in r(N_l)$ делится на c_l, расслоение ξ_l тривиально, и потому $\theta'_{k,l}(r(N_l))=0$. Следовательно, гомоморфизм $\theta_{k,l}$, замыкающий указанную выше коммутативную диаграмму, существует и определяется единственным образом.

11.4. Замечание. В частности, при $k=l-1$ мы получаем гомоморфизм

$$\theta_l=\theta_{l-1,l}\colon\ N_{l-1}/r(N_l)\to\widetilde{KO}(RP^l/RP^{l-1})=\widetilde{KO}(S^l).$$

Можно показать (ср. теорему 13.13.3), что для любого l гомоморфизм θ_l является изоморфизмом. Доказательство этого факта мы опустим (он легко следует из теоремы периодичности для групп $\widetilde{KO}(X)$ и, более того, равносилен этой теореме).

11.5. Предложение. *Для любых k и $l>k$ гомоморфизм $\theta_{k,l}\colon N_k/r(N_l)\to\widetilde{KO}(RP^l/RP^k)$ является эпиморфизмом.*

Доказательство. Будем доказывать это утверждение индукцией по $l-k$, имея в виду, что при $l-k=0$ оно очевидно. Пусть уже доказано, что гомоморфизм $\theta_{k,l}$ является эпиморфизмом. Докажем, что тогда гомоморфизм $\theta_{k,\,l+1}$ также является эпиморфизмом. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
N_l/r(N_{l+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{l,\,l+1}"] & N_k/r(N_{l+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{k,\,l+1}"] & N_k/r(N_l) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{k,\,l}"] & 0 \\
\widetilde{KO}(S^{l+1}) \arrow[r] & \widetilde{KO}(RP^{l+1}/RP^k) \arrow[r] & \widetilde{KO}(RP^l/RP^k) &
\end{tikzcd}$$

Поскольку крайние гомоморфизмы $\theta_{l,\,l+1}$ и $\theta_{k,\,l}$ являются эпиморфизмами (гомоморфизм $\theta_{k,\,l}$ по условию, а гомоморфизм $\theta_{l,\,l+1}$ по замечанию 11.4), очевидные диаграммные рассуждения (известные из доказательства леммы о пяти гомоморфизмах) показывают, что $\theta_{k,\,l+1}$ также является эпиморфизмом.

11.6. Следствие. *Группа* $\widetilde{KO}(RP^l/RP^k)$ *изоморфна некоторой факторгруппе группы* $N_k/r(N_l)$, *т. е. факторгруппе группы* $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_{2^e}$ *при* $k\equiv 3 \pmod 4$ *и факторгруппе группы* $\mathbf{Z}_{2^e}$ *при* $k\not\equiv 3 \pmod 4$, *где* e — *число таких целых чисел* q, *что* $k<q\leqslant l$ *и* $q\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \pmod 8$.

11.7. Замечание. В частности, группа $\widetilde{KO}(RP^l)$ изоморфна некоторой факторгруппе группы $\mathbf{Z}_{c_l}$, $c_l=2^e$. Значит, группа $\widetilde{KO}(RP^l)$ (а потому и группа $J(RP^l)$) является циклической группой; образующая которой определяется каноническим линейным расслоением ξ_l. Порядок этой группы является при этом делителем числа c_l. Следовательно, если мы докажем, что элемент $J(\xi_l)$ имеет порядок c_l, то из этого будет следовать, что эпиморфизмы $\mathbf{Z}_{c_k}\to\widetilde{KO}(RP^k)\to J(KP^k)$ являются изоморфизмами и потому $\widetilde{KO}(RP^k)=J(RP^k)$.

С другой стороны, вычисление порядка группы $J(RP^k)$ имеет непосредственное отношение к проблеме векторных полей.

11.8. Теорема. *Если для каждого* k *порядок элемента* $J(\xi_k)$ *группы* $J(RP^k)$ *равен* c_k, *то ни для какого* n *на сфере* S^{n-1} *не существует* $\rho(n)$ *ортогональных векторных полей.*

Доказательство. Предположим, что при некотором n на сфере S^{n-1} существует $\rho(n)$ векторных полей. Тогда, согласно теореме 10.2, существует такое m, что пространство $RP^{m+\rho(m)}/RP^{m-1}=T(m\xi_{\rho(m)})$ коприводимо и потому (теорема 7.7) в группе $J(RP^{\rho(m)})$ имеет место равенство $J(m\xi_{\rho(m)})=0$. Поэтому, если порядок элемента $J(\xi_{\rho(m)})$ равен $c_{\rho(m)}$, то число m должно делиться на $c_{\rho(m)}$. Покажем, что ни для одного m это невозможно.

Поскольку $c_{\rho(1)}=c_{\rho(3)}=c_{\rho(5)}=c_{\rho(7)}=c_1=2$, $c_{\rho(2)}=c_{\rho(6)}=c_2=4$, $c_{\rho(4)}=c_4=8$ и $c_{\rho(8)}=c_8=16$, то при $m\leqslant 8$ число m не делится на $c_{\rho(m)}$. Пусть $m>8$. Как мы знаем, если $m=(2a+1)2^{c+4d}=(2a+1)2^c16^d$, где $0\leqslant c\leqslant 3$, то $\rho(m)=2^c+8d$, и потому $c_{\rho(m)}=16^dc_{2^c}=16^d2^{c+1}$. Таким образом, простое число 2 входит в $c_{\rho(m)}$ в большей степени, чем в m, и потому число m не может делиться на число $c_{\rho(m)}$. Тем самым теорема полностью доказана.

Таким образом, нам осталось лишь для всех k вычислить порядок группы $J(RP^k)$ (и показать, что он равен c_k).

12. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ K-ГРУППЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В работе [6] Адамс вычислил кольца $K(CP^n/CP^m)$, $K(RP^n/RP^m)$ и $KO(RP^n/RP^m)$ вместе с действием на них операций ψ^k. Используя эти вычисления, он доказал несуществование $\rho(n)$ векторных полей, показав, что требуемая теоремой 10.2 коприводимость пространств $RP^{m+\rho(m)}/RP^{m-1}$ места не имеет. Мы не будем воспроизводить здесь эти вычисления, поскольку они подробно изложены в его статье. Мы докажем теорему о несуществовании $\rho(n)$ векторных полей другим способом, опираясь на теорему 11.8. С этой целью мы в этом разделе вычислим группы $\widetilde{KO}(RP^n)$, а в следующем разделе докажем равенство $\widetilde{KO}(RP^n)=J(RP^n)$.

До сих пор мы не пользовались обобщенными теориями когомологий K^* и KO^* (Атья и Хирцербрух [2]), поскольку мы в них пока не нуждались, хотя эти теории когомологий и играют в многих вопросах очень важную роль. Теперь же эти теории нам будут существенно необходимы, и потому мы их сейчас вкратце опишем. Мы изложим также важную спектральную последовательность, связывающую их с обычными сингулярными когомологиями.

12.1. Определение. Для любого $p\geqslant 0$ положим

$$\widetilde{K}^{-p}(X)=\widetilde{K}(S^p(X)) \quad \text{и} \quad \widetilde{KO}^{-p}(X)=\widetilde{KO}(S^p(X)).$$

С помощью последовательности Пуппе можно доказать, что на категории конечных клеточных разбиений последовательность контравариантных функторов $\widetilde{K}^{-p}$ и $\widetilde{KO}^{-p}$ удовлетворяет всем аксиомам теории когомологий (Стинрод и Эйленберг [1]), кроме аксиомы размерности. Эти группы когомологий определены лишь для отрицательных целых чисел. Впрочем, используя изоморфизмы периодичности $\tilde{K}^{-p}(X) \approx \tilde{K}^{-p-2}(X)$ и $\widetilde{KO}^{-p}(X) \approx \approx \widetilde{KO}^{-p-8}(X)$, можно определить группы $\tilde{K}^p$ и $\widetilde{KO}^p$ и для всех целых чисел p.

12.2. Теорема. *Для любого конечного разбиения X существует функториальная относительно непрерывных отображений спектральная последовательность $E_r^{p,q}$, обладающая следующими свойствами:*

(1) $E_2^{p,q} = \tilde{H}^p(X, \widetilde{KO}^q(*))$,

(2) $E_\infty^{p,q} \Rightarrow \widetilde{KO}^{p+q}(X)$;

фильтрация на группе $\widetilde{KO}^{p+q}(X)$, относительно которой $\{E_\infty^{p,q}\}$ является присоединенной градуированной группой, задается при этом ядрами гомоморфизмов $\widetilde{KO}^n(X) \to \widetilde{KO}^n(X^{p-1})$, где X^{p-1} — остовы разбиения X.

Аналогичная спектральная последовательность существует и для групп $\tilde{K}$.

12.3. Группы коэффициентов. Согласно теореме периодичности, $\tilde{K}^p(*) = \mathbf{Z}$ при p четных и $\tilde{K}^p(*) = 0$ при p нечетных. Аналогично вычисляются и группы $\widetilde{KO}^{-p}(*)$. Они имеют следующие значения:

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widetilde{KO}^{-p}(*)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	0	$\mathbf{Z}$	0	0	0	$\mathbf{Z}$

Как известно, группы $H^i(CP^n; \mathbf{Z})$ изоморфны группе $\mathbf{Z}$ при четных i, таких, что $0 \leqslant i \leqslant 2n$, и равны нулю для всех других i. Следовательно, при $X = CP^n$ спектральная последовательность из теоремы 12.2 вырождается, откуда вытекает

12.4. Предложение. *Кольцо $K(CP^n)$ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}[v]$, образующая v которого выражается формулой $v = \xi_n(\mathbf{C}) - 1$, где $\xi_n(\mathbf{C})$ — каноническое линейное расслоение над CP^n, и удовлетворяет единственному соотношению*

$$v^{n-1} = 0.$$

Строго говоря, для вычисления умножения в кольце $K(CP^n)$ одной спектральной последовательности 12.2 недостаточно.

Необходимо использовать также гомоморфизм колец

$$\mathrm{ch}\colon K(CP^n) \to H^{ev}(CP^n; \mathbf{Q}),$$

который мы введем в гл. 18.

Рассмотрим теперь естественное отображение $q\colon RP^{2n+1} \to CP^n$. Легко видеть, что расслоение $q^*(\xi_n(\mathbf{C}))$ является комплексификацией канонического линейного расслоения $\xi_{2n+1}(\mathbf{R})$ над пространством RP^{2n+1}.

Для группы $\tilde{K}(RP^{2n+1})$ спектральная последовательность также вырождается. Отсюда и из точной последовательности

$$0 \to \tilde{K}(RP^{2n+1}) \to \tilde{K}(RP^{2n}) \to \mathbf{Z}$$

без труда вытекает следующее

12.5. Предложение. *Группа $\tilde{K}(RP^n)$ является конечной циклической группой порядка $a(n) = 2^t$, где t — целая часть числа $n/2$. При $n = 2t+1$ ее образующей является элемент $w = q^!(v)$, где v — образующая кольца $K(CP^t)$, указанная в предложении* 12.4, *а при $n = 2t$ — образ элемента $q^!(v) \in \tilde{K}(RP^{2t+1})$ в группе $\tilde{K}(RP^{2t})$.*

Рассмотрим, наконец, гомоморфизм комплексификации $\varepsilon_U\colon \widetilde{KO}(RP^n) \to \tilde{K}(RP^n)$. Пусть $u = \xi_n(\mathbf{R}) - 1$. Поскольку, как легко видеть, $\varepsilon_U(u) = w$, где w — указанная в предложении 12.5 образующая, справедлнво первое из утверждений следующего предложения:

12.6. Предложение. *Гомоморфизм $\varepsilon_U\colon \widetilde{KO}(RP^n) \to \tilde{K}(RP^n)$ является эпиморфизмом, а при $n \equiv 6, 7, 8 \pmod 8$ даже изоморфизмом.*

Для доказательства второго утверждения этого предложения достаточно рассмотреть член E_2 спектральной последовательиости для $\widetilde{KO}(RP^n)$ и заметить, что он содержит не более $a(n)$ элементов.

Заметим теперь, что при $n \equiv 6, 7, 8 \pmod 8$ имеет место равенство $a(n) = c_n$, где c_n — чиело, рассмотренное в п. 11.1. Отсюда и из спектральной последовательности непосредственно вытекает следующая окончательная

12.7. Теорема. *Группа $\widetilde{KO}(RP^k)$ является циклической группой порядка c_k с образующей $u = \xi_k(\mathbf{R}) - 1$.*

13. ИЗОМОРФИЗМ ГРУПП $\widetilde{KO}(RP^n)$ И $J(RP^n)$

В этом разделе мы вычислим группу $J(RP^n)$ и тем самым, наконец, решим задачу о векторных полях на сферах. Мы будем следовать общей схеме, намеченной Боттом в [5]. Ряд конкретных вычислений будет основан на соображениях Хирцебруха, высказанных им в лекциях, прочитанных в летней школе в Сиэттле в 1963 году. За всеми подробностями мы отсылаем читателя к работе Атьи, Ботта и Шапиро [1].

13.1. Обозначения. Пусть ξ — произвольное векторное $\mathrm{Spin}(8m+1)$-расслоение[1]) и α_ξ — соответствующее главное $\mathrm{Spin}(8m+1)$-расслоение. Кроме того, пусть, как всегда, $S(\xi)$ — расслоение на сферы, ассоциированное с расслоением ξ. Легко видеть, что если мы на пространстве главного расслоения α_ξ будем рассматривать лишь действие подгруппы $\mathrm{Spin}(8m) \subset \mathrm{Spin}(8m+1)$, то получится главное $\mathrm{Spin}(8m)$-расслоение, база которого гомеоморфна пространству $S(\xi)$. Это главное $\mathrm{Spin}(8m)$-расслоение мы будем обозначать символом α_ξ^*. Известным образом (теорема 13.13.3) оно определяет некоторый гомоморфизм

$$\tilde{\alpha}_\xi^*: RO(\mathrm{Spin}(8m))/RO(\mathrm{Spin}(8m+1)) \to KO(S(\xi)).$$

Следующую теорему Ботта можно рассматривать как обобщение теоремы 13.13.3. Ее доказательство основано на рассуждениях майер-виеторисовского типа и том факте, что к каждому слою расслоения $S(\xi)$ применима теорема 13.13.3.

13.2. Теорема. *Для любого действительного векторного $\mathrm{Spin}(8m+1)$-расслоения ξ группа $KO(S(\xi))$ является свободным $KO(B(\xi))$-модулем с двумя образующими 1 и $\tilde{\alpha}_\xi^*(\Delta_{8m}^+)$. Этот $KO(B(\xi))$-модуль обладает инволюцией, переводящей элемент $\tilde{\alpha}_\xi^*(\Delta_{8m}^\pm)$ в элемент $\tilde{\alpha}_\xi^*(\Delta_{8m}^\mp)$.*

13.3. Обозначения. Элемент $\tilde{\alpha}_\xi^*(\Delta_{8m}^\pm)$ группы $KO(S(\xi))$ мы будем обозначать просто через $\Delta_{8m}^\pm$. Из теоремы 13.2 следует, что для любого k имеет место равенство

$$\psi^k \Delta_{8m}^\pm = \theta_k(\xi)\, \Delta_{8m}^\pm + b,$$

---

[1]) Векторное расслоение называется $\mathrm{Spin}(n)$-расслоением, если оно имеет вид $\alpha_\xi[M]$ (замечание 12.5.4), где α_ξ — некоторое главное $\mathrm{Spin}(n)$-расслоение, а M — некоторый $\mathrm{Spin}(n)$-модуль. — *Прим. ред.*

где $\theta_k(\xi)$ и b — некоторые элементы кольца $KO(B(\xi))$. Наша ближайшая цель будет состоять в вычислении элементов $\theta_k(\xi)$. Для этого нам понадобится следующее очевидное

13.4. Предложение. *Для любых расслоений ξ и η имеет место равенство*

$$\theta_k(\xi\oplus\eta)=\theta_k(\xi)\,\theta_k(\eta).$$

13.5. Вычисление элемента $\theta_k(\xi)$. Так как

$$\psi_k\Delta_{8m}^{\pm}=\theta_k(\xi)\,\Delta_{8m}^{\pm}+b,$$

то, вычитая одно равенство из другого, мы получаем, что

$$\psi^k(\Delta_{8m}^{+}-\Delta_{8m}^{-})=\theta_k(\xi)(\Delta_{8m}^{+}-\Delta_{8m}^{-}).$$

С другой стороны, из результатов гл. 13 легко следует, что в кольце $RO(\mathrm{Spin}(8m))$ имеет место равенство

$$\Delta_{8m}^{+}-\Delta_{8m}^{-}=\prod_{1\leqslant j\leqslant 4m}(\alpha_j^{1/2}-\alpha_j^{-1/2}).$$

Следовательно,

$$\psi^k(\Delta_{8m}^{+}-\Delta_{8m}^{-})=\prod_{1\leqslant j\leqslant 4m}(\alpha_j^{k/2}-\alpha_j^{-k/2})$$

(ср. следствие 13.12.6). Отсюда вытекает, что при $k=2r+1$

$$\theta_k(\xi)=\prod_{1\leqslant j\leqslant 4m}\frac{\alpha_j^{k/2}-\alpha_j^{-k/2}}{\alpha_j^{1/2}-\alpha_j^{-1/2}}=$$

$$=\prod_{1\leqslant j\leqslant 4m}(\alpha_j^{r}+\alpha_j^{r-1}+\ldots+1+\ldots+\alpha_j^{-r})=$$

$$=\prod_{1\leqslant j\leqslant 4m}(1+\psi^1(\alpha_j)+\ldots+\psi^r(\alpha_j))\,^{1)}.$$

Отметим, что в эту формулу входят только значения операций ψ^i от α_j. Поэтому мы можем ее использовать, чтобы определить элементы $\theta_k(\eta)$ для любых вещественных ориентируемых $2n$-мерных векторных расслоений η.

13.6. Вычисление элемента $\theta_k(2\zeta)$. Пусть ζ — произвольное линейное расслоение. Тогда $\zeta^2=1$ (теорема 5.7.8) и поэтому при $k=2r+1$ и r четном

$$\theta_k(2\zeta)=1+\psi^1(2\zeta)+\ldots+\psi^r(2\zeta)=$$
$$=1+2(\zeta+1+\zeta+\ldots+\zeta+1)=$$
$$=(2r+1)+r(\zeta-1).$$

---

1) В этой формуле под элементами α_j подразумеваются (формально понимаемые) элементы $\tilde{\alpha}_\xi^*(\alpha_j)$. — *Прим. ред.*

13.7. Вычисление элементов $\theta_k(2n\zeta)$. Пусть снова ζ — произвольное линейное расслоение. Так как $(\zeta-1)^2=-2(\zeta-1)$, то при $k=2r+1$

$$\begin{aligned}\theta_k(2n\zeta) &= [(2r+1)+r(\zeta-1)]^n = \\ &= (2r+1)^n + a(\zeta-1),\end{aligned}$$

где a — некоторое число. Чтобы найти это число, положим $\zeta-1=-2$. В результате мы получим, что

$$1^n=(2r+1)^n-2a,$$

т. е. что $a=\frac{(2r+1)^n-1}{2}$. Поскольку $2r+1=k$, мы окончательно получаем

$$\theta_k(2n\zeta)=k^n+[(k^n-1)/2](\zeta-1).$$

13.8. Замечание. Класс $\theta_k(\xi)$ является, как можно показать, инвариантом послойного гомотопического типа расслоения ξ. Следовательно, если $J(2n\zeta)=0$, то $[(k^n-1)/2](\zeta-1)=0$.

Теперь мы можем доказать основную теорему этого раздела.

13.9. Теорема. *Если для конечного клеточного разбиения X кольцо $\widetilde{KO}(X)$ порождено некоторым линейным расслоением ζ, то канонический эпиморфизм $J\colon \widetilde{KO}(X)\to J(X)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. В силу теоремы классификации и замечания 11.7 порядок образующей $\zeta-1$ кольца $\widetilde{KO}(X)$ имеет вид 2^r. Если теперь $J(2n\zeta)=0$ в $J(X)$, то, согласно замечанию 13.8, должно иметь место сравнение $(k^n-2)/2\equiv 0 \pmod{2^r}$. В частности, при $k=5$ должно иметь место сравнение $5^n-1\equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$. Но известно, что группа обратимых элементов кольца $\mathbf{Z}_{2^{r+1}}$ имеет вид $\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_{2^{r-1}}$, причем образующей второго слагаемого является вычет числа 5. Поэтому сравнение $5^n-1\equiv 0 \pmod{2^{r-1}}$ возможно только при $2^{r-1}\mid n$, т. е. при $2^r\mid 2n$. Следовательно, элемент $J(\zeta)$ кольца $J(X)$ имеет порядок 2^r и потому эпиморфизм $\widetilde{KO}(X)\to J(X)$ является изоморфизмом.

В частности, теорема 13.9 применима к пространству $X=RP^k$. Следовательно (см. теорему 12.7), группа $J(RP^k)$ является циклической группой порядка c_k. Согласно теореме 11.8, это и доказывает теорему Адамса:

13.10. Теорема. *На сфере S^{n-1} существует не более $\rho(n)-1$ ортонормальных касательных векторных полей.*

ЧАСТЬ III

Характеристические классы

Глава 16

КЛАССЫ ЧЖЭНЯ И ШТИФЕЛЯ—УИТНИ

В этой главе мы рассматриваем классы Чжэня, классы Штифеля — Уитни и класс Эйлера с аксиоматической точки зрения. Существование характеристических классов доказывается с использованием расслоений на проективные пространства, ассоциированные с векторными расслоениями, и теоремы Лерэ — Хирша. Единственность характеристических классов выводится из принципа расщепления. Все эти результаты можно получить также, например, с помощью теории препятствий или на основе изучения когомологий классифицирующих пространств. В заключение рассмотрена связь характеристических классов с изоморфизмом Тома.

1. ТЕОРЕМА ЛЕРЭ—ХИРША

В этом разделе все группы когомологий рассматриваются с коэффициентами в некотором кольце главных идеалов K (обычно это $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_p$, где p — простое число, или $\mathbf{Q}$).

1.1. Теорема (Лерэ — Хирш). *Пусть $p\colon E \to B$ — произвольное расслоение конечного типа*[1]), *E_0 — открытое подпространство пространства E и (F, F_0) — такая открытая пара пространств, что для каждой точки $b \in B$ имеет место гомеоморфизм*

$$j_b\colon (F, F_0) \to (p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap E_0) \subset (E, E_0).$$

Предположим, что в K-модуле $H^*(E, E_0)$ существуют такие однородные элементы $a_1, \ldots, a_r$, что для каждой точки $b \in B$ элементы $j_b^*(a_1), \ldots, j_b^*(a_r)$ составляют базис K-модуля $H^*(F, F_0)$. Тогда K-модуль $H^*(E, E_0)$, рассматриваемый как $H^*(B)$-модуль относительно действия кольца $H^*(B)$ на K-модуле $H^*(E, E_0)$, определенного гомоморфизмом колец $p^*\colon H^*(B) \to H^*(E, E_0)$,

---

[1]) Расслоение $p\colon E \to B$ называется *расслоением конечного типа*, если существует конечное покрытие $\{U_i\}$ пространства B, над каждым элементом которого это расслоение тривиально (ср. определение 3.5.7). — *Прим. ред.*

является свободным $H^*(B)$-модулем с базисом $a_1, \ldots, a_r$. В частности, гомоморфизм p^* является мономорфизмом.

Доказательство. Для произвольного открытого подмножества $U \subset B$ обозначим через E_U подпространство $p^{-1}(U) \subset E$, через j_U: $E_U \to E$ — естественное вложение и через p_U: $E_U \to U$ — ограничение проекции p на E_U. Поскольку расслоение p: $E \to B$ является по условию расслоением конечного типа, пространство B может быть покрыто конечной системой открытых множеств U, обладающих тем свойством, что существует гомеоморфизм $(U \times F,\ U \times F_0) \to (E_U,\ E_U \cap E_0)$, согласованный с проекциями на U. С другой стороны, из формулы Кюннета непосредственно следует, что для любого такого множества U гомоморфизм p^*: $H^*(U) \to H^*(E_U,\ E_U \cap E_0)$ является мономорфизмом и элементы $j_U^*(a_1), \ldots, j_U^*(a_r)$ составляют базис $H^*(U)$-модуля $H^*(E_U,\ E_U \cap E_0)$. Таким образом, над открытыми множествами U, обладающими указанными свойствами, теорема верна. Поэтому для доказательства теоремы нам достаточно показать, что если эта теорема верна над открытыми множествами U, V и $U \cap V$, то она верна и над множеством $U \cup V$.

Пусть $n(i)$ — степень элемента a_i, а x_i — переменная степени $n(i)$. Для любого открытого множества $U \subset B$ обозначим через $K^n(U)$ прямую сумму групп $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} H^{n-n(i)}(U)\, x_i$, а через $L^n(U)$ — группу $H^n(E_U,\ E_U \cap E_0)$, и рассмотрим гомоморфизм θ_U^n: $K^n(U) \to L^n(U)$, определенный формулой $\theta_U^n\left(\sum\limits_i c_i x_i\right) = \sum\limits_i p^*(c_i)\, a_i$, $c_i \in H^{n-n(i)}(U)$. То, что теорема верна над открытым множеством U, означает, что для всех n гомоморфизм θ_U^n является изоморфизмом.

Ясно, что для функтора $L^n(U)$ (так же как и для функторов $H^k(U)$, прямой суммой которых является функтор $K^n(U)$) имеет место точная аддиционная последовательность (последовательность Майера — Виеториса). Поэтому для любых двух открытых множеств U и V имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\ldots \leftarrow K^n(U \cap V) & \leftarrow & K^n(U) \oplus K^n(V) \leftarrow \\
\downarrow \theta_{U \cap V}^n & & \downarrow \theta_U^n \oplus \theta_V^n \\
\ldots \leftarrow L^n(U \cap V) & \leftarrow & L^n(U) \oplus L^n(V) \leftarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\leftarrow K^n(U \cup V) & \leftarrow & K^{n-1}(U \cap V) & \leftarrow & K^{n-1}(U) \oplus K^{n-1}(V) & \leftarrow & \ldots \\
\downarrow \theta_{U \cup V}^n & & \downarrow \theta_{U \cap V}^{n-1} & & \downarrow \theta_U^{n-1} \oplus \theta_V^{n-1} & & \\
\leftarrow L^n(U \cup V) & \leftarrow & L^{n-1}(U \cap V) & \leftarrow & L^{n-1}(U) \oplus L^{n-1}(V) & \leftarrow & \ldots
\end{array}$$

строчки которой являются точными последовательностями. Следовательно, если теорема верна над U, V и $U \cap V$, т. е. если гомоморфизмы $\theta^n_{U\cap V}$, $\theta^n_U \oplus \theta^n_V$, $\theta^{n-1}_{U\cap V}$ и $\theta^{n-1}_U \oplus \theta^{n-1}_V$ являются изоморфизмами, то, согласно лемме о пяти гомоморфизмах, гомоморфизм $\theta^n_{U\cup V}$ также будет изоморфизмом, т. е. теорема будет верна над $U \cup V$. Тем самым теорема 1.1 полностью доказана.

Теорема 1.1 играет основную роль в построении классов Штифеля — Уитни и классов Чжэня.

1.2. Замечание. С помощью спектральных последовательностей без труда доказывается, что теорема 1.1 справедлива для произвольных расслаивающих отображений, а не только для расслоений конечного типа.

Этим обобщенным вариантом теоремы мы ниже воспользуемся, например, для вычисления групп когомологий пространств $BU(n) = G_n(\mathbf{C}^\infty)$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ ШТИФЕЛЯ — УИТНИ И КЛАССОВ ЧЖЭНЯ

Мы будем иметь дело одновременно с действительными и комплексными векторными расслоениями. Для действительных векторных расслоений символом F мы будем обозначать поле $\mathbf{R}$, символом c — число 1, а символом K_1 — кольцо $\mathbf{Z}_2$. Аналогично для комплексных векторных расслоений символом F мы будем обозначать поле $\mathbf{C}$, символом c — число 2, а символом K_2 — кольцо $\mathbf{Z}$.

Для любого n-мерного векторного расслоения $\xi = (E, p, B)$ символом E_0 мы будем обозначать подмножество отличных от нуля векторов пространства E, а символом p_0 — ограничеиие проекции p на E_0. Если в каждом слое пространства E_0 отождествить точки, лежащие на любой прямой, проходящей через 0, то мы получим некоторое новое пространство E', естественным образом отображающееся на пространство B. Проекция $p_0\colon E_0 \to B$ разлагается при этом в композицию естественного отображения $E_0 \to E'$ и естественного отображения $q\colon E' \to B$.

2.1. Определение. Расслоение (E', q, B) называется *проективным расслоением*, ассоциированным с расслоением ξ. Мы будем обозначать его символом $P\xi$. Очевидно, что расслоение $P\xi$ локально тривиально и его слоем является проективное пространство FP^{n-1}. Для каждой точки $b \in B$ вложение $F^n \to p^{-1}(b) \subset E$ определяет естественное вложение $j_b\colon FP^{n-1} \to q^{-1}(b) \subset E'$. Точки пространства E' — это прямые линии L, лежащие в слоях расслоения ξ и проходящие через точку 0 этих слоев.

Рассмотрим теперь над пространством E' индуцированное расслоение $q^*(\xi)$. Подрасслоением этого расслоения является, очевидно, линейное расслоение λ_ξ, пространство $E(\lambda_\xi)$ которого состоит из пар вида (L, x), где $L \in E'$ и $x \in L$. Поэтому имеет место точная последовательность

$$0 \to \lambda_\xi \to q^*(\xi) \to \sigma_\xi \to 0$$

векторных расслоений над E', где σ_ξ — факторасслоение $q^*(\xi)/\lambda_\xi$. Следовательно, $q^*(\xi) \approx \lambda_\xi \oplus \sigma_\xi$ (см. теорему 3.9.6). Кроме того, для любой точки $b \in B$ отображение вложения j_b: $FP^{n-1} \to E(P\xi)$ индуцирует над FP^{n-1} некоторое линейное расслоение $j_b^*(\lambda_\xi)$.

2.2. Предложение. *Индуцированное расслоение $j_b^*(\lambda_\xi)$ изоморфно каноническому линейному расслоению над проективным пространством FP^{n-1}.*

Доказательство. По определению точками пространства $E(j_b^*(\lambda_\xi))$ являются пары вида (L, y), где L — прямая пространства F^n (проходящая через точку 0), а $y \in j_b(L)$. Но точка y однозначно представляется в виде пары (L, x), где $x \in L$ и, как легко видеть, соответствие $(L, y) \mapsto (L, x)$ определяет требуемый изоморфизм.

2.3. Кольца когомологий проективных пространств. Из элементарного курса алгебраической топологии известно, что кольцо когомологий $H^*(FP^\infty; K_c)$ является кольцом многочленов $K_c[z]$ от переменной z степени c. Для любого n вложение $FP^n \to FP^\infty$ индуцирует эпиморфизм $H^*(FP^\infty; K_c) \to H^*(FP^n; K_c)$, при котором элемент z переходит в образующую z_n кольца $H^*(FP^n; K_c)$, удовлетворяющую соотношению $z_n^{n+1} = 0$. Образами элементов z^i при этом эпиморфизме являются элементы z_n^i, если $i \leqslant n$, и 0, если $i \geqslant n+1$.

2.4. Начиная с этого места, мы будем неизменно предполагать, что пространство $E' = E(P\xi)$ паракомпактно, так что к расслоению λ_ξ применима классификационная теорема 3.7.2. Это всегда так, если паракомпактно пространство B. Достаточно, впрочем, требовать, чтобы векторное расслоение ξ было нумерируемым[1]), поскольку в этом случае расслоение λ_ξ также

---

[1]) Векторное расслоение (или, более общо, произвольное расслоенное пространство) называется *нумерируемым*, если нумерируемо ассоциированное с ним главное расслоение. — *Прим. ред.*

нумерируемо и применима классификационная теорема 4.12.2. Таким образом, мы можем считать, что существует такое отображение $f\colon E(P\xi)\to FP^\infty$, что $f^*(\gamma_1)\approx\lambda_\xi^*$, где λ_ξ^* — расслоение, сопряженное (определение 5.7.6) с расслоением λ_ξ, а γ_1 — универсальное линейное расслоение. Пусть $a_\xi=f^*(z)$. Так как отображение f с точностью до гомотопии определено однозначно, то класс когомологий $a_\xi\in H^{2}(E(P\xi);\ K_c)$ зависит только от ξ.

