多复变数函数論中的典型域的調和分析

华罗庚

科学出版社

1958

Хуа Ло-кен

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Перевод
М. А. ЕВГРАФОВА

Под редакцией
М. И. ГРАЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1959

АННОТАЦИЯ

Монография известного китайского математика Хуа Ло-кена посвящена разделам теории функций многих комплексных переменных, получившим развитие лишь в самое последнее время и отражавшимся до сих пор лишь в специальных журнальных статьях, зачастую мало доступных. Большинство результатов, излагаемых в этой книге, принадлежит автору и его ближайшим сотрудникам. Для получения этих результатов автором строится значительный алгебраический аппарат, представляющий и самостоятельный интерес.

Монография принесет большую пользу научным работникам и аспирантам, работающим в области теории функций многих комплексных переменных и особенно автоморфных функций, теории представлений групп и в смежных областях.

Редакция литературы
по математическим наукам

Хуа Ло-кен

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Редактор *Ф. В. ШИРОКОВ* Художник *В. И. Телепнев*
Художественный редактор *А. В. Вилленева* Технический редактор *А. Г. Резоухова*
Корректор *И. М. Лебедева*

Сдано в производство 16/III 1959 г. Подписано к печати 30/IX 1959 г. Бумага 60×92¹/₁₆.
5,1 бум. л. 10,2 печ. л. Уч.-изд. л. 8,9. Изд. № 1/4525. Цена 7 р. 75 к. Зак. 240.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В предлагаемой читателю монографии известного китайского математика Хуа Ло-кена изучаются важные классы ограниченных областей в многомерных комплексных пространствах. Эти области были первоначально описаны Э. Картаном. Их рассмотрение оказывается весьма существенным в теории представлений групп Ли, в теории однородных пространств и в теории автоморфных функций нескольких комплексных переменных. В связи с этим книга Хуа Ло-кена тесно примыкает к работам перечисленных направлений. Мы имеем в виду работы Э. Картана, И. М. Гельфанда, Ф. А. Березина, Р. Годмана и Хариш-Чандры по теории сферических функций на группах Ли, многочисленные работы по теории конечномерных представлений групп Ли, работы И. М. Гельфанда, М. А. Наймарка, Ф. А. Березина, М. И. Граева, Хариш-Чандры по теории бесконечномерных представлений групп Ли, результаты теории автоморфных функций нескольких комплексных переменных, частично изложенные в книге К. Зигеля „Автоморфные функции нескольких комплексных переменных", ИЛ, 1954. Отметим также результаты И. М. Гельфанда и М. И. Граева [5] по теории представлений групп Ли в однородных пространствах; полученные в самое последнее время интересные результаты Ф. И. Карпелевича [10] и И. И. Пятецкого-Шапиро [11] по теории границы симметрических пространств, примененные авторами к теории гармонических функций в симметрических пространствах и к теории автоморфных функций нескольких комплексных переменных; результаты И. М. Гельфанда и И. И. Пятецкого-Шапиро [7] по теории представлений и теории автоморфных функций (см. список дополнительной литературы в конце книги). Уже это далеко не полное перечисление показывает, что книга Хуа Ло-кена находится в тесной связи с бурно развивающимися направлениями современной математики.

Одной из основных задач книги является построение для рассматриваемых областей аналога интеграла Пуассона и решение задачи Дирихле для гармонических функций. Бо́льшая часть результатов, изложенных в книге, принадлежит самому автору. Эти результаты устанавливаются путем прямых, подчас довольно сложных вычислений с применением обширного алгебраического аппарата,

а также аппарата теории конечномерных представлений, которым автор мастерски владеет. Многие вспомогательные результаты — вывод ряда интересных алгебраических соотношений, вычисление интегралов, где аргумент пробегает некоторые множества матриц $\left(\text{например, матричных аналогов интеграла } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}\right)$, несомненно представляют самостоятельный интерес.

К сожалению, основывая изложение на прямых вычислениях, автор не использует возможностей теоретико-группового аспекта. Между тем, этот теоретико-групповой аспект позволил бы лучше понять многие результаты книги, а в отдельных случаях упростить их доказательство. В качестве примера укажем, как определяется ядро Пуассона в теоретико-групповых терминах. Пусть $\mathfrak{R}$ — одна из областей, рассматриваемых в книге, и $\mathfrak{S}$ — остов (характеристическое многообразие) ее границы. Пусть z — точка из $\mathfrak{R}$ и C_z — группа аналитических автоморфизмов области $\mathfrak{R}$, оставляющих на месте точку z. Можно показать, что группа C_z транзитивна на $\mathfrak{S}$, т. е. переводит любую точку из $\mathfrak{S}$ в любую другую. Мера на $\mathfrak{S}$, инвариантная относительно преобразований из C_z, задается как раз ядром Пуассона.

Книга Хуа Ло-кена написана весьма сжато, и чтение ее потребует от читателя известной математической культуры и большого внимания. Желательно, чтобы читатель был знаком с основными понятиями теории конечномерных представлений групп (например, в объеме трех первых глав книги Ф. Мурнагана „Теория представлений групп“, ИЛ, 1950).

Эта монография первоначально была выпущена в Китае в стеклографированном издании незадолго до Третьего Всесоюзного математического съезда в Москве (в 1956 г.), в котором автор принимал участие. По просьбе Издательства иностранной литературы автор специально подготовил текст книги к изданию на русском языке.

В конце книги прилагается дополнительный список литературы по вопросам, близким к содержанию этой книги.

М. И. Граев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая монография содержит ряд результатов автора по теории функций многих комплексных переменных. Большинство этих результатов опубликовано на китайском языке в журнале Acta Mathematica Sinica начиная с 1952 г. Эти результаты несколько переработаны и дополнены новыми исследованиями автора, полученными позднее.

Первым наброском этой монографии можно считать доклад, сделанный мною на первом общем собрании Китайской Академии Наук, который частично был повторен на Третьем Всесоюзном математическом съезде в 1956 году в Москве.

Я чрезвычайно признателен товарищам Гун Шену, Сюй И-пао Чжун Тун-дэ и Лу Ци-кэну, особенно последнему, внимательно просмотревшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

Кроме того, я хочу выразить благодарность Издательству иностранной литературы, без содействия которого эта монография не могла бы так скоро появиться в русском переводе.

Я особенно благодарен товарищам М. А. Евграфову и М. И. Граеву за их большую работу по переводу и редактированию моей книги. Издание этой книги — одно из конкретных проявлений великой дружбы между Советским Союзом и Китайской Народной Республикой.

Хуа Ло-кен

ВВЕДЕНИЕ

I. Классические области

Под названием классическая область мы будем понимать неприводимую ограниченную симметрическую область (в пространстве многих комплексных переменных) одного из следующих четырех типов:

1) Область $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, образованная матрицами из m строк и n столбцов (элементы матриц — комплексные числа), удовлетворяющими условию

$$I^{(m)} - Z\overline{Z}' > 0.$$

Здесь $I^{(m)}$ — единичная матрица порядка m, $\overline{Z}'$ — матрица, комплексно сопряженная с транспонированной матрицей Z'. ($H > 0$ для эрмитовой матрицы H означает, как обычно, что H положительно определена).

2) Область $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$, образованная симметрическими матрицами порядка n (с комплексными элементами), удовлетворяющими условию

$$I^{(n)} - Z\overline{Z} > 0.$$

3) Область $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$, образованная кососимметрическими матрицами порядка n (с комплексными элементами), удовлетворяющими условию

$$I^{(n)} + Z\overline{Z} > 0.$$

4) Область $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$, образованная n-мерными ($n > 2$) векторами

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

(z_k — комплексные числа), удовлетворяющими условиям[1])

$$|zz'|^2 + 1 - 2\overline{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1.$$

Комплексная размерность этих четырех областей равна соответственно mn, $n(n+1)/2$, $n(n-1)/2$, n.

Автором было показано (см. Хуа Ло-кен [3]), что $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ также можно рассматривать и как однородное пространство вещественных матриц из 2-х строк и n столбцов. Поэтому изучение всех этих областей можно свести к изучению геометрии матриц.

---

[1]) Здесь и всюду в дальнейшем автор рассматривает вектор как матрицу из одной строки и n столбцов. Поэтому z' — матрица из одного столбца и n строк (транспонированная матрице z). — *Прим перев.*

В 1935 г. Э. Картан [1] доказал, что существует только шесть возможных типов неприводимых транзитивных ограниченных симметрических областей. Помимо указанных четырех типов, возможны еще два — размерностей 16 и 27. Разумеется, эти два типа являются весьма частными. Вопрос об эффективном описании этих двух типов областей все еще остается открытым.

Целью настоящей книги является построение гармонического анализа в этих классических областях. (Точное содержание гармонического анализа будет очерчено позднее.)

II. Характеристические многообразия в областях

Пусть $\mathfrak{R}$ — ограниченная односвязная область в $2n$-мерном эвклидовом пространстве n комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, а $f(z)$ — аналитическая функция z, регулярная в $\mathfrak{R}$. Известно, что максимум модуля функции $f(z)$ достигается на границе $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{S}$ — многообразие, лежащее на границе $\mathfrak{R}$ и обладающее следующими свойствами:

а) модуль любой аналитической функции, регулярной в $\mathfrak{R}$, достигает своего максимума на $\mathfrak{S}$;

б) для любой точки a из $\mathfrak{S}$ существует такая функция $f(z)$, регулярная в $\mathfrak{R}$, что модуль $f(z)$ достигает максимума при $z=a$.

Такое многообразие $\mathfrak{S}$ называется характеристическим многообразием области $\mathfrak{R}$. Следует отметить, что $\mathfrak{S}$ является, вообще говоря, лишь частью границы, и что размерность $\mathfrak{S}$ может быть значительно меньше, чем $2n-1$. Ясно, что $\mathfrak{S}$ определяется по $\mathfrak{R}$ единственным образом. Нетрудно доказать, что $\mathfrak{S}$ замкнуто и что аналитическая функция, регулярная в окрестности каждой точки $\mathfrak{S}$, определяется по своим значениям на $\mathfrak{S}$ единственным образом. Отсюда следует, что вещественная размерность многообразия $\mathfrak{S}$ не меньше n. Мы будем обозначать через ξ переменные на $\mathfrak{S}$, а через $d\xi\,\overline{d\xi}'$ и $\dot{\xi}$ соответственно метрику и элемент объема на $\mathfrak{S}$.

По-видимому, в определении $\mathfrak{S}$ вместо всех аналитических функций можно рассматривать только линейные функции.

Опишем характеристические многообразия классических областей.

1) $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ образовано матрицами U из m строк и n столбцов ($m \times n$-матрицами), удовлетворяющими условию

$$U\overline{U}' = I^{(m)}.$$

В частности, при $m=n$ многообразие $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ совпадает с множеством всех унитарных матриц.

2) $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$ состоит из всех симметрических унитарных матриц порядка n.

3) $\mathfrak{S}_{\mathrm{III}}$ определяется различным образом в зависимости от четности n. Если n четное, то $\mathfrak{S}_{\mathrm{III}}$ состоит из всех кососимметрических

унитарных матриц порядка n. Если же n нечетное, то $\mathfrak{C}_{III}$ состоит из матриц вида

$$UDU',$$

где U — любая унитарная матрица, а

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus 0.$$

4) $\mathfrak{C}_{IV}$ состоит из векторов вида $e^{i\theta}x$, где x — вещественный вектор, удовлетворяющий условию $xx'=1$.

Многообразия $\mathfrak{C}_I$, $\mathfrak{C}_{II}$, $\mathfrak{C}_{III}$ и $\mathfrak{C}_{IV}$ имеют вещественную размерность $m(2n-m)$, $n(n+1)/2$, $n(n-1)/2+(1+(-1)^n)(n-1)/2$ и n соответственно.

Эти характеристические многообразия являются однородными пространствами. Более точно, каждую точку $\mathfrak{C}$ можно перевести в любую другую преобразованием, оставляющим неподвижной наперед заданную точку в $\mathfrak{R}$. Общая теория гармонического анализа в однородных пространствах была построена ранее (см. Э. Картан [1], Г. Вейль [1]); однако метод, излагаемый в настоящей книге, дает более точные и удобные результаты.

III. Эвристические соображения

Предположим, что мы имеем такую последовательность аналитических в $\mathfrak{R}$ функций

$$\{\varphi_\nu(z)\}, \quad \nu=0, 1, 2, \ldots,$$

что любая аналитическая в $\mathfrak{R}$ функция $f(z)$ может быть разложена в ряд

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

сходящийся в $\mathfrak{R}$. Построим две бесконечные эрмитовы матрицы

$$H_1=\left(\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\,\dot{\xi}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\ldots}$$

и

$$H_2=\left(\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\,\dot{z}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\ldots}.$$

Базис $\{\varphi_\nu(z)\}$ можно считать ортонормированным так, что

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\,\dot{\xi}=\delta_{\nu\mu}$$

и

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\,\dot{z}=\lambda_\nu\delta_{\nu\mu}.$$

Собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ являются псевдоконформными инвариантами, т. е. они не зависят от выбора базиса $\{\varphi_\nu(z)\}$ и сохраняются при аналитическом отображении, переводящем $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ соответственно.

Существование систем $\{\varphi_\nu(z)\}$ обеспечено теоремой А. Картана [1] о полных круговых областях [1]).

Положив теперь

$$K(z, \bar{w}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(w)}}{\lambda_\nu},$$

мы получим ядро Бергмана, обладающее следующим воспроизводящим свойством: для любой функции $f(z)$, аналитической в $\mathfrak{R}$, имеем

$$f(z) = \int_{\mathfrak{R}} K(z, \bar{w}) f(w)\, \dot{w}.$$

Полагая же

$$H(z, \bar{\xi}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\xi)},$$

мы получаем ядро Коши для области $\mathfrak{R}$. Воспроизводящее свойство этого ядра состоит в том, что если $f(z)$ аналитическая функция, имеющая на $\mathfrak{C}$ разложение

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(\xi),$$

то

$$f(z) = \int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) f(\xi)\, \dot{\xi}.$$

Полагая

$$f(z) = u(z) H(z, \bar{w}),$$

имеем

$$u(z) = \int_{\mathfrak{C}} \frac{H(z, \bar{\xi}) H(\xi, \bar{w})}{H(z, \bar{w})} u(\xi)\, \dot{\xi}.$$

Функцию

$$P(z, \xi) = \frac{H(z, \bar{\xi}) H(\xi, \bar{z})}{H(z, \bar{z})}$$

мы назовем ядром Пуассона для области $\mathfrak{R}$. Оно положительно.

---

[1]) Область $\mathfrak{R}$ в пространстве многих комплексных переменных называется круговой областью (с центром в начале), если вместе с точкой z в $\mathfrak{R}$ лежит и точка $ze^{i\varphi}$ при любом вещественном φ. Если же с точкой z в $\mathfrak{R}$ лежит и точка $rze^{i\varphi}$ при любом вещественном φ и $0 \leqslant r \leqslant 1$, то $\mathfrak{R}$ называется полной круговой областью. — *Прим. перев.*

Ясно, что система функций $\{\varphi_\nu(\xi)\}$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$, не является полной в пространстве функций, непрерывных на $\mathfrak{C}$. Дополним ее до полной ортонормальной системы

$$\{\varphi_\nu(\xi)\}, \quad \nu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и разложим функцию $P(z, \xi)$ в ряд Фурье по этой новой системе:

$$P(z, \xi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Phi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(\xi)}, \quad \Phi_\nu(z)=\int_{\mathfrak{C}} P(z, \xi) \varphi_\nu(\xi) \dot{\xi}.$$

Если

$$\lim_{z \to \xi} \Phi_\nu(z)=\varphi_\nu(\xi),$$

то функциям на $\mathfrak{C}$, имеющим разложение в ряд Фурье

$$\varphi(\xi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(\xi), \quad c_\nu=\int_{\mathfrak{C}} \varphi(\xi) \overline{\varphi_\nu(\xi)} \dot{\xi}$$

можно поставить в соответствие класс функций

$$\Phi(z)=\int_{\mathfrak{C}} P(z, \xi) \varphi(\xi) \dot{\xi}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \Phi_\nu(z),$$

которые будем называть гармоническими функциями в области $\mathfrak{R}$.

Гармонические функции могут быть определены и как решения некоторого дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. К этому уравнению приводят нас следующие эвристические соображения.

Ядро Бергмана дает нам следующую риманову метрику пространства $\mathfrak{R}$:

$$d\bar{d} \ln K(z, \bar{z})=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \ln K(z, \bar{z}) dz_i d\bar{z}_j=\sum_{i, j=1}^{n} h_{ij} dz_i d\bar{z}_j.$$

Контравариантному тензору h^{ij} отвечает оператор

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h^{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j},$$

который является оператором Лапласа этого пространства. Можно говорить также и о задаче Дирихле.

Обоснование изложенных выше фактов будет получено в дальнейшем для классических областей.

IV. Замечания относительно используемых методов

а) *Аппарат теории представлений групп.* Известно, что классические области всех четырех типов являются полными круговыми областями (см. примечание на стр. 12). Для полных круговых областей можно предполагать, что группа движений, оставляющих начало неподвижным, состоит из линейных преобразований вида

$$w = zU,$$

где U — унитарная матрица. Обозначим эту группу через Γ_0. Множество всех одночленов вида $z_1^{l_1} z_2^{l_2}, \ldots, z_n^{l_n}$ образует полную систему функций в пространстве функций, аналитических в $\mathfrak{R}$, причем одночлены, имеющие различные степени (т. е. $l_1 + \ldots + l_n \neq l_1' + \ldots + l_n'$), ортогональны друг другу. Поэтому нашей основной задачей является разложение однородных многочленов одной и той же степени по ортонормированной системе. Более подробно, пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, а $z^{[l]}$ — вектор с компонентами

$$\sqrt{\frac{l!}{l_1!\, l_2! \ldots l_n!}}\, z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_n^{l_n}, \qquad l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n,$$

в пространстве размерности $n(n+1) \ldots (n+l-1)/l!$ Преобразование $w = zU$ индуцирует преобразование

$$w^{[l]} = z^{[l]} U^{[l]},$$

где $U^{[l]}$ обозначает l-ю симметризованную кронекеровскую [1]) степень матрицы U. Чтобы найти ортогональные компоненты пространства $z^{[l]}$, мы должны решить задачу о разложении представления $U^{[l]}$ на неприводимые компоненты. Это соответствует следующей задаче в теории представлений линейных групп.

Начнем с группы $GL(n)$ всех невырожденных матриц порядка n. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — целые числа, удовлетворяющие условию $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$. Каждому элементу X из $GL(n)$ соответствует в представлении $GL(n)$ с сигнатурой $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ [2]) матрица

$$A_{f_1, \ldots, f_n}(X).$$

Степень представления обозначим через $N = N(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Допустим, что для унитарных X матрица $A_{f_1, \ldots, f_n}(X)$ унитарна. Пусть

$$B_{g_1, \ldots, g_N}(Y)$$

— некоторое представление группы $GL(N)$. Очевидно, что

$$B_{g_1, \ldots, g_N}\left(A_{f_1, \ldots, f_n}(X)\right)$$

---

[1]) См. Ф. Мурнаган [1], стр. 104. — *Прим. перев.*

[2]) См. Г. Вейль [2], стр. 181. — *Прим. перев.*

снова будет представлением группы $GL(n)$. Задача состоит в том, чтобы найти неприводимые компоненты этого составного представления. Эта задача, вообще говоря, является весьма сложной, но, к счастью, те два частных случая, которые нам нужны, могут быть решены полностью [1]).

б) *Полярные координаты матриц.* После получения полной ортогональной системы методами теории представлений нам придется столкнуться еще с одной трудностью, а именно с вычислением нормирующих множителей. (Эта задача легче для $\mathfrak{C}$, чем для $\mathfrak{R}$.) Чтобы преодолеть эту трудность, мы вводим для матриц полярные координаты. Разъясним, что это значит на примере симметрических матриц.

Каждая симметрическая матрица Z порядка n с комплексными элементами может быть представлена в виде

$$Z = U\Lambda U',$$

где U — унитарная, а Λ — вещественная диагональная матрица $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, причем $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ (см. Хуа Ло-кен [1]). Пусть теперь $\{U\}$ — множество классов смежности унитарной группы по ее подгруппе, состоящей из 2^n диагональных матриц

$$[\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1].$$

Тогда каждой симметрической матрице можно поставить в соответствие элемент из $\{U\}$ и диагональную матрицу Λ. Это соответствие почти для всех матриц взаимно однозначно (т. е. за возможным исключением многообразия меньшей размерности). Матрица Λ представляет собой как бы „модуль“ матрицы Z, а U — как бы ее „аргумент“. В книге будет проведено вычисление якобиана перехода от „декартовых координат Z“ к „полярным координатам ($\{U\}$, Λ)“. Мы получим попутно некоторые аналогичные результаты относительно „полярных координат“ для других типов матриц, хотя некоторые из них и не связаны непосредственно с основной задачей настоящей книги.

в) *Вычисление интегралов.* В этой книге содержится, разумеется, немалое количество интересных интегралов, но мы упомянем сейчас лишь об одном из них. Именно:

при $\alpha > 1$, $\alpha + \beta > -n$, имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} \left(1 - \bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\alpha} \left(1 - \bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\beta} \dot{z} =$$

$$= \frac{\pi^n \Gamma(\alpha + 1)}{2^{n-1}(\alpha + \beta + n)\Gamma(\alpha + n)}.$$

---

[1]) Автор благодарит проф. Х. Дуаия за сообщение, что Р. М. Тралл [1] также решил задачу для этих случаев. Его метод решения сильно отличается от изложенного в настоящей книге.

Следовательно, при $\lambda < 1$

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} (1 - 2\bar{z}z' + |zz'|^2)^{-\lambda} \dot{z} = \frac{\pi^n \Gamma(1-\lambda)}{2^{n-1}(n-2\lambda)\Gamma(n-\lambda)}.$$

Эта формула решает, кстати, одну задачу, поставленную автором в 1946 г. (см. Хуа Ло-кен [3]). А именно, в $\mathfrak{R}_{IV}$ показатель сходимости рядов Пуанкаре не меньше $(n-1)/n$, и эта оценка не может быть улучшена.

V. Применения к теории представлений

В предыдущем разделе мы коснулись вопроса о том, как аппарат теории представлений используется в теории функций многих комплексных переменных. Сейчас же мы покажем, наоборот, как результаты наших исследований могут быть использованы в теории представлений.

Для большей ясности мы сначала будем говорить о гармонических функциях в $\mathfrak{R}_I$ при $m = n$. Уравнение Лапласа в $\mathfrak{R}_I$ имеет вид

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} \left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{n} z_{l\alpha}\bar{z}_{l\beta}\right)\left(\delta_{jk} - \sum_{\gamma=1}^{n} z_{j\gamma}\bar{z}_{k\gamma}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z_{j\alpha}\,\partial \bar{z}_{k\beta}} = 0.$$

Функции $u(Z)$, удовлетворяющие этому уравнению в замыкании $\mathfrak{R}_I$, будем называть гармоническими в $\mathfrak{R}_I$. Те из них, которые имеют непрерывные граничные значения на $\mathfrak{C}_I$ образуют класс, обозначаемый через $\mathfrak{H}$. Решение задачи Дирихле в $\mathfrak{R}_I$ дает следующий результат.

Если нам дана непрерывная на унитарной группе $\mathfrak{C}_I$ функция $\varphi(U)$, то существует одна, и только одна, гармоническая функция $u(Z)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{Z \to U} u(Z) = \varphi(U).$$

Эта функция может быть найдена по формуле Пуассона

$$u(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\{\det(I - Z\bar{Z}')\}^n}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}} \varphi(U)\,\dot{U}.$$

Разложение в ряд ядра Пуассона

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C})} \frac{\{\det(I - Z\bar{Z}')\}^n}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}}$$

может быть получено следующим образом. Пусть

$$A_f(U) = A_{f_1, \ldots, f_n}(U) = \left(a_{ij}^f(U)\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N(f_1, \ldots, f_n) = N(f).$$

Последовательность

$$\varphi_{ij}^f(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{V(\mathfrak{G})}}\, a_{ij}^f(U), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N(f),$$

$$-\infty < f_n \leqslant \ldots \leqslant f_2 \leqslant f_1 < \infty,$$

образует ортонормальную систему на унитарной группе $\mathfrak{G}_{\mathrm{I}}$, и искомый ряд имеет вид

$$\sum_f \sum_{i,j} \Phi_{ij}^f(Z)\, \overline{\varphi_{ij}^f(U)}, \qquad \Phi_{ij}^f(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{G})} \int_{\mathfrak{G}} \frac{\{\det(I - Z\bar{Z}')\}^n}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}}\, \varphi_{ij}^f(U)\, \dot{U},$$

причем

$$\lim_{Z \to U} \Phi_{ij}^f(Z) = \varphi_{ij}^f(U).$$

Для каждой непрерывной функции $\varphi(U)$ мы можем написать формальный ряд Фурье

$$\sum_f \sum_{i,j} c_{ij}^f \varphi_{ij}^f(U), \qquad c_{ij}^f = \frac{1}{V(\mathfrak{G})} \int_{\mathfrak{G}} \varphi(U)\, \overline{\varphi_{ij}^f(U)}\, \dot{U},$$

который, вообще говоря, может и не сходиться к $\varphi(U)$. Но

$$\varphi(U) = \lim_{Z \to U} \sum_f \sum_{i,j} c_{ij}^f \Phi_{ij}^f(Z).$$

Это означает, что формальный ряд Фурье суммируем к сумме $\varphi(U)$ методом Абеля. Таким образом, мы получаем теорему, что ряд Фурье непрерывной функции на унитарной группе суммируем к ней методом Абеля.

Как следствие мы получим аппроксимационную теорему Петера — Вейля для любых компактных групп конечной размерности и аппроксимационную теорему для однородных пространств. Ясно, что эти результаты получаются в более точном виде, чем они были доказаны прежде.

Сделаем еще несколько замечаний.

Гармонические функции класса $\mathfrak{H}$ удовлетворяют также системе n^2 дифференциальных уравнений

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{h=1}^{n} \bar{z}_{h\alpha} z_{h\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_{i\alpha}\, \partial z_{j\beta}} = 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Это выглядит весьма удивительным и наводит на мысль о возможности расщепления одного уравнения в частных производных в систему уравнений в частных производных.

Далее, область сходимости ряда

$$\sum_f \sum_{i,j} c_{ij}^f \Phi_{ij}^f(Z)$$

не обязательно совпадает с $\mathfrak{R}_I$. Но если он сходится вне $\mathfrak{R}_I$, то там уравнение Лапласа уже не будет иметь эллиптический тип и сумма ряда будет решением уравнения смешанного типа.

Глава I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АППАРАТ

§ 1.1. Алгебраические тождества

Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться обозначением

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j), \qquad n \geqslant 2.$$

Теорема 1.1.1. *Имеет место тождество*

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{1\,2 \ldots n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \ldots (1 - x_{i_1}^2 \ldots x_{i_n}^2)} =$$

$$= D(x_1, \ldots, x_n) \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x_i x_j)^{-1}. \qquad (1.1.1)$$

Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — *всевозможные перестановки чисел* $1, 2, \ldots, n$, *а* $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{1\,2 \ldots n}$ *равно* 1 *или* -1 *в зависимости от того будет ли перестановка четной или нечетной.*

Теорема 1.1.2. *Положим* $\nu = [n/2]$. *Имеет место тождество*

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{1\,2 \ldots n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \ldots (1 - x_{i_1} \ldots x_{i_{2\nu}})} =$$

$$= D(x_1, \ldots, x_n) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x_i x_j)^{-1}. \qquad (1.1.2)$$

Для доказательства этих двух тождеств нам понадобятся два несложных результата об определителях Вандермонда. Хорошо известно, что

$$D(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \left| x_i^{j-1} \right|_1^n. \qquad (1.1.3)$$

Положим

$$D_i = D(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^l D_i = \begin{cases} D(x_1, \ldots, x_n) & \text{при } l = 0, \\ 0 & \text{при } 1 \leqslant l \leqslant n-1, \\ (-1)^{n-1} D(x_1, \ldots, x_n) x_1 \ldots x_n & \text{при } l = n. \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

Затем, так как

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{1-x_1} & \frac{x_2}{1-x_2} & \dots & \frac{x_n}{1-x_n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1(1-x_1) & x_2(1-x_2) & \dots & x_n(1-x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}(1-x_1) & x_2^{n-1}(1-x_2) & \dots & x_n^{n-1}(1-x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1+\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \dots, x_n),$$

мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1-x_i} = (-1)^{n-1} \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \dots, x_n). \quad (1.1.5)$$

Заменяя в этой формуле x_i на $-x_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1+x_i} = \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)} D(x_1, \dots, x_n). \quad (1.1.6)$$

Полагая в (1.1.4) $l=0$ и складывая с (1.1.5), находим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{1-x_i} = D(x_1, \dots, x_n)\left\{1 + (-1)^{n-1} \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}\right\}, \quad (1.1.7)$$

откуда без труда получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{1+x_i} = D(x_1, \dots, x_n)\left\{1 - \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}. \quad (1.1.8)$$

Опираясь на эти результаты, перейдем к доказательству теорем 1.1.1 и 1.1.2.

Доказательство 1.1.1. Для $n=2$ левая часть 1.1.1 равна

$$\frac{x_1}{(1-x_1^2)(1-x_1^2x_2^2)}-\frac{x_2}{(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)}=$$

$$=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1^2)(1-x_1x_2)(1-x_2^2)}=D(x_1,x_2)\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2}(1-x_ix_j)^{-1}.$$

Таким образом, при $n=2$ теорема справедлива. Проведем индукцию. Пусть для $n-1$ теорема верна. Тогда

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\ldots(1-x_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)}=$$

$$=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\delta_{i_1\ldots i_{n-1}}^{1\ldots a-1,\,a+1,\ldots n}\times$$

$$\times\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}}{(1-x_{i_1}^2)\ldots(1-x_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)}=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_a(1-x_1^2x_2^2\ldots x_n^2)}\times$$

$$\times\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\delta_{i_1\ldots i_{n-1}}^{1\ldots a-1,\,a+1\ldots n}\frac{x_{i_1}^{n-2}x_{i_2}^{n-3}\ldots x_{i_{n-2}}}{(1-x_{i_1}^2)\ldots(1-x_{i_1}^2\ldots x_{i_{n-1}}^2)}=$$

$$=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\frac{x_1\ldots x_n}{x_a(1-x_1^2\ldots x_n^2)}\cdot\frac{D(x_1,\ldots,x_{a-1},x_{a+1},\ldots,x_n)}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i\neq a,\,j\neq a}}(1-x_ix_j)}=$$

$$=\frac{1}{(1-x_1^2\ldots x_n^2)\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-x_ix_j)}\sum_{a=1}^{n}D_a\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a). \qquad (1.1.9)$$

Так как

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)=\sum_{l=0}^{n}\sigma_lx_a^l,$$

где σ_l означает l-ю элементарную симметрическую функцию переменных $x_1,\ldots,x_n$, мы имеем в силу (1.1.4)

$$\sum_{a=1}^{n}D_a\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)=\sum_{a=1}^{n}D_a\sum_{l=0}^{n}\sigma_lx_a^l=\sum_{l=0}^{n}\sigma_l\sum_{a=1}^{n}D_ax_a^l=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)+(-1)^nx_1\ldots x_n\cdot(-1)^{n-1}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)(1-x_1^2\ldots x_n^2).$$

Подставляя в (1.1.9), получаем (1.1.1).

Доказательство 1.1.2. При $n=2$ тождество (1.1.2) очевидно. Опять проведем индукцию. Если для $n-1$ теорема верна, то

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta^{12\ldots n}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\ldots(1-x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{2\nu}})} =$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \delta^{1\ldots a-1,\, a+1\ldots n}_{i_1\ldots i_{n-1}} \times$$

$$\times \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})\ldots(1-x_{i_1}\ldots x_{i_{2\nu}})} = \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1\ldots x_n}{x_a(1-\varepsilon x_1\ldots x_n)} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \delta^{1\ldots a-1,\, a+1\ldots n}_{i_1\ldots i_{n-1}} \frac{x_{i_1}^{n-2} x_{i_2}^{n-3} \ldots x_{i_{n-2}}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\ldots}, \quad (1.1.10)$$

где ε равно 0 или 1 в зависимости от того, будет n нечетным или четным. По индуктивному предположению внутренняя сумма равна

$$\frac{D(x_1,\ldots,x_{a-1},x_{a+1},\ldots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)}{1-x_a^2}.$$

Подставляя в (1.1.10), мы получаем, что левая часть (1.1.2) равна

$$\sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1\ldots x_n D(x_1,\ldots,x_{a-1},x_{a+1},\ldots,x_n)}{x_a(1-\varepsilon x_1\ldots x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)}{1-x_a^2} =$$

$$= (1-\varepsilon x_1\ldots x_n)^{-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)^{-1} \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a}{1-x_a^2} \prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a) =$$

$$= (1-\varepsilon x_1\ldots x_n)^{-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)^{-1} \sum_{l=0}^{n} \sigma_l \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}. \quad (1.1.11)$$

Рассмотрим внутреннюю сумму (1.1.11) по отдельности для каждого из следующих трех случаев:

1) Для нечетных l, так как

$$\frac{x_a - x_a^l}{1-x_a^2} = x_a(1+x_a^2+\ldots+x_a^{l-3}),$$

мы имеем

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=x_a(1+x_a^2+\ldots+x_a^{l-3})-\frac{1}{2}\left(\frac{x_a}{1-x_a}+\frac{x_a}{1+x_a}\right).$$

Из (1.1.4), (1.1.5) и (1.1.6) сразу получаем

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{x_a}{1+x_a}+\frac{x_a}{1-x_a}\right)D_a=$$

$$=\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)\,x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}+\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}. \tag{1.1.12}$$

2) Для положительных четных l, так как

$$\frac{1-x_a^l}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\ldots+x_a^{l-2},$$

мы имеем

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\ldots+x_a^{l-2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right).$$

Из (1.1.4), (1.1.7) и (1.1.8) получаем

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=-\sum_{a=1}^{n}D_a+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)D_a=$$

$$=-D(x_1,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)\times$$

$$\times\left\{1+(-1)^{n-1}x_1\ldots x_n\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}+\right.$$

$$\left.+1-x_1\ldots x_n\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}=\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)\times$$

$$\times x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}-\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}. \tag{1.1.13}$$

3) Для $l=0$ имеем

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a}{1-x_a^2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)D_a=D(x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)\,x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}-\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}. \tag{1.1.14}$$

Из (1.1.12), (1.1.13) и (1.1.14) получаем

$$\sum_{l=0}^{n}\sigma_l\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=D(x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}-\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}-\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}\times$$

$$\times\sum_{\substack{l=1\\(l=2k)}}^{n}\sigma_l+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}+\right.$$

$$\left.+\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}\sum_{\substack{l=1\\(l=2k+1)}}^{n}\sigma_l=D(x_1,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n\times$$

$$\times\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}\sum_{l=0}^{n}\sigma_l+\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\sigma_l\right\}=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)\left\{1+\frac{-1+(-1)^{n-1}}{2}x_1\ldots x_n\right\}. \qquad (1.1.15)$$

Подставляя (1.1.15) в (1.1.11) и замечая, что $(-1)^{n-1}-1=-2\varepsilon$, находим

$$(1-\varepsilon x_1\ldots x_n)^{-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)^{-1}D(x_1,\ldots,x_n)(1-\varepsilon x_1\ldots x_n)=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)^{-1}, \qquad (1.1.16)$$

что и доказывает теорему (1.1.2).

Выведем еще и следующее, сравнительно простое тождество.

Теорема 1.1.3.

$$\det\left|\frac{1}{x_i+y_j}\right|_1^n=D(x_1,\ldots,x_n)D(y_1,\ldots,y_n)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i+y_j)^{-1}. \qquad (1.1.17)$$

Доказательство. Из второй, третьей, ..., n-й строки вычитаем первую и используем тождество

$$\frac{1}{x_l+y_k}-\frac{1}{x_1+y_k}=\frac{x_1-x_l}{(x_1+y_k)(x_l+y_k)};\quad l=2,\ldots,n,\ k=1,\ldots,n.$$

После этих преобразований определитель примет вид

$$\frac{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x_1+y_k)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \ldots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \ldots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}. \qquad (1.1.18)$$

Из второго, третьего, ..., n-го столбца последнего определителя вычитаем первый столбец. После этого преобразования получим для определителя в (1.1.18) выражение

$$(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_n)\prod_{j=2}^{n}(x_j+y_1)^{-1}\det\left|\frac{1}{x_i+y_j}\right|_2^n.$$

Теперь теорема сразу же доказывается по индукции.

Заменив $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $-x_1^{-1}, -x_2^{-1}, \ldots, -x_n^{-1}$, после несложных преобразований получим следующий результат.

Теорема 1.1.4.

$$\det\left|(1-x_iy_j)^{-1}\right|_1^n = D(x_1, \ldots, x_n)\,D(y_1, \ldots, y_n)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-1}\ ^{1)}.$$

§ 1.2. Тождества, содержащие степенные ряды

Теорема 1.2.1. *Пусть степенные ряды*

$$f_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(i)}z^k \qquad (1.2.1)$$

сходятся при $|z|<\rho$. *Тогда при* $|z_1|<\rho, \ldots, |z_n|<\rho$ *имеет место тождество*

$$\det|f_i(z_j)|_1^n=\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0}\det\left|a_{l_j}^{(i)}\right|_{i,j=1}^n\det\left|z_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n. \qquad (1.2.2)$$

---

1) Это соотношение известно как лемма Коши. Другой его вывод см. в книге Г. Вейля [2], стр. 276. — *Прим. ред.*

Доказательство. Согласно определению понятия определителя, левая часть (1.2.2) равна

$$\sum_{i_1 \dots i_n} \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} f_{i_1}(z_1) \dots f_{i_n}(z_n) =$$

$$= \sum_{i_1 \dots i_n} \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} a^{(i_1)}_{k_1} \dots a^{(i_n)}_{k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1 \dots i_n} \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} a^{(i_1)}_{k_1} \dots a^{(i_n)}_{k_n} \right) z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \det \left| a^{(i)}_{k_j} \right|^n_{i,j=1} =$$

$$= \sum_{l_1 > l_2 > \dots > l_n \geqslant 0} \det \left| a^{(i)}_{l_j} \right|^n_{i,j=1} \sum_{i_1 \dots i_n} \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} z_1^{l_{i_1}} \dots z_n^{l_{i_n}} =$$

$$= \sum_{l_1 > \dots > l_n \geqslant 0} \det \left| a^{(i)}_{l_j} \right|^n_{i,j=1} \det \left| z_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1},$$

что и требовалось доказать.

Полагая $f_i(z) = f(x_i z)$, получаем следующий частный случай.

Теорема 1.2.2. *Пусть степенной ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1.2.3}$$

сходится при $|z| < \rho$. *Тогда при* $|x_i y_j| < \rho$, $i, j = 1, \dots, n$, *мы имеем*

$$\det |f(x_i y_j)|^n_1 =$$

$$= \sum_{l_1 > \dots > l_n \geqslant 0} a_{l_1} a_{l_2} \dots a_{l_n} \det \left| x_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1} \det \left| y_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1}. \tag{1.2.4}$$

В частности, при $f(z) = (1-z)^{-1}$ получаем следующую формулу

$$\sum_{l_1 > \dots > l_n \geqslant 0} \det \left| x_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1} \det \left| y_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1} = \det \left| (1 - x_i y_j)^{-1} \right|^n_1, \tag{1.2.5}$$

а последний определитель по теореме 1.1.4 равен

$$D(x_1, \dots, x_n) D(y_1, \dots, y_n) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Положим теперь в (1.2.5) $x_n = 0$. Тогда все члены с $l_n > 0$ обратятся в нуль и мы получим

$$\sum_{l_1 > \ldots > l_{n-1} \geqslant 0} \det \left| x_i^{l_j} \right|_{i,j=1}^{n-1} \begin{vmatrix} y_1^{l_1} & \ldots & y_n^{l_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{l_{n-1}} & \ldots & y_n^{l_{n-1}} \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(x_1, \ldots, x_{n-1})\, D(y_1, \ldots, y_n) \cdot x_1 \ldots x_{n-1}}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}.$$

Заменим l_i на $l_i + 1$. Тогда получим

$$\sum_{l_1 > \ldots > l_{n-1} \geqslant 0} \det \left| x_i^{l_j} \right|_{i,j=1}^{n-1} \begin{vmatrix} y_1^{l_1+1} & \ldots & y_n^{l_1+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{l_{n-1}+1} & \ldots & y_n^{l_{n-1}+1} \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(x_1, \ldots, x_{n-1})\, D(y_1, \ldots, y_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}.$$

Полагая теперь $x_{n-1} = 0$, а затем повторяя этот процесс, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1.2.3. *Пусть $n \geqslant m > 0$. При $|x_\nu| < 1$, $|y_\nu| < 1$, $\nu = 1, \ldots, n$, имеет место тождество*

$$\sum_{l_1 > \ldots > l_m \geqslant 0} \det \left| x_i^{l_j} \right|_{i,j=1}^{m} \begin{vmatrix} y_1^{l_1+n-m} & \ldots & y_n^{l_1+n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{l_m+n-m} & \ldots & y_n^{l_m+n-m} \\ y_1^{n-m-1} & \ldots & y_n^{n-m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1 & \ldots & y_n \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(x_1, \ldots, x_m)\, D(y_1, \ldots, y_n)}{\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}. \qquad (1.2.6)$$

Впоследствии нам понадобится еще и следующая теорема.

Теорема 1.2.4. *Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — функции, дифференцируемые достаточное число раз. Тогда*

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ \cdots \\ x_n \to x}} \frac{\det |f_i(x_j)|_{i,j=1}^n}{D(x_1, \ldots, x_n)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{1!\,2!\ldots(n-1)!} \det \left| f_i^{(j-1)}(x) \right|_{i,j=1}^n. \qquad (1.2.7)$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что $x = 0$. Если $f_i(x)$ — аналитические функции, то наша теорема является следствием теоремы 1.2.1; для неаналитических функций следует повторить те же рассуждения, используя формулу Маклорена с остаточным членом.

Пусть $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$ — целые числа. Введем обозначение

$$M_{f_1, \ldots, f_n}(x_1, \ldots, x_n) = \det \left| x_j^{f_i + n - i} \right|_{i,j=1}^n. \qquad (1.2.8)$$

Очевидно, что

$$M_{0,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_n) = D(x_1, \ldots, x_n).$$

Положим

$$N(f_1, \ldots, f_n) = \lim_{\substack{x_1 \to 1 \\ \cdots \\ x_n \to 1}} \frac{M_{f_1, \ldots, f_n}(x_1, \ldots, x_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}. \qquad (1.2.9)$$

Из теоремы 1.2.4 мы получаем

$$N(f_1, \ldots, f_n) = \frac{D(f_1 + n - 1, f_2 + n - 2, \ldots, f_{n-1} + 1, f_n)}{D(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)}. \qquad (1.2.10)$$

Теорема 1.2.5. *Пусть $n \geqslant m \geqslant 1$. При $|x_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, имеем*

$$\prod_{i=1}^m (1 - x_i)^{-\rho - n + 1} = C_\rho \sum_{l_1 > \ldots > l_m \geqslant 0} a_{l_1 + n - m} \ldots a_{l_m + n - m} \times$$

$$\times N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0) \frac{M_{f_1, \ldots, f_m}(x_1, \ldots, x_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \qquad (1.2.11)$$

где

$$l_1 = f_1 + m - 1, \ \ldots, \ l_{m-1} = f_{m-1} + 1, \quad l_m = f_m,$$

$$a_l = \frac{\Gamma(\rho + l)}{\Gamma(\rho)\Gamma(l+1)}, \quad C_\rho = \frac{1}{a_{n-m} \ldots a_{n-1}}.$$

Доказательство. 1) Пусть сначала $m=n$. Положив в теореме 1.2.2

$$f(z)=(1-z)^{-\rho}=\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l,$$

мы получим при $|x_i y_j|<1$ тождество

$$\det\left|(1-x_i y_j)^{-\rho}\right|_1^n = \sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\ldots a_{l_n} \det\left|x_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n \det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n.$$

Деля это равенство на $D(y_1,\ldots,y_n)$ и полагая $y_1\to 1,\ldots,y_n\to 1$, мы получаем в силу теоремы 1.2.4 (так как $(\rho(\rho+1)\ldots(\rho+j-2)=1$ при $j=1)$

$$\lim_{\substack{y_1\to 1\\ \cdots\\ y_n\to 1}} \frac{\det\left|(1-x_i y_j)^{-\rho}\right|_1^n}{D(y_1,\ldots,y_n)} =$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}\det\left|\rho(\rho+1)\ldots(\rho+j-2)\,x_i^{j-1}(1-x_i)^{-\rho-j+1}\right|_1^n=$$

$$=\frac{\rho^{n-1}(\rho+1)^{n-2}\ldots(\rho+n-2)}{1!\,2!\ldots(n-1)!}D\left(\frac{x_1}{1-x_1},\ldots,\frac{x_n}{1-x_n}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n(1-x_i)^{-\rho}=a_0a_1\ldots a_{n-1}D(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^n(1-x_i)^{-\rho-n+1}.$$

Отсюда находим

$$\prod_{i=1}^n(1-x_i)^{-\rho-n+1}=\frac{1}{a_0\ldots a_{n-1}}\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\ldots a_{l_n}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_n)\frac{M_{f_1,\ldots,f_n}(x_1,\ldots,x_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}. \quad (1.2.12)$$

2) Пусть теперь $m<n$. Положим в (1.2.12) $x_n=0$. Тогда все члены с $l_n>0$ исчезнут, а потому

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)^{-\rho-n+1}=\frac{1}{a_0\ldots a_{n-1}}\sum_{l_1>\ldots>l_{n-1}>0} a_{l_1}\ldots a_{l_{n-1}}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_{n-1},0)\frac{M_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})}{D(x_1,\ldots,x_{n-1})}.$$

Заменяя l_ν на $l_\nu+1$, получаем

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)^{-\rho-n+1}=\frac{1}{a_0\ldots a_{n-1}}\sum_{l_1>\ldots>l_{n-1}\geqslant 0}a_{l_1+1}\ldots a_{l_{n-1}+1}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_{n-1},0)\frac{M_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})}{D(x_1,\ldots,x_{n-1})}.$$

Полагая затем $x_{n-1}=0$ и повторяя этот процесс нужное число раз, придем к доказательству теоремы.

Теорема 1.2.6. *При* $|x|<1$, $|x_k|<1$, $k=1,\ldots,n$, *имеет место тождество*

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}M_{2f_1,\ldots,2f_n}(x_1,\ldots,x_n)\,x^{f_1+\ldots+f_n}=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1}.$$

Доказательство. Левая часть доказываемого равенства равна

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}x_{i_1}^{2f_1+n-1}x_{i_2}^{2f_2+n-2}\ldots x_{i_n}^{2f_n}\cdot x^{f_1+\ldots+f_n}=$$

$$=\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}(xx_{i_1}^2)^{f_1}\ldots(xx_{i_n}^2)^{f_n}=$$

$$=\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}}{(1-xx_{i_1}^2)(1-x^2x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\ldots(1-x^nx_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)}. \quad (1.2.13)$$

Мы воспользовались здесь очевидным соотношением: при $|a_\nu|<1$, $\nu=1,2,\ldots,n$,

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}a_1^{f_1}\ldots a_n^{f_n}=$$

$$=(1-a_1)^{-1}(1-a_1a_2)^{-1}\ldots(1-a_1a_2\ldots a_n)^{-1}. \quad (1.2.14)$$

Заменяя в теореме 1.1.1 x_i на $x_i\sqrt{x}$, имеем

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}(\sqrt{x})^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-xx_{i_1}^2)\ldots(1-x^nx_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)}=$$

$$=(\sqrt{x})^{\frac{n(n-1)}{2}}D(x_1,\ldots,x_n)\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1}. \quad (1.2.15)$$

Подставляя это выражение в (1.2.13), получаем утверждение теоремы.

Теорема 1.2.7. *Пусть* $\nu=[n/2]$. *При* $|x|<1$, $|x_k|<1$, $k=1, \ldots, n$, *имеет место тождество*

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0} M_{f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots}(x_1, \ldots, x_n)\, x^{f_1+\ldots+f_\nu}=$$

$$=D(x_1, \ldots, x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1}, \quad (1.2.16)$$

(*при нечетных* n *последний индекс у* $M_{f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots}$ *равен нулю*).

Доказательство. Левая часть (1.2.16) равна

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0}\ \sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} x_{i_1}^{f_1+n-1} x_{i_2}^{f_1+n-2}\ldots x^{f_1+\ldots+f_\nu}=$$

$$=\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}} \sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0}(xx_{i_1}x_{i_2})^{f_1}(xx_{i_3}x_{i_4})^{f_2}\cdot$$

$$=\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}(1-xx_{i_1}x_{i_2})^{-1}(1-x^2x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})^{-}$$

По теореме 1.1.2 это равно

$$D(x_1, \ldots, x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.2.8. *При* $|x|<1$, $|x_k|<1$, $k=1, 2, \ldots, n$, *имеем*

$$\sum_{f=0}^{\infty} M_{f, 0, \ldots, 0}(x_1, \ldots, x_n)\, x^f=D(x_1, \ldots, x_n)\prod_{i=1}^{n}(1-xx_i)^{-1}.$$

Доказательство. Путем несложных преобразований находим

$$\sum_{f=0}^{\infty} M_{f, 0, \ldots, 0}(x_1, \ldots, x_n)\, x^f=$$

$$=\sum_{f=0}^{\infty}\begin{vmatrix}(x_1x)^f x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ (x_nx)^f x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{x_1^{n-1}}{1-xx_1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \dfrac{x_n^{n-1}}{1-xx_n} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1\end{vmatrix}=$$

$$=D(x_1, \ldots, x_n)\prod_{i=1}^{n}(1-xx_i)^{-1}.$$

Теорема 1.2.9.

$$\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{[l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2]!}{l_1!\,l_2!\ldots l_n!}D(l_1, \ldots, l_n)\det\left|x_i^{l_j}\right|_{i, j=1}^{n}=$$

$$=\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{1-x_1-\ldots-x_n}.$$

Доказательство. Полагая в теореме 1.2.2 $f(z)=e^z=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!}$, получаем

$$\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{1}{l_1!\ldots l_n!}\det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n\det\left|x_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n=\det\left|e^{x_iy_j}\right|_1^n.$$

Так как

$$\left[l_1+\ldots+l_n-\frac{n(n-1)}{2}\right]!=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2}\,dt,$$

то

$$\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{[l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2]!}{l_1!\ldots l_n!}\det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n\det\left|x_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n=$$

$$=\int_0^{\infty}t^{-\frac{n(n-1)}{2}}e^{-t}\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{1}{l_1!\ldots l_n!}\det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n\det\left|(tx_i)^{l_j}\right|_{i,j=1}^n dt=$$

$$=\int_0^{\infty}t^{-\frac{n(n-1)}{2}}e^{-t}\det\left|e^{tx_iy_j}\right|_1^n dt.$$

Так как по теореме 1.2.4

$$\lim_{\substack{y_1\to 1\\ \cdots\\ y_n\to 1}}\frac{\det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n}{D(y_1,\ldots,y_n)}=\frac{D(l_1,l_2,\ldots,l_n)}{1!\,2!\ldots(n-1)!},$$

мы получаем, применяя теорему 1.2.4,

$$\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{[l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2]!}{l_1!\ldots l_n!}D(l_1,\ldots,l_n)\det\left|x_i^{l_j}\right|_{i,l=1}^n=$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\int_0^{\infty}t^{-\frac{n(n-1)}{2}}e^{-t}\det\left|e^{x_it}(x_it)^{j-1}\right|_1^n dt=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)\int_0^{\infty}e^{-t+(x_1+\ldots+x_n)t}\,dt=\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{1-x_1-\ldots-x_n},$$

что и требовалось доказать.

Полагая $x_1\to x,\ldots,x_n\to x$, получаем как следствие теорему:

Теорема 1.2.10.

$$\sum_{l_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{l_n=0}^{\infty} \frac{[l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2]!}{l_1!\ldots l_n!} D^2(l_1, \ldots, l_n)\, x^{l_1+\cdots+l_n} = 1!\,2!\ldots n!\,\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1-nx}.$$

Сравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\sum_{l_1+\ldots+l_n=m} \frac{D^2(l_1, \ldots, l_n)}{l_1!\ldots l_n!} = \frac{n^{m-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 1!\,2!\ldots n!}{\left(m-\frac{n(n-1)}{2}\right)!}. \quad (1.2.17)$$

§ 1.3. Тождественные соотношения для $N(f_1, \ldots, f_n)$

В этом параграфе мы получим некоторые тождественные соотношения для $N(f_1, \ldots, f_n)$. Эти тождества являются частным случаем тождеств § 1.4. Однако, основываясь на них, мы лучше поймем, как получить тождества § 1.4.

Теорема 1.3.1. *Пусть $n \geqslant m > 0$. При $|x| < 1$ имеем*

$$\sum_{f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_m \geqslant 0} N(f_1, \ldots, f_m) N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)\, x^{f_1+\cdots+f_m} = (1-x)^{-mn}, \quad (1.3.1)$$

откуда сравнением коэффициентов получаем

$$\sum_{\substack{f_1+\ldots+f_m=f \\ f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_m \geqslant 0}} N(f_1, \ldots, f_m) N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0) = \frac{(mn+f-1)!}{(mn-1)!\,f!}. \quad (1.3.2)$$

Доказательство. Заменяя в теореме 1.2.3 x_i на xx_i и полагая $x_i \to 1$, $y_i \to 1$, получаем (1.3.1).

Теорема 1.3.2. *При $|x| < 1$*

$$\sum_{f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0} N(2f_1, \ldots, 2f_n)\, x^{f_1+\cdots+f_n} = (1-x)^{-\frac{n(n+1)}{2}}, \quad (1.3.3)$$

откуда сравнением коэффициентов получаем

$$\sum_{\substack{f_1+\ldots+f_n=f \\ f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0}} N(2f_1, \ldots, 2f_n) = \frac{[f+n(n+1)/2-1]!}{f!\,[n(n+1)/2-1]!}.$$

Доказательство. Соотношение (1.3.3) легко выводится из теоремы 1.2.6.

Теорема 1.3.3. *При* $|x|<1$

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0} N(f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots)\, x^{f_1+\cdots+f_\nu} = (1-x)^{-\frac{n(n-1)}{2}}, \quad (1.3.4)$$

откуда сравнением коэффициентов получаем

$$\sum_{\substack{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0\\ f_1+\ldots+f_\nu=f}} N(f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots) = \frac{[f+n(n-1)/2-1]!}{f![n(n-1)/2-1]!}\ ^{1)}. \quad (1.3.5)$$

§ 1.4. Тождественные соотношения для характеров

Пусть $f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0$ — целые числа, а

$$A_{f_1,\ldots,f_n}(X) \quad (1.4.1)$$

— представление полной линейной группы $GL(n)$ (т. е. группы всех невырожденных линейных преобразований n-мерного комплексного пространства) с сигнатурой $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ [2]. Предположим, что это представление унитарно для унитарных X. Известно, что (1.4.1) является матрицей, имеющей $N(f_1, \ldots, f_n)$ строк и столбцов. След этой матрицы мы будем обозначать

$$\chi_{f_1,\ldots,f_n}(X) = \operatorname{Sp} A_{f_1,\ldots,f_n}(X).$$

Эта величина называется характером представления (1.4.1).

Предположим, что X — диагональная матрица, $X=\Lambda=[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Тогда, как известно [3],

$$\chi_{f_1,\ldots,f_n}(\Lambda) = \frac{M_{f_1,\ldots,f_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}. \quad (1.4.2)$$

Введем еще следующие два сокращенных обозначения:

$$A_{f,0,\ldots,0}(X) = A^{[f]}(X) = X^{[f]},$$

$$A_{\underbrace{1,\ldots,1}_{f\text{ раз}},0,\ldots,0}(X) = A^{(f)}(X) = X^{(f)}.$$

Теорема 1.4.1. *Пусть* $n\geqslant m>0$, X — *элемент полной линейной группы* $GL(m)$, *а* Y — *элемент группы* $GL(n)$. *Обозна-*

---

[1]) Соотношение (1.3.4.) выводится из теоремы 1.2.7. — *Прим. ред.*

[2]) См. Г. Вейль [2], стр. 181 — *Прим. перев.*

[3]) См. Г. Вейль [2], стр. 276 и след. — *Прим. перев.*

чим через $X \times Y$ кронекеровское произведение X на Y. Тогда

$$\mathrm{Sp}((X\times Y)^{[f]}) = \sum_{\substack{f_1+\ldots+f_m=f\\ f_1\geqslant\ldots\geqslant f_m\geqslant 0}} \chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)\,\chi_{f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0}(Y). \tag{1.4.3}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда X и Y — диагональные матрицы

$$X=[x_1,\ldots,x_m],\quad Y=[y_1,\ldots,y_n].$$

По теореме 1.2.3, заменяя там x_i на xx_i, получаем

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_m\geqslant 0}\chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)\,\chi_{f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0}(Y)\,x^{f_1+\ldots+f_m} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-xx_iy_j)^{-1}. \tag{1.4.4}$$

С другой стороны, по теореме 1.2.8 имеем

$$\sum_{f=0}^{\infty}\mathrm{Sp}(X\times Y)^{[f]}x^f = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-xx_iy_j)^{-1}. \tag{1.4.5}$$

Сравнивая теперь коэффициенты при x^f в (1.4.4) и (1.4.5), получаем утверждение теоремы для нашего частного случая диагональных X и Y.

Так как каждый член ряда в правой части (1.4.3) не меняется при замене X и Y на PXP^{-1} и QYQ^{-1}, то (1.4.3) справедливо и для любых матриц X и Y, которые преобразованием подобия могут быть приведены к диагональному виду. По соображениям непрерывности теорема справедлива и в самом общем случае.

