В. ХОДЖ и Д. ПИДО

МЕТОДЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ТОМ III

Перевод с английского
А. И. УЗКОВА

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва—1955

METHODS
OF
ALGEBRAIC GEOMETRY

by

W. V. D. HODGE and D. PEDOE

VOLUME III

BOOK V: BIRATIONAL GEOMETRY

CAMBRIDGE
1954

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

Целью этого тома является изложение современных алгебраических методов, полезных при исследованиях в области бирациональной геометрии алгебраических многообразий. Подобное изложение уже опубликовано Вейлем в его книге [9]. Когда будут опубликованы лекции Зарисского, прочитанные в Коллоквиуме Американского математического общества в 1947 г., станет доступным еще одно полное изложение этой области геометрии. Оправданием появления третьей работы, посвященной тому же предмету, служит то, что этот том предназначен для другой категории читателей. Он предназначен для читателя, хорошо знакомого с классическими методами алгебраической геометрии, желающего овладеть новыми мощными методами, которые дает современная алгебра, и в то же время выяснить, что представляют собой эти методы с точки зрения привычных ему понятий. Таким образом, здесь мы будем заниматься в первую очередь методами, а не получением оригинальных результатов и не изложением единой теории многообразий.

Указанная цель повлияла на план этого тома во многих отношениях. Во-первых, мы ограничились рассмотрением многообразий, определенных над основным полем без характеристики. Это сделано отчасти потому, что геометрический смысл алгебраических методов и результаты в этом случае легче воспринимаются геометром, привычным к классическим понятиям. Кроме того, хотя современные алгебраические методы и позволили значительно продвинуться в теории алгебраических многообразий над полями конечной характеристики, многие результаты, которые в классической алгебраической геометрии считаются фундаментальными, до сих пор доказаны лишь при упомянутом ограничении.

Во-вторых, почти полторы главы посвящены целиком алгебраическим теориям. Теория идеалов в кольцах и теория нормирований являются центральными в современной алгебре, и можно было бы отослать читателя к другим монографиям по этим теориям. Но наша задача состояла именно в объединении всего материала, необходимого геометру, и по этой причине мы сочли целесообразным включить в книгу изложение указанных алгебраических теорий. Алгебраическая часть книги была написана с учетом потребностей геометрии, и это часто оказывало влияние на акцентирование тех или иных понятий. Тем не менее мы стремились на начальных стадиях дать достаточно общее изложение, которое могло бы создать у читателя представление о значении излагаемых теорий вообще.

В-третьих, чтобы ознакомить читателя с возможно бо́льшим числом методов, мы не ограничивались изложением единственного метода и время от времени пользовались средствами, которые знатоку предмета могут показаться неизящными. Например, изучение бирациональных преобразований на начальных стадиях можно было бы, как показал Вейль, проводить без ссылок на теорию нормирований, да и обоснование теории бирациональных преобразований с помощью теории специализаций казалось бы более приятным с эстетической точки зрения. Но возможность построения теории бирациональных преобразований в полном объеме без применения нормирований весьма маловероятна, и поэтому представляется необходимым, чтобы геометр имел в своем распоряжении и этот рабочий инструмент. Мы иногда применяли теорию нормирований лишь для иллюстрации излагаемых методов и там, где она не является настоятельно необходимой. Кроме того, некоторые результаты мы доказываем дважды, чтобы не отсылать читателя слишком часто назад.

В-четвертых, в наши задачи не входило изложение предмета настолько далеко, насколько это вообще возможно. Поэтому многие важные результаты алгебраической теории многообразий даже из той области, которой мы ограничились, вообще опущены. Однако мы надеемся, что этот том даст возможность читателю освоиться с излагаемыми в нем современными методами и что после изучения книги он сможет приступить к чтению работ, более далеко проникающих

в наш предмет. В отличие от большей части тома, посвященной основным принципам, во второй части главы XVIII рассматривается приложение изложенных методов к некоторым задачам значительной трудности: локальной теореме об униформизации и редукции особенностей алгебраической поверхности. Мы включили этот материал потому, что указанные задачи относятся к самым основам классической алгебраической геометрии и арифметическая теория многообразий позволяет достичь здесь состояния полной определенности и получить наиболее замечательные результаты. Поэтому было желательно дать изложение этих результатов в качестве иллюстрации описанных раньше методов.

Может показаться странным, что в нашей книге, посвященной бирациональной теории многообразий, нет упоминаний о работах большой итальянской геометрической школы. Объясняется это тем, что мы сосредоточиваем здесь внимание лишь на некоторых методах, разработанных в других странах. Свойства многообразий, открытием которых мы обязаны таким математикам, как Сегре, Кастельнуово, Энриквес и Севери, остались за пределами нашей работы. Труды этих геометров играли бы выдающуюся роль в любом более полном изложении приложений описанных в этой книге методов к теории бирациональных инвариантов алгебраических многообразий.

Мы с удовольствием пользуемся возможностью устранить недоразумение, часто возникавшее у наших друзей, относительно библиографических замечаний, сделанных в конце каждого из трех томов нашей работы. Цель этих замечаний состоит в указании основных источников, из которых черпались описываемые методы и результаты. Замечания не охватывают даже всех использованных работ, но мы надеемся, что они помогут читателю проследить источники излагаемых нами идей.

В частности, библиографические замечания не исчерпывают и всей литературы по обоснованию алгебраической геометрии, и даже литературы, связанной с излагаемыми нами методами. Иногда нам указывали, что следовало бы дать полный список работ по обоснованию алгебраической геометрии и что неудобно не перечислить всех математиков, писавших по этому вопросу. Вряд ли необходимо говорить,

что здесь нет преднамеренной невежливости. В конце нашей работы мы внимательно продумали возможность дать исчерпывающие указания такого рода, но скоро пришли к выводу о нецелесообразности этого. По вопросам, рассматриваемым в трех томах нашей книги, написано настолько много, что анализ и описание вклада отдельных математиков по этим вопросам составил бы большую исследовательскую работу, которую можно выполнить лишь в связи с историей значительной части математики. Любой же промежуточный курс, с одной стороны, содержал бы в себе опасность важных упущений и, с другой стороны, затянул бы на много месяцев окончание нашей работы, одновременно увеличив ее объем, уже и без того очень большой для тех целей, для которых она предназначена.

Кембридж
май 1953 г.

В. Ходж
Д. Пидо

ЧАСТЬ V

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА XV

ТЕОРИЯ ИДЕАЛОВ В КОММУТАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

Во втором томе мы занимались главным образом геометрией многообразий в проективном пространстве, рассматриваемых как подмногообразия этого пространства. Однако нам приходилось также рассматривать соотношения между различными многообразиями в одном и том же пространстве или в различных пространствах. При этом мы пользовались теорией соответствий, изложенной в гл. XI. В частности, время от времени мы пользовались бирациональными соответствиями между неприводимыми многообразиями. Неприводимые многообразия U и V, лежащие в пространствах с координатными системами $(x_0, \ldots, x_n)$ и $(y_0, \ldots, y_m)$, называются бирационально эквивалентными, если между ними существует алгебраическое соответствие, среди уравнений которого имеются уравнения вида

$$x_i f_j(y_0, \ldots, y_m) - x_j f_i(y_0, \ldots, y_m) = 0 \qquad (i, j = 0, \ldots, n),$$

$$y_i g_j(x_0, \ldots, x_n) - y_j g_i(x_0, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i, j = 0, \ldots, m),$$

где не все формы $f_i(y)$ обращаются в нуль на V и не все $g_i(x)$ обращаются в нуль на U. Изучение свойств, общих для всех бирационально эквивалентных многообразий, составляет содержание одной из важных ветвей алгебраической геометрии. В этой теории мы имеем дело главным образом не со свойствами индивидуальных многообразий, рассматриваемых как многообразия в проективном пространстве, а со свойствами систем бирационально эквивалентных многообразий. Теория, в которой изучаются указанные свойства, называется *бирациональной геометрией*.

Задачей этого тома является ознакомление читателя с наиболее важными алгебраическими методами, применяемыми в бирациональной геометрии, а также с основными результатами, с которыми геометру нужно ознакомиться перед тем, как начинать систематическое изучение этой ветви геометрии. Для этого необходимо более подробно изложить некоторые алгебраические понятия, уже введенные в томе I, а также ввести некоторые новые понятия. В гл. I было дано определение кольца. В дальнейших главах упоминалось также об идеалах в кольце, но при этом использовались только наиболее элементарные свойства идеалов. Теперь нам необходимо более систематически изучить коммутативные кольца и идеалы в них. Это и составляет задачу настоящей главы.

§ 1. Идеалы в коммутативных кольцах

Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное коммутативное кольцо. Непустое множество $\mathfrak{i}$, состоящее из элементов $\mathfrak{R}$, образует *идеал* кольца $\mathfrak{R}$, если оно обладает двумя следующими свойствами:

(I) если α и β — любые элементы из $\mathfrak{i}$, то элемент $\alpha - \beta$ также принадлежит $\mathfrak{i}$;

(II) если α принадлежит $\mathfrak{i}$ и ρ — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то произведение $\rho\alpha$ принадлежит $\mathfrak{i}$.

Кольцо $\mathfrak{R}$ содержит нулевой элемент. Если в свойстве (II) взять этот элемент в качестве ρ, то из (II) будет следовать, что элемент $0 \cdot \alpha = 0$ принадлежит $\mathfrak{i}$. Таким образом, каждый идеал кольца $\mathfrak{R}$ содержит нуль этого кольца. Далее, если множество $\mathfrak{i}$ состоит только из нуля кольца $\mathfrak{R}$, то оно удовлетворяет условиям (I) и (II) и будет поэтому идеалом. Такой идеал будет называться *нулевым идеалом* кольца $\mathfrak{R}$. Если множество $\mathfrak{i}$ содержит все элементы кольца $\mathfrak{R}$, то оно также удовлетворяет условиям (I) и (II) и, значит, также будет идеалом. Этот идеал называется *единичным идеалом* кольца $\mathfrak{R}$. Следовательно, любое коммутативное кольцо содержит по крайней мере два идеала — нулевой и единичный. Иногда эти идеалы называются *несобственными*. Идеалы, отличные от обоих упомянутых, называются *собственными*.

Если кольцо $\mathfrak{R}$ содержит единичный элемент e, причем e содержится также в $\mathfrak{i}$, то множество $\mathfrak{i}$ содержит произведение $\rho e = \rho$ при любом ρ из $\mathfrak{R}$. Таким образом, идеал $\mathfrak{i}$ является единичным в том и только в том случае, если он содержит e.

Полезно с самого начала установить, какие коммутативные кольца обладают только двумя несобственными идеалами. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай I. Пусть в $\mathfrak{R}$ имеются два элемента ρ и ω, для которых $\rho\omega \neq 0$ (это заведомо верно, если кольцо $\mathfrak{R}$ обладает единицей). Рассмотрим множество $\mathfrak{i}$ элементов вида $\sigma\omega$, где σ — любой элемент из $\mathfrak{R}$. Ясно, что в таком случае множество $\mathfrak{i}$ удовлетворяет условиям (I) и (II), так что $\mathfrak{i}$ — идеал. Ввиду того, что $\mathfrak{i}$ содержит элемент $\rho\omega \neq 0$, $\mathfrak{i}$ не может быть нулевым идеалом. Если кольцо $\mathfrak{R}$ обладает только несобственными идеалами, то из сказанного следует, что $\mathfrak{i} = \mathfrak{R}$. Таким образом, для любого элемента ν из $\mathfrak{R}$ в кольце $\mathfrak{R}$ найдется элемент x, удовлетворяющий условию

$$x\omega = \nu.$$

Пусть e — решение этого уравнения в случае, когда $\nu = \omega$, а x — решение при произвольном ν из $\mathfrak{R}$. Тогда

$$e\nu = ex\omega = x(e\omega) = x\omega = \nu.$$

Отсюда следует, что e является единицей кольца $\mathfrak{R}$. Пусть теперь ν — любой элемент из $\mathfrak{R}$, отличный от нуля. Тогда совокупность эле-

ментов вида $\sigma\nu$, где σ — произвольный элемент кольца $\mathfrak{R}$, образует идеал $\mathfrak{j}$, который содержит элемент $e\nu = \nu$ и поэтому должен быть единичным идеалом. Таким образом, найдется такой элемент ν' из $\mathfrak{R}$, для которого $\nu'\nu = e$. Следовательно, каждый ненулевой элемент из $\mathfrak{R}$ имеет обратный, так что $\mathfrak{R}$ есть поле.

Обратно, пусть $\mathfrak{R}$ — поле и $\mathfrak{i}$ — идеал в $\mathfrak{R}$, не являющийся нулевым идеалом. $\mathfrak{i}$ содержит элемент α, отличный от нуля. Если β — произвольный элемент из $\mathfrak{R}$, то, в силу свойства (II), множество $\mathfrak{i}$ должно содержать элемент $\beta\alpha^{-1} \cdot \alpha = \beta$. Отсюда следует, что $\mathfrak{i}$ содержит все элементы из $\mathfrak{R}$ и поэтому является единичным идеалом.

Случай II. Пусть $\mathfrak{R}$ — коммутативное кольцо, состоящее не только из нулевого элемента и такое, что для любых двух его элементов α и β будет $\alpha \cdot \beta = 0$. Если ω — элемент кольца $\mathfrak{R}$, отличный от нуля, то очевидно, что элементы $0, \pm\omega, \pm 2\omega, \pm 3\omega, \ldots$ образуют идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$, отличный от нулевого идеала. Следовательно, если кольцо $\mathfrak{R}$ обладает только несобственными идеалами, то должно быть $\mathfrak{i} = \mathfrak{R}$. Элементы $0, \pm\omega, \pm 2\omega, \pm 3\omega, \ldots$ не могут быть все различными, так как в этом случае элементы $0, \pm 2\omega, \pm 4\omega, \ldots$ составляли бы собственный идеал кольца $\mathfrak{R}$, а мы предположили, что $\mathfrak{R}$ обладает только несобственными идеалами. Пусть m — наименьшее целое число, для которого $m\omega = 0$. Тогда элементы $0, \omega, 2\omega, \ldots, (m-1)\omega$ исчерпывают все $\mathfrak{R}$. Если число m не просто, например $m = ab$, где $a > 1$ и $b > 1$, то совокупность элементов $0, a\omega, 2a\omega, \ldots, (b-1)a\omega$ составляла бы собственный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Следовательно, m является некоторым простым числом: $m = p$. Если через $\mathfrak{Q}$ обозначить матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

над кольцом вычетов целых чисел по модулю p, то из сказанного выше следует, что кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно кольцу, состоящему из элементов $0, \mathfrak{Q}, 2\mathfrak{Q}, \ldots, (p-1)\mathfrak{Q}$. Непосредственно очевидно также, что если кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно последнему кольцу, то все его идеалы будут несобственными. Таким образом, доказана следующая

Теорема I. *Если кольцо $\mathfrak{R}$ является полем, то в нем нет собственных идеалов. Любое кольцо без собственных идеалов либо является полем, либо изоморфно кольцу матриц вида*

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

над кольцом вычетов целых чисел по некоторому простому модулю p.

Вернемся теперь к общей теории идеалов коммутативного кольца $\mathfrak{R}$. Мы можем построить идеал следующим образом. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — конечная система элементов из $\mathfrak{R}$; рассмотрим совокупность $\mathfrak{i}$

элементов кольца $\mathfrak{R}$, которые могут быть записаны в виде

$$\alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_r\omega_r \pm n_1\omega_1 \pm \ldots \pm n_r\omega_r, \tag{1}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — произвольные элементы из $\mathfrak{R}$, а выражения $n_i\omega_i$ представляют собой суммы n_i слагаемых, каждое из которых равно ω_i. В случае, если в $\mathfrak{R}$ есть единица e, элемент (1) можно переписать в виде

$$(\alpha_1 \pm n_1 e)\,\omega_1 + \ldots + (\alpha_r \pm n_r e)\,\omega_r = \alpha_1'\omega_1 + \ldots + \alpha_r'\omega_r,$$

где $\alpha_1', \ldots, \alpha_r'$ — элементы кольца $\mathfrak{R}$. Следовательно, в этом случае в выражении (1) излишне вводить члены $n_1\omega_1, \ldots, n_r\omega_r$. Можно проверить непосредственно, что множество $\mathfrak{i}$ удовлетворяет условиям (I) и (II), а значит, образует идеал. Этот идеал обычно называется идеалом, *порожденным элементами* $\omega_1, \ldots, \omega_r$, или идеалом, *имеющим базис* $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Такой идеал обозначается через $\mathfrak{R} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_r)$. Из определения базиса ясно, что элементы базиса некоторого идеала $\mathfrak{i}$ сами принадлежат $\mathfrak{i}$. Однако, вообще говоря, не каждый идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$ обладает конечным базисом, т. е. не для каждого идеала $\mathfrak{i}$ из $\mathfrak{R}$ найдется конечная система элементов $\omega_1, \ldots, \omega_r$, удовлетворяющая соотношению $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_r)$. Если кольцо $\mathfrak{R}$ обладает тем свойством, что каждый его идеал имеет конечный базис, то мы будем говорить, что *в кольце* $\mathfrak{R}$ *справедлива теорема о базисе*. Многие результаты, имеющие место для колец, в которых справедлива теорема о базисе, уже не верны для более общих колец. Примером кольца, в котором теорема о базисе справедлива, является кольцо многочленов от r неизвестных над коммутативным полем (гл. IV, § 2, теорема I). Для некоторых колец, например для кольца целых чисел или для кольца многочленов от одного неизвестного над коммутативным телом, можно доказать, что в них каждый идеал имеет базис, состоящий из одного элемента. Идеал, порождаемый одним элементом, называется *главным идеалом*. Кольцо, в котором каждый идеал является главным, называется *кольцом главных идеалов*.

Введем теперь некоторые обозначения. Если α — любой элемент идеала $\mathfrak{i}$, то мы будем писать $\alpha \in \mathfrak{i}$ или, более часто,

$$\alpha = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

В случае, когда $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_r)$, мы будем записывать то же самое так:

$$\alpha = 0 \pmod{\omega_1, \ldots, \omega_r}.$$

Если $\mathfrak{j}$ — идеал, каждый элемент которого принадлежит $\mathfrak{i}$, то будем писать $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{i}$ или, чаще,

$$\mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Очевидно, что если одновременно

$$\mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{j}),$$

то $\mathfrak{i} = \mathfrak{j}$.

Теперь определим несколько элементарных операций, которые можно производить над идеалами.

I. Пусть $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ — идеалы коммутативного кольца $\mathfrak{R}$. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{k}$ элементов кольца $\mathfrak{R}$, которые можно записать в виде $\alpha+\beta$, где

$$\alpha=0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \beta=0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Если $\alpha+\beta$ и $\alpha'+\beta'$ — два таких элемента, то

$$(\alpha+\beta)-(\alpha'+\beta')=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta'),$$

где

$$\alpha-\alpha'=0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \beta-\beta'=0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Если ρ — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то

$$\rho(\alpha+\beta)=\rho\alpha+\rho\beta,$$

где

$$\rho\alpha=0 \quad (\mathfrak{i}), \qquad \rho\beta=0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{k}$ есть идеал. Он называется *объединением* (или *суммой*) идеалов $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ и обозначается символом $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$.

Сумма $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$ обладает следующими свойствами, доказательства которых очевидны:

(I) $\mathfrak{i} \subseteq (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}), \quad \mathfrak{j} \subseteq (\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$;

(II) $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})=(\mathfrak{j}, \mathfrak{i})$;

(III) $(\mathfrak{i}, \mathfrak{i})=\mathfrak{i}$;

(IV) если $\mathfrak{a}=(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$, $\mathfrak{b}=(\mathfrak{j}, \mathfrak{k})$, где $\mathfrak{k}$ — любой идеал кольца $\mathfrak{R}$, то $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k})=(\mathfrak{i}, \mathfrak{b})$, так как обе части состоят в точности из тех элементов $\mathfrak{R}$, которые могут быть записаны в виде $\alpha+\beta+\gamma$, где

$$\alpha=0 \quad (\mathfrak{i}), \quad \beta=0 \quad (\mathfrak{j}), \quad \gamma=0 \quad (\mathfrak{k}).$$

Мы можем, не опасаясь путаницы, писать $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k})=(\mathfrak{i}, \mathfrak{b})=(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k})$. Обобщая сказанное, можно определить сумму любого конечного числа идеалов.

(V) Если идеалы $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ оба обладают конечными базисами:

$$\mathfrak{i}=\mathfrak{R}\cdot(\omega_1, \ldots, \omega_r),$$

$$\mathfrak{j}=\mathfrak{R}\cdot(\nu_1, \ldots, \nu_s),$$

то

$$(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})=\mathfrak{R}\cdot(\omega_1, \ldots, \omega_r, \nu_1, \ldots, \nu_s).$$

II. Если $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ — идеалы кольца $\mathfrak{R}$, то совокупность элементов α из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условиям

$$\alpha=0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \alpha=0 \quad (\mathfrak{j}),$$

очевидно, является идеалом. Обозначим его через $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ и будем называть *пересечением* идеалов $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$. Следующие свойства пересечения очевидны:

$$\text{(I)}\quad [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] \subseteq \mathfrak{i},\ [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] \subseteq \mathfrak{j};$$

$$\text{(II)}\quad [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] = [\mathfrak{j}, \mathfrak{i}];$$

$$\text{(III)}\quad [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = \mathfrak{i};$$

$$\text{(IV)}\quad [\mathfrak{i}, [\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]] = [[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}], \mathfrak{k}],$$

где $\mathfrak{k}$ — любой идеал кольца $\mathfrak{R}$. Не опасаясь путаницы, можно писать $[\mathfrak{i}, [\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]] = [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}]$. Аналогично можно определить пересечение любого числа идеалов из $\mathfrak{R}$.

III. Если $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — идеалы кольца $\mathfrak{R}$, то совокупность элементов $\alpha\beta$, где

$$\alpha = 0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \beta = 0 \quad (\mathfrak{j}),$$

вообще говоря, уже не будет идеалом в $\mathfrak{R}$. Но элементы из $\mathfrak{R}$, записываемые в виде конечных сумм $\sum_1^s \alpha_k\beta_k$, в которых

$$\alpha_k = 0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \beta_k = 0 \quad (\mathfrak{j})$$

при $k = 1, \ldots, s$, как легко проверить, всегда образуют идеал. Мы будем называть его *произведением* идеалов $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ и обозначать через $\mathfrak{ij}$. Можно проверить непосредственно, что умножение идеалов коммутативного кольца коммутативно и ассоциативно:

$$\mathfrak{ij} = \mathfrak{ji}, \qquad \mathfrak{i}(\mathfrak{jk}) = (\mathfrak{ij})\mathfrak{k} = \mathfrak{ijk}.$$

Кроме того,

$$\mathfrak{ij} = 0 \quad (\mathfrak{i}), \qquad \mathfrak{ij} = 0 \quad (\mathfrak{j}),$$

а значит,

$$\mathfrak{ij} \subseteq [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}].$$

Полагая $\mathfrak{j} = \mathfrak{i}$, мы можем определить степени $\mathfrak{i}^2, \mathfrak{i}^3, \ldots, \mathfrak{i}^\rho, \ldots$ идеала $\mathfrak{i}$ для любого целого числа $\rho \geqslant 1$. Если кольцо $\mathfrak{R}$ имеет единицу и если (1) — его единичный идеал, то, поскольку любой элемент α из $\mathfrak{i}$ может быть записан в виде $e\alpha$, он лежит в $\mathfrak{i}(1)$. Следовательно, $\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{i}(1))$. Но мы имеем $\mathfrak{i}(1) = 0 \quad (\mathfrak{i})$, и поэтому

$$\mathfrak{i}(1) = \mathfrak{i}.$$

IV. Пусть $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — два идеала в $\mathfrak{R}$. Рассмотрим элементы γ из $\mathfrak{R}$, для которых

$$\gamma\alpha = 0 \quad (\mathfrak{i})$$

при любом α из $\mathfrak{j}$. Если γ и γ' — два таких элемента, а ρ — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то

$$(\gamma - \gamma')\alpha = 0 \quad (\mathfrak{i}), \qquad \rho\gamma\alpha = 0 \quad (\mathfrak{i})$$

для любого элемента α из $\mathfrak{j}$. Следовательно, элементы γ, обладающие указанным свойством, образуют идеал кольца $\mathfrak{R}$. Мы будем называть этот идеал *частным* идеалов $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ и обозначать его через $\mathfrak{i}:\mathfrak{j}$. Очевидно, что

$$\mathfrak{i}=0 \quad (\mathfrak{i}:\mathfrak{j})$$

и

$$\mathfrak{i}:\mathfrak{i}=\mathfrak{R}.$$

Докажем теперь еще некоторые свойства четырех только что введенных операций.

Теорема II. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{i}(\mathfrak{j},\ \mathfrak{k})=(\mathfrak{ij},\ \mathfrak{ik}).$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — элементы идеала $\mathfrak{i}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — элементы $\mathfrak{j}$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ — элементы $\mathfrak{k}$. Любой элемент идеала $\mathfrak{i}(\mathfrak{j}, \mathfrak{k})$ имеет вид

$$\sum_1^s \alpha_a(\beta_a+\gamma_a)=\sum_1^s \alpha_a\beta_a+\sum_1^s \alpha_a\gamma_a \in (\mathfrak{ij},\ \mathfrak{ik}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{i}(\mathfrak{j},\ \mathfrak{k}) \subseteq (\mathfrak{ij},\ \mathfrak{ik}). \tag{2}$$

Обратно, любой элемент из $(\mathfrak{ij}, \mathfrak{ik})$ имеет вид

$$\sum_1^s \alpha_a\beta_a+\sum_1^t \alpha_{s+b}\gamma_{s+b}=\sum_1^{s+t} \alpha_a(\beta_a+\gamma_a) \in \mathfrak{i}(\mathfrak{j},\ \mathfrak{k}),$$

где

$$\beta_{s+1}=\ldots=\beta_{s+t}=\gamma_1=\ldots=\gamma_s=0.$$

Поэтому

$$(\mathfrak{ij},\ \mathfrak{ik}) \subseteq \mathfrak{i}(\mathfrak{j},\ \mathfrak{k}). \tag{3}$$

Нужный результат следует теперь из (2) и (3).

Теорема III. *Имеет место равенство*

$$[\mathfrak{i}_1,\ \mathfrak{i}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{i}_r]:\mathfrak{j}=[\mathfrak{i}_1:\mathfrak{j},\ \mathfrak{i}_2:\mathfrak{j},\ \ldots,\ \mathfrak{i}_r:\mathfrak{j}].$$

Если

$$\gamma\mathfrak{j}=0 \quad ([\mathfrak{i}_1,\ \mathfrak{i}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{i}_r]),$$

то

$$\gamma\mathfrak{j}=0 \quad (\mathfrak{i}_a) \qquad (a=1,\ \ldots,\ r).$$

Следовательно,

$$\gamma=0 \quad (\mathfrak{i}_a:\mathfrak{j}) \qquad (a=1,\ \ldots,\ r),$$

и поэтому

$$\gamma=0 \quad ([\mathfrak{i}_1:\mathfrak{j},\ \mathfrak{i}_2:\mathfrak{j},\ \ldots,\ \mathfrak{i}_r:\mathfrak{j}]),$$

откуда вытекает, что

$$[\mathfrak{i}_1,\ \mathfrak{i}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{i}_r]:\mathfrak{j} \subseteq [\mathfrak{i}_1:\mathfrak{j},\ \mathfrak{i}_2:\mathfrak{j},\ \ldots,\ \mathfrak{i}_r:\mathfrak{j}]. \tag{4}$$

Обратно, если

$$\gamma \in [i_1 : j,\ i_2 : j,\ \ldots,\ i_r : j],$$

то

$$\gamma j = 0 \quad (i_a) \qquad (a = 1,\ \ldots,\ r),$$

а значит,

$$\gamma j = 0 \quad ([i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r]),$$

т. е.

$$\gamma \in [i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r] : j.$$

Следовательно,

$$[i_1 : j,\ i_2 : j,\ \ldots,\ i_r : j] \subseteq [i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r] : j. \tag{5}$$

Теорема вытекает теперь из включений (4) и (5).

Теорема IV. *Справедливо соотношение*

$$[i,\ j]\,(i,\ j) = 0 \quad (ij).$$

Согласно теореме II,

$$[i,\ j]\,(i,\ j) = ([i,\ j]\,i,\ [i,\ j]\,j).$$

Ввиду того, что

$$[i,\ j]\,i = 0 \quad (i), \qquad [i,\ j]\,j = 0 \quad (j),$$

мы имеем

$$[i,\ j]\,i = 0 \quad (ij), \qquad [i,\ j]\,j = 0 \quad (ij).$$

Отсюда нужный результат вытекает непосредственно.

Следствие I. *Если* $(i,\ j) = \mathfrak{R}$ *и кольцо* $\mathfrak{R}$ *обладает единицей, то* $[i,\ j] = ij$.

В самом деле,

$$[i,\ j]\,(i,\ j) = [i,\ j]\,\mathfrak{R} = [i,\ j].$$

Поэтому

$$[i,\ j] \subseteq ij \subseteq [i,\ j].$$

Идеал i кольца $\mathfrak{R}$ называется *максимальным идеалом* в $\mathfrak{R}$, если $i \neq \mathfrak{R}$ и если для любого идеала j, удовлетворяющего условиям

$$i = 0 \quad (j), \qquad j \neq 0 \quad (i),$$

будет $j = \mathfrak{R}$. Из теоремы IV мы получаем

Следствие II. *Если кольцо* $\mathfrak{R}$ *обладает единицей и если* i *— максимальный идеал в* $\mathfrak{R}$, *то для любого идеала* j, *удовлетворяющего условию* $j \neq 0$ (i), *будет* $[i,\ j] = ij$.

Действительно, ввиду того, что $j \neq 0$ (i), сумма $(i,\ j)$, содержащая i, содержит также хотя бы один элемент, не принадлежащий i. Так как идеал i максимален, должно быть $(i,\ j) = \mathfrak{R}$. Нужный результат получается теперь из следствия I.

Теорема V. *Имеет место равенство*

$$i : (j_1,\ \ldots,\ j_r) = [i : j_1,\ \ldots,\ i : j_r].$$

Если $\gamma \in \mathfrak{i} : (\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_r)$, то

$$\gamma \mathfrak{j}_a = 0 \quad (\mathfrak{i}) \qquad (a = 1, \ldots, r).$$

Следовательно,

$$\gamma \in [\mathfrak{i} : \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{i} : \mathfrak{j}_r]. \tag{6}$$

С другой стороны, если $\gamma \in [\mathfrak{i} : \mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{i} : \mathfrak{j}_r]$, то

$$\gamma \mathfrak{j}_a = 0 \quad (\mathfrak{i}) \qquad (a = 1, \ldots, r),$$

а значит,

$$\gamma \in \mathfrak{i} : (\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_r). \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает нужное равенство.

Мы закончим этот параграф рассмотрением некоторых следствий предположения о том, что в кольце $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе.

Пусть $\mathfrak{R}$ — любое коммутативное кольцо, в котором справедлива теорема о базисе, и пусть $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3, \ldots$ — последовательность идеалов кольца $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathfrak{i}_1 = 0 \quad (\mathfrak{i}_2), \quad \mathfrak{i}_2 = 0 \quad (\mathfrak{i}_3), \ldots, \mathfrak{i}_r = 0 \quad (\mathfrak{i}_{r+1}), \ldots .$$

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{i}$ элементов кольца $\mathfrak{R}$, записываемых в виде конечных сумм $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j$, где каждый элемент α_j принадлежит некоторому идеалу $\mathfrak{i}_j$ из нашей последовательности. Очевидно, что множество $\mathfrak{i}$ удовлетворяет условиям определения идеала. Ввиду того, что в $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе, в $\mathfrak{i}$ найдется конечная система элементов $\omega_1, \ldots, \omega_r$, образующая базис для $\mathfrak{i}$. Но так как ω_a лежит в $\mathfrak{i}$, то

$$\omega_a = \sum_{j=1}^{s_a} \alpha_{aj},$$

где $\alpha_{aj} \in \mathfrak{i}_j$. Положим $t = \max [s_1, \ldots, s_r]$. Ввиду того, что

$$\alpha_{aj} = 0 \quad (\mathfrak{i}_j), \qquad \mathfrak{i}_j = 0 \quad (\mathfrak{i}_t)$$

при всех встречающихся значениях j, должно быть

$$\alpha_{aj} \in \mathfrak{i}_t.$$

Следовательно,

$$\omega_a = 0 \quad (\mathfrak{i}_t) \qquad (a = 1, \ldots, r),$$

и поэтому

$$\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{i}_t). \tag{8}$$

Пусть теперь k — любое целое число, большее t. Если $\alpha \in \mathfrak{i}_k$, то, по определению $\mathfrak{i}$, имеем $\alpha \in \mathfrak{i}$, а значит,

$$\mathfrak{i}_k = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Поэтому, в силу (8),

$$\mathfrak{i}_k = 0 \quad (\mathfrak{i}_t).$$

Но из неравенства $k > t$ следует, что

$$\mathfrak{i}_t = 0 \quad (\mathfrak{i}_k),$$

и поэтому

$$\mathfrak{i}_k = \mathfrak{i}_t.$$

Таким образом, для последовательности $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots$ найдется такое целое число t, что

$$\mathfrak{i}_t = \mathfrak{i}_{t+1} = \mathfrak{i}_{t+2} = \ldots .$$

Наоборот, предположим, что кольцо $\mathfrak{R}$ обладает тем свойством, что для любой последовательности $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots$ идеалов из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющей условиям

$$\mathfrak{i}_1 = 0 \quad (\mathfrak{i}_2), \quad \mathfrak{i}_2 = 0 \quad (\mathfrak{i}_3), \ldots,$$

необходимо найдется число t, начиная с которого имеют место равенства

$$\mathfrak{i}_t = \mathfrak{i}_{t+1} = \mathfrak{i}_{t+2} = \ldots .$$

Покажем, что отсюда следует справедливость в кольце $\mathfrak{R}$ теоремы о базисе. Пусть $\mathfrak{j}$ — любой идеал кольца $\mathfrak{R}$, а ω_1 — любой элемент из $\mathfrak{j}$. Тогда ясно, что

$$\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{R} \cdot (\omega_1) = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Если $\mathfrak{i}_1$ не совпадает с $\mathfrak{j}$, то $\mathfrak{j}$ содержит элемент ω_2, не принадлежащий $\mathfrak{i}_1$, и мы имеем

$$\mathfrak{i}_2 = \mathfrak{R} \cdot (\omega_1, \omega_2) = 0 \quad (\mathfrak{j}),$$
$$\mathfrak{i}_1 = 0 \quad (\mathfrak{i}_2).$$

Если $\mathfrak{i}_2$ не равен $\mathfrak{j}$, то мы выберем в $\mathfrak{j}$ элемент ω_3, не принадлежащий $\mathfrak{i}_2$, и продолжим таким же образом далее. В силу сделанного предположения, для последовательности $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots$ найдется целое число t, начиная с которого

$$\mathfrak{i}_t = \mathfrak{i}_{t+1} = \ldots,$$

если только последовательность не обрывается на члене $\mathfrak{i}_t$. Из равенства $\mathfrak{i}_t = \mathfrak{i}_{t+1}$ следует, что $\omega_{t+1} \in \mathfrak{i}_t$. Но это противоречит методу построения ω_{t+1}. Поэтому последовательность должна оборваться на некотором $\mathfrak{i}_t$. Но это может случиться лишь при $\mathfrak{i}_t = \mathfrak{j}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{j} = \mathfrak{i}_t = \mathfrak{R} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_t)$, т. е. $\mathfrak{j}$ имеет конечный базис.

Если $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — два идеала кольца $\mathfrak{R}$, для которых

$$\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{j}),$$

то говорят, что идеал $\mathfrak{i}$ *делится на* идеал $\mathfrak{j}$ или что $\mathfrak{j}$ *является делителем* $\mathfrak{i}$. Если при этом $\mathfrak{j} \neq 0$ $(\mathfrak{i})$, то $\mathfrak{i}$ называется *собственным кратным* $\mathfrak{j}$, а $\mathfrak{j}$ — *собственным делителем* $\mathfrak{i}$. В этой терминологии установленный только что результат формулируется так:

Теорема VI. *Для того чтобы в кольце* $\mathfrak{R}$ *имела место теорема о базисе, необходимо и достаточно выполнение в* $\mathfrak{R}$ *следующего условия: любая последовательность идеалов, в которой каждый следующий член является собственным делителем предыдущего, обрывается на конечном числе членов.*

Иногда бывает удобно рассматривать в качестве основного свойства кольца $\mathfrak{R}$ именно сформулированное только что свойство. В таком случае мы будем говорить, что в кольце $\mathfrak{R}$ имеет место „условие обрыва возрастающих цепей".

Можно отметить два следствия, вытекающие из теоремы VI:

Следствие I. *Если в кольце* $\mathfrak{R}$ *имеет место теорема о базисе, то любое непустое множество его идеалов содержит идеал, не являющийся собственным кратным ни для одного идеала множества.*

Доказательство очевидно.

Следствие II. (*Принцип индукции для идеалов.*) *Пусть в кольце* $\mathfrak{R}$ *имеет место теорема о базисе, и пусть* E *— некоторое свойство. Если* (I) *это свойство имеет место для единичного идеала и* (II) *из того, что оно имеет место для всех собственных делителей идеала* $\mathfrak{i}$, *следует его справедливость для* $\mathfrak{i}$, *то свойством* E *обладают все идеалы кольца* $\mathfrak{R}$.

Предположим, что сформулированное утверждение неверно. Рассмотрим совокупность S идеалов кольца $\mathfrak{R}$, не обладающих свойством E. В силу следствия I, в этой совокупности найдется идеал $\mathfrak{i}$, не являющийся собственным кратным ни для одного идеала совокупности. Так как, по предположению, для единичного идеала свойство E имеет место, то $\mathfrak{i}$ не является единичным идеалом. Идеал $\mathfrak{i}$ обладает собственными делителями (собственным делителем для $\mathfrak{i}$ будет, например, единичный идеал). Ввиду того, что ни один из собственных делителей идеала $\mathfrak{i}$ не принадлежит S (так как идеал $\mathfrak{i}$ является максимальным идеалом в S), из условия (II) следует, что свойство E имеет место для $\mathfrak{i}$. Но $\mathfrak{i}$ принадлежит S и поэтому не может обладать свойством E. Из этого противоречия следует, что S пусто, так что наше предположение неверно.

§ 2. Простые и примарные идеалы

Идеал $\mathfrak{p}$ коммутативного кольца $\mathfrak{R}$ называется *простым*, если из соотношения

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{p})$$

следует хотя бы одно из соотношений

$$\alpha = 0 \quad (\mathfrak{p}) \quad \text{или} \quad \beta = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Очевидно, что единичный идеал всегда прост, а нулевой идеал является простым тогда и только тогда, когда кольцо $\mathfrak{R}$ не содержит делителей нуля. Далее, если идеал $\mathfrak{p}$ прост, а $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — любые два идеала

из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие соотношению

$$ij = 0 \quad (\mathfrak{p}),$$

то будет $i = 0$ $(\mathfrak{p})$ или $j = 0$ $(\mathfrak{p})$.

В самом деле, пусть $i \neq 0$ $(\mathfrak{p})$. Тогда в i существует элемент α, не принадлежащий $\mathfrak{p}$. Если β — любой элемент из j, то $\alpha\beta \in ij$ и поэтому

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Но так как α не принадлежит $\mathfrak{p}$, а идеал $\mathfrak{p}$ прост, то отсюда вытекает, что β принадлежит $\mathfrak{p}$. Следовательно,

$$j = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Идеал $\mathfrak{q}$ из $\mathfrak{R}$ называется *примарным*, если из соотношений

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{q}) \quad \text{и} \quad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{q})$$

следует, что

$$\beta^{\rho} = 0 \quad (\mathfrak{q})$$

при некотором целом ρ. Ясно, что каждый простой идеал является также примарным.

Если $\mathfrak{R}$ — кольцо целых рациональных чисел, то идеал $\mathfrak{R} \cdot (d)$ будет простым тогда и только тогда, когда d есть простое число, и примарным тогда и только тогда, когда d есть степень простого числа. Для наших целей, однако, более поучителен пример кольца $\mathfrak{R} = K[x, y]$ многочленов от двух независимых неизвестных x и y над основным полем K. Пусть $\mathfrak{p} = \mathfrak{R} \cdot (x, y)$. Элементами идеала $\mathfrak{p}$ являются те и только те многочлены, в которых свободный член равен нулю. Если α и β — многочлены, произведение которых имеет нулевой свободный член, то свободный член одного из многочленов α или β должен быть также равен нулю, а значит, этот многочлен должен принадлежать $\mathfrak{p}$. Таким образом, идеал $\mathfrak{p}$ прост. Пусть теперь $\mathfrak{q} = \mathfrak{R} \cdot (x, y^2)$. Любой элемент из $\mathfrak{q}$ имеет вид

$$ax + (cx^2 + 2dxy + ey^2) + (lx^3 + 3mx^2y + 3nxy^2 + py^3) + \ldots .$$

Положим

$$\alpha = a_1 + (b_1x + c_1y) + \ldots$$

и

$$\beta = a_2 + (b_2x + c_2y) + \ldots$$

Если $\alpha\beta \in \mathfrak{q}$, то мы должны иметь

$$a_1a_2 = 0, \quad a_1c_2 + a_2c_1 = 0.$$

Если α не принадлежит $\mathfrak{q}$, то коэффициенты a_1 и c_1 не могут быть оба нулями. Отсюда непосредственно вытекает, что должно быть $a_2 = 0$. Но если $a_2 = 0$, то элемент

$$\beta^2 = (b_2^2x^2 + 2b_2c_2xy + c_2^2y^2) + \ldots$$

принадлежит идеалу $\mathfrak{q}$. Следовательно, идеал $\mathfrak{q}$ примарен. Так как при $c_2 \neq 0$ элемент β не содержится в $\mathfrak{q}$, то идеал $\mathfrak{q}$ не является простым.

Пусть теперь $\mathfrak{q}$ — любой примарный идеал некоторого коммутативного кольца $\mathfrak{R}$. Рассмотрим совокупность элементов α, β, ... из $\mathfrak{R}$, обладающих тем свойством, что некоторая степень каждого из них содержится в $\mathfrak{q}$. Если

$$\alpha^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q}) \quad \text{и} \quad \beta^\sigma = 0 \quad (\mathfrak{q}),$$

то выражение $(\alpha - \beta)^{\rho+\sigma-1}$ равно сумме членов, каждый из которых является произведением α^ρ или β^σ на некоторый элемент кольца $\mathfrak{R}$. Следовательно, $(\alpha - \beta)^{\rho+\sigma-1} \in \mathfrak{q}$, и поэтому разность $\alpha - \beta$ содержится в нашей совокупности. Аналогично, если ξ — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то

$$(\xi\alpha)^\rho = \xi^\rho \alpha^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q}),$$

и поэтому произведение $\xi\alpha$ принадлежит рассматриваемой совокупности. Таким образом, эта совокупность является идеалом, который мы теперь обозначим через $\mathfrak{p}$. Покажем, что идеал $\mathfrak{p}$ прост. Пусть элементы α и β таковы, что

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{p}), \quad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Так как $\alpha\beta \in \mathfrak{p}$, то найдется целое число ρ, для которого

$$\alpha^\rho \beta^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Так как α не лежит в $\mathfrak{p}$, то α^ρ не принадлежит $\mathfrak{q}$. Ввиду того, что идеал $\mathfrak{q}$ примарен, отсюда вытекает существование целого числа τ, для которого $\beta^{\rho\tau} \in \mathfrak{q}$. Следовательно, элемент β принадлежит $\mathfrak{p}$, так что идеал $\mathfrak{p}$ прост. $\mathfrak{p}$ называется простым идеалом, *принадлежащим примарному идеалу* $\mathfrak{q}$, или *радикалом идеала* $\mathfrak{q}$. Очевидно, что

$$\mathfrak{q} = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Равенство $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ имеет место тогда и только тогда, когда идеал $\mathfrak{q}$ прост.

Из определений примарного идеала и его радикала мы видим, что если

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{q}), \quad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{q}),$$

то

$$\beta = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Следовательно, идеал $\mathfrak{q}$ и его радикал $\mathfrak{p}$ обладают следующими свойствами:

(I) если $\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{q})$ и $\alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{q})$, то $\beta = 0 \quad (\mathfrak{p})$;

(II) $\mathfrak{q} = 0 \quad (\mathfrak{p})$;

(III) из соотношения $\beta = 0 \quad (\mathfrak{p})$ следует, что $\beta^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q})$ при некотором целом положительном ρ.

Можно заметить, что если кольцо $\mathfrak{R}$ обладает единицей и если $\mathfrak{q}$ не является единичным идеалом, то из (I) следует (II) (если $\mathfrak{q}$ является единичным идеалом, то условие (I) не определяет идеала $\mathfrak{p}$). Действительно, если β — любой элемент идеала $\mathfrak{q}$, то мы имеем

$$1 \cdot \beta = 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Ввиду того, что $\mathfrak{q}$ не является единичным идеалом, он не может содержать 1, а значит, в силу свойства (I), должно быть $\beta = 0 \quad (\mathfrak{p})$. Но это означает, что $\mathfrak{q} = 0 \quad (\mathfrak{p})$.

Покажем теперь, что если $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{p}$ — любые идеалы некоторого кольца $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие условиям (I), (II) и (III), то идеал $\mathfrak{q}$ примарен, а $\mathfrak{p}$ есть его радикал. Более коротко мы будем выражать это словами: идеал $\mathfrak{q}$ является $\mathfrak{p}$-примарным. Из условий (I) и (III) примарность идеала $\mathfrak{q}$ следует непосредственно. Для доказательства того, что $\mathfrak{p}$ является радикалом идеала $\mathfrak{q}$, рассмотрим любой элемент β из $\mathfrak{R}$, такой, что $\beta^\rho \in \mathfrak{q}$ при некотором ρ. Если $\beta \in \mathfrak{q}$, то $\beta \in \mathfrak{p}$, в силу условия (II). Если же β не принадлежит $\mathfrak{q}$, то пусть ρ $(\rho > 1)$ — наименьшее целое число, при котором $\beta^\rho \in \mathfrak{q}$. Тогда

$$\beta \cdot \beta^{\rho-1} = 0 \quad (\mathfrak{q})$$

и

$$\beta^{\rho-1} \neq 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Отсюда, в силу условия (I), вытекает, что

$$\beta = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Этим соотношением вместе с условием (III) и доказывается

Теорема I. *Примарный идеал* $\mathfrak{q}$ *и его радикал* $\mathfrak{p}$ *вполне характеризуются свойствами* (I), (II) *и* (III).

Теорема II. *Если идеал* $\mathfrak{q}$ *является* $\mathfrak{p}$*-примарным, а* $\mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{j}$ — *любые идеалы из* $\mathfrak{R}$, *удовлетворяющие условиям*

$$\mathfrak{ij} = 0 \quad (\mathfrak{q}), \quad \mathfrak{i} \neq 0 \quad (\mathfrak{q}),$$

то

$$\mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Ввиду того, что $\mathfrak{i}$ не содержится в $\mathfrak{q}$, в $\mathfrak{i}$ найдется элемент α, также не содержащийся в $\mathfrak{q}$. Если теперь β — любой элемент из $\mathfrak{j}$, то $\alpha\beta \in \mathfrak{q}$. Так как α не содержится в $\mathfrak{q}$, то, в силу свойства (I), должно быть

$$\beta \in \mathfrak{p},$$

так что

$$\mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Следствие I. *Если* $\mathfrak{ij} = 0 \quad (\mathfrak{q})$ и $\mathfrak{j} \neq 0 \quad (\mathfrak{p})$, *то* $\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{q})$.

Следствие II. *Если* $\mathfrak{j} \neq 0 \quad (\mathfrak{p})$, *то* $\mathfrak{q} : \mathfrak{j} = \mathfrak{q}$.

Теорема III. *Если идеалы* $\mathfrak{q}$ *и* $\mathfrak{q}'$ *оба* $\mathfrak{p}$*-примарны, то* $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$ *также* $\mathfrak{p}$*-примарен.*

(I) Если $\alpha\beta = 0 \pmod{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']}$ и $\alpha \neq 0 \pmod{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']}$, то

$$\alpha\beta = 0 \pmod{\mathfrak{q}}, \quad \alpha\beta = 0 \pmod{\mathfrak{q}'},$$

причем либо $\alpha \neq 0 \pmod{\mathfrak{q}}$, либо $\alpha \neq 0 \pmod{\mathfrak{q}'}$. Предположим, например, что

$$\alpha\beta = 0 \pmod{\mathfrak{q}}, \quad \alpha \neq 0 \pmod{\mathfrak{q}}.$$

Тогда, в силу $\mathfrak{p}$-примарности идеала $\mathfrak{q}$, получаем $\beta = 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Если $\alpha \neq 0 \pmod{\mathfrak{q}'}$, то соотношение $\beta = 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ следует из $\mathfrak{p}$-примарности идеала $\mathfrak{q}'$.

(II) Так как $\mathfrak{q} = 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{q}' = 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, то $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'] = 0 \pmod{\mathfrak{p}}$.

(III) Если $\beta \in \mathfrak{p}$, то найдутся такие целые числа ρ и σ, что

$$\beta^\rho = 0 \pmod{\mathfrak{q}}, \quad \beta^\sigma = 0 \pmod{\mathfrak{q}'}.$$

Если мы положим $\tau = \max[\rho, \sigma]$, то будем иметь $\beta^\tau = 0 \pmod{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']}$. Теперь из теоремы I следует, что идеал $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$ является $\mathfrak{p}$-примарным.

Теорема IV. *Если идеалы* $\mathfrak{q}$ *и* $\mathfrak{q}'$ *являются соответственно* $\mathfrak{p}$- *и* $\mathfrak{p}'$*-примарными,* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$*, и если*

$$[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'] \neq \mathfrak{q} \quad \text{и} \quad [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'] \neq \mathfrak{q}',$$

то идеал $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$ *не примарен.*

Ввиду того, что $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, в одном из этих идеалов найдется элемент, не принадлежащий другому идеалу. Пусть

$$\alpha = 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad \alpha \neq 0 \pmod{\mathfrak{p}'}.$$

Тогда никакая степень элемента α не принадлежит $\mathfrak{q}'$ и найдется показатель ρ, для которого

$$\alpha^\rho = 0 \pmod{\mathfrak{q}}.$$

В таком случае

$$\alpha^\rho \neq 0 \pmod{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']}.$$

Но так как $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'] \neq \mathfrak{q}'$, то в идеале $\mathfrak{q}'$ найдется элемент β, не принадлежащий $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$, а значит, и $\mathfrak{q}$. Отсюда следует, что

$$\alpha^\rho\beta \in \mathfrak{q}\mathfrak{q}' \subseteq [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$$

(§ 1, стр. 14). Но

$$\beta \neq 0 \pmod{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']}.$$

Если бы идеал $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$ был примарным, то некоторая степень элемента α^ρ лежала бы в $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$, т. е. некоторая степень элемента α лежала бы в $\mathfrak{q}'$. Но так как α не принадлежит $\mathfrak{p}'$, то это противоречит условию, что идеал $\mathfrak{q}'$ $\mathfrak{p}'$-примарен. Отсюда заключаем, что идеал $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}']$ не примарен.

Теоремы, доказанные в этом параграфе до сих пор, не требуют предположения, что в кольце $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе. Мы переходим теперь к доказательству некоторых результатов, основывающихся на этом предположении. *Везде далее в этом параграфе предполагается, что в кольце* $\mathfrak{R}$ *справедлива теорема о базисе.*

Пусть $\mathfrak{q}$ — некоторый $\mathfrak{p}$-примарный идеал кольца $\mathfrak{R}$, и пусть $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — некоторый базис идеала $\mathfrak{p}$. Для каждого ω_i найдется такой показатель σ_i, при котором

$$\omega_i^{\sigma_i} \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Положим

$$\rho = \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i - 1) + 1.$$

Любой элемент идеала $\mathfrak{p}^\rho$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \Omega_i + \sum_{i=1}^{k} n_i \Omega_i,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — элементы из $\mathfrak{R}$, $n_1, \ldots, n_k$ — целые числа, а $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ — произведения, каждое из которых содержит ρ множителей из системы $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Если, например,

$$\Omega_i = \omega_1^{\rho_1} \ldots \omega_r^{\rho_r},$$

то

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i = \rho = \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i - 1) + 1,$$

и поэтому при некотором j должно быть $\rho_j \geqslant \sigma_j$. Отсюда следует, что $\Omega_i \in \mathfrak{q}$, а значит,

$$\mathfrak{p}^\rho \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Конечно, может существовать и меньший показатель $\sigma < \rho$, для которого

$$\mathfrak{p}^\sigma \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Наименьший показатель σ, обладающий этим свойством, называется *индексом* идеала $\mathfrak{q}$. Примарный идеал прост тогда и только тогда, когда его индекс равен единице.

Теорема V. *Пусть* $\mathfrak{q}$ *— примарный идеал, а* $\mathfrak{p}$ *— простой идеал. Если*

$$\mathfrak{q} \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}) \quad \textit{и} \quad \mathfrak{p}^\sigma \equiv 0 \quad (\mathfrak{q})$$

при некотором σ, *то идеал* $\mathfrak{q}$ *является* $\mathfrak{p}$*-примарным.*

Действительно, пусть $\mathfrak{p}'$ есть радикал идеала $\mathfrak{q}$. Тогда найдется показатель ρ, для которого

$$\mathfrak{p}'^\rho \equiv 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{p}'^{\rho} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p},$$

т. е.

$$\mathfrak{p}'^{\rho} = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Но так как идеал $\mathfrak{p}$ прост, мы заключаем отсюда, что

$$\mathfrak{p}' = 0 \quad (\mathfrak{p}). \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\mathfrak{q} = 0 \quad (\mathfrak{p}'),$$

а значит,

$$\mathfrak{p}^{\sigma} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}'.$$

Поэтому, ввиду простоты $\mathfrak{p}'$,

$$\mathfrak{p} = 0 \quad (\mathfrak{p}'). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

Идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$ называется *приводимым*, если он может быть записан в виде

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{j}, \mathfrak{k}],$$

где $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ — собственные делители идеала $\mathfrak{i}$. Если такая запись идеала $\mathfrak{i}$ невозможна, то он называется *неприводимым*. Простой идеал (в частности, единичный идеал) неприводим. Действительно, если $\mathfrak{i}$ прост и если

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{j}, \mathfrak{k}],$$

то, так как

$$\mathfrak{i}\mathfrak{k} \subseteq [\mathfrak{j}, \mathfrak{k}] = \mathfrak{i},$$

должно быть $\mathfrak{j} = 0 \ (\mathfrak{i})$ или $\mathfrak{k} = 0 \ (\mathfrak{i})$. Поэтому $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ не могут быть оба собственными делителями идеала $\mathfrak{i}$.

С помощью принципа индукции для идеалов (§ 1, теорема VI, следствие II) легко показать, что любой идеал $\mathfrak{i}$ является пересечением конечного числа неприводимых идеалов. Если $\mathfrak{i}$ неприводим, то нечего доказывать. Предположим поэтому, что $\mathfrak{i}$ приводим:

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{j}, \mathfrak{k}],$$

где $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$ — собственные делители идеала $\mathfrak{i}$. Если

$$\mathfrak{j} = [\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_r]$$

и

$$\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_s],$$

где $\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_r$ и $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_s$ — неприводимые идеалы, то идеал

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_r, \mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_s]$$

также будет пересечением неприводимых идеалов. Поэтому, если все собственные делители некоторого идеала обладают свойством быть

пересечениями конечного числа неприводимых идеалов, то этим свойством будет обладать и сам идеал. А так как единичный идеал обладает этим свойством, то оно имеет место для всех идеалов кольца $\mathfrak{R}$. Мы доказали теорему:

Теорема VI. *Каждый идеал кольца, в котором имеет место теорема о базисе, является пересечением конечного числа неприводимых идеалов.*

Теорема VII. *Каждый неприводимый идеал примарен.*

Пусть идеал $\mathfrak{i}$ не примарен. Тогда можно найти элементы α и β кольца $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{i}), \qquad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{i}), \qquad \beta^{\rho} \neq 0 \quad (\mathfrak{i})$$

при любом целом положительном ρ. Ясно, что элементы кольца $\mathfrak{R}$, представимые в виде $\xi\beta^a$, где ξ — любой элемент из $\mathfrak{R}$ и a — фиксированное целое число, образуют идеал. Обозначим этот идеал через $\mathfrak{j}_a$. Если в кольце $\mathfrak{R}$ имеется единица, то $\mathfrak{j}_a = \mathfrak{R} \cdot (\beta^a)$; в общем же случае, если в $\mathfrak{R}$ единицы нет, $\mathfrak{j}_a$ будет собственным кратным идеала $\mathfrak{R} \cdot (\beta^a)$. Мы видим непосредственно, что

$$\mathfrak{i} : \mathfrak{j}_1 \subseteq \mathfrak{i} : \mathfrak{j}_2 \subseteq \mathfrak{i} : \mathfrak{j}_3 \subseteq \ldots .$$

В силу теоремы VI § 1, найдется число r, для которого

$$\mathfrak{i} : \mathfrak{j}_r = \mathfrak{i} : \mathfrak{j}_{r+1} = \ldots .$$

Положим $\mathfrak{f} = \mathfrak{R} \cdot (\alpha)$. Идеал $(\mathfrak{i}, \mathfrak{f})$ является собственным делителем для $\mathfrak{i}$, поскольку он содержит как $\mathfrak{i}$, так и не содержащийся в $\mathfrak{i}$ элемент α. Идеал $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}_{r+1})$ также является собственным делителем для $\mathfrak{i}$, так как он содержит $\mathfrak{i}$ и элемент $\beta^{r+2} = \beta \cdot \beta^{r+1}$, не лежащий в $\mathfrak{i}$. Теорема будет доказана, если мы сможем показать, что

$$\mathfrak{i} = [(\mathfrak{i}, \mathfrak{f}), (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}_{r+1})].$$

Очевидно, что $\mathfrak{i} \subseteq [(\mathfrak{i}, \mathfrak{f}), (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}_{r+1})]$. Для доказательства того, что $[(\mathfrak{i}, \mathfrak{f}), (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}_{r+1})] \subseteq \mathfrak{i}$, рассмотрим любой элемент η, принадлежащий обоим идеалам $(\mathfrak{i}, \mathfrak{f})$ и $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}_{r+1})$. Покажем, что этот элемент принадлежит $\mathfrak{i}$. Так как $\eta \in (\mathfrak{i}, \mathfrak{f})$, мы имеем

$$\eta = \gamma + \rho\alpha + n\alpha,$$

где $\gamma \in \mathfrak{i}$, $\rho \in \mathfrak{R}$ и n — целое число. Но так как $\eta \in (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}_{r+1})$, то

$$\eta = \delta + \sigma\beta^{r+1},$$

где $\delta \in \mathfrak{i}$ и $\sigma \in \mathfrak{R}$. Ввиду того, что элементы γ и $\alpha\beta$ принадлежат $\mathfrak{i}$, мы получаем

$$\beta\delta + \sigma\beta^{r+2} = \beta\eta = \beta\gamma + \rho\alpha\beta + n\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Отсюда следует, что

$$\sigma\beta^{r+2} = 0 \quad (\mathfrak{i}),$$

так как δ также принадлежит $\mathfrak{i}$. Из последнего соотношения вытекает, что $\sigma \in \mathfrak{i} : \mathfrak{j}_{r+2}$. Но $\mathfrak{i} : \mathfrak{j}_{r+2} = \mathfrak{i} : \mathfrak{j}_r$, а значит, σ принадлежит и $\mathfrak{i} : \mathfrak{j}_r$. Из равенства $\sigma\beta^{r+1} = \sigma(\beta \cdot \beta^r)$ следует теперь, что элемент $\sigma\beta^{r+1}$ принадлежит $\mathfrak{i}$. Вместе с ним и η принадлежит $\mathfrak{i}$, что и доказывает теорему VII.

Теоремы VI и VII, взятые совместно, утверждают, что каждый идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$ может быть представлен в виде пересечения конечного числа примарных идеалов. Пусть мы имеем

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r],$$

где каждый идеал $\mathfrak{q}_i$ является $\mathfrak{p}_i$-примарным. Если $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j$, то из теоремы III следует, что идеал $\mathfrak{q}_{ij} = [\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j]$ также $\mathfrak{p}_i$-примарен. В этом случае в выражении для $\mathfrak{i}$ мы можем отбросить идеалы $\mathfrak{q}_i$ и $\mathfrak{q}_j$, заменив их на $\mathfrak{q}_{ij}$. Продолжая таким образом, мы можем сгруппировать все примарные идеалы $\mathfrak{q}_i$, имеющие один и тот же радикал, в один примарный идеал. В конце концов получится следующее выражение для $\mathfrak{i}$:

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_s],$$

где каждый идеал $\mathfrak{Q}_i$ является $\mathfrak{P}_i$-примарным и все простые идеалы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ различны. Идеалы $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_s$ называются *примарными компонентами* идеала $\mathfrak{i}$.

Может случиться, что для некоторого $\mathfrak{Q}_i$ будет

$$\mathfrak{Q}_i \supseteq \mathfrak{J}_i = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_{i-1}, \mathfrak{Q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{Q}_s].$$

В таком случае $\mathfrak{Q}_i$ называется *устранимой* примарной компонентой идеала $\mathfrak{i}$. В этом случае

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{Q}_i, \mathfrak{J}_i] = \mathfrak{J}_i,$$

так что компонента $\mathfrak{Q}_i$ в выражении для $\mathfrak{i}$ может быть опущена. Продолжая таким образом, мы приходим в конце концов к представлению $\mathfrak{i}$ в виде пересечения примарных идеалов

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_k],$$

в котором радикалы компонент различны и отсутствуют устранимые компоненты.

Если в таком разложении сгруппировать вместе две компоненты, то получим идеал, уже не являющийся примарным (теорема IV). Если же отбросить хотя бы одну компоненту, то изменяется пересечение. По этим причинам представление $[\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_k]$ называется *несократимым*. Практически несократимые представления идеалов более важны, чем представления в виде пересечений неприводимых идеалов.

Можно привести примеры, показывающие, что идеал $\mathfrak{i}$ может иметь два различных несократимых представления. Однако справедливы важные теоремы единственности, которые мы теперь и докажем.

Теорема VIII. *Пусть* $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ *и* $[\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l]$ — *два несократимых представления идеала* $\mathfrak{i}$ *кольца* $\mathfrak{R}$, *в которых каждый идеал* $\mathfrak{q}_j$ $\mathfrak{p}_j$-*примарен, а каждый идеал* $\mathfrak{q}'_j$ $\mathfrak{p}'_j$-*примарен. Тогда* $k=l$ *и, при надлежащей нумерации идеалов,* $\mathfrak{p}'_j = \mathfrak{p}_j$ $(j=1, 2, \ldots, k)$.

В силу характеристического свойства несократимых представлений, все идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$, так же как и идеалы $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_l$, различны. Среди общего числа $k+l$ перечисленных простых идеалов всегда можно выбрать идеал, не являющийся собственным кратным ни одного из остальных идеалов. Без ограничения общности можно считать, что таким идеалом является $\mathfrak{p}_1$. Идеал $\mathfrak{p}_1$ не равен ни одному из $\mathfrak{p}_j$ $(j>1)$ и может быть равен, самое большее, одному из $\mathfrak{p}'_j$.

Предположим сначала, что $\mathfrak{p}_1$ не равен ни одному из $\mathfrak{p}'_j$. Для каждого значения $j>1$ найдется элемент α, лежащий в $\mathfrak{p}_1$, но не лежащий в $\mathfrak{p}_j$ [ведь $\mathfrak{p}_1 \neq 0$ $(\mathfrak{p}_j)$]. Пусть теперь ρ — такой показатель, при котором $\alpha^\rho \in \mathfrak{q}_1$. Так как α не лежит в $\mathfrak{p}_j$, то α^ρ также не лежит в $\mathfrak{p}_j$, а значит,

$$\mathfrak{q}_1 \neq 0 \quad (\mathfrak{p}_j).$$

Это верно при $j=2, \ldots, k$. Далее, в силу того, что

$$\mathfrak{p}_1 \neq 0 \quad (\mathfrak{p}'_j),$$

аналогичное рассуждение показывает, что

$$\mathfrak{q}_1 \neq 0 \quad (\mathfrak{p}'_j)$$

при $j=1, \ldots, l$. Но (§ 1, теорема III)

$$[\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 : \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k : \mathfrak{q}_1] = \mathfrak{i} : \mathfrak{q}_1 = [\mathfrak{q}'_1 : \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l : \mathfrak{q}_1].$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{R}.$$

Кроме того, в силу следствия II теоремы II,

$$\mathfrak{q}_j : \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_j \qquad (j>1)$$

и

$$\mathfrak{q}'_j : \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}'_j \qquad (j \geqslant 1).$$

Следовательно,

$$[\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k] = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l] = \mathfrak{i},$$

вопреки предположению, что представление $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ идеала $\mathfrak{i}$ несократимо. Отсюда вытекает, что идеал $\mathfrak{p}_1$ должен быть равен одному из $\mathfrak{p}'_j$. Перенумеровав, если нужно, компоненты $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l$ надлежащим образом, можно получить $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}'_1$.

В силу теоремы III, идеал $\mathfrak{f} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}'_1]$ является $\mathfrak{p}_1$-примарным. Как и выше, мы можем доказать, что

$$\mathfrak{q}_j : \mathfrak{f} = \mathfrak{q}_j \quad \text{и} \quad \mathfrak{q}'_j : \mathfrak{f} = \mathfrak{q}'_j$$

при $j > 1$. Но ввиду того, что $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{q}_1$ и $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{q}_1'$, мы будем иметь

$$\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{f} = \mathfrak{R} = \mathfrak{q}_1' : \mathfrak{f}.$$

Следовательно, из равенства

$$[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k] : \mathfrak{f} = [\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l'] : \mathfrak{f}$$

мы получаем равенство

$$[\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k] = [\mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_l'].$$

Покажем теперь, что пересечение $[\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ является несократимым. Действительно, если

$$[\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k] = 0 \quad (\mathfrak{q}_i),$$

то

$$[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_k] = 0 \quad (\mathfrak{q}_i),$$

вопреки предположению, что выражение $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ является несократимым представлением идеала $\mathfrak{i}$.

Теорема VIII получается теперь с помощью простого рассуждения, использующего индукцию по наименьшему числу компонент в представлении идеала $\mathfrak{i}$ несократимым пересечением примарных идеалов. Если $k = 1$, то идеал $\mathfrak{i}$ примарен и $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{i}$. Если $[\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l']$ — другое несократимое представление идеала $\mathfrak{i}$, то проведенное выше рассуждение показывает, что

$$[\mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_l'] = \mathfrak{R},$$

а значит,

$$\mathfrak{q}_i' = \mathfrak{R} \qquad (i = 2, \ldots, l).$$

Следовательно, пересечение $[\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l']$ может быть несократимым только в том случае, если $l = 1$. Но тогда $\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{q}_1$ и поэтому $\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}_1$. Предположим теперь справедливость теоремы для идеалов, представимых несократимым пересечением $k - 1$ примарных идеалов, и докажем, что теорема остается верной и для идеалов, требующих k компонент:

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k] = [\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_l'].$$

Пользуясь приведенным выше рассуждением, мы имеем:

(I) при надлежащей нумерации компонент

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1';$$

(II)
$$[\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k] = [\mathfrak{q}_2', \ldots, \mathfrak{q}_l'].$$

Из предположения индукции следует теперь, что $k - 1 = l - 1$, т. е. $k = l$, и что компоненты можно занумеровать так, чтобы было

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i' \qquad (i = 2, \ldots, k).$$

Этим доказательство закончено.

Для формулировки второй теоремы единственности нужно сначала определить изолированные и вложенные компоненты идеала $\mathfrak{i}$. Пусть $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ — несократимое представление для $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{p}_j$ — простые идеалы, принадлежащие идеалам $\mathfrak{q}_j$. В силу теоремы VIII, простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ однозначно связаны с $\mathfrak{i}$, независимо от выбора несократимого представления. Если идеал $\mathfrak{p}_j$ не является собственным делителем ни одного из других простых идеалов $\mathfrak{p}_i$, то $\mathfrak{q}_j$ называется *изолированной* компонентой идеала $\mathfrak{i}$. Если же $\mathfrak{p}_j$ является собственным делителем некоторого $\mathfrak{p}_i$, то компонента $\mathfrak{q}_j$ называется *вложенной*. Вложенные компоненты идеала $\mathfrak{i}$ определены неоднозначно. Для изолированных же компонент имеет место

Теорема IX. *Изолированные компоненты идеала* $\mathfrak{i}$ *однозначно определены.*

Пусть $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ и $[\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_k]$ — два несократимых представления идеала $\mathfrak{i}$, и пусть компоненты расположены так, что $\mathfrak{q}_i$ и $\mathfrak{q}'_i$ являются $\mathfrak{p}_i$-примарными. Пусть $\mathfrak{q}_1$ — изолированная компонента идеала $\mathfrak{i}$. Тогда $\mathfrak{p}_1$ не является собственным делителем ни одного из $\mathfrak{p}_j$ ($j > 1$). Следовательно, $\mathfrak{q}'_1$ также является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}$. Положим для удобства

$$\mathfrak{j} = [\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k], \qquad \mathfrak{j}' = [\mathfrak{q}'_2, \ldots, \mathfrak{q}'_k],$$

так что

$$[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{j}] = \mathfrak{i} = [\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{j}'].$$

Пусть индекс идеала $\mathfrak{q}_j$ равен ρ_j. Тогда

$$\mathfrak{p}_2^{\rho_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{\rho_k} = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Если бы было $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{p}_1$, то выполнялось бы соотношение

$$\mathfrak{p}_2^{\rho_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{\rho_k} = 0 \quad (\mathfrak{p}_1)$$

и, следовательно, при некотором значении $i > 1$ было бы

$$\mathfrak{p}_i = 0 \quad (\mathfrak{p}_1),$$

вопреки предположению о том, что компонента $\mathfrak{q}_1$ — изолированная. Поэтому

$$\mathfrak{j} \neq 0 \quad (\mathfrak{p}_1),$$

а значит (теорема II, следствие II), $\mathfrak{q}_1 = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{j}] : \mathfrak{j} = \mathfrak{i} : \mathfrak{j} = [\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{j}'] : \mathfrak{j}$ и $\mathfrak{q}_1 = 0 \quad (\mathfrak{q}'_1)$.

Аналогично можно показать, что

$$\mathfrak{j}' \neq 0 \quad (\mathfrak{p}_1),$$

и вывести отсюда, что

$$\mathfrak{q}'_1 = 0 \quad (\mathfrak{q}_1).$$

Таким образом, $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}'_1$, что и нужно.

Особенно интересным является случай, когда $\mathfrak{i} = \mathfrak{p}^\rho$ есть степень простого идеала $\mathfrak{p}$. Пусть

$$\mathfrak{p}^\rho = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$$

— некоторое несократимое представление идеала $\mathfrak{p}^\rho$, причем каждая компонента $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{p}_i$-примарна. Тогда

$$\mathfrak{p}^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q}_j)$$

и поэтому

$$\mathfrak{p}^\rho = 0 \quad (\mathfrak{p}_j).$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{p} = 0 \quad (\mathfrak{p}_j),$$

т. е. что идеал $\mathfrak{p}$ кратен всем $\mathfrak{p}_j$. Ввиду того, что идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ все различны, идеал $\mathfrak{p}$ может быть равен самое большее одному из $\mathfrak{p}_j$. Покажем, что $\mathfrak{p}$ действительно равен одному из $\mathfrak{p}_j$. В самом деле, если бы $\mathfrak{p}$ был собственным кратным всех $\mathfrak{p}_j$, то в каждом из $\mathfrak{p}_j$ можно было бы найти элемент α_j, не принадлежащий $\mathfrak{p}$ $(j = 1, \ldots, k)$. Пусть σ_j — такое целое число, что

$$\alpha_j^{\sigma_j} = 0 \quad (\mathfrak{q}_j).$$

Тогда, полагая $\sigma = \max[\sigma_1, \ldots, \sigma_k]$, мы имели бы

$$(\alpha_1 \ldots \alpha_k)^\sigma = 0 \quad ([\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]) = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Отсюда, в силу простоты идеала $\mathfrak{p}$, следовало бы, что один из элементов α_j принадлежит $\mathfrak{p}$, вопреки предположению. Таким образом, один из идеалов $\mathfrak{p}_j$ равен $\mathfrak{p}$, причем можно занумеровать компоненты так, что этим $\mathfrak{p}_j$ будет $\mathfrak{p}_1$. Так как

$$\mathfrak{p}_1 = 0 \quad (\mathfrak{p}_j) \qquad (j = 2, \ldots, k),$$

то $\mathfrak{q}_1$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{p}^\rho$, а компоненты $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_k$ — вложенными. В силу теоремы IX, компонента $\mathfrak{q}_1$ не зависит от выбора рассматриваемого несократимого представления идеала $\mathfrak{p}^\rho$. Эта компонента называется *символической ρ-й степенью* идеала $\mathfrak{p}$ и обозначается через $\mathfrak{p}^{(\rho)}$.

Мы заключим настоящий параграф несколькими результатами, полезными для дальнейшего. Они относятся к областям целостности, в которых имеет место теорема о базисе.

Пусть $\mathfrak{R}$ — такая область целостности, $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — два идеала в $\mathfrak{R}$. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{i}$ является собственным идеалом, а идеал $\mathfrak{j}$ может быть также нулевым. Случай, когда $\mathfrak{j}$ является единичным идеалом, вообще не представляет интереса. Рассмотрим совокупность элементов кольца $\mathfrak{R}$, принадлежащих всем идеалам $(\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j})$, соответствующим целым положительным значениям n. Пусть α и β — два таких элемента из $\mathfrak{R}$, а ρ — произвольный элемент из $\mathfrak{R}$. Так как

$$\alpha = 0 \quad ((\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j})) \quad \text{и} \quad \beta = 0 \quad ((\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j}))$$

при всех значениях n, то

$$\alpha - \beta = 0 \quad ((\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j})) \quad \text{и} \quad \rho\alpha = 0 \qquad ((\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j}))$$

также при всех значениях n. Следовательно, элементы кольца $\mathfrak{R}$, принадлежащие идеалам $(\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j})$ при всех значениях n, сами образуют идеал. Обозначим его через $\mathfrak{f}$. Докажем прежде всего, что

$$(\mathfrak{if}, \mathfrak{j}) = \mathfrak{f}.$$

Так как $\mathfrak{if} \subseteq \mathfrak{f}$ и $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{f}$, то

$$(\mathfrak{if}, \mathfrak{j}) \subseteq \mathfrak{f}. \tag{3}$$

Пусть теперь $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ — несократимое представление идеала $(\mathfrak{if}, \mathfrak{j})$ в виде пересечения примарных идеалов. Радикал $\mathfrak{q}_h$ обозначим через $\mathfrak{p}_h$ $(h = 1, \ldots, r)$. [Если $(\mathfrak{if}, \mathfrak{j})$ является нулевым идеалом, то $r = 1$ и $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$, так как $\mathfrak{R}$ является областью целостности.]

Случай I. Если

$$\mathfrak{i} \neq 0 \quad (\mathfrak{p}_h),$$

то мы имеем (теорема II, следствие II)

$$\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{if} : \mathfrak{i} \subseteq (\mathfrak{if}, \mathfrak{j}) : \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{q}_h : \mathfrak{i} = \mathfrak{q}_h.$$

Случай II. Если

$$\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{p}_h),$$

то

$$\mathfrak{i}^n = 0 \quad (\mathfrak{q}_h)$$

при всех значениях n, превышающих индекс идеала $\mathfrak{q}_h$. Поэтому

$$\mathfrak{j} \subseteq (\mathfrak{if}, \mathfrak{j}) \subseteq \mathfrak{q}_h, \quad \mathfrak{f} \subseteq (\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j}) \subseteq \mathfrak{q}_h.$$

Отсюда следует, что в любом случае будет

$$\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{q}_h.$$

Но так как это верно при всех значениях h, то

$$\mathfrak{f} \subseteq (\mathfrak{if}, \mathfrak{j}). \tag{4}$$

Из (3) и (4) мы заключаем, что

$$(\mathfrak{if}, \mathfrak{j}) = \mathfrak{f}.$$

Пусть теперь $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — базис идеала $\mathfrak{f}$. Тогда

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij}\gamma_j + \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

где $\alpha_{ij} \in \mathfrak{i}$ и $\beta_i \in \mathfrak{j}$. Если положить $\Delta = |\delta_{ij} - \alpha_{ij}|$, то из написанных уравнений будет следовать, что

$$\Delta\gamma_i = 0 \quad (\mathfrak{j}). \tag{5}$$

Но, по определению Δ,

$$\Delta - 1 = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Следовательно,

$$\Delta \neq 0 \quad (\mathfrak{i}),$$

так как $\mathfrak{i}$ не является единичным идеалом.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

А. Пусть $\mathfrak{j}$ — нулевой идеал. Из (5) мы получаем, что $\gamma_i = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$, так как Δ отличен от нуля, а $\mathfrak{R}$ — область целостности. Следовательно, $\mathfrak{f}$ есть нулевой идеал.

Б. Пусть идеал $\mathfrak{j}$ $\mathfrak{p}$-примарен, причем $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{i}$. Тогда Δ не содержится в $\mathfrak{p}$, так что (теорема II, следствие I) должно быть $\gamma_i \in \mathfrak{j}$ $(i = 1, \ldots, s)$, и поэтому

$$\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{j}.$$

Но так как $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{f}$, то

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{j}.$$

В. Предположим, что $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$ является единичным идеалом. Тогда идеал $(\mathfrak{i}^n, \mathfrak{i}^{n-1}\mathfrak{j}, \ldots, \mathfrak{i}\mathfrak{j}^{n-1}, \mathfrak{j}^n)$ — также единичный. Но так как этот идеал содержится в идеале $(\mathfrak{i}^n, \mathfrak{j})$, то последний также должен быть единичным идеалом при всех значениях n. В этом случае очевидно, что $\mathfrak{f}$ также будет единичным идеалом.

Г. Пусть $\mathfrak{i} = \mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$[1]). Положим

$$\mathfrak{j} = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l, \mathfrak{q}''_1, \ldots, \mathfrak{q}''_m],$$

где идеалы $\mathfrak{q}'_h$ $\mathfrak{p}'_h$-примарны, а $\mathfrak{q}''_h$ $\mathfrak{p}''_h$-примарны, причем $\mathfrak{p}'_h$ содержится в $\mathfrak{p}$ $(h = 1, \ldots, l)$ и $\mathfrak{p}''_h$ не содержится в $\mathfrak{p}$ $(h = 1, \ldots, m)$. Если обозначить через $\mathfrak{f}'_h$ пересечение идеалов $(\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}'_h)$ при всех n, а через $\mathfrak{f}''_h$ — пересечение идеалов $(\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}''_h)$ также при всех n, то из „Б“ следует, что $\mathfrak{f}'_h = \mathfrak{q}'_h$, и, как легко показать, $\mathfrak{f}''_h$ есть единичный идеал. Действительно, так как $\mathfrak{p}''_h$ не содержится в $\mathfrak{p}$, идеал $(\mathfrak{p}''_h, \mathfrak{p})$ является делителем для $\mathfrak{p}$, не совпадающим с $\mathfrak{p}$. Ввиду максимальности идеала $\mathfrak{p}$, идеал $(\mathfrak{p}''_h, \mathfrak{p})$ будет единичным. Если ρ есть индекс идеала $\mathfrak{q}''_h$, то

$$(\mathfrak{q}''_h, \mathfrak{p}) \supseteq (\mathfrak{p}''_h, \mathfrak{p})^\rho,$$

так что идеал $(\mathfrak{q}''_h, \mathfrak{p})$ будет единичным. Нужный результат следует теперь из „В“.

Так как при всех значениях n мы имеем

$$(\mathfrak{p}^n, \mathfrak{j}) \subseteq (\mathfrak{p}^n, \mathfrak{q}'_h)$$

---

[1]) В § 3 будет доказано (теорема III), что каждый максимальный идеал области целостности $\mathfrak{R}$ прост. Здесь, однако, этот результат не используется.

и

$$(\mathfrak{p}^n,\ \mathfrak{j}) \subseteq (\mathfrak{p}^n,\ \mathfrak{q}''_h),$$

то

$$\mathfrak{k} \subseteq [\mathfrak{k}'_1, \ldots, \mathfrak{k}'_l, \mathfrak{k}''_1, \ldots, \mathfrak{k}''_m] = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l].$$

Положим

$$\mathfrak{j}_1 = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l] \quad \text{и} \quad \mathfrak{j}_2 = [\mathfrak{q}''_1, \ldots, \mathfrak{q}''_m].$$

Тогда идеал $\mathfrak{j}_2$ не содержится в $\mathfrak{p}$, и поэтому, в силу максимальности $\mathfrak{p}$, мы имеем

$$(\mathfrak{j}_2,\ \mathfrak{p}^n) \supseteq (\mathfrak{j}_2,\ \mathfrak{p})^n = \mathfrak{R},$$

так что

$$(\mathfrak{j}_2,\ \mathfrak{p}^n) = \mathfrak{R}.$$

Но при всех значениях n справедливы соотношения

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{j}_1(\mathfrak{j}_2,\ \mathfrak{p}^n) = (\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2,\ \mathfrak{j}_1\mathfrak{p}^n) \subseteq (\mathfrak{j},\ \mathfrak{p}^n).$$

Следовательно, $\mathfrak{j}_1 \subseteq \mathfrak{k}$. Однако мы уже видели, что $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{j}_1$, так что

$$\mathfrak{k} = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l].$$

Суммируем теперь полученные результаты, нужные нам в дальнейшем, в виде следующей теоремы:

Теорема X. *Пусть* $\mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{j}$ *— идеалы области целостности* $\mathfrak{R}$, *в которой справедлива теорема о базисе. Если идеал* $\mathfrak{i}$ *— собственный, то:*

(1) *единственным элементом в* $\mathfrak{R}$, *принадлежащим всем степеням* $\mathfrak{i}^n$, *является нуль кольца* $\mathfrak{R}$;

(2) *если* $\mathfrak{i} = \mathfrak{p}$ *— максимальный идеал кольца* $\mathfrak{R}$, *а* $\mathfrak{j} = [\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l, \mathfrak{q}''_1, \ldots, \mathfrak{q}''_m]$, *где* $\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l$ *— примарные компоненты идеала* $\mathfrak{j}$, *кратные* $\mathfrak{p}$, *и* $\mathfrak{q}''_1, \ldots, \mathfrak{q}''_m$ *— компоненты идеала* $\mathfrak{j}$, *не кратные* $\mathfrak{p}$, *то пересечение идеалов* $(\mathfrak{p}^n,\ \mathfrak{j})$ *для* $n = 1, 2, \ldots$ *равно* $[\mathfrak{q}'_1, \ldots, \mathfrak{q}'_l]$.

Удобно здесь же доказать одну лемму, вытекающую из полученного результата.

Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{q}'$ — примарный идеал этого кольца, имеющий радикал $\mathfrak{p}'$. Мы уже видели, что если $\mathfrak{p}'$ не содержится в $\mathfrak{p}$, то

$$(\mathfrak{q}',\ \mathfrak{p}) = (\mathfrak{q}',\ \mathfrak{p}^2) = \ldots = \mathfrak{R}.$$

Допустим теперь, что $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$. Тогда

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{q}',\ \mathfrak{p}) \supseteq (\mathfrak{q}',\ \mathfrak{p}^2) \supseteq (\mathfrak{q}',\ \mathfrak{p}^3) \supseteq \ldots.$$

Можно показать, что идеал $(\mathfrak{q}',\ \mathfrak{p}^n)$ является $\mathfrak{p}$-примарным. Действительно, если $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ — несократимое представление идеала $(\mathfrak{q}',\ \mathfrak{p}^n)$ и $\mathfrak{p}_i$ — радикал идеала $\mathfrak{q}_i$, то

$$\mathfrak{p}^n = 0 \quad (\mathfrak{q}_i).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{p}^n = 0 \quad (\mathfrak{p}_i).$$

Поэтому

$$\mathfrak{p} = 0 \quad (\mathfrak{p}_i).$$

Ввиду того, что идеал $\mathfrak{p}$ максимален, должно быть $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$. Но идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ все различны, так что $k = 1$, т. е.

$$(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^n) = \mathfrak{q}_1.$$

Нам нужен случай, когда $(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^2) = \mathfrak{p}$. Докажем, что при этом $(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ для всех значений n. Действительно, пусть $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — базис идеала $\mathfrak{p}$. Из равенства $\mathfrak{p} = (\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^2)$ вытекает, что

$$\omega_i = \beta_i + f_i^2(\omega_1, \ldots, \omega_r) \quad (i = 1, \ldots, r),$$

где $f_i^k(x_1, \ldots, x_r)$ — однородные многочлены степени k относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами из $\mathfrak{R}$; β_i — элементы идеала $\mathfrak{q}'$. Из написанных соотношений следует, что

$$\omega_i = \beta_i + f_i^2(\beta_1 + f_1^2(\omega), \ldots, \beta_r + f_r^2(\omega)) =$$

$$= \beta_i' + f_i^4(\omega_1, \ldots, \omega_r) \quad (i = 1, \ldots, r),$$

где β_i' — элементы из $\mathfrak{q}'$. Таким образом, $\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^4)$. Но так как

$$\mathfrak{p} \supseteq (\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^2) \supseteq (\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^4),$$

то мы получаем

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^2) = (\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^4).$$

Продолжая таким же образом, получим

$$(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$$

при всех значениях n.

Из доказанного вытекает, что пересечение идеалов $(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ равно $\mathfrak{p}$. Но из теоремы X мы видим, что это пересечение равно $\mathfrak{q}'$. Следовательно, $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$, и мы имеем следующую лемму:

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{p}$ — *максимальный идеал области целостности* $\mathfrak{R}$, *в которой имеет место теорема о базисе. Если* $\mathfrak{q}'$ *есть* $\mathfrak{p}'$-*примарный идеал из* $\mathfrak{R}$, *то*

(I) *в случае* $\mathfrak{p}' \neq 0$ $(\mathfrak{p})$ *имеют место равенства*

$$(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}) = (\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^2) = \ldots = \mathfrak{R};$$

(II) *если же* $\mathfrak{p}' = 0$ $(\mathfrak{p})$, *то идеал* $(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^n)$ $\mathfrak{p}$-*примарен, причем он будет простым в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$. *Условия* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$ *и* $(\mathfrak{q}', \mathfrak{p}^2) = \mathfrak{p}$ *эквивалентны.*

§ 3. Кольца вычетов

Пусть $\mathfrak{i}$ — идеал коммутативного кольца $\mathfrak{R}$. Два элемента α и β из $\mathfrak{R}$ называются *сравнимыми по модулю* $\mathfrak{i}$, если

$$\alpha - \beta = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Непосредственно очевидно, что отношение сравнимости рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что оно является отношением эквивалентности. Поэтому элементы кольца $\mathfrak{R}$ разбиваются с помощью этого отношения на попарно не пересекающиеся классы элементов, сравнимых друг с другом по модулю $\mathfrak{i}$. Будем обозначать класс, к которому принадлежит элемент α, через $\bar{\alpha}$. Равенство $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta \in \mathfrak{i}$. Если

$$\alpha - \alpha' = 0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \beta - \beta' = 0 \quad (\mathfrak{i}),$$

то

$$(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') = 0 \quad (\mathfrak{i})$$

и

$$\alpha\beta - \alpha'\beta' = \alpha(\beta - \beta') + \beta'(\alpha - \alpha') = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Следовательно, мы можем определить обычным образом сложение и умножение классов, причем непосредственно проверяется, что такое определение удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к определению сложения и умножения в кольцах. Поэтому совокупность классов будет кольцом, которое мы обозначим через $\bar{\mathfrak{R}}$. Отображение, определяемое формулой $\alpha \to \bar{\alpha}$, является отображением кольца $\mathfrak{R}$ на $\bar{\mathfrak{R}}$. Оно обладает следующими свойствами:

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}.$$

Отображение с такими свойствами называется *гомоморфизмом*. При указанном выше отображении на нуль кольца $\bar{\mathfrak{R}}$ отображаются те и только те элементы из $\mathfrak{R}$, которые принадлежат $\mathfrak{i}$.

Обратно, пусть мы имеем некоторый гомоморфизм $\alpha \to \bar{\alpha}$, отображающий кольцо $\mathfrak{R}$ на некоторое кольцо $\bar{\mathfrak{R}}$. Рассмотрим элементы из $\mathfrak{R}$, отображающиеся на нуль кольца $\bar{\mathfrak{R}}$. Если элементы α и β таковы, что $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0$, а ρ — произвольный элемент $\mathfrak{R}$, то мы имеем

$$\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\rho\alpha} = \bar{\rho}\bar{\alpha} = 0.$$

Следовательно, элементы кольца $\mathfrak{R}$, отображающиеся на нуль кольца $\bar{\mathfrak{R}}$, образуют некоторый идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$. Два элемента α и β из $\mathfrak{R}$ отображаются на один и тот же элемент из $\bar{\mathfrak{R}}$ тогда и только тогда, когда разность $\alpha - \beta$ отображается на нуль кольца $\bar{\mathfrak{R}}$, т. е. когда

$$\alpha - \beta = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Таким образом, любой гомоморфизм кольца $\mathfrak{R}$ может быть получен описанным выше образом при надлежащем выборе идеала i. Кольцо $\overline{\mathfrak{R}}$, полученное выше из $\mathfrak{R}$ с помощью идеала i, называется *кольцом вычетов* и обычно обозначается через $\mathfrak{R}/i$. Если i есть нулевой идеал, то кольцо $\mathfrak{R}/i$, очевидно, изоморфно $\mathfrak{R}$; если же i есть единичный идеал, то кольцо $\mathfrak{R}/i$ состоит только из нуля.

Ввиду того, что каждое поле имеет только два идеала — нулевой и единичный, — мы получаем следующее предложение:

Теорема I. *Гомоморфизм поля либо является изоморфизмом, либо отображает каждый элемент поля на нуль.*

Пусть i, j — два идеала кольца $\mathfrak{R}$. Рассмотрим отображение идеала j в кольцо вычетов $\mathfrak{R}/i$. Если $j \subseteq i$, то каждый элемент из j отображается на нуль кольца $\mathfrak{R}/i$, так что образом идеала j будет нулевой идеал кольца $\mathfrak{R}/i$. Пусть теперь j не содержится в i. Если $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ — элементы из $\mathfrak{R}/i$, являющиеся образами некоторых элементов α и β из j, и $\overline{\rho}$ — произвольный элемент кольца $\mathfrak{R}/i$, являющийся образом некоторого элемента ρ из $\mathfrak{R}$, то $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$ и $\overline{\rho}\overline{\alpha}$ будут также образами элементов $\alpha - \beta$ и $\rho\alpha$ идеала j. Следовательно, элементы кольца $\mathfrak{R}/i$, являющиеся образами элементов идеала j, образуют идеал кольца $\mathfrak{R}/i$. Мы будем обозначать этот идеал через j/i.

Пусть теперь $\overline{\mathfrak{f}}$ — произвольный идеал кольца $\mathfrak{R}/i$, а α и β — любые элементы из $\mathfrak{R}$, отображающиеся на элементы $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ из $\overline{\mathfrak{f}}$. Если ρ — любой элемент из $\mathfrak{R}$ и $\overline{\rho}$ — его образ в $\mathfrak{R}/i$, то элементы $\alpha - \beta$ и $\rho\alpha$ отображаются на элементы $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$ и $\overline{\rho}\overline{\alpha}$, входящие в $\overline{\mathfrak{f}}$. Таким образом, совокупность всех элементов кольца $\mathfrak{R}$, отображающихся на $\overline{\mathfrak{f}}$, образует некоторый идеал $\mathfrak{f}$ кольца $\mathfrak{R}$. Так как элементы из i отображаются на нуль кольца $\mathfrak{R}/i$, лежащий в идеале $\overline{\mathfrak{f}}$, то $i \subseteq \mathfrak{f}$. Если $\overline{\mathfrak{f}} = j/i$, то очевидно, что $j \subseteq \mathfrak{f}$. Но при этом не обязательно $j = \mathfrak{f}$. В самом деле, необходимым и достаточным условием того, что элемент α из $\mathfrak{R}$ отображается на некоторый элемент из j/i, является существование элемента β из j, удовлетворяющего соотношению $\alpha - \beta = 0$ (i). Следовательно, если $\overline{\mathfrak{f}} = j/i$, то

$$\mathfrak{f} = (i, j).$$

Необходимым и достаточным условием равенства $\mathfrak{f} = j$ будет поэтому соотношение

$$i = 0 \quad (j).$$

Из сказанного непосредственно вытекает

Теорема II. *Любой идеал j кольца $\mathfrak{R}$ отображается на некоторый идеал j/i кольца $\mathfrak{R}/i$. Наибольшим идеалом кольца $\mathfrak{R}$, отображающимся на j/i, является идеал (i, j), в котором содержатся все идеалы из $\mathfrak{R}$, отображающиеся на j/i. Между идеалами кольца*

$\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ и идеалами кольца $\mathfrak{R}$, являющимися делителями $\mathfrak{i}$, имеется взаимно однозначное соответствие.

В силу этого результата, при рассмотрении соотношений между идеалами колец $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{R}$ мы можем ограничиваться теми идеалами в $\mathfrak{R}$, которые делят $\mathfrak{i}$.

Если кольцо $\mathfrak{R}$ обладает единицей и $\mathfrak{i}$ не является единичным идеалом, то образ единицы кольца $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ является единицей последнего кольца.

Воспользуемся теперь кольцами вычетов для доказательства следующей теоремы:

Теорема III. *Максимальный идеал коммутативного кольца $\mathfrak{R}$ примарен. Если $\mathfrak{R}$ обладает единицей, то любой максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$ прост.*

Пусть $\mathfrak{i}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{R}$. Тогда кольцо $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ не имеет собственных идеалов. Действительно, если $\overline{\mathfrak{j}}$ — любой идеал кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, то максимальный соответствующий ему идеал кольца $\mathfrak{R}$ является делителем $\mathfrak{i}$. Ввиду максимальности $\mathfrak{i}$, указанный идеал либо будет совпадать с $\mathfrak{i}$, либо будет единичным идеалом. Но отсюда следует, что $\overline{\mathfrak{j}}$ будет либо нулевым, либо единичным идеалом кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$.

Так как кольцо $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ не имеет собственных идеалов, то оно является либо полем, либо кольцом из конечного числа элементов $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_p$, подчиненных соотношениям $\overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_j = 0$ (§ 1, теорема I).

(I) Предположим сначала, что $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ есть поле. Это обязательно будет в случае, когда кольцо $\mathfrak{R}$ содержит единицу, так как в этом случае и $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ обладает единицей. Пусть α и β — любые два элемента из $\mathfrak{R}$, для которых $\alpha\beta \in \mathfrak{i}$. Тогда, если обозначить через $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ соответствующие им элементы в $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, мы будем иметь

$$\overline{\alpha}\overline{\beta} = 0.$$

Так как $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ является полем, то хотя бы один из элементов $\overline{\alpha}$ или $\overline{\beta}$ должен быть равен нулю. Отсюда следует, что хотя бы один из элементов α или β содержится в $\mathfrak{i}$, т. е. что идеал $\mathfrak{i}$ прост.

(II) Пусть теперь $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ состоит из конечного числа элементов $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_p$. Если α — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то соответствующим ему элементом кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ будет один из $\overline{\alpha}_i$. Так как $\overline{\alpha}_i^2 = 0$, то $\alpha^2 \in \mathfrak{i}$. В частности, если α и β — элементы из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{i}),$$

то

$$\beta^2 = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Поэтому идеал $\mathfrak{i}$ примарен. Заметим, что радикал $\mathfrak{p}$ идеала $\mathfrak{i}$ является единичным идеалом, так как квадрат любого элемента из $\mathfrak{R}$ лежит в $\mathfrak{i}$. При этом

$$\mathfrak{p}^2 = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Ввиду того, что $\mathfrak{p}$ не содержится в $\mathfrak{i}$, идеал $\mathfrak{i}$ не прост.

Следствием наших рассуждений является, в частности, то, что если максимальный идеал $\mathfrak{i}$ прост, то кольцо вычетов $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ является полем. Можно показать, что и обратно, если $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ есть поле, то идеал $\mathfrak{i}$ максимален и прост. В самом деле, если бы $\mathfrak{i}$ не был максимален, то у него имелся бы собственный делитель $\mathfrak{j}$, не совпадающий с единичным идеалом. Поэтому идеал $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ был бы собственным идеалом кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$. Но, как мы знаем, поле не имеет собственных идеалов. Если α и β — любые два элемента из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие соотношению $\alpha\beta \in \mathfrak{i}$, а $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — соответствующие им элементы из $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, то

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = 0.$$

Отсюда следует, что один из элементов $\bar{\alpha}$ или $\bar{\beta}$ равен нулю, т. е. что один из элементов α или β содержится в $\mathfrak{i}$. Следовательно, идеал $\mathfrak{i}$ прост.

Этим доказана

Теорема IV. *Для того чтобы кольцо вычетов $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ было полем, необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathfrak{i}$ был максимальным и простым.*

Аналогичные рассуждения показывают, что для отсутствия в кольце $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ делителей нуля необходима и достаточна простота идеала $\mathfrak{i}$. Действительно, если $\alpha\beta \in \mathfrak{i}$, то $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ равно нулю. Если $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ не содержит делителей нуля, то хотя бы один из элементов $\bar{\alpha}$ или $\bar{\beta}$ должен быть равен нулю, т. е. хотя бы один из элементов α или β должен лежать в $\mathfrak{i}$. Следовательно, идеал $\mathfrak{i}$ прост. Обратно, если идеал $\mathfrak{i}$ прост, то из равенства $\bar{\alpha}\bar{\beta} = 0$, эквивалентного соотношению $\alpha\beta \in \mathfrak{i}$, следует что α или β лежит в $\mathfrak{i}$. Поэтому один из элементов $\bar{\alpha}$ или $\bar{\beta}$ должен быть равен нулю. Но это и означает, что в $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ отсутствуют делители нуля. Иногда приведенный факт используется в качестве определения простого идеала.

Теорема V. *Пусть $\mathfrak{j}$ — делитель идеала $\mathfrak{i}$. Идеал $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ примарен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{j}$ примарен. Если $\mathfrak{j}$ является $\mathfrak{p}$-примарным, то $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ $(\mathfrak{p}/\mathfrak{i})$-примарен.*

Допустим сначала, что идеал $\mathfrak{j}$ примарен и что $\mathfrak{p}$ — его радикал. В таком случае $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{j} \supseteq \mathfrak{i}$.

(I) Пусть $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ — элементы кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}), \quad \bar{\alpha} \neq 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}).$$

Если α и β — элементы $\mathfrak{R}$, отображающиеся на $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$, то мы будем иметь

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{j}), \quad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Но так как идеал $\mathfrak{j}$ $\mathfrak{p}$-примарен, то отсюда вытекает, что $\beta \in \mathfrak{p}$. Следовательно,

$$\bar{\beta} = 0 \quad (\mathfrak{p}/\mathfrak{i}).$$

(II) Из соотношения $\mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{p})$ следует, что

$$\mathfrak{j}/\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{p}/\mathfrak{i}).$$

(III) Если

$$\overline{\beta} = 0 \quad (\mathfrak{p}/\mathfrak{i}),$$

то мы имеем

$$\beta = 0 \quad (\mathfrak{p}),$$

а значит, для некоторого показателя ρ будет

$$\beta^\rho = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Следовательно,

$$\overline{\beta}^\rho = 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}).$$

Теперь из теоремы I § 2 следует, что идеал $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ является $(\mathfrak{p}/\mathfrak{i})$-примарным.

Пусть теперь примарным будет идеал $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{p}}$ радикал идеала $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$, а через $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$, отображающийся на $\overline{\mathfrak{p}}$. Тогда $\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\mathfrak{i}$. Как и прежде, мы будем обозначать через α, β, ... элементы кольца $\mathfrak{R}$, а через $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, ... — образы этих элементов в $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$.

(I) Если α и β — элементы из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{j}), \quad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{j}),$$

то

$$\overline{\alpha}\overline{\beta} = 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}), \quad \overline{\alpha} \neq 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}).$$

Так как идеал $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ $(\mathfrak{p}/\mathfrak{i})$-примарен, то из этих соотношений следует, что $\overline{\beta} \in (\mathfrak{p}/\mathfrak{i})$, а поэтому $\beta \in \mathfrak{p}$.

(II) Из соотношения $\mathfrak{j}/\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{p}/\mathfrak{i})$ вытекает, что

$$\mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

(III) Если $\beta \in \mathfrak{p}$, то $\overline{\beta} \in \mathfrak{p}/\mathfrak{i}$. Следовательно, при некотором показателе ρ будет $\overline{\beta}^\rho \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$. Но это означает, что $\beta^\rho \in \mathfrak{j}$.

Таким образом (§ 2, теорема I), идеал $\mathfrak{j}$ $\mathfrak{p}$-примарен.

Допустим теперь, что существует целое положительное число σ, удовлетворяющее условию

$$(\mathfrak{p}/\mathfrak{i})^\sigma = 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}).$$

Если $\beta \in \mathfrak{p}^\sigma$, то

$$\beta = \sum_i \alpha_{i1} \dots \alpha_{i\sigma},$$

где $\alpha_{ij} \in \mathfrak{p}$. Следовательно,

$$\overline{\beta} = \sum_i \overline{\alpha}_{i1} \dots \overline{\alpha}_{i\sigma} = 0 \quad ((\mathfrak{p}/\mathfrak{i})^\sigma).$$

По предположению, $\overline{\beta} \in \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$, а значит, $\beta \in \mathfrak{j}$. Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{p}^\sigma = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Аналогично можно показать, что и обратно, из соотношения

$$\mathfrak{p}^\sigma = 0 \quad (\mathfrak{j})$$

следует, что

$$(\mathfrak{p}/\mathfrak{i})^\sigma = 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}).$$

Таким образом, мы получаем

Следствие I. *Если идеал* $\mathfrak{j}$ $(\mathfrak{j} \supseteq \mathfrak{i})$ $\mathfrak{p}$*-примарен и* $\mathfrak{p}^\sigma = 0$ $(\mathfrak{j})$, *то*

$$(\mathfrak{p}/\mathfrak{i})^\sigma = 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}).$$

Обратно, если найдется показатель ρ, *при котором*

$$(\mathfrak{p}/\mathfrak{i})^\rho = 0 \quad (\mathfrak{j}/\mathfrak{i}),$$

то

$$\mathfrak{p}^\rho = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Следствие II. *Если* $\mathfrak{j} \supseteq \mathfrak{i}$, *то идеал* $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ *прост тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{j}$ *прост.*

Это вытекает из следствия I при $\rho = \sigma = 1$.

Следствие I показывает, что при условии справедливости в кольцах $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ теоремы о базисе соответствующие примарные идеалы этих колец имеют один и тот же индекс (см. теорему VII).

Пусть $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ — два идеала некоторого кольца $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие условию

$$\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

При гомоморфизме кольца $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ идеал $\mathfrak{j}$ отображается на идеал $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$. Этому идеалу соответствует гомоморфизм кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ на $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$. Последовательное выполнение этих гомоморфизмов определяет гомоморфизм $\mathfrak{R}$ на $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$. Элемент α из $\mathfrak{R}$ отображается на нуль кольца $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$ тогда и только тогда, когда он отображается на элемент идеала $\mathfrak{j}/\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, т. е. тогда и только тогда, когда этот элемент принадлежит $\mathfrak{j}$. Отсюда следует, что кольцо $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$ изоморфно кольцу вычетов кольца $\mathfrak{R}$ по идеалу $\mathfrak{j}$, т. е. $\mathfrak{R}/\mathfrak{j}$. Тем самым доказана следующая

Теорема VI. *Если* $\mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{j}$ *— идеалы кольца* $\mathfrak{R}$, *удовлетворяющие условию* $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}$, *то кольцо вычетов* $\mathfrak{R}/\mathfrak{j}$ *изоморфно кольцу* $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})/(\mathfrak{j}/\mathfrak{i})$.

Теорема VII. *Если теорема о базисе имеет место в кольце* $\mathfrak{R}$, *то она имеет место и в кольце* $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$.

Пусть $\bar{\mathfrak{j}}$ — любой идеал кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$, отображающийся на $\bar{\mathfrak{j}}$. Пусть, далее, $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — базис идеала $\mathfrak{j}$. Если обозначить через $\bar{\alpha}$ любой элемент из $\bar{\mathfrak{j}}$, а через α — элемент кольца $\mathfrak{R}$, соответствующий $\bar{\alpha}$, то α должно будет принадлежать $\mathfrak{j}$. Поэтому

$$\alpha = \rho_1\omega_1 + \ldots + \rho_r\omega_r + n_1\omega_1 + \ldots + n_r\omega_r,$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_r$ — элементы из $\mathfrak{R}$, а $n_1, \ldots, n_r$ — целые числа. Следовательно,

$$\bar{\alpha} = \bar{\rho}_1\bar{\omega}_1 + \ldots + \bar{\rho}_r\bar{\omega}_r + n_1\bar{\omega}_1 + \ldots + n_r\bar{\omega}_r,$$

и потому

$$\bar{\mathfrak{j}} \subseteq \mathfrak{R}/\mathfrak{i} \cdot (\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_r).$$

Но элементы $\bar{\omega}_1, \ldots, \omega_r$ принадлежат идеалу $\bar{\mathfrak{j}}$. Поэтому

$$\mathfrak{R}/\mathfrak{i} \cdot (\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_r) \subseteq \bar{\mathfrak{j}}.$$

Отсюда следует, что элементы $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_r$ образуют базис идеала $\bar{\mathfrak{j}}$. Теорема доказана.

Предшествующие теоремы позволяют нам рассматривать связь между свойствами идеалов кольца $\mathfrak{R}$, являющихся делителями идеала $\mathfrak{i}$, и свойствами соответствующих им идеалов кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$. Такое рассмотрение очень просто и не вызывает необходимости в дальнейших пояснениях. Мы приведем лишь несколько наиболее полезных результатов. Доказательства мы оставляем читателю. Идеалы кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ мы обозначаем через $\bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}}, \ldots$, а максимальные идеалы кольца $\mathfrak{R}$, соответствующие этим идеалам в $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, — через $\mathfrak{j}, \mathfrak{k}, \ldots$.

(I) $(\overline{\mathfrak{j}, \mathfrak{k}}) = (\bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}})$, *причем* $(\mathfrak{j}, \mathfrak{k})$ *есть наибольший идеал в* $\mathfrak{R}$, *соответствующий идеалу* $(\bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}})$.

(II) $[\overline{\mathfrak{j}, \mathfrak{k}}] = [\bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}}]$, *причем* $[\mathfrak{j}, \mathfrak{k}]$ *есть наибольший идеал кольца* $\mathfrak{R}$, *соответствующий* $[\bar{\mathfrak{j}}, \bar{\mathfrak{k}}]$.

(III) $\overline{\mathfrak{j}\mathfrak{k}} = \bar{\mathfrak{j}}\bar{\mathfrak{k}}$, *причем наибольшим идеалом кольца* $\mathfrak{R}$, *соответствующим идеалу* $\bar{\mathfrak{j}}\bar{\mathfrak{k}}$ *в* $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, *является* $(\mathfrak{j}\mathfrak{k}, \mathfrak{i})$. *Этот идеал не обязательно совпадает с* $\mathfrak{j}\mathfrak{k}$.

(IV) $\overline{\mathfrak{j} : \mathfrak{k}} = \bar{\mathfrak{j}} : \bar{\mathfrak{k}}$, *причем* $\mathfrak{j} : \mathfrak{k}$ *есть наибольший идеал кольца* $\mathfrak{R}$, *соответствующий* $\bar{\mathfrak{j}} : \bar{\mathfrak{k}}$.

(V) *Если теорема о базисе имеет место в кольце* $\mathfrak{R}$ *и если* $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k]$ — *несократимое представление некоторого идеала* $\mathfrak{j}$, *являющегося делителем* $\mathfrak{i}$, *то* $[\bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_k]$ *есть несократимое представление идеала* $\bar{\mathfrak{j}}$.

§ 4. Подкольца и расширения колец

В дальнейшем нам придется довольно часто рассматривать совместно пару колец, одно из которых является подкольцом другого. Поэтому удобно собрать в одном месте общие теоремы об идеалах в таких кольцах. Для наших целей достаточно ограничиться случаем, когда оба рассматриваемых кольца обладают одной и той же единицей.

Условимся обозначать меньшее из двух рассматриваемых колец через $\mathfrak{R}$ и записывать его идеалы готическими буквами без звездо-

чек, большее же кольцо будем обозначать через $\mathfrak{R}^*$ и записывать его идеалы готическими буквами со звездочками. Вообще, символ S будет означать некоторое множество элементов кольца $\mathfrak{R}$, а символ S^* — некоторое множество элементов из $\mathfrak{R}^*$. Любое подмножество кольца $\mathfrak{R}$ является подмножеством и для $\mathfrak{R}^*$. Однако идеал кольца $\mathfrak{R}$ может и не быть идеалом в $\mathfrak{R}^*$. Если $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — идеалы кольца $\mathfrak{R}$, то соотношение

$$\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{j})$$

является соотношением между этими идеалами именно в кольце $\mathfrak{R}$. Соотношение же

$$\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}$$

можно рассматривать как в кольце $\mathfrak{R}$, так и в кольце $\mathfrak{R}^*$.

Если S — некоторое множество элементов из $\mathfrak{R}$, то через $\mathfrak{R}^* \cdot S$ мы будем обозначать совокупность элементов, которые можно записывать в виде конечных сумм $\sum_1^r \rho_i^* \alpha_i$, где $\rho_1^*, \ldots, \rho_r^*$ — произвольные элементы из $\mathfrak{R}^*$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — элементы множества S. С другой стороны, если S^* — множество элементов из $\mathfrak{R}^*$, то через $\mathfrak{R} \cap S^*$ мы будем обозначать совокупность элементов из S^*, лежащих в $\mathfrak{R}$.

Теорема I. *Если* $\mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{j}$ *— идеалы кольца* $\mathfrak{R}$, *то* $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ *являются идеалами кольца* $\mathfrak{R}^*$, *причем имеют место следующие соотношения*:

(I) *из* $\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{j})$ *следует* $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j})$;

(II) $\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) = (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}, \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j})$;

(III) $\mathfrak{R}^* \cdot [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] \subseteq [\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}, \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}]$;

(IV) $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}\mathfrak{j} = (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i})(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j})$;

(V) $\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i} : \mathfrak{j}) \subseteq (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}) : (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j})$.

Пусть α^* и β^* — любые элементы из $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$, а ρ^* — произвольный элемент из $\mathfrak{R}^*$. Тогда

$$\alpha^* = \sum_{i=1}^{k} \rho_i^* \alpha_i \qquad \text{и} \qquad \beta^* = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i^* \beta_i,$$

где $\rho_1^*, \ldots, \rho_k^*$ $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_s^*$ — элементы из $\mathfrak{R}^*$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ — элементы из $\mathfrak{i}$. Ясно, что элементы

$$\alpha^* - \beta^* = \sum_{i=1}^{k} \rho_i^* \alpha_i - \sum_{i=1}^{s} \sigma_i^* \beta_i$$

и

$$\rho^* \alpha^* = \sum_{i=1}^{k} \rho^* \rho_i^* \alpha_i$$

будут принадлежать $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$. Следовательно, $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ есть идеал кольца $\mathfrak{R}^*$.

(I) Если α^* — элемент из $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$, то

$$\alpha^* = \sum_1^k \rho_i^* \alpha_i,$$

где $\alpha_i \in \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}$. Следовательно, $\alpha^* \in \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}$.

(II) Любой элемент из $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$ может быть записан в виде $\alpha + \beta$, где $\alpha \in \mathfrak{i}$ и $\beta \in \mathfrak{j}$. Поэтому, если $\gamma^* \in \mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$, то должно иметь место соотношение

$$\gamma^* = \sum_1^k \rho_i^* (\alpha_i + \beta_i) = \sum_1^k \rho_i^* \alpha_i + \sum_1^k \rho_i^* \beta_i,$$

показывающее, что

$$\gamma^* \in (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i},\ \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}).$$

Поэтому

$$\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i},\ \mathfrak{j}) \subseteq (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i},\ \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}).$$

С другой стороны, любой элемент из $(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i},\ \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j})$ можно записать в виде $\alpha^* + \beta^*$, где

$$\alpha^* = \sum_1^k \rho^*{}_i \alpha_i, \quad \beta^* = \sum_1^s \sigma^*{}_i \beta_i$$

и

$$\alpha_i = 0 \quad (\mathfrak{i}), \qquad \beta_i = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Если мы положим

$$\gamma_i = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, k), \qquad \gamma_i = \beta_{i-k} \quad (i = k+1, \ldots, k+s)$$

и

$$\tau_i^* = \rho_i^* \quad (i = 1, \ldots, k), \qquad \tau_i^* = \sigma_{i-k}^* \quad (i = k+1, \ldots, k+s),$$

то получим

$$\alpha^* + \beta^* = \sum_1^{k+s} \tau_i^* \gamma_i,$$

где

$$\gamma_i = 0 \quad (\mathfrak{i},\ \mathfrak{j}).$$

Следовательно, $\alpha^* + \beta^* \in \mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$. Таким образом,

$$(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i},\ \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}) \subseteq \mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}).$$

Из двух полученных результатов вытекает, что

$$\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}) = (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i},\ \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}).$$

(III) Любой элемент γ^* из $\mathfrak{R}^* \cdot [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ имеет вид

$$\gamma^* = \sum_1^k \rho_i^* \gamma_i,$$

где

$$\gamma_i = 0 \quad (\mathfrak{i}) \qquad \text{и} \qquad \gamma_i = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Следовательно,

$$\gamma^* = 0 \quad (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}), \qquad \gamma^* = 0 \quad (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}),$$

т. е.

$$\mathfrak{R}^* \cdot [\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] \subseteq [\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}, \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}].$$

(IV) Если $\gamma^* \in \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{ij}$, то

$$\gamma^* = \sum_1^k \rho_i^* \alpha_i \beta_i = \sum_1^k (\rho_i^* \alpha_i)\, \beta_i,$$

где

$$\alpha_i = 0 \quad (\mathfrak{i}) \qquad \text{и} \qquad \beta_i = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Следовательно,

$$\rho_i^* \alpha_i \in \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i} \qquad \text{и} \qquad \beta_i \in \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}.$$

Поэтому мы имеем

$$\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{ij} \subseteq (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i})(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}).$$

Обратно, если

$$\gamma^* \in (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i})(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}),$$

то

$$\gamma^* = \sum_{i=1}^r \alpha_i^* \beta_i^*,$$

где

$$\alpha_i^* = \sum_{j=1}^s \rho_{ij}^* \alpha_j \qquad \text{и} \qquad \beta_i^* = \sum_{k=1}^t \sigma_{ik}^* \beta_k,$$

причем

$$\alpha_j = 0 \quad (\mathfrak{i}) \qquad \text{и} \qquad \beta_k = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Следовательно,

$$\gamma^* = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \rho_{ij}^* \sigma_{ik}^* \alpha_j \beta_k \in \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{ij},$$

и поэтому

$$(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i})(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}) \subseteq \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{ij}.$$

Комбинируя два полученных результата, имеем

$$(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i})(\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}) = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{ij}.$$

(V) Если $\gamma^* \in \mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i} : \mathfrak{j})$, то

$$\gamma^* = \sum_1^k \rho_i^* \gamma_i,$$

где

$$\gamma_i \mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Следовательно, в силу (I),

$$\gamma_i \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}),$$

и поэтому

$$\gamma^* \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j} = 0 \quad (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}).$$

Отсюда

$$\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i} : \mathfrak{j}) \subseteq (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}) : (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}).$$

Теорема II. *Если* i^* *и* j^* — *идеалы кольца* $\mathfrak{R}^*$, *то* $\mathfrak{R} \cap i^*$ *и* $\mathfrak{R} \cap j^*$ *являются идеалами в* $\mathfrak{R}$, *причем*

(I) *из* $i^* = 0$ (j^*) *следует* $\mathfrak{R} \cap i^* = 0$ $(\mathfrak{R} \cap j^*)$;

(II) $\mathfrak{R} \cap (i^*, j^*) \supseteq (\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*)$;

(III) $\mathfrak{R} \cap [i^*, j^*] = [\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*]$;

(IV) $\mathfrak{R} \cap (i^* j^*) \supseteq (\mathfrak{R} \cap i^*)(\mathfrak{R} \cap j^*)$;

(V) $\mathfrak{R} \cap (i^* : j^*) \subseteq (\mathfrak{R} \cap i^*) : (\mathfrak{R} \cap j^*)$.

Пусть α и β — элементы из $\mathfrak{R} \cap i^*$, а ρ — произвольный элемент кольца $\mathfrak{R}$ (а значит, и элемент кольца $\mathfrak{R}^*$). Так как i^* есть идеал, то $\alpha - \beta$ и $\rho\alpha$ принадлежат i^*. Но так как они принадлежат также и $\mathfrak{R}$, то они являются элементами $\mathfrak{R} \cap i^*$. Поэтому последнее множество является идеалом.

(I) Если $\alpha \in \mathfrak{R} \cap i^*$, то $\alpha \in i^* \subseteq j^*$. Следовательно, α лежит как в j^*, так и в $\mathfrak{R}$, а значит, и в $\mathfrak{R} \cap j^*$. Поэтому

$$\mathfrak{R} \cap i^* = 0 \quad (\mathfrak{R} \cap j^*).$$

(II) Если $\alpha \in (\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*)$, то $\alpha \in (i^*, j^*)$. Но так как α лежит также и в $\mathfrak{R}$, то он является элементом $\mathfrak{R} \cap (i^*, j^*)$. Поэтому $\mathfrak{R} \cap (i^*, j^*) \supseteq (\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*)$.

(III) Если $\alpha \in \mathfrak{R} \cap [i^*, j^*]$, то

$$\alpha \in i^*, \quad \alpha \in j^*, \quad \alpha \in \mathfrak{R}.$$

Следовательно,

$$\alpha \in \mathfrak{R} \cap i^*, \quad \alpha \in \mathfrak{R} \cap j^*.$$

Поэтому

$$\alpha \in [\mathfrak{R} \cap i^*, \quad \mathfrak{R} \cap j^*],$$

а значит, мы имеем

$$\mathfrak{R} \cap [i^*, j^*] \subseteq [\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*].$$

Наоборот,

$$\mathfrak{R} \cap i^* \subseteq i^*, \quad \mathfrak{R} \cap j^* \subseteq j^*.$$

Следовательно,

$$[\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*] \subseteq [i^*, j^*].$$

Но

$$[\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*] \subseteq \mathfrak{R}.$$

Поэтому

$$[\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*] \subseteq \mathfrak{R} \cap [i^*, j^*].$$

Комбинируя оба полученных результата, имеем

$$\mathfrak{R} \cap [i^*, j^*] = [\mathfrak{R} \cap i^*, \mathfrak{R} \cap j^*].$$

(IV) Так как $\mathfrak{R} \cap i^* \subseteq i^*$ и $\mathfrak{R} \cap j^* \subseteq j^*$, то

$$(\mathfrak{R} \cap i^*)(\mathfrak{R} \cap j^*) \subseteq i^* j^*.$$

В силу соотношения

$$(\mathfrak{R} \cap i^*)(\mathfrak{R} \cap j^*) \subseteq \mathfrak{R},$$

мы получаем

$$\mathfrak{R} \cap (i^* j^*) \supseteq (\mathfrak{R} \cap i^*)(\mathfrak{R} \cap j^*).$$

(V) Если $\gamma \in \mathfrak{R} \cap (i^* : j^*)$, то $\gamma \in (i^* : j^*)$, и поэтому

$$\gamma j^* = 0 \quad (i^*).$$

В силу (I), имеем

$$\gamma \mathfrak{R} \cap j^* = 0 \quad (\mathfrak{R} \cap i^*).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R} \cap (i^* : j^*) \subseteq (\mathfrak{R} \cap i^*) : (\mathfrak{R} \cap j^*).$$

Теорема III. *Если $\mathfrak{q}^*$ является $\mathfrak{p}^*$-примарным идеалом кольца $\mathfrak{R}^*$, то $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*$ является $(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}^*)$-примарным идеалом кольца $\mathfrak{R}$. В частности, если $\mathfrak{p}^*$ прост, то $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}^*$ также прост.*

(I) Пусть α, β — элементы из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*) \quad \text{и} \quad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*).$$

Тогда

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{q}^*) \quad \text{и} \quad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{q}^*).$$

Но так как идеал $\mathfrak{q}^*$ является $\mathfrak{p}^*$-примарным, то отсюда следует, что $\beta \in \mathfrak{p}^*$. Кроме того, β — элемент из $\mathfrak{R}$, так что

$$\beta = 0 \quad (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}^*).$$

(II) В силу соотношения

$$\mathfrak{q}^* = 0 \quad (\mathfrak{p}^*),$$

из утверждения (I) теоремы II следует, что

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^* = 0 \quad (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}^*).$$

(III) Если

$$\beta = 0 \quad (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}^*),$$

то мы имеем

$$\beta = 0 \quad (\mathfrak{p}^*).$$

Следовательно, существует показатель ρ, при котором

$$\beta^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q}^*).$$

Но β^ρ лежит в $\mathfrak{R}$. Поэтому

$$\beta^\rho = 0 \quad (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*).$$

Из теоремы I § 2 вытекает, что идеал $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*$ является $(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}^*)$-примарным.

Вторая часть теоремы получается непосредственно, если положить $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{p}^*$.

Рассмотрим теперь результат последовательного применения операций $\mathfrak{R}^* \cdot$ и $\mathfrak{R} \cap$. Пусть $\mathfrak{i}$ — идеал в $\mathfrak{R}$, а $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$. Мы будем говорить в таком случае, что идеал $\mathfrak{i}$ *расширяется* до идеала $\mathfrak{i}^*$. Если мы положим $\mathfrak{j} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$, то, в силу $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{i}^*$, будем иметь

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^* = \mathfrak{j}.$$

В следующем параграфе приводятся примеры, показывающие, что $\mathfrak{j}$ действительно может быть собственным делителем $\mathfrak{i}$. Ввиду того, что $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}$, мы имеем [теорема I, утверждение(I)]

$$\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}.$$

С другой стороны, однако, $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{i}^*$. Следовательно, $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}^* = \mathfrak{i}^*$, и поэтому $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{i}^*$. Если $\mathfrak{i}'$ — любой другой идеал кольца $\mathfrak{R}$, для которого $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}' = \mathfrak{i}^*$, то $\mathfrak{i}' \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^* = \mathfrak{j}$. Следовательно, идеал $\mathfrak{j}$ является делителем любого идеала $\mathfrak{i}'$ из $\mathfrak{R}$, имеющего то свойство, что $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}' = \mathfrak{i}^*$.

Мы получили следующую теорему:

Теорема IV. *Если* $\mathfrak{i}$ *— любой идеал кольца* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{j} = \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i})$, *то* $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}$ *и* $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}$. *Идеал* $\mathfrak{j}$ *является наибольшим идеалом кольца* $\mathfrak{R}$, *расширяющимся до* $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$: *все идеалы кольца* $\mathfrak{R}$, *расширяющиеся до* $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$, *содержатся в* $\mathfrak{j}$.

Укажем частный случай, для которого в теореме IV можно доказать равенство $\mathfrak{i} = \mathfrak{j}$:

Теорема V. *Если в кольце* $\mathfrak{R}^*$ *существует такое конечное множество элементов* $\eta_1^*, \ldots, \eta_r^*$, *что любой элемент из* $\mathfrak{R}^*$ *записывается в виде* $\sum_1^r \rho_i \eta_i^*$, *где* $\rho_1, \ldots, \rho_r$ *— элементы из* $\mathfrak{R}$, *и если* $\mathfrak{p}$ *— простой идеал кольца* $\mathfrak{R}$, *обладающий конечным базисом, то* $\mathfrak{p} = \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p})$.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — базис идеала $\mathfrak{p}$. Тогда любой элемент из $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}$ имеет вид $\sum_1^s \rho_i^* \omega_i$, где $\rho_1^*, \ldots, \rho_s^*$ — элементы $\mathfrak{R}^*$. Пусть ω — произвольный элемент из $\mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p})$. Тогда $\omega \eta_i^* \in \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}$ и поэтому

$$\omega \eta_i^* = \sum_{j=1}^s \rho_{ij}^* \omega_j \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Но

$$\rho_{ij}^* = \sum_{k=1}^r \rho_{ijk} \eta_k^*,$$

где ρ_{ijk} — элементы из $\mathfrak{R}$. Следовательно,

$$\omega \eta_i^* = \sum_{k=1}^r d_{ik} \eta_k^* \quad (i = 1, \ldots, r),$$

где

$$d_{ij} = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Исключая отсюда $\eta_1^*, \ldots, \eta_r^*$, получаем

$$|\delta_{ij}\omega - d_{ij}| = 0,$$

и поэтому

$$\omega^r = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Так как идеал $\mathfrak{p}$ прост, то отсюда следует, что $\omega = 0 \quad (\mathfrak{p})$, и поэтому

$$\mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}.$$

Пользуясь теперь теоремой IV, сразу получаем требуемое. Полезно отметить такое

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* V, *и пусть в кольце* $\mathfrak{R}^*$ *имеет место теорема о базисе. Если* $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p} = [\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_k^*]$, *где компоненты* $\mathfrak{q}_i^*$ *примарны, то хотя бы при одном значении* i *справедливо равенство* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{p}$.

В силу утверждения (III) теоремы II, мы имеем

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}) = [\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_k^*].$$

Но, по теореме III, идеал $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_i^*$ примарен. Пусть его радикалом будет $\mathfrak{p}_i$. Тогда

$$\mathfrak{p} = 0 \quad (\mathfrak{p}_i),$$

так как $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_i^* \subseteq \mathfrak{p}_i$.

Если бы каждый идеал $\mathfrak{p}_i$ был собственным делителем для $\mathfrak{p}$, то мы могли бы найти элементы $\alpha_i \in \mathfrak{p}_i$, не лежащие в $\mathfrak{p}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Следовательно, при некотором целом ρ было бы

$$(\alpha_1 \ldots \alpha_k)^\rho = 0 \quad ([\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_k^*]),$$

т. е.

$$(\alpha_1 \ldots \alpha_k)^\rho = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

В силу того, что идеал $\mathfrak{p}$ прост, хотя бы один из элементов α_i должен принадлежать $\mathfrak{p}$, так что мы получили противоречие. Следовательно, хотя бы при одном значении i должно быть $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$. Но $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_i^* \subseteq \mathfrak{p}_i$, и поэтому

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{p}.$$

Вернемся к общей задаче о связи между идеалами колец $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}^*$. Пусть $\mathfrak{i}^*$ — идеал в $\mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$ и $\mathfrak{j}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$. В этом случае мы будем говорить, что идеал $\mathfrak{i}^*$ *сжимается* в идеал $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$. Так как $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{i}^*$, то $\mathfrak{j}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}^* = \mathfrak{i}^*$. Следующий пример показывает, что $\mathfrak{j}^*$ может быть собственным кратным идеала $\mathfrak{i}^*$. Пусть K — поле, x — неизвестное над K, а y — корень уравнения $y^2 = x^3$ в некотором расширении кольца $K[x]$. Возьмем $\mathfrak{R} = K[x, y]$, $\mathfrak{R}^* = K[x, y, yx^{-1}]$ и положим

$$\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}^* \cdot (x, y, yx^{-1}).$$

Тогда можно проверить, что

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^* = \mathfrak{R} \cdot (x, y) \text{ и } \mathfrak{j}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{R}^* \cdot (x, y) \neq \mathfrak{i}^*.$$

Так как $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{j}^*$, то $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{j}^*$, а значит, ввиду включения $\mathfrak{j}^* \subseteq \mathfrak{i}^*$, будет $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{j}^* \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^* = \mathfrak{i}$. Следовательно, имеет место равенство $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{j}^* = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$. Таким образом, доказана

Теорема VI. *Если* $\mathfrak{i}^*$ *— любой идеал кольца* $\mathfrak{R}^*$ *и* $\mathfrak{j}^* = \mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*)$, *то* $\mathfrak{j}^* \subseteq \mathfrak{i}^*$ *и* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{j}^* = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$. *Идеал* $\mathfrak{j}^*$ *является наименьшим идеалом в* $\mathfrak{R}^*$, *сжимающимся в* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$; $\mathfrak{j}^*$ *кратен любому идеалу из* $\mathfrak{R}^*$, *сжимающемуся в* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$.

Идеал $\mathfrak{i}^*$ кольца $\mathfrak{R}^*$ называется *идеалом расширения*, если он равен некоторому $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}_1$, где $\mathfrak{i}_1$ — идеал кольца $\mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{i}_1^*$ — любой идеал из $\mathfrak{R}^*$, то идеал $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}_1^*)$ называется идеалом расширения, *связанным с идеалом* $\mathfrak{i}_1^*$. Аналогично, идеал $\mathfrak{i}$ из $\mathfrak{R}$ называется *идеалом сжатия*, если он равен некоторому $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}_1^*$, где $\mathfrak{i}_1^*$ — идеал из $\mathfrak{R}^*$. Если $\mathfrak{i}_1$ — любой идеал в $\mathfrak{R}$, то идеал $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}_1)$ называется идеалом сжатия, *связанным с* $\mathfrak{i}_1$.

Каждый идеал сжатия из $\mathfrak{R}$ является сжатием одного и только одного идеала расширения из $\mathfrak{R}^*$. Действительно, пусть $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}_1^*$ — произвольный идеал сжатия из $\mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{i}_2^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$, то (теорема VI) $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}_2^* = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}_1^* = \mathfrak{i}$, так что $\mathfrak{i}$ является сжатием идеала расширения $\mathfrak{i}_2^*$. Если $\mathfrak{i}_3^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}_1$ — другой идеал расширения, удовлетворяющий условию $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}_3^*$, то из теоремы IV следует, что $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}_1 = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$, так что $\mathfrak{i}_3^* = \mathfrak{i}_2^*$. Точно таким же образом можно доказать, что каждый идеал расширения из $\mathfrak{R}^*$ является расширением в точности одного идеала сжатия из $\mathfrak{R}$. Следовательно, справедлива

Теорема VII. *Между идеалами сжатия из* $\mathfrak{R}$ *и идеалами расширения из* $\mathfrak{R}^*$ *имеется взаимно однозначное соответствие. Если идеалы* $\mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{i}^*$ *отвечают друг другу в этом соответствии, то* $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$. *Идеал* $\mathfrak{i}$ *является единственным идеалом сжатия, расширяющимся до* $\mathfrak{i}^*$, *а* $\mathfrak{i}^*$ *— единственным идеалом расширения, сжимающимся в* $\mathfrak{i}$.

Теорема VIII. (I) *Если* $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ *— идеалы сжатия из* $\mathfrak{R}$, *то* $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ *и* $\mathfrak{i} : \mathfrak{j}$ *также являются идеалами сжатия.*

(II) *Если* $\mathfrak{i}^*$, $\mathfrak{j}^*$ *— идеалы расширения из* $\mathfrak{R}^*$, *то* $(\mathfrak{i}^*, \mathfrak{j}^*)$ *и* $\mathfrak{i}^* \mathfrak{j}^*$ *также являются идеалами расширения.*

(I) Мы можем записать $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$, $\mathfrak{j} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{j}^*$, где $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}$. В силу утверждения (III) теоремы II, имеем

$$[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] = \mathfrak{R} \cap [\mathfrak{i}^*, \mathfrak{j}^*].$$

Таким образом, идеал $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ является идеалом сжатия.

В силу утверждения (V) теоремы I, $\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i} : \mathfrak{j}) \subseteq \mathfrak{i}^* : \mathfrak{j}^*$. В силу же утверждения (V) теоремы II,

$$\mathfrak{R} \cap (\mathfrak{i}^* : \mathfrak{j}^*) \subseteq \mathfrak{i} : \mathfrak{j}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i} : \mathfrak{j})) \subseteq \mathfrak{i} : \mathfrak{j}.$$

Но идеал в левой части этого соотношения является идеалом сжатия, связанным с $\mathfrak{i} : \mathfrak{j}$, так что (теорема IV) он содержит $\mathfrak{i} : \mathfrak{j}$. Поэтому

$$\mathfrak{i} : \mathfrak{j} = \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i} : \mathfrak{j})),$$

т. е. $\mathfrak{i} : \mathfrak{j}$ является идеалом сжатия.

(II) Если $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}^* = \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{j}$, то из теоремы I вытекает, что

$$(\mathfrak{i}^*, \mathfrak{j}^*) = \mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$$

и

$$\mathfrak{i}^*\mathfrak{j}^* = \mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{ij}).$$

Следовательно, $(\mathfrak{i}^*, \mathfrak{j}^*)$ и $\mathfrak{i}^*\mathfrak{j}^*$ являются идеалами расширения.

§ 5. Кольца частных

В этом параграфе мы рассмотрим один из способов перехода от кольца $\mathfrak{R}$ к его расширению $\mathfrak{R}^*$, находящий многие применения в алгебраической геометрии. Пусть $\mathfrak{R}$ — любое коммутативное кольцо и S — непустое множество элементов из $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:

(I) Множество S мультипликативно замкнуто, т. е. если α и β — элементы S, то $\alpha\beta$ также является элементом S.

(II) S не содержит нуля и делителей нуля из $\mathfrak{R}$.

Таким образом, если α и β — элементы множества S, то $\alpha\beta$ не может быть ни нулем, ни делителем нуля.

Способ, с помощью которого мы получим из S кольцо $\mathfrak{R}^*$, напоминает способ построения поля частных области целостности (гл. I, § 4). Будем рассматривать пары элементов вида (α, β), где α — элемент из $\mathfrak{R}$, а β — элемент из S. Две пары (α, β) и (α', β') будем называть эквивалентными, $(\alpha, \beta) \sim (\alpha', \beta')$, если

$$\alpha\beta' = \alpha'\beta.$$

Очевидно, что отношение эквивалентности рефлексивно и симметрично. Чтобы доказать его транзитивность, предположим, что пара (α, β) эквивалентна (α', β'), а пара (α', β') эквивалентна (α'', β''). Тогда

$$\alpha\beta' = \alpha'\beta \quad \text{и} \quad \alpha'\beta'' = \alpha''\beta'.$$

Поэтому

$$\alpha\beta'\beta'' = \alpha'\beta\beta'' = \alpha'\beta''\beta = \alpha''\beta'\beta,$$

т. е.

$$(\alpha\beta'' - \alpha''\beta)\,\beta' = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha\beta'' - \alpha''\beta = 0,$$

так как β' не является делителем нуля. Но это и означает, что пара (α, β) эквивалентна (α'', β''). Таким образом, введенная нами эквивалентность является истинным отношением эквивалентности (гл. I, § 2) и поэтому может быть использована для разбиения множества всех пар на непересекающиеся классы эквивалентных пар.

Определим теперь сложение и умножение пар таким же образом, как это было сделано при определении поля частных области целостности:

$$(\alpha, \beta)+(\gamma, \delta)=(\alpha\delta+\beta\gamma, \beta\delta)$$

и

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta)=(\alpha\gamma, \beta\delta).$$

Пользуясь тем, что множество S мультипликативно замкнуто и не содержит делителей нуля, можно доказать, как и в § 4 гл. I, что если

$$(\alpha, \beta)\sim(\alpha', \beta') \quad \text{и} \quad (\gamma, \delta)\sim(\gamma', \delta'),$$

то

$$(\alpha, \beta)+(\gamma, \delta)\sim(\alpha', \beta')+(\gamma', \delta')$$

и

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta)\sim(\alpha', \beta')(\gamma', \delta').$$

Поэтому мы можем определить сложение и умножение классов эквивалентных пар и, как в теории поля частных области целостности, доказать, что эти классы при наших определениях сложения и умножения образуют кольцо $\mathfrak{R}^*$, нулем которого является класс, содержащий пары, эквивалентные паре $(0, \beta)$, а единицей — класс пар, эквивалентных (α, α). При этом каждому элементу ξ из $\mathfrak{R}$ соответствует элемент ξ^* из $\mathfrak{R}^*$, состоящий из пар, эквивалентных паре $(\alpha\xi, \alpha)$. Так как эквивалентность $(\alpha\xi, \alpha)\sim(\beta\eta, \beta)$ имеет место в том и только в том случае, если

$$\alpha\beta(\xi-\eta)=0,$$

т. е. если $\xi=\eta$ (ведь α и β принадлежат S и поэтому не являются делителями нуля), то это соответствие однозначно обратимо. Но так как при этом $(\xi+\eta)^*=\xi^*+\eta^*$ и $(\xi\eta)^*=\xi^*\eta^*$, то элементы ξ^* образуют подкольцо кольца $\mathfrak{R}^*$, изоморфное $\mathfrak{R}$. Следовательно, мы можем отождествить это подкольцо с $\mathfrak{R}$, так что $\mathfrak{R}^*$ станет расширением кольца $\mathfrak{R}$. Элементы из $\mathfrak{R}^*$ мы будем обычно записывать в виде α/β, где (α, β) — любая пара, взятая из соответствующего класса.