2.5. Теорема. *Для каждого n-мерного векторного расслоения ξ классы когомологий $1,\ a_\xi,\ a_\xi^2,\ \ldots,\ a_\xi^{n-1}$ образуют базис $H^*(B(\xi);\ K_c)$-модуля $H^*(E(P\xi);\ K_c)$. В частности, гомоморфизм $q^*\colon H^*(B(\xi))\to H^*(E(P\xi))$ является мономорфизмом.*

Доказательство. Из предложения 2.3 немедленно вытекает, что расслоение $j_b^*(f^*(\gamma_1))$ сопряжено с каноническим линейным расслоением над FP^{n-1}. Следовательно, с точностью до автоморфизма[1]) пространства FP^{n-1} отображение fj_b гомотопно вложению $FP^{n-1}\to FP^\infty$. Поэтому элементы $j_b^*(1),\ \ldots$ $\ldots,\ j_b^*(a_\xi^{n-1})$ составляют базис K_c-модуля $H^*(FP^{n-1};\ K_c)$. Остается применить теорему 1.1.

Из теоремы 2.5 следует, что существуют такие однозначно определенные элементы $x_i(\xi)\in H^{ci}(B;\ K_c)$, что

$$a_\xi^n=-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i(\xi)\,a_\xi^{n-i}.$$

Пусть

$$x(\xi)=1+x_1(\xi)+\ldots+x_n(\xi).$$

2.6. Определение. При $F=\mathbf{R}$ элементы $x_i(\xi)\in H^i(B(\xi);\ \mathbf{Z}_2)$ называются *i-ми классами Штифеля — Уитни* расслоения ξ и обозначаются через $w_i(\xi)$. При $F=\mathbf{C}$ элементы $x_i(\xi)\in$ $\in H^{2i}(B(\xi);\ \mathbf{Z})$ называются *i-ми классами Чжэня* расслоения ξ и обозначаются через $c_i(\xi)$. Соответственно этому элементы $w(\xi)=1+w_1(\xi)+\ldots+w_n(\xi)$ и $c(\xi)=1+c_1(\xi)+\ldots+c_n(\xi)$ называются *полными классами* Штифеля — Уитни и Чжэня.

3. АКСИОМЫ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

В этом разделе мы перечисляем некоторые простейшие свойства классов Штифеля — Уитни и классов Чжэня. Мы доказываем все эти свойства, кроме формулы для суммы Уитни, которая будет доказана позже (см. разд. 6). Ниже (разд. 5) мы

---

[1]) Тождественного при $F=\mathbf{R}$ и индуцированного операцией комплексного сопряжения при $F=\mathbf{C}$. — *Прим. ред.*

покажем, что этими свойствами характеристические классы определяются однозначно.

3.1. Свойства классов Штифеля — Уитни. *Для каждого действительного векторного расслоения ξ над произвольным паракомпактным пространством B существует класс когомологий $w(\xi) \in H^*(B; \mathbf{Z}_2)$, обладающий следующими свойствами:*

SW_0. *Класс $w(\xi)$ имеет вид*

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + \ldots + w_n(\xi),$$

где $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbf{Z}_2)$, причем $w_i(\xi) = 0$, если $i > \dim \xi$.

SW_1. *Если расслоения ξ и η изоморфны над B, то $w(\xi) = w(\eta)$. Для любого отображения $f\colon B_1 \to B$*

$$f^*(w(\xi)) = w(f^*(\xi)).$$

SW_2. (Формула для суммы Уитни) *Для любых векторных расслоений ξ и η над B имеет место соотношение*

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)\, w(\eta),$$

где $w(\xi)\, w(\eta)$ — произведение классов $w(\xi)$ и $w(\eta)$ в кольце когомологий $H^*(B; \mathbf{Z}_2)$.

SW_3. *Для канонического линейного расслоения λ над $S^1 = RP^1$ класс когомологий $w_1(\lambda) \in H^1(S^1; \mathbf{Z}_2)$ отличен от нуля.*

SW_3'. *Для канонического линейного расслоения γ_1 над RP^∞ класс когомологий $w_1(\gamma_1)$ является образующей кольца многочленов $H^*(RP^\infty; \mathbf{Z}_2)$.*

Пользуясь вложением $RP^1 \to RP^\infty$ (и свойством SW_1), легко можно показать, что свойства SW_3 и SW_3' равносильны друг другу. (Заметим, что поскольку $H^1(S^1; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$, свойство SW_3 однозначио определяет класс когомологий $w_1(\lambda)$.)

Для аналогичного описания свойств классов Чжэня нам нужно фиксировать выбор образующих в соответствующих группах когомологий. Мы сделаем это, выбрав образующую группы [1]) $H^2(S^2; \mathbf{Z})$. Тем самым образующие будут автоматически выбраны и в каждой из групп $H^2(CP^n; \mathbf{Z})$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$.

3.2. Свойства классов Чжэня. *Для каждого комплексного векторного расслоения ξ над произвольным паракомпактным пространством B существует класс когомологий $c(\xi) \in H^*(B; \mathbf{Z})$, обладающий следующими свойствами:*

C_0. *Класс $c(\xi)$ имеет вид*

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \ldots + c_n(\xi),$$

где $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbf{Z})$, причем $c_i(\xi) = 0$, если $i > \dim \xi$.

---

[1]) Т. е. ориентировав сферу S^2. — *Прим. ред.*

C_1. *Если расслоения* ξ *и* η *изоморфны над* B, *то* $c(\xi)=c(\eta)$. *Для любого отображения* $f\colon B_1\to B$

$$f^*(c(\xi))=c(f^*(\xi)).$$

C_2. (**Формула для суммы Уитни.**) *Для любых векторных расслоений* ξ *и* η *над* B *имеет место соотношение*

$$c(\xi\oplus\eta)=c(\xi)\,c(\eta),$$

где $c(\xi)\,c(\eta)$ — *произведение классов* $c(\xi)$ *и* $c(\eta)$ *в кольце когомологий* $H^*(B;\ \mathbf{Z})$.

C_3. *Для канонического линейного расслоения* λ *над* $S^2=CP^1$ *класс когомологий* $c_1(\lambda)$ *является выбранной выше образующей группы* $H^2(S^2;\ \mathbf{Z})$.

C_3'. *Для канонического линейного расслоения* γ *над* CP^∞ *класс когомологий* $c_1(\gamma_1)$ *является выбранной выше образующей кольца многочленов* $H^*(CP^\infty;\ \mathbf{Z})$.

Пользуясь вложением $CP^1\to CP^\infty$ (и свойством C_1), легко можно показать, что свойства C_3 и C_3' равносильны друг другу.

Отметим, что формулировки свойств SW_0-SW_3' и C_0-C_3' совершенно параллельны. Не удивительно поэтому, что оба типа характеристических классов имеют много общих формальных свойств.

3.3. Предложение. *Для классов Штифеля — Уитни выполнены свойства* SW_0, SW_1 *и* SW_3', *а для классов Чжэня — свойства* C_0, C_1 *и* C_3'.

Доказательство. Свойства SW_0 и C_0 немедленно следуют из определения 2.6. Ясно, что для любого отображения $f\colon B_1\to B$ существует морфизм расслоений $(u, f)\colon Pf^*(\xi)\to P\xi$, являющийся изоморфизмом на каждом слое. Поэтому расслоение $u^*(\lambda_\xi)$ изоморфно расслоению $\lambda_{f^*(\xi)}$. Следовательно, в кольце когомологий $H^*(E(Pf^*(\xi)))$ имеет место равенство $u^*(a_\xi)=a_{f^*(\xi)}$. Но по определению

$$a^n_{f^*(\xi)}=-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i(f^*(\xi))\,(a_{f^*(\xi)})^{n-i}$$

и

$$u^*(a^n_\xi)=-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}f^*(x_i(\xi))\,(u^*(a_{f^*(\xi)}))^{n-i}.$$

Следовательно, $x_i(f^*(\xi))=f^*(x_i(\xi))$. В частности, $x_i(\xi)=x_i(\eta)$, если расслоения ξ и η изоморфны над B. Тем самым свойства SW_1 и C_1 полностью проверены.

Для проверки свойств SW_3' и C_3' заметим, что для любого линейного расслоения ξ над B имеют место равенства $E(P\xi)=B$ и $\lambda_\xi=\xi$. При этом по определению $a_\xi=-x_1(\xi)$. Следовательно, $x_1(\xi^*)=a_\xi$. С другой стороны, $a_\xi=f^*(z)$, где z — образующая кольца $H^*(FP^\infty;\ K_c)$, а $f\colon E(P\xi)\to FP^\infty$ — такое отображение, что $f^*(\gamma_1)=\xi^*$. Если теперь $\xi=\gamma_1$, то $E(P\xi)=FP^\infty$ и f является тождественным отображением. Следовательно, $x_1(\gamma_1)=z$.

Из доказанного предложения вытекает, в частности, что элемент a_ξ группы когомологий $H^*(E(P\xi);\ K_c)$ является не чем иным, как характеристическим классом $x_1(\lambda_\xi^*)$:

$$a_\xi=x_1(\lambda_\xi^*).$$

Действительно, по определению $a_\xi=f^*(z)$, где f — такое отображение $E(P\xi)\to FP^\infty$, что $f^*(\gamma_1)=\lambda_\xi^*$. Поэтому $a_\xi=f^*(x_1(\gamma_1))=$ $=x_1(f^*(\gamma_1))=x_1(\lambda_\xi^*)$.

Пусть $L_F(B)$ — группа классов изоморфных линейных расслоений над B с тензорным произведением $\xi\otimes\eta$ в качестве групповой операции и с сопряженным расслоением ξ^* в качестве обратного к расслоению ξ (см. также теорему 5.7.8). Ясно, что $L_F(-)$ является контравариантным функтором из категории, объектами которой служат паракомпактные пространства, а морфизмами — классы гомотопных отображений, в категорию групп. Классификационная теорема 3.7.2 утверждает, что отображение, сопоставляющее каждому классу гомотопных отображений $f\colon B\to FP^\infty$ класс изоморфных расслоений $f^*(\gamma)$, представляет собой изоморфизм контравариантных функторов $[-,\ FP^\infty]\to$ $\to L_F(-)$. Тем самым на FP^∞ определяется некоторое строение H-пространства (см. разд. 4 гл. 1).

С другой стороны, пространство FP^∞ является $K(\pi,\ n)$-пространством (при $\pi=K_c$ и $n=c$). Так как любое $K(\pi,\ n)$-пространство может быть превращено в H-пространство по существу лишь единственным образом (это легко выводится из теоремы 1.2.2), то функтор $[-,\ FP^\infty]$ изоморфен функтору $H^c(-;\ K_c)$, причем в этом изоморфизме классу $[i]\in[FP^\infty,\ FP^\infty]$ соответствует образующая группы $H^c(FP^\infty;\ K_c)$. Поскольку последняя образующая равна $x_1(\gamma_1)$, отсюда вытекает, что для любого пространства B отображение $x_1\colon L_F(B)\to H^c(B;\ K_c)$ является изоморфизмом групп. Тем самым нами доказана следующая

3.4. Теорема. *Отображения* $w_1\colon L_{\mathbf{R}}(B)\to H^1(B;\ \mathbf{Z}_2)$ *и* $c_1\colon L_{\mathbf{C}}(B)\to H^2(B;\ \mathbf{Z})$ *являются изоморфизмами групп.*

В частности, мы видим, что $w_1(\xi\otimes\eta)=w_1(\xi)+w_1(\eta)$ и $c_1(\xi\otimes\eta)=c_1(\xi)+c_1(\eta)$ для любых линейных расслоений ξ и η. Кроме того, поскольку кольцо когомологий $H^*(RP^\infty;\ \mathbf{Z}_2)$

порождается элементом $w_1(\lambda_1)$, а кольцо $H^*(CP^\infty; \mathbf{Z})$ — элементом $c_1(\lambda_1)$, из теоремы 3.4 вытекает, что *характеристические классы линейных расслоений единственным образом определяются перечисленными в п.* 3.1 *и* 3.2 *свойствами.*

4. СТАЦИОНАРНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ. ПРИМЕРЫ

Выведем теперь из указанных в разд. 3 аксиом важное свойство стационарности характеристических классов и вычислим их для некоторых конкретных расслоений. В первую очередь мы докажем следующее по существу очевидное

4.1. Предложение. *Если векторное расслоение* ξ *тривиально над* B, *то* $x_i(\xi)=0$ *при* $i>0$, *где, как всегда,* $x_i(\xi)=w_i(\xi)$ *в действительном случае и* $x_i(\xi)=c_i(\xi)$ *в комплексном случае.*

Доказательство. Для расслоений над одной точкой утверждение справедливо, так как группы когомологии точки равны нулю в размерностях больше нуля. С другой стороны, каждое тривиальное расслоение индуцируется некоторым расслоением над точкой. Остается воспользоваться свойством SW_1 характеристических классов.

Из этого предложения вытекает

4.2. Теорема. *Если векторные расслоения* ξ *и* η *стационарно эквивалентны, то* $w(\xi)=w(\eta)$ *в действительном случае и* $c(\xi)=c(\eta)$ *в комплексном случае.*

Доказательство. По условию существуют такие целые числа m и n, что $\xi\oplus\theta^n\approx\eta\oplus\theta^m$. С другой стороны, в действительном случае

$$w(\xi\oplus\theta^n)=w(\xi)\,w(\theta^n)=w(\xi)\,1=w(\xi),$$
$$w(\eta\oplus\theta^m)=w(\eta)\,w(\theta^m)=w(\eta)\,1=w(\eta).$$

Следовательно, $w(\xi)=w(\eta)$. Аналогично показывается, что в комплексном случае $c(\xi)=c(\eta)$.

Заметим, что здесь мы использовали еще не доказанное свойство SW_2.

4.3. Замечание. Пусть $G^*(B, K_c)$ — подмножество кольца $H^*(B; K_c)$, состоящее из элементов вида

$$1+a_1+\ldots+a_n, \quad a_i\in H^{ci}(B; K_c).$$

Ясно, что подмножество $G^*(B, K_c)$ является коммутативной группой относительно когомологического умножения, так что

$G^*(-, K_c)$ представляет собой контравариантный функтор из категории пространств (с классами гомотопных отображений в качестве морфизмов) в категорию абелевых групп. Согласно теореме 4.2 (и свойствам SW_0 и C_0 характеристических классов), соответствия $\xi \mapsto w(\xi)$ и $\xi \mapsto c(\xi)$ индуцируют некоторые отображения w: $KO(B) \to G^*(B, \mathbf{Z}_2)$ и c: $K(B) \to G^*(B, \mathbf{Z})$. Свойства SW_1, SW_2 и C_1, C_2 означают тогда, что эти отображения представляют собой морфизмы

$$w\colon KO(-) \to G^*(-, \mathbf{Z}_2), \quad c\colon K(-) \to G^*(-, \mathbf{Z})$$

контравариантных функторов, принимающих значения в категории абелевых групп.

Подчеркнем, что, согласно теореме 4.2, характеристические классы не различают стационарно эквивалентных расслоений.

4.4. Предложение. *Для касательного расслоения $\tau(S^n)$ над сферой S^n имеет место равенство*

$$w(\tau(S^n)) = 1.$$

Доказательство. Согласно примеру 2.4.7, расслоение $\tau(S^n) \oplus \theta^1$ изоморфно расслоению θ^{n+1}. Следовательно, расслоение $\tau(S^n)$ стационарно тривиально и потому, согласно предложению 4.1 и теореме 4.2, $w(\tau(S^n)) = 1$.

Согласно п. 2.4.8, касательное расслоение $\tau(RP^n)$ над проективным пространством RP^n стационарно эквивалентно расслоению $\underbrace{\lambda \oplus \ldots \oplus \lambda}_{n+1 \text{ раз}} = (n+1)\lambda$, где λ — каноническое линейное расслоение над RP^n. Аналогичное утверждение имеет место и в комплексном случае. Отсюда непосредственно вытекает

4.5. Предложение. *Класс $w(\tau(RP^n))$ выражается формулой*

$$w(\tau(RP^n)) = (1+z)^{n+1},$$

где z — образующая группы $H^1(RP^n; \mathbf{Z}_2)$, а класс $c(\tau(CP^n))$ — формулой

$$c(\tau(CP^n)) = (1+z)^{n+1},$$

где z — образующая группы $H^2(CP^n; \mathbf{Z})$.

Каждое векторное поле на пространстве RP^n определяет некоторое векторное поле на сфере S^n. Следовательно, утверждение о несуществовании векторных полей на сфере S^n сильнее, чем утверждение о несуществовании векторных полей на пространстве RP^n. Поэтому следующее ниже предложение непосредственно вытекает из теоремы 11.1.4. Однако мы предпочтем здесь дать другое его доказательство.

4.6. Предложение. *На проективном пространстве* RP^{2k} *не существует отличного от нуля касательного векторного поля.*

Доказательство. Согласно предложению 4.5, имеем $w_{2k}(\tau(RP^{2k})) = (2k+1)z^{2k} = z^{2k} \neq 0$. С другой стороны, если для расслоения $\tau(RP^{2k})$ существует нигде не обращающееся в нуль сечение, то $\tau(RP^{2k}) = \xi \oplus \theta^1$ и потому

$$w_{2k}(\tau(RP^{2k})) = w_{2k-1}(\xi)\, w_1(\theta^1) = 0.$$

5. РАСЩЕПЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Понятие расщепляющего отображения позволяет сводить изучение характеристических классов произвольных векторных расслоений к изучению характеристических классов линейных расслоений.

5.1. Определение. *Расщепляющим отображением* для векторного расслоения ξ над пространством B называется такое отображение $f\colon B_1 \to B$, что расслоение $f^*(\xi)$ представляется в виде суммы линейных векторных расслоений, а гомоморфизм
$f^*\colon H^*(B;K_c) \to$ $\boxed{f^*(B, K_c)} \to H^*(B_1; K_c)$ является мономорфизмом.

5.2. Предложение. *Для каждого векторного расслоения* ξ *существует расщепляющее отображение.*

Доказательство. Проведем индукцию по размерности расслоения ξ. Для линейных расслоений расщепляющим отображением служит, очевидно, тождественное отображение $B \to B$. Пусть теперь ξ — произвольное векторное расслоение, и пусть $q\colon E(P\xi) \to B$ — проективное расслоение, ассоциированное с расслоением ξ. Как мы знаем, отображение $q^*\colon H^*(B; K_c) \to H^*(E(P\xi); K_c)$ мономорфно (теорема 2.5) и $q^*(\xi) = \lambda_\xi \oplus \sigma_\xi$ (см. п. 2.1). С другой стороны, по предположению индукции для расслоения σ_ξ существует расщепляющее отображение $g\colon B_1 \to E(P\xi)$. Ясно, что отображение $f = qg\colon B_1 \to B$ будет расщепляющим отображением для расслоения ξ.

5.3. Следствие. *Для любых векторных расслоений* $\xi_1, \ldots, \xi_r$ *над* B *существует отображение* $f\colon B_1 \to B$, *являющееся расщепляющим отображением для каждого расслоения* ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Доказательство очевидно.

5.4. Теорема. *Классы Штифеля — Уитни однозначно определяются свойствами* $\mathrm{SW}_0 - \mathrm{SW}_3$, *а классы Чжэня однозначно определяются свойствами* $\mathrm{C}_0 - \mathrm{C}_3$.

Доказательство. Пусть $w(\xi)$ и $\bar{w}(\xi)$ — два класса, обладающие свойствами $SW_0 - SW_3$. По определению для произвольного n-мерного векторного расслоения ξ с расщепляющим отображением $f: B_1 \to B$ имеет место равенство $f^*(\xi) = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — некоторые линейные расслоения. Так как класс w_1 для линейных расслоений однозначно определен и так как $w(\lambda_i) = 1 + w_1(\lambda_i)$, то

$$f^*(w(\xi)) = w(f^*(\xi)) = (1 + w_1(\lambda_1)) \ldots (1 + w_1(\lambda_n)) =$$
$$= (1 + \bar{w}_1(\lambda_1)) \ldots (1 + \bar{w}_1(\lambda_n)) = \bar{w}(f^*(\xi)) = f^*(\bar{w}(\xi)).$$

Следовательно, $w(\xi) = \bar{w}(\xi)$, ибо по условию отображение f^* мономорфно. Единственность классов Чжэня доказывается аналогично.

Эта теорема — хорошая иллюстрация к использованию расщепляющих отображений.

6. СУЩЕСТВОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Докажем теперь существование классов, удовлетворяющих аксиомам $SW_0 - SW_3$ и $C_0 - C_3$. Мы уже проверили, что классы Штифеля — Уитни и Чжэня удовлетворяют всем этим аксиомам, за исключением аксиомы SW_2 (или C_2 соответственно). Покажем, что они удовлетворяют и этой аксиоме. Ключом к доказательству является следующее

6.1. Предложение. *Для любого расслоения $\xi = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$, являющегося суммой Уитни линейных расслоений, справедлива формула*

$$x(\xi) = (1 + x_1(\lambda_1)) \ldots (1 + x_1(\lambda_n)),$$

где $x(\xi)$, как всегда, либо полный класс Штифеля — Уитни, либо полный класс Чжэня.

Доказательство. Пусть $q: E(P\xi) \to B$ — проективное расслоение, ассоциированное с расслоением ξ. Как мы знаем, $q^*(\xi) = \lambda_\xi \oplus \sigma_\xi$, и потому

$$\lambda_\xi^* \otimes q^*(\xi) = (\lambda_\xi^* \otimes \lambda_\xi) \oplus (\lambda_\xi^* \otimes \sigma_\xi) = \theta^1 \oplus (\lambda_\xi^* \otimes \sigma_\xi).$$

Это показывает, что расслоение $\lambda_\xi^* \otimes q^*(\xi)$ обладает нигде не обращающимся в нуль сечением s. С другой стороны, $\lambda_\xi^* \otimes q^*(\xi) = (\lambda_\xi^* \otimes q^*(\lambda_1)) \oplus \ldots \oplus (\lambda_\xi^* \otimes q^*(\lambda_n))$, и потому для любого $i = 1, \ldots, n$ сечение s определяет некоторое сечение s_i расслоения $\lambda_\xi^* \otimes q^*(\lambda_i)$. Пусть V_i — открытые подмножества пространства B, над которым $s_i \neq 0$. Тогда линейное расслоение

$\lambda_\xi^* \otimes q^*(\lambda_i)$ тривиально над V_i, и потому образ элемента $x_i(\lambda_\xi^* \otimes q^*(\lambda_i))$ в группе $H^c(V_i; K_c)$ равен нулю. Следовательно, этот элемент является образом некоторого элемента из группы $H^c(B, V_i; K_c)$, и потому элемент $x_1(\lambda^* \otimes q^*(\lambda_1)) \ldots x_1(\lambda_\xi^* \otimes q^*(\lambda_n))$ является образом элемента из группы $H^*\left(B, \bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} V_i; K_c\right) = H^*(B, B; K_c) = 0$ и, значит, равен нулю. Поскольку, как мы знаем, $x_1(\lambda_\xi^* \otimes q^*(\lambda_i)) = x_1(\lambda_\xi^*) + x_1(q^*(\lambda_i)) = x_1(\lambda_\xi^*) + q^*x_1(\lambda_i)$, то тем самым доказано, что

$$\prod_{1 \leqslant i \leqslant n} [q^*(x_1(\lambda_i)) + x_1(\lambda_\xi^*)] = 0.$$

С другой стороны, по определению в кольце $H^*(E(P\xi); K_c)$ для элемента $a_\xi = x_1(\lambda_\xi^*)$ имеет место соотношение $a_\xi^n + q^*x_1(\xi)a_\xi^{n-1} + \ldots + q^*x_n(\xi) = 0$. Поскольку элементы $1, a_\xi, \ldots, a_\xi^{n-1}$ составляют базис $H^*(B(\xi); K_c)$-модуля $H^*(E(P\xi); K_c)$, эти два соотношения совпадают. Значит, $x(\xi) = (1 + x_1(\lambda_1)) \ldots (1 + x_1(\lambda_n))$.

6.2. Теорема. *Для произвольных векторных расслоений* η *и* ξ *над* B *справедливо равенство*

$$x(\xi \oplus \eta) = x(\xi)\, x(\eta).$$

Доказательство. Пусть $f: B_1 \to B$ — расщепляющее отображение для расслоений ξ и η, и пусть $f^*(\xi) = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ и $f^*(\eta) = \lambda_{n+1} \oplus \ldots \oplus \lambda_{n+m}$. Тогда

$$f^*(x(\xi \oplus \eta)) = x(f^*(\xi \oplus \eta)) = x(\lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_{n+m}) = x(f^*(\xi))\, x(f^*(\eta)) = f^*(x(\xi)\, x(\eta)).$$

Поскольку отображение f^* мономорфно, то $x(\xi \oplus \eta) = x(\xi)\, x(\eta)$.

7. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ КЛАСС ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ГИЗИНА

Пусть $E_0(\xi)$ — открытое подпространство пространства $E(\xi)$ расслоения ξ, состоящее из всех отличных от нуля векторов, и пусть $j_b: (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \to (E(\xi), E_0(\xi))$ — отображение, индуцированное естественным отображением пространства $\mathbf{R}^n$ на слой расслоения ξ над точкой $b \in B$. Выше мы построили характеристические классы, привлекая проективное расслоение $P\xi$. Аналогично, привлекая подпространство $E_0(\xi)$, можно определить некоторые другие классы когомологий, тесно связанные с характеристическими классами.

7.1. Определение. Векторное расслоение называется *ориентируемым*, если его структурная группа $O(n)$ может быть ограничена до группы $SO(n)$. *Ориентацией* такого расслоения называется конкретное задание ограничения структурной группы до $SO(n)$. *Ориентированным векторным расслоением* называется пара, состоящая из ориентируемого векторного расслоения и некоторой его ориентации.

Иначе говоря, расслоение ориентировано, если указан такой атлас локальных карт, что все линейные преобразования перехода от одной карты к другой имеют строго положительный определитель.

7.2. Пример. Так как $U(n) \subset SO(2n) \subset O(2n)$, то каждое комплексное n-мерное векторное расслоение, рассматриваемое как действительное $2n$-мерное расслоение, ориентируемо и обладает естественной ориентацией.

Основным результатом этого раздела является

7.3. Теорема. *Пусть ξ — произвольное действительное векторное расслоение. Будем рассматривать группы когомологий с коэффициентами в группе $\mathbf{Z}$, если расслоение ξ ориентировано, и в группе $\mathbf{Z}_2$, если расслоение ξ неориентировано. Тогда*

(1) *существует единственный класс когомологий $U_\xi \in H^n(E, E_0)$, обладающий тем свойством, что для любой точки $b \in B$ класс когомологий $j_b^*(U_\xi)$ является образующей группы $H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\})$, задающей (в случае когда расслоение ξ ориентировано) данную ориентацию пространства $\mathbf{R}^n$;* $0<i<n$

(2) *при $i < n$ имеет место равенство $H^i(E, E_0) = 0$;*

(3) *для любого i отображение $H^i(B) \to H^{i+n}(E, E_0)$, определенное формулой $a \mapsto p^*(a)\, U_\xi$, является изоморфизмом*[1].

Доказательство. Аналогично теореме 1.1, доказательство этой теоремы для произвольных расслоений основывается на рассмотрении соответствующей спектральной последовательности. Мы оставляем это доказательство читателю и ограничимся элементарным доказательством, пригодным в случае, когда расслоение ξ имеет конечный тип.

Очевидно, что утверждения (1) и (2) справедливы над любым открытым множеством $V \subset B$, над которым расслоение $\xi | V$ тривиально. Кроме того, если эти утверждения справедливы над открытыми множествами V_1, V_2 и $V_1 \cap V_2$, то они справедливы также и над объединением $V_1 \cup V_2$. Действительно, пусть $E_1 = p^{-1}(V_1)$, $E_2 = p^{-1}(V_2)$, $E_3 = p^{-1}(V_1 \cap V_2)$, $E_4 = p^{-1}(V_1 \cup$

[1] Предусмотренный этой теоремой класс U_ξ называется *фундаментальным классом* векторного расслоения ξ (или ассоциированного с ним расслоения на сферы $S(\xi)$). — *Прим. ред.*

$\bigcup V_2)$ и $E_i^0 = E_i \cap E_0$. Рассмотрим аддиционную точную последовательность

$$\ldots \leftarrow H^i(E_3, E_3^0) \leftarrow H^i(E_1, E_1^0) \oplus H^i(E_2, E_2^0) \leftarrow$$
$$\leftarrow H^i(E_4, E_4^0) \leftarrow H^{i-1}(E_3, E_3^0) \leftarrow \ldots$$

При $i<n$ эта последовательность сводится к последовательности $0 \leftarrow H^i(E_4, E_4^0) \leftarrow 0$, показывающей, что $H^i(E_4, E_4^0) = 0$. Этим доказано утверждение (2) над $V_1 \cup V_2$. Далее, классы когомологий $U_1 \in H^n(E_1, E_1^0)$ и $U_2 \in H^n(E_2, E_2^0)$ определяют, очевидно, один и тот же элемент группы $H^n(E_3, E_3^0)$, так что существует класс $U_4 \in H^n(E_4, E_4^0)$, проектирующийся в U_1 и U_2, причем в силу равенства $H^{n-1}(E_3, E_3^0) = 0$ этот класс определен единственным образом.

Очевидная индукция по числу карт конечного атласа расслоения ξ доказывает теперь утверждения (1) и (2). Что же касается утверждения (3), то оно является, очевидно, непосредственным следствием теоремы 1.1.

Таким образом, для каждого n-мерного векторного расслоения ξ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H^i(B) \arrow[rr, "a \mapsto p^*(a)\,U_\xi"] \arrow[dr, "p^*"'] & & H^{i+n}(E, E_0) \\
& H^i(E) \arrow[ur, "b \mapsto bU_\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

все гомоморфизмы которой являются изоморфизмами.

7.4. Определение. Класс когомологий $p^{*-1} j^*(U_\xi) \in H^n(B)$, где p — проекция расслоения ξ, а $j\colon E \to (E, E_0)$ — отображение вложения, называется *эйлеровым классом* действительного n-мерного векторного расслоения ξ над B и обозначается через $e(\xi)$. Как правило, мы будем его рассматривать лишь для ориентированных векторных расслоений, когда он является классом когомологий с целыми коэффициентами.

Пусть ψ — композиция кограничного отображения $H^i(E_0) \to H^{i+1}(E, E_0)$ и изоморфизма $\varphi^{-1}\colon H^{i+1}(E, E_0) \to H^{i+1-n}(B)$, обратного к изоморфизму $\varphi(a) = p^*(a)\,U_\xi$. Имеет место следующая

7.5. Теорема (Гизин). *Для любого n-мерного действительного векторного расслоения ξ имеет место точная последовательность*

$$\ldots \to H^i(B) \xrightarrow{\smile e(\xi)} H^{i+n}(B) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(E_0) \xrightarrow{\psi} H^{i+1}(B) \to \ldots,$$

где $\smile e(\xi)$ — *гомоморфизм умножения на* $e(\xi)$ (*группой коэффициентов считается, как всегда, группа* $\mathbf{Z}$, *если расслоение* ξ *ориентировано, и группа* $\mathbf{Z}_2$ *в противном случае*).

Доказательство. Очевидно, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to H^{i+n}(E, E_0) & \xrightarrow{j^*} & H^{i+n}(E) & \to & H^{i+n}(E_0) & \to & H^{i+n+1}(E, E_0) & \to & \ldots \\
\uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle p^*} & & \uparrow{\scriptstyle 1} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \\
\ldots \to H^{i}(B) & \longrightarrow & H^{i+n}(B) & \xrightarrow{p^*} & H^{i+n}(E_0) & \xrightarrow{\psi} & H^{i+1}(B) & \to & \ldots
\end{array}$$

строки которой являются точными последовательностями. Поэтому нам нужно только показать, что гомоморфизм $p^{*-1}j^*\varphi\colon H^i(B) \to H^{i+n}(B)$ совпадает с умножением на эйлеров класс $e(\xi)$. Но по определению для любого элемента $a \in H^i(B)$

$$p^{*-1}j^*\varphi(a) = p^{*-1}j^*(p^*(a)\,U_\xi) = p^{*-1}(p^*(a)\,j^*(U_\xi)) =$$
$$= a\left(p^{*-1}j^*(U_\xi)\right) = ae(\xi).$$

Построенная точная последовательность называется *последовательностью Гизина* расслоения (E_0, p, B).

7.6. Предложение. *Для эйлерова класса справедливо соотношение* $e(\xi) = \varphi^{-1}(U_\xi^2)$.