Теорема 1.4.2. *Имеет место тождество*

$$\sum_{\substack{f_1+\ldots+f_n=f\\ f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}}\chi_{2f_1,\ldots,2f_n}(X) = \mathrm{Sp}(X^{[2]})^{[f]}. \tag{1.4.6}$$

Доказательство. Допустим сначала, что $X=[x_1,\ldots,x_n]$. Тогда по теореме 1.2.6 имеем

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\chi_{2f_1,\ldots,2f_n}(X)\,x^{f_1+\ldots+f_n} = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1}.$$

С другой стороны, взяв в теореме 1.2.8 в качестве n и $x_1, \ldots, x_n$ величины $n(n+1)/2$ и $x_i x_j$, $i \leqslant j$, $i, j = 1, \ldots, n$, мы получим

$$\sum_{f=0}^{\infty} \mathrm{Sp}\left((X^{[2]})^{[f]}\right) x^f = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x x_i x_j)^{-1} .$$

Сравнивая коэффициенты и используя те же соображения, что и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем наше утверждение.

Совершенно аналогично получаем и следующую теорему.

Теорема 1.4.3.

$$\sum_{\substack{f_1 + \ldots + f_\nu = f \\ f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_\nu \geqslant 0}} \chi_{f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots}(X) = \mathrm{Sp}\,(X^{(2)})^{[f]} .$$

Глава II

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 2.1. Матричные аналоги интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}$

Теорема 2.1.1. *Если* $\alpha > n/2$, *то*

$$I_n(\alpha) = \int\limits_T \frac{\dot{T}}{(\det(I+T^2))^\alpha} =$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \pi^{\frac{n(n+1)}{4}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{n+\nu}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha-\nu)}. \quad (2.1.1)$$

Здесь $T = (t_{jk})_1^n$ *пробегает все вещественные симметрические матрицы* n*-го порядка, а* $\dot{T} = 2^{n(n-1)/4} \prod\limits_{j \leqslant k} dt_{jk}$.

Предварительно мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 2.1.2. *Пусть* Z — $m \times n$*-матрица (т. е. матрица из* m *строк* n *столбцов). Тогда*

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = \det(I^{(n)} - \bar{Z}'Z). \quad (2.1.2)$$

Кроме того, условия $I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0$ *и* $I^{(n)} - \bar{Z}'Z > 0$ *эквивалентны* ($I^{(m)}$ — *единичная матрица порядка* m).

Доказательство. Хорошо известно, что любую $m \times n$-матрицу Z можно представить в виде

$$Z = U\Lambda V,$$

где U и V — унитарные матрицы порядков m и n соответственно, а $m \times n$-матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \lambda_\nu \geqslant 0.$$

Отсюда следует

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)\dots = \det(I^{(n)} - \bar{Z}'Z).$$

Второе утверждение теоремы получается из того соображения, что оба упомянутые условия эквивалентны условию $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1, \dots$.

Теорема 2.1.3. *Пусть* $a>0$, $b^2-ac<0$, $\alpha>\frac{1}{2}$, *тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha}=a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (2.1.3)$$

Доказательство. Сделаем замену $y=\frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{a}\right)$. Тогда

$$ax^2+bx+c=\frac{ac-b^2}{a}(y^2+1), \qquad dx=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}dy.$$

Значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha}=a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^\alpha}=$$

$$=a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Доказательство теоремы 2.1.1. Положим

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & v' \\ v & t\end{pmatrix} \qquad (t=t_{nn}),$$

где T_1 — вещественная симметрическая матрица порядка $n-1$, v — $n-1$)-мерный вектор, t — вещественное число. Тогда

$$I+T^2=\begin{pmatrix} I+T_1^2+v'v & T_1v'+v't \\ vT_1+tv & 1+vv'+t^2\end{pmatrix}.$$

Так как при $A=A'$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -bA^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b' \\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -bA^{-1} & 1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c-bA^{-1}b'\end{pmatrix}, \quad (2.1.4)$$

то

$$\det(I+T^2)=\det(I+T_1^2+v'v)\times$$
$$\times\{1+vv'+t^2-(vT_1+tv)(I+T_1^2+v'v)^{-1}(T_1v'+v't)\}.$$

Второй множитель в правой части этого равенства может быть записан в виде $at^2+2bt+c$, где

$$a=1-v(I+T_1^2+v'v)^{-1}v',$$

$$2b=-vT_1(I+T_1^2+v'v)^{-1}v'-v(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v'=$$
$$=-2v(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v',$$

$$c=1+vv'-vT_1(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v'.$$

Но симметрическую матрицу T_1 можно представить в виде

$$T_1 = \Gamma' [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}] \Gamma,$$

где Γ — некоторая ортогональная матрица.
Положим

$$T_2 = \Gamma' \left[\sqrt{1+\lambda_1^2}, \ldots, \sqrt{1+\lambda_{n-1}^2}\right] \Gamma.$$

Тогда

$$T_2 = T_2', \quad T_1 T_2 = T_2 T_1, \quad I + T_1^2 = T_2^2.$$

Если положить $v = wT_2$, то мы получим

$$\dot{v} = \det T_2 \cdot \dot{w} = \left(\det\left(I + T_1^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{w}$$

и

$$I + T_1^2 + v'v = T_2 (I + w'w) T_2.$$

Кроме того, если u — $(n-1)$-мерный вектор, то [в силу равенства $(w'w)^2 = w'w(ww')$] имеем

$$u(I + w'w)^{-1} u' = uu' - \frac{(uw')^2}{1 + ww'}$$

и

$$w(I + w'w)^{-1} = \frac{w}{1 + ww'}.$$

Значит,

$$a = 1 - w(I + w'w)^{-1} w' = \frac{1}{1 + ww'},$$

$$b = -w(I + w'w)^{-1} T_1 w' = -\frac{wT_1 w'}{1 + ww'},$$

$$c = 1 + wT_2^2 w' - wT_1 (I + w'w)^{-1} T_1 w' = 1 + ww' + \frac{(wT_1 w')^2}{1 + ww'}.$$

Следовательно,

$$ac - b^2 = 1.$$

По теореме 2.1.3 имеем

$$I_n(\alpha) = \int_T \frac{\dot{T}}{[\det(I + T^2)]^\alpha} =$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{t, v, T_1} \left[\det\left(I + T_1^2 + v'v\right)\right]^{-\alpha} (at^2 + 2bt + c)^{-\alpha} dt\, \dot{v}\, \dot{T}_1 =$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_w (1 + ww')^{1-2\alpha} \dot{w} \int_{T_1} \left[\det\left(I + T_1^2\right)\right]^{\frac{1}{2}-\alpha} \dot{T}_1.$$

Используя формулу $\left(\alpha > \frac{n+1}{4}\right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2\right)^{1-2\alpha} dx_1 \dots dx_{n-1} =$$

$$= \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha - 1)}, \qquad (2.1.5)$$

получаем рекуррентное соотношение

$$I_n(\alpha) = 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha - 1)} I_{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right). \qquad (2.1.6)$$

Применяя $n-1$ раз рекуррентную формулу (2.1.6) и замечая, что

$$I_1\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\alpha - \frac{n-1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right)} \qquad \left(\alpha > \frac{n}{2}\right),$$

мы получаем наше утверждение.

Теорема 2.1.4. *Пусть $n \geqslant 2$. При $\alpha > (2n-3)/4$*

$$J_n(\alpha) = \int_K \frac{\dot{K}}{(\det(1+KK'))^{\alpha}} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\Gamma\left(2\alpha - n + \frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha - n + \nu)}. \qquad (2.1.7)$$

Здесь K пробегает все вещественные кососимметрические матрицы порядка n, а $\dot{K} = 2^{n(n-1)/4} \prod_{i<j} dk_{ij}$.

Доказательство. Запишем K в виде

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & -v' \\ v & 0 \end{pmatrix},$$

где K_1 — $(n-1)$-мерная вещественная кососимметрическая матрица, а v — $(n-1)$-мерный вектор. Тогда

$$I + KK' = \begin{pmatrix} I + K_1K_1' + v'v & K_1v' \\ vK_1' & 1 + vv' \end{pmatrix}.$$

Используя формулу, аналогичную (2.1.4), получаем

$$\det(I + KK') =$$
$$= \left\{1 + vv' - vK_1'(I + K_1K_1' + v'v)^{-1}K_1v'\right\} \det(I + K_1K_1' + v'v).$$

Можно найти такую ортогональную матрицу Γ, что

$$K_1 = \Gamma\left\{\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots\right\}\Gamma',$$

где последнее слагаемое в скобках равно $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{n/2} \\ -\lambda_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$, если n четное, и 0, если n нечетное.

Положим

$$T = \Gamma[\sqrt{1+\lambda_1^2},\quad \sqrt{1+\lambda_1^2},\quad \sqrt{1+\lambda_2^2},\quad \sqrt{1+\lambda_2^2},\ \ldots]\Gamma'.$$

Тогда

$$T = T',\quad K_1 T = T K_1,\quad I + K_1 K_1' = T^2.$$

Сделав замену $v = wT$, имеем

$$\dot{v} = \dot{w}\det T = \dot{w}\left[\det\left(I + K_1 K_1'\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$I + K_1 K_1' + v'v = T^2 + Tw'wT = T\,(I + w'w)\,T.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &1 + vv' - vK_1'\left(I + K_1 K_1' + v'v\right)^{-1} K_1 v' = \\ &= 1 + wT^2 w' - wTK_1' T^{-1}(I + w'w)^{-1} T^{-1} K_1 T w' = \\ &= 1 + wT^2 w' - wK_1'(I + w'w)^{-1} K_1 w' = \\ &= 1 + ww' - \frac{(wK_1 w')^2}{1 + ww'} = 1 + ww'. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_n(\alpha) &= \int\limits_K (\det(I + KK'))^{-\alpha}\dot{K} = \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{K_1} \left(\det\left(I + K_1 K_1'\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\dot{K}_1 \cdot \int\limits_w (1 + ww')^{-2\alpha}\dot{w} = \right. \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha)} J_{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Многократное использование этой формулы приводит нас в конце концов к интегралу

$$\begin{aligned} J_2\left(\alpha - \frac{n-2}{2}\right) &= \sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{n-2\alpha-2}\,dt = \\ &= \sqrt{2}\,\pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(2\alpha - n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha - n + 2)} \qquad \left(\alpha > \frac{2n-3}{4}\right), \end{aligned}$$

и мы получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\alpha > n - \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\boldsymbol{H}_n(\alpha) = \int\limits_{\dot{H}} (\det(I + H^2))^{-\alpha} \dot{H} =$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \pi^{\frac{n^2}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\alpha - j - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - j)} \cdot \prod_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(2\alpha - n - k)}{\Gamma(2\alpha - 2k - 1)}. \quad (2.1.8)$$

Здесь $H = (h_{jk})_1^n$ *пробегает все эрмитовы матрицы,*

$$h_{jj} = h_j, \quad h_{jk} = h'_{jk} + ih''_{jk}, \quad j < k, \quad \dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k} dh'_{jk} dh''_{jk}.$$

Доказательство. Положим

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & \bar{v}' \\ v & h \end{pmatrix}, \quad (h = h_n),$$

где H_1 — эрмитова матрица порядка $n - 1$, v — $(n - 1)$-мерный вектор, h — вещественное число. Тогда

$$I + H^2 = \begin{pmatrix} I + H_1^2 + \bar{v}'v & H_1\bar{v}' + \bar{v}'h \\ vH_1 + hv & 1 + h^2 + v\bar{v}' \end{pmatrix}.$$

С помощью тождества

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -pA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \bar{p}' \\ p & l \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} I & 0 \\ -pA^{-1} & 1 \end{pmatrix}}' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & l - pA^{-1}\bar{p}' \end{pmatrix}, \quad (2.1.9)$$

справедливого для эрмитовой матрицы A, мы получаем

$$\det(I + H^2) = (ah^2 + 2bh + c) \det\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right),$$

где

$$a = 1 - v\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right)^{-1}\bar{v}'.$$

$$2b = -vH_1\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right)^{-1}\bar{v}' - v\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right)^{-1}H_1\bar{v}',$$

$$c = 1 + v\bar{v}' - vH_1\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right)^{-1}H_1\bar{v}'.$$

Так как H_1 — эрмитова матрица, то существует такая унитарная матрица U, что

$$H_1 = U[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]\bar{U}'.$$

Положим

$$T = U\left[\sqrt{1 + \lambda_1^2}, \ldots, \sqrt{1 + \lambda_n^2}\right]\bar{U}'.$$

Тогда

$$T = \bar{T}', \quad TH_1 = H_1T, \quad I + H_1^2 = T^2.$$

Если сделать замену $v = uT$, то

$$\dot{v} = (\det T)^2 \dot{u} = \det\left(I + H_1^2\right) \dot{u},$$

$$I + H_1^2 + \bar{v}'v = T\left(I + \bar{u}'u\right) T.$$

Далее, так как

$$\left(I + \bar{u}'u\right)^{-1} \bar{u}' = \frac{\bar{u}'}{1 + u\bar{u}'}, \qquad w\left(1 + \bar{u}'u\right)^{-1} \bar{w}' = w\bar{w}' - \frac{|w\bar{u}'|^2}{1 + u\bar{u}'},$$

(w — любой $(n-1)$-мерный вектор), то мы получаем

$$a = 1 - u\left(I + \bar{u}'u\right)^{-1} \bar{u}' = \frac{1}{1 + u\bar{u}'} \quad (a > 0),$$

$$b = -uH_1\left(I + \bar{u}'u\right)^{-1} \bar{u}' = -\frac{uH_1\bar{u}'}{1 + u\bar{u}'},$$

$$c = 1 + uT^2\bar{u}' - uH_1\left(I + \bar{u}'u\right)^{-1} H_1\bar{u}' = 1 + u\bar{u}' + \frac{|uH_1\bar{u}'|^2}{1 + u\bar{u}'}.$$

Поскольку $uH_1\bar{u}'$ — вещественное число, то $ac - b^2 = 1$. По теореме 2.1.3 имеем

$$H_n(\alpha) = \int\limits_H \left[\det\left(I + H^2\right)\right]^{-\alpha} \dot{H} =$$

$$= 2^{n-1} \int\limits_{u,\, H_1} \left[\det\left(I + H_1^2\right)\right]^{1-\alpha} \left(1 + u\bar{u}'\right)^{-\alpha} \dot{u}\dot{H}_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(ah^2 + 2bh + c\right)^{-\alpha} dh =$$

$$= 2^{n-1} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_u \left(1 + u\bar{u}'\right)^{1-2\alpha} \dot{u} \cdot \int\limits_{H_1} \left[\det\left(I + H_1^2\right)\right]^{1-\alpha} \dot{H}_1 =$$

$$= 2^{n-1} \pi^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \Gamma(2\alpha - n)}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(2\alpha - 1)} H_{n-1}(\alpha - 1).$$

Применяя последовательно полученную формулу и учитывая, что

$$H_1(\alpha - n + 1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 + x^2\right)^{n-\alpha-1} dx = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - n + 1)}$$

$$\left(\alpha > n - \frac{1}{2}\right),$$

получаем утверждение теоремы.

§ 2.2. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

Теорема 2.2.1. *Пусть Z — $m \times n$-матрица, $\lambda > -1$. Положим*

$$J_{m,n}(\lambda) = \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} [\det(I - Z\bar{Z}')]^{\lambda} \dot{Z},$$

где $\dot{Z} = \prod\limits_{p,q} dx_{pq} dy_{pq}$, $x_{pq} + iy_{pq} = z_{pq}$. *Тогда*

$$J_{m,n}(\lambda) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(\lambda + j) \prod\limits_{k=1}^{m} \Gamma(\lambda + k)}{\prod\limits_{l=1}^{n+m} \Gamma(\lambda + l)} \pi^{mn}. \tag{2.2.1}$$

В частности, при $\lambda = 0$ мы получаем для объема области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ комплексных матриц Z, удовлетворяющих условию $I - Z\bar{Z}' > 0$, выражение

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}) = \frac{1!\,2! \ldots (m-1)!\,1!\,2! \ldots (n-1)!}{1!\,2! \ldots (m+n-1)!} \pi^{mn}. \tag{2.2.2}$$

Сначала мы выведем две рекуррентные формулы для интегралов вида

$$\int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} f(Z) \dot{Z}.$$

1) Представим матрицу Z в виде $Z = (Z_{m,\,n-1},\, q)$, где $Z_{m,\,n-1}$ — $m \times (n-1)$-матрица, а q — столбец. Очевидно, что

$$I - Z\bar{Z}' = I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1} - q\bar{q}'.$$

Из $I - Z\bar{Z}' > 0$ и $q\bar{q}' \geqslant 0$ вытекает, что $I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1} > 0$. Следовательно, существует невырожденная матрица Γ, такая, что

$$I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1} = \Gamma\bar{\Gamma}'.$$

Сделаем замену $q = \Gamma w$. Тогда

$$\dot{q} = |\det \Gamma|^2 \dot{w} = \dot{w} \det \Gamma\bar{\Gamma}' = \dot{w} \det\left(I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1}\right).$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_{-Z\bar{Z}' > 0} f(Z) \dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1} > 0} \det\left(I - Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}\right) \dot{Z}_{m,n-1} \int\limits_{I - w\bar{w}' > 0} f(Z) \dot{w}.$$

Здесь мы использовали формулу

$$I - Z_{m,\,n-1}\overline{Z}'_{m,\,n-1} - q\overline{q}' = \Gamma(I - w\overline{w}')\overline{\Gamma}'.$$

Далее, по теореме 2.1.2 неравенство $I - w\overline{w}' > 0$ эквивалентно неравенству $1 - \overline{w}'w > 0$, которое выделяет в пространстве обычную гиперсферу. Значит,

$$\int\limits_{I - Z\overline{Z}' > 0} f(Z)\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z_{m,\,n-1}\overline{Z}'_{m,\,n-1} > 0} \det\left(I - Z_{m,\,n-1}\overline{Z}'_{m,\,n-1}\right)\dot{Z}_{m,\,n-1} \cdot \int\limits_{1 - \overline{w}'w > 0} f(Z)\,\dot{w}. \qquad (2.2.3)$$

2) Теперь представим Z в виде

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{m-1,n} \\ p \end{pmatrix},$$

где $Z_{m-1,\,n}$ — $(m-1) \times n$-матрица, а p — вектор. Так как неравенство $I - Z\overline{Z}' > 0$ эквивалентно неравенству $I - \overline{Z}'Z > 0$, то совершенно аналогично 1) получаем

$$\int\limits_{I - Z\overline{Z}' > 0} f(Z)\dot{Z} = \int\limits_{I - \overline{Z}'Z > 0} f(Z)\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - \overline{Z}'_{m-1,\,n}Z_{m-1,\,n} > 0} \det\left(I - \overline{Z}'_{m-1,\,n}Z_{m-1,\,n}\right)\dot{Z}_{m-1,\,n} \int\limits_{I - \overline{u}'u > 0} f(Z)\,\dot{u},$$

где $p = u\Gamma$, а $I - \overline{Z}'_{m-1,n}Z_{m-1,n} = \Gamma\overline{\Gamma}'$. Отсюда находим

$$\int\limits_{I - Z\overline{Z}' > 0} f(Z)\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z_{m-1,n}\overline{Z}'_{m-1,n} > 0} \det\left(I - Z_{m-1,\,n}\overline{Z}'_{m-1,\,n}\right)\dot{Z}_{m-1,\,n} \cdot \int\limits_{I - u\overline{u}' > 0} f(Z)\,\dot{u}. \qquad (2.2.4)$$

Доказательство **теоремы 2.2.1.** Повторно применяя (2.2.3), получаем

$$\int\limits_{I - Z\overline{Z}' > 0} f(Z)\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{w_1\overline{w}'_1 < 1} (1 - w_1\overline{w}'_1)^{n-1}\,\dot{w}_1 \int\limits_{w_2\overline{w}'_2 < 1} (1 - w_2\overline{w}'_2)^{n-2}\,\dot{w}_2 \ldots \int\limits_{w_n\overline{w}'_n < 1} f(Z)\,\dot{w}_n. \qquad (2.2.5)$$

Положив $f(Z)=\{\det(I-Z\bar{Z}')\}^{\lambda}$, получим

$$J_{m,n}(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\int\limits_{w\bar{w}'<1}(1-w\bar{w}')^{j-1+\lambda}\,\dot{w}.$$

[Эта формула могла быть получена и с помощью (2.2.4).]

Воспользовавшись хорошо известной формулой

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{2m}^2<1}\ldots\int(1-x_1^2-\ldots-x_{2m}^2)^{\mu-1}\,dx_1\ldots dx_{2m}=\pi^m\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)}$$

$$(\mu>0), \tag{2.2.6}$$

получим утверждение нашей теоремы.

С помощью того же приема, основанного на повторном применении формулы (2.2.4), мы легко докажем следующую теорему.

Теорема 2.2.2. *Пусть Z — $m\times n$-матрица, $m>l$ и функция $f(Z)$ не зависит от последних $m-l$ строк Z. Пусть далее Z_l — матрица, образованная первыми l строками Z, так что $f(Z)=f(Z_l)$. Тогда*

$$\int\limits_{I-Z\bar{Z}'>0}f(Z)\,\dot{Z}=$$

$$=\pi^{n(m-l)}\frac{1!\,2!\ldots(m-l-1)!}{n!\,(n+1)!\ldots(n+m-l-1)!}\int\limits_{I-Z_l\bar{Z}_l'>0}f(Z_l)\left(\det\left(I-Z_l\bar{Z}_l'\right)\right)^{m-l}\dot{Z}_l. \tag{2.2.7}$$

§ 2.3. Полный объем области $\mathfrak{R}_{II}$

Теорема 2.3.1. *Пусть Z — симметрическая матрица порядка n, и*

$$J_n(\lambda)=\int\limits_{I-Z\bar{Z}>0}\{\det(I-Z\bar{Z})\}^{\lambda}\,\dot{Z},$$

где

$$\dot{Z}=\prod_{p\leqslant q}dx_{pq}\,dy_{pq},\qquad x_{pq}+iy_{pq}=z_{pq}.$$

При $\lambda>-1$ имеем

$$J_n(\lambda)=\frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+3)\,\Gamma(2\lambda+5)\ldots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\,\Gamma(2\lambda+n+3)\ldots\Gamma(2\lambda+2n)}. \tag{2.3.1}$$

В частности, при $\lambda = 0$ получаем формулу для объема области $\mathfrak{R}_{II}$ симметрических матриц Z, удовлетворяющих условию $I - Z\bar{Z} > 0$.

$$V(\mathfrak{R}_{II}) = J_n(0) = \frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!} \cdot \frac{2!\,4!\ldots(2n-2)!}{(n+1)!\,(n+2)!\ldots(2n-1)!}. \qquad (2.3.2)$$

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2.3.2. *Пусть a и c — вещественные числа, b — комплексное число, связанные неравенствами $a < 0$, $|b|^2 - ac > 0$, и пусть $\lambda > -1$. Тогда*

$$\iint\limits_{c+b\bar{z}+\bar{b}z+az\bar{z}>0} (c + b\bar{z} + \bar{b}z + az\bar{z})^{\lambda}\, \dot{z} = \frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2 - ac}{|a|}\right)^{\lambda+1} \cdot \frac{\pi}{\lambda+1}. \qquad (2.3.3)$$

Доказательство. Сделав замену

$$w = \left(z + \frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{a^2}{|b|^2 - ac}},$$

получим

$$\dot{w} = \frac{a^2}{|b|^2 - ac}\,\dot{z},$$

$$c + \bar{b}z + \bar{b}z + az\bar{z} = c - \frac{|b|^2}{a} + a\left(z + \frac{b}{a}\right)\overline{\left(z + \frac{b}{a}\right)} =$$

$$= \left(c - \frac{|b|^2}{a}\right)(1 - w\bar{w}).$$

Тогда левая часть (2.3.3) обратится в

$$\frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2 - ac}{|a|}\right)^{\lambda+1} \iint\limits_{1-w\bar{w}>0} (1 - w\bar{w})^{\lambda}\, \dot{w} = \frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2 - ac}{|a|}\right)^{\lambda+1} \cdot \frac{\pi}{\lambda+1},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2.3.1. Положим

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & v' \\ v & z \end{pmatrix},$$

где Z_1 — симметрическая матрица порядка $n-1$, v — $(n-1)$-мерный вектор, а z — комплексное число. Тогда

$$I - Z\bar{Z} = \begin{pmatrix} I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v} & -(Z_1\bar{v}' + v'\bar{z}) \\ -(v\bar{Z}_1 + z\bar{v}) & 1 - v\bar{v}' - z\bar{z} \end{pmatrix}.$$

Используя (2.1.9), находим, что условие $I - Z\bar{Z} > 0$ эквивалентно следующим двум условиям

$$I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v} > 0,$$

$$1 - v\bar{v}' - z\bar{z} - (v\bar{Z}_1 + z\bar{v})(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}\overline{(v\bar{Z}_1 + z\bar{v})}' > 0.$$

Кроме того,

$$\det(I-Z\bar{Z}) = \det(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}) \times$$
$$\times \{1-v\bar{v}'-z\bar{z}-(v\bar{Z}_1+z\bar{v})(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}\overline{(v\bar{Z}_1+z\bar{v})'}\}.$$

Следовательно,

$$J_n(\lambda) = \int\limits_{I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}>0} \{\det(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})\}^{\lambda}\,\dot{Z}_1\dot{v} \times$$
$$\times \iint\limits_{c+b\bar{z}+\bar{b}z+az\bar{z}>0} (c+b\bar{z}+\bar{b}z+az\bar{z})^{\lambda}\,\dot{z},$$

где

$$a = -1-\bar{v}(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}v' \qquad (a<0),$$
$$b = -v\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}v',$$
$$c = 1-v\bar{v}'-v\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}Z_1\bar{v}'.$$

Так как матрица $I-Z_1\bar{Z}_1$ положительно определена, существует невырожденная матрица Γ, такая, что $I-Z_1\bar{Z}_1=\Gamma\bar{\Gamma}'$. Делаем замену $v'=\Gamma u'$. Тогда $v=u\Gamma'$ и

$$\dot{v} = |\det\Gamma|^2\dot{u} = \dot{u}\det(I-Z_1\bar{Z}_1),$$
$$(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1} = \bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}\Gamma^{-1}.$$

Далее, так как

$$(I-u'\bar{u})^{-1}u' = \frac{u'}{1+\bar{u}u'}, \qquad w(I-u'\bar{u})^{-1}\bar{w}' = w\bar{w}' + \frac{|wu'|^2}{1-\bar{u}u'},$$

(w — любой $(n-1)$-мерный вектор), то мы находим

$$a = -\left(1+\bar{u}(I-u'\bar{u})^{-1}u'\right) = -\frac{1}{1-\bar{u}u'},$$
$$b = -u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}u' = -\frac{u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}u'}{1-\bar{u}u'},$$
$$c = 1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}' =$$
$$= 1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}' - \frac{|u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}u'|^2}{1-\bar{u}u'}.$$

Следовательно,

$$|b|^2-ac = \frac{1}{1-\bar{u}u'}\left(1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}'\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\bar{u}u'}\left\{1-u\Gamma'\left(I+\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1)^{-1}Z_1\right)\bar{\Gamma}\bar{u}'\right\} =$$
$$= \frac{1}{1-\bar{u}u'}\left\{1-u\Gamma'(I-\bar{Z}_1Z_1)^{-1}\bar{\Gamma}\bar{u}'\right\} = 1.$$

Значит, по теореме 2.3.2 с помощью формулы

$$\det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v}) = \det(1 - u'\bar{u})\det(I - Z_1\bar{Z}_1) = \\ = (1 - \bar{u}u')\det(I - Z_1\bar{Z}_1),$$

мы имеем

$$J_n(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda+1}\int\limits_{I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}>0} \frac{\{\det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})\}^{\lambda}}{\{1+\bar{v}(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}v'\}^{\lambda+2}}\dot{Z}_1\dot{v} =$$

$$= \frac{\pi}{\lambda+1}\int\limits_{I-Z_1\bar{Z}_1>0}\{\det(I - Z_1\bar{Z}_1)\}^{\lambda+1}\dot{Z}_1 \cdot \int\limits_{1-\bar{u}u'>0}(1 - \bar{u}u')^{2\lambda+2}\dot{u}$$

(по теореме 2.2.2). В силу (2.2.6) получаем

$$J_n(\lambda) = J_{n-1}(\lambda+1)\cdot\frac{\pi^n}{\lambda+1}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+3)}{\Gamma(2\lambda+n+2)}. \tag{2.3.4}$$

Продолжая понижение до $n = 1$, получаем

$$J_n(\lambda) = \frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\ldots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\Gamma(2\lambda+n+3)\ldots\Gamma(2\lambda+2n)}.$$

§ 2.4. Полный объем области $\mathfrak{R}_{III}$

Теорема 2.4.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и Z — кососимметрическая матрица порядка n. Положим*

$$K_n(\lambda) = \int\limits_{I+Z\bar{Z}>0}\{\det(I + Z\bar{Z})\}^{\lambda}\dot{Z},$$

где

$$\dot{Z} = \prod_{p<q} dx_{pq}\,dy_{pq}, \quad x_{pq} + iy_{pq} = z_{pq}.$$

При $\lambda > -\frac{1}{2}$

$$K_n(\lambda) = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\ldots\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n+1)\ldots\Gamma(2\lambda+2n-2)}. \tag{2.4.1}$$

В частности, при $\lambda = 0$ получаем формулу для объема области $\mathfrak{R}_{III}$ кососимметрических матриц Z, удовлетворяющих условию $I + Z\bar{Z} > 0$,

$$V(\mathfrak{R}_{III}) = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{2!\,4!\ldots(2n-4)!}{(n-1)!\,n!\ldots(2n-3)!}. \tag{2.4.2}$$

Доказательство. Положим

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & -u' \\ u & 0 \end{pmatrix},$$

где Z_1—кососимметрическая матрица порядка $n-1$, а u — $(n-1)$-мерный вектор. Тогда

$$I+Z\bar{Z}=\begin{pmatrix} I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u} & -Z_1\bar{u}' \\ u\bar{Z}_1 & 1-u\bar{u}' \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.1.9) условие $I+Z\bar{Z}>0$ эквивалентно следующим двум:

$$I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u}>0, \tag{2.4.3}$$

$$1-u\bar{u}'+u\bar{Z}_1(I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u})^{-1}Z_1\bar{u}'>0. \tag{2.4.4}$$

Кроме того,

$$\det(I+Z\bar{Z})=$$
$$=\left(1-u\bar{u}'+u\bar{Z}_1(I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u})^{-1}Z_1\bar{u}'\right)\det(I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u}).$$

Пусть опять матрица Γ удовлетворяет соотношению $I+Z_1\bar{Z}_1=\Gamma\bar{\Gamma}$ Положим $u=v\Gamma'$. В силу (2.4.3) $I+Z_1\bar{Z}_1>0$ и $I-v'\bar{v}>0$. Левая часть неравенства (2.4.4.) преобразуется к виду

$$1-v\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{v}'+v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I-v'\bar{v})^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{v}'=$$
$$=1-v\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{v}'+v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{v}'-\frac{|v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2}{1-\bar{v}v'}=$$
$$=1-v\bar{v}'-\frac{|v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2}{1-\bar{v}v'}=1-v\bar{v}'.$$

(Здесь мы использовали тот факт, что матрица $\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}$ является кососимметрической.) Следовательно,

$$K_n(\lambda)=\int\limits_{I+Z_1\bar{Z}_1>0}\{\det(I+Z_1\bar{Z}_1)\}^{\lambda+1}\dot{Z}_1\cdot\int\limits_{1-v'\bar{v}>0}(1-v\bar{v}')^{2\lambda}\dot{v}=$$
$$=\pi^{n-1}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+n)}K_{n-1}(\lambda+1).$$

Продолжая понижение, придем к утверждению теоремы, так как

$$K_2(\lambda+n-2)=\iint\limits_{|z|<1}(1-|z|^2)^{2\lambda+2n-4}\dot{z}=\pi\frac{\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+2n-2)}.$$

§ 2.5. Полный объем области $\mathfrak{R}_{IV}$

Область $\mathfrak{R}_{IV}$ (сфера Ли) образована n-мерными комплексными векторами z, удовлетворяющими условиям

$$|zz'|^2+1-2\bar{z}z'>0, \tag{2.5.1}$$

$$|zz'|<1. \tag{2.5.2}$$

Мы покажем, что эти два неравенства можно заменить одним. Запишем сначала неравенства (2.5.1) и (2.5.2) в виде

$$(1-\bar{z}z')^2 > (\bar{z}z')^2 - |zz'|^2 > (\bar{z}z')^2 - 1. \tag{2.5.3}$$

Из (2.5.3) легко следует

$$\bar{z}z' < 1. \tag{2.5.4}$$

Первое из неравенств (2.5.3) (поскольку $\bar{z}z' \geqslant |zz'|$) дает нам

$$1-\bar{z}z' > \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}. \tag{2.5.5}$$

Значит, все векторы z, удовлетворяющие неравенствам (2.5.1) и (2.5.2), должны удовлетворять и неравенству (2.5.5).

С другой стороны, каждый вектор, удовлетворяющий неравенству (2.5.5), очевидно, удовлетворяет и неравенству (2.5.1). Кроме того, из $|zz'| \leqslant \bar{z}z'$ и (2.5.5) мы выводим $|zz'| < 1$, т. е. (2.5.2). Таким образом, области $\mathfrak{R}_{IV}$ можно определять одним неравенством (2.5.5).

Теорема 2.5.1. *При* $\alpha > -1$ *и* $\beta > -(n+\alpha)$

$$L_n(\alpha, \beta) = \int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} \left(1-\bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\alpha} \times$$

$$\times \left(1-\bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\beta} \dot{z} = \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \cdot \frac{1}{\alpha+\beta+n}. \tag{2.5.6}$$

В частности, при $\alpha = \beta = 0$ *мы получаем формулу для объема области* $\mathfrak{R}_{IV}$

$$V(\mathfrak{R}_{IV}) = \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{n!}. \tag{2.5.7}$$

Доказательство. При $n=1$ положим $z = x+iy$, где x и y — действительные числа. Тогда

$$\bar{z}z' = |zz'| = x^2 + y^2,$$

и значит, $\mathfrak{R}_{IV}$ является единичным кругом в комплексной плоскости. Следовательно,

$$L_1(\alpha, \beta) = \iint\limits_{x^2+y^2<1} (1-x^2-y^2)^{\alpha+\beta}\, dx\, dy = \frac{\pi}{\alpha+\beta+1}.$$

Таким образом, при $n=1$ теорема очевидна.

При $n \geqslant 2$ положим $z = x + iy$, где x и y — вещественные векторы. Неравенство (2.5.5) принимает вид

$$1 - xx' - yy' > 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2}. \tag{2.5.8}$$

Значит,

$$L_n(\alpha, \beta) = \int\limits_{x, y} \left(1 - xx' - yy' - 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(1 - xx' - yy' + 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2}\right)^{\beta} \dot{x}\dot{y},$$

где интеграл распространен на область, определяемую неравенством (2.5.8). При каждом фиксированном x найдется ортогональная матрица R с определителем 1 такая, что

$$xR = \left(\sqrt{xx'}, 0, \ldots, 0\right).$$

Положим $yR = (\xi, w)$, где ξ — некоторое действительное число, а w — $(n-1)$-мерный вектор. Тогда (2.5.8) приведется к виду

$$1 - xx' - \xi^2 - ww' > 2\sqrt{xx'(\xi^2 + ww') - xx'\xi^2} = 2\sqrt{xx'ww'}. \tag{2.5.9}$$

Следовательно, после замены интеграл примет вид

$$L_n(\alpha, \beta) = \int\limits_{\xi, w, x} \left(1 - \xi^2 - xx' - ww' - 2\sqrt{xx'ww'}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(1 - \xi^2 - xx' - ww' + 2\sqrt{xx'ww'}\right)^{\beta} d\xi\, \dot{w}\dot{x},$$

где интегрирование проводится по области, определяемой неравенством (2.5.9). Далее, сделав замену $x = u\sqrt{1 - \xi^2}$, $w = v\sqrt{1 - \xi^2}$, мы получим

$$L_n(\alpha, \beta) =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} (1 - \xi^2)^{\alpha + \beta + n - \frac{1}{2}} d\xi \int\limits_{1 - uu' - vv' > 2\sqrt{uu'vv'}} \left(1 - uu' - vv' - 2\sqrt{uu'vv'}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(1 - uu' - vv' + 2\sqrt{uu'vv'}\right)^{\beta} \dot{u}\dot{v} = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} 2^{2n-1} \cdot P, \tag{2.5.10}$$

где

$$P = \int\limits_{\substack{1 - uu' - vv' > 2\sqrt{uu'vv'} \\ u_\mu > 0,\ v_\nu > 0}} \left(1 - uu' - vv' - 2\sqrt{uu'vv'}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(1 - uu' - vv' + 2\sqrt{uu'vv'}\right)^{\beta} \dot{u}\dot{v}.$$

Положим теперь $\eta^2 = uu'$, $\zeta^2 = vv'$. Тогда получим

$$P = \iint\limits_{\substack{\eta+\zeta<1\\ \eta\geqslant 0,\ \zeta\geqslant 0}} (1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha\,(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\,d\eta\,d\zeta \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{u_2^2+\ldots+u_n^2\leqslant\eta^2\\ u_\mu\geqslant 0}} \ldots \int \frac{\eta\,du_2\ldots du_n}{\sqrt{\eta^2-u_2^2-\ldots-u_n^2}} \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{v_3^2+\ldots+v_n^2\leqslant\zeta^2\\ v_\nu\geqslant 0}} \ldots \int \frac{\zeta\,dv_3\ldots dv_n}{\sqrt{\zeta^2-v_3^2-\ldots-v_n^2}}. \qquad (2.5.11)$$

Так как

$$\int\limits_{\substack{u_2^2+\ldots+u_n^2\leqslant\eta^2\\ u_\mu\geqslant 0}} \ldots \int \frac{\eta\,du_2\ldots du_n}{\sqrt{\eta^2-u_2^2-\ldots-u_n^2}} =$$

$$= \eta^{n-1} \int\limits_{\substack{u_2^2+\ldots+u_n^2\leqslant 1\\ u_\mu\geqslant 0}} \ldots \int \frac{du_2\ldots du_n}{\sqrt{1-u_2^2-\ldots-u_n^2}} = \eta^{n-1}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{2^{n-1}}, \qquad (2.5.12)$$

то (2.5.11) дает нам

$$P = \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}}\,2^{-(2n-3)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \iint\limits_{\substack{\eta+\zeta\leqslant 1\\ \eta\geqslant 0,\ \zeta\geqslant 0}} (1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\,\eta^{n-1}\zeta^{n-2}\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}}\,2^{-(2n-3)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \iint\limits_{\substack{\eta+\zeta\leqslant 1\\ 0\leqslant\eta\leqslant\zeta}} (1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha \times$$

$$\times (1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\,\eta^{n-2}\zeta^{n-2}(\eta+\zeta)\,d\eta\,d\zeta$$

или, полагая $\zeta-\eta=\tau$, $\zeta+\eta=\sigma$,

$$P = \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}}\,2^{-(2n-3)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \iint\limits_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma\leqslant 1} (1-\sigma^2)^\alpha(1-\tau^2)^\beta\left(\frac{\sigma+\tau}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right)^{n-2}\sigma\,\frac{d\sigma\,d\tau}{2} =$$

$$= \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}}\,2^{-(4n-6)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^1 (1-\tau^2)^\beta\,d\tau \int\limits_\tau^1 (1-\sigma^2)^\alpha\,(\sigma^2-\tau^2)^{n-2}\sigma\,d\sigma.$$

Делая во внутреннем интеграле замену $\omega = \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}$, $1 - \omega = \frac{1 - \sigma^2}{1 - \tau^2}$, имеем

$$P = \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}} 2^{-(4n-5)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^1 (1-\tau^2)^{\alpha+\beta+n-1} d\tau \int_0^1 (1-\omega)^{\alpha} \omega^{n-2} d\omega =$$

$$= \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}} 2^{-(4n-4)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(\alpha+n)}.$$

Подставляя эту формулу в (2.5.10), получаем

$$L_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{2^{2n-3}} \frac{\pi^{n+\frac{1}{2}}\Gamma(n-1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} =$$

$$= \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \cdot \frac{1}{\alpha+\beta+n}.$$

(Мы воспользовались формулой $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)\,2^{1-2x}$.)

Глава III

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ МАТРИЦ

§ 3.1. Элемент объема пространства унитарных матриц

Если квадратную матрицу Z порядка n рассматривать как точку в $2n^2$-мерном вещественном пространстве, то множество всех унитарных матриц образует в этом пространстве n^2-мерное многообразие. Как это многообразие, так и самое группу унитарных матриц, мы будем обозначать через $\mathfrak{U}_n$. Сейчас мы займемся нахождением элемента объема этого многообразия.

Если $2n^2$-мерное пространство матриц Z рассматривать как обычное эвклидово пространство, то первая квадратичная форма этого пространства может быть записана в виде

$$\mathrm{Sp}\,(dZ\,d\bar{Z}') = \sum_{i,\,j=1}^{n} |\,dz_{ij}\,|^2.$$

Если же $Z = U$ (унитарная матрица), то, так как

$$d\bar{U}' = dU^{-1} = -U^{-1}\cdot dU\cdot U^{-1},$$

мы получаем для первой квадратичной формы многообразия $\mathfrak{U}_n$ выражение

$$ds^2 = -\mathrm{Sp}\left(dU\cdot U^{-1}\cdot dU\cdot U^{-1}\right). \tag{3.1.1}$$

Положим

$$\delta U = U^{-1}\,dU = \bar{U}'\,dU. \tag{3.1.2}$$

Так как

$$0 = dI = d\,(\bar{U}'U) = \bar{U}'\,dU + d\bar{U}'\cdot U,$$

то

$$\overline{\delta U}' = -\delta U. \tag{3.1.3}$$

Следовательно, (3.1.1) можно записать в виде

$$ds^2 = \mathrm{Sp}\,(\delta U\cdot\overline{\delta U}'). \tag{3.1.4}$$

Записывая δU в виде (δu_{jk}), из (3.1.3) находим $\delta u_{jk} = -\overline{\delta u_{kj}}$. Подставляя в (3.1.4), получаем

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{n} |\,\delta u_{jk}\,|^2. \tag{3.1.5}$$

Вводя вещественные величины

$$\delta u_{jj} = i\delta s_j, \quad \delta u_{jk} = \delta s_{jk} + i\delta s'_{jk}, \quad \delta u_{kj} = -\delta s_{jk} + i\delta s'_{jk}, \quad j < k,$$

имеем

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} \delta s_j^2 + 2\sum_{j<k} \left(\delta s_{jk}^2 + \delta s_{jk}'^2\right). \tag{3.1.6}$$

Значит, элемент объема в $\mathfrak{U}_n$ может быть представлен в виде

$$\dot{U} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} \delta s_j \prod_{j<k} \delta s_{jk} \delta s'_{jk}. \tag{3.1.7}$$

Если теперь V и W — две фиксированные унитарные матрицы, то, совершая преобразование

$$U_1 = VUW, \tag{3.1.8}$$

находим

$$\delta U_1 = \overline{W}' \delta U W,$$

откуда

$$\mathrm{Sp}\left(\delta U_1 \cdot \overline{\delta U_1'}\right) = \mathrm{Sp}\left(\overline{W}' \cdot \delta U \cdot \overline{\delta U'} \cdot W\right) = \mathrm{Sp}\left(\delta U \cdot \overline{\delta U'}\right). \tag{3.1.9}$$

Таким образом, мы установили, что элемент объема унитарного пространства инвариантен относительно преобразований вида (3.1.8). Этот факт можно записать в виде

$$\dot{U}_1 = \dot{U}. \tag{3.1.10}$$

Введем теперь параметрическое представление унитарных матриц. Положим

$$U = (I + iH)(I - iH)^{-1}. \tag{3.1.11}$$

Ясно, что матрица H должна быть эрмитовой. Эту матрицу H мы будем называть параметром. Такое представление часто позволяет сделать вычисления интегралов по унитарным матрицам более наглядными. Формула, обратная к (3.1.11), имеет вид

$$H = i(I - U)(I + U)^{-1}. \tag{3.1.12}$$

Легко доказать, что это соответствие между унитарными и эрмитовыми матрицами почти для всех матриц взаимно однозначно. Здесь „почти для всех“ означает, что существует исключительное многообразие меньшей размерности, а именно то, на котором $\det(I + U) = 0$ или $\det(I - iH) = 0$.

Дифференцируя (3.1.11), получаем

$$dU = i\,dH(I - iH)^{-1} + i(I + iH)(I - iH)^{-1}\,dH\,(I - iH)^{-1} =$$
$$= 2i\,(I - iH)^{-1}\,dH\,(I - iH)^{-1}.$$

Значит,

$$\delta U = 2i\,(I + iH)^{-1}\,dH\,(I - iH)^{-1}. \qquad (3.1.13)$$

Отсюда находим

$$\mathrm{Sp}\,(\delta U\,\overline{\delta U'}) = 4\,\mathrm{Sp}\,\{(I + H^2)^{-1}\,dH\,(I + H^2)^{-1}\,dH\}.$$

Таким образом,

$$\dot{U} = 2^{n^2}\{\det(I + H^2)\}^{-n}\,\dot{H}, \qquad (3.1.14)$$

где

$$\dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k} dh'_{jk}\,dh''_{jk},$$

$$H = (h_{jk}), \quad h_{jj} = h_j, \quad h_{jk} = h'_{jk} + ih''_{jk}.$$

При таком представлении многообразие унитарных матриц определяется условиями

$$-\infty < h_j < \infty, \quad -\infty < h'_{jk},\ h''_{jk} < \infty, \qquad (3.1.15)$$

за исключением многообразия меньшей размерности.

Теорема 3.1.1. *Объем многообразия* $\mathfrak{U}_n$ *унитарных матриц равен*

$$\omega_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}.$$

Доказательство. Из (3.1.4) имеем

$$\omega_n = \int_U \dot{U} = 2^{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \{\det(I + H^2)\}^{-n}\,\dot{H}.$$

Но из теоремы (2.1.5) нам известно, что последний интеграл равен

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\pi^{\frac{n^2}{2}}\,\frac{\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma\left(n-j-\frac{1}{2}\right)\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(n-k)}{\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(n-j)\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(2n-2k-1)}.$$

Так как $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)\,2^{1-2x}$, то мы имеем

$$\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(n-j)\,\Gamma\left(n-j-\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{n}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(2n-2j-1)\,2^{2-2n+2j} =$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}}\,2^{-n(n-1)}\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(2n-2k-1),$$

что и доказывает теорему.

Замечание 1. Во многих книгах под элементом объема унитарной группы понимают выражение

$$\prod_{j=1}^{n} \delta s_j \prod_{j<k} \delta s_{jk} \delta s'_{jk},$$

отличающееся от (3.1.7) множителем $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Замечание 2. Исключительные случаи в параметрическом представлении (3.1.11) могут быть устранены путем введения однородных координат для эрмитовых матриц, т. е. использованием методов проективной геометрии, но мы не будем вдаваться в детали этих вопросов.

§ 3.2. Интегралы по пространству классов смежности унитарной группы

Любая унитарная матрица может быть представлена в виде

$$U = V\Lambda V^{-1}, \quad \Lambda = \left[e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\right], \quad 2\pi > \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_n \geqslant 0, \quad (3.2.1)$$

где V — унитарная матрица. Так как $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}$ — собственные значения матрицы U, то матрица Λ определяется однозначно. Если, далее,

$$U = V\Lambda V^{-1} = V_1 \Lambda V_1^{-1}$$

и если собственные значения U различны, то

$$V_1^{-1} V = \left[e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}\right].$$

Все диагональные унитарные матрицы образуют подгруппу группы $\mathfrak{U}_n$. Обозначим через $[\mathfrak{U}_n]$ множество левых классов смежности $\mathfrak{U}_n$ по этой подгруппе. Ясно, что матрицы V и V_1, упомянутые выше, принадлежат к одному и тому же классу смежности, т. е. им соответствует один элемент из $[\mathfrak{U}_n]$. Таким образом, почти каждой матрице U можно поставить во взаимно однозначное соответствие диагональную матрицу Λ и элемент из $[\mathfrak{U}_n]$. Займемся выяснением соотношений между элементами объема $\mathfrak{U}_n$, $[\mathfrak{U}_n]$ и множества диагональных унитарных матриц Λ.

Дифференцируя (3.2.1), находим

$$dU = dV \cdot \Lambda V^{-1} - V\Lambda V^{-1} \cdot dV \cdot V^{-1} + V \cdot d\Lambda \cdot V^{-1},$$

откуда

$$\overline{V}' \cdot dU \cdot V = \delta V \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta V + d\Lambda.$$

Значит,

$$\mathrm{Sp}\,(dU \cdot \overline{dU}') = \mathrm{Sp}\,\{(\delta V \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta V)(\overline{\delta V \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta V})'\} +$$
$$+ \mathrm{Sp}\,\{(\delta V \cdot \Lambda - \Lambda \cdot \delta V)\, \overline{d\Lambda}'\} + \mathrm{Sp}\,\{d\Lambda \cdot (\overline{\delta V \cdot \Lambda - \Lambda \cdot \delta V})'\} + \mathrm{Sp}\,(d\Lambda \cdot \overline{d\Lambda}').$$

Но $\mathrm{Sp}\{(\delta V\cdot\Lambda-\Lambda\cdot\delta V)\,d\overline{\Lambda'}\}=0$, а потому, полагая $\delta V=(\delta v_{jk})$, имеем

$$\mathrm{Sp}(dU\cdot d\overline{U'})=\sum_{j,k=1}^{n}|\delta v_{jk}(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})|^2+\sum_{j=1}^{n}d\theta_j^2.$$

Заметим, что δv_{jj} в формуле исчезают. Обозначим через $\dot V$ элемент объема, образованного векторами δv_{jk} $(j\neq k)$. Элемент объема в $[\mathfrak{U}_n]$ равен $[\dot U]=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\dot V$. Таким образом,

$$\dot U=[\dot U]\cdot\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2\,d\theta_1\ldots d\theta_n. \tag{3.2.2}$$

Теорема 3.2.1. *Объем множества классов смежности* $[\mathfrak{U}_n]$ *равен*

$$\omega'_n=\frac{(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}.$$

Доказательство. Имеем

$$\omega_n=\omega'_n\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{\theta_1}d\theta_2\ldots\int_0^{\theta_{n-1}}\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2\,d\theta_n=$$

$$=\frac{\omega'_n}{n!}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2\,d\theta_1\ldots d\theta_n.$$

Записывая $\prod_{j<k}(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})$ в виде

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n}\delta^{1\ldots n}_{j_1\ldots j_n}e^{i\{(n-1)\theta_{j_1}+(n-2)\theta_{j_2}+\ldots+\theta_{j_{n-1}}\}}$$

(всего $n!$ слагаемых) и используя ортогональность $e^{i(m_1\theta_1+\ldots+m_n\theta_n)}$, получаем

$$\omega_n=(2\pi)^n\,\omega'_n,$$

откуда и следует наше утверждение.

Рассмотрим теперь еще множество $\{\mathfrak{U}_n\}$, состоящее из классов смежности группы $\mathfrak{U}_n$ по ее подгруппе, образованной диагональными матрицами вида $[\pm1,\pm1,\ldots,\pm1]$. Любая унитарная матрица U задается элементом из $[\mathfrak{U}_n]$ и диагональной матрицей $\Lambda=[e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}]$ $(0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\ldots\leqslant\theta_n<2\pi)$. Любой же элемент из $\{\mathfrak{U}_n\}$ может быть задан при помощи элемента из $[\mathfrak{U}_n]$ и диагональной матрицы

$$\Lambda_1=[e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}],\qquad 0\leqslant\theta_1\leqslant\ldots\leqslant\theta_n<\pi.$$

Ясно, что полный объем $\{\mathfrak{U}_n\}$ равен $2^{-n}\omega_n$.

§ 3.3. Полярные координаты эрмитовых матриц

Известно, что любая эрмитова матрица может быть представлена в виде

$$H = U\Lambda\bar{U}', \tag{3.3.1}$$

где U — унитарная матрица, а $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ — диагональная матрица, причем $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Пара матриц (U, Λ) может быть названа полярными координатами эрмитовой матрицы. Матрица Λ соответствует модулю в обычных полярных координатах, а U — аргументу. Однако такое соответствие не является взаимно однозначным. В самом деле, из равенства

$$H = U\Lambda\bar{U}' = U_1\Lambda_1\bar{U}_1'$$

следует только $\Lambda = \Lambda_1$ и $U_1^{-1}U = \left[e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}\right]$ (в случае различных собственных значений H). Таким образом, взаимно однозначное соответствие будет между H и $([\mathfrak{U}_n], \Lambda)$ (за исключением матриц H, имеющих кратные собственные значения, т. е. за исключением многообразия меньшей размерности).

Дифференцируя (3.3.1), получаем

$$dH = dU \cdot \Lambda\bar{U}' + U\,d\Lambda \cdot \bar{U}' + U\Lambda\,d\bar{U}',$$

откуда

$$\bar{U}'\,dH \cdot U = \delta U \cdot \Lambda + d\Lambda - \Lambda\,\delta U,$$

Полагая $\bar{U}' \cdot dH \cdot U = \delta G$ и $\delta G = (\delta g_{jk})$, имеем

$$\delta g_{jj} = d\lambda_j, \quad \delta g_{jk} = \delta u_{jk}(\lambda_k - \lambda_j) \qquad (j \neq k).$$

Отделяя действительную и мнимую части, находим

$$\dot{H} = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 [\dot{U}]\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_n. \tag{3.3.2}$$

Последнее равенство дает нам

$$\{\det(I + H^2)\}^{-n}\dot{H} = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod_{m=1}^{n}\left(1 + \lambda_m^2\right)^{-n}[\dot{U}]\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_n. \tag{3.3.3}$$

Так как $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, мы можем положить $e^{i\theta_j} = \dfrac{1 + i\lambda_j}{1 - i\lambda_j}$, $-\pi < \theta_n \leqslant \ldots \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$. Но

$$\prod_{j<k}\left(e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}\right) = \prod_{j<k} 2i(\lambda_j - \lambda_k)\prod_{m=1}^{n}(1 - i\lambda_m)^{-(n-1)},$$

так что

$$\prod_{j<k}\left|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}\right|^2 = 2^{n(n-1)}\prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod_{m=1}^{n}\left(1 + \lambda_m^2\right)^{-(n-1)}.$$

Теперь из равенства

$$d\theta_j = \frac{2\,d\lambda_j}{(1+\lambda_j^2)}$$

и из (3.1.14) получаем

$$\dot{U} = \prod_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2\, d\theta_1 \ldots d\theta_n \cdot [\dot{U}], \tag{3.3.4}$$

где $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}$ — собственные значения U и $-\pi < \theta_n \leqslant \ldots \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$.

§ 3.4. Полярные координаты произвольных квадратных матриц

Перейдем теперь к понятию полярных координат для произвольных квадратных матриц Z порядка n. Мы знаем, что любая матрица Z может быть представлена в виде

$$Z = U\Lambda V, \tag{3.4.1}$$

где U и V — унитарные матрицы, а $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ — диагональная матрица, причем

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0.$$

Тройку матриц (U, Λ, V) можно назвать полярными координатами матрицы Z. Соответствие между Z и (U, Λ, V) опять-таки не является взаимно однозначным. Однако соответствие между Z и $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ будет взаимно однозначным (за исключением многообразия меньшей размерности). В самом деле, положив

$$Z = U\Lambda V = U_1\Lambda_1 V_1,$$

мы получим, во-первых, что $\Lambda_1 = \Lambda$, так как $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$ являются собственными значениями матрицы $Z\overline{Z}'$. Во-вторых, полагая

$$U_2 = U_1^{-1}U,$$

находим

$$U_2\Lambda^2\overline{U}_2' = \Lambda^2.$$

Следовательно, если у матрицы Z все λ_ν различны, то U_2 — диагональная унитарная матрица, а потому утверждение доказано для таких матриц Z. С другой стороны, матрицы Z, у которых среди λ_ν имеются равные, и, следовательно, $Z\overline{Z}'$ имеют кратные собственные значения, образуют многообразие меньшей размерности.

Замечание. Размерность (вещественная) $\mathfrak{U}_n$ равна n^2, размерность $[\mathfrak{U}_n]$ равна $n(n-1)$, размерность Λ равна n. Значит, размерность $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ равна $2n^2$, что совпадает с размерностью Z.

Вычислим теперь якобиан преобразования (3.4.1). Для большей ясности и удобства мы разобьем эту операцию на несколько шагов.

1) Известно, что любая положительно определенная эрмитова матрица H может быть единственным образом представлена в виде $T\overline{T}'$,

где T — треугольная матрица с положительными диагональными элементами (выше диагонали — нули).

Положим $H=(h_{jk})$

$$h_{jj}=h_j;\quad h_{jk}=h'_{jk}+ih''_{jk},\quad j>k;\quad h_{kj}=\overline{h}_{jk};$$

где h_j, h'_{jk}, h''_{jk} — n^2 действительных чисел. Тогда

$$\dot{H}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}dh_j\prod_{j>k}dh'_{jk}\,dh''_{jk}$$

— элемент объема в пространстве эрмитовых матриц.

Запишем T в виде $T=(t_{jk})$,

$$t_{jj}=t_j;\quad t_{jk}=t'_{jk}+it''_{jk},\quad j>k;\quad t_{jk}=0,\quad j<k,$$

где t_j, t'_{jk}, t''_{jk} — вещественные числа. Пусть

$$\dot{T}=\prod_{j=1}^{n}dt_j\prod_{j>k}dt'_{jk}\,dt''_{jk}$$

— элемент объема в пространстве всех треугольных матриц.