В приложениях, которыми мы будем заниматься, кольцо $\mathfrak{R}$ всегда будет областью целостности. Поэтому *ниже мы будем предполагать, что имеем дело с таким случаем*. Тогда кольцо $\mathfrak{R}^*$ будет изоморфно некоторому кольцу, содержащему $\mathfrak{R}$ и содержащемуся в поле частных K области целостности $\mathfrak{R}$. Мы будем отождествлять $\mathfrak{R}^*$ с этим кольцом. Так как $\mathfrak{R}^*$ содержит $\mathfrak{R}$, то $\mathfrak{R}^*$ и $\mathfrak{R}$ имеют одну и ту же единицу, а так как $\mathfrak{R}^*$ содержится в поле K, то в $\mathfrak{R}^*$ отсут-

ствуют делители нуля. Таким образом, $\mathfrak{R}^*$ является областью целостности. Очевидно, что поле частных кольца $\mathfrak{R}^*$ совпадает с K.

Множества S из $\mathfrak{R}$, с которыми нам придется иметь дело, будут соответствовать простым идеалам $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{R}$, отличным от единичного идеала: в качестве S мы будем брать совокупность элементов из $\mathfrak{R}$, не лежащих в $\mathfrak{p}$. Так как идеал $\mathfrak{p}$ прост, то ясно, что множество S мультипликативно замкнуто и не содержит нуля или делителей нуля. Получаемое при таком выборе S кольцо $\mathfrak{R}^*$ будем обозначать через $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ и называть *кольцом частных идеала* $\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{p}$ является нулевым идеалом, то $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ есть поле частных для $\mathfrak{R}$, так как элементами S, лежащими вне $\mathfrak{p}$, будут в этом случае все отличные от нуля элементы $\mathfrak{R}$.

При рассмотрении соотношений между идеалами колец $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ мы можем воспользоваться результатами § 4. Однако для колец типа $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ эти результаты можно существенно уточнить, как показывают следующие теоремы.

Теорема I. *Каждый идеал кольца* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ *является идеалом расширения.*

Пусть $\mathfrak{i}^*$ — любой идеал из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$. Если $\alpha/\beta \in \mathfrak{i}^*$, то $\alpha = \beta(\alpha/\beta) \in \mathfrak{i}^*$. Но так как α принадлежит $\mathfrak{R}$, то $\alpha \in \mathfrak{i}$. Наоборот, если $\alpha \in \mathfrak{i}$ и β — любой элемент, не лежащий в $\mathfrak{p}$, то $\alpha \in \mathfrak{i}^*$ и $\beta^{-1} \in \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Следовательно, $\alpha/\beta \in \mathfrak{i}^*$. Таким образом, идеал $\mathfrak{i}^*$ состоит из частных α/β, в которых α принадлежит $\mathfrak{i}$, а β не содержится в $\mathfrak{p}$. Поэтому каждый элемент из $\mathfrak{i}^*$ принадлежит идеалу $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$, т. е. $\mathfrak{i}^* \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$. Но в силу теоремы VI § 4, имеет место включение $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{i}^*$. Следовательно,

$$\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}.$$

Теорема II. *Если* $\mathfrak{i}$ *— любой идеал из* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$, *то* $\mathfrak{i}^*$ *в том и только в том случае будет единичным идеалом кольца* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, *когда* $\mathfrak{i} \neq 0 \quad (\mathfrak{p})$.

Любой элемент ξ из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$ имеет вид $\sum_1^r \frac{\alpha_i}{\beta_i} \gamma_i$, где $\alpha_i \in \mathfrak{R}$, $\gamma_i \in \mathfrak{i}$, $\beta_i \neq 0 \quad (\mathfrak{p})$. Следовательно,

$$\xi = \frac{\sum \alpha_i \gamma_i \beta_1 \cdots \beta_{i-1} \beta_{i+1} \cdots \beta_r}{\beta_1 \cdots \beta_r} = \frac{\gamma}{\beta},$$

где $\gamma \in \mathfrak{i}$ и $\beta \neq 0 \quad (\mathfrak{p})$.

Если $\mathfrak{i} \neq 0 \quad (\mathfrak{p})$, то в $\mathfrak{i}$ существует элемент β, не лежащий в $\mathfrak{p}$. Отсюда следует, что элемент $1 = \beta/\beta$ лежит в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$, а значит, $\mathfrak{i}^*$ является единичным идеалом. С другой стороны, если $\mathfrak{i}^*$ есть единичный идеал, то он содержит единицу. Поэтому существует элемент β из $\mathfrak{R}$, не принадлежащий $\mathfrak{p}$ и такой, что при некотором α из $\mathfrak{i}$ будет $\alpha/\beta = 1$. Но это означает, что $\alpha = \beta$ лежит в $\mathfrak{i}$ и не лежит в $\mathfrak{p}$, т. е. что $\mathfrak{i} \neq 0 \quad (\mathfrak{p})$.

Теорема III. *Если $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{R}$, содержащийся в $\mathfrak{p}$, и идеал $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{P}$-примарен, то идеал $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{Q}$ является $\mathfrak{p}^*$-примарным, где $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{P}$.*

Любой элемент из $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{Q}$ может быть записан в виде α/β, где $\alpha \in \mathfrak{Q}$, а β не лежит в $\mathfrak{p}$. Подобным же образом любой элемент из $\mathfrak{p}^*$ можно записать в виде γ/δ, где $\gamma \in \mathfrak{P}$, а δ не лежит в $\mathfrak{p}$.

(I) Пусть α/β и γ/δ — элементы из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = 0 \quad (\mathfrak{q}^*) \text{ и } \frac{\alpha}{\beta} \neq 0 \quad (\mathfrak{q}^*).$$

Тогда

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\xi}{\eta},$$

где $\xi \in \mathfrak{Q}$, η не содержится в $\mathfrak{p}$, а тем самым и в $\mathfrak{P}$, так как последний идеал, по условию, кратен $\mathfrak{p}$. Таким образом,

$$\alpha\gamma\eta = \beta\delta\xi = 0 \quad (\mathfrak{Q}),$$

а значит,

$$\alpha\gamma = 0 \quad (\mathfrak{Q}),$$

так как элемент η не принадлежит $\mathfrak{P}$. Но так как α/β не лежит в $\mathfrak{q}^*$, то α не содержится в $\mathfrak{Q}$. Отсюда, в силу $\mathfrak{P}$-примарности идеала $\mathfrak{Q}$, следует, что $\gamma \in \mathfrak{P}$, а значит,

$$\frac{\gamma}{\delta} = 0 \quad (\mathfrak{p}^*).$$

(II) Любой элемент из $\mathfrak{q}^*$ имеет вид α/β, где $\alpha \in \mathfrak{Q}$ и β не принадлежит $\mathfrak{p}$. Отсюда следует, что $\alpha \in \mathfrak{P}$, и поэтому $\alpha/\beta \in \mathfrak{p}^*$. Следовательно,

$$\mathfrak{q}^* = 0 \quad (\mathfrak{p}^*).$$

(III) Любой элемент из $\mathfrak{p}^*$ имеет вид α/β, где $\alpha \in \mathfrak{P}$. Следовательно, при некотором ρ будет $\alpha^\rho \in \mathfrak{Q}$. Кроме того, так как идеал $\mathfrak{p}$ прост и β не содержится в $\mathfrak{p}$, то β^ρ также не содержится в $\mathfrak{p}$. Поэтому

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q}^*).$$

Из теоремы I § 2 следует теперь, что идеал $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}^*$-примарен.

Воспользуемся обозначениями теоремы III и предположим, что α — элемент из $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*$. Тогда $\alpha \in \mathfrak{R}$ и

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma},$$

где $\beta \in \mathfrak{Q}$ и γ не принадлежит $\mathfrak{p}$. Отсюда вытекает, что $\gamma\alpha = \beta \in \mathfrak{Q}$. В силу того, что $\gamma \neq 0$ $(\mathfrak{P})$, получаем, что $\alpha \in \mathfrak{Q}$. Следовательно,

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^* \subseteq \mathfrak{Q}.$$

Но, в силу теоремы IV § 4,

$$\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*.$$

Поэтому

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*.$$

Подобное же рассуждение применимо и к идеалу $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}^*$. Из теорем I и III мы получаем следующую теорему:

Теорема IV. *Между примарными идеалами кольца* $\mathfrak{R}$, *радикалы которых кратны* $\mathfrak{p}$, *и отличными от единичного идеала примарными идеалами кольца* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ *существует взаимно однозначное соответствие. Каждый из отвечающих друг другу идеалов является соответственно расширением или сжатием другого.*

Рассмотрим теперь идеал $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$. Любой элемент из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, не принадлежащий этому идеалу, может быть записан в виде α/β, где ни α, ни β не принадлежат $\mathfrak{p}$. Отсюда следует, что $\beta/\alpha \in \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, т. е. что элементы $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, не принадлежащие $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$, являются в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ делителями единицы. С другой стороны, ни один из элементов идеала $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$ не может быть делителем единицы, так как если бы идеал $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$ содержал делитель единицы, то он был бы единичным идеалом, вопреки утверждению теоремы II. Поэтому идеал $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$ совпадает с множеством элементов из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, не являющихся делителями единицы. Если $\mathfrak{i}^*$ — любой идеал кольца $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, отличный от единичного идеала, то он не может содержать делителей единицы из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Следовательно, $\mathfrak{i}^*$ должен содержаться в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$. Таким образом, имеет место

Теорема V. *Элементы кольца* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, *не являющиеся делителями единицы, образуют идеал* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$. *Любой идеал кольца* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, *отличный от единичного идеала, кратен* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$.

Пусть теперь $\mathfrak{P}^*$ — любой простой идеал кольца $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{P} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{P}^*$. Тогда идеал $\mathfrak{P}$ прост. Предполагая, что $\mathfrak{P}^*$ не является единичным идеалом, будем иметь

$$\mathfrak{P}^* = 0 \quad (\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}), \quad \mathfrak{P} = \dot{0} \quad (\mathfrak{p}).$$

Пусть ζ — любой элемент из $(\mathfrak{R}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{P}^*}$. Мы можем записать его в виде ξ/η, где ξ и η — элементы $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, причем η не лежит в $\mathfrak{P}^*$. В таком случае

$$\xi = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \eta = \frac{\gamma}{\delta},$$

где β и δ не лежат в $\mathfrak{p}$, а γ не лежит в $\mathfrak{P}$. Следовательно,

$$\zeta = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}.$$

Но так как $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{p}$, то $\beta\gamma$ не лежит в $\mathfrak{P}$, и поэтому ζ есть элемент $\mathfrak{R}_\mathfrak{P}$, т. е.

$$(\mathfrak{R}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{P}^*} \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{P}.$$

Обратно, если ξ — любой элемент из $\mathfrak{R}_\mathfrak{P}$, то можно записать его в виде $\xi = \alpha/\beta$, где α и β — элементы $\mathfrak{R}$, причем β не лежит в $\mathfrak{P}$.

В таком случае α и β являются элементами $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ и β не принадлежит $\mathfrak{P}^*$. Поэтому ξ является элементом кольца $(\mathfrak{R}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{P}^*}$, т. е.

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{R}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{P}^*}.$$

Сопоставляя полученные результаты, имеем

$$(\mathfrak{R}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{P}^*} = \mathfrak{R}_\mathfrak{P}.$$

К этому можно добавить, что если $\mathfrak{P}$ является собственным кратным $\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{P}^*$ есть также собственное кратное $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{P}$ и поэтому является собственным идеалом кольца $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. При этом в кольце $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ имеются не принадлежащие идеалу $\mathfrak{P}^*$ элементы, не являющиеся делителями единицы. Следовательно,

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \subset (\mathfrak{R}_\mathfrak{p}) = \mathfrak{R}_\mathfrak{P}.$$

Пусть, далее, $\mathfrak{P}$ — любой идеал кольца $\mathfrak{R}$, для которого

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{P}.$$

В таком случае каждый делитель единицы из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ будет делителем единицы в $\mathfrak{R}_\mathfrak{P}$. Поэтому каждый элемент кольца $\mathfrak{R}$, не лежащий в $\mathfrak{p}$, не будет лежать в $\mathfrak{P}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{p}$. Суммируя сказанное, получаем следующую теорему:

Теорема VI. *Если $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{P}$ — два простых идеала кольца $\mathfrak{R}$, то включение $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{P}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{p}$. В частности, $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \mathfrak{R}_\mathfrak{P}$ в том и только в том случае, если $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}$. Если $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{R}_\mathfrak{P} = (\mathfrak{R}_\mathfrak{p})_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{P}}$.*

Теорема VII. *Если теорема о базисе имеет место в $\mathfrak{R}$, то она справедлива и в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$.*

Пусть $\mathfrak{i}^*$ — произвольный идеал из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$. $\mathfrak{i}$ есть идеал кольца $\mathfrak{R}$ и поэтому обладает конечным базисом $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Так как $\omega_j \in \mathfrak{i}$, то $\omega_j \in \mathfrak{i}^*$. Любой элемент α из $\mathfrak{i}$ имеет вид $\sum_1^r \rho_i \omega_i$, где ρ_i — элементы $\mathfrak{R}$. Но, ввиду теоремы I, любой элемент α^* из $\mathfrak{i}^*$ записывается в виде α/β, где $\alpha \in \mathfrak{i}$ и $\beta \neq 0 \ (\mathfrak{p})$. Следовательно,

$$\alpha^* = \sum_1^r \frac{\rho_i}{\beta} \omega_i.$$

Поэтому $\omega_1, \ldots, \omega_r$ является базисом идеала $\mathfrak{i}^*$. Тем самым теорема доказана.

Всюду ниже в этом параграфе *мы будем предполагать, что теорема о базисе имеет место* в $\mathfrak{R}$.

В силу теоремы VII, теорема о базисе будет справедлива и в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Поэтому для примарных идеалов колец $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ могут быть определены индексы. Докажем, что имеет место

Теорема VIII. *Примарные идеалы колец* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, *отвечающие друг другу в соответствии, определенном в теореме* IV, *имеют одни и те же индексы.*

Пусть $\mathfrak{q}^*$ — некоторый $\mathfrak{p}^*$-примарный идеал кольца $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, а $\mathfrak{Q}=\mathfrak{R}\cap\mathfrak{q}^*$ — соответствующий ему примарный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Его радикалом служит простой идеал $\mathfrak{P}=\mathfrak{R}\cap\mathfrak{p}^*$.

(I) Допустим, что ρ есть индекс $\mathfrak{Q}$. Тогда

$$\mathfrak{P}^\rho = 0 \quad (\mathfrak{Q}).$$

В силу утверждения (IV) теоремы I § 4, имеем

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{P}^\rho = (\mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{P})^\rho = (\mathfrak{p}^*)^\rho.$$

Далее, из равенства $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{Q}$, согласно утверждению (I) теоремы I § 4, получаем

$$(\mathfrak{p}^*)^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q}^*).$$

Следовательно, индекс идеала $\mathfrak{q}^*$ не превосходит ρ.

(II) Пусть σ — индекс идеала $\mathfrak{q}^*$. Пользуясь утверждениями (I) и (IV) теоремы II § 4, имеем

$$\mathfrak{P}^\sigma = (\mathfrak{R}\cap\mathfrak{p}^*)^\rho \subseteq \mathfrak{R}\cap\mathfrak{p}^{*\sigma} \subseteq \mathfrak{R}\cap\mathfrak{q}^* = \mathfrak{Q}.$$

Отсюда следует, что индекс идеала $\mathfrak{Q}$ не может превосходить σ.

Сопоставляя оба эти результата, получим $\rho=\sigma$, как и требовалось.

Рассмотрим теперь произвольный идеал $\mathfrak{i}$ из $\mathfrak{R}$. Пусть

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_s, \mathfrak{q}'_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}'_t]$$

— его несократимое представление пересечением примарных идеалов. Если при $i=1, \ldots, s$ радикалы идеалов $\mathfrak{q}_i$, а значит и сами $\mathfrak{q}_i$, содержатся в $\mathfrak{p}$, а при $i=s+1, \ldots, t$ $\mathfrak{q}'_i\neq 0$ $(\mathfrak{p})$, то, в силу утверждения (III) теоремы I § 4, имеет место соотношение

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{i} \subseteq [\mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}_s, \mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}'_{s+1}, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}'_t] = [\mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}_s],$$

так как, ввиду теоремы II,

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}'_i = \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \quad (i=s+1, \ldots, t).$$

Пусть теперь ξ — любой элемент из $[\mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{q}_s]$. Тогда при $i=1, \ldots, s$ мы можем записать

$$\xi = \frac{\alpha_i}{\beta_i},$$

где $\alpha_i\in\mathfrak{q}_i$, а β_i не принадлежат $\mathfrak{p}$. В таком случае

$$\alpha_i\beta_j = \alpha_j\beta_i = 0 \quad (\mathfrak{q}_j).$$

Так как радикал идеала $\mathfrak{q}_j$ кратен $\mathfrak{p}$, а β_j не лежит в $\mathfrak{p}$, то β_j не лежит в радикале идеала $\mathfrak{q}_j$. Следовательно, должно быть $\alpha_i \in \mathfrak{q}_j$. Но ввиду того, что $\mathfrak{q}'_j$ не содержится в $\mathfrak{p}$, в $\mathfrak{q}'_j$ найдется элемент β'_j, не лежащий в $\mathfrak{p}$ ($j = s+1, \ldots, t$). Отсюда следует, что

$$\xi = \frac{\alpha_1 \cdot \beta'_{s+1} \cdots \beta'_t}{\beta_1 \cdot \beta'_{s+1} \cdots \beta'_t} = \frac{\alpha}{\beta},$$

где α — элемент идеала $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s, \mathfrak{q}'_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}'_t] = \mathfrak{i}$, а β не принадлежит $\mathfrak{p}$. Следовательно (теорема I),

$$[\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_s] \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i} = [\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_s].$$

Полученное представление идеала $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$ несократимо. Действительно, если бы было, например,

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_i \supseteq [\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_s],$$

то мы имели бы [§ 4, утверждение (III) теоремы II и теорема IV]

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_i) \supseteq [\mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_1), \ldots, \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_{i-1}),$$

$$\mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_{i+1}), \ldots, \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_s)] =$$

$$= [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_s] \supseteq [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_s, \mathfrak{q}'_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}'_t].$$

Отсюда следовало бы, что компонента $\mathfrak{q}_i$ в представлении идеала $\mathfrak{i}$ является устранимой, вопреки условию.

Наоборот, отправляясь от некоторого идеала $\mathfrak{i}^*$ из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ и его несократимого представления $\mathfrak{i}^* = [\mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{q}^*_r]$, мы получаем, в силу утверждения (III) теоремы II § 4, что

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^* = [\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*_r].$$

Рассуждение, подобное приведенному выше, показывает, что это представление идеала $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$ также несократимо.

Таким образом, доказана

Теорема IX. *Собственными идеалами сжатия в кольце* $\mathfrak{R}$ *являются те и только те идеалы из* $\mathfrak{R}$, *которые представимы пересечениями примарных идеалов, имеющих радикалы, кратные* $\mathfrak{p}$. *Идеал сжатия, связанный с идеалом* $\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t]$, *получается отбрасыванием примарных идеалов написанного разложения, радикалы которых не кратны* $\mathfrak{p}$. *Если* $\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ — *несократимое представление некоторого идеала сжатия из* $\mathfrak{R}$, *то* $[\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}_r]$ *будет несократимым представлением идеала* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$. *Если* $[\mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{q}^*_k]$ — *несократимое представление некоторого идеала* $\mathfrak{i}^*$ *из* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, *то* $[\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}^*_k]$ *будет несократимым представлением идеала* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$.

Этот результат иллюстрирует выгоду использования колец частных. Во многих вопросах, в частности во многих приложениях теории идеалов к алгебраической геометрии, мы интересуемся только компонентами встречающихся идеалов, кратными одному и тому же простому идеалу $\mathfrak{p}$. Переход к кольцам частных позволяет в таких случаях исключить все остальные компоненты. В последующих главах будет много примеров использования этого приема.

Следующие две теоремы, заключительные в этом параграфе, находят частое применение в алгебраической геометрии. В первой из них предполагается справедливость в кольце $\mathfrak{R}$ теоремы о базисе. Во второй теореме такого предположения не делается[1]).

Теорема X. *Область целостности $\mathfrak{R}$ является пересечением ее колец частных по простым идеалам. Более того, $\mathfrak{R}$ есть пересечение колец частных по максимальным идеалам.*

Под пересечением колец частных мы понимаем совокупность элементов поля частных для $\mathfrak{R}$, содержащихся во всех кольцах частных.

Покажем прежде всего, что достаточно рассматривать лишь максимальные идеалы в $\mathfrak{R}$. Эти идеалы просты, так как в $\mathfrak{R}$ имеется единица. Пусть $\mathfrak{p}$ — произвольный простой идеал из $\mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{p}$ не максимален, то он является собственным кратным некоторого собственного идеала $\mathfrak{i}$ из $\mathfrak{R}$, а значит, и некоторого примарного идеала $\mathfrak{q}'$, являющегося компонентой $\mathfrak{i}$. Радикал $\mathfrak{p}'$ идеала $\mathfrak{q}'$ не будет единичным идеалом, так как если бы было $\mathfrak{p}' = \mathfrak{R}$, то $\mathfrak{p}'^{\rho}$ при любом ρ совпадал бы с $\mathfrak{R}$ (ведь в $\mathfrak{R}$ имеется единица!); с другой стороны, в силу конечности индекса идеала $\mathfrak{q}'$, должно существовать такое значение ρ, при котором $\mathfrak{p}'^{\rho} \subseteq \mathfrak{q}'$; следовательно, $\mathfrak{q}'$ был бы единичным идеалом, вопреки предположению о том, что $\mathfrak{q}'$ есть компонента собственного идеала кольца $\mathfrak{R}$. Мы получили, таким образом, что $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{p}'$, т. е. что имеется собственный простой идеал кольца $\mathfrak{R}$, являющийся собственным делителем $\mathfrak{p}$. Если идеал $\mathfrak{p}'$ не максимален, то таким же образом находится его собственный простой делитель $\mathfrak{p}''$, являющийся собственным идеалом в $\mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{p}''$ не максимален, то процесс можно продолжить. Таким образом, мы получаем последовательность идеалов

$$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}'' \subset \ldots .$$

В силу теоремы VI § 1, эта последовательность должна быть конечной, а значит, мы после конечного числа шагов достигнем идеала $\mathfrak{p}_1$, являющегося делителем $\mathfrak{p}$ и максимального в кольце $\mathfrak{R}$. В силу теоремы VI, $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$, т. е. каждый элемент поля частных, лежащий в $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1}$, лежит и в $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$. Следовательно, при рассмотрении элементов

[1]) В действительности и первая из приводимых ниже теорем может быть доказана без предположения о справедливости теоремы о базисе: достаточно лишь показать, что любой собственный идеал кольца $\mathfrak{R}$ содержится в максимальном идеале этого кольца. Для колец с единицей такое доказательство выполняется с помощью трансфинитной индукции. — *Прим. перев.*

поля частных кольца $\mathfrak{R}$, содержащихся во всех кольцах частных, можно не рассматривать кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$, так как элементы $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1}$ необходимо лежат в $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$. Поэтому достаточно рассматривать лишь кольца частных для максимальных идеалов.

Очевидно, что каждый элемент кольца $\mathfrak{R}$ лежит в любом кольце частных. Пусть теперь ξ — любой элемент поля частных кольца $\mathfrak{R}$, лежащий в кольцах частных $\mathfrak{R}$ по всем его простым идеалам. Пусть $\xi = \alpha_0/\beta_0$, где α_0 и β_0 — элементы $\mathfrak{R}$. Если β_0 является делителем единицы в $\mathfrak{R}$, то $\xi \in \mathfrak{R}$. Если же β_0 не является делителем единицы, то $\mathfrak{R} \cdot (\beta_0)$ есть собственный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Пусть

$$\mathfrak{R} \cdot (\beta_0) = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r],$$

где идеалы $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{p}_i$-примарны. Элемент ξ, по предположению, содержится в $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_1}$. Следовательно, $\xi = \alpha_1/\beta_1$, где α_1 и β_1 — элементы $\mathfrak{R}$, причем β_1 не лежит в $\mathfrak{p}_1$. Следовательно, β_1 не принадлежит также $\mathfrak{q}_1$, а значит, и идеалу $\mathfrak{R} \cdot (\beta_0)$. Поэтому

$$\mathfrak{R} \cdot (\beta_0) \subset \mathfrak{R} \cdot (\beta_0, \beta_1).$$

Если идеал $\mathfrak{R} \cdot (\beta_0, \beta_1)$ не единичный, положим

$$\mathfrak{R} \cdot (\beta_0, \beta_1) = [\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_s'],$$

где идеалы $\mathfrak{q}_i'$ $\mathfrak{p}_i'$-примарны. Так как ξ лежит в кольце частных идеала $\mathfrak{p}_1'$, то можно записать $\xi = \alpha_2/\beta_2$, где α_2 и β_2 — элементы $\mathfrak{R}$, причем β_2 не содержится в $\mathfrak{p}_1'$. Отсюда, как и выше, следует, что

$$\mathfrak{R} \cdot (\beta_0, \beta_1) \subset \mathfrak{R} \cdot (\beta_0, \beta_1, \beta_2).$$

Таким образом можно построить последовательность идеалов

$$\mathfrak{R} \cdot (\beta_0) \subset \mathfrak{R} \cdot (\beta_0, \beta_1) \subset \mathfrak{R} \cdot (\beta_0, \beta_1, \beta_2) \subset \ldots,$$

обрывающуюся лишь в том случае, если она заканчивается единичным идеалом. Но в силу теоремы VI § 1, эта последовательность должна оборваться. Поэтому найдется такое r, что

$$\mathfrak{R} \cdot (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_r) = \mathfrak{R}.$$

Поэтому должны существовать элементы $\rho_0, \ldots, \rho_r$ из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие соотношению

$$\rho_0\beta_0 + \ldots + \rho_r\beta_r = 1.$$

Но $\xi\beta_i = \alpha_i$ $(i = 0, \ldots, r)$. Следовательно,

$$\xi = \rho_0\xi\beta_0 + \ldots + \rho_r\xi\beta_r = \rho_0\alpha_0 + \ldots + \rho_r\alpha_r,$$

т. е. элемент ξ содержится в $\mathfrak{R}$. Это и доказывает теорему.

Наша заключительная теорема устанавливает перестановочность операций образования колец частных и колец вычетов. Пусть $\mathfrak{R}$ — область целостности, $\mathfrak{p}$ — простой идеал из $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{i}$ — произвольный идеал

этого кольца, содержащийся в $\mathfrak{p}$. Тогда (§ 3, теорема V) при переходе к кольцу вычетов $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ получается простой идеал $\mathfrak{p}/\mathfrak{i}$, и мы можем образовать кольцо частных $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{i}}$[1]). С другой стороны, так как $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}$ является идеалом кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$, отличным от единичного идеала (теорема II). Следовательно, можно образовать кольцо вычетов $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}$. Мы докажем следующее предложение:

Теорема XI. *Кольца* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}$ *и* $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{i}}$ *изоморфны.*

Пусть $\bar{\xi}/\bar{\eta}$ — любой элемент $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{i}}$. Здесь $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ — элементы из $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, причем $\bar{\eta}$ не лежит в $\mathfrak{p}/\mathfrak{i}$. Если $\xi, \xi', \ldots$ — элементы кольца $\mathfrak{R}$ из класса вычетов $\bar{\xi}$, а $\eta, \eta', \ldots$ — элементы $\mathfrak{R}$, лежащие в $\bar{\eta}$, то $\eta, \eta', \ldots$ не содержатся в $\mathfrak{p}$. В то же время

$$\xi - \xi' = 0 \quad (\mathfrak{i}), \qquad \eta - \eta' = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Так как $\eta, \eta', \ldots$ не лежат в $\mathfrak{p}$, то ξ/η и ξ'/η' являются элементами $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$. Далее,

$$\frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi'}{\eta'} = \frac{(\xi - \xi')\eta' - \xi'(\eta - \eta')}{\eta\eta'} = 0 \quad (\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}),$$

следовательно, ξ/η, ξ'/η' принадлежат одному и тому же классу вычетов кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ по идеалу $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}$. Поэтому элемент $\bar{\xi}/\bar{\eta}$ однозначно определяет элемент из $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}$, так что мы имеем отображение элементов кольца $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{i}}$ в кольцо $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}$. Обозначим это отображение через H.

Наоборот, пусть ζ^* — элемент из $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}$. Пусть $\xi/\eta, \xi'/\eta', \ldots$ — элементы из $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$, содержащиеся в классе вычетов ζ^*. Здесь $\xi, \xi', \ldots$ и $\eta, \eta', \ldots$ — элементы $\mathfrak{R}$, причем $\eta, \eta', \ldots$ не лежат в $\mathfrak{p}$. Так как

$$\frac{\xi}{\eta} - \frac{\xi'}{\eta'} = 0 \quad (\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{i}),$$

то мы имеем

$$\xi\eta' - \xi'\eta = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Перейдем к кольцу вычетов $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$. Если $\bar{\xi}, \bar{\xi}', \ldots, \bar{\eta}, \bar{\eta}', \ldots$ означают элементы кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$, соответствующие элементам $\xi, \xi', \ldots, \eta, \eta', \ldots$, то

$$\bar{\xi}\bar{\eta}' - \bar{\xi}'\bar{\eta} = 0.$$

Но так как $\eta, \eta', \ldots$ не лежат в $\mathfrak{p}$, то $\bar{\eta}, \bar{\eta}', \ldots$ не содержатся в $\mathfrak{p}/\mathfrak{i}$. Следовательно, элемент $\bar{\xi}/\bar{\eta} = \bar{\xi}'/\bar{\eta}'$ является элементом кольца $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{i}}$. Этим каждому элементу ζ^* поставлен в соответствие одно-

[1]) Кольцо $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{i}}$ может быть построено описанным в книге образом лишь в случае, если все делители нуля кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ содержатся в идеале $\mathfrak{p}/\mathfrak{i}$. В частности, это возможно, если идеал $\mathfrak{i}$ прост. Для рассматриваемых далее приложений отмеченное ограничение несущественно. — *Прим. перев.*

значно определенный элемент $\bar{\xi}/\bar{\eta}$ кольца $(\mathfrak{R}/\mathfrak{i})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{i}}$. Ясно, что элементу $\bar{\xi}/\bar{\eta}$ при отображении H соответствует элемент ζ^*, так что между элементами обоих рассматриваемых колец фактически установлено взаимно однозначное соответствие. Можно усмотреть непосредственно, что установленное соответствие сохраняет суммы и произведения и поэтому является изоморфизмом. Этим теорема доказана.

Следствие. *Если* $\mathfrak{i}=\mathfrak{p}$, *то* $(\mathfrak{R}/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{p}}$ *является полем частных кольца* $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$. *Следовательно, кольцо* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}\cdot\mathfrak{p}$ *изоморфно полю частных кольца* $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$.

§ 6. Модули

Прежде чем переходить к мультипликативной теории идеалов, мы рассмотрим вкратце некоторые свойства модулей над коммутативным кольцом.

Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное коммутативное кольцо, а $\mathfrak{M}$ — коммутативная группа, записанная аддитивно. Пусть, далее, определено умножение элементов из $\mathfrak{R}$ на элементы из $\mathfrak{M}$ таким образом, что если α — элемент из $\mathfrak{R}$, а ξ — элемент из $\mathfrak{M}$, то $\alpha\xi=\xi\alpha$ является элементом из $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ называется $\mathfrak{R}$-*модулем* или иногда просто *модулем*, если выполнены следующие условия:

$$\text{(I)}\quad (\alpha+\beta)\xi=\alpha\xi+\beta\xi,$$

$$\text{(II)}\quad \alpha(\xi+\eta)=\alpha\xi+\alpha\eta,$$

$$\text{(III)}\quad \alpha(\beta\xi)=(\alpha\beta)\xi.$$

В случае, если $\mathfrak{R}$ — поле, примерами $\mathfrak{R}$-модулей являются линейные системы (гл. II, § 1). Каждый идеал кольца $\mathfrak{R}$ является $\mathfrak{R}$-модулем.

Если η есть нуль группы $\mathfrak{M}$, а ξ — любой элемент из $\mathfrak{M}$, то при любом α из $\mathfrak{R}$ мы имеем

$$\alpha\xi=\alpha(\xi+\eta)=\alpha\xi+\alpha\eta.$$

Следовательно,

$$\alpha\eta=0.$$

Аналогично, если α есть нуль кольца $\mathfrak{R}$, а ξ — произвольный элемент из $\mathfrak{M}$, то можно показать, что

$$\alpha\xi=0.$$

Рассмотрим теперь элементы α из R, для которых $\alpha\xi=0$ при любом ξ из $\mathfrak{M}$. Если α и β — два таких элемента из $\mathfrak{R}$, а ρ — произвольный элемент $\mathfrak{R}$, то

$$(\alpha-\beta)\xi=\alpha\xi-\beta\xi=0,\quad (\rho\alpha)\xi=\rho(\alpha\xi)=0.$$

Следовательно, рассматриваемые элементы кольца $\mathfrak{R}$ образуют некоторый идеал $\mathfrak{i}$. Далее, если α и β — два элемента из $\mathfrak{R}$, удовле-

творяющие условию $\alpha\xi = \beta\xi$ при любом ξ из $\mathfrak{M}$, то $(\alpha - \beta)\xi = 0$ и поэтому $(\alpha - \beta) \in \mathfrak{i}$. Другими словами, эти элементы принадлежат одному и тому же классу вычетов из $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$. Обратно, непосредственно очевидно, что если α и β принадлежат одному классу вычетов, то $\alpha\xi = \beta\xi$ при любом ξ из $\mathfrak{M}$. Поэтому при рассмотрении $\mathfrak{M}$ в качестве $\mathfrak{R}$-модуля мы можем заменить $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$ и получать свойства $\mathfrak{R}$-модуля $\mathfrak{M}$ из свойств $\mathfrak{M}$ как $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$-модуля, с учетом результатов § 3, связывающих $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$. Поэтому в дальнейшем достаточно рассматривать $\mathfrak{M}$ как $\mathfrak{R}/\mathfrak{i}$-модуль, т. е. предполагать, что из равенства $\alpha\xi = 0$ при всех ξ из $\mathfrak{M}$ следует, что $\alpha = 0$. *Везде ниже мы будем считать это предположение выполненным. Кроме того, будем предполагать, что в кольце $\mathfrak{R}$ имеется единица.*

Как и выше, можно показать, что элементы $\xi \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющие при всех α из $\mathfrak{R}$ условию

$$\alpha\xi = 0,$$

образуют подгруппу $\mathfrak{M}_1$ группы $\mathfrak{M}$. Пусть теперь e — единица кольца $\mathfrak{R}$, ξ — любой элемент из $\mathfrak{M}$ и $\overline{\xi} = e\xi$. Тогда

$$e\overline{\xi} = e^2\xi = e\xi = \overline{\xi},$$

а значит,

$$e(\xi - \overline{\xi}) = e\xi - e\overline{\xi} = 0.$$

Если мы положим $\overline{\eta} = \xi - \overline{\xi}$ и выберем любой элемент α из $\mathfrak{R}$, то будем иметь

$$\alpha\overline{\eta} = (\alpha e)\overline{\eta} = \alpha(e\overline{\eta}) = 0.$$

Следовательно, $\overline{\eta} \in \mathfrak{M}_1$. Поэтому любой элемент ξ из $\mathfrak{M}$ может быть записан в виде

$$\xi = \overline{\xi} + \overline{\eta},$$

где

$$e\overline{\xi} = \overline{\xi} \quad \text{и} \quad e\overline{\eta} = 0.$$

Такая запись однозначна. Действительно, если

$$\overline{\xi} + \overline{\eta} = \overline{\xi}' + \overline{\eta}',$$

где

$$e\overline{\xi}' = \overline{\xi}' \quad \text{и} \quad e\overline{\eta}' = 0,$$

то

$$\overline{\xi} - \overline{\xi}' = \overline{\eta}' - \overline{\eta};$$

следовательно,

$$\overline{\xi} - \overline{\xi}' = e(\overline{\xi} - \overline{\xi}') = e\overline{\eta}' - e\overline{\eta} = 0,$$

т. е. $\overline{\xi} = \overline{\xi}'$, а значит, и $\overline{\eta} = \overline{\eta}'$.

Можно доказать непосредственно, что элементы $\overline{\xi}$ из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие условию $e\overline{\xi} = \overline{\xi}$, образуют подгруппу $\mathfrak{M}_2$ группы $\mathfrak{M}$. Действительно,

$$e(\overline{\xi} + \overline{\eta}) = e\overline{\xi} + e\overline{\eta} = \overline{\xi} + \overline{\eta}.$$

Таким образом, $\mathfrak{M}$ является „прямой суммой" подгрупп $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Очевидно, что можно получить все свойства группы $\mathfrak{M}$ как $\mathfrak{R}$-модуля из рассмотрения свойств $\mathfrak{R}$-модулей $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Так как мы будем ограничиваться рассмотрением колец с единицей, мы можем сосредоточить внимание лишь на случае таких модулей $\mathfrak{M}$, для которых равенство

$$\alpha\xi = 0$$

имеет место при всех α из $\mathfrak{R}$ лишь в случае, когда ξ есть нуль. *Будем в дальнейшем считать выполненным и это предположение.* Из него следует, что $e\xi = \xi$ при любом ξ из $\mathfrak{M}$.

Теория $\mathfrak{R}$-модулей даже при введенных ограничениях настолько обширна, что ее подробное изложение увело бы нас далеко за пределы нашего основного предмета. Поэтому мы ограничимся лишь небольшим числом результатов, необходимых в дальнейшем.

Говорят, что $\mathfrak{R}$-модуль $\mathfrak{M}$ *имеет конечный базис*, если в $\mathfrak{M}$ существует такое конечное множество элементов $\omega_1, \ldots, \omega_r$, что любой элемент из $\mathfrak{M}$ записывается в виде

$$\alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_r\omega_r,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — элементы из $\mathfrak{R}$. Так, идеал кольца $\mathfrak{R}$, имеющий конечный базис, будет $\mathfrak{R}$-модулем с конечным базисом. Следуя обозначению, установленному для идеалов, мы будем обозначать $\mathfrak{R}$-модуль с конечным базисом $\omega_1, \ldots, \omega_r$ через $\mathfrak{R}\cdot(\omega_1, \ldots, \omega_r)$.

Любая подгруппа модуля $\mathfrak{M}$, замкнутая относительно операции умножения на элементы $\mathfrak{R}$, называется подмодулем. Справедлива

Теорема I. *Если в $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе и $\mathfrak{R}$-модуль $\mathfrak{M}$ имеет конечный базис, то каждый подмодуль $\mathfrak{M}'$ модуля $\mathfrak{M}$ также имеет конечный базис.*

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}\cdot(\omega_1, \ldots, \omega_r)$. Мы будем доказывать теорему индукцией по числу элементов r базиса. Рассмотрим прежде всего случай $r = 1$. Любой элемент из $\mathfrak{M}'$ имеет вид $\alpha\omega_1$, где α — элемент из $\mathfrak{R}$. Если $\alpha\omega_1$ и $\beta\omega_1$ — элементы $\mathfrak{M}'$, а ρ — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то элементы

$$(\alpha - \beta)\,\omega_1 = \alpha\omega_1 - \beta\omega_1$$

и

$$(\rho\alpha)\,\omega_1 = \rho\,(\alpha\omega_1)$$

принадлежат $\mathfrak{M}'$, так как $\mathfrak{M}'$ есть группа, замкнутая относительно умножения на элементы кольца $\mathfrak{R}$. Отсюда следует, что элементы α, встречающиеся в качестве коэффициентов при ω_1 в выражении элементов из $\mathfrak{M}'$, образуют идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$. Этот идеал имеет конечный базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Так как при этом $\alpha_i \in \mathfrak{i}$, то $\alpha_i\omega_1$ являются элементами $\mathfrak{M}'$, причем любой элемент $\alpha\omega_1$ из $\mathfrak{M}'$ можно записать в виде

$$\Big(\sum_1^k \rho_i\alpha_i\Big)\,\omega_1 = \sum_1^k \rho_i\,(\alpha_i\omega_1),$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — элементы $\mathfrak{R}$, и любой такой элемент содержится в $\mathfrak{M}'$, так как $\sum_1^k \rho_i \alpha_i \in \mathfrak{i}$. Следовательно, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{R} \cdot (\alpha_1 \omega_1, \ldots, \alpha_k \omega_1)$.

Предположим теперь, что теорема верна для всех $\mathfrak{R}$-модулей, имеющих $\mathfrak{R}$-базис, состоящий менее чем из r элементов. Положим

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{R} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_{r-1}).$$

Если ξ и η — любые два элемента модуля $\mathfrak{M} = \mathfrak{R} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_r)$, лежащие одновременно в $\mathfrak{M}'$ и в $\mathfrak{M}_1$, то ясно, что $\xi - \eta$ и $\alpha\xi$ при $\alpha \in \mathfrak{R}$ также лежат в $\mathfrak{M}'$ и в $\mathfrak{M}_1$. Следовательно, элементы из $\mathfrak{M}'$, лежащие в $\mathfrak{M}_1$, образуют подмодуль $\mathfrak{M}_1'$ модуля $\mathfrak{M}_1$. По предположению индукции, $\mathfrak{M}_1'$ имеет конечный базис. Пусть, например, $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{R} \cdot (\nu_1, \ldots, \nu_s)$.

Рассмотрим элементы α из $\mathfrak{R}$, для которых в $\mathfrak{R}$ найдутся элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$, удовлетворяющие условию

$$\alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_{r-1}\omega_{r-1} + \alpha\omega_r \in \mathfrak{M}'.$$

Как и в случае $r = 1$, можно показать, что такие элементы составляют идеал кольца $\mathfrak{R}$. Пусть этот идеал есть $\mathfrak{R} \cdot (\beta_1, \ldots, \beta_t)$. В таком случае в $\mathfrak{M}'$ существуют элементы $\nu_{s+1}, \ldots, \nu_{s+t}$, имеющие вид

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_{ij}\omega_j + \beta_{i-s}\omega_r \qquad (i = s+1, \ldots, s+t).$$

Пусть

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \omega_i$$

— любой элемент из $\mathfrak{M}'$. Мы знаем, что $\alpha_r \in \mathfrak{R} \cdot (\beta_1, \ldots, \beta_t)$. Пусть

$$\alpha_r = \sum_{i=1}^{t} \rho_{s+i}\beta_i.$$

Тогда элемент

$$\omega - \sum_{i=s+1}^{s+t} \rho_i \nu_i$$

принадлежит $\mathfrak{M}_1'$ и поэтому равен некоторой сумме $\sum_{i=1}^{s} \rho_i \nu_i$, где $\rho_1, \ldots, \rho_s$ — элементы $\mathfrak{R}$. Поэтому

$$\omega = \sum_{i=1}^{s+t} \rho_i \nu_i,$$

т. е.

$$\omega \in \mathfrak{R} \cdot (\nu_1, \ldots, \nu_{s+t}).$$

С другой стороны, из построения следует, что элементы $\nu_1, \ldots, \nu_{s+t}$ принадлежат $\mathfrak{M}'$, так что

$$\mathfrak{R} \cdot (\nu_1, \ldots, \nu_{s+t}) \subseteq \mathfrak{M}'.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{R} \cdot (\nu_1, \ldots, \nu_{s+t}),$$

и теорема доказана.

Следствие. *Нужно отметить, что если* $\mathfrak{R}$ *есть кольцо главных идеалов, то* $t = 0$ *или* 1, *и поэтому легко показать, что если* $\mathfrak{M}$ *имеет базис из* r *элементов, то* $\mathfrak{M}'$ *имеет базис, состоящий не более чем из* r *элементов.*

§ 7. Мультипликативная теория идеалов

Мы можем теперь рассмотреть некоторые мультипликативные свойства идеалов области целостности. Пусть $\mathfrak{R}$ — область целостности, K—ее поле частных. Будем предполагать, что в $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе. $\mathfrak{R}$-модуль $\mathfrak{M}$ будем называть *дробным идеалом*, если (I) каждый элемент из $\mathfrak{M}$ принадлежит K, (II) произведение элемента α из $\mathfrak{R}$ на элемент ξ из $\mathfrak{M}$ всегда совпадает с произведением этих элементов в K и (III) $\mathfrak{M}$ имеет конечный $\mathfrak{R}$-базис. Идеалы кольца $\mathfrak{R}$ представляют собой частный тип дробных идеалов. Мы будем называть их *целыми* идеалами и будем пользоваться в этом параграфе термином „идеал" как для целых, так для дробных идеалов. Прежде чем обращаться к мультипликативной теории целых идеалов, рассмотрим некоторые свойства дробных идеалов вообще.

Если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — дробные идеалы кольца $\mathfrak{R}$, то их *суммой* $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ называется совокупность элементов из K, представимых в виде $\xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1 \in \mathfrak{M}_1$ и $\xi_2 \in \mathfrak{M}_2$. Непосредственно проверяется, что эта сумма является дробным идеалом. *Пересечением* $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$ идеалов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называется совокупность элементов из K, принадлежащих $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ одновременно. Ясно, что эта совокупность представляет собой $\mathfrak{R}$-модуль, являющийся подмодулем как $\mathfrak{M}_1$, так и $\mathfrak{M}_2$. Поэтому (§ 6, теорема I) $[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2]$ имеет конечный $\mathfrak{R}$-базис и, следовательно, является дробным идеалом. Наконец, *произведением* $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ идеалов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называется совокупность элементов поля K, записываемых в виде $\sum \xi_i \eta_i$, где ξ_i — элементы $\mathfrak{M}_1$, а η_i — элементы $\mathfrak{M}_2$. Можно показать, что $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ есть $\mathfrak{R}$-модуль и, далее, что это дробный идеал.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольный ненулевой дробный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Рассмотрим совокупность S элементов ξ из K, для которых произведение $\xi\eta$ принадлежит $\mathfrak{R}$ при любом η из $\mathfrak{M}$.

Если ξ и ξ' — два элемента из S, то

$$\xi\eta \in \mathfrak{R} \quad \text{и} \quad \xi'\eta \in \mathfrak{R}.$$

Следовательно,

$$(\xi - \xi')\eta \in \mathfrak{R} \quad \text{и} \quad \alpha\xi\eta \in \mathfrak{R}$$

при любом η из $\mathfrak{M}$ и любом α из $\mathfrak{R}$. Это означает, что S есть $\mathfrak{R}$-модуль. Кроме того, если η — любой элемент из $\mathfrak{M}$, отличный от

нуля, а ξ — произвольный элемент из S, то $\xi\eta \in \mathfrak{R}$. Поэтому ξ лежит в $\mathfrak{R} \cdot (\eta^{-1})$, т. е. S является подмодулем модуля $\mathfrak{R} \cdot (\eta^{-1})$, имеющего конечный $\mathfrak{R}$-базис. Таким образом, S является дробным идеалом. Мы будем обозначать этот идеал через $\mathfrak{M}^{-1}$. (Следует заметить, что если $\mathfrak{M}$ является нулевым модулем, т. е. состоит только из нуля, то $\mathfrak{M}^{-1}$ совпадает с K и, вообще говоря, не обладает конечным базисом.)

$\mathfrak{M}^{-1}$ называется *обратным идеалом* для дробного идеала $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{R} \cdot (\zeta)$, где ζ — отличный от нуля элемент из K, а ξ — элемент из $\mathfrak{M}^{-1}$, то $\xi\zeta \in \mathfrak{R}$, так что $\xi \in \mathfrak{R} \cdot (\zeta^{-1})$; с другой стороны, если $\xi \in \mathfrak{R} \cdot (\zeta^{-1})$, то $\xi = \alpha/\zeta$, где $\alpha \in \mathfrak{R}$, и поэтому $\xi(\beta\zeta) = \alpha\beta \in \mathfrak{R}$ для любого элемента $\beta\zeta$ из $\mathfrak{M}$. Следовательно, в этом случае $\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{R} \cdot (\zeta^{-1})$. В частности, если $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$, то $\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{R}$. Множество $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$, рассматриваемое как дробный идеал, играет важную роль во всем дальнейшем. Удобно обозначать его через $\mathbf{1}$, так как оно играет роль единицы в теории разложения на множители.

I. Если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, то любой элемент ζ из $\mathfrak{M}_2^{-1}$ при умножении на любой элемент из $\mathfrak{M}_1$ (являющийся также элементом $\mathfrak{M}_2$) должен давать элемент из $\mathfrak{R}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_2^{-1} \subseteq \mathfrak{M}_1^{-1}$. Обращение этого результата не всегда верно. Например, пусть $\mathfrak{R}$ есть кольцо $K_1[x, y]$ многочленов от двух неизвестных над основным полем K_1 и $\mathfrak{M}_1 = \mathbf{1}$, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{R} \cdot (x, y)$. Пусть $\alpha(x, y)/\beta(x, y)$ — любой элемент из $\mathfrak{M}_2^{-1}$, причем многочлены $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ из кольца $\mathfrak{R}$ не имеют общих множителей. В таком случае элементы

$$\frac{x\alpha(x, y)}{\beta(x, y)} \quad \text{и} \quad \frac{y\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}$$

должны лежать в $\mathfrak{R}$. Из теоремы об однозначном разложении многочленов на множители следует, что $\beta(x, y)$ должен принадлежать K_1, т. е. что элемент $\alpha(x, y)/\beta(x, y)$ принадлежит $\mathfrak{R}$. Наоборот, ясно, что если $\alpha(x, y) \in \mathfrak{R}$, то $\alpha(x, y) \in \mathfrak{M}_2^{-1}$. Следовательно, $\mathfrak{M}_2^{-1} = \mathbf{1} = \mathfrak{M}_1^{-1}$. Но $\mathfrak{M}_1$ не лежит в $\mathfrak{M}_2$.

II. Два дробных идеала $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называются *квазиравными*, $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, если $\mathfrak{M}_1^{-1} = \mathfrak{M}_2^{-1}$. Приведенный выше пример показывает, что квазиравенство не влечет за собой обычного равенства. Однако из определения следует, что квазиравенство является отношением эквивалентности.

Из определения $\mathfrak{M}_1^{-1}$ вытекает, что $\mathfrak{M}_1^{-1}\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{R}$. Следовательно,

$$\mathfrak{M}_1 \subseteq (\mathfrak{M}_1^{-1})^{-1}.$$

Обозначим $(\mathfrak{M}_1^{-1})^{-1}$ через $\mathfrak{M}_1^*$. Тогда, в силу I,

$$(\mathfrak{M}_1^*)^{-1} \subseteq \mathfrak{M}_1^{-1}.$$

С другой стороны, мы имеем

$$\mathfrak{M}_1^{-1}\mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M}_1^{-1}(\mathfrak{M}_1^{-1})^{-1} \subseteq \mathfrak{R},$$

и поэтому

$$\mathfrak{M}_1^{-1} \subseteq (\mathfrak{M}_1^*)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M}_1^{*-1} = \mathfrak{M}_1^{-1},$$

т. е.

$$\mathfrak{M}_1^* \sim \mathfrak{M}_1.$$

Аналогично, если $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_1$, то

$$\mathfrak{M}_2^* \subseteq (\mathfrak{M}_2^{-1})^{-1} = (\mathfrak{M}_1^{-1})^{-1} = \mathfrak{M}_1^*,$$

так что

$$\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1^*.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{M}_1^*$ является наибольшим дробным идеалом, квазиравным идеалу $\mathfrak{M}_1$, причем $\mathfrak{M}_1^*$ содержит все дробные идеалы, квазиравные $\mathfrak{M}_1$. Мы будем называть $\mathfrak{M}_1^*$ *приведенным* дробным идеалом, полученным из $\mathfrak{M}_1$. Любой дробный идеал, обозначаемый в дальнейшем буквой со звездочкой, является приведенным дробным идеалом. (Заметим, однако, что идеал $\mathfrak{M}^*\mathfrak{N}^*$ может и не быть приведенным!)

Отметим следующие непосредственные следствия определения приведенного идеала.

(I) Если $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, то $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_2^*$, а значит,

$$\mathfrak{M}_2^* \subseteq \mathfrak{M}_1^*.$$

Аналогично,

$$\mathfrak{M}_1^* \subseteq \mathfrak{M}_2^*,$$

так что

$$\mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M}_2^*,$$

Наоборот, если

$$\mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M}_2^*,$$

то мы имеем

$$\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M}_2^* \sim \mathfrak{M}_2,$$

и поэтому

$$\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2.$$

(II) Возьмем в (I) $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1^*$. Мы получим

$$(\mathfrak{M}_1^*)^* = \mathfrak{M}_1^*.$$

Отметим также, что если $\mathfrak{M} = \mathfrak{R} \cdot (\zeta)$, где ζ — отличный от нуля элемент из K, то $\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{R} \cdot (\zeta^{-1})$, а значит, $\mathfrak{M}^* = (\mathfrak{M}^{-1})^{-1} = \mathfrak{M}$. Кроме

того, если $\mathfrak{M}_2^{-1} \subseteq \mathfrak{M}_1^{-1}$, то $(\mathfrak{M}_1^{-1})^{-1} \subseteq (\mathfrak{M}_2^{-1})^{-1}$ (см. выше I). Следовательно, хотя из соотношения $\mathfrak{M}_2^{-1} \subseteq \mathfrak{M}_1^{-1}$ не вытекает, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, из него вытекает, что $\mathfrak{M}_1^* \subseteq \mathfrak{M}_2^*$. Но, в силу I, из $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$ следует $\mathfrak{M}_2^{-1} \subseteq \mathfrak{M}_1^{-1}$. Поэтому, если

$$\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2,$$

то

$$\mathfrak{M}_1^* \subseteq \mathfrak{M}_2^*.$$

В частности, последний результат можно применить к случаю, когда $\mathfrak{M} = \mathfrak{i}$ является целым идеалом. В этом случае

$$\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{1},$$

так что

$$\mathfrak{i}^* \subseteq \mathfrak{1}^* = \mathfrak{1}.$$

Другими словами, если идеал $\mathfrak{i}$ целый, то $\mathfrak{i}^*$ также целый.

Заметим еще, что $(\mathfrak{M}^*)^{-1} = ((\mathfrak{M}^{-1})^{-1})^{-1} = (\mathfrak{M}^{-1})^*$.

III. Мы будем говорить, что идеал $\mathfrak{M}$ *квазикратен* идеалу $\mathfrak{N}$ (или что $\mathfrak{N}$ является *квазиделителем* $\mathfrak{M}$), и писать $\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{N}$ (или $\mathfrak{N} \leqslant \mathfrak{M}$), если идеал $\mathfrak{M}\mathfrak{N}^{-1}$ содержится в $\mathfrak{R}$. Так как $\mathfrak{N}^{-1}$ содержит все элементы из K, произведения которых на элементы $\mathfrak{N}$ принадлежат $\mathfrak{R}$, то сформулированное условие равносильно условию $\mathfrak{N}^{-1} \subseteq \mathfrak{M}^{-1}$. Отметим, что одновременное выполнение условий

$$\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{N} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} \geqslant \mathfrak{M}$$

влечет за собой, что

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N},$$

ибо указанные условия означают соответственно, что

$$\mathfrak{N}^{-1} \subseteq \mathfrak{M}^{-1} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{N}^{-1},$$

так что

$$\mathfrak{N}^{-1} = \mathfrak{M}^{-1}.$$

Из сказанного в I мы видим, что если $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{M}^{-1} \supseteq \mathfrak{N}^{-1}$ и поэтому $\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{N}$. С другой стороны, из II следует, что если $\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{N}^*$. Поэтому соотношение $\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{1}$ влечет за собой, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{1}^* = \mathfrak{R}$, т. е. из $\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{1}$ следует, что $\mathfrak{M}$ является целым идеалом. Обратно, если идеал $\mathfrak{M}$ — целый, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{1}$ и поэтому $\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{1}$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — ненулевые дробные идеалы, удовлетворяющие условию $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{L}$ — произвольный дробный идеал. Тогда $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ не будет нулевым идеалом, так как в K нет делителей нуля. Следовательно, можно определить $(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}$. Произведение $(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}(\mathfrak{L}\mathfrak{M})$, по определению, содержится в $\mathfrak{R}$. Следовательно,

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{N}^{-1},$$

и поэтому

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}\mathfrak{L}\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{L}\mathfrak{N}.$$

Если $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, то мы имеем

$$\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{N} \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} \geqslant \mathfrak{M}.$$

Следовательно, в силу только что доказанного,

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{L}\mathfrak{N} \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}\mathfrak{N} \geqslant \mathfrak{L}\mathfrak{M},$$

т. е.

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} \sim \mathfrak{L}\mathfrak{N}.$$

Последнее соотношение позволяет вывести более общий результат: если

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}' \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}',$$

то

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}\mathfrak{N}' \sim \mathfrak{M}'\mathfrak{N}'.$$

Рассмотрим теперь частный случай этого соотношения, взяв $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}^{-1}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}^* = (\mathfrak{M}^*)^{-1}$. Мы видим, что

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \sim \mathfrak{M}^*(\mathfrak{M}^*)^{-1}.$$

Для дальнейшего изучения свойств квазиравенства нам нужно выяснить, будет ли справедливо соотношение

$$\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}^{-1} \sim 1.$$

Следующий пример показывает, что это соотношение в общем случае неверно. Пусть K_1 — поле, x — неизвестное над K_1, а y — корень уравнения

$$y^2 = x^3$$

в некотором расширении кольца $K_1[x]$. Возьмем $\mathfrak{R} = K_1[x, y]$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{R} \cdot (x, y)$. Любой элемент поля частных K кольца $\mathfrak{R}$ имеет вид $\alpha + \beta y$, где α и β — рациональные функции от x над K_1. Если элемент $\xi = \alpha + \beta y$ принадлежит $\mathfrak{M}^{-1}$, то элементы

$$\alpha x + \beta xy \quad \text{и} \quad \beta x^3 + \alpha y$$

должны лежать в $\mathfrak{R}$. Отсюда вытекает, что α и βx должны принадлежать $\mathfrak{R}$. Наоборот, если α и βx принадлежат $\mathfrak{R}$, то $\xi = \alpha + \beta y$ содержится в $\mathfrak{M}^{-1}$. Следовательно,

$$\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{R} \cdot \left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Но в таком случае

$$\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}^{-1}=\mathfrak{R}\cdot(x,\ y,\ y,\ y^2/x)=\mathfrak{R}\cdot(x,\ y,\ x^2)=\mathfrak{R}\cdot(x,\ y)=\mathfrak{M}.$$

С другой стороны, $\mathfrak{M}^{-1}$ не содержится в $\mathfrak{R}$, а значит,

$$\mathfrak{M}^{-1}\neq 1=1^{-1},$$

т. е. идеал $\mathfrak{M}$ не является квазиравным идеалу 1, так что $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}^{-1}$ и 1 в рассматриваемом случае не квазиравны.

Однако для многих важных областей целостности можно доказать, что соотношение $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}^{-1}\sim 1$ имеет место при любом ненулевом дробном идеале $\mathfrak{M}$. Пример такого рода будет приведен в § 8. Поэтому целесообразно специально рассмотреть дальнейшие свойства дробных идеалов таких областей целостности, в которых для любого ненулевого дробного идеала имеет место соотношение

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1}\sim 1.$$

Везде ниже в настоящем параграфе это условие будет считаться выполненным.

Сделанное предположение вместе с ранее доказанными свойствами дробных идеалов позволяет развить теорию разложения на множители целых идеалов из $\mathfrak{R}$. Именно по этой причине было введено выше понятие дробного идеала.

Непосредственным следствием нашего предположения является то, что любой дробный идеал $\mathfrak{M}$ кольца $\mathfrak{R}$ удовлетворяет соотношению $\mathfrak{M}\sim \mathfrak{i}\mathfrak{j}^{-1}$, где $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — целые идеалы. В самом деле, пусть

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{R}\cdot(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_r),$$

где

$$\zeta_i=\alpha_i/\beta_i,$$

а элементы α_i и β_i принадлежат $\mathfrak{R}$. Положим

$$\beta=\beta_1\ldots\beta_r \quad\text{и}\quad \mathfrak{j}=\mathfrak{R}\cdot(\beta),$$

Тогда

$$\mathfrak{j}\mathfrak{M}=\mathfrak{R}\cdot(\beta\zeta_1,\ \ldots,\ \beta\zeta_r)\subseteq\mathfrak{R}.$$

Следовательно, $\mathfrak{j}\mathfrak{M}$ является целым идеалом. Назовем его $\mathfrak{i}$. Тогда

$$\mathfrak{i}\mathfrak{j}^{-1}=\mathfrak{j}^{-1}\mathfrak{j}\mathfrak{M}\sim 1\mathfrak{M}\sim\mathfrak{M}.$$

Теорема I. *Классы квазиравных ненулевых дробных идеалов кольца $\mathfrak{R}$ образуют коммутативную группу.*

Если

$$\mathfrak{M}\sim\mathfrak{M}' \quad\text{и}\quad \mathfrak{N}\sim\mathfrak{N}',$$

то, в силу III,

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N}\sim\mathfrak{M}'\mathfrak{N}'.$$

Следовательно, можно однозначно определить умножение классов. Ввиду того, что коммутативность и ассоциативность умножения имеют место для дробных идеалов, эти свойства будут справедливы для умножения классов. Кроме того, если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — ненулевые дробные идеалы, то уравнение

$$\mathfrak{X}\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$$

имеет решение

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{N},$$

ибо

$$\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{N}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{N} \sim 1\mathfrak{N} = \mathfrak{N}.$$

Тем самым теорема доказана. Класс идеалов, квазиравных 1, является единицей определенной нами группы.

Мы будем заниматься в основном введенными ранее целыми идеалами. Вернемся к принятому ранее обозначению таких идеалов малыми готическими буквами.

Пусть $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — ненулевые целые идеалы, удовлетворяющие условию

$$\mathfrak{i}\mathfrak{j} \sim 1.$$

Тогда

$$\mathfrak{i}^{-1} = \mathfrak{i}^{-1}1 \sim \mathfrak{i}^{-1}\mathfrak{i}\mathfrak{j} \sim \mathfrak{j} \geqslant 1.$$

Следовательно, идеал $\mathfrak{i}^{-1}$ — целый. Отсюда следует, что $\mathfrak{i}^{-1} \subseteq 1 = 1^{-1}$, а поэтому $\mathfrak{i} \leqslant 1$. С другой стороны, так как $\mathfrak{i}$ — целый идеал, то $\mathfrak{i} \geqslant 1$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{i} \sim 1$. Подобным же образом $\mathfrak{j} \sim 1$. Поэтому имеет место

Теорема II. *Если* $\mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{j}$ *— целые идеалы кольца* $\mathfrak{R}$, *удовлетворяющие условию* $\mathfrak{i}\mathfrak{j} \sim 1$, *то* $\mathfrak{i} \sim 1$ *и* $\mathfrak{j} \sim 1$.

Пусть, далее, $\mathfrak{i} \geqslant \mathfrak{j}$. Тогда идеал $\mathfrak{i}\mathfrak{j}^{-1} = \mathfrak{k}$ — целый и

$$\mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{i}(\mathfrak{j}\mathfrak{j}^{-1}) \sim \mathfrak{i}1 \sim \mathfrak{i}.$$

Но так как $\mathfrak{j}^{-1}\mathfrak{j}$ содержится в $\mathfrak{R}$, то $\mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{i}(\mathfrak{j}^{-1}\mathfrak{j}) \subseteq \mathfrak{i}$. Следовательно, доказана

Теорема III. *Если* $\mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{j}$ *— идеалы кольца* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{i} \geqslant \mathfrak{j}$, *то существует* (*целый*) *идеал* $\mathfrak{k}$ *кольца* $\mathfrak{R}$, *удовлетворяющий соотношениям*

$$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{j}\mathfrak{k}, \quad \mathfrak{j}\mathfrak{k} = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$ называется *квазинеприводимым*, если квазиравенство $\mathfrak{i} \sim \mathfrak{j}\mathfrak{k}$ влечет за собой, что либо $\mathfrak{j} \sim 1$, либо $\mathfrak{k} \sim 1$. В противном случае $\mathfrak{i}$ называется *квазиприводимым*. Так как $\mathfrak{i} \sim \mathfrak{i}^*$, то $\mathfrak{i}$ квазинеприводим тогда и только тогда, когда $\mathfrak{i}^*$ квазинеприводим.

Теорема IV. *Если идеал* $\mathfrak{i}$ *квазинеприводим, то* $\mathfrak{i}^*$ *прост. Обратно, если* $\mathfrak{i}^*$ *прост, то* $\mathfrak{i}$ *квазинеприводим*.

(I) Предположим, что $\mathfrak{i}^*$ квазинеприводим. Если $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{1}$, то он прост. Если же $\mathfrak{i}^* \neq \mathfrak{1}$ и если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два идеала из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие условиям

$$\mathfrak{ab} = 0 \quad (\mathfrak{i}^*), \qquad \mathfrak{b} \neq 0 \quad (\mathfrak{i}^*),$$

то положим

$$\mathfrak{c} = (\mathfrak{b}, \mathfrak{i}^*).$$

В таком случае $\mathfrak{c}$ является делителем $\mathfrak{i}^*$. Следовательно, $\mathfrak{i}^* \geqslant \mathfrak{c}$, и поэтому (теорема III) в $\mathfrak{R}$ найдется такой идеал $\mathfrak{d}$, что

$$\mathfrak{i}^* \sim \mathfrak{cd}.$$

Так как $\mathfrak{i}^*$ квазинеприводим, то либо $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{1}$, либо $\mathfrak{d} \sim \mathfrak{1}$. Если $\mathfrak{d} \sim \mathfrak{1}$, то $\mathfrak{i}^* \sim \mathfrak{c}$ и поэтому $\mathfrak{c}^* = \mathfrak{i}^*$. Но $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}^* = \mathfrak{i}^*$, а это противоречит тому, что $\mathfrak{c}$ есть собственный делитель $\mathfrak{i}^*$. Следовательно, должно быть $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{1}$. Но мы имеем

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{a} \sim \mathfrak{ca} = (\mathfrak{ba}, \mathfrak{i}^*\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{i}^*.$$

Поэтому $\mathfrak{a} = 0 \quad (\mathfrak{i}^*)$, так как $(\mathfrak{ca})^* \subseteq (\mathfrak{i}^*)^* = \mathfrak{i}^*$ и $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{ca})^*$. Отсюда следует, что $\mathfrak{i}^*$ прост.

(II) Пусть $\mathfrak{i}^*$ прост. Если $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{1}$, то он квазинеприводим в силу теоремы II.

Пусть теперь идеал $\mathfrak{i}^* \neq \mathfrak{1}$ и является квазиприводимым. Тогда существуют приведенные идеалы $\mathfrak{j}^*$ и $\mathfrak{f}^*$ из $\mathfrak{R}$, ни один из которых не является квазиравным $\mathfrak{1}$, такие, что

$$\mathfrak{i}^* \sim \mathfrak{j}^*\mathfrak{f}^*.$$

Так как $\mathfrak{i}^*$ является приведенным идеалом, получаемым из $\mathfrak{j}^*\mathfrak{f}^*$, то

$$\mathfrak{j}^*\mathfrak{f}^* = 0 \quad (\mathfrak{i}^*).$$

Кроме того, $\mathfrak{i}^*(\mathfrak{j}^*)^{-1} \sim \mathfrak{f}^* \subseteq \mathfrak{R}$, т. е. $\mathfrak{i}^* \geqslant \mathfrak{j}^*$. Поэтому $\mathfrak{i}^* \subseteq \mathfrak{j}^*$. Аналогично, $\mathfrak{i}^* \subseteq \mathfrak{f}^*$. Если бы было $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{j}^*$, то мы имели бы

$$\mathfrak{f}^* \sim \mathfrak{i}^*(\mathfrak{j}^*)^{-1} = \mathfrak{i}^*(\mathfrak{i}^*)^{-1} \sim \mathfrak{1},$$

вопреки предположению. Следовательно,

$$\mathfrak{i}^* \subset \mathfrak{j}^*,$$

и подобным же образом

$$\mathfrak{i}^* \subset \mathfrak{f}^*.$$

Отсюда вытекает, что в $\mathfrak{j}^*$ найдется элемент α, не принадлежащий $\mathfrak{i}^*$, а в $\mathfrak{f}^*$ — элемент β, также не принадлежащий $\mathfrak{i}^*$. При этом $\alpha\beta \in \mathfrak{j}^*\mathfrak{f}^* \subseteq \mathfrak{i}^*$. Следовательно, в $\mathfrak{R}$ имеются элементы α и β, удовлетворяющие условиям

$$\alpha\beta = 0 \quad (\mathfrak{i}^*), \qquad \alpha \neq 0 \quad (\mathfrak{i}^*), \qquad \beta \neq 0 \quad (\mathfrak{i}^*),$$

т. е. идеал i^* не прост. Так как это противоречит условию, то i^* (а значит, и i) квазинеприводим.

Следствие. *Если идеал* i *квазинеприводим и если* $ij \sim a^{\backprime}$, *то* i *является квазиделителем* $\mathfrak{a}$ *или* $\mathfrak{b}$.

В самом деле,

$$ab i^{-1} \sim j \subseteq 1,$$

так что

$$ab \geqslant i.$$

Поэтому

$$ab \subseteq (ab)^* \subseteq i^*,$$

т. е.

$$ab = 0 \quad (i^*).$$

Так как идеал i^* квазинеприводим и потому прост, то мы имеем

$$a = 0 \quad (i^*) \quad \text{или} \quad b = 0 \quad (i^*).$$

Следовательно,

$$i^{-1} = (i^*)^{-1} \subseteq a^{-1} \quad \text{или} \quad i^{-1} = (i^*)^{-1} \subseteq b^{-1}.$$

Поэтому

$$a \geqslant i \quad \text{или} \quad b \geqslant i.$$

Пусть теперь i — любой идеал из $\mathfrak{R}$. Покажем, что i квазиравен произведению конечного числа квазинеприводимых идеалов из $\mathfrak{R}$. В самом деле, если это не так, то i не может быть квазинеприводимым и поэтому

$$i \sim i_1 j_1,$$

где i_1 и j_1 не будут квазиравными 1. В таком случае

$$i i_1^{-1} \sim j_1 \subseteq \mathfrak{R}.$$

Следовательно,

$$i^* \geqslant i_1^*.$$

Если $i^* = i_1^*$, то

$$j_1 \sim i i_1^{-1} \sim i^* (i_1^*)^{-1} \sim 1,$$

вопреки условию. Поэтому

$$i^* \subset i_1^* \quad \text{и аналогично} \quad i^* \subset j_1^*.$$

Если бы i_1 и j_1 оба были квазиравными произведениям конечного числа неприводимых идеалов, то это же было бы справедливо и для $i \sim i_1 j_1$. Следовательно, из нашего предположения вытекает, что i_1 или j_1 *не* квазиравен такому произведению. Пусть таким будет i_1. Тогда, как и выше,

$$i_1 \sim i_2 j_2,$$

где

$$i_1^* \subset i_2^*, \qquad i_1^* \subset j_2^*,$$

причем один из идеалов i_2 или j_2 не квазиравен конечному произведению квазинеприводимых идеалов. Пусть таким будет i_2. Ясно, что продолжая этот процесс, мы получим бесконечную возрастающую последовательность идеалов

$$i^* \subset i_1^* \subset i_2^* \subset \ldots,$$

если только идеал i не является квазиравным произведению конечного числа квазинеприводимых множителей. Но, в силу теоремы VI § 1, это невозможно, так как в $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе. Следовательно, пользуясь теоремой IV, мы можем написать

$$i \sim \mathfrak{p}_1^* \mathfrak{p}_2^* \ldots \mathfrak{p}_r^*,$$

где идеалы $\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_r^*$ просты и поэтому квазинеприводимы, причем можно считать, что ни один из них не будет квазиравным 1.

Допустим теперь, что имеется другое представление идеала i квазиравным ему произведением квазинеприводимых идеалов. Тогда мы можем написать

$$i \sim \mathfrak{p}_1^* \mathfrak{p}_2^* \ldots \mathfrak{p}_r^* \sim \mathfrak{p}_1'^* \mathfrak{p}_2'^* \ldots \mathfrak{p}_s'^*.$$

В силу следствия из теоремы IV, $\mathfrak{p}_1^*$ является делителем $\mathfrak{p}_1'^*$ или $\mathfrak{p}_2'^* \ldots \mathfrak{p}_s'^*$. Если $\mathfrak{p}_1^*$ есть делитель $\mathfrak{p}_2'^* \ldots \mathfrak{p}_s'^*$, то он будет делителем $\mathfrak{p}_2'^*$ или $\mathfrak{p}_3'^* \ldots \mathfrak{p}_s'^*$. Продолжая таким образом, мы усматриваем, что $\mathfrak{p}_1^*$ является делителем одного из $\mathfrak{p}_i'^*$. Изменив, если нужно, нумерацию множителей, мы можем считать, что $\mathfrak{p}_1^*$ есть делитель $\mathfrak{p}_1'^*$. В таком случае, в силу теоремы III, мы имеем

$$\mathfrak{p}_1'^* \sim \mathfrak{p}_1^* j.$$

Но, по условию, идеал $\mathfrak{p}_1'^*$ квазинеприводим, а $\mathfrak{p}_1^*$ не квазиравен 1. Следовательно, $j \sim 1$, т. е.

$$\mathfrak{p}_1'^* \sim \mathfrak{p}_1^*.$$

Так как оба названных идеала являются приведенными, то

$$\mathfrak{p}_1'^* = \mathfrak{p}_1^*.$$

Следовательно, мы имеем

$$\mathfrak{p}_2^* \ldots \mathfrak{p}_r^* \sim \mathfrak{p}_1^{*-1} \mathfrak{p}_1'^* \mathfrak{p}_2'^* \ldots \mathfrak{p}_s'^* \sim \mathfrak{p}_2'^* \ldots \mathfrak{p}_s'^*.$$

Применяя теперь обычное рассуждение по индукции, как это сделано, например, в доказательстве теоремы VIII § 2, мы выводим, что $r = s$ и что множители могут быть перенумерованы так, чтобы было

$$\mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{p}_i'^* \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

Таким образом, мы получили следующую *теорему об однозначном разложении*:

Теорема V. *Любой идеал* $\mathfrak{i}$ *кольца* $\mathfrak{R}$, *не являющийся квазиравным единичному идеалу, удовлетворяет квазиравенству*

$$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{p}_1^* \dots \mathfrak{p}_r^*,$$

где идеалы $\mathfrak{p}_1^* \dots \mathfrak{p}_r^*$ *квазинеприводимы и не квазиравны единичному идеалу. Квазимножители в таком разложении определены однозначно с точностью до порядка.*

Нашей очередной задачей является теперь нахождение тех простых идеалов в $\mathfrak{R}$, которые квазиравны **1**. Пусть $\mathfrak{p}$ — любой такой идеал. Если $\alpha \in \mathfrak{p}$ и мы положим $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cdot (\alpha)$, то $\mathfrak{i}^{-1} = \mathfrak{R} \cdot (\alpha^{-1})$, и поэтому $\mathfrak{i}$ не является квазиравным **1**. Следовательно,

$$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{p}_1^* \dots \mathfrak{p}_r^*,$$

где идеалы $\mathfrak{p}_1^*, \dots, \mathfrak{p}_r^*$ квазинеприводимы и не квазиравны **1** (теорема V). Так как $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{i}$ (ведь $\mathfrak{i}$ — главный идеал), то

$$\mathfrak{p}_1^* \dots \mathfrak{p}_r^* \subseteq \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{p}$$

и поэтому при некотором значении j

$$\mathfrak{p}_j^* = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Ввиду того, что $\mathfrak{p}_j^* \neq \mathbf{1}$ и $\mathfrak{p}^* = \mathbf{1}$, $\mathfrak{p}_j^*$ есть простой идеал, являющийся собственным кратным $\mathfrak{p}$. Таким образом, любой простой идеал кольца $\mathfrak{R}$, квазиравный **1**, имеет собственное кратное, являющееся простым идеалом.

Покажем теперь, что если идеал $\mathfrak{p}^*$ квазинеприводим (и поэтому прост) и не квазиравен **1**, то он не может иметь собственного кратного, являющегося простым идеалом. Действительно, пусть простой идеал $\mathfrak{i}$ кратен $\mathfrak{p}^*$:

$$\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{p}^*).$$

Тогда $\mathfrak{i} \geqslant \mathfrak{p}^*$ и, следовательно (теорема III), существует идеал $\mathfrak{q}$, удовлетворяющий условиям

$$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{p}^* \mathfrak{q}, \qquad \mathfrak{p}^* \mathfrak{q} = 0 \quad (^*).$$

Если $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{i}$, то мы можем подобным же образом найти такой идеал $\mathfrak{r}$, чтобы было

$$\mathfrak{q} \sim \mathfrak{i}\mathfrak{r}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{i}\mathfrak{p}^* \mathfrak{r},$$

и поэтому

$$\mathfrak{p}^* \mathfrak{r} \sim \mathbf{1},$$

В силу теоремы II, из полученного результата вытекает, что $\mathfrak{p}^* \sim 1$, вопреки условию.

Поэтому мы имеем

$$\mathfrak{p}^*\mathfrak{q} = 0 \quad (\mathfrak{i}), \qquad \mathfrak{q} \neq 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Следовательно, ввиду того, что идеал $\mathfrak{i}$ прост,

$$\mathfrak{p}^* = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Поэтому

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{p}^*.$$

Рассмотрим, наконец, произвольный простой идеал $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{R}$, не квазиравный 1. Имеем

$$\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p}_1^* \ldots \mathfrak{p}_r^*,$$

где $\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_r^*$ квазинеприводимы и не квазиравны 1. Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{p}(\mathfrak{p}_i^*)^{-1} \sim \mathfrak{p}_1^* \ldots \mathfrak{p}_{i-1}^* \mathfrak{p}_{i+1}^* \ldots \mathfrak{p}_r^* \subseteq 1,$$

так что $\mathfrak{p} \geqslant \mathfrak{p}_i^*$ и поэтому $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}_i^*$. Таким образом, $\mathfrak{p}$ является простым идеалом, кратным $\mathfrak{p}_i^*$. Из доказанного выше результата следует теперь, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i^*$. Дальнейшим следствием этого является то, что $r = 1$.

Суммируя полученные результаты, приходим к следующей теореме:

Теорема VI. *Простой идеал $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{R}$ либо квазиравен 1, либо является квазинеприводимым и равным соответствующему ему приведенному идеалу. Идеал $\mathfrak{p}$ квазиравен 1 тогда и только тогда, когда существует собственное кратное $\mathfrak{p}$, являющееся простым идеалом в $\mathfrak{R}$.*

Рассмотрим теперь примарные идеалы в $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{q}$ есть $\mathfrak{p}$-примарный идеал из $\mathfrak{R}$, а ρ — индекс $\mathfrak{q}$. Предположим сначала, что $\mathfrak{p} \sim 1$. В таком случае

$$\mathfrak{p}^\rho = 0 \quad (\mathfrak{q})$$

и из теоремы III следует, что существует идеал $\mathfrak{i}$ из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющий условию

$$\mathfrak{p}^\rho \sim \mathfrak{q}\mathfrak{i}.$$

Так как $\mathfrak{p} \sim 1$, то мы будем иметь

$$\mathfrak{q}\mathfrak{i} \sim 1,$$

а значит,

$$\mathfrak{q} \sim 1$$

(теорема II). Далее, в силу соотношения $\mathfrak{q} = 0 \quad (\mathfrak{p})$, найдется такой идеал $\mathfrak{j}$ в $\mathfrak{R}$, что

$$\mathfrak{q} \sim \mathfrak{p}\mathfrak{j}.$$

Отсюда следует, что если $\mathfrak{q} \sim 1$, то должно быть и $\mathfrak{p} \sim 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathfrak{p}$ не квазиравен 1. При этом условии будет $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$. Докажем прежде всего следующую лемму:

Лемма. *Если* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *— квазиравные идеалы в* $\mathfrak{R}$, *то в* $\mathfrak{R}$ *существуют идеалы* $\mathfrak{c}$ *и* $\mathfrak{d}$, *квазиравные* 1 *и такие, что* $\mathfrak{ac} = \mathfrak{bd}$.

Так как $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, то мы имеем $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$. Следовательно,

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})\mathfrak{b}.$$

Но $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ являются идеалами в $\mathfrak{R}$, каждый из которых квазиравен 1. Эти идеалы удовлетворяют указанному в лемме требованию.

Применим эту лемму к квазиравным идеалам $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{q}^*$. Для них найдутся идеалы $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, удовлетворяющие условиям

$$\mathfrak{qc} = \mathfrak{q}^*\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{c} \sim 1, \quad \mathfrak{d} \sim 1.$$

Если бы было $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{p}$, то в $\mathfrak{R}$ существовал бы такой идеал $\mathfrak{i}$, что

$$\mathfrak{d} \sim \mathfrak{p}\mathfrak{i}.$$

Если это так, то

$$\mathfrak{p}\mathfrak{i} \sim 1,$$

а значит,

$$\mathfrak{p} \sim 1$$

(теорема II). Однако это противоречит условию. Отсюда следует, что $\mathfrak{d}$ не содержится в $\mathfrak{p}$. Но

$$\mathfrak{q}^*\mathfrak{d} = \mathfrak{qc} = 0 \quad (\mathfrak{q}),$$

причем идеал $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}$-примарен. Так как $\mathfrak{d}$ не содержится в $\mathfrak{p}$, то

$$\mathfrak{q}^* = 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Ввиду того, что $\mathfrak{q}^*$ есть приведенный идеал, получаемый из $\mathfrak{q}$, мы имеем

$$\mathfrak{q} = 0 \quad (\mathfrak{q}^*).$$

Поэтому

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^*.$$

Этим доказана

Теорема VII. *Если идеал* $\mathfrak{q}$ *из* $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{p}$*-примарен, то квазиравенство* $\mathfrak{q} \sim 1$ *имеет место в том и только в том случае, когда* $\mathfrak{p} \sim 1$. *Если* $\mathfrak{p}$ *не квазиравен* 1, *то* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^*$.

Пусть теперь $\mathfrak{i}$ — любой идеал в $\mathfrak{R}$, не квазиравный 1, и пусть $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ — его несократимое представление пересечением примарных идеалов. Можно считать, что $\mathfrak{q}_1$ является изолированной компонентой $\mathfrak{i}$. Положим для удобства $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}$ и $[\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r] = \mathfrak{f}$. Радикал идеала $\mathfrak{q}$ обозначим через $\mathfrak{p}$. Полагая $\mathfrak{j} = (\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$, докажем, что $\mathfrak{j} \sim 1$.

Действительно, пусть $\mathfrak{j}$ не квазиравен 1. Положим

$$\mathfrak{j} \sim \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s \quad (s \geqslant 1),$$

где простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ не квазиравны 1. Если ρ есть индекс идеала $\mathfrak{q}$, то

$$\mathfrak{p}^\rho \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{j}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{p}^\rho \sim \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s \mathfrak{r},$$

где $\mathfrak{r}$ — некоторый идеал в $\mathfrak{R}$ (теорема III). В силу теоремы об однозначном разложении, должно быть $\mathfrak{p}_i \sim \mathfrak{p}$, а значит,

$$\mathfrak{j} \sim \mathfrak{p}^s.$$

Отсюда следует, что (I) $\mathfrak{p}$ не квазиравен 1 и (II) $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}$, то в радикале каждого идеала $\mathfrak{q}_i$ $(i > 1)$ найдется элемент α_i, не лежащий в $\mathfrak{p}$. При этом для некоторого числа σ имеем

$$(\alpha_2 \ldots \alpha_r)^\sigma \in \mathfrak{f},$$

причем написанное произведение не лежит в $\mathfrak{p}$. Отсюда следует, что $(\alpha_2 \ldots \alpha_r)^\sigma$ содержится в $\mathfrak{j}$, но не содержится в $\mathfrak{p}$, вопреки результату (II), доказанному выше. Из всего сказанного вытекает, что предположение о том, что $\mathfrak{j}$ не квазиравен 1, неверно, так что

$$\mathfrak{j} \sim 1.$$

Так как $\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{f}]$ и $\mathfrak{j} = (\mathfrak{q}, \mathfrak{f})$, мы имеем (§ 1, теорема IV)

$$\mathfrak{ij} = 0 \quad (\mathfrak{qf}).$$

Поэтому

$$\mathfrak{ij} \geqslant \mathfrak{qf},$$

а значит,

$$\mathfrak{i}^*\mathfrak{j}^* = \mathfrak{i}^* \geqslant \mathfrak{q}^*\mathfrak{f}^*.$$

С другой стороны, имеем

$$\mathfrak{qf} = 0 \quad (\mathfrak{i}),$$

и поэтому

$$\mathfrak{q}^*\mathfrak{f}^* = 0 \quad (\mathfrak{i}^*),$$

т. е.

$$\mathfrak{q}^*\mathfrak{f}^* \geqslant \mathfrak{i}^*.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{i}^* \sim \mathfrak{q}^*\mathfrak{f}^*.$$

Так как любой идеал квазиравен его приведенному идеалу, то из доказанного выше получаем

$$[\mathfrak{q}^*, \mathfrak{f}^*] \sim [\mathfrak{q}^*, \mathfrak{f}^*]^* \sim \mathfrak{q}^{**}\mathfrak{f}^{**} = \mathfrak{q}^*\mathfrak{f}^* \sim \mathfrak{i}^*.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{i}^* \sim [\mathfrak{q}^*, \mathfrak{f}^*].$$

В силу того, что идеал i^* содержит любой идеал, квазиравный ему, должно быть

$$[\mathfrak{q}^*, \mathfrak{k}^*] = 0 \quad (i^*).$$

С другой стороны,

$$i \subseteq \mathfrak{q} \text{ и } i \subseteq \mathfrak{k},$$

так что

$$i^* \subseteq \mathfrak{q}^* \text{ и } i^* \subseteq \mathfrak{k}^*.$$

Поэтому

$$i^* \subseteq [\mathfrak{q}^*, \mathfrak{k}^*].$$

Сопоставляя полученные два включения, получаем

$$i^* = [\mathfrak{q}^*, \mathfrak{k}^*].$$

Рассматривая идеал $\mathfrak{k} = [\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ таким же образом, как мы рассматривали $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$, мы получаем в конце концов, что

$$i^* = [\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_r^*].$$

Вспомним теперь, что, по теореме VII, квазиравенство $\mathfrak{q}_i^* \sim 1$ имеет место в том и только в том случае, если $\mathfrak{p}_i \sim 1$, и что при $\mathfrak{p}_i$, не квазиравном 1, будет $\mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{q}_i$. Отсюда следует, что если $i = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$, то мы получим i^*, опуская в написанном разложении все примарные компоненты, радикалы которых квазиравны 1. Отметим еще, что радикал $\mathfrak{p}_i$ идеала $\mathfrak{q}_i$ не квазиравен 1 в том и только в том случае, если у него нет простого собственного кратного (теорема VI). Отсюда вытекает, что в этом случае компонента $\mathfrak{q}_i$ необходимо является изолированной. Таким образом, имеет место

Теорема VIII. *Если* $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ — *несократимое представление некоторого идеала* i *кольца* $\mathfrak{R}$, *где* $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_i^*$ *при* $i = 1, \ldots, s$ *и* $\mathfrak{q}_i \sim 1$ *при* $i = s+1, \ldots, r$, *то пересечение* $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s]$ *является несократимым представлением идеала* i^*. *Идеалы* $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ *являются изолированными компонентами идеалов* i и i^*.

Применим эту теорему к степеням некоторого простого идеала $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{R}$ (ср. стр. 31). Если $\mathfrak{p} \sim 1$, то $\mathfrak{p}^\rho \sim 1$ при всех значениях ρ. Если же $\mathfrak{p}$ не квазиравен 1, то $\mathfrak{p}^\rho$ ни при каком $\rho > 0$ не будет квазиравен 1. Пусть

$$\mathfrak{p}^\rho = [\mathfrak{p}^{(\rho)}, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k],$$

где $\mathfrak{p}^{(\rho)}$ — символическая ρ-я степень $\mathfrak{p}$, а $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ — вложенные компоненты $\mathfrak{p}^\rho$. Если идеал $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{p}_i$-примарен, то простой идеал $\mathfrak{p}$ будет собственным кратным $\mathfrak{p}_i$. Отсюда следует, что $\mathfrak{p}_i \sim 1$ (теорема VI), и поэтому (теорема VII) $\mathfrak{q}_i \sim 1$. Отсюда следует, что (теорема VIII)

$$(\mathfrak{p}^\rho)^* = \mathfrak{p}^{(\rho)}.$$

Рассмотрим теперь произвольный примарный идеал $\mathfrak{q}$ в $\mathfrak{R}$, не квазиравный 1. Пусть $\mathfrak{p}$ — радикал идеала $\mathfrak{q}$, а σ — его индекс. Мы

имеем

$$\mathfrak{q} = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Отсюда вытекает, что существует такой идеал $\mathfrak{i}$, что

$$\mathfrak{q} \sim \mathfrak{p}\mathfrak{i}.$$

Кроме того,

$$\mathfrak{p}^{\sigma} = 0 \quad (\mathfrak{q}).$$

Следовательно, существует такой идеал $\mathfrak{j}$, что

$$\mathfrak{p}^{\sigma} \sim \mathfrak{q}\mathfrak{j}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{p}^{\sigma} \sim \mathfrak{p}\mathfrak{i}\mathfrak{j},$$

или, что то же,

$$\mathfrak{p}^{\sigma-1} \sim \mathfrak{i}\mathfrak{j}.$$

В силу теоремы об однозначном разложении, отсюда вытекает, что при некотором $\tau \leqslant \sigma$ будет

$$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{p}^{\tau-1},$$

и поэтому

$$\mathfrak{q} \sim \mathfrak{p}^{\tau}.$$

Так как $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^*$, то

$$\mathfrak{p}^{\tau} \subseteq (\mathfrak{p}^{\tau})^* = \mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}.$$

Отсюда следует, что $\tau \geqslant \sigma$. Таким образом, $\tau = \sigma$ и

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^* = (\mathfrak{p}^{\sigma})^* = \mathfrak{p}^{(\sigma)}.$$

Следовательно, справедлива

Теорема IX. *Примарные идеалы кольца $\mathfrak{R}$, не квазиравные* 1, *являются символическими степенями простых идеалов.*

В заключение приведем один полезный результат о главных идеалах кольца $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{i} = \mathfrak{R} \cdot (\alpha)$ — некоторый главный идеал в $\mathfrak{R}$. Тогда, как мы видели, $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{i}$. Если

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r],$$

то

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{i}^* = [\mathfrak{p}_1^{(\rho_1)}, \ldots, \mathfrak{p}_s^{(\rho_s)}],$$

где каждый из $\mathfrak{p}_i^{(\rho_i)}$ является символической степенью некоторого простого идеала $\mathfrak{p}_i$, не имеющего собственных кратных, являющихся простыми идеалами. Поэтому ни один из $\mathfrak{p}_i^{(\rho_i)}$ не будет вложенным. Этим доказана

Теорема X. *Все компоненты главного идеала являются изолированными.*

§ 8. Целые элементы

Пусть $\mathfrak{R}$ — некоторое кольцо и $\mathfrak{S}$ — другое кольцо, содержащее $\mathfrak{R}$ в качестве подкольца. Элемент ξ из $\mathfrak{S}$ называется *целым относительно* $\mathfrak{R}$, если он удовлетворяет уравнению вида

$$\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_n + m_1\xi^{n-1} + \ldots + m_{n-1}\xi = 0, \qquad (1)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — элементы из $\mathfrak{R}$, $m_1, \ldots, m_{n-1}$ — целые числа и n — натуральное число. Если ξ является элементом a из $\mathfrak{R}$, то

$$\xi - a = 0.$$

Следовательно, любой элемент из $\mathfrak{R}$ является целым относительно $\mathfrak{R}$. Из равенства (1) очевидно, что если ξ — целый относительно $\mathfrak{R}$ элемент, удовлетворяющий уравнению (1), то все его степени $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots$ содержатся в конечном $\mathfrak{R}$-модуле $\mathfrak{R} \cdot (\xi, \ldots, \xi^{n-1})$. Нужно предупредить читателя, что во многих книгах по современной алгебре этот факт принимается за определение целого элемента: элемент $\xi \in \mathfrak{S}$ называется целым относительно $\mathfrak{R}$, если все его степени $\xi, \xi^2, \ldots$ содержатся в конечном $\mathfrak{R}$-модуле. Это определение не совпадает с нашим. Как мы уже видели, из целости в нашем смысле следует целость в смысле определения с помощью $\mathfrak{R}$-модулей. Обратное же, вообще говоря, неверно. Мы покажем, что оба определения эквивалентны, если в кольце $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе; но этим случаем нельзя ограничиваться, так как впоследствии нам придется рассматривать целость в связи с так называемыми кольцами нормирований, в которых теорема о базисе может и не быть справедливой. Наше определение, как видно из сказанного, более узко, но оно более удобно для геометрических приложений, которые мы имеем в виду. Для построения теории целых элементов в нашем более узком понимании нам вскоре придется наложить на рассматриваемые кольца некоторые ограничения, не обязательные при пользовании более широким определением. Однако эти ограничения всегда выполняются в кольцах, появляющихся в связи с геометрическими задачами, к которым будет применяться наша теория.

Докажем прежде всего упомянутую выше теорему. Во всем дальнейшем целость будет пониматься в нашем более узком смысле.

Теорема I. *Если в кольце* $\mathfrak{R}$ *имеет место теорема о базисе и если* ξ *— элемент из* $\mathfrak{S}$, *все степени которого содержатся в конечном* $\mathfrak{R}$*-модуле* $\mathfrak{M}$, *то* ξ *является целым относительно* $\mathfrak{R}$.

Так как элементы $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots$ содержатся в $\mathfrak{M}$, то в $\mathfrak{M}$ содержится и любое выражение

$$a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + m_1\xi + \ldots + m_n\xi^n,$$

в котором $a_i \in \mathfrak{R}$, а m_i — целые числа. Ясно, что эти выражения образуют $\mathfrak{R}$-модуль $\mathfrak{M}_1$, причем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Так как в $\mathfrak{R}$ имеет место

теорема о базисе, а $\mathfrak{M}$ — конечный $\mathfrak{R}$-модуль, то из теоремы 1 § 6 следует, что $\mathfrak{M}_1$ также является конечным $\mathfrak{R}$-модулем:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{R} \cdot (\eta_1, \ldots, \eta_s).$$

Но так как элементы η_i содержатся в $\mathfrak{M}_1$, то

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}\xi^j + \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\xi^j.$$

Положим $n = \max[n_1, \ldots, n_s]$. Тогда

$$\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{R} \cdot (\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n).$$

Но $\xi^i \in \mathfrak{M}_1$, и поэтому

$$\mathfrak{R} \cdot (\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n) \subseteq \mathfrak{M}_1.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{R} \cdot (\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n).$$

Но ξ^{n+1} содержится в $\mathfrak{M}_1$. Поэтому

$$\xi^{n+1} = a_n\xi^n + \ldots + a_1\xi + m_n\xi^n + \ldots + m_1\xi,$$

где $a_i \in \mathfrak{R}$, а m_i — целые числа. Следовательно, элемент ξ является целым относительно $\mathfrak{R}$.

Мы будем рассматривать целые элементы лишь в тех случаях, когда как $\mathfrak{R}$, так и $\mathfrak{S}$ являются областями целостности. Так как $\mathfrak{S}$ — область целостности, то в $\mathfrak{S}$ имеется единица, а так как $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{S}$, то единица в $\mathfrak{S}$ является единицей и в $\mathfrak{R}$. Всюду далее в этом параграфе предполагается, что $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ — области целостности. Поэтому в уравнении (1) вместо $a_i + m_i$ мы можем написать b_i, так что если элемент ξ — целый относительно $\mathfrak{R}$, то имеет место равенство

$$\xi^n + b_1\xi^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \qquad (b_i \in \mathfrak{R}).$$

Кольцо $\mathfrak{R}$ называется *целозамкнутым* в $\mathfrak{S}$, если каждый элемент из $\mathfrak{S}$, целый относительно $\mathfrak{R}$, принадлежит $\mathfrak{R}$. Мы будем часто рассматривать случай, когда $\mathfrak{S}$ есть поле частных кольца $\mathfrak{R}$. Если будет сказано, что $\mathfrak{R}$ является целозамкнутым, без указания на кольцо $\mathfrak{S}$, то это нужно понимать как целозамкнутость в поле частных. В общем случае совокупность $\mathfrak{R}^*$ элементов из $\mathfrak{S}$, целых относительно $\mathfrak{R}$, называется *целым замыканием* кольца $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{S}$.

Теорема II. *Целое замыкание $\mathfrak{R}^*$ кольца $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{S}$ является областью целостности. Область целостности $\mathfrak{R}^*$ целозамкнута в $\mathfrak{S}$.*

Для доказательства того, что $\mathfrak{R}^*$ есть кольцо, нужно показать, что если ξ и η — элементы из $\mathfrak{R}^*$, то $\xi \pm \eta$ и $\xi\eta$ также содержатся в $\mathfrak{R}^*$. Мы докажем, что если $f(x, y)$ — любой многочлен от x и y с коэффициентами из $\mathfrak{R}$, то элемент $\zeta = f(\xi, \eta)$ является целым относительно $\mathfrak{R}$. Пусть

$$\xi^n + a_1\xi^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_i \in \mathfrak{R})$$

— уравнение, выражающее целость элемента ξ относительно $\mathfrak{R}$, а

$$\eta^m + b_1\xi^{m-1} + \ldots + b_m = 0 \qquad (b_i \in \mathfrak{R})$$

— уравнение, выражающее целость элемента η относительно $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\omega_1, \ldots, \omega_r$ систему из mn произведений $\xi^i\eta^j$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant m-1)$, расположенных в некотором порядке. Тогда $\zeta\omega_i$ является многочленом от ξ и η. Используя написанные выше уравнения для ξ и η, мы видим, что

$$\zeta\omega_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}\omega_j \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

где $c_{ij} \in \mathfrak{R}$. Отсюда, пользуясь обычным процессом исключения, получаем

$$|\zeta\delta_{ij} - c_{ij}|\,\omega_k = 0,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Ввиду того, что хотя бы одно произведение ω_k отлично от нуля и не является делителем нуля (ведь $\mathfrak{S}$ — область целостности!), мы будем иметь равенство

$$|\zeta\delta_{ij} - c_{ij}| = 0,$$

выражающее тот факт, что элемент ζ — целый относительно $\mathfrak{R}$. Следовательно, ζ есть элемент $\mathfrak{R}^*$, а поэтому $\mathfrak{R}^*$ является кольцом. Так как $\mathfrak{R}^* \supseteq \mathfrak{R}$ и кольцо $\mathfrak{R}$ содержит единицу из $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{R}^*$ также содержит единицу. Кроме того, $\mathfrak{R}^*$ не содержит делителей нуля, ибо $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{S}$. Таким образом, $\mathfrak{R}^*$ есть область целостности.

Пусть, далее, ξ — элемент из $\mathfrak{S}$, целый относительно $\mathfrak{R}^*$. Тогда

$$\xi^n + \alpha_1\xi^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — элементы из $\mathfrak{R}^*$. Так как каждый элемент α_i является целым относительно $\mathfrak{R}$, то

$$\alpha_i^{m_i} + a_{i1}\alpha_i^{m_i-1} + \ldots + a_{im_i} = 0,$$

где $a_{ij} \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначим через $\omega_1, \ldots, \omega_s$ взятые в некотором порядке произведения вида $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}\xi^k$ $(0 \leqslant k_i \leqslant m_i - 1$, $0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Как и выше, будем иметь

$$\xi\omega_i = \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\omega_j \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

а значит,

$$|\xi\delta_{ij} - b_{ij}|\,\omega_k = 0.$$

Но так как ω_k не являются делителями нуля в $\mathfrak{S}$, то

$$|\xi\delta_{ij} - b_{ij}| = 0,$$

т. е. элемент ξ — целый относительно $\mathfrak{R}$. Следовательно, ξ есть элемент $\mathfrak{R}^*$, и поэтому кольцо $\mathfrak{R}^*$ целозамкнуто в $\mathfrak{S}$. Тем самым теорема II доказана.

Следует заметить, что вторая часть теоремы II равносильна утверждению, что *целость элемента из* $\mathfrak{S}$ *относительно некоторого подкольца в* $\mathfrak{S}$ *является транзитивным свойством.*

Теорема III. *Если* $\mathfrak{R}$ *— область целостности, целозамкнутая в ее поле частных, и если теорема о базисе имеет место в* $\mathfrak{R}$, *то для произвольного ненулевого дробного идеала* $\mathfrak{M}$ *кольца* $\mathfrak{R}$ *справедливо соотношение* $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}^{-1} \sim 1$.

Если $\mathfrak{M}$ — ненулевой дробный идеал кольца $\mathfrak{R}$, то, по определению идеала $\mathfrak{M}^{-1}$, имеет место соотношение

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{R},$$

т. е.

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \geqslant 1.$$

Остается доказать, что

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \leqslant 1.$$

Для этого достаточно установить, что $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1})^{-1} \subseteq \mathfrak{R}$. Пусть λ — любой элемент из $(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1})^{-1}$. Тогда $\lambda\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{R}$. Поэтому $\lambda\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{M}^{-1}$. Таким образом, мы будем иметь

$$\begin{aligned}
&\lambda\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{M}^{-1},\\
&\lambda^2\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \lambda\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{M}^{-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda^r\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{M}^{-1}
\end{aligned}$$

при любом натуральном r. Следовательно,

$$\lambda^r\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \subseteq \mathfrak{R}.$$

Пусть μ — любой элемент из $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1}$, отличный от нуля. Тогда $\lambda^r\mu \in \mathfrak{R}$ при всех значениях r. Следовательно, все степени элемента λ принадлежат конечному $\mathfrak{R}$-модулю $\mathfrak{R} \cdot (\mu^{-1})$. В силу теоремы I, отсюда вытекает, что элемент λ является целым относительно $\mathfrak{R}$, а значит, ввиду целозамкнутости $\mathfrak{R}$, λ должен принадлежать $\mathfrak{R}$. Поэтому

$$(\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1})^{-1} \subseteq \mathfrak{R}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \leqslant 1.$$

Но так как одновременно

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \geqslant 1,$$

то мы имеем

$$\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} \sim 1.$$

Из полученного результата вытекает, что развитая в § 7 мультипликативная теория идеалов применима к любой области целостности, в которой имеет место теорема о базисе, если только эта область целостности целозамкнута в ее поле частных. Это одна из причин, по которым в рассматриваемых далее приложениях теории идеалов к алгебраической геометрии столь большое внимание уделяется целозамкнутым областям целостности.

Теорема IV. *Пусть* $\mathfrak{R}$ *— область целостности и* $\mathfrak{R}^*$ *— ее целое замыкание. Если* $\mathfrak{p}$ *— простой идеал в* $\mathfrak{R}$, *то кольцо* $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ *целозамкнуто тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$.

Предположим сначала, что $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто. Если ξ — любой элемент поля частных кольца $\mathfrak{R}$ (оно будет также полем частных для $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$), целый относительно $\mathfrak{R}$, то ξ будет также целым относительно $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, ибо $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто, то ξ содержится в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Отсюда ввиду того, что ξ — любой элемент из $\mathfrak{R}^*$, следует включение

$$\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}.$$

Обратно, пусть $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Если ξ — любой элемент из поля частных кольца $\mathfrak{R}$, целый относительно $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, то

$$\xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0,$$

где $\alpha_i \in \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, т. е. $\alpha_i = a_i/b_i$, а a_i и b_i — элементы из $\mathfrak{R}$, причем b_i не содержатся в $\mathfrak{p}$. Умножая это соотношение на $(b_1 \ldots b_n)^n$, получим равенство

$$(b_1 \ldots b_n \xi)^n + a_1 b_2 \ldots b_n (b_1 \ldots b_n \xi)^{n-1} + \ldots + a_n b_1^n \ldots b_{n-1}^n b_n^{n-1} = 0,$$

выражающее тот факт, что элемент $b_1 \ldots b_n \xi$ является целым относительно $\mathfrak{R}$. Следовательно,

$$b_1 \ldots b_n \xi \in \mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}.$$

Но так как идеал $\mathfrak{p}$ прост и $b_i \neq 0 \ (\mathfrak{p})$ $(i = 1, \ldots, n)$, то мы имеем $b_1 \ldots b_n \neq 0 \ (\mathfrak{p})$, т. е. $b_1 \ldots b_n$ является в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ делителем единицы. Отсюда вытекает, что ξ есть элемент из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, а поэтому кольцо $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто.

Непосредственным следствием этого результата является

Теорема V. *Если* $\mathfrak{R}$ *есть область целостности, в которой справедлива теорема о базисе, то* $\mathfrak{R}$ *целозамкнута тогда и только тогда, когда целозамкнуты кольца частных всех простых идеалов из* $\mathfrak{R}$. *Для целозамкнутости* $\mathfrak{R}$ *достаточна целозамкнутость колец частных максимальных идеалов из* $\mathfrak{R}$.

Допустим сначала, что область целостности $\mathfrak{R}$ целозамкнута. Если $\mathfrak{p}$ — любой простой идеал в $\mathfrak{R}$, то мы имеем $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Отсюда, в силу теоремы IV, следует, что кольцо $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто.

С другой стороны, пусть целозамкнуты кольца частных всех максимальных идеалов из $\mathfrak{R}$. Мы знаем (§ 5, теорема X), что $\mathfrak{R}$ является пересечением этих колец частных. В силу теоремы IV, любой

элемент целого замыкания $\mathfrak{R}^*$ кольца $\mathfrak{R}$ содержится в кольце частных каждого максимального идеала из $\mathfrak{R}$, а поэтому содержится и в пересечении всех этих колец, т. е. в $\mathfrak{R}$. Следовательно, $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$.

В следующих двух теоремах рассматриваются свойства целых замыканий тех типов колец, с которыми нам придется главным образом иметь дело в геометрических приложениях.

Теорема VI. *Если K — произвольное поле и $x_1, \ldots, x_r$ — независимые неизвестные над K, то кольцо $\mathfrak{R} = K[x_1, \ldots, x_r]$ целозамкнуто (в его поле частных).*

Кольцо $\mathfrak{R}$ является кольцом с однозначным разложением на множители. Следовательно, любой элемент поля $K(x_1, \ldots, x_r)$ можно записать в виде

$$\xi = \frac{a(x_1, \ldots, x_r)}{b(x_1, \ldots, x_r)} = \frac{a}{b},$$

где a и b — многочлены от $x_1, \ldots, x_r$, не имеющие общих множителей. Если элемент ξ является целым относительно $\mathfrak{R}$, то справедливо равенство

$$\xi^n + c_1\xi^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

где $c_i = c_i(x_1, \ldots, x_r)$ — многочлены от $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами из K. Поэтому

$$a^n + c_1 b a^{n-1} + \ldots + c_n b^n = 0,$$

т. е.

$$a^n = b(-c_1 a^{n-1} - \ldots - c_n b^{n-1}).$$

Отсюда следует, что b является делителем a^n. Но так как в $\mathfrak{R}$ имеет место однозначность разложения на множители, а a и b не имеют общих множителей, то многочлен b должен быть элементом поля K, т. е. ξ есть элемент из $\mathfrak{R}$. Этим теорема доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{R}$ — область целостности, в которой имеет место теорема о базисе, и Σ — ее поле частных. Предположим, что Σ — поле без характеристики и что $\mathfrak{R}$ целозамкнута в Σ. Пусть Σ^* — конечное (а значит, простое) алгебраическое расширение поля Σ, а $\mathfrak{R}^*$ — целое замыкание кольца $\mathfrak{R}$ в Σ^*. Имеет место

Теорема VII. *Поле Σ^* есть поле частных кольца $\mathfrak{R}^*$. $\mathfrak{R}^*$ является конечным $\mathfrak{R}$-модулем, в котором имеет место теорема о базисе.*

Поле Σ^* является простым расширением Σ. Следовательно, в Σ^* существует элемент ξ со следующими свойствами:

(I) ξ удовлетворяет уравнению

$$\xi^n + \alpha_1\xi^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0, \tag{2}$$

в котором $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — элементы из Σ, а многочлен $x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$ неприводим над полем Σ.

(II) Любой элемент из Σ^* можно записать в виде

$$\beta_0 + \beta_1\xi + \ldots + \beta_{n-1}\xi^{n-1},$$

где $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$ — элементы поля Σ. Элемент ξ был назван в томе I *примитивным элементом* поля Σ^* над Σ. Так как α_i лежат в Σ, то $\alpha_i = a_i/b_i$, где a_i и b_i — элементы из $\mathfrak{R}$. Из равенства (2) мы получаем, что

$$(b_1 \ldots b_n\xi)^n + a_1b_2 \ldots b_n(b_1 \ldots b_n\xi)^{n-1} + \ldots + a_nb_1^n \ldots b_{n-1}^n b_n^{n-1} = 0.$$

Следовательно, элемент $\eta = b_1 \ldots b_n\xi$ из поля Σ^* является целым относительно $\mathfrak{R}$, т. е. $\eta \in \mathfrak{R}^*$. Ясно, что η также является примитивным элементом поля Σ^* над Σ, так что примитивный элемент поля Σ^* над Σ можно выбрать в $\mathfrak{R}^*$.

Любой элемент ζ из Σ^* имеет вид

$$\zeta = \gamma_0 + \gamma_1\eta + \ldots + \gamma_{n-1}\eta^{n-1},$$

где $\gamma_i = c_i/d_i$ — элементы поля Σ. Поэтому мы можем написать

$$\zeta = \frac{\sigma}{d},$$

где $d \in \mathfrak{R}$ и $\sigma \in \mathfrak{R}[\eta]$, т. е. σ лежит в кольце многочленов от η с коэффициентами из $\mathfrak{R}$. Отсюда следует, что Σ^* есть поле частных кольца $\mathfrak{R}[\eta]$. Но так как элемент η — целый относительно $\mathfrak{R}$, то $\mathfrak{R}[\eta] \subseteq \mathfrak{R}^*$. Поэтому Σ^* является полем частных для $\mathfrak{R}^*$. Этим доказана первая часть теоремы.

Пусть теперь $\varphi(x)$ — характеристический многочлен элемента η над полем Σ. Если Σ_1 — поле разложения многочлена $\varphi(x)$, а $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — корни этого многочлена в поле Σ_1, то мы можем положить $\eta = \eta_1$. В силу нашего выбора элемента η, коэффициенты многочлена $\varphi(x)$ лежат в $\mathfrak{R}$, причем его старший коэффициент равен единице. Так как $\varphi(\eta_i) = 0$, то все элементы $\eta_1, \ldots, \eta_n$ являются целыми над $\mathfrak{R}$ (это кольцо является подкольцом поля $\Sigma^* = \Sigma(\eta_1) \subseteq \Sigma_1$). Пусть теперь ζ — любой элемент поля Σ^*, целый относительно $\mathfrak{R}$. Тогда

$$\zeta = \rho_0 + \rho_1\eta_i + \ldots + \rho_{n-1}\eta^{n-1},$$

где $\rho_i \in \Sigma$. Все элементы

$$\zeta_i = \rho_0 + \rho_1\eta_i + \ldots + \rho_{n-1}\eta_i^{n-1} \tag{3}$$

также являются целыми относительно $\mathfrak{R}$ ($i = 1, \ldots, n$). Обозначим

$$D = \text{определитель } (\eta_j^i) = \prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j) \neq 0.$$

Так как все элементы η_i — целые относительно $\mathfrak{R}$, то D — также целый относительно $\mathfrak{R}$ элемент. Кроме того, элемент D^2 инвариантен относительно автоморфизмов поля Σ_1 над Σ. Следовательно, в силу леммы V § 10 гл. X, D^2 содержится в Σ. Но так как кольцо $\mathfrak{R}$ целозамкнуто в Σ, то D^2 содержится в $\mathfrak{R}$.

Если мы разрешим уравнения (3), то получим

$$D\rho_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}\zeta_j,$$

где все коэффициенты S_{ij} лежат в Σ_1 и являются целыми относительно $\mathfrak{R}$. Отсюда вытекает, что каждый элемент $s_i = D^2\rho_i$ — целый относительно $\mathfrak{R}$. Но $s_i \in \Sigma$, и поэтому $s_i \in \mathfrak{R}$.

Таким образом,

$$\zeta = \frac{s_0 + s_1\eta + \ldots + s_{n-1}\eta^{n-1}}{D^2}.$$

Но ζ — любой элемент из Σ^*, целый относительно $\mathfrak{R}$, а значение D^2 не зависит от выбора ζ. Следовательно,

$$\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R} \cdot (D^{-2}, D^{-2}\eta, \ldots, D^{-2}\eta^{n-1}).$$

Поэтому $\mathfrak{R}^*$ является подмодулем конечного $\mathfrak{R}$-модуля. Так как в кольце $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе, то отсюда вытекает (§ 6, теорема I), что $\mathfrak{R}^*$ является конечным $\mathfrak{R}$-модулем.

Наконец, любой идеал $\mathfrak{i}^*$ из $\mathfrak{R}^*$ является подмодулем $\mathfrak{R}$-модуля $\mathfrak{R}^*$ и поэтому имеет конечный $\mathfrak{R}$-базис. Этот базис будет одновременно базисом идеала $\mathfrak{i}^*$ кольца $\mathfrak{R}^*$. Следовательно, в $\mathfrak{R}^*$ также имеет место теорема о базисе. Теорема VIII доказана.

Теория § 4 может быть применена для установления соотношений между идеалами области целостности $\mathfrak{R}$ и ее целого замыкания $\mathfrak{R}^*$. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{R}^*$ является целым замыканием $\mathfrak{R}$ в его поле частных. Кроме того, предположим, что $\mathfrak{R}^*$ является конечным $\mathfrak{R}$-модулем и что в $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе. Докажем, что если $\mathfrak{i}$ есть собственный идеал в $\mathfrak{R}$, то $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ является собственным идеалом в $\mathfrak{R}^*$. Точно так же, если $\mathfrak{i}^*$ — собственный идеал в $\mathfrak{R}^*$, то $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$ — собственный идеал в $\mathfrak{R}$.

Пусть $\mathfrak{i}$ — собственный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Так как $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$, то $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ не может быть нулевым идеалом. Покажем, что он не является также единичным идеалом кольца $\mathfrak{R}^*$. По условию, $\mathfrak{R}^*$ — конечный $\mathfrak{R}$-модуль. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_t$ — его базис. Тогда элементы идеала $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ имеют вид $\sum c_i\zeta_i$, где $c_i \in \mathfrak{i}$. Если бы было $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{R}^*$, то в $\mathfrak{i}$ существовали бы элементы c_{ij}, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{j=1}^{t} c_{ij}\zeta_j = \zeta_i \quad (i = 1, \ldots, t).$$

Исключая отсюда $\zeta_1, \ldots, \zeta_t$, получим равенство

$$|c_{ij} - \delta_{ij}| = 0.$$

Отсюда, в силу условия $c_{ij} \in \mathfrak{i}$, мы имели бы

$$1 = 0 \quad (\mathfrak{i}),$$

так что $\mathfrak{i} = \mathfrak{R}$. Так как мы предположили, что $\mathfrak{i}$ есть собственный идеал в $\mathfrak{R}$, то налицо противоречие. Отсюда следует, что $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ не является единичным идеалом. Таким образом, $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{i}$ — собственный идеал.

Пусть теперь $\mathfrak{i}^*$ — собственный идеал кольца $\mathfrak{R}^*$. Если ζ — любой ненулевой элемент из $\mathfrak{i}^*$, то он является целым относительно $\mathfrak{R}$, и поэтому справедливо равенство

$$\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

в котором $a_i \in \mathfrak{R}$. Если здесь $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_n = 0$, но $a_m \neq 0$, то

$$\zeta^{n-m}(\zeta^m + a_1\zeta^{m-1} + \ldots + a_m) = 0.$$

Так как ζ отличен от нуля, а $\mathfrak{R}^*$ — область целостности, то

$$\zeta^m + a_1\zeta^{m-1} + \ldots + a_m = 0.$$

Следовательно, мы можем предполагать, что $a_n \neq 0$. Ввиду того, что

$$\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\zeta \in \mathfrak{i}^*,$$

элемент a_n должен принадлежать $\mathfrak{i}^*$. Поэтому $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$ не является нулевым идеалом кольца $\mathfrak{R}$. Предположим теперь, что $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}$. Тогда

$$\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*) = \mathfrak{R}^*.$$

Но, в силу теоремы VI § 4,

$$\mathfrak{R}^* \cdot (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*) \subseteq \mathfrak{i}^*.$$

Следовательно, $\mathfrak{i}^* = \mathfrak{R}^*$, вопреки условию. Таким образом, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{i}^*$ есть собственный идеал кольца $\mathfrak{R}$.

Так как мы предположили, что $\mathfrak{R}^*$ есть конечный $\mathfrak{R}$-модуль, то к нему можно применить теорему V § 4 и ее следствие. Из этих результатов вытекает, что если $\mathfrak{p}$ — простой идеал в $\mathfrak{R}$, то

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{R} \cap (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}).$$

Кроме того, если

$$\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p} = [\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_r^*],$$

где идеалы $\mathfrak{q}_i^*$ $\mathfrak{p}_i^*$-примарны, то идеалы $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}_i^*$ являются делителями $\mathfrak{p}$, причем хотя бы для одного значения i будет $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{p}$. Мы можем уточнить этот результат в том случае, когда кольцо $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто в его поле частных.

Предположим, что $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто. Тогда, в силу теоремы IV, $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Пусть $\mathfrak{q}_i^*$ — та из компонент идеала $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}$, радикал которой $\mathfrak{p}_i^*$ сжимается в $\mathfrak{p}$, т. е. такая компонента, для которой

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{p}.$$

Покажем, что

$$\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}_i^*} = \mathfrak{R}_\mathfrak{p}.$$

Любой элемент из $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ имеет вид α/β, где α и β — элементы из $\mathfrak{R}$, а значит, и из $\mathfrak{R}^*$, причем β не содержится в $\mathfrak{p}$. Отсюда вытекает, что β не лежит и в $\mathfrak{p}_i^*$, так как в противном случае β содержался бы в идеале $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{p}$. Следовательно, α/β лежит в $\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$, и поэтому

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}_i^*}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь любой элемент из $\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}_i^*}$. Он имеет вид α^*/β^*, где α^* и β^* лежат в $\mathfrak{R}^*$, а значит, и в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, и β^* не принадлежит $\mathfrak{p}_i^*$. Но элемент β^* является целым относительно $\mathfrak{R}$ и поэтому удовлетворяет уравнению

$$\beta^{*n} + a_1\beta^{*n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ принадлежат $\mathfrak{R}$. Эти коэффициенты не могут все содержаться в $\mathfrak{p}$, так как в этом случае мы имели бы

$$\beta^{*n} = -a_1\beta^{*n-1} - \ldots - a_n \in \mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i^*,$$

а значит, ввиду простоты $\mathfrak{p}_i^*$, и $\beta^* = 0$ $(\mathfrak{p}_i^*)$, вопреки сказанному выше.

Пусть число $m \geqslant 1$ таково, что

$$a_m \neq 0 \quad (\mathfrak{p}), \quad a_{m+i} = 0 \quad (\mathfrak{p}) \quad (i = 1, \ldots, n-m).$$

Тогда

$$\beta^{*(n-m)}(\beta^{*m} + a_1\beta^{*m-1} + \ldots + a_m) = 0 \quad (\mathfrak{p}_i^*).$$

Но так как идеал $\mathfrak{p}_i^*$ прост и не содержит β^*, то мы имеем

$$\beta^{*m} + a_1\beta^{*m-1} + \ldots + a_m = 0 \quad (\mathfrak{p}_i^*).$$

Положим

$$\zeta^* = \beta^{*m} + a_1\beta^{*m-1} + \ldots + a_m.$$

Тогда

$$\frac{\alpha^*}{\beta^*} = \frac{\alpha^*(\beta^{*m-1} + a_1\beta^{*m-2} + \ldots + a_{m-1})}{\zeta^* - a_m}.$$

Элементы кольца $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, не являющиеся делителями единицы, образуют идеал $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$ (§ 5, теорема V). Так как элемент a_m не содержится в $\mathfrak{p}$, то он является делителем единицы кольца $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Если бы элемент ζ^* также был делителем единицы в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, то мы могли бы найти такие элементы γ и δ из $\mathfrak{R}$, что

$$\gamma\zeta^* = \delta$$

и δ не содержится в $\mathfrak{p}$. Тогда мы имели бы $\gamma\zeta^* \in \mathfrak{R}$. Но так как $\zeta^* \in \mathfrak{p}_i^*$, то было бы $\delta = \gamma\zeta^* \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{p}$, вопреки условию. Таким образом, ζ^* не является делителем единицы в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Поэтому элемент $\zeta^* - a_m$ служит делителем единицы в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, так как если бы он принадлежал идеалу $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$, то элемент $a_m = \zeta^* - (\zeta^* - a_m)$ также

принадлежал бы этому идеалу, а мы знаем, что a_m есть делитель единицы в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$. Таким образом, элементы

$$\alpha^*(\beta^{*m-1} + a_1\beta^{*m-2} + \ldots + a_{m-1}) \text{ и } \zeta^* - a_m$$

принадлежат кольцу $\mathfrak{R}^*$, содержащемуся в $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, причем $\zeta^* - a_m$ является делителем единицы. Поэтому $\alpha^*/\beta^* \in \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, а значит,

$$\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}.$$

Сопоставляя полученное с включением (4), получаем

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i}.$$

Так как $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p} = [\mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{q}^*_r]$ и $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, то

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}) = \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \cdot [\mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{q}^*_r] = [\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \cdot \mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i}\mathfrak{q}^*_r]$$

(§ 5, теорема IX). Идеал $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$ является максимальным идеалом кольца $\mathfrak{R}_\mathfrak{p} = \mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i}$ (§ 5, теорема V). Но очевидно, что идеал $\overline{\mathfrak{j}} = [\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \cdot \mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \cdot \mathfrak{q}^*_r]$ может быть максимальным лишь в том случае, если для каждого k либо

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}^*_k = \mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \cdot \mathfrak{q}^*_k = \mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i},$$

либо

$$\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \cdot q^*_k = \overline{\mathfrak{j}}.$$

В частности, при $k = i$ идеал $\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \cdot \mathfrak{q}^*_i$ не является единичным (§ 5, теорема II). Следовательно,

$$\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}^*_i = \mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}.$$

Этот идеал прост, а значит (§ 5, теорема VIII), и q^*_i должен быть простым, т. е. $\mathfrak{q}^*_i = \mathfrak{p}^*_i$.

Далее, имеем (§ 4, теорема V)

$$\mathfrak{p}^*_i = \mathfrak{R}^* \cap (\mathfrak{R}^*_{\mathfrak{p}^*_i} \cdot \mathfrak{p}^*_i) = \mathfrak{R}^* \cap (\mathfrak{R}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}).$$

Отсюда следует, что радикал примарной компоненты идеала $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}$, сжимающейся в $\mathfrak{p}$, однозначно определен. Поэтому, если $[\mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{q}^*_r]$ — несократимое представление $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}$, то только одна из компонент $\mathfrak{q}^*_i$ имеет радикал, сжимающийся в $\mathfrak{p}$. Суммируя полученные результаты, получаем следующую теорему:

Теорема VIII. *Если $\mathfrak{p}$ есть простой идеал кольца $\mathfrak{R}$ и кольцо $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто, то идеал $\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p}$ можно представить несократимым пересечением примарных идеалов в виде*

$$\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p} = [\mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}^*_1, \ldots, \mathfrak{q}^*_s],$$

где

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p},$$

и идеалы $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}_i^*$ *являются собственными делителями* $\mathfrak{p}$ (*здесь* $\mathfrak{p}_i^*$ — *радикал идеала* $\mathfrak{q}_i^*$). *Кроме того, имеет место равенство*

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}^*}^*.$$

В геометрических приложениях особенно важно такое

Следствие. *Если* $\mathfrak{p}$ — *максимальный идеал кольца* $\mathfrak{R}$ *и кольцо* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ *целозамкнуто, то идеал*

$$\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^*$$

прост. Идеалы $\mathfrak{p}$ *и* $\mathfrak{p}^*$ *являются соответствующими друг другу идеалом сжатия и идеалом расширения.*

В силу теоремы VIII, мы имеем

$$\mathfrak{R}^* \cdot \mathfrak{p} = [\mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_s^*].$$

Если бы было $s > 0$, то каждый из $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}_i^*$ был бы собственным делителем $\mathfrak{p}$. Однако идеал $\mathfrak{p}$ максимален. Следовательно,

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{R}.$$

Но, как мы видели, отсюда следует, что $\mathfrak{p}_i^*$ есть единичный идеал. Ввиду того, что $\mathfrak{R}$ — область целостности, в которой имеет место теорема о базисе, и $\mathfrak{q}_i^*$ должен быть единичным идеалом. Следовательно, в несократимом представлении обязательно должно быть $s = 0$.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГООБРАЗИЙ

§ 1. Алгебраические многообразия в аффинном пространстве

Мы можем теперь воспользоваться методами теории идеалов в геометрии алгебраических многообразий. В применениях обычно бывает удобно пользоваться неоднородными координатами. В связи с этим нужно сделать несколько предварительных замечаний.

Основным полем K может быть произвольное поле характеристики нуль. Рассмотрим пространство S_n над K. Для введения неоднородных координат (гл. X, § 3) мы выбираем некоторую гиперплоскость Π, называемую „бесконечно удаленной гиперплоскостью". Выбор Π может быть либо вполне произвольным, либо ограниченным рассматриваемой задачей. Например, если мы хотим изучать точку P некоторого алгебраического многообразия V в S_n, то Π должна быть выбрана так, чтобы она не содержала точку P, а значит, не содержала и многообразия V. После этого мы выбираем однородные координаты в пространстве S_n таким образом, чтобы гиперплоскость Π имела уравнение

$$x_0 = 0,$$

и получаем неоднородные координаты $(x_1', \ldots, x_n')$, определяемые уравнениями

$$x_i' = x_i/x_0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Каждой точке P пространства S_n, не лежащей на Π, соответствует при этом определенная строка координат $(x_1', \ldots, x_n')$, и обратно. Если $(x_1', \ldots, x_n')$ — неоднородные координаты точки P, то однородными координатами P служат $(x_0, x_1'x_0, \ldots, x_n'x_0)$, где x_0 — любой ненулевой элемент некоторого поля, являющегося расширением K. Точки из S_n, не лежащие на Π, составляют *аффинное пространство* n измерений, которое мы будем обозначать через A_n.

Рассмотрим произвольное допустимое преобразование координат в пространстве S_n:

$$y_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 0, \ldots, n).$$

Если в новой координатной системе гиперплоскость Π имеет уравнение $y_0 = 0$, то

$$a_{01} = a_{02} = \ldots = a_{0n} = 0.$$

Кроме того, так как матрица преобразования должна быть невырожденной, то элемент a_{00} должен быть отличен от нуля. Поэтому мы имеем уравнения

$$y_i' = \frac{y_i}{y_0} = \frac{a_{i0}}{a_{00}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} x_j'}{a_{00}} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

которые можно записать в виде

$$y_i' = b_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j' \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Заметим еще, что из равенства

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & n_{nn} \end{vmatrix} = a_{00}^{n+1} \begin{vmatrix} a_{11}/a_{00} & \ldots & a_{1n}/a_{00} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}/a_{00} & \ldots & a_{nn}/a_{00} \end{vmatrix}$$

следует

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Обратно, непосредственно очевидно, что если

$$y_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 0, \ldots, n)$$

есть любое допустимое преобразование координат в S_n, в котором $a_{01} = \ldots = a_{0n} = 0$, то в новой координатной системе гиперплоскость II имеет уравнение $y_0 = 0$. Очевидно также, что если

$$y_i' = b_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j' \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где $|b_{ij}| \neq 0$, то равенства (1) определяют преобразование неоднородных координат в A_n, которое можно получить описанным выше образом из допустимого преобразования $y = Ax$ в пространстве S_n, в котором

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы можем определить *допустимые преобразования координат в пространстве* A_n как преобразования вида (1).

Интересным упражнением для читателя может послужить определение аффинного пространства n измерений с помощью приемов, примененных в гл. V для определения проективного пространства. Но ввиду того, что в этой книге мы будем иметь дело только с аффинными пространствами, получаемыми из проективных пространств с помощью выбора некоторой гиперплоскости, более удобно понимать аффинное пространство именно так, а не определять его абстрактно. Таким образом, для наших целей аффинное пространство является проективным пространством, из которого исключена гиперплоскость и в котором допустимые преобразования координат определяются уравнениями типа (1).

Логически теперь мы должны определить многообразия в аффинном пространстве и вывести их свойства. Однако, относящаяся сюда теория вполне аналогична теории многообразий в проективном пространстве, так что на этом этапе нужно лишь указать немногие наиболее важные свойства. Многообразие V в пространстве A_n является совокупностью точек, удовлетворяющих (в заданной допустимой координатной системе) системе (неоднородных) уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Пользуясь теоремой Гильберта о базисе (гл. IV, § 2, теорема I), можно показать, как и в случае проективных пространств, что любое многообразие в A_n определяется конечной системой уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Если V_1 и V_2 — два многообразия в A_n, то их сумма $V_1 \dot{+} V_2$ определяется как совокупность точек, лежащих на V_1 или на V_2, а пересечение $V_1 \cap V_2$ — как совокупность точек, лежащих на V_1 и на V_2 одновременно. Ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность операций „$\dot{+}$“ и „$\cap$“, доказанные для проективных пространств, имеют место также и в аффинном пространстве.

Многообразие V в пространстве A_n называется *неприводимым*, если из равенства

$$V = V_1 \dot{+} V_2$$

следует, что

$$V = V_1 \quad \text{или} \quad V = V_2.$$

Как и в § 2 гл. X, можно показать, что необходимым и достаточным условием приводимости многообразия является существование двух многочленов $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$, ни один из которых не обращается в нуль на V (т. е. не обращается в нуль во всех точках V), и таких, что

$$f(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

на V.

Точка $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из A_n называется *общей точкой* многообразия V (над основным полем K), если:

(I) она лежит на V и

(II) если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — любой многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из K, для которого

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n)=0,$$

то

$$f(x_1, \ldots, x_n)=0$$

на V. Как и в § 3 гл. X, доказывается, что если многообразие V имеет общую точку, то оно неприводимо. Для доказательства того, что неприводимое многообразие V имеет общую точку, рассматриваем рациональные функции

$$f(x_1, \ldots, x_n)/g(x_1, \ldots, x_n)$$

от $x_1, \ldots, x_n$ над полем K, в которых $g(x_1, \ldots, x_n)$ не обращается в нуль на V, и определяем отношение эквивалентности

$$\frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} \sim \frac{f'(x_1, \ldots, x_n)}{g'(x_1, \ldots, x_n)}$$

условием равенства

$$f(x_1, \ldots, x_n)g'(x_1, \ldots, x_n)-f'(x_1, \ldots, x_n)g(x_1, \ldots, x_n)=0$$

на V. Как и в случае многообразий в проективном пространстве, можно показать, что определенное так отношение является истинным отношением эквивалентности, если только многообразие V неприводимо. После этого можно определить сложение и умножение классов эквивалентности и получить таким образом некоторое поле Σ — *поле функций на многообразии* V, содержащее подполе, изоморфное K. Отождествляя это подполе с K, мы получим расширение поля K. Если ξ_i — элемент этого расширения, соответствующий классу, содержащему $x_i/1$, то можно показать, что точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является общей точкой многообразия V. В следующем параграфе мы приведем более простой способ получения общей точки неприводимого многообразия в пространстве A_n, использующий методы теории идеалов.

Пользование неоднородными координатами позволяет ввести понятие собственной специализации элемента η из поля функций $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ некоторого алгебраического многообразия V. Если $\eta \in K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то пара (ξ, η) является общей парой некоторого соответствия, многообразием-прообразом которого будет V, а многообразием-образом — некоторое многообразие V', являющееся прямой в случае, когда η трансцендентен над K, и нульмерным многообразием, когда η алгебраичен над K. Если x' — любая точка на V, то ей соответствует по меньшей мере одна точка y' многообразия V'. Неоднородная координата y' любой из таких точек (может быть, бесконечно удаленной) называется *собственной специализацией элемента* η, *соответствующей специализации* $\xi \to x'$.

Исходя из приведенных результатов, для аффинных многообразий можно доказать многие свойства, полученные в гл. X и XI для проективных многообразий. Это, однако, не является необходимым, так как мы теперь в состоянии установить связь между многообразием в пространстве S_n и многообразием, соответствующим ему в аффинном пространстве, получаемом выбором бесконечно удаленной гиперплоскости в S_n. Эта связь позволит переводить любую теорему о многообразиях в проективном пространстве в соответствующую теорему о многообразиях в аффинном пространстве, и обратно.

Пусть S_n — проективное пространство n измерений над основным полем K, а $(x_0, \ldots, x_n)$ — допустимая система координат в S_n. Пусть, далее, A_n — аффинное пространство, получаемое из S_n выбором бесконечно удаленной гиперплоскости $x_0 = 0$. Так как точки из S_n, не лежащие на этой гиперплоскости, имеют координату $x_0 \neq 0$, то их координаты можно предполагать нормированными так, чтобы было $x_0 = 1$. В таком случае $(x_1, \ldots, x_n)$ являются неоднородными координатами точки $(1, x_1, \ldots, x_n)$ из S_n.

Пусть

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \ldots \dotplus V_k \dotplus V_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus V_s$$

— некоторое многообразие в S_n, $V_1, \ldots, V_s$ — его неприводимые компоненты. Предположим, что $V_1, \ldots, V_k$ не лежат в гиперплоскости $x_0 = 0$, а $V_{k+1}, \ldots, V_s$ лежат в ней. Обозначим через $(1, \xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$ общие точки многообразий V_i $(i = 1, \ldots, k)$, а через $(0, \xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$ общие точки многообразий V_i $(i > k)$. Пусть, далее,

$$f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{2}$$

— уравнения многообразия V.

Обозначим через V_i' неприводимое многообразие в A_n, общей точкой которого является $(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$ $(i = 1, \ldots, k)$, и положим

$$V' = V_1' \dotplus \ldots \dotplus V_k'.$$

Так как на V справедливо равенство

$$f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

при $i = 1, \ldots, r$, то

$$f_i(1, \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, k).$$

Поэтому на V_j' мы имеем

$$f_i(1, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

при $i = 1, \ldots, r$ и при всех значениях j $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Следовательно, точки многообразия V' удовлетворяют уравнениям

$$f_i(1, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{3}$$

Наоборот, пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — любой многочлен над K, обращающийся в нуль на V', и $F(x_0, \ldots, x_n)$ — однородный многочлен, удовлетворяющий условию

$$F(1, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда

$$F(1, \xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) = f(\xi_1^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Следовательно,

$$F(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

на многообразии $V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_k$. Отсюда вытекает, что точка $(x_1', \ldots, x_n')$ лежит на многообразии V' тогда и только тогда, когда точка $(1, x_1', \ldots, x_n')$ лежит на V, а значит, уравнения (3) являются уравнениями многообразия V'. Таким образом, точки многообразия V, не лежащие на гиперплоскости $x_0 = 0$, образуют алгебраическое многообразие в аффинном пространстве, причем последнее многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда многообразие V имеет лишь одну компоненту, не лежащую на гиперплоскости $x_0 = 0$.