Доказательство. По определению

$$\varphi(e(\xi)) = p^*\left(p^{*-1}j^*(U_\xi)\right)U_\xi = j^*(U_\xi)\,U_\xi = U_\xi^2.$$

7.7. Следствие. *Эйлеров класс нечетномерного ориентированного расслоения* ξ *удовлетворяет соотношению* $2e(\xi) = 0$.

Эйлеров класс обладает свойством функториальности:

7.8. Предложение. *Для любого векторного расслоения* ξ *над пространством* B *и любого отображения* $f\colon B' \to B$ *имеет место равенство* $f^*(e(\xi)) = e(f^*(\xi))$.

Доказательство. Ясно, что на каждом слое расслоения $f^*(\xi)$ класс $f^*(U_\xi)$ совпадает с классом $U_f^*(\xi)$. Поэтому $f^*(U_\xi) = U_f^*(\xi)$ (утверждение (1) теоремы 7.3). Остается воспользоваться коммутативностью диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
H^*(E, E_0) & \to & H^*(E) & \to & H^*(B) \\
\downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle g^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\
H^*(E', E_0') & \to & H^*(E') & \to & H^*(B'),
\end{array}$$

где $E = E(\xi)$, $E' = E(f^*(\xi))$, а g: $(E', E_0') \to (E, E_0)$ — отображение, индуцированное отображением f.

Отсюда немедленно вытекает (ср. предложение 4.1)

7.9. Следствие. *Если расслоение ξ тривиально, то $e(\xi) = 0$.*

8. СВОЙСТВО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТИ ЭЙЛЕРОВА КЛАССА

Пусть ξ — действительное n-мерное векторное расслоение над B с пространством расслоения E', подпространством ненулевых векторов E_0' и слоем F_b' над точкой $b \in B$. Пусть, далее, E'', E_0'' и F_b'' — соответствующие пространства для m-мерного расслоения η, а E, E_0 и F_b — соответствующие пространства для суммы $\xi \oplus \eta$. Пусть, кроме того, E_1 — объединение пространств $F_{1,b} = F_{0,b}' \times F_b''$, $b \in B$, где $F_{0,b}' = E_0' \cap F_b'$, а E_2 — объединение пространств $F_{2,b} = F_b' \times F_{0,b}''$, где $F_{0,b}'' = E_0'' \cap F_b''$. Тогда имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \to & E & \to & (E, E_1) \\ \downarrow{\scriptstyle r_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ E_0' & \to & E' & \to & (E', E_0'), \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} E_2 & \to & E & \to & (E, E_2) \\ \downarrow{\scriptstyle r_2} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ E_0'' & \to & E'' & \to & (E'', E_0'') \end{array}$$

горизонтальные стрелки которых являются вложениями, а вертикальные — проекциями, причем стрелки r_1, r_2, p_1 и p_2 представляют собой гомотопические эквивалентности. Кроме того, $E_0 = E_1 \cup E_2$ и отображения

$$H^*(E', E_0') \xrightarrow{q_1^*} H^*(E, E_1)$$

и

$$H^*(E'', E_0'') \xrightarrow{q_2^*} H^*(E, E_2)$$

являются изоморфизмами. Пусть, наконец, U' — класс когомологий $U_\xi \in H^*(E', E_0')$, U'' — класс когомологий $U_\eta \in H^*(E'', E_0'')$ и U — класс когомологий $U_{\xi \oplus \eta} \in H^*(E, E_0)$.

8.1. Предложение (свойство мультипликативности фундаментального класса). *Справедливо равенство*

$$U = q_1^*(U')\, q_2^*(U'').$$

Доказательство. В силу свойства единственности класса U достаточно доказать, что для каждой точки $b \in B$ класс когомологий $j_b^*(q_1^*(U')\, q_2^*(U''))$ является образующей $j_b(U)$

группы $H^{n+m}(F_b, F_{b,0})$. С этой целью рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{c}
\ldots \to H^n(E', E_0') \otimes H^m(E'', E_0'') \xrightarrow{q_1^* \otimes q_2^*} \\
\downarrow j_1^* \otimes j_2^* \\
\ldots \to H^n(F_b', F_{0,b}') \otimes H^m(F_b'', F_{0,b}'') \to \\
\to H^n(E, E_1) \otimes H^m(E, E_2) \to H^{n+m}(E, E_0) \to \ldots \\
\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow j^* \\
\to H^n(F_b, F_{1,b}) \otimes H^m(F_b, F_{2,b}) \to H^{n+m}(F_b, F_{0,b}) \to \ldots
\end{array}
$$

последние горизонтальные стрелки которой являются умножениями, а остальные необозначенные стрелки индуцированы очевидными вложениями. Элемент $j_b^*(q_1^*(U') - q_2^*(U''))$ является образом элемента $U' \otimes U'' \in H^n(E', E_0') \otimes H^m(E'', E_0'')$ при композиции верхних стрелок и последнего вертикального отображения. Поэтому он является образом элемента $U' \otimes U''$ и при композиции первого вертикального отображения и нижних горизонтальных стрелок. Для завершения доказательства остается заметить, что при этом гомоморфизме образующая группы $H^n(F_b', F_{0,b}') \otimes H^m(F_b'', F_{0,b}'')$ переходит, очевидно, в образующую группы $H^{n+m}(F, F_0)$.

8.2. Теорема. *Для эйлерова класса имеет место соотношение*

$$e(\xi \oplus \eta) = e(\xi)\, e(\eta).$$

Доказательство. По определению 7.4 $e(\xi \oplus \eta) = p^{*-1} j^*(U)$. С другой стороны, согласно предложению 8.1,

$$p^{*-1} j^*(U) = p^{*-1} j^*(q_1^*(U')\, q_2^*(U'')) = p^{*-1}[p_1^* j_1^*(U')\, p_2^* j_2^*(U'')] = e(\xi)\, e(\eta).$$

8.3. Теорема. *Если векторное расслоение ξ обладает нигде не обращающимся в нуль сечением, то $e(\xi) = 0$.*

Доказательство. От векторного расслоения ξ с нигде не обращающимся в нуль сечением можно отщепить в качестве прямого слагаемого тривиальное линейное расслоение: $\xi = \theta^1 \oplus \eta$. Поэтому $e(\xi) = e(\theta^1)\, e(\eta) = 0 \cdot e(\eta) = 0$, поскольку эйлеров класс тривиального расслоения, очевидно, равен нулю.

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ КЛАССОВ ШТИФЕЛЯ — УИТНИ ЧЕРЕЗ КВАДРАТЫ СТИНРОДА

Пусть, как и выше, $\varphi\colon H^i(B) \to H^{i+n}(E, E_0)$ — изоморфизм, задаваемый формулой $\varphi(a) = p^*(a)\,U_\xi$. В этом разделе все группы когомологий рассматриваются с коэффициентами в группе $\mathbf{Z}_2$.

9.1. Теорема (Том). *Для любого векторного расслоения ξ класс Штифеля — Уитни $w_i(\xi)$ выражается формулой*

$$w_i(\xi) = \varphi^{-1}(Sq^i U_\xi),$$

где Sq^i — i-й квадрат Стинрода[1].

Доказательство. В силу единственности классов $w_i(\xi)$ достаточно доказать, что класс $w^*(\xi) = \varphi^{-1}(SqU_\xi)$ обладает всеми свойствами $\mathrm{SW}_0 - \mathrm{SW}_3$.

Свойство SW_0 очевидно, поскольку $Sq^0 = 1$ и $Sq^i U_\xi = 0$ при $i > n$. Столь же очевидно и первое утверждение свойства SW_1. Далее, для произвольного отображения $f\colon B' \to B$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^i(B) & \xrightarrow{\varphi} & H^{i+n}(E, E_0) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle g^*} \\ H^i(B') & \longrightarrow & H^{i+n}(E', E_0') \end{array}$$

где $(g, f)\colon f^*(\xi) \to \xi$ — канонический морфизм. Следовательно, $f^*(w^*(\xi)) = f^*\varphi^{-1}(SqU_\xi) = \varphi^{-1}(Sqf^*(U_\xi)) = \varphi^{-1}(Sq(U_{f^*(\xi)})) = w^*(f^*(\xi))$.

Для проверки свойства SW_2 воспользуемся результатами предыдущего раздела. Согласно предложению 8.1, $U = q_1^*(U')\,q_2^*(U'')$, и потому $Sq\,U = Sq(q_1^*(U'))\,Sq(q_2^*(U''))$. С другой стороны, по определению

$$Sq\,U = (p^*(w^*(\xi \oplus \eta)))\,U, \quad Sq\,U' = (p^*(w^*(\xi))\,U',$$
$$Sq\,U'' = (p^*(w^*(\eta))\,U''.$$

[1] Согласно этой теореме и предложению 7.6, класс Штифеля — Уитни $w_n(\xi)$ получается приведением по модулю 2 эйлерова класса $e(\xi)$. Поэтому класс $e(\xi)$ имеет смысл рассматривать отдельно только тогда, когда он является целочисленным классом когомологий, т. е. когда расслоение ξ ориентировано. — *Прим. ред.*

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&(p^*(w^*(\xi\oplus\eta))U = \\
&= Sq\,U = q_1^*(Sq\,(U'))\,q_2^*\,Sq\,(U'') = \\
&= (q_1^*((p^*(w^*(\xi))\,U'))\,(q_2^*((p^*(w^*(\eta))\,U'')) = \\
&= (p_1^*p^*(w^*(\xi))\,q_1^*(U')\,(p_2^*p^*(w^*(\eta))\,q_2^*(U'') = \\
&= (p_1^*p^*(w^*(\xi))\,(p_2^*p^*(w^*(\eta))\,q_1^*(U')\,q_2^*(U'') = \\
&= p^*(w^*(\xi)\,w^*(\eta))\,U,
\end{aligned}
$$

и потому $w^*(\xi\oplus\eta) = w^*(\xi)\,w^*(\eta)$.

Наконец, для проверки свойства SW_3 заметим, что для канонического расслоения λ пара (E, E_0) состоит с точностью до гомотопического типа из листа Мёбиуса и его края. Поскольку лист Мёбиуса является проективной плоскостью RP^2 с вырезанной двумерной открытой клеткой, отсюда вытекает, что Sq^1 переводит отличный от нуля элемент группы $H^1(E, E_0)$ в отличный от нуля элемент группы $H^2(E, E_0)$. Следовательно, элемент Sq^1U_λ, а потому и элемент $w_1^*(\lambda)\in H^1(S'; \mathbf{Z}_2)$ отличен от нуля.

10. ИЗОМОРФИЗМ ТОМА

Пусть ξ — векторное расслоение. Если оно ориентировано, то группой коэффициентов групп когомологий мы, как и выше, будем считать группу целых чисел $\mathbf{Z}$, а если оно не ориентировано, то группу $\mathbf{Z}_2$. Напомним, что, согласно теореме 7.3, формула $\varphi(a) = p^*(a)\,U_\xi$ определяет некоторый изоморфизм $\varphi\colon H^i(B)\to H^{i+n}(E, E_0)$.

10.1. Определение. Предполагая, что векторное расслоение ξ снабжено римановой метрикой, рассмотрим расслоение на шары $D(\xi)$, ассоциированное с расслоением ξ. По определению оно является подрасслоением расслоения ξ, пространство $E(D(\xi))$ которого состоит из всех векторов $x\in E(\xi)$ с $\|x\|\leqslant 1$. Подрасслоением этого расслоения является ассоциированное с ξ расслоение на сферы $S(\xi)$, пространство $E(S(\xi))$ которого состоит из всех векторов $x\in E(\xi)$ с $\|x\| = 1$.

Пусть $D(\xi)_0 = D(\xi)\cap E_0$. Рассмотрим изоморфизмы

$$H^i(B)\xrightarrow{\varphi} H^{i+n}(E, E_0)\to H^{i+n}(D(\xi), D(\xi)_0)\to H^{i+n}(D(\xi), S(\xi)),$$

первый из которых описан выше, второй индуцирован вложением, а третий — гомотопической эквивалентностью $S(\xi)\to D(\xi)_0$. Композиция этих трех изоморфизмов является изоморфизмом

φ': $H^i(B) \to H^{i+n}(D(\xi), S(\xi))$, который может быть определен формулой

$$\varphi'(a) = p^*(a)\, U_\xi,$$

где p рассматривается как отображение $(D(\xi), S(\xi)) \to (B, *)$, а U_ξ обозначает образ фундаментального класса расслоения ξ при изоморфизме $H^n(E, E_0) \to H^n(D(\xi), S(\xi))$.

10.2. Определение[1]. *Пространством Тома* ξ^B векторного расслоения ξ называется факторпространство $D(\xi)/S(\xi)$.

Гомоморфизм ψ: $H^i(B) \to \tilde{H}^{i+n}(\xi^B)$, определенный формулой $\psi = \sigma\varphi'$, где

$$\sigma\colon H^{i+n}(D(\xi), S(\xi)) \to \tilde{H}^{i+n}(\xi^B)$$

— естественное отображение, называется *гомоморфизмом Тома*. Поскольку отображение σ является, очевидно, изоморфизмом, справедлива следующая

10.3. Теорема. *Гомоморфизм Тома* ψ: $H^i(B) \to \tilde{H}^{i+n}(\xi^B)$ *является изоморфизмом*[2].

Другой подход к построению изоморфизма Тома читатель найдет в упражнениях к этой главе.

11. СВЯЗЬ МЕЖДУ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ КЛАССАМИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Для комплексных векторных расслоений определена[3] операция сопряжения $\xi \mapsto \xi^*$. Кроме того, ограничение поля $\mathbf{C}$ до поля $\mathbf{R}$ определяет гомоморфизм групп

$$\varepsilon_O\colon K_{\mathbf{C}}(X) \to K_{\mathbf{R}}(X).$$

С другой стороны, тензорное умножение действительного векторного расслоения η на поле $\mathbf{C}$ приводит к комплексному векторному расслоению $\eta \otimes \mathbf{C}$, называемому *комплексификацией* расслоения η, и соответствие $\eta \mapsto \eta \otimes \mathbf{C}$ индуцирует гомоморфизм колец

$$\varepsilon_U\colon K_{\mathbf{R}}(X) \to K_{\mathbf{C}}(X).$$

Имеют место очевидные соотношения[4]

$$\varepsilon_O(\varepsilon_U(\eta)) = 2\eta, \quad \varepsilon_U(\varepsilon_O(\xi)) = \xi + \xi^*.$$

---

[1]) Это определение является с точностью до обозначений повторением определения 15.1.2 (см. упр. 4 к этой главе). — *Прим. ред.*

[2]) Класс когомологий $U_\xi \in H^n(D(\xi), S(\xi))$, а также образ этого класса в группе $\tilde{H}^n(\xi^B)$ называется *классом Тома* расслоения ξ. — *Прим. ред.*

[3]) См. определение 5.7.6, где расслоение ξ^* обозначено символом $\bar{\xi}$. — *Прим. ред.*

[4]) Ср. предложение 13.11.3. — *Прим. ред.*

Ясно также, что для каждого действительного векторного расслоения η комплексные расслоения $\eta \otimes \mathbf{C}$ и $(\eta \otimes \mathbf{C})^*$ изоморфны.

11.1. Предложение. *Для каждого комплексного векторного расслоения ξ справедливо соотношение*

$$c_i(\xi^*) = (-1)^i c_i(\xi).$$

Доказательство. Ясно, что это предложение для линейных расслоений справедливо. Пусть теперь $f: B_1 \to B$ — расщепляющее отображение для расслоения ξ, и пусть $f^*(\xi) = \lambda_1 \oplus \ldots \ldots \oplus \lambda_n$. Тогда

$$\begin{aligned} f^*c(\xi^*) &= c(f^*(\xi^*)) = c(\lambda_1^*) \ldots c(\lambda_n^*) = \\ &= (1 - c_1(\lambda_1)) \ldots (1 - c_1(\lambda_n)) = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i c_i(f^*(\xi)) = \\ &= f^*\Big(\sum_{i \geqslant 0} (-1)^i c_i(\xi)\Big), \end{aligned}$$

и потому $c_i(\xi^*) = (-1)^i c_i(\xi)$.

11.2. Следствие. *Если комплексное векторное расслоение ξ изоморфно своему сопряженному расслоению ξ^*, то $2c_{2i+1}(\xi) = 0$ для любого $i \geqslant 0$.*

Доказательство. Согласно предложению 11.1, $c_{2i+1}(\xi) = -c_{2i+1}(\xi^*) = -c_{2i+1}(\xi)$, т. е. $2c_{2i+1}(\xi) = 0$.

Это следствие применимо, в частности, к комплексификациям $\eta \otimes \mathbf{C}$ действительных расслоений.

11.3. Определение. Классы когомологий $p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbf{C}) \in H^{4i}(B, \mathbf{Z})$ называются *классами Понтрягина* действительного векторного расслоения ξ.

Полный класс Понтрягина $p(\xi) \in H^*(B, \mathbf{Z})$ определяется формулой

$$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \ldots .$$

Из следствия 11.2 непосредственно вытекает, что для классов Понтрягиа формула для суммы Уитни справедлива, вообще говоря, лишь в следующем виде:

$$2(p(\xi \otimes \eta) - p(\xi)\, p(\eta)) = 0.$$

Пусть q: $RP^{2n-1} \to CP^{n-1}$ — отображение, сопоставляющее каждой действительной прямой $\{z, -z\}$, $z \in S^{2n-1}$, комплексную прямую пространства $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$, проходящую через точку z, и пусть ξ — каноническое линейное расслоение над действительным проективным пространством RP^{2n-1}, а η — каноническое линейное расслоение над комплексным проективным пространством CP^{n-1}. По определению расслоение ξ является действительным расслоением, а расслоение η — комплексным.

11.4. Теорема. *Имеют место следующие утверждения:*

(1) *расслоение* $q^*(\eta)$ *изоморфно расслоению* $\varepsilon_U(\xi)$;

(2) *класс* $w_2(\varepsilon_O(\eta))$ *получается приведением по модулю* 2 *класса* $c_1(\eta)$;

(3) $c_1(\eta) = e(\varepsilon_O(\eta))$.

Доказательство. Поскольку каждое комплексное линейное расслоение определяется с точностью до изоморфизма своим первым классом Чжэня c_1 (теорема 3.4) и поскольку $H^2(RP^{2n-1}; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2$ при $n \geqslant 2$, для доказательства утверждения (1) нам надо лишь показать, что

$$c_1(q^*(\eta)) \neq 0 \quad \text{и} \quad c_1(\varepsilon_U(\xi)) \neq 0.$$

Но так как $c_1(\eta)$ порождает группу $H^2(CP^{n-1})$ и так как отображение q^*: $H^2(CP^{n-1}) \to H^2(RP^{2n-1})$ эпиморфно, то $c_1(q^*(\eta)) = q^*(c_1(\eta)) \neq 0$. С другой стороны, так как $\varepsilon_O\varepsilon_U(\xi) = \xi \oplus \xi$, то для доказательства соотношения $c_1(\varepsilon_U(\xi)) \neq 0$ достаточно показать, что расслоение $\xi \oplus \xi$ не тривиально. Но это действительно так, ибо $w(\varepsilon_O\varepsilon_U(\xi)) = w(\xi \oplus \xi) = w(\xi)\, w(\xi) = (1 + x)^2 = 1 + x^2$.

Для доказательства утверждения (2) заметим, что по уже доказанному $q^*(\varepsilon_O(n)) = \varepsilon_O(\varepsilon_U(\xi))$ и, следовательно, $q^*(w(\varepsilon_O(\eta))) = w(\varepsilon_O(\varepsilon_U(\xi))) = 1 + x^2$. Таким образом, $w_2(\varepsilon_O(\eta))$ является отличным от нуля элементом группы $H^2(CP^{n-1}; \mathbf{Z}_2)$ и потому равен $c_n(\eta) \bmod 2$.

Доказательство утверждения (3) мы проведем сначала при $n = 1$. Поскольку класс когомологий $c_1(\eta)$ в этом случае является образующей группы $H^2(CP^1; \mathbf{Z}) = H^2(S^2; \mathbf{Z})$, он представляет собой двукратную надстройку над образующей $\alpha \in \tilde{H}^0(S^0)$. Но из построения класса когомологий $e(\varepsilon_O(\eta))$ непосредственно явствует, что он также является двукратной надстройкой над образующей α_0. Следовательно, в этом случае $c_1(\eta) = e(\varepsilon_O(\eta))$. При $n > 1$ гомоморфизм ограничения $H^2(CP^n; \mathbf{Z}) \to H^2(CP^1; \mathbf{Z})$ является мономорфизмом, причем, согласно уже доказанному, оба элемента $c_1(\eta)$ и $e(\varepsilon_O(\eta))$ переходят при этом мономорфизме в один и тот же элемент группы $H^2(CP^1; \mathbf{Z})$. Следовательно, $c_1(\eta) = e(\varepsilon_O(\eta))$ и при $n > 1$.

11.5. Следствие. *Для любого комплексного линейного расслоения* η *над паракомпактным пространством класс Штифеля —*

Уитни $w_2(\varepsilon_O(\eta))$ расслоения $\varepsilon_O(\eta)$ получается приведением по модулю 2 класса Чжэня $c_1(\eta)$ расслоения η.

Доказательство. Согласно утвержденню (2) теоремы 11.4, это следствие справедливо для универсального линейного расслоения. Значит, оно справедливо и для любого комплексного линейного расслоения.

Аналогично доказывается более точное

11.6. Следствие. *Для любого комплексного линейного расслоения η над паракомпактным пространством эйлеров класс $e(\varepsilon_O(\eta))$ расслоения $\varepsilon_O(\eta)$ совпадает с классом Чжэня $c_1(\eta)$ расслоения η.*

12. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ И КЛАССЫ ШТИФЕЛЯ — УИТНИ

12.1. Теорема. *Действительное векторное расслоение ξ над пространством B тогда и только тогда ориентируемо, когда $w_1(\xi)=0$.*

Доказательство. Пусть n — размерность расслоения ξ. Очевидно, что расслоение ξ тогда и только тогда ориентируемо, когда линейное расслоение $\Lambda^n \xi$ тривиально. С другой стороны, будучи линейным, расслоение $\Lambda^n \xi$ тривиально тогда и только тогда, когда $w_1(\Lambda^n \xi)=0$ (теорема 3.4).

Если теперь $\xi=\lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — линейные расслоения, то, согласно предложению 5.6.10, $\Lambda^n \xi=\lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n$, и потому $w_1(\Lambda^n \xi)=w_1(\lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n)=w_1(\lambda_1)+\ldots+w_1(\lambda_n)= = w_1(\xi)$. Следовательно, в этом случае теорема справедлива.

Случай произвольного ξ сводится к рассмотренному с помощью расщепляющего отображения $f\colon B_1 \to B$. Действительно, так как $f^*(w_1(\Lambda^n \xi))=w_1(\Lambda^n f^*(\xi))$ и $f^* w_1(\xi)=w_1(f^*(\xi^*))$, а отображение f^* мономорфно, то, во-первых, расслоение $f^*(\xi)$ ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентируемо расслоение ξ, и, во-вторых, $w_1(\xi)=0$ тогда и только тогда, когда $w_1(f^*(\xi))=0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что если n-мерное векторное расслоение ξ обладает нигде не обращающимся в нуль сечением s, то $w_n(\xi)=0$ в действительном случае и $c_n(\xi)=0$ в комплексном случае.

2. Постройте действительное n-мерное векторное расслоение ξ, не обладающее нигде не обращающимся в нуль сечением, но тем не менее такое, что $w_n(\xi)=0$.

3. Докажите, что для любого комплексного n-мерного векторного расслоения ξ класс $e(\varepsilon_O(\xi))$ совпадает с классом $c_n(\xi)$,

24 Зак. 422

а класс $w_{2n}(\varepsilon_O(\xi))$ получается приведением по модулю 2 класса $c_n(\xi)$.

4. Докажите, что пространство Тома расслоения ξ над компактным пространством B гомеоморфно одноточечной компактификации пространства $E(\xi)$.

5. Для произвольного векторного расслоения ξ определено отображение $f\colon D(\xi)\to P(\xi\oplus\theta^1)$, сопоставляющее каждой точке $x\in D(\xi)$ прямую пространства $E(\xi\oplus\theta^1)$, проходящую через точку $(x,\ 1-\|x\|^2)$. Докажите, что ограничение

$$f\colon D(\xi)\setminus S(\xi)\to P(\xi\oplus\theta^1)\setminus P\xi$$

этого отображения является гомеоморфизмом, индуцирующим гомеоморфизм $\xi^B\to P(\xi\oplus\theta^1)/P\xi$.

6. Докажите, что отображения

$$P\xi\to P(\xi\oplus\theta^1)\to\xi^B$$

индуцируют точную последовательность

$$0\to H^*(\xi^B)\xrightarrow{\beta} H^*(P(\xi\oplus\theta^1))\xrightarrow{\alpha} H^*(P\xi)\to 0.$$

Докажите, что $\alpha(a_{\xi\oplus\theta^1})=a_\xi$ и что идеал $\operatorname{Im}\beta\subset H^*(P(\xi\oplus\theta^1))$ порождается элементом $a=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant n} x_i(\xi)\,a^{n-i}_{\xi\oplus\theta^1}$, где $n=\dim\xi$.

7. Постройте естественное вложение $B(\xi)\to S(E\oplus\theta^1)$, обладающее тем свойством, что пространство $S(\xi\oplus\theta^1)/B(\xi)$ гомеоморфно пространству ξ^B.

8. Докажите, что для любого действительного линейного расслоения λ комплексное линейное расслоение $\lambda\otimes\mathbf{C}$ тривиально.

9. Докажите следующую формулу Ву Вэнь-цзюня для классов Штифеля — Уитни:

$$Sq^k w_i=\sum_{0\leqslant r\leqslant k}\binom{i+r-k-1}{r} w_{k-r}w_{i+r}.$$

Указание: см. Ву Чань-сян [1].

Глава 17

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Расслоенные пространства впервые возникли в связи с геометрией многообразий. В этой главе мы рассматриваем некоторые вопросы теории многообразий, имеющие отношение к векторным расслоениям. В частности, используя классы Штифеля—Уитни, мы доказываем простейшие теоремы о несуществовании погружений многообразий в евклидово пространство.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МНОГООБРАЗИЯХ

В первую очередь напомним некоторые основные определения дифференциального исчисления. Пусть U — произвольное открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$ и V — открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^m$. Для каждого (дифференцируемого) отображения f: $U \to V$ определены его *i-е частные производные* $D_i f$: $U \to \mathbf{R}^m$ и *дифференциал* Df: $U \to \mathbf{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, где $\mathbf{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ — пространство всех линейных отображений $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Через частные производные $D_i f$ дифференциал Df выражается формулой, где

$$Df(x)\, a = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} D_i f(x)\, a_i, \quad x \in U, \quad a \in \mathbf{R}^n.$$

Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ и $B \subset \mathbf{R}^m$ — произвольные множества. Отображение u: $A \to B$ называется *отображением класса* C^r, если существуют такие открытые множества $U \supset A$ и $V \supset B$ и такое отображение f: $U \to V$, что $f \mid A = u$ и для любого $s \leqslant r$ все частные производные $D_{i_1} \ldots D_{i_s} f$ существуют и непрерывны на U. Ясно, что композиция vu: $A \to C$ отображений u: $A \to B$ и v: $B \to C$ класса C^r также является отображением класса C^r. Кроме того, для каждого $s \leqslant r$ любое отображение u: $A \to B$ класса C^r является также и отображением класса C^s. Отображение u: $A \to B$ класса C^r называется *диффеоморфизмом класса* C^r, если существует обратное отображение u^{-1}: $B \to A$, также являющееся отображением класса C^r.

Для любых отображений $f\colon U \to V$ и $g\colon V \to W$ класса C^1 имеет место формула

$$D(fg)(x) = (Dg)(f(x))\, Df(x)$$

(„правило дифференцирования сложной функции“).

Пусть H^n — *верхнее полупространство* пространства $\mathbf{R}^n$, т. е. множество всех точек $x \in R^n$, для которых $x_n \geqslant 0$.

1.1. Определение. *Картой* топологического пространства X называется пара (U, φ), где U — открытое подмножество пространства X, а $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ — гомеоморфизм множества U на открытое подмножество $\varphi(U) \subset H^n$.

1.2. Определение. *Атласом* $\mathbf{A}$ *класса* C^r топологического пространства X называется такое семейство карт этого пространства, что

(1) пространство X является объединением открытых множеств U, для которых $(U, \varphi) \in \mathbf{A}$;

(2) для любых (U, φ), $(V, \varphi) \in \mathbf{A}$ отображение $\psi\varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \to \psi(U \cap V)$ является отображением класса C^r (отсюда уже следует, что это отображение является диффеоморфизмом класса C^r, обратным к которому служит отображение $\varphi\psi^{-1}$).

Два атласа $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ класса C^r называются *эквивалентными*, если их объединение $\mathbf{A} \cup \mathbf{A}'$ снова является атласом класса C^r. Атлас класса C^r называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком большем атласе класса C^r. Легко проверяется, что отношение эквивалентности атласов действительно является отношением эквивалентности и что каждый атлас содержится в некотором единственном максимальном атласе. Два атласа тогда и только тогда эквивалентны, когда они содержатся в одном и том же максимальном атласе.

1.3. Определение. *Многообразием* M *класса* C^r называется пара, состоящая из некоторого хаусдорфова пространства M и некоторого максимального атласа $\mathbf{A}$ класса C^r на M. Атласы (класса C^r), содержащиеся в этом максимальном атласе, называются *атласами многообразия*, а их карты — *картами многообразия*. Ясно, что каждый атлас многообразия однозначно определяет это многообразие.

Число n называется *размерностью* многообразия M.

1.4. Пример. Каждое открытое подмножество N многообразия M класса C^r естественным образом само является многообразием класса C^r. Карты этого многообразия имеют вид $(U \cap N, \varphi | (U \cap N))$, где (U, φ) — произвольная карта многообразия M. Такое многообразие N называется *открытым подмногообразием* многообразия M.

Пространства H^n и $\mathbf{R}^n$ являются, очевидно, многообразиями. Их максимальные атласы состоят из единственной карты — тождественного отображения $H^n \to H^n$ в случае пространства H^n и отображения вида

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, \exp x_n)$$

в случае пространства $\mathbf{R}^n$.

1.5. Определение. *Морфизмом класса* C^r многообразий класса C^r называется такое отображение $f: M \to N$, что для каждой карты (U, φ) многообразия M и каждой карты (V, ψ) многообразия N составное отображение $\psi f \varphi^{-1}: \varphi^{-1}(U \cap f^{-1}(V)) \to \to \psi(V)$ является отображением класса C^r.

Композиция $gf: M \to V$ морфизмов $f: M \to N$ и $g: N \to V$ класса C^r также является морфизмом класса C^r. Это непосредственно следует из того, что отображение $f: A \to B$, где $A \subset \mathbf{R}^n$ и $B \subset \mathbf{R}^m$, тогда и только тогда является отображением класса C^r, когда оно является отображением класса C^r в некоторой окрестности каждой точки $a \in A$. Таким образом, *многообразия и морфизмы класса C^r образуют категорию.*

Пусть ∂H^n — подмножество пространства H^n, состоящее из точек $x \in H^n$, для которых $x_n = 0$. Это подмножество естественным образом отождествляется с пространством $\mathbf{R}^{n-1}$. Легко видеть, что если точка x многообразия M, принадлежащая множеству $U \cap V$, где (U, φ) и (V, ψ) — некоторые карты многообразия M, обладает тем свойством, что $\varphi(x) \in \partial H^n$, то она обладает и тем свойством, что $\psi(x) \in \partial H^n$. Это непосредственно следует из того, что для любой точки $a \in H^n$ и любого достаточно малого $r > 0$ множество $(B(a, r) \setminus \{a\}) \cap H^n$, где $B(a, r)$ — шар радиуса r с центром в точке a, стягиваемо, если $a \in \partial H^n$, и имеет гомотопический тип сферы S^{n-1}, если $a \in H^n \setminus \partial H^n$.

1.6. Определение. *Краем* ∂M многообразия M называется подпространство пространства M, состоящее из всех точек $x \in M$, обладающих тем свойством, что $\varphi(x) \in \partial H^n$ для некоторой карты (U, φ) с $x \in U$. Только что сделанное замечание показывает, что это определение корректно. Край ∂M естественным образом является многообразием с картами вида $(U \cap \partial M, \varphi | (U \cap \partial M))$, где (U, φ) — произвольная карта многообразия M.