Теорема 3.4.1. *Имеет место равенство*

$$\dot{H}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_{n-1}^3t_n\cdot\dot{T}. \tag{3.4.2}$$

Доказательство. Проведем индукцию. При $n=1$ теорема, очевидно, верна, так как $h_1=t_1^2$. Положим

$$H=\begin{pmatrix}H_1 & \overline{v}'\\ v & h_n\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ \tau & t_n\end{pmatrix}.$$

Из $H=T\overline{T}'$ имеем

$$H_1=T_1\overline{T}'_1,\quad v=\tau\overline{T}'_1,\quad h_n=\tau\overline{\tau}'+t_n^2.$$

Легко убедиться, что якобиан $\dfrac{\partial(v)}{\partial(\tau)}=|\det T_1|^2$ и $\dfrac{\partial h_n}{\partial t_n}=2t_n$. Значит,

$$\prod_{k=1}^{n-1}dh'_{nk}\,dh''_{nk}=|\det T_1|^2\cdot\prod_{k=1}^{n-1}dt'_{nk}\,dt''_{nk}=(t_1\ldots t_{n-1})^2\prod_{k=1}^{n-1}dt'_{nk}\,dt''_{nk}.$$

Согласно индуктивному предположению имеем

$$\begin{aligned}\dot{H}&=2^{n-1}\dot{H}_1\left(\prod_{k=1}^{n-1}dh'_{nk}\,dh''_{nk}\right)dh_n=\\&=2^n(t_1\ldots t_{n-1})^2t_n\dot{H}_1\left(\prod_{k=1}^{n-1}dt'_{nk}\,dt''_{nk}\right)dt_n=\\&=2^n(t_1\ldots t_{n-1})^2t_n\left(2^{\frac{n(n-1)}{2}}t_1^{2(n-2)+1}\ldots t_{n-1}\right)\dot{T}=\\&=2^{\frac{n(n+1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_{n-1}^3t_n\cdot\dot{T}.\end{aligned}$$

2) Для любой невырожденной матрицы Z мы знаем из 1), что существует треугольная матрица T вида, описанного в 1), и такая, что $Z\overline{Z}' = T\overline{T}'$. Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 3.4.2. *Каждая невырожденная матрица Z может быть представлена, и притом единственным образом, в виде $Z = TU$, где U — унитарная матрица, а T — треугольная матрица с положительными диагональными элементами и нулями выше диагонали.*

Доказательство. Так как из $Z\overline{Z}' = T\overline{T}'$ следует $(Z^{-1}T)^{-1} = (\overline{Z^{-1}T})'$, то $Z^{-1}T = U^{-1}$, т. е. $Z = TU$. Поскольку унитарная треугольная матрица с положительными диагональными элементами равна I, то из соотношения

$$Z = TU = T_1U_1$$

мы выводим $T = T_1$ и $U = U_1$.

Теорема 3.4.3. *Элемент объема Z, пользуясь параметрической формой, указанной в теореме 3.4.2, можно записать в виде*

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 t_n \dot{T}\dot{U}, \tag{3.4.3}$$

где $\dot{U}$ — элемент объема пространства унитарных матриц.

Доказательство. Из равенства $Z = TU$ мы получаем

$$dZ = dT \cdot U + T \cdot dU.$$

Меняя строки на столбцы и беря сопряженные величины, имеем также

$$d\overline{Z}' = U^{-1}\,d\overline{T}' + dU^{-1} \cdot \overline{T}' = U^{-1}\,d\overline{T}' - U^{-1}\,dU \cdot U^{-1}\overline{T}'.$$

Положим $\delta U = dU \cdot U^{-1}$ и $dP = dZ \cdot U^{-1}$, $dQ = U\,d\overline{Z}'$. Тогда

$$\begin{cases} dP = dT + T\,\delta U, \\ dQ = d\overline{T}' - \delta U \cdot \overline{T}' \end{cases} \tag{3.4.4}$$

(хотя здесь δU не то же, что в § 3.1, но свойства те же). Записывая $\delta U = (dv_{jk})$ и сравнивая соответствующие элементы в (3.4.4), имеем

$$dp_{jk} = dt_{jk} + \sum_{s=1}^{j} t_{js}\,dv_{sk}, \qquad j > k, \tag{3.4.5}$$

$$dq_{jk} = d\overline{t}_{kj} - \sum_{s=1}^{k} \overline{t}_{ks}\,dv_{js}, \qquad j < k, \tag{3.4.6}$$

$$dp_{jj} = dt_j + \sum_{s=1}^{j} t_{js}\,dv_{sj}, \tag{3.4.7}$$

$$dp_{jk} = \sum_{s=1}^{j} t_{js}\, dv_{sk}, \qquad j < k, \tag{3.4.8}$$

$$dq_{jk} = -\sum_{s=1}^{k} \bar{t}_{ks}\, dv_{js}, \qquad j > k, \tag{3.4.9}$$

$$dq_{jj} = dt_j - \sum_{s=1}^{j} \bar{t}_{js}\, dv_{js}. \tag{3.4.10}$$

Вычитая (3.4.10) из (3.4.7), получаем

$$d(p_{jj} - q_{jj}) = 2t_j\, dv_{jj} + \sum_{s=1}^{j-1} (t_{js}\, dv_{sj} + \bar{t}_{js}\, dv_{js}). \tag{3.4.11}$$

Займемся теперь вычислением следующего якобиана J:

$$\left| \frac{\partial \{p_{jk}(j>k), q_{jk}(j<k), p_{jj}(1 \leqslant j \leqslant n), p_{jk}(j<k), q_{jk}(j>k), p_{jj} - q_{jj}(1 \leqslant j \leqslant n)\}}{\partial \{t_{jk}(j>k), \bar{t}_{kj}(j<k), t_j, v_{jk}(1 \leqslant j, k \leqslant n)\}} \right|$$

Из (3.4.8), (3.4.9) и (3.4.11) благодаря отсутствию dt_{jk}, $d\bar{t}_{jk}$, dt_j имеем

$$J = \left| \frac{\partial \{p_{jk}(j<k), q_{jk}(j>k), p_{jj} - q_{jj}(1 \leqslant j \leqslant n)\}}{\partial \{v_{jk}(1 \leqslant j, k \leqslant n)\}} \right|.$$

Заметим, что в (3.4.8) встречаются лишь $dv_{pq}(p<q)$, а в (3.4.9) — лишь $dv_{pq}(p>q)$. Значит, dp_{jk} $(j<k)$ и dq_{jk} $(j>k)$ — линейные преобразования соответственно dv_{pq} $(p<q)$ и dv_{pq} $(p>q)$. Матрицы этих преобразований треугольные, и их определители равны $t_1^{n-1} t_2^{n-2} \ldots t_{n-1}$. Значит,

$$J = 2^n \cdot t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 t_n.$$

Так как

$$\left| \frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(x, y)} \right| = 2,$$

то

$$\left| \frac{\partial(p_{jk}, q_{jk})}{\partial(t'_{jk}, t''_{jk}, t_j, v_{jk})} \right| = 2^{n(n-1)} \left| \frac{\partial(p_{jk}, q_{jk})}{\partial(t_{jk}, \bar{t}_{jk}, t_j, v_{jk})} \right|.$$

Непосредственно имеем

$$\left| \frac{\partial(P, Q)}{\partial(T, V)} \right| = 2^{n^2} t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 \cdot t_n.$$

Далее, так как

$$\left| \frac{\partial(Z, \bar{Z})}{\partial(P, Q)} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial(Z, \bar{Z})}{\partial(X, Y)} \right| = 2^{n^2}.$$

мы получаем, наконец,

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 t_n \cdot \dot{T}\dot{U}.$$

3) Элемент объема в полярных координатах.

Теорема 3.4.4. *Соотношение между элементами объема в обеих системах координат Z и $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ дается формулой*

$$\dot{Z} = 2^{-n^2} D^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \dot{U}\,[\dot{U}]. \qquad (3.4.12)$$

Доказательство. Положив $Z\bar{Z}' = T\bar{T}' = H$, из теоремы 3.4.3 получим

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 t_n \dot{T}\dot{U},$$

следовательно, в силу теоремы 3.4.1 имеем

$$\dot{Z} = 2^{-n^2} \dot{H}\dot{U}.$$

Отсюда согласно (3.3.2)

$$\dot{Z} = 2^{-n^2} D^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \cdot \dot{U}\,[\dot{U}].$$

§ 3.5. Полярные координаты симметрических матриц

Если Z — симметрическая матрица с комплексными элементами, то, как доказано автором (Хуа Ло-кен [1]), ее можно представить в виде

$$Z = U\Lambda U', \qquad (3.5.1)$$

где U — унитарная, а $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ — диагональная матрица, причем $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Обозначим через $\{\mathfrak{U}_n\}$ множество левых классов смежности группы унитарных матриц $\mathfrak{U}_n$ по подгруппе диагональных матриц вида $[\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1]$. Легко показать, что соответствие между Z и $\{\mathfrak{U}_n\} \times \Lambda$ почти для всех матриц взаимно однозначно.

Дифференцируя (3.5.1), получаем

$$dZ = dU\Lambda U' + U\, d\Lambda \cdot U' + U\Lambda\, dU'.$$

$$\bar{U}'\, dZ\bar{U} = \delta U\Lambda + d\Lambda + \Lambda\, \delta U'.$$

(Здесь обозначено $\delta U = \bar{U}'\, dU$.) Отсюда имеем

$$\mathrm{Sp}\,(dZ\, d\bar{Z}') = \mathrm{Sp}\,(\bar{U}'\, dZ \cdot U\bar{U}' \cdot d\bar{Z}' \cdot U) =$$

$$= \mathrm{Sp}\,\{(\delta U \cdot \Lambda + d\Lambda + \Lambda\, \delta U')(\Lambda\, \delta\bar{U}' + d\Lambda + \delta\bar{U} \cdot \Lambda)\} =$$

$$= \mathrm{Sp}\,(d\Lambda \cdot d\Lambda) + \mathrm{Sp}\,\{(\delta U \cdot \Lambda + \Lambda\, \delta U')(\Lambda\, \delta\bar{U}' + \delta\bar{U} \cdot \Lambda)\}.$$

Положим

$$\delta U \cdot \Lambda + \Lambda\, \delta U' = (dg_{jk}), \qquad (dg_{jk} = dg_{kj}),$$

тогда

$$\mathrm{Sp}\,(dZ \cdot d\bar{Z}') = \sum_{j=1}^{n} d\lambda_j^2 + \sum_{j=1}^{n} |\, dg_{jj}\,|^2 + 2 \sum_{j<k} |\, dg_{jk}\,|^2,$$

где

$$dg_{jk} = \lambda_k\, \delta u_{jk} + \lambda_j\, \delta u_{kj}, \qquad j < k,$$

$$dg_{jj} = 2i\lambda_j\, \delta u_{jj}.$$

Чтобы определить теперь элемент объема $\{\dot{U}\}$ множества $\{\mathfrak{U}_n\}$, положим $\delta u_{jk} = \delta u'_{jk} + i\, \delta u''_{jk}$. Мы имеем

$$\{\dot{U}\} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} \delta u''_{jj} \prod_{j<k} \delta u'_{jk} \cdot \delta u''_{jk}.$$

Следовательно,

$$\dot{Z} = 2^n \prod_{j<k} |\lambda_j^2 - \lambda_k^2|\, \lambda_1 \ldots \lambda_n\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n\, \{\dot{U}\}. \tag{3.5.2}$$

Рассмотрим еще полярные координаты вещественных симметрических матриц. Любая вещественная симметрическая матрица T может быть представлена в виде

$$T = \Gamma \Lambda \Gamma', \tag{3.5.3}$$

где Γ — вещественная ортогональная матрица с определителем $+1$, а

$$\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n], \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n.$$

Легко видеть, что имеет место, вообще говоря, взаимно однозначное соответствие между вещественными симметрическими матрицами и $\{O\} \times \Lambda$, где $\{O\}$ — множество левых классов смежности группы ортогональных матриц с определителем $+1$, по подгруппе, состоящей из диагональных матриц вида $[\pm 1, \ldots, \pm 1]$.

Дифференцируя (3.5.3), получаем

$$\Gamma'\, dT\, \Gamma = \delta\Gamma \cdot \Lambda + d\Lambda - \Lambda\, \delta\Gamma.$$

Здесь $\delta\Gamma = \Gamma^{-1} d\Gamma$ — кососимметрическая матрица, так что

$$\mathrm{Sp}\,(dT \cdot dT') = \mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta\Gamma)(\delta\Gamma \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta\Gamma)\} + \mathrm{Sp}\,(d\Lambda \cdot d\Lambda').$$

Положим $[\dot{O}] = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \delta\gamma_{ij}$. Используя те же соображения, что и

раньше, находим

$$\dot{T} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n [\dot{O}]. \qquad (3.5.4)$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех симметрических унитарных матриц S. Будем искать элемент объема $\mathfrak{S}$, инвариантный относительно преобразований

$$S_1 = USU', \qquad (3.5.5)$$

где U — унитарная матрица.

Положим

$$S = (I + iT)(I - iT)^{-1} \qquad (3.5.6)$$

и назовем матрицу T параметром матрицы S. Из унитарности S следует, что T эрмитова матрица; из симметричности S вытекает, что матрица T также симметрична. Значит $T = T' = \bar{T}'$, т. е. T — вещественная симметричная матрица. Формула, обратная к (3.5.6), имеет вид

$$T = i(I - S)(I + S)^{-1}. \qquad (3.5.7)$$

Формулы (3.5.6) и (3.5.7) устанавливают между S и T соотношение, которое почти для всех матриц взаимно однозначно. (Исключительные матрицы образуют многообразие, размерность которого меньше, чем $\frac{n(n+1)}{2}$).

Если матрица S переводится преобразованием (3.5.5) в матрицу S_1, то матрица T переходит в некоторую матрицу T_1. Найдем связь между T и T_1. Отделим в матрице U действительную и мнимую часть

$$U = A + Bi. \qquad (3.5.8)$$

Так как $U\bar{U}' = I$, то вещественные матрицы A и B удовлетворяют соотношениям

$$AA' + BB' = I, \quad AB' = BA'. \qquad (3.5.9)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} S_1 = USU' &= (A + Bi)(I + iT)(I - iT)^{-1}\bar{U}^{-1} = \\ &= [(A - BT) + (B + AT)i](I - iT)^{-1}(A - iB)^{-1} = \\ &= \left[I + i(B + AT)(A - BT)^{-1}\right]\left[I - i(B + AT)(A - BT)^{-1}\right]^{-1}, \end{aligned}$$

то

$$T_1 = (AT + B)(-BT + A)^{-1}. \qquad (3.5.10)$$

Из (3.5.9) очевидным образом следует, что

$$(AT + B)(-BT + A)^{-1} = (-TB' + A')^{-1}(TA' + B'). \qquad (3.5.11)$$

Дифференцируя (3.5.10) и используя соотношение (3.5.11), получаем

$$\begin{aligned} dT_1 &= A\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}+(AT+B)(-BT+A)^{-1}B\,dT\times \\ &\times(-BT+A)^{-1}=A\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}+(-TB'+A')^{-1}\times \\ &\times(TA'+B')B\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}=(-TB'+A')^{-1}\times \\ &\times[(-TB'+A')A+(TA'+B')B]\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}= \\ &=[(-BT+A)']^{-1}\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}. \qquad (3.5.12) \end{aligned}$$

С помощью (3.5.9) и (3.5.11) находим

$$\begin{aligned} I+T_1^2 &= I+(-TB'+A')^{-1}(TA'+B')(AT+B)(-BT+A)^{-1}= \\ &=[(-BT+A)']^{-1}[(-TB'+A')(-BT+A)+ \\ &+(TA'+B')(AT+B)](-BT+A)^{-1}= \\ &=[(-BT+A)']^{-1}(I+T^2)(-BT+A)^{-1}. \qquad (3.5.13) \end{aligned}$$

Из (3.5.12) получаем

$$\dot{T}_1=\{\det(-BT+A)\}^{-(n+1)}\,\dot{T},$$

а из (3.5.13) имеем

$$\det\left(I+T_1^2\right)=\det\left(I+T^2\right)\{\det(-BT+A)\}^{-2}.$$

Значит,

$$\left\{\det\left(I+T_1^2\right)\right\}^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\dot{T}_1=\{\det(I+T^2)\}^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\dot{T}. \qquad (3.5.14)$$

Методом, аналогичным изложенному в § 3.1, мы получаем

$$\dot{S}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\{\det(I+T^2)\}^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\dot{T}, \qquad (3.5.15)$$

где $\dot{T}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod\limits_{j\leqslant k}dt_{jk}$. Очевидно, что $\dot{S}=\dot{S}_1$, т. е. это — инвариантный элемент объема. На основании теоремы 2.1.1 мы получаем, что полный объем $\mathfrak{S}$ равен

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{S}}\dot{S} &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\int\limits_{T}\{\det(I+T^2)\}^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\dot{T}= \\ &=2^n\cdot 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\cdot\pi^{\frac{n(n+1)}{4}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n-\nu+1)}. \end{aligned}$$

Применяя (3.5.4), мы преобразуем выражение для $\dot{S}$ к виду

$$\dot{S}=2^n\cdot 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\lambda_\nu^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}\cdot d\lambda_1\ldots d\lambda_n\cdot\{\dot{O}\}. \tag{3.5.16}$$

Положим $e^{i\theta_\nu}=(1+i\lambda_\nu)(1-i\lambda_\nu)^{-1}$. Поскольку $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$, мы можем считать, что $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\ldots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$. Легко проверить, что

$$e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}=\frac{2i(\lambda_\nu-\lambda_\mu)}{(1-i\lambda_\nu)(1-i\lambda_\mu)},$$

а потому

$$\left|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}\right|=\frac{2|\lambda_\nu-\lambda_\mu|}{\left(1+\lambda_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\lambda_\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

откуда получаем

$$\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}\right|=\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{\nu<\mu}|\lambda_\nu-\lambda_\mu|}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\lambda_\nu^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{3.5.17}$$

С другой стороны, имеем

$$d\theta_\nu=\left(\frac{1}{1+i\lambda_\nu}+\frac{1}{1-i\lambda_\nu}\right)d\lambda_\nu=\frac{2}{1+\lambda_\nu^2}\,d\lambda_\nu. \tag{3.5.18}$$

Комбинируя (3.5.16), (3.5.17) и (3.5.18), мы получаем еще одно выражение для $\dot{S}$

$$\dot{S}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}\right|d\theta_1\ldots d\theta_n\{\dot{O}\}. \tag{3.5.19}$$

Замечание. Из рассуждений, приведенных в этом параграфе, вытекает следующий результат: любая симметричная унитарная матрица может быть представлена в виде

$$S=\Gamma\Lambda\Gamma',$$

где Γ — вещественная ортогональная матрица с определителем, равным 1, а $\Lambda=\left[e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2},\ \ldots,\ e^{i\theta_n}\right]$, причем $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\ldots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$ [1]).

---

[1]) Для доказательства достаточно использовать (3.5.6) и (3.5.3). — *Прим. ред.*

§ 3.6. Полярные координаты кососимметрических матриц

Автором было доказано (Хуа Ло-кен [1]), что любая кососимметрическая матрица Z с комплексными элементами может быть представлена в виде

$$Z = UMU', \tag{3.6.1}$$

где U — унитарная матрица, а

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\nu \geqslant 0.$$

Здесь при n четном последнее слагаемое равно $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_\nu \\ -\lambda_\nu & 0 \end{pmatrix}$, а при нечетном — сумма оканчивается на $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_\nu \\ -\lambda_\nu & 0 \end{pmatrix} \dotplus 0 \left(\nu = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

Отметим также, что при нечетном n любая кососимметрическая унитарная матрица представима в виде

$$K = \Gamma F \Gamma', \tag{3.6.2}$$

где Γ — вещественная ортогональная матрица с определителем, равным 1, а

$$F = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ -e^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_2} \\ -e^{i\theta_2} & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots, \quad \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_\nu \geqslant 0.$$

При четном n любая кососимметрическая унитарная матрица также представима в виде (3.6.2), но лишь при условии, что определитель Γ может быть как $+1$, так и -1. Стоит упомянуть, что при замене в (3.6.2) вещественных параметров комплексными мы получаем представление многообразия вещественной размерности $n(n-1)$, образованного кососимметрическими матрицами.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество матриц, представимых в виде (3.6.2). Если $\Gamma F \Gamma' = \Gamma_1 F_1 \Gamma_1'$, то $F = F_1$, и если, кроме того, среди чисел $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}$ нет равных, то $\Gamma = \Gamma_1 \Delta$, где

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 & \sin\delta_1 \\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \cos\delta_2 & \sin\delta_2 \\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2 \end{pmatrix} \dotplus \ldots \tag{3.6.3}$$

Здесь сумма оканчивается на

$$\begin{pmatrix} \cos\delta_\nu & \sin\delta_\nu \\ -\sin\delta_\nu & \cos\delta_\nu \end{pmatrix} \quad \text{или на} \quad \begin{pmatrix} \cos\delta_\nu & \sin\delta_\nu \\ -\sin\delta_\nu & \cos\delta_\nu \end{pmatrix} \dotplus 1$$

$\left(\nu = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ в зависимости от того, является ли n четным или нечетным.

Обозначим через Γ группу ортогональных матриц с определителем $+1$, через Δ группу матриц вида (3.6.3), а через $\Sigma = \Gamma/\Delta$ —

множество левых классов смежности группы Γ по ее подгруппе Δ. Тогда соответствие между $\mathfrak{K}$ и $\Sigma \times F$ будет почти для всех матриц взаимно однозначным.

Дифференцируя (3.6.2), получаем

$$dK = d\Gamma \cdot F\Gamma' + \Gamma\, dF \cdot \Gamma' + \Gamma F\, d\Gamma'.$$

Положим $\delta\Gamma = \Gamma'\, d\Gamma$. Тогда

$$\Gamma'\, dK\, \Gamma = \delta\Gamma\, F + dF - F\, \delta\Gamma$$

и

$$\Gamma'\, d\bar{K}'\, \Gamma = -\bar{F}'\, \delta\Gamma + \delta\Gamma\, \bar{F}' + d\bar{F}'.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,(dK\, d\bar{K}') &= \mathrm{Sp}\,(\Gamma'\, dK\, \Gamma \cdot \Gamma'\, d\bar{K}' \cdot \Gamma) = \\ &= \mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma\, F - F\, \delta\Gamma)(\delta\Gamma\, \bar{F}' - \bar{F}'\, \delta\Gamma)\} + \mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma\, F - F\, \delta\Gamma)\, d\bar{F}'\} + \\ &+ \mathrm{Sp}\,\{dF\,(-\bar{F}'\, \delta\Gamma + \delta\Gamma\bar{F}')\} + \mathrm{Sp}\,(dF\, d\bar{F}'). \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

Так как

$$dF = iF\,[d\theta_1,\ d\theta_1,\ d\theta_2,\ d\theta_2,\ \ldots],$$

мы имеем

$$\mathrm{Sp}\,(dF\, d\bar{F}') = 2\left(d\theta_1^2 + d\theta_2^2 + \ \ldots\ + d\theta_\nu^2\right) \quad (\nu = [n/2]). \tag{3.6.5}$$

Кроме того, поскольку $dF\, \bar{F}' = \bar{F}'\, dF$, мы имеем

$$\mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma\, F - F\, \delta\Gamma)\, d\bar{F}'\} = \mathrm{Sp}\,(\delta\Gamma \cdot F \cdot d\bar{F}') - \mathrm{Sp}\,(\delta\Gamma \cdot d\bar{F}' \cdot F) = 0 \tag{3.6.6}$$

и

$$\mathrm{Sp}\,\{dF\,(-\bar{F}'\, \delta\Gamma + \delta\Gamma\, \bar{F}')\} = 0. \tag{3.6.7}$$

Далее,

$$\mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma\, F - F\, \delta\Gamma)(\delta\Gamma\, \bar{F}' - \bar{F}'\, \delta\Gamma)\} = 2\,\mathrm{Sp}\,(\delta\Gamma\, F\, \delta\Gamma\, \bar{F}') - 2\,\mathrm{Sp}\,((\delta\Gamma)^2\, \bar{F}' F). \tag{3.6.8}$$

Следовательно, из (3.6.4) и (3.6.8) мы получаем

$$\mathrm{Sp}\,(dK \cdot d\bar{K}') = 2\,\mathrm{Sp}\,(\delta\Gamma \cdot F \cdot \delta\Gamma \cdot \bar{F}') - 2\,\mathrm{Sp}\,((\delta\Gamma)^2\, \bar{F}' F) + 2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2. \tag{3.6.9}$$

Формально мы имеем квадратичную форму от $\frac{n(n-1)}{2} + \nu$ дифференциалов $\delta\gamma_{\alpha\beta}$, $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n$ и $d\theta_1, d\theta_2, \ldots, d\theta_\nu$, но фактически $\delta\gamma_{12}, \delta\gamma_{34}, \ldots$ отсутствуют. Другими словами, мы имеем квадратичную форму лишь от $\frac{n(n-1)}{2} + \nu - \nu = \frac{n(n-1)}{2}$ дифференциалов. Мы займемся вычислением ее дискриминанта (т. е. элемента объема).

Теорема 3.6.1 *Элемент объема многообразия $\mathfrak{K}$ в полярных координатах равен*

$$\dot{K} = \varkappa_n \cdot \prod_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) \cdot \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha \cdot \dot{\Sigma}, \tag{3.6.10}$$

где

$$\varkappa_n = \begin{cases} 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{\nu}{2}}, & n = 2\nu \\ 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{3\nu}{2}}, & n = 2\nu+1, \end{cases}$$

а $\dot{\Sigma}$ — *элемент объема в пространстве классов смежности* $\Sigma = \Gamma/\Delta$. *Более точно,* $\dot{\Sigma}$ *равно произведению всех* $\delta\gamma_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *за исключением* $\delta\gamma_{12}$, $\delta\gamma_{34}$, ... (*число которых равно* $\nu = [n/2]$).

Доказательство. Пусть сначала $n = 2\nu$ — четное число. Разобьем F и $\delta\Gamma$ на клетки, состоящие из матриц второго порядка

$$\delta\Gamma = (\delta\Gamma_{\alpha\beta})_1^{\nu}, \qquad (\delta\Gamma_{\alpha\beta})' = -(\delta\Gamma_{\beta\alpha})$$

и

$$F = F_1 \dotplus F_2 \dotplus \ldots \dotplus F_\nu,$$

где

$$F_\alpha = e^{i\theta_\alpha} \cdot F_0, \qquad \overline{F}'_\alpha = -e^{-i\theta_\alpha} F_0, \qquad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в (3.6.9), получаем

$$\operatorname{Sp}(dK \cdot d\overline{K}') =$$

$$= 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu} \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot F_\beta \cdot \delta\Gamma_{\beta\alpha} \cdot \overline{F}'_\alpha) - 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu} \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta}\,\delta\Gamma_{\beta\alpha}) + 2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2 =$$

$$= -2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} \{\operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\alpha} \cdot F_0 \cdot \delta\Gamma_{\alpha\alpha} \cdot F_0) + \operatorname{Sp}((\delta\Gamma_{\alpha\alpha})^2)\} +$$

$$+ 4 \sum_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \nu} \{\operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot \delta\Gamma'_{\alpha\beta}) + \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot F_0 \cdot \delta\Gamma'_{\alpha\beta} \cdot F_0)\} +$$

$$+ 2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2. \qquad (3.6.11)$$

Во-первых,

$$\delta\Gamma_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем

$$\operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\alpha} \cdot F_0 \cdot \delta\Gamma_{\alpha\alpha} \cdot F_0) + \operatorname{Sp}((\delta\Gamma_{\alpha\alpha})^2) = 0. \qquad (3.6.12)$$

Далее положим

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$4 \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot \delta\Gamma'_{\alpha\beta}) + 4 \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot F_0 \cdot \delta\Gamma'_{\alpha\beta} \cdot F_0) =$$

$$= 4\{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)(bc - ad)\}. \qquad (3.6.13)$$

Мы получили квадратичную форму от четырех переменных a, b, c и d. Ее дискриминант равен

$$4^4 \sin^4(\theta_\beta - \theta_\alpha).$$

Из (3.6.12) и (3.6.13) мы видим, что (3.6.11) является квадратичной формой от $4\frac{1}{2}\nu(\nu-1)+\nu=\frac{n(n-1)}{2}$ переменных, и ее дискриминант равен

$$2^\nu 4^{2\nu(\nu-1)} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^4(\theta_\beta - \theta_\alpha).$$

Отсюда следует, что элемент объема $\mathfrak{K}$ равен

$$2^{\frac{\nu}{2}+2\nu(\nu-1)} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^4(\theta_\beta - \theta_\alpha) \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha \dot{\Sigma}. \tag{3.6.14}$$

Перейдем теперь к случаю, когда $n=2\nu+1$ — нечетное число Представим $\delta\Gamma$ и F в виде

$$\delta\Gamma = \begin{pmatrix} \delta\Gamma_1 & \delta v \\ -\delta v' & 0 \end{pmatrix}, \quad F = F_1 \dotplus 0.$$

Подставляя в (3.6.9), получаем

$$\mathrm{Sp}(dK\, d\overline{K}') = 2\,\mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1 F_1 & 0 \\ -\delta v' F_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1 \overline{F}_1' & 0 \\ -\delta v' \overline{F}_1' & 0 \end{pmatrix}\right\} -$$

$$-2\,\mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1\,\delta\Gamma_1 - \delta v\,\delta v' & \delta\Gamma_1\,\delta v \\ -\delta v'\,\delta\Gamma_1 & -\delta v'\,\delta v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2 =$$

$$= 2\,\mathrm{Sp}(\delta\Gamma_1 F_1 \delta\Gamma_1 \overline{F}_1') - 2\,\mathrm{Sp}((\delta\Gamma_1)^2) + 2\,\mathrm{Sp}(\delta v \cdot \delta v') + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2.$$

Используя результат, полученный для четных n, мы находим, что для нечетного n элемент объема $\mathfrak{K}$ равен

$$2^\nu\, 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{\nu}{2}} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha \cdot \dot{\Sigma}. \tag{3.6.15}$$

Рассмотрим теперь множество кососимметрических матриц вида

$$K = U D U', \tag{3.6.16}$$

где U — унитарная матрица, а

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots$$

[последний член суммы есть $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ или 0 в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным]. Для четных n множество матриц вида (3.6.16) совпадает с множеством матриц вида (3.6.2). Но для нечетного n положение иное. Ясно, что множество матриц вида (3.6.2) имеет размерность $\frac{1}{2}n(n-1)$, а относительно (3.6.16) нетрудно доказать, что размерность множества матриц этого вида равна $\frac{1}{2}n(n+1)-1$.

§ 3.7. Объем пространства вещественных ортогональных матриц и применения

В заключение главы мы найдем элемент объема и полный объем множества матриц, образующих вещественную ортогональную группу, используя тот же метод, что и в предыдущих параграфах.

Сначала рассмотрим ортогональную группу O_n, т. е. множество всех вещественных матриц T, удовлетворяющих условию

$$TT' = I. \tag{3.7.1}$$

Очевидно, что $\det T = \pm 1$. Через O_n^+ будем обозначать группу матриц T с определителем, равным $+1$. Каждой матрице T поставим в соответствие матрицу K по формуле

$$K = (I-T)(I+T)^{-1}. \tag{3.7.2}$$

При этом случай, когда $\det(I+T)=0$, должен быть исключен. Однако теперь мы уже не можем сказать „почти для всех матриц определитель $I+T$ отличен от нуля". В самом деле, для каждой матрицы T с определителем, равным -1, мы имеем

$$\det(I+T) = \det(TT'+T) = \det T \cdot \det(T'+I) = -\det(I+T),$$

т. е. $\det(I+T)=0$. Таким образом, мы должны ограничиться матрицами из O_n^+. Можно показать, что множество матриц из O_n^+, для которых $\det(I+T)=0$, образует многообразие более низкой размерности.

Из (3.7.1) и (3.7.2) непосредственно следует, что

$$K' = -K. \tag{3.7.3}$$

Обращая формулу (3.7.2), сразу получаем

$$T = (I-K)(I+K)^{-1}. \tag{3.7.4}$$

Отсюда также следует, что $\det T = 1$, так как

$$\det(I-K) = \det(I-K') = \det(I+K).$$

Дифференцируя (3.7.4), мы найдем, что

$$dT = -2(I+K)^{-1}\,dK\,(I+K)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Sp}\,(dT\,dT') = -4\,\mathrm{Sp}\left\{dK\cdot(I-K^2)^{-1}\cdot dK\cdot(I-K^2)^{-1}\right\}. \qquad (3.7.5)$$

Положим

$$dK = (dk_{ij}), \qquad dk_{ij} = -dk_{ji},$$
$$(I-K^2)^{-1} = (u_{st}), \qquad u_{st} = u_{ts}.$$

Тогда (3.7.5) даст нам

$$\mathrm{Sp}\,(dT\cdot dT') = -8\sum_{i<j}\sum_{s<t}(u_{js}u_{it} - u_{is}u_{jt})\,dk_{ij}\,dk_{st},$$

откуда мы получаем выражение для элемента объема

$$\dot{T} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\{\det(I-K^2)\}^{-\frac{n-1}{2}}\dot{K}, \qquad (3.7.6)$$

где

$$\dot{K} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{i<j}dk_{ij}.$$

Значит, полный объем ортогональной группы O_n^+ равен

$$\int_T \dot{T} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\int_K\{\det(I-K^2)\}^{-\frac{n-1}{2}}\cdot\dot{K}.$$

Из теоремы 2.1.4 получаем

$$\int_T \dot{T} = 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\pi^{\frac{n(n-1)}{4}}\cdot\prod_{\nu=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-1)}. \qquad (3.7.7)$$

Теперь мы можем найти полный объем многообразия $\mathfrak{R}$.

Теорема 3.7.1. *Имеют место равенства*

$$\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu = 2^{-\nu^2}\cdot(2\pi)^\nu \qquad (3.7.8)$$

и

$$\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\beta-\cos\theta_\alpha)^2\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu = \frac{\pi}{2^{(\nu-1)^2}}. \qquad (3.7.9)$$

Доказательство. Из формулы

$$\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha) = \frac{1}{4}\left|e^{2i\theta_\alpha} - e^{2i\theta_\beta}\right|^2$$

и из ортогональности функций $e^{im\theta}$ следует, что

$$\int\limits_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\ldots\int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=\frac{1}{\nu!\,2^\nu\cdot 2^{\nu(\nu-1)}}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\left|e^{i\theta_\alpha}-e^{i\theta_\beta}\right|^2 d\theta_1\ldots d\theta_\nu=\frac{(2\pi)^\nu\cdot\nu!}{\nu!\,2^{\nu^2}}=\frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}}.$$

Из ортогональности же функций $\cos m\theta$ имеем

$$\int\limits_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\ldots\int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\beta-\cos\theta_\alpha)^2\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=\frac{1}{2^\nu\cdot\nu!}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\left\{\det(\cos^{i-1}\theta_j)_1^\nu\right\}^2 d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=\frac{1}{2^\nu\cdot\nu!\,2^{(\nu-1)(\nu-2)}}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\left\{\det(\cos(i-1)\theta_j)_1^\nu\right\}^2 d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=\frac{1}{2^\nu\nu!\,2^{(\nu-1)(\nu-2)}}\cdot\nu!\cdot 2\cdot\pi^\nu=\frac{\pi^\nu}{2^{(\nu-1)^2}},$$

так как $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$ и $\cos^m\theta=2^{-(m-1)}\cos m\theta+\ldots$.

Рассмотрим теперь множество ортогональных матриц G вида

$$G=\Gamma M\Gamma', \tag{3.7.10}$$

где Γ — матрица из O_n^+, а

$$M=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\dotplus\ldots,\quad \pi\geqslant\theta_1\geqslant\ldots\geqslant\theta_\nu\geqslant 0. \tag{3.7.11}$$

Здесь при $n=2\nu$ сумма кончается членом $\begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix}$, а при $n=2\nu+1$ членами $\begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix}\dotplus 1$. Множество матриц такого вида обозначим также через G, а через $V(G)$ обозначим объем этого множества. При нечетном n множество G совпадает с O_n^+ и, следовательно,

$$V(G)=(8\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{\alpha=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-1)} \tag{3.7.12}$$

в силу (3.7.7). При четном n любая матрица из O_n^+ также представима в виде (3.7.10), но при условии, что определитель Γ может

быть равен как $+1$, так и -1. Значит,

$$V(G)=\frac{1}{2}(8\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{\alpha=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-1)}. \tag{3.7.13}$$

Вычислим теперь $V(G)$ другим способом. Из соотношения

$$G=\Gamma M\Gamma'=\Gamma_1 M_1\Gamma_1', \qquad \pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0,$$

выводим $\Gamma=\Gamma_1\Delta$, $M=M_1$, где

$$\Delta=\begin{pmatrix}\cos\delta_1 & \sin\delta_1\\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1\end{pmatrix}\dot{+}\begin{pmatrix}\cos\delta_2 & \sin\delta_2\\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2\end{pmatrix}\dot{+}\ldots.$$

Значит можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множеств G и $\Sigma\times M$ (здесь, как и выше, $\Sigma=\Gamma/\Delta$), за исключением, разумеется, многообразия меньшей размерности.

С помощью метода, обычно используемого в этой главе, мы находим, что элемент объема G равен

$$\dot{G}=b_n\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\alpha-\cos\theta_\beta)^2\prod_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha\cdot\dot{\Sigma},$$

где

$$b_n=\begin{cases}2^{2\nu(\nu-1)+\frac{\nu}{2}}, & n=2\nu,\\ 2^{2\nu^2+\frac{\nu}{2}}, & n=2\nu+1.\end{cases}$$

Положим

$$V(\Sigma)=\int_\Sigma\dot{\Sigma}.$$

Тогда

$$V(G)=b_nV(\Sigma)\int\limits_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\ldots\int\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\alpha-\cos\theta_\beta)^2\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=b_nV(\Sigma)\cdot\frac{\pi^\nu}{2^{(\nu-1)^2}}. \tag{3.7.14}$$

Из теоремы 3.6.1 нам известно, что

$$V(\mathfrak{K})=\varkappa_n\cdot V(\Sigma)\cdot\int\limits_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\ldots\int\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\alpha-\theta_\beta)\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu,$$

так что в силу (3.7.8)

$$V(\mathfrak{K})=\varkappa_nV(\Sigma)\cdot\frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}}. \tag{3.7.15}$$

Комбинируя (3.7.14) и (3.7.15), имеем

$$V(\mathfrak{K}) = \frac{\varkappa_n}{b_n} \cdot \frac{2^{(\nu-1)^2}}{\pi^\nu} \cdot \frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}} \cdot V(G).$$

Заменяя $\varkappa_n$, b_n и $V(G)$ их значениями, получаем окончательно

$$V(\mathfrak{K}) = \lambda_n \frac{1}{2^{\nu-1}} (8\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \lambda_n = \begin{cases} 1, & n = 2\nu, \\ 2^{-\nu}, & n = 2\nu + 1. \end{cases}$$

Для четных n множество $\mathfrak{K}$ совпадает с $\mathfrak{G}_{\mathrm{III}}$ — характеристическим многообразием области $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$. Таким образом, мы получили, в частности, объем $\mathfrak{G}_{\mathrm{III}}$.

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 4.1. Введение

Пусть $\mathfrak{R}$ — ограниченная область в $2n$-мерном эвклидовом пространстве n комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Известно, что максимум модуля функции $f(z)$, аналитической в $\mathfrak{R}$, не может достигаться во внутренней точке $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{C}$ — многообразие на границе $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:

1. Каждая аналитическая в $\mathfrak{R}$ функция достигает своего максимума модуля на многообразии $\mathfrak{C}$.

2. Для любой точки a из $\mathfrak{C}$ существует аналитическая в $\mathfrak{R}$ функция $f(z)$, достигающая своего максимума модуля в точке a.

Такое многообразие назовем характеристическим многообразием области $\mathfrak{R}$. Очевидно, что $\mathfrak{C}$ определяется по $\mathfrak{R}$ единственным образом. Нетрудно доказать, что $\mathfrak{C}$ замкнуто и что любая функция, аналитическая в окрестности каждой точки $\mathfrak{C}$, определяется ее значениями на $\mathfrak{C}$ единственным образом. Следовательно, вещественная размерность n_1 многообразия $\mathfrak{C}$ не меньше n. Через $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1})$ мы будем обозначать переменные на $\mathfrak{C}$, через $d\xi\,\overline{d\xi'}=\sum_{i=1}^{n_1}|d\xi_i|^2$ — метрику на $\mathfrak{C}$ и через $\dot{\xi}$ элемент объема $\mathfrak{C}$.

Если область $\mathfrak{R}$ допускает аналитические отображения, переводящие ее в себя, то очевидно, что при этих отображениях $\mathfrak{C}$ также переходит в себя. В частности, $\mathfrak{C}$ инвариантно относительно группы движений $\mathfrak{R}$, сохраняющих данную точку неподвижной. Если область $\mathfrak{R}$ допускает группу преобразований $z=e^{i\theta}w$, то мы назовем $\mathfrak{R}$ круговой областью, если же, кроме того, с точкой z в $\mathfrak{R}$ лежит и точка rz, $0\leqslant r\leqslant 1$, то мы назовем $\mathfrak{R}$ полной круговой областью. Очевидно, что если $\mathfrak{R}$ — круговая область, то и $\mathfrak{C}$ также.

Пусть теперь $\mathfrak{R}$ — круговая область. Рассмотрим вектор $z^{[f]}$ с компонентами

$$\sqrt{\frac{f!}{a_1!\ldots a_n!}}\,z_1^{a_1}\ldots z_n^{a_n},\quad a_1+\ldots+a_n=f. \tag{4.1.1}$$

Размерность вектора $z^{[f]}$ равна

$$N_f=\frac{1}{f!}n(n+1)\ldots(n+f-1)=\binom{n+f-1}{f}.$$

При $f \neq g$

$$\int_{\mathfrak{R}} (\overline{z^{[f]}})' \cdot z^{[g]} \cdot \dot{z} = 0$$

и

$$\int_{\mathfrak{C}} (\overline{\xi^{[f]}})' \cdot \xi^{[g]} \cdot \dot{\xi} = 0.$$

В самом деле, так как $\mathfrak{R}$ — круговая область, то, делая замену $z = e^{i\theta} w$, получаем

$$\int_{\mathfrak{R}} (\overline{z^{[f]}})' \cdot z^{[g]} \cdot \dot{z} = e^{i\theta(f-g)} \int_{\mathfrak{R}} (\overline{w^{[f]}})' \cdot w^{[g]} \cdot \dot{w},$$

откуда следует наше утверждение, поскольку $e^{i\theta(f-g)} \neq 1$.

Положим

$$\int_{\mathfrak{R}} (\overline{z^{[f]}})' \cdot z^{[f]} \cdot \dot{z} = H_1 \tag{4.1.2}$$

и

$$\int_{\mathfrak{C}} (\overline{\xi^{[f]}})' \cdot \xi^{[f]} \cdot \dot{\xi} = H_2. \tag{4.1.3}$$

Ясно, что H_1 и H_2 — положительно определенные эрмитовы матрицы порядка N_f. Существует такая матрица Γ, что

$$\overline{\Gamma}' H_1 \Gamma = \Lambda, \qquad \overline{\Gamma}' H_2 \Gamma = I,$$

где $\Lambda = [\beta_1^f, \beta_2^f, \ldots, \beta_{N_f}^f]$ — диагональная матрица.

Положим

$$z_f = z^{[f]} \cdot \Gamma, \qquad \xi_f = \xi^{[f]} \cdot \Gamma,$$

а через $\{\varphi_\nu^f(z)\}$ мы будем обозначать компоненты вектора z_f. Тогда имеем

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu^f(z)\, \overline{\varphi_\mu^g(z)}\, \dot{z} = \delta_{\nu\mu} \cdot \delta_{fg} \cdot \beta_\nu^f \tag{4.1.4}$$

и

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\nu^f(\xi)\, \overline{\varphi_\mu^g(\xi)}\, \dot{\xi} = \delta_{\nu\mu} \cdot \delta_{fg}. \tag{4.1.5}$$

Таким образом, функции $\left\{(\beta_\nu^f)^{-\frac{1}{2}} \varphi_\nu^f(z)\right\}$ образуют ортонормальную систему в области $\mathfrak{R}$. Известна следующая теорема (А. Картан [1]).

Теорема 4.1.1. *Для полной круговой области $\mathfrak{R}$ система функций*

$$(\beta_\nu^f)^{-\frac{1}{2}} \varphi_\nu^f(z), \quad \begin{matrix} f = 0, 1, 2, \ldots, \\ \nu = 1, 2, \ldots, N_f, \end{matrix} \tag{4.1.6}$$

является полной ортонормальной системой в области $\mathfrak{R}$. Напротив, система $\{\varphi_\nu^f(\xi)\}$ ортонормальна, но, вообще говоря, не полна в пространстве функций, непрерывных на $\mathfrak{C}$.

Известно также, что ряд

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{N_f}\frac{\varphi_\nu^f(z)\,\overline{\varphi_\nu^f(w)}}{\beta_\nu^f}=K(z,\overline{w})$$

равномерно сходится при любых z и w, лежащих внутри $\mathfrak{R}$, и представляет там функцию, называемую ядром Бергмана[1]).

Сумму ряда (если он сходится)

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{N_f}\varphi_\nu^f(z)\,\overline{\varphi_\nu^f(\xi)}=H(z,\overline{\xi})$$

мы назовем ядром Коши для области $\mathfrak{R}$.

Наконец, функцию

$$P(z,\xi)=\frac{|H(z,\overline{\xi})|^2}{H(z,\overline{z})}$$

мы назовем ядром Пуассона для области $\mathfrak{R}$.

Целью настоящей главы являются методы непосредственного нахождения этих ядер.

§ 4.2. Ядро Бергмана

Пусть $\mathfrak{R}$ — ограниченная область, содержащая внутри начало, Γ — группа аналитических отображений $\mathfrak{R}$ на себя и Γ_0 — подгруппа Γ, оставляющая начало неподвижным. Известно (А. Картан [1]), что элемент из Γ_0 полностью определяется его линейными членами в окрестности начала, т. е. отображение $\mathfrak{R}$ на себя, имеющее вид

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}z_j+\sum_{\substack{m_1\ldots m_n\\ m_1+\ldots+m_n\geqslant 2}}a^{(i)}_{m_1\ldots m_n}z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n},\qquad(4.2.1)$$

полностью определено, если известна матрица $(u_{ij})_1^n$. Так как известно, что Γ_0 компактна, то без ограничения общности можно считать, что матрицы $(u_{ij})=U$, образующие представление Γ_0, унитарны. Букву U мы будем использовать и для обозначения самого нелинейного преобразования (4.2.1), определяемого линейным элементом U.

---

[1]) В русской литературе ядро Бергмана обычно называют „кернфункция области". В этой книге такой термин был бы не очень удачен, поскольку мы имеем три ядра, которые могли бы носить такое название. — *Прим. перев.*

Рассмотрим теперь множество классов смежности Γ/Γ_0. Все преобразования группы, принадлежащие одному и тому же классу смежности, переводят в начало одну и ту же точку a. Совокупность всех таких точек a образует в $\mathfrak{R}$ некоторое множество $\mathfrak{M}$. Его называют транзитивным множеством относительно группы Γ, содержащим начало. Таким образом, любой элемент из Γ однозначно определяется точкой a из $\mathfrak{M}$ и унитарной матрицей U из Γ_0. Запишем преобразования, определяемые элементами из Γ в виде

$$w=f(z,\ a,\ U),\quad a\in\mathfrak{M},\quad U\in\Gamma_0. \tag{4.2.2}$$

Пусть

$$z=f(x,\ b,\ V),\quad b\in\mathfrak{M},\quad V\in\Gamma_0, \tag{4.2.3}$$

— другое преобразование, и

$$w=f(f(x,\ b,\ V),\ a,\ U)=f(x,\ c,\ W) \tag{4.2.4}$$

— произведение преобразований (4.2.2) и (4.2.3). Полагая $w=0$, сразу получаем

$$a=f(c,\ b,\ V). \tag{4.2.5}$$

Дифференцируя (4.2.4), имеем

$$\frac{\partial f_i(x,\ c,\ W)}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i(z,\ a,\ U)}{\partial z_k}\,\frac{\partial f_k(x,\ b,\ V)}{\partial x_j}. \tag{4.2.6}$$

Матрицу якобиана преобразования (4.2.2) обозначим

$$J(z,\ a,\ U)=(a_{ij}),\quad a_{ij}=\frac{\partial f_i(z,\ a,\ U)}{\partial z_j}.$$

Если в (4.2.6) положить $x=c$, то получим $z=a$. Значит,

$$J(c,\ c,\ W)=J(a,\ a,\ U)\cdot J(c,\ b,\ V).$$

Изменяя обозначения, получаем

$$J(x,\ x,\ W)=J(z,\ z,\ U)\,J(x,\ b,\ V). \tag{4.2.7}$$

Эта формула имеет место для x и z из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих соотношению

$$z=f(x,\ b,\ V). \tag{4.2.8}$$

Если мы имеем другое преобразование

$$u=f(x,\ b,\ V_0),$$

то преобразование u в z оставляет начало неподвижным. Значит,

$$U_0=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{z=0}$$

— унитарная матрица. Отсюда следует, что

$$\{J(x, b, V)\}_{x=b} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{z=0} \cdot \{J(x, b, V_0)\}_{x=b},$$

так что мы имеем

$$J(b, b, V) = U_0 J(b, b, V_0), \tag{4.2.9}$$

где U_0 — унитарная матрица из Γ_0. Таким образом,

$$\overline{J(z, z, V)'} \cdot J(z, z, V) = \overline{J(z, z, V_0)'} \cdot J(z, z, V_0). \tag{4.2.10}$$

Это показывает, что $\overline{J'}J$ зависит от класса смежности Γ/Γ_0, но не зависит от выбора представителей этого класса. Значит, мы можем записать

$$|\det J(z, z, V)|^2 = Q(z, \bar{z}).$$

Из (4.2.7) для z и x, лежащих в $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющих соотношению (4.2.8), имеем

$$Q(x, \bar{x}) = Q(z, \bar{z})\,|\det J(x, b, V)|^2. \tag{4.2.11}$$

Бергман [1] доказал, что при преобразовании (4.2.8) ядро Бергмана области $\mathfrak{R}$ меняется по такому же закону

$$K(x, \bar{x}) = K(z, \bar{z})\,|\det J(x, b, V)|^2. \tag{4.2.12}$$

Таким образом, для z и x из $\mathfrak{M}$

$$\frac{K(x, \bar{x})}{Q(x, \bar{x})} = \frac{K(z, \bar{z})}{Q(z, \bar{z})}. \tag{4.2.13}$$

Теорема 4.2.1. *Если $\mathfrak{R}$ — ограниченная круговая область, то для z, лежащих в $\mathfrak{M}$, имеем*

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\Omega} Q(z, \bar{z}),$$

где Ω — полный объем $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Имея в виду сказанное в § 4.1, мы можем предложить следующий процесс построения ортонормальной системы функций.

Ортонормализуем члены

$$z_1^{a_1} \cdot z_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{a_n}, \quad a_1 + \ldots + a_n = m,$$

при данном m и возьмем совокупность всех таких функций при $m = 0, 1, 2, \ldots$. Эта совокупность образует полную ортонормальную систему.

Среди полученных этим процессом функций $\varphi_\nu(z)$ имеется константа $\Omega^{-\frac{1}{2}}$, а остальные являются однородными формами степеней $m \geqslant 1$. Значит,

$$\varphi_0(z) = \Omega^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi_\nu(0) = 0, \quad \nu \geqslant 1.$$

Поэтому из равенства

$$K(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(z)}$$

сразу получаем

$$K(0, 0) = \frac{1}{\Omega}.$$

С другой стороны, из определения $Q(z, \bar{z})$ имеем $Q(0, 0) = 1$. Отсюда в силу (4.2.13) получаем теорему.

Предположив теперь, что $\mathfrak{R}$ — транзитивная область (т. е. $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{M}$), мы установим геометрические свойства $Q(z, \bar{z})$. Из (4.2.7) имеем

$$J(x, x, W)\, dx' = J(z, z, U)\, dz',$$

следовательно,

$$\overline{dx} \cdot \overline{J(x, x, W)'} \cdot J(x, x, W) \cdot dx' = \overline{dz} \cdot \overline{J(z, z, U)'} \cdot J(z, z, U) \cdot dz'.$$

Эту инвариантную форму можно рассматривать в качестве метрики нашего пространства. Элемент объема в этой метрике равен

$$|\det J(z, z, U)|^2 \dot{z} = Q(z, \bar{z}) \cdot \dot{z},$$

так что $Q(z, z)$ можно назвать *плотностью объема*.

Из теоремы 4.2.1 мы получаем следующее утверждение:

Ядро Бергмана для любой транзитивной круговой области равно отношению плотности объема к эвклидову объему области.

В следующих параграфах мы найдем ядро Бергмана для наших четырех типов классических областей, руководствуясь лишь этим соображением и не обращаясь к полным ортонормальным системам.

§ 4.3. Ядра Бергмана для областей $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ и $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$

1°. Группа Γ для области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ состоит из следующих преобразований (см. Хуа Ло-кен [1]):

$$Z_1 = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \tag{4.3.1}$$

где A, B, C, D — матрицы с размерами $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$, $n \times n$ соответственно, удовлетворяющие соотношениям

$$\bar{A}A' - \bar{B}B' = I^{(m)}, \quad \bar{A}C' = \bar{B}D', \quad \bar{C}C' - \bar{D}D' = -I^{(n)}.$$

При $m = n$ мы предполагаем, кроме того, что

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = +1. \tag{4.3.2}$$

Найдем преобразования, переводящие произвольную точку $Z=P$ в начало. По определению области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ имеем

$$I^{(m)}-\bar{P}P'>0.$$

По теореме 2.1.2 отсюда следует, что и

$$I^{(n)}-P'\bar{P}>0.$$

Известно, что существуют $m\times m$-матрица Q и $n\times n$-матрица R, такие, что

$$\bar{Q}\left(I^{(m)}-\bar{P}P'\right)Q'=I^{(m)},\quad \bar{R}\left(I^{(n)}-P'\bar{P}\right)R'=I^{(n)}. \tag{4.3.3}$$

Преобразование

$$Z_1=Q(Z-P)(I^{(n)}-\bar{P}'Z)^{-1}R^{-1} \tag{4.3.4}$$

переводит P в начало. Легко убедиться, что это преобразование принадлежит к виду (4.3.1).

Дифференцируя (4.3.4), имеем

$$dZ_1=Q\left\{dZ\cdot(I-\bar{P}'Z)^{-1}+(Z-P)\,d\,(I-\bar{P}'Z)^{-1}\right\}R^{-1}.$$

Положим $Z=P$. Тогда

$$dZ_1=Q\cdot dZ\cdot(I-\bar{P}'P)^{-1}R^{-1}=Q\cdot dZ\cdot\bar{R}',$$

т. е. в точке $Z=P$

$$\dot{Z}_1=\left|(\det Q)^m\cdot(\det\bar{R}')^n\right|^2\cdot\dot{Z}=\left\{\det(I-P\bar{P}')\right\}^{-m-n}\cdot\dot{Z}.$$

Следовательно,

$$Q(Z,\bar{Z})=\left\{\det(I-Z\bar{Z}')\right\}^{-(m+n)}.$$

Используя результаты § 4.2, получаем следующую теорему.

Теорема 4.3.1. *Ядро Бергмана области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ равно*

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})}\cdot\left\{\det(I-Z\bar{Z}')\right\}^{-(m+n)}, \tag{4.3.5}$$

где согласно (2.2.2)

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})=\frac{1!\,2!\ldots(m-1)!\,1!\,2!\ldots(n-1)!}{1!\,2!\ldots(m+n-1)!}\pi^{mn}.$$

2°. Группа Γ области $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ состоит из преобразований вида

$$Z_1=(AZ+B)(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}, \tag{4.3.6}$$

где

$$A'B=B'A,\quad \bar{A}A'-\bar{B}B'=I.$$

Пусть P — точка $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$. Найдется такая матрица R, что

$$\bar{R}(I-\bar{P}P')R'=I. \tag{4.3.7}$$

Преобразование

$$Z_1 = R(Z-P)(I-\bar{P}Z)^{-1}\bar{R}^{-1}, \tag{4.3.8}$$

принадлежащее Г, переводит точку P в начало.

Дифференцируя (4.3.8), имеем

$$dZ_1 = R\{dZ\cdot(I-\bar{P}Z)^{-1}+(Z-P)\,d(I-\bar{P}Z)^{-1}\}\,\bar{R}^{-1}.$$

Полагая $Z=P$, получаем

$$dZ_1 = R\cdot dZ\cdot(I-\bar{P}P)^{-1}\bar{R}^{-1} = R\cdot dZ\cdot R'.$$

Значит, в точке $Z=P$

$$\dot{Z}_1 = |(\det R)^{n+1}|^2\cdot\dot{Z} = \{\det(I-P\bar{P})\}^{-(n+1)}\cdot\dot{Z}.$$

Таким образом,

$$Q(Z,\bar{Z}) = \{\det(I-Z\bar{Z})\}^{-(n+1)}.$$

Теорема 4.3.2. *Ядро Бергмана области* $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ *равно*

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}})}\cdot\{\det(I-Z\bar{Z})\}^{-(n+1)}, \tag{4.3.9}$$

где согласно (2.3.2)

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}) = \pi^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{2!\,4!\ldots(2n-2)!}{n!\,(n+1)!\ldots(2n-1)!}.$$

3°. Группа Г области $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ состоит из преобразований вида

$$Z_1 = (AZ+B)(-\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}, \tag{4.3.10}$$

где

$$A'B = -B'A,\quad \bar{A}'A-\bar{B}'B = I.$$

Пусть P — точка $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$, т. е. $I+P\bar{P}>0$. Тогда найдется такая матрица Q, что

$$\bar{Q}(I+P\bar{P})Q' = I.$$

Тогда в Г имеется преобразование

$$Z_1 = Q(Z-P)(I+\bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}, \tag{4.3.11}$$

переводящее точку P в начало.