Подобным же образом многообразие

$$V' = V_1' \dotplus \ldots \dotplus V_k'$$

в пространстве A_n, где многообразия V_i' неприводимы и имеют общие точки $(\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$, определяет некоторое многообразие

$$\overline{V} = V_1 \dotplus \ldots \dotplus V_k$$

в пространстве S_n, неприводимые компоненты V_i которого имеют общие точки $(1, \xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$. Как и выше, точка $(x_1', \ldots, x_n')$ лежит на V' тогда и только тогда, когда $(1, x_1', \ldots, x_n')$ лежит на $\overline{V}$. Отметим, что если многообразие V' первоначально получено из некоторого многообразия V в пространстве S_n, то V и $\overline{V}$ отличаются лишь на компоненты, лежащие на гиперплоскости $x_0 = 0$. Если же мы начнем с некоторого многообразия V' в пространстве A_n, перейдем от него к многообразию $\overline{V}$ в S_n, а затем вернемся к некоторому многообразию в A_n, то мы получим снова V'. Далее, как мы уже видели выше, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — любой многочлен над K, обращающийся в нуль на V', а $F(x_0, \ldots, x_n)$ — однородный многочлен, обращающийся в $f(x_1, \ldots, x_n)$ при замене x_0 на 1, то $F(x_0, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на $\overline{V}$. Однако следует заметить, что если

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

— уравнения многообразия V', а $F_i(x_0, \ldots, x_n)$ — однородные многочлены, обращающиеся в $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ при замене x_0 на 1, то уравнения

$$F_i(x_0, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

удовлетворяются на многообразии $\bar{V}$, но могут определять многообразие, отличающееся от $\bar{V}$ компонентами, лежащими на гиперплоскости $x_0 = 0$. Например, если многообразие V' в A_2 определяется уравнениями

$$x_2 = 0, \quad x_1 x_2 = 0,$$

то переход к однородным уравнениям определяет многообразие в S_2, имеющее единственную компоненту

$$x_2 = 0.$$

Но многообразие V' можно определить также уравнениями

$$(x_1 + 1)\, x_2 = 0, \quad x_1 x_2 = 0.$$

В этом случае многообразие в S_2, которое мы получим, делая уравнения однородными, имеет еще одну компоненту, состоящую из точки (0, 0, 1).

Практически указанная трудность в определении многообразия в S_n, соответствующего некоторому многообразию в A_n, не возникает, так как мы всюду занимаемся в первую очередь многообразиями в S_n и поэтому должны выбирать бесконечно удаленную гиперплоскость так, чтобы она вообще не содержала компонент рассматриваемого многообразия. Если мы условимся исключать из рассмотрения многообразия, имеющие в S_n компоненты, лежащие на бесконечно удаленной гиперплоскости, то соответствие между определенным так классом многообразий в S_n и многообразиями в A_n будет взаимно однозначным без исключений.

Прежде чем переходить к построению арифметической теории многообразий в аффинном пространстве средствами теории идеалов, мы сделаем несколько предварительных замечаний, используемых в дальнейшем, о выборе координат в аффинном пространстве. Интересующие нас результаты не должны зависеть от выбора координатной системы, но доказательства часто можно упростить надлежащим выбором координат. Читатель знаком со многими примерами такого рода из элементарной геометрии. В доказательствах часто бывает удобно считать, что рассматриваемая система координат является „достаточно общей". Смысл этого выражения связан с рассматриваемой задачей и учитывает то, что нашим выбором координат мы избегаем неудобных конфигураций или упрощаем некоторые вычисления. Например, при рассмотрении общей точки многообразий размерности d нам часто было удобно предполагать, что координатную систему можно выбрать так, чтобы координаты $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ общей точки были нормированными, т. е. чтобы было $\xi_0 = 1$ и чтобы $\xi_1, \ldots, \xi_d$ были алгебраически независимыми над основным полем. Вообще, если мы делаем преобразование

$$y_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

аффинных координат, то в рассматриваемых задачах может быть желательным исключить координатные системы, которые получаются, если коэффициенты b_i и b_{ij} удовлетворяют некоторым конечным системам алгебраических соотношений. Преобразования координат, не удовлетворяющие ни одному из этих соотношений, и будут *достаточно общими преобразованиями* (для рассматриваемой задачи). Если тождественное преобразование является достаточно общим в этом смысле, то исходная координатная система $(x_1, \ldots, x_n)$ будет *достаточно общей*. Несколько примеров достаточно общих координатных систем пояснят то, что мы имели в виду в предыдущем описании.

(1) В простой точке многообразия размерности d существует касательное подпространство, определяемое системой уравнений

$$a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-d),$$

в которой матрица (a_i, a_{ij}) имеет ранг $n-d$. Не все квадратные подматрицы $(n-d)$-го порядка матрицы (a_{ij}) обязаны иметь этот ранг. Если мы теперь выполним преобразование (4) с общими коэффициентами, то все квадратные подматрицы порядка $(n-d)$ новой матрицы будут иметь указанный ранг. Если мы специализируем преобразование, то эти матрицы могут стать матрицами меньшего ранга лишь в том случае, когда коэффициенты преобразования (4) удовлетворяют некоторым алгебраическим соотношениям. Во многих задачах преобразование будет достаточно общим, если ни одно из этих соотношений не выполнено. Другими словами, координатная система $(x_1, \ldots, x_n)$ является *достаточно общей для рассматриваемой задачи*, если любая квадратная матрица порядка $(n-d)$, получаемая из матрицы (a_{ij}), имеет ранг $(n-d)$. В таком случае уравнения касательного подпространства могут быть записаны в виде

$$x_{d+i} = c_{d+i} + \sum_{j=1}^{d} c_{ij}x_j \qquad (i = 1, \ldots, n-d).$$

Читатель может убедиться, что в этом частном примере на коэффициенты b_i вообще не налагается никаких ограничений. Поэтому в случае, если рассматриваемая точка рациональна, систему координат можно выбрать так, чтобы этой точкой была точка $(0, \ldots, 0)$ и чтобы система была достаточно общей.

(2) Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — координаты общей точки некоторого многообразия в V' в пространстве A_n, имеющего размерность d, и пусть u_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — система из n^2 неизвестных. Если положить

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\xi_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

то, как мы знаем (гл. X, § 6), элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ будут алгебраически независимы над полем $K(u_{ij})$, причем существуют неприводимые алгебраические соотношения вида

$$f_i(u_{ij}, \zeta_1, \ldots, \zeta_d, \zeta_{d+i}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-d).$$

Если g — порядок многообразия V', то эти соотношения имеют степень g относительно $\zeta_1, \ldots, \zeta_{d+i}$, причем они содержат члены с ζ_{d+i}^g, коэффициентами которых являются ненулевые многочлены $a_i(u)$ от u_{ij}. Рассмотрим теперь преобразование

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Это преобразование будет достаточно общим для многих задач, если $a_i(b) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n-d)$ и если элементы $\sum_j b_{ij}\xi_j$ $(i = 1, \ldots, d)$ алгебраически независимы над полем K. В таких случаях координатная система $x_1, \ldots, x_n$ будет достаточно общей, если $\xi_1, \ldots, \xi_d$ алгебраически независимы над K и если элементы $\xi_{d+1}, \ldots, \xi_n$ являются целыми над кольцом $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$.

(3) Если $\xi_1, \ldots, \xi_d$ — алгебраически независимы над K, то в поле K можно выбрать элементы $a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы сумма $\sum_1^n a_i\xi_i$ была примитивным элементом поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ над $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$. Поэтому существует достаточно общая координатная система, в которой элементы $\xi_1, \ldots, \xi_d$ алгебраически независимы над K, а ξ_{d+1} является примитивным элементом поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Доказательство мы оставляем читателю.

(4) В любой задаче имеется лишь конечное число алгебраических соотношений между коэффициентами допустимого преобразования, которые нужно устранить для того, чтобы новая система координат была достаточно общей. Поэтому можно объединять конечное число таких систем ограничений, чтобы получить координатную систему, достаточно общую сразу для нескольких целей. Так, при рассмотрении геометрии неприводимого многообразия V размерности d в окрестности некоторой точки часто возникает следующее положение: мы будем требовать, чтобы

(а) уравнения касательного подпространства в рассматриваемой точке могли быть записаны в виде

$$x_{d+i} = c_{d+i} + \sum_{j=1}^{d} c_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n-d);$$

(б) если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка многообразия V, то $\xi_1, \ldots, \xi_d$ были алгебраически независимы над K;

(в) ξ_{d+1} был примитивным элементом поля функций многообразия V [над полем $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$];

(г) элементы $\xi_{d+1}, \ldots, \xi_n$ были целыми относительно кольца $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$.

Из сказанного выше ясно, что система координат может быть выбрана достаточно общей для того, чтобы удовлетворять всем этим условиям.

Ввиду сделанных пояснений термина „достаточно общий", мы будем оставлять читателю доказательство того, что систему координат можно выбрать достаточно общей для целей каждого доказательства, встречающегося ниже.

§ 2. Идеалы и многообразия в аффинном пространстве

Пусть A_n — аффинное пространство размерности n, определенное над основным полем K, и пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — допустимая система координат в этом пространстве. Рассмотрим область целостности $\mathfrak{R} = K[x_1, \ldots, x_n]$. Мы знаем (том I, гл. IV, § 2), что в $\mathfrak{R}$ имеет место теорема о базисе. Если $\mathfrak{i}$ — идеал в $\mathfrak{R}$ и $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, r)$ — его базис, то уравнения

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{1}$$

определяют некоторое алгебраическое многообразие U в пространстве A_n. Так как любой многочлен, принадлежащий $\mathfrak{i}$, имеет вид $\sum a_i(x_1, \ldots, x_n) f_i(x_1, \ldots, x_n)$, то все многочлены из $\mathfrak{i}$ обращаются в нуль на U. Если $\mathfrak{i}$ есть нулевой идеал, то U является всем пространством A_n, и, наоборот, если U — все пространство, то уравнения (1) должны удовлетворяться всеми точками из A_n, а значит,

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

т. е. $\mathfrak{i}$ является нулевым идеалом. С другой стороны, если $\mathfrak{i}$ является единичным идеалом и x' — любая точка из A_n, то в $\mathfrak{i}$ найдется многочлен, не обращающийся в нуль в точке x'. Поэтому точка x' не принадлежит U и мы заключаем, что U является пустым множеством точек. Обратно, если U пусто, то отсюда вытекает, что уравнения (1) не имеют решений и поэтому [гл. IV, § 7, теорема I] существуют многочлены $a_i(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие соотношению

$$\sum a_i(x_1, \ldots, x_n) f_i(x_1, \ldots, x_n) = 1.$$

Следовательно, $\mathfrak{i}$ содержит единицу из $\mathfrak{R}$ и поэтому является единичным идеалом.

Различные идеалы кольца $\mathfrak{R}$ могут определять одно и то же многообразие U. Пусть, например, $\mathfrak{j}$ — другой идеал в $\mathfrak{R}$, определяющий то же многообразие U, что и идеал $\mathfrak{i}$, и пусть $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, s)$ — базис для $\mathfrak{j}$. Так как многочлен $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на U, то из теоремы Гильберта о корнях вытекает, что существует такой показатель σ_i, при котором многочлен $g_i^{\sigma_i}$

принадлежит $\mathfrak{i}$. Если положить $\sigma = \sum(\sigma_i - 1) + 1$, то отсюда будет следовать, что

$$\mathfrak{j}^\sigma = 0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Подобным же образом, существует такое натуральное число ρ, что

$$\mathfrak{i}^\rho = 0 \quad (\mathfrak{j}).$$

Наоборот, если два идеала $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ кольца $\mathfrak{R}$ связаны соотношениями

$$\mathfrak{j}^\sigma = 0 \quad (\mathfrak{i}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{i}^\rho = 0 \quad (\mathfrak{j}),$$

то они определяют одно и то же многообразие. Действительно, из первого условия следует, что

$$g_i^\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad (i = 1, \ldots, s),$$

а значит, многочлен $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль во всех точках многообразия, определяемого идеалом $\mathfrak{i}$. Поэтому многообразие, определяемое идеалом $\mathfrak{j}$, содержит многообразие, определяемое идеалом $\mathfrak{i}$. Второе условие таким же образом показывает, что многообразие, определяемое идеалом $\mathfrak{i}$, содержит многообразие, определяемое идеалом $\mathfrak{j}$. Следовательно, оба многообразия совпадают.

Такое же доказательство дает, что если $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{j}$ — два идеала из $\mathfrak{R}$, определяющие соответственно многообразия U и V, то соотношение $U \subseteq V$ имеет место тогда и только тогда, когда существует число σ, удовлетворяющее условию $\mathfrak{j}^\sigma \subseteq \mathfrak{i}$.

Пусть, с другой стороны, нам задано многообразие U в пространстве A_n. Очевидно, что многочлены из $\mathfrak{R}$, обращающиеся в нуль на U, образуют идеал. Если обозначить через $\mathfrak{i}^*$ идеал, определяемый таким образом с помощью U, а через $\mathfrak{i}$ — идеал в $\mathfrak{R}$, которым многообразие U было определено, то $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{i}^*$, так как все многочлены из $\mathfrak{i}$ обращаются в нуль на U и поэтому принадлежат $\mathfrak{i}^*$. Таким образом, $\mathfrak{i}^*$ является наибольшим идеалом в $\mathfrak{R}$, определяющим U, и содержит все другие идеалы, которые определяют многообразие U. Посмотрим теперь, как мы можем перейти от $\mathfrak{i}$ к $\mathfrak{i}^*$.

Пусть

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{q}_t]$$

— несократимое представление идеала $\mathfrak{i}$ в виде пересечения примарных идеалов, и пусть $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_\kappa$ — изолированные компоненты, а компоненты $\mathfrak{q}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{q}_t$ — вложенные. Обозначим радикал идеала $\mathfrak{q}_i$ через $\mathfrak{p}_i$. Если $f \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ — любой многочлен, обращающийся в нуль на U, то многообразие, определяемое главным идеалом $\mathfrak{j} = \mathfrak{R} \cdot f$, содержит U, и потому найдется такой показатель ρ, при котором $\mathfrak{j}^\rho \subseteq \mathfrak{i}$. Поэтому

$$f^\rho = 0 \quad (\mathfrak{i}),$$

а значит,

$$f^\rho \in \mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}_i \qquad (i = 1, \ldots, t).$$

Следовательно,

$$f=0 \quad (\mathfrak{p}_i) \qquad (i=1, \ldots, t).$$

Поэтому мы имеем

$$f \in [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t] = [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k],$$

ибо при каждом значении a, большем k, найдется такое b, не превосходящее k, при котором $\mathfrak{p}_b \subseteq \mathfrak{p}_a$.

Обратно, если $f \in [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k]$, то мы имеем

$$f=0 \quad (\mathfrak{p}_i) \qquad (i=1, \ldots, t),$$

и поэтому существует такое целое число ρ, что

$$f^\rho=0 \quad (\mathfrak{q}_i) \qquad (i=1, \ldots, t),$$

а значит,

$$f^\rho=0 \quad (\mathfrak{i}).$$

Следовательно, многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на U. Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{i}^* = [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k].$$

Очевидно, что если $\mathfrak{i}^*$ и $\mathfrak{j}^*$ — идеалы, состоящие из всех многочленов, обращающихся в нуль соответственно на U и на V, то включение $U \subseteq V$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{j}^* \subseteq \mathfrak{i}^*$.

Пусть U — многообразие в A_n, а $\mathfrak{i}^*$ — идеал, состоящий из всех многочленов, обращающихся в нуль на U. Необходимое и достаточное условие неприводимости U состоит в следующем: если $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ — два многочлена, произведение которых обращается в нуль на U, то либо $f(x_1, \ldots, x_n)$, либо $g(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на U. Это равносильно тому, что если

$$f(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (\mathfrak{i}^*),$$

то либо

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (\mathfrak{i}^*),$$

либо

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (\mathfrak{i}^*),$$

т. е. тому, что идеал $\mathfrak{i}^*$ прост. Таким образом, имеет место

Теорема I. *Необходимым и достаточным условием неприводимости многообразия U в пространстве A_n является простота идеала, состоящего из всех многочленов, обращающихся в нуль на U.*

Пусть теперь $\mathfrak{i}$ — идеал, определяющий неприводимое многообразие U, а

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t]$$

— его несократимое представление пересечением примарных идеалов. Тогда, как мы видели,

$$\mathfrak{i}^* = [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k],$$

где $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ — изолированные компоненты идеала $\mathfrak{i}$, а $\mathfrak{p}_i$ — радикалы идеалов $\mathfrak{q}_i$. Так как многообразие U неприводимо, то идеал $\mathfrak{i}^*$ прост. Следовательно, $k = 1$, и мы получаем теорему:

Теорема II. *Многообразие, определяемое идеалом* $\mathfrak{i}$ *из* $\mathfrak{R}$, *неприводимо в том и только в том случае, если все компоненты идеала* $\mathfrak{i}$, *кроме одной, являются вложенными.*

Рассмотрим теперь соотношения между суммами и пересечениями идеалов, с одной стороны, и суммами и пересечениями определяемых ими многообразий, с другой. Пусть $\mathfrak{i}$ — некоторый идеал в $\mathfrak{R}$, $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t]$ — его несократимое представление, в котором $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ — изолированные компоненты идеала $\mathfrak{i}$, а $\mathfrak{p}_i$ — радикалы идеалов $\mathfrak{q}_i$. Если идеал $\mathfrak{i}$ определяет многообразие U, то это же многообразие определяется идеалом $\mathfrak{i}^* = [\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k]$. Пусть U_i — неприводимые многообразия, определяемые идеалами $\mathfrak{p}_i$. Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на U тогда и только тогда, когда он принадлежит идеалам $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$, т. е. когда он обращается в нуль на многообразии $U_1 \dotplus \ldots \dotplus U_k$. Поэтому

$$U = U_1 \dotplus \ldots \dotplus U_k.$$

Если идеал $\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t]$ определяет многообразие U, а

$$\mathfrak{j} = [\mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_s']$$

— идеал, определяющий многообразие V, то из равенства

$$[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}] = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t, \mathfrak{q}_1', \ldots, \mathfrak{q}_s']$$

следует, что идеал $[\mathfrak{i}, \mathfrak{j}]$ определяет многообразие $U \dotplus V$.

Если $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, r)$ — базис идеала $\mathfrak{i}$, а $g_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, s)$ — базис идеала $\mathfrak{j}$, то многочлены

$$f_i(x_1, \ldots, x_n)\, g_j(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s)$$

образуют базис для $\mathfrak{ij}$. Отсюда следует, что идеал $\mathfrak{ij}$ также определяет многообразие $U \dotplus V$.

При тех же обозначениях мы непосредственно усматриваем, что $r + s$ многочленов

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, r) \quad \text{и} \quad g_j(x_1, \ldots, x_n) \quad (j = 1, \ldots, s)$$

составляют базис идеала $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$. Следовательно, идеал $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j})$ определяет пересечение $U \cap V$.

Пусть $\mathfrak{R}$ — любое кольцо, содержащее поле K, а $\mathfrak{i}$ — идеал в $\mathfrak{R}$. Говорят, что $\mathfrak{i}$ *имеет размерность* r над K, если выполнены следующие условия:

(I) в кольце $\mathfrak{R}$ существуют элементы $\xi_1, \ldots, \xi_r$, такие, что многочлен $f(x_1, \ldots, x_r)$ из $K[x_1, \ldots, x_r]$ только тогда удовлетворяет условию

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_r) = 0 \quad \text{(i)},$$

когда

$$f(x_1, \ldots, x_r) \equiv 0;$$

(II) если $\xi_1, \ldots, \xi_{r+1}$ — любая система из $r+1$ элементов кольца $\mathfrak{R}$, то существует ненулевой многочлен $f(x_1, \ldots, x_{r+1})$ с коэффициентами из K, такой, что

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_{r+1}) = 0 \quad \text{(i)}.$$

Применим это определение к области целостности $\mathfrak{R} = K[x_1, \ldots, x_n]$, рассматриваемой в связи с аффинным пространством A_n. Пусть $\mathfrak{i}$ — идеал кольца $\mathfrak{R}$, определяющий некоторое многообразие U, и пусть $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t]$ — несократимое представление $\mathfrak{i}$ в виде пересечения примарных идеалов. Пусть при этом $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ — изолированные компоненты $\mathfrak{i}$, а $\mathfrak{p}_i$ — радикалы идеалов $\mathfrak{q}_i$. Если $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — элементы из $\mathfrak{R}$ и $f(x_1, \ldots, x_r)$ — любой многочлен над K, то из соотношения

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_r) = 0 \quad \text{(i)}$$

следует, что

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}_i \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Обратно, если существуют такие многочлены $f_i(x_1, \ldots, x_r)$ $(i = 1, \ldots, k)$, что

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathfrak{p}_i \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

то существуют многочлены $f_i(x_1, \ldots, x_r)$ $(i = 1, \ldots, t)$, такие, что

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathfrak{p}_i \qquad (i = 1, \ldots, t).$$

В самом деле, при любом j, большем k, найдется значение i, не превосходящее k и такое, что $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$. Поэтому нам достаточно взять в качестве $f_j(x_1, \ldots, x_r)$ соответствующий многочлен $f_i(x_1, \ldots, x_r)$. Если ρ_i — индексы идеалов $\mathfrak{q}_i$ и

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \prod_{i=1}^{t} f_i^{\rho_i}(x_1, \ldots, x_r),$$

то

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_r) = 0 \quad \text{(i)}.$$

Из доказанного следует, что размерность идеала $\mathfrak{i}$ равна наибольшей из размерностей идеалов $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$. Действительно, пусть r — размерность $\mathfrak{i}$, r_i — размерность $\mathfrak{p}_i$. Тогда любые $r+1$ элементов из $\mathfrak{R}$ будут алгебраически зависимыми по модулю $\mathfrak{i}$, а значит, и алгебраически зависимыми по модулю $\mathfrak{p}_i$. Следовательно,

$$r \geqslant \max[r_1, \ldots, r_k].$$

С другой стороны, если $s > r_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, то любые s элементов из $\mathfrak{R}$ алгебраически зависимы по модулю $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$

и поэтому алгебраически зависимы по модулю $\mathfrak{i}$. Следовательно, $r \leqslant \max[r_1, \ldots, r_k]$, и поэтому

$$r = \max[r_1, \ldots, r_k].$$

Пусть теперь $\mathfrak{p}$ — простой идеал, образованный многочленами, обращающимися в нуль на неприводимом многообразии U. Пусть, далее, $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — общая точка для U. Если многообразие U имеет размерность d в смысле определения гл. X, то среди η_i найдется d алгебраически независимых над полем K элементов, например $\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_d}$. Тогда, если $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}) \in \mathfrak{p}$, то

$$f(\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_d}) = 0,$$

а значит,

$$f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}) \equiv 0.$$

Поэтому размерность идеала $\mathfrak{p}$ не меньше d. С другой стороны, если $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, d+1)$ — система из $d+1$ любых элементов кольца $\mathfrak{R}$, то найдется такой ненулевой многочлен $F(y_1, \ldots, y_{d+1})$, то

$$F(a_1(\eta), \ldots, a_{d+1}(\eta)) = 0.$$

Следовательно,

$$F(a_1(x), \ldots, a_{d+1}(x)) = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Отсюда вытекает, что размерность идеала $\mathfrak{p}$ равна размерности многообразия U.

В заключение отметим, что размерность любого идеала $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$ равна наибольшей из размерностей компонент многообразия, определяемого этим идеалом, т. е. равна размерности всего этого многообразия. Таким образом, размерность идеала не является для нас существенно новым понятием. Однако определение размерности с помощью идеалов иногда оказывается более удобным.

Приведенные выше предварительные замечания необходимы при изучении геометрии неприводимых многообразий. Пусть теперь V — неприводимое многообразие в пространстве A_n. Это многообразие может быть и всем пространством A_n; мы будем лишь предполагать, что оно не пусто.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ простой идеал, состоящий из всех многочленов кольца

$$\mathfrak{R} = K[x_1, \ldots, x_n],$$

обращающихся в нуль на многообразии V. Рассмотрим кольцо вычетов $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$. Так как идеал $\mathfrak{P}$ прост, то это кольцо является областью целостности (гл. XV, § 3, стр. 39), причем в этой области целостности имеет место теорема о базисе, так как она справедлива в $\mathfrak{R}$ (гл. XV, § 3, теорема VII). Пусть a и b — два элемента поля K, а $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — элементы кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$, на которые отображаются a и b.

Тогда равенство $\bar{a} = \bar{b}$ будет иметь место в том и только в том случае, если $a - b$ содержится в $\mathfrak{P}$. Но так как $\mathfrak{P}$ не является единичным идеалом, то это может случиться лишь при $a = b$. Следовательно, кольцо $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ содержит подкольцо, изоморфное полю K. Мы можем отождествить это подкольцо с K и рассматривать кольцо $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ как расширение поля K. Обозначим его через $\mathfrak{Z}$ и условимся обозначать через ξ_i элемент из $\mathfrak{Z}$, соответствующий элементу x_i из $\mathfrak{R}$. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — любой многочлен из $\mathfrak{R}$, то он отображается на элемент $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из $\mathfrak{Z}$, причем $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда $f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$. Следовательно, точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является общей точкой многообразия V. Кроме того, кольцо $\mathfrak{Z} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ является кольцом многочленов от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, с коэффициентами из K. Если $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — любая общая точка многообразия V, то кольца $K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ и $K[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ являются эквивалентными расширениями K, в которых элементы ξ_i и η_i соответствуют друг другу. Поэтому кольцо $\mathfrak{Z}$ однозначно определяется общей точкой многообразия V. Кольцо $\mathfrak{Z}$ (или любое кольцо, ему изоморфное) называется *областью целостности многообразия V в пространстве A_n*.

Область целостности $\mathfrak{Z}$ не зависит от выбранной в A_n допустимой координатной системы. В самом деле, если $(x'_1, \ldots, x'_n)$ — любая другая допустимая система координат, то

$$x'_i = b_i + \sum b_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$x_i = c_i + \sum c_{ij} x'_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где коэффициенты b_i, b_{ij}, c_i, c_{ij} принадлежат K. Если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — координаты общей точки многообразия V в первоначальной системе, то координатами этой точки в новой системе будут $(\xi'_1, \ldots, \xi'_n)$, причем новые координаты удовлетворяют уравнениям

$$\xi'_i = b_i + \sum b_{ij} \xi_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$\xi_i = c_i + \sum c_{ij} \xi'_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Из этих соотношений следует, что

$$K[\xi_1, \ldots, \xi_n] = K[\xi'_1, \ldots, \xi'_n].$$

В § 3 гл. XV мы рассматривали соотношения между идеалами кольца и идеалами кольца вычетов. Применим полученные результаты к кольцам $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{Z}$. Каждому идеалу $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{R}$ соответствует однозначно определенный идеал $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{Z}$, причем наибольшим идеалом кольца $\mathfrak{R}$, которому соответствует идеал $\mathfrak{k}$, будет $(\mathfrak{K}, \mathfrak{P})$. Каждому идеалу $\mathfrak{k}$ из $\mathfrak{Z}$ соответствует некоторый идеал $\mathfrak{K}_1$ из $\mathfrak{R}$, являющийся делителем $\mathfrak{P}$, причем любой идеал кольца $\mathfrak{R}$, которому соответствует идеал $\mathfrak{k}$, будет

кратен $\mathfrak{K}_1$. Если $\mathfrak{K}$ — любой идеал в $\mathfrak{R}$, определяющий некоторое многообразие U в пространстве A_n, то идеал $(\mathfrak{K}, \mathfrak{P})$ определяет многообразие $U \cap V$. Многообразие $U \cap V$ пусто тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{K}, \mathfrak{P})$ является единичным идеалом, т. е. когда идеал $\mathfrak{k}$ из $\mathfrak{J}$, соответствующий $\mathfrak{K}$, есть единичный идеал. Таким образом, любой идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{J}$ определяет некоторое многообразие, содержащееся в V. Именно: если $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, r)$ — базис идеала $\mathfrak{P}$, а $g_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(i = 1, \ldots, s)$ — базис для $\mathfrak{i}$, то многочлены $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, r)$ и $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, s)$ составляют базис соответствующего идеала кольца $\mathfrak{R}$, являющегося делителем $\mathfrak{P}$. Определяемое идеалом $\mathfrak{i}$ многообразие имеет уравнения

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, s).$$

Обратно, если U — любое многообразие, лежащее на V, и $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, s)$ — базис идеала, состоящего из всех многочленов, обращающихся в нуль на U, то элементы $g_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(i = 1, \ldots, s)$ составляют базис наибольшего идеала кольца $\mathfrak{J}$, определяющего многообразие U.

Результаты, доказанные в начале этого параграфа относительно соотношений между идеалами кольца $\mathfrak{R}$ и многообразиями в пространстве A_n, можно переформулировать теперь в результаты, связывающие идеалы кольца $\mathfrak{J}$ и многообразия, лежащие на V. Действительно, наши более ранние результаты соответствуют частному случаю, в котором идеал $\mathfrak{P}$ является нулевым. Здесь нет необходимости останавливаться на деталях этой переформулировки, которая непосредственно получается из доказанного в § 3 гл. XV. Наиболее важный результат состоит в том, что если U есть некоторое многообразие, лежащее на многообразии V, то U будет неприводимым в том и только в том случае, когда наибольший идеал кольца $\mathfrak{J}$, определяющий U, прост. Отметим, что если $\mathfrak{k}$ — любой идеал кольца $\mathfrak{J}$, а $\mathfrak{K}$ — идеал из $\mathfrak{R}$, соответствующий идеалу $\mathfrak{k}$ и содержащий в себе идеал $\mathfrak{P}$, то размерность над полем K идеала $\mathfrak{k}$, рассматриваемого как идеал в $\mathfrak{J}$, равна максимальному числу элементов из $\mathfrak{J}$, алгебраически независимых по модулю $\mathfrak{k}$, и поэтому равна максимальному числу элементов из $\mathfrak{R}$, алгебраически независимых по модулю $\mathfrak{K}$. Другими словами, размерность идеала $\mathfrak{k}$ равна размерности $\mathfrak{K}$. Следовательно, размерность идеала $\mathfrak{k}$ над полем K равна размерности многообразия, определяемого этим идеалом.

Ввиду того, что $\mathfrak{J}$ является областью целостности, ее максимальные идеалы все просты (гл. XV, § 3, теорема III). Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{J}$, а U — определяемое им неприводимое многообразие. Если бы многообразие U имело размерность, бо́льшую нуля, то существовало бы неприводимое многообразие U', являющееся собственным подмногообразием U. Если $\mathfrak{p}'$ — наибольший идеал, опре-

деляющий многообразие U', то $\mathfrak{p}'$ не являлся бы единичным идеалом, так как U' не пусто, и из соотношения $U' \subset U$ следовало бы, что $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, вопреки условию, что $\mathfrak{p}$ есть максимальный идеал кольца $\mathfrak{J}$. Следовательно, многообразие U имеет размерность нуль. Наоборот, если простой идеал $\mathfrak{p}$ определяет многообразие U размерности нуль, то идеал $\mathfrak{p}$ должен быть максимальным. Действительно, если бы это было не так, то существовал бы простой идеал $\mathfrak{p}'$, отличный от единичного идеала и такой, что $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$. В таком случае многообразие, определяемое идеалом $\mathfrak{p}'$, было бы собственным подмногообразием U. Но это невозможно, и, следовательно, имеет место

Теорема III. *Максимальные идеалы кольца $\mathfrak{J}$ соответствуют неприводимым многообразиям размерности нуль, лежащим на многообразии V.*

Пусть $\mathfrak{p}$ — любой простой идеал в $\mathfrak{J}$, а U — определяемое им неприводимое подмногообразие многообразия V. Кольцо частных $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ идеала $\mathfrak{p}$ называется *кольцом частных подмногообразия U* и часто обозначается через $Q(U)$. В силу теоремы X § 5 гл. XV, кольцо $\mathfrak{J}$ является пересечением колец частных многообразий U, лежащих на V. Более того, оно будет пересечением колец частных неприводимых многообразий размерности нуль, лежащих на V, так как неприводимые подмногообразия размерности нуль многообразия V определяются максимальными идеалами в $\mathfrak{J}$.

Рассмотрим два неприводимых многообразия U_1 и U_2, лежащие на V. Пусть $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ — соответствующие им простые идеалы кольца $\mathfrak{J}$. Тогда, как мы видели, включение $U_1 \subseteq U_2$ имеет место в том и только в том случае, если $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$. Но (гл. XV, § 5, теорема VI) соотношение $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$ справедливо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1} \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_2}$. Следовательно, многообразие U_1 содержится в U_2 тогда и только тогда, когда $Q(U_1)$ содержится в $Q(U_2)$. В частности, U_1 будет собственным подмногообразием U_2 (т. е. $U_1 \subset U_2$) в том и только в том случае, если $Q(U_1)$ является собственным подкольцом кольца $Q(U_2)$. Действительно, в этом случае U_2 не содержится в U_1, а значит, и $Q(U_2)$ не содержится в $Q(U_1)$. Таким образом, доказана

Теорема IV. *Если U_1 и U_2 — неприводимые многообразия, лежащие на многообразии V, то*

(I) *$U_1 \subseteq U_2$ в том и только в том случае, когда $Q(U_1) \subseteq Q(U_2)$;*

(II) *$U_1 \subset U_2$ в том и только в том случае, когда $Q(U_1) \subset Q(U_2)$.*

Следует напомнить, что результаты этого параграфа относятся к многообразиям в аффинном пространстве. Если многообразие V получается из некоторого многообразия $\bar{V}$ в проективном пространстве, то область целостности $\mathfrak{J}$ зависит от выбора бесконечно удаленной гиперплоскости. Например, если $\bar{V}$ является всем пространством $(x_0, \ldots, x_n)$ и если в качестве бесконечно удаленной гиперплоскости мы возьмем гиперплоскость $x_0 = 0$, а в качестве общей

точки — точку $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые неизвестные над K, то $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Пользуясь тем же полем функций на многообразии $\bar{V}$ и беря гиперплоскость $x_n = 0$ в качестве бесконечно удаленной, мы должны взять в качестве общей точки точку $(\xi_n^{-1}, \xi_n^{-1}\xi_1, \ldots, \xi_n^{-1}\xi_{n-1}, 1)$. Поэтому областью целостности соответствующего аффинного многообразия будет кольцо $K[\xi_n^{-1}, \xi_n^{-1}\xi_1, \ldots, \xi_n^{-1}\xi_{n-1}]$, отличное от $\mathfrak{J}$. Следует заметить также, что в теореме, гласящей, что $\mathfrak{J}$ является пересечением колец частных неприводимых подмногообразий многообразия V, имеющих размерность нуль, подмногообразия рассматриваются в аффинном пространстве.

Тем не менее понятие кольца частных неприводимого подмногообразия многообразия V является проективным понятием. Пусть $\bar{V}$ — неприводимое многообразие в проективном пространстве S_n с координатной системой $(x_0, \ldots, x_n)$, не лежащее в гиперплоскости $x_0 = 0$, и пусть V — соответствующее ему многообразие в аффинном пространстве A_n, получаемом из S_n выбором бесконечно удаленной гиперплоскости $x_0 = 0$. Напомним, как мы получали поле функций на многообразии $\bar{V}$ в § 3 гл. X. Мы рассматривали отношения

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0, \ldots, x_n)}{g(x_0, \ldots, x_n)}$$

однородных многочленов одинаковых степеней из кольца $K[x_0, \ldots, x_n]$, таких, что $g(x_0, \ldots, x_n)$ не обращается в нуль на $\bar{V}$. Отношения $f(x)/g(x)$ и $f'(x)/g'(x)$ назывались эквивалентными, если на многообразии $\bar{V}$ имеет место равенство

$$f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 0.$$

При надлежащих определениях сложения и умножения классов эквивалентных отношений мы получили поле, изоморфное полю функций на многообразии $\bar{V}$. Пусть Σ означает расширение поля K, изоморфное полю классов эквивалентности. Пусть теперь $\bar{U}$ — неприводимое многообразие, лежащее на $\bar{V}$ и не лежащее в гиперплоскости $x_0 = 0$, а U — соответствующее многообразие в A_n. Рассмотрим элементы поля Σ, соответствующие отношениям $f(x)/g(x)$, в которых $g(x)$ не обращается в нуль на $\bar{U}$. Если $f(x)/g(x)$ и $f'(x)/g'(x)$ — два отношения, знаменатели которых не обращаются в нуль на $\bar{U}$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)g'(x) + f'(x)g(x)}{g(x)g'(x)}$$

и

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)f'(x)}{g(x)g'(x)}$$

также являются отношениями, знаменатели которых не обращаются в нуль на $\bar{U}$. Отсюда следует, что соответствующие таким отноше-

ниям элементы поля Σ образуют кольцо $\mathfrak{R}$. Ясно, что $\mathfrak{R}$ содержит K, а значит, обладает единицей. Кроме того, так как в поле Σ отсутствуют делители нуля, то их нет и в $\mathfrak{R}$. Поэтому $\mathfrak{R}$ является областью целостности. Сверх того, Σ есть поле частных для $\mathfrak{R}$.

Пусть теперь ξ_i — элемент кольца $\mathfrak{R}$ (а значит, и поля Σ), соответствующий классу $x_i/x_0 (i = 1, \ldots, n)$. Тогда точка $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ является общей точкой многообразия $\bar{V}$, а $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общей точкой V. Кольцо $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ является областью целостности многообразия V. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в $\mathfrak{J}$, соответствующий подмногообразию U. Любой элемент ζ из Σ имеет вид

$$\zeta = \frac{f(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{g(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)},$$

где $f(x_0, \ldots, x_n)$ и $g(x_0, \ldots, x_n)$ однородные многочлены над полем K, имеющие одну и ту же степень и такие, что второй из них не обращается в нуль на $\bar{V}$. Элемент ζ принадлежит кольцу $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ в том и только в том случае, если мы можем найти такие $f(x)$ и $g(x)$, для которых элемент $g(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ не принадлежит идеалу $\mathfrak{p}$. Но, по определению идеала $\mathfrak{p}$, сказанное равносильно условию, что многочлен $g(1, x_1, \ldots, x_n)$ не обращается в нуль на U, т. е. что $g(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ не обращается в нуль на $\bar{U}$. Следовательно, элемент ζ содержится в $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ тогда и только тогда, когда он содержится в $\mathfrak{R}$, так что $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} = \mathfrak{R}$.

Кольцо частных многообразия U можно определить и не обращаясь к полю функций на многообразии V, просто рассматривая отношения $f(x)/g(x)$, в которых $g(x)$ не обращается в нуль на U, и определяя эквивалентность отношений таким же образом, как и выше. Введя после этого сложение и умножение классов обычным образом, можно показать, что совокупность классов является областью целостности, которая, как мы видели, изоморфна полю частных многообразия U. Однако ввиду того, что нам придется рассматривать кольца частных нескольких подмногообразий многообразия V одновременно, мы должны рассматривать их как подкольца одного и того же представления поля функций многообразия V.

Приведенные соображения показывают, что кольцо частных неприводимого подмногообразия многообразия $\bar{V}$ в проективном пространстве определяется полем функций многообразия $\bar{V}$ и подмногообразием и поэтому не зависит от выбора бесконечно удаленной гиперплоскости. В связи с этим в последующих параграфах мы будем стараться выражать свойства многообразий в аффинном пространстве при помощи колец частных, с тем чтобы эти свойства можно было истолковать как свойства многообразий в проективном пространстве.

Мы закончим параграф несколькими замечаниями, связанными с задачей нахождения базиса идеала, определяемого неприводимым

подмногообразием многообразия V. Практически эта задача возникает не часто, так как обычно бывает достаточно знать, что базис существует, а это гарантируется теоремой о базисе. Здесь мы приводим результаты, которые будут полезны в дальнейшем.

Пусть U — неприводимое подмногообразие V, имеющее размерность e. Обозначим через $F(u_0, \ldots, u_e)$ форму Кэли для U (т. е. форму Кэли многообразия U при „пополнении" пространства A_n до проективного пространства S_n). Тогда, если $S^0, \ldots, S^e$ — кососимметрические квадратные матрицы порядка $n+1$, элементы которых являются независимыми неизвестными над K, то уравнения U получаются приравниванием нулю коэффициентов различных произведений неизвестных s^i_{jk} в выражении

$$F(S^0x, \ldots, S^ex),$$

в котором x означает столбец из элементов $1, x_1, \ldots, x_n$. Отсюда следует, что если обозначить через ξ столбец из элементов $1, \xi_1, \ldots, \xi_n$, то коэффициенты различных произведений неизвестных s^i_{jk} в выражении

$$F(S^0\xi, \ldots, S^e\xi)$$

будут порождать идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{J}$, определяющий многообразие U. Пусть $\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r]$ — несократимое представление $\mathfrak{i}$ в виде пересечения примарных идеалов, $\mathfrak{p}_i$ — радикалы идеалов $\mathfrak{q}_i$, а U_i — неприводимые многообразия, лежащие на многообразии V и определяемые идеалами $\mathfrak{p}_i$. Тогда

$$U = U_1 \dot{+} \ldots \dot{+} U_r.$$

Ввиду того, что многообразие U неприводимо, одна из компонент U_i, например U_1, должна совпадать с U, а остальные компоненты являются вложенными. Отсюда следует, что $\mathfrak{p}_1$ есть простой идеал, соответствующий U, а компоненты $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r$ идеала $\mathfrak{i}$ — вложенные.

Существует случай, важный в дальнейшем, в котором мы можем пойти дальше. Это случай, когда U — неприводимое подмногообразие многообразия V, имеющее размерность $d-1$ и не состоящее сплошь из кратных точек многообразия V. Здесь d — размерность V. В это случае можно показать, что $\mathfrak{q}_1$ является простым идеалом, соответствующим многообразию U. Докажем следующую теорему:

Теорема V. *Пусть V — неприводимое многообразие размерности d в некотором аффинном пространстве, $\mathfrak{J}$ — область целостности многообразия V. Пусть, далее, U — неприводимое подмногообразие многообразия V, имеющее размерность $d-1$ и простое на V, а $F(u_0, \ldots, u_{d-1})$ — его форма Кэли. Тогда, если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(\xi_i \in \mathfrak{J})$ — общая точка многообразия V, а $S^i (i = 0, \ldots, d-1)$ — система из $d-1$ независимых кососимметрических матриц, составленных из неизвестных, то простой идеал из $\mathfrak{J}$, определяющий многообразие U, является изолированной компонен-*

той идеала, порождаемого коэффициентами различных произведений неизвестных s_{jk}^{i} в выражении $F(S^{0}\xi, \ldots, S^{d-1}\xi)$.

Нам будет удобно вернуться к проективному пространству S_n, получаемому из пространства A_n. В таком случае V будет многообразием, имеющим общую точку $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ в координатной системе $(x_0, \ldots, x_n)$.

Пусть $W(x) = W(x_0, \ldots, x_n)$ — любая форма с неопределенными коэффициентами $w_1, \ldots, w_t$. Покажем прежде всего, как получить форму Кэли для пересечения многообразия V с гиперповерхностью $W(x) = 0$.

Пусть

$$f_i(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, s) \tag{2}$$

— однородные уравнения многообразия V, а

$$\sum_{j=0}^{n} u_{ij} x_j = 0 \quad (i = 0, \ldots, d-1) \tag{3}$$

d независимых общих гиперплоскостей из S_n. Уравнения (2) и (3) имеют конечное число решений $\xi^{(\nu)} = (1, \xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)})$ $(\nu = 1, \ldots, g)$. Эти g точек сопряжены над полем $K(u_0, \ldots, u_{d-1})$, причем каждая из них является общей точкой многообразия V над полем K (гл. X, § 7). Отсюда вытекают следующие заключения.

(I) Произведение $\prod_{\nu=1}^{g} W(\xi^{(\nu)})$, рассматриваемое как форма от $w_1, \ldots, w_t$, неприводимо над полем $K(u_0, \ldots, u_{d-1})$.

(II) Произведение $\prod_{\nu=2}^{g} W(\xi^{(\nu)})$ является формой от $w_1, \ldots, w_t$, коэффициенты которой лежат в поле

$$K(u_0, \ldots, u_{d-1}; \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}).$$

Учитывая (I), можно написать:

$$\prod_{\nu=1}^{g} W(\xi^{(\nu)}) = \frac{A(u_0, \ldots, u_{d-1})}{H(u_0, \ldots, u_{d-1})} B(w, u_0, \ldots, u_{d-1}),$$

где многочлены $A(u_0, \ldots, u_{d-1})$ и $H(u_0, \ldots, u_{d-1})$ принадлежат $K[u_0, \ldots, u_{d-1}]$ и могут предполагаться не имеющими общих множителей, а $B(w, u_0, \ldots, u_{d-1})$ является неприводимым многочленом из кольца $K[w, u_0, \ldots, u_{d-1}]$.

Для любой специализации $W'(x)$ многочлена $W(x)$ уравнения (2) и (3), взятые вместе с уравнением

$$W'(x) = 0,$$

имеют решение в том и только в том случае, если равно нулю выражение $B(w', u_0, \ldots, u_{d-1})$. Следовательно, $B(w, u_0, \ldots, u_{d-1})$

является u_0-результантом уравнений (2) и уравнений

$$\sum_{j=0}^{n} u_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, d-1), \qquad W(x) = 0.$$

Таким образом (том II, стр. 49), $B(w, u_0, \ldots, u_{d-1})$ — форма Кэли пересечения многообразия V с гиперповерхностью $W(x) = 0$.

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в $\mathfrak{J}$, определяющий многообразие U, и $W'(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) = W'(\xi)$ — произвольный элемент из $\mathfrak{p}$, отличный от нуля. Здесь многочлен $W'(x_0, \ldots, x_n)$ предполагается однородным. Тогда

$$B(w', u_0, \ldots, u_{d-1}) = F(u_0, \ldots, u_{d-1})\, F'(u_0, \ldots, u_{d-1}),$$

где $F(u_0, \ldots, u_{d-1})$ является формой Кэли многообразия U, а $F'(u_0, \ldots, u_{d-1})$ — также некоторая форма Кэли, именно форма Кэли многообразия, состоящего из остальных компонент пересечения V с гиперповерхностью $W'(x) = 0$ и, может быть, содержащего также компоненту U. Следовательно, мы имеем

$$H(u_0, \ldots, u_{d-1}) \prod_{\nu=1}^{g} W'(\xi^{(\nu)}) =$$
$$= A(u_0, \ldots, u_{d-1})\, F'(u_0, \ldots, u_{d-1})\, F(u_0, \ldots, u_{d-1}).$$

Пользуясь теперь уравнениями (2), мы можем написать

$$\prod_{\nu=2}^{g} W'(\xi^{(\nu)}) = \frac{C(u_0, \ldots, u_{d-1}, \xi^{(1)})}{C'(u_0, \ldots, u_{d-1}, \xi^{(1)})},$$

где $C(u_0, \ldots, u_{d-1}, x)$ и $C'(u_0, \ldots, u_{d-1}, x)$ — однородные относительно $x_0, \ldots, x_n$ многочлены с коэффициентами из $K[u_0, \ldots, u_{d-1}]$. Мы имеем теперь

$$H(u_0, \ldots, u_{d-1})\, C(u_0, \ldots, u_{d-1}, \xi^{(1)})\, W'(\xi^{(1)}) =$$
$$= A(u_0, \ldots, u_{d-1})\, C'(u_0, \ldots, u_{d-1}, \xi^{(1)})\, F'(u_0, \ldots, u_{d-1}) \times$$
$$\times F(u_0, \ldots, u_{d-1}).$$

Точка $\xi^{(1)}$ является общей точкой многообразия V, а

$$\sum_{j=0}^{n} u_{ij}x_j = 0$$

есть общая гиперплоскость, проходящая через эту точку. Но ξ также является общей точкой для V, причем d независимых общих гиперплоскостей, проходящих через нее, могут быть заданы уравнениями

$$\sum_{j,k} s_{jk}^{i} \xi_j x_k = 0 \quad (i = 0, \ldots, d-1),$$

где $S^0, \ldots, S^{d-1}$ — система из d кососимметрических матриц, элементы которых являются независимыми неизвестными. Следовательно,

$$H(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi)\, C(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi, \xi)\, W'(\xi) =$$
$$= A(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi)\, C'(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi, \xi)\, F'(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi) \times$$
$$\times F(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi). \qquad (4)$$

Над полем $K(S^0, \ldots, S^{d-1})$ многообразие V неприводимо (гл. X, § 5, теорема VI), причем точка x' многообразия U, являющаяся простой точкой многообразия V над полем K, будет также простой точкой V над полем $K(S^0, \ldots, S^{d-1})$. Далее,

$$\zeta = \frac{C(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi, \xi)}{C'(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi, \xi)} = \prod_{\nu=2}^{g} W'(\eta^{(\nu)}),$$

где $\xi, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(g)}$ — система из g различных точек многообразия V, лежащих в $(n-d)$-мерном пространстве

$$\sum_{j,k} s^i_{jk}\xi_j x_k = 0 \quad (i = 0, \ldots, d-1).$$

Если мы специализируем точку ξ в точку x', являющуюся точкой многообразия U, простой на V, то

$$(\xi, \eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(g)}) \to (x', y^{(2)}, \ldots, y^{(g)}),$$

где точки $x', y^{(2)}, \ldots, y^{(g)}$ все различны и не лежат на бесконечно удаленной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при $\xi \to x'$ элемент ζ имеет однозначно определенную специализацию, отличную от нуля, ибо общее $(n-d)$-мерное подпространство над полем K, проходящее через x', не пересекает гиперповерхности $W'(x) = 0$ на многообразии V нигде, кроме точки x'. В силу результата, который будет доказан позже (гл. XVIII, § 1, следствие из теоремы VII), отсюда следует, что ζ является делителем единицы в кольце частных многообразия, имеющего x' своей общей точкой. Поэтому без ограничения общности мы можем предполагать, что

$$C(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi, \xi) \text{ и } C'(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi, \xi)$$

не обращаются в нуль при специализации $\xi \to x'$ и потому не лежат в идеале $K(S^0, \ldots, S^{d-1}) \cdot \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал, соответствующий многообразию U.

Далее, многочлен $H(u_0, \ldots, u_{d-1})$ обращается в нуль только тогда, когда $(n-d)$-мерное подпространство

$$\sum_j u_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 0, \ldots, d-1)$$

пересекается с V на бесконечности. Следовательно,

$$H(S^0x', \ldots, S^{d-1}x') \neq 0,$$

и поэтому

$$H(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi) \neq 0 \quad (K(S^0, \ldots, S^{d-1}) \cdot \mathfrak{p}).$$

Мы можем теперь найти такие специализации $T^0, \ldots, T^{d-1}$ для матриц $S^0, \ldots, S^{d-1}$ в поле K, чтобы было

$$[C(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi, \xi), C'(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi, \xi), H(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi)] \to$$
$$\to [C(\xi), C'(\xi), H(\xi)],$$

где $C(\xi)$, $C'(\xi)$, $H(\xi)$ не содержатся в $\mathfrak{p}$.

Пусть $\mathfrak{i}$ — идеал, порождаемый коэффициентами выражения $F(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi)$. Тогда, как мы видели выше,

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r],$$

где $\mathfrak{q}_1$ имеет идеал $\mathfrak{p}$ своим радикалом, а компоненты $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r$ являются вложенными. Специализируя матрицы $S^0, \ldots, S^{d-1}$ в $T^0, \ldots, T^{d-1}$, выводим из (4), что

$$H(\xi) C(\xi) W'(\xi) \in \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{q}_1.$$

Так как $H(\xi)$ и $C(\xi)$ не содержатся в радикале идеала $\mathfrak{q}_1$, то мы имеем

$$W'(\xi) = 0 \quad (\mathfrak{q}_1).$$

Но $W'(\xi)$ — любой элемент из $\mathfrak{p}$. Следовательно,

$$\mathfrak{p} = 0 \quad (\mathfrak{q}_1).$$

Ввиду того, что $\mathfrak{p}$ есть радикал $\mathfrak{q}_1$, отсюда вытекает, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1$, а это и требовалось.

§ 3. Простые точки

В этом параграфе мы начнем более или менее детальное изучение свойств точек неприводимого многообразия V размерности d в пространстве S_n, определенного над основным полем K. Здесь будут рассматриваться точки, удовлетворяющие следующим условиям: (I) они рациональны над K и (II) они являются простыми точками многообразия V. В следующем параграфе полученные результаты будут обобщены на алгебраические точки. В качестве бесконечно удаленной гиперплоскости $x_0 = 0$ мы возьмем любую гиперплоскость, не проходящую через рассматриваемую точку P, и рассмотрим P как точку многообразия в аффинном пространстве A_n. Так как эта точка рациональна, то в системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ она имеет координаты $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_i $(i = 1, \ldots, n)$ — элементы поля K. Если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка многообразия V, а $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — область целостности этого многообразия, то простым идеалом, соответствующим точке P, будет $\mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cdot (\xi_1 - \alpha_1, \ldots, \xi_n - \alpha_n)$, независимо от того, является ли точка P простой или нет. Наша задача состоит в том, чтобы выразить с помощью идеала $\mathfrak{p}$ тот факт, что точка P проста.

Наши исследования упростятся надлежащим выбором допустимой системы координат в A_n. Если мы выполним преобразование координат

$$x_i' = x_i - \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

то точка P станет „началом" новой координатной системы. Мы предположим теперь, что это сделано и что система координат является достаточно общей для того, чтобы было выполнено следующее условие: если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка многообразия V, то

(I) координаты $\xi_1, \ldots, \xi_d$ алгебраически независимы над K;

(II) ξ_{d+1} является примитивным элементом поля функций

$$\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

многообразия V над полем $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$;

(III) координаты $\xi_{d+1}, \ldots, \xi_n$ являются целыми над кольцом $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$;

(IV) касательное подпространство к многообразию V в точке P определяется уравнениями вида

$$x_{d+i} = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n-d);$$

(V) если

$$f(x_1, \ldots, x_{d+1}) = 0$$

— неприводимое уравнение, связывающее элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{d+1}$, то уравнение

$$f(0, \ldots, 0, x) = 0$$

имеет простые корни.

Хотя предполагать выполнение всех этих условий необходимо не везде, при рассмотрении простых точек обычно лучше всего с самого начала подготовить почву таким образом.

В § 1 мы видели, что координатную систему можно выбрать достаточно общей для того, чтобы выполнялись условия (I) — (IV). Если мы покажем, что можно выбрать систему координат достаточно общей для выполнения условия (V), то отсюда будет следовать, что она может быть выбрана и так, чтобы выполнялись условия (I) — (V) одновременно.

Для доказательства того, что выбор системы координат может быть сделан с выполнением условия (V), предположим, что

$$F(u_0, \ldots, u_d) = f(u_{ij};\ u_{00}, \ldots, u_{d0})$$

есть форма Кэли многообразия V. Она может быть разложена на множители и представлена в виде

$$F(u_0, \ldots, u_d) = A(u_1, \ldots, u_d) \prod_{\nu=1}^{q} \left(u_{00} + \sum_{i=1}^{n} u_{0i} \xi_i^{(\nu)}\right),$$

где g — порядок многообразия V, а $(\xi_1^{(\nu)}, \ldots, \xi_n^{(\nu)})$ $(\nu = 1, \ldots, g)$ — точки, в которых V пересекает $(n-d)$-мерное подпространство

$$u_{i0} + \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, d).$$

Если

$$u'_{i0} + \sum_{j=0}^{n} u'_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, d),$$

— любое $(n-d)$-мерное подпространство, имеющее с V конечное число точек пересечения, ни одна из которых не лежит на бесконечно удаленной гиперплоскости, то форма $F(u_0, u'_1, \ldots, u'_d)$ от $u_{00}, \ldots, u_{0n}$ является формой Кэли для этого пересечения.

Рассмотрим, в частности, случай, когда $u'_{i0} = 0$ $(i = 1, \ldots, d)$, а u'_{ij} $(i = 1, \ldots, d;\ j = 1, \ldots, n)$ — независимые неизвестные. Тогда $F(u_0, u'_i, \ldots, u'_d)$ является формой Кэли для пересечения V с общим $(n-d)$-мерным подпространством, проходящим через точку P. Так как точка P проста, то, как мы знаем, указанное пересечение должно состоять из взятой один раз точки P и $g-1$ общих точек $\eta^{(2)}, \ldots, \eta^{(g)}$ многообразия V, сопряженных над полем $K(u'_1, \ldots, u'_d)$ и не лежащих на бесконечно удаленной гиперплоскости (гл. XI, § 10, теоремы I и III). В таком случае мы имеем

$$f(u'_{ij};\ u_{00},\ 0, \ldots, 0) = F(u_0, u'_1, \ldots, u'_d) = A u_{00} \prod_{\nu=2}^{g} \left(u_{00} + \sum_{1}^{n} u_{0i} \eta_i^{(\nu)}\right).$$

Следовательно, уравнение

$$f(u'_{ij};\ z,\ 0, \ldots, 0) = 0$$

имеет простые корни. Кроме того, если положить

$$-\zeta_0 = \sum_{1}^{n} u_{0j} \xi_j$$

и

$$-\zeta_i = \sum_{1}^{n} u_{ij} \xi_i \qquad (i = 1, \ldots, d),$$

то уравнение

$$f(u'_{ij};\ \zeta_0, \ldots, \zeta_d) = 0$$

будет неприводимым уравнением, связывающим $\zeta_0, \ldots, \zeta_d$ (гл. X, § 6).

При специализации $u'_{ij} \to a_{ij}$ это уравнение будет иметь меньше g различных конечных корней в том и только в том случае, если элементы a_{ij} удовлетворяют конечному числу некоторых алгебраических соотношений. Изменяя наши обозначения и обозначая a_{0j} через $a_{d+1\,j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, мы заключаем, что при достаточно общих зна-

чениях a_{ij} $(i=1, \ldots, d+1;\ j=1, \ldots, n)$ неприводимое уравнение

$$f(\eta_1, \ldots, \eta_{d+1}) = 0,$$

связывающее элементы

$$-\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \qquad (i=1, \ldots, d+1),$$

будет таким, что уравнение

$$f(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ x) = 0$$

имеет g простых корней. Следовательно, если преобразование координат

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i=1, \ldots, n)$$

является достаточно общим среди преобразований, оставляющих на месте начало, то новая координатная система будет удовлетворять условию (V).

Следует заметить, что условие (V) равносильно тому, что если g — порядок многообразия V (в проективном пространстве), то $(n-d)$-мерное подпространство S'_{n-d}, определяемое уравнениями

$$x_i = 0 \qquad (i=1, \ldots, d),$$

пересекает V в g точках (одной из которых является начало), ни одна из которых не лежит на гиперплоскости $x_0 = 0$. Если бы одна из этих точек была кратной точкой многообразия V, то проходящее через нее $(n-d)$-мерное подпространство пересекало бы V либо в бесконечном множестве точек, либо менее чем в g точках. Следовательно, g точек, в которых подпространство S'_{n-d} пересекает многообразие V, являются простыми. Далее, если бы подпространство S'_{n-d} было касательным к V в одной из этих точек, то оно пересекало бы V также менее чем в g точках. Поэтому условие (V) состоит в том, что $(n-d)$-мерное подпространство

$$x_i = 0 \qquad (i=1, \ldots, d)$$

пересекает многообразие V в конечном числе g простых точек и ни в одной из этих точек не касается V.

Теорема I. *Кольцо частных простой точки целозамкнуто.*

Предположим, что система координат в пространстве A_n взята достаточно общей в описанном выше смысле. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что целое замыкание кольца $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ содержится в $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — простой идеал, соответствующий рассматриваемой точке (гл. XV, § 8, теорема IV). Пусть ζ — любой элемент поля частных кольца $\mathfrak{J}$, целый над $\mathfrak{J}$. Так как элементы $\xi_{d+1}, \ldots, \xi_n$ — целые над кольцом

$K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, то из теоремы II § 8 гл. XV следует, что элемент ζ является целым также над $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Но ввиду того, что ξ_{d+1} — примитивный элемент поля функций многообразия V над полем $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, из теоремы VII § 8 гл. XV следует, что

$$\zeta = \frac{r_0 + r_1\xi_{d+1} + \ldots + r_{g-1}\xi_{d+1}^{g-1}}{D^2},$$

где коэффициенты $r_0, \ldots, r_{g-1}$ лежат в $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, а D^2 — результант многочленов

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_d, x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(\xi_1, \ldots, \xi_d, x)}{\partial x},$$

где уравнение

$$f(x_1, \ldots, x_{d+1}) = 0$$

является неприводимым уравнением, связывающим $\xi_1, \ldots, \xi_{d+1}$. В силу условия (V) для нашей координатной системы, отсюда следует, что $D^2 \neq 0$ ($\mathfrak{p}$), а значит, $\zeta \in \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Следовательно, целое замыкание кольца $\mathfrak{J}$ содержится в $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, и поэтому кольцо $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто.

Необходимо указать здесь, что кольцо частных точки может быть целозамкнутым и в том случае, если точка не будет простой. Рассмотрим, например, поверхность в пространстве A_3, определяемую уравнением

$$x_2x_3 = x_1^2.$$

Легко проверить непосредственно, что начало координат здесь не является простой точкой. Мы покажем, однако, что его кольцо частных целозамкнуто, доказав, что кольцо $\mathfrak{J}$ нашей поверхности целозамкнуто, и применив теорему V § 8 гл. XV.

Точка $(u, v, u^2/v)$, где u и v — независимые неизвестные над основным полем K, является общей точкой рассматриваемой поверхности. Поэтому

$$\mathfrak{J} = K[u, v, u^2/v],$$

и любой элемент из $\mathfrak{J}$ имеет вид $\sum a_{ij}u^iv^j$, где a_{ij} — элементы поля K и $i \geqslant 0$, $i + 2j \geqslant 0$. Обратно, покажем, что если $i \geqslant 0$ и $i + 2j \geqslant 0$, то произведение $u^iv^j \in \mathfrak{J}$. Если $j \geqslant 0$, то это очевидно; если же $j = -k < 0$, то мы имеем

$$u^iv^j = u^i/v^k = u^{2k}u^{i-2k}/v^k = u^{i+2j}(u^2/v)^k \in \mathfrak{J}.$$

Очевидно, что полем частных кольца $\mathfrak{J}$ является поле $K(u, v)$. Пусть элемент этого поля

$$\zeta = \frac{p(u, v)}{q(u, v)} = \frac{p}{q},$$

где $p = p(u, v)$ и $q = q(u, v)$ — многочлены от u и v, не имеющие общих множителей, является целым относительно $\mathfrak{J}$. Тогда справедливо равенство

$$\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где $a_i \in \mathfrak{J}$, а значит, $a_i = b_i/v^{k_i}$, где $b_i \in K[u, v]$. Следовательно, найдется целое число k, такое, что элемент $v^k\zeta$ будет целым над $K[u, v]$. Отсюда вытекает, что $v^k\zeta$ содержится в $K[u, v]$ (гл. XV, § 8, теорема VI). Поэтому

$$\zeta = \sum a_{ij} u^i v^j \qquad (i \geqslant 0),$$

где $a_{ij} \in K$. Так как элемент ζ — целый относительно $\mathfrak{J}$, то элемент $\sum a_{ij}\alpha^i\beta^j t^{i+2j}$ является целым относительно кольца $K[\alpha t, \beta t^2, \alpha^2/\beta] = K[t]$, где α и β — отличные от нуля элементы из K. Но, в силу теоремы VI § 8 гл. XV, кольцо $K[t]$ целозамкнуто. Следовательно, для каждого члена суммы $\sum a_{ij}\alpha^i\beta^j t^{i+2j}$ выполняется неравенство $i + 2j \geqslant 0$, и поэтому, в силу сказанного выше относительно вида элементов из $\mathfrak{J}$, ζ содержится в $\mathfrak{J}$. Таким образом, кольцо $\mathfrak{J}$ целозамкнуто.

Рассмотрим теперь некоторые свойства простой точки многообразия, которые позволят характеризовать простые точки посредством их колец частных. Ввиду того, что понятие кольца частных является проективным понятием, полученная при этом характеристика простой точки будет проективной. Будем предполагать, что точка P определяется простым идеалом $\mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и что координатная система является достаточно общей в указанном выше смысле. Тогда уравнения касательного подпространства в точке P могут быть записаны в виде

$$x_{d+i} = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n-d),$$

и поэтому среди уравнений многообразия V можно найти $n-d$ уравнений, имеющих вид

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_{d+i} - \sum_{j=1}^{d} a_{ij} x_j - f_i^*(x_1, \ldots, x_n) = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n-d),$$

где многочлены $f_i^*(x_1, \ldots, x_n)$ не содержат членов ниже второй степени. Так как

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-d),$$

то мы имеем

$$\xi_{d+i} = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\xi_j + f_i^*(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

т. е.

$$\xi_{d+i} = \sum_{j=1}^{d} a_{ij}\xi_j \quad (\mathfrak{p}^2) \qquad (i = 1, \ldots, n-d). \tag{1}$$

Если ω — любой элемент из $\mathfrak{J}$, то

$$\omega = a + \sum_1^n a_i \xi_i + f^*(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

где в многочлене $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ все члены имеют степени $\geqslant 2$. Следовательно, $f^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{p}^2$, а поэтому, ввиду (1),

$$\omega = a + \sum_1^d a_i' \xi_i \quad (\mathfrak{p}^2),$$

где a, a_1', $\ldots$, a_d' — элементы поля K, причем $a = 0$ тогда и только тогда, когда ω принадлежит $\mathfrak{p}$.

Наоборот, предположим, что существуют d' элементов $\zeta_1, \ldots, \zeta_{d'}$ идеала $\mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ некоторой точки P на многообразии V, такие, что любой элемент ω из $\mathfrak{J}$ удовлетворяет соотношению

$$\omega = a + \sum_1^{d'} a_i \zeta_i \quad (\mathfrak{p}^2),$$

где коэффициенты a, a_i принадлежат K. Мы покажем, что $d' \geqslant d$ и что если $d' = d$, то точка P проста. Так как элементы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ содержатся в $\mathfrak{p}$, то

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{d'} b_{ij} \zeta_j \quad (\mathfrak{p}^2) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $b_{ij} \in K$. Ранг d'' матрицы (b_{ij}) не превосходит d'. Поэтому мы получаем $n - d'' \geqslant n - d'$ линейно независимых уравнений

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \xi_j = 0 \quad (\mathfrak{p}^2).$$

Теперь можно построить многочлены

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + \varphi_i^*(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\varphi_i^*(x_1, \ldots, x_n)$ не содержат членов, степени которых меньше 2, обращающиеся в нуль в точке ξ, а значит, и на многообразии V. Следовательно, если

$$f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

— базис для уравнений многообразия V, то ранг матрицы

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

в точке P не меньше $n-d''$. Так как многообразие V имеет размерность d, а точка P лежит на V, то ранг этой матрицы не больше $n-d$ (гл. X, § 14, теорема I). Поэтому

$$d' \geqslant d'' \geqslant d.$$

Если $d'=d$, то и $d''=d$, и поэтому многообразие V имеет в точке P касательное подпространство. Но в таком случае P является простой точкой V.

Если $\mathfrak{p}$ есть простой идеал некоторой точки многообразия V и если существует система d элементов $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ из $\mathfrak{p}$, такая, что любой элемент ω из $\mathfrak{J}$ удовлетворяет соотношению

$$\omega = a + \sum_1^d a_i\zeta_i \quad (\mathfrak{p}^2),$$

говорят, что многообразие имеет *униформизирующие параметры* в точке P, а сами $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ называются униформизирующими параметрами в этой точке. Таким образом, справедлива

Теорема II. *Для того чтобы точка P являлась простой точкой многообразия V, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала система униформизирующих параметров.*

Отметим, что если координатная система является достаточно общей и имеет начало в точке P, то координаты $\xi_1, \ldots, \xi_d$ будут униформизирующими параметрами в P. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — любая другая система униформизирующих параметров в точке P. Тогда, так как обе системы $\xi_1, \ldots, \xi_d$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ являются системами параметров и поэтому лежат в $\mathfrak{p}$, то мы имеем соотношения

$$\zeta_i = \sum_1^d a_{ij}\xi_j \quad (\mathfrak{p}^2) \qquad (i=1, \ldots, d)$$

и

$$\xi_i = \sum_1^d b_{ij}\zeta_j \quad (\mathfrak{p}^2) \qquad (i=1, \ldots, d),$$

где коэффициенты a_{ij} и b_{ij} принадлежат полю K. Следовательно,

$$\xi_i = \sum_j \sum_k b_{ij}a_{jk}\xi_k \quad (\mathfrak{p}^2).$$

Если произведение матриц (b_{ij}) и (a_{jk}) не являлось бы единичной матрицей, то отсюда следовало бы, что существует соотношение

$$\sum_1^d a_i\xi_i = 0 \quad (\mathfrak{p}^2),$$

в котором $a_1, \ldots, a_d$ — элементы из K, не равные нулю одновременно. Если $a_k \neq 0$, то мы можем без ограничения общности считать

его равным единице. Если ω — любой элемент из $\mathfrak{J}$, то мы имели бы соотношение

$$\omega = b + \sum_1^d b_i \xi_i = b + \sum_1^d (b_i - b_k a_i)\,\xi_i \quad (\mathfrak{p}^2),$$

а поэтому любой элемент из $\mathfrak{J}$ был бы сравним по модулю $\mathfrak{p}^2$ с некоторой линейной комбинацией $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_d$, что, как мы знаем, невозможно. Следовательно, произведение $(b_{ij})(a_{jk})$ является единичной матрицей, а значит, (a_{ij}) — невырожденная матрица.

Обратно, если (c_{ij}) — невырожденная матрица порядка d, а $\tau_1, \ldots, \tau_d$ — элементы из $\mathfrak{p}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\tau_i = \sum_{j=1}^d c_{ij}\xi_j \quad (\mathfrak{p}^2),$$

то эти уравнения можно разрешить относительно ξ_j и записать

$$\xi_i = \sum_1^d d_{ij}\tau_j \quad (\mathfrak{p}^2).$$

Отсюда непосредственно следует, что элементы $\tau_1, \ldots, \tau_d$ являются униформизирующими параметрами. Таким образом, мы нашли, как по одной системе униформизирующих параметров в точке P получить любую другую систему.

Теорема III. *Если P — простая точка неприводимого многообразия V размерности d, определяемая простым идеалом $\mathfrak{p}$ области целостности $\mathfrak{J}$ многообразия V, и $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — униформизирующие параметры в точке P, то $\mathfrak{p}$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i} = \mathfrak{J} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$. Обратно, если P — некоторая точка многообразия V, определяемая простым идеалом $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}$, и если существуют элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ из $\mathfrak{p}$, такие, что $\mathfrak{p}$ является изолированной компонентой идеала*

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{J} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d),$$

то P — простая точка многообразия V, а $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — униформизирующие параметры в этой точке.

Рассмотрим прежде всего случай, когда P есть простая точка, а $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — униформизирующие параметры в точке P. Воспользуемся леммой, доказанной в конце § 2 гл. XV. Пусть ω — любой элемент из $\mathfrak{p}$. Мы имеем соотношение

$$\omega = \sum_1^d a_i \zeta_i \quad (\mathfrak{p}^2),$$

где $a_1, \ldots, a_d$ — элементы поля K. Следовательно,

$$\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{i}, \mathfrak{p}^2).$$

Пусть

$$\mathfrak{i} = [q_1, \ldots, q_r]$$

есть представление идеала $\mathfrak{i}$ несократимым пересечением примарных идеалов, причем $\mathfrak{p}_i$ — радикалы идеалов $\mathfrak{q}_i$. Так как $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{q}_i$, то $(\mathfrak{i}, \mathfrak{p}^2) \subseteq (\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}^2)$, а значит,

$$\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{i}, \mathfrak{p}^2) \subseteq [(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}^2), \ldots, (\mathfrak{q}_r, \mathfrak{p}^2)].$$

Ввиду того, что $\mathfrak{p}$ является максимальным идеалом кольца $\mathfrak{J}$, идеал в правой части этого соотношения либо будет равен $\mathfrak{p}$, либо будет единичным идеалом. Но единичным идеалом он может быть лишь в том случае, если идеалы $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}^2)$ являются единичными идеалами при $i = 1, \ldots, r$, а значит, в силу упомянутой леммы, только в том случае, если $\mathfrak{p}_i$ не содержится в $\mathfrak{p}$ при всех значениях i. Допустим, что это условие выполнено. Если η_i — элемент идеала $\mathfrak{p}_i$, не лежащий в $\mathfrak{p}$, а σ_i — индекс идеала $\mathfrak{q}_i$, то произведение $\eta_1^{\sigma_1} \ldots \eta_r^{\sigma_r}$ принадлежит идеалу $\mathfrak{i}$ и не принадлежит $\mathfrak{p}$. Но так как $\zeta_i \in \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{p}$, и мы получаем противоречие. Следовательно,

$$\mathfrak{p} = [(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{p}^2), \ldots, (\mathfrak{q}_r, \mathfrak{p}^2)].$$

Применяя лемму еще раз, получаем, что идеал $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{p}^2)$ является $\mathfrak{p}$-примарным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$, и равен $\mathfrak{p}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}$. Так как идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ различны, то один из $\mathfrak{q}_i$, например $\mathfrak{q}_1$, должен быть равен $\mathfrak{p}$, а для остальных компонент идеала $\mathfrak{i}$ идеалы $(\mathfrak{q}_j, \mathfrak{p}^2)$ должны быть единичными, т. е. $\mathfrak{q}_j$ не должны содержаться в $\mathfrak{p}$. Следовательно,

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r],$$

т. е. $\mathfrak{p}$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}$.

Можно заметить попутно, что в случае, когда основное поле K алгебраически замкнуто, различные компоненты идеала

$$\mathfrak{J} \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_d)$$

определяют g точек, в которых подпространство S_{n-d}, определяемое уравнениями $x_1 = \ldots = x_d = 0$, пересекает многообразие V. Ввиду ограничения (5), наложенного на нашу координатную систему, все эти точки являются простыми точками многообразия V, а элементы $\xi_1, \ldots, \xi_d$ являются униформизирующими параметрами в каждой из них. Отсюда мы заключаем, что в этом случае $r = g$, а идеалы $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_g$ просты и определяют остальные $g - 1$ точек пересечения S_{n-d} и V.

Возвращаясь к доказательству теоремы, допустим теперь, что идеал $\mathfrak{p}$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i} = \mathfrak{J} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$, т. е.

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r].$$

Если ω — любой элемент из $\mathfrak{J}$, то мы имеем

$$\omega = a + \sum_1^n a_i \xi_i + \text{ члены высшего порядка,}$$

где a, $a_1, \ldots, a_n$ — элементы K. Так как $\xi_i \in \mathfrak{p}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $(\omega - a) \in \mathfrak{p}$. Следовательно, для каждого элемента ω из $\mathfrak{J}$ существует такой элемент a из K, для которого

$$\omega = a \quad (\mathfrak{p}).$$

Элемент a равен нулю тогда и только тогда, когда $\omega \in \mathfrak{p}$.

Так как идеал $\mathfrak{p}$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}$, то в $\mathfrak{J}$ найдется элемент α, лежащий в $[\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r]$, но не лежащий в $\mathfrak{p}$. Пусть ω — любой элемент из $\mathfrak{J}$, причем

$$\omega = a \quad (\mathfrak{p}).$$

Тогда $\alpha(\omega - a)$ лежит в $\mathfrak{p}$ и в $[\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r]$, а значит, и в $\mathfrak{i}$. Поэтому в $\mathfrak{J}$ найдутся элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, такие, что

$$\alpha(\omega - a) = \sum_1^d \alpha_i \zeta_i.$$

Положим

$$\alpha = c \quad (\mathfrak{p})$$

и

$$\alpha_i = c_i \quad (\mathfrak{p}) \quad (i = 1, \ldots, d),$$

где c, $c_1, \ldots, c_d$ — элементы поля K. Так как α не лежит в $\mathfrak{p}$, то c отличен от нуля. Если $a_i = c_i/c$, то мы заключаем, что

$$\omega = a + \sum_1^d a_i \zeta_i \quad (\mathfrak{p}^2),$$

а значит, элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ являются униформизирующими параметрами точки P. Поэтому точка P является простой.

В случае, когда элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ являются униформизирующими параметрами в простой точке P, перейдем теперь к кольцу частных $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ этой точки. Если $\mathfrak{i} = \mathfrak{J} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$, то мы имеем

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_r],$$

где идеалы $\mathfrak{q}_i$ не содержатся в $\mathfrak{p}$. Следовательно (гл. XV, § 5, теорема IX),

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p},$$

т. е. идеалом, состоящим из элементов кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, не являющихся делителями единицы, служит идеал $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$.

Обратно, пусть кольцо частных $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ некоторой точки многообразия V имеет то свойство, что его (единственный) максимальный идеал

имеет базис, состоящий из d элементов $\omega_1, \ldots, \omega_d$. Мы можем написать

$$\omega_i = \zeta_i/\zeta_0,$$

где $\zeta_0, \ldots, \zeta_d$ — элементы $\mathfrak{J}$, причем ζ_0 не содержится в $\mathfrak{p}$ и поэтому является делителем единицы кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Отсюда следует, что элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ составляют базис максимального идеала кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Этим идеалом будет

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d).$$

Допустим, что

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{J} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = [q_1, \ldots, q_r].$$

В силу равенства

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i},$$

из теоремы IX § 5 гл. XV вытекает, что один из идеалов q_i, скажем q_1, равен $\mathfrak{p}$, а при $i > 1$

$$q_i \neq 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Следовательно, $\mathfrak{p}$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}$. Поэтому, в силу теоремы III, точка P является простой точкой многообразия V, а элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — униформизирующими параметрами многообразия V в точке P. Таким образом, доказана

Теорема IV. *Для того чтобы точка P многообразия V была простой точкой, необходимо и достаточно, чтобы максимальный идеал ее кольца частных обладал базисом, состоящим из d элементов (d — размерность V). Если $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — базис указанного идеала, состоящий из элементов кольца $\mathfrak{J}$, то элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ являются униформизирующими параметрами в точке P.*

Можно отметить еще, что если P — *любая* рациональная точка многообразия V, а $\zeta_1, \ldots, \zeta_{d'}$ — базис максимального идеала ее кольца частных, то $d' \geqslant d$. Действительно, если

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_{d'}),$$

то мы можем, как и выше, предполагать, что $\zeta_1, \ldots, \zeta_{d'}$ являются элементами $\mathfrak{J}$. В таком случае $\mathfrak{p}$ будет изолированной компонентой идеала $\mathfrak{J} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_{d'})$. Вторая часть доказательства теоремы III показывает, что если ω — любой элемент из $\mathfrak{J}$, то

$$\omega = a + \sum_1^{d'} a_i \zeta_i \quad (\mathfrak{p}^2),$$

а значит, как мы уже видели, должно быть $d' \geqslant d$.

Следующий результат, который мы сейчас докажем, поясняет термин „униформизирующие параметры“. Рассмотрим простую точку P неприводимого многообразия V размерности d; как обычно, будем пользоваться достаточно общей координатной системой с началом

в точке P. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — неоднородные координаты общей точки многообразия V.

Теорема V. *Пусть P — простая точка многообразия V, определяемая простым идеалом $\mathfrak{p}$ области целостности $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, и пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — базис максимального идеала кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Для произвольно заданного элемента ω из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ существует однозначно определенная последовательность $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$, общий член ψ_m которой является однородным многочленом степени m относительно $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ с коэффициентами из K, такая, что*

$$\omega - \sum_0^{m-1} \psi_i \in (\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p})^m \quad \text{при} \quad m = 1, 2, \ldots$$

Кроме того, отображение

$$\omega \to \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \ldots$$

элементов кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ в кольцо формальных степенных рядов $K\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$ от неизвестных $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ является изоморфным отображением $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ на подкольцо кольца $K\{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$.

Мы начнем с доказательства первой части теоремы в случае, когда:

(I) $\zeta_i = \xi_i \quad (i = 1, \ldots, d)$;

(II) ω содержится в $\mathfrak{J}$.

В этом случае в формулировке теоремы мы заменим идеал $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$ на $\mathfrak{p}$.

Существование константы ψ_0 и ее единственность уже были доказаны. Существование ψ_1 также было доказано. Доказательство же единственности является легким упражнением.

Предположим справедливость теоремы при $m - 1$ и докажем, что ее утверждение остается верным для m. Допустим, что существуют однозначно определенные многочлены $\psi_0, \ldots, \psi_{m-1}$, такие, что

$$\omega = \psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_{i-1} \qquad (\mathfrak{p}^i) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Построим теперь ψ_m и докажем его единственность. Так как

$$\omega - \sum_0^{m-1} \psi_i = 0 \quad (\mathfrak{p}^m),$$

то существуют элементы $\alpha_{i_1 \ldots i_n}$ из $\mathfrak{J}$, в которых $i_1, \ldots, i_n$ принимают любые неотрицательные значения, подчиненные условию

$$i_1 + \ldots + i_n = m$$

и такие, что

$$\omega - \sum_0^{m-1} \psi_i = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_n} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n}.$$

В силу уже доказанного утверждения теоремы при $m = 0$, мы знаем, что существуют такие элементы $a_{i_1 \dots i_n}$ из K, что

$$\alpha_{i_1 \dots i_n} = a_{i_1 \dots i_n} \quad (\mathfrak{p}).$$

Следовательно,

$$\omega - \sum_0^{m-1} \psi_i = \sum a_{i_1 \dots i_n} \xi_1^{i_1} \dots \xi_n^{i_n} \quad (\mathfrak{p}^{m+1}), \tag{2}$$

ибо $\xi_i \in \mathfrak{p}$. Кроме того, существуют такие константы a_{ij}, что

$$\xi_{d+i} = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} \xi_j \quad (\mathfrak{p}^2) \qquad (i = 1, \dots, n-d).$$

Подставляя правые части в (2), мы получаем соотношение

$$\omega - \sum_0^{m-1} \psi_i = \sum b_{i_1 \dots i_d} \xi_1^{i_1} \dots \xi_d^{i_d} \quad (\mathfrak{p}^{m+1}),$$

в котором $b_{i_1 \dots i_d}$ — элементы из K, а суммирование производится по неотрицательным значениям $i_1, \dots, i_d$, для которых

$$i_1 + \dots + i_d = m.$$

Если положить

$$\psi_m = \sum b_{i_1 \dots i_d} \xi_1^{i_1} \dots \xi_d^{i_d},$$

то ясно, что

$$\omega = \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_m \quad (\mathfrak{p}^{m+1}).$$

Остается теперь доказать единственность ψ_m. Предположим, что существует другой однородный многочлен ψ'_m степени m, такой, что

$$\omega = \psi_0 + \dots + \psi_{m-1} + \psi'_m \quad (\mathfrak{p}^{m+1}).$$

Тогда разность $\chi(\xi_1, \dots, \xi_d) = \psi_m - \psi'_m$ является однородным многочленом степени m от $\xi_1, \dots, \xi_d$, принадлежащим идеалу $\mathfrak{p}^{m+1}$.

Пусть $\mathfrak{J} \cdot (\xi_1, \dots, \xi_d) = \mathfrak{i} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_r]$. Мы видели, что в действительности идеалы $\mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_r$ являются простыми идеалами нульмерных многообразий, отличных от точки P, в которых $(n-d)$-мерное подпространство

$$x_1 = \dots = x_d = 0$$

пересекает многообразие V. Отсюда следует, что все они будут максимальными идеалами кольца $\mathfrak{J}$. Поэтому идеалы $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_j)$ и $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_i)$ являются единичными, а значит, $\mathfrak{i} = \mathfrak{p}\mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_r$ (гл. XV, § 1, теорема IV, следствие I). В таком случае

$$\chi(\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathfrak{p}^m \mathfrak{q}_2^m \dots \mathfrak{q}_r^m.$$

Но, по предположению, $\chi \in \mathfrak{p}^{m+1}$. Следовательно, $\chi \in \mathfrak{p}^{m+1}\mathfrak{q}_2^m \dots \mathfrak{q}_r^m = \mathfrak{p}\mathfrak{i}^m$. Поэтому

$$\chi = \sum_i \gamma_{i_1 \dots i_d} \xi_1^{i_1} \dots \xi_d^{i_d},$$

где суммирование производится по всем значениям $i_1, \dots, i_d$, сумма которых равна m, и $\gamma_{i_1 \dots i_d} \in \mathfrak{p}$. Так как элементы $\xi_{d+1}, \dots, \xi_n$ — целые над кольцом $K[\xi_1, \dots, \xi_d]$, то и все элементы из $\mathfrak{J}$ являются целыми над этим кольцом, и поэтому $\gamma_{i_1 \dots i_d}$ должны быть целыми над $K[\xi_1, \dots, \xi_d]$. Эти элементы принадлежат некоторому алгебраическому расширению поля $K(\xi_1, \dots, \xi_d)$, и их сопряженные элементы

$$\gamma^{(1)}_{i_1 \dots i_d} = \gamma_{i_1 \dots i_d}, \quad \gamma^{(2)}_{i_1 \dots i_d}, \quad \dots, \quad \gamma^{(g)}_{i_1 \dots i_d}$$

(над указанным полем) также являются целыми над кольцом $K[\xi_1, \dots, \xi_d]$. Поэтому выражение $\Phi = \prod_{\nu=1}^{g} \sum \gamma^{(\nu)}_{i_1 \dots i_d} \xi_1^{i_1} \dots \xi_d^{i_d}$ будет многочленом степени mg относительно $\xi_1, \dots, \xi_d$, коэффициенты которого являются целыми относительно $K[\xi_1, \dots, \xi_d]$. Но эти коэффициенты являются симметрическими функциями от корней алгебраического уравнения над полем $K(\xi_1, \dots, \xi_d)$, имеющим характеристику нуль. Поэтому они лежат в этом поле. Кроме того, кольцо $K[\xi_1, \dots, \xi_d]$ целозамкнуто в поле $K(\xi_1, \dots, \xi_d)$, так как элементы $\xi_1, \dots, \xi_d$ алгебраически независимы над K (гл. XV, § 8, теорема VI). Поэтому Φ будет многочленом степени mg от $\xi_1, \dots, \xi_d$, имеющим коэффициенты из $K[\xi_1, \dots, \xi_d]$. Более того, эти коэффициенты принадлежат идеалу $\mathfrak{i}$, так как $\gamma^{(1)}_{i_1 \dots i_d} = 0 \ (\mathfrak{p})$. Поэтому Φ является многочленом от $\xi_1, \dots, \xi_d$, не содержащим членов со степенями, меньшими $mg+1$. Но так как

$$\sum \gamma_{i_1 \dots i_d} \xi_1^{i_1} \dots \xi_d^{i_d} = \chi(\xi_1, \dots, \xi_d),$$

то мы имеем, беря сопряженные над полем $K(\xi_1, \dots, \xi_d)$,

$$\sum \gamma^{(\nu)}_{i_1 \dots i_d} \xi_1^{i_1} \dots \xi_d^{i_d} = \chi(\xi_1, \dots, \xi_d) \qquad (\nu = 1, \dots, g),$$

а значит,

$$\Phi = [\chi(\xi_1, \dots, \xi_d)]^g.$$

Так как $\chi(\xi_1, \dots, \xi_d)$ имеет точно степень m, а Φ — многочлен от $\xi_1, \dots, \xi_d$, не содержащий членов меньшей степени, чем $mg+1$, написанное выше соотношение может быть тождеством лишь в случае, если Φ и χ оба равны нулю. Но элементы $\xi_1, \dots, \xi_d$ алгебраически независимы над K. Поэтому $\chi(\xi_1, \dots, \xi_d) \equiv 0$. Этим доказана единственность многочлена ψ_m.

Пусть теперь ω и ν — два элемента из $\mathfrak{J}$, и пусть $\psi_0, \psi_1, \dots$ и $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — последовательности, полученные описанным выше

способом для этих элементов. В таком случае из соотношений

$$\omega = \psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_{m-1} \quad (\mathfrak{p}^m)$$

и

$$\nu = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{m-1} \quad (\mathfrak{p}^m)$$

следует, что

$$\omega + \nu = (\psi_0 + \varphi_0) + (\psi_1 + \varphi_1) + \ldots + (\psi_{m-1} + \varphi_{m-1}) \quad (\mathfrak{p}^m).$$

Так как каждый многочлен $\psi_i + \varphi_i$ однороден и имеет степень i относительно $\xi_1, \ldots, \xi_d$, то последовательность $\psi_0 + \varphi_0$, $\psi_1 + \varphi_1$, ... соответствует элементу $\omega + \nu$. Далее,

$$\omega\nu = \psi_0\varphi_0 + (\psi_0\varphi_1 + \psi_1\varphi_0) + \ldots + \psi_{m-1}\varphi_{m-1} \quad (\mathfrak{p}^m).$$

Каждое произведение $\psi_i\varphi_j$ является однородным многочленом степени $i+j$ от $\xi_1, \ldots, \xi_d$ и потому лежит в $\mathfrak{p}^m$ при $i+j \geqslant m$. Поэтому, если мы положим

$$\theta_i = \psi_0\varphi_i + \psi_1\varphi_{i-1} + \ldots + \psi_i\varphi_0,$$

то будем иметь

$$\omega\nu = \theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_{m-1} \quad (\mathfrak{p}^m).$$

Но так как θ_i есть однородный многочлен степени i от $\xi_1, \ldots, \xi_d$, то последовательность $\theta_0, \theta_1, \ldots$ будет последовательностью, соответствующей элементу $\omega\nu$.

Обозначим через $K\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ кольцо всех формальных степенных рядов от $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Поставим в соответствие каждому элементу ω из $\mathfrak{J}$ элемент

$$\bar{\omega} = \psi_0 + \psi_1 + \ldots$$

из $K\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$, в котором последовательность $\psi_0, \psi_1, \ldots$ получается из ω, как указано выше. Только что установленный результат означает, что если элементы ω и ν отображаются указанным способом на $\bar{\omega}$ и $\bar{\nu}$, то $\omega + \nu$ и $\omega\nu$ отображаются на $\bar{\omega} + \bar{\nu}$ и $\bar{\omega}\bar{\nu}$. Отсюда вытекает, что построенное отображение является гомоморфизмом. Оно будет изоморфизмом в том и только в том случае, если единственным элементом из $\mathfrak{J}$, отображающимся на нуль, будет $\omega = 0$. Но если ω отображается на нуль, то последовательность $\psi_0, \psi_1, \ldots$ должна состоять только из нулей. Следовательно,

$$\omega = 0 \quad (\mathfrak{p}^m) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Но, в силу теоремы X § 2 гл. XV, единственным элементом, принадлежащим всем идеалам $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^2, \ldots$, является нуль. Поэтому ω отображается на нуль кольца $K\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ лишь в том случае, если $\omega = 0$, а значит, наше отображение является изоморфизмом. Образы элементов из $\mathfrak{J}$ составляют некоторое подкольцо $\mathbf{R}$ кольца $K\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$, изоморфное $\mathfrak{J}$.

Элементы кольца $K\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$, не содержащие свободного члена, как легко проверить, образуют простой идеал Π этого кольца. По-

этому пересечение $\pi = \mathbf{R} \cap \mathbf{\Pi}$ является простым идеалом кольца $\mathbf{R}$ (гл. XV, § 4, теорема III). Элемент ω из $\mathfrak{J}$ отображается на элемент идеала π тогда и только тогда, когда

$$\omega = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Поэтому π является образом идеала $\mathfrak{p}$ при изоморфизме колец $\mathfrak{J}$ и $\mathbf{R}$. Поэтому кольцо $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ изоморфно кольцу $\mathbf{R}_\pi$. Но, в силу элементарного свойства формальных степенных рядов, элемент $\bar{\omega}$ из $K\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$, не принадлежащий $\mathbf{\Pi}$, имеет в кольце $K\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ обратный элемент. Поэтому кольцо $\mathbf{R}_\pi$ будет подкольцом $\mathbf{R}^*$ кольца $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, содержащим $\mathbf{R}$, так что существует изоморфное отображение кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ на некоторое подкольцо $\mathbf{R}^*$ кольца $K\{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$. Если ω — любой элемент из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, а

$$\bar{\omega} = \omega_0 + \omega_1 + \ldots$$

— его образ в $\mathbf{R}^*$, то разность $\omega - \sum_0^{m-1} \omega_i$ отображается на степенной ряд $\omega_m + \omega_{m+1} + \ldots$, содержащийся в $\mathbf{\Pi}^m$. Но так как эта разность содержится в $\mathbf{R}^*$, то она содержится также в

$$\mathbf{R}^* \cap \mathbf{\Pi}^m = (\mathbf{R}^* \cap \mathbf{\Pi})^m = (\mathbf{R}_\pi \cdot \pi)^m.$$

Следовательно,

$$\omega - \sum_0^{m-1} \omega_i \in (\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p})^m.$$

Таким образом, последовательность $\omega_0, \omega_1, \ldots$ будет соответствовать элементу ω в смысле, указанном в формулировке нашей теоремы. Единственность этой последовательности является непосредственным следствием единственности последовательности, соответствующей произвольному элементу из $\mathfrak{J}$.

Пусть, наконец, $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — любой базис максимального идеала кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Тогда, как мы видели, можно написать

$$\zeta_i = \eta_i / \eta_0,$$

где $\eta_0, \ldots, \eta_d$ — элементы из $\mathfrak{J}$, причем $\eta_0 \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p})$ и $\eta_1, \ldots, \eta_d$ — униформизирующие параметры в точке P. Поэтому, в силу уже доказанного свойства униформизирующих параметров, мы имеем

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{d} c_{ij} \xi_j \quad (\mathfrak{p}^2) \qquad (i = 1, \ldots, d),$$

где определитель $|c_{ij}| \not\equiv 0$. Если $c \not\equiv 0$ — элемент из K, удовлетворяющий условию $\eta_0 \equiv c \quad (\mathfrak{p})$, и если положить $a_{ij} = c_{ij}/c$, то мы будем иметь

$$\zeta_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} \xi_j \quad ((\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p})^2).$$

Отсюда вытекает, что если элементы ζ_i отображаются на ряды

$$\psi_{i0}+\psi_{i1}+\cdots \tag{3}$$

из $\mathbf{R}^*$, то $\psi_{i0}=0$ $(i=1,\ldots,d)$ и

$$\psi_{i1}=\sum_1^d a_{ij}\xi_j \qquad (i=1,\ldots,d),$$

где $|a_{ij}|\neq 0$. Поэтому ряды (3) могут быть обращены, так что элементы ξ_i выражаются степенными рядами от $\zeta_1,\ldots,\zeta_d$. Тем самым мы получаем изоморфное отображение кольца $\mathbf{R}^*$ на подкольцо $\mathbf{S}^*$ кольца $K\{\xi_1,\ldots,\xi_d\}$. Отсюда легко следует, что таким путем мы получаем изоморфное отображение кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ на кольцо $\mathbf{S}^*$, обладающее всеми требуемыми свойствами. Доказательство теоремы V закончено.

Другая полезная характеристика простой точки с помощью определяющего ее идеала $\mathfrak{p}$ из $\mathfrak{J}$ дается следующей теоремой:

Теорема VI. *Если P — рациональная точка многообразия V, определяемая простым идеалом $\mathfrak{p}$, то точка P проста в том и только в том случае, когда $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ является K-модулем, имеющим базис из d элементов (здесь d — размерность многообразия V).*

Предположим сначала, что точка P проста. Примем $\xi_1,\ldots,\xi_d$ за униформизирующие параметры в этой точке. Если ω — любой элемент из $\mathfrak{p}$, то мы имеем

$$\omega=\sum_1^d a_i\xi_i \quad (\mathfrak{p}^2),$$

где $a_1,\ldots,a_d$ — элементы из K. Рассмотрим теперь отображение кольца $\mathfrak{J}$ на $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}^2$. Если элементы $\omega,\ \xi_1,\ldots,\xi_d$ отображаются на $\bar{\omega},\ \bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_d$, то мы имеем

$$\bar{\omega}=\sum_1^d a_i\bar{\xi}_i,$$

т. е. элементы $\bar{\xi}_1,\ldots,\bar{\xi}_d$ составляют K-базис модуля $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$.

Предположим, наоборот, что $\bar{\zeta}_1,\ldots,\bar{\zeta}_d$ есть K-базис модуля $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$. Обозначим через $\zeta_1,\ldots,\zeta_d$ элементы кольца $\mathfrak{J}$, отображающиеся на элементы $\bar{\zeta}_1,\ldots,\bar{\zeta}_d$. Если ω — любой элемент из $\mathfrak{J}$, то найдется такой элемент a из K, для которого $(\omega-a)\in\mathfrak{p}$. Пусть элемент из $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$, соответствующий разности $\omega-a$, имеет вид $\sum_1^d a_i\bar{\zeta}_i$. Тогда

$$\omega=a+a_1\zeta_1+\ldots+a_d\zeta_d \quad (\mathfrak{p}^2),$$

и поэтому элементы $\zeta_1,\ldots,\zeta_d$ являются униформизирующими параметрами в точке P. Следовательно, P есть простая точка.

Мы уже видели выше, что ни для одной точки P, простой или нет, нельзя найти систему из d' элементов $\eta_1, \ldots, \eta_{d'}$ $(d' < d)$, такую, что любой элемент ω из $\mathfrak{J}$ удовлетворяет некоторому соотношению

$$\omega = a + \sum_1^{d'} a_i \eta_i \quad (\mathfrak{p}^2).$$

Отсюда следует, что модуль $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$ никогда не может иметь K-базис, состоящий менее чем из d элементов.

§ 4. Неприводимые подмногообразия многообразия V_d

Исследование, проведенное в предыдущем параграфе, относится только к простым рациональным точкам многообразия V, т. е. к точкам, неоднородные координаты которых лежат в основном поле K. Если поле K алгебраически замкнуто, то этот случай включает в себя и алгебраические точки V и достаточен для большинства приложений. Однако, если мы рассматриваем подмногообразия многообразия V, имеющие размерность, большую нуля, то оказывается естественным выводить свойства простых неприводимых многообразий размерности s на многообразии V из свойств неприводимых подмногообразий размерности нуль на некотором новом многообразии V_1, определенном над основным полем K_1, которое может не быть алгебраически замкнутым даже в том случае, когда первоначальное основное поле K алгебраически замкнуто. Это создает необходимость рассмотрения неприводимых подмногообразий размерности нуль на многообразии V, определенном над алгебраически незамкнутым основным полем. Мы начнем с обобщения результатов § 3 на многообразия размерности нуль, представляющие собой не просто точки, а системы точек, сопряженных над основным полем.

Рассмотрим снова многообразие V размерности d в аффинном пространстве A_n, неприводимое над основным полем K. Как и в § 3, оказывается удобным предполагать при нашем исследовании, что система координат в пространстве является „достаточно общей". Читатель уже достаточно привык теперь к этому термину, и мы будем в большинстве случаев оставлять ему проверку возможности такого выбора координатной системы, чтобы имели место нужные свойства достаточно общей системы координат.

Если многообразие V не является абсолютно неприводимым над K, то существует алгебраическое расширение K^* поля K, над которым V распадается на конечное число абсолютно неприводимых многообразий, имеющих каждое размерность d:

$$V = V^{(1)} + \ldots + V^{(k)}$$

(гл. X, § 11, теорема II). Алгебраическое расширение K^* поля K, обладающее указанным свойством, будет называться *полем разло-*

жения многообразия V. Легко видеть, что точка P многообразия V является простой точкой V тогда и только тогда, когда она лежит лишь на одной компоненте $V^{(i)}$ многообразия V и является простой точкой этой компоненты. Докажем это для проективного пространства. Для аффинного пространства это будет следовать отсюда непосредственно. Напомним (гл. XI, § 10, теоремы II и IV), что точка P является простой точкой на V тогда и только тогда, когда общее $(n-d)$-мерное подпространство, проходящее через P, имеет в этой точке простое пересечение с V. Если $F(u_0, \ldots, u_d)$ — форма Кэли многообразия V_d, неприводимая над K, и если

$$\sum_{j=0}^{n} v_{ij}x_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, d)$$

— общее $(n-d)$-мерное подпространство, проходящее через точку $P(x'_0, \ldots, x'_n)$, то точка P будет простой тогда и только тогда, когда сумма $\sum u_{0i}x'_i$ является простым множителем выражения $F(u_0, v_1, \ldots, v_d)$, рассматриваемого как форма от $u_{00}, \ldots, u_{0n}$. Если K^* — поле разложения многообразия V_k, то над K^* мы имеем

$$F(u_0, \ldots, u_d) = \prod_{i=1}^{k} F_i^*(u_0, \ldots, u_d),$$

где $F_i^*(u_0, \ldots, u_d)$ — (неприводимые) формы Кэли многообразий $V^{(i)}$. Отсюда следует, что сумма $\sum u_i x'_i$ является простым множителем выражения $F(u_0, v_1, \ldots, v_d)$ тогда и только тогда, когда она будет множителем только одного из выражений $F_i^*(u_0, v_1, \ldots, v_d)$ и притом множителем простым. Отсюда нужный результат следует непосредственно.

В этом параграфе важно знать, является ли подмногообразие U многообразия V состоящим целиком из точек, лежащих более чем на одной абсолютно неприводимой компоненте многообразия V. Теорема I дает ответ на этот вопрос в наиболее удобной форме. В подходящей координатной системе пространства A_n мы рассматриваем общую точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ многообразия V и полагаем, как обычно, $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. В таком случае многообразие V абсолютно неприводимо тогда и только тогда, когда все элементы поля функций $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ многообразия V, алгебраические над K, лежат в K (гл. X, § 11, теорема IV). Если V не является абсолютно неприводимым, то элементы поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, алгебраические над K, образуют конечное алгебраическое расширение поля K, называемое *алгебраическим замыканием* этого поля в $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Теорема I. *Пусть U — неприводимое подмногообразие многообразия V.* (I) *Если алгебраическое замыкание K' поля K в поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ содержится в кольце частных $Q(U)$ многообразия U, то U содержит только точки, лежащие лишь на одной абсолютно*

неприводимой компоненте многообразия V. (II) *Если подмногообразие* U *просто на* V, *то* $K' \subseteq Q(U)$.

(I) Пусть α — примитивный элемент поля K' над K. Так как $K' \subseteq Q(U)$, то мы можем записать $\alpha = a(\xi)/b(\xi)$, где $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены над K, причем $b(x)$ не обращается в нуль на U. Так как

$$a(\xi) - \alpha b(\xi) = 0,$$

то отсюда следует, что $a(x) - \alpha b(x) = 0$ на одной из компонент V^* многообразия V над полем K^*, являющимся полем разложения многообразия V и нормальным расширением K, содержащим K'. При этом $a(x) - \alpha b(x) \neq 0$ на V. Пусть теперь $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — элементы поля K^*, сопряженные с α. Тогда (гл. X, § 11) многообразие V имеет k абсолютно неприводимых компонент $V_1, \ldots, V_k$, причем на любой из них обращается в нуль одна из форм $g_i(x) = a(x) - \alpha_i b(x)$ и каждая из форм $g_i(x)$ обращается в нуль на некотором V_j. Предположим, что $g_i(x)$ обращается в нуль более чем на одной компоненте. Тогда на некоторой компоненте V_j обращаются в нуль две формы $g_p(x)$ и $g_q(x)$. Поскольку $\alpha_p \neq \alpha_q$, отсюда следует, что $b(x)$ обращается в нуль на V_j. Но так как $b(x) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ и $\dim V_j = \dim V$, то $b(x)$ обращается в нуль на V, а значит, и на U. Так как полученный вывод противоречит предположению, то каждая из форм $g_i(x)$ обращается в нуль в точности на одной компоненте V_i многообразия V.

Так как $b(x)$ не обращается в нуль на U, можно найти такую точку x' многообразия U, чтобы было $b(x') \neq 0$. Предположим, что эта точка лежит на двух компонентах V_i и V_j. Тогда

$$g_i(x') = 0, \qquad g_j(x') = 0,$$

а поэтому $b(x') = 0$, так как $\alpha_i \neq \alpha_j$. Из полученного противоречия следует, что x' может лежать лишь на одной абсолютно неприводимой компоненте многообразия V. Первая часть теоремы доказана.

(II) Пусть подмногообразие U имеет размерность s. Так как U является простым подмногообразием V, то точки из U, являющиеся кратными точками многообразия V, образуют подмногообразие многообразия U, имеющее размерность $s' < s$. Это подмногообразие содержит все точки многообразия U, лежащие более чем на одной абсолютно неприводимой компоненте многообразия V. Поэтому достаточно общее $(n-s)$-мерное подпространство пространства A_n пересекает U в конечном числе алгебраических точек, являющихся простыми точками многообразия V. Следовательно, U должно содержать систему сопряженных точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$, являющихся простыми точками V (а значит, каждая из них лежит лишь на одной абсолютно неприводимой компоненте многообразия V). Пусть U_0 — многообразие над полем K, образованное точками $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$, и пусть $\alpha \in K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — примитивный элемент поля K' над K, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — его сопряженные над K. В таком случае существуют такие многочлены $f_0(x), \ldots, f_{k-1}(x)$, что многочлен

$$f_0(x) + f_1(x)\alpha_i + \ldots + f_{k-1}(x)\alpha_i^{k-1}$$

обращается в нуль на абсолютно неприводимой компоненте V_i, но не обращается в нуль ни в одной из точек $x^{(j)}$, не лежащих на V_i. Предположим, что точка $x^{(1)}$ лежит на V_1. Тогда уравнения

$$f_0(x^{(1)}) + f_1(x^{(1)})\, z + \ldots + f_{k-1}(x^{(1)})\, z^{k-1} = 0,$$

$$\prod_{i=1}^{k} (z - \alpha_i) = 0$$

имеют общий простой корень α_1, который может быть вычислен с помощью алгоритма деления. Отсюда следует, что элемент $\alpha \in K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет при $\xi \to x^{(1)}$ однозначно определенную специализацию. Так как точка $x^{(1)}$ проста, то ее кольцо частных целозамкнуто. Отсюда, в силу результата, который будет доказан позже (гл. XVIII, § 1, теорема VII, следствие), вытекает, что $\alpha \in Q(x^{(1)})$. Так как $x^{(1)}$ является общей точкой многообразия U_0 над полем K, то отсюда следует, что $\alpha \in Q(U_0) \subseteq Q(U)$. Поэтому $K' \subseteq Q(U)$.

Заметим попутно, что в (II) достаточно предполагать только, что U содержит подмногообразие, определенное над некоторым расширением поля K, лежащее на одной компоненте многообразия V и такое, что его кольцо частных целозамкнуто. При этих условиях применим предыдущий метод получения соотношения $K' \subseteq Q(U)$. Однако и при таком обобщении полученный результат остается неполным, а теорема I дает все, что нам потребуется.

Рассмотрим теперь некоторые соотношения, относящиеся к максимальным идеалам области целостности $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ многообразия V. Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал из $\mathfrak{J}$. Он необходимо прост, так как $\mathfrak{J}$ — область целостности. $\mathfrak{p}$ является идеалом неприводимого подмногообразия U размерности нуль, лежащего на V. Поэтому U состоит из точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$, сопряженных над полем K. Рассмотрим нормальное расширение K^* поля K, являющееся полем разложения многообразия V и содержащее неоднородные координаты точек $x^{(i)}$. Кольцо $\mathfrak{J}^* = K^*[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ является областью целостности (над полем K^*) одной из абсолютно неприводимых компонент V^* многообразия V (гл. X, § 12). На многообразии U имеются точки, лежащие на любой компоненте многообразия V. Можно считать, что точки $x^{(i)}$ перенумерованы так, что $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ лежат на V^*, а $x^{(k+1)}, \ldots, x^{(r)}$ не лежат на V^*. Пусть $\mathfrak{p}_i^*$ — простые идеалы точек $x^{(i)}$ в кольце $\mathfrak{J}^*$ $(i = 1, \ldots, k)$. $\mathfrak{J}^*$ является расширением $\mathfrak{J}$. Следовательно, любой идеал кольца $\mathfrak{J}$ определяет идеал расширения в $\mathfrak{J}^*$. Докажем следующую теорему:

Теорема II. *Имеет место соотношение*

$$\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^* \ldots \mathfrak{p}_k^*.$$

Пусть

$$f_i(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

— базис уравнений многообразия U в A_n. Тогда элементы $f_i(\xi)$ $(i=1, \ldots, s)$ составляют базис идеала $\mathfrak{p}$ в кольце $\mathfrak{J}$. Эти же элементы из $\mathfrak{J}$ образуют базис идеала $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}^*$. Следовательно, многообразие на V^*, определяемое идеалом $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p}$, является пересечением V^* и многообразия, определяемого уравнениями

$$f_i(x)=0 \quad (i=1, \ldots, s).$$

Отсюда вытекает, что это многообразие состоит из точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$. Следовательно,

$$\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p} = [\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_k^*],$$

где идеалы $\mathfrak{q}_i^*$ $\mathfrak{p}_i^*$-примарны. Так как $\mathfrak{p}_i^*$ является максимальным идеалом кольца $\mathfrak{J}^*$ и так как все идеалы $\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_k^*$ различны, то при $i \neq j$ будет $(\mathfrak{q}_i^*, \mathfrak{q}_j^*) = \mathfrak{J}^*$, а значит,

$$[\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_k^*] = \mathfrak{q}_1^* \mathfrak{q}_2^* \ldots \mathfrak{q}_k^*.$$

Пусть теперь $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ — любой многочлен над K^*, такой, что $f^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{p}_i^*$ $(i=1, \ldots, k)$. Тогда $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль в точках $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$. Мы можем найти многочлен $g^*(x_1, \ldots, x_n)$, обращающийся в нуль в точках $x^{(k+1)}, \ldots, x^{(r)}$, но не обращающийся в нуль в $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$. Тогда произведение $f^*(x) \times$ $\times g^*(x)$ обращается в нуль в точках $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$. Пусть θ — примитивный элемент поля K^* над K, а $\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_t$ — сопряженные с ним элементы. Можно написать

$$f^*(x)\, g^*(x) = h_0(x) + h_1(x)\,\theta + \ldots + h_{t-1}(x)\,\theta^{t-1},$$

где $h_i(x)$ — многочлены из $K[x_1, \ldots, x_n]$. Рассмотрим автоморфизм поля K^* над K, переводящий θ в θ_i. Он переводит систему точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ в ту же систему, лишь меняя порядок точек. Следовательно, выражение

$$h_0(x) + h_1(x)\,\theta_i + \ldots + h_{t-1}(x)\,\theta_i^{t-1}$$

обращается в нуль в точках $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$. Это имеет место при $i=1, \ldots, t$. Так как определитель $|\theta_i^{j-1}|$ отличен от нуля, мы заключаем отсюда, что $h_i(x)=0$ в точках $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$ при $i=1, \ldots, t$. Следовательно, $h_i(\xi) \in \mathfrak{p}$, и поэтому

$$f^*(\xi)\, g^*(\xi) = 0 \qquad ([\mathfrak{q}_1^*, \mathfrak{q}_2^*, \ldots, \mathfrak{q}_k^*]).$$

Но мы перенумеровали точки так, что $g^*(\xi) \neq 0$ $(\mathfrak{p}_i^*)$ $(i=1, \ldots, k)$. Отсюда вытекает, что

$$f^*(\xi) = 0 \quad ([\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_k^*])$$

(гл. XV, § 2, теорема I, следствие I). Однако $f^*(\xi)$ — любой элемент идеала $[\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_k^*]$. Поэтому

$$[\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_k^*] \subseteq [\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_k^*].$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{p}_i^*$ $(i = 1, \ldots, k)$, так что

$$\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1^* \ldots \mathfrak{p}_k^*.$$

Пусть теперь $\mathfrak{Q}^*$ — область целостности, составленная из элементов поля $K^*(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, могущих быть записанными в виде α^*/β, где α^* — элемент $\mathfrak{J}^*$, а β принадлежит $\mathfrak{J}$, но не принадлежит $\mathfrak{p}$. Тогда $\mathfrak{Q}^*$ есть расширение $\mathfrak{J}$. Следовательно, любой идеал $\mathfrak{i}$ из $\mathfrak{J}$ определяет соответствующий ему идеал расширения $\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i}$ в $\mathfrak{Q}^*$. Имеет место

Теорема III. *Справедливо соотношение*

$$\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i} = (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1^*}^* \cdot \mathfrak{i}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_k^*}^* \cdot \mathfrak{i}),$$

где $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^*$ — *кольцо частных идеала* $\mathfrak{p}_h^*$ *кольца* $\mathfrak{J}^*$.

Любой элемент идеала $\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i}$ можно записать в виде $\alpha^*(\xi)/\beta(\xi)$, где $\alpha^*(x) \in K^*[x_1, \ldots, x_n]$, $\beta(x) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, причем $\alpha^*(\xi)$ содержится в $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{i}$, а $\beta(\xi)$ не содержится в $\mathfrak{p}$. Следовательно, $\beta(x)$ не обращается в нуль на U, а потому не обращается в нуль ни в одной из точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$. Поэтому $\beta(\xi) \neq 0$ $(\mathfrak{p}_h^*)$ $(h = 1, \ldots, k)$, так что $\alpha^*(\xi)/\beta(\xi)$ принадлежит $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^* \cdot \mathfrak{i}$ $(h = 1, \ldots, k)$. Поэтому

$$\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i} \subseteq (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1^*}^* \cdot \mathfrak{i}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_k^*}^* \cdot \mathfrak{i}). \tag{1}$$

Теперь мы можем найти элемент ω_h^* из $\mathfrak{p}_h^*$, не содержащийся ни в одном $\mathfrak{p}_j^*$ при $j \neq h$. Положим

$$\nu_h^* = \prod_{i \neq h} \omega_i^*.$$

Тогда

$$\nu_h^* = 0 \quad (\mathfrak{p}_i^*) \qquad (i \neq h)$$

и

$$\nu_h^* = k_h^* \neq 0 \quad (\mathfrak{p}_h^*),$$

где k_h^* — некоторый элемент из K^*. Положим $\lambda_h^* = (k_h^*)^{-1} \nu_h^*$. Тогда

$$\lambda_h^* = \delta_{hi} \quad (\mathfrak{p}_i^*),$$

где δ_{hi} — символ Кронекера. Пусть ξ^* — любой элемент, принадлежащий всем k идеалам $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^* \cdot \mathfrak{i}$ $(h = 1, \ldots, k)$. Тогда можно написать

$$\xi^* = \alpha_h^*/\beta_h^*,$$

где $\alpha_h^* \in \mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{i}$ и $\beta_h^* \neq 0 \pmod{\mathfrak{p}_h^*}$. Поэтому

$$\xi^* = \left(\sum \lambda_h^* \alpha_h^*\right) / \left(\sum \lambda_h^* \beta_h^*\right) = \alpha^*/\beta^*,$$

где $\alpha^* \in \mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{i}$ и $\beta^* \neq 0 \pmod{\mathfrak{p}_h^*}$ $(h = 1, \ldots, k)$. Идеал $\mathfrak{J}^* \cdot (\mathfrak{p}, \beta^*)$ кольца $\mathfrak{J}^*$ определяет пустое многообразие на V^*, так как определяемое им многообразие является пересечением многообразия, определяемого идеалом $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p}$, т. е. системы точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$, и многообразия, определяемого элементом β^*, где $\beta^* \neq 0 \pmod{\mathfrak{p}_h^*}$ при любом значении h. Следовательно, идеал $\mathfrak{J}^* \cdot (\mathfrak{p}, \beta^*)$ должен быть единичным идеалом кольца $\mathfrak{J}^*$. Отсюда вытекает, что должны существовать элемент η^* из $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p}$ и элемент ε^* из $\mathfrak{J}^*$, для которых

$$\eta^* + \varepsilon^* \beta^* = 1.$$

Так как элемент η^* принадлежит $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p}$, то он может быть записан в виде

$$\eta^* = \sum_{i=0}^{t-1} \eta_i \vartheta^i,$$

где ϑ — примитивный элемент поля K^* над K, а $\eta_0, \ldots, \eta_{t-1}$ принадлежат $\mathfrak{p}$. Если $\vartheta_1 = \vartheta, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_t$ — сопряженные с ϑ элементы над полем K, то все они принадлежат K^*, так как K^* есть нормальное расширение. Поэтому, если

$$\eta_j^* = \sum_{i=0}^{t-1} \eta_i \vartheta_j^i,$$

то все $\eta_1^*, \ldots, \eta_t^*$ принадлежат $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p}$ и

$$\prod_{j=1}^{t} (1 - \eta_j^*) = 1 + \zeta,$$

где ζ принадлежит $\mathfrak{p}$. Мы имеем теперь

$$\xi^* = \frac{\varepsilon^* \alpha^* \prod_2^t (1 - \eta_j^*)}{(1 - \eta^*) \prod_2^t (1 - \eta_j^*)} = \frac{\gamma^*}{1 + \zeta},$$

где $\gamma^* \in \mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{i}$ и $1 + \zeta$ принадлежит $\mathfrak{J}$, но не принадлежит $\mathfrak{p}$. Следовательно, ξ^* принадлежит идеалу $\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i}$. Поэтому

$$(\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1^*}^* \cdot \mathfrak{i}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_k^*}^* \cdot \mathfrak{i}) \subseteq \mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i}.$$

Сопоставляя это с соотношением (1), получаем утверждение теоремы III.

Следствие I. Если $\mathfrak{i}$ — единичный идеал, то он содержит единицу кольца $\mathfrak{Z}^*$. Следовательно,

$$\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{Q}^*, \quad \mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*},$$

и поэтому

$$\mathfrak{Q}^* = \mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_1^*} \cap \ldots \cap \mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_k^*}.$$

Следствие II. Если $\mathfrak{i} = \mathfrak{p}$, то

$$\mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*} \cdot [\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_k^*] = \quad \text{(теорема II)}$$

$$= \mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*} \cdot \mathfrak{p}_h^* \quad \text{(гл. XV, § 5, теорема II)}.$$

Следовательно, идеал $\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{p}$ является пересечением максимальных идеалов колец частных $\mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*}$.

Для перехода к новой теореме нам понадобится

Лемма. *Если $\mathfrak{i}^*$ — идеал кольца $\mathfrak{Q}^*$, содержащий делитель единицы кольца $\mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*}$ при любом значении h, то $\mathfrak{i}^*$ является единичным идеалом.*

Пусть α_h^*/β_h^* — делитель единицы кольца $\mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*}$, лежащий в $\mathfrak{i}^*$. Здесь α_h^* и β_h^* — элементы $\mathfrak{Z}^*$, не лежащие в $\mathfrak{p}_h^*$. Так как α_h^*/β_h^* лежит в $\mathfrak{Q}^*$, мы можем написать

$$\frac{\alpha_h^*}{\beta_h^*} = \frac{\gamma_h^*}{\delta_h},$$

где γ_h^* — элемент из $\mathfrak{Z}^*$, а δ_h содержится в $\mathfrak{Z}$ и не содержится в $\mathfrak{p}$. Тогда δ_h не содержится в $\mathfrak{p}_j^*$ при любом значении j. Покажем, что γ_h^* не принадлежит $\mathfrak{p}_h^*$. Мы имеем

$$\delta_h \alpha_h^* = \beta_h^* \gamma_h^*.$$

Следовательно, если γ_h^* принадлежит указанному идеалу, то $\delta_h \alpha_h^*$ принадлежит $\mathfrak{p}_h^*$. Так как идеал $\mathfrak{p}_h^*$ прост, то отсюда вытекает, что δ_h или α_h^* принадлежит $\mathfrak{p}_h^*$. Поскольку это не так, γ_h^* не принадлежит $\mathfrak{p}_h^*$. Рассмотрим элементы $\xi_h^* = \gamma_h^*/\delta_h$, лежащие в $\mathfrak{i}^*$ и являющиеся делителями единицы соответственно в кольцах $\mathfrak{Z}^*_{\mathfrak{p}_h^*}$ ($h = 1, \ldots, k$). Эти элементы можно привести к общему знаменателю $\delta = \delta_1 \ldots \delta_k$ и записать

$$\xi_h^* = \varepsilon_h^*/\delta,$$

где ε_h^* не содержится в $\mathfrak{p}_h^*$. Если $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_k^*$ — элементы, определенные в доказательстве теоремы III, то элемент $\xi^* = \sum \lambda_h^* \varepsilon_h^* = (\sum \lambda_h^* \varepsilon_h^*)/\delta = \varepsilon^*/\delta$ принадлежит $\mathfrak{i}^*$ и

$$\varepsilon^* = \sum \lambda_j^* \varepsilon_j^* \neq 0 \quad (\mathfrak{p}_h^*) \qquad (h = 1, \ldots, k).$$

Следовательно, $(\xi^*)^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^*$ при всех значениях h и поэтому содержится в $\mathfrak{Q}^*$. Поэтому $\mathfrak{i}^*$ содержит единицу кольца $\mathfrak{Q}^*$, а значит, идеал $\mathfrak{i}^*$ является единичным.

Теорема IV. *Кольцо $\mathfrak{Q}^*$ имеет k максимальных идеалов, именно*

$$\pi_h^* = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1^*}^* \cap \ldots \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_{h-1}^*}^* \cap (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^* \cdot \mathfrak{p}_h^*) \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_{h+1}^*}^* \cap \ldots \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_k^*}^* \quad (h = 1, \ldots, k).$$

Ясно, что каждый идеал π_h^*, определенный в формулировке теоремы, является собственным идеалом кольца $\mathfrak{Q}^*$. Но он является максимальным идеалом, так как любой более широкий идеал должен содержать делитель единицы из каждого кольца $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^*$ и поэтому, в силу предыдущей леммы, должен быть единичным идеалом кольца $\mathfrak{Q}^*$. С другой стороны, любой собственный идеал π^* кольца $\mathfrak{Q}^*$ должен быть таким, что его элементы все не будут делителями единицы некоторого кольца $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^*$. Поэтому при некотором значении h будет $\pi^* \subseteq \pi_h^*$. Если идеал π^* максимален, то отсюда вытекает, что $\pi^* = \pi_h^*$. Следовательно, идеалы $\pi_1^*, \ldots, \pi_k^*$ исчерпывают все максимальные идеалы кольца $\mathfrak{Q}^*$. То, что все эти идеалы различны, непосредственно вытекает из следующей теоремы:

Теорема V. *Кольцо частных $\mathfrak{Q}_{\pi_h^*}^*$ совпадает с кольцом $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^*$.*

Заметим прежде всего, что

$$\mathfrak{J}^* \cap \pi_h^* = (\mathfrak{J}^* \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1^*}^*) \cap \ldots \cap (\mathfrak{J}^* \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^* \cdot \mathfrak{p}_h^*) \cap \ldots \cap (\mathfrak{J}^* \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_k^*}^*) = \mathfrak{p}_h^*.$$

Мы имеем также

$$\mathfrak{Q}^* \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^*, \quad \mathfrak{p}_h^* \subseteq \pi_h^*,$$

так что

$$\mathfrak{Q}_{\pi_h^*}^* \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^*.$$

С другой стороны, если α^*/β^* — элемент из $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^*$, где α^* и β^* принадлежат $\mathfrak{J}^*$, а β^* не лежит в $\mathfrak{p}_h^*$, то элемент β^* не принадлежит и π_h^*, так как в противном случае он принадлежал бы идеалу $\mathfrak{J}^* \cap \pi_h^* = \mathfrak{p}_h^*$. Следовательно, $\alpha^*/\beta^* \in \mathfrak{Q}_{\pi_h^*}^*$, т. е.

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^* \subseteq \mathfrak{Q}_{\pi_h^*}^*.$$

Нужный результат теперь очевиден.

Теорема VI. *Если алгебраическое замыкание K' поля K в поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ лежит в $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ и если $\mathfrak{i}$ — любой идеал из $\mathfrak{J}$, то*

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cap (\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i}) = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}.$$

Пусть α — примитивный элемент поля K' над K, а θ — примитивный элемент поля K^* над K'. Тогда любой элемент η из $\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i}$ имеет вид $\sum_{i,j} \eta_{ij} \alpha^i \theta^j$, где $\eta_{ij} \in \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$.

Допустим, что η принадлежит также $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, и выберем элемент β ($\beta \neq 0$) из $\mathfrak{J}$ так, чтобы элементы

$$\beta\eta = \zeta(\xi) \quad \text{и} \quad \beta\eta_{ij} = \zeta_{ij}(\xi)$$

содержались в $\mathfrak{J}$. Тогда многочлен

$$\zeta(x) - \sum_{i,j} \zeta_{ij}(x) \alpha^i \theta^j$$

будет обращаться в нуль на V^*. Но многообразие V^* абсолютно неприводимо и может быть определено над полем $K' = K(\alpha)$. Отсюда следует, что если $\theta_1, \ldots, \theta_s$ — элементы, сопряженные с θ над полем K', то на многообразии V^*

$$\zeta(x) - \sum_{i,j} \zeta_{ij}(x) \alpha^i \theta_l^j = 0.$$

Так как определитель $|\theta_k^l|$ отличен от нуля, отсюда вытекает, что

$$\zeta(x) - \sum \zeta_{i0}(x) \alpha^i = 0$$

на V^*. Следовательно,

$$\eta = \sum \eta_{i0} \alpha^i.$$

Но так как $K' \subseteq \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, то и $\alpha \in \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Поэтому $\sum \eta_{i0} \alpha^i \in \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}$, а значит,

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cap (\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i}) \subseteq \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i}.$$

С другой стороны, ввиду включения $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{Q}^*$,

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{i}.$$

Отсюда нужное соотношение следует непосредственно.

Теоремы II—V имеют место для любого максимального идеала $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}$, т. е. для простого идеала произвольного многообразия U размерности нуль, лежащего на V и неприводимого над полем K. В теореме VI требуется, чтобы было $K' \subseteq \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, а в остальном она справедлива также для любого U. Ниже мы рассмотрим случай, когда многообразие U просто на V, т. е. когда U содержит хотя бы одну точку, являющуюся простой точкой многообразия V. Если U содержит такую точку, то оно не содержится в подмногообразии, состоящем из кратных точек многообразия V. Но так как U, будучи неприводимым многообразием размерности нуль, не имеет вообще собственных

подмногообразий, то оно не может пересекать многообразие кратных точек. Следовательно, все точки U будут простыми точками многообразия V.

Если U — простое подмногообразие на V, то точки $x^{(h)} = (x_1^{(h)}, \ldots, x_n^{(h)})$ будут простыми точками многообразия V^* при $h = 1, \ldots, k$. Мы можем предполагать систему координат в пространстве A_n выбранной достаточно общей, чтобы разности $\xi_1 - x_1^{(h)}, \ldots, \xi_d - x_d^{(h)}$ были униформизирующими параметрами в точках $x^{(h)}$ $(h = 1, \ldots, k)$ многообразия V^* и чтобы уравнения многообразия U над полем K можно было записать в виде

$$\varphi_1(x) = 0,$$
$$\varphi_i(x) \equiv x_i - \psi_i(x_1) = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

где $\varphi_1(x)$ — неприводимый многочлен от x_1 над полем K, имеющий степень r, а $\psi_i(x_1)$ — многочлены от x_1. В таком случае

$$\varphi_1(\xi) = \varphi_1'(x_1^{(h)})(\xi_1 - x_1^{(h)}) \quad (\mathfrak{p}_h^{*2}),$$
$$\varphi_i(\xi) = -\psi_i'(x_1^{(h)})(\xi_1 - x_1^{(h)}) + (\xi_i - x_i^{(h)}) \quad (\mathfrak{p}_h^{*2}) \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

где $\varphi_1'(x_1^{(h)})$ отлично от нуля, так как многочлен $\varphi_1(x)$ неприводим и $\varphi_1(x_1^{(h)}) = 0$. Квадратная матрица порядка d

$$\begin{pmatrix} \varphi_1'(x_1^{(h)}) & 0 & \ldots & 0 \\ -\psi_2'(x_1^{(h)}) & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\psi_d'(x_1^{(h)}) & . & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Отсюда следует, что система элементов $\eta_i = \varphi_i(\xi)$ $(i = 1, \ldots, d)$ будет системой униформизирующих параметров на многообразии V^* в точках $x^{(h)}$ $(h = 1, \ldots, k)$ (§ 3, теорема II). Поэтому

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^* \cdot \mathfrak{p}_h^* = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_h^*}^* \cdot (\eta_1, \ldots, \eta_d).$$

Далее,

$$\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{p} = (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1^*}^* \cdot \mathfrak{p}_1^*) \cap \ldots \cap (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_k^*}^* \cdot \mathfrak{p}_k^*) =$$
$$= (\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1^*}^* \cap \ldots \cap \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_k^*}^*)(\eta_1, \ldots, \eta_d) = \mathfrak{Q}^* \cdot (\eta_1, \ldots, \eta_d).$$

До сих пор мы пользовались только тем, что точки $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ являются простыми точками многообразия V^*. Но так как многообразие U просто на V, то мы знаем из теоремы I, что если K' — алгебраическое замыкание поля K в $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то имеет место соотношение $K' \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$. Следовательно (теорема VI), мы имеем

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cap (\mathfrak{Q}^* \cdot \mathfrak{p}) = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cap (\mathfrak{Q}^* \cdot (\eta_1, \ldots, \eta_d)) = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot (\eta_1, \ldots, \eta_d).$$

Тем самым доказана

Теорема VII. *Если многообразие U просто на V, то максимальный идеал кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ имеет базис, состоящий из d элементов.*

Рассмотрим теперь обращение теоремы VII. Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{J}$, такой, что идеал $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$ имеет базис, состоящий из d элементов, например $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$. Идеал $\mathfrak{p}$ определяет многообразие U, состоящее из точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$, сопряженных над K. Как обычно, мы будем рассматривать нормальное расширение K^* поля K, являющееся полем разложения многообразия V и содержащее неоднородные координаты точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$. Через V^* мы обозначим абсолютно неприводимую компоненту многообразия V, общей точкой которой над полем K^* является заданная общая точка ξ многообразия V над полем K. Через $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ обозначим точки многообразия U, лежащие на V^*. Для доказательства того, что многообразие U будет простым на V, нужно показать, что:

(а) одна из точек $x^{(h)}$ $(h \leqslant k)$ является простой точкой V^*;

(б) алгебраическое замыкание K' поля K в поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ содержится в кольце $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$.

Из второго условия следует, что U не содержится в геометрическом месте точек пересечения нескольких компонент многообразия V над полем K^*. Но так как U неприводимо над K и имеет размерность нуль, то отсюда вытекает, что ни одна из точек многообразия U не лежит на этом геометрическом месте. Отсюда вместе с условием (а) следует, что точка $x^{(h)}$ будет простой точкой V, а, значит, U будет простым подмногообразием многообразия V.

Нам дано, что

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}.$$

Из определения кольца $\mathfrak{Q}^*$ видно, что $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{Q}^*$. В силу следствия I теоремы III, $\mathfrak{Q}^* \subseteq \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h}$. Следовательно, кольцо $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h}$ является расширением кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Поэтому

$$\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot (\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)) =$$

$$= \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot (\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}) = \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^*_h.$$

Отсюда следует, что максимальный идеал кольца $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h}$ имеет базис, состоящий из d элементов. Поэтому точка $x^{(h)}$ является простой точкой многообразия V^* (§ 3, теорема IV). Заметим, кстати, что $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ служат униформизирующими параметрами в точке $x^{(h)}$.

Для доказательства того, что $K' \subseteq \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, нам нужно предварительно доказать некоторые леммы.

Лемма I. *При любом целом ρ справедливо соотношение*

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cap (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\rho}_h) = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^\rho.$$

Если $\rho = 0$, то доказывать нечего. Если $\rho = 1$, то мы имеем

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^*_h.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cap (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^*_h).$$

Так как $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}$ есть максимальный идеал кольца $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, то здесь должно выполняться равенство. Действительно, в противном случае мы имели бы, что

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cap (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^*_h) = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}.$$

Однако отсюда следовало бы, что идеал $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^*_h$ содержит единицу и поэтому является единичным идеалом, что невозможно. Таким образом, для $\rho = 1$ лемма доказана.

При произвольном значении ρ мы имеем

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}^{\rho} \subseteq \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot (\mathfrak{p}^*_1 \dots \mathfrak{p}^*_k)^{\rho} = \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\rho}_h.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}^{\rho} \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cap (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\rho}_h).$$

Если здесь равенство не имеет места, то должен существовать элемент α, который при некотором значении $\sigma < \rho$ принадлежит $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}^{\sigma}$, но не содержится в $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}^{\sigma+1}$ и который содержится в $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\rho}_h \subseteq \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\sigma+1}_h$. Покажем, что это невозможно. Если α лежит в $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}^{\sigma}$ и не содержится в $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}^{\sigma+1}$, то можно написать

$$\alpha = \sum A_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} \qquad (i_1 + \dots + i_d = \sigma),$$

где коэффициенты $A_{i_1 \dots i_d}$ принадлежат $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, причем хотя бы один из них не содержится в $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}$, а значит, не содержится и в $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^*_h$ (случай $\rho = 1$!). Если $a^*_{i_1 \dots i_d}$ — такой элемент поля K^*, что

$$A_{i_1 \dots i_d} \equiv a^*_{i_1 \dots i_d} \quad (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^*_h)$$

(назовем его для краткости *вычетом* $A_{i_1 \dots i_d}$ в точке $x^{(h)}$), то не все $a^*_{i_1 \dots i_d}$ равны нулю. Следовательно,

$$\alpha = \sum a^*_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} \quad (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\sigma+1}_h).$$

Если α принадлежит $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\sigma+1}_h$, то, в силу написанного выше,

$$\sum a^*_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} \equiv 0 \quad (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\sigma+1}_h).$$

Отсюда, как и в доказательстве теоремы V § 3, заключаем, что все $a^*_{i_1 \dots i_d}$ равны нулю. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, α не принадлежит $\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\sigma+1}_h$, и лемма доказана.

Лемма II. *Если* α *— любой элемент кольца* $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ *и*

$$\alpha = \psi_0 + \psi_1 + \dots$$

есть разложение α *в степенной ряд по* $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ *в точке* $x^{(h)}$, *то коэффициенты однородных многочленов* ψ_ρ *степени* ρ *от* $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ *все являются вычетами элементов кольца* $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ *в точке* $x^{(h)}$.

Очевидно, что $\alpha = \psi_0(\mathfrak{I}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^*_h)$. Следовательно, лемма справедлива для ψ_0, какой бы элемент α из $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ мы ни рассматривали. Докажем прежде всего, что лемма справедлива и для ψ_ρ, если он является первым отличным от нуля членом разложения. Действительно, в этом случае мы видим, что $\alpha \in \mathfrak{I}_{\mathfrak{p}} \cap (\mathfrak{I}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\rho}_h) = \mathfrak{I}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p}^\rho$ (лемма I). Поэтому

$$\alpha = \sum A_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} \qquad (i_1 + \dots + i_d = \rho),$$

где $A_{i_1 \dots i_d} \in \mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$. Если $a^*_{i_1 \dots i_d}$ — вычет $A_{i_1 \dots i_d}$ в точке $x^{(h)}$, то

$$\alpha = \sum a^*_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} \quad (\mathfrak{I}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*\rho+1}_h).$$

Поэтому

$$\psi_\rho = \sum a^*_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d},$$

так что коэффициенты ψ_ρ являются вычетами.