Если многообразие M имеет размерность n, то его край ∂M (если он не пуст) имеет размерность $n-1$. В случае когда край ∂M пуст, многообразие M называется *многообразием без края.*

1.7. Соглашение. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что в определение многообразия дополнительно включено еще требование *паракомпактности* пространства M. Это требование равносильно тому, что каждая компонента связности пространства M либо удовлетворяет второй аксиоме счетности, либо является объединением счетного числа компактных множеств.

2. КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ НАД МНОГООБРАЗИЕМ

Исторически теория расслоенных пространств возникла в связи с изучением геометрии многообразий. С каждым n-мерным многообразием M естественно связано некоторое n-мерное векторное расслоение $\tau(M)$ над этим многообразием, называемое касательным расслоением. Большинство расслоений, возникающих в теории многообразий, так или иначе связано с касательными расслоениями. Как мы увидим дальше, касательное расслоение отражает достаточно много геометрических свойств самого многообразия.

Согласно теореме существования 5.3.2, для определения касательного расслоения достаточно задать соответствующую систему функций перехода относительно некоторого открытого покрытия данного многообразия.

2.1. Определение. Пусть M — произвольное n-мерное многообразие с максимальным атласом $\mathbf{A}$. *Касательным расслоением* $\tau(M)$ над многообразием M называется n-мерное векторное расслоение, задаваемое функциями перехода вида

$$D(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x)) \in GL(n, \mathbf{R}),$$

где $x \in U \cap V$, а (U, φ), $(V, \psi) \in \mathbf{A}$.

Чтобы убедиться в том, что отображения $D(\psi\varphi^{-1})(x)$ действительно составляют систему функций перехода, надо проверить, конечно, справедливость соотношения

$$D(\eta\varphi^{-1})(\varphi(x)) = D(\eta\psi^{-1})(\psi(x))\, D(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x)),$$

где $x \in U \cap V \cap W$ и (U, φ), (V, ψ), $(W, \eta) \in \mathbf{A}$. Но это соотношение немедленно вытекает из правила дифференцирования сложной функции.

Сечения расслоения $\tau(M)$ называются *векторными полями* на многообразии M.

Пространство E касательного расслоения $\tau(M)$ над многообразием M класса C^r является, как легко видеть, многообразием класса C^{r-1}. Карты пространства E имеют вид $(U \times \mathbf{R}^n, \varphi \times 1)$, где (U, φ) — карты многообразия M. Переход от карты $(U \times \mathbf{R}^n, \varphi \times 1)$ к карте $(V \times \mathbf{R}^n, \psi \times 1)$ осуществляется с помощью отображения $(x, a) \mapsto (\psi\varphi^{-1}(x),\ D(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x), a))$, являющегося, очевидно, отображением класса C^{r-1}. Проекция $E(\tau(M)) \to M$ является, следовательно, отображением класса C^{r-1}.

2.2. Пример. Касательным расслоением над открытым подмножеством $M \subset \mathbf{R}^n$ является тривиальное расслоение $M \times \mathbf{R}^n \mapsto M$ (см. также упр. 4).

2.3. Определение. Каждое отображение $f: M \to N$ класса C^r многообразия M в многообразие N индуцирует некоторый морфизм $(\tau(f), f): \tau(M) \to \tau(N)$ касательных векторных расслоений (имеющий в понятном смысле класс C^{r-1}). Этот морфизм определяется соотношениями

$$D(\psi f \varphi^{-1}) = h_V \tau(f)\, h_U^{-1},$$

где (U, φ) и (V, ψ) — произвольные карты многообразий M и N, для которых $U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, а $h_U: \tau(M) \mid U \to U \times \mathbf{R}^m$ н $h_V: \tau(N) \mid V \to V \times \mathbf{R}^n$ — соответствующие карты расслоений $\tau(M)$ и $\tau(N)$. Свойства функций перехода гарантируют, что отображение $\tau(f)$ определено корректно. Так как отображение $D(\psi\varphi^{-1})$ лииейно, то $\tau(f)$ линейно на слоях, так что пара $(\tau(f), f)$ является морфизмом векторных расслоений.

Ясно, что для любых двух отображений $f: M \to N$ и $g: N \to V$ класса C^r имеет место соотношение $\tau(gf) = \tau(g)\tau(f)$. Следовательно, τ является функтором из категории многообразий класса C^r в категорию векторных расслоений.

Из теоремы об обратной функции немедленно следует, что если отображение $f: M \to N$ класса C^r обладает тем свойством, что для некоторой точки $x \in M$ линейное отображение $\tau(f)_x: \tau(M)_x \to \tau(N)_{f(x)}$ является изоморфизмом, то существуют такие открытые подмногообразия $U \subset M$ и $V \subset N$, что $x \in U$ и отображение $f \mid U: U \to V$ является диффеоморфизмом класса C^r.

2.4. Определение. Подпространство X многообразия M называется *подмногообразием размерности* q, если для каждой точкн $x \in X$ существует такая карта (U, φ) многообразия M, что $X \cap U = \varphi^{-1}((0 \times \mathbf{R}^q) \cap H^n)$. Любое подмногообразие является многообразнем класса C^r с картами $(X \cap U, \varphi \mid (X \cap U))$.

2.5. Определение. Отображение $f: M \to N$ класса C^r называется *погружением*, если отображение $\tau(f)$ на каждом слое является мономорфизмом. Погружение $f: M \to N$ называется *вложением*, если оно является диффеоморфизмом многообразия M на подмногообразие $f(M)$ многообразия N.

Из теоремы об обратной функции следует, что на некоторой окрестности каждой точки $x \in M$ любое погружение является вложением. Каждое погружение f: $M \to N$ индуцирует, очевидно, мономорфизм $\tau(M) \to f^*(\tau(N))$ векторных расслоений над M.

2.6. Определение. Для произвольного погружения f: $M \to N$ факторрасслоение $\nu_f = f^*(\tau(N))/\operatorname{Im}\tau(M)$ называется его *нормальным расслоением*.

Согласно следствию 3.8.3, нормальное расслоение является векторным расслоением. Поскольку пространство M по условию паракомпактно (см. соглашение 1.7), точная последовательность

$$0 \to \tau(M) \to f^*(\tau(N)) \to \nu_f \to 0$$

расщепляется (теорема 3.9.6), и потому

$$f^*(\tau(N)) = \tau(M) \oplus \nu_f.$$

2.7. Замечание. В случае $N = \mathbf{R}^n$ расслоение $\tau(\mathbf{R}^n)$ тривиально, так что для любого погружения f: $M \to \mathbf{R}^n$ имеет место равенство

$$\tau(M) \oplus \nu_f = \theta^n,$$

где θ^n — тривиальное n-мерное векторное расслоение. Таким образом, элемент группы $\widetilde{K}_{\mathbf{R}}(M)$, определяемый нормальным расслоением ν_f, не зависит от погружения f: $M \to \mathbf{R}^n$ и представляет собой элемент, противоположный к элементу, определяемому касательным расслоением $\tau(M)$. Как показал Хирш (Хирш [1]), обратное утверждение также справедливо: каждое векторное расслоение, определяющее в группе $\widetilde{K}_{\mathbf{R}}(M)$ элемент, противоположный к элементу $\tau(M)$, может быть реализовано как нормальное расслоение для некоторого погружения f: $M \to \mathbf{R}^n$.

Можно показать, что для любого многообразия M с краем ∂M существует такое вложение h: $\partial M \times [0, 1] \to M$, что $h(x, 0) = x$. Отсюда непосредственно вытекает следующее

2.8. Предложение. *Для любого многообразия M с краем ∂M имеет место равенство*

$$\tau(M) \mid \partial M = \tau(\partial M) \oplus \theta^1.$$

Доказательство. Ясно, что локально это равенство справедливо. Существование вложения h: $\partial M \times [0, 1] \to M$ обеспечивает его справедливость и над всем краем ∂M.

3. ОРИЕНТАЦИИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе мы рассмотрим в общем виде понятие ориентации, частными случаями которой являются известные элементарные соотношения между положительным и отрицательным, между вращением по часовой стрелке и вращением против часовой стрелки, между правосторонними и левосторонними системами и т. п.

3.1. Определение. Пусть $f: U \to V$ — диффеоморфизм класса C^r, $r \geqslant 1$, между открытыми связными подмножествами пространства $\mathbf{R}^n$. Говорят, что диффеоморфизм f *сохраняет ориентацию*, что обозначается символом $O(f) = +1$, если $\det(Df(x)) > 0$ для всех точек $x \in U$, и что f *меняет ориентацию*, что обозначается символом $O(f) = -1$, если $\det(Df(x)) < 0$ для всех точек $x \in U$.

3.2. Пример. Тождественное отображение, сдвиг $x \mapsto x + a$ и растяжение $x \mapsto bx$, где $b > 0$, сохраняют ориентацию. Отражение относительно гиперплоскости меняет ориентацию. Для произвольного линейного отображения $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ число $O(f)$ совпадает со знаком определителя $\det f$ этого отображения.

3.3. Предложение. *Для любых диффеоморфизмов $f: U \to V$ и $g: V \to W$ связных открытых подмножеств пространства $\mathbf{R}^n$ имеет место равенство*

$$O(gf) = O(g)\,O(f).$$

Для любого диффеоморфизма $f: U \to V$ и любых связных открытых подмножеств $U' \subset U$ и $V' \subset V$, удовлетворяющих условию $f(U') = V'$, имеет место равенство

$$O(f) = O(f \mid U').$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что $\det[D(fg)(x)] = \det[(Dg)(f(x))] \times \det(Df(x))$. Второе утверждение очевидно.

Дадим теперь гомологическую интерпретацию чисел $O(f)$. С этой целью в группах целочисленных гомологий $\tilde{H}_n(S^n)$ и когомологий $\tilde{H}^n(S^n)$ выберем такие образующие $\alpha_n \in \tilde{H}_n(S^n)$ и $\beta_n \in \tilde{H}^n(S^n)$, что $\sigma(\alpha_n) = \alpha_{n+1}$ и $\sigma(\beta_n) = \beta_{n+1}$, где σ — изоморфизм надстройки, и $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle = 1$, где $\langle\ ,\ \rangle$ — естественное спаривание $\tilde{H}_n(X) \times \tilde{H}^n(X) \to \mathbf{Z}$.

Для любого открытого множества $U \subset \mathbf{R}^n$, любой точки $x \in U$ и любого шара $B(x, r)$ радиуса r с центром в точке x, замыкание $\bar{B}(x, r)$ которого содержится в U, имеют место естественные изоморфизмы

$$\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xleftarrow{(1)} H_n(B^n, S^{n-1}) \xrightarrow{(2)} H_n(B^n, B^n \setminus 0) \xrightarrow{(3)}$$
$$\to H_n(B(x, r), B(x, r) \setminus x) \xrightarrow{(4)} H_n(U, U \setminus x).$$

Изоморфизм (1) возникает из точной последовательности пары, изоморфизм (2) имеет место потому, что вложение $S^{n-1} \to B^n \setminus 0$ является гомотопической эквивалентностью, изоморфизм (3) индуцирован отображениями сдвига и растяжения, а изоморфизм (4) является изоморфизмом вырезания. Аналогичные изоморфизмы имеют место, конечно, и для групп когомологий. Образующую группы $H_n(U, U \setminus x)$, являющуюся образом образующей $\alpha_{n-1} \in \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$, мы будем обозначать символом α_x. Аналогично образующую группы $H^n(U, U \setminus x)$, являющуюся образом образующей $\beta_{n-1} \in \tilde{H}^{n-1}(S^{n-1})$, мы будем обозначать символом β_x.

3.4. Теорема. *Для любого диффеоморфизма f: $U \to V$ между открытыми и связными подмножествами пространства $\mathbf{R}^n$ в каждой точке $x \in U$ имеют место равенства*

$$f_*(\alpha_x) = O(f)\,\alpha_{f(x)}, \quad f^*(\beta_{f(x)}) = O(f)\,\beta_x.$$

Доказательство. Без ограничения общности мы, очевидно, можем предполагать, что $x = 0$ и $f(x) = 0$. Тогда для любой точки $x \in U$ будет иметь место равенство $f(x) = Lx + g(x)$, где L — некоторое линейное отображение, а g — такое отображение, что $g(0) = 0$ и $Dg(0) = 0$. Если f, L и g рассматривать как отображения $(U, U \setminus 0) \to (\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus 0)$, то формула $h_t(x) = Lx + (1-t)\,g(x)$ будет определять некоторую гомотопию, связывающую отображение f с отображением L. Поэтому теорему достаточно доказать лишь для случая, когда отображение f: $U \to V$ линейно. Более того, воспользовавшись в случае необходимости еще одной гомотопией, мы можем считать, что отображение f изометрично и, следовательно, имеет вид $f = r_1 \ldots r_g$, где r_i — отражения относительно некоторых гиперплоскостей пространства $\mathbf{R}^n$. Но ясно, что $(r_i)_*(\alpha_0) = -\alpha_0$ и $(r_i)^*(\beta_0) = -\beta_0$. С другой стороны, как мы знаем, $O(r_i) = -1$. Следовательно, $f_*(\alpha_0) = O(f)\,\alpha_0$ и $f^*(\beta_0) = O(f)\,\beta_0$.

Доказанная теорема позволяет распространить определенне числа $O(f)$ на любые гомеоморфизмы.

3.5. Определение. Пусть f: $U \to V$ — произвольный гомеоморфизм между открытыми (не обязательно связными) подмножествами U, $V \subset \mathbf{R}^n$. В любой точке $x \in U$ формула $f_*(\alpha_x) = O_x(f)\,\alpha_{f(x)}$ или равносильная формула $f^*(\beta_{f(x)}) = O_x(f)\,\beta_x$ определяет некоторое число $O_x(f) = \pm 1$. Как функция от x число $O_x(f)$ локально постоянно и потому не зависит от x, если множества U и V связны. В этом случае мы будем его обозначать символом $O(f)$. Согласно теореме 3.4, это определение числа $O(f)$ согласуется для диффеоморфизмов с определением 3.1. Отметим, что предложение 3.3 остается, очевидно, справедливым и для любых гомеоморфизмов.

4. ОРИЕНТАЦИИ МНОГООБРАЗИЙ

Все группы гомологий и когомологий предполагаются в этом разделе с коэффициентами либо в группе $\mathbf{Z}$, либо в группе $\mathbf{Z}_2$.

Для любой карты (U, φ) многообразия M и каждой точки $x \in U \subset M$ определены следующие изоморфизмы групп гомологий:

$$H_n(M, M \setminus x) \leftarrow H_n(U, U \setminus x) \rightarrow H_n(\varphi(U), \varphi(U) \setminus \varphi(x))$$

(первый из которых является изоморфизмом вырезания). Таким образом, для любой точки $x \in M$ группа $H_n(M, M \setminus x)$ и, аналогично, группа $H^n(M, M \setminus x)$ изоморфны группе коэффициентов. Вопрос об ориентации многообразия возникает в связи с тем, что группа $H_n(M, M \setminus x)$ с коэффициентами в группе $\mathbf{Z}$ имеет две различные образующие.

4.1. Определение. *Ориентацией* ω многообразия без края M^n называется функция, сопоставляющая каждой точке $x \in M^n$ некоторую образующую ω_x группы $H_n(M, M \setminus x)$ и обладающая свойством, что для некоторой окрестности $W \ni x$ существует элемент $\omega_W \in H_n(M, M \setminus W)$, образ которого в группе $H_n(M, M \setminus y)$ равен ω_y для каждой точки $y \in W$.

Это определение имеет смысл независимо от выбора группы коэффициентов ($\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}_2$).

4.2. Определение. Многообразие M называется *ориентируемым*, если оно обладает орнентацией, принимающей значения в группах гомологий с целочисленными коэффициентами.

4.3. Теорема. *Каждое многообразие M обладает единственной $\mathbf{Z}_2$-ориентацией. Для любого многообразия M следующие свойства равносильны:*

(1) *многообразие M ориентируемо;*

(2) *существует такой атлас $\mathbf{A}$ многообразия M, что для каждой пары карт (U, φ), $(V, \psi) \in \mathbf{A}$ на множестве $\varphi^{-1}(U \cap V)$ имеет место соотношение $\det D(\psi\varphi^{-1}) > 0$;*

(3) *касательное расслоение $\tau(M)$ допускает в качестве структурной группы группу $SO(n)$.*

Кроме того, если ориентируемое многообразие M связно, то оно обладает в точности двумя ориентациями.

Доказательство. В случае когда группой коэффициентов является группа $\mathbf{Z}_2$, мы для любой точки $x \in M$ примем за ω_x отличный от нуля элемент группы $H_n(M, M \setminus x) \approx \mathbf{Z}_2$. Поскольку для любой окрестности $W \ni x$, целиком лежащей в области определения U некоторой карты (U, φ) и переходящей при гомоморфизме φ в некоторый открытый шар пространства $\mathbf{R}_n$, имеет место равенство $H_n(M, M \setminus W; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2$, причем отличный от нуля элемент этой группы отображается в элемент ω_y для каждой точки $y \in W$, то тем самым первое утверждение теоремы полностью доказано.

Докажем теперь равносильность свойств (1) и (2). Пусть выполнено свойство (2). Тогда формула $\omega_x = (\varphi^{-1})_*(\alpha_n)$, где $(U, \varphi) \in A$ — произвольная карта, а $\alpha_n \in H_n(\varphi(U), \varphi(U) \setminus \varphi(x))$ — каноническая образующая, построенная в конце п. 3.3, определяет, очевидно, некоторую $\mathbf{Z}$-ориентацию многообразия M (корректность этого определения непосредственно вытекает из теоремы 3.4). Обратно, если выполнено свойство (1), то атлас A многообразия M, состоящий из таких карт (U, φ), что $\omega_x = (\varphi^{-1})_*(\alpha_n)$ для каждой точки $x \in U$, где, как и выше, $\alpha_n \in H_n(\varphi(U), \varphi(U) \setminus \varphi(x))$ — каноническая образующая, обладает, очевидно, тем свойством, что $\det D(\psi\varphi^{-1}) > 0$ на $\varphi^{-1}(U \cap V)$.

Для доказательства равносильности свойств (2) и (3) заметим, что при выполнении свойства (2) все функции перехода $D(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x))$, $x \in U \cap V$, расслоения $\tau(M)$ имеют положительный определитель и, следовательно, могут быть продеформированы в функции перехода, принимающие значения в группе $SO(n)$ (см. доказательство теоремы 3.4). Обратно, если расслоение $\tau(M)$ обладает системой функций перехода со значениями в группе $SO(n)$, то на M существует, очевидно, такой атлас, что все отображения $D(\psi\varphi^{-1})(\varphi(x))$ имеют положительный определитель.

Для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что максимальный атлас можно разбить на два атласа со свойством (2). Действительно, это, очевидно, можно сначала сделать вблизи одной точки, а затем вдоль каждого пути, соединяющего эту точку с любой другой точкой многообразия M. Тем самым теорема 4.3 полностью доказана.

В следующей теореме описывается важное гомологическое свойство ориентации ω, справедливое для обеих групп коэффициентов $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}_2$. Поэтому при доказательстве эти два случая мы различать не будем.

4.4. Теорема. *Пусть M — произвольное n-мерное многообразие, и пусть K — некоторое его компактное подмножество. Тогда*

$H_i(M, M\setminus K)=0$ при $i>n$, а элемент $a\in H_n(M, M\setminus K)$ тогда и только тогда равен нулю, когда для каждой точки $x\in K$ в группе $H_n(M, M\setminus x)$ имеет место равенство $r(a)=0$, где $r\colon H_n(M, M\setminus K)\to H_n(M, M\setminus x)$ — гомоморфизм, индуцированный вложением. Кроме того, для любой ориентации ω многообразия M существует такой элемент $\omega_K\in H_n(M, M\setminus K)$, что $r(\omega_K)=\omega_x$ для каждой точки $x\in K$. Элемент ω_K этим свойством определен однозначно [1]).

Доказательство. Будем искать компактные подмножества $K\subset M$, для которых теорема верна. Прежде всего покажем, что если теорема верна для K_1, K_2 и $L=K_1\cap K_2$, то она верна и для $K=K_1\cup K_2$. Действительно, рассмотрим аддиционную последовательность

$$\ldots\to H_{i+1}(M, M\setminus L)\xrightarrow{\partial} H_i(M, M\setminus K)\xrightarrow{u}$$
$$\to H_i(M, M\setminus K_1)\oplus H_i(M, M\setminus K_2)\xrightarrow{v}\ldots$$

(Стинрод и Эйленберг [1]). Напомним, что $u(a)=(r_1(a), r_2(a))$ и $v(a, b)=r_1'(a)-r_2'(b)$, где $r_j\colon H_i(M, M\setminus K)\to H_i(M, M\setminus K_j)$ и $r_j'\colon H_i(M, M\setminus K_j)\to H_i(M, M\setminus L)$, $j=1, 2$, — гомоморфизмы вложения. Из точности этой последовательности непосредственно вытекает, что $H_i(M, M\setminus K)=0$ при $i>n$. Кроме того, если для каждой точки $x\in K$ элемент $r(a)$ группы $H_n(M, M\setminus x)$ равен нулю, то $u(a)=0$, и потому $a=0$, ибо $H_{n+1}(M, M\setminus L)=0$. Наконец, существование элемента ω_K следует из того, что $v(\omega_{K_1}, \omega_{K_2})=0$, а единственность — из сказанного ранее.

Предположим теперь, что для компактного множества K существует такая карта (U, φ), что $K\subset U$, а множество $\varphi(K)\subset\mathbb{R}^n$ выпукло. В этом случае отображение $\varphi(U)\setminus\varphi(x)\to\varphi(U)\setminus\varphi(K)$ является гомотопической эквивалентностью и, следовательно, гомоморфизмы $H_i(M, M\setminus K)\to H_i(M, M\setminus x)$ являются изоморфизмами. Поэтому для таких компактных множеств K теорема верна. Отсюда следует, согласно результату первой части доказательства, что теорема верна и для компактных множеств K, для которых существует такая карта (U, φ), что $K\subset U$, а множество $\varphi(K)$ является объединением конечного числа выпуклых множеств.

Пусть теперь K — произвольное компактное множество, для которого существует такая карта (U, φ), что $K\subset U$. В любом классе гомологий $\varphi_*(a)\in H_i(\varphi(U), \varphi(U)\setminus\varphi(K))$ содержится, очевидно, относительный цикл c, обладающий тем свойством,

[1]) В частности, если многообразие M компактно, то определен класс гомологий $\omega_M\in H_n(M)$. Он называется *ориентирующим классом* гомологий многообразия M. — *Прим. ред.*

что все симплексы его границы ∂c не пересекаются с множеством $\varphi(K)$ и даже с некоторой компактной окрестностью L множества $\varphi(K)$. Следовательно, если множество $\varphi(K)$ мы покроем конечной системой шаров $B_1, \ldots, B_m$ так, чтобы $B_1 \cup \ldots \cup B_m \subset L$ и $B_i \cap \varphi(K) \neq \varnothing$, то в группе $H_i(\varphi(U), \varphi(U) \setminus L)$ будет существовать элемент b, переходящий при соответствующем гомоморфизме вложения в элемент $\varphi_*(a)$. Но, согласно сказанному выше, образ элемента b в группе $H_i(\varphi(U), \varphi(U) \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_m))$ при $i > n$ равен нулю, а при $i = n$ обладает тем свойством, что для каждой точки $x \in B_1 \cup \ldots \cup B_m$ его образ в группе $H_i(\varphi(U), \varphi(U) \setminus x)$ равен нулю. Поскольку $H_i(U, U \setminus K) = H_i(M, M \setminus K)$ при $i \geqslant n$, отсюда непосредственно следует, что $a = 0$. Аналогично показывается, что элемент $\omega_K = \varphi_*^{-1}\left(r'\left(\omega_{B_1 \cup \ldots \cup B_m}\right)\right)$, где r' — соответствующий гомоморфизм вложения, обладает тем свойством, что $r(\omega_K) = \omega_x$ для любой точки $x \in K$. Таким образом, теорема верна для всех достаточно малых компактных множеств K.

Для завершения доказательства осталось заметить, что любое компактное множество K можно представить в виде $K = K_1 \cup \ldots \cup K_m$, где K_i — компактные множества, обладающие тем свойством, что $K_i \subset U$ для некоторой карты (U, φ).

4.5. Замечание. Для многообразия M с краем ∂M имеют место очевидные аналоги теорем 4.3 и 4.4. Доказательства этих теорем мы оставляем читателю.

5. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть K и V — соответственно компактное и открытое подмножества n-мерного многообразия M, такие, что $K \subset V$. Обозначая произведение классов когомологий символом $\smile$, мы можем написать следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H^q(M) \otimes H^{n-q}(M, M \setminus K) & \xrightarrow{\smile} & H^n(M, M \setminus K) \\ \downarrow {\scriptstyle j^* \otimes 1} & & \downarrow {\scriptstyle j^*} \\ H^q(V) \otimes H^{n-q}(M, M \setminus K) & \xrightarrow{\smile} & H^n(V, V \setminus K) \end{array}$$

где j^* — изоморфизм вырезания, индуцированный вложением $j\colon (V, V \setminus K) \to (M, M \setminus K)$. Аналогично для так называемого $\frown$-умножения имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^q(M) \otimes H_n(M, M \setminus K) & \xrightarrow{\frown} & H_{n-q}(M, M \setminus K) \\ \downarrow {\scriptstyle j^* \otimes (j_*^{-1})} & & \downarrow {\scriptstyle 1} \\ H^q(V) \otimes H_n(V, V \setminus K) & \xrightarrow{\frown} & H_{n-q}(M, M \setminus K) \end{array}$$

Пусть $\langle\ ,\ \rangle\colon H^*(M, A)\otimes H_*(M, A)\to\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}_2$ — каноническое спаривание, индуцированное спариванием $C^*(M, A)\otimes C_*(M, A)\to\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}_2$.

5.1. Соотношение между $\smile$- и $\frown$-произведениями. *Для любых элементов $u\in H_n(V, V\setminus K)$, $c_1\in H^k(V)$ и $c_2\in H^{n-k}(V)$ имеет место равенство*

$$\langle c_1\smile c_2, u\rangle=\langle c_1, c_2\frown u\rangle.$$

5.2. Обозначения. Пусть ω — произвольная ориентация многообразия M. Тогда, согласно теореме 4.4, для каждого компактного множества $K\subset M$ определен некоторый класс гомологий $\omega_K\in H_n(M, M\setminus K)$. Пусть, как и выше, $V\subset M$ — открытое множество, содержащее множество K, и пусть $\omega_K^V=j_*^{-1}(\omega_K)$, где $j_*\colon H_n(V, V\setminus K)\to H_n(M, M\setminus K)$ — изоморфизм вырезания. Определим гомоморфизм

$$D_K^V\colon H^q(V)\to H_{n-q}(M, M\setminus K)$$

формулой $D_K^V(c)=c\frown\omega_K^V$.

Пусть $\bar H^q(K)$ — прямой предел групп $H^q(V)$ по всем открытым множествам, содержащим множество K, и пусть

$$D_K\colon \bar H^q(K)\to H_{n-q}(M, M\setminus K)$$

— прямой предел гомоморфизмов $D_K^V\colon H^q(V)\to H_{n-q}(M, M\setminus K)$.

5.3. Теорема (теорема двойственности). *Для любого компактного подмножества K многообразия M гомоморфизм $D_K\colon \bar H^q(K)\to H_{n-q}(M, M\setminus K)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что если теорема верна для компактных множеств K, L и $K\cap L$, то она верна и для компактного множества $K\cup L$. Пусть V и W — открытые подмножества многообразия M, содержащие множества K и L соответственно, и пусть $J=K\cap L\subset V\cap W$ и $I=K\cup L\subset V\cup W$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots\longrightarrow & H^{q-1}(V)\oplus H^{q-1}(W) & \longrightarrow & H^{q-1}(V\cap W) & \to \\
 & \Big\downarrow{\scriptstyle D_K^V\oplus D_L^W} & & \Big\downarrow{\scriptstyle D_J^{V\cap W}} & \\
\ldots\to & H_{p+1}(M, M\setminus K)\oplus H_{p+1}(M, M\setminus L) & \to & H_{p+1}(M, M\setminus J) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\to H^q(V\cup W) & \longrightarrow & H^q(V)\oplus H^q(W) & \longrightarrow & \ldots \\
\Big\downarrow{\scriptstyle D_I^{V\cup W}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle D_K^V\oplus D_L^W} & & \\
\to H_p(M, M\setminus I) & \to & H_p(M, M\setminus K)\oplus H_p(M, M\setminus L) & \to & \ldots
\end{array}$$

строкн которой являются адднционнымн последовательностями (и $p=n-q$). Эта днаграмма коммутативна, н ее нрямой предел

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \overline{H}^{q-1}(K)\oplus\overline{H}^{q-1}(L) \arrow[r] \arrow[d, "D_K\oplus D_L"] & \overline{H}^{q-1}(K\cap L) \arrow[r] \arrow[d, "D_{K\cap L}"] & {} \\
\ldots \arrow[r] & H_{p+1}(M, M\setminus K)\oplus H_{p+1}(M, M\setminus L) \arrow[r] & H_{p+1}(M, M\setminus J) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \overline{H}^q(K\cup L) \arrow[r] \arrow[d, "D_{K\cup L}"] & \overline{H}^q(K)\oplus\overline{H}^q(L) \arrow[r] \arrow[d, "D_K\oplus D_L"] & \ldots \\
{} \arrow[r] & H_p(M, M\setminus I) \arrow[r] & H_p(M, M\setminus K)\oplus H_p(M, M\setminus L) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

также является коммутатнвной диаграммой с точнымн строкамн. Следовательно, так как гомоморфизмы $D_{K\cap L}$ н $D_K\oplus D_L$ являются по предположению нзоморфнзмамн, то по лемме о пятн гомоморфнзмах гомоморфнзм $D_{K\cup L}$ также является нзоморфизмом.

С другой стороны, легко видеть, что теорема верна для любого компактного множества K, для которого существует такая карта (U, φ), что $K\subset U$ н множество $\varphi(K)$ является шаром нли даже пронзвольным выпуклым множеством пространства $\mathbf{R}^n$. Достаточно заметнть, что, как без труда вытекает из соотношения 5.1, для любого шара K пространства $\mathbf{R}^n$ н любого открытого шара V, содержащего шар K, гомоморфизм D_K^V является нзоморфнзмом.

Отсюда уже легко следует, что теорема верна для любых снмплициальных разбиенний K, вложенных в многообразие M, ибо каждый снмплекс этого разбиения можно считать содержащнмся в области определення U некоторой карты (U, φ).

Наконец, произвольное компактное подмножество K, для которого существует такая карта (U, φ), что $K\subset U$, можно представить в внде пересечення некоторых снмплицнальных разбненний K_i. Поэтому группы $\overline{H}^*(K)$ и $H_*(M, M\setminus K)$ будут пределами групп $\overline{H}^*(K_i)$ н $H_*(M, M\setminus K_i)$ соответственно, а гомоморфнзм D_K — пределом гомоморфнзмов D_{K_i}. Следовательно, н в этом случае гомоморфнзм D_K является нзоморфнзмом.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что любое компактное множество $K\subset M$ можно представить как объедннение компактных множеств K_i, $1\leqslant i\leqslant n$, для каждого из которых существует такая карта (U, φ), что $K_i\subset U$.

Непосредственным следствнем доказанной теоремы является классическая теорема двойственностн Пуанкаре:

5.4. Следствие. *Для любого компактного многообразия M гомоморфизм D_M: $H^q(M) \to H_{n-q}(M)$, определенный формулой $D_M(c) = c \frown \omega_M$, является изоморфизмом.*

Здесь ω_M — элемент группы $H_n(M)$, определенный данной ориентацией ω многообразия M (ориентирующий класс гомологий многообразия M). Подчеркнем, что эта теорема справедлива как для группы коэффициентов $\mathbf{Z}_2$ (в этом случае многообразие M может быть любым), так и для группы коэффициентов $\mathbf{Z}$ (в этом случае многообразие M должно быть ориентированным).

Теорема двойственности Александера также является следствием теоремы 5.3:

5.5. Следствие. *Для любого компактного подмножества K пространства $\mathbf{R}^n$ и любого $q < n$ имеет место изоморфизм*

$$\bar{H}^q(K) \to H_{n-q-1}(\mathbf{R}^n \setminus K),$$

являющийся композицией изоморфизма D_K с граничным гомоморфизмом $H_{n-q}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus K) \to H_{n-q-1}(\mathbf{R}^n \setminus K)$, являющимся при любом $n > q$ изоморфизмом.