Дифференцируя (4.3.11), имеем

$$dZ_1 = Q\{dZ\cdot(I+\bar{P}Z)^{-1}+(Z-P)\,d(I+\bar{P}Z)^{-1}\}\,\bar{Q}^{-1}.$$

При $Z=P$ получаем

$$dZ_1 = Q\cdot dZ\cdot(I+\bar{P}P)^{-1}\cdot\bar{Q}^{-1} = Q\cdot dZ\cdot Q'.$$

Значит, в точке $Z=P$

$$\dot{Z}_1 = |(\det Q)^{n+1}|^2\,\dot{Z} = \{\det(I+\bar{P}P)\}^{-n+1}\cdot\dot{Z}.$$

Поэтому

$$Q(Z, \bar{Z}) = \{\det(I + Z\bar{Z})\}^{-n+1}.$$

Теорема 4.3.3. *Ядро Бергмана области* $\mathfrak{R}_{III}$ *равно*

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{III})}\{\det(I + Z\bar{Z})\}^{-n+1},$$

где согласно (2.4.2)

$$V(\mathfrak{R}_{III}) = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{2!\,4!\ldots(2n-4)!}{(n-1)!\,n!\ldots(2n-3)!}.$$

§ 4.4. Ядро Бергмана для области $\mathfrak{R}_{IV}$

Группа Γ области $\mathfrak{R}_{IV}$ состоит из преобразований вида

$$w = \left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)A' + zB'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)C' + zD'\right\}, \quad (4.4.1)$$

где A, B, C и D — вещественные матрицы размеров соответственно 2×2, $2\times n$, $n\times 2$ и $n\times n$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

и

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = +1. \quad (4.4.3)$$

Найдем теперь преобразования из Γ, переводящие точку z_0 в начало. Исходя из вектора z_0, построим $2\times n$-матрицу X_0 следующим образом:

$$X_0 = 2\begin{pmatrix}z_0z_0'+1 & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1 & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix} = 2A_0^{-1}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{1-|z_0z_0'|^2}\begin{pmatrix}z_0+\bar{z}_0-(\overline{z_0z_0'}\cdot z_0+z_0z_0'\cdot\bar{z}_0)\\ i(z_0-\bar{z}_0)+i(\overline{z_0z_0'}\cdot z_0-z_0z_0'\cdot\bar{z}_0)\end{pmatrix}. \quad (4.4.4)$$

Эта матрица, очевидно, вещественна. Имеем

$$I - X_0X_0' = \bar{A}_0^{-1}\left(\bar{A}_0A_0' - 4\overline{\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix}'\right)\cdot A_0'^{-1} =$$
$$= 2\bar{A}_0^{-1}\begin{pmatrix}1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0' & 0\\ 0 & 1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'\end{pmatrix}\cdot A_0'^{-1}. \quad (4.4.5)$$

Следовательно,

$$(I-X_0X_0')^{-1}=\frac{1}{2\left(1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'\right)}A_0'\bar{A}_0=\frac{1}{1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}(z_0z_0'+1)\left(\overline{z_0z_0'}+1\right) & i\left(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}\right)\\ i\left(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}\right) & (z_0z_0'-1)\left(\overline{z_0z_0'}-1\right)\end{pmatrix}=A'A, \qquad (4.4.6)$$

где

$$A=\frac{1}{2}\left(1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'\right)^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\left(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}\right) & z_0z_0'+\overline{z_0z_0'}-2\\ z_0z_0'+\overline{z_0z_0'}+2 & i\left(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}\right)\end{pmatrix}. \qquad (4.4.7)$$

Подберем D, удовлетворяющую условию $D(I^{(n)}-X_0'X_0)D'=I^{(n)}$; тогда преобразование

$$w=\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{zD'-\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)X_0D'\right\} \qquad (4.4.8)$$

имеет вид (4.4.1) и переводит точку z_0 в начало.

Кроме того,

$$\det A=\det D=\frac{1-|z_0z_0'|^2}{1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'}. \qquad (4.4.9)$$

Дифференцируя (4.4.8), имеем ($z=(z^{(1)},\ \ldots,\ z^{(n)})$)

$$dw=\left\{dz\cdot D'-\left(\sum_{p=1}^{n}z^{(p)}dz^{(p)},\ i\sum_{p=1}^{n}z^{(p)}dz^{(p)}\right)X_0D'\right\}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}+$$

$$+\left\{zD'-\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)X_0D'\right\}\times$$

$$\times d\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}.$$

Полагая $z=z_0$, получаем

$$dw=\left\{dz\cdot D'-\left(\sum_{p=1}^{n}z_0^{(p)}dz^{(p)},\ i\sum_{p=1}^{n}z_0^{(p)}dz^{(p)}\right)X_0D'\right\}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(z_0z_0'+1),\ \frac{i}{2}(z_0z_0'-1)\right)A'-z_0X_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1},$$

т. е.

$$dw=\{dz\cdot D'-d(zz')\cdot(1,\ i)X_0D'\}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(z_0z_0'+1),\ \frac{i}{2}(z_0z_0'-1)\right)A'-z_0X_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}. \qquad (4.4.10)$$

Используя (4.4.4) и (4.4.7), имеем

$$dw = -i\,dz \cdot \left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} \cdot z_0' z_0}{1 - |z_0 z_0'|^2} \right\} \cdot D' \cdot \left(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.4.11}$$

Из (4.4.9) получаем

$$\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=z_0} =$$

$$= \det\left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} \cdot z_0' z_0}{1 - |z_0 z_0'|^2} \right\} \cdot \frac{1 - |z_0 z_0'|^2}{\left(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'\right)} \times$$

$$\times \left(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'\right)^{-\frac{n}{2}},$$

или

$$\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=z_0}\right|^2 = \left(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'\right)^{-n}. \tag{4.4.12}$$

Здесь использовано тождество

$$\det\left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} \cdot z_0' z_0}{1 - |z_0 z_0'|^2} \right\} = \frac{1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'}{1 - |z_0 z_0'|^2}, \tag{4.4.13}$$

являющееся следствием соотношения $\det(I - u'\bar{v}) = 1 - \bar{v}u'$ (см. теорему 2.1.2).

Таким образом, мы пришли к теореме.

Теорема 4.4.1. *Ядро Бергмана области* $\mathfrak{R}_{IV}$ *равно*

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})}\left(1 + |zz'|^2 - 2\bar{z}z'\right)^{-n},$$

где согласно (2.5.7) $V(\mathfrak{R}_{IV}) = \dfrac{\pi^n}{2^{n-1} \cdot n!}$.

§ 4.5. Ядро Коши

Перейдем теперь к изучению ядра Коши

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(z)\,\overline{\varphi_\nu^f(\xi)} = H(z, \bar{\xi}). \tag{4.5.1}$$

(Здесь z принадлежит $\mathfrak{R}$, а ξ — $\mathfrak{E}$.)

Пусть Γ_0 — группа движений $\mathfrak{R}$, оставляющих начало неподвижным. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{E}$ транзитивно относительно Γ_0, т. е. любые две точки из $\mathfrak{E}$ могут быть переведены одна в другую преобразованием, принадлежащим Γ_0.

Теорема 4.5.1. *Ряд*

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_f} |\varphi_\nu^f(\xi)|^2 r^f \tag{4.5.2}$$

равномерно сходится при $\xi \in \mathfrak{E}$ *и* $0 \leqslant r \leqslant r_0 < 1$. *Сумма ряда равна* $[V(\mathfrak{E})]^{-1}(1-r)^{-n}$, *где* $V(\mathfrak{E})$ — *объем* $\mathfrak{E}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать Γ_0 состоящей из унитарных преобразований $\eta = \xi U$. Выражение (4.5.2) можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{f=0}^{\infty} \xi_f \overline{\xi}'_f r^f = \sum_{f=0}^{\infty} \xi^{[f]} H_2^{-1} \overline{\xi^{[f]}}' r^f = \sum_{f=0}^{\infty} \xi^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{E}} \overline{\zeta^{[f]}}' \zeta^{[f]} \dot{\zeta} \right)^{-1} \overline{\xi^{[f]}}' r^f =$$

$$= \sum_{f=0}^{\infty} \eta^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{E}} \overline{\zeta^{[f]}}' \zeta^{[f]} \dot{\zeta} \right)^{-1} \overline{\eta^{[f]}}' r^f = \sum_{f=0}^{\infty} \eta_f \overline{\eta}'_f r^f,$$

откуда видно, что оно не зависит от ξ на $\mathfrak{E}$. Поэтому, интегрируя по $\mathfrak{E}$, получаем

$$\frac{1}{V(\mathfrak{E})} \cdot \int_{\mathfrak{E}} \sum_{f=0}^{\infty} \eta_f \overline{\eta}'_f r^f \cdot \dot{\eta} = \frac{1}{V(\mathfrak{E})} \sum_{f=0}^{\infty} \binom{n+f-1}{f} r^f = \frac{1}{V(\mathfrak{E})} \cdot (1-r)^{-n}, \tag{4.5.3}$$

и теорема доказана.

Из предыдущей теоремы с помощью неравенства Буняковского — Шварца получаем следующее утверждение.

Теорема 4.5.2. *При* ξ *и* η *на* $\mathfrak{E}$ *и* $0 \leqslant r \leqslant r_0 < 1$ *ряд*

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(\xi) \overline{\varphi_\nu^f(\eta)} r^f \tag{4.5.4}$$

равномерно сходится.

Теорема 4.5.3. *Пусть* $\mathfrak{R}$ — *звездообразная круговая область. Обозначим через* $\mathfrak{R}(r)$ *область, получающуюся из* $\mathfrak{R}$ *подобным преобразованием с коэффициентом подобия* r, $0 < r < 1$. *При* $z \in \mathfrak{R}(r)$ *и* $\xi \in \mathfrak{E}$ *ряд* (4.5.1) *равномерно сходится.*

Доказательство. Так как аналитическая в $\mathfrak{R}$ функция достигает максимума модуля на $\mathfrak{E}$, то

$$\left| \sum_{f=m}^{m'} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(z) \overline{\varphi_\nu^f(\xi)} \right| = \left| \sum_{f=m}^{m'} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f\left(\frac{z}{r}\right) \overline{\varphi_\nu^f(\xi)} r^f \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\zeta \in \mathfrak{E}} \left| \sum_{f=m}^{m'} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(\zeta) \overline{\varphi_\nu^f(\xi)} r^f \right|$$

[$\varphi_\nu^f(z)$ — однородные формы от z степени f]. При m, $m' \to \infty$ правая часть последнего равенства стремится к нулю по теореме 4.5.2. Тем самым теорема доказана.

§ 4.6. Формула Коши

По существу, следующие две теоремы уже полностью доказаны в предыдущем параграфе. Однако ввиду их важности мы сформулируем их отдельно.

Теорема 4.6.1. *Пусть* $\mathfrak{C}$ — *характеристическое многообразие области* $\mathfrak{R}$, *удовлетворяющей условиям теоремы* 4.5.3, *и пусть* $f(\xi)$ — *непрерывная на* $\mathfrak{C}$ *функция. Тогда интеграл*

$$\varphi(z)=\int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) f(\xi)\, \dot{\xi} \tag{4.6.1}$$

представляет аналитическую функцию, регулярную в $\mathfrak{R}$. *Если же* $f(z)$ — *функция, аналитическая в* $\mathfrak{R}$ *и на границе* $\mathfrak{R}$, *то*

$$f(z)=\int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) f(\xi)\, \dot{\xi}.$$

Эта теорема следует из равномерной сходимости ряда для $H(z, \bar{\xi})$ (теорема 4.5.3).

Теорема 4.6.2. *Пусть* $\{\varphi_\nu(\xi)\}$ — *ортонормальная система функций на* $\mathfrak{C}$, *обладающая следующими свойствами*:

1) $\varphi_\nu(z)$ — *аналитические функции, регулярные в области* $\mathfrak{R}$ *и на ее границе.*

2) *Ряд*

$$H_1(z, \bar{\xi})=\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z)\, \overline{\varphi_\nu(\xi)}$$

равномерно сходится при $\xi \in \mathfrak{C}$ *и* z, *лежащем в любой замкнутой подобласти* $\mathfrak{R}$.

3) *Любая функция* $f(z)$, *аналитическая в области* $\mathfrak{R}$ *и на ее границе, может быть разложена в ряд*

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

равномерно сходящийся в любой замкнутой подобласти $\mathfrak{R}$.

Тогда

$$H_1(z, \bar{\xi})=H(z, \bar{\xi}).$$

Доказательство. Если ортонормальная система $\{\varphi_\nu(z)\}$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то легко убедиться, что теорема 4.6.1 имеет место. Другими словами, если $f(z)$ аналитична в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, то

$$f(z)=\int_{\mathfrak{C}} H_1(z, \bar{\xi}) f(\xi)\, \dot{\xi}. \tag{4.6.2}$$

Из принципа максимума модуля следует, что ряд

$$H(z, \overline{w}) = \sum_{f, i} \varphi_i^f(z) \overline{\varphi_i^f(\omega)}$$

равномерно сходится при z, лежащих в любой замкнутой подобласти $\mathfrak{R}$ и w, лежащих в $\mathfrak{R}$ или на ее границе. Но $H_1(z, \overline{w})$ обладает теми же свойствами. Значит,

$$H(z, \overline{w}) = \int_{\mathfrak{C}} H_1(z, \overline{\xi}) H(\xi, \overline{w}) \dot{\xi} =$$

$$= \overline{\int_{\mathfrak{C}} H_1(\overline{z}, \xi) H(\overline{\xi}, w) \dot{\xi}} = \overline{H_1(\overline{z}, w)} = H_1(z, \overline{w}),$$

откуда видно, что $H_1(z, \overline{w}) \equiv H(z, \overline{w})$. При $w = \xi$ получаем утверждение нашей теоремы.

Теорема 4.6.3. *Предположим, что область $\mathfrak{R}$ в дополнение к прежним условиям транзитивна и что $\mathfrak{C}$ имеет вещественную размерность n. Тогда*

$$H(z, \overline{\xi}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})} B^{\frac{1}{2}}(z, z, U) \overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi, z, U)},$$

где $B(z, a, U)$ — значение якобиана преобразования из группы Γ, переводящего точку a в начало.

Доказательство. Пусть

$$w = f(z, a, U) \tag{4.6.3}$$

— преобразование из группы Γ, переводящее точку a в начало. Это преобразование переводит $\mathfrak{C}$ в себя. Положим

$$\zeta = f(\xi, a, U). \tag{4.6.4}$$

Тогда

$$\dot{\zeta} = B(\xi, a, U) \dot{\xi}. \tag{4.6.5}$$

(Это имеет место, поскольку вещественная размерность $\mathfrak{C}$ равна комплексной размерности $\mathfrak{R}$, и тем самым переход с границы внутрь области может быть осуществлен простой заменой вещественных параметров комплексными.)

Мы знаем, что на $\mathfrak{C}$ существует ортонормальная система $\{\varphi_\nu^f(\xi)\}$, которую мы будем для простоты обозначать $\{\varphi_\nu(\xi)\}$. Тогда

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\mu(\zeta) \overline{\varphi_\nu(\zeta)} \dot{\zeta} = \int_{\mathfrak{C}} \varphi_\mu(f(\xi)) \overline{\varphi_\nu(f(\xi))} |B(\xi, a, U)| \dot{\xi} = \delta_{\mu\nu}.$$

Значит, система

$$\psi_\mu(\xi) = \varphi_\mu(f(\xi, a, U)) B^{\frac{1}{2}}(\xi, a, U)$$

также является ортонормальной. Докажем, что система $\{\psi_\mu(\xi)\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.6.2. Очевидно, что $\psi_\mu(z)$ аналитичны в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(z)\overline{\psi_\nu(\xi)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(w)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\cdot B^{\frac{1}{2}}(z,\ a,\ U)\overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi,\ a,\ U)}. \qquad (4.6.6)$$

Обозначим через

$$z=f^{-1}(w,\ a,\ U)$$

преобразование, обратное к (4.6.3). Любой функции $\psi(z)$, аналитичной в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, поставим в соответствие функцию

$$\varphi(w)=\psi\left(f^{-1}(w,\ a,\ U)\right)B^{-\frac{1}{2}}(z,\ a,\ U),$$

также аналитическую в $\mathfrak{R}$ и на ее границе. Поскольку $\varphi(w)$ может быть разложена в ряд

$$\varphi(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(w),$$

то мы получаем и

$$\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\psi_\nu(z).$$

Это показывает, что условие 3) теоремы 4.6.2 выполнено. Таким образом, из (4.6.6) следует

$$H(z,\ \overline{\xi})=H(w,\ \overline{\zeta})\cdot B^{\frac{1}{2}}(z,\ a,\ U)\overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi,\ a,\ U)}.$$

Так как $H(0,\ \overline{\zeta})=[V(\mathfrak{C})]^{-1}$, то, заменяя a на z, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Ортонормальная система $\{\psi_\mu(\xi)\}$, рассмотренная выше, не является полной на $\mathfrak{C}$. На $\mathfrak{C}$ существует и полная ортонормальная система (см. Г. Вейль [1]); она может быть получена добавлением к $\{\psi_\mu(\xi)\}$ некоторой системы функций $\psi_{-\nu}(\xi)$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots$. Здесь идет речь о полноте в пространстве функций, непрерывных на $\mathfrak{C}$, т. е. если $g(\xi)$ — непрерывная функция на $\mathfrak{C}$, то из

$$\int_{\mathfrak{C}} g(\xi)\overline{\varphi_\nu(\xi)}\,\dot{\xi}=0 \qquad (\nu=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

следует $g(\xi)\equiv 0$.

§ 4.7. Ядра Коши для классических областей

Применение теоремы 4.6.3 позволяет непосредственно найти ядра Коши для классических областей.

1°. В $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ характеристическое многообразие $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ определяется условием $U\overline{U'}=I$. Предположим сначала, что $m=n$. Тогда размерность

характеристического многообразия равна половине размерности $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ и следовательно,

$$H(Z, \bar{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}})} \cdot \{\det(I - Z\bar{U}')\}^{-n}, \tag{4.7.1}$$

где согласно теореме 3.1.1

$$V(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}) = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}.$$

Если $m \neq n$, то, предполагая для определенности $m < n$, имеем

$$H(Z, \bar{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}})} [\det(I - Z\bar{U}')]^{-n}, \tag{4.7.2}$$

где (см. § 5.4)

$$V(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}) = \frac{(2\pi)^{mn - \frac{m(m-1)}{2}}}{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!}.$$

Выражение (4.7.2) проще получить из (4.7.1), чем непосредственно из теоремы 4.6.3. В самом деле, мы имеем

$$f(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{U}_n)} \int\limits_{\mathfrak{U}_n} f(U_n) [\det(I - Z\bar{U}'_n)]^{-n} \dot{U}_n, \tag{4.7.3}$$

где интегрирование производится по множеству всех унитарных матриц порядка n. Положим

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } Z_1 \text{ — } m \times n\text{-матрица}, \quad U_n = \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}.$$

Тогда получим

$$f\left[\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{V(\mathfrak{U}_n)} \int\limits_{U_{mn}} \int\limits_{V} f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}\right] [\det(I - Z_1\bar{U}'_{mn})]^{-n} \dot{U}_{mn} \dot{V} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{U}_n)} \int\limits_{U_{mn}} [\det(I - Z_1\bar{U}'_{mn})]^{-n} \dot{U}_{mn} \int\limits_{V} f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}\right] \dot{V}, \tag{4.7.4}$$

где V пробегает множество всех $(n-m) \times n$-матриц, удовлетворяющих условиям

$$V\bar{V}' = I^{(n-m)}, \quad U_{mn}\bar{V}' = 0. \tag{4.7.5}$$

Для фиксированной матрицы U_{mn} найдутся также две унитарные матрицы: $m \times m$-матрица P и $n \times n$-матрица Q, что

$$PU_{mn}Q = (I^{(m)}, 0).$$

Отсюда следует, что $(I^{(m)}, 0)\overline{Q}'\overline{V}' = 0$, т. е. $VQ = (0, W)$, где W — унитарная матрица порядка $n-m$. Поэтому

$$\int_V f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}\right] \dot{V} = \int_W f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ (0, W) \end{pmatrix}\right] \dot{W}.$$

В силу (4.7.3), где положено $n-m$ вместо n и $Z=0$, имеем

$$\int_V f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}\right] \dot{V} = V(\mathfrak{U}_{n-m}) f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Из (4.7.4) следует теперь, что

$$f\left[\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{V(\mathfrak{U}_{n-m})}{V(\mathfrak{U}_n)} \int_{U_{mn}} f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ 0 \end{pmatrix}\right] [\det(I - Z\overline{U}'_{mn})]^{-n} \dot{U}_{mn},$$

откуда и получаем формулу (4.7.2) для ядра Коши.

2°. Характеристическое многообразие области $\mathfrak{R}_{II}$ определяется из условия $U\overline{U} = I$, т. е. оно совпадает с множеством симметрических унитарных матриц. Поскольку размерность $\mathfrak{C}_{II}$ равна половине размерности $\mathfrak{R}_{II}$, то теорема 4.6.3 сразу дает нам

$$H(Z, \overline{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})} \cdot [\det(I - Z\overline{U})]^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{4.7.6}$$

где (см. § 3.5)

$$V(\mathfrak{C}_{II}) = 2^{\frac{n(3n+1)}{4}} \cdot \pi^{\frac{n(n+1)}{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n-\nu+1)}.$$

3°. Характеристическое многообразие области $\mathfrak{R}_{III}$ совпадает с множеством матриц K, определенных равенством (3.6.16).

Для четного n

$$H(Z, \overline{K}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III})} \cdot [\det(I + Z\overline{K})]^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{4.7.7}$$

где (см. § 3.7)

$$V(\mathfrak{C}_{III}) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \cdot (8\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}} \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s)}, \quad \nu = \frac{n}{2}.$$

Для нечетного n

$$H(Z, \overline{K}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III})} \cdot \{\det(I + Z\overline{K})\}^{-\frac{n}{2}}, \tag{4.7.8}$$

где

$$V(\mathfrak{C}_{III}) = 2\pi \frac{1}{2^{\nu-1}} \cdot (8\pi)^{\frac{n(n+1)}{4}} \cdot \prod_{s=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s)}, \quad \nu = \frac{n+1}{2}.$$

Равенство (4.7.7) получается сразу из теоремы 4.6.3, а (4.7.8) мы выведем сейчас из (4.7.7). Взяв $n+1$ вместо n, напишем формулу Коши с ядром (4.7.7)

$$f(Z)=\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{K} f(K)\{\det(I+Z\overline{K})\}^{-\frac{n}{2}}\dot{K}, \tag{4.7.9}$$

где Z и K — матрицы порядка $(n+1)$, а $V=V\left(\mathfrak{S}_{\mathrm{III}}^{(n+1)}\right)$. Положим

$$Z=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix},\ \text{где } Z_1 — (n\times n)\text{-матрица}$$

и соответственно

$$K=\begin{pmatrix}0 & k\\ -k' & K_1\end{pmatrix},\ \text{где } K_1 — (n\times n)\text{-матрица},\ k — (1\times n)\text{-матрица}.$$

Тогда

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{V}\int\limits_{K_1}\{\det(I+Z_1\overline{K}_1)\}^{-\frac{n}{2}}\dot{K}_1\int\limits_{k} f\left(\begin{pmatrix}0 & k\\ -k' & K_1\end{pmatrix}\right)\dot{k}. \tag{4.7.10}$$

Так как K унитарна, то

$$k\overline{k}'=1,\ k\overline{K}_1'=0;\ k'\overline{k}+K_1\overline{K}_1'=I^{(n)}.$$

Поскольку матрица $I-K_1\overline{K}_1'=k'\overline{k}$ имеет ранг единица и, кроме того, $\left(I-K_1\overline{K}_1'\right)^2=k'\overline{k}k'\overline{k}=k'\overline{k}=I-K_1\overline{K}_1'$, то найдется унитарная матрица U, такая, что

$$U\left(I-K_1\overline{K}_1'\right)\overline{U}'=[1,\ 0,\ \ldots,\ 0],$$

т. е.

$$UK_1\overline{K}_1'\overline{U}'=[0,\ 1,\ \ldots,\ 1]=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}}',$$

где

$$F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\dot{+}\ \ldots\ \dot{+}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как элемент в левом верхнем углу матрицы $UK_1\overline{K}_1'\overline{U}'$ равен нулю, то первая строка матрицы UK_1 состоит из одних нулей, т. е.

$$UK_1=\begin{pmatrix}0,\ 0,\ \ldots,\ 0\\ *\end{pmatrix}.$$

Из того, что UK_1U' — кососимметрическая матрица, мы имеем

$$UK_1U'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix},$$

где Q — кососимметрическая матрица порядка $n-1$, причем $Q\overline{Q}'=$ $=I=F\overline{F}'$. Но раз Q — унитарная кососимметрическая матрица, то

найдется такая унитарная матрица V_0, что $V_0QV_0'=F$. Следовательно, найдется и такая унитарная матрица U_0, что

$$\bar{U}_0'K_1\bar{U}_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}.$$

Положим $h=k\bar{U}_0$, тогда

$$h\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}'=k\bar{U}_0U_0'\bar{K}_1'U_0=0.$$

Это значит, что

$$h=[e^{i\theta},\ 0,\ \ldots,\ 0].$$

Таким образом, внутренний интеграл в формуле (4.7.10) равен

$$\int_0^{2\pi} f\left[\begin{pmatrix}0 & hU_0'\\ -U_0h' & K_1\end{pmatrix}\right]d\theta=2\pi f\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & K_1\end{pmatrix}\right]$$

и мы получаем (4.7.8) из (4.7.10).

[Мы воспользовались формулой

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z_1e^{i\theta},\ \ldots,\ z_ne^{i\theta})\,d\theta=\varphi(0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

справедливой для $\varphi(z)$, аналитической в замкнутой круговой области с центром в начале, и z, лежащих в этой области.]

4°. Характеристическое многообразие области $\mathfrak{R}_{IV}$ состоит из векторов вида $e^{i\theta}x$, где $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, а $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — вещественный вектор, удовлетворяющий условию $xx'=1$.

$$H(z,\ \theta,\ x)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{IV})\,[(x-e^{-i\theta}z)(x-e^{-i\theta}z)']^{n/2}},\qquad(4.7.11)$$

Легко вычислить величину объема $V(\mathfrak{C}_{IV})$:

$$V(\mathfrak{C}_{IV})=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

§ 4.8. Ядро Пуассона для круговых областей

Пусть $\mathfrak{R}$, как и в § 4.5, звездообразная круговая область, а $\mathfrak{C}$ — ее характеристическое многообразие, транзитивное относительно группы Γ_0 движений $\mathfrak{R}$, оставляющих начало неподвижным. Тогда по теореме 4.6.1 существует ядро Коши для области $\mathfrak{R}$, и для любой функции $f(z)$, аналитической в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, имеет место формула Коши.

Полагая, в частности,

$$f(z)=H(z,\ \bar{w})\,g(z),$$

где $g(z)$ — произвольная функция, аналитическая в $\mathfrak{R}$ и на ее

границе, имеем

$$H(z, \overline{w})\, g(z) = \int\limits_{\mathfrak{C}} H(z, \overline{\xi})\, H(\xi, \overline{w})\, g(\xi)\, \dot{\xi}.$$

При $w = z$ получаем формулу Пуассона

$$g(z) = \int\limits_{\mathfrak{C}} P(z, \xi)\, g(\xi)\, \dot{\xi}, \tag{4.8.1}$$

где ядро

$$P(z, \xi) = \frac{H(z, \overline{\xi})\, H(\xi, \overline{z})}{H(z, \overline{z})} \tag{4.8.2}$$

уже встречалось нам под названием ядра Пуассона области $\mathfrak{R}$.

Пока мы установили, что формула (4.8.1) справедлива для аналитических $g(z)$, но она переносится и на другие классы функций (см. § 5.8). Для любой непрерывной функции $u(\xi)$ интеграл

$$u(z) = \int\limits_{\mathfrak{C}} P(z, \xi)\, u(\xi)\, \dot{\xi} \tag{4.8.3}$$

определяет некоторую функцию. Можно показать (см. § 5.8), что $u(z) \to u(\xi)$ при $z \to \xi$. Функции вида (4.8.3) мы будем называть гармоническими в $\mathfrak{R}$ функциями. Можно ожидать, что если на $\mathfrak{C}$ имеется полная ортонормальная система $\{\psi_\nu(\xi)\}$, то множество функций, гармонических в $\mathfrak{R}$, является замыканием линейной оболочки системы $\{\psi_\nu(z)\}$ (см. § 5.10).

Если $\mathfrak{R}$ удовлетворяет предположениям теоремы 4.6.3, то ядро Пуассона записывается в следующем простом виде:

$$P(z, \xi) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})} \cdot |B(\xi, z, U)|. \tag{4.8.4}$$

В заключение приведем ядра Пуассона для классических областей.

1) Для $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

$$P(Z, U) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \cdot \frac{[\det(I - Z\overline{Z}')]^n}{|\det(I - Z\overline{U}')|^{2n}}, \tag{4.8.5}$$

где $U \in \mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$. В частности, при $m = n$ можно также написать

$$P(Z, U) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \cdot \frac{[\det(I - Z\overline{Z}')]^n}{|\det(Z - U)|^{2n}}.$$

2) Для $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$

$$P(Z, U)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})}\cdot\frac{[\det(I-Z\bar{Z})]^{\frac{n+1}{2}}}{|\det(I-Z\bar{U})|^{n+1}}, \tag{4.8.6}$$

где $U\in\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$.

3) Для $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ при четном n

$$P(Z, K)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})}\cdot\frac{[\det(I+Z\bar{Z})]^{\frac{n-1}{2}}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{n-1}}, \tag{4.8.7}$$

а при нечетном n

$$P(Z, K)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})}\cdot\frac{[\det(I+Z\bar{Z})]^{\frac{n}{2}}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{n}}. \tag{4.8.8}$$

В обоих случаях $K\in\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$.

4) Для $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$

$$P(z, \xi)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}})}\cdot\frac{(1+|zz'|^2-2\bar{z}z')^{\frac{n}{2}}}{|(z-\xi)(z-\xi)'|^{n}}, \tag{4.8.9}$$

где $\xi\in\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$.

Глава V

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

§ 5.1. Ортогональные системы в пространстве прямоугольных матриц

Обозначим через $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ вектор в m-мерном комплексном пространстве. Через $x^{[f]}$ мы будем обозначать вектор с компонентами

$$\sqrt{\frac{f!}{s_1! \ldots s_m!}}\, x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_m^{s_m} \qquad (s_1+\ldots+s_m=f), \tag{5.1.1}$$

размерность которого

$$\frac{1}{f!}\, m(m+1)\ldots(m+f-1). \tag{5.1.2}$$

Когда вектор x преобразовывается в вектор y линейным преобразованием с матрицей P, то вектор $x^{[f]}$ преобразовывается в вектор $y^{[f]}$ линейным преобразованием с матрицей $P^{[f]}$. Вектор $x^{[f]}$ мы назовем f-й симметризованной кронекеровской степенью вектора x, а матрицу $P^{[f]}$ — f-й симметризованной кронекеровской степенью матрицы P.

Очевидно, что выражение (5.1.1) содержит все одночлены степени f, т. е. любая однородная форма от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ степени f является линейной комбинацией выражений вида (5.1.1). Любой многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ является линейной комбинацией выражений вида (5.1.1), если f придавать значения 0, 1, 2, ...

Соотношение

$$\operatorname{Sp}\left((P\times Q)^{[f]}\right)= \\ = \sum_{\substack{f_1+\ldots+f_m=f \\ f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_m\geqslant 0}} \chi_{f_1,\ldots,f_m}(P)\cdot\chi_{f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0}(Q), \quad \begin{matrix} P\in GL(m), \\ Q\in GL(n), \end{matrix} \tag{5.1.3}$$

составляющее утверждение теоремы 1.4.1, в терминах теории представлений может быть сформулировано следующим образом: f-я симметризованная кронекеровская степень кронекеровского произведения $GL(m)$ на $GL(n)$ может быть разложена в прямую сумму неприводимых компонент, причем каждая из компонент встречается ровно один раз. Эти неприводимые компоненты являются кронекеровским

произведением представления $GL(m)$ с сигнатурой $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ и представления $GL(n)$ с сигнатурой $(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)$. (Мы предполагаем всюду, что $n \geqslant m$.)

Для пояснения рассмотрим преобразование

$$W = P'ZQ, \tag{5.1.4}$$

где преобразуемыми переменными являются $m \times n$-матрицы Z и W, а $m \times m$-матрица P и $n \times n$-матрица Q определяют преобразование. Расположим элементы матриц Z и W в виде векторов

$$\left.\begin{aligned} z &= (z_{11}, \ldots, z_{1n}, z_{21}, \ldots, z_{2n}, \ldots, z_{m1}, \ldots, z_{mn}), \\ w &= (w_{11}, \ldots, w_{1n}, w_{21}, \ldots, w_{2n}, \ldots, w_{m1}, \ldots, w_{mn}). \end{aligned}\right\} \tag{5.1.5}$$

Преобразование (5.1.4) матрицы Z в матрицу W индуцирует некоторое преобразование вектора z в вектор w. Матрица этого преобразования равна кронекеровскому произведению матриц P и Q, т. е. $P \times Q$, а матрицей соответствующего преобразования $z^{[f]}$ в $w^{[f]}$ служит $(P \times Q)^{[f]}$. Изложенная выше теорема утверждает, что инвариантное при этом преобразовании подпространство $z^{[f]}$ разбивается в прямую сумму подпространств с размерностями

$$q(f_1, \ldots, f_m) = N(f_1, \ldots, f_m) \cdot N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0). \tag{5.1.6}$$

Обозначим через

$$\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(z), \quad i = 1, 2, \ldots, q(f_1, \ldots, f_m), \tag{5.1.7}$$

компоненты $z^{[f]}$. Когда Z преобразуется в W преобразованием (5.1.4), то $\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(z)$ преобразуются в линейные комбинации от $\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(w)$ посредством матрицы

$$A_{f_1, \ldots, f_m}(P) \times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(Q). \tag{5.1.8}$$

Группа движений $\mathfrak{R}_1$, оставляющих начало неподвижным, состоит из преобразований вида

$$W = U'ZV,$$

где U и V — унитарные матрицы порядков m и n соответственно. Для различных $(f_1, \ldots, f_m)$ представления

$$A_{f_1, \ldots, f_m}(U) \times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(V)$$

не эквивалентны. Следовательно, по лемме Шура

$$\int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \psi^{(i)}_f(z)\, \overline{\psi^{(j)}_g(Z)} \cdot \dot{Z} = \delta_{fg} \cdot \delta_{ij} \cdot \rho_f \tag{5.1.9}$$

[f обозначает сокращенно $(f_1\, f_2, \ldots, f_m)$], где ρ_f не зависит от i. Таким образом, множество функций

$$\left\{ \psi^{(i)}_f(Z) \right\}_{i, f}$$

образует ортогональную систему. Из результатов гл. IV следует, что эта система полна. Нам остается вычислить интегралы

$$\rho_f = \int\limits_{I-Z\bar{Z}'>0} |\psi_f^{(i)}(Z)|^2 \dot{Z}. \tag{5.1.10}$$

Для этой цели мы прежде всего уточним процесс получения функций $\psi_f^{(i)}(Z)$. Вектор, полученный из матрицы Z, преобразуется посредством матрицы (5.1.8), когда матрица Z подвергается преобразованию (5.1.4). Для диагональной матрицы $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ матрица $A_{f_1, \ldots, f_n}(\Lambda)$ также диагональна. Располагая в подходящем порядке строки и столбцы, мы можем считать, что

$$\lim_{\substack{\lambda_{m+1} \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_n \to 0}} A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(\Lambda) = \begin{pmatrix} A_{f_1, \ldots, f_m}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что и для

$$X = \begin{pmatrix} X_1^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(X) = \begin{pmatrix} A_{f_1, \ldots, f_m}(X_1^{(m)}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1.11}$$

Дополним теперь, $m \times n$-матрицу Z, $n \geqslant m$, до квадратной матрицы порядка n

$$\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\left[\begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\left[\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}\right] \times$$
$$\times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(Q) = A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\left[\begin{pmatrix} P'ZQ \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Отсюда следует, что

$$A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\left[\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} L(Z) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.12}$$

и

$$A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(P') \cdot L(Z) \cdot A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(Q) = L(P'ZQ). \tag{5.1.13}$$

Матрица $L(Z)$ имеет $N(f_1, \ldots, f_m)$ строк и $N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)$ столбцов, ее элементы являются формами степени f от элементов Z.

Если элементы матрицы $L(Z)$ расположить в виде вектора $l(Z)$, то при соответствующем преобразовании Z в W вектор $l(Z)$ преобразуется в вектор $l(W)$ матрицей

$$A_{f_1, \ldots, f_m}(P) \times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(Q).$$

Значит, мы можем считать, что $\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(Z)$ совпадают с элементами матрицы $L(Z)$, расположенными в некотором порядке. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{q(f_1, \ldots, f_m)} \left|\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(Z)\right|^2 = \operatorname{Sp}\{L(Z)\,\overline{L(Z)'}\},$$

и мы имеем

$$q(f_1, \ldots, f_m)\,\rho_{f_1, \ldots, f_m} = \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \operatorname{Sp}\{L(Z)\,\overline{L(Z)'}\}\,\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \operatorname{Sp}\left[A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} \overline{A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}'}\right]\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \operatorname{Sp}[A_{f_1, \ldots, f_m}(Z\bar{Z}')]\,\dot{Z} = \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \chi_{f_1, \ldots, f_m}(Z\bar{Z}')\,\dot{Z}. \quad (5.1.14)$$

§ 5.2. Интегралы от функций, инвариантных при преобразованиях $Z \to \Gamma Z \Gamma^{-1}$

Рассмотрим интеграл вида

$$\Omega = \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \chi(Z\bar{Z}')\,\dot{Z}, \quad (5.2.1)$$

где $\chi(W)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\chi(\Gamma W \Gamma^{-1}) = \chi(W) \quad (5.2.2)$$

для любой невырожденной квадратной матрицы Γ.

Пусть сначала $m = n$. Тогда по теореме 3.4.4. имеем

$$\Omega = \frac{2^{-n^2}}{n}\,\omega_n \omega'_n \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \chi([\lambda_1, \ldots, \lambda_n])\,D^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_n, \quad (5.2.3)$$

где

$$\omega_n = V(\mathfrak{U}_n), \quad \omega'_n = V([\mathfrak{U}_n]).$$

Для случая, когда $\chi = \chi_f$, интеграл (5.2.3) может быть вычислен с помощью следующей теоремы.

Теорема 5.2.1.

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \det\left|\lambda_j^{l_i}\right|_{i,j=1}^n \cdot \det\left|\lambda_j^{m_i}\right|_{i,j=1}^n (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{a-1}\, d\lambda_1 \dots d\lambda_n =$$

$$= n!\,\frac{D(l_1, \dots, l_n)\, D(m_1, \dots, m_n)}{\prod\limits_{j=1}^n \prod\limits_{i=1}^n (a + l_j + m_i)}. \qquad (5.2.4)$$

Доказательство. Поскольку подинтегральная функция равна

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{a-1} \sum_j \delta_{j_1 \dots j_n}^{1 \dots n} \lambda_{j_1}^{l_1} \dots \lambda_{j_n}^{l_n} \cdot \sum_s \delta_{s_1 \dots s_n}^{1 \dots n} \lambda_{s_1}^{m_1} \dots \lambda_{s_n}^{m_n} =$$

$$= (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{a-1} \sum_j \lambda_{j_1}^{l_1} \dots \lambda_{j_n}^{l_n} \cdot \sum_k \delta_{k_1 \dots k_n}^{1 \dots n} \lambda_{j_1}^{m_{k_1}} \dots \lambda_{j_n}^{m_{k_n}},$$

то, интегрируя по λ_j от нуля до единицы, мы найдем, что интеграл, стоящий в левой части (5.2.4), равен

$$\sum_j \sum_s \delta_{s_1 \dots s_n}^{1 \dots n} \int_0^1 \dots \int_0^1 \lambda_{j_1}^{l_1 + m_{s_1} + a - 1} \dots \lambda_{j_n}^{l_n + m_{s_n} + a - 1}\, d\lambda_1 \dots \delta\lambda_n =$$

$$= \sum_j \sum_s \delta_{s_1 \dots s_n}^{1 \dots n} \frac{1}{l_1 + m_{s_1} + a} \dots \frac{1}{l_n + m_{s_n} + a} =$$

$$= \sum_j \det\left(\frac{1}{l_i + m_k + a}\right)_1^n = n! \det\left(\frac{1}{l_i + m_k + a}\right)_1^n;$$

для завершения доказательства используется теорема 1.1.3.

В частности, полагая

$$m_1 = n - 1,\ m_2 = n - 2,\ \dots,\ m_n = 0,\ a = 1,$$

мы получаем

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \chi_f([\lambda_1, \dots, \lambda_n])\, D^2(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_n =$$

$$= n!\,((n-1)! \dots 2!\,1!)^2 \prod_{j=1}^n \frac{l_j!}{(l_j + n)!} N(f_1, \dots, f_n), \qquad (5.2.5)$$

где $l_j = f_j + n - j$.

Таким образом, при $m = n$ мы имеем

$$\Omega = \frac{1}{n!}\, 2^{-n^2} \omega_n \omega_n' n!\,((n-1)! \dots 2!\,1!)^2 \prod_{j=1}^n \frac{l_j!}{(l_j + n)!} N(f_1, \dots, f_n) =$$

$$= \pi^{n^2} \prod_{j=1}^n \frac{l_j!}{(l_j + n)!} N(f_1, \dots, f_n). \qquad (5.2.6)$$

Теперь рассмотрим случай $m \leqslant n$. Пусть

$$X = X^{(n)} = \begin{pmatrix} Z \\ * \end{pmatrix};$$

согласно теореме 2.2.2 мы имеем

$$\int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \chi(Z\bar{Z}')\,[\det(I - Z\bar{Z}')]^{\lambda}\,\dot{Z} =$$

$$= c_1 \int\limits_{I - X\bar{X}' > 0} \chi(Z\bar{Z}')\,[\det(I - Z\bar{Z}')]^{\lambda - (n-m)}\,\dot{X}, \qquad (5.2.7)$$

где

$$c_1 = \frac{n!\,(n+1)!\,\ldots\,(2n-m-1)!}{1!\,2!\,\ldots\,(n-m-1)!}\,\pi^{-n(n-m)},$$

а λ — комплексный параметр, от которого требуется только, чтобы интеграл в правой части (5.2.7) сходился. Представим X в виде TU, где U — унитарная, а T — треугольная (с нулями выше диагонали) матрица с вещественными диагональными элементами. Записывая T в виде

$$T = \begin{pmatrix} T_1^{(m)} & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix},$$

сразу получаем $Z = (T_1, 0)\,U$, $Z\bar{Z}' = T_1\bar{T}_1'$, откуда (по теореме 3.4.3)

$$\int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \chi(Z\bar{Z}')\,[\det(I - Z\bar{Z}')]^{\lambda} \cdot \dot{Z} =$$

$$= \frac{c_1\omega_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int\limits_{I - T\bar{T}' > 0} \chi(T_1\bar{T}_1')\,[\det(I - T_1\bar{T}_1')]^{\lambda - (n-m)}\, t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^{3} t_n \cdot \dot{T}. \qquad (5.2.8)$$

Заметим, что

$$I - T\bar{T}' = \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1' & -T_1\bar{T}_2' \\ -T_2\bar{T}_1' & I - T_2\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1' & -T_1\bar{T}_2' \\ -T_2\bar{T}_1' & I - T_2\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \bar{P}' \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1' & 0 \\ 0 & I - T_2(I - \bar{T}_1'T_1)^{-1}\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix},$$

где $P = T_2\bar{T}_1'(I - T_1\bar{T}_1')^{-1}$. Так как $I - \bar{T}_1'T_1$ — положительно определенная матрица, то найдется такая матрица Γ, что $(I - \bar{T}_1'T_1)^{-1} = \Gamma\bar{\Gamma}'$.

Положив $Q = T_2\Gamma$, получим

$$\dot{Q} = (\det \Gamma\overline{\Gamma}')^{n-m}\,\dot{T}_2 = \{\det(I - T_1\overline{T}_1')\}^{-n+m}\cdot\dot{T}_2.$$

Поэтому

$$\int\limits_{I-Z\overline{Z}'>0} \chi(Z\overline{Z}')\,[\det(I - Z\overline{Z}')]^{\lambda}\,\dot{Z} =$$

$$= \frac{c_1\omega_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int\limits_{1-T_1\overline{T}_1'>0} \chi(T_1\overline{T}_1')\,[\det(I - T_1\overline{T}_1')]^{\lambda}\, t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_m^{2(n-m)+1}\,\dot{T}_1 \times$$

$$\times \int\limits_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\ldots t_n\cdot\dot{Q}\cdot\dot{T}_3. \qquad (5.2.9)$$

Это верно для любого λ. Полагая, в частности, $\lambda = 0$, имеем

$$\Omega = \frac{c_1\omega_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int\limits_{I-T_1\overline{T}_1'>0} \chi(T_1\overline{T}_1')\cdot t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_m^{2(n-m)+1}\,\dot{T} \times$$

$$\times \int\limits_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\ldots t_n\cdot Q\dot{T}_3. \qquad (5.2.10)$$

Вычислим сначала последний интеграл. Так как $I - T_3\overline{T}_3'$ — положительно определенная эрмитова матрица, то найдется такая матрица Γ, что $I - T_3\overline{T}_3' = \Gamma\overline{\Gamma}'$. Положим $Q = \Gamma R$. Тогда

$$\dot{Q} = (\det \Gamma\overline{\Gamma}')^{n-m}\cdot\dot{R} = \{\det(I - T_3\overline{T}_3')\}^{n-m}\cdot\dot{R}.$$

Значит,

$$\int\limits_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m+1)-1}\ldots t_n\cdot\dot{Q}\dot{T}_3 =$$

$$= \int\limits_{I-R\overline{R}'>0} \dot{R}\cdot \int\limits_{I-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\ldots t_n\,[\det(I - T_3\overline{T}_3')]^{n-m}\cdot\dot{T}_3 =$$

$$= \frac{V_{m,\,n-m}}{\omega_{n-m}\cdot 2^{-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}}} \int\limits_{I-Z_3\overline{Z}_3'>0} [\det(I - Z_3\overline{Z}_3')]^{n-m}\cdot\dot{Z}_3 \qquad (5.2.11)$$

(по теореме 3.4.3).

Далее,

$$\int\limits_{I-T_1\overline{T}_1'>0} \chi\left(T_1\overline{T}_1'\right)\cdot t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_m^{2(n-m)+1}\cdot \dot{T}_1 =$$

$$= \frac{2^{\frac{m(m-1)}{2}}}{\omega_m} \int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \chi\left(Z_1\overline{Z}_1'\right)\left\{\det Z_1\overline{Z}_1'\right\}^{n-m}\cdot \dot{Z}_1. \quad (5.2.12)$$

Согласно (5.2.10) имеем

$$\Omega = C \int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \chi\left(Z_1\overline{Z}_1'\right)\left(\det Z_1\overline{Z}_1'\right)^{n-m}\cdot \dot{Z}_1, \quad (5.2.13)$$

где C — постоянная, зависящая только от m и n, значение которой мы вычислим следующим образом.

Взяв $\chi\left(Z_1\overline{Z}_1'\right)=1$, получим [ср. (5.2.1)]

$$V_{m,n} = C \int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \left(\det Z_1\overline{Z}_1'\right)^{n-m}\cdot \dot{Z}_1 =$$

$$= C\cdot \pi^{m^2}\frac{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!}{n!\,(n+1)!\ldots(n+m-1)!}.$$

Но $V_{m,n} = V(\mathfrak{R}_1)$, так что (теорема 2.2.1)

$$C = V_{m,n}\cdot \pi^{-m^2}\frac{n!\,(n+1)!\ldots(n+m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!} =$$

$$= \pi^{m(n-m)}\frac{1!\,2!\ldots(m-1)!\;1!\,2!\ldots(n-1)!}{1!\,2!\ldots(n+m-1)!}\times$$

$$\times\frac{n!\,(n+1)!\ldots(n+m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!} =$$

$$= \pi^{m(n-m)}\frac{1!\,2!\ldots(m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!} = V_{m,n-m}.$$

Следовательно,

$$\Omega = V_{m,n-m}\int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \chi\left(Z_1\overline{Z}_1'\right)\left(\det Z_1\overline{Z}_1'\right)^{n-m}\dot{Z}_1. \quad (5.2.14)$$

При $\chi(X) = \chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)$, поскольку

$$\chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)\,(\det X)^{n-m} = \chi_{f_1+n-m,\ldots,f_m+n-m}(X),$$

мы получаем в силу (5.2.6)

$$\int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \chi_f(Z_1\overline{Z}_1')(\det Z_1\overline{Z}_1')^{n-m}\cdot \dot{Z}_1 =$$

$$= \frac{\omega_m\omega_m'}{2^{\frac{m(m+1)}{2}}}[1!2!\ldots(m-1)!]^2\cdot\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\ldots,f_m)=$$

$$=\pi^{m^2}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}\cdot N(f_1,\ldots,f_m). \qquad (5.2.15)$$

Отсюда, окончательно,

$$\Omega=\pi^{m^2}V_{m,n-m}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\ldots,f_m), \qquad (5.2.16)$$

где $l_j=f_j+m-j$.

§ 5.3. Ортогональная система и ядро Бергмана

Теперь мы имеем для $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ ортогональную систему функций

$$(\rho_{f_1,\ldots,f_m})^{-\frac{1}{2}}\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_m}(Z), \qquad i=1,2,\ldots,q(f_1,\ldots,f_m),$$

которые были получены по рецепту § 5.1. Эта система полна. С помощью этой системы мы еще раз найдем ядро Бергмана для $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

Положим в теореме 1.2.5 $\rho=m+1$. Тогда при $|\lambda_i|<1$ имеем

$$\left(\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda_i)\right)^{-n-m}=C_{m+1}\sum_{l_1>\ldots>l_m\geqslant 0}a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0)\cdot\chi_{f_1,\ldots,f_m}([\lambda_1,\ldots,\lambda_m]), \qquad (5.3.1)$$

где

$$l_j=f_j+m-j,\quad a_l=\frac{(m+l)!}{m!\,l!},\quad C_{m+1}=\frac{1}{a_{n-m}\ldots a_{n-1}}.$$

Так как $\chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)$ и $\det(I-X)$ инвариантны относительно преобразований $X_1=\Gamma X\Gamma^{-1}$, то отсюда следует равенство

$$[\det(I-W\overline{Z}')]^{-(n+m)}=$$

$$=C_{m+1}\sum_{l_1>\ldots>l_m\geqslant 0}a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0)\chi_{f_1,\ldots,f_m}(W\overline{Z}') \qquad (5.3.2)$$

при условии, что собственные значения матрицы $W\overline{Z}'$ по модулю не превосходят единицы. Если W и Z принадлежат $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, т. е.

$$I - W\overline{W}' > 0, \quad I - Z\overline{Z}' > 0,$$

то нетрудно убедиться, что это условие всегда выполнено.

Мы знаем, что

$$K(Z, \overline{W}) = \sum_{f, i} \frac{\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(Z)\overline{\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(W)}}{\rho_{f_1, \ldots, f_m}} = \sum_{f} \frac{\chi_{f_1, \ldots, f_m}(Z\overline{W}')}{\rho_{f_1, \ldots, f_m}} \tag{5.3.3}$$

Из (5.1.14) и (5.2.16) следует, что

$$q(f_1, \ldots, f_m) \cdot \rho_{f_1, \ldots, f_m} = \pi^{m^2} V_{m, n-m} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{(l_j + n - m)!}{(l_j + n)!} N(f_1, \ldots, f_m). \tag{5.3.4}$$

Подставляя в (5.3.3), получаем

$$K(Z, \overline{W}) = \frac{\pi^{-m^2}}{V_{m, n-m}} \sum_{f} \prod_{j=1}^{m} \frac{(l_j + n)!}{(l_j + n - m)!} \times$$

$$\times N(f_1 \ldots, f_m, 0, \ldots, 0) \chi_{f_1, \ldots, f_m}(Z\overline{W}'),$$

откуда с помощью (5.3.2) находим

$$K(Z, \overline{W}) = \frac{\pi^{-m^2}}{V_{m, n-m}} \cdot a_{n-m} \ldots a_{n-1} \cdot (m!)^m \{\det(I - Z\overline{W}')\}^{-m-n} =$$

$$= c\{\det(I - Z\overline{W}')\}^{-m-n},$$

где

$$c^{-1} = \pi^{m^2} V_{m, n-m} \prod_{i=1}^{m} \frac{(n-i)!}{(m+n-i)!} =$$

$$= \pi^{mn} \cdot \frac{1!\,2! \ldots (m-1)!}{n!\,(n+1)! \ldots (n+m-1)!} = V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}).$$

Таким образом, мы еще раз получили формулу

$$K(Z, \overline{W}) = \frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})} \{\det(I - Z\overline{W}')\}^{-m-n}.$$

§ 5.4. Гармонический анализ на характеристическом многообразии

Пусть для определенности $n \geqslant m$, и пусть U — $m \times n$-матрица, удовлетворяющая условию

$$U\overline{U}' = I^{(m)}. \tag{5.4.1}$$

Совокупность всех таких матриц образует многообразие $\mathfrak{U}_{m,n}$, совпадающее с множеством классов смежности унитарной группы $\mathfrak{U}_n$ относительно ее подгруппы $\mathfrak{U}_{n-m}$, состоящей из матриц вида

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 \\ 0 & U^{(n-m)} \end{pmatrix}.$$

Более подробно, положим

$$U_n = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ P \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ Q \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$U_n V_n^{-1} = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ Q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если $f(U)$ определена на $\mathfrak{U}_{m,n}$, т. е. постоянна на классах смежности группы $\mathfrak{U}_n$ по указанной подгруппе, то

$$\int\limits_{\mathfrak{U}_n} f(U)\dot{U}_n = \int\limits_{\mathfrak{U}_{m,n}} f(U)\dot{U} \cdot \int\limits_{\mathfrak{U}_{n-m}} \dot{U}_{n-m}.$$

В этом случае определим интеграл по $\mathfrak{U}_{m,n}$ равенством

$$\int\limits_{\mathfrak{U}_{m,n}} f(U)\dot{U} = \frac{1}{\omega_{n-m}} \int\limits_{\mathfrak{U}_n} f(U)\dot{U}_n. \tag{5.4.2}$$

Объем $\mathfrak{U}_{m,n}$, как нетрудно видеть, равен

$$\frac{\omega_n}{\omega_{n-m}} = \frac{(2\pi)^{mn-\frac{m(m-1)}{2}}}{(n-m)!\ldots(n-1)!}.$$

Обозначим (мы опять пишем f вместо $f_1, f_2, \ldots, f_m$)

$$P_f(U) = \left(\psi_f^{(1)}(U), \ldots, \psi_f^{(q(f))}(U)\right),$$

$$q(f) = N(f_1, \ldots, f_m)\, N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0),$$

где $\psi_f^{(i)}(Z)$ — построенные выше функции ортогональной системы в $\mathfrak{R}_1$. При преобразовании $U \to V'^{(m)}UW^{(n)}$ имеем

$$P_f\left(V'^{(m)}UW^{(n)}\right) = P_f(U) \cdot \left(A_{f_1, \ldots, f_m}(V) \times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(W)\right). \tag{5.4.3}$$

Полагая

$$\int\limits_{U\overline{U}'=I} P'_f(U)\,\overline{P_g(U)}\,\dot{U} = R = R^{(q(f),\,q(g))}$$

и замечая, что при преобразованиях $V'UW$, где V и W — унитарные матрицы порядков m и n, интеграл не меняется, мы получаем для матрицы R соотношение

$$R = A_1' R \overline{A_2},$$

$$A_1 = A_{f_1,\ldots,f_m}(V) \times A_{f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0}(W),$$

$$A_2 = A_{g_1,\ldots,g_m}(V) \times A_{g_1,\ldots,g_m,0,\ldots,0}(W).$$

Из этого соотношения следует, что при $f \neq g$ матрица $R = 0$, а при $f = g$ имеем $R = \beta_f \cdot I$. Иными словами, функции $\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_m}(U)$ образуют на $\mathfrak{S}_1$ ортогональную систему. Нам остается вычислить нормирующие множители β_f,

$$\beta_f = \int\limits_{U\overline{U}'=I} |\psi^{(i)}_f(U)|^2\,\dot{U},$$

которые, как это видно из условия $R = \beta_f \cdot I$, не зависят от f.

Поскольку

$$q(f)\,\beta_f = \int\limits_{U\overline{U}'=I} \sum_i |\psi^{(i)}_f(U)|^2\,\dot{U} =$$

$$= \int\limits_{U\overline{U}'=I} \chi_f(U\overline{U}')\,\dot{U} = N(f_1,\ldots,f_m) \int\limits_{U\overline{U}'=I} \dot{U},$$

мы имеем

$$\beta_f = \frac{c}{N(f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0)},$$

где

$$c = \frac{\omega_n}{\omega_{n-m}} = \frac{(2\pi)^{mn-\frac{m(m-1)}{2}}}{(n-m)!\ldots(n-1)!}.$$

Полагая в теореме 1.2.5 $\rho = 1$, получаем равенство

$$\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)^{-n} = \sum_{l_1>\ldots>l_m\geqslant 0} N(f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0) \times$$

$$\times \chi_{f_1,\ldots,f_m}([x_1,\ldots,x_m]) \quad (l_j = f_j + m - j).$$

Для $Z \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $U \in \mathfrak{U}_{m,n}$ собственные значения матрицы $Z\overline{U}'$ меньше единицы по модулю, так что

$$[\det(I - Z\overline{U}')]^{-n} =$$

$$= \sum_{l_1 > \ldots > l_m \geqslant 0} N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)\chi_{f_1, \ldots, f_m}(Z\overline{U}') =$$

$$= c \sum_f \frac{1}{\beta_f} \sum_i \psi_f^{(i)}(Z)\overline{\psi_f^{(i)}(U)}. \quad (5.4.4)$$

Отсюда легко заключить, что для $0 < r < 1$ ряд (5.4.4) равномерно сходится при Z, лежащих в области $rI - Z\overline{Z}' > 0$.