Воспользуемся теперь индукцией, приняв в качестве индуктивного предположения справедливость утверждения леммы для $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}$ (при любом α из $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$). Нужно показать, что тогда и коэффициенты многочлена ψ_m будут вычетами. Пусть ρ — произвольное целое число, меньшее m. Если

$$\psi_\rho = \sum a^*_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} \qquad (i_1 + \dots + i_d = \rho),$$

то, по предположению индукции, коэффициенты $a^*_{i_1 \dots i_d}$ являются вычетами в точке $x^{(h)}$ некоторых элементов кольца $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$, например элементов $A_{i_1 \dots i_d}$. Положим

$$\beta_\rho = \sum A_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d}.$$

Применим предположение индукции к коэффициентам $A_{i_1 \dots i_d}$ в выражении β_ρ. Мы получим, что

$$\beta_\rho = \psi_\rho + \psi^{(0)}_{\rho, \rho+1} + \psi^{(0)}_{\rho, \rho+2} + \dots,$$

где коэффициенты многочленов $\psi_{\rho, i}$ при $i \leqslant \rho + m - 1$ являются вычетами. Подобным же образом, если

$$-\psi^{(0)}_{\rho, \rho+1} = \sum b^*_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} \qquad (i_1 + \dots + i_d = \rho + 1),$$

где $b^*_{i_1 \dots i_d}$ являются вычетами некоторых элементов $B^{(0)}_{i_1 \dots i_d}$ из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, то мы получим разложение элементов

$$\beta_{\rho,1} = \sum B^{(\ )}_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d}$$

в виде

$$\beta_{\rho,1} = \psi^{(1)}_{\rho,\rho+1} + \psi^{(1)}_{\rho,\rho+2} + \dots \qquad (\psi^{(0)}_{\rho,\rho+1} + \psi^{(1)}_{\rho,\rho+1} = 0).$$

Таким образом мы построим элементы $\beta_{\rho,1}, \beta_{\rho,2}, \dots, \beta_{\rho,m-2}$ из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, такие, что

$$\beta_{\rho,j} = \psi^{(j)}_{\rho,\rho+j} + \psi^{(j)}_{\rho,\rho+j+1} + \dots,$$

где

$$\psi^{(0)}_{\rho,\rho+j} + \psi^{(1)}_{\rho,\rho+j} + \dots + \psi^{(j)}_{\rho,\rho+j} = 0 \qquad (j = 1, \dots, m-2)$$

и коэффициенты многочленов $\psi^{(j)}_{\rho,i}$ являются вычетами при $i \leqslant \rho + j + m - 1$. Положим

$$\gamma_\rho = \beta_\rho + \beta_{\rho,1} + \dots + \beta_{\rho,m-2}.$$

Из построения элементов $\beta_{\rho,i}$ мы видим, что

$$\gamma_\rho = \psi_\rho + \varphi_{\rho+m-1} + \text{члены высшего порядка},$$

где $\varphi_{\rho+m-1}$ — форма степени $\rho + m - 1$, коэффициенты которой являются вычетами в точке $x^{(h)}$.

Положим теперь

$$\omega = \alpha - \gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_{m-1}.$$

Тогда

$$\omega = \psi_0 + \psi_m - \varphi_m + \text{члены высшего порядка}.$$

ψ_0 принадлежит K^* и поэтому удовлетворяет неприводимому уравнению $f(z) = 0$ над K. Можно предполагать, что

$$f(z) = (z - \psi_0)(z - \psi_0^{(2)}) \dots (z - \psi_0^{(g)}).$$

В таком случае ясно, что

$$f(\omega) = (\psi_m - \varphi_m) f'(\psi_0) (\mathfrak{J}^*_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^{*m+1}_h).$$

$f(\omega)$ есть элемент из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Очевидно, что в его разложении в степенной ряд по $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ первым членом будет $(\psi_m - \varphi_m) f'(\psi_0)$. В силу доказанного выше частного случая леммы, коэффициенты этого члена будут вычетами. Но $f'(\psi_0)$ является вычетом для $f'(\omega)$ и не принадлежит идеалу $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$. Следовательно, коэффициенты $\psi_m - \varphi_m$ будут также вычетами элементов из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Но так как, по построению, коэффициенты формы φ_m являются вычетами, отсюда следует, что и коэффициенты ψ_m — вычеты. Тем самым индукция закончена и лемма доказана.

Пусть теперь θ — любой элемент из K'. Тогда существуют элементы α и β из $\mathfrak{J}$, такие, что $\alpha - \theta\beta = 0$. Пусть разложением элемента β в точке $x^{(h)}$ будет

$$\beta = \sum b^*_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} + \text{члены высшего порядка},$$

где $i_1 + \dots + i_d = \rho$ и хотя бы один коэффициент, например $b^*_{j_1 \dots j_d}$, отличен от нуля. В силу последней леммы, $b^*_{j_1 \dots j_d}$ является вычетом некоторого элемента B из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. B не лежит в $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$, так как $b^*_{j_1 \dots j_d}$ отличен от нуля. Так как $\alpha = \theta\beta$ и $\theta \in K^*$, то разложение α должно иметь вид

$$\alpha = \sum a^*_{i_1 \dots i_d} \zeta_1^{i_1} \dots \zeta_d^{i_d} + \text{члены порядка выше } \rho,$$

где $a^*_{i_1 \dots i_d} = \theta b^*_{i_1 \dots i_d}$. Элемент $a^*_{j_1 \dots j_d}$ является вычетом некоторого элемента A из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Следовательно, $\theta = a^*_{j_1 \dots j_d} / b^*_{j_1 \dots j_d}$ есть вычет элемента $\gamma_1 = A/B$ кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$.

Пусть

$$\gamma_1 = \theta + \psi_1^{(1)} + \dots$$

— разложение γ_1 в точке $x^{(h)}$, где $\psi_j^{(1)}$ — формы степени j относительно $\zeta_1, \dots, \zeta_d$. Если

$$\psi_1^{(1)} = \sum c_i^* \zeta_i,$$

то c_i^* являются вычетами в точке $x^{(h)}$ некоторых элементов C_i из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Если положить

$$\gamma_2 = \gamma_1 - \sum C_i \zeta_i,$$

то γ_2 будет элементом кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, разложение которого в точке $x^{(h)}$ имеет вид

$$\gamma_2 = \theta + \psi_2^{(2)} + \dots .$$

Продолжая таким образом, можно для каждого целого n найти элемент γ_n из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, такой, что

$$\gamma_n = \theta + \psi_n^{(n)} + \dots .$$

Следовательно,

$$\alpha - \gamma_n\beta = 0 \quad (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*n}_h).$$

Но элемент $\alpha - \gamma_n\beta$ лежит в $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Поэтому он лежит также в

$$\mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cap (\mathfrak{J}^*_{\mathfrak{p}^*_h} \cdot \mathfrak{p}^{*n}_h) = \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}^n$$

(лемма I). Отсюда следует, что $\alpha \in \mathfrak{J}_\mathfrak{p} \cdot (\beta, \mathfrak{p}^n)$ при $n = 1, 2, \dots$. Так как $\mathfrak{p}$ есть максимальный идеал кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, то мы можем

применить теорему X § 2 гл. XV и вывести из нее, что α принадлежит $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}(\beta)$. Следовательно, существует такой элемент γ из $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$, что $\alpha = \gamma\beta$. Мы заключаем отсюда, что элемент $\theta = \gamma$ принадлежит $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Так как θ — любой элемент из K', то мы имеем $K' \subseteq \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$.

Суммируя полученные результаты, приходим к следующей теореме:

Теорема VIII. *Многообразие U, определяемое максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}$, тогда и только тогда является простым подмногообразием многообразия V, когда максимальный идеал кольца $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ имеет базис, состоящий из d элементов.*

Теперь можно без труда обобщить предыдущие результаты на неприводимые простые подмногообразия многообразия V, имеющие произвольную размерность. Если $\mathfrak{p}$ — любой простой идеал в $\mathfrak{J}$ и U — неприводимое многообразие размерности s, определяемое идеалом $\mathfrak{p}$ на многообразии V, то U будет простым, если оно содержит точку, являющуюся простой точкой многообразия V. Ясно, что U будет простым подмногообразием V тогда и только тогда, когда его общая точка будет простой точкой многообразия V. Также ясно, что U будет простым тогда и только тогда, когда оно содержит алгебраическую точку, являющуюся простой точкой V. Последнее условие равносильно тому, что U содержит неприводимое многообразие размерности нуль, являющееся простым. Наша задача состоит в установлении необходимых и достаточных условий простоты подмногообразия U на многообразии V, формулируемых в терминах, связанных с кольцом $Q(U) = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$.

Пусть

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

— базис уравнений многообразия V, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка этого многообразия. Можно предполагать, что система координат выбрана достаточно общей, так что элементы $\xi_1, \ldots, \xi_s$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{p}$. Так как многообразие U имеет размерность s, то элементы $\xi_{s+1}, \ldots, \xi_n$ алгебраически зависят по модулю $\mathfrak{p}$ от элементов $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Если подмногообразие U просто на V, то матрица $(\partial f_i/\partial x_j)$ в некоторой точке многообразия U имеет ранг $n - d$. Без ограничения общности можно считать, что определитель

$$\alpha(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{d+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_{n-d}}{\partial x_{d+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{n-d}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{2}$$

не обращается в нуль на U. В таком случае $\alpha(\xi) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$. Обратно, если $\alpha(\xi) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$, то $\alpha(x)$ не обращается в нуль на U, а значит, матрица $(\partial f_i/\partial x_j)$ в некоторых точках U имеет ранг $n - d$, и поэтому подмногообразие U будет простым на V.

Пусть теперь $\Omega = K(\xi_1, \ldots, \xi_s)$. Рассмотрим многообразие $\bar{V}$ в аффинном пространстве $(x_{s+1}, \ldots, x_n)$ над полем Ω, определяемое уравнениями

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_s, x_{s+1}, \ldots x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Это многообразие содержит точку $(\xi_{s+1}, \ldots, \xi_n)$. Пусть $\varphi^*(x_{s+1}, \ldots, x_n)$ — любой многочлен над полем Ω, обращающийся в нуль в точке $(\xi_{s+1}, \ldots, \xi_n)$. В таком случае можно написать

$$\varphi^*(x_{s+1}, \ldots, x_n) = \frac{\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)}{\psi(\xi_1, \ldots, \xi_s)},$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_s)$ — многочлены над полем K. Так как

$$\varphi^*(\xi_{s+1}, \ldots, \xi_n) = 0,$$

то мы имеем

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0,$$

а значит,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

на многообразии V. Поэтому существуют многочлены $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ над полем K, удовлетворяющие условию

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_i(x_1, \ldots, x_n) f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Следовательно, мы имеем

$$\varphi^*(x_{s+1}, \ldots, x_n) = \sum \frac{a_i(\xi_1, \ldots, \xi_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)}{\psi(\xi_1, \ldots, \xi_s)} \times \\ \times f_i(\xi_1, \ldots, \xi_s, x_{s+1}, \ldots, x_n).$$

Отсюда вытекает, что многочлен $\varphi^*(x_{s+1}, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на многообразии $\bar{V}$, и поэтому $(\xi_{s+1}, \ldots, \xi_n)$ является общей точкой этого многообразия. Так как поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет размерность d над K, отсюда следует, что поле $\Omega(\xi_{s+1}, \ldots, \xi_n) = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет размерность $d - s$ над Ω.

Областью целостности многообразия $\bar{V}$ в пространстве A_{n-s} является кольцо $o_{\bar{\mathfrak{P}}} = \Omega[\xi_{s+1}, \ldots, \xi_n]$. Оно состоит из элементов вида α/β, где $\alpha \in \mathfrak{P}$ и $\beta \in K[\xi_1, \ldots, \xi_s]$. Область целостности $\bar{\mathfrak{P}}$ является расширением $\mathfrak{P}$. Рассмотрим идеал $\bar{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{p}$. Он состоит из элементов вида α/β, где $\alpha \in \mathfrak{p}$ и $\beta \in K[\xi_1, \ldots, \xi_s]$. Если α/β и α'/β' — два элемента, произведение которых принадлежит идеалу $\bar{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{p}$, т. е.

$$\frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} = \frac{\gamma}{\delta},$$

где $\gamma \in \mathfrak{p}$ и $\delta \in K[\xi_1, \ldots, \xi_s]$, то

$$\alpha\alpha'\delta = \gamma\beta\beta' = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Но так как $\delta \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p})$, то

$$\alpha\alpha' \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}),$$

и поэтому α или α' принадлежит $\mathfrak{p}$. Следовательно, один из элементов α/β или α'/β' принадлежит идеалу $\overline{\mathfrak{J}} \cdot \mathfrak{p}$. Поэтому идеал $\overline{\mathfrak{J}} \cdot \mathfrak{p}$ прост.

Так как элементы $\xi_{s+1}, \ldots, \xi_n$ алгебраически зависят по модулю $\mathfrak{p}$ от элементов $\xi_1, \ldots, \xi_s$, то они будут алгебраическими над полем Ω. Следовательно, идеал $\overline{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{J}} \cdot \mathfrak{p}$ определяет неприводимое многообразие $\overline{U}$ размерности нуль, лежащее на $\overline{V}$. Покажем, что $\overline{U}$ является простым подмногообразием $\overline{V}$ тогда и только тогда, когда U есть простое подмногообразие V.

Если система координат выбрана достаточно общей, то подмногообразие U просто на V в том и только в том случае, если элемент $\alpha(\xi)$, определяемый соотношением (2), не принадлежит $\mathfrak{p}$. Подобным же образом подмногообразие $\overline{U}$ просто на $\overline{V}$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\xi)$ не принадлежит $\overline{\mathfrak{p}}$. Так как $\mathfrak{p} \subseteq \overline{\mathfrak{p}}$, то ясно, что если $\alpha(\xi)$ не принадлежит $\overline{\mathfrak{p}}$, то он не принадлежит и $\mathfrak{p}$. Следовательно, если $\overline{U}$ просто на $\overline{V}$, то U просто на V. Если же $\alpha(\xi) \in \overline{\mathfrak{p}}$, то $\alpha(\xi) = \beta/\gamma$, где $\beta \in \mathfrak{p}$ и $\gamma \in K[\xi_1, \ldots, \xi_s]$. Следовательно,

$$\gamma\alpha(\xi) = \beta \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Но так как $\gamma \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p})$, отсюда вытекает, что $\alpha(\xi) \equiv 0 \quad (\mathfrak{p})$. Поэтому, если $\alpha(\xi) \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p})$, то $\alpha(\xi) \not\equiv 0 \quad (\overline{\mathfrak{p}})$. Следовательно, если U просто на V, то $\overline{U}$ просто на $\overline{V}$.

Необходимо подчеркнуть геометрический смысл многообразий $\overline{U}$ и $\overline{V}$: они являются пересечениями многообразий U и V $(n-s)$-мерным подпространством

$$x_i = \xi_i \quad (i = 1, \ldots, s),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_s$ — независимые неизвестные над K. Связь этого с доказанным только что результатом очевидна.

Ясно, что $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \subseteq \overline{\mathfrak{J}}_{\overline{\mathfrak{p}}}$. Пусть $\overline{\eta}$ — любой элемент из $\overline{\mathfrak{J}}_{\overline{\mathfrak{p}}}$. Мы можем записать $\overline{\eta} = \overline{\alpha}/\overline{\beta}$, где $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ принадлежат $\overline{\mathfrak{J}}$, причем $\overline{\beta}$ не принадлежит $\overline{\mathfrak{p}}$. Поэтому

$$\overline{\alpha} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \overline{\beta} = \frac{\omega}{\nu},$$

где λ, ω принадлежат $\mathfrak{J}$, а μ, ν — элементы кольца $K[\xi_1, \ldots, \xi_s]$. Кроме того, ω, μ, ν не принадлежат идеалу $\mathfrak{p}$. В таком случае

$$\overline{\eta} = \frac{\lambda\nu}{\mu\omega},$$

и поэтому $\overline{\eta}$ содержится в $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$. Следовательно, $\overline{\mathfrak{J}}_{\overline{\mathfrak{p}}} \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, а значит,

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{J}}_{\overline{\mathfrak{p}}}.$$

Многообразие $\overline{U}$ является простым подмногообразием (размерности нуль) на $\overline{V}$ в том и только в том случае, если кольцо частных имеет то свойство, что идеал $\overline{\mathfrak{J}}_{\overline{\mathfrak{p}}} \cdot \overline{\mathfrak{p}}$ обладает базисом, состоящим из $d-s$ элементов. Так как U просто на V тогда и только тогда, когда $\overline{U}$ просто на $\overline{V}$, и так как $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{J}}_{\overline{\mathfrak{p}}}$, то мы получаем следующую теорему:

Теорема IX. *Пусть U — неприводимое подмногообразие размерности s на неприводимом многообразии V размерности d. Подмногообразие U является простым на V тогда и только тогда, когда максимальный идеал кольца частных многообразия U на многообразии V имеет базис, состоящий из $d-s$ элементов.*

Такой базис максимального идеала кольца $Q(U)$ называется системой *униформизирующих параметров* многообразия V в окрестности U.

В заключение этого параграфа обобщим теорему I из § 3.

Теорема X. *Кольцо частных любого простого неприводимого подмногообразия U размерности s на многообразии V является целозамкнутым в его поле частных.*

Доказательство этого результата сходно с доказательством теоремы I § 3, так что мы воспользуемся теми же обозначениями. Если система координат является достаточно общей, то можно предполагать, что элементы $\xi_1, \ldots, \xi_d$ алгебраически независимы над K, что $\xi_{d+1}, \ldots, \xi_n$ являются целыми над $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, а ξ_{d+1} служит примитивным элементом поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ над $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$. Любой элемент целого замыкания $\mathfrak{J}^*$ кольца $\mathfrak{J}$ в поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет вид

$$\eta = \frac{r_0 + r_1 \xi_{d+1} + \cdots + r_{g-1} \xi_{d+1}^{g-1}}{D^2(\xi_1, \ldots, \xi_d)},$$

где $r_i \in K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Если U содержит простую точку (может быть, и алгебраическую), то систему координат можно считать достаточно общей для того, чтобы выражение $D^2(x_1, \ldots, x_d)$ не обращалось в нуль в этой точке. Следовательно, $D^2(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ не принадлежит $\mathfrak{p}$, а значит, $\eta \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$. Таким образом, $\mathfrak{J}^* \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$, и поэтому (гл. XV, § 8, теорема IV) кольцо $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$ целозамкнуто.

§ 5. Нормальные многообразия в аффинном пространстве

Пусть V — неприводимое многообразие размерности d в афинном пространстве A_n над основным полем K, и пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — неоднородные координаты его общей точки. Многообразие V^* называется *нормальным многообразием* в пространстве A_n (*аффинно нормальным*), если его область целостности $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ целозамкнута в ее поле частных. В силу теоремы V § 8 гл. XV, область целостности $\mathfrak{J}$ целозамкнута тогда и только тогда, когда целозамкнуты все ее кольца частных по простым идеалам. Для этого, в свою очередь,

достаточно, чтобы были целозамкнутыми кольца частных $\mathfrak{J}$, соответствующие максимальным простым идеалам. Следовательно, имеет место

Теорема I. *Неприводимое многообразие V в пространстве A_n аффинно нормально в том и только в том случае, если кольца частных его неприводимых подмногообразий целозамкнуты. Для этого достаточно, чтобы были целозамкнутыми кольца частных неприводимых подмногообразий размерности нуль.*

Опыт показывает, что нормальные многообразия играют фундаментальную роль во всей геометрии многообразий. Более возвышенные отделы бирациональной теории многообразий почти полностью основываются на понятии нормальности. В гл. XVIII, где мы будем заниматься теорией бирациональных соответствий, важность понятия нормального многообразия станет очевидной. Но мы уже здесь можем указать несколько более или менее непосредственно получаемых результатов, которые помогут читателю составить себе представление о значении этого понятия.

Заметим прежде всего, что ввиду целозамкнутости кольца $\mathfrak{J}$ в его поле частных, мы можем применить к нему мультипликативную теорию идеалов (гл. XV, § 7). Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал из $\mathfrak{J}$, то мы знаем (гл. XV, § 7, теорема VI), что идеал $\mathfrak{p}$ квазиравен единичному идеалу, $\mathfrak{p} \sim 1$, в том и только в том случае, если в $\mathfrak{J}$ существует простой идеал $\mathfrak{p}'$, отличный от нулевого идеала и являющийся собственным кратным идеала $\mathfrak{p}$. Если U — неприводимое многообразие, определяемое идеалом $\mathfrak{p}$, то простое собственное кратное $\mathfrak{p}'$ идеала $\mathfrak{p}$ существует тогда и только тогда, когда существует неприводимое подмногообразие U' многообразия V, содержащее U в качестве собственного подмногообразия. Если $U \subset U'$, то $\dim U < \dim U' < d$. Следовательно, $\dim U \leqslant d-2$. Наоборот, если $\dim U \leqslant d-2$, то мы рассмотрим ненулевой элемент идеала $\mathfrak{p}$, например $v(\xi)$. Гиперповерхность $v(x)=0$ пересекает многообразие V по несмешанному многообразию размерности $d-1$, содержащему многообразие U. Следовательно, в этом пересечении найдется неприводимая компонента U', содержащая U в качестве собственного подмногообразия. Таким образом, $\mathfrak{p} \sim 1$.

Пусть $\mathfrak{i}$ — любой идеал кольца $\mathfrak{J}$, и пусть $[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k, \ldots, \mathfrak{q}_l]$ — его несократимое представление пересечением примарных идеалов. Обозначим через $\mathfrak{p}_i$ радикалы идеалов $\mathfrak{q}_i$, через σ_i — индексы $\mathfrak{q}_i$ и предположим, что идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ $(d-1)$-мерны, а $\mathfrak{p}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{p}_l$ имеют размерности, меньшие $d-1$. В таком случае (гл. XV, § 7, теорема VIII) максимальным идеалом, квазиравным идеалу $\mathfrak{i}$, будет идеал

$$\mathfrak{i}^* = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k] = [\mathfrak{p}_1^{(\sigma_1)}, \ldots, \mathfrak{p}_k^{(\sigma_k)}],$$

где $\mathfrak{p}_j^{(\sigma_j)}$ — символические σ_j-е степени идеалов $\mathfrak{p}_j$. Таким образом, для перехода от $\mathfrak{i}$ к $\mathfrak{i}^*$ мы просто отбрасываем компоненты идеала $\mathfrak{i}$,

имеющие размерности, меньшие $d-1$. Целые числа σ_j $(j \leqslant k)$ называются *кратностями* соответствующих идеалов $\mathfrak{p}_j$ в идеале $\mathfrak{i}^*$ или кратностями определяемых этими идеалами многообразий U_j размерности $d-1$. Таким образом, мультипликативная теория идеалов кольца $\mathfrak{J}$ эквивалентна некоторой мультипликативной теории многообразий размерности $d-1$, лежащих на V.

В гл. XI мы развили мультипликативную теорию многообразий на V. Покажем теперь, что эти две теории согласуются друг с другом в той области, где они обе применимы. Мы скоро докажем, что каждое $(d-1)$-мерное подмногообразие аффинно нормального многообразия просто. Следовательно, мы можем применить теорему V § 2. Пусть

$$\mathbf{U} = \sigma_1 \mathbf{U}_1 + \ldots + \sigma_k \mathbf{U}_k$$

— мультипликативное $(d-1)$-мерное подмногообразие многообразия V. Обозначим через $\mathfrak{p}_i$ простые идеалы кольца $\mathfrak{J}$, определяемые многообразиями $\mathbf{U}_i$, а через $F_i(u_0, \ldots, u_{d-1})$ формы Кэли многообразий U_i. Тогда формой Кэли мультипликативного многообразия $\mathbf{U}$ будет

$$\prod_{i=1}^{k} F_i^{\sigma_i}(u_0, \ldots, u_{d-1}).$$

Если $S^0, \ldots, S^{d-1}$ — кососимметрические матрицы порядка $n+1$, элементы которых являются независимыми неизвестными над полем K, то коэффициенты различных произведений неизвестных s_{jk}^i в выражении

$$\prod_{i=1}^{k} F_i^{\sigma_i}(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi)$$

определяют некоторый идеал $\mathfrak{i}$. Но (§ 2, теорема V) коэффициенты упомянутых произведений в выражении $F_i(S^0\xi, \ldots, S^{d-1}\xi)$ определяют идеал вида $[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i1}, \mathfrak{q}_{i2}, \ldots]$, где компоненты $\mathfrak{q}_{ij}$ вложены в $\mathfrak{p}_i$. Следовательно,

$$[\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_{i1}, \mathfrak{q}_{i2}, \ldots] \sim \mathfrak{p}_i,$$

и поэтому

$$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{p}_1^{(\sigma_1)} \ldots \mathfrak{p}_k^{(\sigma_k)} \sim [\mathfrak{p}_1^{(\sigma_1)}, \ldots, \mathfrak{p}_k^{(\sigma_k)}].$$

На первый взгляд может показаться, что мультипликативная теория многообразий на V, даваемая теорией идеалов, является менее сильной, чем ранее рассмотренная теория, так как первая имеет дело лишь с многообразиями размерности $d-1$, в то время как прежняя теория оперирует с многообразиями любой размерности. Тем не менее в действительности мы добились многого уже тем, что кратности $(d-1)$-мерных многообразий определили внутренним образом с помощью свойств некоторого подкольца поля функций многообразия V, а это окажется существенным для дальнейшего развития теории.

Заметим еще, что если кольцо $\mathfrak{J}$ целозамкнуто, то главные идеалы в $\mathfrak{J}$ не имеют вложенных компонент (гл. XV, § 7, теорема X).

Понятие кратности, введенное нами для идеалов кольца $\mathfrak{J}$, может быть обобщено и приводит к понятию *нормирования* поля функций $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ многообразия V, понятию, которое мы будем рассматривать на протяжении всей следующей главы. Пусть U — неприводимое многообразие размерности $d-1$ на многообразии V, лежащем в пространстве A_n, и пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{J}$, соответствующий U. Если ζ — любой отличный от нуля элемент поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то мы можем записать его в виде $\zeta = \alpha/\beta$, где α и β — элементы из $\mathfrak{J}$. Идеалы $\mathfrak{J}\cdot(\alpha)$ и $\mathfrak{J}\cdot(\beta)$ мы можем в кольце $\mathfrak{J}$ разложить на множители:

$$\mathfrak{J}\cdot(\alpha) \sim \mathfrak{p}^{\rho}\mathfrak{p}_1^{\rho_1}\ldots\mathfrak{p}_k^{\rho_k},$$

$$\mathfrak{J}\cdot(\beta) \sim \mathfrak{p}^{\sigma}\mathfrak{p}_1^{\sigma_1}\ldots\mathfrak{p}_k^{\sigma_k},$$

где $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ — $(d-1)$-мерные простые идеалы в $\mathfrak{J}$, а $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_k, \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — неотрицательные целые числа. Определим *норму* $v(\zeta)$ элемента ζ на U равенством $v(\zeta) = \rho - \sigma$. Ясно, что это определение не зависит от частного выбора элементов α и β, так как если α' и β' — любые другие элементы из $\mathfrak{J}$, удовлетворяющие условию $\zeta = \alpha'/\beta'$, то мы имеем

$$\mathfrak{J}\cdot(\alpha') \sim \mathfrak{p}^{\rho'}\cdot\mathfrak{p}_1'^{\rho_1'}\ldots,$$

$$\mathfrak{J}\cdot(\beta') \sim \mathfrak{p}^{\sigma'}\cdot\mathfrak{p}_1'^{\sigma_1'}\ldots.$$

Но ввиду того, что $\alpha\beta' = \alpha'\beta$, и в силу теоремы единственности разложения (гл. XV, § 7, теорема V), должно быть $\rho + \sigma' = \rho' + \sigma$, т. е.

$$\rho' - \sigma' = \rho - \sigma = v(\zeta).$$

Из нашего определения очевидно, что

$$v(\zeta\eta) = v(\zeta) + v(\eta). \tag{1}$$

Пусть теперь η, ζ — два элемента из поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Предположим, что $v(\eta) \geqslant v(\zeta)$. Мы можем записать $\eta = \alpha/\gamma$, $\zeta = \beta/\gamma$, где α, β, γ — элементы из $\mathfrak{J}$. Если

$$\mathfrak{J}\cdot(\alpha) \sim \mathfrak{p}^{\rho}\cdot\mathfrak{p}_1^{\rho_1}\ldots,$$

$$\mathfrak{J}\cdot(\beta) \sim \mathfrak{p}^{\sigma}\cdot\mathfrak{p}_1^{\sigma_1}\ldots,$$

$$\mathfrak{J}\cdot(\gamma) \sim \mathfrak{p}^{\tau}\cdot\mathfrak{p}_1^{\tau_1}\ldots,$$

то из соотношения $v(\eta) \geqslant v(\zeta)$ следует, что $\rho \geqslant \sigma$. Поэтому $\mathfrak{J}\cdot(\alpha+\beta) \geqslant \mathfrak{p}^{\sigma}$, а значит,

$$\mathfrak{J}\cdot(\alpha+\beta) \sim \mathfrak{p}^{\sigma'}\cdot\mathfrak{p}_1'^{\sigma_1'}\ldots,$$

где $\sigma' \geqslant \sigma$. Следовательно,

$$v(\eta+\zeta) = \sigma' - \tau \geqslant \sigma - \tau = v(\zeta),$$

т. е.

$$v(\eta+\zeta) \geqslant \min[v(\eta),\ v(\zeta)]. \tag{2}$$

Наконец, если ζ — любой элемент кольца $\mathfrak{J}$, лежащий в $\mathfrak{p}$, то

$$v(\zeta) > 0.$$

Если же ζ — элемент из K, то $\mathfrak{J}\cdot(\zeta) \sim 1$ и поэтому $v(\zeta) = 0$.

Таким образом, выбрав на многообразии V неприводимое подмногообразие U размерности $d-1$, мы построили отображение $v(\zeta)$ элементов ζ поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ на аддитивную группу целых чисел, удовлетворяющее соотношениям (1) и (2). Такое отображение называется *нормированием* поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тот факт, что при этом не все элементы поля отображаются на нуль, означает, что нормирование *нетривиально*, а то, что $v(\zeta) = 0$ для любого ненулевого элемента из поля K, показывает, что наше нормирование подчинено важному ограничению, которое мы будем налагать на нормирования, рассматриваемые в следующей главе.

Докажем теперь результат, уже использованный раньше в этом параграфе:

Теорема II. *Любое неприводимое подмногообразие размерности $d-1$ на аффинно нормальном многообразии V размерности d является простым на V.*

Пусть U — неприводимое подмногообразие размерности $d-1$ на многообразии V, и пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал многообразия U в кольце $\mathfrak{J}$. Пусть, далее, $\omega_i = \omega_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(i = 1, \ldots, r)$ — базис идеала $\mathfrak{p}$, а $\omega = \omega(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — элемент из $\mathfrak{p}$, не лежащий в символическом квадрате $\mathfrak{p}^{(2)}$ идеала $\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{i} = \mathfrak{J}\cdot(\omega)$, то $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{p}$. Следовательно, $\mathfrak{i} \geqslant \mathfrak{p}$, и поэтому существуют простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$, отличные от $\mathfrak{p}$ и такие, что

$$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k,$$

где $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k = 0$ (i) (гл. XV, § 7, теорема III). Пусть $\varphi = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — элемент идеала $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k$, не принадлежащий $\mathfrak{p}$. Тогда $\omega_j\varphi \in \mathfrak{p}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{i}$, а значит,

$$\omega_j\varphi = a_j\omega \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

где $a_j = a_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{J}$.

Пусть

$$\omega_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = r+1, \ldots, s)$$

— базис уравнений многообразия V. Предположим, что $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ равны нулю при $i = r+1, \ldots, s$, и определим многочлены

$$\nu_i(x_1, \ldots, x_n) = \omega_i(x)\varphi(x) - a_i(x)\omega(x) \qquad (i = 1, \ldots, s).$$

Тогда уравнения

$$\omega_i(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

составляют базис для уравнений многообразия U, а значит, найдутся многочлены $b_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, s)$, такие, что

$$\omega(x) = \sum_1^s b_i(x)\,\omega_i(x)$$

(ведь $\omega(x)$ обращается в нуль на U!). Следовательно,

$$\nu_i(x) = \sum_{j=1}^{s} [\varphi(x)\,\delta_{ij} - a_i(x)\,b_j(x)]\,\omega_j(x) \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Так как, по построению, $\nu_i(\xi)$ равно нулю при всех значениях i, то мы получили s уравнений, удовлетворяющихся точками многообразия V. Если мы сможем доказать, что матрица $(\partial\nu_i/\partial x_j)$ имеет в общей точке η многообразия U ранг $n-d$, то отсюда будет следовать, что подмногообразие U является простым на V (§ 4, стр. 152).

Ввиду того что η есть общая точка U, а уравнения $\omega_i(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, s)$ образуют базис для уравнений этого многообразия, матрица $(\partial\omega_i/\partial\eta_j)$ имеет ранг $n-d+1$. Далее, так как

$$\omega_j(\eta) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, s),$$

то

$$\frac{\partial\nu_i}{\partial\eta_k} = \sum_{j=1}^{s} [\varphi(\eta)\,\delta_{ij} - a_i(\eta)\,b_j(\eta)]\,\frac{\partial\omega_j}{\partial\eta_k}.$$

Но так как $\varphi(\xi) \neq 0$ (ρ), то $\varphi(x)$ не обращается в нуль на U. Следовательно, $\varphi(\eta) \neq 0$.

Непосредственное вычисление показывает, что определитель матрицы

$$(\varphi(\eta)\,\delta_{ij} - a_i(\eta)\,b_j(\eta))$$

равен

$$[\varphi(\eta)]^s - [\varphi(\eta)]^{s-1} \sum_{i=1}^{s} a_i(\eta)\,b_i(\eta).$$

Поэтому ранг ρ этой матрицы равен либо $s-1$, либо s, в зависимости от того, выполняется или нет соотношение

$$\varphi(\eta) = \sum_{i=1}^{s} a_i(\eta)\,b_i(\eta).$$

Из теоремы I § 6 гл. II следует, что ранг матрицы $(\partial\nu_i/\partial\eta_k)$ не меньше $\rho + n - d + 1 - s \geqslant n - d$. Но этот ранг не может превос-

ходить $n-d$. Следовательно, он точно равен $n-d$ и $p=s-1$. Но из того, что ранг матрицы $(\partial v_i/\partial \eta_{lk})$ равен $n-d$, вытекает, что подмногообразие U просто на V, и теорема II доказана.

Пусть теперь V — любое неприводимое многообразие размерности d в пространстве A_n, не обязательно нормальное, и пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка V. Из теорем II и VII § 8 гл. XV следует, что существует конечное множество элементов $\eta_1, \ldots, \eta_s$ поля частных кольца $\mathfrak{J}=K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, таких, что кольцо $\mathfrak{J}^*=\mathfrak{J}[\eta_1, \ldots, \eta_s]=K[\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_s]$ является целым замыканием $\mathfrak{J}$. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_t$ — любое конечное множество элементов из $\mathfrak{J}^*$, для которых $\mathfrak{J}^*=K[\zeta_1, \ldots, \zeta_t]$. Рассмотрим аффинное пространство A_t размерности t над полем K и обозначим через V^* многообразие, общей точкой которого является точка $(\zeta_1, \ldots, \zeta_t)$. Его областью целостности является кольцо $\mathfrak{J}^*$, и поэтому многообразие V^* аффинно нормально. Полем частных кольца $\mathfrak{J}^*$ является поле частных для $\mathfrak{J}$. Поэтому многообразие V^* бирационально эквивалентно многообразию V. Любое многообразие V^*, получаемое описанным путем из V, называется нормальным многообразием, *связанным* с V. Установим теперь несколько свойств соотношения между V и V^*.

Пусть U^* — неприводимое многообразие на V^*, имеющее размерность s, и пусть $\mathfrak{p}^*$ — простой идеал этого многообразия в кольце $\mathfrak{J}^*$. В таком случае пересечение $\mathfrak{p}=\mathfrak{J}\cap\mathfrak{p}^*$ является простым идеалом кольца $\mathfrak{J}$ (гл. XV, § 4, теорема III). Этот идеал определяет неприводимое подмногообразие U многообразия V. Покажем, что U имеет размерность s. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_{s+1}$ — любые $s+1$ элементов из $\mathfrak{J}$ (а значит, и из $\mathfrak{J}^*$). Они алгебраически зависимы по модулю $\mathfrak{p}^*$ в кольце $\mathfrak{J}^*$. Поэтому существует ненулевой многочлен $f(z_1, \ldots, z_{s+1})$ над полем K, такой, что $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{s+1})\in\mathfrak{p}^*$. Но так как элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_{s+1}$ принадлежат $\mathfrak{J}$, то $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{s+1})\in\mathfrak{J}$, и потому $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{s+1})$ принадлежит пересечению $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{p}^*=\mathfrak{p}$. Следовательно, любые $s+1$ элементов кольца $\mathfrak{J}$ алгебраически зависимы по модулю $\mathfrak{p}$, и поэтому U имеет размерность, не превышающую s. Допустим теперь, что U имеет размерность s' $(s'\leqslant s)$. Мы можем найти s' элементов $\tau_1, \ldots, \tau_{s'}$ кольца $\mathfrak{J}$, таких, что любой элемент из $\mathfrak{J}$ будет целым по модулю $\mathfrak{p}$ над порождаемым ими кольцом. В самом деле, кольцо $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}$ является областью целостности многообразия U, а так как это многообразие имеет размерность s', то, как мы знаем, в его области целостности найдутся s' таких элементов, что все элементы $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}$ являются целыми над кольцом, порождаемым найденными элементами. В таком случае можно взять в качестве $\tau_1, \ldots, \tau_{s'}$ элементы из $\mathfrak{J}$, соответствующие указанным элементам из $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}$. Но любой элемент из $\mathfrak{J}^*$ — целый относительно $\mathfrak{J}$, а значит, и целый по модулю $\mathfrak{p}^*$ относительно кольца $K[\tau_1, \ldots, \tau_{s'}]$. Поэтому многообразие U^* имеет размерность, не превышающую s', т. е. $s'\geqslant s$. Отсюда следует, что $s=s'$. Таким образом, каждому неприводимому многообразию U^* размерности s, лежащему на V^*,

соответствует однозначно определенное подмногообразие размерности s на V.

Пусть теперь U — неприводимое подмногообразие размерности s на многообразии V и $\mathfrak{p}$ — его простой идеал в кольце $\mathfrak{J}$. Предположим, что $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p} = [\mathfrak{q}_1^*, \ldots, \mathfrak{q}_k^*]$, где $\mathfrak{q}_i^*$ являются $\mathfrak{p}_i^*$-примарными идеалами кольца $\mathfrak{J}^*$. При этом хотя бы для одного значения i будет $\mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}_i^*$ (гл. XV, § 4, теорема V, следствие), и $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{J} \cap \mathfrak{q}_i^* \subseteq \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}_i^*$ при всех i. Обозначим через U_i^* подмногообразия на V^*, определяемые идеалами $\mathfrak{p}_i^*$, а через U_i — многообразия на V, определяемые идеалами $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}_i^*$. Тогда $U_i \subseteq U$, причем хотя бы для одного значения i будет $U_i = U$. Предположим, что многообразия $U_1, \ldots, U_r$ совпадают с U и что $U_{r+1}, \ldots, U_k$ — собственные подмногообразия U. Так как $\dim U_i^* = \dim U_i$, то многообразия $U_1^*, \ldots, U_r^*$ имеют размерность s, а $U_{r+1}^*, \ldots, U_k^*$ — размерность, меньшую s. Мы будем говорить, что подмногообразия $U_1^*, \ldots, U_r^*$ на V^* соответствуют подмногообразию U на V.

Если U^* — любое многообразие на V^*, определяющее многообразие U на V, то мы имеем $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}$, и поэтому $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p} = 0$ $(\mathfrak{p}^*)$ (гл. XV, § 4, теорема VI). Так как идеал $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p}$ имеет размерность s, как и многообразие U^*, то U^* должно быть одним из многообразий $U_1^*, \ldots, U_r^*$. В частности, если кольцо $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}$ целозамкнуто, то теорема VIII § 8 гл. XV гласит, что $r = 1$, $\mathfrak{q}_1^* = \mathfrak{p}_1^*$ и что $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}_1^*}^* = \mathfrak{J}_\mathfrak{p}$. Следовательно, если кольцо частных многообразия U целозамкнуто, то на многообразии V^* существует единственное подмногообразие U^*, соответствующее U, причем $Q(U) = Q(U^*)$. Таким образом, доказана

Теорема III. *Между неприводимыми подмногообразиями размерности s на неприводимом многообразии V в аффинном пространстве и неприводимыми подмногообразиями размерности s аффинно нормального многообразия V^*, связанного с V, существует некоторое соответствие. При этом каждому подмногообразию U^* размерности s, лежащему на V^*, соответствует однозначно определенное подмногообразие U размерности s на V, а каждому подмногообразию размерности s на V соответствует конечное число подмногообразий на V^*. Если кольцо частных подмногообразия U целозамкнуто, то соответствующее ему подмногообразие U^* на V^* однозначно определено и $Q(U) = Q(U^*)$.*

Соотношение между различными нормальными многообразиями в аффинном пространстве, связанными с одним и тем же многообразием V, может быть установлена непосредственно, так как каждое из этих многообразий можно рассматривать как нормальное многообразие, связанное с любым другим из них. При этом соответствие между неприводимыми подмногообразиями будет взаимно однозначным.

Читатель может заметить, что мы говорили здесь о соответствии между многообразиями V и V^*, но не показали, что это понятие согласуется с определениями гл. XI. Однако здесь мы не рассматривали соответствующие *точки* многообразий V и V^*, а рассматривали соответствующие *неприводимые подмногообразия*. Описанное здесь соответствие имеет тесную связь с понятием, рассмотренным в гл. XI. В самом деле, между V и V^* легко установить соответствие того типа, какой рассматривался в гл. XI, так, чтобы каждой точке многообразия V соответствовало конечное число точек на V^* и каждой точке многообразия V^* соответствовала однозначно определенная точка на V. При этом, если U — любое неприводимое многообразие на V, определяемое простым идеалом $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}$, и если идеал $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{p}$ определяет многообразие $U^* = U_1^* + \ldots + U_k^*$, то совокупность точек многообразия V^*, соответствующих точкам многообразия U, составляет целиком многообразие U^*. Наоборот, если U^* — неприводимое многообразие на V^*, определяемое простым идеалом $\mathfrak{p}^*$ кольца $\mathfrak{J}^*$, то геометрическое место точек многообразия V, соответствующих точкам, лежащим на V^*, определяется идеалом $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}^*$ кольца $\mathfrak{J}$. Мы не будем, однако, доказывать эти результаты здесь, так как они содержатся в более общих результатах, которые будут доказаны для бирациональных соответствий в гл. XVIII.

§ 6. Проективно нормальные многообразия

Большинство результатов этой главы доказано для многообразий в аффинном пространстве, хотя некоторые из них, которые можно выразить в форме свойств кольца частных неприводимого подмногообразия заданного неприводимого многообразия, могут толковаться как проективные свойства. Свойства многообразий в аффинном пространстве представляют интерес и сами по себе, но мы будем заниматься главным образом применением этих свойств для получения свойств многообразий в проективном пространстве. Теперь мы в состоянии воспользоваться уже полученными в этой главе результатами для введения и изучения важного понятия *проективно нормального многообразия*.

Пусть V — неприводимое многообразие размерности d над основным полем K, лежащее в проективном пространстве S_n. Как обычно, предположим, что V не лежит на гиперплоскости $x_0 = 0$. Пусть $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$ — общая точка многообразия V. Мы можем предположить координаты точки нормированными так, что $\xi_0 = 1$. Общий вид координат точки ξ есть

$$(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n) = (\tau_0, \tau_0\xi_1, \ldots, \tau_0\xi_n),$$

где τ_0 — элемент некоторого расширения поля K, отличный от нуля. Нам будет удобно считать, что τ_0 является неизвестным над полем функций $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ многообразия V. Тогда и элементы

$\tau_i = \tau_0\xi_i$ являются неизвестными над полем Σ при $i = 1, \ldots, n$, так как $\xi_i \in \Sigma$ [1]). В этом параграфе мы всюду будем предполагать однородные координаты общей точки $(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ многообразия V такими, что

(I) $$\tau_i = \tau_0\xi_i,$$

(II) поле $\Sigma^* = K(\tau_0, \ldots, \tau_n) = K(\tau_0, \tau_0\xi_1, \ldots, \tau_0\xi_n) = \Sigma(\tau_0)$ является чисто трансцендентным расширением Σ.

Если мы будем рассматривать $(x_0, \ldots, x_n)$ как неоднородные координаты точки пространства A_{n+1}, то $(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ будет общей точкой некоторого многообразия V^* размерности $d+1$, полем функций которого является Σ^*. Каждой точке $(t'_0, \ldots, t'_n)$ многообразия V^*, отличной от точки $(0, \ldots, 0)$, соответствует однозначно определенная точка с однородными координатами $(t'_0, \ldots, t'_n)$, лежащая на V. Наоборот, каждой точке $(x'_0, \ldots, x'_n)$ многообразия V соответствует множество точек на V^*, координаты которых имеют вид $(t'x'_0, \ldots, t'x'_n)$. Эти точки составляют прямую, проходящую через точку $(0, \ldots, 0)$. Таким образом, V^* является „конусом" с вершиной в точке $(0, \ldots, 0)$. Сечение этого конуса бесконечно удаленной плоскостью пространства A_{n+1} представляет собой многообразие V. Мы, однако, не будем пользоваться таким представлением.

Если t — произвольный ненулевой элемент поля K, то точка $(t\tau_0, \ldots, t\tau_n)$ будет общей точкой многообразия V, причем $K(t\tau_0, \ldots, t\tau_n) = \Sigma(\tau_0) = \Sigma^*$. Пусть ζ — любой элемент поля Σ^*. Тогда мы можем написать

$$\zeta = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_\rho}{b_0 + b_1 + \ldots + b_\sigma},$$

где a_i и b_i являются формами степени i от $\tau_0, \ldots, \tau_n$ над полем K. Отображение поля Σ^*, получаемое заменой τ_i на $t\tau_i$, переводит ζ в элемент $\zeta^{(t)}$, где

$$\zeta^{(t)} = \frac{a_0 + ta_1 + \ldots + t^\rho a_\rho}{b_0 + tb_1 + \ldots + t^\sigma b_\sigma}.$$

Элемент ζ называется *однородным степени* λ, если $\zeta^{(t)} = t^\lambda\zeta$ при любом выборе t из K. Предположим, что элемент ζ является однородным степени $\lambda \geqslant 0$. Тогда

$$a_0 + ta_1 + \ldots + t^\rho a_\rho = \zeta t^\lambda (b_0 + tb_1 + \ldots + t^\sigma b_\sigma).$$

Так как это соотношение должно иметь место при $t = 0, 1, 2, \ldots$, то отсюда следует, что

$$a_\mu = 0 \ (\mu < \lambda), \quad a_{\lambda+\mu} = \zeta b_\mu \ (\mu = 0, 1, \ldots).$$

[1]) Конечно, это верно лишь для тех i, для которых $\xi_i \neq 0$. В частности, сказанное верно для достаточно общей системы координат.— *Прим. перев.*

Но так как хотя бы для одного значения μ, например для $\mu = \nu$, должно быть $b_\nu \neq 0$, то мы получаем, что $\zeta = a_{\lambda+\nu}/b_\nu$, т. е. что элемент ζ должен быть отношением однородного многочлена от $\tau_0, \ldots, \tau_n$ над полем K, имеющего степень $\lambda + \nu$, к однородному многочлену степени ν. Аналогичное рассуждение имеет место и при $\lambda < 0$. Следовательно, любой элемент поля Σ^*, однородный и степени λ, имеет вид $\alpha\tau_0^\lambda$, где $\alpha \in \Sigma$. Наоборот, если

$$\alpha = \beta(\xi_1, \ldots, \xi_n)/\gamma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

и

$$\zeta = \alpha\tau_0^\lambda = \tau_0^{\lambda+\nu}\beta(\tau_1/\tau_0, \ldots, \tau_n/\tau_0)/\tau_0^\nu\gamma(\tau_1/\tau_0, \ldots, \tau_n/\tau_0),$$

то ζ представляет собой отношение однородного многочлена степени $\lambda + \nu$ к однородному многочлену степени ν и поэтому является однородным элементом степени λ. В частности, элемент поля Σ^*, являющийся однородным степени нуль, принадлежит полю Σ. И обратно, любой элемент из Σ является однородным степени нуль.

Будем обозначать через $\mathfrak{J}^*$ кольцо $K[\tau_0, \ldots, \tau_n]$. Его полем частных служит поле Σ^*. Мы будем говорить, что многообразие V *проективно нормально*, если любой однородный элемент поля Σ^*, степень однородности которого больше нуля, целый относительно $\mathfrak{J}^*$, лежит в $\mathfrak{J}^*$. Существование многообразия $\overline{V}$, имеющего то же поле функций, что и многообразие V, и являющегося проективно нормальным, нельзя доказать, просто беря $\mathfrak{J}^*$-базис $\tau_{n+1}, \ldots, \tau_{n+r}$ для целого замыкания кольца $\mathfrak{J}^*$ и строя многообразие в пространстве S_{n+r}, имеющее общую точку $(\tau_0, \ldots, \tau_{n+r})$. Действительно, элементы $\tau_{n+1}, \ldots, \tau_{n+r}$ могут и не быть все однородными со степенью однородности 1. Но если они не являются такими, то легко видеть, что поле

$$K(\tau_0/\tau_0, \ldots, \tau_n/\tau_0, \tau_{n+1}/\tau_0, \ldots, \tau_{n+r}/\tau_0)$$

имеет размерность $d+1$ над K, так что многообразие с общей точкой $(\tau_0, \ldots, \tau_{n+r})$ имеет размерность, превосходящую размерность многообразия V. Поэтому мы должны доказать следующую теорему:

Теорема I. *Если V — неприводимое многообразие размерности d над полем K, то существует бирациональный образ многообразия V, являющийся проективно нормальным.*

При доказательстве этой теоремы мы определим некоторый класс бирациональных образов многообразия V, являющихся проективно нормальными многообразиями. Эти многообразия будут называться *производными нормальными многообразиями* многообразия V.

Докажем прежде всего, что любой элемент поля Σ^*, целый относительно кольца $\mathfrak{J}^*$, представляет собой сумму однородных элементов неотрицательных степеней из поля Σ^*, каждый из которых является целым относительно $\mathfrak{J}^*$. Пусть ζ — любой элемент из Σ^*, целый относительно $\mathfrak{J}^*$. В таком случае мы имеем соотношение

$$\zeta^m + \alpha_1\zeta^{m-1} + \ldots + \alpha_m = 0,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — элементы $\mathfrak{J}^*$. Так как $\Sigma^* = \Sigma(\tau_0)$ и $\mathfrak{J}^* \subseteq \Sigma[\tau_0]$, то отсюда следует, что ζ является элементом поля $\Sigma(\tau_0)$, целым относительно кольца $\Sigma[\tau_0]$. Но кольцо $\Sigma[\tau_0]$ целозамкнуто в своем поле частных (гл. XV, § 8, теорема VI). Следовательно, $\zeta \in \Sigma[\tau_0]$, и мы можем написать

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \ldots + \zeta_\rho,$$

где каждый из элементов ζ_i однороден степени i. Если t — произвольный отличный от нуля элемент поля K, то отображение $\tau_i \to t\tau_i$ переводит кольцо $\mathfrak{J}^*$ в себя. Следовательно, оно переводит любой элемент из Σ^*, целый относительно $\mathfrak{J}^*$, также в элемент, целый относительно $\mathfrak{J}^*$. В частности, элемент

$$\zeta^{(t)} = \zeta_0 + t\zeta_1 + \ldots + t^\rho \zeta_\rho$$

будет целым относительно $\mathfrak{J}^*$. Возьмем $t = 0, 1, \ldots, \rho$. Тогда элементы $\zeta^{(0)}, \ldots, \zeta^{(\rho)}$ — целые относительно $\mathfrak{J}^*$, и мы получаем $\rho + 1$ уравнений, позволяющих выразить $\zeta_0, \ldots, \zeta_\rho$ через $\zeta^{(0)}, \ldots, \zeta^{(\rho)}$. Определитель из коэффициентов этих уравнений является отличным от нуля элементом поля K и поэтому представляет собой делитель единицы кольца $\mathfrak{J}^*$. Отсюда следует, что элементы $\zeta_0, \ldots, \zeta_\rho$ выражаются суммами элементов, целых относительно $\mathfrak{J}^*$, а следовательно, и сами должны быть целыми относительно $\mathfrak{J}^*$. Этим наше утверждение доказано.

Целое замыкание $\overline{\mathfrak{J}}$ кольца $\mathfrak{J}^*$ в поле Σ^* имеет конечный $\mathfrak{J}^*$-базис (глава XV, § 8, теорема VII). Любой элемент такого базиса является суммой однородных элементов, каждый из которых будет целым относительно $\mathfrak{J}^*$. Поэтому можно считать, что рассматриваемый $\mathfrak{J}^*$-базис кольца $\overline{\mathfrak{J}}$ состоит из однородных элементов. Так как кольцо $\mathfrak{J}^*$ порождается над полем K однородными элементами $\tau_0, \ldots, \tau_n$, то $\overline{\mathfrak{J}}$ также порождается над K конечным множеством однородных элементов неотрицательных степеней:

$$\overline{\mathfrak{J}} = K[\eta_0, \ldots, \eta_r],$$

где $\eta_0, \ldots, \eta_r$ — однородные элементы поля Σ^*, имеющие неотрицательные степени. Рассмотрим теперь элементы из $\overline{\mathfrak{J}}$, являющиеся однородными степени нуль. Если ζ — однородный элемент степени нуль, удовлетворяющий уравнению

$$\zeta^m + \alpha_1 \zeta^{m-1} + \ldots + \alpha_m = 0,$$

где $\alpha_i \in \mathfrak{J}^*$, то мы положим

$$\alpha_i = \sum_{j \geqslant 0} \alpha_{ij},$$

где α_{ij} имеет степень однородности j, а $\alpha_{i0} \in K$. В этом случае, рассматривая автоморфизмы $\tau_i \to t\tau_i$ поля Σ^*, мы получаем уравнение

$$\zeta^m + \sum_{j \geqslant 0} \alpha_{1j} t^j \zeta^{m-1} + \ldots + \sum_{j \geqslant 0} \alpha_{mj} t^j = 0,$$

имеющее место при всех t из K. Отсюда следует, что

$$\zeta^m + \alpha_{10} \zeta^{m-1} + \ldots + \alpha_{m0} = 0.$$

Но так как ζ — элемент поля Σ^*, имеющий степень однородности нуль, то он принадлежит полю Σ и является, в силу написанного уравнения, алгебраическим над K. Следовательно, ζ принадлежит алгебраическому замыканию K' поля K в поле Σ. Обратно, если ζ — любой элемент из K', то он удовлетворяет уравнению

$$\zeta^m + a_1 \zeta^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

в котором $a_i \in K$. Следовательно, ζ является целым относительно $\mathfrak{J}^*$ и поэтому лежит в $\overline{\mathfrak{J}}$.

Пусть σ есть степень поля K' над K. Тогда в кольце $\overline{\mathfrak{J}}$ существует система из σ элементов, линейно независимых над полем K и имеющих степень однородности нуль. Без ограничения общности можно считать, что в кольце $\overline{\mathfrak{J}} = K[\eta_0, \ldots, \eta_r]$ элементы $\eta_0, \ldots, \eta_\rho$ имеют положительные степени однородности, а $\eta_{\rho+1}, \ldots, \eta_r$ — степени однородности нуль, причем $r - \rho = \sigma$. Предположим, что элементы η_i $(i \leqslant \rho)$ имеют степени однородности d_i. Любой элемент из $\overline{\mathfrak{J}}$ со степенью однородности k может быть выражен в виде линейной комбинации с коэффициентами из K, составленной из произведений

$$\eta_0^{i_0} \ldots \eta_\rho^{i_\rho} \zeta \qquad (i_j \geqslant 0),$$

в которых

$$i_0 d_0 + \ldots + i_\rho d_\rho = k, \tag{1}$$

а множитель ζ имеет степень однородности нуль и лежит в $\overline{\mathfrak{J}}$. Так как ζ является линейной комбинацией элементов $\eta_{\rho+1}, \ldots, \eta_r$ с коэффициентами из K, отсюда следует, что произведения $\eta_0^{i_0} \ldots \eta_\rho^{i_\rho} \eta_{j+\rho}$, в которых показатели $i_0, \ldots, i_\rho$ удовлетворяют условию (1), а $j = 1, \ldots, r - \rho$, образуют базис K-модуля, состоящего из элементов $\overline{\mathfrak{J}}$, имеющих степень однородности k. Линейно независимый K-базис этого модуля мы обозначим через $\zeta_0^{(k)}, \ldots, \zeta_{n_k}^{(k)}$.

Число δ $(\delta > 0)$ будет называться *характером однородности* многообразия V, если оно обладает тем свойством, что K-базис модуля элементов из $\overline{\mathfrak{J}}$, имеющих степень однородности $k\delta$ (при любом целом положительном k), может быть построен из произведений элементов $\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}$, состоящих из k множителей, т. е. если

$$\zeta_i^{(k\delta)} = f_i(\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}) \qquad (i = 0, \ldots, n_{k\delta}),$$

где $f_i(z_0, \ldots, z_{n_\delta})$ — однородные многочлены степени k над полем K. Мы вскоре докажем, что характеры однородности существуют. До сих пор относительно возможных характеров однородности многообразия известно довольно мало. Однако легко видеть, что если δ является характером однородности многообразия V, то $t\delta$ также будет характером однородности этого многообразия при любом положительном целом t. Действительно, так как δ является характером однородности многообразия V, то элементы $\zeta_i^{(kt\delta)}$ выражаются однородными многочленами степени kt от элементов $\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}$, коэффициенты которых принадлежат K. Следовательно, указанные элементы выражаются также однородными многочленами степени k от всевозможных произведений элементов $\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}$, содержащих t множителей. Но такие произведения, в свою очередь, являются линейными комбинациями элементов $\zeta_0^{(t\delta)}, \ldots, \zeta_{n_{t\delta}}^{(t\delta)}$. Отсюда нужный результат вытекает непосредственно. Если многообразие V проективно нормально, то $\overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}^*$. Любой элемент из $\mathfrak{J}^*$, имеющий степень однородности k, является однородным многочленом степени k от элементов $\tau_0, \ldots, \tau_n$. Следовательно, если многообразие V проективно нормально, то целое число 1 является характером однородности.

Мы докажем существование характеров однородности многообразия V, показав, что если d есть общее наименьшее кратное чисел $d_0, \ldots, d_\rho$ (здесь d_i — степень однородности элемента η_i), то ρd будет характером однородности многообразия V. Пусть k — любое целое число, большее ρ. Чтобы найти элементы из $\overline{\mathfrak{J}}$, имеющие степень однородности kd, рассмотрим произведения вида $\eta_0^{i_0} \ldots \eta_\rho^{i_\rho}\eta_{\rho+j}$, где

$$i_0 d_0 + \ldots + i_\rho d_\rho = kd. \tag{2}$$

Если $i_j < d/d_j$ $(i = 0, \ldots, \rho)$, то

$$i_0 d_0 + \ldots + i_\rho d_\rho < (\rho + 1)\, d \leqslant kd.$$

Следовательно, хотя бы один показатель i_j должен быть не меньше d/d_j. Пусть, например, $i_0 \geqslant d/d_0$. Тогда

$$\eta_0^{i_0} \ldots \eta_\rho^{i_\rho}\eta_{\rho+j} = \eta_0^{d/d_0}\eta_0^{i_0'}\eta_1^{i_1} \ldots \eta_\rho^{i_\rho}\eta_{\rho+j},$$

где $i_0' \geqslant 0$ и

$$i_0' d_0 + i_1 d_1 + \ldots + i_\rho d_\rho = (k-1)\, d.$$

Поэтому, если $k > \rho$, то любое произведение элементов $\eta_0, \ldots, \eta_r$, имеющее степень однородности kd, является произведением элемента из $\overline{\mathfrak{J}}$ со степенью однородности d и некоторого произведения тех же элементов со степенью однородности $(k-1)\, d$. Если $k - 1 > \rho$, то можно трактовать последнее произведение таким же образом и продолжить процесс далее. Если $k = m + \rho$, то произведение $\eta_0^{i_0} \ldots \eta_\rho^{i_\rho}\eta_{\rho+i}$

равно произведению m элементов, каждый из которых имеет степень однородности d, умноженному на произведение элементов $\eta_0, \ldots, \eta_\rho$, имеющее степень однородности ρd. Если взять $m = t\rho$, то отсюда следует, что любое произведение $\eta_0^{i_0} \ldots \eta_\rho^{i_\rho} \eta_{\rho+j}$, имеющее степень однородности $(t+1)\rho d$, равно произведению $t+1$ элементов из $\overline{\mathfrak{Z}}$, имеющих степень однородности ρd. Следовательно, любой элемент из $\overline{\mathfrak{Z}}$ со степенью однородности $(t+1)\rho d$ выражается однородным многочленом над K от элементов из $\overline{\mathfrak{Z}}$ со степенью однородности ρd. Это показывает, что ρd является характером однородности многообразия V.

Пусть теперь δ — любой характер однородности многообразия V, а $V^{(\delta)}$ — многообразие в пространстве S_{n_δ}, имеющее общую точку $(\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)})$ над полем K. Мы докажем теорему I, показав, что многообразие $V^{(\delta)}$ бирационально эквивалентно многообразию V и является проективно нормальным. Так как $(\tau_0)^\delta$ есть элемент из $\overline{\mathfrak{Z}}$, имеющий степень однородности δ, то он является линейной комбинацией элементов $\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}$ с коэффициентами из K. Без ограничения общности мы можем считать, что $\zeta_0^{(\delta)} = (\tau_0)^\delta$. Элемент $\tau_i(\tau_0)^{\delta-1}$ из $\overline{\mathfrak{Z}}$ при любом i имеет степень однородности δ. Следовательно,

$$\tau_i(\tau_0)^{\delta-1} = \sum_{j=0}^{n_\delta} a_{ij}\zeta_j^{(\delta)}.$$

Поэтому

$$\tau_i/\tau_0 = \sum_j a_{ij}\zeta_j^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)},$$

а значит,

$$K(\tau_1/\tau_0, \ldots, \tau_n/\tau_0) \subseteq K(\zeta_1^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)}).$$

С другой стороны, $\zeta_i^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)}$ является элементом поля Σ^*, имеющим степень однородности нуль. Следовательно, он содержится в Σ, а значит,

$$K(\zeta_1^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)}) \subseteq K(\tau_1/\tau_0, \ldots, \tau_n/\tau_0) = \Sigma.$$

Отсюда вытекает, что

$$K(\zeta_1^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)}) = \Sigma.$$

Но поле $K(\zeta_1^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}/\zeta_0^{(\delta)})$, является полем функций многообразия $V^{(\delta)}$. Таким образом, многообразия V и $V^{(\delta)}$ имеют одно и то же поле функций, т. е. они бирационально эквивалентны.

Поле $\Sigma^{(\delta)} = K(\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)})$, совпадающее с полем $\Sigma(\zeta_0^{(\delta)}) = \Sigma(\tau_0^\delta)$, является чисто трансцендентным расширением поля функций Σ многообразия $V^{(\delta)}$. При рассмотрении степеней однородности элементов

поля $\Sigma^{(\delta)}$ (расширенного поля, связанного с многообразием $V^{(\delta)}$) мы должны считать $\zeta_0^{(\delta)}$ элементом степени однородности 1. Если ζ — любой элемент из поля $\Sigma^{(\delta)}$, имеющий степень однородности ρ ($\rho > 0$), то, ввиду соотношения $\Sigma^{(\delta)} \subseteq \Sigma^* = \Sigma(\tau_0)$, его можно рассматривать как элемент из Σ^*. В таком случае его степень однородности будет равна $\rho\delta$. Если элемент является целым относительно $K[\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}]$, то он будет целым и относительно $\mathfrak{J}^* = K[\tau_0, \ldots, \tau_n]$, так как $K[\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}] \subseteq \overline{\mathfrak{J}}$, а последнее кольцо состоит из элементов, целых относительно $\mathfrak{J}^*$. Следовательно, $\zeta \in \overline{\mathfrak{J}}$. Но так как δ есть характер однородности многообразия V, а ζ имеет степень однородности $\rho\delta$ (как элемент поля Σ^*), то ζ должен выражаться однородным многочленом от $\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}$ и поэтому должен лежать в $K[\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}]$. Но любой элемент η из $\Sigma^{(\delta)}$, целый относительно кольца $K[\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}]$, является суммой однородных элементов, каждый из которых будет также целым относительно этого кольца. Отсюда следует, что $\eta \in K[\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}]$, и поэтому последнее кольцо целозамкнуто, а значит, многообразие $V^{(\delta)}$ проективно нормально.

Многообразие $V^{(\delta)}$ определяется многообразием V и характером однородности δ с точностью до проективного преобразования. Действительно, $V^{(\delta)}$ определяется K-модулем, состоящим из элементов $\overline{\mathfrak{J}}$, имеющих степень однородности δ. Система $\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}$ является линейно независимым базисом этого модуля. Если $\eta_0^{(\delta)}, \ldots, \eta_{n'}^{(\delta)}$ — другой линейно независимый базис того же модуля, то $n' = n_\delta$ и

$$\zeta_i^{(\delta)} = \sum_{j=0}^{n_\delta} a_{ij}\eta_j^{(\delta)} \qquad (i = 0, \ldots, n_\delta),$$

$$\eta_i^{(\delta)} = \sum_{j=0}^{n_\delta} b_{ij}\zeta_j^{(\delta)} \qquad (i = 0, \ldots, n_\delta),$$

где коэффициенты a_{ij} и b_{ij} принадлежат K. В таком случае мы имеем

$$\zeta_i^{(\delta)} = \sum_j \sum_k a_{ij}b_{jk}\zeta_k^{(\delta)}.$$

Но так как элементы $\zeta^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}$ линейно независимы над K, то должно быть

$$\sum_{j=}^{n_\delta} a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}.$$

Следовательно, матрицы (a_{ij}) и (b_{ij}) обе невырождены. Если $'V^{(\delta)}$ — многообразие в пространстве S_{n_δ}, имеющее $(\eta_0^{(\delta)}, \ldots, \eta_{n_\delta}^{(\delta)})$ своей общей

точкой, то $'V^{(\delta)}$ получается из $V^{(\delta)}$ проективным преобразованием

$$y_i = \sum_j b_{ij} x_j \qquad (i = 0, \ldots, n_\delta).$$

Следует отметить еще, что многообразие $V^{(\delta)}$ не лежит ни в каком линейном подпространстве пространства S_{n_δ}. В самом деле, если бы оно лежало в гиперплоскости

$$c_0 z_0 + c_1 z_1 + \ldots + c_{n_\delta} z_{n_\delta} = 0,$$

то мы имели бы

$$c_0 \zeta_0^{(\delta)} + \ldots + c_{n_\delta} \zeta_{n_\delta}^{(\delta)} = 0,$$

в то время как по построению элементы $\zeta_0^{(\delta)}, \ldots, \zeta_{n_\delta}^{(\delta)}$ линейно независимы над полем K.

Многообразия $V^{(\delta_1)}, V^{(\delta_2)}, \ldots$, определяемые многообразием V и соответствующие характерам однородности $\delta_1, \delta_2, \ldots$, называются производными нормальными многообразиями, соответствующими многообразию V.

Рассмотрим теперь соотношение между двумя производными нормальными многообразиями $V^{(\delta)}$ и $V^{(\delta')}$, полученными для многообразия V. Прежде всего введем одно понятие, которое имеет смысл для любого неприводимого многообразия U размерности d в пространстве S_n, независимо от того, будет ли U проективно нормальным или нет. Снова обозначим через $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ нормированную общую точку многообразия U и предположим, что τ_0 — неизвестное над полем $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а $\tau_i = \tau_0 \xi_i$. Точка $(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ является общей точкой многообразия U. Элементы кольца $K[\tau_0, \ldots, \tau_n]$, имеющие степень однородности k, где k — положительное целое число, составляют конечный K-модуль. Пусть $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n'}$ — линейно независимый K-базис этого модуля. Без ограничения общности можно предполагать, что $\zeta_0 = \tau_0^k$ и что элементы ζ_i являются произведениями элементов τ_j. Пусть U' — многообразие в пространстве $S_{n'}$, имеющее общую точку $(\zeta_0, \ldots, \zeta_{n'})$. Тогда, как мы видели выше,

$$K(\tau_1/\tau_0, \ldots, \tau_n/\tau_0) = K(\zeta_1/\zeta_0, \ldots, \zeta_{n'}/\zeta_0),$$

т. е. многообразие U' бирационально эквивалентно многообразию U. Рассмотрим соответствие C между пространствами S_n и $S_{n'}$, заданное в пространстве $S_{n,n'}$ общей точкой (τ, ζ). Многообразия U и U' являются соответственно многообразием-прообразом и многообразием-образом этого соответствия. Покажем, что каждой точке многообразия U в этом соответствии отвечает однозначно определенная точка на U', а каждой точке многообразия U' — однозначно определенная точка на U. В таком случае говорят, что между многообразиями U и U' установлено *взаимно однозначное соответствие без исключений*.

Так как U' и U являются многообразиями-образом и -прообразом в определенном выше соответствии, то каждой точке любого из них соответствует по крайней мере одна точка другого. Пусть $\zeta_i = f_i(\tau_0, \ldots, \tau_n)$, где многочлены $f_i(x_0, \ldots, x_n)$ однородны и имеют степень k. Покажем прежде всего, что ни одна собственная специализация элементов τ не может обращать в нуль соответствующую ей специализацию всех элементов $f_i(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ одновременно. В самом деле, при $i = 0, \ldots, n$ можно записать

$$\tau_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{n'} a_{ij} f_j(\tau) \qquad (a_{ij} \in K).$$

Но для любой специализации t' элементов τ хотя бы одно значение t'_ρ отлично от нуля, и для этого ρ мы имеем

$$(t'_\rho)^k = \sum_{j=0}^{n'} a_{\rho j} f_j(t') \neq 0,$$

откуда и следует требуемое.

Далее, если $(x_0, \ldots, x_n)$ и $(z_0, \ldots, z_{n'})$ — координатные системы в пространствах S_n и $S_{n'}$, то среди уравнений соответствия C имеются уравнения

$$z_i f_j(x) - z_j f_i(x) = 0 \qquad (i, j = 0, \ldots, n').$$

Но ввиду того, что ни для одной точки x' многообразия U не выполняются одновременно равенства

$$f_i(x') = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n'),$$

написанные выше уравнения показывают, что каждой точке x' многообразия U соответствует однозначно определенная точка на U'.

Для доказательства того, что каждой точке многообразия U' соответствует единственная точка на U, рассмотрим любую специализацию $z' = (z'_0, \ldots, z'_{n'})$ точки ζ. Хотя бы один из элементов z'_i, например z'_ρ, отличен от нуля. Положим

$$\zeta_\rho = f_\rho(\tau_0, \ldots, \tau_n) = \tau_0^{k_0} \ldots \tau_n^{k_n}$$

и выберем индекс j так, чтобы было $k_j > 0$. Так как элементы $\tau_0^{k_0} \ldots \tau_j^{k_j - 1} \ldots \tau_n^{k_n} \tau_i$ однородны и имеют степень k, то мы должны иметь

$$\tau_0^{k_0} \ldots \tau_j^{k_j - 1} \ldots \tau_n^{k_n} \tau_i = \sum_{\lambda=0}^{n'} b_{i\lambda} \tau_\lambda \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

где $b_{i\lambda} \in K$, $b_{j\lambda} = 0$ при $\lambda \neq \rho$ и $b_{j\rho} = 1$. В таком случае соответствие C удовлетворяет уравнениям

$$x_i z_\rho - x_j \sum_{\lambda=0}^{n'} b_{i\lambda} z_\lambda = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

из которых следует, что точка $(x'_0, \ldots, x'_n)$, где

$$x'_i = \sum_{\lambda=0}^{n'} b_{i\lambda} z'_\lambda,$$

является единственной точкой многообразия U, соответствующей точке z'.

Таким образом, соответствие между многообразиями U и U' оказывается взаимно однозначным без исключений. Многообразие U' называется образом многообразия U *при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка* k.

Очевидно, что если δ есть характер однородности многообразия V, а k — любое положительное целое число, то многообразие $V^{(k\delta)}$ является образом многообразия $V^{(\delta)}$ при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка k. Если $V^{(\delta)}$ и $V^{(\delta')}$ — два производных нормальных многообразия, Δ — общее наименьшее кратное чисел δ и δ' и

$$\Delta = e\delta = e'\delta',$$

то $V^{(\Delta)}$ является образом $V^{(\delta)}$ при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка e и одновременно образом $V^{(\delta')}$ при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка e'. Из доказанного следует также, что соответствие между многообразиями $V^{(\delta)}$ и $V^{(\delta')}$ будет взаимно однозначным без исключений. Следовательно, доказана

Теорема II. *Если* $V^{(\delta)}$ *и* $V^{(\delta')}$ *— производные нормальные многообразия для некоторого многообразия* V, *соответствующие характерам однородности* δ *и* δ', *и если* $\Delta = e\delta = e'\delta'$ *— общее наименьшее кратное чисел* δ *и* δ', *то образ многообразия* $V^{(\delta)}$ *при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка* e *проективно эквивалентен образу* $V^{(\delta')}$ *при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка* e'. *Между точками многообразий* $V^{(\delta)}$ *и* $V^{(\delta')}$ *существует взаимно однозначное соответствие без исключений.*

Предположим теперь, что многообразие V проективно нормально в пространстве S_n, а A_n — любое аффинное пространство, полученное из S_n (конечно, при том ограничении, что V не лежит целиком на бесконечно удаленной гиперплоскости пространства A_n). Покажем, что в таком случае V будет аффинно нормальным в A_n.

Если в качестве бесконечно удаленной гиперплоскости взята гиперплоскость

$$c_0 x_0 + \ldots + c_n x_n = 0,$$

то областью целостности многообразия V в A_n будет

$$\mathfrak{J} = K\left[\frac{\tau_0}{\sum c_i \tau_i}, \frac{\tau_1}{\sum c_i \tau_i}, \ldots, \frac{\tau_n}{\sum c_i \tau_i}\right].$$

Пусть η — любой элемент поля частных кольца $\mathfrak{J}$, целый относительно $\mathfrak{J}$. Тогда существует такое целое число ρ ($\rho > 0$), для которого элемент $\zeta = \eta(\sum c_i\tau_i)^\rho$ будет целым относительно $\mathfrak{J}^* = K[\tau_0, \ldots, \tau_n]$. Но так как многообразие V проективно нормально, то ζ будет некоторой формой $f(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ над полем K, имеющей степень ρ. Следовательно,

$$\eta = f\left(\frac{\tau_0}{\sum c_i\tau_i}, \ldots, \frac{\tau_n}{\sum c_i\tau_i}\right) \in \mathfrak{J},$$

а значит, многообразие V аффинно нормально в пространстве A_n. Таким образом, справедлива

Теорема III. *Пусть многообразие V проективно нормально в пространстве S_n, а A_n — аффинное пространство, получаемое из S_n. Если гиперплоскость, принимаемая в качестве бесконечно удаленной при построении пространства A_n, не содержит многообразия V, то это многообразие аффинно нормально в пространстве A_n.*

Мы можем теперь воспользоваться теоремой II § 5 и вывести из нее следующую теорему:

Теорема IV. *Каждое неприводимое многообразие размерности $d-1$, лежащее на проективно нормальном многообразии V размерности d, является простым подмногообразием V.*

Из теорем I и IV в качестве частного случая вытекает следующее предложение:

Теорема V. *Любое неприводимое многообразие размерности* 1 *может быть бирационально преобразовано в многообразие, все точки которого просты.*

Читателю может показаться правдоподобным предположение о том, что имеет место обращение теоремы III. Именно, если V — многообразие в пространстве S_n, такое, что при любом переходе от S_n к аффинному пространству A_n многообразие V оказывается аффинно нормальным в A_n, то оно будет проективно нормально в S_n. Однако, как показывает следующий пример, это предположение неверно. Рассмотрим в S_3 многообразие V, имеющее общую точку $(1, t, t^3, t^4)$, где t — неизвестное над основным полем K. Читатель может проверить, что все точки этого многообразия являются простыми, а значит, кольцо частных любого нульмерного подмногообразия многообразия V будет целозамкнутым. Если мы перейдем к любому аффинному пространству A_3, то область целостности многообразия V в A_3 будет пересечением колец частных нульмерных подмногообразий на V (гл. XV, § 5, теорема X) и поэтому будет целозамкнутой. Поэтому V аффинно нормально в A_3. Мы покажем, однако, что V не является проективно нормальным в S_3. Пусть τ_0 — неизвестное над полем функций $K(t)$ многообразия V. Положим $\tau_1 = \tau_0 t$, $\tau_2 = \tau_0 t^3$, $\tau_3 = \tau_0 t^4$. V будет проективно нормальным в том и только в том случае, если кольцо $K[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3]$ целозамкнуто в его поле

частных $K(\tau_0, t)$. Но если мы положим $\zeta = \tau_0\tau_2/\tau_1$, то будем иметь $\zeta^2 = (\tau_0 t)^2 = \tau_0\tau_3$. Следовательно, элемент ζ является целым над кольцом $K[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3]$. Но так как ζ не принадлежит этому кольцу, то многообразие V не является проективно нормальным.

Дело в том, что аффинная нормальность многообразия при любом выборе бесконечно удаленной гиперплоскости является, по существу, *локальным свойством*, т. е. может быть выражена с помощью свойств подмногообразий (как мы и сделали в предыдущем примере). Свойство же многообразия быть проективно нормальным есть свойство многообразия в целом.

Следующая теорема будет использована для получения новой характеристики проективно нормального многообразия. Однако она довольно важна и сама по себе.

Пусть V — алгебраическое многообразие размерности d и порядка g в пространстве S_n, и пусть $(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ — общая точка для V, причем координата τ_0 трансцендентна над полем функций $\Sigma = K(\tau_1/\tau_0, \ldots, \tau_n/\tau_0)$ многообразия V. Допустим, что V^* — неприводимое многообразие в пространстве S_m, бирационально эквивалентное многообразию V. Координаты $(\tau_0^*, \ldots, \tau_m^*)$ общей точки многообразия V^* мы можем выбрать из элементов поля $\Sigma(\tau_0)$, имеющих степень однородности 1. Если имеют место соотношения

$$\tau_i = \sum_{j=0}^{m} a_{ij}\tau_j^* \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

в которых элементы a_{ij} принадлежат полю K, то мы будем говорить, что V является *проекцией* многообразия V^*.

Если элементы $\tau_0, \ldots, \tau_n$ удовлетворяют самое большее r линейно независимым соотношениям вида

$$\sum_{0}^{n} a_i\tau_i = 0,$$

то многообразие V лежит в пространстве $(n-r)$ измерений и не лежит в пространстве низшей размерности. Мы будем говорить, что *система сечений многообразия V гиперплоскостями полна*, если любое многообразие V^* порядка g, проекцией которого является V, также лежит в пространстве размерности $n-r$. Эта терминология взята из теории линейных систем, играющей основную роль в теории бирациональных инвариантов алгебраических многообразий, но находящейся за пределами настоящей книги. Докажем следующую теорему:

Теорема VI. *Система сечений многообразия V гиперплоскостями полна в том и только в том случае, если каждый элемент поля $\Sigma(\tau_0)$, имеющий степень однородности 1 и целый относительно кольца $K[\tau_0, \ldots, \tau_n]$, лежит в этом кольце.*

Сделаем сначала преобразование координат в пространстве S_n так, чтобы многообразие V лежало в подпространстве

$$x_{n'+1}=0,\ \ldots,\ x_n=0$$

(здесь $n'=n-r$) и не лежало в подпространстве низшей размерности. В таком случае V можно рассматривать как многообразие в пространстве $S_{n'}$, имеющее общую точку $(\tau_0, \ldots, \tau_{n'})$, координаты которой линейно независимы над K. Можно предполагать еще, что элементы $\xi_i=\tau_i/\tau_0$ удовлетворяют следующим условиям: (I) $\xi_1, \ldots, \xi_d$ являются алгебраически независимыми над K, (II) $\xi_{d+1}, \ldots, \xi_{n'}$ являются целыми над кольцом $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, причем каждый ξ_{d+i} служит примитивным элементом поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_{n'})$ над полем $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, и (III) неприводимое уравнение, связывающее элементы $\xi_1, \ldots, \xi_d, \xi_{d+i}$, имеет степень g и содержит член ξ_{d+i}^g. Эти условия можно выразить в однородных координатах следующим образом: все элементы τ_i $(i=0, \ldots, n')$ — целые над кольцом $K[\tau_0, \ldots, \tau_d]$, причем τ_{d+i} является примитивным элементом поля $K(\tau_0, \ldots, \tau_{n'})$ над $K(\tau_0, \ldots, \tau_d)$, а неприводимое однородное уравнение

$$f(t_0, \ldots, t_d, t_{d+i})=0,$$

связывающее $\tau_0, \ldots, \tau_d, \tau_{d+i}$, имеет степень относительно t_{d+i} и полную степень, равные g. Пользуясь теоремой I § 9 гл. X, мы усматриваем, что неприводимое уравнение, связывающее элементы $\tau_0, \ldots, \tau_d$ и $\tau=\sum_0^{n'} a_i\tau_i$, будет однородным и имеет полную степень, самое большее, g, причем элемент τ можно выбрать так, чтобы это уравнение имело полную степень, точно равную g.

Если $(\tau_0^*, \ldots, \tau_m^*)$ — общая точка многообразия V^*, проекцией которого является V, то мы имеем

$$\tau_i=\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\tau_j^* \qquad (i=0, \ldots, n'),$$

где матрица (a_{ij}) должна иметь ранг $n'+1$, так как элементы $\tau_0, \ldots, \tau_n'$ линейно независимы над полем K. Отсюда следует, что в пространстве S_m мы можем выбрать систему координат так, чтобы было $\tau_i=\tau_i^*$ $(i=0, \ldots, n')$, и в качестве общей точки многообразия V^* взять $(\tau_0, \ldots, \tau_m)$. Нам необходимо доказать следующие утверждения:

(I) Если многообразие V^* имеет порядок g и если каждый элемент поля $K(\tau_0, \ldots, \tau_{n'})$, имеющий степень однородности 1 и целый относительно кольца $K[\tau_0, \ldots, \tau_{n'}]$, лежит в этом кольце, то справедливы соотношения

$$\tau_{n'+i}=\sum_{j=0}^{n'} b_{ij}\tau_j \qquad (i=1, \ldots, m-n').$$

(II) Если существуют элементы поля $K(\tau_0, \ldots, \tau_{n'})$, имеющие степень однородности 1 и целые относительно кольца $K[\tau_0, \ldots, \tau_{n'}]$, но не лежащие в этом кольце, то можно найти многообразие V^*, имеющее V своей проекцией и не лежащее в n'-мерном пространстве.

(I) Так как τ_{d+1} является примитивным элементом поля $K(\tau_0, \ldots, \tau_{n'})$ над $K(\tau_0, \ldots, \tau_d)$, а $\tau_{n'+i}$ лежит в более широком из этих полей, то элемент $\tau = a\tau_{d+1} + b\tau_{n'+i}$ будет примитивным элементом при всех значениях отношения a/b из поля K, кроме конечного числа исключительных. Мы выберем значения a, b из K так, чтобы было $b \neq 0$ и чтобы элемент τ оставался примитивным. Тогда неприводимое уравнение, связывающее элементы $\tau_0, \ldots, \tau_d, \tau$, будет иметь степень относительно τ, точно равную g. Кроме того, так как порядок многообразия V^* равен g, то упомянутое уравнение должно иметь полную степень, не превосходящую g. Отсюда мы заключаем, что это уравнение имеет вид

$$\tau^g + B_1(\tau_0, \ldots, \tau_d)\tau^{g-1} + \ldots + B_g(\tau_0, \ldots, \tau_d) = 0,$$

где $B_i(\tau) \in K[\tau_0, \ldots, \tau_{n'}]$. Далее, τ есть элемент поля $\Sigma(\tau_0)$ со степенью однородности 1, а написанное выше уравнение показывает, что элемент τ — целый над кольцом $K[\tau_0, \ldots, \tau_{n'}]$. Так как, по условию, любой элемент поля $\Sigma(\tau_0)$, имеющий степень однородности 1 и целый относительно кольца $K[\tau_0, \ldots, \tau_{n'}]$, содержится в этом кольце, то

$$\tau \in K[\tau_0, \ldots, \tau_{n'}].$$

Но в силу того, что τ однороден степени 1, должно быть

$$\tau = a\tau_{d+1} + b\tau_{n'+i} = \sum_{j=0}^{n'} c_{ij}\tau_j.$$

Следовательно,

$$\tau_{n'+i} = \sum_{j=0}^{n'} b_{ij}\tau_j,$$

так как $b \neq 0$. Тем самым утверждение (I) доказано.

(II) Если в поле $\Sigma(\tau_0)$ существует элемент τ, имеющий степень однородности 1 и целый относительно кольца $K[\tau_0, \ldots, \tau_{n'}]$, но не лежащий в нем, то элементы $\tau_0, \ldots, \tau_{n'}, \tau$ будут линейно независимыми над K и однородными степени 1. Отсюда вытекает, что многообразие V^* в пространстве $S_{n'+1}$, имеющее общую точку $(\tau_0, \ldots, \tau_{n'}, \tau)$, не лежит в подпространстве меньшей размерности и имеет многообразие V своей проекцией. Для доказательства утверждения (II) осталось показать, что многообразие V^* имеет порядок g.

Пусть $\bar{\tau} = a\tau + \sum_{i=0}^{n'} a_i\tau_i$, где $a, a_0, \ldots, a_{n'}$ — элементы поля K. Тогда, ввиду целости элемента τ относительно кольца $K[\tau_0, \ldots, \tau_{n'}]$, $\bar{\tau}$ также будет целым над этим кольцом. Но, по условию, элементы $\tau_{d+1}, \ldots, \tau_{n'}$ — целые над кольцом $K[\tau_0, \ldots, \tau_d]$. Следовательно,

$\bar{\tau}$ также будет целым над $K[\tau_0, \ldots, \tau_d]$, и поэтому существует однородное уравнение вида

$$F(\tau_0, \ldots, \tau_d, \bar{\tau}) \equiv \bar{\tau}^\rho + B_1(\tau_0, \ldots, \tau_d)\bar{\tau}^{\rho-1} + \ldots + B_\rho(\tau_0, \ldots, \tau_d) = 0,$$

связывающее элементы $\tau_0, \ldots, \tau_d, \bar{\tau}$. Но так как $\bar{\tau}$ есть элемент поля $\Sigma(\tau_0)$, являющегося расширением степени g поля $K(\tau_0, \ldots, \tau_d)$, то неприводимое уравнение

$$f(t_0, \ldots, t_d, \bar{t}) = 0,$$

связывающее $\tau_0, \ldots, \tau_d, \bar{\tau}$, должно иметь степень относительно $\bar{t}$, не превышающую g. Многочлен $F(t_0, \ldots, t_d, \bar{t})$ содержит $f(t_0, \ldots, t_d, \bar{t})$ своим множителем. Следовательно, коэффициент старшей степени $\bar{t}$ в многочлене $f(t_0, \ldots, t_d, \bar{t})$ должен принадлежать полю K. Поэтому можно предполагать, что многочлен $F(t_0, \ldots, t_d, \bar{t})$ неприводим и что $\rho \leqslant g$. Кроме того, для некоторых $\bar{\tau}$, например при $a = a_i = 0$ $(i \neq d+1)$, степень ρ должна быть точно равной g. Теперь из теоремы 1 § 9 гл. X следует, что многообразие V^* имеет порядок g. Теорема VI доказана.

Мы воспользуемся этим результатом, чтобы доказать следующее предложение:

Теорема VII. *Многообразие V в пространстве S_n проективно нормально в том и только в том случае, если образ многообразия V при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка h при любом значении h имеет полную систему сечений гиперплоскостями.*

Предположим сначала, что многообразие V проективно нормально. Тогда каждое положительное целое число h является характером однородности для V. Поэтому образ $V^{(h)}$ многообразия V при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка h будет проективно нормальным. Но отсюда, в силу теоремы VI, следует, что система сечений $V^{(h)}$ гиперплоскостями является полной.

Наоборот, предположим, что V не является проективно нормальным. Тогда в поле $K(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ существует элемент τ, имеющий некоторую степень однородности h $(h > 0)$, целый относительно $K[\tau_0, \ldots, \tau_n]$, но не содержащийся в этом кольце. Построим образ $V^{(h)}$ многообразия V при преобразовании с помощью гиперповерхностей порядка h. Пусть $(\tau_0^{(h)}, \ldots, \tau_{n_h}^{(h)})$ — общая точка $V^{(h)}$. Без ограничения общности можно считать, что $\tau_0^{(h)} = (\tau_0)^h$. При рассмотрении многообразия $V^{(h)}$ мы должны считать, что элемент $\tau_0^{(h)}$ имеет степень однородности 1. Так как элемент $\tau/\tau_0^{(h)} = \tau/(\tau_0)^h$ принадлежит полю функций многообразий V и $V^{(h)}$, то он имеет степень однородности нуль как относительно многообразия V, так и относительно $V^{(h)}$. Отсюда следует, что элемент τ имеет степень однородности 1 относительно многообразия $V^{(h)}$. Но так как τ удовлетворяет уравнению

$$\tau^\rho + a_1(\tau_0, \ldots, \tau_n)\tau^{\rho-1} + \ldots + a_\rho(\tau_0, \ldots, \tau_n) = 0,$$

$$a_i(\tau) \in K[\tau_0, \ldots, \tau_n],$$

то, приравнивая члены, имеющие одну и ту же степень однородности, мы усматриваем, что можно считать $a_i(\tau)$ формами степени ih. Следовательно, τ является целым относительно кольца $K[\tau_0^{(h)}, \ldots, \tau_{n_h}^{(h)}]$.

Но так как

$$K[\tau_0^{(h)}, \ldots, \tau_{n_h}^{(h)}] \subseteq K[\tau_0, \ldots, \tau_n]$$

и τ не принадлежит $K[\tau_0, \ldots, \tau_n]$, то отсюда следует, что в поле $K(\tau_0^{(h)}, \ldots, \tau_{n_h}^{(h)})$ существует элемент степени однородности 1 (относительно многообразия $V^{(h)}$), целый относительно $K[\tau_0^{(h)}, \ldots, \tau_{n_h}^{(h)}]$ и не содержащийся в этом кольце. Следовательно, в силу теоремы VI, система сечений многообразия $V^{(h)}$ гиперплоскостями не будет полной.

Полученные в этом параграфе результаты дают читателю некоторое представление о специфических свойствах нормальных многообразий. Дальнейшее изложение покажет, что при изучении бирациональных инвариантов алгебраического многообразия проективно нормальные многообразия играют основную роль. Говоря кратко, мы обнаружим, что наилучший подход всегда состоит в переходе от заданного многообразия V к производному нормальному многообразию $V^{(\delta)}$, в установлении связи между этими многообразиями и в последующем изучении проективно нормальных многообразий. Имеются два рода свойств, делающих проективно нормальные многообразия наиболее удобными для изучения: (I) локальные свойства, концентрирующиеся вокруг целозамкнутости колец частных неприводимых подмногообразий (для этого достаточна аффинная нормальность, если только рассматриваются подмногообразия, не лежащие на бесконечно удаленной гиперплоскости), и (II) свойства в целом, описываемые теоремой VII. В дальнейшем мы всегда будем строить проективно нормальные многообразия, помня, что такие многообразия будут аффинно нормальными при любом выборе бесконечно удаленной гиперплоскости. Обычно мы будем называть проективно нормальные многообразия просто нормальными.

ГЛАВА XVII

ТЕОРИЯ НОРМИРОВАНИЙ

Понятие нормирования поля функций уже рассматривалось в качестве примера в § 5 гл. XVI. Оно является обобщением понятия ветви кривой в классической алгебраической геометрии и играет основную роль в теории бирациональных преобразований. В этой главе мы приступаем к изложению общих свойств нормирований, а в гл. XVIII перейдем к некоторым приложениям. Мы начнем с рассмотрения основных свойств нормирований любых полей и лишь впоследствии обратимся к специальному изучению нормирований полей алгебраических функций. В этом случае мы будем считать основное поле K не имеющим характеристики, но не обязательно алгебраически замкнутым.

§ 1. Упорядоченные абелевы группы

В § 1 гл. I мы определили абелеву группу как группу, в которой закон композиции коммутативен. Мы упоминали также о том, что в абелевой группе закон композиции часто записывается как сложение и что в таком случае группа называется аддитивной. В этом параграфе мы рассматриваем аддитивную группу Γ с элементами $a, b, c, \ldots$. Предположим, что элементы из Γ, *отличные от нуля*, разбиты на два непересекающихся множества Γ_p и Γ_n. Если a принадлежит Γ_p, то мы будем писать $a > 0$, если же a — элемент из Γ_n, то мы будем писать $a < 0$. Таким образом, каждый элемент x группы Γ удовлетворяет одному и только одному из соотношений

$$x > 0, \quad x = 0, \quad x < 0.$$

Элементы из Γ_p называются *положительными*, а из Γ_n — *отрицательными*. Разбиение отличных от нуля элементов группы Γ на два множества Γ_p и Γ_n называется *упорядочением* группы Γ, если выполнены следующие условия:

(I) из $a < 0$ следует $-a > 0$;

(II) из $a > 0$ и $b > 0$ следует $a + b > 0$.

Мы займемся в этом параграфе элементарными свойствами упорядоченных аддитивных групп.

(1) Докажем, что если $a > 0$, то $-a < 0$. Очевидно, что элемент $-a$ не равен нулю. Если бы было $-a > 0$, то мы имели бы, в силу свойства (II), $0 = a + (-a) > 0$, т. е. 0 принадлежал бы Γ_p, вопреки

определению последнего множества. Следовательно, $-a$ отличен от нуля и не принадлежит Γ_p. Поэтому он должен принадлежать Γ_n.

(2) Если $a-b>0$, то мы будем писать $a>b$. Покажем, что определенное таким образом отношение транзитивно. Предположим, что $a>b$ и $b>c$. Тогда

$$a-b>0 \quad \text{и} \quad b-c>0.$$

Следовательно, в силу (II),

$$a-c=(a-b)+(b-c)>0,$$

т. е.

$$a>c.$$

Аналогично, если $a-b<0$, то мы будем писать $a<b$. Можно показать, что отношение $<$ также транзитивно и что соотношение $a<b$ равносильно соотношению $b>a$.

(3) Пусть $a>b$ и c — любой элемент из Γ. Тогда

$$(a+c)-(b+c)=a-b>0,$$

т. е.

$$a+c>b+c.$$

(4) Если a — элемент из Γ, отличный от нуля, и если через na обозначить сумму n слагаемых, каждое из которых равно a, то равенство $ma=na$ $(m>n)$ влечет за собой $(m-n)\,a=0$ и $(m-n)\,(-a)=0$. Предположим, что $a>0$. Тогда, в силу свойства (II), должно быть

$$2a=a+a>0,$$

$$3a=2a+a>0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$(m-n)\,a>0,$$

и мы получаем противоречие. Аналогично, если $a<0$, а значит, $-a>0$, то мы получим соотношение $(m-n)\,(-a)>0$. Таким образом, и в случае $a>0$, и в случае $a<0$ из равенства $ma=na$ при $m\neq n$ мы получаем противоречие. Следовательно, элементы 0, $\pm a$, $\pm 2a$, ... все различны. В частности, любая упорядоченная группа, не состоящая только из нулевого элемента, содержит бесконечное множество элементов.

Можно привести несколько примеров упорядоченных аддитивных абелевых групп.

(а) Любая подгруппа аддитивной группы действительных чисел при обычном определении положительных и отрицательных чисел будет упорядоченной. В частности, является упорядоченной аддитивная группа целых чисел.

(б) Пусть Γ и Γ' — две упорядоченные аддитивные группы, и пусть $a, b, c, \ldots$ — элементы Γ, а $a', b', c', \ldots$ — элементы Γ'. Рассмотрим пары вида (a, a'), состоящие из некоторого элемента a группы Γ и некоторого элемента a' группы Γ'. Из этих пар построим группу Γ^*, определив закон сложения формулой

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b').$$

Легко проверить непосредственно, что Γ^* является аддитивной группой. Мы будем называть ее *прямой суммой* групп Γ и Γ'. Как легко видеть, нулем группы Γ^* является пара (0,0). Будем говорить теперь, что $(a, a') > 0$, в том и только в том случае, если либо $a > 0$, либо $a = 0$ и $a' > 0$. Докажем, что этим определено упорядочение группы Γ^*. Если (a, a') — любой отличный от нуля элемент из Γ^*, то либо $(a, a') > 0$, либо $a < 0$, либо же $a = 0$ и $a' < 0$. Следовательно, либо $(a, a') > 0$, либо $-(a, a') = (-a, -a') > 0$. Таким образом, выполнено условие:

(I) Если $(a, a') < 0$, то $-(a, a') > 0$.

(II) Предположим, что $(a, a') > 0$ и $(b, b') > 0$. Если при этом $a > 0$ или $b > 0$, то $a + b > 0$. Следовательно, в этом случае $(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b') > 0$. Если же $a = 0$ и $b = 0$, то должно быть $a' > 0$, $b' > 0$, а значит, $(a, a') + (b, b') = (0, a' + b') > 0$. Следовательно, группа Γ^* удовлетворяет условиям, наложенным на упорядоченные группы. Если отвлечься от упорядочения, то группа Γ^* определяется через группы Γ и Γ' симметрично. Однако в определении упорядочения Γ занимает привилегированное место. Если мы поменяем ролями группы Γ и Γ', то получим другое упорядочение группы Γ^*.

Если задано любое конечное множество $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ аддитивных групп, то простой индукцией можно определить прямую сумму Γ^* этих групп. Если каждая из групп $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ упорядочена, то можно, как и выше, определить упорядочение группы Γ^*, соответствующее заданному расположению групп $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$. Таким образом, можно получить $r!$ различных упорядочений группы Γ^*.

Рассмотрим теперь любую упорядоченную аддитивную группу Γ. Группа Γ называется *архимедовски упорядоченной*, если для любой пары положительных элементов x и y из Γ существуют такие целые числа m, n, для которых

$$mx > y, \quad ny > x.$$

Ясно, что любая подгруппа упорядоченной группы действительных чисел является архимедовски упорядоченной. С другой стороны, если Γ^* — прямая сумма двух упорядоченных аддитивных групп Γ и Γ', определенная в примере (б), то Γ^* не будет архимедовски упорядо-

ченной. Действительно, если $x=(a, a')$, где $a>0$, и $y=(0, b')$, где $b'>0$, то элементы x и y положительны, причем

$$(a, a')=x>ny=(0, nb')$$

для любого целого числа n.

Теорема I. *Каждая архимедовски упорядоченная аддитивная группа* Γ *изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы действительных чисел.*

Если Γ состоит только из нуля, то теорема тривиальна. Если Γ состоит не только из нуля, то в ней необходимо содержится хотя бы один положительный элемент. Пусть a — один из положительных элементов группы Γ, а b — любой другой ее положительный элемент. Рассмотрим совокупность R_b упорядоченных пар (m, n) положительных целых чисел, для которых

$$ma\geqslant nb.$$

Если (m, n) — любая пара положительных чисел, а r — произвольное положительное целое число, то

$$ma\geqslant nb \quad \text{или} \quad ma<nb$$

в зависимости от того, выполняется ли неравенство

$$rma\geqslant rnb \quad \text{или} \quad rma<rnb.$$

Пусть теперь λ — произвольное положительное рациональное число. Если $\lambda=m/n=p/q$, где m, n, p, q — положительные целые числа, то из сформулированного выше свойства непосредственно видно, что пара (m, n) принадлежит совокупности R_b тогда и только тогда, когда пара (p, q) принадлежит R_b. Если пара (m, n) принадлежит R_b, то мы будем говорить, что рациональное число λ принадлежит совокупности $\mathfrak{R}_b$. Докажем, что $\mathfrak{R}_b$ определяет дедекиндово сечение, а значит, и действительное число, которое мы обозначим через $\bar{b}$. Прежде всего, не все положительные рациональные числа принадлежат совокупности $\mathfrak{R}_b$. В самом деле, так как группа Γ архимедовски упорядочена, то найдется такое положительное число n, для которого $a<nb$. Отсюда следует, что $1/n$ не принадлежит $\mathfrak{R}_b$.

Далее, если $\lambda=m/n$ принадлежит $\mathfrak{R}_b$, а $\mu=r/s>\lambda$, то μ также принадлежит $\mathfrak{R}_b$, так как из соотношения $\lambda\in\mathfrak{R}_b$ мы получаем

$$ma\geqslant nb.$$

Следовательно, в силу соотношения

$$(nr-ms)\,a>0,$$

будет

$$n(ra-sb)=(nr-ms)\,a+s\,(ma-nb)>0,$$

и поэтому

$$ra > sb,$$

так что μ принадлежит $\mathfrak{R}_b$.

Эти два результата показывают, что $\mathfrak{R}_b$ является верхним классом дедекиндова сечения, определяющего некоторое положительное действительное число $\bar{b}$. Тем самым при фиксированном a каждому положительному элементу x из Γ поставлено в соответствие положительное действительное число $\bar{x}$. Очевидно, что при этом $\bar{a} = 1$. Определим теперь действительное число $\bar{y}$, соответствующее отрицательному элементу y из Γ, формулой

$$\bar{y} = -\overline{(-y)}$$

и поставим в соответствие нулевому элементу группы Γ число нуль. Покажем, что действительные числа, являющиеся образами элементов из Γ, образуют подгруппу Δ аддитивной группы действительных чисел и что при обычном упорядочении группы Δ отображение Γ на Δ является изоморфизмом, сохраняющим порядок.

Докажем прежде всего, что если x и y — любые элементы из Γ, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — соответствующие им действительные числа, то элементу $x+y$ соответствует число $\bar{x}+\bar{y}$. Это ясно, если x или y будет нулем. Следовательно, достаточно рассмотреть три случая: (I) $x > 0$, $y > 0$, (II) $x < 0$, $y < 0$ и (III) x и y имеют различные знаки.

(I) Если $x > 0$ и $y > 0$, то $x+y > 0$. Кроме того, по определению, $\bar{x} > 0$, $\bar{y} > 0$, $\overline{x+y} > 0$. Предположим, что

$$\bar{x}+\bar{y} > \overline{(x+y)}.$$

Тогда существуют такие рациональные числа $\lambda = p/q$ и $\mu = r/s$, что

$$\lambda < \bar{x},\ \mu < \bar{y},\ \lambda+\mu > \overline{(x+y)}.$$

Первые два из этих соотношений показывают, что

$$pa < qx, \quad ra < sy.$$

Следовательно,

$$(ps+qr)\,a < qs\,(x+y),$$

т. е.

$$\lambda+\mu < \overline{(x+y)}.$$

Таким образом, мы получили противоречие. Аналогично, если мы предположим, что

$$\bar{x}+\bar{y} < \overline{(x+y)},$$

то также придем к противоречию. Следовательно,

$$\bar{x}+\bar{y} = \overline{(x+y)},$$

(II) Если $x < 0$, $y < 0$, то мы имеем

$$\overline{(x+y)} = -\overline{(-x-y)} = -\overline{(-x)} - \overline{(-y)} = \bar{x} + \bar{y}.$$

(III) Предположим, например, что $x > 0$, $y < 0$. Если $x + y \geqslant 0$, то мы имеем

$$x + y + (-y) = x.$$

Следовательно, в силу (I),

$$\overline{x+y} + \overline{(-y)} = \bar{x},$$

и поэтому

$$\overline{x+y} = \bar{x} - \overline{(-y)} = \bar{x} + \bar{y}.$$

С другой стороны, если $x + y < 0$, то

$$-(x+y) + x = -y,$$

и поэтому

$$-\overline{(x+y)} + \bar{x} = -\bar{y},$$

т. е.

$$\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}.$$

Таким образом, Δ является подгруппой аддитивной группы действительных чисел. Если бы установленное гомоморфное отображение группы Γ на Δ не было изоморфизмом, то в Γ существовал бы ненулевой элемент, отображающийся на нуль из Δ. Но таких элементов не существует, так как при $x > 0$ будет $\bar{x} > 0$, а при $x < 0$ должно быть $\bar{x} < 0$. Наконец, в силу того, что положительные элементы из Γ соответствуют положительным элементам из Δ и обратно, определенный нами изоморфизм группы Γ на Δ сохраняет порядок.

Полученный изоморфизм группы Γ и некоторой подгруппы аддитивной группы действительных чисел зависит от выбора элемента a из Γ, отображающегося на число 1. Если мы выберем другой элемент, например b, в качестве элемента, отображающегося на единицу, то получим другую подгруппу Δ' группы действительных чисел. Если при отображении Γ на Δ' элемент a отображается на действительное число ρ, то образом любого элемента x из Γ в группе Δ' будет число $\rho\bar{x}$, где $\bar{x}$ есть образ x в группе Δ. Если Γ отображается на подгруппу группы действительных чисел описанным выше образом так, что элемент a отображается на число 1, то группа Γ называется *нормализованной* относительно этого элемента.

При рассмотрении упорядоченных аддитивных групп мы всегда можем заменять группу любой изоморфной группой с подобным упорядочением. В частности, мы будем обычно представлять архимедовски упорядоченные группы подгруппами аддитивной группы действительных чисел.

Рассмотрим теперь аддитивную группу Γ, упорядочение которой не является архимедовским. В этом случае в Γ найдутся положительные элементы ξ и η, такие, что соотношение $\xi > n\eta$ имеет место для всех целых чисел $n > 0$. Рассмотрим теперь при фиксированном ξ совокупность всех положительных элементов η из Γ, удовлетворяющих условию $\xi > n\eta$ при всех целых $n > 0$. Если η_1 и η_2 — два элемента этой совокупности, причем, например, $\eta_1 \geqslant \eta_2$, то

$$\xi > 2n\eta_1 \geqslant n(\eta_1 + \eta_2)$$

при всех $n > 0$. Таким образом, рассматриваемая совокупность замкнута относительно сложения. Аналогично,

$$\xi > n(\eta_1 + \eta_2) > n(\eta_1 - \eta_2) > n(-\eta_1 - \eta_2).$$

Следовательно, подгруппа Γ' группы Γ, порождаемая нашей совокупностью, имеет то свойство, что $\xi > n\eta$ для любого целого положительного числа n и любого элемента η из Γ'. Подгруппа Γ' обладает также свойством, заключающимся в том, что если η — любой положительный элемент из Γ', а η' — любой положительный элемент из Γ, меньший η, то η' принадлежит Γ'. В самом деле, в таком случае $\xi > n\eta > n\eta'$ для любого целого положительного n.

Подгруппа Δ некоторой упорядоченной аддитивной группы Γ называется *изолированной*, если для любых элементов η и η' из Γ, удовлетворяющих условию $\eta > \eta' > 0$, из включения $\eta \in \Delta$ следует, что $\eta' \in \Delta$. Из сказанного выше ясно, что в том случае, когда упорядочение группы Γ не является архимедовским, группа Γ необходимо содержит собственную изолированную подгруппу. С другой стороны, если Γ упорядочена архимедовски, то ее можно рассматривать как подгруппу аддитивной группы действительных чисел. Если Δ — изолированная подгруппа группы Γ, не состоящая только из нуля, и если η — положительный элемент из Δ, а ζ — любой положительный элемент из Γ, то ясно, что найдется целое число n, удовлетворяющее условию $\zeta < n\eta$. Так как $\eta \in \Delta$, то и $n\eta \in \Delta$, а значит, изолированная подгруппа Δ должна содержать и элемент ζ, меньший $n\eta$. Следовательно, должно быть $\Delta = \Gamma$. Таким образом, имеет место

Теорема II. *Упорядочение аддитивной группы является неархимедовским тогда и только тогда, когда рассматриваемая группа содержит собственные изолированные подгруппы.*

В приведенном выше примере (б) упорядоченная группа Γ^* являлась прямой суммой упорядоченных аддитивных групп Γ и Γ'. Легко видеть, что элементы группы Γ^*, имеющие вид $(0, a')$, образуют изолированную подгруппу.

Рассмотрим некоторые свойства изолированных подгрупп упорядоченной аддитивной группы Γ. Если Δ — *любая* подгруппа группы Γ, то мы можем воспользоваться ею для разбиения элементов группы Γ на классы эквивалентных элементов: два элемента a и a' из Γ называются эквивалентными относительно Δ, если разность $a - a'$ содер-

жится в Δ. В частности, элементы, эквивалентные нулю, являются элементами подгруппы Δ. Определенное так отношение является истинным отношением эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначим через (a) совокупность элементов группы Γ, эквивалентных элементу a. Тогда равенство $(a) = (a')$ имеет место в том и только в том случае, если элемент a эквивалентен a'. Если a эквивалентен a', а b эквивалентен b', то разность

$$[a+b]-[a'+b'] = [a-a']+[b-b']$$

принадлежит Δ, так как $a-a'$ и $b-b'$ лежат в Δ, а Δ является группой. Отсюда следует, что класс $(a+b)$ однозначно определяется классами (a) и (b). Поэтому можно определить сложение классов эквивалентных элементов формулой

$$(a)+(b) = (a+b).$$

Определенное так сложение классов, очевидно, ассоциативно и коммутативно. Если (a) и (b) — любые классы и $(c) = (b-a)$, то очевидно, что класс (c) является решением уравнения

$$(a)+x = (b).$$

Таким образом, принятое определение сложения делает классы элементов группы Γ, эквивалентных относительно Δ, элементами аддитивной группы. Эта группа называется *фактор-группой* группы Γ по подгруппе Δ и обозначается через Γ/Δ. Нулем группы Γ/Δ является класс (0), т. е. совокупность элементов группы Δ.

Если группа Γ упорядочена, а Δ является изолированной подгруппой группы Γ, то мы можем определить упорядочение группы Γ/Δ следующим образом. Рассмотрим любой ненулевой элемент (a) из Γ/Δ. Предположим, что (a) содержит положительный элемент a из Γ. В таком случае для любого положительного элемента η из Δ будет $a > \eta$, так как в противном случае из определения изолированной подгруппы следовало бы, что a принадлежит Δ, а значит, $(a) = 0$. Поэтому a будет бóльшим, чем любой элемент из Δ. Любой другой элемент класса (a) имеет вид $a \pm \eta$, где η — неотрицательный элемент из Δ. Но так как a больше, чем любой элемент из Δ, то $a \pm \eta > 0$, и поэтому любой элемент класса (a) положителен и больше любого элемента из Δ. В этом случае мы будем писать, что $(a) > 0$. Аналогично, если класс $(b) \neq 0$ содержит отрицательный элемент, то можно показать, что каждый элемент этого класса отрицателен и меньше любого элемента из Δ. Будем писать в таком случае $(b) < 0$. Этим самым мы разбили отличные от нуля элементы группы Γ/Δ на непересекающиеся классы положительных и отрицательных элементов. Очевидно, что при этом:

(I) если $(a) < 0$, то $-(a) = (-a) > 0$;

(II) если $(a) > 0$, $(b) > 0$, то $(a+b) = (a)+(b) > 0$.

Следовательно, мы определили упорядочение группы Γ/Δ, так что справедлива

Теорема III. *Если* Δ *— изолированная подгруппа группы* Γ, *то фактор-группа* Γ/Δ *является упорядоченной аддитивной группой.*

Докажем теперь такую теорему:

Теорема IV. *Если* Δ_1 *и* Δ_2 *— изолированные подгруппы группы* Γ, *то либо* Δ_1 *содержит* Δ_2, *либо* Δ_2 *содержит* Δ_1. *Если* $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$, *то фактор-группа* Δ_1/Δ_2 *является изолированной подгруппой группы* Γ/Δ_2.

Теорема тривиальна, если Δ_1 совпадает с Δ_2. Следовательно, можно предполагать, что одна из заданных подгрупп, например Δ_1, содержит элемент a_1, не содержащийся в Δ_2. Элемент a_1 отличен от нуля, так как он не принадлежит Δ_2. Далее, $-a_1$ также является элементом подгруппы Δ_1, не принадлежащим Δ_2. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $a_1 > 0$. Пусть теперь a_2 — любой положительный элемент из Δ_2. Если бы было $a_2 \geqslant a_1$, то, в силу изолированности подгруппы Δ_2, было бы также $a_1 \in \Delta_2$, вопреки условию. Следовательно, $a_2 < a_1$. Но так как подгруппа Δ_1 — также изолированная, то элемент a_2 должен принадлежать Δ_1. Таким образом, каждый положительный элемент из Δ_2 принадлежит Δ_1. А так как Δ_1 и Δ_2 обе являются группами, то отсюда следует, что и любой элемент из Δ_2 принадлежит Δ_1, т. е. что $\Delta_1 \supset \Delta_2$. Из определения изолированной подгруппы видно, что Δ_2 является изолированной подгруппой группы Δ_1.

Рассмотрим теперь элементы фактор-группы Γ/Δ_2, получаемые из элементов группы Γ, лежащих в Δ_1. Если a принадлежит Δ_1 и $a' - a$ принадлежит Δ_2, то элемент $a' = a' - a + a$ принадлежит Δ_1, так как $\Delta_2 \subset \Delta_1$. Следовательно, если элемент a принадлежит Δ_1, то любой эквивалентный ему относительно подгруппы Δ_2 элемент из Γ также принадлежит Δ_1. Таким образом, элементы из Δ_1 распадаются на такие классы эквивалентности относительно подгруппы Δ_2, что каждый класс является полным классом эквивалентности в группе Γ (относительно погруппы Δ_2). Эти классы образуют подгруппу группы Γ/Δ_2, очевидно, изоморфную группе Δ_1/Δ_2 и могущую быть отождествленной с последней. Если (a) — любой положительный элемент из Δ_1/Δ_2, а (b) — положительный элемент из Γ/Δ_2, удовлетворяющий условию $(a) > (b)$, то $a > b > 0$, причем a содержится в Δ_1. Поэтому и b должен содержаться в Δ_1, а значит, (b) должен принадлежать фактор-группе Δ_1/Δ_2. Таким образом, Δ_1/Δ_2 является изолированной подгруппой группы Γ/Δ_2.

Пусть теперь Δ_2 — любая изолированная подгруппа группы Γ, а Γ^* — изолированная подгруппа группы Γ/Δ_2. Рассмотрим совокупность элементов из Γ, соответствующих элементам подгруппы Γ^* при отображении Γ на группу Γ/Δ_2. Если a и b — два таких элемента, то элементы $a + b$ и $-a$ будут отображаться соответственно на $(a) + (b)$ и $-(a)$. Но эти классы принадлежат Γ^*, и поэтому элементы группы Γ, отображающиеся на элементы из Γ^*, образуют подгруппу Δ_1 группы Γ. Так как элементы из Δ_2 отображаются на элемент из Γ^*

(на нуль), то $\Delta_1 \supseteq \Delta_2$. Пусть теперь a — любой положительный элемент из Δ_1, а b — положительный элемент группы Γ, удовлетворяющий условию $a > b$. В таком случае $(a) \geqslant (b) \geqslant 0$, причем (a) принадлежит Γ^*. Но так как Γ^* является изолированной подгруппой группы Γ/Δ_2, то (b) также должен принадлежать Γ^*, а значит, b должен принадлежать Δ_1. Поэтому Δ_1 является изолированной подгруппой группы Γ.

Мы установили, таким образом, взаимно однозначное соответствие между изолированными подгруппами группы Γ, содержащими заданную изолированную подгруппу Δ, и изолированными подгруппами факторгруппы Γ/Δ. Легко видеть, что если Δ' — любая изолированная подгруппа группы Γ, содержащая Δ, то $(\Gamma/\Delta)/(\Delta'/\Delta) \cong \Gamma/\Delta'$.

Мы будем заниматься дальше только случаем, когда группа Γ содержит лишь конечное число различных изолированных подгрупп. В силу теоремы IV, эти подгруппы можно расположить так, чтобы каждая из них содержала следующую. Пусть последовательность

$$\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \supset \Gamma_k = 0$$

содержит все изолированные подгруппы группы Γ. Мы будем говорить в таком случае, что Γ *имеет ранг* k. Каждая группа Γ_{i+1} является изолированной подгруппой предыдущей группы Γ_i. Если бы фактор-группа Γ_i/Γ_{i+1} не была архимедовски упорядоченной, то в ней существовала бы собственная изолированная подгруппа. Эта подгруппа, в свою очередь, определяла бы собственную подгруппу Γ' группы Γ_i, содержащую Γ_{i+1} своей собственной подгруппой и изолированную внутри Γ_i. Покажем, что Γ' должна быть изолированной подгруппой группы Γ. Очевидно, что Γ' есть подгруппа группы Γ. Если a — любой положительный элемент из Γ', а b — положительный элемент из Γ, удовлетворяющий условию $a > b$, то, в силу изолированности Γ_i в Γ, должно быть $b \in \Gamma_i$. Но так как Γ' — изолированная подгруппа Γ_i, то отсюда следует, что b принадлежит Γ'. Таким образом, Γ' есть изолированная подгруппа группы Γ. Но последовательностью $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ исчерпываются все изолированные подгруппы группы Γ. Поэтому должно быть либо $\Gamma' = \Gamma_i$, либо $\Gamma' = \Gamma_{i+1}$. Но это несовместимо с предположением, что Γ' является собственной подгруппой группы Γ_i и содержит Γ_{i+1} в качестве собственной подгруппы. Таким образом, доказана

Теорема V. *Если группа* Γ *имеет ранг* k, *то ее изолированные подгруппы могут быть расположены в последовательность* $\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_k = 0$ *так, что фактор-группы* Γ_i/Γ_{i+1} *являются архимедовски упорядоченными.*

§ 2. Нормирования поля

Пусть Σ — произвольное поле, а Γ — упорядоченная аддитивная группа. Отображение $\xi \to v(\xi)$ отличных от нуля элементов поля Σ на элементы из Γ называется *нормированием* поля Σ (или *нормой*

в Σ), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(I) $v(\xi\eta) = v(\xi) + v(\eta)$,

(II) $v(\xi + \eta) \geqslant \min[v(\xi), v(\eta)]$ при $\xi + \eta \neq 0$.

Если $v(\xi) = 0$ для любого отличного от нуля элемента из Σ, то норма называется *тривиальной*. В качестве примера нормирования рассмотрим поле Σ функций комплексного переменного z, являющихся мероморфными в окрестности точки $z = 0$. Любая отличная от нуля функция ζ из этого поля может быть разложена в ряд вида

$$\zeta = z^{\sigma}(a_0 + a_1 z + \ldots) \quad (a_0 \neq 0),$$

где σ — целое число. Возьмем в качестве Γ аддитивную группу целых чисел и определим $v(\zeta)$ равенством $v(\zeta) = \sigma$. Этим определится отображение Σ на Γ, являющееся нормированием. Действительно, если

$$\xi = z^{\alpha}(a_0 + a_1 z + \ldots) \qquad (a_0 \neq 0)$$

и

$$\eta = z^{\beta}(b_0 + b_1 z + \ldots) \qquad (b_0 \neq 0),$$

то

$$\xi\eta = z^{\alpha+\beta}[a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + \ldots] \qquad (a_0 b_0 \neq 0)$$

и

$$\xi + \eta = z^{\sigma}[c_0 + \ldots] \qquad (c_0 \neq 0),$$

где $\sigma \geqslant \min[\alpha, \beta]$, причем σ конечно, если только $\xi + \eta \neq 0$. Следовательно,

$$v(\xi) = \alpha, \quad v(\eta) = \beta$$

и

$$v(\xi\eta) = \alpha + \beta, \quad v(\xi + \eta) \geqslant \min[\alpha, \beta].$$

Доказываемые в этом параграфе теоремы справедливы для нормирований любых полей. Однако в применениях к алгебраической геометрии, которые нам встретятся дальше, приходится иметь дело лишь с нормированиями полей функций алгебраических многообразий, определенных над некоторым основным полем K характеристики нуль. В этом случае на отображение поля Σ в группу Γ необходимо накладывать третье условие:

(III) если $a \in K$ и $a \neq 0$, то $v(a) = 0$.

Для избежания ненужных повторений мы будем для каждой теоремы формулировать те видоизменения, которые необходимо внести в случае поля функций, когда должно быть выполнено условие (III).

Начнем с нескольких общих результатов о нормированиях произвольного поля Σ.

(I) Если ξ — любой отличный от нуля элемент из Σ, то равенство

$$1 \cdot \xi = \xi$$

влечет за собой, в силу условия (I), что

$$v(1)+v(\xi)=v(\xi),$$

откуда

$$v(1)=0.$$

Так как $(-1)^2=1$, то $v(-1)+v(-1)=v(1)=0$, а значит,

$$v(-1)=0.$$

Поэтому

$$v(-\xi)=v(-1)+v(\xi)=v(\xi)$$

для любого отличного от нуля элемента ξ из Σ.

В силу условия (II), должно быть

$$v(2)\geqslant \min[v(1),\ v(1)]\geqslant 0.$$

При помощи элементарной индукции мы получаем, что

$$v(m)\geqslant 0,$$

где m — любое целое число, не кратное характеристике поля Σ.

Покажем теперь, что если Σ имеет конечную характеристику p, а m — целое число, не кратное p, то $v(m)=0$. Действительно, если m не кратно p, то существует целое число n, удовлетворяющее условию $mn\equiv 1\ (p)$. В таком случае

$$0=v(1)=v(m)+v(n).$$

Но так как $v(m)\geqslant 0$, $v(n)\geqslant 0$, то последнее равенство возможно лишь в том случае, когда $v(m)=v(n)=0$.

Обратимся к случаю поля без характеристики. В этом случае может существовать положительное целое число m, для которого $v(m)>0$. Пусть q — наименьшее число, обладающее этим свойством. Докажем, что число q просто. Допустим, что q является составным: $q=ab$, где $a>1$, $b>1$. Тогда из неравенств $a<q$ и $b<q$ вытекает, что $v(a)=v(b)=0$. Поэтому

$$v(q)=v(a)+v(b)=0,$$

и мы пришли к противоречию. Следовательно, q должно быть простым.

Пусть m — любое целое число, большее q и такое, что $v(m)>0$. Если бы было $m=aq+b$, где $a\geqslant 1$, $1\leqslant b<q$, то было бы

$$0=v(b)=v(m-aq)\geqslant \min[v(m),\ v(aq)]>0,$$

так как, по условию, $v(m)>0$ и $v(aq)=v(a)+v(q)>0$. Из полученного противоречия следует, что m должно быть кратным q. Если $m=q^a p_1^{a_1}\dots p_k^{a_k}$, где q, p_1, $\dots$, p_k — различные простые числа, то из сказанного вытекает, что $v(p_i)=0$, а значит,

$$v(m)=a\,v(q)+a_1 v(p_1)+\dots+a_k v(p_k)=a\,v(q).$$

Рассмотрим, в частности, случай, когда Σ есть поле рациональных чисел. Если ζ — элемент из Σ, то мы положим

$$\zeta = q^{\lambda} p_1^{\lambda_1} \dots p_k^{\lambda_k},$$

где $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ — положительные или отрицательные целые числа, а $q, p_1, \dots, p_k$ — различные простые числа. Если $\mu, \mu_1, \dots, \mu_k$ — такие положительные числа, для которых суммы $\lambda + \mu, \lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_k + \mu_k$ положительны, то

$$(\lambda + \mu)\, v(q) = v(q^{\lambda+\mu} p_1^{\lambda_1+\mu_1} \dots p_k^{\lambda_k+\mu_k}) =$$

$$= v(\zeta q^{\mu} p_1^{\mu_1} \dots p_k^{\mu_k}) = v(\zeta) + \mu v(q).$$

Следовательно, $v(\zeta) = \lambda v(q)$. Таким образом, нормы $v(\zeta)$ элементов из Σ все являются кратными $v(q)$, а значит, их значения составляют архимедовски упорядоченную абелеву группу. Если произвести нормализацию этих значений относительно $v(q)$, группа значений становится аддитивной группой целых чисел. Поэтому любое нетривиальное нормирование поля рациональных чисел получается выбором некоторого простого числа p и определяется формулой $v(p^{\lambda} p_1^{\lambda_1} \dots p_k^{\lambda_k}) = \lambda$.

(II) Если ξ — любой отличный от нуля элемент из Σ, то

$$0 = v(1) = v(\xi\xi^{-1}) = v(\xi) + v(\xi^{-1}).$$

Следовательно,

$$v(\xi^{-1}) = -v(\xi).$$

При отображении $\xi \to v(\xi)$ поля Σ в группу Γ может случиться, что не все элементы из Γ будут образами элементов из Σ. Но если a и b — два элемента группы Γ, являющиеся образами элементов ξ и η из Σ,

$$v(\xi) = a, \quad v(\eta) = b,$$

то

$$v(\xi\eta) = a + b, \quad v(\xi^{-1}) = -v(\xi) = -a.$$

Следовательно, элементы группы Γ, являющиеся образами элементов поля Σ, составляют подгруппу Γ^* группы Γ. Мы можем определить то же самое нормирование поля Σ, пользуясь группой Γ^* вместо Γ. Обычно бывает удобным сделать это, и в дальнейшем мы будем считать, что каждый элемент из Γ является образом некоторого элемента из Σ. В таком случае группа Γ называется *группой значений* нормирования, а $v(\xi)$ — *нормой* элемента ξ.

(III) Вторым условием того, что отображение поля Σ на группу Γ является нормированием, служит неравенство

$$v(\xi + \eta) \geqslant \min[v(\xi), v(\eta)].$$

Покажем, что это неравенство заменяется равенством в случае

когда значения $v(\xi)$ и $v(\eta)$ различны. Пусть $v(\xi) > v(\eta)$. Если положить $\zeta = \xi + \eta$, то

$$v(\zeta) \geqslant \min[v(\xi), v(\eta)] = v(\eta).$$

Но

$$v(\eta) = v(\zeta - \xi) \geqslant \min[v(\zeta), v(-\xi)] = \min[v(\zeta), v(\xi)].$$

Ввиду неравенства

$$v(\eta) < v(\xi),$$

мы должны иметь

$$\min[v(\zeta), v(\xi)] = v(\zeta).$$

Следовательно,

$$v(\eta) \geqslant v(\zeta).$$

Таким образом, $v(\eta) = v(\zeta)$, и поэтому

$$v(\xi + \eta) = v(\zeta) = v(\eta).$$

Следовательно, если $v(\eta) \neq v(\xi)$, то мы имеем

$$v(\xi + \eta) = \min[v(\xi), v(\eta)].$$

(IV) В определении нормирования мы исключили нулевой элемент поля Σ. Иногда бывает удобным формально определить норму нуля, полагая, что она не является элементом группы Γ, а представляет собой некоторый новый элемент ∞. Если считать, что условия (I) и (II) определения нормирования остаются в силе и при включении нормы нуля, то должно быть

$$\infty = v(0) = v(0 \cdot \xi) = v(0) + v(\xi) = \infty + v(\xi)$$

[из условия (I)] и

$$\infty = v(0) = v(\xi - \xi) \geqslant \min[v(\xi), v(-\xi)] = v(\xi)$$

[из условия (II)].

Таким образом, элемент ∞ обладает двумя свойствами „бесконечности" в том виде, в каком она применяется в анализе. Как правило, элемент ∞ ведет себя как бесконечность, но читателя следует предупредить, чтобы он не пытался приписывать этому элементу свойства, которые не были доказаны.

Сказанное позволяет иногда рассматривать нормирование как отображение *всего* поля Σ на множество (Γ, ∞), а не как отображение отличных от нуля элементов из Σ на Γ.

Мы перейдем теперь к более детальному изучению нетривиального нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ с группой значений Γ. Рассмотрим совокупность элементов поля Σ, нормы которых неотрицательны, и присоединим к ней нуль поля Σ. Если ξ и η — два элемента этой совокупности, то мы, в силу условий (I) и (II), имеем

$$v(\xi\eta) = v(\xi) + v(\eta) \geqslant 0$$

и

$$v(\xi \pm \eta) \geqslant \min[v(\xi), v(\eta)] \geqslant 0.$$

Следовательно, рассматриваемая совокупность является кольцом. Мы будем называть это кольцо $\mathfrak{R}$ *кольцом нормирования* $\mathfrak{B}$. Так как нормирование $\mathfrak{B}$ нетривиально, то в поле Σ найдется элемент ζ, норма которого отлична от нуля. Поэтому одно из значений $v(\zeta)$ или $v(\zeta^{-1}) = -v(\zeta)$ отрицательно, а значит, один из элементов ζ или ζ^{-1} не принадлежит $\mathfrak{R}$. Таким образом, $\mathfrak{R}$ является собственным подкольцом поля Σ. Так как это подкольцо содержит единицу и не содержит делителей нуля, оно будет областью целостности. Если ζ — произвольный элемент поля Σ, то либо ζ есть элемент $\mathfrak{R}$, либо же $v(\zeta) < 0$ и $v(\zeta^{-1}) > 0$, так что $\zeta^{-1} \in \mathfrak{R}$. Отсюда следует, что Σ является полем частных кольца $\mathfrak{R}$.

Рассмотрим теперь элементы поля Σ (включая нуль), нормы которых положительны. Если ξ и η — два таких элемента, то, в силу условия (II), мы имеем

$$v(\xi - \eta) \geqslant \min [v(\xi),\ v(\eta)] > 0.$$

Если же ζ — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то $v(\zeta) \geqslant 0$, а значит, в силу условия (I),

$$v(\zeta\xi) = v(\zeta) + v(\xi) > 0.$$

Следовательно, рассматриваемые элементы составляют идеал $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{R}$. Ясно, что этот идеал прост. В самом деле, если ξ и η — два элемента из $\mathfrak{R}$, не лежащие в $\mathfrak{p}$, то

$$v(\xi) = 0, \quad v(\eta) = 0,$$

а значит, в силу (I),

$$v(\xi\eta) = v(\xi) + v(\eta) = 0,$$

и поэтому произведение $\xi\eta$ не принадлежит $\mathfrak{p}$.

Если ζ — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то его обратный элемент ζ^{-1} принадлежит $\mathfrak{R}$ в том и только в том случае, если $v(\zeta^{-1}) \geqslant 0$, т. е. если $v(\zeta) \leqslant 0$. Но так как ζ есть элемент из $\mathfrak{R}$, то $v(\zeta) \geqslant 0$. Следовательно, элемент ζ имеет в кольце $\mathfrak{R}$ обратный элемент тогда и только тогда, когда ζ не принадлежит $\mathfrak{p}$. Таким образом, $\mathfrak{p}$ — *идеал, составленный из всех элементов кольца* $\mathfrak{R}$, *не являющихся делителями единицы*. Ясно, что этот идеал есть максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Действительно, если $\mathfrak{i}$ — собственный делитель идеала $\mathfrak{p}$, то он должен содержать элемент ζ из $\mathfrak{R}$, не содержащийся в $\mathfrak{p}$. Для этого элемента $v(\zeta) = 0$. Отсюда вытекает, что $\zeta^{-1} \in \mathfrak{R}$, и поэтому $\zeta^{-1}\zeta = 1 \in \mathfrak{i}$. Следовательно, элемент 1 принадлежит $\mathfrak{i}$, а значит, $\mathfrak{i}$ является единичным идеалом.

Идеал $\mathfrak{p}$ обычно называется *идеалом нормирования* $\mathfrak{B}$.

Рассмотрим любой собственный идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$. Если ζ — любой элемент из $\mathfrak{i}$, то $v(\zeta) > 0$, так как в противном случае кольцо $\mathfrak{R}$ содержало бы элемент ζ^{-1} и поэтому в $\mathfrak{i}$ содержался бы элемент $\zeta\zeta^{-1} = 1$, так что $\mathfrak{i}$ был бы единичным идеалом. Следовательно,

$$\mathfrak{i} = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Пусть ξ — любой элемент из $\mathfrak{i}$, а η — такой элемент кольца $\mathfrak{R}$, что $v(\eta) \geqslant v(\xi)$. В таком случае $v(\eta/\xi) \geqslant 0$, и поэтому элемент η/ξ принадлежит $\mathfrak{R}$. Отсюда вытекает, что элемент $\eta = (\eta/\xi) \cdot \xi$ принадлежит $\mathfrak{i}$. Таким образом, элементы поля Σ, принадлежащие идеалу $\mathfrak{i}$, суть те и только те элементы, значения нормы которых в (Γ, ∞) принадлежат некоторому подмножеству $\mathfrak{Q}$, обладающему следующими свойствами:

(I) элементы из $\mathfrak{Q}$ неотрицательны;

(II) если элемент a принадлежит $\mathfrak{Q}$, а b — любой элемент из Γ (или ∞), удовлетворяющий неравенству $b > a$, то b также принадлежит $\mathfrak{Q}$.

Подмножество множества (Γ, ∞), обладающее двумя этими свойствами, называется *верхним классом* множества (Γ, ∞). Если, обратно, задан некоторый верхний класс $\mathfrak{Q}$ из (Γ, ∞), то элементы поля Σ, нормы которых принадлежат $\mathfrak{Q}$, составляют идеал кольца $\mathfrak{R}$. Чтобы усмотреть это, предположим, что $\mathfrak{Q}$ — некоторый верхний класс из (Γ, ∞), а S — множество элементов поля Σ, нормы которых принадлежат $\mathfrak{Q}$. Так как $\mathfrak{Q}$ содержит бесконечность, то в S содержится нуль поля Σ, а так как элементы из $\mathfrak{Q}$ неотрицательны, то $S \subseteq \mathfrak{R}$. Далее, если ξ, $\eta \in S$ и, например, $v(\xi) \geqslant v(\eta)$, то

$$v(\xi - \eta) \geqslant \min[v(\xi), v(\eta)] = v(\eta).$$

Так как $v(\eta) \in \mathfrak{Q}$, то отсюда следует, что $v(\xi - \eta) \in \mathfrak{Q}$, т. е. что $(\xi - \eta) \in S$. Если ζ — любой элемент из $\mathfrak{R}$, то $v(\zeta) \geqslant 0$, а значит,

$$v(\zeta\xi) = v(\zeta) + v(\xi) \geqslant v(\xi).$$

Поэтому $\zeta\xi \in S$. Таким образом, S является идеалом кольца $\mathfrak{R}$.

Если $\mathfrak{i}$ — идеал в $\mathfrak{R}$, а $\mathfrak{Q}$ — соответствующий ему верхний класс из (Γ, ∞), то $\mathfrak{Q}$ может содержать или не содержать наименьший элемент. Пусть сначала $\mathfrak{Q}$ содержит наименьший элемент a, и пусть ζ — элемент из $\mathfrak{i}$, для которого $v(\zeta) = a$. Если ξ — любой элемент из $\mathfrak{i}$, то $v(\xi) \geqslant a = v(\zeta)$ и поэтому $v(\xi/\zeta) \geqslant 0$. Следовательно, элемент $\eta = \xi/\zeta$ принадлежит $\mathfrak{R}$. Отсюда вытекает, что любой элемент идеала $\mathfrak{i}$ можно записать в виде $\eta\zeta$, где η — некоторый элемент из $\mathfrak{R}$. Таким образом, $\mathfrak{i}$ является главным идеалом, имеющим базис, состоящий из элемента ζ. Пусть, обратно, идеал $\mathfrak{i}$ кольца $\mathfrak{R}$ имеет конечный базис $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Можно предполагать элементы $\omega_1, \ldots, \omega_r$ расположенными так, чтобы было $v(\omega_1) \leqslant v(\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant v(\omega_r)$. Тогда, как и выше, можно показать, что $\omega_i = \rho_i\omega_1$ $(i = 2, \ldots, r)$, где ρ_i — элементы из $\mathfrak{R}$. Следовательно, базис идеала $\mathfrak{i}$ может быть сведен к одному элементу ω_1, так что идеал $\mathfrak{i}$ — главный. Элемент $v(\omega_1)$ принадлежит к верхнему классу $\mathfrak{Q}$, соответствующему идеалу $\mathfrak{i}$. Если ζ — произвольный элемент из $\mathfrak{i}$, то должно быть $\zeta = \rho\omega_1$, где $\rho \in \mathfrak{R}$. Поэтому $v(\zeta) = v(\rho) + v(\omega_1) \geqslant v(\omega_1)$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{Q}$ содержит наименьший элемент. В некоторых группах значений норм каждый верхний класс содержит наименьший элемент. В таком

случае каждый идеал кольца нормирования будет главным. Однако существуют примеры групп значений, в которых имеются верхние классы, не содержащие наименьших элементов. Соответствующие таким верхним классам идеалы колец нормирований не могут обладать конечным базисом.

Если i_1 и i_2 — идеалы кольца $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ и если i_1 содержит элемент ζ, не принадлежащий i_2, то норма $v(\eta)$ любого элемента η из i_2 больше $v(\zeta)$. Так как $v(\eta) > v(\zeta)$, то элемент $(\eta\zeta^{-1})\zeta = \eta$ должен принадлежать i_1. Следовательно, должно быть $i_2 \subset i_1$. Таким образом, из двух любых идеалов кольца $\mathfrak{R}$ один должен быть делителем другого.