5.6. Замечание. Читателю рекомендуется самостоятельно сравнить группы когомологий $\bar{H}^q(K)$ с группами сингулярных когомологий $H^q(K)$ и с группами спектральных когомологий $\check{H}^q(K)$ и показать, что группы когомологий $\bar{H}^q(K)$ и $\check{H}^q(K)$ всегда изоморфны, а группы когомологий $\bar{H}^q(K)$ и $H^q(K)$ изоморфны, если компактное множество K обладает фундаментальной системой открытых окрестностей, деформационным ретрактом каждой из которых оно является.

6. КЛАСС ТОМА КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ

Пусть M^n — замкнутое (т. е. компактное и без края) связное многообразие и τ — его касательное расслоение.

6.1. Обозначения. Задав на касательном расслоении τ риманову метрику, мы для каждой точки $x \in M$ можем определить гладкое отображение $\exp_x$: $E(\tau)_x \to M$, переводящее произвольный вектор $v \in E(\tau)_x$ в точку $t = 1$ геодезической (как известно, единственной), проходящей при $t = 0$ через точку x и имеющей в этой точке касательный вектор v. Видоизменив в случае необходимости метрику на расслоении τ умножением на некоторую положительную константу, мы можем при этом без ограничения общности предполагать, что гомотопия

$$h_t: (D(\tau), S(\tau), M) \to (M \times M, M \times M \setminus \Delta, \Delta),$$

определенная формулой $h_t(x, v) = (\exp_x(-tv), \exp_x(v))$, является для каждого $t \in [0, 1]$ диффеоморфизмом многообразия $D(\tau)$ на некоторую замкнутую окрестность диагонали Δ произведения $M \times M$.

6.2. Обозначения. Условимся рассматривать группы когомологий с коэффициентами в некотором кольце R, имеющем характеристику 2, в случае когда многообразие M не ориентируемо. Пусть $U_\tau \in H^n(D(\tau), S(\tau))$, или просто U, — класс Тома[1]) расслоения τ. Из сказанного выше непосредственно вытекает, что гомоморфизм h_t^*: $H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \to H^*(D(\tau), S(\tau))$ не зависит от t и является изоморфизмом. Мы положим $U' = (h_t^*)^{-1}(U)$. Пусть

$$j^*: H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \to H^*(M \times M)$$

— гомоморфизм, индуцированный вложением

$$j: M \times M \to (M \times M, M \times M \setminus \Delta).$$

Класс $j^*(U') \in H^n(M \times M)$ мы будем обозначать через U_M и будем называть *фундаментальным классом* многообразия M.

6.3. Предложение. *Для произвольных (однородных) элементов $a, b \in H^*(M)$ справедливо равенство*

$$U_M(a \times b) = (-1)^{d(a)\,d(b)}\, U_M(b \times a),$$

где $d(a)$ и $d(b)$ — размерности классов когомологий a и b.

Доказательство. Рассмотрим отображения α: $M \times M \to M \times M$ и β: $D(\tau) \to D(\tau)$, задаваемые формулами $\alpha(x, y) = (y, x)$ и $\beta(x, v) = (x, -v)$ соответственно.

Из свойства единственности фундаментального класса (см. утверждение (1) теоремы 16.7.3) непосредственно вытекает, что $\beta^*(U) = (-1)^n U$. Следовательно, поскольку гомоморфизм φ: $H^i(M) \to H^{n+i}(D(\tau), S(\tau))$, определяемый формулой $\varphi(a) = aU$, является изоморфизмом, гомоморфизм β^*: $H^*(D(\tau), S(\tau)) \to H^*(D(\tau), S(\tau))$ представляет собой умножение на $(-1)^n$. С другой стороны, легко видеть, что $h_1\beta = \alpha h_1$ и потому $\beta^* h_1^* = h_1^*\alpha^*$. Следовательно, гомоморфизм

$$\alpha^*: H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \to H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$$

также является умножением на $(-1)^n$. Учитывая, что по опре-

---

[1]) См. прим. ред. на стр. 366. — *Прим. ред.*

делению для любых элементов a, $b \in H^*(M)$ имеет место равенство $\alpha^*(a \times b) = (-1)^{d(a)\,d(b)}(b \times a)$, мы получаем отсюда, что [1])

$$\begin{aligned} U_M(a \times b) &= j^*((-1)^n \alpha^*(U'(a \times b))) = \\ &= (-1)^{d(a)\,d(b)} j^*(U'(b \times a)) = \\ &= j^*(U'(\alpha^*(a \times b))) = (-1)^{d(a)\,d(b)} U_M(b \times a). \end{aligned}$$

Естественное спаривание $H^k(M) \otimes H_k(M) \to R$ мы будем обозначать символом $\langle a, b\rangle$. Тогда $\langle \bar{\omega}_M, \omega_M\rangle = 1$, где $\omega_M \in H_n(M)$ и $\bar{\omega}_M \in H^n(M)$ — ориентирующие классы гомологий и когомологий многообразия M, соответствующие данной его ориентации ω.

6.4. Предложение. *Между фундаментным классом U_M и ориентирующим классом ω_M имеет место соотношение*

$$\langle U_M, 1 \times \omega_M\rangle = 1.$$

Доказательство. Пусть f_x: $M \to M \times M$ — отображение, определенное формулой $f_x(y) = (x, y)$. Тогда имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(D(\tau), S(\tau)) & \xleftarrow[\approx]{h_t^*} & H^*(M \times M,\ M \times M \setminus \Delta) & \xrightarrow{j^*} & H^*(M \times M) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle j_x^*} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle f_x^*} \\ H^*(D(\tau)_x, S(\tau)_x) & \xleftarrow[\approx]{\exp_x^*} & H^*(M, M \setminus x) & \xrightarrow{j^*} & H^*(M) \end{array}$$

С другой стороны, так как в группе $H^*(D(\tau)_x, S(\tau)_x)$ имеет место равенство $\exp_x^*(\bar{\omega}_x) = j_x^*(U)$, то $\langle(\exp_x^*)^{-1} j_x^*(U), \omega_x\rangle = 1$ и, следовательно,

$$\langle j^*(\exp_x^*)^{-1} j_x^*(U), \omega_M\rangle = 1.$$

Поэтому $\langle f_x^*(U_M), \omega_M\rangle = 1$ и, значит, $\langle U_M, 1 \times \omega_M\rangle = 1$, ибо $(f_x)_*(\omega_M) = 1 \times \omega_M$.

Напомним, что изоморфизм двойственности

$$D\colon H^k(M) \to H_{n-k}(M)$$

задается формулой $D a = a \frown \omega_M$.

6.5. Предложение. *Для любых элементов $a \in H^k(M)$ и $b \in H_k(M)$ имеет место равенство*

$$\langle a, b\rangle = (-1)^{n + d(a)\,d(b)} \langle U_M, b \times Da\rangle.$$

[1]) В этом вычислении произведение $a \times b$ рассматривается сначала в группе $H^*(M \times M)$, а затем в группе $H^*(M \times M,\ M \times M \setminus \Delta)$ и, наконец, снова в группе $H^*(M \times M)$. — *Прим. ред.*

Доказательство. Согласно предложению 6.3,

$$U_M(a \times 1) = (-1)^n U_M(1 \times a).$$

С другой стороны,

$$\langle U_M(a\times 1),\ b\times\omega_M\rangle = \langle U_M,\ (a\times 1)\frown(b\times\omega_M)\rangle = \langle U_M,\ (a\frown b)\times\omega_M\rangle = \\ = \langle a,\ b\rangle\langle U_M,\ 1\times\omega_M\rangle = \langle a,\ b\rangle$$

(здесь мы воспользовались соотношением 5.1 и тем фактом, что $a\frown b = \langle a,\ b\rangle 1$). Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle a,\ b\rangle &= (-1)^n\langle U_M(1\times a),\ b\times\omega_M\rangle = \\ &= (-1)^n\langle U_M,\ (1\times a)\frown(b\times\omega_M)\rangle = \\ &= (-1)^{n+d(a)d(b)}\langle U_{M'},\ b\times(a\frown\omega_M)\rangle = \\ &= (-1)^{n+d(a)d(b)}\langle U_M,\ b\times Da\rangle.\end{aligned}$$

Заметим, что в этом доказательстве мы пользовались лишь свойствами класса U_M, доказанными в предложениях 6.3 и 6.4.

6.6. Замечание. Предложение 6.5 можно использовать для доказательства того, что гомоморфизм двойственности

$$D\colon H^k(M)\to H_{n-k}(M)$$

является изоморфизмом (по крайней мере в случае, когда кольцо коэффициентов является полем). Действительно, для любого отличного от нуля элемента $a\in H^k(M)$ существует такой элемент $b\in H_k(M)$, что $\langle a, b\rangle\neq 0$. Следовательно, $\langle U_M, b\times Da\rangle\neq 0$, и потому $Da\neq 0$. Таким образом, отображение D мономорфно. В частности, это означает, что $\dim H^k(M)\leqslant\dim H_{n-k}(M)$ и аналогично $\dim H^{n-k}(M)\leqslant\dim H_k(M)$, но, как известно, $\dim H^k(M) = \dim H_k(M)$ и $\dim H^{n-k}(M) = \dim H_{n-k}(M)$. Следовательно, $\dim H^k(M) = \dim H_{n-k}(M)$, и потому отображение D является изоморфизмом.

7. ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЙЛЕРА И ЭЙЛЕРОВ КЛАСС МНОГООБРАЗИЯ

Пусть по-прежнему M — замкнутое связное многообразие. Будем считать кольцом коэффициентов поле $\mathbf{Q}$ рациональных чисел.

7.1. Определение. *Характеристикой Эйлера* $\chi(X)$ пространства X называется сумма $\sum\limits_{i\geqslant 0}(-1)^i\dim H^i(X, \mathbf{Q})$. Это определение имеет смысл, если $H^i(X, \mathbf{Q}) = 0$ при больших i и

$\dim H^i(X, \mathbf{Q}) < \infty$ для всех i. В частности, оно имеет смысл для многообразия M.

7.2. Теорема. *Для любого n-мерного замкнутого связного ориентированного многообразия M эйлеров класс касательного расслоения $\tau(M)$ выражается формулой*

$$e(\tau(M)) = \chi(M)\,\bar{\omega}_M,$$

где $\chi(M)$ — характеристика Эйлера многообразия M, а $\bar{\omega}_M$ — его ориентирующий класс когомологий.

Доказательство. Пусть n нечетно. Тогда $2e(\tau(M)) = 0$, согласно следствию 16.7.7, и потому $e(\tau(M)) = 0$, ибо $H^n(M, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. С другой стороны, так как $\dim H^i(M, \mathbf{Q}) = \dim H^{n-i}(M, \mathbf{Q})$ (замечание 6.6), то $\chi(M) = 0$. Таким образом, в этом случае соотношение $e(\tau(M)) = \chi(M)\,\bar{\omega}_M$ тривиальным образом верно.

Пусть теперь n четно. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^*(D(\tau), S(\tau)) \arrow[d, "j^*"] & H^*(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \arrow[l, "h_t^*"'] \arrow[r, "j^*"] & H^*(M \times M) \arrow[d, "\Delta^*"] \\
H^*(D(\tau)) \arrow[rr, "s^*"] & & H^*(M)
\end{tikzcd}$$

где $s\colon M \to D(\tau)$ — нулевое сечение. Из этой диаграммы следует, что $e(\tau(M)) = \Delta^*(U_M)$. Поэтому нам нужно только показать, что

$$\langle \Delta^*(U_M), \omega_M \rangle = \chi(M).$$

Для этого выберем элементы $e_i \in H^{r(i)}(M)$ так, что для любого k элементы e_i с $r(i) = k$ составляли базис пространства $H^k(M) = H^k(M; \mathbf{Q})$, и рассмотрим элементы $e_i^* \in H_{r(i)}(M)$, обладающие тем свойством, что $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{i,j}$. Пусть $U_M = \sum a_{i,j}(e_i \times e_j)$. Тогда $e(\tau) = \Delta^* U_M = \sum a_{i,j} e_i e_j$, и потому (предложение 6.5)

$$\begin{aligned}
(-1)^{d(e_k)} &= (-1)^{d(e_k)} \langle e_k, e_k^* \rangle = \\
&= \sum a_{i,j} \langle e_i \times e_j, e_k^* \times De_k \rangle = \\
&= \sum a_{i,j} \langle e_i, e_k^* \rangle \langle e_j, e_k \frown \omega_M \rangle = \\
&= \sum_j a_{k,j} \langle e_j e_k, \omega_M \rangle.
\end{aligned}$$

Суммируя по k, мы получаем отсюда, что

$$\chi(M) = \sum (-1)^{d(e_k)} = \sum_{k,j} a_{k,j} \langle e_j e_k, \omega_M \rangle = \langle \Delta^* \alpha^*(U), \omega_M \rangle,$$

где α, как и выше, — отображение $(x, y) \mapsto (y, x)$. Но $\alpha\Delta = \Delta$, поэтому $\Delta^*\alpha^*(U) = \Delta^*(U)$. Следовательно, $\chi(M) = \langle \Delta^*(U_M), \omega_M \rangle$.

7.3. Следствие. *Если ориентируемое многообразие обладает нигде не обращающимся в нуль касательным векторным полем, то* $\chi(M) = 0$.

Доказательство. Согласно теореме 16.8.3, если многообразие M обладает нигде не обращающимся в нуль касательным векторным полем, то $e(\tau(M)) = 0$. Следовательно, $\chi(M) = 0$.

7.4. Замечание. Поскольку $\chi(S^{2n}) = 2$ и $\chi(S^{2n+1}) = 0$, тем самым заново доказано, что на четномерной сфере не существует нигде не обращающихся в нуль векторных полей (см. теорему 11.1.4).

8. ФОРМУЛА ВУ ДЛЯ КЛАССОВ ШТИФЕЛЯ — УИТНИ МНОГООБРАЗИЯ

В этом разделе мы примем за кольцо коэффициентов для групп гомологий и когомологий поле $\mathbf{Z}_2$. Таким образом, все результаты будут справедливы для любых (в том числе и неориентируемых) замкнутых связных многообразий.

8.1. Определение. *Классом Штифеля — Уитни* $w(M)$ *многообразия* M называется класс Штифеля — Уитни $w(\tau(M))$ его касательного расслоения $\tau(M)$.

Пусть $Sq = \sum_{i \geq 0} Sq^i$ — известная операция Стинрода и $Sq^T\colon H_*(X) \to H_*(X)$ — сопряженная операция на группах гомологий, т. е. операция, определяющаяся соотношением $\langle Sq\, a, b \rangle = \langle a, Sq^T b \rangle$. Тогда для любого замкнутого многообразия M определен класс когомологий $v = D^{-1} Sq^T \omega_M$, где, как и выше, $D\colon H^k(M) \to H_{n-k}(M)$ — изоморфизм двойственности. Этот класс мы будем называть *классом Ву* многообразия M.

8.2. Теорема (Ву). *Класс Ву замкнутого многообразия* M *обладает следующими свойствами:*

(1) $\langle av, \omega_M \rangle = \langle Sq\, a, \omega_M \rangle$ *для каждого элемента* $a \in H^*(M)$;
(2) $w(M) = Sq\, v$.

Доказательство. По определению $Dv = Sq^T \omega_M$. Следовательно,

$$\langle a, Sq^T \omega_M \rangle = \langle a, Dv \rangle,$$

и потому

$$\langle Sq\, a, \omega_M \rangle = \langle a, v \frown \omega_M \rangle = \langle a \smile v, \omega_M \rangle.$$

Далее, согласно теореме 16.9.1, $Sq\,U = \varphi(w(M)) = (\pi^* w(M))\,U$, где π — проекция $D(\tau) \to M$, и потому (см. п. 6.2) $Sq\,U' = (h_t^*)^{-1}((\pi^* w(M))\,U) = ((h_t^*)^{-1}\pi^* w(M))((h_t^*)^{-1}U)$, т. е. $Sq\,U_M = U_M(w(M) \times 1)$. Отсюда, используя соотношения, полученные при доказательстве предложения 6.5, и формулу $Sq^T(b_1 \times b_2) = Sq^T b_1 \times Sq^T b_2$ (сопряженную к известной формуле Картана), мы получаем для любого элемента $b \in H_*(M)$, что

$$\begin{aligned}\langle w(M), b\rangle &= \langle U_M(w(M) \times 1), b \times \omega_M\rangle = \\ &= \langle Sq\,U_M, b \times \omega_M\rangle = \langle U_M, Sq^T(b \times \omega_M)\rangle = \\ &= \langle U_M, Sq^T b \times Sq^T \omega_M\rangle = \langle U_M, Sq^T b \times Dv\rangle = \\ &= \langle v, Sq^T b\rangle = \langle Sq\,v, b\rangle.\end{aligned}$$

Поскольку равенство $\langle w(M), b\rangle = \langle Sq\,v, b\rangle$ справедливо при всех $b \in H_*(M)$, то $w(M) = Sq\,v$.

8.3. Следствие. *Классы Штифеля — Уитни замкнутого многообразия являются его гомотопическими инвариантами.*

8.4. Следствие. *Класс By* $v = \sum v_i$, $v_i \in H^i(M)$, *многообразия M обладает тем свойством, что $v_i = 0$ при $2i > \dim M$.*

Доказательство. Напомним, что $Sq^i a = 0$, если $a \in H^k(M)$ и $i > k$. Остается воспользоваться соотношением

$$\langle av, \omega_M\rangle = \langle Sq\,a, \omega_M\rangle.$$

9. ЧИСЛА ШТИФЕЛЯ — УИТНИ И КОБОРДИЗМ

Пусть $w(M) = \sum w_i$ — класс Штифеля — Уитни замкнутого многообразия M. Отметим, что для любых $r_1, \ldots, r_n$ размерность одночлена $w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}$ равна $r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n$.

9.1. Определение. *Числом Штифеля — Уитни* n-мерного замкнутого многообразия M, соответствующим одночлену $\mu = w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}$ размерности n, называется вычет $\langle \mu, \omega\rangle \in \mathbf{Z}_2$, где ω — ориентирующий класс гомологий многообразия M. Таким образом, каждой последовательности чисел $r_1, \ldots, r_n$, где $r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = n$, соответствует свое число Штифеля — Уитни.

Вычисление чисел Штифеля — Уитни основывается на следующей теореме Понтрягина:

9.2. Теорема. *Если замкнутое многообразие M является краем некоторого компактного многообразия W, то все его числа Штифеля — Уитни равны нулю.*

Доказательство. Пусть $\omega \in H_{n+1}(W, M)$ — ориентирующий класс[1]) многообразия W. Тогда класс $\partial\omega \in H_n(M)$ является, очевидно, ориентирующим классом многообразия M. При этом для каждого одночлена $\mu = w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}$ справедливо соотношение $\langle \mu, \partial\omega \rangle = \langle \delta\mu, \omega \rangle$. Действительно, это, как легко видеть, верно даже на уровне цепей и коцепей.

Так как, согласно предложению 2.8, $\tau(W)|M = \tau(M) \oplus \theta^1$, то $i^*(w_j(\tau(W))) = w_j(\tau(M)) = w_j(M)$, где $i^*: H^n(W) \to H^n(M)$ — гомоморфизм, индуцированный вложением $M \to W$. Следовательно, ввиду точности когомологической последовательности

$$\ldots \to H^n(M) \xrightarrow{i^*} H^n(M) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(W, M) \to \ldots$$

для любого одночлена $\mu = w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}$ имеет место равенство $\delta\left(w_1^{r_1} \ldots w_n^{r_n}\right) = 0$. Поэтому $\langle \mu, \partial\omega \rangle = \langle \delta\mu, \omega \rangle = 0$.

В связи с этой теоремой естественно возникает вопрос об условиях, при которых данное замкнутое многообразие M является краем некоторого другого многообразия. Простое достаточное условие указывается следующим предложением:

9.3. Предложение. *Если на замкнутом многообразии M существует инволюция, не имеющая неподвижных точек, т. е. такой диффеоморфизм $T: M \to M$, что $T^2 = 1$ и $T(x) \neq x$ для любой точки $x \in M$, то существует такое многообразие W, что $\partial W = M$.*

Доказательство. Отождествим в произведении $M \times [-1, 1]$ точки (x, t) с точками $(T(x), -t)$. Получающееся пространство W является многообразием с краем $\partial W = M$.

9.4. Следствие. *Все числа Штифеля — Уитни сферы S^n равны нулю.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $S^n = \partial B^{n+1}$. Можно воспользоваться и тем, что сфера S^n обладает инволюцией $x \mapsto -x$ без неподвижных точек.

9.5. Следствие. *Все числа Штифеля — Уитни нечетномерного действительного проективного пространства RP^{2n+1} равны нулю. Более того, существует такое многообразие W, что $RP^{2n+1} = \partial W$.*

Доказательство. Для каждой точки $z = (z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1}$ положим $R(z) = iz$, где $i^2 = -1$. Тогда $R^2(z) = -z$ и, значит, R индуцирует некоторую инволюцию $T: RP^{2n+1} \to RP^{2n+1}$. Поскольку $R(-z) = -R(z)$, то $T(x) \neq x$ для любого $x \in RP^{2n+1}$.

---

[1]) Здесь автор пользуется обобщением, указанным в замечании 4.5. — *Прим. ред.*

9.6. Определение. Два n-мерных многообразия M и N называются *кобордантными* (или *внутренне гомологичными*), если существует такое $n+1$-мерное многообразие W, что $M \cup N = \partial W$.

Отношение кобордантности является, как легко видеть, отношением эквивалентности. Из теоремы 9.2 вытекает

9.7. Теорема. *Кобордантные многообразия имеют одинаковые числа Штифеля — Уитни.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $\omega_{M \cup N} = \omega_M + \omega_N$ и потому числа Штифеля — Уитни многообразия $M \cup N$ являются суммами соответствующих чисел Штифеля — Уитни многообразий M и N.

9.8. Замечание. Том доказал, что теоремы, обратные к теоремам 9.2 и 9.7, также справедливы. Таким образом, класс кобордантных многообразий однозначно определяется его числами Штифеля — Уитни.

10. ПОГРУЖЕНИЯ И ВЛОЖЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ

10.1. Определение. *Дуальным классом Штифеля — Уитни* действительного векторного расслоения ξ называется такой элемент $\bar{w}(\xi)$ группы $H^*(B(\xi), \mathbf{Z}_2)$, что $w(\xi)\bar{w}(\xi) = 1$. Очевидно, что этим условием класс когомологий $\bar{w}(\xi)$ однозначно определен. Дуальный класс Штифеля — Уитни $\bar{w}(\tau(M))$ касательного расслоения $\tau(M)$ называется *дуальным классом Штифеля — Уитни многообразия* M и обозначается символом $\bar{w}(M)$.

Значение дуальных классов Штифеля — Уитни определяется тем фактом, что для нормального расслоения ν, определенного произвольным погружением $M \to \mathbf{R}^p$, имеет место равенство[1] $w(\nu) = \bar{w}(M)$.

10.2. Теорема. *Если n-мерное многообразие M может быть погружено в пространство $\mathbf{R}^{n+k}$, то $\bar{w}_i(M) = 0$ при $i > k$. Если многообразие M может быть вложено в пространство $\mathbf{R}^{n+k}$, то $\bar{w}_i(M) = 0$ при $i \geqslant k$, причем если M вкладывается в $\mathbf{R}^{n+k}$ с ориентируемым нормальным расслоением ν, то, кроме того, $e(\nu) = 0$.*

---

[1]) Действительно, мы знаем (замечание 2.7), что $\tau(M) \oplus \nu = \theta^p$. Следовательно, $w(M)\,w(\nu) = w(\theta^p) = 1$. — *Прим. ред.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что нормальное расслоение ν, соответствующее погружению $M \to \mathbf{R}^{n+k}$, имеет размерность k. Следовательно, $\bar{w}_i(M) = w_i(\nu) = 0$ при $i > k$.

Для доказательства второго утверждения напомним, что по определению $e(\nu) = s^* i^* (U_\nu)$, где s: $B \to E(\nu)$ — нулевое сечение, а i: $E(\nu) \to (E(\nu), E_0(\nu))$ — вложение. Но $w_k(\nu) = e(\nu) \bmod 2$, так что $w_k(\nu) = s^* i^* (U_\nu) \bmod 2$. С другой стороны, задав на расслоении ν некоторую риманову метрику и продолжив вложение f: $M \to \mathbf{R}^{n+k}$ до вложения f: $E(\nu) \to \mathbf{R}^{n+k}$, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{R}^{n+k} \arrow[rr] & & (\mathbf{R}^{n+k}, \mathbf{R}^{n+k} \setminus f(M)) \\
 & & & (N, N \setminus f(M)) \arrow[u, "g_2"'] \\
M \arrow[uur, "f"] \arrow[rr, "s"] & & E(\nu) \arrow[uul, "f"'] \arrow[r, "i"] & (E(\nu), E_0(\nu)) \arrow[u, "g_1"']
\end{tikzcd}$$

где g_1 — некоторый диффеоморфизм, а g_2 — вложение. Следовательно, $e(\nu) = s^* i^* (U_\nu) = f^* i^* g^{*-1} (U_\nu)$, где $g = g_2 g_1$. Но поскольку $H^k(\mathbf{R}^{n+h}) = 0$, то $f^* = 0$, и потому $e(\nu) = 0$. В частности, $w_k(\nu) = 0$.

Пусть x — образующая кольца $H^*(RP^n; \mathbf{Z}_2)$. Тогда, как мы знаем (предложение 16.4.5), $w(RP^n) = (1+x)^{n+1}$, и потому

$$w_i(RP^n) = \begin{cases} \binom{n+1}{i}_2 x^i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant n, \\ 0, & \text{если } i > n, \end{cases}$$

где $\binom{n+1}{i}_2$ — вычет по модулю 2 биномиального коэффициента $\binom{n+1}{i}$. В частности, $w(RP^n) = 1$ и, следовательно, $\bar{w}(RP^n) = 1$ тогда и только тогда, когда $n+1 = 2^r$ для некоторого целого числа r. Если $\bar{w}(RP^n) = 1 + x$, то $(1+x) w(RP^n) = (1+x)^{n+2} = 1 \bmod 2$. Следовательно, $\bar{w}(RP^n) = 1 + x$ тогда и только тогда, когда $n + 2 = 2^r$ для некоторого целого числа r. Кроме того, в этом случае $w(RP^n) = 1 + x + \ldots + x_n$. Наконец, если $n = 2^r$, то $w(RP^n) = (1+x)^{2^r}(1+x) = 1 + x + x^n$ и $\bar{w}(RP^n) = (1 + x + x^n)^{-1} = (1 + x^n)(1 + x + \ldots + x^n) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}$. Следовательно, в этом случае $\bar{w}_i(RP^n) \neq 0$ при $0 \leqslant i \leqslant n-1$ и $\bar{w}_i(RP^n) = 0$ при $i \geqslant n$.

Тем самым доказана следующая

10.3. Теорема. *Если многообразие RP^n может быть погружено в пространство $\mathbf{R}^{n+1}$, то $n=2^r-1$ или $n=2^r-2$ для некоторого целого r. Если многообразие RP^n может быть вложено в пространство $\mathbf{R}^{n+1}$, то $n=2^r-1$. При $n=2^r$ не существует погружения $RP^n \to \mathbf{R}^{2n-2}$ и не существует вложения $RP^n \to \mathbf{R}^{2n-1}$.*

10.4. Следствие. *Пусть $n=2^r+q$, где $0 \leqslant q \leqslant 2^r$. Тогда при $m=2^{r+1}-2$ не существует погружения $RP^n \to \mathbf{R}^m$, а при $k=2^{r+1}-1$ не существует вложения $RP^n \to \mathbf{R}^k$.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 10.3 к подмногообразию $RP^{2r} \subset RP^n$.

10.5. Замечание. Уитни доказал (см. Уитни [1]), что для каждого n-мерного многообразия M существует погружение $M \to \mathbf{R}^{2n-1}$ и вложение $M \to \mathbf{R}^{2n}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что если расслоение $\tau(RP^n)$ тривиально, то $n-1=2^r$ для некоторого целого числа r.

2. Вычислите непосредственно числа Штифеля — Уитни многообразия RP^n для $n \leqslant 10$, $n=2^r$ и $n=2r+1$.

3. Определите *числа Понтрягина* ориентированного действительного многообразия. Определите отношение ориентируемой кобордантности и докажите, что все числа Понтрягина многообразия M равны нулю, если $M=\partial W$. Покажите, что n-мерное многообразие M имеет отличные от нуля числа Понтрягина только при $n \equiv 0 \pmod 4$.

4. Докажите, что касательные расслоения над сферой S^n и над проективным пространством RP^n, описанные в примерах 2.2.1 и 2.2.6, являются касательными расслоениями в смысле определения 2.1.

5. Докажите, что при $w_1(M)= \ldots =w_r(M)=0$ для класса Ву $v=\sum v_i$ замкнутого многообразия M имеют место равенства $v_1= \ldots =v_r=0$ и $w_{r+1}(M)=v_{r+1}$.

6. Докажите, что для любого замкнутого многообразия M из равенства $w_1(M)= \ldots =w_r(M)=0$, где $\dim M=2r$ или $2r+1$, следует равенство $w(M)=0$.

7. Докажите, что класс Ву многообразия RP^n выражается формулами $v_i=\binom{n-i}{i}_2 x^i$, где x — образующая кольца $H^*(RP^n)$. Пользуясь этим, вычислите класс Штифеля — Уитни $w(RP^n)$.

Глава 18

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Векторные расслоения позволяют определить ряд контравариантных функторов, как, например, функтор $\mathrm{Vect}_F(X)$, сопоставляющий каждому пространству X полугруппу классов изоморфных векторных расслоений над X, функтор $\mathrm{Vect}_F^n(X)$, сопоставляющий пространству X множество классов изоморфных n-мерных расслоений над X, функтор $K_F(X)$, являющийся пополнением до группы полугруппы $\mathrm{Vect}_F(X)$, и т. п. В самом общем смысле характеристические классы можно определить как морфизмы одного из этих функторов в некоторый когомологический функтор. В этой главе мы излагаем начала теории таких характеристических классов. В некоторых важных случаях нам удается получить полное описание всех характеристических классов. В заключение мы рассмотрим так называемый характер Чжэня.

1. ТЕОРЕМА ИОНЕДЫ О ПРЕДСТАВИМОСТИ

Вычисление характеристических классов и когомологических операций опнрается на некоторые результаты теории категорий. Мы изложим эти результаты для контравариантных функторов. Соответствующие утверждения для ковариантных функторов автоматически получаются по соображениям двойственности.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная категория. Для любого объекта K этой категории рассмотрим отображение $[-, K]$, сопоставляющее каждому объекту X категории $\mathcal{A}$ множество $[X, K]$ всех морфизмов $X \to K$ категории $\mathcal{A}$ и каждому морфизму $f \in [Y, X]$ — отображение $[f, K]$ множества $[X, K]$ в множество $[Y, K]$, переводящее морфизм $u \in [X, K]$ в морфизм $uf \in [Y, K]$.

1.1. Предложение. *Отображение* $[-, K]$: $\mathcal{A} \to \mathcal{E}ns$ *является контравариантным функтором.*

Доказательство. Надо показать, что $[1, K]u = u$ и $[fg, K]u = [g, K][f, K]$ для любого морфизма $u \in [X, K]$ и любых морфизмов $g\colon Z \to Y$, $f\colon Y \to X$. Но первое равенство очевидно, а второе проверяется непосредственной выкладкой: $[fg, K]u = ufg = [g, K]uf = [g, K][f, K]u$.

Следующая теорема известна как **теорема Йонеды о представимости**.

1.2. Теорема. *Для любого контравариантного функтора $T\colon \mathscr{A} \to \mathscr{E}ns$ отображение $\beta\colon [[-, K], T] \to T(K)$, сопоставляющее произвольному морфизму функторов $\varphi\colon [-, K] \to T$ элемент $\beta(\varphi) = \varphi(K)1_K$ множества $T(K)$, биективно.*

Доказательство. Определим отображение $\alpha\colon T(K) \to [[-, K], T]$, полагая $\alpha(x)(X)u = T(u)x$ для любого элемента $x \in T(K)$ и любого морфизма $u \in [X, K]$.

Так как для произвольного морфизма $f\colon Y \to X$ имеет место равенство

$$T(f)\alpha(x)(X)u = T(f)T(u)x = T(uf)x = \alpha(x)(Y)uf = \alpha(x)(T)[F, K]u,$$

то α является морфизмом функторов. Легко видеть, что отображения α и β взаимно обратны. Действительно,

$$\beta(\alpha(x)) = \alpha(x)(X)1_K = T(1_K)x = x$$

и

$$\alpha\beta(\varphi)(X)u = \alpha(\varphi(K)1_K)(X)u = T(u)\varphi(A)1_A = \varphi(X)u1_A = \varphi(X)u.$$

Следовательно, отображение β биективно.