Если $f(U)$ — интегрируемая на $\mathfrak{U}_{m,n}$ функция, то, умножая (5.4.4) на $f(U)$ и интегрируя почленно, получаем

$$\int_{U\overline{U}'=I} [\det(I - Z\overline{U}')]^{-n} f(U)\,\dot{U} = \sum_{f,i} a_f^{(i)} \frac{\psi_f^{(i)}(Z)}{\sqrt{\beta_f}},$$

где

$$a_f^{(i)} = \frac{c}{\sqrt{\beta_f}} \cdot \int_{U\overline{U}'=I} f(U)\overline{\psi_f^{(i)}(U)} \cdot \dot{U}.$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 5.4.1. *Пусть $f(U)$ — интегрируемая функция, и пусть*

$$a_f^{(i)} = \frac{(2\pi)^{mn - \frac{m(m-1)}{2}}}{(n-m)! \ldots (n-1)!} \int_{U\overline{U}'=I} f(U) \frac{\overline{\psi_f^{(i)}(U)}}{\sqrt{\beta_f}} \dot{U}$$

— коэффициенты Фурье этой функции относительно ортонормальной системы

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta_f}} \psi_f^{(i)}(U) \right\}.$$

Тогда интеграл

$$\int_{U\overline{U}'=I} [\det(I - Z\overline{U}')]^{-n} f(U)\,\dot{U}$$

представляет в области $I - Z\overline{Z}' > 0$ аналитическую функцию, разлагающуюся в этой области в ряд

$$\sum_{f,i} a_f^{(i)} \frac{\psi_f^{(i)}(Z)}{\sqrt{\beta_f}}.$$

§ 5.5. Интегралы типа Коши

Мы ограничимся лишь случаем $m=n$, так как другие получаются совершенно аналогично. Мы попытаемся выяснить при каких Z существует интеграл

$$F(Z)=\int\limits_U f(U)\{\det(I-Z\overline{U}')\}^{-n}\cdot \dot{U} \tag{5.5.1}$$

при заданной интегрируемой функции $f(U)$.

Теорема 5.5.1. *Если все собственные значения матрицы $Z\overline{Z}'$ больше единицы или все меньше единицы, то для любой унитарной матрицы U*

$$\det(I-Z\overline{U}')\neq 0.$$

В противном случае всегда найдется такая унитарная матрица U, что

$$\det(I-Z\overline{U}')=0.$$

Доказательство. Предположим, что $\det(I-Z\overline{U}')=0$. Тогда найдется такой вектор z, что

$$z(I-Z\overline{U}')=0,$$

т. е.

$$z=zZ\overline{U}',\quad \overline{z}'=U\overline{Z}'\overline{z}',$$

значит,

$$z\overline{z}'=zZ\overline{Z}'\overline{z}',$$

откуда непосредственно следует первая половина утверждения.

Чтобы доказать вторую половину утверждения теоремы, заметим, прежде всего, что без ограничения общности мы можем считать, что

$$Z=[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n],\quad \lambda_\nu\geqslant 0.$$

Из равенства

$$\det\left[I-\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right]=\begin{vmatrix}1-\lambda_1\cos\theta & -\lambda_1\sin\theta\\ \lambda_2\sin\theta & 1-\lambda_2\cos\theta\end{vmatrix}=$$
$$=1-(\lambda_1+\lambda_2)\cos\theta+\lambda_1\lambda_2=0$$

находим

$$\cos\theta=\frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{5.5.2}$$

Если $\lambda_1\geqslant 1\geqslant\lambda_2$, то $1+\lambda_1\lambda_2\leqslant\lambda_1+\lambda_2$, так что θ, удовлетворяющее условию (5.5.2), существует, и вторая половина теоремы также доказана.

Теорема 5.5.2. *Интеграл* (5.5.1) *имеет смысл в каждой из двух областей $I-Z\overline{Z}'>0$ и $I-Z\overline{Z}'<0$.*

Перейдем теперь к более подробному изучению интегралов типа Коши. В первую очередь мы расширим определение функций $\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ на случай, f_i любых знаков. Мы сделаем это при помощи равенства

$$\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U)=\psi^{(i)}_{f_1-f_n,f_2-f_n,\ldots,f_{n-1}-f_n,0}(U)\cdot(\det U)^{f_n},$$

для любых $f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_n$. Пусть теперь ряд Фурье для $f(U)$ имеет вид

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_n}\sum_i a^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\cdot\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U).$$

Тогда для Z, принадлежащих области $I-Z\overline{Z}'>0$, имеем

$$F(Z)=\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i a^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(Z). \quad (5.5.3)$$

Для Z, принадлежащих области $I-Z\overline{Z}'<0$, имеем

$$F(Z)=\int\limits_{U\overline{U}'\leqslant 1} f(U)\left[\det(I-Z\overline{U}')\right]^{-n}\cdot\dot{U}=$$

$$=[-\det Z]^{-n}\int\limits_U f(U)(\det U)^n\cdot\left[\det\left(I-UZ^{-1}\right)\right]^{-n}\cdot\dot{U}.$$

Так как

$$(\det U)^n\left[\det\left(I-UZ^{-1}\right)\right]^{-n}=$$

$$=c(\det U)^n\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-1}\sum_i\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U)\cdot\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(Z^{-1}\right)$$

$$=c\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-1}\sum_i\psi^{(i)}_{f_1+n,\ldots,f_n+n}(U)\,\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(Z^{-1}\right),$$

то умножая на $f(U)$ и интегрируя почленно, получаем

$$F(Z)=\int\limits_{U\overline{U}'=1} f(U)\left[\det(I-Z\overline{U}')\right]^{-n}\cdot\dot{U}=$$

$$=(-\det Z)^{-n}\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i b^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(Z^{-1}\right),$$

где

$$b^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n} = c\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{U\overline{U}'=1} f(U)\,\psi^{(i)}_{f_1+n,\ldots,f_n+n}(U)\,\dot{U} =$$

$$= c\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{U\overline{U}'=1} f(U)\,\overline{\psi^{(i)}_{-f_n-n,\,-f_{n-1}-n,\ldots,-f_1-n}(U)}\cdot\dot{U} =$$

$$= a^{(i)}_{-f_n-n,\ldots,-f_1-n}\ ^{1)}.$$

Следовательно, в области $I - Z\overline{Z}' < 0$ интеграл (5.5.1) представляет аналитическую функцию от Z^{-1}, имеющую разложение

$$F(Z) = \sum_{f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0} \sum_i a^{(i)}_{-f_n-n,\ldots,-f_1-n}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \psi^{(i)}_{-f_n-n,\ldots,-f_1-n}(Z^{-} \qquad (5.5$$

---

1) Автор использует здесь соотношение $\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U) = \psi^{(i)}_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)$. Укажем, как это соотношение получается.

Рассмотрим неприводимое представление $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$. Тогда $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)} = A_{-f_n,\ldots,-f_1}(\overline{U})$ также является неприводимым представлением, и нужно показать, что оно эквивалентно исходному. Для этого воспользуемся понятием старшего веса неприводимого представления.

Пусть $U = \left[e^{i\varphi_1},\ldots,e^{i\varphi_n}\right]$ — диагональная матрица. Тогда $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ также является (в подходящем базисе) диагональной матрицей, на диагонали которой стоят числа вида $e^{i(m_1\varphi_1+\cdots+m_n\varphi_n)}$. Системы целых чисел $(m_1,\ldots,m_n)$ называют весами представления $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$. Упорядочим веса лексикографически. Тогда, как нетрудно показать, старшим весом представления $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ является как раз система $(f_1,\ldots,f_n)$, а младшим — система $(f_n,\ldots,f_1)$. Известно, что представлениями $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ исчерпываются с точностью до эквивалентности все неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ унитарных матриц. Следовательно, всякое неприводимое представление группы $\mathfrak{U}$ вполне определяется своим старшим (или младшим) весом.

Рассмотрим теперь представление $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)}$. Очевидно, что веса представлений $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)}$ и $A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)$ различаются лишь знаком. Поскольку младший вес представления $A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)$ есть $(-f_1,\ldots,-f_n)$, то старшим весом представления $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)}$ будет $(f_1,\ldots,f_n)$. Следовательно, представления $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)}$ и $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ эквивалентны, что и требовалось доказать. — *Прим. ред.*

§ 5.6. Дифференциальные операторы [1])

В первую очередь мы введем дифференциальный оператор

$$\partial_Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_{11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z_{m1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{mn}} \end{pmatrix}. \tag{5.6.1}$$

Пусть Γ_{I} — группа движений области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Известно (см. Хуа Ло-кен [1]), что Γ_{I} состоит из преобразований вида

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} = (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}' + \overline{C}'), \tag{5.6.2}$$

где A — $m \times m$-матрица, B — $m \times n$-матрица, C — $n \times m$-матрица, D — $n \times n$-матрица.

Эти матрицы удовлетворяют условиям

$$A\overline{A}' - B\overline{B}' = I, \quad A\overline{C}' = B\overline{D}', \quad C\overline{C}' - D\overline{D}' = -I, \tag{5.6.3}$$

которые можно также записать и в виде

$$\overline{A}'A - \overline{C}'C = I, \quad \overline{A}'B = \overline{C}'D, \quad \overline{B}'B - \overline{D}'D = -I. \tag{5.6.4}$$

Дифференцируя (5.6.2), имеем в силу (5.6.4)

$$\begin{aligned} dW &= [A - (AZ + B)(CZ + D)^{-1}C]\, dZ \cdot (CZ + D)^{-1} = \\ &= [A - (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}' + \overline{C}')C]\, dZ \cdot (CZ + D)^{-1} = \\ &= (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1}\, dZ \cdot (CZ + D)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

В контравариантной записи это дает нам

$$\partial'_W = (CZ + D)\,\partial'_Z\,(Z\overline{B}' + \overline{A}'). \tag{5.6.6}$$

Положив

$$W_1 = (AZ_1 + B)(CZ_1 + D)^{-1}, \tag{5.6.7}$$

имеем

$$\begin{aligned} I - \overline{W}'_1 W &= I - (\overline{Z}'_1\overline{C}' + \overline{D}')^{-1}(\overline{Z}'_1\overline{A}' + \overline{B}')(AZ + B)(CZ + D)^{-1} = \\ &= (\overline{Z}'_1\overline{C}' + \overline{D}')^{-1}(I - \overline{Z}'_1 Z)(CZ + D)^{-1} \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

и аналогично

$$I - W\overline{W}'_1 = (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1}(I - Z\overline{Z}'_1)(B\overline{Z}'_1 + A)^{-1}. \tag{5.6.9}$$

Обозначив

$$\Delta_Z = (I - Z\overline{Z}')\,\overline{\partial}_Z \cdot (I - \overline{Z}'Z) \cdot \partial'_Z,$$

[1]) Хуа Ло-кен и К. Лу [3].

мы получим, следовательно,

$$\Delta_W = (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1} \Delta_Z \cdot (Z\overline{B}' + \overline{A}'). \tag{5.6.10}$$

Оператор

$$\operatorname{Sp} \Delta_Z$$

мы назовем оператором Лапласа области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. [Заметим, что $\overline{\partial}_Z \cdot (I - \overline{Z}'Z)$ означает лишь формальное умножение матриц, т. е. элементы матрицы $I - \overline{Z}'Z$ не дифференцируются.] Более подробная запись оператора $\operatorname{Sp} \Delta_Z$ выглядит следующим образом:

$$\operatorname{Sp} \Delta_Z = \sum_{i,\, j=1}^{m} \sum_{\beta,\, \gamma=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{n} z_{i\alpha} \bar{z}_{j\alpha} \right) \left(\delta_{\beta\gamma} - \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_{k\beta} z_{k\gamma} \right) \frac{\partial^2}{\partial z_{i\gamma} \partial \bar{z}_{j\beta}}. \tag{5.6.11}$$

Это выражение для оператора Лапласа инвариантно относительно преобразований вида (5.6.2), т. е. относительно группы движений области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

Определение 1. Вещественную функцию $u(Z)$, удовлетворяющую уравнению $\operatorname{Sp} \Delta_Z \cdot u = 0$, мы назовем гармонической в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

§ 5.7. Смысл оператора Лапласа на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

Пусть $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$ означает замыкание $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Множество точек из $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$, таких, что матрица $I - Z\overline{Z}'$ имеет ранг r, обозначим через $\mathfrak{C}^{(r)}$, $r = 0, 1, \ldots, m$. Ясно, что $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$ равно сумме всех $\mathfrak{C}^{(r)}$, $r = 0, 1, \ldots, m$, и что $\mathfrak{C}^{(0)} = \mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{C}^{(m)} = \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

Определение 2. Пусть U и V — две фиксированные унитарные матрицы соответственно порядков m и n. Множество точек:

$$Z = U \begin{pmatrix} I^{(m-r)} & 0 \\ 0 & Z_0^{(r,\, n-m+r)} \end{pmatrix} V, \quad I - Z_0 \overline{Z}_0' > 0, \tag{5.7.1}$$

назовем r-накрывающей.

Очевидно, что каждая точка из $\mathfrak{C}^{(r)}$ содержится в некоторой r-накрывающей, но две различные накрывающие могут иметь общие точки.

Теперь мы перейдем к установлению смысла оператора Лапласа на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Пусть Z — точка на $\mathfrak{C}^{(r)}$, и пусть (5.7.1) — какая-либо из ее r-накрывающих. Поскольку оператор Лапласа инвариантен относительно преобразований $Z_1 = UZV$, то достаточно рассматривать r-накрывающие вида

$$Z = \begin{pmatrix} I^{(m-r)} & 0 \\ 0 & Z_0^{(r,\, n-m+r)} \end{pmatrix}, \quad I - Z_0 \overline{Z}_0' > 0. \tag{5.7.2}$$

Пусть функция $u(Z)$ определена в $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ и имеет непрерывные производные второго порядка по всем элементам Z на любой r-накрывающей, $r > 0$. Для точек r-накрывающей (5.7.2) оператор $\operatorname{Sp} \Delta_Z$ приводится к виду

$$\operatorname{Sp} \Delta_Z = \operatorname{Sp} \left\{ (I - Z_0 \overline{Z}_0') \overline{\partial}_{Z_0} \cdot (I - \overline{Z}_0' Z_0) \cdot \partial_{Z_0}' \right\}.$$

Мы будем считать

$$(\operatorname{Sp} \Delta_Z)\, u(Z) = \operatorname{Sp} \left\{ (I - Z_0 \overline{Z}_0') \overline{\partial}_{Z_0} \cdot (I - \overline{Z}_0' Z_0) \partial_{Z_0}' \right\} u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_0 \end{pmatrix}. \tag{5.7.3}$$

Определение 3. Вещественная функция $u(Z)$ с описанными выше дифференциальными свойствами называется гармонической в $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$, если она удовлетворяет условию

$$(\operatorname{Sp} \Delta_Z)\, u(Z) = 0 \tag{5.7.4}$$

в каждой точке $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$.

Ясно, что свойство гармоничности инвариантно относительно группы Γ_{I}. Множество гармонических функций является линейным.

Определение 4. Совокупность гармонических в $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$ функций, непрерывных на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$, мы будем называть классом $\mathfrak{H}$.

Теорема 5.7.1. *Для любой непрерывной на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ функции $\varphi(U)$ интеграл Пуассона*

$$u(Z) = \int_{\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}} \varphi(U) P_{\mathrm{I}}(Z, U) \dot{U} \tag{5.7.5}$$

представляет гармоническую функцию класса $\mathfrak{H}$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Теорема 5.7.2. *Если U на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ переводится в V (тоже на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$) преобразованием* (5.6.2), то

$$P_{\mathrm{I}}(W, V) = P_{\mathrm{I}}(Z, U) \left| \det (B\overline{U}' + A) \right|^{2n}. \tag{5.7.6}$$

Доказательство. Из (5.6.8) и (5.6.9) следует, что

$$(I - W\overline{V}')^{-1} (I - W\overline{W}') (I - V\overline{W}')^{-1} =$$
$$= (B\overline{U}' + A)(I - Z\overline{U}')^{-1} (I - Z\overline{Z}') (I - U\overline{Z}')^{-1} (U\overline{B}' + \overline{A}'). \tag{5.7.7}$$

Следовательно,

$$\frac{[\det (I - W\overline{W}')]^n}{|\det (I - W\overline{V}')|^{2n}} = \frac{[\det (I - Z\overline{Z}')]^n}{|\det (I - Z\overline{U}')|^{2n}} \left| \det (B\overline{U}' + A) \right|^{2n},$$

что и доказывает теорему 5.7.2.

Теорема 5.7.3. *Ядро Пуассона $P_{\mathrm{I}}(Z, U)$ (при фиксированном U) является гармонической в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ функцией, но не принадлежит классу $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что

$$(\operatorname{Sp}\Delta_Z)\,P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)=0$$

при $Z=0$. Положим

$$Z=(z_{j\alpha}),\quad U=(u_{j\alpha}),\quad 1\leqslant j\leqslant m,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant n.$$

Тогда имеем

$$(\operatorname{Sp}\Delta_Z)\,P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\big|_{Z=0}=\operatorname{Sp}\left(\bar\partial_Z\cdot\partial'_Z\right)\cdot P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\big|_{Z=0}=$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\bar z_{j\alpha}\,\partial z_{j\alpha}}P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\right]_{Z=0}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\bar z_{j\alpha}\,\partial z_{j\alpha}}\,\frac{[\det(I-Z\bar Z')]^n}{[\det(I-Z\bar U')(I-U\bar Z')]^n}\Bigg|_{Z=0}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\bar z_{j\alpha}\partial z_{j\alpha}}[\det(I-Z\bar Z')]^n+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}}\det(I-Z\bar U')^{-n}\,\frac{\partial}{\partial\bar z_{j\alpha}}[\det(I-\bar Z'U)]^{-n}\right\}\Bigg|_{Z=0}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\bar z_{j\alpha}\partial z_{j\alpha}}\left(1-n\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|z_{k\beta}|^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}}\left(1+n\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}z_{k\beta}\bar u_{k\beta}\right)\frac{\partial}{\partial\bar z_{j\alpha}}\left(1+n\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\bar z_{k\beta}u_{k\beta}\right)\right\}\Bigg|_{Z=0}=0.$$

В силу транзитивности области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ относительно группы Γ_{I} и в силу теоремы 5.7.2 мы получаем утверждение теоремы для любой внутренней точки области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Теорема 5.7.3 доказана.

Дифференцируя под знаком интеграла, мы получаем для любой внутренней точки $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

$$(\operatorname{Sp}\Delta_Z)\,u(Z)=0.$$

Однако доказательство теоремы 5.7.1 еще не закончено. Нам нужно выяснить поведение интеграла (5.7.5) на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

§ 5. 8. Поведение интеграла Пуассона на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

Чтобы закончить доказательство теоремы 5.7.1, нам достаточно доказать следующие две теоремы.

Теорема 5.8.1. *Для любой* $V\in\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$

$$\lim_{Z\to V}u(Z)=\varphi(V). \tag{5.8.1}$$

Теорема 5.8.2. *Пусть* $m > 1$, *а*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_0 \end{pmatrix}, \text{ где } Z_0 - (m-1) \times (n-1)\text{-матрица}, \ I^{(m-1)} - Z_0 \bar{Z}_0' > 0. \tag{5.8.2}$$

Тогда

$$\lim_{Z \to Q} \int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}} \varphi(U) P_{\mathrm{I}}(Z, U) \dot{U} = \int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}} \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_0 \end{pmatrix} P_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}(Z_0, U_0) \dot{U}_0, \tag{5.8.3}$$

где через $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}$ *и* $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}$ *обозначены* $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ *и* $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ *для* $(m-1) \times \times (n-1)$-*матриц, а через* $P_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}(Z_0, U_0)$ — *ядро Пуассона для области* $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}$.

Как следствие из теоремы 5.8.2 получаем, что теорему 5.8.1 достаточно доказать для $m = 1$. Теореме 5.8.1 мы придадим для этого случая несколько иную форму, слегка изменив обозначения.

Теорема 5.8.1′. *Положим* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. *Для любого* v, *удовлетворяющего условию* $v\bar{v}' = 1$, *и для любой функции* $\varphi(u)$, *непрерывной на многообразии* $u\bar{u}' = 1$, *имеем*

$$\varphi(v) = \lim_{z \to v} \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \frac{(1 - z\bar{z}')^n}{|1 - z\bar{u}'|^{2n}} \dot{u}. \tag{5.8.4}$$

Доказательство. Так как вектор v унитарным преобразованием может быть переведен в вектор $e = (1, 0, \ldots, 0)$, то мы можем считать, что $v = e$.

Докажем сначала (5.8.4) для $z = \rho e$, $\rho \to 1$, $0 < \rho < 1$, т. е.

$$\varphi(e) = \lim_{\rho \to 1} \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \frac{(1 - \rho^2)^n}{|1 - \rho\bar{u}_1|^{2n}} \dot{u}. \tag{5.8.5}$$

При $\varphi(u) \equiv 1$ формула (5.8.5) справедлива, так что

$$1 = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1 - \rho^2)^n}{|1 - \rho\bar{u}_1|^{2n}} \dot{u}. \tag{5.8.6}$$

Следовательно, достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно взять ρ_0 настолько близким к единице, чтобы при $\rho_0 \leqslant \rho < 1$

$$\left| \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u) - \varphi(e)) \frac{(1 - \rho^2)^n}{|1 - \rho\bar{u}_1|^{2n}} \dot{u} \right| < \varepsilon. \tag{5.8.7}$$

Мы воспользуемся параметрическим представлением многообразия $u\bar{u}' = 1$:

$$u_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2$$

$$u_2 = \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3 + i\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\theta_3 \cdot \cos\theta_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{2n-4} \cdot \cos\theta_{2n-3} + \\ + i\sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{2n-4} \cdot \sin\theta_{2n-3} \cdot \cos\theta_{2n-2},$$

$$u_n = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{2n-2} \cdot \cos\theta_{2n-1} + i\sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{2n-2} \cdot \sin\theta_{2n-1},$$

$$0 \leqslant \theta_j < \pi, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n-2; \quad 0 \leqslant \theta_{2n-1} < 2\pi.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать δ настолько малым, что

$$|\varphi(u) - \varphi(e)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \delta$. Следовательно,

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_1)} \left| \int\limits_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \delta}} (\varphi(u) - \varphi(e)) \frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}} \cdot \dot{u} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, при уже выбранном δ имеем при $\delta < \theta_1 < \pi$

$$|1 - \rho\bar{u}_1|^{2n} = \{(1 - \rho\cos\theta_1)^2 + \rho^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\}^n \geqslant \\ \geqslant (1 - \rho\cos\theta_1)^{2n} \geqslant (1 - \cos\delta)^{2n} = 2^{2n}\sin^{4n}\frac{\delta}{2}.$$

Выберем ρ настолько близким к единице, чтобы

$$(1-\rho)^n < \frac{2^{n-1}\sin^{4n}\frac{\delta}{2}}{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2}, \qquad M = \sup_{u\bar{u}'=1} |\varphi(u)|.$$

Тогда

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_1)} \left| \int\limits_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ \delta \leqslant \theta_1 \leqslant \pi}} (\varphi(u) - \varphi(e)) \frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}} \dot{u} \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{2M \cdot 2^n}{V(\mathfrak{C}_1)} \cdot \frac{(1-\rho)^n}{2^{2n}\sin^{4n}\frac{\delta}{2}} \cdot \int\limits_{u\bar{u}'=1} \dot{u} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тем самым формула (5.8.7) доказана.

Следовательно, (5.8.4) имеет место при $z \to v$ вдоль радиуса. Но поскольку это стремление является равномерным и $\varphi(u)$ непрерывна, то (5.8.4) имеет место и при $z \to v$ по любому пути.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 5.8.2, мы сделаем одно замечание. Из формулы Пуассона (5.7.5) следует, очевидно, формула

$$u(0)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\cdot\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)\cdot\dot{U} \tag{5.8.8}$$

(теорема о среднем). Однако, используя преобразования (5.6.2), мы можем без труда получить (5.7.5) из (5.8.8).

Доказательство теоремы 5.8.2. В силу сделанного только что замечания достаточно доказать, что

$$\lim_{Z\to\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\dot{U}=\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{(m-1,\ n-1)}}\varphi\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&U_0\end{pmatrix}\right]\cdot\dot{U}_0. \tag{5.8.9}$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$Z=\begin{pmatrix}\rho&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \rho\to 1,\qquad 0<\rho<1.$$

Записывая

$$U=\begin{pmatrix}u\\U_1\end{pmatrix},\qquad u=(u_1,\ \ldots,\ u_n),$$

имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\dot{U}=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\dot{U}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\int\limits_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\tau(u)\dot{u}, \tag{5.8.10}$$

где

$$\tau(u)=\int\limits_{U_1}\varphi(U)\dot{U}_1.$$

Так как $\tau(u)$ непрерывна на многообразии $u\bar{u}'=1$ и

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})=V\left(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{(m-1,\ n-1)}\right)\cdot\int\limits_{u\bar{u}'=1}\dot{u},$$

то из теоремы 5.8.1′ мы получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\dot{U}=\frac{1}{V\left(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{(m-1,\ n-1)}\right)}\tau(e), \tag{5.9.11}$$

где $e=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Так как $U\bar{U}'=I$, то при $u=e$ имеем

$$U_1=(0,\ U_0),\quad U_0=U_0^{(m-1,\ n-1)}\quad\text{и}\quad \tau(e)=\int\limits_{U_0}\varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&U_0\end{pmatrix}\cdot\dot{U}_0.$$

Таким образом, равенство (5.8.3) доказано, когда Z стремится к Q по фиксированному пути. Но опять, из равномерности этого стремления мы получаем, что (5.8.3) справедливо и тогда, когда Z стремится к Q по любому пути.

Итак, мы доказали теорему 5.8.2, а с нею и теорему 5.8.1.

§ 5.9. Решение задачи Дирихле в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

В §§ 5.7 и 5.8 мы доказали, что для любой непрерывной на $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ функции $\varphi(U)$ интеграл Пуассона (5.7.5) дает нам гармоническую функцию класса $\mathfrak{H}$, имеющую своими граничными значениями $\varphi(U)$.

Теперь мы переходим к доказательству единственности решения такой задачи, опираясь на принцип максимума.

Теорема 5.9.1. *Гармоническая функция класса $\mathfrak{H}$ достигает максимума и минимума на многообразии $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$.*

Заметим, что достаточно доказать эту теорему, заменив $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ всей границей $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, так как на каждой $\mathfrak{C}^{(r)}$, $0 < r < m$, возникает снова та же задача $\left(\text{для } \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}^{(r,\, n-m+r)}\right)$.

Доказательству предпошлем следующую теорему.

Теорема 5.9.2. *Пусть $\rho(Z)$ — вещественная функция, а $v(Z)$ — решение уравнения в частных производных*

$$(\mathrm{Sp}\,\Delta_Z)\, v(Z) = \rho(Z). \tag{5.9.1}$$

Если $\rho(Z) > 0$, то $v(Z)$ не может достигать в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ максимума, а если $\rho(Z) < 0$, то минимума.

Доказательство. Поскольку вторая часть утверждения теоремы сразу получается из первой заменой $\rho(Z)$ и $v(Z)$ на $-\rho(Z)$ и $-v(Z)$, то мы можем ограничиться доказательством первой части.

Предположим, что $v(Z)$ достигает своего максимума во внутренней точке Z_0, которую без ограничения общности мы можем считать нулем. Тогда (5.9.1) дает нам

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_{j\alpha}\partial \bar{z}_{j\alpha}} v(Z)\Big|_{Z=0} = \rho(0) > 0. \tag{5.9.2}$$

Но поскольку $v(Z)$ имеет в точке $Z=0$ максимум, то

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{j\alpha}\partial \bar{z}_{j\alpha}} v(Z)\Big|_{Z=0} \leqslant 0,$$

что противоречит (5.9.2), и теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.9.1. Обозначим через M точную верхнюю грань $u(Z)$ на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Допустим, что найдется внутри $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ такая точка W_0, что

$$u(W_0) > M + \varepsilon. \tag{5.9.3}$$

Построим вспомогательную функцию

$$v(Z)=u(Z)+\eta\,\mathrm{Sp}\,[(Z-W_0)\overline{(Z-W_0)'}],$$

где η выбрано настолько малым, что

$$\eta \sup_{Z\in\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}} \mathrm{Sp}\,[(Z-W_0)\overline{(Z-W_0)'}]<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любой точки P, лежащей на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, имеем

$$v(W_0)=u(W_0)\geqslant u(P)+\varepsilon=$$
$$=v(P)-\eta\,\mathrm{Sp}\,((P-W_0)\overline{(P-W_0)'})+\varepsilon>v(P)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $v(Z)$ достигает максимума во внутренней точке $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Но

$$(\mathrm{Sp}\,\Delta_Z)\,v(Z)=(\mathrm{Sp}\,\Delta_Z)\,u(Z)+\eta\,(\mathrm{Sp}\,\Delta_Z)\,\{\mathrm{Sp}\,[(Z-W_0)\overline{(Z-W_0)'}]\}=$$
$$=\eta\,\mathrm{Sp}\,(I-Z\overline{Z}')\,\mathrm{Sp}\,(I-\overline{Z}'Z). \qquad (5.9.4)$$

Поскольку $\mathrm{Sp}\,(I-Z\overline{Z}')>0$ и $\mathrm{Sp}\,(I-\overline{Z}'Z)>0$, мы пришли к противоречию с теоремой 5.9.2.

Из теоремы 5.9.1 мы сразу получаем важные следствия.

Теорема 5.9.3. *Единственной гармонической функцией класса $\mathfrak{H}$, имеющей предельные значения на $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$, равные нулю, является тождественный нуль.*

Теорема 5.9.4. *Каждая гармоническая функция из класса $\mathfrak{H}$ единственным образом определяется по своим граничным значениям на $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ при помощи формулы Пуассона*

$$u(Z)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}} u(U)\,P(Z,\ U)\,\dot{U}.$$

Замечание. Можно непосредственно убедиться, что

$$\Delta_Z P(Z,\ U)=0.$$

Это уравнение матричное и оно равносильно m^2 дифференциальным уравнениям второго порядка. Следовательно, любая гармоническая в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ функция удовлетворяет m^2 дифференциальным уравнениям второго порядка.

§ 5.10. Базис для гармонических функций

Пусть теперь $m=n$, и пусть

$$A_{f_1,\ \ldots,\ f_n}(U)=A_f(U)=\left(a^f_{ij}(U)\right)^{N(f)}_{i,j=1}$$

обозначает неприводимое унитарное представление унитарной группы $\mathfrak{U}_n$ с сигнатурой $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$, порядок которого, как

мы знаем, равен $N(f)=N(f_1, \ldots, f_n)$. Нетрудно убедиться, что множество функций

$$\varphi_{ij}^f(U)=\sqrt{\frac{N(f)}{V(\mathfrak{S}_{\mathrm{I}})}}\,a_{ij}^f(U) \tag{5.10.1}$$

образует ортонормальную систему на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$. В силу теоремы 1.2.5 с $\rho=1$

$$[\det(I-Z\overline{U}')]^{-n}=\sum_{f\geqslant 0} N(f)\,\mathrm{Sp}\,[A_f(Z\overline{U}')]=$$

$$=V(\mathfrak{S}_{\mathrm{I}})\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\ \sum_{i,j=1}^{N(f)}\varphi_{ij}^f(Z)\,\overline{\varphi_{ij}^f(U)}, \tag{5.10.2}$$

причем ряд равномерно сходится при Z, лежащих в замыкании области

$$rI-Z\overline{Z}'>0, \quad 0<r<1. \tag{5.10.3}$$

Функции

$$a_{ij}^f(U)\,\overline{a_{st}^g(U)}, \qquad f\geqslant 0, \qquad g\geqslant 0,$$

являются элементами матрицы

$$A_f(U)\times\overline{A_g(U)},$$

которая может быть разложена в прямую сумму

$$\sum_h A_h(U),$$

причем $N(f)N(g)=\sum_h N(h)$, $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $h_1\geqslant h_2\geqslant\ldots\geqslant h_n$ [1]). Следовательно,

$$a_{ij}^f(U)\,\overline{a_{st}^g(U)}=\sum\lambda_{pq}^h a_{pq}^h(U)$$

и $\sum|\lambda_{pq}^h|^2=1$. Отсюда получаем

$$\varphi_{ij}^f(U)\,\overline{\varphi_{st}^g(U)}=\sum\mu_{pq}^h\varphi_{pq}^h(U), \tag{5.10.4}$$

где

$$\mu_{pq}^h=\lambda_{pq}^h\sqrt{\frac{N(f)N(g)}{V(\mathfrak{S}_{\mathrm{I}})N(h)}}.$$

---

[1]) Иными словами, пространство, в котором действует представление $A_f(U)\times\overline{A_g(U)}$, раскладывается в прямую сумму неприводимых инвариантных подпространств. $A_h(U)$ — матрицы соответствующих неприводимых представлений. — *Прим. ред.*

Из (5.10.2) получаем разложение ядра Пуассона

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\frac{[\det(I-Z\overline{Z}')]^n}{|\det(I-Z\overline{U}')|^{2n}}=$$

$$=V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})\cdot\sum_{f\geqslant 0}\sum_{g\geqslant 0}\{\det(I-Z\overline{Z}')\}^n\sum_{i,j}\sum_{s,t}\overline{\varphi_{ij}^f(U)}\,\varphi_{ij}^f(Z)\,\varphi_{st}^g(U)\,\varphi_{st}^g(\overline{Z})=$$

$$=\sum_h\sum_{i,j}\Phi_{ij}^h(Z)\,\overline{\varphi_{ij}^h(U)}. \qquad (5.10.5)$$

Можно показать, что последний ряд равномерно сходится при Z, лежащих в замыкании множества (5.10.3). Следовательно,

$$\Phi_{ij}^h(Z)=\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\,\varphi_{ij}^h(U)\,\dot{U},$$

$$\lim_{Z\to U}\Phi_{ij}^h(Z)=\varphi_{ij}^h(U).$$

Поэтому мы имеем теорему.

Теорема 5.10.1. *Система гармонических функций*

$$\{\Phi_{ij}^h(Z)\}$$

образует базис для гармонических функций класса $\mathfrak{H}$.

§ 5.11. Абелева суммируемость рядов Фурье на унитарной группе

Определение. Если

$$\lim_{Z\to U}\sum_h\sum_{i,j}c_{ij}^h\Phi_{ij}^h(Z)=\varphi(U),$$

то мы будем говорить, что ряд

$$\sum_h\sum_{i,j}c_{ij}^h\varphi_{ij}^h(U)$$

А-суммируем или суммируем по Абелю к сумме $\varphi(U)$.

Теорема 5.11.1. *Ряд Фурье функции, непрерывной на* $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$, *А-суммируем к этой функции.*

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 5.8.1 и формулы (5.10.5).

Положим теперь

$$\mathfrak{B}_h(Z)=\sqrt{\frac{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}{N(h)}}\left(\Phi_{ij}^h(Z)\right)_{i,j=1}^{N(h)}.$$

Тогда

$$\mathfrak{B}_h(Z)=\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\,A_h(U)\,\dot{U}. \qquad (5.11.1)$$

Любая матрица Z порядка n из множества (5.10.3) может быть представлена в виде

$$Z = V\Lambda W,$$

где V и W — унитарные матрицы, а $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, $0 \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \ldots \leqslant \lambda_1 \leqslant \sqrt{r}$. Подставляя в (5.11.1), получаем

$$\mathfrak{B}_h(Z) = \int\limits_{\mathfrak{C}_I} P_I(V\Lambda W, U) A_h(U) \dot{U} =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{C}_I} P_I(\Lambda, \overline{V}'U\overline{W}') A_h(U) \dot{U} = A_h(V) \mathfrak{B}_h(\Lambda) A_h(W) \qquad (5.11.2)$$

(заменой переменной U на VUW).

В частности, при $\Lambda = \lambda I$ имеем

$$A_h(V) \mathfrak{B}_h(\lambda I) = \mathfrak{B}_h(\lambda I) A_h(V),$$

т. е. матрица $\mathfrak{B}_h(\lambda I)$ перестановочна с матрицами $A_h(V)$ неприводимого представления. По лемме Шура

$$\mathfrak{B}_h(\lambda I) = \rho_h(\lambda) I^{(N(h))},$$

где $\rho(\lambda) \to 1$, когда $\lambda \to 1$.

Более точно, мы имеем следующий частный случай предыдущей теоремы.

Теорема 5.11.2. *Для любой непрерывной на $\mathfrak{C}_I$ функции $\varphi(U)$ имеем*

$$\varphi(U) = \lim_{\lambda \to 1} \sum_h \sum_{i,j} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U), \qquad (5.11.3)$$

где

$$c_{ij}^h = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_I)} \int\limits_{\mathfrak{C}_I} \varphi(U) \varphi_{ij}^h(U) \dot{U}. \qquad (5.11.4)$$

Отсюда мы сразу получаем более точную форму теоремы Петера — Вейля.

Теорема 5.11.3. *Любая функция $\varphi(U)$, непрерывная на унитарной группе, может быть сколь угодно точно приближена функциями системы $\{\varphi_{ij}^h(U)\}$.*

Доказательство. Из (5.11.3) мы видим, что при любом $\varepsilon > 0$ можно выбрать λ столь близким к единице, чтобы

$$\left| \varphi(U) - \sum_h \sum_{ij} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем мы можем выбрать N настолько большим, чтобы

$$\left| \varphi(U) - \sum_{N \geqslant h_1 \geqslant \ldots \geqslant h_n \geqslant -N} \sum_{i,j} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U) \right| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Так как любая непрерывная функция на компактной подгруппе унитарной группы $\mathfrak{U}_n$ может быть непрерывным образом продолжена на всю группу $\mathfrak{U}_n$, то в качестве следствия из теоремы 5.11.3 мы получаем соответствующий результат для любой компактной группы конечной размерности (при некоторой необходимой ортонормализации системы $\{\varphi_{ij}^h(U)\}$ на этой подгруппе).

Замечание 2. Любая непрерывная функция на множестве классов смежности $\mathfrak{U}_n$ относительно какой-либо компактной подгруппы может рассматриваться как непрерывная функция на $\mathfrak{U}_n$. В качестве следствия теоремы 5.11.3 мы получаем поэтому соответствующий результат для компактных однородных пространств конечной размерности [с соответствующим усреднением $\varphi_{ij}^h(U)$ по подгруппе].

Глава VI

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ И КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ

§ 6.1. Ортонормальные системы в пространстве симметрических унитарных матриц

Нас интересуют ортонормальные системы в пространствах $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ и $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$. Преобразование

$$T = USU' \tag{6.1.1}$$

с унитарной матрицей U переводит симметрическую унитарную матрицу S в симметрическую унитарную матрицу T. Расположим элементы матрицы S в виде вектора s

$$(s_{11}, \sqrt{2}s_{12}, \sqrt{2}s_{13}, \ldots, \sqrt{2}s_{1n}, s_{22}, \sqrt{2}s_{23}, \ldots$$
$$\ldots, \sqrt{2}s_{2n}, \ldots, s_{n-1,\,n-1}, \sqrt{2}s_{n-1,\,n}, s_{nn})$$

размерности $n(n+1)/2$, и соответствующую операцию проделаем для матрицы T, обозначив полученный вектор через t. Когда матрица S преобразуется в матрицу T преобразованием (6.1.1), то вектор s преобразуется в вектор t линейным преобразованием с матрицей $U^{[2]}$, имеющей порядок $n(n+1)/2$.

Из вектора s мы построим вектор $s^{[f]}$ размерности

$$\frac{(n(n+1)/2+f-1)!}{f!\,(n(n+1)/2-1)!}.$$

Матрицей преобразования $s^{[f]}$ в $t^{[f]}$ является

$$\left(U^{[2]}\right)^{[f]}. \tag{6.1.2}$$

Компонентами $s^{[f]}$ являются одночлены от s_{ij} степени f. Эти компоненты линейно независимы, и любой однородный многочлен степени f может быть записан в виде линейной комбинации этих компонент.

Из теорем 1.3.2 и 1.4.2 мы знаем, что пространство однородных многочленов степени f от s_{ij} может быть разложено в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно преобразования (6.1.2). Эти подпространства имеют размерности $N(2f_1, \ldots, 2f_n)$, где $f_1 + \ldots + f_n = f$. Многочлены, образующие базис подпространства размерности $N(2f_1, \ldots, 2f_n)$, обозначим

$$\varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S), \qquad i = 1, 2, \ldots, N(2f_1, \ldots, 2f_n). \tag{6.1.3}$$

Когда S преобразуется в T преобразованием (6.1.1), $\varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S)$ преобразуется в $\varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(T)$ преобразованием с матрицей $A_{2f_1, \ldots, 2f_n}(U)$. Кроме того, система (6.1.3) ортогональна на $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$, т. е.

$$\int\limits_{\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}} \varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S)\, \overline{\varphi^{(j)}_{g_1, \ldots, g_n}(S)}\, \dot{S} = \delta_{ij}\delta_{fg} \cdot \rho_f,$$

где $\dot{S}$ — элемент объема пространства симметрических унитарных матриц, найденный нами в § 3.5.

Положив

$$\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S) = \rho^{-\frac{1}{2}}_{f_1, \ldots, f_n} \cdot \varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S),$$

получим ортонормальную систему в $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$.

§ 6.2. Проекция ядра в подпространство

Займемся изучением функций

$$\Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{T}) = \sum_i \psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S)\, \overline{\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(T)}. \tag{6.2.1}$$

Непосредственно имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}} \Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{S})\, \dot{S} = N(2f_1, \ldots, 2f_n). \tag{6.2.2}$$

Так как $\Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{S})$ не зависят от S, то

$$\Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{S}) = \frac{1}{V(\mathfrak{S}_{\mathrm{II}})} \cdot N(2f_1, \ldots, 2f_n).$$

Таким образом, $\Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{S})$ выглядит очень просто. Мы попытаемся упростить и выражение (6.2.1).

Упорядочим лексикографически системы индексов $(f_1, \ldots, f_n)$. Мы будем писать $f > g$, где $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$, если $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$, $\ldots$, $f_{q-1} = g_{q-1}$, $f_q > g_q$.

Из (6.1.1) следует

$$A_{f_1, \ldots, f_n}(T) = A_{f_1, \ldots, f_n}(U)\, A_{f_1, \ldots, f_n}(S)\, A_{f_1, \ldots, f_n}(U'). \tag{6.2.3}$$

Пусть L — линейное пространство, порожденное элементами матриц $A_{f_1, \ldots, f_n}(S)$. Когда S преобразуется в T, L преобразуется само в себя. Это означает, что L является инвариантным подпространством. Это инвариантное подпространство может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств, соответствующих $A_{2g_1, \ldots, 2g_n}(X)$. Очевидно, $(2g_1, \ldots, 2g_n) \leqslant (2f_1, \ldots, 2f_n)$, причем

случай равенства наверняка имеется. Выражение

$$\mathrm{Sp}\left[A_{f_1,\ldots,f_n}(S)\,A_{f_1,\ldots,f_n}(\bar{T})\right]=\mathrm{Sp}\,A_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T})$$

инвариантно при замене S и T одновременно на USU' и UTU'. Так как

$$\mathrm{Sp}\,A_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T})=\chi_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T}),$$

то

$$\chi_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T})=\sum_{g\leqslant f}c_{f,g}\,\Psi_{g_1,\ldots,g_n}(S,\ \bar{T}), \tag{6.2.4}$$

причем $c_{f,f}\neq 0$. Это соотношение обратимо, т. е. мы можем написать

$$\Psi_{f_1,\ldots,f_n}(S,\ \bar{T})=\sum_{g\leqslant f}d_{f,g}\,\chi_{g_1,\ldots,g_n}(S\bar{T}). \tag{6.2.5}$$

Из последнего равенства ясно, что

$$\Psi_{f_1,\ldots,f_n}(S,\ \bar{T})=\Psi_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T}).$$

Теперь мы постараемся найти эффективный метод определения коэффициентов в формуле (6.2.5). Так как $c_{f,g}$ и $d_{f,g}$ определены лишь при $g\leqslant f$, то мы положим $c_{f,g}=d_{f,g}=0$ при $g>f$. Кроме того, поскольку мы упорядочили системы индексов $f=(f_1,\ldots,f_n)$, мы можем теперь рассматривать f как простой индекс, т. е. $f=1, 2, 3, \ldots$ Тогда матрицы $C=(c_{f,g})_1^k$ и $D=(d_{f,g})_1^k$ будут невырожденными треугольными матрицами при любом целом положительном k.

Рассмотрим интеграл

$$\int_S\int_T\Psi_f(S\bar{T})\,\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T},\qquad g\leqslant f.$$

Подставляя в этот интеграл выражение χ_g, даваемое формулой (6.2.4), и используя (6.2.1), мы получаем

$$\sum_{h\leqslant g}c_{g,h}\int_S\int_T\Psi_f(S\bar{T})\,\Psi_h(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}=$$

$$=\sum_{h\leqslant g}c_{g,h}\sum_i\sum_j\int_S\int_T\psi_f^{(i)}(S)\,\overline{\psi_f^{(i)}(T)}\,\psi_h^{(j)}(T)\,\overline{\psi_h^{(j)}(S)}\,\dot{S}\dot{T}=\sum_{i,j}\sum_{h\leqslant g}c_{g,h}\delta_{ij}\delta_{fh},$$

откуда следует

$$\int_S\int_T\Psi_f(S\bar{T})\,\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}=0\quad\text{при}\quad g<f, \tag{6.2.6}$$

и

$$\int_S\int_T\Psi_f(S\bar{T})\,\chi_f(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}=N_f c_{f,f}\neq 0\ ^{1)}. \tag{6.2.7}$$

---

[1]) $N_f=N(2f_1,\ldots,2f_n)$. — *Прим. ред.*

Положим

$$\beta_{f,g}=\int\limits_S\int\limits_T \chi_f(S\bar{T})\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}. \tag{6.2.8}$$

Из **(6.2.5)**, **(6.2.6)**, (6.2.7) и (6.2.8) мы имеем

$$\sum_{h\leqslant g} d_{f,h}\beta_{h,g}=0, \qquad g<f, \tag{6.2.9}$$

и

$$\sum_{h\leqslant f} d_{f,h}\beta_{h,f}=N_f c_{f,f}\neq 0. \tag{6.2.10}$$

Очевидно, что матрица $B=(\beta_{h,f})_1^k$ положительно определена при любом целом $k\geqslant 1$. Равенства (6.2.9) и (6.2.10) могут быть заменены матричным равенством

$$DB=\begin{pmatrix} N_1c_{1,1} & * & \dots & * \\ 0 & N_2c_{2,2} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_kc_{k,k}\end{pmatrix}=K. \tag{6.2.11}$$

Отсюда видно, что $d_{f,g}$ могут быть выражены через $\beta_{f,g}$ и элементы матрицы K. Но поскольку элементы матрицы K неизвестны, то мы получим из (6.2.10) другую систему уравнений, из которой $d_{f,g}$ будут получаться рекуррентно через $\beta_{f,g}$ и некоторые другие величины, которые легко могут быть вычислены.

Положим

$$\alpha_f=\int\limits_S \chi_f(S\bar{S})\,\dot{S}. \tag{6.2.12}$$

Полагая в (6.2.5) $T=S$ и интегрируя по S, получаем

$$\sum_{h\leqslant f} d_{f,h}\,\alpha_h=N_f. \tag{6.2.13}$$

При $f=1$ имеем, очевидно, $d_{1,1}=\dfrac{N_1}{c_{1,1}}$. Предположим, что при $f\leqslant k-1$ величины $d_{f,g}$ $(g=1, 2, \dots, f)$ выражены через $\beta_{f,g}$ и α_f, и рассмотрим, что будет при $f=k$. Из (6.2.9) и (6.2.13) мы находим

$$\begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k,1} & d_{k,2} & \dots & d_{k,k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,k-1} & \alpha_1 \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,k-1} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \dots & \beta_{k,k-1} & \alpha_k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d_{1,1}\beta_{1,1} & * & \dots & * \\ 0 & d_{2,1}\beta_{1,2}+d_{2,2}\beta_{2,2} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_k\end{pmatrix}. \tag{6.2.14}$$

Треугольная матрица в правой части невырождена, так как в силу (6.2.10) ее диагональные элементы отличны от нуля. Так как матрица D является обратной к матрице C и поэтому невырождена, то матрица

$$B_k = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,k-1} & \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{k,1} & \cdots & \beta_{k,k-1} & \alpha_k \end{pmatrix}$$

тоже невырождена. Имеем из (6.2.14)

$$(d_{k,1},\ d_{k,2},\ \ldots,\ d_{k,k}) = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ N_k)\, B_k^{-1}.$$

Этим доказано, что $d_{f,g}$ при любых f выражаются через $\beta_{f,g}$ и α_f. Остается указать эффективный способ вычисления $\beta_{f,g}$ и α_f.

Любая симметрическая унитарная матрица S может быть записана в виде $S = UU'$, где U — унитарная матрица. Полагая $T = UWU'$ из

$$\chi_f(S\overline{T}) = \chi_f(U\overline{W}\overline{U}') = \chi_f(\overline{W}),$$

находим

$$\beta_{f,g} = \int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}} \dot{S} \int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}} \chi_g(W)\, \overline{\chi_f(W)}\, \dot{W}.$$

В силу (3.5.19) имеем

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}) \cdot C \int\limits_{2\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \ldots \geqslant \theta_n \geqslant 0} \ldots \int \chi_g([e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}]) \times$$

$$\times \overline{\chi_f([e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}])} \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} |e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}|\, d\theta_1 \ldots d\theta_n, \quad (6.2.15)$$

где

$$C = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \int\limits_{\{O\}} \{\dot{O}\}.$$

Так как

$$e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu} = 2i \sin \frac{\theta_\nu - \theta_\mu}{2} \cdot e^{\frac{i}{2}(\theta_\nu + \theta_\mu)}, \quad (6.2.16)$$

то

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}) \cdot C \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \int\limits_{2\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \ldots \geqslant \theta_n \geqslant 0} \ldots \int \chi_g([e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}]) \times$$

$$\times \chi_f([e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{-i\theta_n}]) \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} \sin \frac{\theta_\nu - \theta_\mu}{2} \cdot d\theta_1 \ldots d\theta_n. \quad (6.2.17)$$

Следующий метод вычисления $\beta_{f,g}$ несколько более удобен. В силу (6.2.16) имеем при $2\pi \geqslant \theta_\nu \geqslant \theta_\mu \geqslant 0$

$$|e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| = 2\sin\frac{\theta_\nu - \theta_\mu}{2} = -i\left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}\right)e^{-\frac{i}{2}(\theta_\nu+\theta_\mu)}$$

и

$$\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}|e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| =$$
$$= (-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}\right)e^{-\frac{i}{2}(n-1)(\theta_1+\ldots+\theta_n)}.$$

Значит,

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{E}_{\mathrm{II}})\cdot C\cdot(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}\int\limits_{2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\ldots\geqslant\theta_n\geqslant 0}\ldots\int\chi_g\left([e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}]\right)\times$$
$$\times\chi_f\left([e^{-i\theta_1},\ldots,e^{-i\theta_n}]\right)\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}\right)\times$$
$$\times e^{-\frac{i}{2}(n-1)(\theta_1+\ldots+\theta_n)}d\theta_1\ldots d\theta_n. \quad (6.2.18)$$

Поскольку выражение

$$\chi_g\left([e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}]\right)\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}\right)$$

совпадает с $M_g\left([e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}]\right)$, а $\chi_f\left([e^{-i\theta_1},\ldots,e^{-i\theta_n}]\right)$ может быть выражено через элементарные симметрические функции от $e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}$, то мы можем вычислить $\beta_{f,g}$ для любого частного случая. Однако получить значение $\beta_{f,g}$ в общем виде не удается.

§ 6.3. Ортонормальная система на $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$

В соответствии с результатами предыдущего параграфа мы знаем, что функции

$$\psi_f^{(i)}(Z)$$

образуют в $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ полную ортогональную систему. Остается вычислить интеграл

$$\rho_f = \int\limits_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}}|\psi_f^{(i)}(Z)|^2\,\dot{Z}.$$

Так как известно, что ρ_f не зависит от i, то

$$\rho_f\cdot N(2f_1,\ldots,2f_n) = \int\limits_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}}\Psi_f(Z\bar{Z})\,\dot{Z}.$$

В силу соотношения (6.2.5) задача сводится к вычислению интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}} \chi_f(Z\bar{Z})\,\dot{Z}.$$

В соответствии с (3.5.2) имеем для этого интеграла выражение

$$2^n \int\limits_{\{\mathfrak{U}_n\}} \{\dot{U}_n\} \int\limits_{0\leqslant\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant 1} \ldots \int \prod_{j<k} |\lambda_j^2-\lambda_k^2|\cdot\chi_f([\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2])\,\lambda_1\ldots\lambda_n\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n =$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\omega_n \int\limits_{0\leqslant\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant 1} \ldots \int \det\left|\lambda_i^{2l_j}\right|_{i,j=1}^{n}\cdot\lambda_1\ldots\lambda_n\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n =$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\omega_n \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\, r_1^{2l_{i_1}+1}\, r_2^{2l_{i_1}+2l_{i_2}+3}\ldots$$

$$\ldots r_n^{2l_{i_1}+\ldots+2l_{i_n}+2n-1}\,dr_1\ldots dr_n =$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,2^{-n}\,\omega_n \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\, t_1^{l_{i_1}}\, t_2^{l_{i_1}+l_{i_2}+1}\ldots$$

$$\ldots t_n^{l_{i_1}+\ldots+l_{i_n}+n-1}\,dt_1\ldots dt_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,2^{-n}\,\omega_n \sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\times$$

$$\times\frac{1}{(l_{i_1}+1)(l_{i_1}+l_{i_2}+2)\ldots(l_{i_1}+\ldots+l_{i_n}+n)} = \frac{\omega_n D(l_1,\ldots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(l_i+l_j+2)}.$$

При последнем преобразовании мы использовали следующее тождество.

Лемма.

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\frac{1}{l_{i_1}(l_{i_1}+l_{i_2})\ldots(l_{i_1}+\ldots+l_{i_n})} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,2^n D(l_1,\ldots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(l_i+l_j)}$$

Доказательство. При $n=2$ тождество тривиально. Предположим, что для $n-1$ оно справедливо. Тогда для n его левая

часть преобразуется к виду

$$\frac{2^{n-1}}{l_1+l_2+\ldots+l_n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{D(l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}(l_k+l_j)}\prod_{j=1}^{n}(l_i+l_j)=$$

$$=\frac{2^{n-1}}{\sigma_1}(-1)^{n-1}\prod_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}(l_j+l_k)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\times$$

$$\times D(l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)\left(l_i^n+\sigma_1 l_i^{n-1}+\ldots+\sigma_n\right),$$

где σ_ν — элементарная симметрическая функция степени ν от $l_1,\ldots,l_n$. Так как

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)\,l_i^n=\sigma_1 D(l_1,\ldots,l_n),$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)\,l_i^{n-1}=D(l_1,\ldots,l_n),$$

а все прочие суммы равны нулю, то лемма доказана.

§ 6.4. Характеристическое многообразие пространства кососимметрических матриц

Многообразие (3.6.16) является характеристическим многообразием $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ области $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$. Рассмотрим преобразование

$$L=UKU', \tag{6.4.1}$$

переводящее кососимметрическую матрицу K в кососимметрическую матрицу L (U — унитарная матрица). Расположив элементы матрицы K в виде строки

$$(k_{1,2},\ldots,k_{1,n},k_{2,3},\ldots,k_{2,n},\ldots,k_{n-1,n}),$$

мы обозначим полученный $\frac{n(n-1)}{2}$-мерный вектор через k, а вектор, соответствующий матрице L, через l. Когда матрица K преобразуется в матрицу L преобразованием (6.4.1), то вектор k преобразуется в вектор l линейным преобразованием с матрицей $U^{(2)}$ (см. § 1.4).

Рассмотрим теперь вектор $k^{[f]}$, размерность которого равна

$$\frac{(n(n-1)/2+f-1)!}{f!\,(n(n-1)/2-1)!}.$$

Когда матрица K преобразуется в L преобразованием (6.4.1), то $k^{[f]}$ преобразуется в $l^{[f]}$ линейным преобразованием с матрицей

$$\left(U^{(2)}\right)^{[f]}. \tag{6.4.2}$$

Из теорем 1.4.3 и 1.3.3 мы знаем, что пространство, натянутое на векторы $k^{[f]}$, может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств, имеющих размерности $N(f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots)$. Базисные векторы (т. е. однородные многочлены от элементов K) в этих подпространствах обозначим через

$$\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_{[n/2]}}(K), \qquad i = 1, 2, \ldots, N(f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots).$$

Легко доказать, что

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{III}} \psi^{(i)}_f(Z)\,\overline{\psi^{(j)}_g(Z)}\,\dot{Z} = \rho_f \cdot \delta_{ij}\delta_{fg},$$

и

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{III}} \psi^{(i)}_f(K)\,\overline{\psi^{(j)}_g(K)}\,\dot{K} = \beta_f\delta_{ij}\delta_{fg}.$$

Дальнейшие результаты для кососимметрических матриц получаются совершенно аналогично тому, что мы делали для симметрических матриц.

Глава VII

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА СФЕРАХ ЛИ

§ 7.1. Многочлены Гегенбауэра

Для удобства читателя мы начнем с изложения некоторых основных фактов из теории многочленов Гегенбауэра и гармонического анализа на обычный эвклидовой сфере (в n-мерном пространстве).