Найдем теперь простые идеалы кольца $\mathfrak{R}$ с помощью рассмотрения соответствующих им верхних классов в множестве (Γ, ∞). Если i — простой идеал в $\mathfrak{R}$, Ω — соответствующий ему верхний класс, то мы рассмотрим два неотрицательных элемента a, b из Γ, не принадлежащих Ω. В кольце $\mathfrak{R}$ найдутся элементы ξ и η, не принадлежащие i и такие, что

$$v(\xi) = a, \quad v(\eta) = b.$$

Так как идеал i прост, то произведение $\xi\eta$ не содержится в i. Следовательно, значение нормы $v(\xi\eta) = a + b$ не принадлежит Ω. Поэтому неотрицательные элементы из Γ, не лежащие в Ω, образуют множество, замкнутое относительно сложения. Как мы покажем, отсюда вытекает, что неотрицательные элементы из Γ, не лежащие в Ω, вместе с их противоположными элементами образуют изолированную подгруппу Δ группы Γ. Прежде всего заметим, что такие элементы составляют подгруппу. Если a и b неотрицательны и не принадлежат Ω или являются противоположными для таких элементов, то элементы $a + b$ и $-a$ будут такими же. Действительно, мы уже видели, что если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то элемент $a + b$ не принадлежит Ω. Если же элементы $-a > 0$ и $-b > 0$ не принадлежат Ω, то и элемент $-(a + b) > 0$ не принадлежит Ω, так что $a + b$ является противоположным для некоторого положительного элемента группы Γ, не принадлежащего Ω. Наконец, если, например, $a \geqslant 0$ и $b < 0$, то мы рассмотрим прежде всего случай, когда $a + b \geqslant 0$. Тогда элемент $a > a + b \geqslant 0$ не принадлежит Ω, а значит, и неотрицательный элемент $a + b$ не принадлежит Ω. Если же $a + b < 0$, то $-b > -a - b > 0$, а следовательно, элемент $-a - b$ положителен и не принадлежит Ω (ведь $-b$ не принадлежит Ω!). Таким образом, рассматриваемые элементы образуют некоторую подгруппу $\Delta \subset \Gamma$. Если a — любой положительный элемент из Δ, а b — положительный элемент из Γ, удовлетворяющий условию $a > b$, то b не принадлежит Ω и поэтому содержится в Δ. Следовательно, подгруппа Δ является изолированной.

Обратно, если Δ есть изолированная подгруппа группы Γ, то из определения изолированной подгруппы ясно, что положительные элементы множества (Γ, ∞), не содержащиеся в Δ, образуют верхний

класс $\mathfrak{Q}$ и что соответствующий $\mathfrak{Q}$ идеал $\mathfrak{i}$ является простым. Максимальный простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{R}$, очевидно, соответствует изолированной подгруппе группы Γ, состоящей только из нуля. Следовательно, мы доказали такую теорему:

Теорема I. *Если $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ со значениями в (Γ, ∞), то элементы из Σ, имеющие неотрицательные нормы, образуют кольцо $\mathfrak{R}$. Если ранг группы Γ равен k и если $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ — изолированные подгруппы Γ, причем*

$$\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_k = 0,$$

то в кольце $\mathfrak{R}$ имеется k простых идеалов $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$. Элементами $\mathfrak{p}_i$ являются те из элементов кольца $\mathfrak{R}$, нормы которых не содержатся в Γ_i. Кроме того, $\mathfrak{p}_i = 0$ $(\mathfrak{p}_{i+1})$, и $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k$ есть идеал, составленный из всех элементов кольца $\mathfrak{R}$, не являющихся делителями единицы. $\mathfrak{p}$ есть максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$.

Следующая теорема показывает, что нормирование однозначно определяется его кольцом.

Теорема II. *Если $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — нормирования поля Σ со значениями соответственно в (Γ_1, ∞) и в (Γ_2, ∞), имеющие одно и то же кольцо нормирования $\mathfrak{R}$, то группа Γ_1 изоморфна Γ_2. Если отождествить элементы этих групп, отвечающие друг другу при упомянутом изоморфизме, то равенство $v_1(\xi) = v_2(\xi)$ будет иметь место для всех элементов ξ из Σ.*

Покажем прежде всего, что для любых отличных от нуля элементов ξ и η из Σ, для которых $v_1(\xi) = v_1(\eta)$, необходимо будет и $v_2(\xi) = v_2(\eta)$. Действительно, если $v_1(\xi) = v_1(\eta)$, то $v_1(\xi/\eta) = 0$, и поэтому элемент ξ/η является делителем единицы в кольце $\mathfrak{R}$. Отсюда следует, что $v_2(\xi/\eta) = 0$, а значит, $v_2(\xi) = v_2(\eta)$. Аналогично, если $v_2(\xi) = v_2(\eta)$, то $v_1(\xi) = v_1(\eta)$.

Пусть теперь a_1 — любой элемент из Γ_1, а ξ, η, ... — элементы поля Σ, для которых

$$v_1(\xi) = v_1(\eta) = \ldots = a_1.$$

В силу только что доказанного,

$$v_2(\xi) = v_2(\eta) = \ldots .$$

Обозначим $v_2(\xi)$ через a_2. Элемент a_1 однозначно определяет a_2. Подобным же образом, каждый элемент a_2 из Γ_2 однозначно определяет соответствующий ему элемент из Γ_1. Этим между элементами групп Γ_1 и Γ_2 установлено взаимно однозначное соответствие. Остается показать, что это соответствие является изоморфизмом, сохраняющим упорядочение элементов. Пусть a_1 и b_1 — элементы из Γ_1, а a_2 и b_2 — соответствующие им элементы из Γ_2. Обозначим через ξ и η элементы поля Σ, такие, что

$$v_1(\xi) = a_1, \; v_1(\eta) = b_1, \; v_2(\xi) = a_2, \; v_2(\eta) = b_2.$$

Тогда

$$v_1(\xi\eta) = a_1 + b_1,\ v_2(\xi\eta) = a_2 + b_2.$$

Отсюда вытекает, что элементы $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$ соответствуют друг другу. Таким образом, установленное соответствие является изоморфизмом. Если $a_1 > 0$ и $v_1(\xi) = a_1$, то ξ не является делителем единицы кольца $\mathfrak{R}$. Следовательно, элемент $a_2 = v_2(\xi)$ должен быть положительным. Таким образом, расположение элементов при рассматриваемом изоморфизме сохраняется. Теорема доказана.

Если задано поле Σ и его подкольцо $\mathfrak{R}$, то важно уметь узнавать, является ли кольцо $\mathfrak{R}$ кольцом некоторого нормирования поля Σ. Прежде всего ясно, что в таком случае $\mathfrak{R}$ должно быть областью целостности, а поле Σ должно быть полем частных для $\mathfrak{R}$. Кроме того, если Σ является полем функций некоторого алгебраического многообразия, определенного над основным полем K, и если интересующее нас нормирование должно удовлетворять условию (III), то элементы из K, отличные от нуля, должны иметь нулевую норму и поэтому должны принадлежать $\mathfrak{R}$. Следовательно, должно быть $K \subseteq \mathfrak{R}$. Однако для того, чтобы $\mathfrak{R}$ было кольцом некоторого нормирования, оно должно удовлетворять еще нескольким условиям. Всюду дальше мы будем считать упомянутые выше элементарные условия для кольца $\mathfrak{R}$ выполненными.

Теорема III. *Область целостности $\mathfrak{R}$ является кольцом нормирования ее поля частных Σ тогда и только тогда, когда для любого ξ из Σ один из элементов ξ или ξ^{-1} принадлежит $\mathfrak{R}$.*

Необходимость этого условия уже была доказана. Докажем его достаточность. Пусть $\mathfrak{R}$ — область целостности, удовлетворяющая сформулированному в теореме условию. Если $\mathfrak{R} = \Sigma$, то $\mathfrak{R}$ является кольцом нормирования для тривиальной нормы, так что для этого случая теорема доказана. Пусть теперь $\mathfrak{R}$ не совпадает с Σ. Элементы из Σ, отличные от нуля, составляют коммутативную группу G относительно умножения. Далее, элементы кольца $\mathfrak{R}$, имеющие в этом кольце обратные, также составляют коммутативную группу G_1 относительно умножения в поле Σ. Эта группа является подгруппой группы G. То, что эти группы записаны мультипликативно, а не аддитивно, является лишь вопросом обозначения. Важно, что они обе коммутативны, и мы поэтому можем определить фактор-группу G/G_1, как указано в § 1. Эта фактор-группа также коммутативна и может быть записана как аддитивная группа Γ. Предыдущее построение ставит в соответствие каждому отличному от нуля элементу ζ из Σ однозначно определенный элемент группы Γ, который мы будем обозначать через $v(\zeta)$. При этом элементами, отображающимися на нуль группы Γ, являются элементы группы G_1 и только они. Очевидно, что $v(1) = 0$. Так как рассматриваемое отображение мультипликативной группы поля Σ (без нуля) на аддитивную группу Γ является

гомоморфизмом, то мы имеем

$$v(\xi\eta) = v(\xi) + v(\eta). \tag{1}$$

Пусть a, b — два произвольных элемента из Γ, ξ, ξ', ... такие элементы поля Σ, что

$$v(\xi) = v(\xi') = \ldots = a,$$

а η, η', ... — элементы поля Σ, для которых

$$v(\eta) = v(\eta') = \ldots = b.$$

По условию, хотя бы один из элементов ξ/η или η/ξ лежит в $\mathfrak{R}$. Предположим, что в $\mathfrak{R}$ лежит ξ/η. Так как элементы ξ и ξ' оба отображаются на элемент a из Γ, то отношение ξ'/ξ принадлежит G_1, а значит, и $\mathfrak{R}$. По той же причине и η/η' лежит в $\mathfrak{R}$. Поэтому частное

$$\xi'/\eta' = (\xi'/\xi)(\eta/\eta')(\xi/\eta)$$

также лежит в $\mathfrak{R}$. Таким образом, все частные ξ/η, ξ'/η', ... принадлежат $\mathfrak{R}$. В этом случае мы будем писать, что $a \geqslant b$ или $b \leqslant a$. Если одновременно и $b \geqslant a$, то отношение ξ/η должно принадлежать G_1, а значит, элементы ξ и η должны отображаться на один и тот же элемент из Γ, т. е. должно быть $a = b$. Наоборот, из равенства $a = b$ следует, что отношение ξ/η принадлежит G_1, а значит, $a \geqslant b$ и $b \geqslant a$. Если $a \geqslant b$ и $a \neq b$, то мы будем писать $a > b$. Очевидно, что неравенство $a > 0$ влечет за собой, что элемент $\xi = \xi/1$ принадлежит кольцу $\mathfrak{R}$, но ξ^{-1} не лежит в $\mathfrak{R}$.

(I) Если $v(\xi) < 0$, то элемент ξ не принадлежит $\mathfrak{R}$. Следовательно, элемент ξ^{-1} принадлежит $\mathfrak{R}$, а его обратный не принадлежит этому кольцу. Поэтому $v(\xi^{-1}) > 0$. Но $0 = v(1) = v(\xi \cdot \xi^{-1}) = v(\xi) + v(\xi^{-1})$. Отсюда вытекает, что

$$-v(\xi) = v(\xi^{-1}) > 0.$$

(II) Если $v(\xi) > 0$ и $v(\eta) > 0$, то элементы ξ и η содержатся в $\mathfrak{R}$. Отсюда следует, что $\xi\eta$ также является элементом из $\mathfrak{R}$, т. е. что $v(\xi\eta) \geqslant 0$. Если $v(\xi\eta) = 0$, то произведение $\xi\eta$ принадлежит G_1, а значит, для него существует в $\mathfrak{R}$ обратный элемент ζ. В таком случае $\xi\eta\zeta = 1$, и поэтому элемент $\eta\zeta$ является обратным для ξ и лежит в $\mathfrak{R}$. Следовательно, $v(\xi) = 0$, и мы пришли к противоречию. Поэтому должно быть

$$v(\xi) + v(\eta) = v(\xi\eta) > 0.$$

Таким образом, нами установлено некоторое упорядочение группы Γ.

В силу равенства (1), отображение $\xi \to v(\xi)$ поля Σ на Γ удовлетворяет первому условию для нормирования. Для проверки второго условия предположим, что ξ и η — любые отличные от нуля элементы из Σ. Пусть для определенности $v(\xi) \geqslant v(\eta)$. Тогда отношение ξ/η

принадлежит $\mathfrak{R}$. Но так как единица также принадлежит $\mathfrak{R}$, то и сумма $1+\xi/\eta$ будет элементом $\mathfrak{R}$. Поэтому

$$v(1+\xi/\eta) = v(\xi+\eta) - v(\eta) \geqslant 0,$$

а значит,

$$v(\xi+\eta) \geqslant v(\eta) = \min[v(\xi),\ v(\eta)].$$

Таким образом, отображение $\xi \to v(\xi)$ отличных от нуля элементов поля Σ в группу Γ является нормированием, а кольцо $\mathfrak{R}$ — кольцом этого нормирования.

Если поле частных Σ кольца $\mathfrak{R}$ является полем функций некоторого алгебраического многообразия над полем K, то мы должны иметь $K \subseteq \mathfrak{R}$. В этом случае для любого отличного от нуля элемента a из K элемент a^{-1} также принадлежит K, а значит, элементы a и a^{-1} содержатся в G_1. Поэтому $v(a) = 0$, и условие (III) выполнено.

Перед рассмотрением другой характеристики колец нормирований удобно доказать следующую лемму:

Лемма. *Если область целостности $\mathfrak{R}$ обладает тем свойством, что любое ее собственное расширение, содержащееся в поле частных Σ для $\mathfrak{R}$, содержит обратный элемент хотя бы для одного элемента $\mathfrak{R}$, не являющегося в $\mathfrak{R}$ делителем единицы, то кольцо $\mathfrak{R}$ целозамкнуто в Σ.*

Пусть $\mathfrak{R}^*$ — целое замыкание кольца $\mathfrak{R}$ в Σ. Если бы $\mathfrak{R}$ не было целозамкнутым, то было бы $\mathfrak{R}^* \supset \mathfrak{R}$, а значит, в кольце $\mathfrak{R}$ существовал бы элемент ξ, не являющийся в $\mathfrak{R}$ делителем единицы и такой, что $\xi^{-1} \in \mathfrak{R}^*$. Так как $\xi^{-1} \in \mathfrak{R}^*$, то этот элемент — целый относительно $\mathfrak{R}$, и поэтому должно иметь место некоторое соотношение

$$\xi^{-n} + a_1\xi^{-n+1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_i \in \mathfrak{R}).$$

Следовательно,

$$1 + a_1\xi + \ldots + a_n\xi^n = 0.$$

Если теперь положить

$$\eta = -(a_1 + a_2\xi + \ldots + a_n\xi^{n-1}),$$

то мы усматриваем, что элемент η принадлежит $\mathfrak{R}$ и является обратным для элемента ξ. Это противоречит тому, что ξ не является делителем единицы кольца $\mathfrak{R}$, а значит, наше предположение, что $\mathfrak{R}$ не целозамкнуто, неверно.

Из доказанной леммы следует

Теорема IV. *Кольцо $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ является целозамкнутым в Σ.*

Так как кольцо $\mathfrak{R}$ состоит из всех элементов поля Σ, нормы которых (при рассматриваемом нормировании) неотрицательны, то любое расширение кольца $\mathfrak{R}$ в поле Σ будет содержать элемент ζ, для которого $v(\zeta) < 0$. Но тогда $v(\zeta^{-1}) > 0$, т. е. элемент ζ^{-1} не является делителем единицы кольца $\mathfrak{R}$. Следовательно, кольцо $\mathfrak{R}$ имеет то

свойство, что любое собственное расширение в поле Σ содержит элемент, обратный для некоторого элемента из $\mathfrak{R}$, не являющегося в $\mathfrak{R}$ делителем единицы. Поэтому, в силу леммы, кольцо $\mathfrak{R}$ целозамкнуто.

Перейдем теперь ко второй характеристике колец нормирований. Мы уже установили следующие свойства кольца нормирования $\mathfrak{R}$: (I) элементы из $\mathfrak{R}$, не являющиеся в нем делителями единицы, образуют идеал кольца $\mathfrak{R}$; (II) любое собственное расширение кольца $\mathfrak{R}$ в поле Σ содержит элемент, обратный для некоторого элемента из $\mathfrak{R}$, не являющегося делителем единицы. Эти два условия достаточны для того, чтобы кольцо $\mathfrak{R}$ было кольцом некоторого нормирования. Точнее говоря, мы докажем, что имеет место

Теорема V. *Область целостности $\mathfrak{R}$ является кольцом некоторого нормирования ее поля частных Σ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям*:

(I) *элементы из $\mathfrak{R}$, не являющиеся делителями единицы, образуют идеал кольца $\mathfrak{R}$*;

(II) *любое собственное расширение кольца $\mathfrak{R}$ в поле Σ содержит элемент, обратный для некоторого элемента из $\mathfrak{R}$, не служащего делителем единицы в $\mathfrak{R}$.*

Отметим, что если Σ есть поле функций некоторого многообразия, определенного над основным полем K, и если требуется, чтобы нормирование удовлетворяло условию $v(a) = 0$ для любого отличного от нуля элемента a из поля K, то в условиях теоремы V мы должны добавить требование, чтобы поле K содержалось в $\mathfrak{R}$.

Доказательство будет состоять в проверке того, что кольцо $\mathfrak{R}$, удовлетворяющее указанным в нашей теореме условиям, удовлетворяет также условиям теоремы III для кольца нормирования. Нужно показать лишь, что если кольцо $\mathfrak{R}$ удовлетворяет условиям теоремы V и если ξ — любой отличный от нуля элемент из Σ, то один из элементов ξ или ξ^{-1} должен принадлежать $\mathfrak{R}$. Предположим, что при заданном ξ элемент ξ^{-1} не лежит в $\mathfrak{R}$. Тогда кольцо $\mathfrak{R}[\xi^{-1}]$ является собственным расширением $\mathfrak{R}$. По условию, в $\mathfrak{R}[\xi^{-1}]$ содержится обратный элемент для некоторого элемента η из $\mathfrak{R}$, не являющегося в $\mathfrak{R}$ делителем единицы:

$$\eta^{-1} = a_0 + a_1\xi^{-1} + \ldots + a_r\xi^{-r} \quad (a_i \in \mathfrak{R}).$$

Отсюда следует, что

$$(1 - a_0\eta)\xi^r - a_1\eta\xi^{r-1} - \ldots - a_r\eta = 0.$$

Элемент $a_0\eta$ не является делителем единицы в $\mathfrak{R}$. Но так как элементы, не являющиеся делителями единицы в $\mathfrak{R}$, образуют идеал этого кольца, то отсюда вытекает, что разность $1 - a_0\eta$ должна быть делителем единицы. Следовательно, элемент $1 - a_0\eta$ имеет в кольце $\mathfrak{R}$ обратный, скажем ζ. Поэтому справедливо равенство

$$\xi^r - a_1\eta\zeta\xi^{r-1} - \ldots - a_r\eta\zeta = 0,$$

показывающее, что элемент ξ — целый относительно $\mathfrak{R}$. В силу доказанной выше леммы, из условий теоремы V вытекает, что кольцо $\mathfrak{R}$ целозамкнуто в поле Σ. Следовательно, ξ содержится в $\mathfrak{R}$. Таким образом, мы видим, что если ξ — отличный от нуля элемент из Σ, то либо ξ, либо ξ^{-1} содержится в $\mathfrak{R}$, и поэтому, в силу теоремы III, $\mathfrak{R}$ является кольцом нормирования.

Теорема IV гласит, что кольцо любого нормирования целозамкнуто в его поле частных. Пусть теперь мы имеем некоторое множество нормирований $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ... поля Σ. Рассмотрим кольца $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ... этих нормирований. Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность элементов поля Σ, принадлежащих всем кольцам $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ... Если α и β — элементы $\mathfrak{R}$, то элементы $\alpha \pm \beta$ и $\alpha\beta$ должны принадлежать всем кольцам $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ..., а потому должны принадлежать и $\mathfrak{R}$. Следовательно, $\mathfrak{R}$ есть кольцо. Если ζ — элемент поля Σ, целый относительно $\mathfrak{R}$, то он будет целым относительно каждого из колец $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ... Но эти кольца, будучи кольцами нормирований, целозамкнуты. Следовательно, ζ принадлежит $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ..., а значит, принадлежит и $\mathfrak{R}$. Таким образом, кольцо $\mathfrak{R}$ целозамкнуто в поле Σ, а поэтому целозамкнуто и в своем поле частных, так как последнее содержится в Σ. Важно следующее обращение полученного результата:

Теорема VI. *Если $\mathfrak{R}$ есть область целостности, целозамкнутая в содержащем ее поле Σ, то $\mathfrak{R}$ является пересечением колец нормирований поля Σ, содержащих $\mathfrak{R}$.*

Мы сначала докажем эту теорему для случая, когда Σ есть поле частных кольца $\mathfrak{R}$. Обобщение на случай более общих полей Σ, содержащих $\mathfrak{R}$, а значит, содержащих и поле частных для $\mathfrak{R}$, будет непосредственно следовать из теоремы VII. В приложениях к алгебраической геометрии обычно желательно накладывать еще дополнительное условие, что $\mathfrak{R}$ содержит основное поле K. В этом случае нормирования, кольца которых содержат $\mathfrak{R}$, будут иметь то свойство, что $v(a) = 0$ для любого отличного от нуля элемента a поля K.

Первым шагом в доказательстве теоремы VI будет доказательство того, что для любого элемента ξ поля Σ, не лежащего в $\mathfrak{R}$, в поле Σ найдется подкольцо $\mathfrak{R}_\xi$, служащее кольцом некоторого нормирования, содержащее $\mathfrak{R}$, не содержащее элемента ξ и имеющее поле Σ своим полем частных. Так как ξ не лежит в $\mathfrak{R}$, а кольцо $\mathfrak{R}$ целозамкнуто в Σ, то ξ не содержится в кольце $\mathfrak{R}[\xi^{-1}]$. Действительно, если бы было

$$\xi = a_0 + a_1\xi^{-1} + \ldots + a_r\xi^{-r} \quad (a_i \in \mathfrak{R}),$$

то мы имели бы равенство

$$\xi^{r+1} - a_0\xi^r - \ldots - a_r = 0,$$

из которого, в силу целозамкнутости $\mathfrak{R}$, следовало бы, что ξ принадлежит $\mathfrak{R}$, вопреки условию.

Осуществим теперь полное упорядочение элементов поля Σ, не принадлежащих кольцу $\mathfrak{R}[\xi^{-1}]$. Затем с помощью трансфинитной

индукции определим на этом множестве элементов функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

(I) $\varphi(x) = 1$, если кольцо, получаемое присоединением к кольцу $\mathfrak{R}[\xi^{-1}]$ элемента x и элементов $\varphi(y)y$ для всех y, предшествующих элементу x, не содержит ξ;

(II) $\varphi(x) = 0$ в противном случае.

Множество элементов поля Σ, состоящее из кольца $\mathfrak{R}[\xi^{-1}]$ и элементов вида $\varphi(x)x$, которые получаются, когда x пробегает множество $\Sigma - \mathfrak{R}[\xi^{-1}]$, очевидно, будет кольцом. Обозначим это кольцо через $\mathfrak{R}_\xi$. Поле частных для $\mathfrak{R}_\xi$ содержит поле частных для $\mathfrak{R}$ и поэтому должно совпадать с Σ. Докажем, что $\mathfrak{R}_\xi$ является кольцом некоторого нормирования поля Σ. Прежде всего, любое расширение кольца $\mathfrak{R}_\xi$ в поле Σ должно содержать некоторый элемент x, для которого $\varphi(x) = 0$. Но из определения функции $\varphi(x)$ вытекает, что это расширение содержит элемент ξ, служащий обратным для элемента ξ^{-1}, не являющегося делителем единицы в кольце $\mathfrak{R}[\xi^{-1}]$. Следовательно, любое расширение кольца $\mathfrak{R}_\xi$ в поле Σ содержит обратный элемент для элемента из $\mathfrak{R}_\xi$, не являющегося в этом кольце делителем единицы. Из теоремы V вытекает теперь, что нам достаточно доказать лишь следующее утверждение: элементы кольца $\mathfrak{R}_\xi$, не являющиеся в нем делителями единицы, образуют идеал этого кольца. Тем самым будет доказано, что $\mathfrak{R}_\xi$ есть кольцо некоторого нормирования поля Σ. Но если элементы кольца $\mathfrak{R}_\xi$, не являющиеся в нем делителями единицы, не составляют идеала кольца $\mathfrak{R}_\xi$, то в $\mathfrak{R}_\xi$ должны найтись два элемента ζ' и η', не являющиеся в нем делителями единицы и такие, что их сумма $\sigma = \zeta' + \eta'$ есть делитель единицы в $\mathfrak{R}_\xi$. Однако в таком случае элементы $\zeta = \sigma^{-1}\zeta'$ и $\eta = \sigma^{-1}\eta'$ также не будут делителями единицы в $\mathfrak{R}_\xi$, а их сумма $\zeta + \eta = 1$. Покажем, что это невозможно.

Так как ζ и η не являются в $\mathfrak{R}_\xi$ делителями единицы, то элементы ζ^{-1} и η^{-1} не принадлежат $\mathfrak{R}_\xi$. Отсюда следует, что кольца $\mathfrak{R}_\xi[\zeta^{-1}]$ и $\mathfrak{R}_\xi[\eta^{-1}]$ являются собственными расширениями кольца $\mathfrak{R}_\xi$ и поэтому оба содержат элемент ξ. Следовательно,

$$\xi = a_0 + a_1\zeta^{-1} + \ldots + a_r\zeta^{-r} \quad (a_i \in \mathfrak{R}_\xi),$$

$$\xi = b_0 + b_1\eta^{-1} + \ldots + b_s\eta^{-s} \quad (b_i \in \mathfrak{R}_\xi).$$

Поэтому, если мы положим $t = \max[r, s]$, то будем иметь равенства

$$\xi = \alpha/\zeta^t = \beta/\eta^t,$$

в которых α и β — элементы $\mathfrak{R}_\xi$. Пусть теперь p и q — два неотрицательных целых числа, сумма которых $p + q = t$. Тогда

$$(\eta^p\zeta^q\xi)^t = (\zeta^t\xi)^q(\eta^t\xi)^p = \alpha^q\beta^p.$$

Следовательно, элемент $\eta^p\zeta^q\xi$ является целым над кольцом $\mathfrak{R}_\xi$. Но, в силу нашей леммы, кольцо $\mathfrak{R}_\xi$ целозамкнуто. Поэтому $\eta^p\zeta^q\xi = c_{pq}$, где c_{pq} — элемент из $\mathfrak{R}_\xi$. Однако

$$\xi = (\eta + \zeta)^t\xi = \sum_{p=0}^{t} C_t^p \eta^p \zeta^{t-p} \xi = \sum_{p=0}^{t} C_t^p c_{p,t-p},$$

а значит, ξ есть элемент из $\mathfrak{R}_\xi$. Полученное противоречие показывает, что элементы кольца $\mathfrak{R}_\xi$, не являющиеся делителями единицы, образуют идеал. Поэтому кольцо $\mathfrak{R}_\xi$ есть кольцо некоторого нормирования поля Σ.

Если ξ пробегает все элементы поля Σ, не содержащиеся в $\mathfrak{R}$, то мы получим множество колец нормирований вида $\mathfrak{R}_\xi$. Пересечение этих колец содержит $\mathfrak{R}$ и не содержит ни одного элемента из Σ, не принадлежащего $\mathfrak{R}$. Следовательно, кольцо $\mathfrak{R}$ является пересечением указанных колец нормирований. Этим теорема VI для случая, когда Σ есть поле частных кольца $\mathfrak{R}$, доказана.

Если Σ является расширением поля частных кольца $\mathfrak{R}$, то наши рассуждения сохранят силу, коль скоро будет показано, что поле частных Σ_ξ кольца $\mathfrak{R}_\xi$ совпадает с Σ. Но в теореме VII будет доказано, что если Σ_ξ есть собственное подполе поля Σ, то в Σ имеется кольцо нормирования $\mathfrak{R}_\xi^*$, такое, что $\mathfrak{R}_\xi^* \cap \Sigma_\xi = \mathfrak{R}_\xi$. Кольцо $\mathfrak{R}_\xi^*$ есть собственное расширение кольца $\mathfrak{R}_\xi$ (ведь его поле частных Σ есть собственное расширение поля Σ_ξ). Отсюда, в силу основного свойства кольца $\mathfrak{R}_\xi$, вытекает, что $\mathfrak{R}_\xi^*$ содержит элемент ξ. Но так как поле Σ_ξ также содержит элемент ξ, то ξ должен принадлежать и кольцу $\mathfrak{R}_\xi^* \cap \Sigma_\xi = \mathfrak{R}_\xi$, вопреки построению. Отсюда следует, что $\Sigma_\xi = \Sigma$. Этим доказательство теоремы VI закончено.

Пусть теперь Σ_1 и Σ_2 — два поля, причем $\Sigma_1 \supset \Sigma_2$. Рассмотрим любое нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля Σ_1 с группой значений Γ_1 и кольцом нормирования $\mathfrak{R}_1$. Отображение поля Σ_1 на группу Γ_1 индуцирует отображение поля Σ_2 на Γ_1 или на ее подмножество, которое, как легко видеть, будет подгруппой Γ_2 группы Γ_1. Γ_2 является упорядоченной аддитивной группой, и очевидно, что отображение поля Σ_2 на Γ_2, индуцируемое нормированием $\mathfrak{B}_1$, будет нормированием $\mathfrak{B}_2$ поля Σ_2. Элементами кольца $\mathfrak{R}_2$ нормирования $\mathfrak{B}_2$ являются те из элементов поля Σ_2, которые отображаются на неотрицательные элементы из Γ_2, т. е. элементы поля Σ_1, лежащие в Σ_2 и отображающиеся на неотрицательные элементы группы Γ_1. Следовательно,

$$\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1 \cap \Sigma_2.$$

Таким образом, любое нормирование поля Σ_1 индуцирует описанным образом однозначно определенное нормирование в произвольном подполе Σ_2 поля Σ_1 (конечно, индуцируемое нормирование может быть и тривиальным). Нормирование $\mathfrak{B}_2$ называется *индуцируемым* нормированием подполя Σ_2, определяемым нормированием $\mathfrak{B}_1$. Нор-

мирование же $\mathfrak{B}_1$ называется *продолжением нормирования* $\mathfrak{B}_2$. Естественно возникает вопрос о том, существует ли для заданного нормирования $\mathfrak{B}_2$ поля Σ_2 нормирование $\mathfrak{B}_1$ заданного расширения Σ_1 поля Σ_2, являющееся продолжением нормирования $\mathfrak{B}_2$? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема VII. *Если Σ^* — произвольное расширение поля Σ, а $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, то существует нормирование поля Σ^*, являющееся продолжением для $\mathfrak{B}$.*

Если $\mathfrak{B}$ — тривиальное нормирование поля Σ, то тривиальное нормирование поля Σ^* удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому можно ограничиться случаем, когда в группе значений Γ нормирования $\mathfrak{B}$ имеются отличные от нуля элементы. Мы условились рассматривать лишь нормирования с группами значений конечного ранга. Если k — ранг группы Γ, то мы обозначим ее изолированные подгруппы через $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, причем

$$\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_k = 0.$$

Группа $\Gamma_{k-1}/\Gamma_k \cong \Gamma_{k-1}$ архимедовски упорядочена (§ 1, теорема V). Пусть a — положительный элемент из Γ_{k-1}, а b — положительный элемент из Γ. Если b не принадлежит Γ_{k-1}, то $b > a$. Если же b принадлежит Γ_{k-1}, то найдется такое положительное целое число n, что $nb > a$ (ведь группа Γ_{k-1} архимедовски упорядочена!). Выберем в поле Σ такой элемент ζ, чтобы было $v(\zeta) = a$. Из сказанного следует, что если ξ — любой элемент поля Σ, норма которого положительна, то найдется положительное целое число n, удовлетворяющее условию $v(\xi^n) > v(\zeta)$.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ кольцо нормирования $\mathfrak{B}$. Так как $v(\zeta) > 0$, то ζ^{-1} есть элемент из $\mathfrak{R}$, не являющийся в этом кольце делителем единицы. Построим кольцо $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}_{\zeta^{-1}}$, лежащее в поле Σ^*, как это было сделано в доказательстве теоремы VI. Это кольцо является кольцом некоторого нормирования. Для доказательства теоремы VII нам нужно показать только, что (I) $\mathfrak{R}^* \cap \Sigma = \mathfrak{R}$ и (II) поле частных кольца $\mathfrak{R}^*$ совпадает с Σ^*.

(I) Очевидно, имеем $\mathfrak{R}^* \supseteq \mathfrak{R}$ и $\Sigma \supset \mathfrak{R}$. Следовательно, $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}^* \cap \Sigma \supseteq \mathfrak{R}$. Если бы $\overline{\mathfrak{R}}$ было собственным расширением кольца $\mathfrak{R}$, то оно содержало бы обратный элемент для некоторого элемента из $\mathfrak{R}$, например ξ, не являющегося делителем единицы (ведь $\mathfrak{R}$ есть кольцо нормирования поля Σ). Мы видели выше, что в таком случае существовало бы целое число n, удовлетворяющее условию $v(\xi^n) > v(\zeta)$. Следовательно, было бы $\xi^n/\zeta \in \mathfrak{R}$. Но $\overline{\mathfrak{R}} \supset \mathfrak{R}$ и $\xi^{-1} \in \overline{\mathfrak{R}}$. Следовательно, $\overline{\mathfrak{R}} \supseteq \mathfrak{R}[\xi^{-1}]$. Поэтому элемент $\zeta^{-1} = (\xi^n/\zeta)\xi^{-n}$ должен содержаться в $\overline{\mathfrak{R}}$. Но так как $\overline{\mathfrak{R}} \subseteq \mathfrak{R}^*$, то должно быть $\zeta^{-1} \in \mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}_{\zeta^{-1}}$, вопреки тому, что кольцо $\mathfrak{R}^*$, по его построению, не содержит элемента ζ^{-1}. Следовательно, наше предположение, что $\overline{\mathfrak{R}}$ является собственным расширением кольца $\mathfrak{R}$, неверно.

(II) Покажем прежде всего, что кольцо $\mathfrak{R}^*$ является собственным расширением $\mathfrak{R}$. Допустим, что это неверно. Тогда любое собственное расширение кольца $\mathfrak{R}$ в поле Σ^* должно содержать элемент ζ^{-1}. В частности, если ξ — произвольный элемент поля Σ^*, не лежащий в Σ, то оба кольца $\mathfrak{R}[\xi]$ и $\mathfrak{R}[\xi^{-1}]$ должны содержать ζ^{-1}. Следовательно, должны иметь место равенства

$$a_n + a_{n-1}\xi + \ldots + a_0\xi^n = \zeta^{-1} \qquad (a_i \in \mathfrak{R}),$$

$$c_0 + c_1\xi^{-1} + \ldots + c_m\xi^{-m} = \zeta^{-1} \qquad (c_i \in \mathfrak{R}),$$

а значит,

$$b_0\xi^n + b_1\xi^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

и

$$d_0\xi^m + d_1\xi^{m-1} + \ldots + d_m = 0,$$

где

$$b_i = a_i\zeta = 0 \quad (\mathfrak{p}) \qquad (i = 0, \ldots, n-1),$$

$$b_n = a_n\zeta - 1 \neq 0 \quad (\mathfrak{p})$$

и

$$d_i = c_i\zeta = 0 \quad (\mathfrak{p}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$d_0 = c_0\zeta - 1 \neq 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Здесь $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Следовательно, уравнения

$$b_0x^n + \ldots + b_n = 0$$

и

$$d_0x^m + \ldots + d_m = 0$$

должны иметь общий им корень, и поэтому их результант D равен нулю. Но мы имеем (гл. IV, § 3)

$$D = \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \ldots & . & d_m & . & \ldots & 0 \\ 0 & d_0 & \ldots & . & . & d_m & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ . & . & \ldots & d_0 & d_1 & . & \ldots & d_m \\ b_0 & b_1 & \ldots & . & b_n & . & \ldots & . \\ 0 & b_0 & \ldots & . & . & b_n & \ldots & . \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ . & . & \ldots & b_0 & b_1 & . & \ldots & b_n \end{vmatrix} = d_0^n b_n^m \quad (\mathfrak{p})$$

Следовательно, должно быть $d_0^n b_n^m = 0$ $(\mathfrak{p})$. Однако это невозможно, так как d_0 и b_n не принадлежат $\mathfrak{p}$, а идеал $\mathfrak{p}$ прост. Поэтому наше предположение неверно, и $\mathfrak{R}^*$ является собственным расширением $\mathfrak{R}$.

Так как $\mathfrak{R}^* \cap \Sigma = \mathfrak{R}$, то в $\mathfrak{R}^*$ существуют элементы, не принадлежащие полю Σ, а значит, поле частных Σ' кольца $\mathfrak{R}^*$ есть собственное расширение поля Σ:

$$\Sigma^* \supseteq \Sigma' \supset \Sigma.$$

Если Σ' не совпадало бы с Σ^*, то мы могли бы повторить процесс, начав с кольца $\mathfrak{R}^*$ вместо $\mathfrak{R}$, и построить кольцо $\mathfrak{R}^{**}$, являющееся собственным расширением кольца $\mathfrak{R}^*$ и такое, что $\mathfrak{R}^{**} \cap \Sigma' = \mathfrak{R}^*$. Но $\zeta \in \Sigma \subset \Sigma'$. Следовательно, элемент ζ^{-1} принадлежит Σ'. Так как $\mathfrak{R}^{**}$ есть собственное расширение кольца $\mathfrak{R}^*$ в поле Σ^*, то оно должно, по построению $\mathfrak{R}^*$, содержать элемент ζ^{-1}. Но отсюда вытекает, что ζ^{-1} содержится в кольце $\mathfrak{R}^*$, вопреки его построению. Таким образом, должно быть $\Sigma' = \Sigma^*$, т. е. поле частных кольца $\mathfrak{R}^*$ должно совпадать с Σ^*.

Существует ряд теорем о возможных нормированиях поля Σ^*, служащих продолжением заданного нормирования поля Σ. Эти теоремы относятся к случаям, когда поле Σ^* получается из Σ какими-либо стандартными способами, например присоединением неизвестного. Мы докажем потом несколько теорем такого типа в том виде, в каком они нужны для целей алгебраической геометрии, но прежде нужно доказать некоторые теоремы относительно совокупностей нормирований заданного поля Σ.

Теорема VIII. *Пусть* $\mathfrak{R}_1$ *и* $\mathfrak{R}_2$ *— два кольца нормирований поля* Σ, *а* $\mathfrak{p}_1$ *и* $\mathfrak{p}_2$ *— идеалы соответствующих нормирований* (*т. е. идеалы, состоящие из всех элементов колец* $\mathfrak{R}_1$ *и* $\mathfrak{R}_2$, *не являющихся в них делителями нуля*). *Тогда*:

(I) *если* $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2$, *то* $\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$, *причем ранг нормирования, соответствующего кольцу* $\mathfrak{R}_1$, *больше ранга нормирования, соответствующего* $\mathfrak{R}_2$;

(II) *если* $\mathfrak{R}_1$ *не содержится в* $\mathfrak{R}_2$, *то в поле* Σ *существует элемент* ξ, *являющийся делителем единицы кольца* $\mathfrak{R}_1$ *и не являющийся делителем единицы в* $\mathfrak{R}_2$.

Здесь рангом нормирования называется ранг соответствующей группы значений.

Случай, когда $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2$, мы можем опустить, так как при этом нормирования одинаковы (теорема II).

(I) Если ξ — элемент из $\mathfrak{R}_2$, не являющийся делителем единицы, то ξ^{-1} не принадлежит $\mathfrak{R}_2$, а значит, не содержится и в кольце $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}_2$. Поэтому элемент $\xi = (\xi^{-1})^{-1}$ содержится в $\mathfrak{R}_1$ и не является в нем делителем единицы. Следовательно, $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$. Пусть теперь η — любой элемент из $\mathfrak{R}_2$, не входящий в $\mathfrak{R}_1$. Тогда $\eta + 1$ также принадлежит $\mathfrak{R}_2$ и не принадлежит $\mathfrak{R}_1$. Так как элементы кольца $\mathfrak{R}_2$, не являющиеся в нем делителями единицы, образуют идеал кольца $\mathfrak{R}_2$, не содержащий элемента $1 = (\eta + 1) - \eta$, то один из элементов η или $\eta + 1$ должен быть делителем единицы в $\mathfrak{R}_2$. Следовательно,

в кольце $\mathfrak{R}_2$ существует делитель единицы τ (например, один из элементов $\eta+1$ или η), не принадлежащий кольцу $\mathfrak{R}_1$. Но в таком случае $\zeta=\tau^{-1}$ является делителем единицы в кольце $\mathfrak{R}_2$, принадлежит $\mathfrak{R}_1$ и не является в последнем кольце делителем единицы. Таким образом, в идеале $\mathfrak{p}_1$ имеется элемент, не лежащий в $\mathfrak{p}_2$. Поэтому

$$\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{p}_1.$$

Пусть теперь $\mathfrak{P}_2$ — любой идеал кольца $\mathfrak{R}_2$, отличный от единичного идеала. Тогда

$$\mathfrak{P}_2\subseteq\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{R}_1.$$

Следовательно, $\mathfrak{P}_2$ содержится в $\mathfrak{R}_1$. Легко усмотреть, что $\mathfrak{P}_2$ есть идеал кольца $\mathfrak{R}_1$. Достаточно заметить, что если α и β — элементы из $\mathfrak{P}_2$, то $\alpha-\beta$ также лежит в $\mathfrak{P}_2$, так как $\mathfrak{P}_2$ — идеал кольца $\mathfrak{R}_2$. Если же ρ — элемент из $\mathfrak{R}_1$, α — элемент из $\mathfrak{P}_2$, то ρ содержится также в $\mathfrak{R}_2$ (ведь $\mathfrak{R}_1\subset\mathfrak{R}_2$), и поэтому $\rho\alpha$ является элементом $\mathfrak{P}_2$. Если $\mathfrak{P}_2$ — простой идеал кольца $\mathfrak{R}_2$ и если δ и γ — два любых элемента из $\mathfrak{R}_1$, произведение которых принадлежит $\mathfrak{P}_2$, то один из этих элементов должен принадлежать $\mathfrak{P}_2$, так как δ и γ являются одновременно элементами $\mathfrak{R}_2$, а $\mathfrak{P}_2$ — простой идеал последнего кольца. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{P}_2$ является простым идеалом кольца $\mathfrak{R}_1$.

Из сказанного следует, что любой собственный простой идеал кольца $\mathfrak{R}_2$ будет и собственным простым идеалом $\mathfrak{R}_1$. Но так как $\mathfrak{p}_1$ есть также собственный идеал в $\mathfrak{R}_1$, то в $\mathfrak{R}_1$ содержится больше собственных простых идеалов, чем в $\mathfrak{R}_2$. Ввиду того, что число собственных простых идеалов кольца нормирования равно рангу (теорема I), отсюда следует, что ранг нормирования $\mathfrak{R}_1$ больше ранга нормирования $\mathfrak{R}_2$.

(II) Если $\mathfrak{R}_1$ не содержится в $\mathfrak{R}_2$, то в $\mathfrak{R}_1$ существует элемент η, не содержащийся в $\mathfrak{R}_2$. Заменив, если это нужно, η на $1+\eta$, как и в (I), можно предположить, что η является делителем единицы в $\mathfrak{R}_1$ и не содержится в $\mathfrak{R}_2$. Тогда элемент $\xi=\eta^{-1}$ является делителем единицы в $\mathfrak{R}_1$, принадлежит $\mathfrak{R}_2$ и не является делителем единицы последнего кольца.

Иногда полезно следующее обобщение второй части теоремы VIII. Оно относится к конечному множеству колец нормирований $\mathfrak{R}_1,\ldots,\mathfrak{R}_k$. Эти кольца имеют общий нуль и общую единицу. Мы предположим, что они имеют хотя бы два общих им элемента α и β, являющихся делителями единицы в $\mathfrak{R}_i$ $(i=1,\ldots,k)$ и таких, что разность $\alpha-\beta$ также будет делителем единицы во всех этих кольцах. Это предположение всегда выполняется в случае нормирований поля алгебраических функций, так как в этом случае кольца $\mathfrak{R}_1,\ldots,\mathfrak{R}_k$ содержат основное поле K характеристики нуль и каждый отличный от нуля элемент из K будет делителем единицы в $\mathfrak{R}_i$.

Теорема IX. *Пусть* $\mathfrak{R}_1,\ldots,\mathfrak{R}_k$ — *кольца нормирований поля* Σ, *обладающие следующими свойствами*:

(а) $\mathfrak{R}_i$ *не содержится в* $\mathfrak{R}_j$ ($i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k$);

(б) *в пересечении* $\mathfrak{R}_1\cap\mathfrak{R}_2\cap\ldots\cap\mathfrak{R}_k$ *существуют элементы* α *и* β, *являющиеся делителями единицы во всех указанных кольцах и такие, что разность* $\alpha-\beta$ *также является делителем единицы во всех* $\mathfrak{R}_i$.

Тогда в пересечении $\mathfrak{R}_1\cap\mathfrak{R}_2\cap\ldots\cap\mathfrak{R}_k$ *существуют элементы* $\xi_1,\ldots,\xi_k$, *удовлетворяющие условиям*

$$\xi_i=0\ (\mathfrak{p}_j)\qquad (j\neq i),\qquad \xi_i\neq 0\ (\mathfrak{p}_i).$$

Случай, когда $k=2$, уже разобран во второй части теоремы VIII. Предположим теперь, что теорема доказана для случая $k-1$ колец ($k\geqslant 3$). Тогда найдутся элементы η_{ij} поля Σ, лежащие в кольцах $\mathfrak{R}_1,\ldots,\mathfrak{R}_{i-1},\mathfrak{R}_{i+1},\ldots,\mathfrak{R}_k$ и такие, что η_{ij} есть делитель единицы в $\mathfrak{R}_j$ и не является таковым в остальных кольцах $\mathfrak{R}_t$ (для всех t, отличных от i и j). Если η_{ij} принадлежит $\mathfrak{R}_i$, то мы положим $\zeta_{ij}=\eta_{ij}$. Если же η_{ij} не принадлежит $\mathfrak{R}_i$, то η_{ij}^{-1} является делителем единицы в $\mathfrak{R}_j$, принадлежит $\mathfrak{R}_i$ и не является в этом кольце делителем единицы, но не содержится в кольцах $\mathfrak{R}_t$ ($t\neq i,j$). В таком случае элементы $\eta_{ij}^{-1}-\alpha$ и $\eta_{ij}^{-1}-\beta$ оба содержатся в $\mathfrak{R}_i$ и $\mathfrak{R}_j$, но не содержатся ни в одном $\mathfrak{R}_t$ ($t\neq i,j$). Оба эти элемента будут делителями единицы в $\mathfrak{R}_i$ (так как α и β — делители единицы), и хотя бы один из них будет делителем единицы в $\mathfrak{R}_j$. В самом деле, если бы они оба не были делителями единицы в $\mathfrak{R}_j$, то разность $\beta-\alpha=(\eta_{ij}^{-1}-\alpha)-(\eta_{ij}^{-1}-\beta)$ также не была бы делителем единицы в $\mathfrak{R}_j$, вопреки условию. Пусть, например, $\eta_{ij}^{-1}-\alpha$ есть делитель единицы в $\mathfrak{R}_j$. Если мы положим в таком случае $\zeta_{ij}=(\eta_{ij}^{-1}-\alpha)^{-1}$, то ζ_{ij} будет элементом $\mathfrak{R}_i$, делителем единицы в $\mathfrak{R}_j$ и элементом всех $\mathfrak{R}_t$ ($t\neq i,j$), не являющимся ни в одном из них делителем единицы.

Положим

$$\xi_j=\prod_{i\neq j}\zeta_{ij}.$$

Так как $\zeta_{ij}\neq 0\ (\mathfrak{p}_j)$ при $i=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k$ и так как идеалы $\mathfrak{p}_j$ просты, то $\xi_j\neq 0\ (\mathfrak{p}_j)$. Если $t\neq j$, то можно выбрать i отличным от j и t (ведь $k\geqslant 3$). При этом значении i

$$\zeta_{ij}=0\ (\mathfrak{p}_t).$$

Следовательно,

$$\xi_j=0\ (\mathfrak{p}_t).$$

Таким образом, элементы $\xi_1,\ldots,\xi_k$ обладают нужными свойствами.

В заключение этого параграфа докажем один предварительный результат о продолжениях нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ в случае, когда Σ^* является алгебраическим расширением поля Σ, имеющим конечную степень r. Более точные результаты будут получены в следующем параграфе. Пусть Γ — группа значений нормирования $\mathfrak{B}$, Γ^* — группа

значений продолжения $\mathfrak{B}^*$ нормирования $\mathfrak{B}$ на поле Σ^*. Если σ — любой отличный от нуля элемент Σ^* и если он является корнем алгебраического уравнения

$$a_0\sigma^n+\ldots+a_n=0$$

с коэффициентами из Σ $(1\leqslant n\leqslant r)$, то в левой части написанного равенства хотя бы два члена должны иметь одну и ту же норму. Действительно, если бы все отличные от нуля члены имели различные нормы, то из результата (3) начала этого параграфа следовало бы, что

$$v^*(a_0\sigma^n+\ldots+a_n)=\min[v^*(a_0\sigma^n),\ldots,\ v^*(a_n)]$$

и поэтому конечно, в то время как $v^*(0)=\infty$. Таким образом, должны существовать хотя бы два члена $a_i\sigma^{n-i}$ и $a_j\sigma^{n-j}$, имеющие одну и ту же (конечную) норму в нормировании $\mathfrak{B}^*$. Если $j>i$, то мы получаем $(j-i)v^*(\sigma)=v^*(\sigma^{j-i})=v^*(a_j/a_i)=v(a_j/a_i)$. Так как $0\leqslant i<j\leqslant r$, то для любого элемента σ из поля Σ^* число $(j-i)$ является делителем $r!$. Следовательно, значение

$$r!v^*(\sigma)=v([a_j/a_i]^{r!/(j-i)})$$

равно норме некоторого элемента поля Σ в нормировании $\mathfrak{B}$.

Таким образом, группа Γ является подгруппой группы Γ^*, обладающей следующим свойством: умножение любого элемента из Γ^* на $r!$ есть элемент Γ.

Пусть группа Γ^* имеет ранг k и

$$\Gamma^*\supset\Gamma_1^*\supset\ldots\supset\Gamma_k^*=0$$

— совокупность ее изолированных подгрупп. Тогда $\Gamma_i^*\cap\Gamma\supseteq\Gamma_{i+1}^*\cap\Gamma$, причем из определения изолированной подгруппы непосредственно следует, что пересечение $\Gamma_i^*\cap\Gamma$ является изолированной подгруппой группы Γ. Далее, непосредственно проверяется, что фактор-группы $\Gamma_i^*\cap\Gamma/\Gamma_{i+1}^*\cap\Gamma$ изоморфны подгруппам аддитивной группы действительных чисел, а значит, архимедовски упорядочены. Отсюда вытекает, что все изолированные подгруппы группы Γ содержатся в последовательности

$$\Gamma\supseteq\Gamma_1^*\cap\Gamma\supseteq\ldots\supseteq\Gamma_k^*\cap\Gamma=0.$$

Мы докажем, что группа Γ имеет ранг k, если установить включение

$$\Gamma_i^*\cap\Gamma\supset\Gamma_{i+1}^*\cap\Gamma.$$

Пусть α — любой положительный элемент из Γ_i^*, не принадлежащий Γ_{i+1}^*. Тогда элемент $r!\alpha$ содержится в Γ_i^* и в Γ, т. е. $r!\alpha\in\Gamma_i^*\cap\Gamma$. Если бы было $r!\alpha\in\Gamma_{i+1}^*\cap\Gamma$, то было бы и $r!\alpha\in\Gamma_{i+1}^*$. Но так как $r!\alpha>\alpha>0$, то из определения изолированной подгруппы вытекало бы,

что $\alpha \in \Gamma^*_{i+1}$, вопреки условию. Следовательно, в $\Gamma^*_i \cap \Gamma$ имеются элементы, не принадлежащие $\Gamma^*_{i+1} \cap \Gamma$. Поэтому $\Gamma^*_i \cap \Gamma \supset \Gamma^*_{i+1} \cap \Gamma$ и группы Γ^* и Γ имеют одинаковый ранг. Далее, если группа Γ *дискретна*, т. е. если она изоморфна аддитивной группе целых чисел, то из сказанного следует, что Γ^* также дискретна. Действительно, в этом случае Γ^* имеет ранг 1 и обладает наименьшим положительным элементом $\alpha (\geqslant 1/r!)$. Если β — любой другой положительный элемент из Γ^* и $n\alpha \leqslant \beta < (n+1)\alpha$, то элемент $\beta - n\alpha \geqslant 0$ должен быть элементом из Γ^*. Поэтому либо он равен нулю, либо $\beta - n\alpha \geqslant \alpha$. Но так как $\beta - n\alpha < \alpha$, то отсюда следует, что $\beta - n\alpha = 0$ и $\beta = n\alpha$. Так как группа Γ^* содержит элементы $n\alpha$ для всех значений n, то ее дискретность следует отсюда непосредственно. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема X. *Если Σ^* есть алгебраическое расширение конечной степени поля Σ, то любое продолжение на поле Σ^* нормирования ранга k (соответственно дискретного нормирования) поля Σ имеет также ранг k (соответственно дискретно).*

Можно воспользоваться этой теоремой и утверждением (I) теоремы VIII для доказательства того, что если $\mathfrak{B}^*_1$ и $\mathfrak{B}^*_2$ — различные продолжения нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ на поле Σ^*, являющееся алгебраическим расширением конечной степени поля Σ, то кольцо любого из этих нормирований не содержит кольца другого. Пользуясь этим результатом, мы можем применять теорему IX к любому конечному числу различных продолжений нормирования $\mathfrak{B}$ на поле Σ^*.

Действительно, в силу утверждения (I) теоремы VIII, если кольцо $\mathfrak{R}^*_1$ нормирования $\mathfrak{B}^*_1$ содержится в кольце $\mathfrak{R}^*_2$ нормирования $\mathfrak{B}^*_2$, то ранг $\mathfrak{B}^*_1$ должен быть больше ранга $\mathfrak{B}^*_2$. Но, в силу теоремы X, ранги нормирований $\mathfrak{B}^*_1$ и $\mathfrak{B}^*_2$ равны рангу нормирования $\mathfrak{B}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{R}^*_1$ не содержится в $\mathfrak{R}^*_2$ и $\mathfrak{R}^*_2$ не содержится в $\mathfrak{R}^*_1$.

§ 3. Поля вычетов

Пусть Σ — произвольное поле и $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ с группой значений Γ. Как обычно, обозначим через $\mathfrak{R}$ кольцо рассматриваемого нормирования, а через $\mathfrak{p}$ — его идеал, состоящий из элементов кольца $\mathfrak{R}$, не являющихся делителями единицы. В таком случае $\mathfrak{p}$ есть максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$ (§ 2, теорема I), и поэтому (гл. XV, § 3, теорема III) кольцо вычетов $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ является полем. Мы будем называть это поле *полем вычетов* нормирования $\mathfrak{B}$, а образы элементов ξ кольца $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ — *вычетами* этих ξ. Если $\mathfrak{R}$ содержит некоторое поле K, то каждый отличный от нуля элемент из K имеет в K, а значит, и в $\mathfrak{R}$ обратный элемент и поэтому является делителем единицы в $\mathfrak{R}$. Таким образом, каждый отличный от нуля элемент из K отображается на ненулевой элемент кольца вычетов $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$.

Поэтому кольцо $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ содержит подполе $\overline{K}$, не состоящее только из нуля, на которое гомоморфно отображается поле K. Но в силу теоремы I § 3 гл. XV, поле $\overline{K}$ должно быть изоморфно K. Следовательно, если Σ является полем функций над основным полем K, а нормирование $\mathfrak{B}$ таково, что $v(a) = 0$ для любого отличного от нуля элемента a из K, то поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}$ содержит подполе $\overline{K}$, изоморфное K. Конечно, поле $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ определено лишь с точностью до изоморфизма. Однако обычно поле $\overline{K}$ отождествляют с K, так что поле вычетов любого нормирования, в случае полей функций над K, оказывается расширением поля K.

Допустим, что группа Γ имеет ранг k и что

$$\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_k = 0$$

есть совокупность ее изолированных подгрупп. Подгруппам $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ соответствуют простые идеалы $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ кольца $\mathfrak{R}$. Пусть Δ — любая изолированная подгруппа группы Γ. Если $\Delta = \Gamma_i$, то из теоремы V § 1 следует, что фактор-группа Γ/Γ_i имеет ранг i, а группа Γ_i — ранг $k - i$. Обозначим ранг группы Δ через k', а простой идеал кольца $\mathfrak{R}$, соответствующий этой подгруппе, — через $\mathfrak{P}$. Если ξ — любой отличный от нуля элемент поля Σ, то он отображается при нормировании $\mathfrak{B}$ на некоторый элемент $v(\xi)$ из Γ. Применяя после этого отображение группы Γ на фактор-группу Γ/Δ, получаем отображение элемента ξ на элемент $v'(\xi)$ из Γ/Δ. Докажем, что отображение $\xi \to v'(\xi)$ является нормированием поля Σ. Прежде всего, Γ/Δ есть аддитивная упорядоченная группа. Далее, если ξ, η — два элемента из Σ, то произведение $\xi\eta$ отображается на элемент $v(\xi\eta) = v(\xi) + v(\eta)$ из Γ, а этот элемент — на элемент $v'(\xi) + v'(\eta)$ из Γ/Δ, как это следует из известных свойств групп и их фактор-групп. Наконец, мы знаем, что если α и β — элементы группы Γ, такие, что $\alpha \geqslant \beta$, то α и β отображаются на элементы α' и β' из Γ/Δ, удовлетворяющие соотношению $\alpha' \geqslant \beta'$. Отсюда, ввиду соотношения

$$\xi + \eta \to v(\xi + \eta) \geqslant \min[v(\xi),\ v(\eta)] = \beta,$$

следует, что

$$\xi + \eta \to v'(\xi + \eta) \geqslant \min[v'(\xi),\ v'(\eta)] = \beta'.$$

Таким образом, отображение поля Σ на фактор-группу Γ/Δ является некоторым нормированием $\mathfrak{B}'$. Если α' — любой элемент из Γ/Δ, а α — элемент группы Γ, соответствующий α' при отображении группы Γ на Γ/Δ, то в поле Σ найдется элемент ξ, такой, что $v(\xi) = \alpha$. Тогда $v'(\xi) = \alpha'$, а значит, группой значений нормирования $\mathfrak{B}'$ служит группа Γ/Δ. Ясно, что нормирование $\mathfrak{B}'$ тривиально тогда и только тогда, когда $\Delta = \Gamma$. В общем случае ранг нормирования $\mathfrak{B}'$ равен $k - k'$.

Найдем теперь кольцо нормирования $\mathfrak{B}'$. Пусть ξ — любой элемент из Σ, удовлетворяющий условию $v'(\xi) \geqslant 0$. Тогда существует эле-

мент α из Δ, для которого $v(\xi) \geqslant \alpha$. Определим теперь элемент η из поля Σ следующим образом: если $\alpha \geqslant 0$, то $\eta = 1$, а если $\alpha < 0$, то η есть элемент из $\mathfrak{R}$, удовлетворяющий условию $v(\eta) = -\alpha$. Тогда, положив $\zeta = \xi\eta$, мы будем иметь в обоих случаях, что $v(\zeta) \geqslant 0$, т. е. что $\zeta \in \mathfrak{R}$. Так как $v(\eta)$ принадлежит Δ, то элемент η не содержится в простом идеале $\mathfrak{P}$, соответствующем подгруппе Δ. Поэтому элемент $\xi = \zeta/\eta$ принадлежит кольцу частных $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}}$ идеала $\mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{R}$. Наоборот, если ζ и η — два элемента из $\mathfrak{R}$, причем η не принадлежит $\mathfrak{P}$, то для элемента $\xi = \zeta/\eta$ мы будем иметь $v'(\zeta) \geqslant 0$, $v'(\eta) = 0$ и поэтому $v'(\xi) \geqslant 0$. Следовательно, кольцом нормирования $\mathfrak{B}'$ является кольцо $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}}$.

Идеалом нормирования $\mathfrak{B}'$ служит идеал кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}}$, состоящий из элементов, не являющихся делителями нуля в этом кольце, т. е. идеал $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{P}$. Поэтому полем вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$ будет поле $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{P}$, изоморфное полю частных кольца вычетов $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ (гл. XV, § 5, теорема XI, следствие). В случае, если Σ есть поле алгебраических функций над полем K и если $v(a) = 0$ для любого отличного от нуля элемента a из K, очевидно, что и $v'(a) = 0$ для отличных от нуля элементов из K. Полученные результаты мы суммируем в следующей теореме:

Теорема I. *Пусть $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, имеющее ранг k и группу значений Γ. Если Δ — изолированная подгруппа группы Γ, имеющая ранг k', то существует нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ с группой значений Γ/Δ ранга $k - k'$. Если $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{R}$, соответствующий подгруппе Δ, то кольцом нормирования $\mathfrak{B}'$ является кольцо $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}}$, а полем вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$ — поле, изоморфное полю частных кольца $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$.*

В случае, если $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$, т. е. если $\Delta = 0$, отсюда следует, что $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{R}$.

Сохраним обозначения теоремы I и обозначим через Σ' поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$. Пусть ξ' — произвольный отличный от нуля элемент поля Σ', а ξ, η, ... — элементы кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}}$, переходящие в элемент ξ' при отображении $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}} \to \mathfrak{R}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{P}$. Так как ξ' отличен от нуля, то элементы ξ, η, ... не принадлежат $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{P}$, а значит,

$$v'(\xi) = v'(\eta) = \ldots = 0.$$

Поэтому элементы $v(\xi)$, $v(\eta)$, ... принадлежат Δ. Ввиду того, что элемент $\xi - \eta$ отображается на нуль поля Σ', этот элемент должен принадлежать $\mathfrak{R}_{\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{P}$, и поэтому норма $v(\xi - \eta)$ должна быть больше любого элемента из Δ. Следовательно,

$$v(\xi - \eta) > v(\eta),$$

и поэтому

$$v(\xi) = v(\xi - \eta + \eta) = \min[v(\xi - \eta),\ v(\eta)] = v(\eta).$$

Таким образом, все элементы ξ, η, ... имеют одну и ту же норму в нормировании $\mathfrak{B}$, причем значение нормы принадлежит Δ. Этот элемент группы Δ однозначно определяется элементом ξ', и мы обозначим его через $v_1(\xi')$. Таким образом, мы определили элемент из Δ, однозначно соответствующий любому отличному от нуля элементу поля Σ'. Каждый элемент из Δ соответствует при этом хотя бы одному элементу поля Σ'. Действительно, если α — любой элемент группы Δ, то в Σ найдется элемент ξ, для которого $v(\xi)=\alpha$. Так как $v(\xi)\in\Delta$, то $v'(\xi)=0$, а значит, ξ определяет отличный от нуля элемент ξ' поля Σ'. Для этого элемента мы имеем $v_1(\xi')=\alpha$.

Пусть теперь ξ_1', ξ_2' — два отличных от нуля элемента из Σ', а ξ_1, ξ_2 — соответствующие им элементы поля Σ. Тогда

$$v_1(\xi_1'\xi_2')=v(\xi_1\xi_2)=v(\xi_1)+v(\xi_2)=v_1(\xi_1')+v_1(\xi_2')$$

и

$$v_1(\xi_1'+\xi_2')=v(\xi_1+\xi_2)\geqslant\min[v(\xi_1),\ v(\xi_2)]=\min[v_1(\xi_1'),\ v_1(\xi_2')].$$

Следовательно, отображение $\xi'\to v_1(\xi')$ поля Σ' на Δ является нормированием поля Σ' с группой значений Δ. Это нормирование мы будем обозначать через $\mathfrak{B}_1$.

Легко найти кольцо нормирования $\mathfrak{B}_1$. В самом деле, неравенство $v_1(\xi')\geqslant 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $v(\xi)\geqslant 0$. Два элемента ξ, η кольца $\mathfrak{R}$ определяют один и тот же элемент поля Σ' тогда и только тогда, когда разность $\xi-\eta$ принадлежит $\mathfrak{P}$. Следовательно, кольцо нормирования $\mathfrak{B}_1$ изоморфно кольцу $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$. Идеалом, состоящим из элементов этого кольца, не являющихся делителями единицы, служит $\mathfrak{p}/\mathfrak{P}$. Таким образом, доказана

Теорема II. *При обозначениях теоремы I нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ определяет нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля вычетов Σ' для нормирования $\mathfrak{B}'$, имеющее группу значений Δ. Кольцо нормирования $\mathfrak{B}_1$ изоморфно кольцу $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$, а идеалом нормирования $\mathfrak{B}_1$ является идеал $\mathfrak{p}/\mathfrak{P}$.*

Значение теорем I и II состоит в том, что они описывают расщепление нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ, имеющего ранг $k>1$, на нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ, имеющее ранг $k-k'$, и нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля вычетов Σ' нормирования $\mathfrak{B}'$, имеющее ранг k'. Однако знание нормирований $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}_1$ еще не дает возможности прямо определить норму любого элемента ξ из поля Σ: если ξ есть элемент поля Σ, не являющийся делителем единицы кольца нормирования $\mathfrak{R}$, то его образом в поле Σ' будет нуль или бесконечность, в зависимости от того, будет ли $v'(\xi)>0$, или $v'(\xi)<0$; следовательно, норма $v_1(\xi')$ в сущности не существует. Тем не менее, нормирования $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}_1$ однозначно определяют нормирование $\mathfrak{B}$, так как последнее определяется его кольцом нормирования $\mathfrak{R}$, а это кольцо можно задать следующим образом: элемент ξ принадлежит $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда либо

$$v'(\xi)>0,$$

либо $v'(\xi)=0$ и $v_1(\xi')\geqslant 0$, где ξ' есть вычет элемента ξ в нормировании $\mathfrak{B}'$.

Следующая теорема служит обращением теорем I и II.

Теорема III. *Пусть $\mathfrak{B}'$ — нормирование поля Σ с группой значений Γ', а Σ' — поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$. Если $\mathfrak{B}_1$ — нормирование поля Σ' с группой значений Δ, то существует нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ, которое распадается в смысле теорем I и II на нормирования $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}_1$.*

Если Σ есть поле функций над основным полем K, причем $v'(a)=0$ и $v_1(a)=0$ для всех отличных от нуля элементов a из K, то и $v(a)=0$ для этих элементов.

Из сделанного выше замечания ясно, что если нормирование $\mathfrak{B}$ существует, то его кольцо должно состоять из элементов ξ поля Σ, для которых либо $v'(\xi)>0$, либо же $v'(\xi)=0$ и $v_1(\xi')\geqslant 0$, где ξ' — вычет элемента ξ в нормировании $\mathfrak{B}'$. Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность таких элементов ξ из Σ. Докажем прежде всего, что $\mathfrak{R}$ есть кольцо. Пусть ξ и η — два элемента из $\mathfrak{R}$.

(I) Если $v'(\xi)>0$ и $v'(\eta)>0$, то

$$v'(\xi\eta)=v'(\xi)+v'(\eta)>0 \text{ и } v'(\xi+\eta)\geqslant \min[v'(\xi),\ v'(\eta)]>0.$$

(II) Если $v'(\xi)>0$ и $v'(\eta)=0$, $v_1(\eta')\geqslant 0$, то

$$v'(\xi\eta)=v'(\xi)+v'(\eta)>0 \text{ и } v'(\xi+\eta)=v(\eta)=0.$$

Кроме того, так как ξ не является делителем единицы кольца нормирования $\mathfrak{B}'$, его вычет ξ' в нормировании $\mathfrak{B}'$ равен нулю. Следовательно, $v_1(\xi'+\eta')=v_1(\eta')\geqslant 0$.

(III) Если $v'(\xi)=0$, $v_1(\xi')\geqslant 0$ и $v'(\eta)>0$, $v_1(\eta')\geqslant 0$, то соображения использованные в пункте (II), дают

$$v'(\xi\eta)>0,\ v'(\xi+\eta)=0,\ v_1(\xi'+\eta')\geqslant 0.$$

(IV) Если $v'(\xi)=0$, $v_1(\xi')\geqslant 0$ и $v'(\eta)=0$, $v_1(\eta')\geqslant 0$, то

$$v'(\xi\eta)=v'(\xi)+v'(\eta)=0,\ v_1(\xi'\eta')=v_1(\xi')+v_1(\eta')\geqslant 0$$

и

$$v'(\xi+\eta)\geqslant \min[v'(\xi),\ v'(\eta)]=0.$$

Если $v'(\xi+\eta)=0$, то $\xi'+\eta'\neq 0$ и

$$v_1(\xi'+\eta')\geqslant \min[v_1(\xi'),\ v_1(\eta')]\geqslant 0.$$

Следовательно, во всех случаях, если элементы ξ и η принадлежат $\mathfrak{R}$, то $\xi\eta$ и $\xi+\eta$ также принадлежат $\mathfrak{R}$. Таким образом, $\mathfrak{R}$ — кольцо.

Для доказательства того, что $\mathfrak{R}$ есть кольцо некоторого нормирования, воспользуемся теоремой III § 2. Пусть $\zeta\neq 0$ — любой элемент из Σ. Нужно показать, что либо ζ, либо ζ^{-1} принадлежит $\mathfrak{R}$. Предположим, что ζ не содержится в $\mathfrak{R}$. Тогда либо $v'(\zeta)<0$, а значит, $v'(\zeta^{-1})>0$, либо $v'(\zeta)=0$ и $v_1(\zeta')<0$, где ζ' — вычет элемента ζ

в нормировании $\mathfrak{B}'$. В последнем случае $v'(\zeta^{-1}) = 0$ и $v_1((\zeta')^{-1}) > 0$. Отсюда следует, что в любом из двух указанных случаев элемент ζ^{-1} принадлежит $\mathfrak{R}$.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, определяемое кольцом $\mathfrak{R}$, и Γ — группа его значений. Элементы ξ кольца $\mathfrak{R}$, для которых $v'(\xi) > 0$, образуют идеал $\mathfrak{P}$ этого кольца. Действительно, если ξ и η — такие элементы из $\mathfrak{R}$, что $v'(\xi) > 0$ и $v'(\eta) > 0$, а ρ — произвольный элемент из $\mathfrak{R}$, то

$$v'(\xi - \eta) \geqslant \min[v'(\xi),\ v'(\eta)] > 0$$

и

$$v'(\rho\xi) = v'(\rho) + v'(\xi) > 0,$$

так как $v'(\rho) \geqslant 0$. Если σ и τ — два элемента из $\mathfrak{R}$, не лежащие в $\mathfrak{P}$, то

$$v'(\sigma\tau) = v'(\sigma) + v'(\tau) = 0.$$

Отсюда следует, что произведение $\sigma\tau$ не принадлежит $\mathfrak{P}$, а значит, идеал $\mathfrak{P}$ является простым идеалом кольца $\mathfrak{R}$.

В силу сказанного, идеал $\mathfrak{P}$ определяет изолированную подгруппу Γ^* группы Γ. Поэтому нормирование $\mathfrak{B}$ расщепляется на некоторое нормирование $\mathfrak{B}^*$ поля Σ с группой значений Γ/Γ^* и нормирование $\mathfrak{B}_1^*$ поля вычетов для $\mathfrak{B}^*$ с группой значений Γ^*. Кольцом нормирования для $\mathfrak{B}^*$ является кольцо частных $\mathfrak{R}_{\mathfrak{B}}$. Оно состоит из элементов вида $\zeta = \xi/\eta$, где ξ и η — элементы $\mathfrak{R}$ и $v(\xi) \geqslant 0$, причем $v(\eta)$ лежит в Γ^*. Другими словами, оно состоит из элементов ζ, для которых $v'(\zeta) \geqslant 0$. Таким образом, кольцо нормирования $\mathfrak{B}^*$ совпадает с кольцом нормирования $\mathfrak{B}'$, а значит, эти нормирования можно отождествить. В таком случае $\Gamma' = \Gamma/\Gamma^*$. Отсюда вытекает, что полем вычетов нормирования $\mathfrak{B}^*$ является поле Σ'. Кольцо нормирования $\mathfrak{B}_1^*$ представляет собой совокупность элементов из Σ', служащих вычетами элементов поля Σ, лежащих в $\mathfrak{R}$. Следовательно, оно совпадает с кольцом нормирования $\mathfrak{B}_1$. Таким образом, группу Γ^* можно отождествить с Δ. Поэтому нормирование $\mathfrak{B}$ может быть расщеплено на нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ и нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля вычетов для нормирования $\mathfrak{B}'$.

Мы будем говорить, что нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ *составлено* из нормирований $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}_1$.

Довольно интересен частный случай, когда нормирование $\mathfrak{B}'$ дискретно, т. е. когда группа значений для $\mathfrak{B}'$ является аддитивной группой целых чисел. В этом случае существует элемент ζ поля Σ, для которого $v'(\zeta) = 1$. Пусть теперь ξ — произвольный отличный от нуля элемент из Σ, и пусть $v'(\xi) = n$ (n есть целое число, положительное, равное нулю или отрицательное). Введем обозначение $\overline{\xi} = \xi\zeta^{-n}$. Тогда $v'(\overline{\xi}) = 0$, и поэтому вычет $\overline{\xi}'$ элемента $\overline{\xi}$ в нормировании $\mathfrak{B}'$ отличен от нуля. Положим $v_1(\overline{\xi}') = \alpha$ и условимся писать $w(\xi) = (n, \alpha)$. Подобным же образом, если η — любой другой элемент из Σ, то мы

можем определить для него значение $w(\eta)=(m,\ \beta)$, где $v'(\eta)=m$, $\overline{\eta}=\eta\zeta^{-m}$ и $v_1(\overline{\eta}')=\beta$. Так как $v'(\xi\eta)=m+n$, $\xi\eta=\overline{\xi}\overline{\eta}\zeta^{n+m}$ и $v_1(\overline{\xi}'\overline{\eta}')=\alpha+\beta$, то мы будем иметь $w(\xi\eta)=(m+n,\ \alpha+\beta)$. Кроме того, $v'(\xi+\eta)\geqslant\min[m,\ n]$, и если, например, $v'(\xi+\eta)=\min[m,\ n]=m$, то $\xi+\eta=(\overline{\xi}\zeta^{n-m}+\overline{\eta})\zeta^m$,

$$v_1([\overline{\xi}\zeta^{n-m}+\overline{\eta}]')=v_1(\overline{\eta}'),\ \text{если}\ n>m,$$

и

$$v_1(\overline{\xi}'+\overline{\eta}')\geqslant\min[v_1(\overline{\xi}'),\ v_1(\overline{\eta}')],\ \text{если}\ m=n.$$

Следовательно, если мы будем интерпретировать пары $(n,\ \alpha)$ как элементы прямой суммы групп Γ' и Δ, упорядоченной согласно § 1, то установленное нами отображение $\xi\to w(\xi)$ отличных от нуля элементов поля Σ на эту прямую сумму оказывается нормированием. Кольцо этого нормирования состоит из элементов ξ поля Σ, для которых либо $v'(\xi)\geqslant 0$, либо же $v'(\xi)=0$ и $v_1(\xi')\geqslant 0$. Следовательно, это кольцо совпадает с $\mathfrak{R}$, а построенное нормирование совпадает с нормированием $\mathfrak{B}$. Отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае группа Γ является прямой суммой групп Γ' и Δ. Таким образом, доказана следующая

Теорема IV. *Пусть $\mathfrak{B}'$ — нормирование поля Σ с дискретной группой значений Γ'. Если $\mathfrak{B}_1$ — нормирование поля вычетов для $\mathfrak{B}'$ с группой значений Δ, то группа значений нормирования $\mathfrak{B}$, составленного из нормирований $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}_1$, является прямой суммой Γ' и Δ.*

В заключение этого параграфа докажем одну теорему о возможных продолжениях нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ на алгебраическое расширение Σ^* поля Σ, имеющее конечную степень.

Теорема V. *Пусть $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, а Σ^* — алгебраическое расширение Σ, имеющее конечную степень m. Тогда существует не более m нормирований поля Σ^*, являющихся продолжениями нормирования $\mathfrak{B}$.*

Мы будем предполагать, что поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}$ содержит бесконечное множество элементов.

Докажем прежде всего, что если $\mathfrak{B}^*$ — любое нормирование поля Σ^*, служащее продолжением нормирования $\mathfrak{B}$, то поле вычетов для $\mathfrak{B}^*$ изоморфно некоторому алгебраическому расширению поля вычетов для $\mathfrak{B}$, причем степень этого расширения не превосходит m. Очевидно, что любой элемент поля Σ, являющийся делителем единицы в кольце нормирования $\mathfrak{B}$, будет также делителем единицы в кольце нормирования $\mathfrak{B}^*$. Следовательно, поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}^*$ содержит подполе, изоморфное полю вычетов для $\mathfrak{B}$. Поэтому поле вычетов для $\mathfrak{B}^*$ мы будем рассматривать как расширение поля вычетов для $\mathfrak{B}$. Будем обозначать вычет любого элемента σ^* из Σ^* в нормировании $\mathfrak{B}^*$ через $\overline{\sigma^*}$. Если $a^*=a\in\Sigma$, то $\overline{a^*}=\overline{a}$. Пусть теперь $\overline{\sigma}^*$ — любой отличный от нуля элемент из поля вычетов нормирования $\mathfrak{B}^*$,

а σ^* — элемент поля Σ^*, имеющий такой вычет. Элемент σ^* удовлетворяет уравнению

$$a_0\sigma^{*n} + a_1\sigma^{*n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (a_i \in \Sigma)$$

над полем Σ, имеющему степень n $(n \leqslant m)$. Умножая левую часть написанного равенства на подходящий элемент поля Σ, можно добиться, чтобы было $\min[v(a_0), \ldots, v(a_n)] = 0$. Но так как элемент σ^* имеет отличный от нуля вычет, то $v^*(\sigma^*) = 0$. Отсюда вытекает, что $v(a_i) = 0$ при некотором i, меньшем n. Действительно, если бы было $v(a_n) < v(a_i)$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, то было бы $v^*(a_n) < v^*(a_i\sigma^{*n-i})$, а значит,

$$v^*[a_0\sigma^{*n} + \ldots + a_n] = v^*(a_n) = 0.$$

Но это несовместимо с тем, что $v^*(0) = \infty$. Следовательно, мы можем перейти к полю вычетов. Мы получаем

$$\bar{a}_0\bar{\sigma}^{*n} + \ldots + \bar{a}_n = 0,$$

где хотя бы одна степень элемента $\bar{\sigma}^*$ имеет отличный от нуля коэффициент. Таким образом, элемент $\bar{\sigma}^*$ удовлетворяет некоторому уравнению, коэффициенты которого принадлежат полю вычетов нормирования $\mathfrak{B}$, а степень не превышает m.

Предположим теперь, что нормирование $\mathfrak{B}$ имеет $m+1$ различных продолжений $\mathfrak{B}_1^*, \ldots, \mathfrak{B}_{m+1}^*$. В § 2, стр. 211, мы видели, что $\mathfrak{R}_i^*$ не содержится в $\mathfrak{R}_j^*$ $(i \neq j)$, а значит (§ 2, теорема IX), в кольцах нормирований $\mathfrak{B}_i^*$ найдутся элементы $\xi_1^*, \ldots, \xi_{m+1}^*$, такие, что вычет $\bar{\xi}_i^*$ элемента ξ_i^* в нормировании $\mathfrak{B}_i^*$ отличен от нуля, а вычет $\bar{\xi}_i^*$ в нормировании $\mathfrak{B}_j^*$ $(i \neq j)$ равен нулю. Элементы $\bar{\xi}_i^*$ являются алгебраическими над полем вычетов нормирования $\mathfrak{B}$. Обозначим элементы, сопряженные с $\bar{\xi}_i^*$ над полем вычетов для $\mathfrak{B}$, через $\bar{\xi}_i^{*(\sigma)}$ $(\sigma = 1, \ldots, n_i)$. Так как поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}$ содержит бесконечное множество элементов, то в поле Σ существуют элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$, для которых

$$\bar{\alpha}_i\bar{\xi}_i^{*(\sigma)} \neq \bar{\alpha}_j\bar{\xi}_j^{*(\rho)}$$

при $\sigma = 1, \ldots, n_i$, $\rho = 1, \ldots, n_j$ для любых различных i, j. Положим $\sigma^* = \sum \alpha_i\xi_i^*$. Тогда вычетом этого элемента в нормировании $\mathfrak{B}_i^*$ служит $\bar{\alpha}_i\bar{\xi}_i^*$. Следовательно, все $m+1$ вычетов элемента σ^*, лежащие в некотором расширении поля вычетов нормирования $\mathfrak{B}$, различны. Но элемент σ^* удовлетворяет некоторому уравнению над полем Σ, имеющему степень $\leqslant m$. Следовательно, вычеты этого элемента являются корнями уравнения, степень которого также не превосходит m, а коэффициенты лежат в поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}$. Поэтому среди вычетов элемента σ^* может быть не более m различных, и мы пришли к противоречию. Этим теорема доказана.

§ 4. Нормирования полей алгебраических функций

В §§ 2 и 3 мы рассматривали свойства нормирований произвольного поля Σ и ограничивались лишь замечаниями о применении получаемых результатов к случаю, когда Σ является полем алгебраических функций над некоторым основным полем K. Но нашим основным предметом является именно применение теории нормирований к полю функций алгебраического многообразия, определенного над основным полем K характеристики нуль. В §§ 4 и 5 мы рассмотрим этот случай более детально. При этом имеется одна опасность, которую следует обойти. Предположим, что Σ — поле функций некоторого алгебраического многообразия V размерности d над полем K. В таком случае в поле Σ существует алгебраически независимая над полем K система $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ из d элементов. Поле Σ является простым алгебраическим расширением поля $K(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$, имеющим конечную степень. Если мы рассмотрим какое-либо нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ (всегда предполагается, что это нормирование удовлетворяет условию (III) из § 2, т. е. что для любого отличного от нуля элемента a из K будет $v(a) = 0$), то окажется, что поле вычетов Σ' рассматриваемого нормирования имеет степень трансцендентности d', меньшую d. Другими словами, в поле Σ' существуют системы из d' элементов, алгебраически независимых над K, и не существует таких систем из $d'+1$ элементов. Однако из этого не следует, что поле Σ' является полем функций некоторого алгебраического многообразия, так как если $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_{d'}$ — система из d' алгебраически независимых элементов поля Σ', то Σ' не обязательно будет *конечным* расширением поля $K(\zeta'_1, \ldots, \zeta'_{d'})$. В ряде задач будет необходимо рассматривать нормирования таких полей, как Σ', т. е. полей, имеющих конечную степень трансцендентности над полем K, но не являющихся полями функций алгебраических многообразий. Поэтому следует отметить, что результаты, полученные в §§ 2 и 3 для полей алгебраических функций, применимы и к полям конечной степени трансцендентности над полем K, независимо от того, будут ли эти поля полями функций алгебраических многообразий или нет. Чтобы избежать путаницы в дальнейшем, мы будем говорить, что *поле Σ является полем функций алгебраического многообразия размерности d*, если формулируемая теорема справедлива лишь в случае, когда Σ есть конечное (а значит, простое) алгебраическое расширение чисто трансцендентного расширения размерности d поля K. Если же теорема имеет место независимо от того, является Σ полем функций алгебраического многообразия или нет, то мы будем говорить, что Σ *есть расширение конечной степени трансцендентности d поля K* (или *расширение, имеющее конечную степень трансцендентности*).

Пусть Σ — расширение поля K, имеющее степень трансцендентности d, и $\mathfrak{B}$ — нормирование этого поля. Как обычно, обозначим

кольцо рассматриваемого нормирования через $\mathfrak{R}$, идеал нормирования — через $\mathfrak{p}$. Поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}$ изоморфно фактор-кольцу $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ и содержит подполе, изоморфное K (§ 3). Это подполе мы отождествим с K, так что поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}$ будет расширением поля K. *Размерностью нормирования* $\mathfrak{B}$ мы назовем степень трансцендентности его поля вычетов над полем K.

Теорема I. *Размерность любого нетривиального нормирования поля* Σ, *имеющего конечную степень трансцендентности* d *над* K, *меньше* d.

Так как любые $d+1$ элементов из $\mathfrak{R}$ алгебраически зависимы над K, то они, очевидно, являются и алгебраически зависимыми по модулю $\mathfrak{p}$. Следовательно, размерность рассматриваемого нормирования не может превышать d. Предположим, что она в точности равна d. Тогда в кольце $\mathfrak{R}$ существует система $\xi_1, \ldots, \xi_d$ из d элементов, алгебраически независимая по модулю $\mathfrak{p}$. Пусть η — любой отличный от нуля элемент из $\mathfrak{p}$. Элементы $\xi_1, \ldots, \xi_d, \eta$ алгебраически зависимы над полем K, а значит, удовлетворяют некоторому неприводимому уравнению

$$a_0(\xi_1, \ldots, \xi_d)\eta^r + a_1(\xi_1, \ldots, \xi_d)\eta^{r-1} + \ldots + a_r(\xi_1, \ldots, \xi_d) = 0,$$

где элемент $a_r(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ отличен от нуля. Так как $a_i(\xi) \in \mathfrak{R}$, а η принадлежит $\mathfrak{p}$, то мы имеем

$$a_r(\xi_1, \ldots, \xi_d) = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Но это соотношение противоречит нашему предположению, что элементы $\xi_1, \ldots, \xi_d$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{p}$. Следовательно, поле $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ имеет размерность над полем K, меньшую d, т. е. размерность поля вычетов рассматриваемого нормирования меньше d.

Из доказанного непосредственно вытекает такое

Следствие. *Если* Σ *имеет степень трансцендентности нуль, то каждое нормирование этого поля тривиально.*

Теорема II. *Пусть* Σ — *расширение поля* K, *имеющее степень трансцендентности* d. *Тогда ранг любого нормирования поля* Σ *не превосходит* d. *Более того, сумма ранга и размерности нормирования не может превосходить* d.

Пусть ранг нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ равен k, и пусть группа значений Γ этого нормирования имеет изолированные подгруппы $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, где

$$\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \ldots \supset \Gamma_k = 0.$$

В силу теорем I и II § 3, можно расщепить нормирование $\mathfrak{B}$ на нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ с группой значений Γ/Γ_1 и нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля вычетов Σ_0' нормирования $\mathfrak{B}'$, имеющее группу значений Γ_1. Таким же образом нормирование $\mathfrak{B}_1$ может быть расщеплено на нормирование $\mathfrak{B}_1'$ с группой значений Γ_1/Γ_2 и нормирование $\mathfrak{B}_2$ поля вычетов Σ_1' нормирования $\mathfrak{B}_1'$, имеющее группу значений Γ_2. Поступая

таким образом, мы построим поля вычетов $\Sigma_0', \Sigma_1', \ldots, \Sigma_{k-1}'$ и нормирования $\mathfrak{B}_i$ полей Σ_{i-1}', имеющие группы значений Γ_i. Обозначим через d_i' размерности полей Σ_i'. Тогда, в силу теоремы I, $d_0' < d$, $d_i' < d_{i-1}'$. Поэтому $d_i' < d - i$. Так как нормирование поля Σ_{k-2}' с группой значений Γ_{k-1} не является тривиальным, то $d_{k-2}' > 0$. Следовательно,

$$d - k + 2 > d_{k-2}' > 0,$$

т. е.

$$d - k + 2 \geqslant 2,$$

и поэтому

$$k \leqslant d.$$

Доказательство последнего утверждения содержится в сказанном. В частности, отсюда следует, что нетривиальное нормирование поля, имеющего над полем K степень трансцендентности 1, имеет ранг 1, так что его группа значений архимедовски упорядочена.

Остальные теоремы этого параграфа относятся к случаю, когда Σ является полем функций некоторого неприводимого алгебраического многообразия над полем K, имеющего размерность d. Первый из этих результатов описывает возможные нормирования поля Σ, имеющие размерность $d - 1$.

Докажем прежде всего одну лемму о возможных нормированиях поля Σ в случае, когда оно является простым трансцендентным расширением поля K, т. е. $\Sigma = K(x)$.

Лемма. *Любое нетривиальное нормирование поля $K(x)$ получается одним из двух следующих способов.*

(а) *В кольце $K[x]$ выбирается неприводимый многочлен $f(x)$, степень которого больше нуля, и каждая рациональная функция $R(x)$ записывается в виде*

$$R(x) = [f(x)]^a \cdot [f_1(x)]^{a_1} \ldots [f_k(x)]^{a_k},$$

где $a, a_1, \ldots, a_k$ — целые числа, положительные, отрицательные или равные нулю, а $f(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)$ — различные неприводимые многочлены. Нормирование определяется формулой

$$v(R(x)) = a.$$

(б) *Элементы поля $K(x)$ записываются как рациональные функции $R(x^{-1})$ неизвестного x^{-1}, и норма элемента $R(x^{-1})$ определяется описанным выше образом при $f(x^{-1}) = x^{-1}$.*

Очевидно, что если $f(x)$ — любой неприводимый многочлен или $f(x^{-1}) = x^{-1}$, то отображение $R(x) \to a$ является нормированием поля $K(x)$. Для доказательства того, что таким образом получаются *все* нормирования поля $K(x)$, заметим прежде всего, что в нетривиальном нормировании все элементы из $K[x]$ не могут иметь нулевые нормы. Действительно, любой элемент из $K(x)$ имеет вид $a(x)/b(x)$,

где $a(x)$ и $b(x)$ принадлежат $K[x]$. Если бы всегда было $v(a(x))=0$ и $v(b(x))=0$, то мы имели бы

$$v(R(x))=v(a(x)/b(x))=0,$$

а значит, нормирование было бы тривиальным.

Случай I. Если $v(x)\geqslant 0$, то $v(f(x))\geqslant 0$ для любого многочлена $f(x)$ из $K[x]$. Действительно, если

$$f(x)=a_0+a_1x+\ \dots\ +a_nx^n,$$

то

$$v(a_ix^i)=v(a_i)+iv(x)=iv(x)\geqslant 0,$$

и поэтому

$$v(f(x))\geqslant \min[v(a_ix^i)]\geqslant 0.$$

Следовательно, в этом случае кольцо $K[x]$ содержится в кольце нормирования $\mathfrak{R}$. Если $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{P}=K[x]\cap\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{P}$ является простым идеалом кольца $K[x]$ (гл. XV, § 4). Кроме того, $\mathfrak{P}$ не будет нулевым идеалом, так как мы уже видели, что существуют многочлены из $K[x]$, нормы которых отличны от нуля. Эти нормы положительны, так как $\mathfrak{R}\supseteq K[x]$. Ввиду того, что идеал $\mathfrak{P}$ не содержит отличных от нуля элементов поля K, он не является также единичным идеалом. Следовательно, $\mathfrak{P}$ есть собственный простой идеал кольца $K[x]$. Но $K[x]$ — кольцо главных идеалов (гл. XV, § 1). Поэтому идеал $\mathfrak{P}$ имеет базис, состоящий из одного элемента, например $f(x)$, который, ввиду простоты идеала $\mathfrak{P}$, должен быть неприводимым. Если $g(x)$ — любой неприводимый многочлен, не кратный $f(x)$, то существуют многочлены $a(x)$ и $b(x)$, удовлетворяющие условию

$$a(x)f(x)+b(x)g(x)=1.$$

Следовательно,

$$0=v(1)\geqslant \min[v(af),\ v(bg)]=$$
$$=\min[v(a)+v(f),\ v(b)+v(g)]\geqslant \min[v(f),\ v(g)].$$

Так как $v(f)>0$ и $v(g)\geqslant 0$, то отсюда вытекает, что $v(g)=0$. Поэтому, если рациональная функция $R(x)$ представлена в виде

$$R(x)=[f(x)]^a[f_1(x)]^{a_1}\dots[f_k(x)]^{a_k},$$

как указано в формулировке леммы, то

$$v(R)=av(f)+a_1v(f_1)+\ \dots\ +a_kv(f_k)=av(f),$$

так как $v(f_i)=0$. Таким образом, группа значений нормирования состоит из целых кратных значения $v(f)$. Если мы произведем нормализацию так, чтобы было $v(f)=1$, то группа значений Γ станет аддитивной группой целых чисел. Этим лемма в случае, когда $v(x)\geqslant 0$, доказана.

Случай II. Если $v(x) < 0$, то мы запишем элементы поля $K(x)$ как рациональные функции от x^{-1}. Тогда $K[x^{-1}] \subseteq \mathfrak{R}$, а идеал $\mathfrak{P}' = K[x^{-1}] \cap \mathfrak{p}$ будет собственным простым идеалом кольца $K[x^{-1}]$. Так как $x^{-1} \in K[x^{-1}] \cap \mathfrak{p}$, причем элемент x^{-1} неприводим, то элемент x^{-1} будет базисом идеала $\mathfrak{P}'$. Теперь утверждение леммы получается как и в случае I.

Доказанная лемма вместе с теоремой X § 2 непосредственно дает такое

Следствие. *Если* Σ *— поле функций алгебраического многообразия размерности* 1, *то все нетривиальные нормирования поля* Σ *дискретны.*

Теорема III. *Пусть* Σ *— поле функций алгебраического многообразия размерности* d *над полем* K, *а* $\mathfrak{B}$ *— нетривиальное нормирование поля* Σ, *имеющее размерность* $d-1$. *Тогда нормирование* $\mathfrak{B}$ *дискретно, а его поле вычетов* Σ' *является полем функций некоторого алгебраического многообразия размерности* $d-1$ *над полем* K.

Докажем сначала последнее утверждение теоремы. Так как нормирование $\mathfrak{B}$ имеет размерность $d-1$, то в кольце $\mathfrak{R}$ рассматриваемого нормирования существует система $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$ из $d-1$ элементов, алгебраически независимая по модулю $\mathfrak{p}$ (здесь $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$). Пусть η — любой отличный от нуля элемент из $\mathfrak{p}$. Если элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \eta$ связаны некоторым алгебраическим уравнением

$$a_0(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) + a_1(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})\eta + \ldots + a_r(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})\eta^r = 0$$

над полем K, то мы можем предполагать, что $a_0(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) \neq 0$. Но отсюда вытекает, что

$$a_0(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) = 0 \quad (\mathfrak{p}),$$

вопреки условию, что $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{p}$. Следовательно, элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \eta$ должны быть алгебраически независимыми над K. Ввиду того, что Σ есть поле функций некоторого многообразия размерности d над полем K, это поле является конечным алгебраическим расширением поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \eta)$, имеющим некоторую степень m. Возьмем любой элемент ζ этого расширения и предположим, что

$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{m'} a_{ij}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})\eta^i\zeta^j = 0 \quad (m' \leqslant m) \tag{1}$$

— неприводимое уравнение, связывающее элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \eta, \zeta$

над полем K. Переходя к полю вычетов Σ' и учитывая, что $\eta \in \mathfrak{p}$, получаем [1])

$$\sum_j a_{0j}(\xi_1', \ldots, \xi_{d-1}')\zeta'^j = 0.$$

Здесь не все коэффициенты $a_{0j}(\xi_1', \ldots, \xi_{d-1}')$ равны нулю. Действительно, если бы все они были равны нулю, то и $a_{0j}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})$ были бы равны нулю при всех значениях j, так как элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{p}$. Но в таком случае уравнение (1) было бы приводимым, вопреки условию. А так как не все $a_{0j}(\xi_1', \ldots, \xi_{d-1}')$ равны нулю, то элемент ζ' является алгебраическим над полем $K(\xi_1', \ldots, \xi_{d-1}')$ и удовлетворяет уравнению, степень которого не превышает m.

Отсюда следует, что поле Σ' есть алгебраическое расширение поля $K(\xi_1', \ldots, \xi_{d-1}')$, имеющее степень $\leqslant m$, а поэтому Σ' является полем функций некоторого многообразия размерности $d-1$.

Так как элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$, равно как и элементы $\xi_1', \ldots, \xi_{d-1}'$, алгебраически независимы над полем K, то

$$K(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) \cong K(\xi_1', \ldots, \xi_{d-1}').$$

Поэтому мы можем, не опасаясь путаницы, отождествить ξ_i с ξ_i'. В таком случае поле Σ можно рассматривать как поле функций многообразия размерности 1 над полем $K(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) = \Omega$ [2]). Рассматриваемое нормирование $\mathfrak{B}$ таково, что $v(\tau) = 0$ для любого отличного от нуля элемента τ из Ω. Поэтому можно воспользоваться следствием из доказанной выше леммы, показывающим, что нормирование $\mathfrak{B}$ дискретно.

Теорема IV. *Пусть Σ — поле функций некоторого алгебраического многообразия размерности d над полем K. Тогда любое нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ, имеющее ранг d, обладает группой значений, являющейся прямой суммой d дискретных групп.*

Если $d = 1$, то утверждение содержится в теореме III. Если $d > 1$, то рассмотрим максимальную изолированную подгруппу Γ_1 группы значений Γ нормирования $\mathfrak{B}$. Группа Γ_1 имеет ранг $d-1$. Нормирование $\mathfrak{B}$ можно расщепить на некоторое нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ с группой значений Γ/Γ_1 и нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля вычетов Σ' нормирования $\mathfrak{B}'$ с группой значений Γ_1. Так как группа Γ_1 имеет ранг $d-1$, а размерность поля Σ' меньше d, то из теоремы II следует, что

---

[1]) Элемент ζ следует брать таким, чтобы ему соответствовал некоторый элемент ζ' поля вычетов рассматриваемого нормирования, т. е. ζ должен содержаться в кольце нормирования. — *Прим. перев.*

[2]) Следует обратить внимание на то, что поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})$ содержится в кольце нормирования $\mathfrak{R}$, так как из алгебраической независимости элементов $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$ по модулю $\mathfrak{p}$ следует, что норма любого ненулевого многочлена от $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$, а значит, и норма любой рациональной функции от $\xi_1, \ldots, \xi_d$ равна нулю. — *Прим. перев.*

поле Σ' имеет размерность, точно равную $d-1$. Но так как $d-1$ есть размерность нормирования $\mathfrak{B}'$, то, в силу теоремы III, Σ' есть поле функций алгебраического многообразия, а нормирование $\mathfrak{B}'$ дискретно. Следовательно, мы можем принять в качестве предположения индукции, что группа Γ_1 является прямой суммой $d-1$ дискретных групп. В таком случае из теоремы IV § 3 вытекает, что Γ является прямой суммой групп Γ/Γ_1 и Γ_1, а это и нужно.

Полученный результат означает, что в нормировании $\mathfrak{B}$ ранга d норма любого элемента поля Σ может быть записана в виде $(m_1, \ldots, m_d)$, где $m_1, \ldots, m_d$ — целые числа. При этом

$$(m_1, \ldots, m_d)+(n_1, \ldots, n_d)=(m_1+n_1, \ldots, m_d+n_d),$$

и

$$(m_1, \ldots, m_d) > (n_1, \ldots, n_d)$$

в том и только в том случае, если

$$m_1=n_1, \ldots, m_{i-1}=n_{i-1}, m_i > n_i$$

для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Для любой системы $m_1, \ldots, m_d$ целых чисел в поле Σ найдется элемент, нормой которого служит строка $(m_1, \ldots, m_d)$.

Рассмотрим теперь нормирования поля функций Σ некоторого алгебраического многообразия размерности d над полем K, имеющие ранг 1. Если $\mathfrak{B}$ — такое нормирование поля Σ, то в качестве его группы значений можно взять некоторую подгруппу Γ аддитивной группы действительных чисел (§ 1, теорема I). Конечная система из k действительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ называется *рационально зависимой*, если существуют целые числа $p_1, \ldots, p_k$, не все равные нулю и удовлетворяющие соотношению

$$p_1\alpha_1+\ldots+p_k\alpha_k=0.$$

В противном случае числа α_i называются *рационально независимыми* Если некоторое множество чисел содержит k рационально независимых чисел, а каждая система из $k+1$ чисел этого множества рационально зависима, то говорят, что рассматриваемое множество имеет *рациональный ранг* k. Если элементы группы Γ образуют множество, имеющее рациональный ранг k, то нормирование $\mathfrak{B}$ называется *нормированием рационального ранга* k.

Теорема V. *Пусть* $\mathfrak{B}$ *— нормирование ранга* 1 *поля функций* Σ *некоторого алгебраического многообразия размерности* d. *Тогда рациональный ранг нормирования* $\mathfrak{B}$ *не превосходит* d.

Пусть рациональный ранг нормирования $\mathfrak{B}$ равен k (если рациональный ранг для $\mathfrak{B}$ бесконечен, то достаточно рассматривать подгруппу группы Γ, имеющую рациональный ранг $k=d+1$). Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ систему из k рационально независимых элементов группы Γ, а через $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ — элементы поля Σ, для которых

$v(\zeta_i)=\alpha_i$. Докажем, что элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ алгебраически независимы над полем K. Пусть

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)=\sum a_{i_1 \ldots i_k}\zeta_1^{i_1}\ldots\zeta_k^{i_k}$$

— любой многочлен от $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$, коэффициенты которого $a_{i_1 \ldots i_k}$ принадлежат полю K и не все равны нулю. Если $a_{i_1 \ldots i_k}$ отличен от нуля, то

$$v(a_{i_1 \ldots i_k}\zeta_1^{i_1}\ldots\zeta_k^{i_k})=v(a_{i_1 \ldots i_k})+i_1 v(\zeta_1)+\ldots+i_k v(\zeta_k)=$$
$$=i_1\alpha_1+\ldots+i_k\alpha_k.$$

Никакие два члена многочлена $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ не могут иметь одну и ту же норму, так как из равенства

$$i_1\alpha_1+\ldots+i_k\gamma_k=j_1\alpha_1+\ldots+j_k\alpha_k,$$

в силу рациональной независимости элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, следует, что $i_1=j_1, \ldots, i_k=j_k$. Поэтому

$$v(f)=p_1\alpha_1+\ldots+p_k\alpha_k,$$

где $p_1, \ldots, p_k$ — показатели множителей произведения $\zeta_1^{p_1}\ldots\zeta_k^{p_k}$, входящего в выражение $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ и имеющего наименьшую норму. Отсюда следует, что норма элемента $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ всегда конечна, кроме случая, когда

$$f(x_1, \ldots, x_k)\equiv 0.$$

Таким образом, выражение $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$ отлично от нуля, если $f(x_1, \ldots, x_k)$ не равен нулю тождественно, т. е. элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ алгебраически независимы. Ввиду того, что поле Σ имеет степень трансцендентности d, из сказанного вытекает, что $k\leqslant d$. Теорема доказана.

Допустим теперь, что рациональный ранг рассматриваемого нормирования $\mathfrak{B}$ имеет максимальное возможное значение $k=d$. Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ рационально независимые элементы группы Γ, а через $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ — элементы поля Σ, нормы которых $v(\zeta_i)=\alpha_i$. Тогда, как мы видели, элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ алгебраически независимы над полем K, и поэтому поле Σ является алгебраическим расширением поля $K(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$, имеющим некоторую конечную степень m. Как и в доказательстве теоремы V, можно показать, что если $f(x_1, \ldots, x_d)\in K[x_1, \ldots, x_d]$, то норма $v[f(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)]$ имеет вид $r_1\alpha_1+\ldots+r_d\alpha_d$, где $r_1, \ldots, r_d$ — целые числа. Пусть ζ — любой элемент поля Σ, и пусть

$$f(x_1, \ldots, x_d, x)\equiv\sum_{i=0}^{m'}a_i(x_1, \ldots, x_d)x^i=0\quad(m'\leqslant m)$$

— неприводимое уравнение, связывающее элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_d, \zeta$. Рассуждая как и в теореме X § 2, мы усматриваем, что значение $m!v(\zeta)$ равно норме некоторого элемента поля $K(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$. Следовательно, норма любого элемента ζ поля Σ имеет вид

$$r_1\frac{\alpha_1}{m!}+\ \ldots\ +r_k\frac{\alpha_k}{m!},$$

где $r_1, \ldots, r_k$ — целые числа.

Таким образом, нормы элементов поля Σ составляют подмодуль $\mathfrak{M}'$ $\mathfrak{J}$-модуля $\mathfrak{J}\cdot\left(\frac{\alpha_1}{m!}, \ldots, \frac{\alpha_k}{m!}\right)$, где $\mathfrak{J}$ — кольцо целых чисел. Так как $\mathfrak{J}$ есть кольцо главных идеалов, то из теоремы I § 6 гл. XV (см. следствие) вытекает, что $\mathfrak{M}'$ является $\mathfrak{J}$-модулем, обладающим базисом, состоящим из d' элементов, где $d' \leqslant d$. Но так как $\mathfrak{M}'$ содержит d рационально независимых чисел, то $d' = d$. Следовательно, группа значений Γ состоит из чисел вида

$$s_1\beta_1+\ \ldots\ +s_k\beta_k,$$

где $s_1, \ldots, s_k$ — целые числа, а $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — рационально независимые действительные числа. Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема VI. *Если Σ — поле функций алгебраического многообразия размерности d, а $\mathfrak{B}$ — нормирование этого поля, имеющее ранг 1 и рациональный ранг d, то группа значений нормирования $\mathfrak{B}$ имеет независимый базис над кольцом целых чисел.*

Теорема VII. *Пусть Σ — поле функций некоторого алгебраического многообразия размерности d и $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, имеющее ранг 1 и рациональный ранг k. Тогда размерность $\mathfrak{B}$ не может превосходить $d-k$.*

Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ рационально независимые элементы группы значений Γ нормирования $\mathfrak{B}$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, так как любой α_i в случае необходимости можно заменить на $-\alpha_i$. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ — элементы поля Σ, для которых $v(\zeta_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Как и в теореме V, можно показать, что элементы $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ алгебраически независимы. Кроме того, они лежат в $\mathfrak{p}$, так как $v(\zeta_i) > 0$ (здесь $\mathfrak{p}$ снова означает максимальный идеал кольца нормирования). Обозначим через $\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_{d+1}$ любую систему из $d-k+1$ элементов кольца рассматриваемого нормирования. Система $\zeta_1, \ldots, \zeta_{d+1}$ алгебраически зависима над полем K. Следовательно, существует такой неприводимый над полем K многочлен $f(x_1, \ldots, x_{d+1})$, для которого

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d+1}) = 0.$$

Так как $\zeta_i \in \mathfrak{p}$ $(i \leqslant k)$, то остальные элементы $\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_{d+1}$ алге-

браически зависимы по модулю $\mathfrak{p}$, а значит, размерность нормирования $\mathfrak{B}$ меньше $d-k+1$ [1]).

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний о построении нуль-мерных нормирований поля Σ, имеющих ранг 1 и рациональный ранг k. Так как этими результатами фактически мы не будем пользоваться в дальнейшем, а доказательства в некоторых случаях довольно сложны, мы их не приводим, отсылая читателя к оригинальным работам, указанным в библиографических замечаниях в конце книги. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_d$ — система из d алгебраически независимых элементов поля Σ, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ — система d рационально независимых действительных чисел. Одно из нормирований поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, имеющее ранг 1 и рациональный ранг d, можно определить следующим образом. Пусть t — новое неизвестное, а $a_1, \ldots, a_d$ — произвольные элементы поля K. Если $f(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ — многочлен из $K[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, то мы можем записать

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_d) = g(\xi_1 - a_1, \ldots, \xi_d - a_d) = \\ = \sum a_{i_1 \ldots i_d} (\xi_1 - a_1)^{i_1} \ldots (\xi_d - a_d)^{i_d}.$$

Если мы заменим в этом тождестве двучлены $\xi_i - a_i$ на t^{α_i}, то получим

$$f(a_1 + t^{\alpha_1}, \ldots, a_d + t^{\alpha_d}) = \sum a_{i_1 \ldots i_d} t^{\sum i_j \alpha_j}.$$

Так как $\sum i_j \alpha_j \neq \sum k_j \alpha_j$, за исключением случая, когда $i_j = k_j$ $(j = 1, \ldots, d)$, то написанный ряд по степеням t будет нулем только в случае, если $f(x_1, \ldots, x_d) \equiv 0$. Определим теперь норму элемента $f(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ как значение наименьшего показателя степени t в полученном ряде. Если $R(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ — рациональная функция от $\xi_1, \ldots, \xi_d$, то мы можем таким же образом получить для нее разложение в ряд по степеням t и принять за ее норму наименьший показатель степени t в полученном ряде. Легко проверить, что описанный прием действительно дает нормирование поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ с группой значений, состоящей из действительных чисел вида

$$p_1 \alpha_1 + \ldots + p_d \alpha_d,$$

---

[1]) Приведенное авторами рассуждение неполно, так как необходимо показать еще, что среди многочленов $f(x_1, \ldots, x_{d-1})$ найдется многочлен, хотя бы один член которого не содержит множителей $x_1, \ldots, x_k$. Однако проще рассуждать следующим образом: если $\zeta'_1, \ldots, \zeta'_{d'}$ — алгебраически независимые над K элементы поля вычетов нормирования $\mathfrak{B}$, а $\zeta_1, \ldots, \zeta_{d'}$ — элементы кольца $\mathfrak{R}$, имеющие эти вычеты, то поле Σ можно рассматривать как поле функций многообразия размерности $d - d'$ над полем $K(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d'})$ (см. второе примечание к доказательству теоремы III). Тогда из теоремы V непосредственно следует, что $k \leqslant d - d'$, т. е. что $d' \leqslant d - k$, а это и нужно. — *Прим. перев.*

где $p_1, \ldots, p_d$ — целые числа. Это нормирование может быть продолжено до нормирования всего поля Σ, причем метод доказательства теоремы X § 2 показывает, что получаемое при продолжении нормирование может иметь ранг 1 и рациональный ранг d. Из теоремы VII следует, что полученное нормирование имеет размерность нуль.

Описанный метод построения нормирования поля Σ, имеющего ранг 1 и рациональный ранг d, иллюстрирует одну общую теорему о нуль-мерных нормированиях ранга 1 для полей функций алгебраических многообразий. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — такая конечная система элементов поля Σ, что $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (систему $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можно рассматривать как общую точку исследуемого алгебраического многообразия). Если $\mathfrak{B}$ — любое нуль-мерное нормирование поля Σ, имеющее ранг 1, группой значений которого является подгруппа Γ аддитивной группы действительных чисел, то каждому элементу ξ_i соответствует ряд вида

$$z_i(t) = t^{\sigma_i}(a_{0i} + a_{1i}t^{\mu_1} + a_{2i}t^{\mu_2} + \ldots) \qquad (\mu_1 > 0,\ \mu_2 > \mu_1, \ldots),$$

коэффициенты которого принадлежат некоторому алгебраическому расширению Ω поля K, а показатели σ_i, μ_j содержатся в группе Γ. Эти ряды обладают тем свойством, что если $f = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — любой отличный от нуля элемент поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и если

$$f(z_1(t), \ldots, z_n(t)) = t^{\sigma}(b_0 + b_1t^{\mu_1} + \ldots),$$

где $b_0 \neq 0$, а $\mu_1, \mu_2, \ldots$ положительны, то $v(f) = \sigma$.

Читатель, знакомый с понятием ветви кривой в классической алгебраической геометрии, легко обнаружит, что наш метод получения нормирований ранга 1 и размерности нуль сходен с определением порядка функции f из поля рассматриваемой кривой на некоторой ветви этой кривой. Всю теорию нормирований можно рассматривать в некоторых отношениях как обобщение классической теории ветвей кривых. Однако проводить такую аналогию слишком далеко более рискованно, чем полезно. „Ветви", встречающиеся в теории нормирований и определяемые разложениями $\xi_i = z_i(t)$, в общем случае не являются алгебраическими. Это очевидно, в частности, если появляющиеся в разложениях показатели иррациональны. Но и в случаях, когда группа значений нормирования состоит из целых чисел, в которых получаемые ряды будут обычными степенными рядами, определяемая нормированием „ветвь" может быть алгебраической лишь тогда, когда $d = 1$. Действительно, если бы было $d > 1$ и если бы ветвь $\xi_i = z_i(t)$ была алгебраической, то в поле Σ нашелся бы элемент $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, отличный от нуля и такой, что $f(z_1(t), \ldots, z_n(t)) \equiv 0$. Следовательно, наш метод определения нормы терял бы силу. Алгебраические ветви иногда позволяют определить соответствующее нормирование, но последнее будет необходимо ранга > 1.

§ 5. Центр нормирования

В § 4 мы рассматривали некоторые свойства нормирований полей функций алгебраических многообразий. Однако эти свойства относились к абстрактно заданному полю и не имели отношения к геометрии того многообразия, для которого рассматриваемое поле построено. Теперь мы рассмотрим неприводимое многообразие V_d в пространстве S_n, имеющее размерность d над основным полем K, и изучим связь между нормированием $\mathfrak{B}$ поля функций Σ многообразия V_d и геометрией этого многообразия. Результаты этого параграфа составляют основу, на которой базируется применение теории нормирований к алгебраической геометрии.

Пусть $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$ — координаты общей точки многообразия V_d. Отношения ζ_i/ζ_j содержатся в поле функций Σ, но сами ζ_i могут умножаться на произвольный элемент любого расширения этого поля. Потребуем, однако, чтобы $\zeta_0, \ldots, \zeta_n$ лежали в поле Σ. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое нормирование поля Σ, а k — целое число, для которого

$$v(\zeta_k) \leqslant v(\zeta_i) \quad (i = 0, \ldots, n).$$

Рассмотрим множество однородных многочленов $f(x_0, \ldots, x_n)$ над полем K, удовлетворяющих условию

$$v[f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)] > mv(\zeta_k), \tag{1}$$

где m — степень многочлена $f(x_0, \ldots, x_n)$. Если $f(x_0, \ldots, x_n)$ и $g(x_0, \ldots, x_n)$ — многочлены одной и той же степени, обладающие указанным свойством, то

$$v[f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) - g(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)] \geqslant$$
$$\geqslant \min\{v[f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n), v[g(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)]\} > mv(\zeta_k).$$

Далее, если $a(x_0, \ldots, x_n)$ — любой однородный многочлен степени r, то норма элемента $a(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$ не может быть меньшей, чем наименьшая из норм его отдельных членов. Но так как $v(\zeta_k) \leqslant v(\zeta_i)$, то отсюда следует, что

$$v[a(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)] \geqslant rv(\zeta_k).$$

Поэтому

$$v[a(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)] > (m + r) v(\zeta_k).$$

Таким образом, однородные многочлены $f(x_0, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие условию (1), образуют однородный идеал $\mathfrak{i}$ кольца $K[x_0, \ldots, x_n]$. Если многочлен $f(x_0, \ldots, x_n)$ обращается в нуль на V_d, то $f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) = 0$ и поэтому $f(x_0, \ldots, x_n)$ принадлежит $\mathfrak{i}$. Следовательно, $\mathfrak{i}$ является делителем простого идеала, определяющего многообразие V_d. Кроме того, если $f(x_0, \ldots, x_n)$ и $g(x_0, \ldots, x_n)$ — однородные многочлены степеней m и r, не принадлежащие $\mathfrak{i}$, то

$$v[f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)] = mv(\zeta_k), \quad v[g(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)] = rv(\zeta_k),$$

а значит,

$$v[f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \cdot g(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)] = (m+r)\, v(\zeta_k).$$

Отсюда следует, что многочлен $f(x_0, \ldots, x_n)\, g(x_0, \ldots, x_n)$ не принадлежит идеалу $\mathfrak{i}$. Поэтому идеал $\mathfrak{i}$ прост, а значит, определяет некоторое неприводимое многообразие C, являющееся собственным подмногообразием многообразия V_d. Для доказательства того, что при нетривиальном нормировании $\mathfrak{B}$ многообразие C действительно является собственным подмногообразием V_d, заметим прежде всего, что любой элемент поля Σ можно записать в виде $f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)/g(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — формы одинаковой степени. Если бы любая отличная от нуля форма $f(x)$ степени m удовлетворяла условию $v[f(\zeta_0, \ldots, \zeta_n)] = mv(\zeta_k)$, то отсюда следовало бы, что все отличные от нуля элементы поля Σ имеют норму нуль, а значит, нормирование тривиально. Таким образом, если нормирование $\mathfrak{B}$ нетривиально, то существуют многочлены $f(x_0, \ldots, x_n)$, не обращающиеся в нуль на V_d и принадлежащие идеалу $\mathfrak{i}$. Кроме того, $\mathfrak{i}$ не является единичным идеалом, так как x_k не принадлежит $\mathfrak{i}$. Следовательно, если нормирование $\mathfrak{B}$ нетривиально, то многообразие C не пусто и является собственным подмногообразием для V_d.

Многообразие C называется *центром нормирования* $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d. Нами доказана

Теорема I. *Любое нетривиальное нормирование $\mathfrak{B}$ поля функций неприводимого многообразия V_d определяет неприводимое подмногообразие C многообразия V_d, называемое центром нормирования $\mathfrak{B}$ на V_d.*

Мы определили центр нормирования с помощью однородных координат, так как понятие центра нормирования является проективным. Фактически же удобнее пользоваться неоднородными координатами. Если многообразие V_d не лежит на гиперплоскости $x_0 = 0$ и если мы нормируем координаты относительно x_0, т. е. будем считать гиперплоскость $x_0 = 0$ бесконечно удаленной, то многообразие C не будет лежать на бесконечно удаленной гиперплоскости в том и только в том случае, когда $v(\zeta_0) \leqslant v(\zeta_k)$. Это имеет место тогда и только тогда, когда $v(\zeta_i/\zeta_0) \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, n$, т. е. когда кольцо $K[\zeta_1/\zeta_0, \ldots, \zeta_n/\zeta_0]$ содержится в кольце рассматриваемого нормирования. При рассмотрении конечного числа нормирований всегда возможно выбрать координаты так, чтобы центры этих нормирований не лежали на гиперплоскости $x_0 = 0$. Мы это и будем делать, рассматривая многообразие V_d как многообразие в аффинном пространстве, а гиперплоскость $x_0 = 0$ — как бесконечно удаленную. В таком случае все центры рассматриваемых нормирований оказываются лежащими на конечном расстоянии. Если после этого вводится новое нормирование, то его центр будет на конечном расстоянии в том и только в том случае, когда область целостности многообразия V_d содержится в кольце нового нормирования.

Рассмотрим теперь многообразие V_d в аффинном пространстве A_n и обозначим через $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ неоднородные координаты его общей точки. Пусть $\mathfrak{B}$ — нормирование поля $\sum = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, центр которого на многообразии V_d лежит на конечном расстоянии. Если $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — область целостности многообразия V_d, а $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathfrak{p}$ максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$. В таком случае центр C нормирования $\mathfrak{B}$ определяется идеалом кольца $\mathfrak{J}$, состоящим из элементов, нормы которых положительны. Следовательно, простой идеал $\mathfrak{P}$, определяющий многообразие C, является пересечением

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}.$$

Размерность e многообразия C равна максимальному числу элементов кольца $\mathfrak{J}$, алгебраически независимых по модулю $\mathfrak{P}$. Предположим, что элементы $\eta_1, \ldots, \eta_e$ кольца $\mathfrak{J}$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{P}$. Тогда, если $f(x_1, \ldots, x_e)$ — любой многочлен над полем K, такой, что $f(\eta_1, \ldots, \eta_e) \in \mathfrak{P}$, то $f(x_1, \ldots, x_e) \equiv 0$. Если теперь $g(x_1, \ldots, x_e)$ — любой многочлен над полем K, для которого значение $g(\eta_1, \ldots, \eta_e) \in \mathfrak{p}$, то, ввиду включения $g(\eta_1, \ldots, \eta_e) \in \mathfrak{J}$, будет $g(\eta_1, \ldots, \eta_e) \in \mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}$, а значит, $g(x_1, \ldots, x_e) \equiv 0$. Следовательно, элементы $\eta_1, \ldots, \eta_e$ являются элементами кольца $\mathfrak{R}$, алгебраически независимыми по модулю $\mathfrak{p}$. Отсюда вытекает, что размерность нормирования $\mathfrak{B}$ не меньше e. Таким образом, имеет место

Теорема II. *Размерность центра нормирования поля функций алгебраического многообразия не превосходит размерности рассматриваемого нормирования.*

Можно показать на примере, что размерность центра нормирования действительно может быть меньше размерности самого нормирования. Возьмем в качестве многообразия V_d проективную плоскость над полем K. В таком случае кольцо $\mathfrak{J}$ является кольцом многочленов от двух независимых неизвестных, например $\mathfrak{J} = K[x, y]$, а $\Sigma = K(x, y)$. Определим нормирование $\mathfrak{B}$ следующим образом. Рассмотрим любой отличный от нуля элемент ζ поля Σ. Можно записать

$$\zeta = a(x, y)/b(x, y),$$

где $a(x, y)$ и $b(x, y)$ — многочлены. Пусть

$$a(x, y) = a_r(x, y) + a_{r+1}(x, y) + \ldots$$

и

$$b(x, y) = b_s(x, y) + b_{s+1}(x, y) + \ldots,$$

где многочлены $a_i(x, y)$ и $b_i(x, y)$ однородны и имеют степень i, причем $a_r(x, y)$ и $b_s(x, y)$ отличны от нуля. Положим $v(\zeta) = r - s$. Значение $v(\zeta)$ зависит только от элемента ζ, а не от выбора его представления в виде $a(x, y)/b(x, y)$. Действительно, если $\zeta = c(x, y)/d(x, y)$, где

$$c(x, y) = c_p(x, y) + c_{p+1}(x, y) + \ldots$$

и

$$d(x, y) = d_q(x, y) + d_{q+1}(x, y) + \ldots,$$

причем $c_p(x, y)$ и $d_q(x, y)$ отличны от нуля, то равенство

$$a(x, y)\,d(x, y) = b(x, y)\,c(x, y)$$

влечет за собой соотношение

$$r + q = s + p,$$

показывающее, что значение $v(\zeta) = r - s = p - q$ однозначно определяется элементом ζ. Читатель проверит без труда, что отображение $\zeta \to v(\zeta)$ отличных от нуля элементов поля Σ на упорядоченную аддитивную группу целых чисел является нетривиальным нормированием $\mathfrak{B}$ поля Σ.

Так как поле Σ имеет размерность 2, то размерность нормирования $\mathfrak{B}$ может быть либо нулем, либо единицей. Но $v(y/x) = 0$, а следовательно, элемент y/x лежит в кольце $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$ и не является алгебраическим по модулю $\mathfrak{p}$ над полем K (здесь $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$). Поэтому размерность нормирования $\mathfrak{B}$ равна 1. Центр C нормирования $\mathfrak{B}$ определяется простым идеалом $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cdot (x, y)$ и поэтому представляется точкой $x = 0$, $y = 0$, а значит, имеет размерность нуль.

Возвратимся к нормированию $\mathfrak{B}$ поля функций произвольного многообразия V_d в пространстве A_n. Пусть размерность нормирования $\mathfrak{B}$ равна f, а размерность центра C этого нормирования, лежащего на конечном расстоянии, равна e, где $e < f$. Обозначим через $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_e}$ элементы кольца $\mathfrak{J}$, алгебраически независимые по модулю $\mathfrak{P}$. Тогда они будут также алгебраически независимыми по модулю $\mathfrak{p}$ элементами кольца $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$ (ср. теорему II). В кольце $\mathfrak{R}$ существует еще $f - e$ элементов $\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{f-e}$, таких, что система $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_e}, \eta_{i_1}, \ldots, \eta_{f-e}$ будет алгебраически независимой по модулю $\mathfrak{p}$. Рассмотрим теперь многообразие V'_d в пространстве A_{n+f-e}, имеющее общую точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_{i_1}, \ldots, \eta_{f-e})$. Это многообразие имеет то же поле функций Σ, что и многообразие V_d, и поэтому является образом V_d при некотором бирациональном преобразовании. Так как $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{R}$ и $\eta_i \in \mathfrak{R}$, то область целостности $\mathfrak{J}' = K[\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_{i_1}, \ldots, \eta_{f-e}]$ многообразия V'_d содержится в $\mathfrak{R}$, а значит, центр C' нормирования $\mathfrak{B}$ на V'_d лежит на конечном расстоянии. Так как элементы $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_e}, \eta_{i_1}, \ldots, \eta_{f-e}$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{p}$ в кольце $\mathfrak{R}$ и содержатся в $\mathfrak{J}'$, то они также алгебраически независимы в кольце $\mathfrak{J}'$ по модулю $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{p}$. Отсюда следует, что размерность многообразия C' не меньше f. Но, в силу теоремы II, эта размерность не превышает f, а значит, она точно равна f.

Мы имеем $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}'$ и $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cap (\mathfrak{J}' \cap \mathfrak{p}) = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}'$. Любой элемент кольца частных $Q(C) = \mathfrak{J}_{\mathfrak{P}}$ имеет вид α/β, где α и β — элементы из $\mathfrak{J}$, причем β не содержится в $\mathfrak{P}$. Но в таком случае α и β содержатся также в $\mathfrak{J}'$, а β не содержится в $\mathfrak{P}'$, так как иначе β содержался бы и в $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}'$. Следовательно, $\alpha/\beta \in \mathfrak{J}'_{\mathfrak{P}'}$, и поэтому $Q(C) \subseteq Q(C')$. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема III. *Пусть $\mathfrak{B}$ — нормирование поля функций многообразия V_d. Если размерность центра C этого нормирования на многообразии V_d меньше размерности f самого нормирования, то существует многообразие V'_d, бирационально эквивалентное V_d и такое, что центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V'_d имеет размерность, точно равную f. При этом $Q(C) \subseteq Q(C')$.*

Значение последнего утверждения теоремы станет ясным в гл. XVIII.

Попытаемся теперь охарактеризовать центр C нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d с помощью свойств его кольца частных. Предположим, как обычно, что C лежит в пространстве A_n на конечном расстоянии. Так как область целостности $\mathfrak{J}$ многообразия V_d содержится в кольце $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$, а простой идеал $\mathfrak{P}$ многообразия C в кольце $\mathfrak{J}$ равен пересечению $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$, то кольцо частных $Q(C) = \mathfrak{J}_{\mathfrak{P}} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{R}$. Можно, однако, пойти еще дальше. Пусть ζ — любой элемент кольца $Q(C)$, так что $\zeta = \alpha/\beta$, где α и β принадлежат $\mathfrak{J}$ и β не содержится в $\mathfrak{P}$. Так как α и β лежат в $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{R}$, то $v(\alpha) \geqslant 0$ и $v(\beta) \geqslant 0$. Но ввиду того, что β не принадлежит $\mathfrak{P}$, а потому и $\mathfrak{p}$, должно быть $v(\beta) = 0$. Элемент ζ не является делителем единицы кольца $Q(C)$ тогда и только тогда, когда элемент α принадлежит $\mathfrak{P}$, а значит, и $\mathfrak{p}$, т. е. тогда и только тогда, когда $v(\alpha) > 0$. Поэтому неравенство $v(\zeta) = v(\alpha) - v(\beta) > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда ζ не является делителем единицы кольца $Q(C)$. Следовательно, если элемент ζ не является делителем единицы кольца $Q(C)$, то он не будет также делителем единицы в $\mathfrak{R}$.

Рассмотрим любое неприводимое многообразие D, лежащее на многообразии V_d и такое, что $Q(D) \subseteq \mathfrak{R}$. Без ограничения общности можно предполагать, что бесконечно удаленная гиперплоскость выбрана так, что она не содержит многообразия D и центра C нормирования $\mathfrak{B}$. Если α — любой элемент кольца $\mathfrak{J}$, для которого $v(\alpha) > 0$, т. е. α — любой элемент из $\mathfrak{P}$, то $v(\alpha^{-1}) < 0$, и поэтому элемент α^{-1} не принадлежит $\mathfrak{R}$, а значит, и кольцу $Q(D)$. Так как α лежит в $\mathfrak{J}$, то он лежит и в $Q(D)$. Поэтому α не является делителем единицы в кольце $Q(D)$. Таким образом, все элементы из $\mathfrak{J}$, лежащие в $\mathfrak{P}$, принадлежат кольцу $Q(D)$ и не являются в нем делителями единицы, а потому принадлежат простому идеалу $\mathfrak{P}'$, соответствующему многообразию D. Поэтому $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$, а значит, $Q(D) \subseteq Q(C)$. Отсюда, в силу теоремы IV § 2 гл. XVI, следует, что $D \subseteq C$. Обратно, если $D \subseteq C$, то должно быть $Q(D) \subseteq Q(C) \subseteq \mathfrak{R}$. Следовательно, условие

$Q(D) \subseteq \mathfrak{R}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы многообразие D содержалось в центре нормирования $\mathfrak{B}$.

Если D есть собственное подмногообразие многообразия C, то существуют многочлены $f(x_1, \ldots, x_n)$, обращающиеся в нуль на D и не обращающиеся в нуль на C. В таком случае элемент $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ будет делителем единицы в $Q(C)$, а значит, и в $\mathfrak{R}$, но не будет делителем единицы кольца $Q(D)$. Следовательно, в этом случае существуют делители единицы кольца $\mathfrak{R}$, содержащиеся в $Q(D)$ и не являющиеся в этом кольце делителями единицы. Но мы уже видели, что этого не будет в случае, если $D = C$. Таким образом, доказана следующая

Теорема IV. *Неприводимое многообразие D тогда и только тогда содержится в центре нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d, когда кольцо частных многообразия D содержится в кольце нормирования $\mathfrak{B}$. Многообразие D является центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих дополнительных условий*: (I) *D не является собственным подмногообразием никакого неприводимого многообразия на V_d, кольцо частных которого содержится в кольце нормирования $\mathfrak{B}$.* (II) *Каждый элемент кольца частных многообразия D, не являющийся делителем единицы в этом кольце, не является делителем единицы и в кольце нормирования.*

Из этой теоремы можно вывести одно соотношение между центром нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ (ранг $\mathfrak{B} > 1$) и центром нормирования $\mathfrak{B}'$, получающегося при расщеплении $\mathfrak{B}$ на нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ и нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$ (§ 3, теорема II). Кольцом $\mathfrak{R}'$ нормирования $\mathfrak{B}'$ является кольцо частных $\mathfrak{R}$ относительно некоторого простого идеала. Следовательно, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}'$. Если C — центр нормирования $\mathfrak{B}$, C' — центр нормирования $\mathfrak{B}'$, то $Q(C) \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}'$. Следовательно, в силу теоремы IV, должно быть $C \subseteq C'$. Таким образом, справедлива

Теорема V. *Если нормирование $\mathfrak{B}$ расщепляется на нормирование $\mathfrak{B}'$ и некоторое нормирование поля вычетов для $\mathfrak{B}'$, то центр нормирования $\mathfrak{B}$ содержится в центре нормирования $\mathfrak{B}'$.*

Если многообразие V_d определено над алгебраически незамкнутым основным полем K, то часто бывает необходимым произвести расширение этого поля. Если $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и мы расширяем поле K до поля K^*, то поле $\Sigma^* = K^*(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является расширением поля Σ, причем любое нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ может быть продолжено одним или несколькими способами до нормирования $\mathfrak{B}^*$ поля Σ^*. Точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является над полем K^* общей точкой некоторого многообразия V_d^*, либо совпадающего с самим многообразием V_d, либо являющегося одной из компонент этого многообразия (гл. X, § 12). Нам необходимо установить связь между

центром C нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d и центром C^* нормирования $\mathfrak{B}^*$ на многообразии V_d^*.

Начнем со случая, когда многообразие V_d не является абсолютно неприводимым. Тогда в поле Σ существуют элементы, не принадлежащие полю K и алгебраические над этим полем (гл. X, § 11). Эти элементы составляют подполе K' — алгебраическое замыкание поля K в Σ. Рассмотрим прежде всего случай, когда $K^* = K'$. Над полем K' точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ служит общей точкой одной из абсолютно неприводимых компонент V_d' многообразия V_d (гл. X, § 10). Область целостности $\mathfrak{J}' = K'[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ в общем случае представляет собой собственное расширение области целостности $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, но

$$\Sigma' = K'(\xi_1, \ldots, \xi_n) = K(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Sigma,$$

так как $K' \subseteq \Sigma$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ является нормированием поля Σ'. Однако, прежде чем говорить о его центре, необходимо показать, что для любого отличного от нуля элемента a из K' будет $v(a) = 0$. Это вытекает из следствия теоремы I § 4, так как поле K' имеет степень трансцендентности нуль над полем K. Отсюда вытекает, что $K' \subseteq \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$. Если мы предположим, как обычно, что C лежит на конечном расстоянии, то должно быть $\xi_i \in \mathfrak{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и поэтому $\mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{R}$. Следовательно, центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d' также лежит на конечном расстоянии. Если $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$, то идеал $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}$ является идеалом кольца $\mathfrak{J}$, соответствующим многообразию C, а $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{p}$ — идеалом кольца $\mathfrak{J}'$, соответствующим многообразию C'. Таким образом, $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}'$, а значит,

$$\mathfrak{J}' \cdot \mathfrak{P} = 0 \quad (\mathfrak{P}').$$

Пусть

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{2}$$

— базис уравнений многообразия C над полем K. Тогда элементы

$$\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

составляют базис идеала $\mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{J}$, а значит, и идеала $\mathfrak{J}' \cdot \mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{J}'$. Ввиду того, что $\mathfrak{J}' \cdot \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$, отсюда следует, что точки многообразия C' удовлетворяют уравнениям (2), и поэтому $C' \subseteq C$.

Размерность поля вычетов нормирования $\mathfrak{B}$ над полем K' будет той же, что и его размерность над K, так как K' есть алгебраическое расширение K. Следовательно, и размерность нормирования $\mathfrak{B}$ остается одной и той же независимо от того, взято за основное поле K или K'. Далее, если многообразие C имеет размерность f, то в кольце $\mathfrak{J}$ существует система из f элементов, алгебраически независимых над полем K по модулю $\mathfrak{P}$. Эти элементы алгебраически независимы и по модулю $\mathfrak{p}$ и лежат также в кольце $\mathfrak{J}'$. Следова-

тельно, в $\mathfrak{J}'$ существует система из f элементов, алгебраически независимых над полем K' по модулю $\mathfrak{P}'$. Поэтому размерность многообразия C' не меньше f. Но так как $C' \subseteq C$, то отсюда следует, что размерность многообразия C' точно равна f. После этого ясно, что C' является одной из компонент, на которые распадается многообразие C при расширении поля K до K'.

Единственным из остальных случаев, которым мы будем заниматься, будет случай, когда поле K^* есть алгебраическое расширение поля K, содержащее K'. Переход от K к K^* можно осуществить в два приема: сначала перейти от K к K', а затем от K' к K^*. Первый переход мы уже рассмотрели и знаем, что он приводит от многообразия V_d к абсолютно неприводимому многообразию V_d'. Таким образом, нам остается рассмотреть лишь случай, когда многообразие V_d абсолютно неприводимо и мы переходим непосредственно от K к K^*. Если в этом случае поле K^* является собственным расширением поля K, то поле $\Sigma^* = K^*(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ также будет собственным расширением для Σ, но многообразие V_d^* как множество точек остается тем же самым, что и V_d. Поэтому мы можем сохранить для V_d прежнее обозначение.