1.3. Следствие. *Для любых объектов K и L категории $\mathscr{A}$ отображение $\beta\colon [[-, K], [-, L]] \to [K, L]$, сопоставляющее каждому морфизму $\varphi\colon [-, K] \to [-, L]$ элемент $\beta(\varphi) = \varphi(K)1_K$ множества $[K, L]$, биективно.*

1.4. Замечание. Теорема 1.2 дает полное описание множества всех морфизмов $[F, T]$ контравариантных функторов F и T, принимающих значения в категории множеств при условии, что функтор F изоморфен функтору вида $[-, K]$, $K \in \mathscr{A}$.

2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССАХ

2.1. Определение. Пусть H — произвольный контравариантный функтор, определенный на некоторой категории пространств и отображений и принимающий значения в категории множеств. *Характеристическим классом n-мерных расслоений со значениями в H* называется произвольный морфизм функторов $\mathrm{Vect}_F^n \to H$.

Во всех интересных случаях функтор Vect_F^n изоморфен функтору вида $[-, K_n]$ и потому, согласно теореме 1.2, множество всех характеристических классов n-мерных расслоений находится в естественном биективном соответствии с $H(K_n)$.

2.2. Определение. Пусть H — произвольный контравариантный функтор, определенный на некоторой категории пространств и отображений и принимающий значения в категории (мультипликативных) коммутативных полугрупп (или полуколец). *Характеристическим классом векторных расслоений со значениями в H* называется произвольный морфизм функторов $\mathrm{Vect}_F \to H$. Характеристический класс φ: $\mathrm{Vect}_F \to H$ называется *стационарным*, если он является композицией естественного морфизма $\mathrm{Vect}_F \to K_F$ и некоторого морфизма φ': $K_F \to H$, т. е. если имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Vect}_F \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
K_F \arrow[r, "\varphi'"'] & H
\end{tikzcd}$$

Морфизм φ' этим условием однозначно определен и также называется характеристическим классом.

Имеет место следующий простой критерий стационарности характеристического класса:

2.3. Предложение. *Характеристический класс φ со значениями в функторе H тогда и только тогда стационарен, когда для любого векторного расслоения ξ элемент $\varphi(\xi)$ полугруппы $H(B(\xi))$ обратим. Над категорией конечных клеточных разбиений характеристический класс φ стационарен тогда и только тогда, когда для любого тривиального расслоения θ^q элемент $\varphi(\theta^q)$ является единицей полугруппы $H(B(\theta^q))$.*

Доказательство. Первое утверждение равносильно тому, что морфизм φ тогда и только тогда пропускается через пополнение K_F полугруппы Vect_F, когда для каждого пространства X образ отображения $\varphi(X)$ содержится в некоторой подгруппе полугруппы $H(X)$. Но в этой форме оно очевидно. Второе утверждение легко следует из первого, так как для любого расслоения ξ над конечным клеточным разбиением X существует такое расслоение η, что сумма $\xi\oplus\eta$ является тривиальным расслоением и, следовательно, элемент $\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi(\xi\oplus\eta)$ является единицей полугруппы $H(X)$.

2.4. Пример. Примем за $H(X)$ коммутативную полугруппу $H^{ev}(X; \mathbf{Z}) = \sum_{k \geqslant 0} H^{2k}(X; \mathbf{Z})$ с обычным когомологическим умножением в качестве полугрупповой операции. Тогда полный класс Чжэня c: $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}} \to H^{ev}(-; \mathbf{Z})$ является, очевидно, характеристическим классом. Так как $c(\xi) = 1$, когда расслоение ξ тривиально, то этот класс стационарен, и потому его можно рассматривать как морфизм $K \to H^{ev}(-; \mathbf{Z})$.

2.5. Пример. Примем за $H(X)$ коммутативную полугруппу $H^*(X; \mathbf{Z}_2) = \sum_{k \geqslant 0} H^k(X; \mathbf{Z}_2)$ с обычным когомологическим умножением в качестве полугрупповой операции. Тогда полный класс Штифеля — Уитни w: $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}} \to H^*(-; \mathbf{Z}_2)$ является, очевидно, характеристическим классом. Так как $w(\xi) = 1$, когда расслоение ξ тривиально, то этот класс стационарен и потому его можно рассматривать как морфизм $KO \to H^*(-; \mathbf{Z}_2)$.

2.6. Пример. Снова примем за $H(X)$ коммутативную полугруппу $H^{ev}(X; \mathbf{Z})$. Ясно, что эйлеров класс e: $\mathrm{Vect}^+_{\mathbf{R}} \to H^{ev}(-; \mathbf{Z})$, где $\mathrm{Vect}^+_{\mathbf{R}}$ — полугруппа классов изоморфных ориентированных четномерных векторных расслоений, является характеристическим классом. Этот класс нестационарен.

3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ КОМПЛЕКСНЫХ n-МЕРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

В этом разделе мы рассмотрим характеристические классы комплексных n-мерных расслоений со значениями в кольцах $H^*(X; \mathbf{Z})$ и $H^{ev}(X; \mathbf{Z})$. Для краткости мы вместо $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}$ будем писать Vect, а вместо $K_{\mathbf{C}}$ будем писать K.

Наше вычисление характеристических классов будет основываться на следующем предложении:

3.1. Предложение. *Классифицирующее отображение* h_n: $\underbrace{CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty}_{n \text{ раз}} \to G_n(\mathbf{C}^\infty)$ *для расслоения* $\underbrace{\gamma \times \ldots \times \gamma}_{n \text{ раз}}$, *где* γ — *каноническое линейное расслоение над* CP^∞, *является расщепляющим отображением для канонического векторного расслоения* γ_n *над* $G_n(\mathbf{C}^\infty)$.

Доказательство. Поскольку расслоение $h_n^*(\gamma_n)$ изоморфно расслоению $\underbrace{\gamma \times \ldots \times \gamma}_{n \text{ раз}}$, достаточно показать, что гомоморфизм

$$h_n^*: H^*(G_n(\mathbf{C}^\infty)) \to H^*(CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty)$$

является мономорфизмом. С этой целью рассмотрим произвольное расщепляющее отображение $f\colon X \to G_n(\mathbf{C}^\infty)$ для расслоения γ_n. Пусть $f^*(\gamma_n) = \lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$, и пусть $g_i\colon X \to CP^\infty$ — классифицирующие отображения для расслоений λ_i, так что $\lambda_i = g_i^*(\gamma)$. Рассмотрим отображение $g = (g_1, \ldots, g_n)$ пространства X в пространство $CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty$. Ясно, что расслоение $\lambda_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n$ изоморфно расслоеиию $g^*(\gamma \times \ldots \times \gamma)$. Следовательно, согласно теореме 3.6.2, отображение f гомотопно отображению $h_n g$ и потому $f^* = (h_n g)^* = g^* h_n^*$. Поскольку отображение f^* мономорфно, то, следовательно, отображение h_n^* также мономорфно.

Отправной точкой для конкретного описания характеристических классов служит следующая

3.2. Теорема. *Кольцо когомологий $H^*(G_n(\mathbf{C}^\infty); \mathbf{Z})$ пространства $G_n(\mathbf{C}^\infty)$ является кольцом многочленов $\mathbf{Z}[c_1, \ldots, c_n]$ от классов Чжэня $c_1, \ldots, c_n$ универсального n-мерного векторного расслоения γ_n.*

Доказательство. Согласно предложению 3.1, отображение $h_n\colon \underbrace{CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty}_{n \text{ раз}} \to G_n(\mathbf{C}^\infty)$ является расщепляющим отображением для расслоения γ_n. Поскольку расслоение $\underbrace{\gamma \times \ldots \times \gamma}_{n \text{ раз}}$ инвариантно относительно перестановок сомножителей, то образ мономорфизма h_n^* в кольце $H^*(CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[y_1, \ldots, y_n]$ является подкольцом кольца $\mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ симметрических многочленов от n переменных. Поэтому теорема будет доказана, если мы покажем, что $h_n^*(c_i) = \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$. Действительно, тогда h_n^* будет осуществлять изоморфизм кольца $H^*(G_n(\mathbf{C}^\infty); \mathbf{Z})$ с кольцом симметрических многочленов $\mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$.

Пусть $\mathrm{pr}_i\colon CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty \to CP^\infty$ — проекция на i-й множитель. Так как по определению $y_i = c_1(\mathrm{pr}_i^*(\gamma))$ и $h_n^*(\gamma_n) = \mathrm{pr}_1^*(\gamma) \oplus \ldots \oplus \mathrm{pr}_n^*(\gamma)$, то для полного класса Чжэня $c(\gamma_n)$ имеет место равенство

$$h_n^*(c(\gamma_n)) = c(h_n^*(\gamma_n)) = c(\mathrm{pr}_1^*(\gamma) \oplus \ldots \oplus \mathrm{pr}_n^*(\gamma)) = (1 + y_1) \ldots (1 + y_n).$$

Следовательно, $h_n^*(c_i(\gamma_n)) = \sigma_i$.

3.3. Замечание. Из замечания 5.2.8 немедленно вытекает, что

$$G_n(\mathbf{C}^\infty) = BU(n) \quad \text{и} \quad \underbrace{CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty}_{n \text{ раз}} = BT(n),$$

где $T(n) = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ раз}}$ — тор размерности n. Легко видеть, что рассмотренное выше расщепляющее отображение $CP^\infty \times \ldots \times CP^\infty \to C_n(\mathbf{C}^\infty)$ является не чем иным, как отображением $BT(n) \to BU(n)$, индуцированным вложением максимального тора группы $U(n)$ в эту группу.

Из теорем 3.2 и 1.2 немедленно вытекает следующая

3.4. Теорема. *Каждый характеристический класс комплексных n-мерных расслоений со значениями в функторе $H^*(-;\mathbf{Z})$ задается формулой*

$$\varphi(X)\xi = q(c_1(\xi), \ldots, c_n(\xi)),$$

где $q(y_1, \ldots, y_n)$ — некоторый однозначно определенный многочлен, а $c_i(\xi)$ — классы Чжэня расслоения ξ.

3.5. Замечание. Поскольку классы Чжэня четномерны, каждый характеристический класс $\varphi\colon \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}^n} \to H^*(-, \mathbf{Z})$ можно, следовательно, рассматривать как класс со значениями в кольце $H^{\mathrm{ev}}(-;\mathbf{Z})$.

4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ КОМПЛЕКСНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. С кольцом формальных степенных рядов $R[[t]]$ от переменной t с коэффициентами в кольце R связано несколько коммутативных полугрупп: аддитивная группа $R[[t]]_+$ кольца $R[[t]]$, мультипликативная полугруппа $R[[t]]_\times$ его отличных от нуля элементов, мультипликативная группа $R[[t]]^*_\times$ его обратимых элементов и т. д.

4.1. Обозначение. Пусть μ — один из трех символов $(+,+)$, $(+,\times)$ и r. Для любого контравариантного функтора H, принимающего значения в категории колец, мы будем символом $[\mathrm{Vect}_F, H]_\mu$ обозначать множество всех морфизмов $\varphi\colon \mathrm{Vect}_F \to H$, являющихся для любого пространства X при $\mu = (+, +)$ гомоморфизмом аддитивной полугруппы полукольца $\mathrm{Vect}(X)$ в аддитивную группу кольца $H(X)$, при $\mu = (+, \times)$ — гомоморфизмом аддитивной полугруппы полукольца $\mathrm{Vect}_F(X)$ в мультипликативную полугруппу кольца $H(X)$ и, наконец, при $\mu = r$ — гомоморфизмом полукольца $\mathrm{Vect}_F(X)$ в кольцо $H(X)$. Таким образом,

(1) если $\mu = (+, +)$, то $\varphi(\xi \oplus \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$;

(2) если $\mu = (+, \times)$, то $\varphi(\xi \oplus \eta) = \varphi(\xi)\varphi(\eta)$;

(3) если $\mu = r$, то $\varphi(\xi \oplus \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$ и $\varphi(\xi \otimes \eta) = \varphi(\xi)\varphi(\eta)$.

4.2. Замечания. 1) Естественный гомоморфизм $\mathrm{Vect}_F \to K_F$ определяет для любого μ некоторое инъективное отображение $[K_F, H]_\mu \to [\mathrm{Vect}_F, H]_\mu$.

2) Множества $[\mathrm{Vect}_F, H]_{+,+}$ и $[\mathrm{Vect}_F, H]_{+,\times}$ являются полугруппами относительно операции $(\varphi+\psi)(\xi)=\varphi(\xi)+\psi(\xi)$ в первом случае и операции $(\varphi\psi)(\xi)=\varphi(\xi)\psi(\xi)$ во втором.

Следующая теорема, дающая описание всех характеристических классов комплексных расслоений, справедлива над категорией паракомпактных пространств. Заметим, что эта категория содержит все пространства CP^n, $0\leqslant n\leqslant\infty$. В этой теореме символом $c_1(\xi)$ обозначается образ первого класса Чжэня расслоения ξ при гомоморфизме $H^2(X; \mathbf{Z})\to H^2(X; R)$, индуцированном каноническим гомоморфизмом $\mathbf{Z}\to R$. Как и выше, K обозначает $K_{\mathbf{C}}$, а Vect обозначает $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}$.

4.3. Теорема. *Существуют такие отображения*

$$a\colon [\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,+}\to R[[t]]_+$$

и

$$m\colon [\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,\times}\to R[[t]]_\times,$$

что для любых характеристических классов

$$\varphi\in[\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,+} \quad и \quad \psi\in[\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,\times}$$

имеют место равенства [1])

$$a(\varphi)(c_1(\lambda))=\varphi(X)\lambda, \qquad m(\psi)(c_1(\lambda))=\psi(X)\lambda,$$

где X — произвольное паракомпактное пространство, а λ — произвольное линейное расслоение над X.

Отображения a и m этими свойствами однозначно определены, являются изоморфизмами полугрупп и обладают следующими дополнительными свойствами:

(1) *Естественное вложение*

$$[K, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,+}\to[\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,+}$$

биективно, и потому a может рассматриваться как отображение

$$a\colon [K, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,+}\to R[[t]]_+.$$

Это отображение является изоморфизмом групп.

---

[1]) Здесь под $a(\varphi)(c_1(\lambda))$ и $m(\psi)(c_1(\lambda))$ понимается элемент кольца $H^{\mathrm{ev}}(-; R)$, получающийся в результате подстановки в степенные ряды $a(\varphi)$ и $m(\psi)$ вместо t класса $c_1(\lambda)$. — *Прим. ред.*

(2) *Группу* $[K, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,\times} \subset [\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,\times}$ *отображение* m *изоморфно отображает на подгруппу* $R[[t]]^{*}_{\times}$ *группы* $R[[t]]_{\times}$, *так что имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} [K, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,\times} & \xrightarrow{m} & R[[t]]^{*}_{\times} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,\times} & \xrightarrow{m} & R[[t]]_{\times} \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются изоморфизмами.

(3) *В случае когда* $\mathbf{Q} \subset R$, *подмножество* $[\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_r$ *полугруппы* $[\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,+}$ *отображение* a *биективно отображает на множество степенных рядов, содержащее нулевой ряд и все ряды вида* e^{bt}, $b \in R$.

(4) *Для произвольных характеристических классов* $\varphi \in [\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,+}$ *и* $\psi \in [\mathrm{Vect}, H^{\mathrm{ev}}(-; R)]_{+,\times}$ *имеют место равенства*

$$a(\bar{\varphi})(t) = a(\varphi)(-t)$$

и

$$m(\bar{\psi})(t) = m(\psi)(-t),$$

где $\bar{\varphi}$ *и* $\bar{\psi}$ — *характеристические классы, определенные формулами* $\bar{\varphi}(\xi) = \varphi(\bar{\xi})$ *и* $\bar{\psi}(\xi) = \psi(\bar{\xi})$; *здесь* $\bar{\xi}$ — *расслоение, комплексно сопряженное с расслоением* ξ.

Доказательство. По условию для степенного ряда $a(\varphi)(t) \in R[[t]]$ должно, в частности, выполняться равенство $a(\varphi)(c_1(\gamma)) = \varphi(CP^n)\gamma$. Поскольку кольцо $H^{\mathrm{ev}}(CP^n; R)$ является кольцом многочленов $R[x]$, на которое наложено соотношение $x^{n+1} = 0$, это однозначно определяет первые n коэффициентов ряда $a(\varphi)(t)$. Поскольку n произвольно, тем самым [1]) этот степенной ряд однозначно определен. Далее, для любого линейного расслоения λ существует такое отображение $f: X \to CP^n$, что расслоение $f^*(\gamma)$ изоморфно над X расслоению λ. Поэтому

$$\varphi(X)\lambda = f^*(\varphi(CP^n)\gamma) = f^*[a(\varphi)(c_1(\gamma))] =$$
$$= a(\varphi)[f^*(c_1(\gamma))] = a(\varphi)(c_1(\lambda)).$$

[1]) Здесь следует, конечно, заметить, что при увеличении n начальные коэффициенты строящегося ряда остаются теми же самыми.— *Прим. ред.*

Тем самым существование и единственность отображения a полностью доказаны. Существование и единственность отображения m доказываются аналогично.

Поскольку для любых характеристических классов φ и φ' в кольце $H^{ev}(CP^n;\ R)=R[x] \bmod x^{n+1}$ имеет место равенство

$$a(\varphi+\varphi')(c_1(\gamma))=(\varphi+\varphi')(CP^n)\gamma=\varphi(CP^n)\gamma+\varphi'(CP^n)\gamma,$$

то

$$a(\varphi+\varphi')(t)\equiv a(\varphi)(t)+a(\varphi')(t) \bmod t^{n+1}$$

для любого n, и потому $a(\varphi+\varphi')=a(\varphi)+a(\varphi')$. Аналогично доказывается, что $m(\psi\psi')=m(\psi)\,m(\psi')$. Таким образом, отображения a и m являются гомоморфизмами соответствующих полугрупп.

Пусть теперь φ_1 и φ_2 — такие характеристнческие классы, что $a(\varphi_1)=a(\varphi_2)$. Тогда для каждого линейного расслоения λ над произвольным пространством X будет иметь место равенство

$$\varphi_1(X)\lambda=a(\varphi_1)(c_1(\lambda))=a(\varphi_2)(c_1(\lambda))=\varphi_2(X)\lambda.$$

Пусть, далее, ξ — произвольное расслоение над некоторым пространством Y, и пусть $u\colon X\to Y$ — его расщепляющее отображение. Тогда $u^*(\xi)=\lambda_1\oplus\ldots\oplus\lambda_n$, и потому

$$\begin{aligned}u^*(\varphi_1(Y)\xi)&=\varphi_1(X)\lambda_1+\ldots+\varphi_1(X)\lambda_n=\\&=\varphi_2(X)\lambda_1+\ldots+\varphi_2(X)\lambda_n=u^*(\varphi_2(Y)\xi).\end{aligned}$$

Поскольку отображение u^* мономорфно, тем самым доказано, что $\varphi_1(Y)\xi=\varphi_2(Y)\xi$, т. е. что $\varphi_1=\varphi_2$. Аналогично, если $m(\psi_1)=m(\psi_2)$, то $\psi_1=\psi_2$. Таким образом, отображения a и m инъективны.

Пусть, наконец, $f(t)\in R[[t]]$ — произвольный формальный ряд. Мы хотим определить такой характеристический класс φ, что $a(\varphi)=f$. С этой целью мы для любого пространства X и любого линейного расслоения λ над X положим $\varphi(X)\lambda=f(c_1\lambda)$. Пусть теперь ξ — произвольное векторное расслоение над X. Рассмотрим его расщепляющее отображение $u\colon X'\to X$ и положим $\varphi(X')u^*(\xi)=\varphi(X')\lambda_1+\ldots+\varphi(X')\lambda_n$, где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — такие линейные расслоения, что $u^*(\xi)=\lambda_1\oplus\ldots\oplus\lambda_n$. Так как класс когомологий $\varphi(X')\lambda_1+\ldots+\varphi(X')\lambda_n$, являясь симметрическим многочленом от $c_1(\lambda_1),\ldots,c_n(\lambda_n)$, представляет собой многочлен от $c_i(u^*(\xi))=u^*(c_i(\xi))$, то класс когомологий $\varphi(X')u^*(\xi)$ принадлежит образу мономорфизма

$$u^*\colon H^{ev}(X;\ R)\to H^{ev}(X';\ R),$$

и потому существует такой единственный класс когомологий $\varphi(X)\xi$, что $u^*(\varphi(X)\xi)=\varphi(X')u^*(\xi)$. Тем самым гомоморфизмы $\varphi(X)$ определены[1]) для всех пространств X. То, что они составляют морфизм функторов $\mathrm{Vect}\to H^{ev}(-;R)$, как и то, что $a(\varphi)=f$, непосредственно вытекает из определения. Таким образом, отображение a надъективно. Надъективность отображения m доказывается аналогично. Тем самым доказано, что отображения a и m являются изоморфизмами соответствующих полугрупп.

Осталось проверить свойства (1)—(4). Свойство (1) следует в силу предложения 2.3 из того, что $H^{ev}(X;R)$ — аддитивная группа[2]). Свойство (2) также непосредственно вытекает из предложения 2.3. Чтобы доказать свойство (3), достаточно заметить, что, согласно принципу расщепления, характеристический класс φ: $\mathrm{Vect}\to H^{ev}(-;R)$ тогда и только тогда является морфизмом полуколец, когда выполнено соотношение

$$\begin{aligned}a(\varphi)(c_1(\lambda)+c_1(\lambda'))&=a(\varphi)(c_1(\lambda\otimes\lambda'))=\\&=\varphi(X)(\lambda\otimes\lambda')=(\varphi(X)\lambda)(\varphi(X)\lambda')=\\&=a(\varphi)(c_1(\lambda))\,a(\varphi)(c_1(\lambda')),\end{aligned}$$

т. е. когда $a(\varphi)(t+t')=a(\varphi)(t)\,a(\varphi)(t')$. Для проверки свойства (4) заметим, что $\bar\varphi(\lambda)=-\varphi(\lambda)$ для линейных расслоений λ. Поэтому $a(\bar\varphi)t=a(\varphi)(-t)$ и $m(\bar\psi)(t)=m(\psi)(-t)$. Тем самым теорема полностью доказана.

Заметим, что при отображении m полный класс Чжэня переходит в элемент $1+t$.

5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ mod 2

Результаты разделов 3 и 4, полученные для характеристических классов комплексных расслоений, почти без изменений переносятся на характеристические классы действительных расслоений, если заменить классы Чжэня классами Штифеля — Уитни и потребовать, чтобы кольцо коэффициентов R имело характеристику 2.

Поэтому мы ограничимся лишь формулировками соответствующих результатов, оставляя их доказательства читателю.

---

[1]) Следовало бы, конечно, убедиться, что класс $\varphi(X)\xi$ не зависит от выбора расщепляющего отображения u. — *Прим. ред.*

[2]) Обратим внимание, что при $\mu=(+,+)$ соответствующие характеристические классы принимают значения в аддитивно записанных полугруппах. — *Прим. ред.*

5.1. Предложение. *Классифицирующее отображение*

$$h_n\colon \underbrace{RP^\infty \times \ldots \times RP^\infty}_{n \text{ раз}} \to G_n(\mathbf{R}^\infty)$$

для расслоения $\underbrace{\gamma \times \ldots \times \gamma}_{n \text{ раз}}$, *где* γ — *каноническое линейное расслоение над* RP^∞, *является расщепляющим отображением для канонического расслоения* γ_n *над* $G_n(\mathbf{R}^\infty)$ *по отношению к группам когомологий с коэффициентами в* $\mathbf{Z}_2$.

Это предложение аналогично предложению 3.1.

5.2. Теорема. *Кольцо когомологий* $H^*(G_n; \mathbf{Z}_2)$ *является кольцом многочленов* $\mathbf{Z}_2[w_1, \ldots, w_n]$ *с образующими* $w_1, \ldots, w_n$, *являющимися классами Штифеля — Уитни расслоения* γ_n.

Эта теорема аналогична теореме 3.2.

5.3. Замечание. Как мы знаем $G_n(\mathbf{R}^\infty) = BO(n)$ и

$$\underbrace{RP^\infty \times \ldots \times RP^\infty}_{n \text{ раз}} = B(\mathbf{Z}_2)^n.$$

Легко видеть, что расщепляющее отображение $RP^\infty \times \ldots \times RP^\infty \to G_n(\mathbf{R}^\infty)$ является не чем иным, как отображением $B(\mathbf{Z}_2)^n \to BO(n)$, индуцированным вложением группы диагональных матриц $(\mathbf{Z}_2)^n$ в группу $O(n)$.

Это замечание аналогично замечанию 3.3.

5.4. Теорема. *Каждый характеристический класс* $\varphi\colon \mathrm{Vect}^n_{\mathbf{R}} \to H^*(-; \mathbf{Z}_2)$ *задается формулой*

$$\varphi(X)\xi = q(w_1(\xi), \ldots, w_n(\xi)),$$

где $q(y_1, \ldots, y_n)$ — *некоторый однозначно определенный многочлен, а* $w_i(\xi)$ — *классы Штифеля — Уитни расслоения* ξ.

Эта теорема аналогична теореме 3.4.

Наконец, имеет место следующая теорема, аналогичная теореме 4.3 (мы по-прежнему пользуемся обозначениями 4.1):

5.5. Теорема. *Существуют такие отображения*

$$a\colon [\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}, H^*(-; R)]_{+,+} \to R[[t]]_+,$$

$$m\colon [\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}, H^*(-; R)]_{+,\times} \to R[[t]]_\times,$$

что

$$a(\varphi)(w_1(\lambda)) = \varphi(X)\lambda, \qquad m(\psi)(w_1(\lambda)) = \psi(X)\lambda$$

для каждого линейного расслоения λ *над произвольным (паракомпактным) пространством* X.

Отображения a *и* m *этими свойствами однозначно определены, являются изоморфизмами полугрупп и обладают следующими дополнительными свойствами:*

(1) *Естественное вложение*

$$[KO,\ H^*(-;\ R)]_{+,+} \to [\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}},\ H^*(-,\ R)]_{+,+}$$

биективно, и потому a может рассматриваться как отображение

$$a\colon [KO,\ H^*(-;\ R)]_{+,+} \to R[[t]]_+.$$

Это отображение является изоморфизмом групп.

(2) *Группу* $[K, H^*(-; R)]_{+,\times} \subset [\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}, H^*(-; R)]_{+,\times}$ *отображение m изоморфно отображает на подгруппу* $R[[t]]^*_\times$ *полугруппы* $R[[t]]_\times$, *так что имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
[KO,\ H^*(-;\ R)]_{+,\times} & \xrightarrow{m} & R[[t]]^*_\times \\
\downarrow & & \downarrow \\
[\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}},\ H^*(-;\ R)]_{+,\times} & \xrightarrow{m} & R[[t]]_\times
\end{array}$$

горизонтальные стрелки которой являются изоморфизмами.

Подчеркнем, что эта теорема справедлива лишь в предположении, что кольцо R имеет характеристику 2. При этом символом $w_1(\lambda)$ обозначается образ класса Штифеля — Уитни $w_1(\lambda)$ расслоения λ при гомоморфизме $H^1(X; \mathbf{Z}_2) \to H^1(X; R)$, индуцированном естественным гомоморфизмом $\mathbf{Z}_2 \to R$ колец коэффициентов.

6. 2-ДЕЛИМЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ n-МЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Для действительных расслоений наряду с рассмотренными выше характеристическими классами с коэффициентами в кольцах R характеристики 2 большой интерес представляют также характеристические классы с коэффициентами в *2-делимых кольцах* R, т. е. в кольцах, в которых для любого элемента x существует такой элемент y, что $2y = x$. Мы разовьем теорию таких классов в этом и следующем разделах.

6.1. Предложение. *Для любого локально тривиального главного $\mathbf{Z}_2$-расслоения $q\colon E \to B$ и произвольного 2-делимого кольца R гомоморфизм $q^*\colon H^*(B; R) \to H^*(E; R)$ является мономорфизмом и его образ* $\operatorname{Im} q$ *является подкольцом кольца $H^*(E; R)$, состоящим из элементов, инвариантных относительно инволюции τ кольца $H(E; R)$, индуцированной действием элемента $-1 \in \mathbf{Z}_2$ на пространстве E.*

Доказательство. Пусть U_i, $i \in \mathcal{J}$, — такое открытое покрытие базы B, что все отображения $q^{-1}(U_i) \to U_i$ являются тривиальными $\mathbf{Z}_2$-расслоениями. Из известных стандартных свойств групп сингулярных когомологий (см., например, Стинрод и Эйленберг [1, стр. 246]) немедленно вытекает, что нам достаточно рассматривать только коцепи, определенные лишь на сингулярных симплексах, образы которых целиком лежат в некотором множестве U_i (когда мы рассматриваем кольцо $H^*(B; R)$) или в некотором множестве $q^{-1}(U_i)$ (когда мы рассматриваем кольцо $H^*(E; R)$). Соответствующий коцепной комплекс $C^*(E, R)$ является тогда прямой суммой подкомплексов $C^*_+(E, R)$ и $C^*_-(E, R)$, представляющих собой собственные подпространства инволюции τ, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1. При этом ясно, что $\operatorname{Im} q^* = C^*_+(E, R)$, так что q^* определяет изоморфизм $C^*(B, R) \to C^*_+(E, R)$ коцепных комплексов. Предложение 6.1 вытекает отсюда непосредственно.

6.2. Замечание. Поскольку $SO(2) = U(1) = S^1$, все ориентированные действительные двумерные векторные расслоения η естественным образом отождествляются с комплексными линейными расслоениями. При этом отождествлении эйлерову классу $e(\eta)$ соответствует первый класс Чжэня $c_1(\eta)$. Кроме того, соответствие $\eta \mapsto e(\eta)$ определяет биективное отображение множества $\operatorname{Vect}^2_+(X)$ ориентированных действительных двумерных расслоений над X (или, что равносильно, множества $\operatorname{Vect}^1_{\mathbf{C}}(X)$ линейных комплексных расслоений над X) на группу $H^2(X; \mathbf{Z})$. С другой стороны, комплексификация $\eta \otimes \mathbf{C}$ произвольного ориентированного действительного двумерного векторного расслоения η имеет, очевидно, вид $\eta \oplus \bar{\eta}$, где η рассматривается как комплексное линейное расслоение. Поэтому $c_1(\eta \otimes \mathbf{C}) = c_1(\eta) + c_1(\bar{\eta}) = c_1(\eta) - c_1(\eta) = 0$ и $c_2(\eta \otimes \mathbf{C}) = -c_1(\eta) c_1(\bar{\eta}) = c_1(\eta)^2$. Таким образом, первый класс Понтрягина $p_1(\eta) = c_2(\eta \otimes \mathbf{C})$ (см. определение 16.11.3) ориентируемого двумерного расслоения η выражается формулой

$$p_1(\eta) = c_1(\eta)^2.$$

Заметим, что для произвольного действительного двумерного векторного расслоения η, вообще говоря, имеет место лишь равенство

$$c_1(\eta \otimes \mathbf{C}) = c_1\overline{(\eta \otimes \mathbf{C})} = -c_1(\eta \otimes \mathbf{C}),$$

т. е. равенство $2c_1(\eta \otimes \mathbf{C}) = 0$. Однако в случае когда кольцо R 2-делимо, отсюда снова следует, что $c_1(\eta \otimes \mathbf{C}) = 0$.

При переводе этих рассуждений с языка векторных расслоений на язык классифицирующих пространств мы приходим к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} CP^\infty \arrow[r, "\approx"] \arrow[dr] & G_2^+(\mathbf{R}^\infty) \arrow[r] \arrow[d] & CP^\infty \times CP^\infty \arrow[d] \\ & G_2(\mathbf{R}^\infty) \arrow[r] & G_2(\mathbf{C}^\infty) \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки правого квадрата которой являются отображениями комплексификации, левая вертикальная стрелка $G_2^+(\mathbf{R}^\infty) \to G_2(\mathbf{R}^\infty)$ является локально тривиальным главным $\mathbf{Z}_2$-расслоением, возникающим при отбрасывании ориентации, а правая вертикальная стрелка $CP^\infty \times CP^\infty \to G_2(\mathbf{C}^\infty)$ представляет собой расщепляющее отображение, рассмотренное в предложении 3.1.