Многочлены Гегенбауэра[1]) определяются равенством

$$C_m^\lambda(\xi) = \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \frac{\Gamma(m+\lambda-s)}{s!\,(m-2s)!\,\Gamma(\lambda)} (2\xi)^{m-2s}, \qquad \lambda > -\frac{1}{2}. \quad (7.1.1)$$

Можно доказать, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^\lambda(\xi)\, w^m = (1 - 2\xi w + w^2)^{-\lambda}. \quad (7.1.2)$$

Нам понадобится еще и следующая формула:

$$(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_m^\lambda(\xi) = \frac{(-2)^m}{m!} \frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}, \quad (7.1.3)$$

называемая формулой Родрига. Ее доказательство легко получается, если, используя представление (7.1.1), доказать, что $\frac{d}{d\xi} C_m^\lambda(\xi) = 2\lambda C_{m-1}^{\lambda+1}(\xi)$, а затем провести индукцию.

Пусть теперь $f(\xi)$ — функция, m раз непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1, 1]$. Из (7.1.3) имеем

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, C_m^\lambda(\xi) \left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi =$$

$$= \frac{(-2)^m}{m!} \cdot \frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)} \int_{-1}^{1} f(\xi) \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (7.1.4)$$

---

[1]) В оригинале эти многочлены называются ультрасферическими и обозначаются через $P_m^{(\lambda)}$. — *Прим. ред.*

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi =$$

$$= f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi.$$

Так как $\lambda > -\frac{1}{2}$, то $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1} = 0$, и значит,

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi = -\int_{-1}^{1} f'(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi.$$

Повторяя эту операцию, получаем окончательно

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,C_m^{\lambda}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi =$$

$$= \frac{2^m}{m!}\cdot\frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m f(\xi)\,d\xi. \qquad (7.1.5)$$

Если $f(\xi)$ — многочлен степени m со старшим коэффициентом a, то

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,C_m^{\lambda}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi = 2^m\frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{1} a(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi =$$

$$= 2^m\cdot\frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)\,\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)\,\Gamma(m+\lambda+1)}\,a. \qquad (7.1.6)$$

Полагая, в частности, $f(\xi) = C_l^{\lambda}(\xi)$, получаем из (7.1.6) и (7.1.5)

$$\int_{-1}^{1} C_l^{\lambda}(\xi)\,C_m^{\lambda}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ \dfrac{\pi\cdot 2^{1-2\lambda}\cdot\Gamma(m+2\lambda)}{[\Gamma(\lambda)]^2\,(m+\lambda)\,m!}, & l = m. \end{cases} \qquad (7.1.7)$$

Если же мы возьмем в формуле (7.1.5) $f(\xi) = \xi^l$, то при $l \geqslant m$

$$\int_{-1}^{1} \xi^l C_m^{\lambda}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi =$$

$$= \binom{l}{m}\frac{2^m\,\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{1}\xi^{l-m}\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi. \qquad (7.1.8)$$

Если $l-m$ — нечетное число, то этот интеграл обращается в нуль, а если $l-m=2k$, то в силу равенства

$$\int_{-1}^{1} \xi^{l-m}\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} d\xi =$$

$$= \int_{0}^{1} \xi^{k-\frac{1}{2}}(1-\xi)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} d\xi = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+m+\lambda+1)}$$

мы получаем

$$\int_{-1}^{1} \xi^l C_m^\lambda(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } l<m \text{ или } l=m+2k+1, \\ \dfrac{\pi}{2^{l+2\lambda-1}} \cdot \dfrac{l!}{k!\,(l-2k)!} \dfrac{\Gamma(l-2k+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(l-k+\lambda+1)}, & l=m+2k. \end{cases} \tag{7.1.9}$$

Любой многочлен $f(\xi)$ степени m может быть представлен в виде

$$f(\xi)=\sum_{l=0}^{m} a_l C_l^\lambda(\xi).$$

Умножая это равенство на $C_l^\lambda(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ и интегрируя, получаем

$$a_l = \frac{2^{2\lambda-1}[\Gamma(\lambda)]^2(l+\lambda)\cdot l!}{\pi\Gamma(l+2\lambda)} \int_{-1}^{1} f(\xi)\, C_l^\lambda(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi.$$

Отсюда мы легко выводим следующую теорему.

Теорема 7.1.1. *Если $f(\xi)$ — многочлен степени m, для которого обращаются в 0 интегралы в последней формуле при $0 \leqslant l \leqslant m-1$, то $f(\xi)$ отличается от $C_m^\lambda(\xi)$ лишь постоянным множителем.*

Из этой теоремы и из (7.1.9) легко находим

$$\xi^m = \frac{m!\,\Gamma(\lambda)}{2^m} \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m-2k+\lambda}{k!\,\Gamma(m-k+\lambda+1)} C_{m-2k}^\lambda(\xi). \tag{7.1.10}$$

В дальнейшем нам понадобится также следующая формула: при $\nu>\lambda$

$$C_m^\nu(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{k=0}^{[m/2]} c_k C_{m-2k}^\lambda(\xi), \tag{7.1.11}$$

где

$$c_k = \frac{m-2k+\lambda}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k+\nu-\lambda)}{\Gamma(\nu-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(m+\nu-k)}{\Gamma(m+\lambda-k+1)}. \tag{7.1.12}$$

Эта формула может быть доказана следующим образом. В силу (7.1.1) и (7.1.10) имеем

$$C_m^\nu(\xi) = \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(\nu)\Gamma(s+1)\Gamma(m-2s+1)} (2\xi)^{m-2s} =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(s+1)} \sum_{k=0}^{[m/2]-s} \frac{m-2s-2k+\lambda}{k!\,\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)} C_{m-2s-2k}^\lambda(\xi) =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)} \sum_{t=0}^{[m/2]} c_t C_{m-2t}^\lambda(\xi),$$

где

$$c_t = \sum_{s+k=t} (-1)^s \frac{\Gamma(\nu+m-s)(m-2s-2k+\lambda)}{s!\,k!\,\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)} =$$

$$= \frac{(m-2t+\lambda)}{t!} \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(m-t-s+\lambda+1)} =$$

$$= \frac{(m-2t+\lambda)\Gamma(t+\nu-\lambda)\Gamma(\nu+m-t)}{t!\,\Gamma(\nu-\lambda)\Gamma(m-t+\lambda+1)}.$$

[Мы использовали формулу для q-й разности

$$\Delta^q f(x) = \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{q}{s} f(x+q-s).$$

Так как $\Delta \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} = (\alpha-\beta)\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+1)}$, то при $\alpha > \beta$

$$\Delta^q \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} = \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha-\beta-q+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+q)}\Big].$$

§ 7.2. Гармонический анализ на сфере

Пусть γ — единичная сфера в вещественном n-мерном эвклидовом пространстве, т. е. геометрическое место точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих равенству

$$xx' = 1. \tag{7.2.1}$$

Хорошо известно, что единичная сфера допускает следующее параметрическое представление:

$$x_\nu = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{\nu-1} \cdot \cos\theta_\nu, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant n-1,$$
$$x_n = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \cdot \sin\theta_{n-1}.$$

где θ_ν подчинены ограничениям

$$0 \leqslant \theta_\nu \leqslant \pi, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n-2; \quad 0 \leqslant \theta_{n-1} \leqslant 2\pi.$$

При таком выборе параметров элемент объема единичной сферы равен

$$\dot{x} = \sin^{n-2}\theta_1 \cdot \sin^{n-3}\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1 \cdot \ldots \cdot d\theta_{n-1}. \quad (7.2.2)$$

Построим на единичной сфере ортогональную систему.

Пусть u — вещественный вектор. Рассмотрим f-ю симметризованную кронекеровскую степень $u^{[f]}$ вектора u, т. е. вектор размерности

$$N_f = \frac{1}{f!} n(n+1) \ldots (n+f-1)$$

с компонентами

$$\sqrt{\frac{f!}{j_1! \ldots j_n!}}\, u_1^{j_1} \ldots u_n^{j_n}, \quad j_1 + \ldots + j_n = f.$$

Нетрудно показать, что

$$u^{[f]}(v^{[f]})' = (uv')^f.$$

Значит,

$$x^{[f]}(x^{[f]})' = 1.$$

Рассмотрим теперь вещественное ортогональное преобразование

$$v = uT, \quad TT' = 1. \quad (7.2.3)$$

Имеет место соотношение

$$v^{[f]} = u^{[f]}T^{[f]}.$$

Разложим теперь пространство векторов $u^{[f]}$ в прямую сумму неприводимых инвариантных подпространств. Очевидно, что векторы

$$(uu')\, u^{[f-2]}$$

образуют N_{f-2}-мерное инвариантное подпространство пространства $u^{[f]}$. Отсюда можно доказать, что $T^{[f]}$ может быть разложена в прямую сумму

$$T^{[f]} = T_f \dotplus T_{f-2} \dotplus \ldots \dotplus T_{f-2\left[\frac{f}{2}\right]}, \quad (7.2.4)$$

где T_ν — квадратная матрица порядка $N_\nu - N_{\nu-2}$. Известно, что T_ν неприводимы и попарно неэквивалентны (см. Мурнаган [1], стр. 328—329), и мы можем считать, что они ортогональны. Обозначим через $V_{f-2l}(u)$ проекцию вектора $u^{[f]}$ в инвариантное подпространство, соответствующее слагаемому T_{f-2l} в (7.2.4), и пусть

$$(uu')^l \varphi^{(i)}_{f-2l}(u), \quad i = 1, 2, \ldots, N_{f-2l} - N_{f-2l-2},$$

— компоненты вектора $V_{f-2l}(u)$ в этом инвариантном подпространстве.

Применив, как обычно, лемму Шура, мы получим:

Теорема 7.2.1. *Имеем*

$$\int_{\gamma} \varphi_{\nu}^{(i)}(x)\,\varphi_{\mu}^{(j)}(x)\,\dot{x} = \beta_{\nu}\cdot\delta_{ij}\delta_{\nu\mu}, \tag{7.2.5}$$

где β_{ν} *не зависит от* i.

Положим

$$\psi_{\nu}^{(i)}(u) = \beta_{\nu}^{-\frac{1}{2}}\,\varphi_{\nu}^{(i)}(u). \tag{7.2.6}$$

Эти функции образуют на сфере ортонормальную систему.

§ 7.3. Проекция ядра в подпространство

Рассмотрим функцию

$$\Phi_{\nu}(u, v) = \sum_{i=1}^{N_{\nu}-N_{\nu-2}} \psi_{\nu}^{(i)}(u)\,\psi_{\nu}^{(i)}(v) = V_{\nu}(u)\,V_{\nu}'(v). \tag{7.3.1}$$

Очевидно, что для любой ортогональной матрицы T

$$\Phi_{\nu}(uT, vT) = V_{\nu}(uT)\,V_{\nu}'(vT) = V_{\nu}(u)\,T_{\nu}T_{\nu}'V_{\nu}'(v) = V_{\nu}(u)\,V_{\nu}'(v) = \Phi_{\nu}(u, v),$$

так что $\Phi_{\nu}(u, v)$ инвариантна относительно ортогональных преобразований. Значит, по соответствующей теореме теории инвариантов (см. Г. Вейль [2], стр. 53) $\Phi(u, v)$ может быть представлена в виде функции от uu', vv' и uv'. Поскольку $\Phi_{\nu}(u, v)$ — однородная функция от координат каждого из векторов u и v степени ν, мы можем написать

$$\Phi_{\nu}(u, v) = \sum_{l=0}^{[\nu/2]} c_{l,\nu}\,(uv')^{\nu-2l}\,(uu'vv')^{l}.$$

Если $u = x$ и $v = y$ — точки на сфере, то

$$\Phi_{\nu}(x, y) = \sum_{l=0}^{[\nu/2]} c_{l,\nu}\,(xy')^{\nu-2l}.$$

Положим

$$\Phi_{\nu}(x, y) = Q_{\nu}(\xi), \quad \xi = xy'. \tag{7.3.2}$$

Ясно, что ξ равно косинусу угла между лучами, направленными из начала в точки x и y.

Из (7.3.1) и (7.2.5) имеем

$$\int_{\gamma}\int_{\gamma} \Phi_{\nu}(x, y)\,\Phi_{\mu}(x, y)\,\dot{x}\dot{y} = (N_{\nu} - N_{\nu-2})\,\delta_{\mu\nu}. \tag{7.3.3}$$

Подставляя (7.3.2) в (7.3.3), получаем

$$\int_\gamma \int_\gamma Q_\nu(xy')\,Q_\mu(xy')\,\dot{x}\dot{y} = (N_\nu - N_{\nu-2})\,\delta_{\mu\nu}. \tag{7.3.4}$$

Для фиксированного x существует такая ортогональная матрица T с определителем $+1$, что $xT=(1, 0, \ldots, 0)$. Положив $w=yT$, мы найдем, что интеграл (7.3.4) равен $[w=(w_1, \ldots, w_n)]$

$$\int_\gamma \int_\gamma Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,\dot{w}\dot{x} = \omega \int_\gamma Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,\dot{w},$$

где ω — площадь поверхности n-мерной единичной сферы. Сделаем замену

$$w_1=\xi, \quad w_i=(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\,\xi_i, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда

$$\omega \int_\gamma Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,\dot{w} = 2\omega \int\limits_{w_1^2+\ldots+w_{n-1}^2 \leqslant 1} \ldots \int Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,\frac{dw_1 \ldots dw_{n-1}}{\sqrt{1-w_1^2-\ldots-w_{n-1}^2}} =$$

$$= 2\omega \int_{-1}^{1} Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,dw_1 \cdot \int\limits_{w_2^2+\ldots+w_{n-1}^2 \leqslant 1-w_1^2} \ldots \int \frac{dw_2 \ldots dw_{n-1}}{\sqrt{1-w_1^2-\ldots-w_{n-1}^2}} =$$

$$= 2\omega \int_{-1}^{1} Q_\nu(\xi)\,Q_\mu(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi \cdot \int\limits_{\xi_2^2+\ldots+\xi_{n-1}^2 \leqslant 1} \ldots \int \frac{d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}}{\sqrt{1-\xi_2^2-\ldots-\xi_{n-1}^2}} =$$

$$= \omega\omega' \int_{-1}^{1} Q_\nu(\xi)\,Q_\mu(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi, \tag{7.3.5}$$

где ω' — площадь поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы. В силу равенств (7.3.4) и (7.3.5) получаем

$$\int_{-1}^{1} Q_\nu(\xi)\,Q_\mu(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi = \frac{N_\nu - N_{\nu-2}}{\omega\omega'}\,\delta_{\mu\nu}. \tag{7.3.6}$$

Согласно теореме 7.1.1

$$Q_\nu(\xi) = c\,C_\nu^{\frac{n}{2}-1}(\xi). \tag{7.3.7}$$

Определим постоянную c. В силу (7.3.6) и (7.1.7) имеем

$$\frac{N_\nu - N_{\nu-2}}{\omega\omega'} = c^2 \int_{-1}^{1} \left\{C_\nu^{\frac{n}{2}-1}(\xi)\right\}^2 (1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi = c^2\,\frac{\pi \cdot 2^{3-n} \cdot \Gamma(\nu+n-2)}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^2 \nu!\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)}.$$

Значит,

$$c^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2\cdot\nu!\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{3-n}\cdot\pi\cdot\Gamma(\nu+n-2)}\times$$

$$\times\left[\binom{n+\nu-1}{\nu}-\binom{n+\nu-3}{\nu-2}\right]=\frac{1}{4}\pi^{-n}\cdot\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)^2\cdot\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^2,$$

так что

$$c=\frac{1}{2}\cdot\pi^{-\frac{n}{2}}\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right). \tag{7.3.8}$$

Итак, окончательно

$$\Phi_\nu(u, v)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)(uu'vv')^{\frac{\nu}{2}}C_\nu^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{uv'}{\sqrt{uu'vv'}}\right). \tag{7.3.9}$$

§ 7.4. Ортонормальные системы на $\mathfrak{C}_{IV}$

Характеристическое многообразие $\mathfrak{C}_{IV}$ области $\mathfrak{R}_{IV}$ состоит из точек вида

$$u=e^{i\theta}x, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \tag{7.4.1}$$

где x — вещественный вектор, лежащий на единичной сфере в n-мерном эвклидовом пространстве. Для $\dot{u}$ — элемента объема $\mathfrak{C}_{IV}$, имеем выражение $\dot{u}=d\theta\cdot\dot{x}$, где $\dot{x}$ определено равенством (7.2.2).

Пусть $u^{[f]}$ и $\psi_\nu^{(i)}(u)$ то же, что и в § 7.2. Тогда пространство векторов $u^{[f]}$ по-прежнему может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств, определяемых базисными векторами

$$\left\{(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)\right\}, \qquad i=1, 2, \ldots, N_{f-2l}-N_{f-2l-2}.$$

Мы без труда получаем теорему.

Теорема 7.4.1. *При $f\neq g$ или $l\neq k$, или $i\neq j$ имеем*

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{IV}}(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)\overline{(uu')^k\psi_{g-2k}^{(j)}(u)}\,\dot{u}=0. \tag{7.4.2}$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{IV}}|uu'|^{2l}|\psi_{f-2l}^{(i)}(u)|^2\dot{u}=\int\limits_0^\pi d\theta\int\limits_\gamma|\psi_{f-2l}^{(i)}(x)|^2\dot{x}=\pi. \tag{7.4.3}$$

Следовательно, функции

$$\frac{(uu')^l}{\sqrt{\pi}}\psi_{f-2l}^{(i)}(u) \tag{7.4.4}$$

образуют ортонормальную систему на $\mathfrak{C}_{IV}$.

Из этого факта, а также из (7.3.9), (7.1.11) и (7.1.12) мы получаем

$$H(z, \bar{u}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} \sum_{i} (zz')^l (\overline{uu'})^l \psi_{m-2l}^{(i)}(z) \overline{\psi_{m-2l}^{(i)}(u)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} (zz'\overline{uu'})^l \Phi_{m-2l}(z, \bar{u}) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} \left(m - 2l + \frac{n}{2} - 1\right)(zz'\overline{uu'})^l \times$$

$$\times (zz'\overline{uu'})^{\frac{m}{2}-l} C_{m-2l}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{z\bar{u}'}{\sqrt{zz'\overline{uu'}}}\right) =$$

$$= \left(\frac{n}{2}-1\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+1}} \sum_{m=0}^{\infty} (zz'\overline{uu'})^{\frac{m}{2}} C_m^{\frac{n}{2}}\left(\frac{z\bar{u}'}{\sqrt{zz'\overline{uu'}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot (1 - 2z\bar{u}' + zz'\overline{uu'})^{-\frac{n}{2}}. \qquad \textbf{(7.4.5)}$$

Замечание 1. Так как $uu' = e^{2i\theta}$, $\bar{u}'e^{2i\theta} = u'$, то

$$1 - 2z\bar{u}' + zz'\overline{uu'} = \overline{uu'}(uu' - 2z\bar{u}'uu' + zz') =$$

$$= uu'(uu' - 2zu' + zz') = \overline{uu'}(u - z)(u - z)',$$

так что формула Коши может быть записана в виде

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_0^{\pi} \int_{\gamma} \frac{f(e^{i\theta}x)\, e^{in\theta}}{[(e^{i\theta}x - z)(e^{i\theta}x - z)']^{\frac{n}{2}}} d\theta \cdot \dot{x} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_0^{\pi} \int_{\gamma} \frac{f(e^{i\theta}x)}{[(x - e^{-i\theta}z)(x - e^{-i\theta}z)']^{\frac{n}{2}}} d\theta \cdot \dot{x}. \qquad (7.4.6)$$

§ 7.5. Полная ортонормальная система в $\mathfrak{R}_{IV}$

Мы уже знаем, что функции

$$(zz')^l \psi^{(i)}_{f-2l}(z)$$

образуют в $\mathfrak{R}_{IV}$ полную ортогональную систему. Теперь мы займемся определением постоянной

$$\tau_{l,\, f-2l} = \int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} |zz'|^{2l} \left|\psi^{(i)}_{f-2l}(z)\right|^2 \dot{z},$$

или, что то же самое,

$$\tau_{l,\, f-2l} = \frac{1}{N_{f-2l} - N_{f-2l-2}} \int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} |zz'|^{2l} \Phi_{f-2l}(z, \bar{z}) \dot{z}. \qquad (7.5.1)$$

Если мы начнем с вычисления интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} (z\bar{z}')^s |z\bar{z}'|^{2t} \dot{z},$$

то задача окажется совсем не такой простой. Поэтому мы предпочтем менее прямой путь. Из определения ядра Бергмана и из его выражения для $\mathfrak{R}_{IV}$ следует, что

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})}(1 - 2z\bar{z}' + |zz'|^2)^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} \frac{1}{\tau_{l,\, m-2l}} |zz'|^{2l} \Phi_{m-2l}(z, \bar{z}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} \frac{|zz'|^m \left(m - 2l + \frac{n}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\tau_{l,\, m-2l} \cdot 2\pi^{\frac{n}{2}}} C^{\frac{n}{2}-1}_{m-2l}(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \sum_{m=0}^{\infty} |zz'|^m \sum_{l=0}^{[m/2]} \frac{m - 2l + \frac{n}{2} - 1}{\tau_{l,\, m-2l}} C^{\frac{n}{2}-1}_{m-2l}(\xi),$$

где $\xi = \frac{z\bar{z}'}{|zz'|}$.

С другой стороны, согласно (7.1.2), мы имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} w^m C^{\lambda}_m(\xi) = (1 - 2w\xi + w^2)^{-\lambda},$$

откуда

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})}(1 - 2z\bar{z}' + |zz'|^2)^{-n} = \frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})} \sum_{m=0}^{\infty} |zz'|^m C^n_m(\xi).$$

Сравнивая коэффициенты, находим

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})} C_m^n(\xi) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\sum_{l=0}^{[m/2]}\frac{m-2l+\frac{n}{2}-1}{\tau_{l,\,m-2l}} C_{m-2l}^{\frac{n}{2}-1}(\xi).$$

Согласно (7.1.11)

$$C_m^{\nu}(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{[m/2]} c_k C_{m-2k}^{\lambda}(\xi),$$

где

$$c_k = \frac{(m-2k+\lambda)\,\Gamma(k+\nu-\lambda)\,\Gamma(m+\nu-k)}{k!\,\Gamma(\nu-\lambda)\,\Gamma(m-k+\lambda+1)}.$$

Значит,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n-l)}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})\,\Gamma(n)\,l!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(m-l+\frac{n}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}\tau_{l,\,m-2l}},$$

и мы получаем

$$\tau_{l,\,m-2l} = \frac{l!\,\Gamma(n)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(m+\frac{n}{2}-l\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n-l)} V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}). \qquad (7.5.2)$$

В заключение напишем

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}} |zz'|^{2l}\,\Phi_{f-2l}(z,\bar{z})\,\dot{z} =$$

$$= (N_{f-2l} - N_{f-2l-2})\frac{l!\,\Gamma(n)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(f+\frac{n}{2}-l\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(f+n-l)} V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}). \qquad (7.5.3)$$

Так как

$$N_{f-2l} = \frac{(n+f-2l-1)!}{(f-2l)!\,(n-1)!}, \qquad V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}) = \frac{\pi^n}{2^{n-1}\,n!},$$

а

$$\Phi_{f-2l}(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\left(f-2l+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)|zz'|^{f-2l}C_{f-2l}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right),$$

то формула (7.5.3) эквивалентна следующей формуле

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} |zz'|^f C_{f-2l}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right)\cdot \dot{z} =$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{(n+f-2l-3)!}{(f-2l)!\,(n-3)!}\cdot \frac{l!\,\Gamma\left(f+\frac{n}{2}-l\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(f+n-l)}. \qquad (7.5.4)$$

Ниже мы получим прямое доказательство формулы (7.5.4).

§ 7.6. Сведение многократного интеграла к однократному

Как мы знаем, область $\mathfrak{R}_{IV}$ может быть определена неравенством

$$xx'+yy'+2\sqrt{xx'yy'-(xy')^2}<1,$$

где положено $z=x+iy$ (см. § 2.5).

Рассмотрим интеграл

$$I=\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} |zz'|^f F\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right)\dot{z}. \qquad (7.6.1)$$

При фиксированном x сделаем замену переменного

$$y=\sqrt{xx'}\,u.$$

Тогда, очевидно, $\dot{y}=(xx')^{\frac{n}{2}}\,\dot{u}$. Область интегрирования будет теперь определяться неравенством

$$xx'\left(1+uu'+2\sqrt{uu'-\left(\frac{xu'}{\sqrt{xx'}}\right)^2}\right)<1.$$

Возьмем такую ортогональную матрицу Γ с определителем, равным 1, что

$$x\Gamma=(\sqrt{xx'},\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

и сделаем замену

$$u\Gamma=(\xi,\ v),$$

где v — $(n-1)$-мерный вектор, $v=(v_2,\ \ldots,\ v_n)$. Так как

$$z\bar{z}'=xx'+yy'=xx'(1+\xi^2+vv')$$

и

$$|zz'|^2=(xx'-yy')^2+4(xy')^2=(xx')^2\{(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2\},$$

то мы имеем

$$I=\int\limits_{xx'(1+\xi^2+vv'+2\sqrt{vv'})<1}(xx')^{f+\frac{n}{2}}\{(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2\}^{\frac{f}{2}}\times$$
$$\times F\left(\frac{1+\xi^2+vv'}{[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{1/2}}\right)d\xi\cdot\dot{v}\cdot\dot{x}.$$

Далее, с помощью равенства

$$\int\limits_{xx'\leqslant A^2}(xx')^{f+\frac{n}{2}}\dot{x}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^A r^{n-1}\cdot r^{2f+n}dr=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{A^{2(f+n)}}{f+n},$$

получаем

$$I=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(f+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int(1+\xi^2+vv'+2\sqrt{vv'})^{-(f+n)}\times$$
$$\times[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{1+\xi^2+vv'}{[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{1/2}}\right)d\xi\cdot\dot{v}=$$
$$=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\cdot 2^n}{(f+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{v_i\geqslant 0,\ \xi\geqslant 0}\dots\int(*)\,d\xi\cdot\dot{v}. \qquad (7.6.2)$$

Положим $vv'=\eta^2$, $\eta>0$, $v_2=\sqrt{\eta^2-v_3^2-\dots-v_n^2}$. Тогда

$$\dot{v}=\frac{\eta\,d\eta\,dv_3\dots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\dots-v_n^2}},$$

и мы получаем

$$I=\frac{2^n\pi^{\frac{n}{2}}}{(f+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{\substack{v_i\geqslant 0,\ i=3,\dots,n\\ \xi\geqslant 0,\ \eta\geqslant 0}}\dots\int(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}\{(1-\xi^2-\eta^2)+4\xi^2\}^{\frac{f}{2}}\times$$
$$\times F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)\frac{\eta\,d\eta\,d\xi\,dv_3\dots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\dots-v_n^2}}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\substack{v_3^2+\dots+v_n^2\leqslant\eta^2\\ v_3\geqslant 0,\dots,v_n\geqslant 0}}\dots\int\frac{dv_3\dots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\dots-v_n^2}}=$$
$$=\frac{\eta^{n-3}}{2^{n-2}}\int\limits_{v_3^2+\dots+v_n^2\leqslant 1}\dots\int\frac{dv_3\dots dv_n}{\sqrt{1-v_3^2-\dots-v_n^2}}=\frac{\eta^{n-3}}{2^{n-2}}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

мы получаем

$$I=\frac{2^n\pi^{\frac{n}{2}}}{(f+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}\times$$

$$\times\{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2\}^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)\eta^{n-2}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}\times$$

$$\times\{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2\}^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)\eta^{n-2}\,d\xi\,d\eta$$

$\left[\text{мы воспользовались формулой } \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)\,2^{1-2x}\right]$.

Заметим, что

$$(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2=(1+\xi^2+\eta^2)^2-4\eta^2,$$

и сделаем замену переменной $\tau=\frac{1+\xi^2+\eta^2}{2\eta}$. Тогда

$$\frac{1+\eta^2}{2\eta}\leqslant\tau<\infty,\qquad d\tau=\frac{\xi}{\eta}\,d\xi,\qquad d\xi=\frac{\eta\,d\tau}{\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}},$$

и мы получаем

$$I=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^\infty\frac{d\eta}{\eta}\int_{\frac{1+\eta^2}{2\eta}}^\infty 2^{-n}(1+\tau)^{-(f+n)}\times$$

$$\times(\tau^2-1)^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}.$$

Но

$$\int_{2\eta\tau-1-\eta^2\geqslant 0}\frac{d\eta}{\eta\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}=\pi,$$

и мы получаем окончательно

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_1^\infty(\tau+1)^{-(f+n)}(\tau^2-1)^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\right)d\tau. \qquad (7.6.3)$$

§ 7.7. Другая форма равенства (7.6.3)

Положим

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}},\qquad d\tau=-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}\,dt.$$

Тогда (7.6.3) примет вид

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\,\Gamma(n-1)}\int_1^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(f+n)}(t^2-1)^{\frac{n-3}{2}}F(t)\,dt. \quad (7.7.1)$$

Чтобы доказать теперь (7.5.4), нам достаточно установить, что

$$\int_1^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(2l+m+n)}(t^2-1)^{\frac{n-3}{2}}C_m^{\frac{n}{2}-1}(t)\,dt=$$

$$=\frac{(2l+m+n)(n-2)}{2^n}\cdot\frac{l!\,(n+m-3)!\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+l\right)}{m!\,\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n+l)}. \quad (7.7.2)$$

По формуле Родрига имеем

$$(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}C_m^{\frac{n}{2}-1}(t)=$$

$$=\frac{(-2)^m}{m!}\cdot\frac{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma(m+n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma(2m+n-2)}\cdot\left(\frac{d}{dt}\right)^m(1-t^2)^{m+\frac{n-3}{2}}.$$

Поэтому (7.7.2) сводится к равенству

$$\int_1^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(2l+m+n)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t^2-1)^{m+\frac{n-3}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{m+n-1}}\cdot\frac{(2l+m+n)\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+l\right)\Gamma(2m+n-2)\,l!}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n+l)\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}-1\right)}. \quad (7.7.3)$$

Эта формула не содержит специальных функций, но ее прямое доказательство представляет значительную трудность.

Сделаем теперь в (7.7.1) замену $t=\operatorname{ch}x$. Тогда получим

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\,\Gamma(n-1)}\int_0^\infty e^{-x(f+n)}(\operatorname{sh}x)^{n-2}F(\operatorname{ch}x)\,dx. \quad (7.7.4)$$

Равенству (7.5.4) эквивалентна следующая формула:

$$\int_0^\infty e^{-x(m+n+2l)}(\operatorname{sh} x)^{n-2} C_m^{\frac{n}{2}-1}(\operatorname{ch} x)\,dx =$$

$$= \frac{(2l+m+n)(n-2)}{2^n} \cdot \frac{l!\,(m+n-3)!\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+l\right)}{m!\,\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m-n+l)}. \qquad (7.7.5)$$

§ 7.8. Доказательство формулы (7.7.5)

Обозначим

$$a^{(q)} = a(a+1)\ldots(a+q-1).$$

Очевидно

$$\frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)} = a^{(q)}, \quad \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-q)} = (-1)^q(1-a)^{(q)},$$

$$2^{-2q}\frac{\Gamma(a+2q)}{\Gamma(a)} = \left(\frac{a}{2}\right)^{(q)}\left(\frac{a+1}{2}\right)^{(q)}.$$

Обобщенный гипергеометрический ряд определяется (см. Бейли [1]) [1]) равенством

$${}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; z\\ \beta_1, \ldots, \beta_p\end{matrix}\right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)^{(q)}\ldots(\alpha_{p+1})^{(q)}}{(\beta_1)^{(q)}\ldots(\beta_p)^{(q)}} \cdot \frac{z^q}{q!}. \qquad (7.8.1)$$

Лемма 1. При $s > l$

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-xs}(\operatorname{sh} x)^l\,dx = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}+1\right)}.$$

Доказательство. Делая замену $y = e^{-2x}$, получаем

$$I_1 = \frac{1}{2^l}\int_0^\infty e^{-(s-l)x}(1-e^{-2x})^l\,dx = \frac{1}{2^{l+1}}\int_0^1 y^{\frac{s-l}{2}-1}(1-y)^l\,dy =$$

$$= \frac{1}{2^{l+1}} \frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma\left(\frac{s-l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}+1\right)}.$$

---

[1]) См. также Erdélyi., Magnus и др., Higher transcendental functions, vol. I, 1953. — *Прим. ред.*

Лемма 2. При $s > l+1$

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-xs} \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)^l \, dx = s \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-l}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l}{2} + \frac{3}{2}\right)}.$$

Доказательство. В силу леммы 1 имеем

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x(s-1)} (\operatorname{sh} x)^l \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x(s+1)} (\operatorname{sh} x)^l \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{s-l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l-1}{2} + 1\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{s-l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l+1}{2} + 1\right)} \right\} =$$

$$= \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l+3}{2}\right)} \left(\frac{s+l+1}{2} + \frac{s-l-1}{2}\right).$$

Лемма 3. Если одно из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ является отрицательным целым числом, то

$$\int_0^\infty e^{-xs} (\operatorname{sh} x)^{2\lambda} {}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; \\ \beta_1, \ldots, \beta_p \end{matrix} -\operatorname{sh}^2 x \right) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda + 1\right)} {}_{p+3}F_{p+2} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + 1; 1 \\ \beta_1, \ldots, \beta_p, \frac{s}{2} + \lambda + 1, \lambda + 1 - \frac{s}{2} \end{matrix} \right).$$

Доказательство. Подставим в левую часть равенства выражение (7.8.1) и проинтегрируем почленно. Так как общий член полученного ряда равен

$$(-1)^q \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q! (\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{2\lambda+2q} e^{-xs} \, dx =$$

$$= (-1)^q \cdot \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q! (\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda + 2q + 1)}{2^{2\lambda+2q+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda - q\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda + q + 1\right)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q! (\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \cdot \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^{(q)} (\lambda+1)^{(q)}}{\left(\frac{s}{2} + \lambda + 1\right)^{(q)} \left(\lambda - \frac{s}{2} + 1\right)^{(q)}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda + 1\right)},$$

то мы получим утверждение леммы.

Известно (см. Сегё [1], стр. 84), что

$$C_{2\nu}^{\lambda}(x)=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda;\ 1-x^2\\ \lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

По лемме 3 имеем

$$\int_0^\infty(\operatorname{sh}x)^{2\lambda}C_{2\nu}^{\lambda}(\operatorname{ch}x)\,e^{-xs}\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\int_0^\infty(\operatorname{sh}x)^{2\lambda}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda;\ -\operatorname{sh}^2x\\ \lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)e^{-xs}\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+1\right)}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda,\ \lambda+\frac{1}{2},\ \lambda+1;\ 1\\ \lambda+\frac{1}{2},\ \frac{s}{2}+\lambda+1,\ \lambda-\frac{s}{2}+1\end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+1\right)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda,\ \lambda+1;\ 1\\ \frac{s}{2}+\lambda+1,\ \lambda-\frac{s}{2}+1\end{matrix}\right),$$

где ${}_3F_2$ удовлетворяет условию Заальшютца (см. Бейли [1], стр. 9), т. е. $a+b+c+1=d+e$, и хотя бы одно из a, b, c — отрицательное целое число. Тогда (теорема Заальшютца)

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}a,\ b,\ c;\ 1\\ d,\ e\end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(d)\,\Gamma(a-e+1)\,\Gamma(b-e+1)\,\Gamma(c-e+1)}{\Gamma(1-e)\,\Gamma(d-a)\,\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)}\ ^{1)}.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty(\operatorname{sh}x)^{2\lambda}C_{2\nu}^{\lambda}(\operatorname{ch}x)\,dx=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)},$$

и равенство (7.7.5) для четных m доказано.

---

1) См. также примечание на стр. 153. *Прим. ред.*

Лемма 4. Если хотя бы одно из $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ — отрицательное целое число, то

$$\int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{2\lambda}\, {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; & -\operatorname{sh}^2 x\\ \beta_1, \ldots, \beta_p & \end{matrix}\right) e^{-sx} \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= s \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)} \times$$

$$\times\, {}_{p+3}F_{p+2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}, & \lambda+\frac{1}{2}, & \lambda+1; & 1\\ \beta_1, \ldots, \beta_p, & \lambda-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}, & \lambda+\frac{s}{2}+\frac{3}{2} & \end{matrix}\right).$$

Доказательство. Подставляя в левую часть выражение (7.8.1) и интегрируя почленно, получаем, что общий член равен

$$(-1)^q \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q!\,(\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{2\lambda+2q} \operatorname{ch} x \cdot e^{-xs}\, dx =$$

$$= (-1)^q \cdot s \cdot \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q!\,(\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+2q+1)}{2^{2\lambda+2q+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda-q\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda+q\right)} =$$

$$= s\, \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q!\,(\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{q}} \cdot \frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^{(q)} (\lambda+1)^{(q)}}{\left(\lambda-\frac{s-3}{2}\right)^{(q)} \left(\lambda+\frac{s+3}{2}\right)^{(q)}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)},$$

что и дает нам утверждение леммы.

Известно, что

$$C_{2\nu+1}^{\lambda}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\,\Gamma(2\lambda)} \cdot x \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu, & \nu+\lambda+1, & 1-x^2\\ & \lambda+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right).$$

Отсюда по лемме 4

$$I = \int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{2\lambda} C_{2\nu+1}^{\lambda}(\operatorname{ch} x)\, e^{-xs}\, dx = \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\,\Gamma(2\lambda)} \times$$

$$\times\, s \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)}\, {}_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu, & \nu+\lambda+1, & \lambda+\frac{1}{2}, & \lambda+1; & 1\\ \lambda+\frac{1}{2}, & \lambda-\frac{s-3}{2}, & \lambda+\frac{s+3}{2} & & \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1) \cdot s \cdot \lambda \cdot \Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{(2\nu+1)!\,2^{2\lambda+1} \cdot \Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu, & \nu+\lambda+1, & \lambda+1; & 1\\ \frac{s+3}{2}+\lambda, & \lambda-\frac{s-3}{2} & & \end{matrix}\right).$$

Используя теорему Заальшютца, получаем

$$I=\frac{s\lambda}{2^{2\lambda+1}}\cdot\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)},$$

и (7.7.5) полностью доказано.

ЛИТЕРАТУРА

Бейли (Bailey W. N.)

[1] Generalized hypergeometric series, Cambridge tracts, № 32, 1935.

Бенке, Туллен (Behnke H., Thullen P.)

[1] Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Ergebnisse der Math., Vol. 3, № 3, Berlin, 1934.

Бергман (Bergmann S.)

[1] Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec applications à la thèorie des fonctions analytiques, Gauthier — Villars, Paris, 1947.

[2] Kernel function and extended classes in the theory of functions of several complex variables, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes, tenu à Bruxelles, 1953, 125—157.

Борель (Borel A.)

1] Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. France, 80 (1952), 167—182.

Бохнер (Bochner S.)

[1] Group invariance of Cauchy's formula in several variables. Ann. of Math., 45 (1944), 686—707.

[2] A theorem on analytic continuation of functions in several variables, Ann. of Math., 39 (1938), 14—19.

[3] Boundary values of analytic functions in several variables and of almost periodic functions, Ann. of Math., 45 (1944), 708—722.

Бохнер, Мартин (Bochner S., Martin W. T.)

[1] Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951.

Вейль А. (Weil A.)

[1] Интегрирование в топологических группах, ИЛ, М., 1950.

[2] L'Intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann. 111 (1935), 178—182.

Вейль Г. (Weyl H.)

[1] Harmonics on homogeneous manifolds, Ann. of Math., 35 (1934), 486—499.

[2] Классические группы, ИЛ, М., 1947.

Вейль, Петер (Weyl H., Peter F.)

[1] Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., 97 (1927), 737—755.

Зигель (Siegel C. L.)
[1] Symplectic geometry, Amer. J. Math., 45 (1943), 1—86.
Картан А. (Cartan H.)
[1] Sur les fonctions de deux variables complexes et problème de la représentation analytique, J. Math. pures et appl, ser. 9, 10 (1931), 1—114.
Картан Э. (Cartan E.)
[1] Sur les domaines bornés homogenes de l'espace de n variables complexes, Hamburg Univ. Math. Sem. Abhandl., 11 (1935), 116—162.
Митчелл (Mitchell J.)
[1] The kernel function in the geometry of matrices, Duke Math. J., 19 (1952), 575—583.
[2] Potential theory in the geometry of matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 401—422.
Мурнаган (Murnaghan F. D.)
[1] Теория представлений групп, ИЛ, М., 1950.
Понтрягин Л. С.
[1] Непрерывные группы, ГТТИ, М.—Л., 1954.
Рыжик И. М. и Градштейн И. С.
[1] Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М., 1951.
Сеге (Szegö G.)
[1] Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Col. Publ., Vol. 23, 1938.
Тралл (Thrall R. M.)
[1] On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring, Amer. J. of Math., 64 (1942), 371—388.
Хуа Ло-кен (Hua L. K.)
[1] On the theory of automorphic functions of a matrix variables, 1, Geometrical basis, Amer. J. Math., 66 (1944), 470—488.
[2] On the theory of automorphic functions of a matrix variables, II, The classification hypercircles under the symplectic group, Amer. J. Math., 66 (1944), 531—561.
[3] On the theory of Fuchsian functions of several variables, Ann. of Math., 47 (1946), 167—191.
[4] О теории функций многих комплексных переменных, I, Полные ортонормальные системы в пространствах матриц, Acta Math. Sinica, 2(1952), 288—323, (по-китайски).
[5] О теории функций многих комплексных переменных, II, Полные ортонормальные системы на гиперсферах Ли, Acta Math. Sinica, 5 (1955), 1—25, (по-китайски).
[6] О теории функций многих комплексных переменных, III, Полные ортонормальные системы в пространствах симметрических и кососимметрических матриц, Acta Math. Sinica., 5 (1955), 205—242, (по-китайски).
[7] Некоторые определенные интегралы, Acta Math. Sinica, 6 (1956), (по-китайски).

[8] On a system of partial differential equations, Sci. Rec., New ser., (6), 1 (1957), 7—9.

Хуа Ло-кен, Лу (Hua L. K., Look K. H.)

[1] On Cauchy formula for the space of skew-symmetric matrices of odd order, Sci. Rec., New ser., (1), 2 (1958), 19—22.

[2] Boundary properties of the Poisson integral of Lie sphere, Sci. Rec., New ser. (2), 2 (1958), 77—80.

[3] Theory of harmonic functions of classical domains, I, The harmonic functions of the hyperbolic space of matrices Acta Math. Sinica, 8 (1958), 531—547.

Фукс Б. А.

[1] Теория аналитических функций многих комплексных переменных, ГТТИ, М.—Л., 1948.

Эрдели, Магнус и др. (Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi)

[1] Higher transcendental functions, vol. I, 1953.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Березин Ф. А., Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, Труды Моск. матем. об-ва, 6 (1957), 371—463.

[2] Березин Ф. А., и Гельфанд И. М., Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, Труды Моск. матем. об-ва, 5 (1956), 311—352.

[3] Гельфанд И. М., Сферические функции на симметрических римановых пространствах, ДАН СССР, 70 (1950), 5—8.

[4] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Унитарные представления вещественной унимодулярной группы (основные невырожденные серии), Изв. АН СССР, сер. матем., 17 (1953), 189—248.

[5] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. I, Труды Моск. матем. о-ва, 8 (1959), 321—390.

[6] Гельфаид И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления классическнх групп, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 36 (1950).

[7] Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и теория автоморфных функций, Успехи матем. наук, 14, вып. 2 (86), (1959), 171—194.

[8] Граев М. И., Унитарные представления вещественных простых групп Ли, Труды Моск. матем. об-ва, 7 (1958), 335—389.

[9] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, ИЛ, М., 1954.

[10] Карпелевич Ф. И., Геодезические линии и гармонические функции на симметрических пространствах, ДАН СССР, **124** (1959), 1119—1202.

[11] Пятецкий-Шапиро И. И., Дискретные подгруппы группы аналитических автоморфизмов полицилиндра и полилинейные формы, ДАН СССР, **124** (1959), 760—763.

[12] Cartan E., Sur la determination d'un systeme ortogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Rend. Circ. mat. Palermo, **53** (1929), 217—252.

[13] Godement R., A theory of spherical functions, I, Trans. Amer. Math. Soc., **73** (1952).

[14] Harish-Chandra, Spherical functions of a semisimple Lie Groups, Amer. J. of Math., **80**:2 (1958), 241—310; **80**:3, 553—612.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора 5
Предисловие 7

Введение

I. Классические области 9
II. Характеристические многообразия в областях 10
III. Эвристические соображения 11
IV. Замечания относительно используемых методов 14
V. Применения к теории представлений 16

Глава I. **Алгебраический аппарат** 19

§ 1.1. Алгебраические тождества 19
§ 1.2. Тождества, содержащие степенные ряды 25
§ 1.3. Тождественные соотношения для $N(f_1, \ldots, f_n)$ 33
§ 1.4. Тождественные соотношения для характеров 34

Глава II. **Вычисление некоторых интегралов** 37

§ 2.1. Матричные аналоги интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}$ 37

§ 2.2. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 44
§ 2.3. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 46
§ 2.4. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 49
§ 2.5. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 50

Глава III. **Полярные координаты матриц** 55

§ 3.1. Элемент объема пространства унитарных матриц 55
§ 3.2. Интегралы по пространству классов смежности унитарной группы 58
§ 3.3. Полярные координаты эрмитовых матриц 60
§ 3.4. Полярные координаты произвольных квадратных матриц . . 61
§ 3.5. Полярные координаты симметрических матриц 65
§ 3.6. Полярные координаты кососимметрических матриц 70
§ 3.7. Объем пространства вещественных ортогональных матриц и применения 74

Глава IV. **Некоторые общие теоремы и их применения** 79

§ 4.1. Введение 79
§ 4.2. Ядро Бергмана 81
§ 4.3. Ядра Бергмана для областей $\mathfrak{R}_{I}$, $\mathfrak{R}_{II}$ и $\mathfrak{R}_{III}$ 84
§ 4.4. Ядро Бергмана для области $\mathfrak{R}_{IV}$ 87
§ 4.5. Ядро Коши 89
§ 4.6. Формула Коши 91
§ 4.7. Ядра Коши для классических областей 93
§ 4.8. Ядро Пуассона для круговых областей 97

Глава V. **Гармонический анализ в пространстве прямоугольных матриц** 100

§ 5.1. Ортогональные системы в пространстве прямоугольных матриц 100
§ 5.2. Интегралы от функций, инвариантных при преобразованиях $Z \to \Gamma Z \Gamma^{-1}$ 103
§ 5.3. Ортогональная система и ядро Бергмана 108
§ 5.4. Гармонический анализ на характеристическом многообразии 110
§ 5.5. Интегралы типа Коши 113
§ 5.6. Дифференциальные операторы 116
§ 5.7. Смысл оператора Лапласа на границе $\mathfrak{R}_{I}$ 117
§ 5.8. Поведение интеграла Пуассона на границе $\mathfrak{R}_{I}$ 119
§ 5.9. Решение задачи Дирихле в $\mathfrak{R}_{I}$ 123
§ 5.10. Базис для гармонических функций 124
§ 5.11. Абелева суммируемость рядов Фурье на унитарной группе 126

Глава VI. **Гармонический анализ в пространстве симметрических и кососимметрических матриц** 129

§ 6.1. Ортонормальные системы в пространстве симметрических унитарных матриц 129
§ 6.2. Проекция ядра в подпространство 130
§ 6.3. Ортонормальная система на $\mathfrak{R}_{II}$ 134
§ 6.4. Характеристическое многообразие пространства кососимметрических матриц 136

Глава VII. **Гармонический анализ на сферах Ли** 138

§ 7.1. Многочлены Гегенбауэра 138
§ 7.2. Гармонический анализ на сфере 141
§ 7.3. Проекция ядра в подпространство 143
§ 7.4. Ортонормальные системы на $\mathfrak{C}_{IV}$ 145
§ 7.5. Полная ортонормальная система в $\mathfrak{R}_{IV}$ 147
§. 7.6. Сведение многократного интеграла к однократному 149
§ 7.7. Другая форма равенства (7.6.3) 152
§ 7.8. Доказательство формулы (7.7.5) 153

Литература 158

АННОТАЦИЯ

Монография известного китайского математика Хуа Ло-кена посвящена разделам теории функций многих комплексных переменных, получившим развитие лишь в самое последнее время и отражавшимся до сих пор лишь в специальных журнальных статьях, зачастую мало доступных. Большинство результатов, излагаемых в этой книге, принадлежит автору и его ближайшим сотрудникам. Для получения этих результатов автором строится значительный алгебраический аппарат, представляющий и самостоятельный интерес.

Монография принесет большую пользу научным работникам и аспирантам, работающим в области теории функций многих комплексных переменных и особенно автоморфных функций, теории представлений групп и в смежных областях.

Редакция литературы
по математическим наукам

Хуа Ло-кен

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

Редактор *Ф. В. ШИРОКОВ* Художник *В. И. Телепнев*
Художественный редактор *А. В. Вилленева* Технический редактор *А. Г. Резоухова*
Корректор *И. М. Лебедева*

Сдано в производство 16/III 1959 г. Подписано к печати 30/IX 1959 г. Бумага 60×92¹/₁₆.
5,1 бум. л. 10,2 печ. л. Уч.-изд. л. 8,9. Изд. № 1/4525. Цена 7 р. 75 к. Зак. 240.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В предлагаемой читателю монографии известного китайского математика Хуа Ло-кена изучаются важные классы ограниченных областей в многомерных комплексных пространствах. Эти области были первоначально описаны Э. Картаном. Их рассмотрение оказывается весьма существенным в теории представлений групп Ли, в теории однородных пространств и в теории автоморфных функций нескольких комплексных переменных. В связи с этим книга Хуа Ло-кена тесно примыкает к работам перечисленных направлений. Мы имеем в виду работы Э. Картана, И. М. Гельфанда, Ф. А. Березина, Р. Годмана и Хариш-Чандры по теории сферических функций на группах Ли, многочисленные работы по теории конечномерных представлений групп Ли, работы И. М. Гельфанда, М. А. Наймарка, Ф. А. Березина, М. И. Граева, Хариш-Чандры по теории бесконечномерных представлений групп Ли, результаты теории автоморфных функций нескольких комплексных переменных, частично изложенные в книге К. Зигеля „Автоморфные функции нескольких комплексных переменных", ИЛ, 1954. Отметим также результаты И. М. Гельфанда и М. И. Граева [5] по теории представлений групп Ли в однородных пространствах; полученные в самое последнее время интересные результаты Ф. И. Карпелевича [10] и И. И. Пятецкого-Шапиро [11] по теории границы симметрических пространств, примененные авторами к теории гармонических функций в симметрических пространствах и к теории автоморфных функций нескольких комплексных переменных; результаты И. М. Гельфанда и И. И. Пятецкого-Шапиро [7] по теории представлений и теории автоморфных функций (см. список дополнительной литературы в конце книги). Уже это далеко не полное перечисление показывает, что книга Хуа Ло-кена находится в тесной связи с бурно развивающимися направлениями современной математики.

Одной из основных задач книги является построение для рассматриваемых областей аналога интеграла Пуассона и решение задачи Дирихле для гармонических функций. Бо́льшая часть результатов, изложенных в книге, принадлежит самому автору. Эти результаты устанавливаются путем прямых, подчас довольно сложных вычислений с применением обширного алгебраического аппарата,

а также аппарата теории конечномерных представлений, которым автор мастерски владеет. Многие вспомогательные результаты — вывод ряда интересных алгебраических соотношений, вычисление интегралов, где аргумент пробегает некоторые множества матриц $\left(\text{например, матричных аналогов интеграла } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}\right)$, несомненно представляют самостоятельный интерес.

К сожалению, основывая изложение на прямых вычислениях, автор не использует возможностей теоретико-группового аспекта. Между тем, этот теоретико-групповой аспект позволил бы лучше понять многие результаты книги, а в отдельных случаях упростить их доказательство. В качестве примера укажем, как определяется ядро Пуассона в теоретико-групповых терминах. Пусть $\mathfrak{R}$ — одна из областей, рассматриваемых в книге, и $\mathfrak{S}$ — остов (характеристическое многообразие) ее границы. Пусть z — точка из $\mathfrak{R}$ и C_z — группа аналитических автоморфизмов области $\mathfrak{R}$, оставляющих на месте точку z. Можно показать, что группа C_z транзитивна на $\mathfrak{S}$, т. е. переводит любую точку из $\mathfrak{S}$ в любую другую. Мера на $\mathfrak{S}$, инвариантная относительно преобразований из C_z, задается как раз ядром Пуассона.

Книга Хуа Ло-кена написана весьма сжато, и чтение ее потребует от читателя известной математической культуры и большого внимания. Желательно, чтобы читатель был знаком с основными понятиями теории конечномерных представлений групп (например, в объеме трех первых глав книги Ф. Мурнагана „Теория представлений групп“, ИЛ, 1950).

Эта монография первоначально была выпущена в Китае в стеклографированном издании незадолго до Третьего Всесоюзного математического съезда в Москве (в 1956 г.), в котором автор принимал участие. По просьбе Издательства иностранной литературы автор специально подготовил текст книги к изданию на русском языке.

В конце книги прилагается дополнительный список литературы по вопросам, близким к содержанию этой книги.

М. И. Граев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая монография содержит ряд результатов автора по теории функций многих комплексных переменных. Большинство этих результатов опубликовано на китайском языке в журнале Acta Mathematica Sinica начиная с 1952 г. Эти результаты несколько переработаны и дополнены новыми исследованиями автора, полученными позднее.

Первым наброском этой монографии можно считать доклад, сделанный мною на первом общем собрании Китайской Академии Наук, который частично был повторен на Третьем Всесоюзном математическом съезде в 1956 году в Москве.

Я чрезвычайно признателен товарищам Гун Шену, Сюй И-пао Чжун Тун-дэ и Лу Ци-кэну, особенно последнему, внимательно просмотревшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

Кроме того, я хочу выразить благодарность Издательству иностранной литературы, без содействия которого эта монография не могла бы так скоро появиться в русском переводе.

Я особенно благодарен товарищам М. А. Евграфову и М. И. Граеву за их большую работу по переводу и редактированию моей книги. Издание этой книги — одно из конкретных проявлений великой дружбы между Советским Союзом и Китайской Народной Республикой.

Хуа Ло-кен

ВВЕДЕНИЕ

I. Классические области

Под названием классическая область мы будем понимать неприводимую ограниченную симметрическую область (в пространстве многих комплексных переменных) одного из следующих четырех типов:

1) Область $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, образованная матрицами из m строк и n столбцов (элементы матриц — комплексные числа), удовлетворяющими условию

$$I^{(m)} - Z\overline{Z}' > 0.$$

Здесь $I^{(m)}$ — единичная матрица порядка m, $\overline{Z}'$ — матрица, комплексно сопряженная с транспонированной матрицей Z'. ($H > 0$ для эрмитовой матрицы H означает, как обычно, что H положительно определена).

2) Область $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$, образованная симметрическими матрицами порядка n (с комплексными элементами), удовлетворяющими условию

$$I^{(n)} - Z\overline{Z} > 0.$$

3) Область $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$, образованная кососимметрическими матрицами порядка n (с комплексными элементами), удовлетворяющими условию

$$I^{(n)} + Z\overline{Z} > 0.$$

4) Область $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$, образованная n-мерными ($n > 2$) векторами

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

(z_k — комплексные числа), удовлетворяющими условиям[1])

$$|zz'|^2 + 1 - 2\overline{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1.$$

Комплексная размерность этих четырех областей равна соответственно mn, $n(n+1)/2$, $n(n-1)/2$, n.

Автором было показано (см. Хуа Ло-кен [3]), что $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ также можно рассматривать и как однородное пространство вещественных матриц из 2-х строк и n столбцов. Поэтому изучение всех этих областей можно свести к изучению геометрии матриц.

---

[1]) Здесь и всюду в дальнейшем автор рассматривает вектор как матрицу из одной строки и n столбцов. Поэтому z' — матрица из одного столбца и n строк (транспонированная матрице z). — *Прим перев.*

В 1935 г. Э. Картан [1] доказал, что существует только шесть возможных типов неприводимых транзитивных ограниченных симметрических областей. Помимо указанных четырех типов, возможны еще два — размерностей 16 и 27. Разумеется, эти два типа являются весьма частными. Вопрос об эффективном описании этих двух типов областей все еще остается открытым.

Целью настоящей книги является построение гармонического анализа в этих классических областях. (Точное содержание гармонического анализа будет очерчено позднее.)

II. Характеристические многообразия в областях

Пусть $\mathfrak{R}$ — ограниченная односвязная область в $2n$-мерном эвклидовом пространстве n комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, а $f(z)$ — аналитическая функция z, регулярная в $\mathfrak{R}$. Известно, что максимум модуля функции $f(z)$ достигается на границе $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{S}$ — многообразие, лежащее на границе $\mathfrak{R}$ и обладающее следующими свойствами:

а) модуль любой аналитической функции, регулярной в $\mathfrak{R}$, достигает своего максимума на $\mathfrak{S}$;

б) для любой точки a из $\mathfrak{S}$ существует такая функция $f(z)$, регулярная в $\mathfrak{R}$, что модуль $f(z)$ достигает максимума при $z=a$.

Такое многообразие $\mathfrak{S}$ называется характеристическим многообразием области $\mathfrak{R}$. Следует отметить, что $\mathfrak{S}$ является, вообще говоря, лишь частью границы, и что размерность $\mathfrak{S}$ может быть значительно меньше, чем $2n-1$. Ясно, что $\mathfrak{S}$ определяется по $\mathfrak{R}$ единственным образом. Нетрудно доказать, что $\mathfrak{S}$ замкнуто и что аналитическая функция, регулярная в окрестности каждой точки $\mathfrak{S}$, определяется по своим значениям на $\mathfrak{S}$ единственным образом. Отсюда следует, что вещественная размерность многообразия $\mathfrak{S}$ не меньше n. Мы будем обозначать через ξ переменные на $\mathfrak{S}$, а через $d\xi\,\overline{d\xi}'$ и $\dot{\xi}$ соответственно метрику и элемент объема на $\mathfrak{S}$.