Так как поле Σ^* есть собственное расширение поля Σ, то можно воспользоваться теоремой VII § 2 и заключить из нее, что существуют нормирования поля Σ^*, являющиеся продолжениями нормирования $\mathfrak{B}$. Если K^* — алгебраическое расширение поля K, то Σ^* — также алгебраическое расширение поля Σ, а если расширение K^* имеет над K конечную степень m, то и поле Σ^* служит расширением степени m поля Σ. В силу теоремы V § 3, в последнем случае существует не более m нормирований поля Σ^*, являющихся продолжениями нормирования $\mathfrak{B}$. Во всяком случае, такие продолжения существуют, и мы можем выбрать одно из них, например $\mathfrak{B}^*$. Нормирование $\mathfrak{B}^*$ индуцирует нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ, и поэтому норма $v^*(a)$ любого отличного от нуля элемента a поля K в нормировании $\mathfrak{B}^*$ будет равна нулю. Но $\mathfrak{B}^*$ индуцирует также некоторое нормирование поля K^*. В этом нормировании норма любого отличного от нуля элемента из K равна нулю. Отсюда и из того, что K^* есть алгебраическое расширение поля K, вытекает, что полученное нормирование поля K^* тривиально. Поэтому $v^*(a) = 0$ для любого отличного от нуля элемента a из K^*, и мы можем говорить о центре нормирования $\mathfrak{B}^*$. Ввиду того, что $\mathfrak{J}^* = K^*[\xi_1, \ldots, \xi_n] \subseteq \mathfrak{R}^*$, центр нормирования $\mathfrak{B}^*$ на многообразии V_d лежит на конечном расстоянии. Допустим, что центр C^* нормирования $\mathfrak{B}^*$ не содержится в C. Тогда многообразие C^*, вместе с его сопряженными над полем K, образует многообразие над полем K, не содержащееся в многообразии C. Следовательно, существует многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем K, обращающийся в нуль на C и не обращающийся в нуль на C^*. Тогда элемент

$$\zeta = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

принадлежит кольцу $\mathfrak{J}$ и простому идеалу $\mathfrak{P}$ многообразия C в этом кольце, но не принадлежит простому идеалу $\mathfrak{P}^*$ многообразия C^* в кольце $\mathfrak{R}^*$. Но это невозможно, так как если $\zeta \in \mathfrak{P}$, то $\zeta \in \mathfrak{p}$, а значит, $v(\zeta) > 0$, и поэтому $v^*(\zeta) > 0$, т. е. $\zeta \in \mathfrak{P}^*$.

Таким образом, должно быть $C^* \subseteq C$.

Рассуждение, в точности подобное примененному выше в случае $K^* = K'$, показывает, что нормирование $\mathfrak{B}^*$ имеет ту же размерность, что и $\mathfrak{B}$, а многообразие C^* — ту же размерность, что и C. Поэтому C^* является одной из компонент, на которые распадается многообразие C при расширении поля K до поля K^*. Обращение полученного результата очевидно: если C^* — центр некоторого нормирования $\mathfrak{B}^*$ поля Σ^*, определяемый простым идеалом $\mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{R}^*$, то центр C индуцируемого нормирования поля Σ определяется простым идеалом $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{J}$. Поэтому C является неприводимым многообразием над полем K, а C^* — одной из компонент многообразия C при расширении поля K до поля K^*.

Полученные результаты мы суммируем в виде следующей теоремы:

Теорема VI. *Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольное нормирование поля функций Σ неприводимого многообразия V_d над полем K, а K^* — алгебраическое расширение поля K, содержащее алгебраическое замыкание последнего поля в поле Σ. Если V_d^* — многообразие над полем K^*, общей точкой которого является одна из общих точек многообразия V_d над полем K, то существует продолжение $\mathfrak{B}^*$ нормирования $\mathfrak{B}$ на поле функций многообразия V_d^*. Центр C^* нормирования $\mathfrak{B}^*$ на многообразии V_d^* является одной из компонент центра C нормирования $\mathfrak{B}^*$, на которые C распадается при расширении поля K до K^*. Размерность нормирования $\mathfrak{B}^*$ равна размерности $\mathfrak{B}$.*

Обратимся теперь к некоторым задачам, связанным с построением нормирований, обладающих заданным центром. Покажем прежде всего, что задача построения нормирований поля функций Σ многообразия V_d, имеющих центр C на конечном расстоянии в пространстве A_n, сводится к случаю, когда многообразие V_d аффинно нормально.

Рассмотрим неприводимое многообразие V_d, областью целостности которого является кольцо $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Пусть C — неприводимое многообразие на V_d, лежащее на конечном расстоянии и определяемое простым идеалом $\mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{J}$. Обозначим через V_d^* аффинно нормальное многообразие, областью целостности которого служит целое замыкание $\mathfrak{J}^*$ кольца $\mathfrak{J}$ в поле $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{P}$ в кольце $\mathfrak{J}^*$. Если $\mathfrak{J}^* \cdot \mathfrak{P} = [\mathfrak{Q}_1^*, \ldots, \mathfrak{Q}_k^*]$, где идеалы $\mathfrak{Q}_i^*$ $\mathfrak{P}_i^*$-примарны, то пересечения $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}_i^*$ являются простыми идеалами кольца $\mathfrak{J}$ и делителями $\mathfrak{P}$, причем хотя бы при

одном значении i будет $\mathfrak{P}=\mathfrak{J}\cap\mathfrak{P}_i^*$ (гл. XV, § 8, теорема VIII). Кроме того, если $\mathfrak{P}^*$ — любой идеал кольца $\mathfrak{J}^*$, удовлетворяющий условию $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{P}^*=\mathfrak{P}$, то $\mathfrak{P}^*$ совпадает с одним из $\mathfrak{P}_i^*$. Расположим компоненты $\mathfrak{Q}_1^*, \ldots, \mathfrak{Q}_k^*$ так, чтобы было $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{P}_i^*=\mathfrak{P}$ при $(i=1, \ldots, r)$ и чтобы при $i>r$ пересечение $\mathfrak{J}\cap\mathfrak{P}_i^*$ было собственным делителем идеала $\mathfrak{P}$. Пусть C_i^* — неприводимые многообразия на V_d^*, определяемые идеалами $\mathfrak{P}_i^*$.

Если $\mathfrak{B}$ — некоторое нормирование поля Σ, центр которого на V_d совпадает с C, $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал этого кольца, то $\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{R}$, так как многообразие C лежит на конечном расстоянии. Любой элемент кольца $\mathfrak{J}^*$ является целым над кольцом $\mathfrak{J}$, а значит, и над $\mathfrak{R}$. Но кольцо $\mathfrak{R}$ целозамкнуто (§ 2, теорема IV), и поэтому должно быть $\mathfrak{J}^*\subseteq\mathfrak{R}$. Отсюда следует, что центр C^* нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d^* лежит на конечном расстоянии. Если C^* определяется простым идеалом $\mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{J}^*$, то $\mathfrak{P}^*=\mathfrak{J}^*\cap\mathfrak{p}$, и поэтому

$$\mathfrak{J}\cap\mathfrak{P}^*=\mathfrak{J}\cap(\mathfrak{J}^*\cap\mathfrak{p})=\mathfrak{J}\cap\mathfrak{p}=\mathfrak{P}.$$

Таким образом, C^* должно быть одним из многообразий $C_1^*, \ldots, C_r^*$. Наоборот, если $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, центром которого на V_d^* служит одно из многообразий C_i^* $(1\leqslant i\leqslant r)$, то центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d определяется простым идеалом

$$\mathfrak{J}\cap\mathfrak{p}=\mathfrak{J}\cap(\mathfrak{J}^*\cap\mathfrak{p})=\mathfrak{J}\cap\mathfrak{P}_i^*=\mathfrak{P}$$

и, следовательно, совпадает с многообразием C.

Таким образом, для построения нормирований поля Σ, центром которых на многообразии V_d является многообразие C, нужно строить нормирования, центрами которых на многообразии V_d^* являются многообразия C_i^* $(i=1, \ldots, r)$. Принципиальное преимущество оперирования с аффинно нормальными многообразиями состоит в том, что кольца частных для подмногообразий таких многообразий целозамкнуты. Поэтому нам достаточно рассмотреть задачу построения нормирования с заданным центром C лишь в случае, когда кольцо частных многообразия C целозамкнуто. Еще некоторые небольшие преимущества дает предположение о том, что многообразие V_d нормально.

Предположим теперь, что многообразие V_d аффинно нормально, а C — неприводимое подмногообразие на V_d, имеющее размерность $d-1$ и определяемое простым идеалом $\mathfrak{P}$. Напомним, что в § 5 гл. XVI мы пользовались мультипликативной теорией идеалов области целостности аффинно нормального многообразия для построения примера нормирования. Было показано, что простой идеал неприводимого подмногообразия размерности $d-1$ определяет неко-

торое нормирование. Описанный метод можно, в частности, применить к идеалу $\mathfrak{P}$ многообразия C и получить некоторое нормирование $\mathfrak{B}$. При этом ясно, что многообразие C служит центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_d. Докажем теперь, что $\mathfrak{B}$ является единственным нормированием поля Σ, центром которого служит C. Мы воспользуемся результатами гл. XV, относящимися к мультипликативной теории идеалов целозамкнутого кольца.

Пусть η и ζ — любые отличные от нуля элементы области целостности $\mathfrak{J}$ многообразия V_d. Идеалы $\mathfrak{J}\cdot(\eta)$ и $\mathfrak{J}\cdot(\zeta)$ можно представить квазипроизведениями

$$\mathfrak{i}=\mathfrak{J}\cdot(\eta)\sim\mathfrak{P}^{a}\mathfrak{P}_1^{a_1}\ \dots\ \mathfrak{P}_r^{a_r},$$

$$\mathfrak{j}=\mathfrak{J}\cdot(\zeta)\sim\mathfrak{P}^{b}\mathfrak{P}_1^{b_1}\ \dots\ \mathfrak{P}_r^{b_r},$$

где $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, ..., $\mathfrak{P}_r$ — различные простые идеалы размерности $d-1$, а a, a_1, ..., a_r и b, b_1, ..., b_r — положительные целые числа или нули. Покажем, что если $a=b$, то в кольце $\mathfrak{J}$ существуют элементы η' и ζ', не принадлежащие идеалу $\mathfrak{P}$ и удовлетворяющие соотношению $\eta/\zeta=\eta'/\zeta'$. Действительно, в $\mathfrak{J}$ найдется элемент, принадлежащий идеалам $\mathfrak{P}_1$, ..., $\mathfrak{P}_r$, но не принадлежащий $\mathfrak{P}$. Если ζ' — достаточно высокая степень такого элемента, то

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{J}\cdot(\eta\zeta')\sim\mathfrak{P}^{a}\mathfrak{P}_1^{c_1}\ \dots\ \mathfrak{P}_r^{c_r},$$

где $c_i\geqslant b_i$ $(i=1,\ \dots,\ r)$. Тогда $\mathfrak{k}\geqslant\mathfrak{j}$, а значит, $\mathfrak{k}\mathfrak{j}^{-1}\subseteq\mathfrak{J}$. Но

$$\mathfrak{k}\mathfrak{j}^{-1}=\mathfrak{J}\cdot(\eta\zeta'/\zeta).$$

Следовательно, элемент $\eta_1'=\eta\zeta'/\zeta$ принадлежит $\mathfrak{J}$. Кроме того,

$$\mathfrak{J}\cdot(\eta_1')\sim\mathfrak{P}_1^{c_1-b_1}\ \dots\ \mathfrak{P}_r^{c_r-b_r},$$

и поэтому η_1' не принадлежит $\mathfrak{P}$.

Если теперь ξ — элемент идеала $\mathfrak{P}$, не лежащий в символическом квадрате $\mathfrak{P}^{(2)}$ этого идеала, то

$$\mathfrak{J}\cdot(\xi)\sim\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1^{d_1}\dots\mathfrak{P}_s^{d_s}.$$

Для любого элемента α/β поля Σ (здесь α и β — элементы из $\mathfrak{J}$) найдется такое целое число λ (положительное, нуль или отрицательное), что для него $\alpha/\beta\xi^{\lambda}=\alpha'/\beta'$, где

$$\mathfrak{J}\cdot(\alpha')\sim\mathfrak{P}^{e}\mathfrak{P}_1^{e_1}\dots,$$

$$\mathfrak{J}\cdot(\beta')\sim\mathfrak{P}^{f}\mathfrak{P}_1^{f_1}\dots.$$

Следовательно, мы имеем равенство $\alpha/\beta\xi^{\lambda}=\alpha''/\beta''$, в котором α'' и β'' — элементы кольца $\mathfrak{J}$, не принадлежащие $\mathfrak{P}$. Если $\mathfrak{B}$ — любое нормирование поля Σ, имеющее центр C, то должно быть $v(\alpha'')=0$

и $v(\xi'') = 0$, так как α'' и β'' — элементы из $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{R}$, не принадлежащие идеалу $\mathfrak{P}$. Следовательно,

$$v(\alpha/\beta) = v(\xi^{\lambda}\alpha''/\beta'') = \lambda v(\xi).$$

Отсюда вытекает, что группа значений нормирования $\mathfrak{B}$ состоит из целых кратных значения $v(\xi)$. Если эту группу значений нормализовать, чтобы было $v(\xi) = 1$, то она становится аддитивной группой целых чисел. Очевидно, что если

$$\mathfrak{J} \cdot (\alpha) = \mathfrak{P}^{\rho} \cdot \mathfrak{P}_1^{\rho_1} \dots \mathfrak{P}_s^{\rho_s},$$

$$\mathfrak{J} \cdot (\beta) = \mathfrak{P}^{\sigma} \cdot \mathfrak{P}_1^{\sigma_1} \dots \mathfrak{P}_s^{\sigma_s},$$

то $v(\alpha/\beta) = \rho - \sigma$. Таким образом, рассматриваемое нормирование необходимо совпадает с нормированием, рассмотренным в § 5 гл. XVI. Кроме того, если $v(\alpha/\beta) \geqslant 0$, то $\rho \geqslant \sigma$, а значит,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha''\xi^{\rho-\sigma}}{\beta''} = \frac{\alpha_1}{\beta''},$$

где $\alpha_1 \in \mathfrak{J}$, а β'' принадлежит $\mathfrak{J}$, но не содержится в $\mathfrak{P}$. Следовательно, любой элемент кольца $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$ принадлежит кольцу $Q(C)$, т. е. $\mathfrak{R} \subseteq Q(C)$. Но мы уже знаем, что $Q(C) \subseteq \mathfrak{R}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{R} = Q(C)$. Таким образом, мы получили следующую теорему:

Теорема VII. *Если многообразие V_d аффинно нормально, а C — любое его подмногообразие размерности $d-1$, то существует единственное нормирование поля функций многообразия V_d, имеющее C своим центром. Кольцо этого нормирования совпадает с кольцом частных подмногообразия C.*

Если многообразие V_d не будет аффинно нормальным, то на производном аффинно нормальном многообразии V_d^* подмногообразию C будет соответствовать конечное число неприводимых подмногообразий размерности $d-1$. Нормирования поля функций Σ многообразия V_d, центрами которых на многообразии V_d^* служат указанные подмногообразия, будут исчерпывать все нормирования, имеющие центр C на многообразии V_d. Следовательно, существует лишь конечное число нормирований, имеющих C своим центром. В случае, если кольцо $Q(C)$ целозамкнуто, многообразию C соответствует лишь одно подмногообразие на V_d^*, и поэтому нормирование с центром C на многообразии V_d будет единственным.

Если многообразие V_d аффинно нормально, но C имеет размерность e, меньшую $d-1$, то существует бесконечное множество нормирований, центром которых является C. Так как многообразие V_d аффинно нормально, то кольцо частных $Q(C)$ целозамкнуто. Следовательно (§ 2, теорема VI), это кольцо является пересечением содержащих его колец нормирований. Эти нормирования могут иметь любую размерность r в пределах $e \leqslant r \leqslant d-1$, причем их центры

содержат C, но не обязательно совпадают с ним. Удобно иметь более сильный результат, дающий возможность утверждать, что кольцо $Q(C)$ есть пересечение содержащих его колец e-мерных нормирований. Так как центры таких нормирований имеют размерности, не превышающие e, то они должны совпадать с C. Первым шагом к получению такого результата является доказательство следующей теоремы:

Теорема VIII. *Пусть C есть многообразие размерности e, лежащее на многообразии V_d и являющееся на V_d центром некоторого нормирования $\mathfrak{B}$ поля функций Σ для V_d. Если размерность f нормирования $\mathfrak{B}$ больше e, то из нормирования $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования поля вычетов для $\mathfrak{B}$ можно составить новое нормирование поля Σ, имеющее размерность e и центр C на многообразии V_d.*

Пусть Σ' — поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}$. Так как кольцо $Q(C)$ содержится в кольце $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$, то каждому элементу из $Q(C)$ соответствует определенный образ в поле Σ'. Элемент из $Q(C)$ имеет образом нуль в поле Σ' тогда и только тогда, когда он не является делителем единицы в кольце $\mathfrak{R}$, а значит, не будет делителем единицы и в $Q(C)$ (теорема IV). Следовательно, образ F' кольца $Q(C)$ в поле Σ' изоморфен с кольцом вычетов кольца $Q(C)$ по его максимальному идеалу, т. е. F' изоморфен полю функций многообразия C (гл. XV, § 5, теорема XI, следствие). В этом изоморфизме элементы основного поля соответствуют сами себе. Поэтому F' является полем и расширением размерности e поля K. Если F' не будет целозамкнутым в поле Σ', то его целое замыкание F'' будет алгебраическим расширением поля F' и поэтому будет иметь размерность e над полем K. Поэтому поле F'' является собственным подполем поля Σ', имеющего над полем K размерность f. Но так как F'' является пересечением содержащих его колец нормирований поля Σ' (§ 2, теорема VI), то существует нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ', кольцо которого содержит F' и не содержит любой заданный элемент ζ' поля Σ', не принадлежащий F''. Нормирование $\mathfrak{B}'$ является нетривиальным нормированием поля Σ'. Если мы построим теперь нормирование $\mathfrak{B}^*$ поля Σ, составленное из нормирований $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$, то кольцо $\mathfrak{R}^*$ нормирования $\mathfrak{B}^*$ будет содержать все элементы из $\mathfrak{R}$, образы которых в поле Σ' принадлежат кольцу нормирования $\mathfrak{B}'$. Отсюда следует, что $\mathfrak{R}^*$ будет содержать $Q(C)$.

В силу теоремы V, центр нормирования $\mathfrak{B}^*$ должен содержаться в многообразии C, являющемся центром нормирования $\mathfrak{B}$. Но центр для $\mathfrak{B}^*$ должен содержать C, так как кольцо нормирования для $\mathfrak{B}^*$ содержит $Q(C)$. Таким образом, нормирование $\mathfrak{B}^*$ имеет C своим центром. Поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}^*$ изоморфно полю вычетов нормирования $\overline{\mathfrak{B}}$ поля Σ'. Отсюда вытекает, что нормирование $\mathfrak{B}^*$ имеет размерность f^*, меньшую f: $e \leqslant f^* < f$. Если $f^* > e$, то мы можем повторить то же построение, пользуясь нормированием $\mathfrak{B}^*$ вместо $\mathfrak{B}$,

и получить новое нормирование $\mathfrak{B}^{**}$ размерности f^{**}, где $e \leqslant f^{**} < f^{*}$, имеющее многообразие C своим центром. После конечного числа шагов будет получено нормирование $\mathfrak{B}'$ поля функций многообразия V_d, имеющее размерность e и имеющее многообразие C своим центром на V_d. Группа значений Γ' нормирования $\mathfrak{B}'$ содержит изолированную подгруппу Δ, фактор-группа Γ'/Δ по которой изоморфна Γ, где Γ — группа значений нормирования $\mathfrak{B}$. Кольцо нормирования $\mathfrak{B}'$ содержится в кольце нормирования $\mathfrak{B}$ и, конечно, содержит $Q(C)$. Само нормирование $\mathfrak{B}'$ будет составленным из нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ и некоторого нормирования поля вычетов для $\mathfrak{B}$ с группой значений Δ.

Теорема IX. *Пусть $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, центром которого на V_d является многообразие C. Если D есть неприводимое подмногообразие многообразия C, то из нормирования $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования поля вычетов для $\mathfrak{B}$ можно составить новое нормирование поля Σ, центром которого на многообразии V_d будет D.*

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы VIII. Если размерность нормирования $\mathfrak{B}$ больше e, т. е. больше размерности многообразия C, то из $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования $\mathfrak{B}_1$ поля вычетов для $\mathfrak{B}$ можно составить нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ, имеющее размерность e и имеющее C своим центром. Рассмотрим теперь поле вычетов Σ'' нормирования $\mathfrak{B}'$ и в нем подкольцо $\mathfrak{S}''$, состоящее из образов элементов кольца $Q(D)$. Так как D является собственным подмногообразием центра C нормирования $\mathfrak{B}'$, то в кольце $Q(D)$ имеются элементы, не являющиеся в нем делителями единицы и служащие делителями единицы в кольце нормирования $\mathfrak{B}'$ (теорема IV). Образы этих элементов в поле Σ'' будут элементами кольца $\mathfrak{S}''$, не являющимися в нем делителями единицы и отличными от нуля. Следовательно, в $\mathfrak{S}''$ имеются отличные от нуля элементы, не являющиеся в $\mathfrak{S}''$ делителями единицы, так что $\mathfrak{S}''$ не есть поле. Поэтому, как и в теореме VIII, можно найти нетривиальное нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ'', кольцо которого содержит $\mathfrak{S}''$. Построим нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля Σ, составленное из $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}_1'$. Кольцо нормирования $\mathfrak{B}_1$ содержит $Q(D)$, причем размерность $\mathfrak{B}_1$ меньше размерности e нормирования $\mathfrak{B}'$. Отсюда следует, что центром нормирования $\mathfrak{B}_1$ на многообразии V_d является некоторое многообразие C_1, подчиненное соотношению $D \subseteq C_1 \subset C$. Если $C_1 \neq D$, то можно повторить наше рассуждение, пользуясь многообразием C_1 вместо C, и т. д. до тех пор, пока (после конечного числа шагов) не будет получено нормирование поля Σ, составленное из $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования поля вычетов для $\mathfrak{B}$, такое, что его центром на многообразии V_d будет D.

Из теорем VIII и IX легко получается

Теорема X. *Если C — неприводимое многообразие размерности e, лежащее на многообразии V_d и такое, что его кольцо частных $Q(C)$ целозамкнуто, то $Q(C)$ есть пересечение содержащих*

его колец e-мерных нормирований поля Σ. (Конечно, эти нормирования имеют C своим центром.)

Пусть $\mathfrak{B}$ — любое нормирование поля функций Σ, обладающее тем свойством, что кольцо $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$ содержит $Q(C)$. Тогда центр E нормирования $\mathfrak{B}$ содержит C. В силу теоремы VIII, из нормирования $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования его поля вычетов можно составить новое нормирование поля Σ, центром которого на многообразии V_d будет C. Из полученного нормирования и некоторого нормирования его поля вычетов можно теперь составить нормирование $\mathfrak{B}^*$ размерности e, имеющее C своим центром. Так как нормирование $\mathfrak{B}^*$ составлено из нормирования $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования поля вычетов для $\mathfrak{B}$, то кольцо $\mathfrak{R}^*$ нормирования $\mathfrak{B}^*$ содержится в $\mathfrak{R}$. Следовательно,

$$\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{R}^* \supseteq Q(C).$$

Поэтому при построении пересечения колец нормирований, содержащих кольцо $Q(C)$, можно опустить кольцо $\mathfrak{R}$, так как любой его элемент, принадлежащий пересечению, содержится в $\mathfrak{R}^*$. Таким образом, можно опустить все кольца нормирований, имеющих размерности, большие e. Но это и утверждается в теореме.

Доказанные выше теоремы о нормированиях, имеющих заданный центр, достаточны для большинства приложений. Более полные результаты получены Зарисским. Его наиболее исчерпывающий результат мы сформулируем здесь без доказательства:

Теорема XI. *Пусть* $C_0, C_1, \ldots, C_{r-1}$ — *неприводимые многообразия, лежащие на многообразии* V_d *и такие, что*

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots \supseteq C_{r-1}.$$

Если целые числа $\rho_0, \ldots, \rho_{r-1}$ *удовлетворяют условиям*

$$d > \rho_0 > \rho_1 > \ldots > \rho_{r-1}$$

и

$$\rho_i \geqslant \dim C_i \quad (r \leqslant d),$$

то существует последовательность нормирований $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{r-1}$ *поля функций многообразия* V_d, *обладающая следующими свойствами*:

(I) *каждое* $\mathfrak{B}_i$ *составлено из* $\mathfrak{B}_{i-1}$ *и некоторого нормирования поля вычетов для* $\mathfrak{B}_{i-1}$;

(II) $\mathfrak{B}_i$ *имеет размерность* ρ_i *и ранг* $i+1$;

(III) *центром нормирования* $\mathfrak{B}_i$ *на многообразии* V_d *является* C_i.

БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Бирациональные соответствия

Пусть S_m и S'_n — два проективных пространства над основным полем K, а $(x_0, \ldots, x_m)$ и $(y_0, \ldots, y_n)$ — координатные системы в этих пространствах. Обозначим через U и U' многообразия в пространствах S_m и S'_n, имеющие соответственно общие точки $(\xi_0, \ldots, \xi_m)$ и $(\eta_0, \ldots, \eta_n)$. Пусть размерность многообразия U равна d. Можно предполагать, что многообразие U не лежит на гиперплоскости $x_h = 0$, а многообразие U' — на гиперплоскости $y_k = 0$. Многообразия U и U' бирационально эквивалентны, если между их полями функций $K(\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h)$ и $K(\eta_0/\eta_k, \ldots, \eta_n/\eta_k)$ существует изоморфизм, при котором элементы поля K соответствуют сами себе. Если U и U' бирационально эквивалентны, то может случиться, что существует несколько изоморфизмов указанного типа. Хотя дальнейшее исследование покажет, что такая возможность является своего рода исключением, ее следует иметь в виду. Во всяком случае, если многообразия U и U' бирационально эквивалентны, мы можем выбрать и выберем один из изоморфизмов их полей функций, при котором элементы поля K соответствуют самим себе, и отождествим соответствующие элементы. Если поля функций многообразий U и U' совпадают с самого начала, как бывает, например, в случае, когда U' есть нормальное многообразие, производное для многообразия U, то естественным изоморфизмом полей функций этих многообразий служит тождественный изоморфизм, при котором каждый элемент общего для рассматриваемых многообразий поля функций соответствует сам себе. После отождествления полей функций многообразий U и U' мы будем иметь

$$\eta_i/\eta_k \in K(\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h) \quad (i = 0, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что существует система из $n+1$ однородных многочленов $\varphi_i(x_0, \ldots, x_m)$ $(i = 0, \ldots, n)$ одной и той же степени с коэффициентами из K и таких, что

$$\varphi_k(\xi_0, \ldots, \xi_m) \neq 0$$

и

$$\frac{\eta_i}{\eta_k} = \frac{\varphi_i(\xi_0, \ldots, \xi_m)}{\varphi_k(\xi_0, \ldots, \xi_m)} \qquad (i = 0, \ldots, n).$$

Подобным же образом, существует система из $m+1$ однородных многочленов

$$\psi_i(y_0, \ldots, y_n)$$

одной и той же степени, для которых

$$\psi_h(\eta_0, \ldots, \eta_n) \neq 0$$

и

$$\frac{\xi_i}{\xi_h} = \frac{\psi_i(\eta_0, \ldots, \eta_n)}{\psi_h(\eta_0, \ldots, \eta_n)} \qquad (i = 0, \ldots, m).$$

Из этих соотношений следует, что

$$\xi_i\psi_j[\varphi_0(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)] - \xi_j\psi_i[\varphi_0(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)] = 0,$$

а значит, многочлены

$$x_i\psi_j[\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)] - x_j\psi_i[\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)]$$

обращаются в нуль на многообразии U. Аналогично, многочлены

$$y_i\varphi_j[\psi_0(y), \ldots, \psi_m(y)] - y_j\varphi_i[\psi_0(y), \ldots, \psi_m(y)]$$

обращаются в нуль на многообразии U'.

Многообразие W в двукратном проективном пространстве $S_{m,n}$, общей точкой которого является (ξ, η), определяет неприводимое соответствие Γ между пространствами S_m и S'_n. Многообразием-прообразом этого соответствия в пространстве S_m служит многообразие с общей точкой ξ, т. е. многообразие U, а многообразием-образом в пространстве S'_n — многообразие с общей точкой η, т. е. многообразие U'. Так как

$$\eta_i\varphi_j(\xi) - \eta_j\varphi_i(\xi) = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, n),$$

то отсюда вытекает, что если x' — произвольная точка многообразия U, то отвечающая ей в соответствии Γ точка многообразия U' удовлетворяет уравнениям

$$y_i\varphi_j(x') - y_j\varphi_i(x') = 0.$$

Следовательно, если при некотором i значение $\varphi_i(x')$ отлично от нуля, то на многообразии U' существует единственная точка y', соответствующая точке x'. Если все $\varphi_i(x')$ равны нулю, то точке x' соответствует по крайней мере одна точка многообразия U', но может соответствовать и большее число точек. Аналогично, если y' — любая точка многообразия U', то ей отвечает по крайней мере одна точка x' многообразия U, причем если при некотором j значение $\psi_j(y')$ отлично от нуля, то точка x' однозначно определяется точкой y'. Таким образом, соответствие Γ между многообразиями U и U' может быть охарактеризовано как взаимно однозначное соответствие с исключениями. Исключительные точки многообразия U, каждой из которых соответствует более чем одна точка многообразия U', образуют

некоторое геометрическое место точек на U. Подобным же образом, исключительные точки многообразия U' составляют некоторое геометрическое место точек на U'.

Предположим теперь, обратно, что между многообразиями U и U' существует такое неприводимое соответствие, что общей точке каждого из этих многообразий отвечает однозначно определенная точка другого многообразия. Пусть ξ — нормированная общая точка многообразия U. Тогда, если уравнениями соответствия являются уравнения

$$f_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, \ldots, r),$$

то система уравнений

$$f_i(\xi, y) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

имеет единственное решение η. Следовательно, если координаты точки η нормировать, то

$$\eta_i \in K(\xi_1, \ldots, \xi_m).$$

Но точка η является общей точкой многообразия U', рассматриваемого как многообразие над полем K (гл. XI, § 3). Аналогично, можно обнаружить, что так как ξ есть единственная точка многообразия U, соответствующая точке η, то

$$\xi_i \in K(\eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Таким образом, мы получаем, что $K(\xi_1, \ldots, \xi_m) = K(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, и поэтому многообразия U и U' бирационально эквивалентны. Заданное соответствие устанавливает также и изоморфизм полей функций многообразий U и U'.

Неприводимое соответствие между многообразиями U и U', при котором общей точке каждого из этих многообразий отвечает единственная точка другого многообразия, называется *бирациональным соответствием* между многообразиями U и U'. Отображение же точек многообразия U на соответствующие точки многообразия U' называется *бирациональным преобразованием* многообразия U в многообразие U'. Установленные только что результаты показывают, что если многообразия U и U' бирационально эквивалентны и если задан изоморфизм полей функций этих многообразий, переводящий каждый элемент поля K в себя, то из этого изоморфизма можно получить некоторое бирациональное соответствие между U и U'. И наоборот, если между многообразиями U и U' установлено некоторое бирациональное соответствие, то U и U' бирационально эквивалентны, причем заданное бирациональное соответствие определяет некоторый изоморфизм полей функций для U и U'. Очевидно, что если поле функций некоторого многообразия U обладает автоморфизмом, оставляющим элементы основного поля инвариантными и отличными от тождественного, то этот автоморфизм позволяет определить соответствующее ему бирациональное преобразование U в себя.

В этом и следующем параграфах мы изложим основы общей теории бирациональных соответствий и рассмотрим наиболее важные из встречающихся на практике бирациональных преобразований. При этом мы будем пользоваться введенными выше обозначениями: U и U' будут обозначать два бирационально эквивалентных многообразия в пространствах S_m и S'_n. Изоморфизм полей функций этих многообразий будем считать заданным, а соответствующие при этом изоморфизме элементы полей функций будем отождествлять. Общее для обоих рассматриваемых многообразий поле функций будем обозначать через Σ. Соответствие между многообразиями U и U', определяемое заданным изоморфизмом полей функций, будет обозначаться через Γ. Однако вместо рассмотрения многообразия W в пространстве $S_{m,n}$ для изучения бирационального соответствия Γ оказывается более удобным представить пространство $S_{m,n}$ многообразием Сегре в пространстве S_{mn+m+n} и рассматривать многообразие U^*, соответствующее многообразию W на многообразии Сегре. При надлежащем выборе координатной системы $(z_{00}, \ldots, z_{mn})$ в пространстве S_{mn+m+n} можно предполагать многообразие U^* заданным общей точкой $(\zeta_{00}, \ldots, \zeta_{mn})$, где $\zeta_{ij} = \xi_i\eta_j$. Полем функций многообразия U^* является поле

$$K(\zeta_{00}/\zeta_{hk}, \ldots, \zeta_{mn}/\zeta_{hk}) = K(\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h, \eta_0/\eta_k, \ldots, \eta_n/\eta_k) =$$
$$= K(\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h) = K(\eta_0/\eta_k, \ldots, \eta_n/\eta_k) = \Sigma.$$

Следовательно, U^* бирационально эквивалентно каждому из многообразий U и U'. Но так как поле функций многообразия U^* не только изоморфно полю функций для U (или для U'), но в действительности совпадает с ним, то этим устанавливается и бирациональное соответствие между U^* и U (или U^* и U'). Многообразие U^* называется *соединяющим многообразием* многообразий U и U'.

Если U и U' не лежат на гиперплоскостях $x_h = 0$ и $y_k = 0$, то $\xi_h \neq 0$ и $\eta_k \neq 0$, а поэтому и $\zeta_{hk} \neq 0$, так что многообразие U^* не лежит на гиперплоскости $z_{hk} = 0$. Если мы перейдем к аффинным пространствам, взяв в качестве бесконечно удаленных гиперплоскостей в пространствах S_m, S'_n и S_{mn+m+n} гиперплоскости $x_h = 0$, $y_k = 0$ и $z_{hk} = 0$, то областями целостности многообразий U, U' и U^* будут соответственно кольца

$$\mathfrak{J}_h = K[\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h], \quad \mathfrak{J}'_k = K[\eta_0/\eta_k, \ldots, \eta_n/\eta_k],$$
$$\mathfrak{J}^*_{hk} = K[\zeta_{00}/\zeta_{hh}, \ldots, \zeta_{mn}/\zeta_{hk}] = K[\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h, \eta_0/\eta_k, \ldots, \eta_n/\eta_k].$$

Следовательно,

$$\mathfrak{J}_h \subseteq \mathfrak{J}^*_{hk}, \quad \mathfrak{J}'_k \subseteq \mathfrak{J}^*_{hk}.$$

При этом $\mathfrak{J}^*_{hk}$ является наименьшим кольцом в поле Σ, содержащим оба кольца $\mathfrak{J}_h$ и $\mathfrak{J}'_k$, т. е. $\mathfrak{J}^*_{hk}$ есть *объединение* колец $\mathfrak{J}_h$ и $\mathfrak{J}'_k$.

Пусть V—некоторое неприводимое подмногообразие многообразия U, а $\bar{\xi}$ — общая точка для V. Обозначим через $\bar{\eta}$ точку многообразия U', соответствующую точке $\bar{\xi}$. Тогда, если положить $\bar{\zeta}_{ij} = \bar{\xi}_i \bar{\eta}_j$, точка $\bar{\zeta}$ будет точкой многообразия U^*, отвечающей точке $\bar{\xi}$ в бирациональном соответствии между U и U^* и точке $\bar{\eta}$ в бирациональном соответствии между U' и U^*. Обозначим через V' неприводимое подмногообразие многообразия U', имеющее общую точку $\bar{\eta}$, а через V^* подмногообразие на U^*, имеющее общую точку $\bar{\zeta}$. Воспользовавшись теорией гл. XI, мы усматриваем, что, в силу равенств $\bar{\zeta}_{ij} = \bar{\xi}_i \bar{\eta}_j$, многообразие V^* определяет некоторое неприводимое соответствие Δ между пространствами S_m и S'_n, в котором многообразиями-образом и -прообразом являются соответственно V и V'. Так как $V^* \subseteq U^*$, то любая пара точек многообразий V и V', отвечающих друг другу в соответствии Δ, будет парой отвечающих друг другу точек и в соответствии Γ. Наоборот, пусть V и V' — неприводимые подмногообразия многообразий U и U', между которыми установлено неприводимое соответствие Δ, обладающее тем свойством, что любая пара точек, отвечающих друг другу в соответствии Δ, будет парой отвечающих точек и в соответствии Γ. Тогда общей точке многообразия V в соответствии Γ отвечает хотя бы одна (общая) точка многообразия V'. Действительно, если $\bar{\xi}$ — общая точка многообразия V, то ее образ в соответствии Δ является неприводимым подмногообразием многообразия V', причем общая точка $\bar{\eta}$ этого подмногообразия будет общей точкой многообразия V' над полем K. Но так как точки $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ отвечают друг другу в соответствии Δ, они будут отвечающими друг другу и в соответствии Γ. Неприводимые многообразия V и V', лежащие на многообразиях U и U', называются *отвечающими друг другу в бирациональном соответствии* Γ в том и только в том случае, если существует неприводимое соответствие Δ, имеющее V и V' своими многообразиями-образом и -прообразом и обладающее тем свойством, что любая пара точек, отвечающих друг другу в соответствии Δ, будет парой отвечающих друг другу точек и в соответствии Γ.

Если V и V' — неприводимые подмногообразия многообразий U и U', отвечающие друг другу в соответствии Γ, то соответствие Δ между V и V' определяется некоторым многообразием V^*, содержащимся в многообразии U^*. Предположим, что V^* не содержится в гиперплоскости $z_{hk} = 0$. Тогда координаты общей точки $\bar{\zeta}$ многообразия V^* имеют вид $\bar{\zeta}_{ij} = \bar{\xi}_i \bar{\eta}_j$, где $\bar{\xi}$ — общая точка многообразия V, а $\bar{\eta}$ — общая точка многообразия V', причем $\bar{\xi}_h \neq 0$, $\bar{\eta}_k \neq 0$. Перейдем теперь от проективных пространств к аффинным и рассмотрим простые идеалы $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}^*$ колец $\mathfrak{J}_h$, $\mathfrak{J}'_k$, $\mathfrak{J}^*_{hk}$, определяющие соответственно многообразия V, V', V^*. Любой элемент ϑ кольца $\mathfrak{J}_h$

имеет вид

$$f(\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h) = f(\zeta_{0k}/\zeta_{hk}, \ldots, \zeta_{mk}/\zeta_{hk}),$$

где $f(x_0, \ldots, x_m)$ — однородный многочлен над полем K. Элемент σ принадлежит идеалу $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда многочлен $f(x_0, \ldots, x_m)$ обращается в нуль на многообразии V, т. е. тогда и только тогда, когда $f(z_{0k}, \ldots, z_{mk})$ обращается в нуль на V^*. Следовательно, элемент σ принадлежит $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда он принадлежит $\mathfrak{P}^*$. Так как $\mathfrak{I}_h \subseteq \mathfrak{I}^*_{hk}$, то отсюда вытекает, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*$. Аналогично, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{I}'_k \cap \mathfrak{P}^*$. Следовательно, если V — некоторое неприводимое многообразие, лежащее на U, не лежащее на гиперплоскости $x_h = 0$ и определяемое идеалом $\mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{I}_h$, а V' — неприводимое многообразие, лежащее на U', не лежащее на гиперплоскости $y_k = 0$ и определяемое идеалом $\mathfrak{P}'$ кольца $\mathfrak{I}'_k$, то в случае, когда многообразия V и V' отвечают друг другу в соответствии Γ, в кольце $\mathfrak{I}^*_{hk}$ существует простой идеал $\mathfrak{P}^*$, удовлетворяющий условиям $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*$ и $\mathfrak{P}' = \mathfrak{I}'_k \cap \mathfrak{P}^*$.

Наоборот, пусть V — неприводимое многообразие, лежащее на U и определяемое простым идеалом $\mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{I}_h$, а V' — неприводимое многообразие, лежащее на U' и определяемое идеалом $\mathfrak{P}'$ кольца $\mathfrak{I}'_k$. Предположим, что существует такой простой идеал $\mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{I}^*_{hk}$, для которого $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{I}_h$ и $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{I}'_k$. Идеал $\mathfrak{P}^*$ определяет неприводимое многообразие V^*, содержащееся в U^* и определяющее некоторое соответствие Δ между отвечающими друг другу подмногообразиями многообразий U и U'. Форма $f(x_0, \ldots, x_m)$ обращается в нуль на многообразии-прообразе соответствия Δ тогда и только тогда, когда $f(z_{0k}, \ldots, z_{mk})$ обращается в нуль на V^*. Следовательно, элемент

$$\sigma = f(\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h) = f(\zeta_{0k}/\zeta_{hk}, \ldots, \zeta_{mk}/\zeta_{hk})$$

принадлежит простому идеалу многообразия-прообраза в кольце $\mathfrak{I}_h$ тогда и только тогда, когда σ принадлежит $\mathfrak{P}^*$. Поэтому многообразие-прообраз соответствия Δ определяется простым идеалом $\mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$, а значит, совпадает с V. Аналогично показывается, что многообразием-образом для Δ служит V'. Таким образом, многообразия V и V' отвечают друг другу в соответствии Γ.

Пусть V — неприводимое подмногообразие на U, определяемое простым идеалом $\mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{I}_h$, а V' — неприводимое подмногообразие на U', определяемое простым идеалом $\mathfrak{P}'$ кольца $\mathfrak{I}'_k$. Предположим сначала, что многообразия V и V' отвечают друг другу в бирациональном соответствии Γ. Тогда, в силу доказанного, существует простой идеал $\mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{I}_{hk}$, такой, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*$ и $\mathfrak{P}' = \mathfrak{I}'_k \cap \mathfrak{P}^*$,

Обозначим через V^* неприводимое подмногообразие на U^*, определяемое простым идеалом $\mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{I}_{hk}$. Поле Σ обладает нормированием $\mathfrak{B}$, центром которого на многообразии U^* является многообразие V^* (гл. XVII, § 5, теоремы VII, IX). Обозначим через $\mathfrak{R}$ кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, а через $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Тогда $\mathfrak{I}_{hk}^* \subseteq \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{I}_{hk}^* \cap \mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{I}_h \subseteq \mathfrak{I}_{hk}$, то $\mathfrak{I}_h \subseteq \mathfrak{R}$. Следовательно, центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U не лежит на гиперплоскости $x_h = 0$ и поэтому определяется идеалом $\mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{I}_h$. Но так как $\mathfrak{I}_h \subseteq \mathfrak{I}_{hk}^*$, то

$$\mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{I}_{hk}^* \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}.$$

Таким образом, центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U является многообразие V. Аналогично, центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U' будет V'.

Пусть, наоборот, существует нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ, центром которого на многообразии U является V, а центром на многообразии U' является V'. Тогда $\mathfrak{I}_h \subseteq \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{I}_k' \subseteq \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$. Так как кольцо $\mathfrak{I}_{hk}^*$ есть наименьшее подкольцо поля Σ, содержащее $\mathfrak{I}_h$ и $\mathfrak{I}_k'$, отсюда вытекает, что $\mathfrak{I}_{hk}^* \subseteq \mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathfrak{p}$ максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$, а через $\mathfrak{P}^*$ — идеал $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{I}_{hk}^* \cap \mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{p}$, то мы имеем

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{I}_{hk}^* \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*,$$

и аналогично,

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{I}_k' \cap \mathfrak{P}^*.$$

Следовательно, в кольце $\mathfrak{I}_{hk}^*$ существует простой идеал $\mathfrak{P}^*$, удовлетворяющий условиям $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*$ и $\mathfrak{P}' = \mathfrak{I}_k' \cap \mathfrak{P}^*$. Поэтому, в силу доказанного выше результата, многообразия V и V' отвечают друг другу в соответствии Г. Таким образом, доказана следующая

Теорема I. *Пусть между многообразиями U и U' установлено некоторое бирациональное соответствие. Подмногообразия V и V' этих многообразий отвечают друг другу в указанном бирациональном соответствии тогда и только тогда, когда поле функций Σ многообразий U и U' обладает нормированием, для которого многообразия V и V' служат центрами соответственно на многообразиях U и U'.*

Это свойство отвечающих друг другу в некотором бирациональном соответствии многообразий иногда принимается за определение. Ниже мы будем пользоваться теоремой I для проверки того, являются ли данные подмногообразия отвечающими друг другу. Пример использования такого приема дает следующая

Теорема II. *Если между многообразиями U и U' установлено бирациональное соответствие, то каждому неприводимому*

подмногообразию V многообразия U отвечает по крайней мере одно подмногообразие V' на U'.

Прямое доказательство этой теоремы, по существу, содержится в рассуждениях, приведенных выше. Однако мы дадим здесь доказательство, использующее теорию нормирований. Поле функций Σ многообразий U и U' обладает по крайней мере одним нормированием, центром которого на многообразии U будет V. На многообразии U' центром этого нормирования является некоторое неприводимое подмногообразие V'. В силу теоремы I, многообразие V' отвечает V.

Легко проверить, что частный случай взаимно однозначных соответствий между алгебраическими многообразиями, с которым мы встретились в предыдущей главе, относится к числу бирациональных соответствий, причем отвечающие друг другу многообразия берутся в согласии с теоремой I. Например, проективные соответствия между двумя пространствами являются бирациональными соответствиями, а многообразия, отвечающие друг другу при таких соответствиях, отвечают друг другу и в силу теоремы I. Далее, если U — неприводимое многообразие в пространстве A_m, а U' — его производное нормальное многообразие, то мы видели в § 5 гл. XVII, как с каждым неприводимым подмногообразием многообразия U' связывается однозначно определенное подмногообразие многообразия U, а с каждым подмногообразием многообразия U связывается конечное число (но не менее чем одно) подмногообразий на U'. Если V и V' — неприводимые подмногообразия многообразий U и U', то они будут связаны друг с другом в указанном смысле тогда и только тогда, когда существует нормирование поля функций многообразий U и U', имеющее V своим центром на U, а V' — центром на U' (стр. 238). Следовательно, V и V' связаны друг с другом тогда и только тогда, когда они отвечают друг другу в бирациональном соответствии между многообразиями U и U'. Тем самым оправдано применение термина „соответствующие многообразия“ в § 5 гл. XVII.

Рассмотрим теперь некоторые элементарные свойства бирационального соответствия Γ между многообразиями U и U'.

Теорема III. *Если V и V' — отвечающие друг другу неприводимые подмногообразия многообразий U и U', а W — неприводимое подмногообразие, лежащее на V, то на многообразии U' существует подмногообразие W', отвечающее W и содержащееся в V'.*

Так как V и V' отвечают друг другу в соответствии Γ, то существует нормирование $\mathfrak{B}$ поля функций Σ многообразий U и U', центрами которого на U и на U' являются соответственно подмногообразия V и V'. В силу теоремы IX § 5 гл. XVII, из нормирования $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования его поля вычетов можно составить нормирование $\mathfrak{B}^*$ поля Σ, центром которого на U будет многообразие W. Так как нормирование $\mathfrak{B}^*$ составлено из нормирования $\mathfrak{B}$ и еще некоторого нормирования, то центр W' нормирования $\mathfrak{B}^*$ на многообра-

зии U' содержится в центре V' нормирования $\mathfrak{B}$ (гл. XVII, § 5, теорема V). Поэтому W' является подмногообразием на U', отвечающим многообразию W и удовлетворяющим требованиям теоремы.

Теорема IV. *Пусть V — неприводимое подмногообразие многообразия U, удовлетворяющее одному из следующих условий*:

(I) *На многообразии U' существует подмногообразие V', кольцо частных которого $Q(V')$ содержится в кольце частных $Q(V)$ подмногообразия V, причем элементы из $Q(V')$, не являющиеся в этом кольце делителями единицы, не будут делителями единицы и в кольце $Q(V)$.*

(II) *Существует такое целое число k, для которого $\eta_i/\eta_k \in Q(V)$ $(i = 0, \ldots, n)$. Здесь $(\eta_0, \ldots, \eta_n)$ — общая точка для U'.*

Тогда V' есть единственное подмногообразие многообразия U', отвечающее V в соответствии Γ, причем $\dim V' \leqslant \dim V$.

(I) Чтобы найти подмногообразия многообразия U', отвечающие V, нужно найти на многообразии U' центры нормирований поля функций Σ, центром которых на многообразии U является V. Пусть $\mathfrak{B}$ — любое такое нормирование. Тогда кольцо $Q(V)$ содержится в кольце $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$ (гл. XVII, § 5, теорема IV), причем каждый элемент $Q(V)$, не являющийся в этом кольце делителем единицы, не будет делителем единицы и в $\mathfrak{R}$. Поэтому

$$Q(V') \subseteq Q(V) \subseteq \mathfrak{R}.$$

Если α — любой элемент из $Q(V')$, не являющийся делителем единицы, то, по условию, α не будет делителем единицы и в $Q(V)$, а значит, и в $\mathfrak{R}$. Так как только что цитированный результат допускает обращение, отсюда следует, что V' является центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U'. Поэтому V' есть единственное многообразие, отвечающее V.

(II) Так как $\eta_i/\eta_k \in Q(V)$ $(i = 0, \ldots, n)$, то

$$\mathfrak{J}'_k = K[\eta_0/\eta_k, \ldots, \eta_n/\eta_k] \subseteq Q(V).$$

Пусть $\mathfrak{P}$ — максимальный идеал кольца $Q(V)$. Тогда $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}'_k \cap \mathfrak{P}$ есть простой идеал некоторого неприводимого подмногообразия V' многообразия U', не лежащего на гиперплоскости $y_k = 0$. Рассмотрим кольцо частных $Q(V')$ подмногообразия V'. Любой элемент из $Q(V')$ можно записать в виде α/β, где α и β принадлежат $\mathfrak{J}'_k$, причем β не содержится в $\mathfrak{P}'$. Так как $\mathfrak{J}'_k \subseteq Q(V)$, то α и β содержатся в $Q(V)$. Но так как элемент β не принадлежит $\mathfrak{P}'$, то он не принадлежит и $\mathfrak{P}$, а значит, является делителем единицы в кольце $Q(V)$. Следовательно, $\alpha/\beta \in Q(V)$, т. е. $Q(V') \subseteq Q(V)$. Кроме того, α/β не будет делителем единицы кольца $Q(V')$ тогда и только тогда, когда α лежит в $\mathfrak{P}'$, а значит, и в $\mathfrak{P}$. Следовательно, если α/β не является делителем единицы в кольце $Q(V')$, то $\alpha/\beta \in \mathfrak{P}$ и поэтому α/β не будет делителем единицы в $Q(V)$. Поэтому все элементы кольца $Q(V')$, не являющиеся в нем делителями единицы, не будут делителями

единицы и в $Q(V)$. Отсюда, в силу (I), вытекает, что V' — единственное подмногообразие на U', отвечающее многообразию V в соответствии Г.

Поле функций многообразия V' является кольцом вычетов кольца $Q(V')$ по его максимальному идеалу (гл. XV, § 5, теорема XI, следствие). Следовательно, размерность многообразия V' равна максимальному числу элементов кольца $Q(V')$, алгебраически независимых над полем K по модулю максимального идеала из $Q(V')$. Если размерность многообразия V' равна e', то в кольце $Q(V')$ существует система из e' элементов, например $\zeta_1, \ldots, \zeta_{e'}$, такая, что значение $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{e'})$ будет делителем единицы кольца $Q(V')$ для любого отличного от нуля многочлена $f(z_1, \ldots, z_{e'})$ над полем K. В таком случае, ввиду включения $Q(V') \subseteq Q(V)$, значение $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{e'})$ является делителем единицы в кольце $Q(V)$ также для любого отличного от нуля многочлена $f(z_1, \ldots, z_{e'})$. Следовательно, $\zeta_1, \ldots, \zeta_{e'}$ можно рассматривать как элементы кольца $Q(V)$, алгебраически независимые над полем K по модулю $\mathfrak{P}$. Поэтому размерность многообразия V не меньше e', т. е. $\dim V' \leqslant \dim V$.

Следствие. *Если V — неприводимое многообразие, лежащее на многообразии U, и если на многообразии U' существует подмногообразие V', удовлетворяющее условию $Q(V') = Q(V)$, то*

$$\dim V = \dim V',$$

причем V' является единственным многообразием, отвечающим многообразию V, а V — единственным многообразием, отвечающим V'.

Теорема V. *Если существуют такие целые числа h, k, для которых выполняется включение $\mathfrak{J}_h \subseteq \mathfrak{J}'_k$, то каждому неприводимому подмногообразию V' многообразия U', не лежащему на гиперплоскости $y_k = 0$, отвечает единственное подмногообразие V на U. Кроме того, в этом случае $Q(V) \subseteq Q(V')$ и $\dim V \leqslant \dim V'$.*

Так как V' не лежит на гиперплоскости $y_k = 0$, то оно определяется простым идеалом $\mathfrak{P}'$ кольца $\mathfrak{J}'_k$. Пусть $\mathfrak{B}$ — любое нормирование поля Σ, центром которого на многообразии U' служит V'. Обозначим через $\mathfrak{R}$ кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, а через $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Тогда $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}'_k \cap \mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{J}_h \subseteq \mathfrak{J}'_k \subseteq \mathfrak{R}$, то центр V нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U не лежит на гиперплоскости $x_h = 0$ и определяется простым идеалом

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J}_h \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J}_h \cap \mathfrak{J}'_k \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J}_h \cap \mathfrak{P}'.$$

Таким образом, подмногообразие V однозначно определяется подмногообразием V'.

Так как $\mathfrak{I}_h \subseteq \mathfrak{I}'_k$ и $\mathfrak{P} = \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}'$, то $Q(V) \subseteq Q(V')$. Теперь соображения, использованные в теореме IV, показывают, что $\dim V \leqslant \dim V'$.

Полученный результат может быть непосредственно применен к случаю, когда U и U' — многообразия в аффинном пространстве, причем область целостности многообразия U' является целым замыканием области целостности для U. Этим путем можно получить новые доказательства уже полученных результатов. Другое возможное приложение относится к многообразиям в аффинном пространстве, имеющим одну и ту же область целостности. В этом случае получается, что каждому неприводимому подмногообразию одного из данных многообразий отвечает однозначно определенное подмногообразие другого, причем отвечающие друг другу подмногообразия имеют одну и ту же размерность. Заметим еще, что если $\mathfrak{I}_h \subseteq \mathfrak{I}'_k$, то кольцо $\mathfrak{I}^*_{hk}$, являющееся объединением колец $\mathfrak{I}_h$ и $\mathfrak{I}'_k$, совпадает с $\mathfrak{I}'_k$. Следовательно, в этом случае имеется взаимно однозначное соответствие (без исключений) между неприводимыми подмногообразиями многообразия U', не лежащими на гиперплоскости $y_k = 0$, и неприводимыми подмногообразиями многообразия U^*, не лежащими на гиперплоскости $z_{hk} = 0$, причем отвечающие друг другу подмногообразия имеют одну и ту же размерность. Кроме того, из имеющих место в любом случае включений $\mathfrak{I}_h \subseteq \mathfrak{I}^*_{hk}$, $\mathfrak{I}'_k \subseteq \mathfrak{I}^*_{hk}$ при всех возможных значениях h и k следует, что каждому подмногообразию V^* на U^* отвечает однозначно определенное подмногообразие V на U и однозначно определенное подмногообразие V' на U'. При этом многообразия V и V' отвечают друг другу в соответствии Г и выполняются следующие соотношения

$$Q(V) \subseteq Q(V^*), \quad Q(V') \subseteq Q(V^*),$$

$$\dim V \leqslant \dim V^*, \quad \dim V' \leqslant \dim V^*.$$

Постараемся теперь найти:

(а) совокупность всех подмногообразий многообразия U', отвечающих заданному неприводимому подмногообразию V многообразия U;

(б) совокупность подмногообразий многообразия U', отвечающих многообразиям W, содержащимся в заданном подмногообразии V многообразия U.

Будем рассматривать обе эти задачи одновременно. В силу сказанного выше, достаточно найти подмногообразия многообразия U^*, отвечающие подмногообразию V или его подмногообразиям.

Предположим, что V не лежит на гиперплоскости $x_h = 0$. Найдем прежде всего подмногообразия многообразия U^*, не лежащие на гиперплоскости $z_{hk} = 0$ и отвечающие подмногообразиям многообразия V. Подмногообразие V определяется простым идеалом $\mathfrak{P}$

кольца $\mathfrak{I}_h$, а любое неприводимое подмногообразие W^* многообразия U^*, не лежащее на гиперплоскости $z_{hk}=0$, определяется простым идеалом $\mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{I}^*_{hk}$. Однозначно определенное подмногообразие W многообразия U, отвечающее W^*, определяется идеалом $\mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{I}_h$. Включение $W \subseteq V$ выполняется в том и только в том случае, если

$$\mathfrak{P}=0 \quad (\mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*).$$

Но если $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*$, то

$$\mathfrak{I}^*_{hk} \cdot \mathfrak{P} \in \mathfrak{I}^*_{hk} \cdot (\mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^*) \leqslant \mathfrak{P}^* \quad \text{(гл. XV, § 4, теорема VI)}.$$

Наоборот, если $\mathfrak{I}^*_{hk} \cdot \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}^*$, то

$$\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{I}_h \cap (\mathfrak{I}^*_{hk} \cdot \mathfrak{P}) \subseteq \mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^* \quad \text{(гл. XV, § 4, теорема IV)}.$$

Следовательно, подмногообразие W^* отвечает многообразию W, содержащемуся в V тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{I}^*_{hk} \cdot \mathfrak{P}=0 \quad (\mathfrak{P}^*).$$

Идеал $\mathfrak{I}^*_{hk} \cdot \mathfrak{P}$ определяет некоторое алгебраическое многообразие T^*_{hk}, лежащее на U^* (T^*_{hk} может быть пустым, если $\mathfrak{I}^*_{hk} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{I}^*_{hk}$). Условие, что W^* должно соответствовать подмногообразию многообразия V, состоит в том, что W^* должно содержаться в T^*_{hk}.

Возьмем теперь для h все значения от 0 до m, исключая лишь такие, при которых многообразие V само лежит на гиперплоскости $x_h=0$, и будем k придавать значения от 0 до n. Из сказанного выше следует, что сумма $\sum T^*_{hk}$ является алгебраическим подмногообразием многообразия U^*, обладающим тем свойством, что любое подмногообразие многообразия U^*, отвечающее любому подмногообразию многообразия V, содержится в $\sum T^*_{hk}$, причем каждому неприводимому подмногообразию, содержащемуся в $\sum T^*_{hk}$, отвечает однозначно определенное подмногообразие на V. Многообразие $\sum T^*_{hk}$ называется *полным образом многообразия V на многообразии U^** и обычно обозначается символом $T^*\{V\}$. Переходя от U^* к многообразию U' путем замены каждой компоненты многообразия $T^*\{V\}$ отвечающим ей многообразием на U', мы получаем *полный образ $T'\{V\}$ многообразия V на многообразии U'*.

Чтобы получить подмногообразия U^*, не лежащие на гиперплоскости $z_{hk}=0$ и отвечающие самому V, а не его подмногообразиям, нужно найти идеалы $\mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{I}^*_{hk}$, для которых $\mathfrak{I}_h \cap \mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$. Рассмотрим любой такой идеал $\mathfrak{P}^*$. Мы снова имеем

$$\mathfrak{I}^*_{hk} \cdot \mathfrak{P}=0 \quad (\mathfrak{P}^*),$$

и поэтому любое подмногообразие на U^*, не лежащее на гиперплоскости $z_{hk}=0$ и отвечающее V, содержится в T^*_{hk}.

Пусть

$$\mathfrak{I}^*_{hk}\cdot\mathfrak{P}=[\mathfrak{Q}^*_1,\ \ldots,\ \mathfrak{Q}^*_l],$$

где $\mathfrak{Q}^*_i$ — примарные идеалы, радикалами которых являются идеалы $\mathfrak{P}^*_i$. Тогда

$$\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{I}^*_{hk}\cdot\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{Q}^*_i\subseteq\mathfrak{P}^*_i$$

при любом i, а поэтому

$$\mathfrak{P}=0\quad(\mathfrak{I}_h\cap\mathfrak{P}^*_i)\qquad(i=1,\ \ldots,\ l).$$

Так как $\mathfrak{I}^*_{hk}\cdot\mathfrak{P}=0$ $(\mathfrak{P}^*)$, то при некотором значении i

$$\mathfrak{P}^*_i=0\quad(\mathfrak{P}^*).$$

Для такого значения i мы будем иметь

$$\mathfrak{I}_h\cap\mathfrak{P}^*_i\in\mathfrak{I}_h\cap\mathfrak{P}^*=\mathfrak{P}.$$

Следовательно, для этого значения i

$$\mathfrak{I}_h\cap\mathfrak{P}^*_i=\mathfrak{P}.$$

Пусть теперь идеалы $\mathfrak{Q}^*_i$ таковы, что

$$\mathfrak{I}_h\cap\mathfrak{P}^*_i=\mathfrak{P}\quad(i=1,\ \ldots,\ s)\quad\text{и}\quad\mathfrak{I}_h\cap\mathfrak{P}^*_i\supset\mathfrak{P}\quad(i=s+1,\ \ldots,\ l).$$

Из доказанного выше вытекает, что если V^*_i—подмногообразие на U^*, определяемое идеалом $\mathfrak{P}^*_i$, то подмногообразия $V^*_1,\ \ldots,\ V^*_s$ отвечают V, причем любое подмногообразие на U^*, отвечающее V и не лежащее на гиперплоскости $z_{hk}=0$, содержится в некотором из V^*_i при $i\leqslant s$. Поскольку мы интересуемся полным образом для V, будем придавать h и k все допустимые значения и получим некоторое алгебраическое многообразие $T^*[V]$. $T^*[V]$ называется *образом подмногообразия V на многообразии U^** и обладает следующими свойствами:

(I) Каждая изолированная компонента многообразия $T^*[V]$ отвечает V.

(II) Любое неприводимое подмногообразие на U^*, отвечающее V, содержится в многообразии $T^*[V]$.

Наконец, заменяя компоненты многообразия $T^*[V]$ отвечающими им подмногообразиями на U' (и опуская вложенные компоненты), мы получим *образ $T'[V]$ подмногообразия V на многообразии U'*. Резюмируя сказанное, получаем следующую теорему:

Теорема VI. *Если V — любое неприводимое подмногообразие на U, то на многообразии U' существуют подмногообразия $T'\{V\}$ и $T'\{V\}$, соответствующие V и обладающие следующими свойствами*:

(I) *Неприводимое подмногообразие W' на U' отвечает некоторому подмногообразию W, содержащемуся в V, тогда и только тогда, когда W' содержится в $T'\{V\}$.*

(II) *Каждая изолированная компонента многообразия $T'[V]$ отвечает многообразию V, причем любое отвечающее V подмногообразие многообразия U' содержится в $T'[V]$.*

(III) $T'[V] \subseteq T'\{V\}$.

Следствие. *Повторным применением свойства* (III) *мы получаем, что многообразие $T'\{V\}$ состоит из нульмерных подмногообразий многообразия U', отвечающих нульмерным подмногообразиям, лежащим на V.*

Следующая группа теорем основывается на предположении, что кольцо частных $Q(V)$ подмногообразия V целозамкнуто. Первая из этих теорем служит обращением теоремы IV, доказанной без каких-либо ограничений на кольцо $Q(V)$.

Теорема VII. *Пусть V — неприводимое подмногообразие многообразия U, имеющее целозамкнутое кольцо частных. Если подмногообразию V отвечает на U' единственное подмногообразие V', то*:

(I) $Q(V') \subseteq Q(V)$, *причем элементы из $Q(V')$, не являющиеся в этом кольце делителями единицы, не будут делителями единицы и в $Q(V)$.*

(II) *Если $(\eta_0, \ldots, \eta_n)$ — общая точка многообразия U', выбранная в поле Σ, то найдется целое число k, для которого $\eta_i/\eta_k \in Q(V)$ $(i = 0, \ldots, n)$.*

(I) Пусть $\mathfrak{B}$ — любое нормирование поля Σ, центром которого на многообразии U служит V, и пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо этого нормирования. Так как подмногообразие V' является единственным подмногообразием на U', отвечающим V, то V' есть центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U'. Следовательно, $Q(V') \subseteq \mathfrak{R}$, причем каждый элемент кольца $Q(V')$, не являющийся в нем делителем единицы, не будет делителем единицы и в $\mathfrak{R}$ (гл. XVII, § 5, стр. 235). Ввиду того, что кольцо $Q(V)$ целозамкнуто, оно представляет собой пересечение содержащих его колец нормирований поля Σ, имеющих V своим центром на многообразии U (гл. XVII, § 5, теорема X). Но так как кольцо $Q(V')$ содержится во всех этих кольцах нормирований, то мы имеем $Q(V') \subseteq Q(V)$. Кроме того, любой элемент α из $Q(V')$, не являющийся в кольце $Q(V)$ делителем единицы, не будет делителем единицы и в $\mathfrak{R}$, а значит, и в кольце $Q(V)$, что и нужно.

(II) В силу (I), $Q(V) \subseteq Q(V)$. Выберем теперь k так, чтобы было $y_k \neq 0$ на многообразии V'. Тогда

$$\eta_i/\eta_k \in Q(V') \subseteq Q(V) \qquad (i = 0, \ldots, n).$$

Следствие. *Пусть η — любой элемент поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а x' — произвольная точка многообразия U, являющаяся общей точкой некоторого подмногообразия V, кольцо частных которого целозамкнуто. Если специализации $\xi \to x'$ соответствует однозначно определенная конечная собственная специализация элемента η, то имеет место соотношение $\eta = \alpha(\xi)/\beta(\xi)$, в котором $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ принадлежат кольцу $K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ и $\beta(x') \neq 0$.*

Возьмем в качестве U' многообразие с общей точкой $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$. Многообразие U' бирационально эквивалентно многообразию U, причем в естественном соответствии между ними точке x' отвечает единственная точка $(x_1', \ldots, x_n', y')$ многообразия U'. Отсюда вытекает, что существует лишь единственное подмногообразие V' на U', отвечающее подмногообразию V, причем $Q(V') \subseteq Q(V)$. Но тогда $\eta \in Q(V') \subseteq Q(V)$, а следовательно, $\eta = \alpha(\xi)/\beta(\xi)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ лежат в кольце $K[x_1, \ldots, x_n]$ и $\beta(x)$ не обращается в нуль на V. Так как x' есть общая точка для V, то отсюда вытекает, что $\beta(x') \neq 0$.

Теорема VIII. *Если V — неприводимое подмногообразие на U, а кольцо $Q(V)$ целозамкнуто и если существует сечение многообразия U' гиперплоскостью, не содержащее подмногообразий, отвечающих V, то на U' существует лишь одно подмногообразие, отвечающее V.*

Без ограничения общности можно считать координатную систему в пространстве S_n' выбранной так, чтобы ни одно из подмногообразий многообразия U', отвечающих подмногообразию V, не лежало на гиперплоскости $y_k = 0$. В таком случае, если $\mathfrak{B}$ — любое нормирование поля Σ, имеющее V своим центром на многообразии U, то $\mathfrak{B}$ будет иметь центр на многообразии U', не лежащий на гиперплоскости $y_k = 0$. Следовательно, кольцо нормирования $\mathfrak{B}$ будет содержать $\mathfrak{J}_k'$. Так как $Q(V)$ есть пересечение колец нормирования поля Σ, имеющих V своим центром на U, отсюда вытекает, что $\mathfrak{J}_k' \subseteq Q(V)$. Пусть теперь $\mathfrak{P}$ — максимальный идеал кольца $Q(V)$, а $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}_k' \cap \mathfrak{P}$. Идеал $\mathfrak{P}'$ кольца $\mathfrak{J}_k'$ определяет некоторое неприводимое подмногообразие V' на U'. Если ζ — элемент из $Q(V')$, то мы можем записать его в виде $\zeta = \alpha/\beta$, где α и β лежат в $\mathfrak{J}_k'$ и β не содержится в $\mathfrak{P}'$. Так как $\mathfrak{J}_k' \subseteq Q(V)$ и $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}_k' \cap \mathfrak{P}$, то α и β принадлежат $Q(V)$, причем β является делителем единицы этого кольца. Поэтому элемент $\zeta = \alpha/\beta$ также принадлежит $Q(V)$. ζ не будет делителем единицы кольца $Q(V')$ тогда и только тогда, когда α принадлежит $\mathfrak{P}'$, а значит, и $\mathfrak{P}$. Следовательно, ζ не будет делителем единицы кольца $Q(V')$ тогда и только тогда, когда он не является делителем единицы в $Q(V)$. Таким образом, $Q(V') \subseteq Q(V)$, и каждый элемент из $Q(V')$, не являющийся в этом кольце делителем единицы, не будет делителем единицы в $Q(V)$. Отсюда вытекает,

что V' есть единственное подмногообразие на U', отвечающее V (теорема IV).

Следствие. *Если кольцо $Q(V)$ целозамкнуто и число подмногообразий многообразия U', отвечающих подмногообразию V, конечно, то существует лишь одно подмногообразие, отвечающее V.*

Это следует из предыдущей теоремы, если заметить, что при наличии лишь конечного числа подмногообразий, отвечающих V, можно найти сечение многообразия U' гиперплоскостью, вовсе не содержащее таких подмногообразий.

Теоремы VII и VIII показывают, что при рассмотрении неприводимых подмногообразий V на многообразии U, кольца частных которых целозамкнуты, можно получить более точные результаты, чем в общем случае. В частности, можно ожидать дальнейшего уточнения наших результатов в случае проективно нормальных многообразий U и U', когда кольца частных всех подмногообразий многообразий U и U' целозамкнуты. Этот случай мы рассмотрим систематически в следующем параграфе. Пока же введем важную классификацию неприводимых подмногообразий на U (или на U'), имеющих целозамкнутые кольца частных. Пусть V — неприводимое подмногообразие многообразия U, имеющее целозамкнутое кольцо частных. В силу теоремы II, на многообразии U' имеется по меньшей мере одно подмногообразие V', отвечающее подмногообразию V в соответствии Γ.

Подмногообразие V называется *регулярным в соответствии* Γ, если на многообразии U' имеется подмногообразие V', отвечающее V и такое, что $Q(V') = Q(V)$. В силу теоремы IV, в таком случае V' является единственным подмногообразием на U', отвечающим V, и $\dim V' = \dim V$. При этом кольцо частных $Q(V')$ подмногообразия V', совпадающее с $Q(V)$, также целозамкнуто, а значит, подмногообразие V' также регулярно в соответствии Γ.

Подмногообразие V называется *иррегулярным в соответствии* Γ, если на многообразии U' существует подмногообразие V', отвечающее V и такое, что $Q(V') \subset Q(V)$. Пусть $\mathfrak{B}$ — любое нормирование поля Σ, имеющее подмногообразия V и V' своими центрами на U и на U'. Если $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, то любой элемент из $Q(V')$, не являющийся в $Q(V')$ делителем единицы, не будет делителем единицы и в $\mathfrak{R}$, а значит, не будет делителем единицы и в $Q(V)$. Отсюда, в силу теоремы V, вытекает, что V' есть единственное подмногообразие на U', отвечающее V, и что $\dim V' \leqslant \dim V$. Из теоремы VII следует, что если на многообразии U' имеется лишь одно подмногообразие, отвечающее V, то подмногообразие V будет регулярным или иррегулярным.

Подмногообразие V называется *фундаментальным в соответствии* Γ, если на многообразии U' существует подмногообразие V', отвечающее V и такое, что $Q(V')$ не лежит в $Q(V)$. Из теоремы VIII мы усматриваем, что в таком случае отвечающие V подмногообразия

на U' содержатся в любом сечении последнего многообразия гиперплоскостью, так как в противном случае на многообразии U' имелось бы лишь одно подмногообразие, отвечающее V, а значит, V было бы регулярным или иррегулярным. Отсюда следует, что существует бесконечное множество подмногообразий на U', отвечающих V. Пусть V'' — одно из этих подмногообразий. Если бы было

$$Q(V'') \subseteq Q(V),$$

то V было бы регулярным или иррегулярным и V'' было бы единственным подмногообразием на U', отвечающим V. Следовательно, $Q(V'')$ не лежит в $Q(V)$.

Заметим еще, что если V иррегулярно и если (однозначно определенное) подмногообразие V' многообразия U', отвечающее V, имеет целозамкнутое кольцо частных, то подмногообразие V' будет фундаментальным в рассматриваемом соответствии.

В заключение определим *регулярные бирациональные соответствия*. Пусть соответствие Γ таково, что каждому неприводимому подмногообразию V на U отвечает на многообразии U' такое подмногообразие V', что

$$Q(V') = Q(V).$$

Тогда V' является единственным подмногообразием на U', отвечающим V, а V — единственным подмногообразием на U, отвечающим V' (теорема IV; отметим, что при этом не требуется целозамкнутости $Q(V)$). В таком случае бирациональное соответствие Γ называется *регулярным*. Если соответствие Γ регулярно, то каждому неприводимому подмногообразию на U (или на U') отвечает единственное неприводимое подмногообразие на U' (или на U). Хотя это определение не требует нормальности многообразий U и U', само понятие наиболее полезно именно в случае, когда многообразия U и U' нормальны. Во многих случаях целесообразно отождествлять многообразия, между которыми установлено регулярное бирациональное соответствие, так как неприводимые подмногообразия таких многообразий взаимно однозначно соответствуют друг другу.

§ 2. Бирациональные соответствия между нормальными многообразиями

Прежде чем обращаться к рассмотрению бирациональных соответствий между двумя проективно нормальными многообразиями, рассмотрим бирациональное соответствие между неприводимым многообразием U в пространстве S_m и его производным нормальным многообразием $U^{(\delta)} = U'$ в пространстве S'_n. Здесь δ — характер однородности многообразия (гл. XVI, § 6).

Можно предполагать, что многообразие U не лежит на гиперплоскости $x_0 = 0$. Пусть $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ $(\xi_0 = 1)$ — нормированная

общая точка для U. Обозначим через τ_0 неизвестное над полем функций $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ многообразия U и положим $\tau_i = \tau_0 \xi_i$ $(i = 0, \ldots, m)$. Тогда многообразие U' имеет общую точку $(\omega_0, \ldots, \omega_n)$, координаты ω_i которой принадлежат полю $\Sigma(\tau_0)$ и являются целыми над кольцом $K[\tau_0, \ldots, \tau_m]$. Кроме того, кольцо $K[\omega_0, \ldots, \omega_n]$ целозамкнуто в его поле частных. Будем предполагать еще, что при $i = 1, \ldots, m$ будет $\omega_i = \tau_i^{\partial}$. Конечно, элементы $\tau_0^{\partial}, \ldots, \tau_m^{\partial}$ линейны относительно $\omega_0, \ldots, \omega_n$. В гл. XVI было удобно предполагать, что координаты $\omega_0, \ldots, \omega_n$ линейно независимы над K. Здесь это ограничение не является необходимым, и мы его отбросим. Любой из элементов ω_i удовлетворяет некоторому уравнению

$$\omega_i^{\rho_i} + a_1(\tau)\omega_i^{\rho_i - 1} + \ldots + a_{\rho_i}(\tau) = 0,$$

в котором многочлены $a_i(\tau)$ однородны и имеют степени ∂i относительно $\tau_0, \ldots, \tau_m$. Сделанный выбор координатной системы в пространстве S_n' гарантирует, что линейное подпространство

$$y_i = 0 \quad (i = 0, \ldots, m)$$

не имеет точек пересечения с U'. Следовательно, если V' — любое неприводимое многообразие, содержащееся в U', то существует значение k, не превосходящее m и такое, что многообразие V' не лежит на гиперплоскости $y_k = 0$, а значит, определяется некоторым простым идеалом кольца $\mathfrak{J}_k'$. Поэтому достаточно рассматривать лишь кольца $\mathfrak{J}_k'$ $(k = 0, \ldots, m)$. Так как элементы кольца $K[\omega_0, \ldots, \omega_n]$ являются целыми над кольцом $K[\tau_0, \ldots, \tau_m]$, то элементы кольца

$$\mathfrak{J}_k' = K[\omega_0/\omega_k, \ldots, \omega_n/\omega_k]$$

— целые над $K[\tau_0/\tau_k, \ldots, \tau_m/\tau_k] = \mathfrak{J}_k$. Но так как кольца $\mathfrak{J}_k'$ целозамкнуты (гл. XVI, § 6, теорема III), то $\mathfrak{J}_k'$ являются целыми замыканиями колец $\mathfrak{J}_k$.

Пусть V' — неприводимое подмногообразие на U'. Выберем k $(k \leqslant m)$ так, чтобы V' не лежало на гиперплоскости $y_k = 0$. В силу теоремы V § 1, на многообразии U имеется единственное подмногообразие V, отвечающее V'. Следовательно, каждому неприводимому подмногообразию многообразия U' отвечает единственное подмногообразие на U. Рассмотрим теперь любое неприводимое подмногообразие V на U и предположим, что V не лежит на гиперплоскости $x_k = 0$. Если $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, имеющее V своим центром на многообразии U, и $\mathfrak{R}$ — кольцо этого нормирования, то $\mathfrak{J}_k \subseteq \mathfrak{R}$. Но кольцо $\mathfrak{J}_k'$ является целым замыканием кольца $\mathfrak{J}_k$, а кольцо $\mathfrak{R}$ целозамкнуто (гл. XVII, § 2, теорема IV). Отсюда вытекает, что $\mathfrak{J}_k' \subseteq \mathfrak{R}$, и поэтому центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U' не лежит на гиперплоскости $y_k = 0$. Поэтому подмногообразия на U',

отвечающие многообразию V, определяются простыми идеалами кольца $\mathfrak{J}'_k$, сжимающимися в кольце $\mathfrak{J}_k$ в простой идеал, определяющий многообразие V. Следовательно, каждому многообразию, лежащему на U, отвечает конечное число многообразий на U'. При этом отвечающие друг другу подмногообразия на U и на U' имеют одну и ту же размерность (гл. XVI, § 5, теорема III).

Допустим теперь, что U'' — другое проективно нормальное многообразие в пространстве S''_n, производное для многообразия U и соответствующее характеру однородности ε. Можно считать, что общая точка $(\nu_0, \ldots, \nu_n)$ многообразия U'' выбрана так, чтобы было $\nu_i = \tau_i^{\varepsilon}$ $(i = 0, \ldots, m)$. Тогда каждое кольцо $\mathfrak{J}''_k$ $(k \leqslant m)$ является целым замыканием кольца $\mathfrak{J}_k$ и поэтому совпадает с $\mathfrak{J}'_k$. Отсюда следует, что каждому подмногообразию V' многообразия U', не лежащему на гиперплоскости $y_k = 0$, отвечает единственное подмногообразие V'' на U'', а каждому подмногообразию V'' многообразия U'' — единственное подмногообразие V' на U'. Если при этом V' определяется простым идеалом $\mathfrak{P}'$ кольца $\mathfrak{J}'_k$, то V'' определяется простым идеалом $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}'$ кольца $\mathfrak{J}''_k = \mathfrak{J}'_k$, а значит,

$$Q(V') = Q(V'').$$

Ввиду того, что все это имеет место для каждого значения k, не превышающего m, отсюда вытекает, что бирациональное соответствие между многообразиями U' и U'' регулярно. Тот же результат получается из теоремы II § 6 гл. XVI, из которой следует, что каждому подмногообразию многообразия U' (или U'') соответствует однозначно определенное подмногообразие на U'' (или на U'). Таким образом, на многообразиях U' и U'' нет фундаментальных подмногообразий, а значит, соответствие между U' и U'' регулярно.

Пусть теперь U и U' — два многообразия, между которыми установлено бирациональное соответствие, а $\overline{U}$ и $\overline{U}'$ — их производные нормальные многообразия. Обозначим через V и V' отвечающие друг другу подмногообразия многообразий U и U'. Тогда существует нормирование $\mathfrak{B}$ общего поля функций Σ многообразий U, $\overline{U}$, $\overline{U}'$, U', имеющее на многообразиях U и U' центры V и V'. Обозначим центры этого нормирования на многообразиях $\overline{U}$ и $\overline{U}'$ через $\overline{V}$ и $\overline{V}'$. Тогда многообразия V и $\overline{V}$ отвечают друг другу в бирациональном соответствии между U и $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\overline{V}'$ отвечают друг другу в соответствии между $\overline{U}$ и $\overline{U}'$, и, наконец, $\overline{V}'$ и V' отвечают друг другу в соответствии между $\overline{U}'$ и U'. Наоборот, пусть V, $\overline{V}$, $\overline{V}'$, V' — неприводимые подмногообразия, лежащие соответственно на многообразиях U, $\overline{U}$, $\overline{U}'$, U' и такие, что V и $\overline{V}$ отвечают друг другу в соответствии между U и $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\overline{V}'$ отвечают друг другу в соответствии между $\overline{U}$ и $\overline{U}'$, а $\overline{V}'$ и V' отвечают друг другу в

соответствии между $\overline{U}'$ и U'. Обозначим через $\mathfrak{B}$ нормирование поля Σ, имеющее своими центрами на многообразиях $\overline{U}$ и $\overline{U}'$ соответственно многообразия $\overline{V}$ и $\overline{V}'$. Так как единственным подмногообразием на U, отвечающим $\overline{V}$, является U, а единственным подмногообразием на U', отвечающим $\overline{V}'$, является V', то V и V' будут центрами нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразиях U и U'. Но отсюда следует, что V и V' отвечают друг другу в соответствии между многообразиями U и U', так как нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ имеет многообразия V и V' своими центрами на U и на U'. Таким образом, многообразия, отвечающие заданному многообразию V, лежащему на U, получаются следующим образом: выбирается подмногообразие $\overline{V}$ на $\overline{U}$, отвечающее V, затем подмногообразие $\overline{V}'$ на $\overline{U}'$, отвечающее $\overline{V}$, и, наконец, однозначно определенное подмногообразие V' на U', отвечающее $\overline{V}'$. Поэтому изучение любого бирационального соответствия можно расчленить на изучение соответствий между многообразиями и их производными проективно нормальными многообразиями и соответствий между проективно нормальными многообразиями. Остальная часть этого параграфа посвящена последнему из указанных вопросов.

Пусть U и U' — нормальные многообразия, между которыми установлено бирациональное соответствие Γ, а U^* — многообразие, соединяющее U и U'. Нужно иметь в виду, что многообразие U^* не обязательно будет нормальным. Так как многообразия U и U' нормальны, то кольцо частных любого подмногообразия V, лежащего на U (или V', лежащего на U'), будет целозамкнутым. Следовательно, каждое неприводимое подмногообразие, лежащее на U (или на U'), необходимо будет либо регулярным, либо иррегулярным, либо фундаментальным в соответствии Γ.

Теорема 1. *Если подмногообразие V регулярно или иррегулярно в соответствии Γ, то оно будет регулярным в соответствии между U и U^*. Если же V является фундаментальным в соответствии Γ, то оно будет фундаментальным и в соответствии между многообразиями U и U^*.*

Если V регулярно или иррегулярно, то на многообразии U' существует лишь одно многообразие V', отвечающее V, причем $Q(V') \subseteq Q(V)$ (стр. 260). Пусть $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, имеющее V и V' своими центрами на многообразиях U и U'. Обозначим через V^* центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U^*. Можно предполагать, что V^* не лежит в гиперплоскости $z_{hk} = 0$. В таком случае V не лежит в гиперплоскости $x_h = 0$, а V' — в гиперплоскости $y_k = 0$. Многообразие V^* определяется некоторым простым идеалом $\mathfrak{P}^*$ кольца $\mathfrak{I}^*_{hk}$. Кроме того,

$$\mathfrak{I}_h \subseteq Q(V), \quad \mathfrak{I}'_k \subseteq Q(V') \subseteq Q(V),$$

Так как кольцо $\mathfrak{J}^*_{hk}$ является объединением колец $\mathfrak{J}_h$ и $\mathfrak{J}'_k$, то любой элемент α^* из $\mathfrak{J}^*_{hk}$ можно записать в виде

$$\alpha^* = \alpha_1\alpha'_1 + \ldots + \alpha_r\alpha'_r,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ принадлежат кольцу $\mathfrak{J}_h$, а значит, и кольцу $Q(V)$, а $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r$ — элементы из $\mathfrak{J}'_k$, также принадлежащие $Q(V)$. Следовательно, α^* содержится в $Q(V)$, т. е. имеет место включение $\mathfrak{J}^*_{hk} \subseteq Q(V)$. Элемент α^* будет принадлежать идеалу $\mathfrak{P}^*$ в том и только в том случае, если его норма в нормировании $\mathfrak{B}$ положительна. Но так как V есть центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U, это будет в том и только в том случае, если α^* не является делителем единицы кольца $Q(V)$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{J}^*_{hk\mathfrak{P}^*} = Q(V^*) \subseteq Q(V)$. Но, в силу теоремы V § 1 и в силу включения $\mathfrak{J}_h \subseteq \mathfrak{J}^*_{hk}$, мы имеем $Q(V) \subseteq Q(V^*)$. Следовательно, $Q(V) = Q(V^*)$, и поэтому подмногообразие V в соответствии между U и U^* будет регулярным.

С другой стороны, если V является фундаментальным в соответствии Γ, то V не может быть в соответствии между U и U^* регулярным или иррегулярным. Действительно, если бы это было так, то на многообразии U^* имелось бы единственное подмногообразие V^*, отвечающее V. Но так как каждое подмногообразие V^* многообразия U^* однозначно определяет отвечающее ему подмногообразие V' на U', то V' было бы единственным подмногообразием на U', отвечающим V. А так как V является фундаментальным в соответствии Γ, то таких подмногообразий бесконечно много. Полученное противоречие показывает, что V должно быть фундаментальным подмногообразием в соответствии между многообразиями U и U^*.

Теорема II. *Если на многообразии U' нет фундаментальных подмногообразий и если V — фундаментальное подмногообразие на U, имеющее размерность ρ, то хотя бы одна компонента многообразия $T[V]$ имеет размерность, большую ρ, причем размерности всех остальных компонент $T[V]$ не ниже ρ.*

Так как на многообразии U' нет фундаментальных подмногообразий, то любое неприводимое подмногообразие V' на U' регулярно или иррегулярно, а значит, на U имеется лишь одно подмногообразие, отвечающее V', причем размерность этого подмногообразия не превышает размерности V'. Поэтому, если подмногообразие V' на U' отвечает подмногообразию V, то должно быть $\dim V' \geqslant \rho$. Но так как каждая компонента многообразия $T[V]$ отвечает V, то все компоненты $T[V]$ имеют размерности, не меньшие ρ. Если бы все компоненты многообразия $T[V]$ имели размерность ρ, то ими исчерпывались бы все подмногообразия на U', отвечающие V. Ввиду того, что число компонент многообразия $T[V]$ конечно, отсюда, в силу следствия теоремы VIII § 1, вытекало бы, что многообразие $T[V]$ имеет лишь одну компоненту, являющуюся единственным

подмногообразием на U', отвечающим V. Но это означало бы, что подмногообразие V не является фундаментальным. Тем самым теорема доказана.

Зарисский доказал более сильную теорему о том, что при условиях теоремы II *все* компоненты многообразия $T[V]$ имеют размерности, большие ρ (см. библиографические замечания в конце книги).

Теорема III. *Если V — фундаментальное подмногообразие на U в соответствии* Γ, *то любое нульмерное неприводимое подмногообразие, лежащее на V, также будет фундаментальным.*

Пусть $\overline{U}^*$ — производное нормальное многообразие для многообразия U^*. Рассмотрим бирациональное соответствие между многообразиями U и $\overline{U}^*$. Пусть $\overline{W}^*$ — любое неприводимое подмногообразие на $\overline{U}^*$. Оно отвечает единственному подмногообразию W^* многообразия U^*, а W^*, в свою очередь, определяет единственное подмногообразие W на U. Следовательно, $\overline{W}^*$ не будет фундаментальным на многообразии $\overline{U}^*$, так что последнее многообразие вообще не содержит фундаментальных подмногообразий. Рассмотрим теперь подмногообразия на U, являющиеся фундаментальными в соответствии между U и $\overline{U}^*$. Если W является фундаментальным подмногообразием в этом соответствии, то из теоремы II следует, что ему на многообразии $\overline{U}^*$ отвечает некоторое подмногообразие $\overline{W}^*$, такое, что $\dim \overline{W}^* > \dim W$. Многообразие $\overline{W}^*$ определяет единственное многообразие W^* на U^*, отвечающее W в соответствии между U и U^*. При этом $\dim W^* = \dim \overline{W}^*$. Мы знаем, что $Q(W^*) \supseteq Q(W)$ и что эти кольца совпадают лишь в случае, если $\dim W = \dim W^*$. Следовательно, $Q(W^*) \supset Q(W)$, а значит, подмногообразие W является фундаментальным в соответствии между U и U^*. Но отсюда, в силу теоремы I, следует, что W есть фундаментальное подмногообразие в соответствии Γ. Обратно, если подмногообразие W является фундаментальным в соответствии Γ, то оно будет фундаментальным и в соответствии между U и U^*. Поэтому, если W^* — подмногообразие на U^*, отвечающее W, то $Q(W^*)$ не лежит в $Q(W)$. Пусть теперь $\overline{W}^*$ — любое подмногообразие на $\overline{U}^*$, отвечающее W^*. Тогда $Q(\overline{W}^*) \supseteq Q(W^*)$, а значит, $Q(\overline{W}^*)$ не содержится в $Q(W)$. Но так как подмногообразие $\overline{W}^*$ отвечает W, то отсюда следует, что W есть фундаментальное подмногообразие в соответствии между U и $\overline{U}^*$. Таким образом, фундаментальными подмногообразиями на многообразии U в соответствии Γ будут те и только те подмногообразия U, которые являются фундаментальными в соответствии между U и $\overline{U}^*$. Следовательно, нашу теорему достаточно доказать для соответствия между U и $\overline{U}^*$ или, что равносильно, для соответствия Γ, в котором отсутствуют фундаментальные подмногообразия на U'. Но в таком случае можно воспользоваться теоремой II.

Так как подмногообразие V является фундаментальным в соответствии Γ и так как на многообразии U' фундаментальные подмногообразия отсутствуют, то из теоремы II следует, что на U' имеется подмногообразие V', отвечающее V и имеющее размерность, большую чем размерность V. Пусть размерность V равна ρ, а размерность V' равна $\rho'(\rho' > \rho)$. Так как V и V' отвечают друг другу в соответствии Γ, между V и V' можно установить такое неприводимое соответствие Δ, что любая пара точек, отвечающих друг другу в соответствии Δ, будет парой отвечающих друг другу точек и в соответствии Γ. При этом размерность σ соответствия Δ не может быть меньше ρ'. Но в таком соответствии, в силу принципа счета констант, общей точке многообразия V отвечает многообразие размерности $\sigma - \rho$. Следовательно, каждой точке многообразия V отвечает подмногообразие, размерность которого не меньше $\sigma - \rho$. Поэтому и каждому подмногообразию W размерности нуль, содержащемуся в V, будет отвечать в соответствии Δ (а поэтому и в Γ) подмногообразие W' размерности, не меньшей $\sigma - \rho > 0$. Но так как $\dim W' > \dim W$, то подмногообразие W должно быть фундаментальным в соответствии Γ.

Выясним теперь, как находить подмногообразия на U, являющиеся фундаментальными в бирациональном соответствии Γ. Удобно предположить, что система координат в пространстве S_n выбрана так, что многообразие U' не лежит ни на одной гиперплоскости $y_k = 0$. Если

$$\frac{\eta_i}{\eta_k} = \frac{\varphi_i(\xi_0, \ldots, \xi_m)}{\varphi_k(\xi_0, \ldots, \xi_m)} \quad (i = 0, \ldots, n)$$

— уравнения, получающиеся после отождествления полей функций для многообразий U и U', то ни один из однородных многочленов $\varphi_i(x_0, \ldots, x_m)$ не обращается в нуль на многообразии U. В таком случае пересечение U с гиперповерхностью

$$\varphi_i(x_0, \ldots, x_m) = 0$$

является чисто $(d-1)$-мерным многообразием, которое мы обозначим через A_i. Многообразия $A_0, \ldots, A_n$ могут иметь общие компоненты. Мы положим

$$A_i = B + C_i \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

где многообразие B — общее для $A_0, \ldots, A_n$ и ни одна из компонент любого многообразия C_i не будет компонентой всех остальных C_j. Пусть F — пересечение многообразий $C_0, C_1, \ldots, C_n$. Многообразие F необходимо имеет размерность, меньшую $d-1$, и может быть пустым. Мы докажем, что подмногообразие V многообразия U будет фундаментальным тогда и только тогда, когда V содержится в F.

Найдем идеал кольца $\mathfrak{Z}_h$, определяющий ту часть многообразия F, которая не лежит на гиперплоскости $x_h = 0$. Так как многообразие U

предполагается проективно нормальным, то $\mathfrak{J}_h = K[\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h]$ целозамкнуто. Поэтому можно воспользоваться мультипликативной теорией идеалов (гл. XV, § 7). Пусть

$$\mathfrak{i}_r = \mathfrak{J}_h \cdot (\varphi_r(\xi_0/\xi_h, \ldots, \xi_m/\xi_h)) \qquad (l = 0, \ldots, n).$$

Идеал $\mathfrak{i}_r$ определяет часть многообразия A_r, не лежащую на гиперплоскости $x_h = 0$. Пусть $\mathfrak{M}$ — общий наибольший квазиделитель идеалов $\mathfrak{i}_0, \ldots, \mathfrak{i}_n$, и пусть

$$\mathfrak{i}_r \sim \mathfrak{M}\mathfrak{A}_r.$$

Подмногообразие на U, определяемое идеалом $\mathfrak{M}$, является чисто $(d-1)$-мерным (если только $\mathfrak{M}$ не равен 1), так как все простые квазиделители идеалов $\mathfrak{i}_r$ не являются квазиравными 1 и поэтому определяют неприводимые подмногообразия размерности $d-1$ (гл. XVI, § 5). Следовательно, многообразие, определяемое идеалом $\mathfrak{M}$, содержится в B. Наоборот, если B' — некоторая изолированная неприводимая компонента многообразия B [а значит, чисто $(d-1)$-мерное многообразие], не лежащая на гиперплоскости $x_h = 0$, и $\mathfrak{P}'$ — простой идеал кольца $\mathfrak{J}_h$, определяющий многообразие B', то $\mathfrak{i}_r \geqslant \mathfrak{P}'$, и поэтому $\mathfrak{P}'$ является квазиделителем всех $\mathfrak{i}_r$, а значит, и квазиделителем $\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что идеал $\mathfrak{M}$ определяет ту часть многообразия B, которая не лежит на гиперплоскости $x_h = 0$, а идеалы $\mathfrak{A}_r$ определяют не лежащие на этой гиперплоскости части многообразий C_r. Таким образом, часть многообразия F, не лежащая на гиперплоскости $x_h = 0$, определяется идеалом

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n).$$

Пусть V — любое неприводимое подмногообразие на U, не лежащее на гиперплоскости $x_h = 0$, а $\mathfrak{P}$ — простой идеал многообразия V в кольце $\mathfrak{J}_h$. Предположим сначала, что V не содержится в F. Тогда V не содержится в одном из C_i, например в C_k. Следовательно, $\mathfrak{A}_k \neq 0$ $(\mathfrak{P})$. Если α — элемент из $\mathfrak{A}_k$, не лежащий в $\mathfrak{P}$, то

$$\mathfrak{J}_h \cdot (\gamma) \geqslant \mathfrak{A}_k \quad \text{и} \quad \mathfrak{J}_h \cdot (\eta_i/\eta_k) \sim \mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_k^{-1}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{J}_h \cdot (\alpha\eta_i/\eta_k) \geqslant \mathfrak{A}_i,$$

а значит, идеал $\mathfrak{J}_h \cdot (\alpha\eta_i/\eta_k)$ — целый. Этот идеал содержит элемент $\alpha\eta_i/\eta_k$, и поэтому $\alpha\eta_i/\eta_k = \beta_i$, где $\beta_i \in \mathfrak{J}_h$. Но так как $\alpha \neq 0$ $(\mathfrak{P})$, то

$$\frac{\eta_i}{\eta_k} = \frac{\beta_i}{\alpha} \in Q(V) \quad (i = 0, \ldots, n).$$

Теперь из теоремы IV § 1 следует, что многообразие V имеет однозначно определенный образ на U', а значит, не будет фундаментальным. Таким образом, если V не содержится в F, то оно не является фундаментальным подмногообразием.

Предположим, с другой стороны, что V не является фундаментальным подмногообразием в соответствии Г. Тогда существует такое

целое число k, при котором отношения η_i/η_k принадлежат кольцу $Q(V)$ (§ 1, теорема VII), т. е. $\eta_i/\eta_k = \beta_{ik}/\gamma_{ik}$, где β_{ik} и γ_{ik} принадлежат $\mathfrak{J}_h$, причем γ_{ik} не содержатся в $\mathfrak{P}$ при $i = 0, \ldots, n$. Но так как идеал $\mathfrak{P}$ — простой, то произведение

$$\alpha_k = \gamma_{0k} \cdots \gamma_{nk}$$

также не принадлежит $\mathfrak{P}$, а значит,

$$\frac{\eta_i}{\eta_k} = \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \qquad (i = 0, \ldots, n),$$

где α_k не принадлежит $\mathfrak{P}$, а $\alpha_i = \beta_{ik} \prod_{j \neq i} \gamma_{jk}$. В таком случае

$$\mathfrak{J}_h \cdot (\alpha_i/\alpha_k) \sim \mathfrak{J}_h \cdot (\eta_i/\eta_k) \sim \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k^{-1},$$

т. е.

$$\mathfrak{A}_k \mathfrak{J}_h \cdot (\alpha_i) \sim \mathfrak{A}_i \mathfrak{J}_h \cdot (\alpha_k) \qquad (i = 0, \ldots, n), \tag{1}$$

и

$$\mathfrak{J}_h \cdot (\alpha_k) \neq 0 \qquad (\mathfrak{P}).$$

Если

$$\mathfrak{J}_h \cdot (\alpha_k) \sim \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_s,$$

где $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ — минимальные простые идеалы, то многообразие на U, определяемое главным идеалом $\mathfrak{J}_h \cdot (\alpha_k)$, является суммой неприводимых многообразий, определяемых идеалами $\mathfrak{P}_j$. Так как эти многообразия не содержат многообразия V, то

$$\mathfrak{P}_j \neq 0 \quad (\mathfrak{P}) \qquad (j = 1, \ldots, s). \tag{2}$$

Ввиду того, что идеалы $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ не имеют общих квазиделителей, из (1) следует, что каждый квазиделитель идеала $\mathfrak{A}_k$ будет квазиделителем $\mathfrak{J}_h \cdot (\alpha_k)$. Из (2) вытекает теперь, что чисто $(d-1)$-мерное многообразие C_k, определяемое идеалом $\mathfrak{A}_k$, не содержит V. Следовательно, V не содержится в многообразии F. Таким образом, мы получили следующую теорему:

Теорема IV. *Если на многообразии U имеются подмногообразия, являющиеся фундаментальными в соответствии* Γ, *то они все лежат на многообразии F, размерность которого не превышает $d-2$. Неприводимое подмногообразие V на многообразии U тогда и только тогда является фундаментальным в соответствии* Γ, *когда V содержится в F.*

Многообразие F называется *фундаментальным комплексом* многообразия U.

Обозначим через $T\{F\}$ сумму полных образов всех изолированных компонент многообразия F. Очевидно, что эта сумма является алгебраическим многообразием на U'. Если V' — любое неприводимое подмногообразие на $T'\{F\}$, то ему отвечает на многообразии U подмногообразие V, содержащееся в F. Поэтому подмногообразие V должно быть фундаментальным на U, так что $Q(V')$ не содержится

в $Q(V)$. Отсюда следует, что подмногообразие V' должно быть либо фундаментальным, либо иррегулярным на U'. С другой стороны, если V' — подмногообразие на U', иррегулярное в соответствии Г, то ему на многообразии U отвечает единственное подмногообразие V, причем $Q(V) \subset Q(V')$. Поэтому подмногообразие V должно быть фундаментальным на U, а значит, V' содержится в $T'\{F\}$. Этим доказана

Теорема V. *Если F — фундаментальный комплекс на многообразии U, а $T'\{F\}$ — его полный образ на U', то любое иррегулярное подмногообразие на U' содержится в $T'\{F\}$, причем любое неприводимое подмногообразие на $T'\{F\}$ является либо иррегулярным, либо фундаментальным в соответствии* Г.

С помощью двух последних теорем можно найти все иррегулярные и фундаментальные подмногообразия на многообразиях U и U'.

Непосредственными следствиями теоремы IV являются следующие теоремы:

Теорема VI. *Любое бирациональное соответствие между проективно нормальными кривыми регулярно.*

Теорема VII. *На проективно нормальных поверхностях, находящихся в бирациональном соответствии, может существовать лишь конечное число фундаментальных подмногообразий размерности нуль. Фундаментальных кривых нет ни на одной из поверхностей.*

Параграфы 1 и 2 представляют собой сводку методов, применяемых в теории бирациональных соответствий. В следующем параграфе мы рассмотрим один специальный класс бирациональных преобразований, называемых *моноидными* преобразованиями. Значение таких преобразований состоит в том, что они часто применяются в геометрических исследованиях в случаях, когда необходимо преобразовать заданное подмногообразие V некоторого многообразия U в подмногообразие на U', имеющее более высокую размерность, чем V. Моноидные преобразования являются рабочим инструментом в применениях бирациональных преобразований к конкретным многообразиям.

§ 3. Моноидные преобразования

Пусть U — неприводимое многообразие размерности d в пространстве S_n, а $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$ — его общая точка. Без ограничения общности можно предполагать, что U не лежит на гиперплоскости $x_h = 0$ при любом значении h и поэтому $\xi_h \neq 0$. В частности, можно считать, что точка ξ нормирована и поэтому $\xi_0 = 1$. Будем предполагать также, что многообразие U нормально.

Пусть C — любое подмногообразие на U, имеющее размерность, не превышающую $d-2$, и пусть ν — целое число, обладающее тем свойством, что существуют по крайней мере две формы $f(x)$, $g(x)$ степени ν, обращающиеся в нуль на C и такие, что значения $f(\xi)$ и $g(\xi)$ линейно независимы над K. Обозначим через $\varphi_0^{(\nu)}(x), \ldots, \varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(x)$

систему форм степени ν, обращающихся в нуль на C и обладающих следующими свойствами:

(а) значения $\varphi_0^{(\nu)}(\xi), \ldots, \varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(\xi)$ линейно независимы над K;

(б) если $f(x)$ — любая форма степени ν, обращающаяся в нуль на C, то в поле K существуют такие элементы $a_0, \ldots, a_{r_\nu}$, что

$$f(\xi) = a_0\varphi_0^{(\nu)}(\xi) + \ldots + a_{r_\nu}\varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(\xi).$$

Рассмотрим неприводимое многообразие в пространстве S_{r_ν}, имеющее общую точку $(\varphi_0^{(\nu)}(\xi), \ldots, \varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(\xi))$. Обозначим это многообразие через $U^{(\nu)}$. Ясно, что если многообразие $U^{(\nu)}$ существует, то существует и многообразие $U^{(\nu)}$ при любом значении ν', большем ν. Многообразия $U^{(\nu)}$ при различных значениях ν могут не быть бирационально эквивалентными. Если же они бирационально эквивалентны, то соответствие между ними может не быть регулярным. Непосредственно очевидно, однако, что поле функций любого многообразия $U^{(\nu)}$ изоморфно подполю поля функций Σ многообразия U. Действительно, так как, по условию, значение $\varphi_0^{(\nu)}(\xi)$ отлично от нуля, то поле функций для $U^{(\nu)}$ изоморфно полю

$$\Sigma^{(\nu)} = K(\varphi_1^{(\nu)}(\xi)/\varphi_0^{(\nu)}(\xi), \ldots, \varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(\xi)/\varphi_0^{(\nu)}(\xi)) \subseteq K(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Можно показать, далее, что найдется такое целое число a, что при ν и ν', больших a, многообразия $U^{(\nu)}$ и $U^{(\nu')}$ бирационально эквивалентны многообразию U и находятся в регулярном соответствии друг с другом. Покажем прежде всего, что если $U^{(\nu)}$ существует, то многообразие $U^{(\nu+1)}$ бирационально эквивалентно многообразию U. Из этого следует непосредственно, что многообразия $U^{(\nu')}$ при $\nu' > \nu$ также бирационально эквивалентны U. Допустим, что $U^{(\nu)}$ существует. Тогда $\varphi_0^{(\nu)}(\xi)$ существует и отлично от нуля. В силу свойства (б) форм $\varphi_i^{(\nu+1)}(\xi)$, мы имеем

$$\xi_i\varphi_0^{(\nu)}(\xi) = \sum_j a_{ij}\varphi_j^{(\nu+1)}(\xi) \qquad (a_{ij} \in K),$$

и поэтому

$$\xi_i = \frac{\xi_i}{\xi_0} = \frac{\sum_j a_{ij}\varphi_j^{(\nu+1)}(\xi)}{\sum_j a_{0j}\varphi_j^{(\nu+1)}(\xi)} \subseteq K\left(\frac{\varphi_1^{(\nu+1)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu+1)}(\xi)}, \ldots, \frac{\varphi_{r_{\nu+1}}^{(\nu+1)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu+1)}(\xi)}\right) = \Sigma^{(\nu+1)}.$$

Следовательно,

$$\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n) \subseteq \Sigma^{(\nu+1)}.$$

Но так как уже доказано, что $\Sigma^{(\nu+1)} \subseteq \Sigma$, отсюда следует, что $\Sigma = \Sigma^{(\nu+1)}$, т. е. что многообразие $U^{(\nu+1)}$ бирационально эквивалентно многообразию U.

Покажем теперь, что при достаточно большом ν многообразие $U^{(\nu+1)}$ является связывающим многообразием для U и $U^{(\nu)}$. Пусть

$$f_i(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

— базис уравнений многообразия C. Если a_i — степени форм $f_i(x)$, то положим $a = \max[a_1, \ldots, a_r]$. Так как многообразие C имеет размерность, не превышающую $d-2$, то по меньшей мере два из значений $f_i(\xi)$ отличны от нуля. Отсюда следует, что многообразие $U^{(a)}$ определено. Пусть $X_j^{(\rho)}(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — все различные произведения неизвестных x_h, имеющие степень ρ. Тогда, если $\nu \geqslant a$, то формы $X_j^{(\nu-a_i)}(x) f_i(x)$ обращаются в нуль на C и имеют степень ν. Следовательно, должно быть

$$X_j^{(\nu-a_i)}(\xi) f_i(\xi) = \sum b_{ijk} \varphi_k^{(\nu)}(\xi),$$

где $b_{ijk} \in K$. Но, по условию,

$$\varphi_i^{(\nu+1)}(x) = \sum_{j,\,k} \alpha_{ijk} X_k^{(\nu+1-a_j)}(x) f_j(x) \qquad (\alpha_{ijk} \in K),$$

а значит,

$$\varphi_i^{(\nu+1)}(\xi) = \sum \beta_{ijk} \xi_j \varphi_k^{(\nu)}(\xi) \qquad (\beta_{ijk} \in K).$$

Кроме того, так как формы $x_j \varphi_k^{(\nu)}(x)$ обращаются в нуль на C и имеют степень $\nu+1$, то

$$\xi_j \varphi_k^{(\nu)}(\xi) = \sum \gamma_{ijk} \varphi_i^{(\nu+1)}(\xi) \qquad (\gamma_{ijk} \in K).$$

Соединяющее многообразие для U и $U^{(\nu)}$ имеет общую точку $(\ldots, \xi_i \varphi_j^{(\nu)}(\xi), \ldots)$. Следовательно, многообразие $U^{(\nu+1)}$ проективно эквивалентно соединяющему многообразию для многообразий U и $U^{(\nu)}$. В силу теоремы V § 1, каждому неприводимому подмногообразию $V^{(\nu+1)}$ многообразия $U^{(\nu+1)}$ соответствует однозначно определенное подмногообразие V на U и однозначно определенное подмногообразие $V^{(\nu)}$ на $U^{(\nu)}$, причем

$$Q(V) \subseteq Q(V^{(\nu+1)}), \quad Q(V^{(\nu)}) \subseteq Q(V^{(\nu+1)}).$$

Это имеет место при $\nu \geqslant a$. Если $\nu > a$, то из сказанного следует, что

$$Q(V) \subseteq Q(V^{(\nu)}).$$

В пространствах S_n, S_{r_ν}, $S_{r_{\nu+1}}$ можно выбрать бесконечно удаленные гиперплоскости, не содержащие многообразий V, $V^{(\nu)}$, $V^{(\nu+1)}$. Кроме того, можно добиться, чтобы области целостности $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}^{(\nu)}$, $\mathfrak{J}^{(\nu+1)}$ многообразий U, $U^{(\nu)}$, $U^{(\nu+1)}$ в полученных аффинных пространствах удовлетворяли условиям $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}^{(\nu)} \subseteq \mathfrak{J}^{(\nu+1)}$ и чтобы область целостности $\mathfrak{J}^{(\nu+1)}$ была объединением $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}^{(\nu)}$, т. е. чтобы было $\mathfrak{J}^{(\nu+1)} = \mathfrak{J}^{(\nu)}$.

Тогда, если $\mathfrak{P}^{(\nu+1)}$ — простой идеал многообразия $V^{(\nu+1)}$ в кольце $\mathfrak{J}^{(\nu+1)}$, то простыми идеалами $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ многообразий V и $V^{(\nu)}$ будут

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}^{(\nu+1)}, \qquad \mathfrak{P}^{(\nu)} = \mathfrak{J}^{(\nu)} \cap \mathfrak{P}^{(\nu+1)} = \mathfrak{P}^{(\nu+1)}.$$

Следовательно,

$$Q(V^{(\nu)}) = \frac{\mathfrak{J}^{(\nu)}}{\mathfrak{P}^{(\nu)}} = \frac{\mathfrak{J}^{(\nu+1)}}{\mathfrak{P}^{(\nu+1)}} = Q(V^{(\nu+1)}).$$

Поэтому каждому неприводимому подмногообразию $V^{(\nu+1)}$ на $U^{(\nu+1)}$ отвечает однозначно определенное подмногообразие $V^{(\nu)}$ на $U^{(\nu)}$. Но так как $Q(V^{(\nu)}) = Q(V^{(\nu+1)})$, то $V^{(\nu+1)}$ должно быть единственным подмногообразием на $U^{(\nu+1)}$, отвечающим $V^{(\nu)}$. Следовательно, соответствие между многообразиями $U^{(\nu+1)}$ и $U^{(\nu)}$ регулярно.

Таким образом, между многообразиями $U^{(a+1)}$, $U^{(a+2)}$, ... существует регулярное бирациональное соответствие. Эти многообразия $U^{(\nu)}$ при $\nu > a$ называются *моноидными образами многообразия U с базисом C*. Справедлива

Теорема I. *Моноидный образ многообразия U с базисом C определен однозначно с точностью до регулярного бирационального преобразования и бирационально эквивалентен U. Каждому неприводимому подмногообразию V' моноидного образа U' многообразия U отвечает единственное подмногообразие V на U, причем имеет место соотношение $Q(V) \subseteq Q(V')$.*

Отбросим теперь обозначение $U^{(\nu)}$ и будем обозначать моноидный образ многообразия U через U'. Если нам понадобится указать степень ν форм, использованных для определения U', то мы будем называть ее *степенью* моноидного образа.

Следует отметить, что моноидный образ U' не обязательно будет нормальным многообразием. Это вызывает незначительные оговорки при использовании результатов §§ 1 и 2, но не приводит к серьезным трудностям. Практически бывает удобно сопровождать процесс построения моноидного образа переходом к его производному нормальному многообразию. Мы, однако, не будем следовать здесь такой практике.

В качестве примера моноидного преобразования рассмотрим преобразование плоскости U с координатами (x_0, x_1, x_2). Пусть C — многообразие, состоящее из точек (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1). Базис для уравнений этого многообразия составляют уравнения

$$x_1x_2 = 0, \quad x_2x_0 = 0, \quad x_0x_1 = 0.$$

Здесь $a = 2$, а многообразие $U^{(2)}$ имеет общую точку $(\xi_1\xi_2, \xi_2\xi_0, \xi_0\xi_1)$ и является плоскостью. $U^{(2)}$ бирационально эквивалентно U, но не является моноидным образом, так как точкам (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1), лежащим на $U^{(2)}$, отвечают соответственно все точки прямых $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Но $U^{(3)} = U'$ уже будет моноидным образом. Это многообразие можно представить в пространстве S_6

многообразием, имеющим общую точку $(\xi_1^2\xi_2,\ \xi_1\xi_2^2,\ \xi_0^2\xi_1,\ \xi_0\xi_1^2,\ \xi_2^2\xi_0,\ \xi_2\xi_0^2,\ \xi_0\xi_1\xi_2)$. Можно показать, что U' представляет собой поверхность шестого порядка. Эта поверхность содержит три прямые

$$(l_1)\quad y_0 = y_1 = y_3 = y_4 = y_6 = 0,$$
$$(l_2)\quad y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = y_6 = 0,$$
$$(l_3)\quad y_0 = y_2 = y_3 = y_5 = y_6 = 0.$$

Любой точке на l_1 однозначно отвечает точка (1, 0, 0) многообразия U. Аналогично, точкам прямых l_2 и l_3 отвечают соответственно точки (0, 1, 0) и (0, 0, 1) на U. Так как U' есть моноидный образ для U, то каждая точка многообразия U' однозначно определяет отвечающую ей точку на U. Читатель может проверить, что любой точке P многообразия U, отличной от точек (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1), отвечает единственная точка P' на U', причем $Q(P) = Q(P')$.

Возвращаясь к общей теории моноидных преобразований, докажем следующую теорему:

Теорема II. *Любое подмногообразие многообразия U является при моноидном преобразовании либо регулярным, либо фундаментальным. Подмногообразие V на U будет фундаментальным в том и только в том случае, если $V \subseteq C$, где C — базис рассматриваемого моноидного преобразования.*

То, что любое подмногообразие на U является либо регулярным, либо фундаментальным, следует из теоремы I, которая гласит также, что на моноидном образе отсутствуют фундаментальные подмногообразия. Так как моноидные образы для U находятся в регулярном соответствии друг с другом, то достаточно рассмотреть здесь лишь моноидные образы достаточно высокой степени ν. Многообразие U' определяется уравнениями

$$y_i = \varphi_i^{(\nu)}(x) \qquad (i = 0,\ \ldots,\ r_\nu).$$

Так как многообразие U нормально, можно воспользоваться методом, примененным для доказательства теоремы IV § 2. Таким образом обнаруживается, что фундаментальный комплекс многообразия U получается удалением компонент размерности $d-1$ из многообразия, определяемого уравнениями

$$\varphi_i^{(\nu)}(x) = 0 \qquad (i = 0,\ \ldots,\ r_\nu).$$

Отсюда следует, что фундаментальным комплексом является C.

Совокупность подмногообразий на моноидном образе U', соответствующих подмногообразиям заданного многообразия V на U, называется полным образом $T\{V\}$ многообразия V. Докажем такую теорему:

Теорема III. *Полный образ $T\{C\}$ базиса C моноидного преобразования является чисто $(d-1)$-мерным многообразием.*

Пусть U' — моноидный образ (с базисом C) многообразия U, имеющий степень ν. Соединяющее многообразие U^* многообразий U и U' проективно эквивалентно моноидному образу многообразия U, имеющему степень $\nu+1$ и поэтому находящемуся в регулярном соответствии с U'. Таким образом, достаточно доказать, что полный образ $T^*\{C\}$ многообразия U^* на C является чисто $(d-1)$-мерным. Ясно, что этот прием оперирования с многообразием U^* вместо U' служит только для упрощения обозначений.

Без ограничения общности можно считать, что x_0 не обращается в нуль ни на одном подмногообразии V многообразия U, отвечающем изолированной компоненте V' многообразия $T\{C\}$. Кроме этого, систему координат $(y_0, \ldots, y_{r_\nu})$ в пространстве S_{r_ν} можно выбрать так, чтобы было $y_0 \neq 0$ на любой компоненте многообразия $T\{C\}$. Тогда, если мы обозначим через $(z_{00}, \ldots, z_{nr_\nu})$ координатную систему в пространстве, содержащем U^*, то общей точкой многообразия U^* будет точка $(\zeta_{00}, \ldots, \zeta_{nr_\nu})$, где

$$\zeta_{ij} = \xi_i \varphi_j^{(\nu)}(\xi).$$

При этом z_{00} не обращается в нуль ни на одной компоненте многообразия $T^*\{C\}$. Как обычно, предположим координаты точки ξ нормированными так, чтобы было $\xi_0 = 1$.

Пусть C^* — подмногообразие на U^*, уравнениями которого являются уравнения U^* и еще уравнения

$$\varphi_i^{(\nu)}(z_{0j}, \ldots, z_{nj}) = 0 \qquad (i, j = 0, \ldots, r_\nu).$$

Докажем прежде всего, что $C^* = T^*\{C\}$.

Пусть V^* — любая изолированная компонента многообразия $T^*\{C\}$, а V и V' — отвечающие ей подмногообразия на U и на U'. Обозначим через $\mathfrak{B}$ любое нормирование, центром которого на многообразии U^* будет V^*. Тогда центрами этого нормирования на многообразиях U и U' будут соответственно подмногообразия V и V'. Так как V не лежит на гиперплоскости $x_0 = 0$, а V' — на гиперплоскости $y_0 = 0$, то мы при всевозможных значениях i и j имеем

$$v(\xi_i) \geqslant 0, \qquad v[\varphi_j^{(\nu)}(\xi)/\varphi_0^{(\nu)}(\xi)] \geqslant 0.$$

Но так как $V \subseteq C$ (по определению $T\{C\}$), то

$$v[\varphi_j^{(\nu)}(\xi)] > 0 \qquad (j = 0, \ldots, r_\nu).$$

В таком случае

$$v[\varphi_i^{(\nu)}(\zeta_{0j}, \ldots, \zeta_{nj})/\zeta_{00}^{\nu}] = v[\varphi_i^{(\nu)}(\xi)\{\varphi_j^{(\nu)}(\xi)/\varphi_0^{(\nu)}(\xi)\}^{\nu}] =$$
$$= v[\varphi_i^{(\nu)}(\xi)] + \nu v[\varphi_j^{(\nu)}(\xi)/\varphi_0^{(\nu)}(\xi)] > 0.$$

Следовательно, формы $\varphi_i^{(\nu)}(z_{0j}, \ldots, z_{nj})$ обращаются в нуль на V^*, и поэтому $V^* \subseteq C^*$. Таким образом, $T^*\{C\} \subseteq C^*$.

Пусть теперь V^* — любое неприводимое подмногообразие, содержащееся в C^*, а $\mathfrak{B}$ — нормирование, центром которого на многообразии U^* является V^*. Если V^* не лежит на гиперплоскости $z_{hk}=0$, то

$$v[\varphi_i^{(\nu)}(\zeta_{0k}, \ldots, \zeta_{nk})/\zeta_{hk}^{\nu}] > 0.$$

Но

$$\varphi_i^{(\nu)}(\zeta_{0k}, \ldots, \zeta_{nk})/\zeta_{hk}^{\nu} = \varphi_i^{(\nu)}(\xi)/\xi_h^{\nu}.$$

Так как $v[\varphi_i^{(\nu)}(\xi)/\xi_h^{\nu}] > 0$, то центр V нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U не лежит на гиперплоскости $x_h=0$ и его точки удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_i^{(\nu)}(x)=0 \qquad (i=0, \ldots, r_\nu).$$

Отсюда вытекает, что $V \subseteq C$, а значит, $V^* \subseteq T^*\{C\}$. Поэтому $C^* \subseteq T^*\{C\}$. Но так как уже показано, что $T^*\{C\} \subseteq C^*$, то

$$C^* = T^*\{C\}.$$

Нам нужно теперь показать, что многообразие C^* является чисто $(d-1)$-мерным. Пусть

$$\Phi_i(z) = \varphi_i^{(\nu)}(z_{0i}, \ldots, z_{ni}) \qquad (i=0, \ldots, r_\nu).$$

Тогда

$$[\varphi_i^{(\nu)}(\zeta_{0j}, \ldots, \zeta_{nj})]^{\nu+1} = [\varphi_i^{(\nu)}(\xi)]^{\nu+1}[\varphi_j^{(\nu)}(\xi)]^{\nu(\nu+1)} = \Phi_i(\zeta)[\Phi_j(\zeta)]^{\nu}.$$

Следовательно, многочлены

$$[\varphi_i^{(\nu)}(z_j, \ldots, z_{nj})]^{\nu+1} - \Phi_i(z)[\Phi_j(z)]^{\nu}$$

обращаются в нуль на U^*, и поэтому многообразие C^*, являющееся пересечением U^* с многообразием, имеющим уравнения

$$\varphi_i^{(\nu)}(z_{0j}, \ldots, z_{nj}) = 0 \qquad (i, j=0, \ldots, r_\nu),$$

будет пересечением U^* с многообразием, определяемым уравнениями

$$\Phi_i(z_{0i}, \ldots, z_{ni}) = 0 \qquad (i=0, \ldots, r_\nu).$$

По построению, ни одна компонента многообразия $C^* = T^*\{C\}$ не лежит на гиперплоскости $z_{00}=0$. Следовательно, C^* есть многообразие, определяемое идеалом $\mathfrak{J}^* \cdot [\Phi_0(\zeta), \ldots, \Phi_{r_\nu}(\zeta)]$ области целостности $\mathfrak{J}^* = K[\zeta_{00}/\zeta_{00}, \ldots, \zeta_{nr_\nu}/\zeta_{00}]$. Но

$$\frac{\Phi_i(\zeta)}{\Phi_0(\zeta)} = \left[\frac{\varphi_i^{(\nu)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu)}(\xi)}\right]^{\nu+1} = \left(\frac{\zeta_{0i}}{\zeta_{00}}\right)^{\nu+1} \in \mathfrak{J}^*.$$

Следовательно, многообразие C^* определяется также главным идеалом $\mathfrak{J}^* \cdot [\Phi_0(\zeta)]$. Но подмногообразие неприводимого алгебраического многообразия размерности d, лежащего в аффинном пространстве, опре-

деляемое главным идеалом, будет чисто $(d-1)$-мерным. Следовательно, $C^* = T^*\{C\}$ — чисто $(d-1)$-мерное многообразие.

Следующая теорема полезна для нахождения образа $T[V]$ неприводимого подмногообразия V многообразия U, т. е. совокупности подмногообразий на U', отвечающих V. В силу теоремы VI § 1, $T[V]$ есть алгебраическое многообразие. Мы докажем, что если U_1 — моноидный образ многообразия U, имеющий базис C_1, и если компоненты многообразия C_1, содержащие V, совпадают с содержащими V компонентами многообразия C, то между подмногообразиями на U' и на U_1, отвечающими V, имеется взаимно однозначное соответствие. При этом, если V' и V_1 — отвечающие друг другу в этом соответствии подмногообразия, то $Q(V') = Q(V_1)$. На основании этой теоремы мы можем при нахождении подмногообразий на U', отвечающих V, опустить компоненты базиса C, не содержащие многообразия V, и рассматривать моноидный образ для U с остающимся после этого базисом. Так как новое моноидное преобразование может быть проще первоначального, то задача нахождения многообразия $T[V]$ соответственно упрощается. Кратко теорема, которую нужно доказать, формулируется так:

Теорема IV. *Подмногообразия на U', отвечающие неприводимому подмногообразию V многообразия U, зависят только от компонент базиса C, содержащих V.*

Пусть V — неприводимое подмногообразие на U, а C_1 — сумма компонент базиса C, содержащих V. Пусть, далее, ν — столь большое целое число, что существуют моноидные образы U' и U_1 многообразия U, имеющие степень ν и базисы C и C_1. Обозначим через $\varphi_i^{(\nu)}(x)$ $(i = 0, \ldots, n_1)$ базис для форм степени ν, обращающихся в нуль на C_1, такой, что формы $\varphi_i^{(\nu)}(x)$ $(i = 0, \ldots, n' < n_1)$ составляют базис для форм, обращающихся в нуль на C. Конечно, базис для форм строится по модулю уравнений многообразия U. Пусть $g(x)$ — любая форма, обращающаяся в нуль на компонентах многообразия C, не проходящих через V, но не обращающаяся в нуль на V.

Рассмотрим любое неприводимое подмногообразие V' на U', отвечающее V, и любое нормирование $\mathfrak{B}$, имеющее многообразия V и V' своими центрами на многообразиях U и U'. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 \neq 0$ на V и $y_0 \neq 0$ на V'. Тогда

$$v(\xi_i) \geqslant 0, \qquad v[\varphi_j^{(\nu)}(\xi)/\varphi_0^{(\nu)}(\xi)] \geqslant 0 \qquad (j = 0, \ldots, n').$$

Но форма $g(x)\varphi_{n'+i}^{(\nu)}(x)$ обращается в нуль на C. Следовательно, мы имеем

$$g(\xi)\varphi_{n'+i}^{(\nu)}(\xi) = \sum_{j=0}^{n'} A_{ij}(\xi)\varphi_j^{(\nu)}(\xi) \qquad (i = 1, \ldots, n_1 - n'),$$

где $A_{ij}(\xi) \in \mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Поэтому

$$\frac{\varphi_{n'+i}^{(\nu)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu)}(\xi)} = \sum_{j=0}^{n'} \frac{A_{ij}(\xi)}{g(\xi)} \frac{\varphi_j^{(\nu)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu)}(\xi)}.$$

Так как форма $g(x)$ не обращается в нуль на V, то элемент $A_{ij}(\xi)/g(\xi)$ содержится в кольце $Q(V)$, которое, в свою очередь, содержится в $Q(V')$ (теорема I), и

$$\varphi_j^{(\nu)}(\xi)/\varphi_0^{(\nu)}(\xi) = \eta_j/\eta_0 \in Q(V').$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi_{n'+i}^{(\nu)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu)}(\xi)} \in Q(V').$$

Поэтому

$$\mathfrak{J}' = K\left[\frac{\varphi_1^{(\nu)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu)}(\xi)}, \ldots, \frac{\varphi_{n'}^{(\nu)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu)}(\xi)}\right] \subseteq \mathfrak{J}_1 = K\left[\frac{\varphi_1^{(\nu)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu)}(\xi)}, \ldots, \frac{\varphi_{n_1}^{(\nu)}(\xi)}{\varphi_0^{(\nu)}(\xi)}\right] \subseteq Q(V').$$

Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Тогда максимальным идеалом кольца $Q(V')$ будет идеал $\mathfrak{P} = Q(V') \cap \mathfrak{p}$, а центр V_1 нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U_1 определяется простым идеалом $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{P}$ кольца $\mathfrak{J}_1$. Идеал $\mathfrak{P}$ определяется одним многообразием V', а поэтому многообразие V' однозначно определяет также идеал $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{P}$. Следовательно, многообразие V_1 однозначно определяется многообразием V'. Само V' определяется идеалом $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{P}_1$ кольца $\mathfrak{J}'$. Так как

$$\mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}_1 \subseteq Q(V')$$

и

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{P},$$

то

$$\mathfrak{J}'_{\mathfrak{P}'} \subseteq \mathfrak{J}_{1\mathfrak{P}_1} \subseteq Q(V')_{\mathfrak{P}'}.$$

Но

$$\mathfrak{J}'_{\mathfrak{P}'} = Q(V') = Q(V')_{\mathfrak{P}'}.$$

Следовательно,

$$Q(V') = \mathfrak{J}_{1\mathfrak{P}_1} = Q(V_1).$$

С другой стороны, пусть V_1 — любое неприводимое подмногообразие на U_1, отвечающее V. Пусть $\mathfrak{B}$ — нормирование, имеющее подмногообразия V и V_1 своими центрами на многообразиях U и U_1. Без ограничения общности можно предполагать формы $\varphi_i^{(\nu)}(x)$ $(i = 0, \ldots, n')$ расположенными так, чтобы было

$$v[\varphi_i^{(\nu)}(\xi)] \geqslant v[\varphi_0^{(\nu)}(\xi)] \qquad (i \leqslant n').$$

Тогда, как и выше, мы получим

$$v[\varphi_i^{(\nu)}(\xi)] \geqslant v[\varphi_0^{(\nu)}(\xi)] \qquad (i = 0, \ldots, n_1),$$

и поэтому кольцо $\mathfrak{J}_1$ лежит в кольце нормирования $\mathfrak{B}$. Следовательно, подмногообразие V_1, являющееся центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U_1, не лежит на гиперплоскости $y_0^{(1)}=0$ и определяется некоторым идеалом $\mathfrak{P}_1$ кольца $\mathfrak{J}_1$. Центр V' нормирования $\mathfrak{B}$ на U' определяется простым идеалом $\mathfrak{J}'\cap\mathfrak{P}_1$, причем можно доказать, как и выше, что $Q(V')=Q(V_1)$. Таким образом, между подмногообразиями многообразий U' и U_1, отвечающими V, имеется взаимно однозначное соответствие. Если V' и V_1 отвечают друг другу в этом соответствии, то $Q(V')=Q(V_1)$.

Следствие. Метод доказательства теоремы IV позволяет доказать одну лемму, которой мы воспользуемся впоследствии. Пусть целое число ν таково, что для многообразия U существует моноидный образ U' степени ν, имеющий базис C. Возьмем $m+1$ форм $\psi_i(x)$ $(i=0, \ldots, m)$ степени ν так, чтобы простые идеалы компонент многообразия C в кольце $\mathfrak{J}=K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ были изолированными компонентами идеала $\mathfrak{i}=\mathfrak{J}\cdot(\psi_0(\xi), \ldots, \psi_m(\xi))$. Обозначим через U_2 многообразие, общей точкой которого будет $(\psi_0(\xi), \ldots, \psi_m(\xi))$, и допустим, что U_2 бирационально эквивалентно многообразиям U и U'. Если V — неприводимое подмногообразие, содержащееся в C, то между подмногообразиями на U' и на U_2, отвечающими V, имеется взаимно однозначное соответствие. Если V' и V_2 отвечают друг другу в этом соответствии, то $Q(V')=Q(V_2)$ при условии, что многообразие V_2 не содержится ни в одной из отличных от компонент C компонент многообразия, определяемого идеалом $\mathfrak{i}$.

Для доказательства этого достаточно лишь выбрать использованный в доказательстве теоремы IV многочлен $g(x)$ так, чтобы сечение многообразия U гиперповерхностью $g(x)=0$ не содержало подмногообразия V, а также компонент многообразия C, и чтобы элемент $g(\xi)\varphi_i^{(\nu)}(\xi)$ принадлежал идеалу $\mathfrak{i}$. После этого применимо доказательство теоремы IV.

Полученные до сих пор в этом параграфе результаты относятся к моноидным преобразованиям многообразия U, имеющим любой базис C, подчиненный лишь тому ограничению, что все компоненты C должны иметь размерность, не превышающую $d-2$. В приложениях моноидных преобразований имеет большое значение случай, когда базис C является неприводимым и простым подмногообразием на U. Теория моноидных преобразований для этого случая может быть развита значительно дальше, чем для моноидных преобразований общего типа. Конец этого параграфа посвящен указанному частному случаю. Результаты, которые ниже будут доказаны, можно суммировать в виде следующей теоремы:

Теорема V. *Пусть U — неприводимое многообразие размерности d, а C — неприводимое многообразие размерности e, $e\leqslant d-2$, лежащее на C и являющееся простым подмногообразием на U. Пусть, далее, U' — моноидный образ многообразия U с базисом C.*

Если V — неприводимое подмногообразие на C, имеющее размерность f и простое как на C, так и на U, то многообразие $T[V]$ неприводимо и является простым подмногообразием как на U', так и на $T[C]$. Размерность многообразия $T[V]$ равна $d-1-e+f$. Любое подмногообразие V' на $T[V]$, отвечающее V, является простым подмногообразием как на $T[V]$, так и на $T[C]$ и на U'.

Если положить $V=C$, то из этой теоремы следует, что многообразие $T[C]$ неприводимо и является простым подмногообразием на U', причем каждое подмногообразие на U', отвечающее C, будет простым как на U', так и на $T[C]$.

Прежде чем доказывать теорему V, установим два предварительных результата, упрощающих доказательство. Покажем сначала, что если теорема верна в случае, когда $f=0$, то она верна и при любом значении f (не превышающем e).

Без ограничения общности можно считать, что x_0 не равно нулю на V, а значит, не равно нулю на C и на U. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал многообразия V в кольце $\mathfrak{J}=K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, а $\mathfrak{P}$ — идеал многообразия C. Так как $\mathfrak{p}$ имеет размерность f, то мы можем считать, опять-таки без ограничения общности, что элементы $\xi_1, \ldots, \xi_f$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{p}$ над полем K. Тогда, в силу включения $\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{p}$, элементы $\xi_1, \ldots, \xi_f$ алгебраически независимы также по модулю $\mathfrak{P}$. Обозначим через Ω поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_f)$, а через $\overline{U}$ многообразие в пространстве A_{n-f} над полем Ω, общей точкой которого является точка $(\xi_{f+1}, \ldots, \xi_n)$. Так как элементы $\xi_1, \ldots, \xi_f$ алгебраически независимы над полем K, то многообразие $\overline{U}$ имеет размерность $d-f$. Введем обозначение $\mathfrak{J}^*=\Omega[\xi_{f+1}, \ldots, \xi_n]$ и рассмотрим идеалы $\mathfrak{p}^*=\mathfrak{J}^*\cdot\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{P}^*=\mathfrak{J}^*\cdot\mathfrak{P}$ в кольце $\mathfrak{J}^*$. Как и в § 4 гл. XVI, можно показать, что эти идеалы просты, а их размерности равны соответственно нулю и $e-f$. Кроме того, если $\overline{V}$ и $\overline{C}$ — неприводимые подмногообразия на $\overline{U}$, определяемые этими идеалами, то их кольца частных $\overline{Q}(\overline{V})$ и $\overline{Q}(\overline{C})$ совпадают соответственно с кольцами $Q(V)$ и $Q(C)$. Поэтому, в частности, $\overline{Q}(\overline{V})\subseteq\overline{Q}(\overline{C})$, а значит, $\overline{V}\subseteq\overline{C}$. Ясно также, что имеют место равенства $\mathfrak{p}=\mathfrak{J}\cap\mathfrak{p}^*$ и $\mathfrak{P}=\mathfrak{J}\cap\mathfrak{P}^*$.

Нам дано, что многообразие C есть простое подмногообразие на U и что V — простое подмногообразие на C и на U. Эти свойства можно выразить следующим образом:

(I) Максимальный идеал кольца $Q(C)$ имеет базис, состоящий из $d-e=(d-f)-(e-f)$ элементов.

(II) Максимальный идеал кольца $Q(V)$ имеет базис, состоящий из $d-f$ элементов.

(III) Максимальный идеал кольца частных для кольца $\mathfrak{J}/\mathfrak{P}$ относительно идеала $\mathfrak{p}/\mathfrak{P}$ имеет базис, состоящий из $e-f$ элементов.

Но $Q(C)=\overline{Q}(\overline{C})$ и $Q(V)=\overline{Q}(\overline{V})$. Так как многообразия $\overline{U}$ и $\overline{C}$ имеют размерности соответственно $d-f$ и $e-f$, то из (I) и (II)

следует, что многообразия $\overline{C}$ и $\overline{V}$ являются простыми подмногообразиями на $\overline{U}$. Далее,

$$(\mathfrak{J}/\mathfrak{P})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{P}} = \mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{P} = \quad \text{(гл. XV, § 5, теорема XI)}$$
$$= Q(V)/Q(\mathfrak{V}) \cdot \mathfrak{P}.$$

Но

$$Q(V) = \overline{Q}(\overline{V}), \qquad Q(V) \cdot \mathfrak{P} = \overline{Q}(\overline{V}) \cdot \mathfrak{P}^*,$$

а значит,

$$(\mathfrak{J}/\mathfrak{P})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{P}} = \overline{Q}(\overline{V})/\overline{Q}(\overline{V}) \cdot \mathfrak{P}^* = (\mathfrak{J}^*/\mathfrak{P}^*)_{\mathfrak{p}^*/\mathfrak{P}^*}.$$

Но теперь из (III) следует, что $\overline{V}$ есть простое подмногообразие на $\overline{C}$.