6.3. Предложение. *Для любого 2-делимого кольца коэффициентов R участвующие в этой диаграмме пространства имеют следующие кольца когомологий:*

$$H^*(CP^\infty) = R[c_1(\gamma)], \quad H^*(G_2^+(\mathbf{R}^\infty)) = R[e(\gamma_2^+)],$$
$$H^*(G_2(\mathbf{R}^\infty)) = R[p_1(\gamma_2)],$$
$$H^*(CP^\infty \times CP^\infty) = R[c_1(\gamma'),\ c_1(\gamma'')],$$
$$H^*(G_2(\mathbf{C}^\infty)) = R[c_1(\gamma_1),\ c_2(\gamma_2)].$$

При этом отображения коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^*(CP^\infty) & H^*(G_2^+(\mathbf{R}^\infty)) \arrow[l, "w_2"'] & H^*(CP^\infty \times CP^\infty) \arrow[l, "u_2"'] \\ & H^*(G_2(\mathbf{R}^\infty)) \arrow[ul, "w_1"] \arrow[u, "v_2"] & H^*(G_2(\mathbf{C}^\infty)) \arrow[l, "v_1"'] \arrow[u, "u_1"'] \end{tikzcd}$$

определяются формулами

$$w_2(e(\gamma_2^+)) = c_1(\gamma), \qquad v_2(p_1(\gamma_2)) = e(\gamma_2^+)^2,$$
$$v_1(c_1(\gamma_2)) = 0, \qquad v_1(c_2(\gamma_2)) = p_1(\gamma_2),$$
$$u_2(c_1(\gamma')) = e(\gamma_2^+), \qquad u_2(c_1(\gamma'')) = -e(\gamma_2^+).$$

Доказательство. Утверждения, касающиеся пространств CP^∞, $CP^\infty \times CP^\infty$ и $G_2(\mathbf{C}^\infty)$, непосредственно вытекают из предложения 3.1 и теоремы 3.2. Утверждения, касающиеся гомоморфизма u_2, и равенство $H^*(G_2^+(\mathbf{R}^\infty)) = R[e(\gamma_2^+)]$ вытекают из того, что отображение комплексификации $G_2(\mathbf{R}^\infty) \to CP^\infty \times CP^\infty$ индуцирует отображение $\eta \mapsto \eta \oplus \bar{\eta}$. Утверждение, касающееся гомоморфизма w_3, вытекает из того, что отображение $CP^\infty \to G_2(\mathbf{R}^\infty)$ является гомеоморфизмом. Наконец, утверждения, касающиеся гомоморфизма v_2 и кольца $H^*(G_2(\mathbf{R}^\infty))$, следуют из предложения 6.1, а утверждения, касающиеся гомоморфизма v_1, — из замечания 6.2.

6.4. Диаграмма. Таким образом, мы вычислили кольца $H^*(BSO(2); R) = R[e]$ и $H^*(BO(2); R) = R[p_1]$. Чтобы вычислить аналогичные кольца для любого целого $n \geqslant 2$, можно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (G_2^+(\mathbf{R}^\infty))^r & \xrightarrow{v} & (CP^{\infty n}) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ G_n^+(\mathbf{R}^\infty) & \xrightarrow{u} & G_n(\mathbf{C}^\infty) \end{array}$$

где $r = \left[\frac{n}{2}\right]$, горизонтальными стрелками которой являются классифицирующие отображения для комплексификаций действительных универсальных расслоений, а вертикальными стрелками — классифицирующие отображения для сумм действительных или соответственно комплексных линейных расслоений.

6.5. Теорема. *Для любого 2-делимого кольца коэффициентов R имеют место равенства*

$$H^*(BO(2r); R) = R[p_1, \ldots, p_r],$$
$$H^*(BSO(2r); R) = R[p_1, \ldots, p_{r-1}, e],$$
$$H^*(BO(2r+1); R) = R[p_1, \ldots, p_r],$$
$$H^*(BSO(2r+1); R) = R[p_1, \ldots, p_r],$$

где e — класс Эйлера, а p_i — классы Понтрягина универсального расслоения.

Доказательство. Поскольку $e^2 = p_r$, формулы для пространств $BO(n)$ вытекают из формул для пространств $BSO(n)$ и предложения 6.1. Таким образом, нам достаточно рассмотреть лишь пространства $BSO(n)$.

Пусть отображения

$$\begin{array}{ccc} E_0(\gamma_n^+) & \xrightarrow{\pi} & G_{n-1}^+(\mathbf{R}^\infty) \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \\ G_n(\mathbf{R}^\infty) & & \end{array}$$

определены формулами $q(W, x) = W$ и $\pi(W, x) = W'$, где W' — такое подпространство пространства W, что $W = W' + \mathbf{R}x$ (предполагается, что ориентация пространства W' индуцирована ориентацией пространства W). Ясно, что расслоение $q^*(\gamma_n^+)$ изоморфно расслоению $\pi^*(\gamma_{n-1}^+)\oplus\theta^1$. Поскольку отображение π^* индуцирует изоморфизм колец когомологий, имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \ldots \arrow[r] & H^i(G_n^+(\mathbf{R}^\infty)) \arrow[r] & H^{i+n}(G_n^+(\mathbf{R}^\infty)) \arrow[r, "q^*"] \arrow[dr, "\pi^{*-1}q^*"'] & H^{i+n}(E_0) \arrow[r, "\psi"] & H^{i+1}(B) \arrow[r] & \ldots \\ & & & H^{i+n}(G_{n-1}^+(\mathbf{R}^\infty)) \arrow[u, "\pi^*"'] & & \end{tikzcd}$$

верхняя строчка которой является последовательностью Гизина (см. теорему 16.7.5) расслоения $(E_0(\gamma_n^+),\ q,\ G_n(\mathbf{R}^\infty))$. Из функториальности классов Понтрягина $p(\gamma_n^+)$ и $p(\gamma_{n-1}^+)$ непосредственно следует, что $\pi^{*-1}q^*(p_i(\gamma_n^+)) = p_i(\gamma_{n-1}^+)$. Отсюда и из построенной диаграммы индукцией по h легко получается, что кольцо $H^*(BSO(n);\ R)$ порождено классами $p_1, \ldots, p_r$ и e, т. е. классами $p_1, \ldots, p_r$ при $n=2r+1$ и классами $p_1, \ldots, p_{r-1}, e$ при $n = 2r$, ибо $e = 0$ при $n = 2r+1$ и $e^2 = p_r$ при $n = 2r$.

Таким образом, осталось лишь показать, что классы $p_1, \ldots$ $\ldots, p_{r-1}, e$ при $n = 2r$ и классы $p_1, \ldots, p_r$ при $n = 2r+1$ алгебраически независимы. Для этого мы воспользуемся диаграммой

$$\begin{tikzcd} H^*(G_2^+(\mathbf{R}^\infty)^r) = R[e_{(1)}, \ldots, e_{(r)}] & H^*((CP^\infty)^n) = R[c_{(1)}, \ldots, c_{(n)}] \arrow[l, "v^*"'] \\ H^*(G_n^+(\mathbf{R}^\infty)) \arrow[u, "f^*"] & H^*(G_n(\mathbf{C}^\infty)) = R[c_1, \ldots, c_n] \arrow[l, "u^*"'] \arrow[u, "g^*"'] \end{tikzcd}$$

индуцированной диаграммой из п. 6.4, где $e_{(i)} = e(\mathrm{pr}_i^*(\gamma_2^+))$ и $c_{(i} = c_1(\mathrm{pr}_i^*(\gamma))$. Рассмотрим формальную сумму $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} c_i x^i$. Ясно, что

$$g^*\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} c_i x^i\Big) = \prod_{1\leqslant i\leqslant n}(1 + c_{(i)}x)$$

и

$$v^*g^*\Big(\sum_i c_i x^i\Big) = \prod_{i\leqslant j\leqslant r}(1 - e_{(j)}^2 x).$$

Поэтому

$$f^*\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant r}(-1)^i p_j x^{2j}\Big) = \prod_{1\leqslant j\leqslant r}(1 - e_{(j)}^2 x).$$

Следовательно, элементы $f^*(p_1), \ldots, f^*(p_r)$ являются элементарными симметрическими функциями от $e^2_{(1)}, \ldots, e^2_{(r)}$. Поскольку отображение f^* мономорфно, тем самым доказано, что классы $p_1, \ldots, p_r$ алгебраически независимы.

Пусть теперь $n=2r$, и пусть $f(p_1, \ldots, p_{r-1}, e)$ — некоторое полиномиальное соотношение между классами $p_1, \ldots, p_{r-1}, e$. Поскольку $e^2=p_r$, это соотношение имеет вид $f_1(p_1, \ldots, p_r) + f_2(p_1, \ldots, p_r)e=0$, где f_1 и f_2 — некоторые многочлены. Но такое соотношение возможно только при $f_1(p_1, \ldots, p_r)=0$ и $f_2(p_1, \ldots, p_r)=0$. Следовательно, многочлены f_1 и f_2, а потому и многочлен f тождественно равны нулю. Тем самым теорема 6.5 полностью доказана.

6.6. Замечание. В процессе доказательства теоремы 6.5 мы фактически показали, что отображение $f\colon (G_2^+(\mathbf{R}^\infty))^r \to G_n^+(\mathbf{R}^\infty)$ является расщепляющим отображением для расслоения γ_n^+ в том смысле, что гомоморфизм

$$f^*\colon H^*(G_n^+(\mathbf{R}^\infty); \mathbf{R}) \to H^*((G_2^+(\mathbf{R}^\infty))^r; R)$$

является мономорфизмом, а расслоение $f^*(\gamma_n^+)$ — прямой суммой ориентированных одномерных и двумерных расслоений. Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для классифицирующего отображения $(G_2(\mathbf{R}^\infty))^r \to G_n(\mathbf{R}^\infty)$.

Из теоремы 6.5, согласно теореме 1.2, немедленно вытекает следующая теорема, в которой символом Vect_+^n обозначен контравариантный функтор, сопоставляющий произвольному пространству X множество классов изоморфных действительных ориентированных n-мерных расслоений над X.

6.7. Теорема. *Для любого 2-делимого кольца коэффициентов R каждый характеристический класс $\varphi\colon \mathrm{Vect}_R^n \to H^*(-; R)$ выражается формулой*

$$\varphi(X)\xi = q(p_1(\xi), \ldots, p_r(\xi)), \quad r=\left[\frac{n}{2}\right],$$

где $q(y_1, \ldots, y_r)$ — некоторый однозначно определенный многочлен, а $p_i(\xi)$ — классы Понтрягина расслоения ξ. Аналогично каждый характеристический класс $\varphi\colon \mathrm{Vect}_+^n \to H^*(-; R)$ выражается формулой

$$\varphi(X)\xi = \begin{cases} q(p_1(\xi), \ldots, p_{r-1}(\xi), e(\xi)) & \text{при } n=2r, \\ q(p_1(\xi), \ldots, p_r(\xi)) & \text{при } n=2r+1. \end{cases}$$

7. ЧЕТНОМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть $R^+[[t]]$ — подгруппа группы $R[[t]]_+$, состоящая из всевозможных формальных рядов $f(t)$, для которых $f(-t)=f(t)$. Ясно, что $f(t)\in R^+[[t]]$ тогда и только тогда, когда существует такой ряд $g\in R[[t]]$, что $f(t)=g(t^2)$. Аналогично пусть $R^\pm[[t]]$ — подгруппа полугруппы $R[[t]]_\times$, состоящая из всевозможных рядов $f(t)$, для которых либо $f(-t)=f(t)$, либо $f(-t)=-f(t)$. Ясно, что $f(t)\in R^\pm[[t]]$ тогда и только тогда, когда существует такой ряд $g\in R[[t]]$, что либо $f(t)=g(t^2)$, либо $f(t)=tg(t^2)$.

Символом $\mathrm{Vect}^+(X)$ (или $\mathrm{Vect}^+_{\mathbb{R}}(X)$) мы будем обозначать полугруппу классов изоморфных четномерных ориентированных действительных векторных расслоений. За кольцо коэффициентов R мы по-прежнему принимаем произвольное 2-делимое кольцо.

7.1. Теорема. *Существуют такие отображения*

$$a\colon [\mathrm{Vect}^+, H^{ev}(-;R)]_{+,+}\to R^+[[t]],$$

$$m\colon [\mathrm{Vect}^+, H^{ev}(-;R)]_{+,\times}\to R^\pm[[t]],$$

что

$$a(\varphi)(e(\eta))=\varphi(X)\eta,\qquad m(\psi)(e(\eta))=\psi(X)\eta$$

для каждого ориентированного двумерного расслоения η над пространством X.

Отображения a и m этими свойствами однозначно определены, являются изоморфизмами полугрупп и обладают следующими дополнительными свойствами:

(1) *Имеют место коммутативные диаграммы*

$$\begin{array}{ccc}
[\mathrm{Vect}^+, H^{ev}(-;R)]_{+,+} & \xrightarrow{a} & R^+[[t]]\\
u_1\big\downarrow\ \big\uparrow u_2 & & v_1\big\downarrow\ \big\uparrow v_2\\
[\mathrm{Vect}, H^{ev}(-;R)]_{+,+} & \xrightarrow{a} & R[[t]]
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
[\mathrm{Vect}^+, H^{ev}(-;R)]_{+,\times} & \xrightarrow{m} & R^\pm[[t]]\\
u_1\big\downarrow\ \big\uparrow u_2 & & v_1\big\downarrow\ \big\uparrow v_2\\
[\mathrm{Vect}, H^{ev}(-;R)]_{+,\times} & \xrightarrow{m} & R[[t]]
\end{array}$$

где гомоморфизм u_1 индуцирован морфизмом ε_O: $\mathrm{Vect}\to\mathrm{Vect}^+$, *гомоморфизм u_2 индуцирован морфизмом ε_U:* $\mathrm{Vect}^+\to\mathrm{Vect}$, *гомоморфизм v_1 является вложением, гомоморфизм v_2 сопоставляет каждому формальному ряду $f(t)$ ряд $f(t)+f(-t)$, а гомоморфизм v_3 сопоставляет ряду $f(t)$ ряд $f(t)f(-t)$.*

(2) *Если $\mathbf{Q}\subset R$, то отображение a биективно отображает множество $[\mathrm{Vect}^+, H^{ev}(-; R)]_r$ на множество рядов, состоящее из нулевого ряда и всех рядов вида $e^{at}+e^{-at}$, $a\in R$.*

Доказательство. Построение отображений a и m, доказательство их инъективности и доказательство того, что они являются гомоморфизмами полугрупп, производится дословно так же, как в доказательстве теоремы 4.3.

Покажем, что $a(\varphi)(t)\in R^+[[t]]$ и $m(\varphi)(t)\in R^\pm[[t]]$ для любого φ. Пусть η — ориентированное четырехмерное векторное расслоение над $CP^n\times CP^n$, являющееся суммой Уитни $\eta_1\oplus\eta_2$, где $\eta_i = pr_i^*(\varepsilon_O(\gamma))$, $i=1, 2$. Так как $\varepsilon_O(\gamma)=\gamma_2^+$ над $CP^n=G_2^+(\mathbf{R}^{2n+2})$, то кольцо $H^*(CP^n\times CP^n; R)$ является кольцом многочленов $R[x, y]$ от элементов $x=e(\eta_1)$, $y=e(\eta_2)$, удовлетворяющих соотношениям $x^{n+1}=0$ и $y^{n+1}=0$. Следовательно, $a(\varphi)(x)+a(\varphi)(y)=\varphi(\eta_1\oplus\eta_2)=\varphi(\eta_1^*\oplus\eta_2^*)=a(\varphi)(-x)+a(\varphi)(-y)$ и $m(\varphi)(x)\,m(\varphi)(y)=\varphi(\eta_1\oplus\eta_2)=\varphi(\eta_1^*\oplus\eta_2^*)=m(\varphi)(-x)\,m(\varphi)(-y)$, поскольку одновременное изменение ориентаций расслоений η_1 и η_2 оставляет неизменной ориентацию суммы $\eta_1\oplus\eta_2$. Для доказательства включений $a(\varphi)(t)\in R^+[[t]]$ и $m(\varphi)(t)\in R^\pm[[t]]$ остается заметить, что произвольный формальный ряд $f(t)=g_1(t^2)+tg_2(t^2)$ тогда и только тогда удовлетворяет соотношению $f(x)+f(y)=f(-x)+f(-y)$, когда $g_2=0$, и тогда и только тогда удовлетворяет соотношению $f(x)f(y)=f(-x)f(-y)$, когда либо $g_1=0$, либо $g_2=0$.

Для доказательства надъективности отображения a рассмотрим произвольный ряд $f(t)=g(t^2)\in R^+[[t]]$. Для любого пространства X и любого двумерного ориентированного расслоения η над X мы положим

$$\varphi(X)\eta=f(c_1(\eta))=g(p_1(\eta)).$$

Пусть ξ — произвольное ориентированное действительное расслоение над X. Согласно замечанию 6.6, для него существует такое отображение u: $X_1\to X$, индуцирующее мономорфизм групп когомологий, что $u^*(\xi)=\eta_1\oplus\ldots\oplus\eta_2$, где η_i — некоторые ориентированные двумерные векторные расслоения. Мы положим

$$\varphi(X_1)u^*(\xi)=\varphi(X_1)\eta_1+\ldots+\varphi(X_1)\eta_r.$$

Но ясно, что $\varphi(X_1)\eta_1+\ldots+\varphi(X_1)\eta_r$ является симметрическим многочленом от $p_1(\eta_1), \ldots, p_1(\eta_r)$ и потому может быть выражен через элементарные симметрические функции от $p_1(\eta_1), \ldots, p_1(\eta_r)$. С другой стороны, поскольку в R существует элемент 1/2, то i-я элементарная симметрическая фуикция от $p_1(\eta_j)$ имеет вид $p_i(u^*(\xi)) = u^*(p_i(\xi))$. Следовательно, элемент $\varphi(X_1)u^*(\xi)$ лежит в образе мономорфизма $u^*: H^{ev}(X; R) \to H^{ev}(X_1; R)$ и потому существует один и только одии элемент $\varphi(X)\xi$, для которого $u^*(\varphi(X)\xi) = \varphi(X_1)u^*(\xi)$. Ясно, что тем самым мы построили некоторый морфизм φ: $\mathrm{Vect}_R^+ \to H^{ev}(-; R)$, обладающий тем свойством, что $a(\varphi) = f$. Следовательно, отображение a надъективно. Доказательство надъективности отображения m проводится аналогично. При этом если $f(t) = tg(t^2)$, то класс когомологий $\psi(X_1)u^*(\xi) = (\psi(X_1)\eta_1) \ldots (\psi(X_1)\eta_r)$ равен $c_1(\eta_1)g(p_1(\eta_1)) \ldots c_1(\eta_r)g(p_1(\eta_r))$ и потому является произведением эйлерова класса $e(u^*(\xi)) = u^*(e(\xi))$ на некоторый многочлен от $p_i(u^*(\xi)) = u^*(p_i(\xi))$. В случае же $f(t) = g(t^2)$ в выражении для $\psi(X_1)u^*(\xi)$ участвуют только классы Понтрягина.

Для завершения доказательства нам осталось лишь проверить свойства (1) и (2). Но свойство (1) очевидно. Докажем свойство (2). Из существования расщепляющих отображений (замечание 6.6) немедленно вытекает, что морфизм $\varphi \in [\mathrm{Vect}_R^+, H^{ev}(-; \mathbf{Q})]_{+,+}$ тогда и только тогда является гомоморфизмом колец, когда $\varphi(\eta_1 \otimes_{\mathbf{R}} \eta_2) = \varphi(\eta_1)\varphi(\eta_2)$ для любых двумерных векторных расслоений η_1 и η_2 или даже лишь для расслоений $\eta_1 = \mathrm{pr}_1^*(\varepsilon_O(\gamma))$ и $\eta_2 = \mathrm{pr}_2^*(\varepsilon_O(\gamma))$ над $CP^n \times CP^n$. Поэтому формальный ряд $f = a(\varphi)$ удовлетворяет соотношению $f(x)f(y) = \varphi(\eta_1)\varphi(\eta_2) = \varphi(\eta_1 \otimes_{\mathbf{R}} \eta_2) = \varphi(\eta_1 \otimes_{\mathbf{C}} \eta_2) + \varphi(\eta_1 \otimes_{\mathbf{C}} \bar{\eta}_2) = f(x+y) + f(x-y)$. Но нетрудно убедиться, например, дифференцируя дважды по x и полагая $y = 0$, что решениями этого функционального уравнения являются только ряды $f(t) = 0$ и $f(t) = e^{at} + e^{-at}$. Тем самым теорема полностью доказана.

7.2. Замечание. Для расслоенных отображений конечного типа доказательство теоремы Лерэ — Хирша 16.1.1, на которой основывается принцип расщеплеиия, носит элементарный характер. Читателю предлагается рассмотреть, при каких условиях на расслоения результаты разд. 2—7 также могут быть доказаны элементарными методами.

8. ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

8.1. Пример. Элемент $1 + t$ соответствует при изоморфизме m: $[\mathrm{Vect}(-), H^{ev}(-; \mathbf{Z})]_{+,\times} \to \mathbf{Z}[[t]]$ полному классу Чжэня, а при изоморфизме m: $[\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(-), H^*(-; \mathbf{Z}_2)]_{+,\times} \to \mathbf{Z}_2[[t]]$ — полному классу Штифеля — Уитни. В каждом из этих случаев элемент t соответствует старшему классу Чжэня нли Штифеля — Уитни. Этн утверждення справедлнвы, очевндно, для линейных, а следовательно, и для любых расслоений.

8.2. Определение. Характеристический класс $\mathrm{Vect} \to H^{ev}(-;\mathbf{Q})$, соответствующий при отображении a: $[\mathrm{Vect}(-), H^{ev}(-;\mathbf{Z})]_r \to \{0, e^{at}\} \subset \mathbf{Q}[[t]]_+$ формальиому ряду e^t, изывается *характером Чжэня* и обозиачается символом ch.

Характер Чжэия стационареи и потому может рассматриваться как морфизм ch: $K \to H^{ev}(-;\mathbf{Q})$.

8.3. Пример. При изоморфизме m: $[\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}^{+}(-), H^{ev}(-;\mathbf{Z})]_{+,\times} \to \mathbf{Z}^{\pm}[[t]]$ эйлерову классу соответствует элемент t. Действительно, это верно для двумерных, а потому и для любых расслоеиий. Аналогично полному классу Поитрягина соответствует элемеит $1+t^2$, а старшему классу Поитрягииа — элемеит t^2.

Из теоремы 7.1 вытекает коммутативиая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} [\mathrm{Vect}(-), H^{ev}(-;\mathbf{Z})]_{+,\times} & \xrightarrow{m} & \mathbf{Z}[[t]]_{\times} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}^{+}(-), H^{ev}(-;\mathbf{Z})]_{+,\times} & \xrightarrow{m} & \mathbf{Z}^{+}[[t]]_{\times} \end{array}$$

левая вертикальная стрелка которой индуцирована отображением ε_O, определеннным ограничеинем поля $\mathbf{C}$ до поля $\mathbf{R}$, а правая вертикальиая стрелка представляет собой отображеиие $f(t) \mapsto f(t)f(-t)$. Поскольку $1-t^2=(1+t)(1-t)$, отсюда вытекает, что $\tilde{p}(\varepsilon_O(\eta)) = c(\eta)\tilde{c}(\eta)$, где $\tilde{p}_i = (-1)^i p_i$ и $\tilde{c}_i = (-1)^i c_i$. Действительно, при изоморфизме m классу $\tilde{p}$ соответствует элемент $1-t^2$, а классу $\tilde{c}$ — элемеит $1-t$. Возвращаясь от классов $\tilde{p}$ и $\tilde{c}$ к классам p и c, мы получаем, таким образом, следующее

8.4. Предложение. *Имеет место соотношение*

$$(-1)^i p_i(\eta_{\mathbf{R}}) = \sum_{j+k=2i} (-1)^k c_j(\eta)\, c_k(\eta),$$

где $\eta_{\mathbf{R}}$ — *действительное векторное расслоение, ассоциированное с комплексным векторным расслоением* η.

Пусть $p(M^n)$ — полный класс Понтрягииа $p(\tau(M)_{\mathbf{R}})$ комплексного миогообразия $M=M^n$. Для миогообразия $M=CP^n$ из предложения 8.4 немедлеино вытекает следующее

8.5. Предложение. *Имеет место соотношение* $p(CP^n) = (1+u^2)^{n+1}$, *где* u — *каноническая образующая группы* $H^2(CP^n;\mathbf{Z})$.

Доказательство. Так как $c(\tau(CP^n)) = (1+u)^{n+1}$, то $\tilde{p}(CP^n) = c(\tau CP^n))\,\tilde{c}(\tau(CP^n)) = (1-u^2)^{n+1}$, и потому $p(CP^n) = (1+u^2)^{n+1}$.

8.6. Примеры. Для комплексных векторных расслоений характеристический класс, соответствующий степенному ряду $t/\operatorname{th} t$, называется *L-родом*, характеристический класс, соответствующий степенному ряду $t/\operatorname{sh} t$, называется *A-родом*, а характеристический класс, соответствующий степенному ряду $t/(1-e^{-t})$, называется *родом Тодда*. Для ориентированных действительных векторных расслоений характеристический класс, соответствующий степенному ряду $\frac{t}{2}\Big/\operatorname{sh}(t/2)$, называется *$\hat{A}$-родом*.

9. ПЕРИОДИЧНОСТЬ БОТТА И ТЕОРЕМА О ЦЕЛОСТИ

В этом разделе мы рассмотрим связь характера Чжэня с теоремой периодичности для комплексных векторных расслоений, что позволит нам дать новое простое доказательство этой теоремы. Кроме того, мы докажем так называемую теорему Ботта о целости (см. ниже теорему 9.6).

Пусть γ — каноническое линейное расслоение над $S^2 = CP^1$. Мы будем считать известным (см. гл. 10), что элементы 1 и $\gamma - 1$ образуют аддитивный базис кольца $K(S^2)$ (мы рассматриваем здесь только комплексные K-кольца).

9.1. Предложение. *Гомоморфизм колец* $\operatorname{ch}: K(S^2) \to H^*(S^2; \mathbf{Z})$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{ch}(1) = 1$ и $\operatorname{ch}(\gamma - 1) = c_1(\gamma)$. Остается заметить, что элемент $c_1(\gamma)$ является, как мы знаем, образующей группы $H^2(S^2; \mathbf{Z})$.

9.2. Следствие. *В кольце* $K(S^2)$ *имеет место равенство* $(\gamma-1)^2 = 0$.

Доказательство. Поскольку ch является гомоморфизмом колец, то $\operatorname{ch}(\gamma-1)^2 = \operatorname{ch}(\gamma-1)\operatorname{ch}(\gamma-1) = c_1(\gamma)^2 = 0$, и потому, $(\gamma-1)^2 = 0$.

9.3. Следствие. *В кольце* $K(S^2)$ *имеет место равенство* $\gamma^m = 1 + m(\gamma - 1)$.

Доказательство. Согласно следствию 9.2, $\gamma^m = (1 + (\gamma - 1))^m = 1 + m(\gamma - 1)$.

9.4. Определение. Гомоморфизм $\beta: \tilde{K}(X) \to \tilde{K}(X \wedge S^2)$, задаваемый формулой $\beta(\xi) = \xi \otimes (\gamma - 1)$, называется *гомоморфизмом Ботта*.

То, что формула $\beta(\xi) = \xi \otimes (\gamma - 1)$ действительно задает гомоморфизм $\tilde{K}(X) \to \tilde{K}(X \wedge S^2)$, вытекает из расщепляющейся точной последовательности

$$0 \leftarrow \tilde{K}(X \vee S^2) \leftarrow \tilde{K}(X \times S^2) \leftarrow \tilde{K}(X \wedge S^2) \leftarrow 0$$

(предложение 9.3.4), ибо образ элемента $\xi\otimes(\gamma-1)$ в группе $\tilde{K}(X\vee S^2)$, очевидно, равен нулю, и потому мы можем рассматривать $\xi\otimes(\gamma-1)$ как элемент группы $\tilde{K}(X\wedge S^2)$.

9.5. Замечание. Если пространство X компактно, то элементарными методами можно доказать, что гомоморфизм Ботта $\beta\colon \tilde{K}(X)\to\tilde{K}(X\wedge S^2)$ надъективен.

9.6. Теорема. *Если пространство X является сферой, то гомоморфизм Ботта $\beta\colon K(X)\to K(X\wedge S^2)$ является изоморфизмом. Для каждого $k\geqslant 1$ гомоморфизм* ch *осуществляет изоморфизм кольца $\tilde{K}(S^{2k})$ на подкольцо $\tilde{H}^*(S^{2k};\mathbf{Z})$ кольца $\tilde{H}^*(S^{2k};\mathbf{Q})$.*

Доказательство. Проведем индукцию по k. Согласно сказанному выше, при $k=1$ оба утверждения теоремы справедливы. Пусть они уже доказаны для некоторого k. Тогда, в частности, гомоморфизм ch: $\tilde{K}(S^{2k})\to\tilde{H}^*(S^{2k};\mathbf{Q})$ будет мономорфизмом. С другой стороны, из соотношения $\mathrm{ch}(j-1)=u$, где u — каноническая образующая группы $H^2(S^2;\mathbf{Z})$, немедленно вытекает, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\tilde{K}(S^{2k}) & \xrightarrow{\beta} & \tilde{K}(S^{2k+2})\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}}\\ \tilde{H}^*(S^{2k};\mathbf{Q}) & \longrightarrow & \tilde{H}^*(S^{2k+2};\mathbf{Q})\end{array}$$

нижний горизонтальный гомоморфизм которой индуцирован умножением на u и потому является изоморфизмом. Следовательно, отображение β мономорфно и потому (замечание 9.5) является изоморфизмом. Тем самым для четномерных сфер первое утверждение теоремы доказано. Поскольку умножение на u переводит подкольцо $\tilde{H}^*(S^{2k};\mathbf{Z})$ кольца $\tilde{H}^*(S^{2k};\mathbf{Q})$ в подкольцо $\tilde{H}^*(S^{2k+2};\mathbf{Z})$ кольца $\tilde{H}^*(S^{2k+2};\mathbf{Q})$, отсюда в силу предложения индукции непосредственно вытекает и второе утверждение.

Осталось доказать первое утверждение теоремы для нечетномерных сфер. Но по определению $\tilde{K}(S^1)=[S^0, U]_0$, и потому $K(S^1)=0$, ибо группа U связна. Поскольку отображение β эпиморфно, отсюда следует, что $\tilde{K}(S^{2k+1})=0$ для любого k. Поэтому отображение β тривиальным образом является изоморфизмом.

9.7. Замечание. Из того что гомоморфизм $\beta\colon\tilde{K}(X)\to\tilde{K}(X\wedge S^2)$ является изоморфизмом при $X=S^l$, в силу стандартных теорем сравнения для полуточных функторов непосредственно вытекает, что этот гомоморфизм является изоморфизмом и для всех X.

9.8. Следствие. *Для каждого комплексного векторного расслоения ξ над сферой S^{2n} класс Чжэня $c_n(\xi)$ кратен элементу $(n-1)!\ a$, где $a \in H^{2n}(S^{2n};\ \mathbf{Z})$ — образующая. При этом для каждого целого числа $m \equiv 0 \pmod{(n-1)!}$ существует единственный элемент $\xi \in \widetilde{K}(S^{2n})$, для которого $c_n(\xi) = ma$.*

Доказательство. Поскольку $s_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \pm n\sigma_n \pm \ldots$ и, следовательно, $s_n(0, \ldots, 0, \sigma_n) = \pm n\sigma_n$, то $\operatorname{ch}\xi = \dim\xi \pm nc_n(\xi)/n!$. С другой стороны, согласно теореме 9.6, $\operatorname{ch}\xi \in H^0(S^{2n};\ \mathbf{Z}) \oplus H^{2n}(S^{2n};\ \mathbf{Z})$. Поэтому элемент $c_n(\xi)$ группы $H^{2n}(S^{2h};\ \mathbf{Z})$ делится на $(n-1)!$. Для доказательства второго утверждения достаточно теперь опять воспользоваться теоремой 9.6.