По-видимому, в определении $\mathfrak{S}$ вместо всех аналитических функций можно рассматривать только линейные функции.

Опишем характеристические многообразия классических областей.

1) $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ образовано матрицами U из m строк и n столбцов ($m \times n$-матрицами), удовлетворяющими условию

$$U\overline{U}' = I^{(m)}.$$

В частности, при $m=n$ многообразие $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ совпадает с множеством всех унитарных матриц.

2) $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$ состоит из всех симметрических унитарных матриц порядка n.

3) $\mathfrak{S}_{\mathrm{III}}$ определяется различным образом в зависимости от четности n. Если n четное, то $\mathfrak{S}_{\mathrm{III}}$ состоит из всех кососимметрических

унитарных матриц порядка n. Если же n нечетное, то $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ состоит из матриц вида

$$UDU',$$

где U — любая унитарная матрица, а

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus 0.$$

4) $\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ состоит из векторов вида $e^{i\theta}x$, где x — вещественный вектор, удовлетворяющий условию $xx'=1$.

Многообразия $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$, $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ и $\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$ имеют вещественную размерность $m(2n-m)$, $n(n+1)/2$, $n(n-1)/2+(1+(-1)^n)(n-1)/2$ и n соответственно.

Эти характеристические многообразия являются однородными пространствами. Более точно, каждую точку $\mathfrak{C}$ можно перевести в любую другую преобразованием, оставляющим неподвижной наперед заданную точку в $\mathfrak{R}$. Общая теория гармонического анализа в однородных пространствах была построена ранее (см. Э. Картан [1], Г. Вейль [1]); однако метод, излагаемый в настоящей книге, дает более точные и удобные результаты.

III. Эвристические соображения

Предположим, что мы имеем такую последовательность аналитических в $\mathfrak{R}$ функций

$$\{\varphi_\nu(z)\}, \quad \nu=0, 1, 2, \ldots,$$

что любая аналитическая в $\mathfrak{R}$ функция $f(z)$ может быть разложена в ряд

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

сходящийся в $\mathfrak{R}$. Построим две бесконечные эрмитовы матрицы

$$H_1=\left(\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\,\dot{\xi}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\ldots}$$

и

$$H_2=\left(\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\,\dot{z}\right)_{\nu,\mu=0,1,2,\ldots}.$$

Базис $\{\varphi_\nu(z)\}$ можно считать ортонормированным так, что

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\nu(\xi)\overline{\varphi_\mu(\xi)}\,\dot{\xi}=\delta_{\nu\mu}$$

и

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\mu(z)}\,\dot{z}=\lambda_\nu\delta_{\nu\mu}.$$

Собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ являются псевдоконформными инвариантами, т. е. они не зависят от выбора базиса $\{\varphi_\nu(z)\}$ и сохраняются при аналитическом отображении, переводящем $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ соответственно.

Существование систем $\{\varphi_\nu(z)\}$ обеспечено теоремой А. Картана [1] о полных круговых областях [1]).

Положив теперь

$$K(z, \bar{w}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(w)}}{\lambda_\nu},$$

мы получим ядро Бергмана, обладающее следующим воспроизводящим свойством: для любой функции $f(z)$, аналитической в $\mathfrak{R}$, имеем

$$f(z) = \int_{\mathfrak{R}} K(z, \bar{w}) f(w)\, \dot{w}.$$

Полагая же

$$H(z, \bar{\xi}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\xi)},$$

мы получаем ядро Коши для области $\mathfrak{R}$. Воспроизводящее свойство этого ядра состоит в том, что если $f(z)$ аналитическая функция, имеющая на $\mathfrak{C}$ разложение

$$f(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(\xi),$$

то

$$f(z) = \int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) f(\xi)\, \dot{\xi}.$$

Полагая

$$f(z) = u(z) H(z, \bar{w}),$$

имеем

$$u(z) = \int_{\mathfrak{C}} \frac{H(z, \bar{\xi}) H(\xi, \bar{w})}{H(z, \bar{w})} u(\xi)\, \dot{\xi}.$$

Функцию

$$P(z, \xi) = \frac{H(z, \bar{\xi}) H(\xi, \bar{z})}{H(z, \bar{z})}$$

мы назовем ядром Пуассона для области $\mathfrak{R}$. Оно положительно.

---

[1]) Область $\mathfrak{R}$ в пространстве многих комплексных переменных называется круговой областью (с центром в начале), если вместе с точкой z в $\mathfrak{R}$ лежит и точка $ze^{i\varphi}$ при любом вещественном φ. Если же с точкой z в $\mathfrak{R}$ лежит и точка $rze^{i\varphi}$ при любом вещественном φ и $0 \leqslant r \leqslant 1$, то $\mathfrak{R}$ называется полной круговой областью. — *Прим. перев.*

Ясно, что система функций $\{\varphi_\nu(\xi)\}$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$, не является полной в пространстве функций, непрерывных на $\mathfrak{C}$. Дополним ее до полной ортонормальной системы

$$\{\varphi_\nu(\xi)\}, \quad \nu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и разложим функцию $P(z, \xi)$ в ряд Фурье по этой новой системе:

$$P(z, \xi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Phi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(\xi)}, \quad \Phi_\nu(z)=\int_{\mathfrak{C}} P(z, \xi) \varphi_\nu(\xi) \dot{\xi}.$$

Если

$$\lim_{z \to \xi} \Phi_\nu(z)=\varphi_\nu(\xi),$$

то функциям на $\mathfrak{C}$, имеющим разложение в ряд Фурье

$$\varphi(\xi)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(\xi), \quad c_\nu=\int_{\mathfrak{C}} \varphi(\xi) \overline{\varphi_\nu(\xi)} \dot{\xi}$$

можно поставить в соответствие класс функций

$$\Phi(z)=\int_{\mathfrak{C}} P(z, \xi) \varphi(\xi) \dot{\xi}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \Phi_\nu(z),$$

которые будем называть гармоническими функциями в области $\mathfrak{R}$.

Гармонические функции могут быть определены и как решения некоторого дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. К этому уравнению приводят нас следующие эвристические соображения.

Ядро Бергмана дает нам следующую риманову метрику пространства $\mathfrak{R}$:

$$d\bar{d} \ln K(z, \bar{z})=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \ln K(z, \bar{z}) dz_i d\bar{z}_j=\sum_{i, j=1}^{n} h_{ij} dz_i d\bar{z}_j.$$

Контравариантному тензору h^{ij} отвечает оператор

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h^{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j},$$

который является оператором Лапласа этого пространства. Можно говорить также и о задаче Дирихле.

Обоснование изложенных выше фактов будет получено в дальнейшем для классических областей.

IV. Замечания относительно используемых методов

а) *Аппарат теории представлений групп.* Известно, что классические области всех четырех типов являются полными круговыми областями (см. примечание на стр. 12). Для полных круговых областей можно предполагать, что группа движений, оставляющих начало неподвижным, состоит из линейных преобразований вида

$$w = zU,$$

где U — унитарная матрица. Обозначим эту группу через Γ_0. Множество всех одночленов вида $z_1^{l_1} z_2^{l_2}, \ldots, z_n^{l_n}$ образует полную систему функций в пространстве функций, аналитических в $\mathfrak{R}$, причем одночлены, имеющие различные степени (т. е. $l_1 + \ldots + l_n \neq l_1' + \ldots + l_n'$), ортогональны друг другу. Поэтому нашей основной задачей является разложение однородных многочленов одной и той же степени по ортонормированной системе. Более подробно, пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, а $z^{[l]}$ — вектор с компонентами

$$\sqrt{\frac{l!}{l_1!\, l_2! \ldots l_n!}}\, z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_n^{l_n}, \qquad l = l_1 + l_2 + \ldots + l_n,$$

в пространстве размерности $n(n+1) \ldots (n+l-1)/l!$ Преобразование $w = zU$ индуцирует преобразование

$$w^{[l]} = z^{[l]} U^{[l]},$$

где $U^{[l]}$ обозначает l-ю симметризованную кронекеровскую [1]) степень матрицы U. Чтобы найти ортогональные компоненты пространства $z^{[l]}$, мы должны решить задачу о разложении представления $U^{[l]}$ на неприводимые компоненты. Это соответствует следующей задаче в теории представлений линейных групп.

Начнем с группы $GL(n)$ всех невырожденных матриц порядка n. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — целые числа, удовлетворяющие условию $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$. Каждому элементу X из $GL(n)$ соответствует в представлении $GL(n)$ с сигнатурой $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ [2]) матрица

$$A_{f_1, \ldots, f_n}(X).$$

Степень представления обозначим через $N = N(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Допустим, что для унитарных X матрица $A_{f_1, \ldots, f_n}(X)$ унитарна. Пусть

$$B_{g_1, \ldots, g_N}(Y)$$

— некоторое представление группы $GL(N)$. Очевидно, что

$$B_{g_1, \ldots, g_N}\left(A_{f_1, \ldots, f_n}(X)\right)$$

---

[1]) См. Ф. Мурнаган [1], стр. 104. — *Прим. перев.*

[2]) См. Г. Вейль [2], стр. 181. — *Прим. перев.*

снова будет представлением группы $GL(n)$. Задача состоит в том, чтобы найти неприводимые компоненты этого составного представления. Эта задача, вообще говоря, является весьма сложной, но, к счастью, те два частных случая, которые нам нужны, могут быть решены полностью [1]).

б) *Полярные координаты матриц.* После получения полной ортогональной системы методами теории представлений нам придется столкнуться еще с одной трудностью, а именно с вычислением нормирующих множителей. (Эта задача легче для $\mathfrak{C}$, чем для $\mathfrak{R}$.) Чтобы преодолеть эту трудность, мы вводим для матриц полярные координаты. Разъясним, что это значит на примере симметрических матриц.

Каждая симметрическая матрица Z порядка n с комплексными элементами может быть представлена в виде

$$Z = U\Lambda U',$$

где U — унитарная, а Λ — вещественная диагональная матрица $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, причем $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ (см. Хуа Ло-кен [1]). Пусть теперь $\{U\}$ — множество классов смежности унитарной группы по ее подгруппе, состоящей из 2^n диагональных матриц

$$[\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1].$$

Тогда каждой симметрической матрице можно поставить в соответствие элемент из $\{U\}$ и диагональную матрицу Λ. Это соответствие почти для всех матриц взаимно однозначно (т. е. за возможным исключением многообразия меньшей размерности). Матрица Λ представляет собой как бы „модуль“ матрицы Z, а U — как бы ее „аргумент“. В книге будет проведено вычисление якобиана перехода от „декартовых координат Z“ к „полярным координатам ($\{U\}$, Λ)“. Мы получим попутно некоторые аналогичные результаты относительно „полярных координат“ для других типов матриц, хотя некоторые из них и не связаны непосредственно с основной задачей настоящей книги.

в) *Вычисление интегралов.* В этой книге содержится, разумеется, немалое количество интересных интегралов, но мы упомянем сейчас лишь об одном из них. Именно:

при $\alpha > 1$, $\alpha + \beta > -n$, имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} \left(1 - \bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\alpha} \left(1 - \bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\beta} \dot{z} =$$

$$= \frac{\pi^n \Gamma(\alpha + 1)}{2^{n-1}(\alpha + \beta + n)\Gamma(\alpha + n)}.$$

---

[1]) Автор благодарит проф. Х. Дуаия за сообщение, что Р. М. Тралл [1] также решил задачу для этих случаев. Его метод решения сильно отличается от изложенного в настоящей книге.

Следовательно, при $\lambda < 1$

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} (1 - 2\bar{z}z' + |zz'|^2)^{-\lambda} \dot{z} = \frac{\pi^n \Gamma(1-\lambda)}{2^{n-1}(n-2\lambda)\Gamma(n-\lambda)}.$$

Эта формула решает, кстати, одну задачу, поставленную автором в 1946 г. (см. Хуа Ло-кен [3]). А именно, в $\mathfrak{R}_{IV}$ показатель сходимости рядов Пуанкаре не меньше $(n-1)/n$, и эта оценка не может быть улучшена.

V. Применения к теории представлений

В предыдущем разделе мы коснулись вопроса о том, как аппарат теории представлений используется в теории функций многих комплексных переменных. Сейчас же мы покажем, наоборот, как результаты наших исследований могут быть использованы в теории представлений.

Для большей ясности мы сначала будем говорить о гармонических функциях в $\mathfrak{R}_I$ при $m = n$. Уравнение Лапласа в $\mathfrak{R}_I$ имеет вид

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{n} \left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{l=1}^{n} z_{l\alpha}\bar{z}_{l\beta}\right)\left(\delta_{jk} - \sum_{\gamma=1}^{n} z_{j\gamma}\bar{z}_{k\gamma}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial z_{j\alpha}\,\partial \bar{z}_{k\beta}} = 0.$$

Функции $u(Z)$, удовлетворяющие этому уравнению в замыкании $\mathfrak{R}_I$, будем называть гармоническими в $\mathfrak{R}_I$. Те из них, которые имеют непрерывные граничные значения на $\mathfrak{C}_I$ образуют класс, обозначаемый через $\mathfrak{H}$. Решение задачи Дирихле в $\mathfrak{R}_I$ дает следующий результат.

Если нам дана непрерывная на унитарной группе $\mathfrak{C}_I$ функция $\varphi(U)$, то существует одна, и только одна, гармоническая функция $u(Z)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{Z \to U} u(Z) = \varphi(U).$$

Эта функция может быть найдена по формуле Пуассона

$$u(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\{\det(I - Z\bar{Z}')\}^n}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}} \varphi(U)\,\dot{U}.$$

Разложение в ряд ядра Пуассона

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C})} \frac{\{\det(I - Z\bar{Z}')\}^n}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}}$$

может быть получено следующим образом. Пусть

$$A_f(U) = A_{f_1, \ldots, f_n}(U) = \left(a_{ij}^f(U)\right), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N(f_1, \ldots, f_n) = N(f).$$

Последовательность

$$\varphi_{ij}^f(U) = \sqrt{\frac{N(f)}{V(\mathfrak{G})}}\, a_{ij}^f(U), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N(f),$$

$$-\infty < f_n \leqslant \ldots \leqslant f_2 \leqslant f_1 < \infty,$$

образует ортонормальную систему на унитарной группе $\mathfrak{G}_{\mathrm{I}}$, и искомый ряд имеет вид

$$\sum_f \sum_{i,j} \Phi_{ij}^f(Z)\, \overline{\varphi_{ij}^f(U)}, \qquad \Phi_{ij}^f(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{G})} \int_{\mathfrak{G}} \frac{\{\det(I - Z\bar{Z}')\}^n}{|\det(I - Z\bar{U}')|^{2n}}\, \varphi_{ij}^f(U)\, \dot{U},$$

причем

$$\lim_{Z \to U} \Phi_{ij}^f(Z) = \varphi_{ij}^f(U).$$

Для каждой непрерывной функции $\varphi(U)$ мы можем написать формальный ряд Фурье

$$\sum_f \sum_{i,j} c_{ij}^f \varphi_{ij}^f(U), \qquad c_{ij}^f = \frac{1}{V(\mathfrak{G})} \int_{\mathfrak{G}} \varphi(U)\, \overline{\varphi_{ij}^f(U)}\, \dot{U},$$

который, вообще говоря, может и не сходиться к $\varphi(U)$. Но

$$\varphi(U) = \lim_{Z \to U} \sum_f \sum_{i,j} c_{ij}^f \Phi_{ij}^f(Z).$$

Это означает, что формальный ряд Фурье суммируем к сумме $\varphi(U)$ методом Абеля. Таким образом, мы получаем теорему, что ряд Фурье непрерывной функции на унитарной группе суммируем к ней методом Абеля.

Как следствие мы получим аппроксимационную теорему Петера — Вейля для любых компактных групп конечной размерности и аппроксимационную теорему для однородных пространств. Ясно, что эти результаты получаются в более точном виде, чем они были доказаны прежде.

Сделаем еще несколько замечаний.

Гармонические функции класса $\mathfrak{H}$ удовлетворяют также системе n^2 дифференциальных уравнений

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left(\delta_{\alpha\beta} - \sum_{h=1}^{n} \bar{z}_{h\alpha} z_{h\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_{i\alpha}\, \partial z_{j\beta}} = 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Это выглядит весьма удивительным и наводит на мысль о возможности расщепления одного уравнения в частных производных в систему уравнений в частных производных.

Далее, область сходимости ряда

$$\sum_f \sum_{i,j} c_{ij}^f \Phi_{ij}^f(Z)$$

не обязательно совпадает с $\mathfrak{R}_I$. Но если он сходится вне $\mathfrak{R}_I$, то там уравнение Лапласа уже не будет иметь эллиптический тип и сумма ряда будет решением уравнения смешанного типа.

Глава I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АППАРАТ

§ 1.1. Алгебраические тождества

Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться обозначением

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j), \qquad n \geqslant 2.$$

Теорема 1.1.1. *Имеет место тождество*

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{1\,2 \ldots n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}}{(1 - x_{i_1}^2)(1 - x_{i_1}^2 x_{i_2}^2) \ldots (1 - x_{i_1}^2 \ldots x_{i_n}^2)} =$$

$$= D(x_1, \ldots, x_n) \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x_i x_j)^{-1}. \qquad (1.1.1)$$

Здесь $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — *всевозможные перестановки чисел* $1, 2, \ldots, n$, *а* $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{1\,2 \ldots n}$ *равно* 1 *или* -1 *в зависимости от того будет ли перестановка четной или нечетной.*

Теорема 1.1.2. *Положим* $\nu = [n/2]$. *Имеет место тождество*

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{1\,2 \ldots n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}}{(1 - x_{i_1} x_{i_2})(1 - x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) \ldots (1 - x_{i_1} \ldots x_{i_{2\nu}})} =$$

$$= D(x_1, \ldots, x_n) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (1 - x_i x_j)^{-1}. \qquad (1.1.2)$$

Для доказательства этих двух тождеств нам понадобятся два несложных результата об определителях Вандермонда. Хорошо известно, что

$$D(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \left| x_i^{j-1} \right|_1^n. \qquad (1.1.3)$$

Положим

$$D_i = D(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^l D_i = \begin{cases} D(x_1, \ldots, x_n) & \text{при } l = 0, \\ 0 & \text{при } 1 \leqslant l \leqslant n-1, \\ (-1)^{n-1} D(x_1, \ldots, x_n) x_1 \ldots x_n & \text{при } l = n. \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

Затем, так как

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{1-x_1} & \frac{x_2}{1-x_2} & \dots & \frac{x_n}{1-x_n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1(1-x_1) & x_2(1-x_2) & \dots & x_n(1-x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}(1-x_1) & x_2^{n-1}(1-x_2) & \dots & x_n^{n-1}(1-x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1+\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \dots, x_n),$$

мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1-x_i} = (-1)^{n-1} \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)} D(x_1, \dots, x_n). \quad (1.1.5)$$

Заменяя в этой формуле x_i на $-x_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \frac{x_i}{1+x_i} = \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)} D(x_1, \dots, x_n). \quad (1.1.6)$$

Полагая в (1.1.4) $l=0$ и складывая с (1.1.5), находим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{1-x_i} = D(x_1, \dots, x_n)\left\{1 + (-1)^{n-1} \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}\right\}, \quad (1.1.7)$$

откуда без труда получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{1+x_i} = D(x_1, \dots, x_n)\left\{1 - \frac{x_1 \dots x_n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right\}. \quad (1.1.8)$$

Опираясь на эти результаты, перейдем к доказательству теорем 1.1.1 и 1.1.2.

Доказательство 1.1.1. Для $n=2$ левая часть 1.1.1 равна

$$\frac{x_1}{(1-x_1^2)(1-x_1^2x_2^2)}-\frac{x_2}{(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-x_1^2x_2^2)}=$$

$$=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1^2)(1-x_1x_2)(1-x_2^2)}=D(x_1,x_2)\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2}(1-x_ix_j)^{-1}.$$

Таким образом, при $n=2$ теорема справедлива. Проведем индукцию. Пусть для $n-1$ теорема верна. Тогда

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}}{(1-x_{i_1}^2)(1-x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\ldots(1-x_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)}=$$

$$=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\delta_{i_1\ldots i_{n-1}}^{1\ldots a-1,\,a+1,\ldots n}\times$$

$$\times\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}}{(1-x_{i_1}^2)\ldots(1-x_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)}=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_a(1-x_1^2x_2^2\ldots x_n^2)}\times$$

$$\times\sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\delta_{i_1\ldots i_{n-1}}^{1\ldots a-1,\,a+1\ldots n}\frac{x_{i_1}^{n-2}x_{i_2}^{n-3}\ldots x_{i_{n-2}}}{(1-x_{i_1}^2)\ldots(1-x_{i_1}^2\ldots x_{i_{n-1}}^2)}=$$

$$=\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\frac{x_1\ldots x_n}{x_a(1-x_1^2\ldots x_n^2)}\cdot\frac{D(x_1,\ldots,x_{a-1},x_{a+1},\ldots,x_n)}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\\ i\neq a,\,j\neq a}}(1-x_ix_j)}=$$

$$=\frac{1}{(1-x_1^2\ldots x_n^2)\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-x_ix_j)}\sum_{a=1}^{n}D_a\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a). \qquad (1.1.9)$$

Так как

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)=\sum_{l=0}^{n}\sigma_lx_a^l,$$

где σ_l означает l-ю элементарную симметрическую функцию переменных $x_1,\ldots,x_n$, мы имеем в силу (1.1.4)

$$\sum_{a=1}^{n}D_a\prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)=\sum_{a=1}^{n}D_a\sum_{l=0}^{n}\sigma_lx_a^l=\sum_{l=0}^{n}\sigma_l\sum_{a=1}^{n}D_ax_a^l=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)+(-1)^nx_1\ldots x_n\cdot(-1)^{n-1}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)(1-x_1^2\ldots x_n^2).$$

Подставляя в (1.1.9), получаем (1.1.1).

Доказательство 1.1.2. При $n=2$ тождество (1.1.2) очевидно. Опять проведем индукцию. Если для $n-1$ теорема верна, то

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta^{12\ldots n}_{i_1 i_2 \ldots i_n} \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\ldots(1-x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{2\nu}})} =$$

$$= \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \delta^{1\ldots a-1,\, a+1\ldots n}_{i_1\ldots i_{n-1}} \times$$

$$\times \frac{x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2} \ldots x_{i_{n-1}}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})\ldots(1-x_{i_1}\ldots x_{i_{2\nu}})} = \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1\ldots x_n}{x_a(1-\varepsilon x_1\ldots x_n)} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \delta^{1\ldots a-1,\, a+1\ldots n}_{i_1\ldots i_{n-1}} \frac{x_{i_1}^{n-2} x_{i_2}^{n-3} \ldots x_{i_{n-2}}}{(1-x_{i_1}x_{i_2})(1-x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})\ldots}, \quad (1.1.10)$$

где ε равно 0 или 1 в зависимости от того, будет n нечетным или четным. По индуктивному предположению внутренняя сумма равна

$$\frac{D(x_1,\ldots,x_{a-1},x_{a+1},\ldots,x_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)}{1-x_a^2}.$$

Подставляя в (1.1.10), мы получаем, что левая часть (1.1.2) равна

$$\sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \frac{x_1\ldots x_n D(x_1,\ldots,x_{a-1},x_{a+1},\ldots,x_n)}{x_a(1-\varepsilon x_1\ldots x_n)\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_ix_a)}{1-x_a^2} =$$

$$= (1-\varepsilon x_1\ldots x_n)^{-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)^{-1} \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a}{1-x_a^2} \prod_{i=1}^{n}(1-x_ix_a) =$$

$$= (1-\varepsilon x_1\ldots x_n)^{-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)^{-1} \sum_{l=0}^{n} \sigma_l \sum_{a=1}^{n} \frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}. \quad (1.1.11)$$

Рассмотрим внутреннюю сумму (1.1.11) по отдельности для каждого из следующих трех случаев:

1) Для нечетных l, так как

$$\frac{x_a - x_a^l}{1-x_a^2} = x_a(1+x_a^2+\ldots+x_a^{l-3}),$$

мы имеем

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=x_a(1+x_a^2+\ldots+x_a^{l-3})-\frac{1}{2}\left(\frac{x_a}{1-x_a}+\frac{x_a}{1+x_a}\right).$$

Из (1.1.4), (1.1.5) и (1.1.6) сразу получаем

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{x_a}{1+x_a}+\frac{x_a}{1-x_a}\right)D_a=$$

$$=\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)\,x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}+\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}. \tag{1.1.12}$$

2) Для положительных четных l, так как

$$\frac{1-x_a^l}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\ldots+x_a^{l-2},$$

мы имеем

$$-\frac{x_a^l}{1-x_a^2}=1+x_a^2+\ldots+x_a^{l-2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right).$$

Из (1.1.4), (1.1.7) и (1.1.8) получаем

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=-\sum_{a=1}^{n}D_a+\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)D_a=$$

$$=-D(x_1,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)\times$$

$$\times\left\{1+(-1)^{n-1}x_1\ldots x_n\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}+\right.$$

$$\left.+1-x_1\ldots x_n\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}=\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)\times$$

$$\times x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}-\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}. \tag{1.1.13}$$

3) Для $l=0$ имеем

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a}{1-x_a^2}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_a}+\frac{1}{1+x_a}\right)D_a=D(x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)\,x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}-\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}. \tag{1.1.14}$$

Из (1.1.12), (1.1.13) и (1.1.14) получаем

$$\sum_{l=0}^{n}\sigma_l\sum_{a=1}^{n}\frac{D_a x_a^l}{1-x_a^2}=D(x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}-\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}-\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}\times$$

$$\times\sum_{\substack{l=1\\(l=2k)}}^{n}\sigma_l+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}+\right.$$

$$\left.+\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\right\}\sum_{\substack{l=1\\(l=2k+1)}}^{n}\sigma_l=D(x_1,\ldots,x_n)+\frac{1}{2}D(x_1,\ldots,x_n)x_1\ldots x_n\times$$

$$\times\left\{(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^{-1}\sum_{l=0}^{n}\sigma_l+\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-1}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\sigma_l\right\}=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)\left\{1+\frac{-1+(-1)^{n-1}}{2}x_1\ldots x_n\right\}. \qquad (1.1.15)$$

Подставляя (1.1.15) в (1.1.11) и замечая, что $(-1)^{n-1}-1=-2\varepsilon$, находим

$$(1-\varepsilon x_1\ldots x_n)^{-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)^{-1}D(x_1,\ldots,x_n)(1-\varepsilon x_1\ldots x_n)=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-x_ix_j)^{-1}, \qquad (1.1.16)$$

что и доказывает теорему (1.1.2).

Выведем еще и следующее, сравнительно простое тождество.

Теорема 1.1.3.

$$\det\left|\frac{1}{x_i+y_j}\right|_1^n=D(x_1,\ldots,x_n)D(y_1,\ldots,y_n)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i+y_j)^{-1}. \qquad (1.1.17)$$

Доказательство. Из второй, третьей, ..., n-й строки вычитаем первую и используем тождество

$$\frac{1}{x_l+y_k}-\frac{1}{x_1+y_k}=\frac{x_1-x_l}{(x_1+y_k)(x_l+y_k)};\quad l=2,\ldots,n,\ k=1,\ldots,n.$$

После этих преобразований определитель примет вид

$$\frac{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x_1+y_k)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \ldots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \ldots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}. \qquad (1.1.18)$$

Из второго, третьего, ..., n-го столбца последнего определителя вычитаем первый столбец. После этого преобразования получим для определителя в (1.1.18) выражение

$$(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_n)\prod_{j=2}^{n}(x_j+y_1)^{-1}\det\left|\frac{1}{x_i+y_j}\right|_2^n.$$

Теперь теорема сразу же доказывается по индукции.

Заменив $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $-x_1^{-1}, -x_2^{-1}, \ldots, -x_n^{-1}$, после несложных преобразований получим следующий результат.

Теорема 1.1.4.

$$\det\left|(1-x_iy_j)^{-1}\right|_1^n = D(x_1, \ldots, x_n)\,D(y_1, \ldots, y_n)\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(1-x_iy_j)^{-1}\ ^{1)}.$$

§ 1.2. Тождества, содержащие степенные ряды

Теорема 1.2.1. *Пусть степенные ряды*

$$f_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(i)}z^k \qquad (1.2.1)$$

сходятся при $|z|<\rho$. *Тогда при* $|z_1|<\rho, \ldots, |z_n|<\rho$ *имеет место тождество*

$$\det|f_i(z_j)|_1^n=\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_n\geqslant 0}\det\left|a_{l_j}^{(i)}\right|_{i,j=1}^n\det\left|z_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n. \qquad (1.2.2)$$

---

1) Это соотношение известно как лемма Коши. Другой его вывод см. в книге Г. Вейля [2], стр. 276. — *Прим. ред.*

Доказательство. Согласно определению понятия определителя, левая часть (1.2.2) равна

$$\sum_{i_1 \dots i_n} \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} f_{i_1}(z_1) \dots f_{i_n}(z_n) =$$

$$= \sum_{i_1 \dots i_n} \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} a^{(i_1)}_{k_1} \dots a^{(i_n)}_{k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1 \dots i_n} \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} a^{(i_1)}_{k_1} \dots a^{(i_n)}_{k_n} \right) z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \det \left| a^{(i)}_{k_j} \right|^n_{i,j=1} =$$

$$= \sum_{l_1 > l_2 > \dots > l_n \geqslant 0} \det \left| a^{(i)}_{l_j} \right|^n_{i,j=1} \sum_{i_1 \dots i_n} \delta^{1 \dots n}_{i_1 \dots i_n} z_1^{l_{i_1}} \dots z_n^{l_{i_n}} =$$

$$= \sum_{l_1 > \dots > l_n \geqslant 0} \det \left| a^{(i)}_{l_j} \right|^n_{i,j=1} \det \left| z_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1},$$

что и требовалось доказать.

Полагая $f_i(z) = f(x_i z)$, получаем следующий частный случай.

Теорема 1.2.2. *Пусть степенной ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1.2.3}$$

сходится при $|z| < \rho$. *Тогда при* $|x_i y_j| < \rho$, $i, j = 1, \dots, n$, *мы имеем*

$$\det |f(x_i y_j)|^n_1 =$$

$$= \sum_{l_1 > \dots > l_n \geqslant 0} a_{l_1} a_{l_2} \dots a_{l_n} \det \left| x_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1} \det \left| y_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1}. \tag{1.2.4}$$

В частности, при $f(z) = (1-z)^{-1}$ получаем следующую формулу

$$\sum_{l_1 > \dots > l_n \geqslant 0} \det \left| x_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1} \det \left| y_i^{l_j} \right|^n_{i,j=1} = \det \left| (1 - x_i y_j)^{-1} \right|^n_1, \tag{1.2.5}$$

а последний определитель по теореме 1.1.4 равен

$$D(x_1, \dots, x_n) D(y_1, \dots, y_n) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Положим теперь в (1.2.5) $x_n = 0$. Тогда все члены с $l_n > 0$ обратятся в нуль и мы получим

$$\sum_{l_1 > \ldots > l_{n-1} \geqslant 0} \det \left| x_i^{l_j} \right|_{i,j=1}^{n-1} \begin{vmatrix} y_1^{l_1} & \ldots & y_n^{l_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{l_{n-1}} & \ldots & y_n^{l_{n-1}} \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(x_1, \ldots, x_{n-1})\, D(y_1, \ldots, y_n) \cdot x_1 \ldots x_{n-1}}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}.$$

Заменим l_i на $l_i + 1$. Тогда получим

$$\sum_{l_1 > \ldots > l_{n-1} \geqslant 0} \det \left| x_i^{l_j} \right|_{i,j=1}^{n-1} \begin{vmatrix} y_1^{l_1+1} & \ldots & y_n^{l_1+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{l_{n-1}+1} & \ldots & y_n^{l_{n-1}+1} \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(x_1, \ldots, x_{n-1})\, D(y_1, \ldots, y_n)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}.$$

Полагая теперь $x_{n-1} = 0$, а затем повторяя этот процесс, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1.2.3. *Пусть $n \geqslant m > 0$. При $|x_\nu| < 1$, $|y_\nu| < 1$, $\nu = 1, \ldots, n$, имеет место тождество*

$$\sum_{l_1 > \ldots > l_m \geqslant 0} \det \left| x_i^{l_j} \right|_{i,j=1}^{m} \begin{vmatrix} y_1^{l_1+n-m} & \ldots & y_n^{l_1+n-m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{l_m+n-m} & \ldots & y_n^{l_m+n-m} \\ y_1^{n-m-1} & \ldots & y_n^{n-m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1 & \ldots & y_n \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(x_1, \ldots, x_m)\, D(y_1, \ldots, y_n)}{\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}. \qquad (1.2.6)$$

Впоследствии нам понадобится еще и следующая теорема.

Теорема 1.2.4. *Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — функции, дифференцируемые достаточное число раз. Тогда*

$$\lim_{\substack{x_1 \to x \\ \cdots \\ x_n \to x}} \frac{\det |f_i(x_j)|_{i,j=1}^n}{D(x_1, \ldots, x_n)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{1!\,2!\ldots(n-1)!} \det \left| f_i^{(j-1)}(x) \right|_{i,j=1}^n. \qquad (1.2.7)$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно предположить, что $x = 0$. Если $f_i(x)$ — аналитические функции, то наша теорема является следствием теоремы 1.2.1; для неаналитических функций следует повторить те же рассуждения, используя формулу Маклорена с остаточным членом.

Пусть $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$ — целые числа. Введем обозначение

$$M_{f_1, \ldots, f_n}(x_1, \ldots, x_n) = \det \left| x_j^{f_i + n - i} \right|_{i,j=1}^n. \qquad (1.2.8)$$

Очевидно, что

$$M_{0,0,\ldots,0}(x_1, \ldots, x_n) = D(x_1, \ldots, x_n).$$

Положим

$$N(f_1, \ldots, f_n) = \lim_{\substack{x_1 \to 1 \\ \cdots \\ x_n \to 1}} \frac{M_{f_1, \ldots, f_n}(x_1, \ldots, x_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}. \qquad (1.2.9)$$

Из теоремы 1.2.4 мы получаем

$$N(f_1, \ldots, f_n) = \frac{D(f_1 + n - 1, f_2 + n - 2, \ldots, f_{n-1} + 1, f_n)}{D(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)}. \qquad (1.2.10)$$

Теорема 1.2.5. *Пусть $n \geqslant m \geqslant 1$. При $|x_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, имеем*

$$\prod_{i=1}^m (1 - x_i)^{-\rho - n + 1} = C_\rho \sum_{l_1 > \ldots > l_m \geqslant 0} a_{l_1 + n - m} \ldots a_{l_m + n - m} \times$$

$$\times N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0) \frac{M_{f_1, \ldots, f_m}(x_1, \ldots, x_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \qquad (1.2.11)$$

где

$$l_1 = f_1 + m - 1, \ \ldots, \ l_{m-1} = f_{m-1} + 1, \quad l_m = f_m,$$

$$a_l = \frac{\Gamma(\rho + l)}{\Gamma(\rho)\Gamma(l+1)}, \quad C_\rho = \frac{1}{a_{n-m} \ldots a_{n-1}}.$$

Доказательство. 1) Пусть сначала $m=n$. Положив в теореме 1.2.2

$$f(z)=(1-z)^{-\rho}=\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l,$$

мы получим при $|x_i y_j|<1$ тождество

$$\det\left|(1-x_i y_j)^{-\rho}\right|_1^n = \sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\ldots a_{l_n} \det\left|x_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n \det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n.$$

Деля это равенство на $D(y_1,\ldots,y_n)$ и полагая $y_1\to 1,\ldots,y_n\to 1$, мы получаем в силу теоремы 1.2.4 (так как $(\rho(\rho+1)\ldots(\rho+j-2)=1$ при $j=1)$

$$\lim_{\substack{y_1\to 1\\ \cdots\\ y_n\to 1}} \frac{\det\left|(1-x_i y_j)^{-\rho}\right|_1^n}{D(y_1,\ldots,y_n)} =$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}\det\left|\rho(\rho+1)\ldots(\rho+j-2)\,x_i^{j-1}(1-x_i)^{-\rho-j+1}\right|_1^n=$$

$$=\frac{\rho^{n-1}(\rho+1)^{n-2}\ldots(\rho+n-2)}{1!\,2!\ldots(n-1)!}D\left(\frac{x_1}{1-x_1},\ldots,\frac{x_n}{1-x_n}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n(1-x_i)^{-\rho}=a_0a_1\ldots a_{n-1}D(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^n(1-x_i)^{-\rho-n+1}.$$

Отсюда находим

$$\prod_{i=1}^n(1-x_i)^{-\rho-n+1}=\frac{1}{a_0\ldots a_{n-1}}\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0} a_{l_1}\ldots a_{l_n}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_n)\frac{M_{f_1,\ldots,f_n}(x_1,\ldots,x_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}. \quad (1.2.12)$$

2) Пусть теперь $m<n$. Положим в (1.2.12) $x_n=0$. Тогда все члены с $l_n>0$ исчезнут, а потому

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)^{-\rho-n+1}=\frac{1}{a_0\ldots a_{n-1}}\sum_{l_1>\ldots>l_{n-1}>0} a_{l_1}\ldots a_{l_{n-1}}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_{n-1},0)\frac{M_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})}{D(x_1,\ldots,x_{n-1})}.$$

Заменяя l_ν на $l_\nu+1$, получаем

$$\prod_{i=1}^{n-1}(1-x_i)^{-\rho-n+1}=\frac{1}{a_0\ldots a_{n-1}}\sum_{l_1>\ldots>l_{n-1}\geqslant 0}a_{l_1+1}\ldots a_{l_{n-1}+1}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_{n-1},0)\frac{M_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})}{D(x_1,\ldots,x_{n-1})}.$$

Полагая затем $x_{n-1}=0$ и повторяя этот процесс нужное число раз, придем к доказательству теоремы.

Теорема 1.2.6. *При* $|x|<1$, $|x_k|<1$, $k=1,\ldots,n$, *имеет место тождество*

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}M_{2f_1,\ldots,2f_n}(x_1,\ldots,x_n)\,x^{f_1+\ldots+f_n}=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1}.$$

Доказательство. Левая часть доказываемого равенства равна

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}x_{i_1}^{2f_1+n-1}x_{i_2}^{2f_2+n-2}\ldots x_{i_n}^{2f_n}\cdot x^{f_1+\ldots+f_n}=$$

$$=\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}(xx_{i_1}^2)^{f_1}\ldots(xx_{i_n}^2)^{f_n}=$$

$$=\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}}{(1-xx_{i_1}^2)(1-x^2x_{i_1}^2x_{i_2}^2)\ldots(1-x^nx_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)}. \quad (1.2.13)$$

Мы воспользовались здесь очевидным соотношением: при $|a_\nu|<1$, $\nu=1,2,\ldots,n$,

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}a_1^{f_1}\ldots a_n^{f_n}=$$

$$=(1-a_1)^{-1}(1-a_1a_2)^{-1}\ldots(1-a_1a_2\ldots a_n)^{-1}. \quad (1.2.14)$$

Заменяя в теореме 1.1.1 x_i на $x_i\sqrt{x}$, имеем

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n}\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n}\frac{x_{i_1}^{n-1}x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}(\sqrt{x})^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-xx_{i_1}^2)\ldots(1-x^nx_{i_1}^2\ldots x_{i_n}^2)}=$$

$$=(\sqrt{x})^{\frac{n(n-1)}{2}}D(x_1,\ldots,x_n)\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1}. \quad (1.2.15)$$

Подставляя это выражение в (1.2.13), получаем утверждение теоремы.

Теорема 1.2.7. *Пусть* $\nu=[n/2]$. *При* $|x|<1$, $|x_k|<1$, $k=1, \ldots, n$, *имеет место тождество*

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0} M_{f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots}(x_1, \ldots, x_n)\, x^{f_1+\ldots+f_\nu}=$$

$$=D(x_1, \ldots, x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1}, \quad (1.2.16)$$

(*при нечетных* n *последний индекс у* $M_{f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots}$ *равен нулю*).

Доказательство. Левая часть (1.2.16) равна

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0}\ \sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} x_{i_1}^{f_1+n-1} x_{i_2}^{f_1+n-2}\ldots x^{f_1+\ldots+f_\nu}=$$

$$=\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}} \sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0}(xx_{i_1}x_{i_2})^{f_1}(xx_{i_3}x_{i_4})^{f_2}\cdot$$

$$=\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} x_{i_1}^{n-1} x_{i_2}^{n-2}\ldots x_{i_{n-1}}(1-xx_{i_1}x_{i_2})^{-1}(1-x^2x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4})^{-}$$

По теореме 1.1.2 это равно

$$D(x_1, \ldots, x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.2.8. *При* $|x|<1$, $|x_k|<1$, $k=1, 2, \ldots, n$, *имеем*

$$\sum_{f=0}^{\infty} M_{f, 0, \ldots, 0}(x_1, \ldots, x_n)\, x^f=D(x_1, \ldots, x_n)\prod_{i=1}^{n}(1-xx_i)^{-1}.$$

Доказательство. Путем несложных преобразований находим

$$\sum_{f=0}^{\infty} M_{f, 0, \ldots, 0}(x_1, \ldots, x_n)\, x^f=$$

$$=\sum_{f=0}^{\infty}\begin{vmatrix}(x_1x)^f x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ (x_nx)^f x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{x_1^{n-1}}{1-xx_1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \dfrac{x_n^{n-1}}{1-xx_n} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1\end{vmatrix}=$$

$$=D(x_1, \ldots, x_n)\prod_{i=1}^{n}(1-xx_i)^{-1}.$$

Теорема 1.2.9.

$$\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{[l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2]!}{l_1!\,l_2!\ldots l_n!}D(l_1, \ldots, l_n)\det\left|x_i^{l_j}\right|_{i, j=1}^{n}=$$

$$=\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{1-x_1-\ldots-x_n}.$$

Доказательство. Полагая в теореме 1.2.2 $f(z)=e^z=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!}$, получаем

$$\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{1}{l_1!\ldots l_n!}\det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n\det\left|x_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n=\det\left|e^{x_iy_j}\right|_1^n.$$

Так как

$$\left[l_1+\ldots+l_n-\frac{n(n-1)}{2}\right]!=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2}\,dt,$$

то

$$\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{[l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2]!}{l_1!\ldots l_n!}\det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n\det\left|x_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n=$$

$$=\int_0^{\infty}t^{-\frac{n(n-1)}{2}}e^{-t}\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{1}{l_1!\ldots l_n!}\det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n\det\left|(tx_i)^{l_j}\right|_{i,j=1}^n dt=$$

$$=\int_0^{\infty}t^{-\frac{n(n-1)}{2}}e^{-t}\det\left|e^{tx_iy_j}\right|_1^n dt.$$

Так как по теореме 1.2.4

$$\lim_{\substack{y_1\to 1\\ \cdots\\ y_n\to 1}}\frac{\det\left|y_i^{l_j}\right|_{i,j=1}^n}{D(y_1,\ldots,y_n)}=\frac{D(l_1,l_2,\ldots,l_n)}{1!\,2!\ldots(n-1)!},$$

мы получаем, применяя теорему 1.2.4,

$$\sum_{l_1>\ldots>l_n\geqslant 0}\frac{[l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2]!}{l_1!\ldots l_n!}D(l_1,\ldots,l_n)\det\left|x_i^{l_j}\right|_{i,l=1}^n=$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\int_0^{\infty}t^{-\frac{n(n-1)}{2}}e^{-t}\det\left|e^{x_it}(x_it)^{j-1}\right|_1^n dt=$$

$$=D(x_1,\ldots,x_n)\int_0^{\infty}e^{-t+(x_1+\ldots+x_n)t}\,dt=\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{1-x_1-\ldots-x_n},$$

что и требовалось доказать.

Полагая $x_1\to x,\ldots,x_n\to x$, получаем как следствие теорему:

Теорема 1.2.10.

$$\sum_{l_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{l_n=0}^{\infty} \frac{[l_1+\ldots+l_n-n(n-1)/2]!}{l_1!\ldots l_n!} D^2(l_1, \ldots, l_n)\, x^{l_1+\cdots+l_n} = 1!\,2!\ldots n!\,\frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1-nx}.$$

Сравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\sum_{l_1+\ldots+l_n=m} \frac{D^2(l_1, \ldots, l_n)}{l_1!\ldots l_n!} = \frac{n^{m-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 1!\,2!\ldots n!}{\left(m-\frac{n(n-1)}{2}\right)!}. \quad (1.2.17)$$

§ 1.3. Тождественные соотношения для $N(f_1, \ldots, f_n)$

В этом параграфе мы получим некоторые тождественные соотношения для $N(f_1, \ldots, f_n)$. Эти тождества являются частным случаем тождеств § 1.4. Однако, основываясь на них, мы лучше поймем, как получить тождества § 1.4.

Теорема 1.3.1. *Пусть $n \geqslant m > 0$. При $|x| < 1$ имеем*

$$\sum_{f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_m \geqslant 0} N(f_1, \ldots, f_m) N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)\, x^{f_1+\cdots+f_m} = (1-x)^{-mn}, \quad (1.3.1)$$

откуда сравнением коэффициентов получаем

$$\sum_{\substack{f_1+\ldots+f_m=f \\ f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_m \geqslant 0}} N(f_1, \ldots, f_m) N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0) = \frac{(mn+f-1)!}{(mn-1)!\,f!}. \quad (1.3.2)$$

Доказательство. Заменяя в теореме 1.2.3 x_i на xx_i и полагая $x_i \to 1$, $y_i \to 1$, получаем (1.3.1).

Теорема 1.3.2. *При $|x| < 1$*

$$\sum_{f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0} N(2f_1, \ldots, 2f_n)\, x^{f_1+\cdots+f_n} = (1-x)^{-\frac{n(n+1)}{2}}, \quad (1.3.3)$$

откуда сравнением коэффициентов получаем

$$\sum_{\substack{f_1+\ldots+f_n=f \\ f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0}} N(2f_1, \ldots, 2f_n) = \frac{[f+n(n+1)/2-1]!}{f!\,[n(n+1)/2-1]!}.$$

Доказательство. Соотношение (1.3.3) легко выводится из теоремы 1.2.6.

Теорема 1.3.3. *При* $|x|<1$

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0} N(f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots)\, x^{f_1+\cdots+f_\nu} = (1-x)^{-\frac{n(n-1)}{2}}, \quad (1.3.4)$$

откуда сравнением коэффициентов получаем

$$\sum_{\substack{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_\nu\geqslant 0\\ f_1+\ldots+f_\nu=f}} N(f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots) = \frac{[f+n(n-1)/2-1]!}{f![n(n-1)/2-1]!}\ ^{1)}. \quad (1.3.5)$$

§ 1.4. Тождественные соотношения для характеров

Пусть $f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0$ — целые числа, а

$$A_{f_1,\ldots,f_n}(X) \quad (1.4.1)$$

— представление полной линейной группы $GL(n)$ (т. е. группы всех невырожденных линейных преобразований n-мерного комплексного пространства) с сигнатурой $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ [2]. Предположим, что это представление унитарно для унитарных X. Известно, что (1.4.1) является матрицей, имеющей $N(f_1, \ldots, f_n)$ строк и столбцов. След этой матрицы мы будем обозначать

$$\chi_{f_1,\ldots,f_n}(X) = \operatorname{Sp} A_{f_1,\ldots,f_n}(X).$$

Эта величина называется характером представления (1.4.1).

Предположим, что X — диагональная матрица, $X=\Lambda=[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Тогда, как известно [3],

$$\chi_{f_1,\ldots,f_n}(\Lambda) = \frac{M_{f_1,\ldots,f_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}. \quad (1.4.2)$$

Введем еще следующие два сокращенных обозначения:

$$A_{f,0,\ldots,0}(X) = A^{[f]}(X) = X^{[f]},$$

$$A_{\underbrace{1,\ldots,1}_{f\text{ раз}},0,\ldots,0}(X) = A^{(f)}(X) = X^{(f)}.$$

Теорема 1.4.1. *Пусть* $n\geqslant m>0$, X — *элемент полной линейной группы* $GL(m)$, *а* Y — *элемент группы* $GL(n)$. *Обозна-*

---

[1]) Соотношение (1.3.4.) выводится из теоремы 1.2.7. — *Прим. ред.*

[2]) См. Г. Вейль [2], стр. 181 — *Прим. перев.*

[3]) См. Г. Вейль [2], стр. 276 и след. — *Прим. перев.*

чим через $X \times Y$ кронекеровское произведение X на Y. Тогда

$$\mathrm{Sp}((X\times Y)^{[f]}) = \sum_{\substack{f_1+\ldots+f_m=f\\ f_1\geqslant\ldots\geqslant f_m\geqslant 0}} \chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)\,\chi_{f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0}(Y). \tag{1.4.3}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда X и Y — диагональные матрицы

$$X=[x_1,\ldots,x_m],\quad Y=[y_1,\ldots,y_n].$$

По теореме 1.2.3, заменяя там x_i на xx_i, получаем

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_m\geqslant 0}\chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)\,\chi_{f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0}(Y)\,x^{f_1+\ldots+f_m} = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-xx_iy_j)^{-1}. \tag{1.4.4}$$

С другой стороны, по теореме 1.2.8 имеем

$$\sum_{f=0}^{\infty}\mathrm{Sp}(X\times Y)^{[f]}x^f = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-xx_iy_j)^{-1}. \tag{1.4.5}$$

Сравнивая теперь коэффициенты при x^f в (1.4.4) и (1.4.5), получаем утверждение теоремы для нашего частного случая диагональных X и Y.

Так как каждый член ряда в правой части (1.4.3) не меняется при замене X и Y на PXP^{-1} и QYQ^{-1}, то (1.4.3) справедливо и для любых матриц X и Y, которые преобразованием подобия могут быть приведены к диагональному виду. По соображениям непрерывности теорема справедлива и в самом общем случае.

Теорема 1.4.2. *Имеет место тождество*

$$\sum_{\substack{f_1+\ldots+f_n=f\\ f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}}\chi_{2f_1,\ldots,2f_n}(X) = \mathrm{Sp}(X^{[2]})^{[f]}. \tag{1.4.6}$$

Доказательство. Допустим сначала, что $X=[x_1,\ldots,x_n]$. Тогда по теореме 1.2.6 имеем

$$\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\chi_{2f_1,\ldots,2f_n}(X)\,x^{f_1+\ldots+f_n} = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(1-xx_ix_j)^{-1}.$$

С другой стороны, взяв в теореме 1.2.8 в качестве n и $x_1, \ldots, x_n$ величины $n(n+1)/2$ и $x_i x_j$, $i \leqslant j$, $i, j = 1, \ldots, n$, мы получим

$$\sum_{f=0}^{\infty} \mathrm{Sp}\left((X^{[2]})^{[f]}\right) x^f = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - x x_i x_j)^{-1} .$$

Сравнивая коэффициенты и используя те же соображения, что и при доказательстве предыдущей теоремы, получаем наше утверждение.

Совершенно аналогично получаем и следующую теорему.

Теорема 1.4.3.

$$\sum_{\substack{f_1 + \ldots + f_\nu = f \\ f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_\nu \geqslant 0}} \chi_{f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots}(X) = \mathrm{Sp}\,(X^{(2)})^{[f]} .$$

Глава II

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 2.1. Матричные аналоги интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}$

Теорема 2.1.1. *Если* $\alpha > n/2$, *то*

$$I_n(\alpha) = \int\limits_T \frac{\dot{T}}{(\det(I+T^2))^\alpha} =$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \pi^{\frac{n(n+1)}{4}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{n+\nu}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha-\nu)}. \quad (2.1.1)$$

Здесь $T = (t_{jk})_1^n$ *пробегает все вещественные симметрические матрицы* n*-го порядка, а* $\dot{T} = 2^{n(n-1)/4} \prod\limits_{j \leqslant k} dt_{jk}$.

Предварительно мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 2.1.2. *Пусть* Z — $m \times n$*-матрица (т. е. матрица из* m *строк* n *столбцов). Тогда*

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = \det(I^{(n)} - \bar{Z}'Z). \quad (2.1.2)$$

Кроме того, условия $I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0$ *и* $I^{(n)} - \bar{Z}'Z > 0$ *эквивалентны* ($I^{(m)}$ — *единичная матрица порядка* m).

Доказательство. Хорошо известно, что любую $m \times n$-матрицу Z можно представить в виде

$$Z = U\Lambda V,$$

где U и V — унитарные матрицы порядков m и n соответственно, а $m \times n$-матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \lambda_\nu \geqslant 0.$$

Отсюда следует

$$\det(I^{(m)} - Z\bar{Z}') = (1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2)\dots = \det(I^{(n)} - \bar{Z}'Z).$$

Второе утверждение теоремы получается из того соображения, что оба упомянутые условия эквивалентны условию $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1, \dots$.

Теорема 2.1.3. *Пусть* $a>0$, $b^2-ac<0$, $\alpha>\frac{1}{2}$, *тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha}=a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (2.1.3)$$

Доказательство. Сделаем замену $y=\frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}\left(x+\frac{b}{a}\right)$. Тогда

$$ax^2+bx+c=\frac{ac-b^2}{a}(y^2+1), \qquad dx=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{a}dy.$$

Значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^\alpha}=a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^\alpha}=$$

$$=a^{\alpha-1}(ac-b^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Доказательство теоремы 2.1.1. Положим

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & v' \\ v & t\end{pmatrix} \qquad (t=t_{nn}),$$

где T_1 — вещественная симметрическая матрица порядка $n-1$, v — $n-1$)-мерный вектор, t — вещественное число. Тогда

$$I+T^2=\begin{pmatrix} I+T_1^2+v'v & T_1v'+v't \\ vT_1+tv & 1+vv'+t^2\end{pmatrix}.$$

Так как при $A=A'$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -bA^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b' \\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -bA^{-1} & 1\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & c-bA^{-1}b'\end{pmatrix}, \quad (2.1.4)$$

то

$$\det(I+T^2)=\det(I+T_1^2+v'v)\times$$
$$\times\{1+vv'+t^2-(vT_1+tv)(I+T_1^2+v'v)^{-1}(T_1v'+v't)\}.$$

Второй множитель в правой части этого равенства может быть записан в виде $at^2+2bt+c$, где

$$a=1-v(I+T_1^2+v'v)^{-1}v',$$

$$2b=-vT_1(I+T_1^2+v'v)^{-1}v'-v(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v'=$$
$$=-2v(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v',$$

$$c=1+vv'-vT_1(I+T_1^2+v'v)^{-1}T_1v'.$$

Но симметрическую матрицу T_1 можно представить в виде

$$T_1 = \Gamma' [\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}] \Gamma,$$

где Γ — некоторая ортогональная матрица.
Положим

$$T_2 = \Gamma' \left[\sqrt{1+\lambda_1^2}, \ldots, \sqrt{1+\lambda_{n-1}^2}\right] \Gamma.$$

Тогда

$$T_2 = T_2', \quad T_1 T_2 = T_2 T_1, \quad I + T_1^2 = T_2^2.$$

Если положить $v = wT_2$, то мы получим

$$\dot{v} = \det T_2 \cdot \dot{w} = \left(\det\left(I + T_1^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{w}$$

и

$$I + T_1^2 + v'v = T_2 (I + w'w) T_2.$$

Кроме того, если u — $(n-1)$-мерный вектор, то [в силу равенства $(w'w)^2 = w'w(ww')$] имеем

$$u(I + w'w)^{-1} u' = uu' - \frac{(uw')^2}{1 + ww'}$$

и

$$w(I + w'w)^{-1} = \frac{w}{1 + ww'}.$$

Значит,

$$a = 1 - w(I + w'w)^{-1} w' = \frac{1}{1 + ww'},$$

$$b = -w(I + w'w)^{-1} T_1 w' = -\frac{wT_1 w'}{1 + ww'},$$

$$c = 1 + wT_2^2 w' - wT_1 (I + w'w)^{-1} T_1 w' = 1 + ww' + \frac{(wT_1 w')^2}{1 + ww'}.$$

Следовательно,

$$ac - b^2 = 1.$$

По теореме 2.1.3 имеем

$$I_n(\alpha) = \int_T \frac{\dot{T}}{[\det(I + T^2)]^\alpha} =$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \int_{t, v, T_1} \left[\det\left(I + T_1^2 + v'v\right)\right]^{-\alpha} (at^2 + 2bt + c)^{-\alpha} dt\, \dot{v}\, \dot{T}_1 =$$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_w (1 + ww')^{1-2\alpha} \dot{w} \int_{T_1} \left[\det\left(I + T_1^2\right)\right]^{\frac{1}{2}-\alpha} \dot{T}_1.$$

Используя формулу $\left(\alpha > \frac{n+1}{4}\right)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2\right)^{1-2\alpha} dx_1 \dots dx_{n-1} =$$

$$= \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha - 1)}, \qquad (2.1.5)$$

получаем рекуррентное соотношение

$$I_n(\alpha) = 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha - 1)} I_{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right). \qquad (2.1.6)$$

Применяя $n-1$ раз рекуррентную формулу (2.1.6) и замечая, что

$$I_1\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\alpha - \frac{n-1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha - \frac{n-1}{2}\right)} \qquad \left(\alpha > \frac{n}{2}\right),$$

мы получаем наше утверждение.

Теорема 2.1.4. *Пусть $n \geqslant 2$. При $\alpha > (2n-3)/4$*

$$J_n(\alpha) = \int_K \frac{\dot{K}}{(\det(1+KK'))^{\alpha}} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}} \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{\Gamma\left(2\alpha - n + \frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha - n + \nu)}. \qquad (2.1.7)$$

Здесь K пробегает все вещественные кососимметрические матрицы порядка n, а $\dot{K} = 2^{n(n-1)/4} \prod_{i<j} dk_{ij}$.