Построим моноидный образ $\overline{U}'$ многообразия $\overline{U}$ с базисом $\overline{C}$. При этом мы выберем степень ν столь большой, чтобы существовали моноидные образы этой степени как для многообразия U и базиса C, так и для многообразия $\overline{U}$ с базисом $\overline{C}$. Пусть $\varphi_i^{(\nu)}(x_0, \ldots, x_n)$ $(i = 0, \ldots, r_\nu)$ — система форм, определяющая моноидный образ степени ν для многообразия U. Тогда, если мы обозначим через $\overline{x}_0, \overline{x}_{f+1}, \ldots, \overline{x}_n$ однородные координаты в пространстве, в котором лежит многообразие $\overline{U}$, то, в силу включений

$$\varphi_i^{(\nu)}(1, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}^*,$$

очевидно, что формы $\varphi_i^{(\nu)}(\overline{x}_0, \xi_1\overline{x}_0, \ldots, \xi_f\overline{x}_0, \overline{x}_{f+1}, \ldots, \overline{x}_n)$ обращаются в нуль на $\overline{C}$. Пусть теперь $\varphi(\xi, \overline{x}) = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_f, \overline{x}_0, \overline{x}_{f+1}, \ldots, \overline{x}_n)$ — любая форма из кольца $\Omega[\overline{x}_0, \overline{x}_{f+1}, \ldots, \overline{x}_n]$, имеющая степень ν и коэффициенты, лежащие в кольце $K[\xi_1, \ldots, \xi_f]$, и обращающаяся в нуль на $\overline{C}$. Тогда, если ρ положительное целое число, для которого выражение

$$x_0^\rho \varphi(x_1/x_0, \ldots, x_f/x_0, x_0, x_{f+1}, \ldots, x_n)$$

будет однородным многочленом, то этот многочлен обращается в нуль на C, так как $\varphi(\xi_1 \ldots, \xi_f, \xi_{f+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$. Отсюда следует, что на многообразии U будет

$$x_0^\rho \varphi(x_1/x_0, \ldots, x_f/x_0, x_0, x_{f+1}, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{r_\nu} a_i(x)\, \varphi_i^{(\nu)}(x),$$

где $a_i(x)$ — формы от $x_0, \ldots, x_n$ с коэффициентами из K. Но отсюда вытекает, что на многообразии $\overline{U}$

$$\overline{x}_0^\rho \varphi(\xi, \overline{x}) = \sum_{i=0}^{r_\nu} a_i(\overline{x})\, \varphi_i^{(\nu)}(\overline{x}_0, \xi_1\overline{x}_1, \ldots, \xi_f\overline{x}_f, \overline{x}_{f+1}, \ldots, \overline{x}_n).$$

Ввиду наличия множителя $\overline{x}_0^\rho$ в левой части этого равенства, мы не можем заключить отсюда, что моноидным образом $\overline{U}'$ степени ν для

многообразия $\overline{U}$ будет многообразие над полем Ω, имеющее общую точку $(\varphi_0^{(\nu)}(\xi), \ldots, \varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(\xi))$. Однако из написанного равенства следует, что идеал $\mathfrak{P}^*$ есть изолированная компонента идеала $\mathfrak{J}^* \cdot (\varphi_0^{(\nu)}(\xi), \ldots, \varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(\xi))$. Пользуясь следствием теоремы IV, мы можем заключить, что если $\overline{W}$ — многообразие, определяемое над полем Ω общей точкой $(\varphi_0^{(\nu)}(\xi), \ldots, \varphi_{r_\nu}^{(\nu)}(\xi))$, то $\overline{W}$ бирационально эквивалентно $\overline{U}$, причем между подмногообразиями на $\overline{U}'$ и на $\overline{W}$, отвечающими любому заданному подмногообразию многообразия $\overline{C}$, имеется такое взаимно однозначное соответствие, при котором кольца частных соответствующих подмногообразий совпадают.

Предположим теперь справедливость теоремы V в случае, когда $f = 0$. Ввиду того, что многообразие $\overline{V}$ имеет размерность нуль, отсюда следует, что образ $T[\overline{V}]$ многообразия $\overline{V}$ на $\overline{U}'$ неприводим, имеет размерность $(d-f)-1-(e-f) = d-1-e$ и является простым подмногообразием как на $\overline{U}'$, так и на $T[\overline{C}]$. Далее, если $\overline{V}'$ — любое подмногообразие на $T[\overline{V}]$, отвечающее $\overline{V}$, то $\overline{V}'$ есть простое подмногообразие на $T[\overline{V}]$, на $T[\overline{C}]$ и на $\overline{U}'$. Ввиду имеющегося соответствия между $\overline{U}'$ и $\overline{W}$, мы заключаем, что эти результаты останутся справедливыми, если $T[\overline{V}]$ и $T[\overline{C}]$ будут означать образы многообразий $\overline{V}$ и $\overline{C}$ на $\overline{W}$, а $\overline{U}'$ будет заменено на $\overline{W}$ везде в формулировке теоремы.

Выясним связь между многообразиями $\overline{W}$ и U'. Многообразие $\overline{W}$ получается из U' присоединением к основному полю f алгебраически независимых элементов из поля функций многообразия U'. Эти f элементов не являлись координатами общей точки многообразия U', но ясно, что это обстоятельство несущественно и связь между $\overline{W}$ и U' является, по существу, той же самой, что и между многообразиями $\overline{U}$ и U. Поэтому мы можем перейти от образов многообразий V и C на U' к их образам на $\overline{W}$ и отсюда непосредственно вывести справедливость теоремы V. Таким образом, остается доказать теорему V лишь в случае, когда $f = 0$.

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что f равно нулю. Нашим вторым упрощением теоремы V будет доказательство того, что моноидный образ U' многообразия U может быть заменен бирационально эквивалентным ему многообразием, с которым легче оперировать.

Пусть

$$\psi_i(x) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, a)$$

— базис уравнений многообразия U. Так как $C \subset U$, то мы можем получить базис уравнений для многообразия C, добавляя к написан-

ной системе некоторую систему уравнений

$$\psi_i(x) = 0 \qquad (i = a+1, \ldots, b).$$

Но так как $V \subseteq C$, то можно получить базис уравнений для V, добавляя к уравнениям C еще некоторые уравнения

$$\psi_i(x) = 0 \qquad (i = b+1, \ldots, c).$$

Пусть теперь x' — общая точка многообразия V. Тогда x' будет простой точкой на V, а так как V — простое подмногообразие на C и на U, то точка x' будет простой точкой и для многообразий C и U. Поэтому матрица

$$\left(\frac{\partial \psi_i(x')}{\partial x'_j}\right) \qquad (i = 1, \ldots, a;\ j = 1, \ldots, n)$$

имеет ранг $n - d$, матрица

$$\left(\frac{\partial \psi_i(x')}{\partial x'_j}\right) \qquad (i = 1, \ldots, b;\ j = 1, \ldots, n)$$

— ранг $n - e$ и, наконец, матрица

$$\left(\frac{\partial \psi_i(x')}{\partial x'_j}\right) \qquad (i = 1, \ldots, c;\ j = 1, \ldots, n)$$

— ранг n. Отсюда следует, что ранги матриц

$$\left(\frac{\partial \psi_i(x')}{\partial x'_j}\right) \qquad (i = b+1, \ldots, c;\ j = 1, \ldots, n)$$

и

$$\left(\frac{\partial \psi_i(x')}{\partial x'_j}\right) \qquad (i = a+1, \ldots, c;\ j = 1, \ldots, n)$$

будут соответственно не меньше e и d. Следовательно, из системы форм $\psi_i(x)$ $(i = a+1, \ldots, c)$ можно выбрать d форм, например $\chi_1(x), \ldots, \chi_d(x)$, так, чтобы $\chi_1(x), \ldots, \chi_{d-e}(x)$ обращались в нуль на C, а матрица

$$\left(\frac{\partial \chi_i(x')}{\partial x'_j}\right) \qquad (i = 1, \ldots, d;\ j = 1, \ldots, n)$$

имела ранг d. Обозначим степени $\chi_i(x)$ через ρ_i и выберем целое число ν так, чтобы было $\nu \geqslant \max[\rho_1, \ldots, \rho_d]$. Если положить теперь

$$\varphi_i(x) = x_0^{\nu-\rho_i}\chi_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, d),$$

то ранги матриц

$$\left(\frac{\partial \varphi_i(x')}{\partial x'_j}\right) \qquad (i = 1, \ldots, d;\ j = 1, \ldots, n)$$

и

$$\left(\frac{\partial \varphi_i(x')}{\partial x'_j}\right) \qquad (i=1,\ldots,\ d-e;\ j=1,\ldots,\ n)$$

будут равны соответственно d и $d-e$. Теория §§ 2 и 3 гл. XVI показывает теперь, что если положить

$$t_i=\varphi_i(\xi) \qquad (i=1,\ldots,\ d),$$

то элементы $t_1,\ldots,\ t_d$ будут служить униформизирующими параметрами многообразия U в окрестности V, а $t_1,\ldots,\ t_{d-e}$ — униформизирующими параметрами U в окрестности C.

Так как элементы $t_1,\ldots,\ t_{d-e}$ являются униформизирующими параметрами в окрестности C, то идеал

$$Q(C)\cdot(t_1,\ldots,\ t_{d-e})$$

прост. Кроме того, идеал $\mathfrak{P}$ многообразия C в кольце $\mathfrak{J}=K[\xi_1,\ldots,\ \xi_n]$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{J}\cdot(t_1,\ldots,\ t_{d-e})$. Далее, так как $Q(V)\subseteq Q(C)$, а идеал $Q(C)\cdot(t_1,\ldots,\ t_{d-e})$ прост, то отсюда следует, что идеал $Q(V)\cdot(t_1,\ldots,\ t_{d-e})$ также прост. Следовательно, ни одна из компонент многообразия, определяемого идеалом $\mathfrak{J}\cdot(t_1,\ldots,\ t_{d-e})$, кроме компоненты C, не проходит через V. Теперь можно применить следствие теоремы IV. Пусть W — многообразие, общей точкой которого является точка

$$\zeta=(\zeta_{01},\ldots,\ \zeta_{n\,d-e})=(\ldots,\ \xi_i t_j,\ldots) \qquad (i=0,\ldots,\ n;\ j=1,\ldots,\ d-e).$$

Названное следствие гласит, что между подмногообразиями на W и на U', отвечающими V, имеется взаимно однозначное соответствие, причем отвечающие друг другу в этом соответствии подмногообразия имеют одно и то же кольцо частных. Отсюда вытекает, что для доказательства теоремы V достаточно доказать теорему, получающуюся из теоремы V при замене моноидного образа U' многообразием W. При такой замене $T[C]$ и $T[V]$ будут образами многообразий C и V на W. Доказательство этой теоремы существенно проще, и мы его проведем.

Так как $x_0\neq 0$ на многообразии V, то для любого подмногообразия V' на W, отвечающего V, можно найти такое h, что V' не лежит на гиперплоскости $z_{0h}=0$. Сначала найдем отвечающие V подмногообразия, не лежащие на гиперплоскости $z_{0h}=0$. Полный образ $T\{V\}$ многообразия V состоит из подмногообразий многообразия W, отвечающих подмногообразиям на V (§ 1, теорема VI, следствие). Так как V имеет размерность нуль, то полный образ $T\{V\}$ совпадает с образом $T[V]$ самого V.

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $\mathfrak{J}=K[\xi_1,\ldots,\ \xi_n]$, определяющий многообразие V. Если в пространстве, содержащем многообра-

зие W, в качестве бесконечно удаленной взять гиперплоскость $z_{0h}=0$, то областью целостности многообразия W будет

$$\mathfrak{I}_h = K[\zeta_{01}/\zeta_{0h}, \ldots, \zeta_{n\,d-e}/\zeta_{0h}] = \mathfrak{I}[t_1/t_h, \ldots, t_{d-e}/t_h] \supseteq \mathfrak{I}.$$

Не лежащая на гиперплоскости $z_{0h}=0$ часть многообразия $T[V]=T\{V\}$ определяется идеалом $\mathfrak{I}_h \cdot \mathfrak{p}$. Докажем, что этот идеал прост.

Любой элемент ζ из $\mathfrak{I}_h$ имеет вид

$$\zeta = f_\rho(t_1, \ldots, t_{d-e})/t_h^\rho,$$

где $f_\rho(x_1, \ldots, x_{d-e})$ — однородный многочлен от $x_1, \ldots, x_{d-e}$, имеющий степень ρ и коэффициенты из кольца $\mathfrak{I}$. Если эти коэффициенты содержатся в $\mathfrak{p}$, то очевидно, что $\zeta \in \mathfrak{I}_h \cdot \mathfrak{p}$. Наоборот, предположим, что элемент ζ содержится в $\mathfrak{I}_h \cdot \mathfrak{p}$. Ясно, что в таком случае его можно записать в виде

$$\zeta = \frac{g_\sigma(t_1, \ldots, t_{d-e})}{t_h^\sigma},$$

где коэффициенты содержатся в $\mathfrak{p}$. В таком случае

$$t_h^\sigma f_\rho(t_1, \ldots, t_{d-e}) = t_h^\rho g_\sigma(t_1, \ldots, t_{d-e}).$$

Разложим обе части этого равенства по локальным параметрам $t_1, \ldots, t_d$ в одной из сопряженных точек, из которых состоит многообразие V. Тогда правая часть не будет содержать членов со степенями, меньшими $\rho+\sigma+1$, так как коэффициенты формы g_σ содержатся в $\mathfrak{p}$. Если бы не все коэффициенты форм f_ρ принадлежали $\mathfrak{p}$, то левая часть содержала бы произведение параметров $t_1, \ldots, t_d$, имеющее степень $\rho+\sigma$, с отличным от нуля коэффициентом. Но так как разложение для элемента $t_h^\sigma f_\rho = t_h^\rho g_\sigma$ единственно, то мы получили противоречие. Таким образом, коэффициенты формы f_ρ должны лежать в $\mathfrak{p}$. Поэтому элемент ζ принадлежит идеалу $\mathfrak{I}_h \cdot \mathfrak{p}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты формы f_ρ принадлежат $\mathfrak{p}$.

Пусть

$$\zeta = \frac{f_\rho(t_1, \ldots, t_{d-e})}{t_h^\rho}$$

и

$$\eta = \frac{h_\sigma(t_1, \ldots, t_{d-e})}{t_h^\sigma}$$

— любые два элемента из $\mathfrak{I}_h$, не принадлежащие $\mathfrak{I}_h \cdot \mathfrak{p}$. Тогда $\zeta\eta = f_\rho h_\sigma / t_h^{\rho+\sigma}$. Ввиду того, что разложения форм f_ρ и h_σ в степенные ряды от параметров $t_1, \ldots, t_d$ в одной из точек многообразия V содержат отличные от нуля члены, имеющие соответственно степени ρ и σ, разложение для $f_\rho h_\sigma$ будет содержать отличный от нуля член, степень которого равна $\rho+\sigma$. Следовательно, коэффи-

циенты формы $f_\rho h_\sigma$ не все принадлежат $\mathfrak{p}$, а значит, произведение $\zeta\eta$ не содержится в $\mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}$, и поэтому идеал $\mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}$ является простым идеалом кольца $\mathfrak{J}_h$. Он определяет неприводимое многообразие V^*, являющееся единственной компонентой многообразия $T[V] \subset W$, не лежащей на гиперплоскости $z_{0h} = 0$.

Элементы t_i/t_h $(i = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, d-e)$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}$. Действительно, в противном случае существовал бы такой отличный от нуля однородный многочлен $f_\rho(x_1, \ldots, x_{d-e})$ с коэффициентами из K, что

$$f_\rho(t_1, \ldots, t_h, \ldots, t_{d-e})/t_h^\rho \in \mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}.$$

Но отсюда следовало бы, как и выше, что коэффициенты f_ρ должны принадлежать $\mathfrak{p}$. Но так как эти коэффициенты лежат в K, то они должны быть равны нулю, так что многочлен $f_\rho(x_1, \ldots, x_{d-e})$ равен нулю, вопреки условию. Отсюда вытекает, что z_{0i} $(i = 1, \ldots, d-e)$ отличны от нуля на многообразии V^*. Следуя описанному выше методу, можно найти часть многообразия $T[V]$, не лежащую на гиперплоскости $z_{0i} = 0$ при любом значении i. Эта часть снова будет некоторым неприводимым многообразием и поэтому должна совпадать с V^*. Отсюда следует, что $V^* = T[V]$, а значит, многообразие $T[V]$ неприводимо.

Из того, что элементы t_i/t_h $(i = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, d-e)$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}$, вытекает, что $\dim V^* \geqslant d-e-1$. Пусть теперь ζ — любой элемент из $\mathfrak{J}_h$. Тогда

$$\zeta = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_{d-e}} (t_1/t_h)^{i_1} \ldots (t_{d-e}/t_h)^{i_{d-e}},$$

где $\alpha_{i_1 \ldots i_{d-e}}$ принадлежит $\mathfrak{J}$. Обозначим через z_i вычеты элементов t_i/t_h по модулю $\mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}$, а через $a_{i_1 \ldots i_{d-e}}$ вычеты элементов $\alpha_{i_1 \ldots i_{d-e}}$ по модулю $\mathfrak{p}$. Тогда выражение

$$\sum a_{i_1 \ldots i_{d-e}} z_1^{i_1} \ldots z_{d-e}^{i_{d-e}}$$

есть вычет элемента ζ по модулю $\mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}$. Так как элементы $a_{i_1 \ldots i_{d-e}}$ алгебраичны над K, то этот вычет будет алгебраическим над полем $K(z_1, \ldots, z_{h-1}, z_{h+1}, \ldots, z_{d-e})$, а значит, элемент ζ алгебраически зависит по модулю $\mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}$ от элементов $t_1/t_h, \ldots, t_{h-1}/t_h, t_{h+1}/t_h, \ldots, t_{d-e}/t_h$. Таким образом, $\dim V^* \leqslant d-e-1$, а значит, $\dim V^* = d-e-1$.

Ввиду того, что $Q(V) \subseteq Q(V^*)$, мы имеем

$$Q(V^*) \cdot (\mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}) = Q(V^*) \cdot [Q(V) \cdot \mathfrak{p}] =$$
$$= Q(V^*) \cdot [Q(V) \cdot (t_1, \ldots, t_d)] = Q(V^*) \cdot (t_1, \ldots, t_d).$$

Кроме того,

$$t_i/t_h \in \mathfrak{J}_h \subseteq Q(V^*) \qquad (i \leqslant d-e),$$

а значит,

$$Q(V^*)\cdot(\mathfrak{J}_h\cdot\mathfrak{p}) = Q(V^*)(t_h,\ t_{d-e+1},\ \ldots,\ t_d).$$

Но идеал $Q(V^*)\cdot(\mathfrak{J}_h\cdot\mathfrak{p})$ является идеалом, состоящим из всех элементов кольца $Q(V^*)$, не являющихся в нем делителями единицы. Поэтому этот идеал имеет базис, состоящий из $e+1 = d-(d-e-1)$ элементов. Но так как $\dim V^* = d-e-1$, то отсюда следует, что многообразие V^* является простым на W.

Таким образом, мы доказали, что многообразие $T[V]$ неприводимо и является простым на W и что его размерность равна $d-e-1$. Рассмотрение случая, когда $V = C$, дает, что многообразие $C^* = T[C]$ неприводимо и просто на W, что его размерность равна $d-1$, а также что максимальным идеалом кольца $Q(C^*)$ является идеал $Q(C^*)\cdot(t_h)$.

Рассмотрим теперь V^* как подмногообразие на C^*. Его кольцом частных является кольцо $Q(V^*)/Q(V^*)\cdot\mathfrak{J}_h\cdot\mathfrak{P} = Q(V^*)/Q(V^*)\cdot\mathfrak{P}$. Следовательно, классы вычетов, определяемые элементами $t_{d-e+1},\ \ldots,\ t_d$, образуют базис максимального идеала кольца частных подмногообразия V^* на C^*. Но так как $e = (d-1)-(d-e-1)$, а размерности многообразий V^* и C^* равны соответственно $d-e-1$ и $d-1$, то отсюда следует, что V^* есть простое подмногообразие на C^*.

Чтобы закончить доказательство теоремы V, остается рассмотреть любое подмногообразие V' на W, отвечающее V. Так как $V^* = T\{V\}$, то $V'\subseteq V^*$. Нужно показать, что подмногообразие V' просто на многообразиях V^*, C^* и W. Для этого же достаточно обнаружить, что V' содержит нульмерное подмногообразие V'' с такими свойствами. Ввиду того, что $V''\subseteq V'$, единственное подмногообразие на U, отвечающее V'', должно содержаться в V и поэтому совпадать с последним, так как размерность V равна нулю. Таким образом, многообразие V'' отвечает V, и нам достаточно рассмотреть случай, когда V' имеет размерность нуль. Во всем дальнейшем мы будем предполагать, что V' имеет размерность нуль и не лежит на гиперплоскости $z_{0h} = 0$.

Так как каждое подмногообразие на W, отвечающее V, является в соответствии между U и W иррегулярным, мы имеем $Q(V)\subseteq Q(V')$. Обозначим через $\mathfrak{p}'$ простой идеал многообразия V' в кольце $\mathfrak{J}_h$. Тогда $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}\cap\mathfrak{p}'$. Далее, так как $\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{J}_h$, то кольцо вычетов $\mathfrak{J}_h/\mathfrak{p}'$ содержит подкольцо, изоморфное кольцу $\mathfrak{J}/\mathfrak{p}$. Но $\Delta = \mathfrak{J}/\mathfrak{p}$ является полем и алгебраическим расширением поля K, так как многообразие V нульмерно. Аналогично, ввиду нульмерности многообразия V', кольцо вычетов $\Delta' = \mathfrak{J}_h/\mathfrak{p}'$ также является полем и алгебраическим расширением поля K. Поле Δ можно рассматривать как подполе в Δ'. Тогда Δ' будет алгебраическим расширением Δ. Обозначим через $\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{h-1},\ \tau_{h+1},\ \ldots,\ \tau_{d-e}$ вычеты элементов $t_1/t_h,\ \ldots,\ t_{h-1}/t_h,\ t_{h+1}/t_h,\ \ldots,\ t_{d-e}/t_h$, лежащие в Δ'. Пусть $f_i(z)$ — характеристические многочлены элементов τ_i над полем Δ. Коэффициенты

многочленов $f_i(z)$ являются вычетами элементов кольца $\mathfrak{J}$ в поле Δ. Поэтому можно построить многочлены $F_i(z)$ с коэффициентами из $\mathfrak{J}$ так, чтобы при замене этих коэффициентов их вычетами многочлены $F_i(z)$ обращались в $f_i(z)$. Положим

$$u_i = F_i(t_i/t_h) \qquad (i = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, d-e),$$
$$u_i = t_i \qquad (i = h, d-e+1, \ldots, d).$$

Элементы $u_h, u_{d-e+1}, \ldots, u_d$ служат униформизирующими параметрами многообразия W в окрестности V^*, а u_h — униформизирующим параметром многообразия W в окрестности C^*. Если мы сможем показать, что элементы $u_1, \ldots, u_d$ будут униформизирующими параметрами многообразия W в окрестности V', то, в силу уже проведенного доказательства простоты подмногообразия V^* на C^* и на W, отсюда будет следовать, что V есть простое подмногообразие на многообразиях V^*, C^* и W. Таким образом, для окончания доказательства теоремы V остается показать только, что элементы $u_1, \ldots, u_d$ служат униформизирующими параметрами в окрестности V'.

Покажем для этого, что $\mathfrak{p}'$ есть изолированная компонента идеала $\mathfrak{i} = \mathfrak{J}_h \cdot (u_1, \ldots, u_d)$. Перейдем от кольца $\mathfrak{J}_h$ к кольцу вычетов по модулю идеала $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{J}_h \cdot \mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{p}^* \subseteq \mathfrak{p}'$, то $\mathfrak{p}'$ будет изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}^*$ будет изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}/\mathfrak{p}^*$. Ввиду того, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}^*$, вычеты по модулю $\mathfrak{p}^*$ элементов кольца $\mathfrak{J}_h$, лежащих в $\mathfrak{J}$, образуют кольцо, изоморфное полю $\Delta = \mathfrak{J}/\mathfrak{p}$, и могут быть отождествлены с соответствующими им элементами поля Δ. Элементы $t_h, t_{d-e+1}, \ldots, t_d$ принадлежат идеалу $\mathfrak{p}^*$, и поэтому их вычеты по модулю $\mathfrak{p}^*$ равны нулю. С другой стороны, мы видели выше, что вычеты $z_1, \ldots, z_{h-1}, z_{h+1}, \ldots, z_{d-e}$ элементов $t_1/t_h, \ldots, t_{h-1}/t_h, t_{h+1}/t_h, \ldots, t_{d-e}/t_h$ по модулю $\mathfrak{p}^*$ алгебраически независимы над полем K, а значит, и над полем Δ, являющимся алгебраическим расширением K. Так как

$$\mathfrak{J}_h = \mathfrak{J}[t_1/t_h, \ldots, t_{d-e}/t_h],$$

то мы заключаем, что

$$\mathfrak{J}_h/\mathfrak{p}^* = \Delta[z, \ldots, z_{h-1}, z_{h+1}, \ldots, z_{d-e}]$$

и что идеал $\mathfrak{i}/\mathfrak{p}^*$ в этом кольце имеет базис

$$f_i(z_i) \quad (i = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, d-e).$$

С другой стороны, любой элемент из $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}^*$ является многочленом

$$f(z_1, \ldots, z_{h-1}, z_{h+1}, \ldots, z_{d-e})$$

с коэффициентами из Δ, обращающимся в нуль в точке

$$z_i = \tau_i \quad (i = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, d-e),$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_{d-e}$ — вычеты элементов $t_1/t_h, \ldots, t_{d-e}/t_h$ по модулю $\mathfrak{p}'$. Простой идеал этой точки в аффинном пространстве $(z_1, \ldots, z_{h-1},$

$z_{h+1}, \ldots, z_{d-e}$) над полем Δ является изолированной компонентой идеала кольца

$$\Delta[z_1, \ldots, z_{h-1}, z_{h+1}, \ldots, z_{d-e}],$$

порождаемого многочленами $f_i(z)$ $(i = 1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, d-e)$, так как каждый многочлен $f_i(z)$ неприводим над полем Δ. Отсюда следует, что $\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}^*$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}/\mathfrak{p}^*$.

Поэтому $\mathfrak{p}'$ является изолированной компонентой идеала $\mathfrak{i}$, а значит, элементы $u_1, \ldots, u_d$ являются униформизирующими параметрами в окрестности V'. Тем самым доказательство теоремы V закончено.

§ 4. Редукция особенностей и локальная теорема об униформизации

В трех предшествующих параграфах мы изучали теорию бирациональных преобразований. Остальная часть этой главы содержит приложения этой теории к вопросам, связанным с кратными точками алгебраического многообразия. Читатель знает о трудностях, возникающих в случае, когда алгебраическое многообразие имеет кратные точки. Например, теория пересечений, изложенная в гл. XII, оказывается много более простой, если на многообразии нет кратных точек. Поэтому возникает следующий вопрос: можно ли получить бирациональный образ заданного неприводимого алгебраического многообразия размерности d, не содержащий кратных точек? Мы уже показали, как получить такой образ в случае, когда $d = 1$ (гл. XVI, § 6, теорема V). Ниже мы докажем существование свободного от особенностей бирационального образа для алгебраической поверхности. Зарисский успешно решил такую же проблему в случае, когда $d = 3$. Однако его доказательство сложно, и мы его не будем воспроизводить. Для значений d, превышающих 3, вопрос до сих пор остается открытым.

Но даже и в том случае, если мы могли бы доказать, что для любого неприводимого алгебраического многообразия свободный от особенностей бирациональный образ существует, мы много потеряли бы, ограничиваясь рассмотрением только таких образов, т. е. многообразий без особенностей. В частности, большой интерес и само по себе представляет изучение структуры особых точек. Для изучения структуры особой точки обычно лучше всего произвести бирациональное преобразование, для которого рассматриваемая особая точка является фундаментальной, а затем рассмотреть образ этой точки с целью вывести из его исследования свойства изучаемой особенности. При этом обычно важно добиться, чтобы ни одно подмногообразие преобразованного многообразия или хотя бы ни одно подмногообразие образа особой точки не было фундаментальным. Если бы было возможно добиться, чтобы каждая точка образа рассматриваемой особенности была простой на преобразованном многообразии, то, вероятно, мы

были бы в состоянии извлечь из такого преобразования всю необходимую информацию о строении особой точки. К несчастью, проблема построения нужного для этого преобразования имеет тот же порядок трудности, что и построение свободного от особенностей бирационального образа заданного многообразия. Однако частный результат такого рода, имеющий фундаментальное значение как для указанных выше вопросов, так и для ряда других, дается следующей теоремой:

Локальная теорема об униформизации. *Пусть U — неприводимое алгебраическое многообразие, Σ — его поле функций и $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, имеющее размерность s. Если центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U является подмногообразие V, то существует такой бирациональный образ U' многообразия U, на котором центром нормирования $\mathfrak{B}$ является простое подмногообразие V' размерности s. При этом $Q(V) \subseteq Q(V')$.*

Хотя мы не имеем в виду заниматься изучением кратных точек алгебраических многообразий, можно кратко указать, как сформулированный результат может служить для исследования изолированной особой точки P алгебраического многообразия U, определенного над полем комплексных чисел. Воспользуемся неоднородными координатами и допустим, что точка P имеет координаты $(0, \ldots, 0)$, а общая точка многообразия U — координаты $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Пусть $\mathfrak{B}$ — любое нульмерное нормирование поля функций Σ многообразия U, имеющее точку P своим центром на многообразии U. Тогда, в силу сформулированной теоремы, существует бирациональный образ U' для U, на котором центр нормирования $\mathfrak{B}$ будет простой точкой P', причем $Q(P) \subseteq Q(P')$. Пусть $t_1, \ldots, t_d$ — униформизирующие параметры в точке P'. Так как $\xi_i \in Q(P) \subseteq Q(P')$, то элементы ξ_i можно разложить в степенные ряды по $t_1, \ldots, t_d$. Полученные таким образом ряды будут сходиться в некоторой конечной окрестности $N(\mathfrak{B})$ точки P' на многообразии U'. Рассмотрим теперь совокупность нульмерных нормирований $\mathfrak{B}$ поля Σ, имеющих точку P своим центром на U, и связанные с этими нормированиями окрестности $N(\mathfrak{B})$. Можно показать, что существует конечное число таких окрестностей, скажем $N(\mathfrak{B}_1), \ldots, N(\mathfrak{B}_k)$, обладающих тем свойством, что любое нульмерное нормирование с центром в точке P на многообразии U имеет простой центр в одной из окрестностей $N(\mathfrak{B}_i)$. Каждому из взятых нормирований $\mathfrak{B}_i$ соответствует некоторое разложение в ряды для $\xi_1, \ldots, \xi_n$, определяющее „частичную окрестность“ или „лист“ многообразия U в точке P. Эти „листы“ покрывают полную окрестность точки P на U. Существование такого покрытия окрестности точки P на многообразии U конечным числом „листов“ составляет основу анализа особенности в точке P.

Мы докажем локальную теорему об униформизации в следующих параграфах, а затем воспользуемся ею для получения некоторых важных результатов об устранении особенностей алгебраического многообразия. Доказательство этой теоремы, хотя оно и является

прямым, довольно длинно, и мы разобьем его на отдельные части. Прежде всего полезно заметить, что достаточно доказать теорему в случае, когда U является гиперповерхностью, т. е. многообразием размерности d в пространстве $d+1$ измерений. Это можно показать следующим образом.

Предположим, что многообразие U задано в пространстве S_n. Отнесем его к неоднородной системе координат, относительно которой центр V нормирования $\mathfrak{B}$ лежит на конечном расстоянии. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка многообразия U. В кольце $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ можно выбрать $d+1$ элементов $\eta_1, \ldots, \eta_{d+1}$ так, чтобы были выполнены следующие условия:

(а) элементы $\eta_1, \ldots, \eta_d$ алгебраически независимы над полем K;

(б) η_{d+1} является примитивным элементом поля Σ (Σ есть кольцо частных для $\mathfrak{J}$) над полем $K(\eta_1, \ldots, \eta_d)$;

(в) любой элемент кольца $\mathfrak{J}$ является целым над кольцом $K[\eta_1, \ldots, \eta_d]$.

Пусть $f(y_1, \ldots, y_{d+1}) = 0$ — (однозначно определенное) неприводимое уравнение, связывающее элементы $\eta_1, \ldots, \eta_{d+1}$. В аффинном пространстве A'_{d+1} уравнение

$$f(y_1, \ldots, y_{d+1}) = 0$$

определяет неприводимое многообразие U', имеющее общую точку $(\eta_1, \ldots, \eta_{d+1})$ и область целостности $\mathfrak{J}' = K[\eta_1, \ldots, \eta_{d+1}]$. По построению, полем функций для многообразия U' будет поле Σ, т. е. U' бирационально эквивалентно многообразию U. Среди уравнений бирационального соответствия содержатся уравнения

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, d+1),$$

где многочлены φ_i определяются из выражений

$$\eta_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad (i = 1, \ldots, d+1).$$

В силу построения, элементы области целостности $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ являются целыми над областью целостности $\mathfrak{J}' = K[\eta_1, \ldots, \eta_{d+1}]$.

Пусть V' — центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U'. Если локальная теорема об униформизации верна для гиперповерхности U', то найдется многообразие U'', бирационально эквивалентное многообразиям U и U', на котором центр V'' нормирования $\mathfrak{B}$ будет простым подмногообразием размерности s. Кроме того, будет

$$Q(V') \subseteq Q(V'').$$

Так как подмногообразие V'' — простое, то кольцо $Q(V'')$ целозамкнуто, а значит, $Q(V'')$ будет пересечением содержащих его колец нормирований. Так как $Q(V') \subseteq Q(V'')$, то все эти кольца нормирований содержат $Q(V')$, а значит, и кольцо $\mathfrak{J}'$. Но элементы кольца $\mathfrak{J}$ — целые над $\mathfrak{J}'$. Отсюда, в силу целозамкнутости колец нормирования, вытекает, что $\mathfrak{J}'$ содержится в любом кольце нормирования, содержащем

$Q(V'')$. Следовательно, $\mathfrak{J} \subseteq Q(V'')$. Но любой элемент из $\mathfrak{J}$, не содержащийся в простом идеале $\mathfrak{p}$, определяющем многообразие V, имеет в нормировании $\mathfrak{B}$ норму нуль и поэтому является делителем единицы в кольце $Q(V'')$. Поэтому кольцо $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}} = Q(V)$ содержится в $Q(V'')$. Таким образом, из предположения о справедливости локальной теоремы униформизации для гиперповерхностей U' следует, что она верна для любого многообразия U.

Первый этап доказательства локальной теоремы об униформизации для гиперповерхности U состоит в ее доказательстве в случае, когда $\mathfrak{B}$ есть нульмерное нормирование ранга 1. Эта часть — наиболее трудная во всем доказательстве. В действительности для этого случая будет доказан более сильный результат, чем нужно для общей теоремы. Мы докажем, что в качестве U' можно взять тоже гиперповерхность, причем уравнения соответствия между U и U' (в неоднородных координатах) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x_i &= P_i(y_1, \ldots, y_{d+1}) \quad (i = 1, \ldots, d+1), \\ y_i &= R_i(x_1, \ldots, x_{d+1}) \quad (i = 1, \ldots, d+1), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где P_i — многочлены, а R_i — рациональные функции. Более того, мы докажем, что эти уравнения определяют кремоново преобразование, т. е. бирациональное соответствие между $(d+1)$-мерными пространствами, в которых содержатся гиперповерхности U и U', а не только бирациональное соответствие между самими U и U'. Эта более сильная форма теоремы представляет и самостоятельный интерес, но мы приводим ее по той причине, что она необходима для последующей стадии доказательства общей теоремы. Нужно отметить, что сам факт, что P_i являются многочленами, позволяет вывести включение $Q(V) \subseteq Q(V')$. Действительно, если $(\eta_1, \ldots, \eta_{d+1})$ — общая точка многообразия U', то из уравнений соответствия следует, что

$$\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n] \subseteq K[\eta_1, \ldots, \eta_{d+1}] = \mathfrak{J}'.$$

Если $\mathfrak{P}'$ — простой идеал многообразия V' в кольце $\mathfrak{J}'$, то простым идеалом многообразия V будет $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}'$, а потому $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}} \subseteq \mathfrak{J}_{\mathfrak{P}'}$, т. е. $Q(V) \subseteq Q(V')$. Следовательно, первый этап доказательства локальной теоремы об униформизации должен состоять в доказательстве того, что если U — гиперповерхность в A_{d+1}, а $\mathfrak{B}$ — нульмерное нормирование ее поля функций, имеющее ранг 1, то существует кремоново преобразование вида (1) пространства A_{d+1} в A'_{d+1}, обращающее U в гиперповерхность U', на которой центр нормирования $\mathfrak{B}$ является простой точкой.

Как только этот результат доказан, общая теорема доказывается по индукции. Мы покажем, что если она верна для нульмерных нормирований ранга k, то она верна также для нормирований размерности s и ранга k. После этого будет доказано, что если теорема

верна для любых нормирований ранга k, то она верна для нульмерных нормирований ранга $k+1$.

Обратимся теперь к проблеме освобождения от особенностей алгебраического многообразия, имеющего заданное поле функций Σ. Все, что нам нужно, заключается в нахождении *проективной модели* поля Σ, т. е. алгебраического многообразия, полем функций которого является Σ, такого, что каждое нульмерное нормирование поля Σ имеет на нем своим центром некоторое простое подмногообразие. Действительно, каждое нульмерное подмногообразие проективной модели поля Σ является центром некоторого нульмерного нормирования этого поля. Если центры всех таких нормирований являются простыми подмногообразиями на нашей модели, то все нульмерные подмногообразия модели, а следовательно, все точки модели будут простыми. К сожалению, мы до сих пор не имеем возможности доказать существование такой проективной модели и можем доказать лишь, что если Σ есть поле функций алгебраического многообразия, то существует конечная *разрешающая система*, т. е. конечное число проективных моделей поля Σ, обладающих тем свойством, что любое нульмерное нормирование поля Σ имеет своим центром хотя бы одну простую точку на одной из этих моделей. Ясно, что освобождение многообразия от особенностей равносильно доказательству того, что поле функций рассматриваемого многообразия имеет разрешающую систему, состоящую из единственного многообразия. Естественным путем для попыток доказать это является рассмотрение разрешающей системы, состоящей из k моделей, и последующая попытка редукции от k к $k-1$ моделям. Мы покажем, что это можно сделать в случае алгебраических поверхностей, для которых указанная редукция сравнительно проста. Для многообразий размерности 3 эта редукция выполнена Зарисским, но, ввиду существования фундаментальных кривых в соответствиях между различными моделями, она довольно сложна. Для многообразий размерности, большей 3, можно лишь ожидать, что подобная редукция может быть выполнена.

Замечание. Следующие три параграфа посвящены доказательству локальной теоремы об униформизации. Так как детали этого доказательства несколько сложны, читатель может предпочесть предварительно принять теорему без доказательства и перейти прямо к чтению § 8.

§ 5. Некоторые кремоновы преобразования

Доказательство локальной теоремы об униформизации для нульмерных нормирований ранга 1 основано на построении последовательности кремоновых преобразований, так что мы сначала рассмотрим свойства некоторых из таких преобразований, используемых впоследствии.

Пусть U есть d-мерное неприводимое многообразие в аффинном пространстве A_{d+1} с координатной системой $(x_1, \ldots, x_{d+1})$. Обозначим

через $(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$ общую точку многообразия U. Все рассматриваемые преобразования будут иметь вид

$$(C)\begin{cases} x_i = P_i(y_1, \ldots, y_{d+1}) & (i = 1, \ldots, d+1), \\ y_i = R_i(x_1, \ldots, x_{d+1}) & (i = 1, \ldots, d+1), \end{cases}$$

где P_i — многочлены от $y_1, \ldots, y_{d+1}$ с коэффициентами из поля K, а R_i — рациональные функции от $x_1, \ldots, x_{d+1}$ над тем же полем. Чтобы не прерывать рассуждений тривиальными определениями, условимся сейчас обозначать образ точки $(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$ при преобразовании типа (C) греческими буквами, соответствующими латинским буквам, применяемым для обозначения системы координат в преобразованном пространстве.

Пусть $\mathfrak{B}$ — нульмерное нормирование ранга 1 для поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$. Его центр является нульмерным подмногообразием на U, т. е. представляет собой систему сопряженных точек $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{d+1}^{(i)})$ $(i=1, \ldots, g)$. Мы будем часто иметь дело с полем R, получаемым присоединением к основному полю элементов $\alpha_j^{(i)}$ $(j = 1, \ldots, d+1;\ i = 1, \ldots, g)$. Следует заметить, что если мы произведем преобразование (C), то центром нормирования $\mathfrak{B}$ в пространстве y будет система сопряженных точек $(\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_{d+1}^{(i)})$ $(i = 1, \ldots, h)$. Поле $R' = K(\beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_1^{(h)}, \ldots, \beta_{d+1}^{(1)}, \ldots, \beta_{d+1}^{(h)})$ не обязательно совпадает с R, но легко видеть, что при заданном значении i найдется значение j $(1 \leqslant j \leqslant h)$ такое, что

$$\alpha_k^{(i)} = P_k(\beta_1^{(j)}, \ldots, \beta_{d+1}^{(j)}) \qquad (k = 1, \ldots, d+1).$$

Следовательно, $R \subseteq R'$. Нужно иметь в виду это свойство преобразования (C).

Поле R является алгебраическим расширением степени g поля K. Делая в случае необходимости линейное преобразование координат $x_1, \ldots, x_{d+1}$, можно добиться, чтобы элементы $\alpha_j^{(1)}, \ldots, \alpha_j^{(g)}$ были различными при каждом значении j. Тогда $R = K(\alpha_j^{(1)}, \ldots, \alpha_j^{(g)})$ $(j = 1, \ldots, d+1)$. Удобно предполагать систему координат с самого начала выбранной так, что элементы $\alpha_j^{(1)}, \ldots, \alpha_j^{(g)}$ различны. При построении последовательностей преобразований, которыми мы будем пользоваться ниже, обычно бывает нельзя вводить еще линейное преобразование для обеспечения того, чтобы j-е координаты системы сопряженных точек, составляющей центр нормирования $\mathfrak{B}$ в рассматриваемом пространстве, были различными. Однако, как правило, это свойство будет следовать из свойств использованных преобразований. На некоторых стадиях нашего рассуждения указанное свойство будет существенным.

Нам часто будет нужно алгебраически расширять основное поле K до некоторого поля K^*. Обычно мы будем полагать $K^* = R$. При расширении поля K до K^* многообразие U может стать приводимым.

Тогда точка $(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$ будет общей точкой одной из компонент, на которые распадается многообразие U, например компоненты U^*, а нормирование $\mathfrak{B}$ может быть продолжено до некоторого нормирования $\mathfrak{B}^*$ поля $K^*(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$. Если $f(x_1, \ldots, x_{d+1})$ — любой многочлен над полем K, не обращающийся в нуль на центре нормирования $\mathfrak{B}$, то $v[f(\xi)] = 0$ и поэтому $v^*[f(\xi)] = 0$, так что $f(x_1, \ldots, x_{d+1})$ не обращается в нуль на центре нормирования $\mathfrak{B}^*$. Следовательно, центр нормирования $\mathfrak{B}^*$ содержится в центре нормирования $\mathfrak{B}$. В частности, если $K^* \supseteq R$, то центром нормирования $\mathfrak{B}^*$ будет одна из точек $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_{d+1}^{(i)})$. Мы будем считать, что при расширении поля K мы одновременно выбираем соответствующее продолжение $\mathfrak{B}^*$ нормирования $\mathfrak{B}$. Поэтому можно, не опасаясь путаницы, обозначать это продолжение попрежнему через $\mathfrak{B}$.

Если в качестве расширенного основного поля будет выбрано R, то можно предполагать, что центром нормирования $\mathfrak{B}$ является точка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1}) = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{d+1}^{(1)})$. В таком случае значения $\tau_i = v(\xi_i - \alpha_i) > 0$. Преобразования, которыми мы займемся в этом параграфе, будут двух типов: (I) преобразования типа (C) для m переменных, например $x_1, \ldots, x_m$, в случае, когда значения $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — рационально независимые действительные числа, и (II) преобразования типа (C) для $m+1$ переменных, например $x_1, \ldots, x_{m+1}$, причем значения $\tau_1, \ldots, \tau_m$ рационально независимы, а τ_{m+1} рационально зависит от $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Мы начнем с одной алгебраической леммы о рациональных приближениях систем из m действительных чисел.

Лемма I. (Алгоритм Перрона.) *Если $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — система из m рационально независимых положительных действительных чисел, то существует m последовательностей из неотрицательных целых чисел $A_i^{(0)}, A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, \ldots$ $(i = 1, \ldots, m)$, удовлетворяющих условиям:*

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} A_1^{(h)} & A_1^{(h+1)} & \ldots & A_1^{(h+m-1)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ A_m^{(h)} & A_m^{(h+1)} & \ldots & A_m^{(h+m-1)} \end{vmatrix} = \pm 1,$$

$$\text{(II)} \quad \lim_{h\to\infty} \frac{A_i^{(h)}}{A_1^{(h)}} = \frac{\tau_i}{\tau_1}.$$

Если ξ — любое положительное число, то мы обозначим его целую часть через $[\xi]$. Положим $a_j^{(0)} = [\tau_j/\tau_1]$ и

$$\tau_1 = \tau_m^{(1)}, \quad \tau_i = \tau_{i-1}^{(1)} + a_i^{(0)}\tau_m^{(1)} \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Числа $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_m^{(1)}$ рационально независимы. Действительно, если бы целые числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяли условию

$$\lambda_1\tau_1^{(1)} + \ldots + \lambda_m\tau_m^{(1)} = 0,$$

то мы имели бы

$$\left(\lambda_m - \sum_1^{m-1} \lambda_i a_{i+1}^{(0)}\right)\tau_1 + \lambda_1\tau_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\tau_m = 0,$$

а значит, из рациональной независимости чисел $\tau_1, \ldots, \tau_m$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$. Кроме того,

$$\frac{\tau_i^{(1)}}{\tau_m^{(1)}} = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_1} - \left[\frac{\tau_{i+1}}{\tau_1}\right] < 1,$$

и поэтому $\tau_i^{(1)} < \tau_m^{(1)}$. Введем теперь следующее определение:

$$A_1^{(k)} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m-1), \quad A_1^{(m)} = 1,$$

$$A_2^{(1)} = 1, \quad A_2^{(k)} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, m-1), \quad A_2^{(m)} = a_2^{(0)},$$

$$A_j^{(i-1)} = \delta_j^i \qquad (i \leqslant m), \quad A_j^{(m)} = a_j^{(0)} \qquad (j = 3, \ldots, m).$$

Тогда

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{m} A_i^{(j)}\tau_j^{(1)} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Построение чисел $a_i^{(0)}$, $A_j^{(i)}$ $(i, j \leqslant m)$ и $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_m^{(1)}$ будет называться далее *первым этапом алгоритма Перрона.*

Будем отправляться теперь от рационально независимых чисел $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_m^{(1)}$ и, повторив тот же процесс, получим m рационально независимых чисел $\tau_1^{(2)}, \ldots, \tau_m^{(2)}$. При этом $a_j^{(1)} = [\tau_j^{(1)}/\tau_1^{(1)}]$ и

$$\tau_1^{(1)} = \tau_m^{(2)}, \quad \tau_i^{(1)} = \tau_{i-1}^{(2)} + a_i^{(1)}\tau_m^{(2)} \qquad (i = 2, \ldots, m),$$

где $\tau_i^{(2)} < \tau_m^{(2)}$. В этом случае, однако, мы будем иметь $a_m^{(1)} \geqslant 1$, так как $\tau_1^{(1)} < \tau_m^{(1)}$, и $a_m^{(1)} \geqslant a_i^{(1)} \geqslant 0$.

Продолжая таким же образом, мы получим последовательность систем рационально независимых чисел $\tau_1^{(h)}, \ldots, \tau_m^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots)$, связанных соотношениями

$$\tau_1^{(h-1)} = \tau_m^{(h)}, \quad \tau_i^{(h-1)} = \tau_{i-1}^{(h)} + a_i^{(h-1)}\tau_m^{(h)} \qquad (i = 2, \ldots, m),$$

$$a_i^{(h-1)} = [\tau_i^{(h-1)}/\tau_1^{(h-1)}] \geqslant 0,$$

где

$$a_m^{(h-1)} \geqslant 1, \quad a_m^{(h-1)} \geqslant a_i^{(h-1)} \qquad (h \geqslant 2).$$

Из этих уравнений следует, что

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}^{(h)}\tau_j^{(h)},$$

где коэффициенты $p_{ij}^{(h)}$ определяются рекуррентным соотношением

$$\begin{pmatrix} p_{11}^{(h)} & \dots & p_{1m}^{(h)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1}^{(h)} & \dots & p_{mm}^{(h)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(h-1)} & \dots & p_{1m}^{(h-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1}^{(h-1)} & \dots & p_{mm}^{(h-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_2^{(h-1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_m^{(h-1)} \end{pmatrix}.$$

Из этого соотношения можно заключить непосредственно, что допустима запись $p_{ij}^{(h)} = A_i^{(h+j-1)}$ и что

$$\begin{vmatrix} A_1^{(h)} & \dots & A_1^{(h+m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_m^{(h)} & \dots & A_m^{(h+m-1)} \end{vmatrix} = (-1)^{h(m-1)}.$$

$A_i^{(h)}$ есть неотрицательное целое число. Написанное выше матричное равенство при значении $h+1$ вместо h дает для $p_{mi}^{(h+1)}$ уравнение вида

$$A_i^{(h+m)} = A_i^{(h)} a_1^{(h)} + \dots + A_i^{(h+m-1)} a_m^{(h)} \qquad (a_1^{(h)} = 1). \tag{1}$$

Процесс перехода от чисел $\tau_1^{(h-1)}, \dots, \tau_m^{(h-1)}$ к числам $\tau_1^{(h)}, \dots, \tau_m^{(h)}$ и определения $a_i^{(h-1)}, \dots$ будет называться h-м этапом алгоритма Перрона.

Так как $a_i^{(h)} \geqslant 0$, $a_m^{(h)} \geqslant 1$, то из равенства (1) следует, что $A_i^{(h+m)} \geqslant A_i^{(h+m-1)}$. Но так как $A_1^{(h)}, \dots, A_i^{(h+m-1)}$ не могут быть все равны нулю, отсюда вытекает, что существует такое целое число k, для которого $A_j^{(i)} > 0$ при $i > k$. Во всем дальнейшем мы будем считать, что h превосходит это значение k. При достаточно большом h мы получаем из уравнения (1), что

$$\frac{A_i^{(h+m)}}{A_1^{(h+m)}} = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^{(h)} \frac{A_i^{(h+j)}}{A_1^{(h+j)}}, \tag{2}$$

где

$$\lambda_j^{(h)} = a_{j+1}^{(h)} \frac{A_1^{(h+j)}}{A_1^{(h+m)}} \geqslant 0$$

и

$$\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^{(h)} = \frac{\sum_0^{m-1} a_{j+1}^{(h)} A_1^{(h+j)}}{A_1^{(h+m)}} = 1. \tag{3}$$

Но мы имеем

$$\frac{\lambda_j^{(h)}}{\lambda_{m-1}^{(h)}} = \frac{a_{j+1}^{(h)}}{a_m^{(h)}} \cdot \frac{A_1^{(h+j)}}{A_1^{(h+m-1)}} \leqslant 1 \quad (j < m),$$

так как мы уже видели, что $a_{j+1}^{(h)} \leqslant a_m^{(h)}$, $A_1^{(h+j)} \leqslant A_1^{(h+m-1)}$,

Из (3) можно заключить, что $\lambda_{m-1}^{(h)} \geqslant \frac{1}{m}$.

Положим

$$g_i^{(h)} = \max\left[\frac{A_i^{(h)}}{A_1^{(h)}}, \ldots, \frac{A_i^{(h+m-1)}}{A_1^{(h+m-1)}}\right]$$

и

$$k_i^{(h)} = \min\left[\frac{A_i^{(h)}}{A_1^{(h)}}, \ldots, \frac{A_i^{(h+m-1)}}{A_1^{(h+m-1)}}\right].$$

Равенства (2) показывают, что $g_i^{(h)} \geqslant g_i^{(h+1)}$ и $k_i^{(h+1)} \geqslant k_i^{(h)}$. Следовательно, мы имеем вообще

$$g_i^{(h)} \geqslant g_i^{(h+1)} \geqslant g_i^{(h+2)} \geqslant \ldots \geqslant k_i^{(h+2)} \geqslant k_i^{(h+1)} \geqslant k_i^{(h)}.$$

Отсюда вытекает, что существуют пределы $G_i = \lim\limits_{h\to\infty} g_i^{(h)}$ и $K_i = \lim\limits_{h\to\infty} k_i^{(h)}$, причем $G_i \geqslant K_i$. Покажем, что $G_i = K_i$.

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно выбрать значение h_0 так, чтобы было

$$0 \leqslant g_i^{(h)} - G_i < \varepsilon, \quad 0 \leqslant K_i - k_i^{(h)} < \varepsilon$$

при $h > h_0$. В таком случае

$$\frac{A_i^{(h+j)}}{A_1^{(h+j)}} > K_i - \varepsilon$$

при $h > h_0$. Далее, при $h > h_0$ будет

$$\frac{A_i^{(h+m)}}{A_1^{(h+m)}} = \sum_{j=0}^{m-2} \lambda_j^{(h)} \frac{A_i^{(h+j)}}{A_1^{(h+j)}} + \lambda_{m-1}^{(h)} \frac{A_i^{(h+m-1)}}{A_1^{(h+m-1)}} > \sum_{j=0}^{m-2} \lambda_j^{(h)} (K_i - \varepsilon) +$$

$$+ \lambda_{m-1}^{(h)} \frac{A_i^{(h+m-1)}}{A_1^{(h+m-1)}} = K_i - \varepsilon + \lambda_{m-1}^{(h)} \left(\frac{A_i^{(h+m-1)}}{A_1^{(h+m-1)}} - K_i + \varepsilon\right) \geqslant$$

$$\geqslant K_i - \varepsilon + m^{-1}\left(\frac{A_i^{(h+m-1)}}{A_1^{(h+m-1)}} - K_i + \varepsilon\right).$$

Следовательно, для $h > h_0$ будем иметь

$$\frac{A_i^{(h+m)}}{A_1^{(h+m)}} - K_i > m^{-1}\left(\frac{A_i^{(h+m-1)}}{A_1^{(h+m-1)}} - K_i\right) - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Повторяя этот процесс $s = m - r + 1$ раз, мы получаем

$$\frac{A_i^{(h+m)}}{A_1^{(h+m)}} - K_i > m^{-s}\left(\frac{A_i^{(h+r-1)}}{A_1^{(h+r-1)}} - K_i\right) - \varepsilon\left(1 - \frac{1}{m^s}\right)$$

при достаточно большом h. Так как числа $k_i^{(h)}$ растут вместе с h, то ввиду (2) очевидно, что можно выбрать $h+m$ так, чтобы было

$$A_i^{(h+m)}/A_1^{(h+m)} = k_i^{(h+1)}\ ^{1}),$$

а затем выбрать $r\,(r \leqslant m)$ таким образом, чтобы было

$$A_i^{(h+r-1)}/A_1^{(h+r-1)} = g_i^{(h+1)}.$$

Если это сделано, то мы получаем неравенство

$$g_i^{(h+1)} - K_i < \varepsilon\,(m^s - 1) + m^s\,(k_i^{(h+1)} - K_i) \leqslant \varepsilon\,(m^s - 1),$$

а значит,

$$G_i - K_i \leqslant \varepsilon\,(m^s - 1).$$

Отсюда вытекает, что $G_i = K_i$.

Мы видим при этом, что $\lim\limits_{h\to\infty} A_i^{(h)}/A_1^{(h)} = G_i = K_i$. Выберем h_1 так, чтобы при $h > h_1$ было $\left|A_i^{(h)}/A_1^{(h)} - G_i\right| < \varepsilon$. Имеем

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{m} A_i^{(h+j-1)}\tau_j^{(h)},$$

а значит,

$$\left|\frac{\tau_i}{\tau_1} - G_i\right| = \left|\frac{\sum\limits_{j=1}^{m}\left(A_i^{(h+j-1)} - G_i A_1^{(h+j-1)}\right)\tau_j^{(h)}}{\sum\limits_{j=1}^{m} A_1^{(h+j-1)}\tau_j^{(h)}}\right| \leqslant \left|\frac{\varepsilon\sum A_1^{(h+j-1)}\tau_j^{(h)}}{\sum A_1^{(h+j-1)}\tau_j^{(h)}}\right| = \varepsilon,$$

---

[1]) Это утверждение авторов неверно, и поэтому конец проводимого здесь рассуждения должен быть несколько изменен. Нужно начинать с выбора значения $h+r-1$, при котором $A_i^{(h+r-1)}/A_1^{(h+r-1)} = g_i^{(h+r-1)}$ (а не $g_i^{(h+1)}$!). Возможность такого выбора гарантируется следующим: рассмотрим отношения $A_i^{(j)}/A_1^{(j)}$ при $h \leqslant j \leqslant h+m-1$ и при $h+m \leqslant j \leqslant h+2m-1$. Максимальное значение отношения в первом промежутке изменения j есть $g_i^{(h)}$, а во втором $g_i^{(h+m)}$. Если $g_i^{(h)} = A_i^{(j_0)}/A_1^{(j_0)}$ $(h \leqslant j_0 \leqslant h+m-1)$, то можно положить $h+r-1 = j_0$, так как из неравенства $g_i^{(h)} \geqslant g_i^{(h+m)}$ следует, что $A_i^{(j_0)}/A_1^{(j_0)}$ будет максимальным значением отношения $A_i^{(j)}/A_1^{(j)}$ при $j_0 \leqslant j \leqslant j_0+m-1$. Так как минимальное значение отношения $A_i^{(j)}/A_1^{(j)}$ для $j_0 \leqslant j \leqslant j_0+m-1$ получается при значении j, не превышающем j_0+m-1, то можно положить, что оно соответствует значению $j = h+m$. В таком случае написанное в тексте неравенство заменяется неравенством

$$g_i^{(h+r-1)} - K_i < \varepsilon\,(m^s - 1) + m^s\,(k_i^{h+r-1} - K_i),$$

которое и приводит к нужному результату, как указано в тексте. — *Прим. перев.*

так как $A_1^{(h+j-1)} > 0$, $\tau_j^{(h)} > 0$. Мы заключаем отсюда, что

$$\lim_{h\to\infty} \frac{A_i^{(h)}}{A_1^{(h)}} = \frac{\tau_i}{\tau_1}.$$

Нам будет нужна еще одна лемма, относящаяся к системе сопряженных точек $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_m^{(i)})$ $(i = 1, \ldots, g)$, в аффинном пространстве A_m, определенном над основным полем K. Обозначим через R поле

$$K(\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(g)}, \ldots, \alpha_m^{(1)}, \ldots, \alpha_m^{(g)}).$$

Лемма II. *Пусть* $X_i(x_1, \ldots, x_m)$ *и* $Y_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, g)$— *две системы многочленов из кольца* $\mathfrak{J} = R[x_1, \ldots, x_m]$, *сопряженных над полем* K. *Если значения* $X_i(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_m^{(i)})$ *отличны от нуля, то в кольце* $K[x_1, \ldots, x_m]$ *существует такой многочлен* $H(x_1, \ldots, x_m)$, *для которого выражения* $X_iH + Y_i$, *записываемые как многочлены от разностей* $x_1 - \alpha_1^{(i)}, \ldots, x_m - \alpha_m^{(i)}$, *не содержат членов меньшей степени, чем заданное целое число* ρ_0.

Пусть $\mathfrak{p}_i$ — идеал кольца $\mathfrak{J} = R[x_1, \ldots, x_m]$, имеющий базис $x_1 - \alpha_1^{(i)}, \ldots, x_m - \alpha_m^{(i)}$. Так как все точки $(\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_m^{(i)})$ $(i = 1, \ldots, g)$ различны, то идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_g$ являются различными максимальными идеалами, и поэтому $(\mathfrak{p}_i^{\rho_0}, \mathfrak{p}_j^{\rho}) = \mathfrak{J}$ при $i \neq j$. Следовательно, можно найти g сопряженных элементов $\zeta_1, \ldots, \zeta_g$ в кольце $\mathfrak{J}$ так, чтобы было

$$\zeta_i = \delta_{ij} \quad (\mathfrak{p}_j^{\rho_0}).$$

Ввиду того, что, по условию, $X_i \neq 0$ $(\mathfrak{p}_i)$, мы имеем

$$\mathfrak{J} \cdot (X_i, \mathfrak{p}_i^{\rho_0}) = \mathfrak{J}.$$

Следовательно, можно найти в $\mathfrak{J}$ систему из g сопряженных элементов $h_1, \ldots, h_g$ и систему сопряженных элементов $\eta_1, \ldots, \eta_g$ $(\eta_i \in \mathfrak{p}_i^{\rho})$, чтобы выполнялись условия

$$h_iX_i + \eta_i = -Y_i \qquad (i = 1, \ldots, g).$$

Положим

$$H = h_1\zeta_1 + \ldots + h_g\zeta_g.$$

Тогда

$$X_iH + Y_i = h_iX_i + Y_i = -\eta_i = 0 \quad (\mathfrak{p}_i^{\rho_0}).$$

Многочлен $H = H(x_1, \ldots, x_m)$ является многочленом над полем R, совпадающим со своими сопряженными. Поэтому он лежит в кольце $K[x_1, \ldots, x_m]$ и удовлетворяет поставленным условиям.

Обратимся теперь к построению последовательности кремоновых преобразований неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ над полем K, соответствующей этапам алгоритма Перрона, примененного к нормам $\tau_1, \ldots, \tau_m$

элементов $\xi_1 - \alpha_1, \ldots, \xi_m - \alpha_m$ в нормировании $\mathfrak{B}$. Эти нормы предполагаются рационально независимыми. Для удобства последующих применений предположим, что в поле $R = K(\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{d+1}^{(g)})$, являющемся расширением степени g поля K, g сопряженных элементов $\alpha_j^{(1)}, \ldots, \alpha_j^{(g)}$ различны при каждом значении j. Следует обратить внимание, однако, на то, что в действительности нам нужно лишь, чтобы элементы $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(g)}$ были различными. Ввиду того, что рассматриваемое преобразование относится только к неизвестным $x_1, \ldots, x_m$, мы опустим в уравнениях остальные неизвестные $x_{m+1}, \ldots, x_{d+1}$.

Пусть $\psi(x) = \prod_{i=1}^{g}(x - \alpha_1^{(i)})$ — характеристический многочлен элемента $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1$ над полем K. Определив целые числа $a_i^{(0)}$ так, как указано в лемме I, рассмотрим преобразование

$$T_1 \begin{cases} x_1 = x'_m, \\ x_i = x'_{i-1}[\psi(x'_m)]^{a_i^{(0)}} + \varphi_i(x'_m) \qquad (i = 2, \ldots, m), \end{cases}$$

где $\varphi_i(x)$ — многочлены над полем K, которые еще нужно определить. Заметим, что уравнения преобразования T_1 могут быть разрешены относительно x' и дают

$$x'_i = [x_{i+1} - \varphi_{i+1}(x_1)]/[\psi(x_1)]^{a_i^{(0)}} \qquad (i = 1, \ldots, m-1),$$
$$x'_m = x_1.$$

Отсюда вытекает, что T_1 есть кремоново преобразование типа (C).

Пусть $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}$ — элементы поля R, для которых g элементов, сопряженных над полем K с каждым из α'_j $(j = 1, \ldots, m-1)$, различны, и пусть $\alpha'_m = \alpha_1$. Если мы положим $\psi(x) = (x - \alpha_1)\psi^*(x)$, то уравнения преобразования T_1 можно будет записать над полем R в виде

$$x_1 - \alpha_1 = x'_m - \alpha'_m,$$
$$x_i - \alpha_i = (x'_m - \alpha'_m)^{a_i^{(0)}}[\psi^*(x'_m)]^{a_i^{(0)}}(x'_{i-1} - \alpha'_{i-1}) +$$
$$+ \alpha'_{i-1}[\psi(x'_m)]^{a_i^{(0)}} - \alpha_i + \varphi_i(x'_m) \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Возьмем в лемме II значения $m = 1$, $\rho_0 = \rho + a_i^{(0)}$, где ρ — произвольно большое целое число, и $X_1 = 1$, $Y_1 = \alpha'_{i-1}[\psi(x)]^{a_i^{(0)}} - \alpha_i$. Выберем многочлен $\varphi_i(x)$ равным многочлену $H(x)$, построенному

в лемме. Тогда из сказанного следует, что

$$x_i - \alpha_i = (x'_m - \alpha'_m)^{a_i^{(0)}} \Delta_{i-1}(x'),$$

где

$$\Delta_i(x') = [\psi^*(x'_m)]^{a_i^{(0)}} (x'_i - \alpha'_i) + (x'_m - \alpha'_m)^{\rho} G_i(x'_m) \quad (i = 1, \ldots, m-1).$$

Рассмотрим теперь нормы элементов $\xi'_i - \alpha'_i$ в нормировании $\mathfrak{B}$. Из уравнений для T_1 вытекает, что

$$\tau'_m = v(\xi'_m - \alpha'_m) = v(\xi_1 - \alpha_1) = \tau_1 > 0.$$

Кроме того, в силу соотношения $\psi^*(\alpha_1) = \psi^*(\alpha'_m) \neq 0$, будет $v[\psi^*(\xi'_m)] = 0$. Если значение ρ взято достаточно большим, то будет выполняться соотношение $\rho\tau_1 > v(\xi'_i - \alpha'_i)$, так как группа значений нормирования архимедовски упорядочена[1]). Следовательно, при достаточно большом значении ρ мы для $i < m$ будем иметь

$$v[\Delta_i(\xi')] = \min[v\{[\psi^*(\xi'_m)]^{a_i^{(0)}}(\xi'_i - \alpha'_i)\}],$$
$$\rho\tau_1 + v\{G_i(\xi'_m)\} = v(\xi'_i - \alpha'_i) = \tau'_i.$$

Поэтому

$$\tau_i = v(\xi_i - \alpha_i) = a_i^{(0)} v(\xi'_m - \alpha'_m) + \tau'_{i-1} = a_i^{(0)}\tau'_m + \tau'_{i-1}.$$

Сравнивая это с результатами, полученными на первом этапе алгоритма Перрона, мы усматриваем, что

$$\tau'_i = \tau_i^{(1)} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Суммируем теперь существенные свойства преобразования T_1, соответствующего первому этапу алгоритма Перрона [мы будем писать $\Delta_m(x')$ вместо $x'_m - \alpha'_m$]:

(I) T_1 есть преобразование типа (C), которое можно над полем R записать в виде

$$x_1 - \alpha_1 = \Delta_m(x'), \quad x_i - \alpha_i = \Delta_{i-1}(x')\Delta_m^{a_i^{(0)}}(x') \qquad (i = 2, \ldots, m)$$

[1]) Следует иметь в виду, что при изменении ρ меняется выбор многочленов φ_i, а значит, и соотношения между ξ и ξ'. Поэтому возможность достижения неравенства $\rho\tau_1 > v(\xi'_i - \alpha'_i)$ будет гарантирована лишь в случае, когда норма $v(\xi'_i - \alpha'_i)$ остается ограниченной при изменении ρ. Но если бы имело место неограниченное возрастание этой нормы, то возрастали бы неограниченно и значения

$$v[\Delta_i(\xi')] \geqslant \min\{v(\xi'_i - \alpha'_i), \ \rho v(\xi'_m - \alpha'_m) + v[G_i(\xi'_m)]\},$$

а это противоречит соотношению $\tau_{i+1} = v(\xi_{i+1} - \alpha_{i+1}) > v[\Delta_i(\xi')]$, вытекающему из равенства $\xi_{i+1} - \alpha_{i+1} = (\xi'_m - \alpha'_m)^{a_{i+1}^{(0)}} \Delta_i(\xi')$. — *Прим. перев.*

или, что равносильно, в виде

$$x_i - \alpha_i = \Delta_1^{A_i^{(1)}}(x') \dots \Delta_m^{A_i^{(m)}}(x') \qquad (i = 1, \dots, m).$$

(II) $\Delta_i(x') = A_i(x'_1, \dots, x'_m)(x'_i - \alpha'_i) + (x'_m - \alpha'_m)^\rho B_i(x'_1, \dots, x'_m)$, где $A_i(\alpha'_1, \dots, \alpha'_m) \neq 0 \quad (i \neq m)$, $\Delta_m(x') = x'_m - \alpha'_m$.

(III) Центром нормирования $\mathfrak{B}$ в преобразованном пространстве является точка

$$(\alpha'_1, \dots, \alpha'_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{d+1}),$$

координаты которой лежат в R. Элементы, сопряженные с α'_i над полем K, все различны.

(IV) $$v(\xi'_i - \alpha'_i) = v[\Delta_i(\xi')] = \tau_i^{(1)}.$$

(V) ρ есть сколь угодно большое целое число.

Для второго этапа алгоритма Перрона мы можем построить преобразование неизвестных $(x'_1, \dots, x'_m)$ в $(x''_1, \dots, x''_m)$, подобное преобразованию T_1. При этом преобразование $(x_1, \dots, x_m)$ в $(x''_1, \dots, x''_m)$ будет обозначаться через T_2. Продолжая таким образом, мы получаем преобразование T_h, соответствующее h-му этапу алгоритма. Ясно, что полученное преобразование будет преобразованием типа (C):

$$x_i = P_i(y_1, \dots, y_m) \qquad (i = 1, \dots, m),$$

где P_i — многочлены над полем K. Докажем, что преобразование T_h обладает следующими свойствами:

(I) Над полем R преобразование T_h можно записать в виде

$$x_i - \alpha_i = \Delta_1^{A_i^{(h)}}(y) \dots \Delta_m^{A_i^{(h+m-1)}}(y) L_i(y_1, \dots, y_m) \quad (i = 1, \dots, m),$$

где

$$L_i(\beta_1, \dots, \beta_m) \neq 0.$$

(II) $\Delta_m(y) = y_m - \beta_m$,

$$\Delta_i(y) = A_i(y_1, \dots, y_m)(y_i - \beta_i) + (y_m - \beta_m)^\rho B_i(y_1, \dots, y_m) \qquad (i < m),$$

где

$$A_i(\beta_1, \dots, \beta_m) \neq 0.$$

(III) Центром нормирования $\mathfrak{B}$ в преобразованном пространстве является точка

$$(\beta_1, \dots, \beta_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{d+1})$$

с координатами в поле R. Элементы, сопряженные с каждым из β_i над полем K, все различны.

(IV) $v(\eta_i - \beta_i) = v[\Delta_i(\eta)] = \tau_i^{(h)}$.

(V) ρ — сколь угодно большое целое число.

Мы видели, что эти свойства имеют место при $h = 1$. Предположим поэтому, что T_h обладает этими свойствами, и докажем, что ими обладает T_{h+1}.

Переход от T_h к T_{h+1} осуществляется последующим преобразованием неизвестных $y_1, \ldots, y_m$ с помощью преобразования $T_1^{(h)}$ над полем K, аналогичного преобразованию T_1 и имеющего над полем R вид

$$y_1 - \beta_1 = y'_m - \beta'_m,$$

$$y_i - \beta_i = (y'_m - \beta'_m)^{a_i^{(h)}} [C_i(y'_m)(y'_{i-1} - \beta'_{i-1}) + (y'_m - \beta'_m)^{\rho'} D_i(y'_m)] \qquad (i = 2, \ldots, m),$$

где $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{d+1})$ — центр нормирования $\mathfrak{B}$ в пространстве y', имеющий координаты из поля R. Кроме того, все сопряженные с каждым из элементов β'_i над полем K различны [свойство (III)], $C_i(\beta'_m) \neq 0$ и ρ' — сколь угодно большое целое число.

Из свойств преобразования T_1 мы усматриваем, что при достаточно большом ρ' будет

$$v[C_i(\eta'_m)(\eta'_{i-1} - \beta'_{i-1}) + (\eta'_m - \beta'_m)^{\rho'} D_i(\eta'_m)] = v(\eta'_{i-1} - \beta'_{i-1}) \qquad (i = 2, \ldots, m)$$

(мы обозначим эту величину через τ'_{i-1}). Далее,

$$\tau'_m = v(\eta'_m - \beta'_m) = v(\eta_1 - \beta_1) = \tau_1^{(h)}.$$

Следовательно,

$$\tau_i^{(h)} = v(\eta_i - \beta_i) = a_i^{(h)} \tau_1^{(h)} + \tau'_{i-1} \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Сопоставляя эти равенства с равенствами, относящимися к алгоритму Перрона, находим, что $\tau'_i = \tau_i^{(h+1)}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Рассмотрим теперь выражения $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_m(y)$.

$$\Delta_1(y) = A_1(y)(y_1 - \beta_1) + (y_m - \beta_m)^{\rho} B_1(y) = (y'_m - \beta'_m)[A_0(y') + (y'_m - \beta'_m)^{\rho a_m^{(h)} - 1} B_0(y')],$$

где $A_0(y')$ и $B_0(y')$ — многочлены от $y'_1, \ldots, y'_m$, причем

$$A_1(y) = A_0(y').$$

Так как $v[A_1(\eta)]=0$, то $v[A_0(\eta')]=0$, т. е. $A_0(\beta')\neq 0$. Но $a_m^{(h)}>0$, а значит, при достаточно большом ρ

$$v[A_0(\eta')+(\eta'_m-\beta'_m)^{\rho a_m^{(h)}-1}B_0(\eta')]=v[A_0(\eta')]=0.$$

Следовательно,

$$\Delta_1(y)=(y'_m-\beta'_m)M(y'_1,\ \ldots,\ y'_m),$$

где $M(\beta'_1,\ \ldots,\ \beta'_m)\neq 0$. Если $1<i<m$, то

$$\Delta_i(y)=A_i(y)(y_i-\beta_i)+(y_m-\beta_m)^{\rho}B_i(y)=$$
$$=A'_i(y')(y'_m-\beta'_m)^{a_i^{(h)}}\{C_i(y'_m)(y'_{i-1}-\beta'_{i-1})+(y'_m-\beta'_m)^{\rho'}D_i(y'_m)\}+$$
$$+(y'_m-\beta'_m)^{\rho a_m^{(h)}}\{C_m(y'_m)(y'_{m-1}-\beta'_{m-1})+$$
$$+(y'_m-\beta'_m)^{\rho'}D_m(y'_m)\}^{\rho}B'_i(y'),$$

где

$$A_i(y)=A'_i(y'),\quad B_i(y)=B'_i(y').$$

Отсюда вытекает, что при достаточно больших ρ и ρ' мы можем написать

$$\Delta_i(y)=(y'_m-\beta'_m)^{a_i^{(h)}}[A^*_{i-1}(y')(y'_{i-1}-\beta'_{i-1})+(y'_m-\beta'_m)^{\sigma}B^*_{i-1}(y')]$$

где σ — произвольно большое заданное число, $B^*_{i-1}(y')$ — многочлен и

$$A^*_{i-1}(y')=A'_i(y')C_i(y'_m).$$

Так как

$$v[A'_i(\eta')]=v[C_i(\eta')]=0,$$

то

$$A^*_{i-1}(\beta')\neq 0.$$

Положим теперь для $1<i<m$

$$\Delta^*_{i-1}(y')=A^*_{i-1}(y')(y'_{i-1}-\beta'_{i-1})+(y'_m-\beta'_m)^{\sigma}B^*_{i-1}(y').$$

Тогда, если число σ достаточно велико,

$$v[\Delta^*_{i-1}(\eta')]=v(\eta'_{i-1}-\beta'_{i-1})=\tau_{i-1}^{(h+1)}.$$

Наконец,

$$\Delta_m(y)=y_m-\beta_m=(y'_m-\beta'_m)^{a_m^{(h)}}\Delta^*_{m-1}(y'),$$

где

$$\Delta^*_{m-1}(y')=C_m(y'_m)(y'_{m-1}-\beta'_{m-1})+(y'_m-\beta'_m)^{\rho'}D_m(y'_m)=$$
$$=A^*_{m-1}(y')(y'_{m-1}-\beta'_{m-1})+(y'_m-\beta'_m)^{\sigma}B^*_{m-1}(y')$$

при $\rho' \geqslant \sigma$. Далее, если число σ достаточно велико, то

$$v[\Delta^*_{m-1}(\eta')] = v(\eta'_{m-1} - \beta'_{m-1}) = \tau^{(h+1)}_{m-1}.$$

Если положить теперь $\Delta^*_m(y') = y'_m - \beta'_m$, то будет видно, что выражения $\Delta^*_1(y')$, ..., $\Delta^*_m(y')$ удовлетворяют условию (II). Кроме того, выполнено условие (IV), в котором h заменено на $h+1$, а число σ удовлетворяет условию (V) для ρ.

Остается еще рассмотреть условие (I). Мы имеем

$$x_i - \alpha_i = \Delta_1^{A_i^{(h)}}(y) \ \ldots \ \Delta_m^{A_i^{(h+m-1)}}(y) L_i(y_1, \ \ldots, \ y_m)$$

и

$$\Delta_1(y) = \Delta^*_m(y') M(y'_1, \ \ldots, \ y'_m),$$

$$\Delta_i(y) = \Delta^*_{i-1}(y') [\Delta^*_m(y')]^{a_i^{(h)}} \qquad (i = 2, \ \ldots, \ m).$$

Следовательно,

$$x_i - \alpha_i = [\Delta^*_1(y')]^{A_i^{(h+1)}} \ \ldots \ [\Delta^*_{m-1}(y')]^{A_i^{(h+m-1)}} [\Delta^*_m(y')]^{k_i} \times$$

$$\times L_i(y_1, \ \ldots, \ y_m) [M(y')]^{A_1^{(h)}},$$

где

$$k_i = \sum_{j=1}^{m} A_i^{(h+j-1)} a_j^{(h)} = A_i^{(h+m)} \quad (a_1^{(h)} = 1).$$

Если положить теперь

$$L^*_i(y'_1, \ \ldots, \ y'_m) = L_i(y_1, \ \ldots, \ y_m) [M(y'_1, \ \ldots, \ y'_m)]^{A_1^{(h)}},$$

то

$$L^*_i(\beta'_1, \ \ldots, \ \beta'_m) = L_i(\beta_1, \ \ldots, \ \beta_m) [M(\beta'_1, \ \ldots, \ \beta'_m)]^{A_1^{(h)}} \neq 0.$$

Следовательно, преобразование T_{h+1} удовлетворяет условию (I), в котором выражения $\Delta_1, \ \ldots, \ \Delta_m, \ L_i$ заменены на $\Delta^*_1, \ \ldots, \ \Delta^*_m, \ L^*_i$, а h заменено на $h+1$. Таким образом, все нужные условия выполнены.

Преобразования T_h играют основную роль в доказательстве локальной теоремы об униформизации.

Установим теперь одно важное свойство этих преобразований. Пусть

$$F(x_1, \ \ldots, \ x_{d+1})$$

— многочлен с коэффициентами из R. Положим, что

$$F(x) = \sum a_i(x_{m+1}, \ \ldots, \ x_{d+1}) (x_1 - \alpha_1)^{\lambda_{i1}} \ \ldots \ (x_m - \alpha_m)^{\lambda_{im}}.$$

Если $i \neq j$, то не может иметь место равенство

$$\lambda_{i1}\tau_1 + \ldots + \lambda_{im}\tau_m = \lambda_{j1}\tau_1 + \ldots + \lambda_{jm}\tau_m,$$

так как числа $\tau_1, \ldots, \tau_m$ рационально независимы и из написанного равенства следовало бы, что $\lambda_{ik} = \lambda_{jk}$ при $k = 1, \ldots, m$. Можно предполагать члены в выражении $F(x)$ расположенными так, что имеют место неравенства

$$\lambda_{11}\tau_1 + \ldots + \lambda_{1m}\tau_m < \lambda_{j1}\tau_1 + \ldots + \lambda_{jm}\tau_m \quad (j > 1).$$

Будем говорить, что многочлен $F(x)$ *моновалентен относительно* $x_1, \ldots, x_m$, если

$$v[a_1(\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{d+1})] = 0.$$

Если многочлен $F(x)$ моновалентен и если $j > 1$, то

$$v[a_j(\xi)(\xi_1 - \alpha_1)^{\lambda_{j1}} \ldots (\xi_m - \alpha_m)^{\lambda_{jm}}] =$$

$$= v[a_j(\xi)] + \sum_k \lambda_{jk}\tau_k > v[a_1(\xi)] + \sum_k \lambda_{1k}\tau_k.$$

Следовательно,

$$v[F(\xi)] = \lambda_{11}\tau_1 + \ldots + \lambda_{1m}\tau_m.$$

Теорема I. *Если многочлен* $F(x_1, \ldots, x_{d+1})$ *моновалентен относительно* $x_1, \ldots, x_m$, *то при достаточно большом* h *преобразование* T_h *обращает* $F(x)$ *в многочлен вида*

$$\Delta_1^{\lambda_1}(y) \ldots \Delta_m^{\lambda_m}(y)\, G(y_1, \ldots, y_{d+1}),$$

где

$$v[G(\eta)] = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{1j} A_j^{(h+i-1)}.$$

Так как преобразование T_h переводит разность $(x_j - \alpha_j)$ в выражение $\Delta_1^{A_j^{(h)}}(y) \ldots \Delta_m^{A_j^{(h+m-1)}}(y) L_j(y_1, \ldots, y_m)$, в котором $v[L_j(\eta)] = 0$, то оно переводит произведение $\prod_{j=1}^{m}(x_j - \alpha_j)^{\lambda_{ij}}$ в $\prod_{j=1}^{m} \Delta^{\mu_{ij}}(y)\, M_i(y_1, \ldots, y_m)$, где $v[M_i(\eta)] = 0$ и $\mu_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} A_k^{(h+j-1)}$.

Далее, по условию,

$$\sum_k (\lambda_{ik} - \lambda_{1k})\tau_k > 0 \qquad (i > 1).$$

Но отношение $A_k^{(h+j-1)}/A_1^{(h+j-1)}$ стремится к τ_k/τ_1, причем для достаточно большого h числа $A_1^{(h+j-1)}$, τ_1 и τ_k положительны. Следовательно, при достаточно большом h будет

$$\sum_k (\lambda_{ik} - \lambda_{1k}) A_k^{(h+j-1)} > 0.$$

Выберем теперь h настолько большим, чтобы это неравенство имело место для всех значений i, больших единицы, и для $j = 1, \ldots, m$. Тогда $\mu_{ij} > \mu_{1j}$. Если обозначить μ_{1j} через λ_j, то

$$a_1 \prod_{j=1}^{m} (x_j - \alpha_j)^{\lambda_1 j} = \Delta_1^{\lambda_1}(y) \ \ldots \ \Delta_m^{\lambda_m}(y) N(y_1, \ \ldots, \ y_m),$$

где $v[N(\eta)] = 0$. При $k > 1$ будем иметь

$$a_k \prod_{j=1}^{m} (x_j - \alpha_j)^{\lambda_{kj}} = \Delta_1^{\lambda_1 + 1}(y) \ \ldots \ \Delta_m^{\lambda_m + 1}(y) H_k(y_1, \ \ldots, \ y_m).$$

Следовательно,

$$F(x) = \Delta_1^{\lambda_1}(y) \ \ldots \ \Delta_m^{\lambda_m}(y) [N(y_1, \ \ldots, \ y_m) + \\ + \Delta_1(y) \ \ldots \ \Delta_m(y) \sum_{k \geqslant 2} H_k(y)].$$

Так как $v[\Delta_i(\eta)] > 0$, то

$$v[G(\eta)] = v[N(\eta) + \Delta_1(\eta) \ \ldots \ \Delta_m(\eta) \sum H_k(\eta)] = v[N(\eta)] = 0.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Если многочлены $F(x)$ и $G(x)$ моновалентны относительно $x_1, \ \ldots, \ x_m$ и если $v[F(\xi)] = v[G(\xi)]$, то при достаточно большом h преобразование T_h переводит $F(x)$ и $G(x)$ в многочлены от $y_1, \ \ldots, \ y_m$, отличающиеся друг от друга только множителями $F_1(y)$ и $G_1(y)$, для которых значение $v[F_1(\eta)] = v[G_1(\eta)] = 0$.*

Рассмотрим теперь некоторое кремоново преобразование неизвестных $x_1, \ \ldots, \ x_{m+1}$ в случае, когда норма τ_{m+1} разности $\xi_{m+1} - \alpha_{m+1}$ рационально зависит от $\tau_1, \ \ldots, \ \tau_m$, а эти последние рационально независимы.

Система форм $\Delta_1(x), \ \ldots, \ \Delta_m(x)$ от неизвестных $x_1, \ \ldots, \ x_m$ с коэффициентами из поля R будет называться *нормальной m-системой* относительно $x_1, \ \ldots, \ x_m$, если

$$\Delta_i(x) = A_i(x_1, \ \ldots, \ x_m)(x_i - \alpha_i) + (x_m - \alpha_m)^{\rho} B_i(x_1, \ \ldots, \ x_m),$$

где ρ — достаточно большое число, а $v[A_i(\xi)] = 0$. Отметим, что

$$\Delta_m(x) = (x_m - \alpha_m) C(x_1, \ \ldots, \ x_m),$$

где $v[C(\xi_1, \ \ldots, \ \xi_m)] = 0$. Следовательно, можно всегда принять $\Delta_m(x)$ равным $x_m - \alpha_m$. В случае, когда число τ_{m+1} рационально зависит от $\tau_1, \ \ldots, \ \tau_m$, нам придется рассматривать также $(m+1)$-системы относительно $x_1, \ \ldots, \ x_{m+1}$, например систему $\delta_1(x), \ \ldots \ \ldots, \ \delta_{m+1}(x)$, где

$$\delta_i(x) = a_i(x_1, \ \ldots, \ x_{m+1})(x_i - \alpha_i) + (x_m - \alpha_m)^{\rho} b_i(x_1, \ \ldots, \ x_{m+1}).$$

Здесь $v[a_i(\xi)] = 0$ и ρ — достаточно большое целое число.

Будем искать кремоново преобразование типа (C), приводящее некоторую $(m+1)$-систему к специальной форме. Докажем такую теорему:

Теорема II. *Если задана некоторая $(m+1)$-система $\delta_1(x), \ldots, \delta_{m+1}(x)$, то существует кремоново преобразование*

$$x_i = P_i(y_1, \ldots, y_{m+1}) \qquad (i = 1, \ldots, m+1),$$

обладающее следующими свойствами:

(I) *Если рассматривать $\mathfrak{B}$ как нормирование над полем R, то его центром в пространстве y является нульмерное многообразие с общей точкой*

$$(\beta_1, \ldots, \beta_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_{d+1}),$$

где $\beta_i (i \leqslant m)$ — элементы из R, причем элементы, сопряженные с каждым $\beta_i (i \leqslant m)$ над полем K, все различны.

(II) $\alpha_i = P_i(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1}) \qquad (i = 1, \ldots, m+1).$

(III) $\delta_i(x) = \Delta_1^{b_{i1}}(y) \ldots \Delta_{m+1}^{b_{i\,m+1}}(y)\, G_i(y_1, \ldots, y_{m+1}),$

где $b_{ij} \geqslant 0$, определитель $|b_{ij}| = \pm 1$, $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_m(y)$ — нормальная m-система относительно $y_1, \ldots, y_m$,

$$\Delta_{m+1}(y) = A_{m+1}(y_1, \ldots, y_{m+1}) y_{m+1} + \\ + (y_m - \beta_m)^{\sigma} B_{m+1}(y_1, \ldots, y_{m+1}),$$

$$v[A_{m+1}(\eta)] = v[G_i(\eta)] = 0,$$

а σ — сколь угодно большое целое число.

(IV) *$A_{m+1}(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1})$ и $G_i(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1})$ являются отличными от нуля константами из R.*

(V) $v(\eta_{m+1}) = 0.$

В доказательстве этой теоремы существенно предположение, чтобы каждый из элементов $\sigma_j (j = 1, \ldots, m)$ вместе с его сопряженными над полем K составлял базис поля R над K. Мы видели, что надлежащим выбором системы координат этого всегда можно добиться в любом приложении теоремы.

Так как число τ_{m+1} рационально зависит от чисел $\tau_1, \ldots, \tau_m$, то мы имеем соотношение

$$\lambda \tau_{m+1} = \lambda_1 \tau_1 + \ldots + \lambda_m \tau_m,$$

где целые числа $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ не имеют общих им всем множителей и можно считать λ положительным. Ввиду рациональной независимости $\tau_1, \ldots, \tau_m$, такое соотношение единственно. Для упрощения мы разобьем построение нужного преобразования на три этапа. Этап А будет состоять в преобразовании неизвестных $x_1, \ldots, x_m$, приводящем к такому положению, когда все $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ положительны,

причем λ_m больше λ и не делится на λ, если только $\lambda > 1$. Этап Б будет позволять нам приводить случай, когда $\lambda > 1$, к случаю $\lambda = 1$. Наконец, этап В относится к случаю $\lambda = 1$, $\lambda_i \geqslant 1$. Иногда необходимости в этапах А и Б может и не быть, этап же В нужен всегда. Он нужен для того, чтобы обеспечить свойства (II) и (IV). Для понимания совокупности свойств преобразований, используемых на отдельных этапах, читателю будет полезно, если мы на каждом этапе будем проверять, что полученное преобразование обладает свойством (III).

Этап А. Произведем над неизвестными $x_1, \ldots, x_m$ преобразование типа T_h. Так как многочлены $\delta_i(x)$ $(i \leqslant m)$, очевидно, моновалентны относительно $x_1, \ldots, x_m$, то, в силу теоремы I, для $i \leqslant m$ имеем

$$\delta_i(x) = \Delta_1^{A_i^{(h)}}(y) \ldots \Delta_m^{A_i^{(h+m-1)}}(y) L_i(y_1, \ldots, y_{m+1}), \quad v[L_i(\eta)] = 0.$$

Система $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_m(y)$ является нормальной m-системой. Поэтому, если положить $\Delta_{m+1}(y) = \delta_{m+1}(x)$, то система $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_{m+1}(y)$ будет $(m+1)$-системой. Из того, что определитель $|A_i^{(h+j-1)}| = \pm 1$, а $A_i^{h+j-1} \geqslant 0$, мы усматриваем, что наше преобразование обладает нужным свойством (III).

Мы имеем

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{m} A_i^{(h+j-1)} \tau_j^{(h)}.$$

Следовательно,

$$\lambda\tau_{m+1} = \lambda_1^{(h)}\tau_1^{(h)} + \ldots + \lambda_m^{(h)}\tau_m^{(h)},$$

где

$$\lambda_i^{(h)} = \lambda_1 A_1^{(h+i-1)} + \ldots + \lambda_m A_m^{(h+i-1)}.$$

Так как при стремлении h к бесконечности

$$\lambda_i^{(h)}/A_1^{(h+i-1)} \to (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\tau_i)/\tau_1 = \lambda\tau_{m+1}/\tau_1,$$

а числа A_1^{h+i-1}, λ, τ_{m+1} и τ_1 положительны, то $\lambda_i^{(h)}$ будут положительными при достаточно большом h. Кроме того, так как $A_i^{(h)} \to \infty$, то можно добиться, чтобы было $\lambda_i^{(h)} > \lambda$. Если $\lambda > 1$, то числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ не все делятся на λ, а определитель $|A_i^{(h+j-1)}| = \pm 1$. Отсюда следует, что числа $\lambda_1^{(h)}, \ldots, \lambda_m^{(h)}$ также не все делятся на λ. Но так так $\lambda_i^{(h+1)} = \lambda_{i+1}^{(h)}$ $(i < m)$, то ясно, что при надлежащем выборе h число $\lambda_m^{(h)}$ не будет делиться на λ. Таким образом, преобразование T_h можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения $\lambda_i^{(h)} > 0$, $\lambda_m^{(h)} > \lambda$ и чтобы число $\lambda_m^{(h)}$ не делилось на λ. Кроме того, в силу ранее рассмотренных свойств преобразования T_h, центр нор-

мирования $\mathfrak{B}$ в пространстве y будет иметь координаты из поля R, причем элементы, сопряженные над полем K с каждой из координат, все различны.

Итак, посредством надлежащего выбора преобразования T_h мы свели задачу доказательства теоремы II к случаю, когда числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ положительны, $\lambda_m > \lambda$, причем λ_m может делиться на λ только в случае $\lambda = 1$. Если получится, что $\lambda = 1$, то мы прямо перейдем к этапу В. Если $\lambda > 1$, то обратимся к этапу Б.

Этап Б. Напомним, что, в силу одного из свойств преобразования T_h, будет $\tau_m^{(h)} > \tau_1^{(h)}$. Поэтому мы будем предполагать соотношение

$$\lambda\tau_{m+1} = \lambda_1\tau_1 + \ldots + \lambda_m\tau_m$$

таким, что $\lambda_i > 0$, $\lambda_m > \lambda > 1$, $\tau_m > \tau_1$ и λ_m не делится на λ. Тогда можно записать

$$\lambda_m = g\lambda + \lambda',$$

где $\lambda > \lambda' > 0$, а $g \geqslant 1$. Подобно тому, как было построено преобразование T_1, можно построить кремоново преобразование над полем K для неизвестных x_m и x_{m+1}, имеющее вид

$$x_m = x'_m,$$

$$x_{m+1} = x'_{m+1}P(x'_m) + Q(x'_m)$$

и приводящееся над полем R к виду

$$x_m - \alpha_m = x'_m - \alpha'_m,$$

$$x_{m+1} - \alpha_{m+1} = (x'_m - \alpha'_m)^g [C(x'_m)(x'_{m+1} - \alpha'_{m+1}) + (x'_m - \alpha'_m)^\sigma D(x'_m)].$$

В силу свойств преобразования T_h, использованного в этапе А, элементы, сопряженные с каждым из элементов $\alpha'_i = \alpha_i$ $(i \leqslant m)$ над полем K, все различны, и мы можем выбрать элемент α'_{m+1} так, чтобы его сопряженные над K также были различными.

Далее,

$$\delta_{m+1}(x) = (x'_m - \alpha'_m)^g \delta'_{m+1}(x'),$$

где

$$\delta'_{m+1}(x') = a_{m+1}(x) C(x'_m)(x'_{m+1} - \alpha'_{m+1}) + (x'_m - \alpha'_m)^{\rho-g} b_{m+1}(x) + (x'_m - \alpha'_m)^\sigma D(x'_m).$$

Если мы положим $\delta'_i(x') = \delta_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$, то система $\delta'_1(x'), \ldots, \delta'_{m+1}(x')$ будет $(m+1)$-системой, причем

$$\delta_i(x) = \delta'_i(x') \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad \delta_{m+1}(x) = [\delta'_m(x')]^g \delta'_{m+1}(x').$$

Тем самым обеспечено свойство (III). Кроме того,

$$\tau'_{m+1} = v(\xi'_{m+1} - \alpha'_{m+1}) = v[\delta'_{m+1}(\xi')] = \tau_{m+1} - g\tau_m,$$

и поэтому

$$\lambda\tau'_{m+1} = \lambda_1\tau_1 + \ldots + \lambda_{m-1}\tau_{m-1} + \lambda'\tau_m,$$

где $0 < \lambda' < \lambda$, $\lambda_i > 0$.

Здесь следует отметить, что ввиду единственности линейного соотношения, связывающего $\tau_1, \ldots, \tau_m, \tau'_{m+1}$, и в силу того, что в этом соотношении присутствуют все числа τ_i и число τ'_{m+1}, любые m из чисел $\tau_1, \ldots, \tau_m, \tau'_{m+1}$ должны быть рационально независимыми. Построим теперь другое кремоново преобразование, аналогичное T_1 и относящееся к неизвестным x'_1, x'_m, x'_{m+1} (или к x'_1, x'_2, если $m = 1$). Если $m = 1$, то преобразование будет иметь вид

$$x'_1 = y_2 R(y_1) + S(y_1),$$
$$x'_2 = y_1$$

и приводится над полем R к виду

$$x'_1 - \alpha'_1 = (y_1 - \beta_1)[E(y_1)(y_2 - \beta_2) + (y_1 - \beta_1)^\tau F(y_1)],$$
$$x'_2 - \alpha'_2 = y_1 - \beta_1.$$

Если же $m > 1$, то оно будет вида

$$x'_1 = y_m,$$
$$x'_m = y_{m+1} R(y_m) + S(y_m),$$
$$x'_{m+1} = y_1$$

и приводится над полем R к виду

$$x'_1 - \alpha'_1 = y_m - \beta_m,$$
$$x'_m - \alpha'_m = (y_m - \beta_m)\Delta_{m+1}(y),$$
$$x'_{m+1} - \alpha'_{m+1} = y_1 - \beta_1.$$

Здесь точка $(\beta_1, \ldots, \beta_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_{d-1})$ является центром нормирования $\mathfrak{B}$ в пространстве y, причем элементы, сопряженные с каждым из β_i над полем K, все различны. Многочлен $\Delta_{m+1}(y)$ имеет вид

$$E(y_m)(y_{m+1} - \beta_{m+1}) + (y_m - \beta_m)^\tau F(y_m),$$

где $v[E(\eta_m)] = 0$, а τ — сколь угодно большое число.

Так как разница между указанными двумя случаями тривиальна, достаточно рассмотреть случай, когда $m > 1$. Мы имеем

$$\delta'_1(x') = a'_1(x')(x'_1 - \alpha'_1) + (x'_m - \beta'_m)^{\sigma} b'_1(x') = \\ = (y_m - \beta_m)\,\varphi(y_1, \ldots, y_{m+1}),$$

где

$$\varphi(y) = a'_1(x') + (y_m - \beta_m)^{\sigma-1} \Delta^{\sigma}_{m+1}(y)\, b'_1(x'),$$

а значит, $\varphi(\beta_1, \ldots \beta_{m+1}) \neq 0$, т. е. $v[\varphi(\eta)] = 0$.

Положим теперь

$$\delta'_i(x') = \Delta_i(y) \qquad (i = 2, \ldots, m-1)$$

и

$$\Delta_m(y) = y_m - \beta_m.$$

Тогда

$$\delta'_m(x') = \Delta_m(y)\,\Delta_{m+1}(y).$$

Наконец,

$$\delta'_{m+1}(x') = a'_{m+1}(x')(x'_{m+1} - \alpha'_{m+1}) + (x'_m - \alpha'_m)^{\sigma} b'_{m+1}(x') = \\ = a'_{m+1}(x')(y_1 - \beta_1) + (y_m - \beta_m)^{\sigma} \Delta^{\sigma}_{m+1}(y)\, b'_{m+1}(x') = \\ = A_{m+1}(y)(y_1 - \beta_1) + (y_m - \beta_m)^{\sigma} B_{m+1}(y) = \Delta_1(y).$$

В таком случае система $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_{m+1}(y)$ является $(m+1)$-системой, причем

$$\delta'_1(x') = \Delta_m(y)\,\varphi(y),$$
$$\delta'_i(x') = \Delta_i(y) \qquad (i = 2, \ldots, m-1),$$
$$\delta'_m(x') = \Delta_m(y)\,\Delta_{m+1}(y),$$
$$\delta'_{m+1}(x') = \Delta_1(y).$$

Таким образом, свойство (III) обеспечено.

Кроме того,

$$\bar{\tau}_{m+1} = v[\Delta_{m+1}(\eta)] = v(\eta_{m+1} - \beta_{m+1}) = v(\xi'_m - \alpha'_m) - \\ - v(\eta_m - \beta_m) = \tau_m - \tau_1,$$
$$\bar{\tau}_1 = v(\eta_1 - \beta_1) = \tau'_{m+1},$$
$$\bar{\tau}_m = v(\eta_m - \beta_m) = \tau_1,$$
$$\bar{\tau}_i = \tau_i \qquad (i \neq 1,\ m,\ m+1).$$

Следовательно,

$$\lambda' \bar{\tau}_{m+1} = \lambda \bar{\tau}_1 - \lambda_2 \bar{\tau}_2 - \ldots - \lambda_{m-1} \bar{\tau}_{m-1} - (\lambda_1 + \lambda') \bar{\tau}_m.$$

В силу нашего построения, числа $\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_m$ рационально независимы, а сопряженные с каждым из β_i над полем K все различны. Поэтому мы возвратились к исходному положению, но число λ оказалось замененным меньшим числом λ'. Повторением этапов А и Б мы в конце концов сведем наше рассмотрение теоремы II к случаю, когда

$$\tau_{m+1} = \lambda_1\tau_1 + \ldots + \lambda_m\tau_m$$

и $\lambda_i > 0$. Этот случай и составляет содержание этапа В.

Этап В. Для этого этапа построения нам нужна еще одна лемма.

Лемма III. *Пусть задано целое число ρ_0, которое мы будем считать достаточно большим. Тогда существует многочлен $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ с коэффициентами из K и m систем $\varepsilon_i^{(1)}, \ldots, \varepsilon_i^{(g)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, состоящих из многочленов над полем R, сопряженных над K и удовлетворяющих условиям:*

(а) $\varphi(x) - \alpha_{m+1}^{(j)} = \varepsilon_1^{(j)} \ldots \varepsilon_m^{(j)}$,

(б) $\varepsilon_i^{(j)} = A_i^{(j)}(x_1, \ldots, x_i)(x_i - \alpha_i^{(j)})^{\lambda_i} +$ *члены порядка, не меньшего ρ_0, относительно $x_1 - \alpha_1^{(j)}, \ldots, x_i - \alpha_i^{(j)}$. Кроме того,*

$$A_i^{(j)}(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_i^{(j)}) \neq 0, \qquad \varepsilon_i^{(j)}(\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_i^{(k)}) \neq 0 \qquad (j \neq k).$$

Напомним, что точки $(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_{d+1}^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, g)$ сопряжены с центром нормирования $\mathfrak{B}$ в пространстве x и что элементы $\alpha_i^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, g)$ предполагаются различными. Это одно из мест нашего построения, в котором сделанное предположение существенно по крайней мере для значений i, не превышающих m.

Мы докажем эту лемму индукцией по m. Рассмотрим прежде всего случай, когда $m = 1$. Можно элементарно построить такой многочлен $\varphi(x)$ с коэффициентами из K, что

$$\varphi(\alpha_1^{(j)}) = \alpha_{m+1}^{(j)},$$

$$\varphi^{(\nu)}(\alpha_1^{(j)}) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots, \rho_0 - 1),$$

$$\varphi^{(\lambda)}(\alpha_1^{(j)}) = 1,$$

где $j = 1, \ldots g$, а $\varphi^{(\nu)}(x)$ означает ν-ю производную от $\varphi(x)$ [1]).

---

[1]) Из сделанного предположения следует, что $R = K(\alpha_i^{(j)})$, т. е. что каждый элемент поля R_j представляется многочленом степени $g - 1$ от элемента $\alpha_i^{(j)}$ с коэффициентами из K. Если $\psi(x)$ — характеристический многочлен для всех $\alpha_1^{(j)}$, то многочлен $\varphi(x)$ можно искать в виде

$$\varphi(x) = P_0(x) + P_1(x)\psi(x) + \ldots + P_{\rho_0-1}(x)[\psi(x)]^{\rho_0-1},$$

где $P_i(x)$ — многочлены степени $g - 1$ от x с коэффициентами из K. Многочлен $P_0(x)$ определяется условием $P_0(\alpha_1^{(1)}) = \alpha_{m+1}^{(1)}$, а остальные $P_i(x)$ определяются последовательно, исходя из условий для производных. Ясно, что этим условиям достаточно удовлетворить при $j = 1$. — *Прим. перев.*

В таком случае многочлены

$$\varphi(x_1) \text{ и } \varepsilon_1^{(j)} = \varphi(x_1) - \alpha_{m+1}^{(j)}$$

удовлетворяют требованиям леммы.

Предположим теперь, что мы можем построить многочлены $\varphi'(x)$, $\varepsilon_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ для заданного m и заданных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Если $\lambda_m = 0$, то можно положить $\varepsilon_m^{(j)} = 1$ и перейти тем самым к случаю $m - 1$. Докажем теперь утверждение леммы для чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, $\lambda_m + 1$. Положим

$$\varepsilon_i = \prod_{j=1}^{g} \varepsilon_i^{(j)}, \qquad \varepsilon_i^{*(j)} = \varepsilon_i / \varepsilon_i^{(j)}.$$

Многочлен ε_i лежит в кольце $K[x_1, \ldots, x_i]$. Покажем, что многочлен

$$\varphi(x) = \varphi'(x) + [cx_m + H(x_1, \ldots, x_{m-1})]\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m$$

при надлежащем выборе элемента c из K и многочлена $H(x_1, \ldots, x_{m-1})$ из $K[x_1, \ldots, x_{m-1}]$ удовлетворяет требованиям леммы, в которых число λ_m заменено на $\lambda_m + 1$. Мы имеем

$$\varphi(x) - \alpha_{m+1}^{(j)} = \varepsilon_1^{(j)} \ldots \varepsilon_m^{(j)} \bar{\varepsilon}^{(j)},$$

где

$$\bar{\varepsilon}^{(j)} = 1 + [cx_m + H(x_1, \ldots, x_{m-1})]\,\varepsilon_1^{*(j)} \ldots \varepsilon_m^{*(j)}.$$

Но

$$\varepsilon_1^{*(j)} \ldots \varepsilon_m^{*(j)} = a^{(j)} + \sum b_i^{(j)} (x_i - \alpha_i^{(j)}) + \text{члены высшего порядка},$$

причем, в силу свойств $\varepsilon_i^{(j)}$, член $a^{(j)}$ отличен от нуля. Если H взят так, что

$$H(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_{m-1}^{(j)}) = h_0,$$

то

$$\bar{\varepsilon}^{(j)} = 1 + (c\alpha_m^{(j)} + h_0)\,a^{(j)} + [(c\alpha_m^{(j)} + h_0)\,b_m^{(j)} + ca^{(j)}](x_m - \alpha_m^{(j)}) + \ldots.$$

Нужно выбрать H так, чтобы в этом разложении отсутствовал свободный член. В таком случае коэффициентом при разности $(x_m - \alpha_m^{(j)})$ будет $(ca^{(j)} - b_m^{(j)})/a^{(j)}$. Выберем в качестве c такой элемент из K, при котором последнее выражение не равно нулю. Пусть теперь X_j – многочлен, получаемый из произведения $\varepsilon_1^{*(j)} \ldots \varepsilon_m^{*(j)}$ при $x_m = \alpha_m^{(j)}$, а $Y_j = 1 + ca_m^{(j)} X_j$. Применим к этим многочленам лемму II (стр. 300) и найдем многочлен $H(x_1, \ldots, x_{m-1})$. Из сказанного следует, что если в многочлене $\bar{\varepsilon}^{(j)}$ мы положим $x_m = \alpha_m^{(j)}$, то получим многочлен $B^{(j)}(x_1, \ldots, x_{m-1})$, который при разложении по разностям $x_1 - \alpha_1^{(j)}, \ldots, x_{m-1} - \alpha_{m-1}^{(j)}$ не будет иметь членов порядка, меньшего ρ_0. Следовательно,

$$\bar{\varepsilon}^{(j)} = A^{(j)}(x_1, \ldots, x_m)(x_m - \alpha_m^{(j)}) + B^{(j)}(x_1, \ldots, x_{m-1}).$$

Но так как коэффициент при разности $x_m - \alpha_m^{(j)}$ в разложении многочлена $\bar{\varepsilon}^{(j)}$ отличен от нуля, то

$$A^{(j)}(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_m^{(j)}) \neq 0.$$

Кроме того,

$$\bar{\varepsilon}^{(j)}(\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_m^{(k)}) = 1 \text{ при } j \neq k.$$

Положим теперь $\bar{\varepsilon}_m^{(j)} = \varepsilon_m^{(j)}\bar{\varepsilon}^{(j)}$. Очевидно, что многочлены $\varphi(x)$, $\varepsilon_1^{(j)}, \ldots, \varepsilon_{m-1}^{(j)}$, $\bar{\varepsilon}_m^{(j)}$ удовлетворяют требованиям леммы при замене λ_m на $\lambda_m + 1$.

Вернемся к построению кремонова преобразования, удовлетворяющего условиям теоремы II.

Построим для чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, входящих в соотношение

$$\tau_{m+1} = \lambda_1\tau_1 + \ldots + \lambda_m\tau_m,$$

многочлены $\varphi(x)$ и $\varepsilon_i^{(j)}$. Напомним, что здесь $\lambda_i > 0$. Положим

$$y_{m+1} = \frac{x_{m+1} - \varphi(x_1, \ldots, x_m)}{\varepsilon_1(x)\ldots\varepsilon_m(x)} + S(x_1, \ldots, x_m),$$

где $S(x_1, \ldots, x_m)$ — многочлен над полем K, еще подлежащий определению. Мы имеем

$$y_{m+1} = \frac{x_{m+1} - \alpha_{m+1}^{(1)}}{\varepsilon_1(x)\ldots\varepsilon_m(x)} - \frac{1}{\varepsilon_1^{*(1)}(x)\ldots\varepsilon_m^{*1)}(x)} + S(x).$$

Воспользуемся теперь леммой II и определим $S(x)$ так, чтобы выражения

$$S(x)\varepsilon_1^{*(j)}(x)\ldots\varepsilon_m^{*(j)}(x) - 1 = C^{(j)}(x_1, \ldots, x_m)$$

при разложении по разностям $x_i - \alpha_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ не содержали членов порядка, меньшего τ_0, где τ_0 — произвольно большое заданное число. Рассмотрим кремоново преобразование

$$\mathfrak{F}\begin{cases} x_{m+1} = \varphi(y_1, \ldots, y_m) + [y_{m+1} - S(y_1, \ldots, y_m)]\,\varepsilon_1(y)\ldots\varepsilon_m(y), \\ x_i = y_i \ (i \neq m+1). \end{cases}$$

Прежде всего рассмотрим центр нормирования $\mathfrak{B}$ в пространстве y (в качестве основного поля берется R). Если $i \neq m+1$, то $\beta_i = \alpha_i$. Мы имеем при этом

$$v(\eta_i - \beta_i) = v(\xi_i - \alpha_i) = \tau_i > 0.$$

Кроме того,

$$x_{m+1} - \alpha_{m+1} = x_{m+1} - \alpha_{m+1}^{(1)} =$$
$$= \varepsilon_1^{(1)}(y)\ldots\varepsilon_m^{(1)}(y)\,[1 + (y_{m+1} - S(y))\,\varepsilon_1^{*(1)}(y)\ldots\varepsilon_m^{*(1)}(y)] =$$
$$= \varepsilon_1^{(1)}(y)\ldots\varepsilon_m^{(1)}(y)\,D^{1)}(y_1, \ldots, y_{m+1}),$$

где

$$D^{(1)}(y_1, \ldots, y_{m+1}) = \varepsilon_1^{*(1)}(y) \ldots \varepsilon_m^{*(1)}(y)\, y_{m+1} - C^{(1)}(y_1, \ldots, y_m).$$

Если число ρ_0 из леммы III взято достаточно большим, то

$$v[\varepsilon_i^{(1)}(\eta)] = \lambda_i v(\eta_i - \alpha_i) = \lambda_i \tau_i.$$

Но так как $\varepsilon_i^{*(1)}(\alpha) \neq 0$, то $v[\varepsilon_i^{*(1)}(\eta)] = 0$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tau_i = \tau_{m+1} = v[\varepsilon_1^{(1)}(\eta_1) \ldots \varepsilon_m^{(1)}(\eta)\, D^{(1)}(\eta)] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tau_i + v[D^{(1)}(\eta)],$$

т. е. при достаточно большом τ_0

$$0 = v[D^{(1)}(\eta)] = v[\varepsilon_1^{*(1)}(\eta) \ldots \varepsilon_m^{*(1)}(\eta)\, \eta_{m+1}].$$

Отсюда следует, что $v(\eta_{m+1}) = 0$.

Мы видим поэтому, что $v(\eta_i) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, d+1)$, а значит, центр нормирования $\mathfrak{B}$ в пространстве y находится на конечном расстоянии. Он лежит на гиперплоскостях $y_i = \beta_i = \alpha_i (i = 1, \ldots, m, m+2, \ldots, d+1)$, определенных над полем R, и не лежит на гиперплоскости $y_{m+1} = 0$. Этот центр представляет собой нульмерное многообразие над полем R, но не обязательно является точкой. Общей точкой его будет точка $(\beta_1, \ldots, \beta_{d+1})$, где элемент β_{m+1} алгебраичен над R, а элементы, сопряженные с любым из $\beta_i (i \leqslant m)$ над полем K, все различны.

Обращаем внимание на важное свойство преобразования $\mathfrak{T}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_{m+1})$ — любой многочлен от $x_1, \ldots, x_{m+1}$, а $g(y_1, \ldots, y_{m+1})$ — многочлен, получаемый из f с помощью преобразования $\mathfrak{T}$. Тогда

$$g(y_1, \ldots, y_{m+1}) =$$

$$= f(y_1, \ldots, y_m, \varphi(y_1, \ldots, y_m) + [y_{m+1} - S(y)]\, \varepsilon_1(y) \ldots \varepsilon_m(y)).$$

Но так как

$$\varepsilon_i(\beta) = 0,$$

то отсюда следует, что

$$g(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)),$$

т. е. что $g(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1})$ не зависит от y_{m+1}.

Заключительное преобразование представляет собой преобразование типа T_h над неизвестными $y_1, \ldots, y_m$ и поэтому не нарушает только что указанного свойства преобразования $\mathfrak{T}$. Если T_h переводит

$(y_1, \ldots, y_{m+1})$ в $(z_1, \ldots, z_{m+1})$, а $(\beta_1, \ldots, \beta_{d+1})$ в $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{d+1})$, то $\gamma_i \in R$ $(i \neq m)$, и мы получаем

$$\delta_i(x) = \Delta_1^{A_i^{(h)}}(z) \ldots \Delta_m^{A_i^{(h+m-1)}}(z)\, L_i(z) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $\Delta_1(z), \ldots, \Delta_m(z)$ — нормальная m-система, а $v[L_i(\zeta)] = 0$. Кроме того,

$$\delta_{m+1}(x) = a_{m+1}(x)(x_{m+1} - \alpha_{m+1}) + (x_m - \alpha_m)^{\rho} b_{m+1}(x) =$$
$$= a'(y)\, \varepsilon_1^{(1)}(y) \ldots \varepsilon_m^{(1)}(y)\, D^{(1)}(y_1, \ldots, y_{m+1}) + (y_m - \beta_m)^{\rho} b'(y),$$

где

$$a_{m+1}(x) = a'(y), \quad b_{m+1}(x) = b'(y).$$

Отметим, что $a'(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1})$ не зависит от y_{m+1} в силу свойства преобразования $\mathfrak{F}$.

Перейдем теперь от пространства y к пространству z. Так как многочлены

$$\varepsilon_i^{(1)}(y), \ldots, \varepsilon_m^{(1)}(y), \quad y_m - \beta_m$$

зависят только от $y_1, \ldots, y_m$, то непосредственное применение теоремы I дает, что

$$\varepsilon_i^{(1)}(y) = \Delta_1^{\lambda_i A_i^{(h)}}(z) \ldots \Delta_m^{\lambda_i A_i^{(h+m-1)}}(z)\, N_i(z) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$y_m - \beta_m = \Delta_1^{A_m^{(h)}}(z) \ldots \Delta_m^{A_m^{(h+m-1)}}(z)\, N(z),$$

где $N_i(z)$ и $N(z)$ зависят только от $z_1, \ldots, z_m$ и

$$v[N_i(\zeta)] = v[N(\zeta)] = 0.$$

Положим $a'(y) = \alpha(z)$ и $b'(y) = \beta(z)$. Эти многочлены зависят от $z_1, \ldots, z_{m+1}$, но, в силу сделанного выше замечания, значение

$$\alpha(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, z_{m+1}) = a'(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1})$$

является отличной от нуля константой.

Далее, мы имеем

$$D^{(1)}(y) = \varepsilon_1^{*(1)}(y) \ldots \varepsilon_m^{*(1)}(y)\, y_{m+1} - C^{(1)}(y_1, \ldots, y_m) =$$
$$= P(z_1, \ldots, z_m)\, z_{m+1} + \Delta_1^{\sigma_1}(z) \ldots \Delta_m^{\sigma_m}(z)\, Q'(z).$$

Так как $C^{(1)}(y)$ не содержит членов со степенями, меньшими, чем сколь угодно большое число σ_0, то мы можем считать σ_m настолько большим, насколько нам нужно. Пусть $\sigma_m \geqslant \rho'$, где ρ' — достаточно большое число. Тогда

$$D^{(1)}(y) = P(z)\, z_{m+1} + (z_m - \gamma_m)^{\rho'} R(z),$$

где

$$v[P(\zeta)] = v[\varepsilon_1^{*(1)}(\eta) \dots \varepsilon_m^{*(1)}(\eta)] = 0$$

и

$$v(\zeta) = 0.$$

Поэтому мы имеем

$$\delta_{m+1}(x) = a'(y)\,\varepsilon_1^{(1)}(y) \dots \varepsilon_m^{(1)}(y)\,D^{(1)}(y) + (y_m - \beta_m)^{\rho} b'(y) =$$

$$= \alpha(z) \prod_1^m \Delta_i^{\mu_i}(z) \prod_1^m N_i(z)\,[P(z)\,z_{m+1} + (z_m - \gamma_m)^{\rho'} R(z)] +$$

$$+ \prod_1^m \Delta_i^{\rho A_m^{(h+i-1)}}(z)\,N^{\rho}(z)\,\beta(z),$$

где

$$\mu_i = \lambda_1 A_1^{(h+i-1)} + \dots + \lambda_m A_m^{(h+i-1)}.$$

Выберем ρ так, чтобы было

$$\rho A_m^{(h+i-1)} \geqslant \mu_i \qquad (i = 1, \dots, m-1)$$

и

$$\rho A_m^{(h+m-1)} \geqslant \mu_m + \rho'.$$

Тогда, если мы положим

$$A_{m+1}(z) = \alpha(z) \prod_1^m N_i(z)\,P(z),$$

то $A_{m+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_m, z_{m+1})$ будет отличной от нуля константой. Если обозначить

$$B_{m+1}(z) = \alpha(z) \prod_1^m N_i(z)\,R(z) +$$

$$+ \prod_1^{m-1} \Delta_i^{\rho A_m^{(h+i-1)} - \mu_1}(z) \cdot \Delta_m^{\rho A_m^{(h+m-1)} - \mu_m - \rho'}(z)\,N^{\rho}(z)\,\beta(z),$$

то

$$\delta_{m+1}(x) = \Delta_1^{\mu_1}(z) \dots \Delta_m^{\mu_m}(z)\,\Delta_{m+1}(z),$$

где

$$\Delta_{m+1}(z) = A_{m+1}(z)\,z_{m+1} - (z_m - \gamma_m)^{\rho'} B_{m+1}(z).$$

Этим, в сущности, заканчивается доказательство теоремы II. Ясно, что если мы скомбинируем все произведенные преобразования в одно, то получится кремоново преобразование вида

$$x_i = P_i(y_1, \dots, y_{m+1}) \qquad (i = 1, \dots, m+1),$$

где $P_i(y)$ — многочлены над полем K. Мы уже показали, что результирующее преобразование обладает свойствами (IV) и (V), а также и (III), так как последнее проверялось на каждом этапе. Кроме того, было доказано, что имеет место и свойство (I), так что остается лишь убедиться, что свойство (II) также верно.

Пусть результирующим преобразованием этапов А и Б будет

$$x_i = p_i(X_1, \ldots, X_{m+1}) \qquad (i = 1, \ldots, m+1).$$

Преобразование

$$X_i = q_i(y_1, \ldots, y_{m+1}) \qquad (i = 1, \ldots, m+1)$$

этапа В переводит любой многочлен $f(X)$ в такой многочлен $g(y)$, для которого значение $g(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1})$ постоянно. Беря в качестве $f(X)$ многочлены $\varphi_i(X_1, \ldots, X_{m+1})$, мы видим, что для результирующего преобразования

$$x_i = P_i(y_1, \ldots, y_{m+1}) \qquad (i = 1, \ldots, m+1)$$

всех трех этапов значения $P_i(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1})$ не будут зависеть от y_{m+1}. Но при $y_{m+1} = \beta_{m+1}$ мы имеем

$$\alpha_i = P_i(\beta_1, \ldots, \beta_{m+1}) \qquad (i = 1, \ldots, m+1).$$

Следовательно,

$$\alpha_i = P_i(\beta_1, \ldots, \beta_m, y_{m+1}) \qquad (i = 1, \ldots, m+1),$$

как это и требуется условием (II).

Тем самым мы убедились, что все требования теоремы II выполнены.

Следующей нашей задачей является обобщение теоремы I таким образом, чтобы освободиться от условия моновалентности многочлена $F(x)$ относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_m$. Мы рассмотрим это обобщение в следующем параграфе. Здесь же ограничимся частным результатом, который будет полезен. Пусть $\delta_1(x), \ldots, \delta_{m+1}(x)$ — некоторая $(m+1)$-система в том смысле, как это было определено. Рассмотрим некоторое число произведений

$$\pi_i(x) = \prod_{j=1}^{m+1} \delta_j^{\lambda_{ij}}(x).$$

Норма $\pi_i(\xi)$ равна $\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_{ij}\tau_j$. Так как числа $\tau_1, \ldots, \tau_{m+1}$ рационально зависимы, то может существовать несколько $\pi_i(\xi)$, имеющих одну и ту же норму. Предположим, что

$$v[\pi_\alpha(\xi)] = v[\pi_\beta(\xi)] = \ldots = v[\pi_\delta(\xi)] < v[\pi_i(\xi)] \qquad (i \neq \alpha, \beta, \ldots, \delta).$$

Воспользуемся преобразованием теоремы II. Тогда

$$\pi_i(x) = \prod_{j=1}^{m+1} \Delta_j^{\mu_{ij}}(y)\, G_i(y),$$

где $v[G_i(\eta)] = 0$, а $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_{m+1}(y)$ — многочлены, указанные в теореме. При этом

$$\mu_{ij} = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{ik} b_{kj}.$$

Мы имеем

$$v[\pi_i(\xi)] = \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} v[\Delta_j(\eta)].$$

Теперь, в силу рациональной независимости чисел $v[\Delta_1(\eta)], \ldots, v[\Delta_m(\eta)]$, мы заключаем, что

$$\mu_{\alpha j} = \mu_{\beta j} = \ldots = \mu_{\delta j} \leqslant \mu_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

и что $\mu_{\delta j} \leqslant \mu_{ij}$ хотя бы для одного значения j, если только $i \neq \alpha, \beta, \ldots, \delta$ (выполняя другое преобразование типа T_h, если это необходимо, можно легко добиться, чтобы было $\mu_{\delta j} < \mu_{ij}$ при всех j).

Рассмотрим два произведения $\pi_\alpha(\xi)$ и $\pi_\beta(\xi)$, имеющих одну и ту же норму. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{m+1} (\lambda_{\alpha k} - \lambda_{\beta k}) b_{kj} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} (\lambda_{\alpha k} - \lambda_{\beta k}) b_{k\,m+1} = \mu_{\alpha\,m+1} - \mu_{\beta\,m+1}.$$

В силу теоремы II, определитель $|b_{ij}| = \varepsilon = \pm 1$. Пусть εd — определитель матрицы (b_{ij}) $(i, j \leqslant m)$ порядка m. Если разрешить написанные выше уравнения, то мы будем иметь

$$\lambda_{\alpha\,m+1} - \lambda_{\beta\,m+1} = d(\mu_{\alpha\,m+1} - \mu_{\beta\,m+1}).$$

Если $d = 0$, то $\lambda_{\alpha\,m+1} = \lambda_{\beta\,m+1}$. В этом случае, в силу рациональной независимости чисел $v[\delta_1(\xi)], \ldots, v[\delta_m(\xi)]$, из условия $v[\pi_\alpha(\xi)] = v[\pi_\beta(\xi)]$ следовало бы, что $\lambda_{\alpha j} = \lambda_{\beta j}$ $(j = 1, \ldots, m+1)$, а значит, $\alpha = \beta$. Но так как мы видели, что можно найти два различных произведения $\pi_\alpha(\xi)$ и $\pi_\beta(\xi)$ с одинаковыми нормами, то отсюда следует, что $d \neq 0$. Важно заметить, что d является отличным от нуля целым числом, зависящим только от преобразования, использованного в теореме II, а не от рассматриваемых произведений $\pi_i(x)$. Тот частный результат, на который мы будем ссылаться впоследствии, можно сформулировать так:

Теорема III. *Если* $\delta_1(x), \ldots, \delta_{m+1}(x)$ — *некоторая* $(m+1)$-*система и если*

$$\pi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{m+1} \delta_i^{\alpha_i}(x), \quad \pi_\beta(x) = \prod_{i=1}^{m+1} \delta_i^{\beta_i}(x),$$

причем

$$v[\pi_\alpha(\xi)] = v[\pi_\beta(\xi)],$$

то преобразование теоремы II *обращает эти произведения в произведения*

$$\prod_{i=1}^{m+1} \Delta_i^{\alpha_i'}(y)\, G_\alpha(y) \quad \text{и} \quad \prod_{i=1}^{m+1} \Delta_i^{\beta_i'}(y)\, G_\beta(y),$$

в которых

(I) $v[G_\alpha(\eta)] = v[G_\beta(\eta)] = 0$,

(II) $\alpha'_i = \beta'_i \quad (i = 1, \ldots, m)$,

(III) $\beta'_{m+1} - \alpha'_{m+1} = (\beta_{m+1} - \alpha_{m+1})/d$,

где d есть целое число, зависящее только от преобразования.

§ 6. Локальная теорема об униформизации. Основной случай

В этом параграфе мы проведем доказательство так называемого основного случая локальной теоремы об униформизации: случая нульмерного нормирования ранга 1. Подлежащая доказательству теорема точно формулируется так:

Теорема I. *Пусть U — гиперповерхность в аффинном пространстве $A_{d+1}(x_1, \ldots, x_{d+1})$, и пусть $\mathfrak{B}$ — нульмерное нормирование ее поля функций, имеющее ранг 1, центр которого находится на конечном расстоянии в пространстве A_{d+1}. Тогда существует кремоново преобразование пространства A_{d+1} в некоторое пространство $A'_{d+1}(y_1, \ldots, y_{d+1})$, определяемое уравнениями*

$$x_i = P_i(y_1, \ldots, y_{d+1}) \qquad (i = 1, \ldots, d+1),$$

$$y_i = R_i(x_1, \ldots, x_{d+1}) \qquad (i = 1, \ldots, d+1),$$

где $P_i(y)$ — многочлены над полем K, а $R_i(x)$ — рациональные функции с коэффициентами из K. Это преобразование таково, что оно переводит U в бирационально эквивалентное ей многообразие U', на котором центр нормирования $\mathfrak{B}$ является простым нульмерным подмногообразием, лежащим на конечном расстоянии.

Доказательство этой теоремы тесно переплетается с доказательством в общей форме одного результата, частным случаем которого является теорема I § 5. Обобщение этой теоремы, которое мы будем доказывать, формулируется так:

Теорема II. *Пусть $\mathfrak{B}$ — нульмерное нормирование ранга 1 поля функций $K(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$ неприводимой гиперповерхности U в пространстве $(x_1, \ldots, x_{d+1})$, имеющее центр на конечном расстоянии. Пусть, далее, R' — наименьшее нормальное расширение поля K, над которым центр нормирования $\mathfrak{B}$ на гиперповерхности U распадается на систему точек, а $\mathfrak{B}'$ — нормирование поля $R'(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$, являющееся продолжением для $\mathfrak{B}$. Если $F(x_1, \ldots, x_r)$ $(r \leqslant d+1)$ — любой многочлен с коэффициентами из R' от неизвестных $x_1, \ldots, x_r$, такой, что $F(\xi_1, \ldots, \xi_r) \neq 0$, то существует кремоново преобразование неизвестных $(x_1, \ldots, x_{d+1})$ в неизвестные $(y_1, \ldots, y_{d+1})$, имеющее вид*

$$x_i = P_i(y_1, \ldots, y_r) \qquad (i = 1, \ldots, r), \qquad x_i = y_i \qquad (i > r),$$

где P_i — многочлены от $y_1, \ldots, y_r$ с коэффициентами из K. Это преобразование таково, что над полем R^*, являющимся наименьшим нормальным расширением поля R', над которым центр нормирования $\mathfrak{B}'$ в пространстве y распадается на систему точек, имеет место соотношение

$$F(x_1, \ldots, x_r) = \Delta_1^{\mu_1}(y) \ldots \Delta_m^{\mu_m}(y)\, G(y_1, \ldots, y_r).$$

Если $\mathfrak{B}^*$ — нормирование поля $R^*(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$, служащее продолжением нормирования $\mathfrak{B}'$, $(\beta_1, \ldots, \beta_{d+1})$ — центр нормирования $\mathfrak{B}^*$ в пространстве y, а $(\eta_1, \ldots, \eta_{d+1})$ — образ точки $(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$, то:

(I) *R^* является полем, получаемым присоединением к полю K элемента β_j и его сопряженных над K (при любом j, не превосходящем m);*

(II) $v^*[\Delta_i(\eta)] = v^*(\eta_i - \beta_i) = \tau_i^* \quad (i = 1, \ldots, m)$, *где числа $\tau_1^*, \ldots, \tau_m^*$ рационально независимы, а $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_m(y)$ — нормальная m-система относительно $y_1, \ldots, y_m$.*

(III) $v^*[G(\eta_1, \ldots, \eta_r)] = 0$.

Для полного понимания доказательства полезно сделать несколько замечаний, относящихся к приведенной формулировке. Свойство (I) имеет само по себе небольшое значение, но должно быть включено в формулировку из-за необходимости провести индукцию. Мы начнем доказательство теоремы II для многочлена $G(x_1, \ldots, x_{r+1})$, беря в качестве предположения индукции справедливость этой теоремы в применении к получающемуся в доказательстве многочлену $F(x_1, \ldots, x_r)$. Следующий этап состоит в применении теоремы II § 5 к многочленам $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_m(y), y_{r+1} - \beta_{r+1}$. Для этого как раз и существенно свойство элементов β_j $(j \leqslant m)$, указанное в теореме. Сделанное замечание поясняет, почему на каждом этапе доказательства необходимо убедиться в выполнении условия (I).

Следует отметить, что в формулировке теоремы II поле R', в котором содержатся коэффициенты многочлена $F(x_1, \ldots, x_r)$, полностью определено многообразием, являющимся центром нормирования $\mathfrak{B}$ на гиперповерхности U. В нашем доказательстве по индукции справедливость теоремы II для многочлена $F(x_1, \ldots, x_r)$ зависит от справедливости теоремы в рассмотренных ранее случаях применительно к многочленам $G(z_1, \ldots, z_s)$ в преобразованном пространстве. При этом коэффициенты многочлена $G(z_1, \ldots, z_s)$ могут и не принадлежать полю R'. Однако предположение индукции будет верным, если эти коэффициенты лежат в поле, являющемся наименьшим нормальным расширением поля K, над которым центр нормирования $\mathfrak{B}$ в пространстве z распадается на систему точек.

Так как в этом параграфе важно делать различие между нормированием $\mathfrak{B}$ поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ и его продолжениями $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}^*$, ... на поля $R'(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, $R^*(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, ..., то мы будем продолженные

и индуцированные нормирования обозначать разными символами. Через $\mathfrak{B}$ будет всегда обозначаться исходное нормирование поля $K(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, а нормирования, получаемые при расширении основного поля, будут отличаться значками, соответствующими значкам тех основных полей, к которым они относятся.

Нормирование $\mathfrak{B}^*$, указанное в теореме, имеет своим центром точку $(\beta_1, \ldots, \beta_{d+1})$. Условие (III): $v^*[G(\eta)] = 0$ равносильно тому, что уравнение

$$G(\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, y) = 0$$

не имеет своим корнем значения $y = \beta_r$. Рассмотрим теперь влияние исключения условия $F(\xi_1, \ldots, \xi_r) \neq 0$. Соображения, применяемые для доказательства теоремы II, в этом случае приводят к равенству

$$F(x) = \Delta_1^{\mu_1}(y) \ldots \Delta_m^{\mu_m}(y)\, G(y_1, \ldots, y_r),$$

удовлетворяющему условиям (I) и (II) теоремы II. Но если $F(\xi) = 0$, то отсюда следует, что $G(\eta) = 0$. Следовательно, уравнение

$$G(\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, y) = 0$$

должно иметь корень $y = \beta_r$. Можно, однако, сформулировать некоторые результаты относительно кратности этого корня. Мы рассмотрим частный случай, в котором $F(x)$ — неприводимый многочлен с коэффициентами из K. В таком случае уравнение $F(x) = 0$ является уравнением некоторого многообразия U над полем K. Можно показать, что при этом уравнение

$$G(\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, y) = 0$$

имеет простой корень $y = \beta_r$, если кремоново преобразование выбрано надлежащим образом. Если $A(y)$ — многочлен наименьшей степени над полем K, содержащий в качестве множителя произведение $\Delta_1^{\mu_1}(y) \ldots \Delta_m^{\mu_m}(y)$, то $A(\eta) \neq 0$, так как $A(y)$ — многочлен только от $y_1, \ldots, y_m$, и числа

$$v^*(\eta_i - \beta_i) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

рационально независимы. Следовательно,

$$F(x) = A(y) \prod G_i^{\rho_i}(y),$$

где $G_i(y)$ — существенно различные многочлены от $y_1, \ldots, y_r$, имеющие коэффициенты из K и такие, что хотя бы для одного значения i будет $G_i(\eta) = 0$. В таком случае уравнение $G_i(y) = 0$ является уравнением образа U' гиперповерхности U при кремоновом преобразовании. Предположим, что множители перенумерованы так, что $G_1(\eta) = 0$. Так как $G_1(\beta) = 0$ и уравнение

$$\prod G_i^{\rho_i}(\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, y) = 0$$

имеет простой корень $y=\beta_r$, то отсюда следует, что и уравнение

$$G_1(\beta_1, \ldots, \beta_{r-1}, y)=0$$

имеет простой корень $y=\beta_r$, причем $\rho_1=1$. Кроме того,

$$\frac{\partial G_1}{\partial y_r}(\beta_1, \ldots, \beta_r) \neq 0,$$

а значит, точка $(\beta_1, \ldots, \beta_{d+1})$ является простой точкой на U'. Но $(\beta_1, \ldots, \beta_{d+1})$ — одна из сопряженных точек, составляющих центр нормирования $\mathfrak{B}$ на гиперповерхности U', так что центр нормирования $\mathfrak{B}$ будет простым подмногообразием на U'. Но это и составляет содержание теоремы I.

Таким образом, доказательства теорем I и II тесно связаны. Удобно оба доказательства проводить одновременно. Фактически доказательство состоит в доказательстве теоремы II индукцией по r, а затем в получении из нее теоремы I. Если уравнение $F(x)=0$ гиперповерхности U содержит лишь координаты $x_1, \ldots, x_{r+1}$, то мы будем пользоваться теоремой II в применении к многочленам от $x_1, \ldots, x_r$. Но метод доказательства при этом очень мало отличается от метода доказательства теоремы II для $r+1$ неизвестных в предположении ее справедливости для r неизвестных.

Следует еще упомянуть, что наш первоначальный выбор системы координат в пространстве x таков, что уравнение гиперповерхности U содержит $d+1$ координат $x_1, \ldots, x_{d+1}$. Тем не менее, по формальным причинам нам удобно предполагать справедливость теоремы II для r неизвестных и рассматривать после этого многочлен $F(x_1, \ldots, x_{r+1})$, лишь различая случаи $F(\xi)=0$ (теорема I) и $F(\xi)\neq 0$ (теорема II).

Начнем нашу индукцию с рассмотрения формы $F(x_1)$ только от одного неизвестного. В случае теоремы I уравнение $F(x_1)=0$ является неприводимым уравнением для U. Поэтому U будет системой сопряженных гиперплоскостей

$$x_1=\alpha_1^{(i)} \qquad (i=1, \ldots, g).$$

Так как центр нормирования $\mathfrak{B}$ лежит на конечном расстоянии, то он лежит на одной из этих гиперплоскостей и уже поэтому будет простой точкой. Таким образом, здесь доказывать нечего. В случае теоремы II можно воспользоваться теоремой I § 5 и непосредственно получить требуемый результат.

Предположим теперь справедливость теоремы II для многочленов от r неизвестных и рассмотрим многочлен $F(x_1, \ldots, x_{r+1})$ от $r+1$ неизвестных, имеющий коэффициенты из поля R. В случае теоремы I уравнение $F(x_1, \ldots, x_{r+1})=0$ есть неприводимое уравнение гиперповерхности U над полем K. Следовательно, ни один из многочленов от $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами из K не обращается в нуль при замене x на ξ. Таким образом, при рассмотрении вспомогательных многочленов от r неизвестных нам нужно заниматься лишь теоремой II.

Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1})$ — центр нормирования $\mathfrak{B}'$ в пространстве x. В случае теоремы I мы можем сделать предварительное преобразование координат $x_1, \ldots, x_{r+1}$ так, чтобы многочлен $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, x_{r+1})$ не был тождественным нулем. Предположим, что этот многочлен имеет значение $x_{r+1} = \alpha_{r+1}$ своим s-кратным корнем. Так как точка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1})$ лежит на гиперповерхности U, то $s > 0$. Если $s = 1$, то эта точка является простой точкой и поэтому центр нормирования $\mathfrak{B}$ на гиперповерхности U будет простым. Поэтому предположим, что теорема I верна в случае, когда $s < s_0$, и рассмотрим случай $s = s_0$. Нашей задачей при этом будет получение кремонова преобразования требуемого типа, переводящего U в гиперповерхность, для которой $s < s_0$. В случае теоремы II многочлен $F(x)$ нужно предварительным преобразованием привести к такому виду, чтобы выражение $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, x_{r+1})$ не было тождественным нулем. Однако наше промежуточное преобразование может вызвать нарушение исходных условий. Ясно, однако, что первоначальным выбором координатной системы мы можем добиться того, что $F(x)$ будет представим в виде

$$F(x) = A(x_1, \ldots, x_r) F_1(x_1, \ldots, x_{r+1}) \ldots F_t(x_1, \ldots, x_{r+1}),$$

где многочлены $F_i(x_1, \ldots, x_{r+1})$ неприводимы над полем R, причем значение $x_{r+1} = \alpha_{r+1}$ является корнем конечной кратности s_i для $F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, x_{r+1})$. Промежуточное преобразование не будет нарушать этих условий. Если $s = \max[s_1, \ldots, s_t]$, то из $s = 0$ следует, что $s_i = 0$ $(i = 1, \ldots, t)$, а значит,

$$F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+1}) \neq 0,$$

и поэтому $v'[F_i(\xi)] = 0$. Если мы применим теорему II для многочленов от r неизвестных к многочлену $A(x_1, \ldots, x_r)$, то непосредственно приведем многочлен $F(x)$ к виду, требуемому в этой теореме. Таким образом, теорема II будет справедливой и для $F(x)$. Поэтому мы предположим, что теорема II верна для многочленов $F(x)$, в которых $s < s_0$, и рассмотрим $F(x)$, для которого $s = s_0$. Нашей задачей будет отыскание преобразования, обращающего взятый многочлен $F(x)$ в такой, для которого $s < s_0$. Если мы сможем доказать, что преобразование требуемого типа, обладающее таким свойством, всегда существует, то теорема II будет отсюда следовать по индукции. Таким образом, как в случае теоремы II, так и в случае теоремы I нам нужно лишь доказать существование преобразования типа, описанного в формулировке теоремы II, сводящего задачу к случаю $s < s_0$.

Положим в случае теоремы I

$$F(x) = \sum_i \pi_i(x), \text{ где } \pi_i(x) = a_i(x_1, \ldots, x_r)(x_{r+1} - \alpha_{r+1})^i.$$

В случае же теоремы II пусть

$$F_h(x) = \sum_i \pi_i^{(h)}(x), \text{ где } \pi_i^{(h)}(x) = a_i^{(h)}(x_1, \ldots, x_r)(x_{r+1} - \alpha_{r+1})^i.$$

Здесь суммирование будем считать распространяющимся лишь на отличные от нуля члены. По построению,

$$a_{s_0}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq 0, \quad a_{s_h}^{(h)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq 0.$$

Применим теорему II для многочленов от r неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ к многочлену $\prod_i a_i(x_1, \ldots, x_r)$ (теорема I) или к многочлену $A(x_1, \ldots, x_r)\prod_{h,i} a_i^{(h)}(x_1, \ldots, x_r)$ (теорема II). Мы получим тогда

$$\pi_i(x) = b_i(y_1, \ldots, y_r)\Delta_1^{\lambda_{i1}}(y) \ldots \Delta_m^{\lambda_{im}}(y)(y_{r+1} - \beta_{r+1})^i$$

(теорема I)

$$\pi_i^{(h)}(x) = b_i^{(h)}(y_1, \ldots, y_r)\Delta_1^{\lambda_{i1}^{(h)}}(y) \ldots \Delta_m^{\lambda_{im}^{(h)}}(y)(y_{r+1} - \beta_{r+1})^i$$

и

$$A(x) = a(y_1, \ldots, y_r)\Delta_1^{\lambda_1}(y) \ldots \Delta_m^{\lambda_m}(y)$$

(теорема II), где коэффициенты содержатся в поле R_1, содержащем координаты центра $(\beta_1, \ldots, \beta_{r+1})$ (в пространстве y) продолжения $\mathfrak{B}_1$ нормирования $\mathfrak{B}$. Здесь

$$v_1[b_i(\eta)] = v_1[b_i^{(h)}(\eta)] = v_1[a(\eta)] = 0,$$

а $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_m(y)$ — нормальная m-система от $y_1, \ldots, y_m$, и сопряженные над полем K для каждого β_i $(i \leqslant m)$ все различны.

Мы имеем $v_1(\eta_{r+1} - \beta_{r+1}) > 0$. Рассмотрим сначала случай, когда значения

$$v_1[\Delta_1(\eta)], \ldots, v_1[\Delta_m(\eta)], v_1(\eta_{r+1} - \beta_{r+1})$$

рационально независимы. В этом случае нужно рассмотреть лишь теорему II, так как в случае теоремы I из соотношения

$$\sum \pi_i(\xi) = 0$$

следовало бы, что для двух различных значений индексов i и j должно быть $v_1[\pi_i(\xi)] = v_1[\pi_j(\xi)]$. Но так как значения

$$v_1[\Delta_1(\eta)], \ldots, v_1[\Delta_m(\eta)], \quad v_1(\eta_{r+1} - \beta_{r+1})$$

рационально независимы, то отсюда следовало бы, что

$$\lambda_{ik} = \lambda_{jk} \quad (k = 1, \ldots, m) \text{ и } i = j,$$

а это очевидное противоречие. В случае теоремы II многочлены

$$\Delta_1(y), \ldots, \Delta_m(y), \quad y_{r+1} - \beta_{r+1}$$

составляют $(m+1)$-систему относительно $y_1, \ldots, y_m, y_{r+1}$. Применим к неизвестным $y_1, \ldots, y_m, y_{r+1}$ преобразование типа T_h так, чтобы в новой координатной системе $(z_1, \ldots, z_{d+1})$ было

$$\tau_i^{(h)}(x) = \bar{\Delta}_1^{\mu_{i1}^{(h)}}(z) \ldots \bar{\Delta}_{m+1}^{\mu_{im+1}^{(h)}}(z)\, \bar{b}_i^{(h)}(z_1, \ldots, z_{r+1}),$$

$$A(x) = \bar{\Delta}_1^{\mu_1}(z) \ldots \bar{\Delta}_{m+1}^{\mu_{m+1}}(z)\, \bar{a}(z_1, \ldots, z_{r+1}),$$

где

$$v_1[\bar{b}_i^{(h)}(\zeta)] = v_1[\bar{a}(\zeta)] = 0,$$

а $\bar{\Delta}_1(z), \ldots, \bar{\Delta}_{m+1}(z)$ — нормальная $(m+1)$-система относительно $z_1, \ldots, z_m, z_{r+1}$. Можно добиться также, чтобы поле R_1 получалось присоединением к полю K любого из элементов γ_i вместе с его сопряженными над K, где $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{d+1})$ — центр нормирования $\mathfrak{B}_1$ в пространстве z, и чтобы в случае, когда $v_1[\tau_i^{(h)}(\xi)] < v_1[\tau_j^{(h)}(\xi)]$, было

$$\mu_{ik}^{(h)} < \mu_{jk}^{(h)} \qquad (k = 1, \ldots, m+1).$$

Если

$$\mu_k^{(h)} = \min[\mu_{ik}^{(h)}, \mu_{jk}^{(h)}, \ldots] \qquad (k = 1, \ldots, m+1)$$

и

$$\nu_k = \mu_k + \sum_h \mu_k^{(h)},$$

то

$$F(x) = \bar{\Delta}_1^{\nu_1}(z) \ldots \bar{\Delta}_{m+1}^{\nu_{m+1}}(z)\, G(z_1, \ldots, z_{r+1}),$$

где $v_1[G(\zeta)] = 0$, и тем самым требования теоремы II относительно многочлена $F(x)$ удовлетворены.

Поэтому остается рассмотреть лишь случай, когда значение $v_1(\eta_{r+1} - \beta_{r+1})$ рационально зависит от значений $v_1[\Delta_1(\eta)], \ldots, v_1[\Delta_m(\eta)]$. Так как сопряженные над полем K для любого элемента β_i при $i \leqslant m$ все различны (теорема II, утверждение (I) для многочленов от m неизвестных), то мы можем применить теорему II § 5 к $(m+1)$-системе $\Delta_1(y), \ldots, \Delta_m(y), y_{r+1} - \beta_{r+1}$ от неизвестных $y_1, \ldots, y_m, y_{r+1}$. В силу этой теоремы, можно построить преобразование требуемого типа, обращающее многочлены $\pi_i(x)$ в многочлены

$$\pi_i(x) = c_i(z_1, \ldots, z_{r+1})\, \delta_1^{\mu_{i1}}(z) \ldots \delta_m^{\mu_{im}}(z)\, \delta^{\nu_i}(z),$$

где:

(а) $\delta_1(z), \ldots, \delta_m(z)$ — нормальная m-система от $z_1, \ldots, z_m$;

(б) $\delta(z) = P(z_1, \ldots, z_m, z_{r+1})\, z_{r+1} + (z_m - \gamma_m)^p Q(z_1, \ldots, z_m, z_{r+1})$,

причем $P(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, z_{r+1})$ есть отличная от нуля константа $\bar{p}$;

(в) центр нормирования $\mathfrak{B}_1$ в пространстве z имеет общую точку $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1})$, координаты γ_i $(i \neq r+1)$ которой содержатся в R_1, а γ_{r+1} алгебраична над R_1;

(г) многочлены $c_i(z_1, \ldots, z_{r+1})$ имеют то свойство, что значения $c_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, z_{r+1})$ являются отличными от нуля константами $\bar{c}_i$;

(д) $v_1(\zeta_{r+1}) = 0$.

Свойство (г) следует из того, что многочлен $c_i(z_1, \ldots, z_{r+1})$ является произведением $b_i(y_1, \ldots, y_r)$ и некоторого произведения степеней многочленов G_i, входящих в формулировку теоремы II § 5. Но, в силу результатов, доказанных в § 5,

$$b_i(y_1, \ldots, y_r) = d_i(z_1, \ldots, z_{r+1}),$$

где $d_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, z_{r+1})$ является константой. Эта константа необходимо отлична от нуля, так как $v[b_i(\eta_i)] = 0$. Теперь свойство (г) следует из того, что значения $G_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, z_{r+1})$ — отличные от нуля константы.

В случае теоремы II мы получаем аналогичные формулы для $\pi_i^{(h)}(x)$ и $A(x)$.

Рассмотрим теперь значения $\pi_i(\xi)$, имеющие наименьшие нормы в нормированиях $\mathfrak{B}'$ или $\mathfrak{B}_1$ (теорема I), или же те из $\pi_i^{(h)}(\xi)$, которые имеют наименьшие нормы при заданном h (теорема II). Предположим, что

$$v_1[\pi_\alpha(\xi)] = v_1[\pi_\beta(\xi)] = \ldots = v_1[\pi_\delta(\xi)] < v_1[\pi_i(\xi)] \quad (i \neq \alpha, \beta, \ldots, \delta)$$

или соответственно

$$v_1[\pi_\alpha^{(h)}(\xi)] = v_1[\pi_\beta^{(h)}(\xi)] = \ldots = v_1[\pi_\delta^{(h)}(\xi)] < v_1[\pi_i^{(h)}(\xi)]$$
$$(i \neq \alpha, \beta, \ldots, \delta),$$

где $\alpha < \beta < \ldots < \delta$. Тогда, если мы положим

$$\mu_j = \mu_{\alpha j} = \mu_{\beta j} = \ldots = \mu_{\delta j} < \mu_{ij}$$

или

$$\mu_j^{(h)} = \mu_{\alpha j}^{(h)} = \mu_{\beta j}^{(h)} = \ldots = \mu_{\delta j}^{(h)} < \mu_{ij}^{(h)},$$

то будем иметь

$$F(x) = \delta_1^{\mu_1}(z) \ldots \delta_m^{\mu_m}(z)[c_\alpha(z)\delta^{\nu_\alpha}(z) + \ldots +$$
$$+ c_\delta(z)\delta^{\nu_\delta}(z) + \delta_1(z) \ldots \delta_m(z)\varphi(z)] = \delta_1^{\mu_1}(z) \ldots \delta_m^{\mu_m}(z) H(z)$$

или, аналогично,

$$F_h(x) = \delta_1^{\mu_1^{(h)}}(z) \ldots \delta_m^{\mu_m^{(h)}}(z) H_h(z).$$

Кроме того, в силу теоремы III § 5,

$$\nu_i - \nu_j = (i-j)/d, \quad \nu_i^{(h)} - \nu_j^{(h)} = (i-j)/d,$$

где d — отличное от нуля целое число, зависящее только от преобразования. Воспользуемся этим, чтобы найти соотношение между δ и s_0 или s_h. Мы имеем

$$v_1[\pi_i(\xi)] = v_1[a_i(\xi)] + iv_1(\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}).$$

Но

$$v_1[a_i(\xi)] \geqslant 0, \quad v_1[a_{i_0}(\xi)] = 0, \quad v_1(\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}) > 0.$$

Следовательно, при $i > s_0$

$$v_1[\pi_i(\xi)] > v_1[\pi_{i_0}(\xi)] \qquad (i > s_0).$$

В таком случае $\delta \leqslant s_0$. Аналогично, в случае многочленов $F_h(x)$ будет $\delta \leqslant s_h$. Поэтому

$$|\nu_\delta - \nu_\alpha| = (\delta - \alpha)/|d| \leqslant s_0 \qquad (\text{или } s_h).$$

Предположим сначала, что мы занимаемся теоремой I. Так как значения $v_1[\delta_i(\zeta)]$ конечны, а $F(\xi) = 0$, то $H(\zeta) = 0$, и мы заключаем, что неприводимый многочлен $\overline{F}(z)$, обращающийся в нуль на образе гиперповерхности U в пространстве z, служит делителем для $H(z)$. Рассмотрим значение числа s для многочлена $\overline{F}(z)$.

В силу свойств преобразования, использованного в теореме II § 5, $v_1(\zeta_i - \gamma_i) > 0$ $(i \neq r+1)$, $v_1(\zeta_{r+1}) = 0$. Следовательно, центр нормирования $\mathfrak{B}_1$ в пространстве z лежит на конечном расстоянии и не находится на гиперплоскости $z_{r+1} = 0$. Поэтому γ_{r+1} не будет корнем уравнения

$$H(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, t) = 0.$$

Но вид многочлена $H(z)$ показывает, что последнее уравнение сводится к уравнению

$$\overline{c}_\alpha \overline{p}^{\nu_\alpha} t^{\nu_\alpha} + \overline{c}_\beta \overline{p}^{\nu_\beta} t^{\nu_\beta} + \ldots + \overline{c}_\delta \overline{p}^{\nu_\delta} t^{\nu_\delta} = 0,$$

где $\overline{p}$ определяется, согласно сказанному выше, как значение коэффициента при z_{m+1} в многочлене $\delta(z)$ в центре нормирования. Поэтому кратность корня $z = \gamma_{r+1}$ уравнения $\overline{F}(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, z) = 0$ не может превосходить числа $|\nu_\delta - \nu_\alpha| \leqslant s_0$. Таким образом, в общем случае число s для образа гиперповерхности U в пространстве z будет меньше числа s_0 и поэтому, в силу предположения индукции, может быть сведено к единице. В исключительных случаях, когда не происходит понижения s, мы должны иметь $|\nu_\delta - \nu_\alpha| = s_0$, а значит, $\alpha = 0$, $\delta = s_0$. Кроме того, уравнение для элемента γ_{r+1}, имеющее степень s_0, должно иметь равные друг другу корни. Но так как коэффициенты $\overline{c}_\alpha, \ldots, \overline{c}_\delta, \overline{p}$ принадлежат полю R_1, то γ_{r+1} также должен содержаться в R_1. Далее,

$$\frac{\pi_i(x)}{\pi_s(x)} = \frac{c_i(z)}{c_s(z)}[\delta(z)]^{\nu_i - \nu_s} \qquad (i \leqslant s),$$

а значит, вычет элемента $\pi_i(\xi)/\pi_s(\xi)$ в нормировании $\mathfrak{B}_1$ равен

$$\rho_i = \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_s} \bar{p}^{\nu_i - \nu_s} \gamma_{r+1}^{\nu_i - \nu_s},$$

и уравнение

$$\rho_0 + \rho_1 t + \ldots + \rho_{s-1} t^{s-1} + t^s = 0$$

имеет только равные корни. Но так как единственный корень этого уравнения отличен от нуля, то $\rho_i \neq 0$.

Наконец, так как

$$(\alpha, \beta, \ldots, \delta) = (0, 1, \ldots, s_0),$$

то

$$v_1[\pi_0(\xi)] = v_1[\pi_1(\xi)] = \ldots = v_1[\pi_{s_0}(\xi)] = v_1[a_0(\xi)] =$$
$$= v_1[a_1(\xi)] + v_1(\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}) = \ldots = v_1[a_{s_0}(\xi)] + s_0 v_1(\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}),$$

и мы имеем

$$v_1(\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}) = v_1[a_{s_0-1}(\xi)],$$

т. е. *норма разности* $\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}$ *равна норме некоторого многочлена от* $\xi_1, \ldots, \xi_r$ *с коэффициентами из* R'.

Рассмотрим теперь случай теоремы II. Мы имеем

$$F_h(x) = \delta_1^{\mu_1^{(h)}}(z) \ldots \delta_m^{\mu_m^{(h)}}(z) H_h(z).$$

Если $s_h = 0$, то ясно, что $\mu_i^{(h)} = 0$ и $v[H_h(\zeta)] = 0$. Следовательно, число s_h' для многочлена $H_h(z)$ равно нулю. Если $s_h > 0$, то рассуждение, примененное выше в случае теоремы I, показывает, что $s_h' \leqslant s_h$ и что если для некоторого h будет $s_h' = s_h$, то γ_{r+1} лежит в R_1, а уравнение

$$\rho_0 + \rho_1 t + \ldots + \rho_{s_h} t^{s_h - 1} + t^{s_h} = 0,$$

в котором ρ_i являются отличными от нуля вычетами элементов $\pi_i^{(h)}(\xi)/\pi_j^{(h)}(\xi)$ в нормировании $\mathfrak{B}_1$, имеет лишь равные корни, и норма разности $\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}$ равна норме некоторого элемента кольца $R'[\xi_1, \ldots, \xi_r]$.

Мы предположили, что число $s_0 = \max[s_1, \ldots, s_t]$ больше нуля, так как в противном случае нечего доказывать. Рассмотрим сначала случай, когда $s_0 = 1$, и предположим, что для каждого значения h, при котором $s_h = 1$, будет $s_h' = 0$. Тогда ясно, что мы имеем равенство

$$F(x) = B(z) \delta_1^{\lambda_1}(z) \ldots \delta_m^{\lambda_m}(z),$$

в котором $v[B(\zeta)] = 0$. В этом случае мы уже получили преобразование многочлена $F(x)$, требуемое теоремой II, за исключением

того, что может не выполняться условие (II), так как элемент γ_{r+1} может быть алгебраичен над R_1. Пусть R^* — наименьшее нормальное расширение поля R_1, содержащее элемент γ_{r+1}, и пусть $\mathfrak{B}^*$ — продолжение нормирования $\mathfrak{B}_1$ на поле $R^*(\xi_1, \ldots, \xi_{r+1})$. Центром нормирования $\mathfrak{B}^*$ в пространстве z служит точка $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1})$. Если R^* есть собственное расширение поля R_1, то полем, получаемым присоединением к полю K элемента $\gamma_i (i \leqslant m)$ и его g сопряженных элементов над полем K, будет не R^*, а поле R_1.

Чтобы обойти эту трудность, построим многочлен $f(x)$ с коэффициентами из K, обладающий такими свойствами:

(а) h элементов, сопряженных со значением $f(\gamma_{r+1})$ над полем R_1, все различны;

(б) первые $\rho_0 - 1$ производных многочлена $f(x)$ обращаются в нуль при $x = \gamma_{r+1}$.

Тогда для каждого значения i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ gh элементов, получаемых из $\gamma_i + a_i f(\gamma_{r+1})$ при замене γ_i его сопряженными, а элемента γ_{r+1} его h сопряженными над полем R_1, будут различными при любом a_i из K, за исключением, может быть, конечного числа значений. Если мы положим $\bar{\gamma}_i = \gamma_i + a_i f(\gamma_{r+1})$, то поле, *получаемое присоединением к K элемента $\bar{\gamma}_i$ и его сопряженных над K, совпадет с R^**. Сделаем теперь кремоново преобразование

$$z_i = \bar{z}_i - a_i f(\bar{z}_{r+1}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$
$$z_i = \bar{z}_i \qquad (i > m).$$

Мы имеем

$$z_i - \gamma_i = \bar{z}_i - \bar{\gamma}_i + a_i [f(\gamma_{r+1}) - f(z_{r+1})] =$$
$$= \bar{z}_i - \bar{\gamma}_i + (z_{r+1} - \gamma_{r+1})^{\rho_0} b_i(z) \qquad (i \leqslant m).$$

Центром нормирования $\mathfrak{B}^*$ в пространстве $\bar{z}$ будет точка $(\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_{r+1})$. При этом, если ρ_0 достаточно велико, то $v^*(z_i - \gamma_i) = v^*(\bar{z}_i - \bar{\gamma}_i)$, и поэтому нормы $v^*(\bar{z}_i - \bar{\gamma}_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ рационально независимы. Положим

$$\bar{\delta}_i(\bar{z}) = \delta_i(z) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Очевидно, что если элементы $a_1, \ldots, a_m$ выбраны с учетом необходимости обойти конечное число исключительных элементов поля K, то многочлены $\bar{\delta}_i(\bar{z})$ будут моновалентными относительно $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$. В таком случае, в силу теоремы I § 5, некоторое преобразование типа T_h, произведенное над неизвестными $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$, позволяет привести $F(x)$ к виду, удовлетворяющему всем требованиям теоремы II.

Предположим теперь, что $s_0 = \max[s_1, \ldots, s_t] > 1$ и что $s_h' < s_h$ для любого h, для которого $s_h > 0$. В таком случае

$$F(x) = \delta_1^{\lambda_1}(z) \ldots \delta_m^{\lambda_m}(z)\, a(z) \prod_{h=1}^{t} H_h(z),$$

где $v_1[a(\xi)] = 0$. Подвергнем неизвестные $z_1, \ldots, z_{r+1}$ общему линейному преобразованию с коэффициентами из K. В новой координатной системе многочлен $F(x) = G(u)$ выражается произведением $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m + 1 + t$ множителей, для которых можно определить числа s_i. Множители, получающиеся из $\delta_i(z)$, будут иметь числа $s_i = 1$, множители, получающиеся из $a(z)$, — числа $s_i = 0$, а множители, соответствующие $H_i(z)$, — числа $s_i = s_h'$. Таким образом, ввиду неравенства $s_0 > 1$, наибольшее значение s_i для многочлена $G(u)$ не превышает числа $\max[1, s_1', \ldots, s_t']$. Оно может быть меньше названного, если многочлен $H_h(z)$ приводим и дает множители с кратностями s_h'' и s_h''', где $s_h'' + s_h''' = s_h'$. Следовательно, для многочлена $G(u)$ число s будет меньшим s_0, и мы можем воспользоваться предположением индукции.

Остается еще рассмотреть исключительный случай, в котором не происходит уменьшения числа s_0. В случае теоремы II из этого следует, что найдется значение h, для которого $s_h' = s_h$. Чтобы рассмотреть обе теоремы совместно, обозначим через $f(x)$ и s либо $F(x)$ и s_0 (в случае теоремы I), либо $F_h(x)$ и s_h (в случае теоремы II). Тогда

$$f(x) = \pi_0(x) + \ldots + \pi_s(x) + \sum_{i>s} \pi_i(x),$$

где

$$\pi_i(x) = a_i(x_1, \ldots, x_r)(x_{r+1} - \alpha_{r+1})^i.$$

Мы знаем, что

$$v'[a_s(\xi)] = 0, \qquad v'(\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}) = v'[a_{s-1}(\xi)].$$

Кроме того,

$$v'[a_i(\xi)] = v'[a_s(\xi)] + (s-i)\, v'(\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}) = \\ = v'[a_s(\xi)] + (s-i)\, v'[a_{s-1}(\xi)].$$

Следовательно,

$$v'\left[\frac{\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}}{a_{s-1}(\xi)}\right] = 0 = v'\left[\frac{a_i(\xi)}{a_s(\xi)\, a_{s-1}^{s-i}(\xi)}\right],$$

и поэтому при переходе к полю вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$ вычеты c и d_i элементов $\dfrac{\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}}{a_{s-1}(\xi)}$ и $\dfrac{a_i(\xi)}{a_s(\xi)\, a_{s-1}^{s-i}(\xi)}$ будут отличны от нуля.

Но

$$\frac{\pi_i(\xi)}{\pi_s(\xi)} = \frac{a_i(\xi)}{a_s(\xi)\, a_{s-1}^{s-i}(\xi)} \left[\frac{a_{s-1}(\xi)}{\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}}\right]^{s-i}.$$

Поэтому, переходя к вычетам, мы получаем

$$d_i = \rho_i c^{s-i}.$$

Напомним, что вычеты $\rho_0, \ldots, \rho_s = 1$ элементов $\pi_0(\xi)/\pi_s(\xi), \ldots, \pi_s(\xi)/\pi_s(\xi)$ обладают тем свойством, что все корни уравнения

$$\rho_0 + \rho_1 t + \ldots + \rho_{s-1} t^{s-1} + t^s = 0$$

одинаковы (стр. 331). Отсюда вытекает, что корни уравнения

$$d_0 + d_1 t + \ldots + d_{s-1} t^{s-1} + t^s = 0$$

также все одинаковы, причем значение этих корней равно $-\frac{1}{s} d_{s-1}$. Так как d_{s-1} есть вычет элемента $a_s^{-1}(\xi)$, где $a_s(\xi)$ принадлежит кольцу $R'[\xi_1, \ldots, \xi_r]$, а вычеты элементов ξ_i принадлежат R', то d_{s-1} также принадлежит R'.

Покажем теперь, что в действительности корни последнего уравнения равны c. Мы имеем

$$\frac{f(\xi)}{a_s(\xi)\, a_{s-1}^s(\xi)} = \sum_i \frac{a_i(\xi)}{a_s(\xi)\, a_{s-1}^{s-i}(\xi)} \left[\frac{\xi_{r+1} - \alpha_{r+1}}{a_{s-1}(\xi)}\right]^i.$$

Следовательно, переходя к полю вычетов, мы получаем, что сумма

$$d_0 + d_1 c + \ldots + d_{s-1} c^{s-1} + c^s$$

равна вычету элемента $X = f(\xi)/a_s(\xi)\, a_{s-1}^s(\xi)$. В случае теоремы I $f(\xi) = 0$, и поэтому вычет элемента X равен нулю. В случае же теоремы II

$$f(x) = F_h(x) = \delta_1^{\mu_1^{(h)}}(z) \ldots \delta_m^{\mu_m^{(h)}}(z)\, H_h(z),$$

где

$$v_1[\delta_1^{\mu_1^{(h)}}(\zeta) \ldots \delta_m^{\mu_m^{(h)}}(\zeta)] = v_1[\pi_0^{(h)}(\xi)] = \ldots = v_1[\pi_s^{(h)}(\xi)].$$

Но так как $s_h' > 0$, то $v_1[H_h(\zeta)] > 0$. Поэтому

$$0 < v'\left[\frac{f(\xi)}{\pi_s(\xi)}\right] = v'\left[\frac{f(\xi)}{a_s(\xi)\, a_{s-1}^s(\xi)}\right] = v'[X].$$

Следовательно, в любом случае вычет элемента X равен нулю и имеет место равенство

$$d_0 + d_1 c + \ldots + d_{s-1} c^{s-1} + c^s = 0,$$

которое мы и хотели доказать. Таким образом, можно утверждать, что в поле R' существует элемент c, для которого

$$v'\left[\frac{\xi_{r+1}-\alpha_{r+1}}{a_{s-1}(\xi)}-c\right]=0.$$

Положение, к которому мы теперь пришли, можно охарактеризовать следующим образом. Независимо от того, идет ли речь о теореме I или о теореме II, в исключительном случае норма разности $\xi_{r+1}-\alpha_{r+1}$ равна норме некоторого многочлена от $\xi_1, \ldots, \xi_r$ с коэффициентами из R' (назовем его $H_0(\xi)$). При этом существует отличный от нуля элемент c поля R', удовлетворяющий неравенству

$$v\left[(\xi_{r+1}-\alpha_{r+1})/H_0(\xi)-c\right]>0.$$

Воспользуемся теперь леммой II § 5 и построим многочлен $Q_0(x_1, \ldots, x_r)$ с коэффициентами из K, для которого выражение $Q_0(x)-cH_0(x)$ имеет разложение по разностям $x_1-\alpha_1, \ldots, x_r-\alpha_r$, начинающееся с членов достаточно высокой степени ρ_0. После этого произведем преобразование

$$x_i=x_i^{(1)} \qquad (i=1, \ldots, r),$$
$$x_{r+1}=x_{r+1}^{(1)}+Q_0(x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(r)}).$$

Очевидно, что оно является кремоновым преобразованием нужного типа. Кроме того, при достаточно большом ρ_0

$$\begin{aligned}
&v'(\xi_{r+1}^{(1)}-\alpha_{r+1})=v'[\xi_{r+1}-\alpha_{r+1}-Q_0(\xi_1, \ldots, \xi_r)]\geqslant\\
&\geqslant \min\{v'[\xi_{r+1}-\alpha_{r+1}-cH_0(\xi)],\quad v'[Q_0(\xi)-cH_0(\xi)]\}=\\
&=v'[\xi_{r+1}-\alpha_{r+1}-cH_0(\xi)]=\\
&=v'[H_0(\xi)]+v'[(\xi_{r+1}-\alpha_{r+1})/H_0(\xi)-c]>\\
&>v'[H_0(\xi)]=v'(\xi_{r+1}-\alpha_{r+1}).
\end{aligned}$$

Многочлен $F(x)$ обратится в многочлен

$$F^{(1)}(x^{(1)})=F(x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)}, x_{r+1}^{(1)}+Q_0(x^{(1)})).$$

Ясно, что этот многочлен имеет те же числа $s_0, \ldots, s_t$, что и $F(x)$. Попытаемся получить уменьшение этих чисел с помощью ранее примененных методов. Если это удастся, то мы тем самым получим нужную редукцию для $F(x)$ и теоремы I и II будут доказаны. Если же уменьшения не произойдет и для $F^{(1)}(x^{(1)})$, то значение $v'(\xi_{r+1}^{(1)}-\alpha_{r+1})$ будет равно норме некоторого многочлена от $(\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_r^{(1)})=(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, например норме $H_1(\xi)$. В этом случае мы можем произвести кремоново преобразование

$$x_i^{(1)}=x_i^{(2)} \qquad (i=1, \ldots, r),$$
$$x_{r+1}^{(1)}=x_{r+1}^{(2)}+Q_1(x_1^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)})$$

так, чтобы было

$$v'(\xi_{r+1}^{(2)} - \alpha_{r+1}) > v'(\xi_{r+1}^{(1)} - \alpha_{r+1}).$$

Определим теперь многочлен $F^{(2)}(x^{(2)})$ равенством

$$F^{(2)}(x^{(2)}) = F^{(1)}(x_1^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)}, x_{r+1}^{(2)} + Q_1(x_1^{(2)}, \ldots, x_r^{(2)})),$$

повторим то же самое с $F^{(2)}(x^{(2)})$ и продолжим таким же образом дальше. Если мы сможем доказать, что после конечного числа шагов необходимо получается многочлен $F^{(t)}(x^{(t)})$, для которого уменьшение числа s_0 возможно предыдущими методами, то тем самым индуктивное доказательство теорем I и II будет закончено. Следовательно, нужно лишь показать, что наше построение многочленов $F^{(1)}(x^{(1)})$, $F^{(2)}(x^{(2)})$, ... не может продолжаться неограниченно.

Допустим, что мы продолжили это построение неограниченно. Этим получена бесконечная последовательность многочленов $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, ... от неизвестных $x_1, \ldots, x_r$, имеющих коэффициенты из поля R' и удовлетворяющих условиям

$$v'(\xi_{r+1}^{(t)} - \alpha_{r+1}) = v'[H_t(\xi)].$$

Но так как

$$v'(\xi_{r+1}^{(t+1)} - \alpha_{r+1}) > v'(\xi_{r+1}^{(t)} - \alpha_{r+1}),$$

то

$$v'[H_0(\xi)] < v'[H_1(\xi)] < v'[H_2(\xi)] < \ldots.$$

Определим теперь многочлен $\Phi(x)$ из $R'[x_1, \ldots, x_{r+1}]$ и целое число σ следующим образом: в случае теоремы I $\Phi(x) = \dfrac{\partial F}{\partial x_{r+1}}$ и $\sigma = s_0 - 1$, а в случае теоремы II $\Phi(x) = F_h(x)$ и $\sigma = s_h$. Если $\sigma = 0$, то теоремы I и II уже доказаны. Поэтому можно предполагать, что $\sigma > 0$. Имеем

$$\Phi^{(t)}(x^{(t)}) = \Phi^{(t-1)}(x_1^{(t)}, \ldots, x_r^{(t)}, x_{r+1}^{(t)} + Q_{t-1}(x_1^{(t)}, \ldots, x_r^{(t)})).$$

Тогда

$$\Phi(\xi) = \Phi^{(1)}(\xi^{(1)}) = \Phi^{(2)}(\xi^{(2)}) = \ldots \neq 0,$$

а поэтому значение $v'[\Phi^{(t)}(\xi^{(t)})] = M$ не зависит от t и конечно. Кроме того, по определению числа σ,

$$M = v'[\Phi^{(t)}(\xi^{(t)})] \geqslant \sigma v'(\xi_{r+1}^{(t)} - \alpha_{r+1}) \geqslant v'(\xi_{r+1}^{(t)} - \alpha_{r+1}) = v'[H_t(\xi)].$$

Обозначим через Ω алгебраическое замыкание поля K, а через $\overline{\mathfrak{B}}$ — нормирование поля $\Omega(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, являющееся продолжением нормирования $\mathfrak{B}'$ поля $R'(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Пусть $\tau = \min[\overline{v}(\xi_1 - \alpha_1), \ldots, \overline{v}(\xi_r - \alpha_r)]$, а m — наименьшее целое число, для которого $m\tau > M$. Пусть, далее, $\alpha_1(\xi), \ldots, \alpha_a(\xi)$ — базис над полем Ω для модуля,

состоящего из многочленов от разностей $\xi_1 - \alpha_1, \ldots, \xi_r - \alpha_r$, имеющих степени $< m$. Можно считать, что α_i расположены так, чтобы было $\bar{v}[\alpha_1(\xi)] \leqslant \bar{v}[\alpha_j(\xi)]$ $(j > 1)$. Тогда, ввиду того, что поле Ω алгебраически замкнуто, а нормирование $\bar{\mathfrak{B}}$ имеет размерность нуль, в Ω существуют элементы c_j, удовлетворяющие условиям

$$\bar{v}[\alpha_j(\xi) - c_j\alpha_1(\xi)] > \bar{v}[\alpha_1(\xi)] \qquad (j > 1).$$

Без ограничения общности можно считать α_j расположенными так, чтобы было

$$\bar{v}[\alpha_j(\xi) - c_j\alpha_1(\xi)] \geqslant \bar{v}[\alpha_2(\xi) - c_2\alpha_1(\xi)].$$

В таком случае в поле Ω можно найти элементы d_j, для которых

$$\bar{v}[\alpha_j(\xi) - c_j\alpha_1(\xi) - d_j\alpha_2(\xi) + d_jc_2\alpha_1(\xi)] > \bar{v}[\alpha_2(\xi) - c_2\alpha_1(\xi)].$$

Если мы положим

$$\beta_1(\xi) = \alpha_1(\xi), \quad \beta_2(\xi) = \alpha_2(\xi) - c_2\alpha_1(\xi),$$

$$\beta_3(\xi) = \alpha_3(\xi) - c_3\alpha_1(\xi) - d_3\alpha_2(\xi) + d_3c_2\alpha_1(\xi), \ \ldots,$$

то многочлены $\beta_1(\xi)$, $\beta_2(\xi)$, ... составят базис над полем Ω для многочленов от разностей $\xi_1 - \alpha_1, \ldots, \xi_r - \alpha_r$, имеющих степени $< m$, причем

$$\bar{v}[\beta_1(\xi)] < \bar{v}[\beta_2(\xi)] < \bar{v}[\beta_3(\xi)] < \ldots .$$

Если $P(x)$ — любой многочлен из кольца $\Omega[x_1, \ldots, x_r]$, то

$$P(\xi) = \sum_{i=1}^{a} b_i\beta_i(\xi) + Q(\xi),$$

где $Q(\xi)$ — многочлен от разностей $\xi_1 - \alpha_1, \ldots, \xi_r - \alpha_r$, не содержащий членов со степенями $< m$, а коэффициенты $b_1, \ldots, b_a$ принадлежат полю Ω. В таком случае $\bar{v}[Q(\xi)] \geqslant m\tau > M$. Следовательно, если $\bar{v}[P(\xi)] \leqslant M$, то

$$\bar{v}[P(\xi)] = \bar{v}\left[\sum_i b_i\beta_i(\xi)\right] = \bar{v}[\beta_\rho(\xi)],$$

где ρ — наименьшее значение i, при котором $b_i \neq 0$.

Но мы уже видели, что

$$\bar{v}'[H_t(\xi)] = \bar{v}[H_t(\xi)] \leqslant M.$$

Следовательно, единственно возможными значениями для $v'[H_t(\xi)]$ являются

$$\bar{v}[\beta_1(\xi)], \ \ldots, \ \bar{v}[\beta_a(\xi)].$$

Но так как

$$v'[H_0(\xi)] < v'[H_1(\xi)] < \ldots ,$$

то последовательность $H_0, H_1, \ldots$ не может содержать более чем a членов, вопреки предположению о том, что эта последовательность бесконечна.

Отсюда мы заключаем, что после конечного числа шагов должен получиться многочлен $F^{(t)}(x^{(t)})$, для которого возможна редукция числа s ранее изложенными методами. Этим наше индуктивное рассуждение завершено, и тем самым справедливость теорем I и II доказана.

§ 7. Нормирования размерности s и ранга k

Довольно длинный ряд построений, выполненных в §§ 5 и 6, позволил нам доказать сформулированную в начале § 4 локальную теорему об униформизации для случая нульмерных нормирований ранга 1. В действительности для этого случая мы доказали больше, так как было показано, что если U есть гиперповерхность в пространстве $A_{d+1}(x_1, \ldots, x_{d+1})$, а $\mathfrak{B}$ — нульмерное нормирование ранга 1 поля функций для U, то существует кремоново преобразование пространства A_{d+1}, имеющее вид

$$x_i = P_i(y_1, \ldots, y_{d+1}) \qquad (i = 1, \ldots, d+1),$$

где $P_i(y_1, \ldots, y_{d+1})$ — многочлены из $K[y_1, \ldots, y_{d+1}]$, и преобразующее U в многообразие U', на котором центр нормирования $\mathfrak{B}$ будет простым подмногообразием. Ниже будет видно, что это дополнительное утверждение играет важную роль в рассуждениях настоящего параграфа. Нашей задачей здесь будет вывести из указанного частного случая локальной теоремы об униформизации (для краткости ЛТУ), что теорема верна для нормирований размерности s и ранга k.

Мы сделаем это в два этапа. Прежде всего покажем, что если ЛТУ верна для нормирований ранга k и размерности нуль, то она верна для нормирований любой допустимой размерности s, имеющих ранг k. После этого будет доказано, что если ЛТУ верна для нормирований ранга k и любой допустимой размерности s, то она верна и для нормирований ранга $k+1$. Ясно, что эти два результата вместе с теоремой I § 6 влекут за собой справедливость ЛТУ в общем случае.

Пусть U — неприводимое алгебраическое многообразие размерности d в аффинном пространстве A_n, и пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка для U. Допустим, что мы можем предположить справедливость ЛТУ для любого нормирования поля функций $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ многообразия U в случае, когда нормирование имеет ранг k и размерность нуль. Рассмотрим нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ, имеющее ранг k и размерность s. Без ограничения общности мы можем предполагать, что центр V нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U лежит на конечном расстоянии. Обозначим через $\mathfrak{R}$ кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, а через $\mathfrak{p}$

максимальный идеал кольца $\mathfrak{R}$. Так как подмногообразие V лежит на конечном расстоянии, то

$$\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n] \subseteq \mathfrak{R}$$

и V определяется простым идеалом $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}$.

Пусть V имеет размерность s'. Мы знаем, что $s' \leqslant s$. Если $s' < s$, то поступим следующим образом. Среди координат ξ_i можно выбрать s' алгебраически независимых по модулю $\mathfrak{P}$. Можно предполагать координаты перенумерованными так, что $\xi_1, \ldots, \xi_{s'}$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{P}$, а значит, и по модулю $\mathfrak{p}$. Так как размерность нормирования $\mathfrak{B}$ равна s, то можно найти еще $s - s'$ элементов $\eta_{s'+1}, \ldots, \eta_s$ кольца $\mathfrak{R}$ так, чтобы элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{s'}, \eta_{s'+1}, \ldots, \eta_s$ были алгебраически независимыми по модулю $\mathfrak{p}$. Мы рассмотрим многообразие U' в аффинном пространстве размерности $n + s - s'$, имеющее общую точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_{s'+1}, \ldots, \eta_s)$. Очевидно, что U' бирационально эквивалентно многообразию U, так как поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_{s'+1}, \ldots, \eta_s) = \Sigma$.

Пусть $\mathfrak{J}'$ — область целостности $K[\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_{s'+1}, \ldots, \eta_s]$. Тогда

$$\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{R}$$

и центр V' нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U определяется простым идеалом $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}'$. Так как элементы $\xi_1, \ldots, \xi_{s'}, \eta_{s'+1}, \ldots, \eta_s$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{p}$ и лежат в $\mathfrak{J}'$, то они алгебраически независимы и по модулю $\mathfrak{P}'$. Следовательно, многообразие V' имеет размерность, не меньшую s. Но так как размерность центра s-мерного нормирования не может превосходить s, то отсюда вытекает, что размерность многообразия V' точно равна s. Далее, мы имеем

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}',$$

а из соотношений

$$\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}', \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}'$$

следует, что

$$Q(V) = \mathfrak{J}_{\mathfrak{P}} \subseteq \mathfrak{J}'_{\mathfrak{P}'} = Q(V').$$

Поэтому достаточно доказать ЛТУ для многообразия U' и нормирования $\mathfrak{B}$.

Таким образом, можно предполагать, что центр V нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U имеет размерность s и что $\xi_1, \ldots, \xi_s$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{P}$. Обозначим через Ω поле $K(\xi_1, \ldots, \xi_s)$. Любой многочлен от $\xi_1, \ldots, \xi_s$ с коэффициентами из K является делителем единицы в кольце $\mathfrak{R}$. Следовательно, нормирование поля Ω, индуцируемое нормированием $\mathfrak{B}$, тривиально. Возьмем поэтому поле Ω в качестве нового основного поля и рассмотрим многообразие $\bar{U}$,

определяемое над этим полем общей точкой $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Непосредственно очевидно, что это многообразие имеет размерность $d - s$. Так как

$$\Omega = K(\xi_1, \ldots, \xi_s),$$

то поле

$$\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Omega(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

будет полем функций $\bar{\Sigma}$ для многообразия $\bar{U}$ и поэтому нормирование $\mathfrak{B}$ будет и нормированием поля $\bar{\Sigma}$. Ранг этого нормирования, как нормирования для $\bar{\Sigma}$, равен k. Но ввиду того, что нормирование $\mathfrak{B}$ имело размерность s, а элементы $\xi_1, \ldots, \xi_s$ алгебраически независимы по модулю максимального идеала $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{R}$, любой элемент η из $\mathfrak{R}$ будет алгебраически зависимым над полем K от элементов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ по модулю $\mathfrak{p}$. Следовательно, элемент η будет алгебраическим над полем Ω по модулю $\mathfrak{p}$, и поэтому размерность нормирования $\mathfrak{B}$, как нормирования поля $\bar{\Sigma}$, равна нулю. Таким образом, $\mathfrak{B}$ является нульмерным нормированием поля $\bar{\Sigma}$. Пусть $\bar{V}$ — центр этого нормирования на многообразии $\bar{U}$. Он определяется идеалом $\Omega \cdot (\mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}) = \Omega \cdot \mathfrak{P}$ кольца $\Omega \cdot \mathfrak{J}$. Кроме того, так как любой элемент поля Ω, отличный от нуля, является делителем единицы в кольце $Q(V)$, мы усматриваем, что кольцо частных $\bar{Q}(\bar{V})$ для $\bar{V}$ равно $Q(V)$.

В силу предположения индукции, существует многообразие $\bar{U}'$, определенное над полем Ω и бирационально эквивалентное $\bar{U}$, на котором центр $\bar{V}'$ нормирования $\mathfrak{B}$ будет простым нульмерным подмногообразием, и при этом $\bar{Q}(\bar{V}) \subseteq \bar{Q}(\bar{V}')$. Многообразие $\bar{U}'$ можно рассматривать как многообразие в аффинном пространстве, на котором подмногообразие $\bar{V}'$ лежит на конечном расстоянии. Пусть $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ — общая точка для $\bar{U}'$. Обозначим теперь через $\bar{U}^*$ многообразие, определяемое над полем Ω общей точкой $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)$ (оно находится в регулярном соответствии с соединяющим многообразием для $\bar{U}$ и $\bar{U}'$), а через U^* — многообразие, определяемое той же общей точкой над полем K.

Так как $\eta_i \in \Omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \bar{\Sigma} = \Sigma$, то ясно, что многообразие U^* бирационально эквивалентно U. Пусть теперь V^* — центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U^*. Докажем, что V^* есть простое подмногообразие на U^*, имеет размерность s и удовлетворяет соотношению $Q(V) \subseteq Q(V^*)$. Так как многообразия V и $\bar{V}'$ оба лежат на конечном расстоянии в своих пространствах, то мы имеем

$$K[\xi_1, \ldots, \xi_n] \subseteq \mathfrak{R}, \quad \Omega[\eta_1, \ldots, \eta_m] \subseteq \mathfrak{R}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{J}^* = K[\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m] \subseteq \mathfrak{R},$$

т. е. многообразие V^* лежит на конечном расстоянии и определяется идеалом $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{J}^* \cap \mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}^*$. Но так как элементы $\xi_1, \ldots, \xi_s$ являются элементами кольца $\mathfrak{J}^*$, алгебраически независимыми по модулю $\mathfrak{P}^*$, то V^* имеет размерность s. Далее, так как $\bar{Q}(\bar{V}) \subseteq \bar{Q}(\bar{V}^*)$, то многообразие $\bar{V}^*$ является единственным подмногообразием на соединяющем многообразии U^* для U и $\bar{U}'$, отвечающим подмногообразию $\bar{V}$, а $\bar{V}^*$ (т. е. центр нормирования $\mathfrak{B}$ на $\bar{U}^*$) удовлетворяет условию $\bar{Q}(\bar{V}^*) = \bar{Q}(\bar{V}')$. Следовательно,

$$Q(V) = \bar{Q}(\bar{V}) \subseteq \bar{Q}(\bar{V}') = \bar{Q}(\bar{V}^*).$$

Таким же образом, как мы раньше выяснили, что $Q(V) = \bar{Q}(\bar{V})$, можно убедиться теперь в том, что

$$\bar{Q}(\bar{V}^*) = Q(V^*).$$

Поэтому

$$Q(V) \subseteq Q(V^*).$$

Напомним, что $\bar{V}'$ является простым нульмерным подмногообразием на многообразии $\bar{U}'$, имеющем размерность $d - s$. Поэтому максимальный идеал кольца частных $Q(V^*) = \bar{Q}(\bar{V}^*) = \bar{Q}(\bar{V}')$ имеет базис, состоящий из $d - s$ элементов. Но размерности многообразий U^* и V^* равны соответственно d и s, и поэтому из сказанного следует, что V^* есть простое подмногообразие на U^*. Таким образом, U^* есть бирациональный образ многообразия U, на котором центр V^* нормирования $\mathfrak{B}$ является простым s-мерным подмногообразием, удовлетворяющим условию $Q(V) \subseteq Q(V^*)$. Следовательно, из предположения, что ЛТУ имеет место для нульмерных нормирований ранга k, следует справедливость ЛТУ для нормирований ранга k вообще, независимо от их размерности.

Для окончания доказательства теоремы остается лишь показать, что если ЛТУ верна для нормирований ранга k и любой размерности, то она верна и для нульмерных нормирований ранга $k+1$. Рассмотрим d-мерное многообразие U и нульмерное нормирование $\mathfrak{B}$ ранга $k+1$ поля функций для U. При этом можно считать неоднородные координаты выбранными так, чтобы центр V нормирования $\mathfrak{B}$ лежал на конечном расстоянии. Общую точку многообразия U обозначим через $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Так как нормирование $\mathfrak{B}$ имеет ранг $k+1$, то его можно составить из k-мерного нормирования $\mathfrak{B}'$ поля $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и некоторого нормирования $\mathfrak{B}_1$ ранга 1 для поля вычетов Σ_1 нормирования $\mathfrak{B}'$. Ввиду того, что $\mathfrak{B}$ имеет размерность нуль, $\mathfrak{B}_1$ также должно иметь размерность нуль. С другой стороны, размерность s нормирования $\mathfrak{B}'$ больше нуля, так как нормирование $\mathfrak{B}_1$ нетривиально. Поэтому поле Σ_1 также имеет положительную размерность над K. Обозначим через W центр нормирования $\mathfrak{B}'$ на многообразии U. Если W имеет размерность s',

то $0 \leqslant s' \leqslant s$. Ввиду того, что $V \subseteq W$ и многообразие V лежит на конечном расстоянии, W также должно лежать на конечном расстоянии.

По предположению индукции, существует бирациональный образ U' многообразия U, на котором центр W' нормирования $\mathfrak{B}'$ является простым s-мерным подмногообразием, удовлетворяющим условию $Q(W) \subseteq Q(W')$. Так как нормирование $\mathfrak{B}$ составлено из $\mathfrak{B}'$ и еще некоторого нормирования, то центр V' нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U' содержится в W'. Мы выберем неоднородные координаты так, чтобы многообразие V', а значит и W', лежало на конечном расстоянии, и обозначим через $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ общую точку для U'. Наконец, многообразие в $(n+m)$-мерном пространстве, имеющее общую точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m)$, обозначим через U^*.

Пусть $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал этого кольца. Тогда, ввиду того, что V и V' лежат на конечном расстоянии,

$$\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n] \subseteq \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{J}' = K[\eta_1, \ldots, \eta_m] \subseteq \mathfrak{R},$$

и поэтому

$$\mathfrak{J}^* = K[\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m] \subseteq \mathfrak{R}.$$

Следовательно, центр V^* нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U^* лежит на конечном расстоянии и определяется идеалом $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{J}^* \cap \mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{J}^*$. Если W^* — центр нормирования $\mathfrak{B}'$ на U^*, то $V^* \subseteq W^*$, и поэтому многообразие W^* также должно лежать на конечном расстоянии. В таком случае, как мы уже видели, соотношение $Q(W) \subseteq Q(W')$ и тот факт, что кольцо $\mathfrak{J}^*$ является объединением колец $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}'$, влекут за собой равенство $Q(W') = Q(W^*)$. Поэтому W^* является простым s-мерным подмногообразием на U^*. Далее, так как многообразия V и V' определяются идеалами $\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{P}' = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{p}$ колец $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}'$, то

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^* \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{J} \cap \mathfrak{P}^*, \quad \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}^*,$$

а отсюда можно заключить, что $\mathfrak{J}_{\mathfrak{P}} \subseteq \mathfrak{J}^*_{\mathfrak{P}^*}$, т. е. что $Q(V) \subseteq Q(V^*)$.

Из сказанного следует, что если мы сможем доказать теорему для многообразия U^*, то ее можно доказать и для U. Другими словами, нам остается доказать теорему в предположении, что центр W нормирования $\mathfrak{B}'$ на многообразии U является s-мерным простым подмногообразием на U. Следующим нашим шагом будет доказательство того, что задачу можно еще упростить, добавив к уже установленным ограничениям то, что многообразие U является гиперповерхностью.

Предположим, что многообразие W есть простое s-мерное подмногообразие на U, определяемое простым идеалом $\mathfrak{P}_s$ кольца $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Без существенного ограничения общности можно предполагать координатную систему выбранной так, чтобы выполнялись следующие условия:

(I) Пересечение многообразия U с подпространством $\mathbf{\Pi}_{n-s}$, определяемым уравнениями

$$x_1 = \ldots = x_s = 0,$$

является $(d-s)$-мерным многообразием, и каждая компонента пересечения $\mathbf{\Pi}_{n-s}$ с многообразием W, состоящего из нульмерных многообразий $F_1, \ldots, F_t$, будет простым подмногообразием как на W, так и на U. Ввиду того, что F_i будут простыми подмногообразиями U, в кольце $\mathfrak{J}$ можно выбрать униформизирующие параметры $\eta_{s+1}, \ldots, \eta_d$ в окрестности W таким образом, чтобы система $\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_d$ была системой униформизирующих параметров в окрестности F_i. Более того (гл. XVI, § 3), можно выбрать элементы $\eta_{s+1}, \ldots, \eta_d$ и элемент ζ из $\mathfrak{J}$ таким образом, чтобы имели место следующие свойства:

(II) элементы $\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_d$ алгебраически независимы над полем K;

(III) $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n) = K(\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_d, \zeta)$;

(IV) элементы из $\mathfrak{J}$ являются целыми над кольцом $K[\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_d]$;

(V) если $f(x_1, \ldots, x_s, y_{s+1}, \ldots, y_d, z)$ — многочлен, неприводимый над полем K и такой, что

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_d, \zeta) = 0,$$

то уравнение

$$f(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, z) = 0$$

имеет лишь простые корни.

Пусть U' — многообразие в пространстве A_{d+1}, имеющее общую точку $(\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_d, \zeta)$, и пусть $\mathfrak{J}' = K[\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_d, \zeta]$. Так как $\mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}$, то центром нормирования $\mathfrak{B}'$ на многообразии U' будет многообразие W', определяемое идеалом $\mathfrak{P}'_s = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{P}_s$ кольца $\mathfrak{J}'$. Докажем прежде всего, что многообразие W' имеет размерность s. Любой элемент из $\mathfrak{J}$ является целым над кольцом $K[\xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_{s+1}, \ldots, \eta_d]$, а значит, и целым над кольцом $K[\xi_1, \ldots, \xi_s]$ по модулю $\mathfrak{P}_s$. Но так как многообразие W имеет размерность s, то элементы $\xi_1, \ldots, \xi_s$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{P}_s$, а значит, и по модулю $\mathfrak{P}'_s$. Поэтому размерность многообразия W' не меньше s. Но ввиду того, что W' является центром s-мерного нормирования, отсюда следует, что эта размерность точно равна s.

Покажем теперь, что многообразие W' является простым подмногообразием на U'. Из приведенного выше условия (V) следует, что

$$\frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \not\equiv 0 \quad (\mathfrak{P}_s).$$

Но так как

$$\frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \in \mathfrak{J}',$$

то отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \neq 0 \quad (\mathfrak{P}'_s),$$

и поэтому W' есть простое подмногообразие на U'.

Наконец, по построению, элементы кольца $\mathfrak{J}$ — целые над кольцом $\mathfrak{J}'$. Поэтому соображения, использованные в § 4, стр. 291, показывают, что $Q(V) \subseteq Q(V')$. Следовательно, если мы сможем доказать ЛТУ для многообразия U' и нормирования $\mathfrak{B}$, то отсюда будет следовать справедливость теоремы для U. Но многообразие U' является гиперповерхностью в пространстве A_{d+1}, определяемой уравнением

$$f(x_1, \ldots, x_s, y_{s+1}, \ldots, y_d, z) = 0.$$

Таким образом, осталось доказать нашу теорему в случае, когда U — гиперповерхность, а многообразие W, служащее центром нормирования $\mathfrak{B}'$ на гиперповерхности U, — простое s-мерное подмногообразие. Полезно сформулировать явно наши предположения относительно U и $\mathfrak{B}$. U есть гиперповерхность в пространстве A_{d+1}, определяемая уравнением

$$f(x_1, \ldots, x_{d+1}) = 0,$$

или общей точкой $(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$. $\mathfrak{B}$ — нульмерное нормирование поля $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$, имеющее ранг $k+1$ и составленное из s-мерного нормирования $\mathfrak{B}'$ ранга k поля Σ и некоторого нульмерного нормирования ранга 1 для поля вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$. Центры V и W нормирований $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ находятся на конечном расстоянии, причем W имеет размерность s и является простым подмногообразием на U. Элементы $\xi_{s+1}, \ldots, \xi_d$ служат униформизирующими параметрами для гиперповерхности U и в окрестности W. Если $\mathfrak{J} = K[\xi_1, \ldots, \xi_{d+1}]$ и $\mathfrak{P}_s$ — простой идеал многообразия W в кольце $\mathfrak{J}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_{d+1}} \neq 0 \quad (\mathfrak{P}_s)$$

и элементы $\xi_1, \ldots, \xi_s$ алгебраически независимы по модулю $\mathfrak{P}_s$.

Перейдем от кольца $\mathfrak{J}$ к кольцу вычетов $\mathfrak{J}/\mathfrak{P}_s$ и обозначим через $\bar{\xi}_i$ элементы, соответствующие элементам ξ_i при таком переходе. Тогда

$$\bar{\xi}_{s+1} = \ldots = \bar{\xi}_d = 0.$$

С другой стороны, элементы $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s$ алгебраически независимы над K. Так как

$$f(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s, 0, \ldots, 0, \bar{\xi}_{d+1}) = 0,$$

то элемент $\bar{\xi}_{d+1}$ алгебраически зависит от $\bar{\xi}_1 \ldots, \bar{\xi}_s$, и поэтому существует единственное неприводимое соотношение

$$g(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_{d+1}) = 0,$$

связывающее элементы $\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_{d+1}$ (гл. III, § 3, теорема VI). Но написанное соотношение эквивалентно сравнению

$$g(\xi_1, \ldots, \xi_s, \xi_{d+1}) \doteq 0 \quad (\mathfrak{P}_s).$$

В таком случае

$$f(x_1, \ldots, x_s, 0, \ldots, 0, x_{d+1}) = \\ = g(x_1, \ldots, x_s, x_{d+1})\varphi(x_1, \ldots, x_s, x_{d+1}),$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_s, x_{d+1})$ — некоторый многочлен над полем K. Следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_{d+1}) = g(x_1, \ldots, x_s, x_{d+1})\varphi(x_1, \ldots, x_s, x_{d+1}) + \\ + \sum_{i=s+1}^{d} A_i(x_1, \ldots, x_{d+1})x_i.$$

Из равенства

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_{d+1}} = g(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_{d+1}} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_{d+1}}\varphi(x) + \sum_{i=s+1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_{d+1}} A_i(x_1, \ldots, x_{d+1})x_i$$

мы заключаем, что

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_{d+1}} = \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_{d+1}}\varphi(\xi) \quad (\mathfrak{P}_s).$$

Но так как, по предположению,

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_{d+1}} \neq 0 \quad (\mathfrak{P}_s),$$

то $\varphi(\xi) \neq 0 \quad (\mathfrak{P}_s)$, или, что то же самое, $v'[\varphi(\xi)] = 0$.

Вернемся к гомоморфному отображению кольца $\mathfrak{J}$ на $\mathfrak{J}/\mathfrak{P}_s$. Так как $\mathfrak{P}_s$ есть идеал кольца $\mathfrak{J}$, соответствующий центру нормирования $\mathfrak{B}'$, то кольцо $\mathfrak{J}/\mathfrak{P}_s$ изоморфно некоторой области целостности, содержащейся в поле вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$. Но $\mathfrak{J}/\mathfrak{P}_s$ есть область целостности многообразия W. Следовательно, поле функций $\bar{\Sigma}$ многообразия W изоморфно подполю поля вычетов нормирования $\mathfrak{B}'$ и может быть отождествлено с этим подполем. Нормирование $\mathfrak{B}_1$, определяющее вместе с $\mathfrak{B}'$ нормирование $\mathfrak{B}$, индуцирует в поле $\bar{\Sigma}$ некоторое нормирование, которое мы обозначим через $\bar{\mathfrak{B}}$.

W является многообразием в пространстве A_{s+1}, определяемом уравнениями $x_{s+1} = \ldots = x_d = 0$, и имеет общую точку $(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_{d+1})$, а $\bar{\mathfrak{B}}$ — нормирование поля функций для W, имеющее ранг 1 и размерность нуль. Следовательно, в силу теоремы I § 6, существует кремоново преобразование вида

$$x_i = P_i(y_1, \ldots, y_s, y_{d+1}) \qquad (i = 1, \ldots, s, d+1),$$

где P_i — многочлены над полем K, переводящее W в гиперповерхность W', на которой центр нормирования $\bar{\mathfrak{B}}$ будет простым подмногообразием. Пусть мы имеем

$$g(x) = G(y_1, \ldots, y_s, y_{d+1})\psi(y_1, \ldots, y_s, y_{d+1}),$$

где $G(y) = 0$ — неприводимое уравнение гиперповерхности W'. Без ограничения общности мы будем предполагать, что производная $\partial G/\partial y_{d+1}$ не обращается в нуль в центре нормирования $\bar{\mathfrak{B}}$. Нам нужно показать, что многочлен $\psi(y)$ не обращается в нуль на W'.

Рассмотрим однозначно определенное s-мерное нормирование $\mathfrak{B}^*$ поля $K(y_1, \ldots, y_s, y_{d+1})$ (размерность этого поля равна $d+1$), имеющее своим центром в пространстве $(y_1, \ldots, y_s, y_{d+1})$ многообразие W' (гл. XVII, § 5, теорема VII). Это нормирование дискретно, причем $v^*[G(y)] > 0$. Так как многочлен $G(y)$ неприводим, то отсюда следует, что если группу значений нормализовать, то будет $v^*[G(y)] = 1$. В бирациональном соответствии между пространствами $(y_1, \ldots, y_s, y_{d+1})$ и $(x_1, \ldots, x_s, x_{d+1})$ многообразие W' не может быть фундаментальным, так как размерность любого фундаментального многообразия меньше s (§ 2, теорема IV). Поэтому в пространстве $(x_1, \ldots, x_s, x_{d+1})$ имеется единственное многообразие W^*, отвечающее W', причем W^* является центром нормирования $\mathfrak{B}^*$ в пространстве x. Если теперь $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_s, \bar{\eta}_{d+1})$ — общая точка многообразия W' и если положить

$$\bar{\xi}_i = P_i(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_s, \bar{\eta}_{d+1}) \qquad (i = 1, \ldots, s, d+1),$$

то точка $(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_{d+1})$ будет общей точкой для W^*. Но, в силу свойств кремоновых преобразований, точка $(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_s, \bar{\xi}_{d+1})$ должна быть общей точкой для W. Следовательно, $W = W^*$, и поэтому многообразие W^* имеет размерность s. Но в таком случае, ввиду неприводимости многочлена $g(x)$ и ввиду того, что он обращается в нуль на W, мы усматриваем, как и выше, что $v^*[g(x)] = 1$. Теперь из того, что

$$v^*[g(x)] = v^*[G(y)] + v^*[\psi(y)]$$

и

$$v^*[g(x)] = 1 = v^*[G(y)],$$

очевидно, что

$$v^*[\psi(y)] = 0,$$

т. е.

$$\psi(\bar{\eta}) \neq 0.$$

Определим элементы $\eta_1, \ldots, \eta_s, \eta_{d+1}$ равенствами

$$\xi_i = P_i(\eta_1, \ldots, \eta_s, \eta_{d+1}) \qquad (i = 1, \ldots, s, d+1).$$

В таком случае элементы $\overline{\eta}_i$ можно рассматривать как вычеты соответствующих элементов η_i в нормировании $\mathfrak{B}'$. Так как $v'(\eta_i) \geqslant 0$ и $\psi(\overline{\eta}) \neq 0$, то

$$v'[\psi(\eta)] = 0.$$

Центром нормирования $\overline{\mathfrak{B}}$ на многообразии W' является подмногообразие с общей точкой $(\eta_1^*, \ldots, \eta_s^*, \eta_{d+1}^*)$, где η_i^* — вычеты элементов $\overline{\eta}_{li}$ в нормировании $\overline{\mathfrak{B}}$, т. е. вычеты элементов η_{li} в нормировании $\mathfrak{B}$. То обстоятельство, что производная $\partial G/\partial y_{d+1}$ не обращается в нуль в центре нормирования $\overline{\mathfrak{B}}$, можно теперь выразить так:

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_{d+1}^*} \neq 0.$$

Вернемся теперь к многообразию U в $(d+1)$-мерном аффинном пространстве $(x_1, \ldots, x_{d+1})$. Произведем преобразование

$$x_i = P_i(y_1, \ldots, y_{d+1}) \qquad (i = 1, \ldots, d+1),$$

где

$$P_i(y_1, \ldots, y_{d+1}) = P_i(y_1, \ldots, y_s, y_{d+1}) \qquad (i = 1, \ldots, s, d+1)$$

и

$$P_i(y_1, \ldots, y_{d+1}) = y_i \psi(y) \chi(y) \qquad (i = s+1, \ldots, d),$$

а

$$\chi(y) = \varphi(x_1, \ldots, x_s, x_{d+1}) = \varphi[P_1(y), \ldots, P_s(y), P_{d+1}(y)].$$

Это преобразование, очевидно, является кремоновым. Обозначим через $(\eta_1, \ldots, \eta_{d+1})$ образ точки $(\xi_1, \ldots, \xi_{d+1})$ и заметим, что элементы $\eta_1, \ldots, \eta_s, \eta_{d+1}$ совпадают с элементами $\eta_1, \ldots, \eta_s, \eta_{d+1}$ из поля Σ, рассматривавшимися в связи с $(s+1)$-мерным пространством $(y_1, \ldots, y_s, y_{d+1})$. В таком случае, ввиду того, что $\varphi(x)$ не обращается в нуль на W, должно быть $v'[\varphi(\xi)] = v'[\chi(\eta)] = 0$. Но так как

$$\xi_i = \eta_i \psi(\eta) \chi(\eta) \qquad (i = s+1, \ldots, d)$$

и

$$v'(\xi_i) > 0 \qquad (i = s+1, \ldots, d),$$

то

$$0 < v'(\xi_i) = v'(\eta_i) + v'[\psi(\eta)] + v'[\chi(\eta)] = v'(\eta_i).$$

Рассмотрим образ U' многообразия U при кремоновом преобразовании, а также центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U'. Мы имеем

$$f(x) = g(x)\varphi(x) + \sum_{i=s+1}^{d} A_i(x_1, \ldots, x_{d+1}) x_i =$$

$$= G(y)\psi(y)\chi(y) + \sum_{i=s+1}^{d} B_i(y) y_i \psi(y) \chi(y),$$

где $B_i(y) = A_i(x)$. Положим

$$H(y) = G(y) + \sum_{i=s+1}^{d} B_i(y)\, y_i.$$

Так как значения $\psi(\eta)$ и $\chi(\eta)$ отличны от нуля, то из равенства $f(\xi) = 0$ следует, что $H(\eta) = 0$. Поэтому уравнение

$$H(y_1, \ldots, y_{d+1}) = 0$$

удовлетворяется точками многообразия U'. Но так как многочлен $G(y)$ неприводим и не зависит от $y_{s+1}, \ldots, y_d$, то $H(y)$ может быть приводимым лишь в том случае, если он имеет множитель вида

$$T(y) = 1 + \sum_{i=s+1}^{d+1} C_i(y)\, y_i.$$

Многочлен $T(y)$ не может обращаться в нуль на многообразии U'. Действительно, центр нормирования $\mathfrak{B}'$ на многообразии U' находится на конечном расстоянии, так как $v'(\eta_i) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, d+1)$, и имеет общую точку $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{d+1})$, где $\bar{\eta}_i$ — вычеты элементов η_i в нормировании $\mathfrak{B}'$. Так как

$$v'(\eta_i) > 0 \qquad (i = s+1, \ldots, d),$$

то

$$\bar{\eta}_i = 0 \qquad (i = s+1, \ldots, d).$$

Ясно, что эти значения не удовлетворяют уравнению $T(y) = 0$, и поэтому $T(y)$ не обращается в нуль на U', так как он отличен от нуля в точке $\bar{\eta}$ этого многообразия. Отсюда легко получается, что неприводимое уравнение для U' имеет вид

$$H'(y) = G(y) + \sum_{i=s+1}^{d} B_i'(y)\, y_i.$$

Чтобы найти центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U', возьмем вычеты η_i^* элементов η_i в этом нормировании. В таком случае точка η^* будет общей точкой центра нормирования $\mathfrak{B}$. Так как нормирование $\mathfrak{B}$ составлено из $\mathfrak{B}'$ и еще некоторого нормирования, то из неравенств $v'(\eta_i) > 0$ $(i = s+1, \ldots, d)$ следует, что $\eta_i^* = 0$ $(i = s+1, \ldots, d)$. Остальные η_i уже были определены в связи с центром нормирования $\overline{\mathfrak{B}}$ на многообразии W'. Мы имеем теперь

$$\frac{\partial H'}{\partial y_{d+1}} = \frac{\partial G}{\partial y_{d+1}} + \sum_{i=s+1}^{d} \frac{\partial B_i'(y)}{\partial y_{d+1}} y_i.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H'}{\partial \eta_{d+1}^*} = \frac{\partial G}{\partial \eta_{d+1}^*} \neq 0,$$

т. е. производная $\partial H'/\partial y_{d+1}$ не обращается в нуль на центре нормирования $\mathfrak{B}$. Таким образом, этот центр является простым подмногообразием на U'.

Итак, мы получили образ многообразия U, на котором центр V' нормирования $\mathfrak{B}$ является простым подмногообразием. Так как при этом $K[\xi_1, \ldots, \xi_{d+1}] \subseteq K[\eta_1, \ldots, \eta_{d+1}]$, то мы можем заключить, как обычно, что $Q(V) \subseteq Q(V')$. Это — последний частный случай теоремы о локальной униформизации, который нужно было рассмотреть. Таким образом, теорема для всех случаев доказана.

Пользуясь теперь теоремами III §§ 5 и 6 гл. XVI, можно заметить, что если U^* — производное проективно нормальное многообразие для U', то на U^* имеется единственное подмногообразие V^*, имеющее размерность s и отвечающее подмногообразию V'. При этом $Q(V') = Q(V^*)$. Следовательно, V^* является простым подмногообразием на U^* и одновременно центром нормирования $\mathfrak{B}$ на этом многообразии. Таким образом, в формулировке локальной теоремы об униформизации можно требовать, чтобы бирациональный образ многообразия U, на котором центр нормирования $\mathfrak{B}$ является простым подмногообразием, был проективно нормальным многообразием.

§ 8. Разрешающие системы

Локальная теорема об униформизации очень полезна при изучении отдельно взятого нормирования поля функций Σ алгебраического многообразия U. Но во многих задачах алгебраической геометрии приходится рассматривать не одно нормирование, а некоторую совокупность их. Например, может оказаться необходимым рассмотреть совокупность всех нормирований поля Σ, центры которых на многообразии U лежат на заданном подмногообразии V многообразия U. Такая необходимость возникает, в частности, при исследовании структуры особого подмногообразия V на U. Очевидно, что было бы очень выгодно построить бирациональный образ многообразия U, на котором центр любого нормирования из рассматриваемой совокупности был бы простым подмногообразием. Идеальным было бы построение такого бирационального образа U' для U, на котором центр *любого* нормирования поля Σ является простым подмногообразием. Ввиду того, что центром нормирования поля Σ может быть любое неприводимое подмногообразие на U', ясно, что описанное построение эквивалентно построению бирационального образа многообразия U, вообще не имеющего особых точек. Как мы уже указывали, существование такого бирационального образа до сих пор доказано лишь в том случае, если размерность многообразия U не превышает трех. Однако частный результат, который может быть доказан для многообразий любой размерности и представляет известный интерес, содержится в следующей теореме:

Теорема I. *Для любого алгебраического многообразия U с полем функций Σ существует конечная система многообразий $U_1, \ldots, U_k$, бирационально эквивалентных многообразию U и обладающих тем свойством, что центр любого нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ является простым подмногообразием хотя бы на одном из U_i.*

Система многообразий, обладающих указанным в теореме свойством, называется *конечной разрешающей системой поля* Σ. Любая система многообразий $\{U_\alpha\}$, конечная или бесконечная, называется *разрешающей системой поля* Σ, если каждое из многообразий U_α бирационально эквивалентно U и если центр любого нормирования поля Σ будет простым подмногообразием хотя бы на одном из U_α. Локальная теорема об униформизации показывает, что для поля функций любого алгебраического многообразия U разрешающая система существует. В частности, совокупность всех бирациональных образов многообразия U будет такой системой. Для доказательства теоремы I нужно лишь показать, что из существования разрешающей системы следует существование такой системы из конечного числа многообразий.

Одно возможное упрощение доказательства последнего факта непосредственно очевидно. Действительно, нужно лишь доказать существование конечной разрешающей системы для нульмерных нормирований поля Σ, т. е. существование такой системы многообразий $U_1, \ldots, U_k$, что каждое из U_i имеет поле Σ своим полем функций и для любого нульмерного нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ найдется хотя бы одно U_i ($1 \leqslant i \leqslant k$), на котором центр нормирования $\mathfrak{B}$ является простым подмногообразием. В самом деле, предположим, что система многообразий $U_1, \ldots, U_k$ является разрешающей системой для нульмерных нормирований поля Σ. Пусть $\mathfrak{B}$ — любое нормирование для Σ, имеющее размерность, большую нуля. Тогда из нормирования $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования его поля вычетов можно составить нормирование $\mathfrak{B}_0$ поля Σ, имеющее размерность нуль (гл. XVII, § 5, теоремы VIII и IX). Пусть U_i — многообразие из нашей разрешающей системы, на котором центр V_i нормирования $\mathfrak{B}_0$ является простым подмногообразием, и пусть W_i — центр нормирования $\mathfrak{B}$ на этом многообразии. Так как нормирование $\mathfrak{B}_0$ составлено из $\mathfrak{B}$ и некоторого нормирования его поля вычетов, то $V_i \subseteq W_i$. В силу того, что V_i есть простое подмногообразие на U_i, не все точки многообразия W_i будут на U_i особыми точками, так что W_i — простое подмногообразие на U_i. Таким образом, система $U_1, \ldots, U_k$ является разрешающей системой для *всех* нормирований поля Σ, и мы можем ограничиться рассмотрением только нульмерных нормирований. Поэтому во всем дальнейшем изложении в этом параграфе предполагается, что рассматриваемые нормирования нульмерны.

Первым шагом к доказательству теоремы I является доказательство следующей леммы:

Лемма I. *Пусть U — неприводимое алгебраическое многообразие, а $\{V_\alpha\}$ — любая система его подмногообразий. Если система $\{V_\alpha\}$ обладает тем свойством, что любое конечное число входящих в нее подмногообразий $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}$ имеет непустое пересечение, то существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем многообразиям системы $\{V_\alpha\}$.*

Предположим, что лемма неверна, и рассмотрим любое многообразие V_{α_1} из системы $\{V_\alpha\}$. Оно не может быть пустым, так как в противном случае пересечение любой конечной подсистемы многообразий $\{V_\alpha\}$, содержащей V_{α_1}, было бы также пустым, вопреки условию. С другой стороны, не все многообразия системы $\{V_\alpha\}$ содержат V_{α_1} в качестве подмногообразия, так как в противном случае любая точка многообразия V_{α_1} принадлежала бы всем многообразиям V_α, а мы предположили, что пересечение всех многообразий V_α пусто. Поэтому существует многообразие V_{α_2} из системы $\{V_\alpha\}$, не содержащее V_{α_1}. Следовательно,

$$V_{\alpha_1} \supset V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}.$$

Повторяя это рассуждение, можно показать, что пересечение $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$ не пусто и не может содержаться во всех многообразиях системы $\{V_\alpha\}$. Поэтому существует многообразие V_{α_3} из системы $\{V_\alpha\}$, для которого

$$V_{\alpha_1} \supset V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} \supset V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} \cap V_{\alpha_3}.$$

Дальнейшее продолжение этого рассуждения показывает, что наше предположение об отсутствии точки пересечения всех многообразий системы $\{V_\alpha\}$ приводит к построению бесконечной строго убывающей последовательности подмногообразий многообразия U. Но мы знаем, что любая строго убывающая последовательность подмногообразий конечна (гл. X, § 1), и поэтому наше первоначальное предположение неверно. Тем самым лемма доказана.

В дальнейшем будет удобно обозначать пересечение системы $\{M_\lambda\}$ подмножеств данного множества M символом $\prod_\lambda M_\lambda$, а пересечение подмножеств конечной подсистемы $M_{\lambda_1}, \ldots, M_{\lambda_k}$ через $\prod_{i=1}^{k} M_{\lambda_i}$. Доказанную лемму можно сформулировать так: если $\prod_{i=1}^{k} V_{\alpha_i} \neq 0$ для любой конечной системы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, то $\prod_\alpha V_\alpha \neq 0$.

Рассмотрим теперь любое алгебраическое многообразие U и его поле функций Σ. Обозначим через $\{U_\alpha\}$ совокупность всех алгебраических многообразий, бирационально эквивалентных многообразию U.

Многообразия U_α обычно называются *проективными моделями* поля Σ. Индекс α может пробегать некоторое множество индексов, причем для дальнейшего нам нужно, чтобы множество индексов определяло некоторое полное упорядочение проективных моделей. Пусть M — множество всех нульмерных нормирований поля Σ. Подмножество M' из M называется *алгебраическим семейством*, если существует проективная модель U поля Σ и на ней подмногообразие V, обладающие тем свойством, что нормирование $\mathfrak{B}$ принадлежит M' в том и только в том случае, если его центр на U содержится в V.

Лемма II. *Пересечение любых двух (а значит, и любого конечного числа) алгебраических семейств из M либо пусто, либо является алгебраическим семейством.*

Пусть M' и M'' — алгебраические семейства, а U' и U'' — две проективные модели поля Σ, такие, что M' и M'' являются соответственно совокупностями нульмерных нормирований поля Σ, центры которых на U' или на U'' содержатся в подмногообразиях V' и V'' этих многообразий. Обозначим через U соединяющее многообразие для U' и U'', а через V_1 и V_2 полные образы многообразий V' и V'' на соединяющем многообразии. По определению, V_1 является геометрическим местом на многообразии U, состоящим из центров нормирований поля Σ, центры которых на U' содержатся в многообразии V'. Мы знаем, что V_1 — алгебраическое многообразие. Из сказанного следует, что центр на U для любого нормирования из M' содержится в V_1. С другой стороны, так как U является соединяющим многообразием для U' и U'', то каждому подмногообразию на U отвечает единственное подмногообразие на U'. Рассмотрим любое нульмерное нормирование $\mathfrak{B}$ поля Σ, имеющее центр W, содержащийся в V_1. Так как $W \subseteq V_1$, то должно существовать некоторое нормирование $\mathfrak{B}'$ поля Σ, содержащееся в множестве M' и имеющее подмногообразие W своим центром на U. Центр нормирования $\mathfrak{B}'$ на многообразии U' содержится в V'. Следовательно, существует подмногообразие W', содержащееся в V' и отвечающее подмногообразию W. При этом W' есть единственное подмногообразие на U', отвечающее W. Отсюда вытекает, что оно будет и центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U'. Так как W' содержится в V', то нормирование $\mathfrak{B}$ принадлежит семейству M'. Таким образом, M' может быть определено как совокупность нульмерных нормирований, центры которых на многообразии U содержатся в V_1. Аналогично, M'' является совокупностью нормирований, центры которых на многообразии U содержатся в алгебраическом многообразии V_2. Поэтому пересечение семейств M' и M'' будет совокупностью нормирований поля Σ, центры которых на многообразии U содержатся в $V_1 \cap V_2$. Следовательно, это пересечение либо пусто, либо является алгебраическим семейством.

Лемма III. *Если $\{M_\lambda\}$ — любое множество алгебраических семейств нормирований, обладающее тем свойством, что пересе-*

чение $\prod_{i=1}^{k} M_{\lambda_i} \neq 0$ *для любой конечной системы индексов* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, *то* $\prod_{\lambda} M_\lambda \neq 0$.

Пусть U_α — любая проективная модель поля Σ, а V_α^λ — геометрическое место центров нормирований из M_λ на многообразии U_α. M_λ является совокупностью нормирований, центры которых на некоторой проективной модели U_β содержатся в заданном подмногообразии V_β. Поэтому геометрическое место V_α^λ центров нормирований из M_λ на многообразии U_α является полным образом подмногообразия V_β на многообразии U_α. Следовательно, это геометрическое место является алгебраическим многообразием. Нужно заметить, однако, что могут существовать нормирования поля Σ, центры которых на U_α содержатся в V_α^λ, а сами эти нормирования не принадлежат M_λ. В самом деле, если W — нульмерное подмногообразие на V_α^λ, являющееся фундаментальным подмногообразием в бирациональном соответствии между U_α и U_β, то на U_β может существовать нульмерное подмногообразие W', отвечающее W, не содержащееся в V_β. В таком случае нульмерное нормирование поля Σ, центром которого на многообразии U_α служит W, а центром на многообразии U_β — W', не принадлежит семейству M_λ, и в то же время его центр на U_α содержится в V_α^λ.

Докажем прежде всего, что $\prod_{\lambda} V_\alpha^\lambda \neq 0$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — любая конечная система индексов. По условию, пересечение $\prod_{i=1}^{k} M_{\lambda_i} \neq 0$. Поэтому существует нормирование $\mathfrak{B}$, принадлежащее всем семействам $M_{\lambda_1}, \ldots, M_{\lambda_k}$. Его центр на многообразии U_α будет принадлежать всем подмногообразиям $V_\alpha^{\lambda_1}, \ldots, V_\alpha^{\lambda_k}$, а значит, пересечение этих подмногообразий не пусто, т. е. $\prod_{i=1}^{k} V_\alpha^{\lambda_i} \neq 0$. Из леммы I мы заключаем теперь, что $\prod_{\lambda}^{\alpha} V_\alpha^\lambda \neq 0$.

Мы предположили выше, что множество $\{U_\alpha\}$ проективных моделей вполне упорядочено. Пусть W_1 — некоторое неприводимое нульмерное многообразие, содержащееся в $\prod_{\lambda} V_1^\lambda$. Начиная с W_1, мы построим с помощью трансфинитной индукции неприводимые нульмерные подмногообразия W_α многообразий U_α для всех α. При этом многообразия W_α должны обладать следующими свойствами:

(I) W_α содержится в $\prod_{\lambda} V_\alpha^\lambda$;

(II) если задана любая конечная система $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ индексов α и любая конечная система $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ индексов λ, то существует

нормирование $\mathfrak{B}$, содержащееся во всех семействах $M_{\lambda_1}, \ldots, M_{\lambda_r}$ и такое, что его центрами на многообразиях U_{α_i} будут W_{α_i} $(i = 1, \ldots, k)$.

Предположим, что многообразия W_α построены для всех α, удовлетворяющих неравенству $\alpha < \beta$. Покажем, как можно построить W_β. Пусть $\pi^\lambda_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ — алгебраическое подмногообразие на U_β, образованное центрами нормирований из M_λ, центрами которых на U_{α_i} являются W_{α_i} $(i = 1, \ldots, k)$. Ясно, что $\pi^\lambda_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \subseteq V^\lambda_\beta$. Подмногообразие определено для любой системы индексов $\pi^\lambda_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, подчиненной условию $\alpha_i < \beta$. По предположению индукции, не только само $\pi^\lambda_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ не является пустым, но не пусто также пересечение $\prod_{i=1}^{r} \pi^{\lambda_i}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ для любой конечной системы индексов $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Поэтому, в силу леммы I, пересечение $\pi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = \prod_\lambda \pi^\lambda_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \neq 0$, причем $\pi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \subseteq \prod_\lambda V^\lambda_\beta$. Рассмотрим теперь любую конечную систему многообразий $\pi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, подчиненных лишь тому условию, что каждый из индексов α_i для любого из этих многообразий предшествует β. Если обозначить через $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ совокупность всех использованных при этом индексов, то ясно, что $\pi_{\gamma_1, \ldots, \gamma_t} \subseteq \pi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, и поэтому пересечение рассматриваемых $\pi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$ не пусто. Отсюда, опять-таки в силу леммы I, следует, что пересечение $\prod_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} \pi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, в котором индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ пробегают все конечные системы из элементов α, предшествующих β, не будет пустым. Если W_β — любое нульмерное многообразие, содержащееся в $\prod \pi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}$, то из сказанного следует, что многообразия W_α, $\alpha \leqslant \beta$, удовлетворяют условиям (I) и (II). Следовательно, можно построить многообразия W_α, удовлетворяющие указанным условиям, для всех индексов α.

Рассмотрим кольца частных многообразий W_α. Все они содержатся в поле функций Σ. Обозначим через $\mathfrak{R}$ объединение этих колец, т. е. совокупность элементов поля Σ, которые можно представить в виде $\xi_{\alpha_1} + \ldots + \xi_{\alpha_k}$, где $\xi_{\alpha_i} \in Q(W_{\alpha_i})$. Если $\xi = \xi_{\alpha_1} + \ldots + \xi_{\alpha_k}$ и $\eta = \eta_{\beta_1} + \ldots + \eta_{\beta_s}$, где $\xi_{\alpha_i} \in Q(W_{\alpha_i})$ и $\eta_{\beta_j} \in Q(W_{\beta_j})$, — любые элементы из $\mathfrak{R}$, то ясно, что $\xi + \eta \in \mathfrak{R}$. Покажем теперь, что произведение $\xi\eta$ также принадлежит $\mathfrak{R}$. Пусть $U_{\gamma_{ij}}$ — соединяющее многообразие для U_{α_i} и U_{β_j}. Так как существует нормирование поля Σ, центрами которого на многообразиях $U_{\gamma_{ij}}$ и U_{α_i} являются соответственно подмногообразия $W_{\gamma_{ij}}$ и W_{α_i}, то подмногообразия $W_{\gamma_{ij}}$ и W_{α_i} отвечают друг другу в естественном бирациональном соответствии между $U_{\gamma_{ij}}$ и U_{α_i}. Но так как $U_{\gamma_{ij}}$ есть соединяющее многообразие для U_{α_i} и U_{β_j}, на

U_{α_i} существует лишь одно многообразие, отвечающее $W_{\gamma_{ij}}$. Отсюда вытекает, что $Q(W_{\alpha_i}) \subseteq Q(W_{\gamma_{ij}})$ (§ 1, стр. 251). Аналогично, $Q(W_{\beta_j}) \subseteq Q(W_{\gamma_{ij}})$. Следовательно, $\xi_{\alpha_i}\eta_{\beta_j} \in Q(W_{\gamma_{ij}})$, и поэтому произведение $\xi\eta = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} \xi_{\alpha_i}\eta_{\beta_j}$ принадлежит $\mathfrak{R}$. Таким образом, $\mathfrak{R}$ есть кольцо. Очевидно, что $\mathfrak{R}$ является областью целостности, полем частных которой служит Σ. Мы докажем, что *если элемент* ω_α *принадлежит кольцу* $Q(W_\alpha)$ *и не является в нем делителем единицы, то он не будет делителем единицы и в* $\mathfrak{R}$.

Допустим, что ω_α является делителем единицы в $\mathfrak{R}$. Тогда

$$\omega_\alpha^{-1} = \xi_{\alpha_1} + \ldots + \xi_{\alpha_k},$$

где ξ_{α_i} — элементы из $Q(W_{\alpha_i})$. Пусть U_β — соединяющее многообразие для U_α, $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$. Тогда, в силу основного свойства многообразий W_α, существует нормирование $\mathfrak{B}$, центрами которого на многообразиях U_α, U_{α_i} $(i = 1, \ldots, k)$, U_β будут соответственно многообразия W_α, W_{α_i} $(i = 1, \ldots, k)$, W_β. Так как U_β — соединяющее многообразие для U_α, $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$, то отсюда следует, что многообразия W_α, $W_{\alpha_1}, \ldots, W_{\alpha_k}$ являются единственными подмногообразиями, отвечающими W_β, и что

$$Q(W_\alpha) \subseteq Q(W_\beta), \quad Q(W_{\alpha_i}) \subseteq Q(W_\beta).$$

Отсюда вытекает, что элементы ω_α и ω_α^{-1} принадлежат кольцу $Q(W_\beta)$, так что ω_α является в этом кольце делителем единицы. Поэтому норма элемента ω_α в нормировании $\mathfrak{B}$ равна нулю. Многообразие W_α является центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U_α. Поэтому из того, что $\omega_\alpha \in Q(W_\alpha)$ и $v(\omega_\alpha) = 0$, следует, что ω_α есть делитель единицы в кольце $Q(W_\alpha)$. Полученное противоречие показывает, что ω_α не может быть делителем единицы в $\mathfrak{R}$.

Частным следствием этого результата является то, что $\mathfrak{R}$ есть собственное подкольцо поля Σ. Пусть теперь ζ — любой отличный от нуля элемент из Σ, а U_α — любая нормальная проективная модель этого поля. Выберем неоднородные координаты в пространстве, содержащем U_α, так, чтобы многообразие W_α не лежало в гиперплоскости $x_0 = 0$. Тогда, если $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка для U_α, то

$$K[\xi_1, \ldots, \xi_n] \subseteq Q(W_\alpha).$$

Пусть теперь U_β — проективная модель поля Σ, имеющая общую точку $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta)$, а $\mathfrak{B}$ — нормирование, центрами которого на многообразиях U_α и U_β служат подмногообразия W_α и W_β. В таком случае $v(\xi_i) \geqslant 0$. Если $v(\zeta) \geqslant 0$, то мы будем иметь $K[\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta] \subseteq Q(W_\beta)$, а значит, $\zeta \in Q(W_\beta)$. Если же $v(\zeta) < 0$, то $K[\zeta^{-1}, \zeta^{-1}\xi_1, \ldots, \zeta^{-1}\xi_n] \subseteq Q(W_\beta)$, и поэтому $\zeta^{-1} \in Q(W_\beta)$. Таким образом, если ζ — любой отличный от нуля элемент поля Σ, то один из элементов ζ или ζ^{-1}

обязательно принадлежит $\mathfrak{R}$. Поэтому $\mathfrak{R}$ есть кольцо некоторого нормирования (гл. XVII, § 2, теорема III).

Пусть $\mathfrak{B}$ — нормирование поля Σ, кольцом которого является $\mathfrak{R}$. Это нормирование нетривиально, так как $\mathfrak{R}$ не совпадает с Σ. Предположим, что размерность s нормирования $\mathfrak{B}$ положительна. Тогда должна существовать проективная модель U_α поля Σ, на которой центр V нормирования $\mathfrak{B}$ будет иметь размерность s. Так как $Q(W_\alpha) \subseteq \mathfrak{R}$, то должно быть $W_\alpha \subseteq V$ (гл. XVII, § 5, теорема IV). Так как многообразие W_α имеет размерность нуль, а многообразие V — размерность > 0, то в кольце $Q(W_\alpha)$ имеются элементы, не являющиеся нем делителями единицы и становящиеся делителями единицы в $Q(V)$. Но любой делитель единицы в кольце $Q(V)$ является также делителем единицы в $\mathfrak{R}$ (гл. XVII, § 5, теорема IV). Отсюда вытекает, что в кольце $Q(W_\alpha)$ имеются элементы, не являющиеся делителями единицы и становящиеся делителями единицы в $\mathfrak{R}$, а это противоречит ранее доказанному свойству кольца $\mathfrak{R}$. Следовательно, наше предположение о том, что нормирование $\mathfrak{B}$ имеет размерность, большую нуля, неверно.

Докажем, наконец, что нормирование $\mathfrak{B}$ принадлежит всем семействам M_λ. Пусть U_α — проективная модель поля Σ, на которой существует подмногообразие V_α, обладающее тем свойством, что M_λ является множеством всех нульмерных нормирований поля Σ, центры которых на многообразии U_α содержатся в V_α. Многообразие U_α существует, так как M_λ — алгебраическое семейство нормирований. В таком случае $W_\alpha \subseteq V_\alpha$. Так как $Q(W_\alpha) \subseteq \mathfrak{R}$, то многообразие W_α содержится в центре нормирования $\mathfrak{B}$ на U_α. Но так как нормирование $\mathfrak{B}$ — нульмерное, то W_α должно совпадать с его центром. Ввиду того, что центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии U_α содержится в V_α, само $\mathfrak{B}$ должно принадлежать семейству M_λ. Так как доказанное относится ко всем λ, то $\prod\limits_\lambda M_\lambda \neq 0$, и доказательство леммы закончено.

Доказательство теоремы I легко получается из леммы III. Пусть снова $\{U_\alpha\}$ — множество всех проективных моделей поля Σ. Обозначим через M_α семейство всех нульмерных нормирований поля Σ, центры которых являются особыми подмногообразиями на U_α. Докажем, что $\prod\limits_\alpha M_\alpha = 0$. Если бы это было не так, то существовало бы нормирование $\mathfrak{B}$, содержащееся во всех семействах M_α. Поэтому центр нормирования $\mathfrak{B}$ был бы особым подмногообразием на каждой проективной модели поля Σ. Но это противоречит локальной теореме об униформизации, утверждающей существование проективной модели поля Σ, на которой центр нормирования $\mathfrak{B}$ будет простым подмногообразием. Следовательно, должно быть $\prod\limits_\alpha M_\alpha = 0$.

Но теперь из леммы III следует существование конечной системы индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, для которых $\prod_{i=1}^{k} M_{\alpha_i} = 0$. Рассмотрим соответствующие этим индексам проективные модели $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — любое нульмерное нормирование поля Σ. Его центр будет простым подмногообразием хотя бы на одном многообразии U_{α_i}, так как в противном случае было бы $\mathfrak{B} \in M_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$, а значит, $\prod_{i=1}^{k} M_{\alpha_i} \neq 0$. Таким образом, многообразия $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$ составляют конечную разрешающую систему для поля Σ, и теорема I доказана.

§ 9. Редукция особенностей алгебраического многообразия

Мы уже указывали, что задача о нахождении бирационального образа некоторого алгебраического многообразия U, который не содержал бы вообще особых точек, совпадает с задачей нахождения разрешающей системы для поля функций многообразия U, состоящей лишь из одного многообразия. В случае, когда размерность многообразия U равна единице, существование такой разрешающей системы было доказано: любое производное нормальное многообразие для U будет проективной моделью его поля функций, не содержащей особых точек (гл. XVI, § 6, теорема V). Если размерность многообразия U больше единицы, то проективно нормальные многообразия, эквивалентные U, могут иметь особые точки и поэтому существование свободной от особенностей проективной модели должно доказываться другими методами. Очевидным подходом к этому доказательству является рассмотрение конечной разрешающей системы $U_1, \ldots, U_k$ для поля функций многообразия U и попытка при $k > 1$ заменить эту систему разрешающей системой, состоящей из $k - 1$ многообразий. Повторение этой операции могло бы привести к построению разрешающей системы, состоящей из одного многообразия.

В этом параграфе мы покажем, как такой переход может быть сделан в случае, если размерность многообразия U равна двум. Читателю будет видно, что условие $d = 2$ действительно используется в нескольких местах рассуждения, так что очень трудно распространить это доказательство на случай многообразий, размерность которых больше двух. Мы можем (и будем) предполагать, что многообразия $U_1, \ldots, U_k$, входящие в разрешающую систему, проективно нормальны (§ 7, стр. 349). Поэтому в рассматриваемом случае, когда $d = 2$, особыми подмногообразиями на многообразиях $U_1, \ldots, U_k$ могут быть лишь многообразия размерности нуль, так как проективно нормальные многообразия не содержат особых подмногообразий размерности $d - 1$.

Нашей задачей будет нахождение такого многообразия U^*_{k-1}, при котором система $U_1, \ldots, U_{k-2}, U^*_{k-1}$ будет разрешающей системой поля Σ. Соображения, позволяющие доказать существование многообразия U^*_{k-1} с указанным свойством, связаны только с многообразиями U_{k-1} и U_k. Пусть N — множество нульмерных нормирований поля Σ, центры которых являются простыми подмногообразиями хотя бы на одном из многообразий U_{k-1} или U_k. Тогда многообразия U_{k-1} и U_k составляют разрешающую систему для множества N нормирований. Если мы построим многообразие U^*_{k-1}, на котором любое нормирование из множества N имеет своим центром простое подмногообразие, то многообразия $U_1, \ldots, U_{k-2}, U^*_{k-1}$ будут составлять разрешающую систему поля Σ. Действительно, пусть $\mathfrak{B}$ — любое нульмерное нормирование поля Σ. Тогда возможны два случая: (I) нормирование $\mathfrak{B}$ принадлежит множеству N и поэтому имеет своим центром простое подмногообразие на U^*_{k-1}; (II) $\mathfrak{B}$ не принадлежит N, так что его центрами на обоих многообразиях U_{k-1} и U_k будут особые подмногообразия этих многообразий; но в таком случае центр этого нормирования на одном из многообразий $U_1, \ldots, U_{k-2}$ должен быть простым подмногообразием. Таким образом, наша задача сводится к доказательству того, что если многообразия U и U' образуют разрешающую систему для некоторого множества N нульмерных нормирований, то для множества N существует разрешающая система, состоящая лишь из одного многообразия.

В процессе доказательства последнего утверждения нам придется выполнять ряд бирациональных преобразований многообразий U и U'. Многие из этих преобразований будут состоять из некоторого моноидного преобразования с нульмерным базисом, за которым следует операция построения производного нормального многообразия. Для краткости мы будем называть такие комбинированные преобразования *квадратичными*. Докажем прежде всего ряд лемм о квадратичных преобразованиях.

Пусть $V_1, V_2, V_3, \ldots$ — бесконечная последовательность бирационально эквивалентных многообразий размерности 2, такая, что каждое V_{i+1} получается из V_i квадратичным преобразованием, базисом которого служит некоторое подмногообразие $W_i \subset V_i$. Будем предполагать, кроме того, что подмногообразия W_i и W_{i+1} отвечают друг другу в бирациональном соответствии между V_i и V_{i+1}. Определенная таким образом последовательность $(V_1, W_1), (V_2, W_2), \ldots$ пар многообразий называется *нормальной последовательностью*. Приводимые ниже леммы относятся именно к таким последовательностям.

Напомним, что в соответствии между многообразиями V_i и V_{i+1} подмногообразие W_i является фундаментальным и что на многообра-

зии V_{i+1} вообще нет фундаментальных подмногообразий. Отсюда следует, что

$$Q(W_i) \subset Q(W_{i+1}),$$

и поэтому

$$Q(W_1) \subset Q(W_2) \subset \ldots,$$

так как подмногообразия W_i и W_{i+1} отвечают друг другу. Будем обозначать через $\mathfrak{P}_i$ максимальные идеалы колец $Q(W_i)$.

Кольца $Q(W_i)$ имеют одно и то же поле частных — поле функций Σ многообразий V_1, V_2, ... Пусть α и β — два элемента из Σ, такие, что $\alpha \in Q(W_i)$ и $\beta \in Q(W_j)$ при некоторых i и j. Если $k = \max[i, j]$, то α и β содержатся в кольце $Q(W_k)$, и поэтому в кольце $Q(W_k)$ содержатся также элементы $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$. Отсюда следует, что совокупность элементов поля Σ, каждый из которых содержится хотя бы в одном из колец $Q(W_i)$, является некоторым кольцом $\mathfrak{Q}$. Обычно мы будем писать, что $\mathfrak{Q} = \lim_{i \to \infty} Q(W_i)$. Поле Σ, очевидно, является полем частных для $\mathfrak{Q}$, причем любой отличный от нуля элемент основного поля K будет делителем единицы в кольце $\mathfrak{Q}$.

Лемма I. *Пусть $\mathfrak{B}$ — любое одномерное нормирование поля Σ. Если кольцо $\mathfrak{R}$ нормирования $\mathfrak{B}$ содержит $\mathfrak{Q}$, то существует натуральное число k, такое, что при любом $i \geqslant k$ центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_i будет одномерным подмногообразием.*

Заметим прежде всего, что если мы сможем вообще найти k таким образом, чтобы центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_k был одномерным подмногообразием, то утверждение леммы отсюда будет следовать. Действительно, если центр W нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_i имеет размерность 1, то W не может быть фундаментальным подмногообразием в соответствии между V_i и V_{i+1}. Следовательно, многообразию W отвечает единственное подмногообразие W' на V_{i+1}. Но так как на V_{i+1} вообще нет фундаментальных подмногообразий, то отсюда вытекает, что W' имеет размерность 1. Ввиду того, что многообразие W' необходимо является центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_{i+1}, нужный результат получается очевидной индукцией.

С другой стороны, если центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_i служит некоторое нульмерное подмногообразие, то этот центр должен совпадать с W_i. В самом деле, имеет место включение $Q(W_i) \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{R}$, а поэтому W_i содержится в центре нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_i. Но так как центр нормирования имеет размерность нуль и является неприводимым подмногообразием, то он должен совпадать с W_i.

Если центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_1 имеет размерность 1, то нечего доказывать. Поэтому предположим, что размерность центра нормирования $\mathfrak{B}$ на V_1 равна нулю. Ввиду того, что нормирование $\mathfrak{B}$ имеет размерность 1, в кольце $\mathfrak{R}$ этого нормирования

существует некоторый элемент α, вычет которого в нормировании $\mathfrak{B}$ трансцендентен над полем K. Мы можем написать, что $\alpha = \xi_1/\eta_1$, где элементы ξ_1 и η_1 принадлежат кольцу $Q(W_1)$. Ввиду того, что W_1 есть центр нормирования $\mathfrak{B}$, вычет любого элемента кольца $Q(W_1)$ получается заменой координат общей точки многообразия V_1 координатами общей точки для W_1, и поэтому вычет любого элемента кольца $Q(W_1)$ будет алгебраическим над полем K. Ввиду трансцендентности вычета элемента α, мы должны иметь $\eta_1 = 0$ $(\mathfrak{P}_1)$. Но так как вычет элемента α отличен от нуля, то элемент η_1/ξ_1 является также элементом кольца $\mathfrak{R}$, имеющим трансцендентный вычет, и мы получим, что $\xi_1 = 0$ $(\mathfrak{P}_1)$.

Рассмотрим теперь квадратичное преобразование, связывающее V_1 и V_2. Напомним, что мы вводим (см. § 3) систему форм $\psi_0^{(1)}(x), \ldots, \psi_r^{(1)}(x)$ одной и той же степени и таких, что элементы $\psi_0^{(1)}(\xi), \ldots, \psi_r^{(1)}(\xi)$ составляют базис идеала $\mathfrak{P}_1$. Затем рассматриваем многообразие V_1', общей точкой которого является точка $(\zeta_{00}, \ldots, \zeta_{rn})$, где $\zeta_{ij} = \psi_i^{(1)}\xi_j$. Многообразие V_2 получается из V_1' построением производного нормального многообразия. Из последнего следует, что подмногообразию W_2 отвечает однозначно определенное подмногообразие W_1' на V_1'. Мы можем предполагать, что z_{C0} не обращается в нуль на W_1'. В таком случае будем иметь

$$Q(W_1) \subset Q(W_1') \subseteq Q(W_2),$$

$$\frac{\psi_i^{(1)}}{\psi_0^{(1)}} \in Q(W_1') \subseteq Q(W_2) \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Если ζ_1 — любой элемент из $\mathfrak{P}_1$, то

$$\zeta_1 = \lambda_0\psi_0^{(1)} + \ldots + \lambda_r\psi_r^{(1)} = \psi_0^{(1)}\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\psi_i^{(1)}/\psi_0^{(1)} = \psi_0^{(1)}\zeta_2 \qquad (\lambda_i \in Q(W_1)),$$

где ζ_2 — элемент кольца $Q(W_2)$. Обозначим через $\mathfrak{B}'$ любое нормирование, центрами которого на многообразиях V_1 и V_2 являются соответственно подмногообразия W_1 и W_2. Так как $\psi^{(1)} = 0$ $(\mathfrak{P}_1)$, то $v'(\psi_0^{(1)}) > 0$, а значит, $\psi_0^{(1)} = 0$ $(\mathfrak{P}_2)$.

Рассмотрим теперь центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_2. Если он имеет размерность 1, то нужное значение k найдено. Если его размерность равна нулю, то центром нормирования $\mathfrak{B}$ будет W_2 и поэтому $v(\psi_0^{(1)}) > 0$, так как $\psi_0^{(1)} = 0$ $(\mathfrak{P}_2)$. В таком случае, в силу сделанного выше замечания,

$$\xi_1 = \psi_0^{(1)}\xi_2, \quad \eta_1 = \psi_0^{(1)}\eta_2$$

и

$$\alpha = \xi_2/\eta_2,$$

где

$$\xi_2 = 0 \quad (\mathfrak{P}_2), \quad \eta_2 = 0 \quad (\mathfrak{P}_2),$$

так как вычет элемента α в нормировании $\mathfrak{B}$ трансцендентен над K. Нормирование $\mathfrak{B}$ имеет размерность 1, а поле Σ — размерность 2. Поэтому нормирование $\mathfrak{B}$ дискретно. Возьмем в качестве его группы значений аддитивную группу целых чисел. Тогда из неравенства $v(\psi_0^{(1)}) > 0$ следует, что

$$v(\eta_1) \geqslant v(\eta_2) + 1,$$

причем из сравнения $\eta_2 = 0 \quad (\mathfrak{P}_2)$ вытекает неравенство $v(\eta_2) > 0$.

Это рассуждение можно повторять до тех пор, пока мы не дойдем до многообразия V_k, на котором центр нормирования $\mathfrak{B}$ будет одномерным подмногообразием. Если на i-м этапе мы еще не достигли такого положения, то будут иметь место соотношения

$$v(\eta_1) \geqslant v(\eta_i) + i - 1, \quad v(\eta_i) > 0.$$

Но значение $v(\eta_1)$ является фиксированным целым числом. Поэтому наш процесс не может продолжаться неограниченно, т. е. мы в конце концов дойдем до многообразия V_k, на котором центр нормирования $\mathfrak{B}$ будет одномерным. Тем самым лемма I доказана.

Лемма II. *Если $\mathfrak{B}_1$ — нормирование размерности* 1, *кольцо $\mathfrak{R}_1$ которого содержит Ω, то существует кольцо $\mathfrak{R}_0$ некоторого нульмерного нормирования, удовлетворяющее условиям $\mathfrak{R}_1 \supseteq \mathfrak{R}_0 \supseteq \Omega$.*

Так как кольцо $\mathfrak{R}_1$ содержит Ω, то из леммы I следует, что найдется такое натуральное число k, что при $i \geqslant k$ центр C_i нормирования $\mathfrak{B}_1$ на многообразии V_i будет одномерным подмногообразием. Определим теперь при значениях $i \geqslant k$ идеалы $\mathfrak{p}_i$ как пересечения колец $Q(W_i)$ с максимальным идеалом кольца $\mathfrak{R}_1$ [если мы перейдем от кольца $Q(W_i)$ к области целостности $\mathfrak{J}_i$ многообразия V_i, то идеал $\mathfrak{J}_i \cap \mathfrak{p}_i$ будет простым идеалом центра нормирования $\mathfrak{B}_1$ на V_i]. Кольцо $Q(W_i)$ целозамкнуто, и в нем имеет место теорема о базисе. Поэтому к идеалам кольца $Q(W_i)$ можно применять мультипликативную теорию идеалов (гл. XV, § 8, теорема III). Кроме того, идеал $\mathfrak{p}_i$ имеет размерность 1, а поэтому является минимальным простым идеалом и своим собственным приведенным идеалом (гл. XV, § 7, теорема VI).

Пусть α — любой элемент поля Σ, норма которого в нормировании $\mathfrak{B}_1$ равна нулю. Мы можем записать элемент α в виде $\alpha = \xi/\eta$, где ξ и η — элементы из $Q(W_i)$. Но из мультипликативной теории идеалов следует, что можно записать $\xi = \xi_1 \zeta^a$, $\eta = \eta_1 \zeta^b$, где $\zeta = 0 \quad (\mathfrak{p}_i)$, $\xi_1 \neq 0 \quad (\mathfrak{p}_i)$, $\eta_1 \neq 0 \quad (\mathfrak{p}_i)$. Так как $v(\alpha) = 0$, $v(\zeta) > 0$, то $a = b$, а значит, $\alpha = \xi_1/\eta_1$ (ср. гл. XVII, § 5, теор. VII). Поэтому вычет элемента α в нормировании $\mathfrak{B}_1$ является отношением образов элементов ξ_1 и η_1 в кольце $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$. Следовательно, поле вычетов Σ^* нормирования $\mathfrak{B}_1$ служит полем частных кольца $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$, являющегося полем функций для центра C_i нормирования $\mathfrak{B}_1$ на

многообразии V_i. Поле Σ^* можно представить как поле частных некоторой конечной области целостности $\mathfrak{J}^*$, т. е. области целостности, получаемой присоединением к полю K конечного числа элементов, одновременно представив кольцо $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$ кольцом частных этой области целостности. Действительно, кольцо $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$ является кольцом частных для W_i, рассматриваемого как подмногообразие на C_i. Всегда существует хотя бы одно нормирование поля Σ^*, центром которого на многообразии C_i будет W_i, причем число таких нормирований конечно и кольцо любого из них содержит $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$ в качестве подкольца. Так как

$$Q(W_i) \subset Q(W_{i+1}), \quad \mathfrak{p}_i = Q(W_i) \cap \mathfrak{p}_{i+1},$$

то кольцо $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$ можно рассматривать как подкольцо кольца $Q(W_{i+1})/\mathfrak{p}_{i+1}$, и любое кольцо нормирования поля Σ^*, содержащее $Q(W_{i+1})/\mathfrak{p}_{i+1}$, будет содержать и $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$. Но так как кольцо нормирования, содержащее $Q(W_j)/\mathfrak{p}_j$, существует при любом $j \geqslant k$, мы заключаем отсюда, что существует нормирование $\mathfrak{B}^*$ поля Σ^*, кольцо которого содержит все кольца $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$. Обозначим теперь через $\mathfrak{B}_0$ нормирование поля Σ, составленное из нормирований $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}^*$. Размерность этого нормирования равна нулю, а его кольцо $\mathfrak{R}_0$ содержится в кольце $\mathfrak{R}_1$. Кроме того, так как кольца $Q(W_i)/\mathfrak{p}_i$ содержатся в кольце нормирования $\mathfrak{B}^*$, то для всех i будет $Q(W_i) \subseteq \mathfrak{R}_0$. Следовательно, $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{R}_0$, и нормирование $\mathfrak{B}_0$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

Лемма III. *Кольцо* $\mathfrak{Q} = \lim\limits_{i \to \infty} Q(W_i)$ *является кольцом нульмерного нормирования.*

Так как каждое многообразие V_i нормально, то все кольца $Q(W_i)$ целозамкнуты. Отсюда следует, что целозамкнуто и кольцо $\mathfrak{Q}$. Поэтому $\mathfrak{Q}$ является пересечением содержащих его колец нормирования поля Σ (гл. XVII, § 2, теорема VI). В силу леммы II, мы можем, кроме того, утверждать, что $\mathfrak{Q}$ является пересечением содержащих его колец нульмерных нормирований. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что не может существовать двух различных нульмерных нормирований $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$, кольца которых содержат $\mathfrak{Q}$.

Допустим, что такие нормирования $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$ существуют. Так как эти нормирования различны, то различны и кольца нормирований $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$, причем в этих кольцах можно найти элемент ζ, являющийся делителем единицы в одном из них и не являющийся делителем единицы в другом. Если $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — общая точка многообразия V_1, то многообразие V^* в пространстве S_{n+1}, определяемое общей точкой $(1, \xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta)$, будет бирационально эквивалентно многообразиям V_1, V_2, ... Нормирования $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$ имеют на многообразии V^* различные центры C' и C'', так как $v'(\zeta) = 0$ и $v''(\zeta) > 0$ или же $v'(\zeta) > 0$ и $v''(\zeta) = 0$.

Так как размерность нормирования $\mathfrak{B}'$ равна нулю, а кольцо этого нормирования содержит $Q(W_i)$, то подмногообразие W_i будет центром нормирования $\mathfrak{B}'$ на V_i. Аналогично, W_i будет и центром нормирования $\mathfrak{B}''$. Отсюда следует, что в бирациональном соответствии между многообразиями V^* и V_i оба подмногообразия C' и C'' отвечают W_i. Поэтому W_i является фундаментальным подмногообразием в этом соответствии, а значит, на многообразии V^* существует кривая Γ_i, отвечающая W_i. Обозначим через Γ_{i+1}^j одну из неприводимых компонент кривой Γ_{i+1}. Существует одномерное нормирование $\mathfrak{B}_1$ поля Σ, центрами которого на многообразиях V^* и V_{i+1} являются соответственно Γ_{i+1}^j и W_{i+1}. Но так как $Q(W_i) \subset Q(W_{i+1})$, то подмногообразие W_i есть единственное подмногообразие на V_i, отвечающее W_{i+1}, и поэтому центром нормирования $\mathfrak{B}_1$ на V_i будет W_i. Таким образом, должно быть $\Gamma_{i+1} \subseteq \Gamma_i$. Ввиду того, что Γ_i существует для каждого значения i, на многообразии V^* имеется неприводимое подмногообразие Γ размерности 1, являющееся центром некоторого нормирования $\mathfrak{B}$ поля Σ, центром которого на V_i будет W_i. Если $\mathfrak{R}$ — кольцо нормирования $\mathfrak{B}$, то должно быть $Q(W_i) \subseteq \mathfrak{R}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, и поэтому $\Omega \subseteq \mathfrak{R}$. Отсюда, в силу леммы I, следует, что найдется значение k, при котором центр нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_k будет подмногообразием размерности 1. Но это противоречит тому, что центром нормирования $\mathfrak{B}$ на многообразии V_i служит W_i. Таким образом, наше предположение, что $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}''$, неверно, и лемма доказана.

Лемма IV. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — (*однозначно определенное*) *нормирование поля* Σ, *кольцом которого является* Ω. *Если* W' — *центр нормирования* $\mathfrak{B}$ *на некоторой проективной модели* V' *поля* Σ, *то существует такое значение* k, *при котором включение* $Q(W') \subseteq Q(W_i)$ *имеет место для всех* $i \geqslant k$.

Так как $Q(W_i) \subset Q(W_{i+1})$, то любой элемент из $Q(W_i)$, не являющийся в этом кольце делителем единицы, имеет в нормировании $\mathfrak{B}$ положительную норму и поэтому принадлежит идеалу $\mathfrak{P}_{i+1}$. Следовательно, справедливо соотношение $\mathfrak{P}_i \subseteq \mathfrak{P}_{i+1}$, из которого вытекает, что

$$Q(W') \cap \mathfrak{P}_i \subseteq Q(W') \cap \mathfrak{P}_{i+1}.$$

Пусть ζ — любой элемент поля Σ, принадлежащий $(Q(W') \cap \mathfrak{P}_i$ при некотором значении i. Так как ζ лежит в $\mathfrak{P}_i$, то его норма в нормировании $\mathfrak{B}$ положительна. Следовательно, элемент ζ должен принадлежать максимальному идеалу $\mathfrak{P}'$ кольца $Q(W')$. С другой стороны, если ζ — любой элемент из $\mathfrak{P}'$, то $v(\zeta) > 0$, а значит, ζ не будет делителем единицы в кольце Ω. Отсюда вытекает, что при некотором значении i элемент ζ принадлежит кольцу $Q(W_i)$ и не является в этом кольце делителем единицы, т. е. лежит в $\mathfrak{P}_i$. Но так как ζ лежит в $\mathfrak{P}'$, то он содержится и в $Q(W')$, а значит, и

в пересечении $Q(W') \cap \mathfrak{P}_i$ при некотором значении i. Из двух доказанных результатов следует, что

$$\lim_{i \to \infty} Q(W') \cap \mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}'.$$

Ввиду того, что $Q(W')$ является кольцом частных некоторого алгебраического подмногообразия на V', в этом кольце справедлива теорема о базисе. Но

$$Q(W') \cap \mathfrak{P}_1 \subseteq Q(W') \cap \mathfrak{P}_2 \subseteq Q(W') \cap \mathfrak{P}_3 \subseteq \ldots.$$

Так как возрастающая последовательность идеалов должна оборваться, то существует такое k, для которого

$$Q(W') \cap \mathfrak{P}_k = Q(W') \cap \mathfrak{P}_{k+1} = Q(W') \cap \mathfrak{P}_{k+2} = \ldots,$$

а значит,

$$\lim_{i \to \infty} Q(W') \cap \mathfrak{P}_i = Q(W') \cap \mathfrak{P}_k.$$

Следовательно,

$$Q(W') \cap \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}',$$

и поэтому

$$\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}_k.$$

Рассмотрим теперь любое нульмерное нормирование $\mathfrak{B}_0$ поля Σ, центром которого на многообразии V_k служит W_k. Так как $\mathfrak{P}' \subseteq \mathfrak{P}_k$, то отсюда следует, что центром этого нормирования на V' необходимо будет W'. Поэтому W' должно быть единственным подмногообразием на V', отвечающим подмногообразию $W_k \subset V_k$. Следовательно, W_k не является фундаментальным подмногообразием в соответствии между V_k и V', а значит, $Q(W') \subseteq Q(W_k)$.

С помощью доказанных лемм мы в состоянии теперь доказать следующую теорему:

Теорема I. *Если многообразия U и U' составляют разрешающую систему для некоторого множества N нульмерных нормирований поля Σ, имеющего степень трансцендентности 2, то существует проективная модель U^* поля Σ, на которой центр любого нормирования из N будет простым подмногообразием.*

Многообразия U и U' можно считать нормальными поверхностями. Поэтому их особые подмногообразия необходимо нульмерны. Установленное между U и U' бирациональное соответствие может обладать фундаментальными элементами, но эти элементы также нульмерны, и поэтому их число конечно. Допустим, что фундаментальные элементы имеются на поверхности U. Взяв один из них, например W, в качестве базиса, произведем квадратичное преобразование, обращающее U в некоторую поверхность U_1. Так как квадратичное преобразование не меняет колец частных подмногообразий на U, отличных от W, то фундаментальными подмногообразиями в соответствии

между U_1 и U' будут те из подмногообразий на U_1, которые получаются из фундаментальных подмногообразий на U, отличных от W, а также, может быть, нульмерные подмногообразия образа W на U_1. Если на многообразии U_1 фундаментальные подмногообразия имеются, то мы можем повторить процесс и повторяем его до тех пор, пока не получим многообразия $\overline{U}$, находящегося в бирациональном соответствии с U' и не содержащего подмногообразий, являющихся фундаментальными в указанном соответствии. Нужно доказать, что такое многообразие $\overline{U}$ необходимо получится через конечное число шагов. Ясно, что если это не так, то на U существует подмногообразие W, для которого можно построить нормальную последовательность

$$(U,\ W),\ (U_1,\ W_1),\ (U_2,\ W_2),\ \ldots,$$

где подмногообразия W_i будут фундаментальными в соответствиях между U_i и U'. Пусть $\mathfrak{Q} = \lim_{i\to\infty} Q(W_i)$, и пусть $\mathfrak{B}$ — нульмерное нормирование поля Σ, кольцом которого служит $\mathfrak{Q}$ (лемма III). Если W' — центр нормирования $\mathfrak{B}$ на U', то из леммы IV мы усматриваем, что найдется целое число k, для которого $Q(W') \subseteq Q(W_k)$. Но отсюда следует, что подмногообразие W_k не является фундаментальным в соответствии между U_k и U', вопреки построению. Следовательно, через конечное число шагов мы необходимо получим многообразие $\overline{U}$.

Квадратичное преобразование с нульмерным базисом переводит любое простое подмногообразие (безразлично, фундаментальное или нет) в многообразие, каждая точка которого проста. Отсюда вытекает, что если $\mathfrak{B}$ — любое нормирование, центр которого является простым подмногообразием на U, то центр этого нормирования на $\overline{U}$ также будет простым. Таким образом, многообразия $\overline{U}$ и U' составляют разрешающую систему для множества N.

Будем теперь поступать с U' таким же образом, как мы это делали с U, но ограничиваясь лишь теми подмногообразиями на U', *которые просты на* U' и являются фундаментальными в соответствии между U' и $\overline{U}$. Конечным числом квадратичных преобразований можно перевести U' в некоторое многообразие $\overline{U}'$, на котором не будет простых фундаментальных подмногообразий в соответствии между $\overline{U}'$ и $\overline{U}$. Следует, однако, отметить, что в этом соответствии могут появиться фундаментальные подмногообразия на $\overline{U}$. Построим теперь соединяющее многообразие U^* для $\overline{U}$ и $\overline{U}'$.

Докажем, что центр любого нульмерного нормирования $\mathfrak{B}$, принадлежащего множеству N, будет простым подмногообразием на U^*. Пусть центрами этого нормирования на многообразиях $\overline{U}$, U', $\overline{U}$, U^* являются соответственно подмногообразия $\overline{W}$, W', $\overline{W}'$, W^*. Нужно рассмотреть три возможных случая.

(I) Допустим, что W' — особое подмногообразие на U'. Так как многообразия $\overline{U}$ и U' составляют разрешающую систему для множества N, то центр нормирования $\mathfrak{B}$ на $\overline{U}$, т. е. многообразие $\overline{W}$, должен быть простым подмногообразием. Ввиду того, что на $\overline{U}$ нет фундаментальных подмногообразий в соответствии между $\overline{U}$ и U', должно быть

$$Q(W') \subseteq Q(\overline{W}).$$

Но так как W' — особое подмногообразие на U', его кольцо частных не изменяется при переходе от U' к $\overline{U}'$. Следовательно,

$$Q(\overline{W}') = Q(W') \subseteq Q(\overline{W}).$$

Отсюда, в силу свойств соединяющего многообразия, вытекает, что

$$Q(W^*) = Q(\overline{W}).$$

Так как $\overline{W}$ — простое подмногообразие, то максимальный идеал кольца $Q(\overline{W})$ [а значит, и кольца $Q(W^*)$] имеет базис, состоящий из двух элементов. Таким образом, W^* — простое подмногообразие на U^*.

(II) Предположим, что W' — простое подмногообразие, но не являющееся фундаментальным в соответствии между U' и $\overline{U}'$. Тогда ввиду того, что $\overline{W}$ также не является фундаментальным, мы имеем $Q(\overline{W}) = Q(W')$.

Но так как W' не является фундаментальным подмногообразием, оно не может быть базисом ни для одного квадратичного преобразования, использованного при переходе от U' к $\overline{U}'$. Следовательно,

$$Q(\overline{W}) = Q(W') = Q(\overline{W}').$$

Переходя теперь к соединяющему многообразию, мы получаем

$$Q(W^*) = Q(\overline{W}') = Q(W').$$

Простота подмногообразия W^* следует теперь из простоты W'.

(III) Предположим, что подмногообразие W' простое и что оно является фундаментальным в соответствии между U' и $\overline{U}$. Тогда, в силу свойства квадратичных преобразований, любое подмногообразие на $\overline{U}'$, отвечающее простому подмногообразию на U' (в частности $\overline{W}'$), будет простым на $\overline{U}'$. Следовательно, $\overline{W}'$ — простое подмногообразие. Далее, $\overline{W}'$ не является фундаментальным подмногообразием в соответствии между $\overline{U}'$ и $\overline{U}$, а следовательно,

$$Q(\overline{W}) \subseteq Q(\overline{W}').$$

Переходя теперь к соединяющему многообразию, получаем

$$Q(W^*) = Q(\overline{W'}).$$

Следовательно, подмногообразие W^* является простым.

Этим мы исчерпали для многообразия W' все возможные случаи, и поэтому можно утверждать, что центр любого нормирования из множества N на многообразии U^* будет простым подмногообразием.

Выше уже указывалось, как можно воспользоваться теоремой I для замены любой конечной разрешающей системы поля Σ, состоящей из k проективных моделей этого поля, системой, состоящей из $k-1$ моделей. Так как повторное применение этого процесса доказывает существование разрешающей системы, состоящей из одной проективной модели, то сказанное позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема II. *Для любой неприводимой алгебраической поверхности U существует бирациональный образ, не содержащий особых точек.*

В заключение мы сформулируем без доказательства результат Зарисского:

Теорема III. *Для любого неприводимого трехмерного алгебраического многообразия существует бирациональный образ, не содержащий особых точек.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Глава XV. Материал этой главы излагается во многих монографиях по современной алгебре, таких, как книги Алберта [1], Крулля [2] и ван-дер-Вардена [7]. Наиболее полный обзор принадлежит Круллю и содержит указания на первоисточники. Избранное нами изложение имеет своей целью введение в теорию идеалов, достаточное для целей этого тома, и не претендует ни на полноту, ни на оригинальность.

Глава XVI. Изложение этой главы следует работам Зарисского, но ограничивается случаем основного поля без характеристики. Многие из содержащихся здесь идей рассмотрены с иной точки зрения и без ограничений на основное поле у Вейля [9]. Основные результаты главы можно найти у Зарисского [10, 11] и у Мули [5]. В работе [12] Зарисский детально изучил понятие простой точки многообразия над произвольным основным полем.

Глава XVII. Обзор общей теории нормирований, содержащийся в этой главе, рассчитан для целей геометрии. Поэтому не делается ссылок на другие ветви этой теории, в частности на применения в теории чисел. Наш обзор основывается главным образом на работе Крулля [3], но многие из более ранних результатов можно найти также в работе Крулля [2], в которой содержатся и ссылки на оригинальные источники. Параграф о центре нормирования основывается главным образом на работе Зарисского [13]. В этой работе можно найти доказательство теоремы XI § 5. Свойства нульмерных нормирований ранга 1, указанные на стр. 228, можно найти в работе Мак-Лейна и Шиллинга [4].

Глава XVIII. Первые три параграфа базируются на работе Зарисского [13]. Теорема, упомянутая на стр. 266, является основной теоремой этой работы. В работе [14] Зарисский дал упрощенное доказательство той же теоремы. Третье доказательство, основанное на результатах Вейля [9] и не использующее теорию нормирований, дано Норткоттом [6]. Изложение доказательства локальной теоремы об униформизации, занимающее §§ 5—7, тесно примыкает к доказательству Зарисского [15], единственному известному до сих пор доказательству этой теоремы. Доказательство существования конечной разрешающей системы базируется на работе Зарисского [16]. Доказательство Зарисского, основанное на топологических рассмотрениях, изложено здесь в чисто алгебраических терминах. При этом вместо бикомпактности используется гильбертова теорема о базисе. Доказательство возможности редукции особенностей алгебраической поверхности по существу совпадает с „упрощенным доказательством" Зарисского [17]. Однако для полноты мы приводим некоторые леммы из его первоначального арифметического доказательства [18]. История этой теоремы — долгая и запутанная. Исторические указания можно найти в первой главе книги Зарисского [19]. Существует еще лишь одно доказательство этой теоремы (в случае, когда основным полем является поле комплексных чисел), полностью выдерживающее критику,—это доказательство Уокера [8]. Доказательство возможности редукции особенностей для трехмерного алгебраического многообразия содержится в работе Зарисского [20].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Albert A. A., Modern Higher Algebra, Cambridge, 1938.
2. Krull W., Idealtheorie, Ergebnisse der Mathematik, IV, 3, Berlin, 1935.
3. Krull W., Journal für die reine und angewandte Math., **167** (1932), 160.
4. MacLane S., Schilling O. F. G., Annals of Math., **40** (1939), 507.
5. Muhly H. T., Annals of Math., **42** (1941), 921.
6. Northcott D. G., Proc. of London Math. Soc. (3), **1** (1951), 129.
7. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, тт. I и II, М.—Л., 1947.
8. Walker R. J., Annals of Math., **36** (1935), 336.
9. Weil A., Foundations of Algebraic Geometry, New York, 1948.
10. Zariski O., American Journal of Math., **61** (1939), 249.
11. Zariski O., American Journal of Math., **62** (1940), 187.
12. Zariski O., Trans. of American Math. Soc., **62** (1947), 1.
13. Zariski O., Trans. of American Math. Soc., **53** (1943), 490.
14. Zariski O., Proc. of National Acad. of Sci., U. S. A., **34** (1948), 62.
15. Zariski O., Annals of Math., **41** (1940), 852.
16. Zariski O., Bull. of American Math. Soc., **50** (1944), 683.
17. Zariski O., Annals of Math., **43** (1942), 583.
18. Zariski O., Annals of Math., **40** (1939), 639.
19. Zariski O., Algebraic Surfaces, Ergebnisse der Mathematik, III, 5, Berlin, 1935.
20. Zariski O., Annals of Math., **45** (1944), 472.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгебраическое замыкание (поля) 137
— семейство нормирований 352
Алгоритм Перрона 296—297
Архимедовское упорядочение группы 182
Аффинно нормальное многообразие 155
Аффинное пространство 94

Базис идеала 12
— модуля 64
— моноидного образа 273
Бирациональная геометрия 9
Бирациональное преобразование 247
— — регулярное 261
— соответствие 247

Верхний класс 195
Вложенная компонента идеала 30
Вычет в точке 148
— элемента 211

Группа значений нормирования 192
— — — дискретная 211
— упорядоченная абелева 180

Дискретная группа значений 211
Допустимое преобразование (в аффинном пространстве) 95
Достаточно общая система координат 101
— общее преобразование 101

Идеал главный 12
— дробный 66
— единичный 10
Идеал кратный 18
— максимальный (в кольце) 16
— неприводимый 25
— несобственный 10
— нормирования 194
— нулевой 10
— порожденный элементами 12
— приводимый 25
— примарный 20
— $\mathfrak{p}$-примарный 22
— простой 19
— простой, принадлежащий примарному 21
— расширения 50
— сжатия 50
— собственный 10
— целый 66
Идеала базис 12
— вложенная компонента 30
— делитель 18
— изолированная компонента 30
— индекс (примарного идеала) 24
— радикал (примарного идеала) 21
— размерность 106
— символическая степень (простого идеала) 31
— устранимая примарная компонента 27
Изолированная подгруппа 186
Иррегулярное многообразие (в бирациональном соответствии) 260

Квадратичное преобразование 358
Квазиделитель 69
Квазикратное 69

Квазиравенство (дробных идеалов) 67
Кольцо вычетов 37
— главных идеалов 12
— нормирования 194
— частных 53
— — подмногообразия 111
Комплекс фундаментальный (бирац. соответствия) 269
Компоиента идеала примарная 30
— — устранимая 27
Кремоново преобразование 292

Локальная теорема об униформизации 290
Локальное свойство многообразия 175

Многообразие аффинно нормальное 155
— иррегулярное 260
— неприводимое (в аффинном пространстве) 96
— проективно нормальное 165
— производное нормальное 171
— регулярное 260
— соединяющее 248
— фундаментальное 260
Многообразия проекция 175
Многочлен моновалентный 307
Модуль 62
Модуля базис 64
Моновалентный многочлен 307
Моноидного образа базис 273
Моноидного образа степень 273
Моноидный образ 273

Неприводимое многообразие (в аффинном пространстве) 96
Несократимое представление идеала 27
Норма нуля 193
— элемента 192
Нормализованная группа 185
Нормальная m-система 308
— последовательность 358
Нормальное многообразие (аффинно нормальное) 155
Нормальное многообразие (проективно нормальное) 165
Нормирование 189
— индуцированное 205
— составленное (из других) 216
— тривиальное 190
Нормирования группа значений 192
— идеал 194
— кольцо 194
— поле вычетов 211
— продолжение 205
— размерность 220
— центр 231

Область целостности многообразия 109
Образ $T\{V\}$ подмногообразия 257
Образ $T\{V\}$ многообразия полный 256
Обратный идеал 67
Общая точка 97
Однородный элемент (поля) 164

Пересечение дробных идеалов 65
Перрона алгоритм 296, 297
Поле вычетов нормирования 211
— разложения 136
— функций многообразия 97
Полная система сечений гиперплоскостями 175
Полный образ $T\{V\}$ многообразия 256
Преобразование бирациональное 247
— допустимое (в аффинном пространстве) 95
— квадратичное 358
— с помощью гиперповерхностей 173
Приведенный дробный идеал 68
Примарная компонента 30
— — устранимая 27
Продолжение нормирования 205
Проективная модель поля функций 293
Проекция многообразия 175
Произведение дробных идеалов 65
Производное нормальное многообразие 171

Пространство аффинное 94
Размерность
— идеала 106
— нормирования 220
Разрешающая система 293, 350
Ранг группы 189
Рационально зависимая система 225
Рационально независимая система 225
Рациональный ранг 225
Регулярное бирациональное соответствие 261
— многообразие 260

Символическая степень идеала 31
Система разрешающая 293, 350
Собственная специализация (в аффинном пространстве) 97
Соединяющее многообразие 248
Соответствие бирациональное 247
Степень идеала символическая 31
Степень моноидного образа 273
Теорема об униформизации локальная 290
Точка общая 97

Униформизирующие параметры 125, 155
Упорядоченные группы 180
Устранимая примарная компонента 27

Фактор-группа 187
Фундаментальное многообразие (бирационального соответствия) 260
Фундаментальный комплекс 269

Характер однородности 167

Целое замыкание кольца 83
Целозамкнутые кольца 83
Целость элемента 82
Центр нормирования 231

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Из предисловия авторов 3

ЧАСТЬ V

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава XV. ТЕОРИЯ ИДЕАЛОВ В КОММУТАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ 9

§ 1. Идеалы в коммутативных кольцах 10
§ 2. Простые и примарные идеалы 19
§ 3. Кольца вычетов 36
§ 4. Подкольца и расширения колец 42
§ 5. Кольца частных 51
§ 6. Модули 62
§ 7. Мультипликативная теория идеалов 66
§ 8. Целые элементы 82

Глава XVI. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГООБРАЗИЙ 94

§ 1. Алгебраические многообразия в аффинном пространстве . 94
§ 2. Идеалы и многообразия в аффинном пространстве 103
§ 3. Простые точки 118
§ 4. Неприводимые подмногообразия многообразия V_d 136
§ 5. Нормальные многообразия в аффинном пространстве . . . 155
§ 6. Проективно нормальные многообразия 163

Глава XVII. ТЕОРИЯ НОРМИРОВАНИЙ 180

§ 1. Упорядоченные абелевы группы 180
§ 2. Нормирования поля 189
§ 3. Поля вычетов 211
§ 4. Нормирования полей алгебраических функций 219
§ 5. Центр нормирования 230

Глава XVIII. БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 245

§ 1. Бирациональные соответствия 245
§ 2. Бирациональные соответствия между нормальными многообразиями 261
§ 3. Моноидные преобразования 270

§ 4. Редукция особенностей и локальная теорема об униформизации 289
§ 5. Некоторые кремоновы преобразования 293
§ 6. Локальная теорема об униформизации. Основной случай . 322
§ 7. Нормирования размерности s и ранга k 338
§ 8. Разрешающие системы 349
§ 9. Редукция особенностей алгебраического многообразия . . . 357

Библиографические замечания 368

Библиография 369

Алфавитный указатель 370

В. Ходж и Д. Пидо

МЕТОДЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
ТОМ III

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ*
Технический редактор *М. П. Грибова*
Корректоры: *А. А. Смирнова* и
А. Н. Окорокова

Сдано в производство 22/XI 1954 г.
Подписано к печати 15/II 1955 г.
Т-00785. Бумага $60\times92^{1}/_{16}=11{,}7$ бум. л.
23,5 печ. л.
Уч.-издат. л. 21,8. Изд. № 1/2454.
Цена 17 р. 25 к. Зак. 1831.
Издательство иностранной литературы

Министерство культуры СССР.
Главное управление
полиграфической промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29