10. СРАВНЕНИЕ КОГОМОЛОГИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВАРИАНТА ХОПФА С ЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЕМ В K-ТЕОРИИ

10.1. Для любого отображения $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ клеточное разбиение C_f состоит из одной нульмерной клетки, одной n-мерной клетки и одной $2n$-мерной клетки. Поэтому из точной последовательности Пуппе вытекает, что имеют место следующие изоморфизмы целочисленных групп когомологий:

$$H^n(C_f) \xrightarrow{\approx} H^n(S^n) \quad \text{и} \quad H^{2n}(S^{2n}) \xrightarrow{\approx} H^{2n}(C_f).$$

Пусть число n четно. Тогда, как мы знаем, группа $H^n(S^n)$ обладает такой образующей c_n, что[1] $\operatorname{ch}_n \beta_n = c_n$. Отсюда следует, что при четном n в группах $H^n(C_f)$ и $H^{2n}(C_f)$ существуют такие образующие a^* и b^*, что $\operatorname{ch}_n a_f = a^*$ и $\operatorname{ch}_{2n} b_f = b^*$. По определению когомологический инвариант Хопфа h_f^* удовлетворяет соотношению $(a^*)^2 = h_f^* b^*$, тогда как инвариант Хопфа h_f в K-теории определяется из соотношения $a_f^2 = h_f b_f$ (см. определение 14.2.2).

10.2. Предложение. *Инварианты Хопфа h_f и h_f^* совпадают.*

Доказательство. Поскольку характер Чжэня

$$\operatorname{ch}\colon K(X) \to H^{\mathrm{ev}}(X;\ \mathbf{Q})$$

является гомоморфизмом колец, то

$$h_f b^* = \operatorname{ch}_{2n} h_f b_f = \operatorname{ch}_{2n} a_f^2 = (\operatorname{ch}_n a_f)^2 = (a^*)^2 = h_f^* b^*.$$

Следовательно, $h_f = h_f^*$.

---

[1] Символом ch_n обозначается n-мерная компонента характеристического класса ch. — *Прим. ред.*

11. ОПИСАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ ПО БОРЕЛЮ — ХИРЦЕБРУХУ

11.1. Обозначения. Пусть α — локально тривиальное главное G-расслоение над пространством X и $T = T^r$ — максимальный тор группы G. Пусть далее M — произвольный комплексный G-модуль размерности m. Рассматриваемый как T^r-модуль, модуль M является суммой m однородных T^r-модулей $M_1, \ldots, M_m$. Мы хотим вычислить класс Чжэня $c(\alpha[M])$ и характер Чжэня $\operatorname{ch}(\alpha[M])$ расслоения $\alpha[M]$ в терминах модулей $M_1, \ldots, M_m$.

11.2. Трансгрессия. Пусть γ — произвольное главное T^r-расслоение. *Трансгрессией* τ_γ называется гомоморфизм $H^1(T^r; \mathbf{Z}) \to H^2(B(\gamma); \mathbf{Z})$, замыкающий коммутативную диаграмму[1])

$$\begin{tikzcd}
H^1(T^r; \mathbf{Z}) \arrow[dr, "\tau_\gamma"'] & \operatorname{Hom}(T^r; T^1) \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "\mu"] \\
 & H^2(B(\gamma); \mathbf{Z})
\end{tikzcd}$$

изоморфизм v которой определен формулой $v(h) = h^*(s)$, где s — каноническая образующая группы $H^1(T^1; \mathbf{Z})$, а гомоморфизм μ — формулой $\mu(h) = c_1(\gamma[\mathbf{C}_h])$, где $\mathbf{C}_h$ — простой T^r-модуль, получающийся из пространства $\mathbf{C}$, если на нем определить действие группы T^r формулой $tz = h(t)z$, $t \in T^r$, $z \in \mathbf{C}$.

Заметим, что каждый одномерный T^r-модуль M можно отождествить с некоторым элементом группы $H^1(T^r; \mathbf{Z})$, так что имеет смысл говорить о его трансгрессии $\tau_\gamma(M)$.

11.3. Предложение. *Для универсального T^r-расслоения γ над $(RP^\infty)^r$ трансгрессия τ_γ: $H^1(T^r; \mathbf{Z}) \to H^2(B(\gamma); \mathbf{Z})$ является изоморфизмом.*

Доказательство. При $r = 1$ образующая группы $H^1(S^1; \mathbf{Z})$ соответствует каноническому линейному расслоению над CP^∞, первый класс Чжэня которого является образующей группы $H^2(CP^\infty; \mathbf{Z})$. Для любого r трансгрессия τ_γ является произведением r трансгрессий, соответствующих случаю $r = 1$, и, следовательно, также является изоморфизмом.

Каждому главному G-расслоению α соответствует главное T-расслоение α_T, для которого $E(\alpha_T) = E(\alpha)$ и $B(\alpha_T) = E(\alpha) \bmod T$ (локальная тривиальность расслоения α_T вытекает из суще-

---

[1]) Здесь $T^1 = S^1$ — единичная окружность комплексной плоскости (одномерный тор). — *Прим. ред.*

ствования для отображения $G \to G \bmod T$ локальных сечений). Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E(\alpha_T) & = & E(\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(\alpha_T) = E(\alpha) \bmod T & \xrightarrow{q_T} & B(\alpha) = X \end{array}$$

Естественная проекция q_T играет роль расщепляющего отображения, поскольку расслоения α_T и $q_T^*(\alpha)$, очевидно, изоморфны над $B(\alpha_T)$.

11.4. Теорема. *Если m-мерный комплексный G-модуль M разлагается как T-модуль в прямую сумму одномерных T-модулей $M_1, \ldots, M_m$, то*

$$q_T^*(c(\alpha[M])) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} (1 + \tau(M_j))$$

и

$$q_T^*(\mathrm{ch}(\alpha[M])) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} e^{\tau(M_j)},$$

где τ — трансгрессия в главном T-расслоении α_T.

Доказательство. Из функториальности класса c и формулы для суммы Уитни вытекает, что

$$\begin{aligned} q_T^*(c(\alpha[M])) &= c(q_T^*(\alpha[M])) = c(\gamma[M_1 \oplus \ldots \oplus M_m]) = \\ &= c(\gamma[M_1]) \ldots c(\gamma[M_m]) = \\ &= (1 + \tau(M_1)) \ldots (1 + \tau(M_m)). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} q_T^*(\mathrm{ch}(\alpha[M])) &= \mathrm{ch}(q_T^*(\alpha[M])) = \\ &= \mathrm{ch}(\gamma[M_1 \oplus \ldots \oplus M_m]) = \\ &= \mathrm{ch}(\gamma[M_1]) + \ldots + \mathrm{ch}(\gamma[M_m]) = \\ &= e^{\tau(M_1)} + \ldots + e^{\tau(M_m)}. \end{aligned}$$

Применение этой теоремы для вычисления классов c и ch основывается на следующей теореме Бореля (Борель [3]):

11.5. Теорема. *Для универсального G-расслоения α морфизм q_T^*: $H^*(B_G; \mathbf{Q}) \to H^*(B_T; \mathbf{Q})$ является мономорфизмом, образ которого совпадает с подгруппой группы $H^*(B_T; \mathbf{Q})$, состоящей из элементов, инвариантных относительно группы Вейля.*

Сравнивая эту теорему с аналогичным утверждением о связи кольца $R(G)$ с подкольцом кольца $R(T)$, состоящим из элементов, инвариантных относительно группы Вейля, мы немедленно получаем следующую теорему:

11.6. Теорема. *Для универсального G-расслоения α, где G — компактная связная группа Ли, имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & K(B_G) \arrow[dr, "\mathrm{ch}"] & \\ R(G) \arrow[ur, "\bar{\alpha}"] \arrow[rr, "\mathrm{ch}^*"'] & & H^*(B_G; \mathbf{Q}) \end{tikzcd}$$

где ch — *характер Чжэня, а* ch^* — *такой гомоморфизм, что* $\mathrm{ch}^* M = e^{\cdot \tau(M)}$ *для каждого комплексного G-модуля M, рассматриваемого как T-модуль.*

Дополнение

ТЕОРИЯ ДОЛЬДА ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВ РАССЛОЕНИЙ

В этом дополнении мы сформулируем основные результаты очень важной статьи Дольда [4], касающиеся связи между локальными и глобальными свойствами расслоений.

Д.1. Определение. Покрытие $\{U_i\}$ пространства X называется *нумерируемым*, если существует подчиненное ему разбиение единицы $\{\eta_i\}$.

Мы рассмотрим четыре свойства расслоений. Основной результат Дольда заключается в том, что если эти свойства выполняются локально, то они выполняются и глобально. Справедливость свойства локально означает, что оно выполняется над каждым открытым множеством некоторого нумерируемого покрытия пространства X.

Д.2. Определение. *Ободком* подмножества A в пространстве X называется открытое множество $V \supset A$, для которого существует такое отображение $f: X \to [0, 1]$, что $A \subset f^{-1}(1)$ и $f^{-1}((0, 1]) \subset V$.

Д.3. Определение. Говорят, что для расслоения $p: E \to X$ выполнено *свойство продолжения сечений*, если для каждого сечения s над $A \subset X$ из того, что оно продолжается на некоторый ободок подмножества A, следует, что оно продолжается на все пространство X.

Д.4. Теорема. *Если расслоение $p: E \to X$ обладает свойством продолжения сечений, то его ограничение на любом открытом подмножестве пространства X также обладает этим свойством. Если расслоение $p: E \to X$ обладает свойством продолжения сечений над каждым из элементов U_i некоторого нумерируемого открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X, то оно обладает этим свойством над всем пространством X.*

Следующее определение является усилением определения 1.5.1.

Д.5. Определение. Отображение $p: E \to X$ называется *расслаивающим отображением*, если оно удовлетворяет аксиоме о накрывающей гомотопии для всех пространств.

Д.6. Теорема. *Если для любого элемента U_i некоторого нумерируемого открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X ограничение $p|p^{-1}(U_i)$ отображения p: $E \to X$ является расслаивающим отображением, то отображение p: $E \to X$ также является расслаивающим отображением.*

Д.7. Определение. Отображение p: $E \to X$ называется *слабо расслаивающим отображением*, если для каждой гомотопии h_t: $W \to X$ и каждого отображения f: $W \to E$, связанных соотношением $pf = h_0$, существует такая гомотопия f_t: $W \to E$, что $pf_t = h_t$, причем отображения f_0 и f связаны такой гомотопией k_t: $W \to E$, что $pk_t = pf$ для всех $t \in [0, 1]$.

Д.8. Теорема. *Если для каждого элемента U_i некоторого нумерируемого открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X ограничение $p|p^{-1}(U)$ отображения p: $E \to X$ является слабо расслаивающим отображением, то отображение p: $E \to X$ также является слабо расслаивающим отображением.*

Д.9. Теорема. *Если X-морфизм f: $E \to E'$ расслоений p: $E \to X$ и p': $E' \to X$ является над каждым элементом U_i некоторого нумерируемого открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X послойной гомотопической эквивалентностью, то над всем пространством X морфизм f: $E \to E'$ также является послойной гомотопической эквивалентностью.*

Частный случай этой теоремы мы использовали в гл. 15.

Теоремы Д.6, Д.8 и Д.9 доказываются применением теоремы Д.4 к некоторым соответствующим образом подобранным пространствам отображений.

ЛИТЕРАТУРА

Адамс (Adams J. F.)

[1] On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Bull. Am. Math. Soc.*, **64** (1958), 279—282.

[2] On the structure and application of the Steenrod algebra, *Comment. Math. Helv.*, **32** (1958), 180—214.

[3] On the non-existence of elements of Hopf invariant one, *Ann. Math.*, **72** (1960), 20—104. (Русский перевод: Адамс Дж. Ф., О несуществовании отображений с инвариантом Хопфа, равным единице, сб. *Математика*, **5** : 4 (1961), 3—86.)

[4] On Chern characters and the structure of the unitary group, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **57** (1961), 189—199.

[5] Vector-fields on spheres, *Bull. Am. Math. Soc.*, **68** (1962), 39—41.

[6] Vector fields on spheres, *Ann. Math.*, **75** (1962), 603—632. (Русский перевод: Адамс Дж. Ф., Векторные поля на сферах, сб. *Математика*, **7** : 6 (1963), 48—79.)

[7] On the groups $J(X)$, I, II and III, *Topology*, **2** (1963), 181—195; **3** (1965), 137—171; **3** (1965), 193—222 (Русский перевод: Адамс Дж. Ф., О группах $J(X)$, I, II, III, сб. *Математика*, **10** : 5 (1966), 70—84; **11** : 4 (1967), 42—69; **12** : 3 (1968), 3—97.)

Адамс, Уокер (Adams J. F., Walker G.)

[1] On complex Stiefel manifolds, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **61** (1965), 81—103. (Русский перевод: Адамс Дж. Ф., Уокер Г., О комплексных многообразиях Штифеля, сб. *Математика*, **11** : 4 (1967), 42—69.)

Адем (Adem J.)

[1] The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38 (1952), 720—726.

[2] Relations on iterated reduced powers, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 636—638.

[3] The relations of Steenrod powers of cohomology classes, Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in Honor of S. Lefschetz, 191—238, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.

Атья (Atiyah M. F.)

[1] Complex analytic connections in fibre bundles, *Tran. Am. Math. Soc.*, **85** (1957), 181—207.

[2] Thom complexes, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 11 (1961), 291—310. (Русский перевод: Атья М. Ф., Пространства Тома, сб. *Математика*, **10** : 5 (1966), 48—69).

[3] Immersions and embeddings of manifolds, *Topology*, **1** (1962), 125—132.

Атья, Ботт (Atiyah M. F., Bott R.)

[1] On the periodicity theorem for complex vector bundles, *Acta Math.*, **112** (1964), 229—247.

Атья, Ботт, Шапиро (Atiyah M. F., Bott R., Shapiro A.)
[1] Clifford modules, *Topology*, **3** (Supplement I), (1964), 3—38.

Атья, Тодд (Atiyah M. F., Todd J. A.)
[1] On complex Stiefel manifolds, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **56** (1960), 342—353.

Атья, Хирцебрух (Atiyah M. F., Hirzebruch F.)
[1] Riemann — Roch theorems for differential manifolds, *Bull. Am. Math. Soc.*, **65** (1959), 276—281.
[2] Vector bundles and homogeneous spaces in differential geometry, *Am. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math.*, 3 (1961), 7—38. (Русский перевод: сб. *Математика*, **6** : 2 (1962), 3—39.)
[3] Cohomologie — Operationen und characteristische Klassen, *Math. Z.*, 77 (1961), 149—187.
[4] Analytic cycles on complex manifolds, Topology, **1** (1962), 25—45.
[5] Quelques theoremes de non-plongement pour les varietes differentiables, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 383—396. (сб. Мат. 5:3(1961), 3-5)
[6] The Riemann — Roch theorem for analytic embeddings, *Topology*, **1** (1962), 151—166.
[7] Charakteristische Klassen und Anwendungen, Monographies de L'Enseignement mathématique, Genève, Suisse, n°11, (1962), 71—96.

Борель (Borel A.)
[1] Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, *Compt. Rend.*, **230** (1950), 1378—1380.
[2] Impossibilité de fibrer une sphère, par un produit de sphères, *Compt. Rend.*, **231** (1950), 943—945.
[3] Sur la cohomologie des variétés de Stiefel et de certains groups de Lie, *Compt. Rend.*, **232** (1951), 1628—1630.
[4] La transgression dans les espaces fibres principaux, *Compt. Rend.*, **232** (1951), 2392—2394.
[5] Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogènes de groups de Lie compacts, *Ann. Math.*, **57** (1953), 115—207. (Русский перевод: Борель А., О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли, сб. «Расслоенные пространства», М., 1958, 163—246.)
[6] Topology of Lie groups and characteristic classes, *Bull. Am. Math. Soc.*, **61** (1955), 397—432.

Борель, Хирцебрух (Borel A., Hirzebruch F.)
[1] Characteristic classes and homogeneous spaces, I, II, III, *Am. J. Math.*, **80** (1958), 458—538; 81 (1959), 315—382; **82** (1960), 491—504.

Ботт (Bott R.)
[1] An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, *Bull. Soc. Math. France*, 84 (1956), 252—281.
[2] Homogeneous vector bundles, *Ann. Math.*, (2) **66** (1957), 203—248.
[3] The stable homotopy of the classical groups, *Ann. Math.*, **70** (1959), 313—337.
[4] Quelques remarques sur les théorèmes de periodicité de topologie, Lille, 1959, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 293—310.
[5] Vector fields on spheres and allied problems, Monographies de L'Enseignement mathematique, Geneve, Suisse, n°11, 25—38.
[6] Lectures on $K(X)$, mimeographed notes, Harward University, Cambridge, Mass, 1962. (Русский перевод: Ботт Р., K-теория, сб. *Математика*, 11 : 2 (1967), 32—57; 11 : 3 (1967), 3—36.)
[7] A note on the KO-theory of sphere bundles, *Bull. Am. Math. Soc.*, **68** (1962), 395—400.

Бурбаки Н.
[1] Общая топология, Физматгиз, М., 1966.

Ву Вэнь-цзюнь (Wu Wen-Tsun)
[1] On the product of sphere bundles and the duality theorem modulo two, *Ann. Math.*, **49** (1948), 641—653.
[2] Sur les classes caracteristiques d'un espace fibrées on spheres, *Compt. Rend.*, **227** (1948), 582—584.
[3] Les *i*-carrés dans une variété grassmannienne, *Compt. Rend.*, **230** (1950), 918—920.
[4] Classes caractéristiques et *i*-carrés d'une variété, *Compt. Rend.*, **230** (1950), 508—511.
[5] Sur les classes caractéristiques des structures fibrées spheriques, Actualities Sci. Inc., no. 1183 — Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, 5—98, 155—156, Hermann & Cie, Paris, 1952.

Ву Чань-сян (Wu Chung-Hsiang)
[1] On Wu's formula of Steenrod squares on Stiefel — Whitney classes, *Boletin de la Sociedad Mexicana*, 8 (1963), 20—25.

Годеман Р.
[1] [1] Алгебранческая топологня и теорня пучков, ИЛ, М., 1961.

Гротендик А.
[2] [1] О некоторых вопросах гомологической алгебры, ИЛ, М., 1961.

Гуревич (Hurewicz W.)
[1] On the concept of fibre space, *Proc. Nut. Acad. Sci. USA*, **41** (1955), 956—961.
[2] Betrage zur Topologie der Deformationen, I—IV, *Proc. Koninkl. Akad. Westenschap Amsterdam*, **38** (1935), 112—119, 521—528; **39** (1936), 117—126, 215—224.

Гуревич, Стинрод (Hurewicz W., Steenrod N.)
[1] Homotopy relations in fibre space, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **27** (1941), 60—64.

Джеймс (James I. M.)
[1] Multiplication on spheres, I, *Proc. Am. Math. Soc.*, 8 (1957), 192—196.
[2] Multiplication on spheres, II, *Trans. Am. Math. Soc.*, 84 (1957), 545—558.
[3] The intrinsic join: a study of the homotopy groups of Stiefel manifolds, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 8 (1958), 507—535.
[4] Cross-sections of Stiefel manifolds, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 8 (1958), 536—547.
[5] Spaces associated to Stiefel manifolds, *Proc. London Math. Soc.*, 3 (1959), 115—140.

Джеймс, Уайтхед Дж. Г. К. (James I. M., Whitehead J. H. C.)
[1] Note on fibre spaces, *Proc. London Math. Soc.*, 4 (1954), 129—137.
[2] The homotopy theory of sphere bundles over spheres, I, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 4 (1954), 196—218.
[3] The homotopy theory of sphere bundles over spheres, II, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 5 (1955), 148—166.

Дольд (Dold A.)
[1] Über faserweise Homotopieäquivalenz von Faserraümen, *Math. Z.*, **62** (1955), 111—126.
[2] [2] Vollstandigkeit der Wuschen relation zwischen den Stiefel — Whitneyschen Zahlen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.*, **65** (1956), 200—206.

[1] – [3] Erzeugende der Thomschen Algebra n, *Math. Z.*, **65** (1956), 25—35.
[3] – [4] Partitions of unity in the theory of fibrations, *Ann. Math.*, 78 (1963), 223—255.
[5] Half exact functions and cohomology theory, Summer Institute, American Mathematical Society, 1963. (Русский перевод переработаииой автором статьи опубликоваи под иазваиием «Абелевы полуточные функторы» в сб. *Математика*, **14** : 11 (1970), 94—103.)

Дольд, Лашоф (Dold A., Lashof R.)
[1] Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles, *Illinois J. Math.*, **3** (1959), 255—305.

Иокота (Yokota I.)
[1] On the cellular decompositions of unitary groups, *J. Inst. Polytech., Osaka City Univ.*, 7 (1956), 30—49.

Картаи (Cartan H.)
[1] Sur les groupes d'Eilenberg — MacLane $K(\pi, n)$, I, Methode des constructions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 467—471.
[2] Sur les groupes d'Eilenberg — MacLane $K(\pi, n)$, II, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 704—707.
[3] Sur l'itération des opérations de Steenrod, *Comment. Math. Helv.*, **29** (1955), 40—59.

Картаи А., Эйленберг С.
[1] Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1960.

Кервер (Kervaire M. A.)
[1] Relative characteristic classes, *Am. J. Math.*, **79** (1957), 517—558.
[2] Pontrjagin classes, *Am. J. Math.*, **80** (1958), 632—638.
[3] Obstructions and characteristic classes, *Am. J. Math.*, **81** (1959), 773—784.

Маклейи (MacLane S.)
[1] Categorical algebra, *Bull. Am. Math. Soc.*, **71** (1965), 40—106. (Русский перевод: Маклейн С., Алгебра категорий, сб. *Математика*, **9** : 1 (1965), 3—50.)

Миллер (Miller C. E.)
[1] The topology of rotation groups, *Ann. Math.*, **57** (1953), 90—114.

Милнор (Milnor J.)
[1] – [1] Construction of universal bundles, I, *Ann. Math.*, (2), **63** (1956), 272—284.
[1] – [2] Construction of universal bundles, II, *Ann. Math.*, (2) **63** (1956), 430—436.
[3] On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. Math.*, (2) **64** (1956), 399—405. (Русский перевод: Милнор Дж., О миогообразиих, гомеоморфиых семимерной сфере, сб. *Математика*, **1** : 3 (1957), 35—42.)
[4] The theory of characteristic classes, mimeographed notes, Princeton University, Princeton, N. J., 1957. (Русский перевод: Милнор Дж., Лекции о характеристических классах, I, II, сб. *Математика*, **3** : 4 (1959), 3—53; **9** : 4 (1965), 3—40.)
[5] The Steenrod algebra and its dual, *Ann. Math.*, (2) **67** (1957), 150—171.
[6] On spaces having the homotopy type of *CW*-complex, *Trans. Am. Math. Soc.*, **90** (1959); 272—280.
[7] Some consequences of a theorem of Bott, *Ann. Math.*, **68** (1958),

444—449. (Русский перевод: Милиор Дж., Несколько следствий одной теоремы Ботта, сб. *Математика*, **3 : 3** (1959), 3—9.)

Милнор, Кервер (Milnor J., Kervaire M. A.)
[1] Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin, Proc. Intern. Congr. Math., 1958.

Милнор, Спеньер (Milnor J., Spanier E.)
[1] Two remarks on fibre homotopy type, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 585—590.

Миядзаки (Miyazaki H.)
[1] The paracompactness of *CW*-complexes, *Tohoku Math. J.*, (2) 4 (1952), 309—313.

Морин (Morin B.)
[1] Champs de vecteurs sur les spheres d'aprés J. F. Adams, Seminaire Bourbaki, no. 233, 1961—1962.

Мур (Moore J. C.)
[1] On the periodicity theorem for complex vector bundles, Seminaire, H. Cartan, 1959—1960.

Понтрягин Л. С.
[1] Непрерывные группы, Гостехиздат, М.—Л., 2 изд., 1954., 3 изд., Наука, 1973
[2] Характеристические циклы дифференцируемых миогообразий, *Мат. сб.*, н. с., **21** (1947), 233—284.

Пуппе (Puppe D.)
[1] Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen, I, *Math. Z.*, **69** (1958), 299—344.
[2] Faserraüme, University of Saarland, Saarbrucken, Germany, 1964.

Сандерсон (Sanderson B. J.)
[1] Immersions and embeddings of projective spaces, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **14** (1964), 137—153.
[2] A non-immersion theorem for real projective space, *Topology*, **2** (1963), 209—211.

Серр (Serre J. P.)
[1] Homologie singulière des espaces fibres, *Ann. Math.*, **54** (1951), 425—505. (Русский перевод: Серр Ж.-П., Сингулярные гомологии расслоениых пространств, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ. М., 1958, 9—114.)
[2] Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, *Ann. Math.*, **58** (1953), 258—294. (Русский перевод: Серр Ж.-П., Гомотопические группы и классы абелевых групп, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958, 124—162).
[3] Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg — MacLane, *Comment. Math. Helv.*, 27 (1953), 196—232.

Спеньер (Spanier E.)
[1] A formula of Atiyah and Hirzebruch, *Math. Z.*, **80** (1962), 154—162.
[2] Function spaces and duality, *Ann. Math.*, **70** (1959), 338—378.
[3] Algebraic Topology, New York, 1966 (готовится русский перевод).

Спеньер, Уайтхед (Spanier E., Whitehead J. H. C.)
[1] Duality in homotopy theory, *Mathematika*, **2** (1955), 56—80.

Сташеф (Stasheff J.)
[1] A classification theorem for fibre spaces, *Topology*, **2** (1963), 239—246.

Стинрод (Steenrod N. E.)
[1] Classification of sphere bundles, *Ann. Math.*, **45** (1944), 294—311.
[2] Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.
[3] Cohomology operations, *Ann. Math. Studies*, **50** (1962).

Стинрод, Уайтхед (Steenrod N. E., Whitehead J. H. C.)
[1] Vector fields on the *n*-sphere, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **37** (1951), 58—63.

Стинрод Н., Эйленберг С.
[1] Основания алгебраической топологии, ИЛ, М., 1956.

Тода (Toda H.)
[1] Generalized Whitehead product and homotopy of spheres, *J. Inst. Polytech., Osaka City Univ.*, **3** (1952), 43—82.
[2] Reduced join and Whitehead product, *J. Inst. Politech., Osaka City Univ.*, Ser A, **8** (1957), 15—30.

Том (Thom R.)
[1] Espaces fibres en sphères et carrés de Steenrod, *Ann. Ecole Norm. Sup.*, **69** (1952), 109—182.
[2] Quelques propriétés globales des varietes differentiables, *Comment. Math. Helv.*, **28** (1954), 17—86. (Русский перевод Том Р., Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий, сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, М., 1958, 291—351.)

Уайтхед Дж. (Whitehead G. W.)
[1] On the homotopy groups of spheres and rotation groups, *Ann. Math.*, **43** (1942), 634—640.
[2] Homotopy properties of the real orthogonal groups, *Ann. Math.*, (2) **43** (1942), 132—146.
[3] On families of continuous vector fields over spheres, *Ann. Math.*, (2) **47** (1946), 779—785.
[4] A generalization of the Hopf invariant, *Ann. Math.*, **51** (1950), 192—238.
[5] Generalized homology theories, *Trans. Am. Math. Soc.*, **102** (1962), 227—283.

Уайтхед Дж. Г. К. (Whitehead J. H. C.)
[1] On the groups $\pi_r(V_{n,m})$ and sphere bundles, *Proc. London Math. Soc.*, (2) 48 (1944), 243—291.
[2] Combinatorial homotopy, I, *Bull. Am. Math. Soc.*, **55** (1949), 213—245.
[3] Combinatorial homotopy, II, *Bull. Am. Math. Soc.*, **55** (1949), 453—496.

Уитни (Whitney H.)
[1] Sphere spaces, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **21** (1935), 462—468.
[2] Topological properties of differentiable manifolds, *Bull. Am. Math. Soc.*, **43** (1937), 785—805.
[3] On the theory of sphere bundles, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **26** (1940), 148—153.
[4] On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topology, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich, 1941.

Фокс (Fox R. H.)
[1] On fibre spaces, I, *Bull. Am. Math. Soc.*, **49** (1943), 555—557.
[2] On fibre spaces, II, *Bull. Am. Math. Soc.*, **49** (1943), 733—735.
[3] On topologies for function spaces, *Bull. Am. Math Soc.*, **51** (1945), 429—432.

Фрейденталь (Freudenthal H.)
[1] Über die Klassen der Sphärenabbildungen, *Comp. Math.*, **5** (1937), 299—314.

Хант (Hunt G.)
[1] A theorem of Elie Cartan, *Proc. Am. Math. Soc.*, **7** (1956), 307—308.

Харди, Райт (Hardy G. H., Wright E. M.)
[1] Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1954.

Хилтон (Hilton P. J.)
[1] Introduction to Homotopy Theory, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, no. 43, Cambridge University Press, New York, 1953.

Хирш (Hirsch M. W.)
[1] Immersions of manifolds, *Trans. Am. Math. Soc.*, **93** (1959), 242—276.

Хирцебрух (Hirzebruch F.)
! — [1] Topological Methods in Algebraic Geometry, 3d ed., Springer-Verlag, Berlin, 1966. (Русск. пер. Тополог. методы алгебр. геом., «Мир», 1973)
[8] — [2] A Riemann — Roch theorem for differentiable manifolds, Seminaire Bourbaki, no. 177, 1959.

Хопф (Hopf H.)
[1] Über die Abbildungen der 3-Sphäre auf die Kugelflache, *Math. Ann.*, **104** (1931), 637—665.
[2] Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, *Fundam. Math.*, **25** (1935), 427—440.
[3] Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, *Ann. Math.*, (2) **42** (1941), 22—52.
[4] Introduction a la théorie des espaces fibres, Colloque de topologie (espaces fibres), Brussels, Paris, 1950, 9—14.
[5] Sur une formule de la théorie des espaces fibres, Colloque de topologie (espaces fibres), Brussels, Paris, 1950, 117—121.

Ху Сы-цзян (Hu Sze-Tsen)
[1] Теория гомотопий, изд-во «Мир», М., 1964.

Хюбш (Huebsch Wm.)
[1] On the covering homotopy theorem, *Ann. Math.*, (2) **61** (1955), 555—563.
[2] Covering homotopy, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 281—291.

Чжэнь Шэн-шень (Chern S. S.)
[7] — [1] Characteristic classes of Hermitian manifolds, *Ann. Math.*, **47** (1946), 85—121.
[2] On the characteristic ring of a differentiable manifold, *Acad. Sinica Sci. Record*, **2** (1947), 1—5.
[3] On the characteristic classes of Riemannian manifolds, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **33** (1947), 78—82.
[4] On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle, *Ann. Math.*, (2) **49** (1948), 362—372.
[5] On curvature and characteristic classes of a Rimann manifold, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **20** (1955), 117—126.

Чжэнь Шэн-шень, Спеньер (Chern S. S., Spanier E.)
[1] The homology structure of sphere bundles, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **36** (1950), 248—255.

Чжэнь Шэн-шень, Сун Ий-фан (Chern S. S., Sun Y. F.)
[1] The embedding theorem for fibre bundles, *Trans. Am. Math. Soc.*, **67** (1949), 286—303.

Чжэнь Шэн-шень, Ху Сы-цзян (Chern S. S., Hu Sze-Tsen)
[1] Parallelizability of principal fibre bundles, *Trans. Am. Math. Soc.*, **67** (1949), 304—309.

Чжэнь Шэн-шень, Хирцебрух, Серр (Chern S. S., Hirzebruch F., Serre J. P.)
[1] On the index of a fibred manifold, *Proc. Am. Math. Soc.*, **8** (1957), 587—596.

Шевалле (Chevalley C.)
[1] Теория групп Ли, ИЛ, М., 1948, 1958.
[2] The algebraic theory of spinors, Columbia University Press, New York, 1954.

Экман (Eckmann B.)
[1] Beweis des Satzes von Hurwitz — Radon, *Comment. Math. Helv.*, **15** (1942), 358—366.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Д. Хьюзмоллер

РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Редактор *Г. М. Цукерман*
Художник *В. Е. Карпов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Е. С Потапенкова*
Корректор *О. К. Румянцева*

Сдано в производство 3/XII 1969 г.
Подписано к печати 5/VI 1970 г.
Бумага № 1 $60 \times 90^1/_{16}$ — 13,88 бум. л.
Печ. л. 27,75. Уч.-изд. л. 24,30
Изд. № 1/4861. Цена 1 р. 93 к. Зак. 422

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29

ор. ~~22~~ 21, 26, 41, 15, 20, 42, 49, 51,
56, 57, 58, 59, 61, 63, 66, 67, 68,
126, 127, 131, 137, 138, 140, 141, 145,
170, 172, 174, 178, 194, 235, 239, 24
246, 247, 255, 259, 273, 296, 304
303, 305, 306, 9, 435, 346, 350
359, 366, 367, 398, 314, 322, 324,
325, 326, 329, 330, 333, 356, 402,
426