Доказательство. Запишем K в виде

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & -v' \\ v & 0 \end{pmatrix},$$

где K_1 — $(n-1)$-мерная вещественная кососимметрическая матрица, а v — $(n-1)$-мерный вектор. Тогда

$$I + KK' = \begin{pmatrix} I + K_1K_1' + v'v & K_1v' \\ vK_1' & 1 + vv' \end{pmatrix}.$$

Используя формулу, аналогичную (2.1.4), получаем

$$\det(I + KK') =$$
$$= \left\{1 + vv' - vK_1'(I + K_1K_1' + v'v)^{-1}K_1v'\right\} \det(I + K_1K_1' + v'v).$$

Можно найти такую ортогональную матрицу Γ, что

$$K_1 = \Gamma\left\{\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots\right\}\Gamma',$$

где последнее слагаемое в скобках равно $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{n/2} \\ -\lambda_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$, если n четное, и 0, если n нечетное.

Положим

$$T = \Gamma[\sqrt{1+\lambda_1^2},\quad \sqrt{1+\lambda_1^2},\quad \sqrt{1+\lambda_2^2},\quad \sqrt{1+\lambda_2^2},\ \ldots]\Gamma'.$$

Тогда

$$T = T',\quad K_1 T = T K_1,\quad I + K_1 K_1' = T^2.$$

Сделав замену $v = wT$, имеем

$$\dot{v} = \dot{w}\det T = \dot{w}\left[\det\left(I + K_1 K_1'\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$I + K_1 K_1' + v'v = T^2 + Tw'wT = T\,(I + w'w)\,T.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &1 + vv' - vK_1'\left(I + K_1 K_1' + v'v\right)^{-1} K_1 v' = \\ &= 1 + wT^2 w' - wTK_1' T^{-1}(I + w'w)^{-1} T^{-1} K_1 T w' = \\ &= 1 + wT^2 w' - wK_1'(I + w'w)^{-1} K_1 w' = \\ &= 1 + ww' - \frac{(wK_1 w')^2}{1 + ww'} = 1 + ww'. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_n(\alpha) &= \int\limits_K (\det(I + KK'))^{-\alpha}\dot{K} = \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{K_1} \left(\det\left(I + K_1 K_1'\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}\dot{K}_1 \cdot \int\limits_w (1 + ww')^{-2\alpha}\dot{w} = \right. \\ &= 2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(2\alpha - \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha)} J_{n-1}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Многократное использование этой формулы приводит нас в конце концов к интегралу

$$\begin{aligned} J_2\left(\alpha - \frac{n-2}{2}\right) &= \sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{n-2\alpha-2}\,dt = \\ &= \sqrt{2}\,\pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(2\alpha - n + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha - n + 2)} \qquad \left(\alpha > \frac{2n-3}{4}\right), \end{aligned}$$

и мы получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\alpha > n - \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\boldsymbol{H}_n(\alpha) = \int\limits_{\dot{H}} (\det(I + H^2))^{-\alpha} \dot{H} =$$

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \pi^{\frac{n^2}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\alpha - j - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - j)} \cdot \prod_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(2\alpha - n - k)}{\Gamma(2\alpha - 2k - 1)}. \quad (2.1.8)$$

Здесь $H = (h_{jk})_1^n$ *пробегает все эрмитовы матрицы,*

$$h_{jj} = h_j, \quad h_{jk} = h'_{jk} + ih''_{jk}, \quad j < k, \quad \dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k} dh'_{jk} dh''_{jk}.$$

Доказательство. Положим

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & \bar{v}' \\ v & h \end{pmatrix}, \quad (h = h_n),$$

где H_1 — эрмитова матрица порядка $n - 1$, v — $(n - 1)$-мерный вектор, h — вещественное число. Тогда

$$I + H^2 = \begin{pmatrix} I + H_1^2 + \bar{v}'v & H_1\bar{v}' + \bar{v}'h \\ vH_1 + hv & 1 + h^2 + v\bar{v}' \end{pmatrix}.$$

С помощью тождества

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -pA^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \bar{p}' \\ p & l \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} I & 0 \\ -pA^{-1} & 1 \end{pmatrix}}' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & l - pA^{-1}\bar{p}' \end{pmatrix}, \quad (2.1.9)$$

справедливого для эрмитовой матрицы A, мы получаем

$$\det(I + H^2) = (ah^2 + 2bh + c) \det\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right),$$

где

$$a = 1 - v\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right)^{-1}\bar{v}'.$$

$$2b = -vH_1\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right)^{-1}\bar{v}' - v\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right)^{-1}H_1\bar{v}',$$

$$c = 1 + v\bar{v}' - vH_1\left(I + H_1^2 + \bar{v}'v\right)^{-1}H_1\bar{v}'.$$

Так как H_1 — эрмитова матрица, то существует такая унитарная матрица U, что

$$H_1 = U[\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}]\bar{U}'.$$

Положим

$$T = U\left[\sqrt{1 + \lambda_1^2}, \ldots, \sqrt{1 + \lambda_n^2}\right]\bar{U}'.$$

Тогда

$$T = \bar{T}', \quad TH_1 = H_1T, \quad I + H_1^2 = T^2.$$

Если сделать замену $v = uT$, то

$$\dot{v} = (\det T)^2 \dot{u} = \det\left(I + H_1^2\right) \dot{u},$$

$$I + H_1^2 + \bar{v}'v = T\left(I + \bar{u}'u\right) T.$$

Далее, так как

$$\left(I + \bar{u}'u\right)^{-1} \bar{u}' = \frac{\bar{u}'}{1 + u\bar{u}'}, \qquad w\left(1 + \bar{u}'u\right)^{-1} \bar{w}' = w\bar{w}' - \frac{|w\bar{u}'|^2}{1 + u\bar{u}'},$$

(w — любой $(n-1)$-мерный вектор), то мы получаем

$$a = 1 - u\left(I + \bar{u}'u\right)^{-1} \bar{u}' = \frac{1}{1 + u\bar{u}'} \quad (a > 0),$$

$$b = -uH_1\left(I + \bar{u}'u\right)^{-1} \bar{u}' = -\frac{uH_1\bar{u}'}{1 + u\bar{u}'},$$

$$c = 1 + uT^2\bar{u}' - uH_1\left(I + \bar{u}'u\right)^{-1} H_1\bar{u}' = 1 + u\bar{u}' + \frac{|uH_1\bar{u}'|^2}{1 + u\bar{u}'}.$$

Поскольку $uH_1\bar{u}'$ — вещественное число, то $ac - b^2 = 1$. По теореме 2.1.3 имеем

$$H_n(\alpha) = \int\limits_H \left[\det\left(I + H^2\right)\right]^{-\alpha} \dot{H} =$$

$$= 2^{n-1} \int\limits_{u,\, H_1} \left[\det\left(I + H_1^2\right)\right]^{1-\alpha} \left(1 + u\bar{u}'\right)^{-\alpha} \dot{u}\dot{H}_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(ah^2 + 2bh + c\right)^{-\alpha} dh =$$

$$= 2^{n-1} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_u \left(1 + u\bar{u}'\right)^{1-2\alpha} \dot{u} \cdot \int\limits_{H_1} \left[\det\left(I + H_1^2\right)\right]^{1-\alpha} \dot{H}_1 =$$

$$= 2^{n-1} \pi^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \Gamma(2\alpha - n)}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(2\alpha - 1)} H_{n-1}(\alpha - 1).$$

Применяя последовательно полученную формулу и учитывая, что

$$H_1(\alpha - n + 1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 + x^2\right)^{n-\alpha-1} dx = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - n + 1)}$$

$$\left(\alpha > n - \frac{1}{2}\right),$$

получаем утверждение теоремы.

§ 2.2. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

Теорема 2.2.1. *Пусть Z — $m \times n$-матрица, $\lambda > -1$. Положим*

$$J_{m,n}(\lambda) = \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} [\det(I - Z\bar{Z}')]^{\lambda} \dot{Z},$$

где $\dot{Z} = \prod\limits_{p,q} dx_{pq} dy_{pq}$, $x_{pq} + iy_{pq} = z_{pq}$. *Тогда*

$$J_{m,n}(\lambda) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(\lambda + j) \prod\limits_{k=1}^{m} \Gamma(\lambda + k)}{\prod\limits_{l=1}^{n+m} \Gamma(\lambda + l)} \pi^{mn}. \tag{2.2.1}$$

В частности, при $\lambda = 0$ мы получаем для объема области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ комплексных матриц Z, удовлетворяющих условию $I - Z\bar{Z}' > 0$, выражение

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}) = \frac{1!\,2! \ldots (m-1)!\,1!\,2! \ldots (n-1)!}{1!\,2! \ldots (m+n-1)!} \pi^{mn}. \tag{2.2.2}$$

Сначала мы выведем две рекуррентные формулы для интегралов вида

$$\int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} f(Z) \dot{Z}.$$

1) Представим матрицу Z в виде $Z = (Z_{m,\,n-1},\, q)$, где $Z_{m,\,n-1}$ — $m \times (n-1)$-матрица, а q — столбец. Очевидно, что

$$I - Z\bar{Z}' = I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1} - q\bar{q}'.$$

Из $I - Z\bar{Z}' > 0$ и $q\bar{q}' \geqslant 0$ вытекает, что $I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1} > 0$. Следовательно, существует невырожденная матрица Γ, такая, что

$$I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1} = \Gamma\bar{\Gamma}'.$$

Сделаем замену $q = \Gamma w$. Тогда

$$\dot{q} = |\det \Gamma|^2 \dot{w} = \dot{w} \det \Gamma\bar{\Gamma}' = \dot{w} \det\left(I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1}\right).$$

Отсюда имеем

$$\int\limits_{-Z\bar{Z}' > 0} f(Z) \dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z_{m,\,n-1}\bar{Z}'_{m,\,n-1} > 0} \det\left(I - Z_{m,n-1}\bar{Z}'_{m,n-1}\right) \dot{Z}_{m,n-1} \int\limits_{I - w\bar{w}' > 0} f(Z) \dot{w}.$$

Здесь мы использовали формулу

$$I - Z_{m,\,n-1}\overline{Z}'_{m,\,n-1} - q\overline{q}' = \Gamma(I - w\overline{w}')\overline{\Gamma}'.$$

Далее, по теореме 2.1.2 неравенство $I - w\overline{w}' > 0$ эквивалентно неравенству $1 - \overline{w}'w > 0$, которое выделяет в пространстве обычную гиперсферу. Значит,

$$\int\limits_{I - Z\overline{Z}' > 0} f(Z)\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z_{m,\,n-1}\overline{Z}'_{m,\,n-1} > 0} \det\left(I - Z_{m,\,n-1}\overline{Z}'_{m,\,n-1}\right)\dot{Z}_{m,\,n-1} \cdot \int\limits_{1 - \overline{w}'w > 0} f(Z)\,\dot{w}. \qquad (2.2.3)$$

2) Теперь представим Z в виде

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{m-1,n} \\ p \end{pmatrix},$$

где $Z_{m-1,\,n}$ — $(m-1) \times n$-матрица, а p — вектор. Так как неравенство $I - Z\overline{Z}' > 0$ эквивалентно неравенству $I - \overline{Z}'Z > 0$, то совершенно аналогично 1) получаем

$$\int\limits_{I - Z\overline{Z}' > 0} f(Z)\dot{Z} = \int\limits_{I - \overline{Z}'Z > 0} f(Z)\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - \overline{Z}'_{m-1,\,n}Z_{m-1,\,n} > 0} \det\left(I - \overline{Z}'_{m-1,\,n}Z_{m-1,\,n}\right)\dot{Z}_{m-1,\,n} \int\limits_{I - \overline{u}'u > 0} f(Z)\,\dot{u},$$

где $p = u\Gamma$, а $I - \overline{Z}'_{m-1,n}Z_{m-1,n} = \Gamma\overline{\Gamma}'$. Отсюда находим

$$\int\limits_{I - Z\overline{Z}' > 0} f(Z)\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z_{m-1,n}\overline{Z}'_{m-1,n} > 0} \det\left(I - Z_{m-1,\,n}\overline{Z}'_{m-1,\,n}\right)\dot{Z}_{m-1,\,n} \cdot \int\limits_{I - u\overline{u}' > 0} f(Z)\,\dot{u}. \qquad (2.2.4)$$

Доказательство **теоремы 2.2.1.** Повторно применяя (2.2.3), получаем

$$\int\limits_{I - Z\overline{Z}' > 0} f(Z)\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{w_1\overline{w}'_1 < 1} (1 - w_1\overline{w}'_1)^{n-1}\,\dot{w}_1 \int\limits_{w_2\overline{w}'_2 < 1} (1 - w_2\overline{w}'_2)^{n-2}\,\dot{w}_2 \ldots \int\limits_{w_n\overline{w}'_n < 1} f(Z)\,\dot{w}_n. \qquad (2.2.5)$$

Положив $f(Z)=\{\det(I-Z\bar{Z}')\}^{\lambda}$, получим

$$J_{m,n}(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\int\limits_{w\bar{w}'<1}(1-w\bar{w}')^{j-1+\lambda}\,\dot{w}.$$

[Эта формула могла быть получена и с помощью (2.2.4).]

Воспользовавшись хорошо известной формулой

$$\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_{2m}^2<1}\ldots\int(1-x_1^2-\ldots-x_{2m}^2)^{\mu-1}\,dx_1\ldots dx_{2m}=\pi^m\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)}$$

$$(\mu>0), \tag{2.2.6}$$

получим утверждение нашей теоремы.

С помощью того же приема, основанного на повторном применении формулы (2.2.4), мы легко докажем следующую теорему.

Теорема 2.2.2. *Пусть Z — $m\times n$-матрица, $m>l$ и функция $f(Z)$ не зависит от последних $m-l$ строк Z. Пусть далее Z_l — матрица, образованная первыми l строками Z, так что $f(Z)=f(Z_l)$. Тогда*

$$\int\limits_{I-Z\bar{Z}'>0}f(Z)\,\dot{Z}=$$

$$=\pi^{n(m-l)}\frac{1!\,2!\ldots(m-l-1)!}{n!\,(n+1)!\ldots(n+m-l-1)!}\int\limits_{I-Z_l\bar{Z}_l'>0}f(Z_l)\left(\det\left(I-Z_l\bar{Z}_l'\right)\right)^{m-l}\dot{Z}_l. \tag{2.2.7}$$

§ 2.3. Полный объем области $\mathfrak{R}_{II}$

Теорема 2.3.1. *Пусть Z — симметрическая матрица порядка n, и*

$$J_n(\lambda)=\int\limits_{I-Z\bar{Z}>0}\{\det(I-Z\bar{Z})\}^{\lambda}\,\dot{Z},$$

где

$$\dot{Z}=\prod_{p\leqslant q}dx_{pq}\,dy_{pq},\qquad x_{pq}+iy_{pq}=z_{pq}.$$

При $\lambda>-1$ имеем

$$J_n(\lambda)=\frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+3)\,\Gamma(2\lambda+5)\ldots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\,\Gamma(2\lambda+n+3)\ldots\Gamma(2\lambda+2n)}. \tag{2.3.1}$$

В частности, при $\lambda = 0$ получаем формулу для объема области $\mathfrak{R}_{II}$ симметрических матриц Z, удовлетворяющих условию $I - Z\bar{Z} > 0$.

$$V(\mathfrak{R}_{II}) = J_n(0) = \frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!} \cdot \frac{2!\,4!\ldots(2n-2)!}{(n+1)!\,(n+2)!\ldots(2n-1)!}. \qquad (2.3.2)$$

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема 2.3.2. *Пусть a и c — вещественные числа, b — комплексное число, связанные неравенствами $a < 0$, $|b|^2 - ac > 0$, и пусть $\lambda > -1$. Тогда*

$$\iint\limits_{c+b\bar{z}+\bar{b}z+az\bar{z}>0} (c + b\bar{z} + \bar{b}z + az\bar{z})^{\lambda}\, \dot{z} = \frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2 - ac}{|a|}\right)^{\lambda+1} \cdot \frac{\pi}{\lambda+1}. \qquad (2.3.3)$$

Доказательство. Сделав замену

$$w = \left(z + \frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{a^2}{|b|^2 - ac}},$$

получим

$$\dot{w} = \frac{a^2}{|b|^2 - ac}\,\dot{z},$$

$$c + \bar{b}z + \bar{b}z + az\bar{z} = c - \frac{|b|^2}{a} + a\left(z + \frac{b}{a}\right)\overline{\left(z + \frac{b}{a}\right)} =$$

$$= \left(c - \frac{|b|^2}{a}\right)(1 - w\bar{w}).$$

Тогда левая часть (2.3.3) обратится в

$$\frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2 - ac}{|a|}\right)^{\lambda+1} \iint\limits_{1-w\bar{w}>0} (1 - w\bar{w})^{\lambda}\, \dot{w} = \frac{1}{|a|}\left(\frac{|b|^2 - ac}{|a|}\right)^{\lambda+1} \cdot \frac{\pi}{\lambda+1},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2.3.1. Положим

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & v' \\ v & z \end{pmatrix},$$

где Z_1 — симметрическая матрица порядка $n-1$, v — $(n-1)$-мерный вектор, а z — комплексное число. Тогда

$$I - Z\bar{Z} = \begin{pmatrix} I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v} & -(Z_1\bar{v}' + v'\bar{z}) \\ -(v\bar{Z}_1 + z\bar{v}) & 1 - v\bar{v}' - z\bar{z} \end{pmatrix}.$$

Используя (2.1.9), находим, что условие $I - Z\bar{Z} > 0$ эквивалентно следующим двум условиям

$$I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v} > 0,$$

$$1 - v\bar{v}' - z\bar{z} - (v\bar{Z}_1 + z\bar{v})(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}\overline{(v\bar{Z}_1 + z\bar{v})}' > 0.$$

Кроме того,

$$\det(I-Z\bar{Z}) = \det(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}) \times$$
$$\times \{1-v\bar{v}'-z\bar{z}-(v\bar{Z}_1+z\bar{v})(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}\overline{(v\bar{Z}_1+z\bar{v})'}\}.$$

Следовательно,

$$J_n(\lambda) = \int\limits_{I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}>0} \{\det(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})\}^{\lambda}\,\dot{Z}_1\dot{v} \times$$
$$\times \iint\limits_{c+b\bar{z}+\bar{b}z+az\bar{z}>0} (c+b\bar{z}+\bar{b}z+az\bar{z})^{\lambda}\,\dot{z},$$

где

$$a = -1-\bar{v}(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}v' \qquad (a<0),$$
$$b = -v\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}v',$$
$$c = 1-v\bar{v}'-v\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1}Z_1\bar{v}'.$$

Так как матрица $I-Z_1\bar{Z}_1$ положительно определена, существует невырожденная матрица Γ, такая, что $I-Z_1\bar{Z}_1=\Gamma\bar{\Gamma}'$. Делаем замену $v'=\Gamma u'$. Тогда $v=u\Gamma'$ и

$$\dot{v} = |\det\Gamma|^2\dot{u} = \dot{u}\det(I-Z_1\bar{Z}_1),$$
$$(I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v})^{-1} = \bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}\Gamma^{-1}.$$

Далее, так как

$$(I-u'\bar{u})^{-1}u' = \frac{u'}{1+\bar{u}u'}, \qquad w(I-u'\bar{u})^{-1}\bar{w}' = w\bar{w}' + \frac{|wu'|^2}{1-\bar{u}u'},$$

(w — любой $(n-1)$-мерный вектор), то мы находим

$$a = -\left(1+\bar{u}(I-u'\bar{u})^{-1}u'\right) = -\frac{1}{1-\bar{u}u'},$$
$$b = -u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}u' = -\frac{u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}u'}{1-\bar{u}u'},$$
$$c = 1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I-u'\bar{u})^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}' =$$
$$= 1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}' - \frac{|u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}u'|^2}{1-\bar{u}u'}.$$

Следовательно,

$$|b|^2-ac = \frac{1}{1-\bar{u}u'}\left(1-u\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{u}'-u\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{u}'\right) =$$
$$= \frac{1}{1-\bar{u}u'}\left\{1-u\Gamma'\left(I+\bar{Z}_1(I-Z_1\bar{Z}_1)^{-1}Z_1\right)\bar{\Gamma}\bar{u}'\right\} =$$
$$= \frac{1}{1-\bar{u}u'}\left\{1-u\Gamma'(I-\bar{Z}_1Z_1)^{-1}\bar{\Gamma}\bar{u}'\right\} = 1.$$

Значит, по теореме 2.3.2 с помощью формулы

$$\det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v}) = \det(1 - u'\bar{u})\det(I - Z_1\bar{Z}_1) = \\ = (1 - \bar{u}u')\det(I - Z_1\bar{Z}_1),$$

мы имеем

$$J_n(\lambda) = \frac{\pi}{\lambda+1}\int\limits_{I-Z_1\bar{Z}_1-v'\bar{v}>0} \frac{\{\det(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})\}^{\lambda}}{\{1+\bar{v}(I - Z_1\bar{Z}_1 - v'\bar{v})^{-1}v'\}^{\lambda+2}}\dot{Z}_1\dot{v} =$$

$$= \frac{\pi}{\lambda+1}\int\limits_{I-Z_1\bar{Z}_1>0}\{\det(I - Z_1\bar{Z}_1)\}^{\lambda+1}\dot{Z}_1 \cdot \int\limits_{1-\bar{u}u'>0}(1 - \bar{u}u')^{2\lambda+2}\dot{u}$$

(по теореме 2.2.2). В силу (2.2.6) получаем

$$J_n(\lambda) = J_{n-1}(\lambda+1)\cdot\frac{\pi^n}{\lambda+1}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+3)}{\Gamma(2\lambda+n+2)}. \tag{2.3.4}$$

Продолжая понижение до $n = 1$, получаем

$$J_n(\lambda) = \frac{\pi^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+3)\Gamma(2\lambda+5)\ldots\Gamma(2\lambda+2n-1)}{\Gamma(2\lambda+n+2)\Gamma(2\lambda+n+3)\ldots\Gamma(2\lambda+2n)}.$$

§ 2.4. Полный объем области $\mathfrak{R}_{III}$

Теорема 2.4.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и Z — кососимметрическая матрица порядка n. Положим*

$$K_n(\lambda) = \int\limits_{I+Z\bar{Z}>0}\{\det(I + Z\bar{Z})\}^{\lambda}\dot{Z},$$

где

$$\dot{Z} = \prod_{p<q} dx_{pq}\,dy_{pq}, \quad x_{pq} + iy_{pq} = z_{pq}.$$

При $\lambda > -\frac{1}{2}$

$$K_n(\lambda) = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\Gamma(2\lambda+1)\Gamma(2\lambda+3)\ldots\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+n)\Gamma(2\lambda+n+1)\ldots\Gamma(2\lambda+2n-2)}. \tag{2.4.1}$$

В частности, при $\lambda = 0$ получаем формулу для объема области $\mathfrak{R}_{III}$ кососимметрических матриц Z, удовлетворяющих условию $I + Z\bar{Z} > 0$,

$$V(\mathfrak{R}_{III}) = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{2!\,4!\ldots(2n-4)!}{(n-1)!\,n!\ldots(2n-3)!}. \tag{2.4.2}$$

Доказательство. Положим

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & -u' \\ u & 0 \end{pmatrix},$$

где Z_1—кососимметрическая матрица порядка $n-1$, а u — $(n-1)$-мерный вектор. Тогда

$$I+Z\bar{Z}=\begin{pmatrix} I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u} & -Z_1\bar{u}' \\ u\bar{Z}_1 & 1-u\bar{u}' \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.1.9) условие $I+Z\bar{Z}>0$ эквивалентно следующим двум:

$$I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u}>0, \tag{2.4.3}$$

$$1-u\bar{u}'+u\bar{Z}_1(I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u})^{-1}Z_1\bar{u}'>0. \tag{2.4.4}$$

Кроме того,

$$\det(I+Z\bar{Z})=$$
$$=\left(1-u\bar{u}'+u\bar{Z}_1(I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u})^{-1}Z_1\bar{u}'\right)\det(I+Z_1\bar{Z}_1-u'\bar{u}).$$

Пусть опять матрица Γ удовлетворяет соотношению $I+Z_1\bar{Z}_1=\Gamma\bar{\Gamma}$ Положим $u=v\Gamma'$. В силу (2.4.3) $I+Z_1\bar{Z}_1>0$ и $I-v'\bar{v}>0$. Левая часть неравенства (2.4.4.) преобразуется к виду

$$1-v\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{v}'+v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}(I-v'\bar{v})^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{v}'=$$
$$=1-v\Gamma'\bar{\Gamma}\bar{v}'+v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}\Gamma^{-1}Z_1\bar{\Gamma}\bar{v}'-\frac{|v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2}{1-\bar{v}v'}=$$
$$=1-v\bar{v}'-\frac{|v\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}v'|^2}{1-\bar{v}v'}=1-v\bar{v}'.$$

(Здесь мы использовали тот факт, что матрица $\Gamma'\bar{Z}_1\bar{\Gamma}'^{-1}$ является кососимметрической.) Следовательно,

$$K_n(\lambda)=\int\limits_{I+Z_1\bar{Z}_1>0}\{\det(I+Z_1\bar{Z}_1)\}^{\lambda+1}\dot{Z}_1\cdot\int\limits_{1-v'\bar{v}>0}(1-v\bar{v}')^{2\lambda}\dot{v}=$$
$$=\pi^{n-1}\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma(2\lambda+n)}K_{n-1}(\lambda+1).$$

Продолжая понижение, придем к утверждению теоремы, так как

$$K_2(\lambda+n-2)=\iint\limits_{|z|<1}(1-|z|^2)^{2\lambda+2n-4}\dot{z}=\pi\frac{\Gamma(2\lambda+2n-3)}{\Gamma(2\lambda+2n-2)}.$$

§ 2.5. Полный объем области $\mathfrak{R}_{IV}$

Область $\mathfrak{R}_{IV}$ (сфера Ли) образована n-мерными комплексными векторами z, удовлетворяющими условиям

$$|zz'|^2+1-2\bar{z}z'>0, \tag{2.5.1}$$

$$|zz'|<1. \tag{2.5.2}$$

Мы покажем, что эти два неравенства можно заменить одним. Запишем сначала неравенства (2.5.1) и (2.5.2) в виде

$$(1-\bar{z}z')^2 > (\bar{z}z')^2 - |zz'|^2 > (\bar{z}z')^2 - 1. \tag{2.5.3}$$

Из (2.5.3) легко следует

$$\bar{z}z' < 1. \tag{2.5.4}$$

Первое из неравенств (2.5.3) (поскольку $\bar{z}z' \geqslant |zz'|$) дает нам

$$1-\bar{z}z' > \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}. \tag{2.5.5}$$

Значит, все векторы z, удовлетворяющие неравенствам (2.5.1) и (2.5.2), должны удовлетворять и неравенству (2.5.5).

С другой стороны, каждый вектор, удовлетворяющий неравенству (2.5.5), очевидно, удовлетворяет и неравенству (2.5.1). Кроме того, из $|zz'| \leqslant \bar{z}z'$ и (2.5.5) мы выводим $|zz'| < 1$, т. е. (2.5.2). Таким образом, области $\mathfrak{R}_{IV}$ можно определять одним неравенством (2.5.5).

Теорема 2.5.1. *При* $\alpha > -1$ *и* $\beta > -(n+\alpha)$

$$L_n(\alpha, \beta) = \int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} \left(1-\bar{z}z' - \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\alpha} \times$$

$$\times \left(1-\bar{z}z' + \sqrt{(\bar{z}z')^2 - |zz'|^2}\right)^{\beta} \dot{z} = \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \cdot \frac{1}{\alpha+\beta+n}. \tag{2.5.6}$$

В частности, при $\alpha = \beta = 0$ *мы получаем формулу для объема области* $\mathfrak{R}_{IV}$

$$V(\mathfrak{R}_{IV}) = \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{n!}. \tag{2.5.7}$$

Доказательство. При $n=1$ положим $z = x+iy$, где x и y — действительные числа. Тогда

$$\bar{z}z' = |zz'| = x^2 + y^2,$$

и значит, $\mathfrak{R}_{IV}$ является единичным кругом в комплексной плоскости. Следовательно,

$$L_1(\alpha, \beta) = \iint\limits_{x^2+y^2<1} (1-x^2-y^2)^{\alpha+\beta}\, dx\, dy = \frac{\pi}{\alpha+\beta+1}.$$

Таким образом, при $n=1$ теорема очевидна.

При $n \geqslant 2$ положим $z = x + iy$, где x и y — вещественные векторы. Неравенство (2.5.5) принимает вид

$$1 - xx' - yy' > 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2}. \tag{2.5.8}$$

Значит,

$$L_n(\alpha, \beta) = \int\limits_{x, y} \left(1 - xx' - yy' - 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(1 - xx' - yy' + 2\sqrt{xx'yy' - (xy')^2}\right)^{\beta} \dot{x}\dot{y},$$

где интеграл распространен на область, определяемую неравенством (2.5.8). При каждом фиксированном x найдется ортогональная матрица R с определителем 1 такая, что

$$xR = \left(\sqrt{xx'}, 0, \ldots, 0\right).$$

Положим $yR = (\xi, w)$, где ξ — некоторое действительное число, а w — $(n-1)$-мерный вектор. Тогда (2.5.8) приведется к виду

$$1 - xx' - \xi^2 - ww' > 2\sqrt{xx'(\xi^2 + ww') - xx'\xi^2} = 2\sqrt{xx'ww'}. \tag{2.5.9}$$

Следовательно, после замены интеграл примет вид

$$L_n(\alpha, \beta) = \int\limits_{\xi, w, x} \left(1 - \xi^2 - xx' - ww' - 2\sqrt{xx'ww'}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(1 - \xi^2 - xx' - ww' + 2\sqrt{xx'ww'}\right)^{\beta} d\xi\, \dot{w}\dot{x},$$

где интегрирование проводится по области, определяемой неравенством (2.5.9). Далее, сделав замену $x = u\sqrt{1 - \xi^2}$, $w = v\sqrt{1 - \xi^2}$, мы получим

$$L_n(\alpha, \beta) =$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} (1 - \xi^2)^{\alpha + \beta + n - \frac{1}{2}} d\xi \int\limits_{1 - uu' - vv' > 2\sqrt{uu'vv'}} \left(1 - uu' - vv' - 2\sqrt{uu'vv'}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(1 - uu' - vv' + 2\sqrt{uu'vv'}\right)^{\beta} \dot{u}\dot{v} = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} 2^{2n-1} \cdot P, \tag{2.5.10}$$

где

$$P = \int\limits_{\substack{1 - uu' - vv' > 2\sqrt{uu'vv'} \\ u_\mu > 0,\ v_\nu > 0}} \left(1 - uu' - vv' - 2\sqrt{uu'vv'}\right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(1 - uu' - vv' + 2\sqrt{uu'vv'}\right)^{\beta} \dot{u}\dot{v}.$$

Положим теперь $\eta^2 = uu'$, $\zeta^2 = vv'$. Тогда получим

$$P = \iint\limits_{\substack{\eta+\zeta<1\\ \eta\geqslant 0,\ \zeta\geqslant 0}} (1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha\,(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\,d\eta\,d\zeta \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{u_2^2+\ldots+u_n^2\leqslant\eta^2\\ u_\mu\geqslant 0}} \ldots \int \frac{\eta\,du_2\ldots du_n}{\sqrt{\eta^2-u_2^2-\ldots-u_n^2}} \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{v_3^2+\ldots+v_n^2\leqslant\zeta^2\\ v_\nu\geqslant 0}} \ldots \int \frac{\zeta\,dv_3\ldots dv_n}{\sqrt{\zeta^2-v_3^2-\ldots-v_n^2}}. \qquad (2.5.11)$$

Так как

$$\int\limits_{\substack{u_2^2+\ldots+u_n^2\leqslant\eta^2\\ u_\mu\geqslant 0}} \ldots \int \frac{\eta\,du_2\ldots du_n}{\sqrt{\eta^2-u_2^2-\ldots-u_n^2}} =$$

$$= \eta^{n-1} \int\limits_{\substack{u_2^2+\ldots+u_n^2\leqslant 1\\ u_\mu\geqslant 0}} \ldots \int \frac{du_2\ldots du_n}{\sqrt{1-u_2^2-\ldots-u_n^2}} = \eta^{n-1}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{2^{n-1}}, \qquad (2.5.12)$$

то (2.5.11) дает нам

$$P = \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}}\,2^{-(2n-3)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \iint\limits_{\substack{\eta+\zeta\leqslant 1\\ \eta\geqslant 0,\ \zeta\geqslant 0}} (1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha(1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\,\eta^{n-1}\zeta^{n-2}\,d\eta\,d\zeta =$$

$$= \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}}\,2^{-(2n-3)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \iint\limits_{\substack{\eta+\zeta\leqslant 1\\ 0\leqslant\eta\leqslant\zeta}} (1-(\eta+\zeta)^2)^\alpha \times$$

$$\times (1-(\eta-\zeta)^2)^\beta\,\eta^{n-2}\zeta^{n-2}(\eta+\zeta)\,d\eta\,d\zeta$$

или, полагая $\zeta-\eta=\tau$, $\zeta+\eta=\sigma$,

$$P = \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}}\,2^{-(2n-3)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \iint\limits_{0\leqslant\tau\leqslant\sigma\leqslant 1} (1-\sigma^2)^\alpha(1-\tau^2)^\beta\left(\frac{\sigma+\tau}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{\sigma-\tau}{2}\right)^{n-2}\sigma\,\frac{d\sigma\,d\tau}{2} =$$

$$= \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}}\,2^{-(4n-6)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^1 (1-\tau^2)^\beta\,d\tau \int\limits_\tau^1 (1-\sigma^2)^\alpha\,(\sigma^2-\tau^2)^{n-2}\sigma\,d\sigma.$$

Делая во внутреннем интеграле замену $\omega = \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}$, $1 - \omega = \frac{1 - \sigma^2}{1 - \tau^2}$, имеем

$$P = \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}} 2^{-(4n-5)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^1 (1-\tau^2)^{\alpha+\beta+n-1} d\tau \int_0^1 (1-\omega)^{\alpha} \omega^{n-2} d\omega =$$

$$= \frac{\pi^{n-\frac{1}{2}} 2^{-(4n-4)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+n+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-1)}{\Gamma(\alpha+n)}.$$

Подставляя эту формулу в (2.5.10), получаем

$$L_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{2^{2n-3}} \frac{\pi^{n+\frac{1}{2}}\Gamma(n-1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} =$$

$$= \frac{\pi^n}{2^{n-1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \cdot \frac{1}{\alpha+\beta+n}.$$

(Мы воспользовались формулой $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)\,2^{1-2x}$.)

Глава III

ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ МАТРИЦ

§ 3.1. Элемент объема пространства унитарных матриц

Если квадратную матрицу Z порядка n рассматривать как точку в $2n^2$-мерном вещественном пространстве, то множество всех унитарных матриц образует в этом пространстве n^2-мерное многообразие. Как это многообразие, так и самое группу унитарных матриц, мы будем обозначать через $\mathfrak{U}_n$. Сейчас мы займемся нахождением элемента объема этого многообразия.

Если $2n^2$-мерное пространство матриц Z рассматривать как обычное эвклидово пространство, то первая квадратичная форма этого пространства может быть записана в виде

$$\mathrm{Sp}\,(dZ\,d\bar{Z}') = \sum_{i,\,j=1}^{n} |\,dz_{ij}\,|^2.$$

Если же $Z = U$ (унитарная матрица), то, так как

$$d\bar{U}' = dU^{-1} = -U^{-1}\cdot dU\cdot U^{-1},$$

мы получаем для первой квадратичной формы многообразия $\mathfrak{U}_n$ выражение

$$ds^2 = -\mathrm{Sp}\left(dU\cdot U^{-1}\cdot dU\cdot U^{-1}\right). \tag{3.1.1}$$

Положим

$$\delta U = U^{-1}\,dU = \bar{U}'\,dU. \tag{3.1.2}$$

Так как

$$0 = dI = d\,(\bar{U}'U) = \bar{U}'\,dU + d\bar{U}'\cdot U,$$

то

$$\overline{\delta U}' = -\delta U. \tag{3.1.3}$$

Следовательно, (3.1.1) можно записать в виде

$$ds^2 = \mathrm{Sp}\,(\delta U\cdot\overline{\delta U}'). \tag{3.1.4}$$

Записывая δU в виде (δu_{jk}), из (3.1.3) находим $\delta u_{jk} = -\overline{\delta u_{kj}}$. Подставляя в (3.1.4), получаем

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{n} |\,\delta u_{jk}\,|^2. \tag{3.1.5}$$

Вводя вещественные величины

$$\delta u_{jj} = i\delta s_j, \quad \delta u_{jk} = \delta s_{jk} + i\delta s'_{jk}, \quad \delta u_{kj} = -\delta s_{jk} + i\delta s'_{jk}, \quad j < k,$$

имеем

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} \delta s_j^2 + 2\sum_{j<k} \left(\delta s_{jk}^2 + \delta s_{jk}'^2\right). \tag{3.1.6}$$

Значит, элемент объема в $\mathfrak{U}_n$ может быть представлен в виде

$$\dot{U} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} \delta s_j \prod_{j<k} \delta s_{jk} \delta s'_{jk}. \tag{3.1.7}$$

Если теперь V и W — две фиксированные унитарные матрицы, то, совершая преобразование

$$U_1 = VUW, \tag{3.1.8}$$

находим

$$\delta U_1 = \overline{W}' \delta U W,$$

откуда

$$\mathrm{Sp}\left(\delta U_1 \cdot \overline{\delta U_1'}\right) = \mathrm{Sp}\left(\overline{W}' \cdot \delta U \cdot \overline{\delta U'} \cdot W\right) = \mathrm{Sp}\left(\delta U \cdot \overline{\delta U'}\right). \tag{3.1.9}$$

Таким образом, мы установили, что элемент объема унитарного пространства инвариантен относительно преобразований вида (3.1.8). Этот факт можно записать в виде

$$\dot{U}_1 = \dot{U}. \tag{3.1.10}$$

Введем теперь параметрическое представление унитарных матриц. Положим

$$U = (I + iH)(I - iH)^{-1}. \tag{3.1.11}$$

Ясно, что матрица H должна быть эрмитовой. Эту матрицу H мы будем называть параметром. Такое представление часто позволяет сделать вычисления интегралов по унитарным матрицам более наглядными. Формула, обратная к (3.1.11), имеет вид

$$H = i(I - U)(I + U)^{-1}. \tag{3.1.12}$$

Легко доказать, что это соответствие между унитарными и эрмитовыми матрицами почти для всех матриц взаимно однозначно. Здесь „почти для всех“ означает, что существует исключительное многообразие меньшей размерности, а именно то, на котором $\det(I + U) = 0$ или $\det(I - iH) = 0$.

Дифференцируя (3.1.11), получаем

$$dU = i\,dH(I - iH)^{-1} + i(I + iH)(I - iH)^{-1}\,dH\,(I - iH)^{-1} =$$
$$= 2i\,(I - iH)^{-1}\,dH\,(I - iH)^{-1}.$$

Значит,

$$\delta U = 2i\,(I + iH)^{-1}\,dH\,(I - iH)^{-1}. \qquad (3.1.13)$$

Отсюда находим

$$\mathrm{Sp}\,(\delta U\,\overline{\delta U'}) = 4\,\mathrm{Sp}\,\{(I + H^2)^{-1}\,dH\,(I + H^2)^{-1}\,dH\}.$$

Таким образом,

$$\dot{U} = 2^{n^2}\{\det(I + H^2)\}^{-n}\,\dot{H}, \qquad (3.1.14)$$

где

$$\dot{H} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} dh_j \prod_{j<k} dh'_{jk}\,dh''_{jk},$$

$$H = (h_{jk}), \quad h_{jj} = h_j, \quad h_{jk} = h'_{jk} + ih''_{jk}.$$

При таком представлении многообразие унитарных матриц определяется условиями

$$-\infty < h_j < \infty, \quad -\infty < h'_{jk},\ h''_{jk} < \infty, \qquad (3.1.15)$$

за исключением многообразия меньшей размерности.

Теорема 3.1.1. *Объем многообразия* $\mathfrak{U}_n$ *унитарных матриц равен*

$$\omega_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}.$$

Доказательство. Из (3.1.4) имеем

$$\omega_n = \int_U \dot{U} = 2^{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \{\det(I + H^2)\}^{-n}\,\dot{H}.$$

Но из теоремы (2.1.5) нам известно, что последний интеграл равен

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\pi^{\frac{n^2}{2}}\,\frac{\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma\left(n-j-\frac{1}{2}\right)\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(n-k)}{\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(n-j)\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(2n-2k-1)}.$$

Так как $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)\,2^{1-2x}$, то мы имеем

$$\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(n-j)\,\Gamma\left(n-j-\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{n}{2}}\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma(2n-2j-1)\,2^{2-2n+2j} =$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}}\,2^{-n(n-1)}\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma(2n-2k-1),$$

что и доказывает теорему.

Замечание 1. Во многих книгах под элементом объема унитарной группы понимают выражение

$$\prod_{j=1}^{n} \delta s_j \prod_{j<k} \delta s_{jk} \delta s'_{jk},$$

отличающееся от (3.1.7) множителем $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Замечание 2. Исключительные случаи в параметрическом представлении (3.1.11) могут быть устранены путем введения однородных координат для эрмитовых матриц, т. е. использованием методов проективной геометрии, но мы не будем вдаваться в детали этих вопросов.

§ 3.2. Интегралы по пространству классов смежности унитарной группы

Любая унитарная матрица может быть представлена в виде

$$U = V\Lambda V^{-1}, \quad \Lambda = \left[e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\right], \quad 2\pi > \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_n \geqslant 0, \quad (3.2.1)$$

где V — унитарная матрица. Так как $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}$ — собственные значения матрицы U, то матрица Λ определяется однозначно. Если, далее,

$$U = V\Lambda V^{-1} = V_1 \Lambda V_1^{-1}$$

и если собственные значения U различны, то

$$V_1^{-1} V = \left[e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}\right].$$

Все диагональные унитарные матрицы образуют подгруппу группы $\mathfrak{U}_n$. Обозначим через $[\mathfrak{U}_n]$ множество левых классов смежности $\mathfrak{U}_n$ по этой подгруппе. Ясно, что матрицы V и V_1, упомянутые выше, принадлежат к одному и тому же классу смежности, т. е. им соответствует один элемент из $[\mathfrak{U}_n]$. Таким образом, почти каждой матрице U можно поставить во взаимно однозначное соответствие диагональную матрицу Λ и элемент из $[\mathfrak{U}_n]$. Займемся выяснением соотношений между элементами объема $\mathfrak{U}_n$, $[\mathfrak{U}_n]$ и множества диагональных унитарных матриц Λ.

Дифференцируя (3.2.1), находим

$$dU = dV \cdot \Lambda V^{-1} - V\Lambda V^{-1} \cdot dV \cdot V^{-1} + V \cdot d\Lambda \cdot V^{-1},$$

откуда

$$\overline{V}' \cdot dU \cdot V = \delta V \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta V + d\Lambda.$$

Значит,

$$\mathrm{Sp}\,(dU \cdot \overline{dU}') = \mathrm{Sp}\,\{(\delta V \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta V)(\overline{\delta V \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta V})'\} +$$
$$+ \mathrm{Sp}\,\{(\delta V \cdot \Lambda - \Lambda \cdot \delta V)\, \overline{d\Lambda}'\} + \mathrm{Sp}\,\{d\Lambda \cdot (\overline{\delta V \cdot \Lambda - \Lambda \cdot \delta V})'\} + \mathrm{Sp}\,(d\Lambda \cdot \overline{d\Lambda}').$$

Но $\mathrm{Sp}\{(\delta V\cdot\Lambda-\Lambda\cdot\delta V)\,d\overline{\Lambda'}\}=0$, а потому, полагая $\delta V=(\delta v_{jk})$, имеем

$$\mathrm{Sp}(dU\cdot d\overline{U'})=\sum_{j,k=1}^{n}|\delta v_{jk}(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})|^2+\sum_{j=1}^{n}d\theta_j^2.$$

Заметим, что δv_{jj} в формуле исчезают. Обозначим через $\dot V$ элемент объема, образованного векторами δv_{jk} $(j\neq k)$. Элемент объема в $[\mathfrak{U}_n]$ равен $[\dot U]=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\dot V$. Таким образом,

$$\dot U=[\dot U]\cdot\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2\,d\theta_1\ldots d\theta_n. \tag{3.2.2}$$

Теорема 3.2.1. *Объем множества классов смежности* $[\mathfrak{U}_n]$ *равен*

$$\omega'_n=\frac{(2\pi)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}.$$

Доказательство. Имеем

$$\omega_n=\omega'_n\int_0^{2\pi}d\theta_1\int_0^{\theta_1}d\theta_2\ldots\int_0^{\theta_{n-1}}\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2\,d\theta_n=$$

$$=\frac{\omega'_n}{n!}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\prod_{j<k}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^2\,d\theta_1\ldots d\theta_n.$$

Записывая $\prod_{j<k}(e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k})$ в виде

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n}\delta^{1\ldots n}_{j_1\ldots j_n}e^{i\{(n-1)\theta_{j_1}+(n-2)\theta_{j_2}+\ldots+\theta_{j_{n-1}}\}}$$

(всего $n!$ слагаемых) и используя ортогональность $e^{i(m_1\theta_1+\ldots+m_n\theta_n)}$, получаем

$$\omega_n=(2\pi)^n\,\omega'_n,$$

откуда и следует наше утверждение.

Рассмотрим теперь еще множество $\{\mathfrak{U}_n\}$, состоящее из классов смежности группы $\mathfrak{U}_n$ по ее подгруппе, образованной диагональными матрицами вида $[\pm1,\pm1,\ldots,\pm1]$. Любая унитарная матрица U задается элементом из $[\mathfrak{U}_n]$ и диагональной матрицей $\Lambda=[e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}]$ $(0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\ldots\leqslant\theta_n<2\pi)$. Любой же элемент из $\{\mathfrak{U}_n\}$ может быть задан при помощи элемента из $[\mathfrak{U}_n]$ и диагональной матрицы

$$\Lambda_1=[e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}],\qquad 0\leqslant\theta_1\leqslant\ldots\leqslant\theta_n<\pi.$$

Ясно, что полный объем $\{\mathfrak{U}_n\}$ равен $2^{-n}\omega_n$.

§ 3.3. Полярные координаты эрмитовых матриц

Известно, что любая эрмитова матрица может быть представлена в виде

$$H = U\Lambda\bar{U}', \tag{3.3.1}$$

где U — унитарная матрица, а $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ — диагональная матрица, причем $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Пара матриц (U, Λ) может быть названа полярными координатами эрмитовой матрицы. Матрица Λ соответствует модулю в обычных полярных координатах, а U — аргументу. Однако такое соответствие не является взаимно однозначным. В самом деле, из равенства

$$H = U\Lambda\bar{U}' = U_1\Lambda_1\bar{U}_1'$$

следует только $\Lambda = \Lambda_1$ и $U_1^{-1}U = \left[e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}\right]$ (в случае различных собственных значений H). Таким образом, взаимно однозначное соответствие будет между H и $([\mathfrak{U}_n], \Lambda)$ (за исключением матриц H, имеющих кратные собственные значения, т. е. за исключением многообразия меньшей размерности).

Дифференцируя (3.3.1), получаем

$$dH = dU \cdot \Lambda\bar{U}' + U\,d\Lambda \cdot \bar{U}' + U\Lambda\,d\bar{U}',$$

откуда

$$\bar{U}'\,dH \cdot U = \delta U \cdot \Lambda + d\Lambda - \Lambda\,\delta U,$$

Полагая $\bar{U}' \cdot dH \cdot U = \delta G$ и $\delta G = (\delta g_{jk})$, имеем

$$\delta g_{jj} = d\lambda_j, \quad \delta g_{jk} = \delta u_{jk}(\lambda_k - \lambda_j) \qquad (j \neq k).$$

Отделяя действительную и мнимую части, находим

$$\dot{H} = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 [\dot{U}]\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_n. \tag{3.3.2}$$

Последнее равенство дает нам

$$\{\det(I + H^2)\}^{-n}\dot{H} = \prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod_{m=1}^{n}\left(1 + \lambda_m^2\right)^{-n}[\dot{U}]\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_n. \tag{3.3.3}$$

Так как $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, мы можем положить $e^{i\theta_j} = \dfrac{1 + i\lambda_j}{1 - i\lambda_j}$, $-\pi < \theta_n \leqslant \ldots \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$. Но

$$\prod_{j<k}\left(e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}\right) = \prod_{j<k} 2i(\lambda_j - \lambda_k)\prod_{m=1}^{n}(1 - i\lambda_m)^{-(n-1)},$$

так что

$$\prod_{j<k}\left|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}\right|^2 = 2^{n(n-1)}\prod_{j<k}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \prod_{m=1}^{n}\left(1 + \lambda_m^2\right)^{-(n-1)}.$$

Теперь из равенства

$$d\theta_j = \frac{2\,d\lambda_j}{(1+\lambda_j^2)}$$

и из (3.1.14) получаем

$$\dot{U} = \prod_{j<k} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2\, d\theta_1 \ldots d\theta_n \cdot [\dot{U}], \tag{3.3.4}$$

где $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}$ — собственные значения U и $-\pi < \theta_n \leqslant \ldots \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$.

§ 3.4. Полярные координаты произвольных квадратных матриц

Перейдем теперь к понятию полярных координат для произвольных квадратных матриц Z порядка n. Мы знаем, что любая матрица Z может быть представлена в виде

$$Z = U\Lambda V, \tag{3.4.1}$$

где U и V — унитарные матрицы, а $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ — диагональная матрица, причем

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0.$$

Тройку матриц (U, Λ, V) можно назвать полярными координатами матрицы Z. Соответствие между Z и (U, Λ, V) опять-таки не является взаимно однозначным. Однако соответствие между Z и $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ будет взаимно однозначным (за исключением многообразия меньшей размерности). В самом деле, положив

$$Z = U\Lambda V = U_1\Lambda_1 V_1,$$

мы получим, во-первых, что $\Lambda_1 = \Lambda$, так как $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$ являются собственными значениями матрицы $Z\overline{Z}'$. Во-вторых, полагая

$$U_2 = U_1^{-1}U,$$

находим

$$U_2\Lambda^2\overline{U}_2' = \Lambda^2.$$

Следовательно, если у матрицы Z все λ_ν различны, то U_2 — диагональная унитарная матрица, а потому утверждение доказано для таких матриц Z. С другой стороны, матрицы Z, у которых среди λ_ν имеются равные, и, следовательно, $Z\overline{Z}'$ имеют кратные собственные значения, образуют многообразие меньшей размерности.

Замечание. Размерность (вещественная) $\mathfrak{U}_n$ равна n^2, размерность $[\mathfrak{U}_n]$ равна $n(n-1)$, размерность Λ равна n. Значит, размерность $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ равна $2n^2$, что совпадает с размерностью Z.

Вычислим теперь якобиан преобразования (3.4.1). Для большей ясности и удобства мы разобьем эту операцию на несколько шагов.

1) Известно, что любая положительно определенная эрмитова матрица H может быть единственным образом представлена в виде $T\overline{T}'$,

где T — треугольная матрица с положительными диагональными элементами (выше диагонали — нули).

Положим $H=(h_{jk})$

$$h_{jj}=h_j;\quad h_{jk}=h'_{jk}+ih''_{jk},\quad j>k;\quad h_{kj}=\overline{h}_{jk};$$

где h_j, h'_{jk}, h''_{jk} — n^2 действительных чисел. Тогда

$$\dot{H}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{j=1}^{n}dh_j\prod_{j>k}dh'_{jk}\,dh''_{jk}$$

— элемент объема в пространстве эрмитовых матриц.

Запишем T в виде $T=(t_{jk})$,

$$t_{jj}=t_j;\quad t_{jk}=t'_{jk}+it''_{jk},\quad j>k;\quad t_{jk}=0,\quad j<k,$$

где t_j, t'_{jk}, t''_{jk} — вещественные числа. Пусть

$$\dot{T}=\prod_{j=1}^{n}dt_j\prod_{j>k}dt'_{jk}\,dt''_{jk}$$

— элемент объема в пространстве всех треугольных матриц.

Теорема 3.4.1. *Имеет место равенство*

$$\dot{H}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_{n-1}^3t_n\cdot\dot{T}. \tag{3.4.2}$$

Доказательство. Проведем индукцию. При $n=1$ теорема, очевидно, верна, так как $h_1=t_1^2$. Положим

$$H=\begin{pmatrix}H_1 & \overline{v}'\\ v & h_n\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}T_1 & 0\\ \tau & t_n\end{pmatrix}.$$

Из $H=T\overline{T}'$ имеем

$$H_1=T_1\overline{T}'_1,\quad v=\tau\overline{T}'_1,\quad h_n=\tau\overline{\tau}'+t_n^2.$$

Легко убедиться, что якобиан $\dfrac{\partial(v)}{\partial(\tau)}=|\det T_1|^2$ и $\dfrac{\partial h_n}{\partial t_n}=2t_n$. Значит,

$$\prod_{k=1}^{n-1}dh'_{nk}\,dh''_{nk}=|\det T_1|^2\cdot\prod_{k=1}^{n-1}dt'_{nk}\,dt''_{nk}=(t_1\ldots t_{n-1})^2\prod_{k=1}^{n-1}dt'_{nk}\,dt''_{nk}.$$

Согласно индуктивному предположению имеем

$$\begin{aligned}\dot{H}&=2^{n-1}\dot{H}_1\left(\prod_{k=1}^{n-1}dh'_{nk}\,dh''_{nk}\right)dh_n=\\&=2^n(t_1\ldots t_{n-1})^2t_n\dot{H}_1\left(\prod_{k=1}^{n-1}dt'_{nk}\,dt''_{nk}\right)dt_n=\\&=2^n(t_1\ldots t_{n-1})^2t_n\left(2^{\frac{n(n-1)}{2}}t_1^{2(n-2)+1}\ldots t_{n-1}\right)\dot{T}=\\&=2^{\frac{n(n+1)}{2}}t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_{n-1}^3t_n\cdot\dot{T}.\end{aligned}$$

2) Для любой невырожденной матрицы Z мы знаем из 1), что существует треугольная матрица T вида, описанного в 1), и такая, что $Z\overline{Z}' = T\overline{T}'$. Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 3.4.2. *Каждая невырожденная матрица Z может быть представлена, и притом единственным образом, в виде $Z = TU$, где U — унитарная матрица, а T — треугольная матрица с положительными диагональными элементами и нулями выше диагонали.*

Доказательство. Так как из $Z\overline{Z}' = T\overline{T}'$ следует $(Z^{-1}T)^{-1} = (\overline{Z^{-1}T})'$, то $Z^{-1}T = U^{-1}$, т. е. $Z = TU$. Поскольку унитарная треугольная матрица с положительными диагональными элементами равна I, то из соотношения

$$Z = TU = T_1U_1$$

мы выводим $T = T_1$ и $U = U_1$.

Теорема 3.4.3. *Элемент объема Z, пользуясь параметрической формой, указанной в теореме 3.4.2, можно записать в виде*

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 t_n \dot{T}\dot{U}, \tag{3.4.3}$$

где $\dot{U}$ — элемент объема пространства унитарных матриц.

Доказательство. Из равенства $Z = TU$ мы получаем

$$dZ = dT \cdot U + T \cdot dU.$$

Меняя строки на столбцы и беря сопряженные величины, имеем также

$$d\overline{Z}' = U^{-1}\,d\overline{T}' + dU^{-1} \cdot \overline{T}' = U^{-1}\,d\overline{T}' - U^{-1}\,dU \cdot U^{-1}\overline{T}'.$$

Положим $\delta U = dU \cdot U^{-1}$ и $dP = dZ \cdot U^{-1}$, $dQ = U\,d\overline{Z}'$. Тогда

$$\begin{cases} dP = dT + T\,\delta U, \\ dQ = d\overline{T}' - \delta U \cdot \overline{T}' \end{cases} \tag{3.4.4}$$

(хотя здесь δU не то же, что в § 3.1, но свойства те же). Записывая $\delta U = (dv_{jk})$ и сравнивая соответствующие элементы в (3.4.4), имеем

$$dp_{jk} = dt_{jk} + \sum_{s=1}^{j} t_{js}\,dv_{sk}, \qquad j > k, \tag{3.4.5}$$

$$dq_{jk} = d\overline{t}_{kj} - \sum_{s=1}^{k} \overline{t}_{ks}\,dv_{js}, \qquad j < k, \tag{3.4.6}$$

$$dp_{jj} = dt_j + \sum_{s=1}^{j} t_{js}\,dv_{sj}, \tag{3.4.7}$$

$$dp_{jk} = \sum_{s=1}^{j} t_{js}\, dv_{sk}, \qquad j < k, \tag{3.4.8}$$

$$dq_{jk} = -\sum_{s=1}^{k} \bar{t}_{ks}\, dv_{js}, \qquad j > k, \tag{3.4.9}$$

$$dq_{jj} = dt_j - \sum_{s=1}^{j} \bar{t}_{js}\, dv_{js}. \tag{3.4.10}$$

Вычитая (3.4.10) из (3.4.7), получаем

$$d(p_{jj} - q_{jj}) = 2t_j\, dv_{jj} + \sum_{s=1}^{j-1} (t_{js}\, dv_{sj} + \bar{t}_{js}\, dv_{js}). \tag{3.4.11}$$

Займемся теперь вычислением следующего якобиана J:

$$\left| \frac{\partial \{p_{jk}(j>k), q_{jk}(j<k), p_{jj}(1 \leqslant j \leqslant n), p_{jk}(j<k), q_{jk}(j>k), p_{jj} - q_{jj}(1 \leqslant j \leqslant n)\}}{\partial \{t_{jk}(j>k), \bar{t}_{kj}(j<k), t_j, v_{jk}(1 \leqslant j, k \leqslant n)\}} \right|$$

Из (3.4.8), (3.4.9) и (3.4.11) благодаря отсутствию dt_{jk}, $d\bar{t}_{jk}$, dt_j имеем

$$J = \left| \frac{\partial \{p_{jk}(j<k), q_{jk}(j>k), p_{jj} - q_{jj}(1 \leqslant j \leqslant n)\}}{\partial \{v_{jk}(1 \leqslant j, k \leqslant n)\}} \right|.$$

Заметим, что в (3.4.8) встречаются лишь $dv_{pq}(p<q)$, а в (3.4.9) — лишь $dv_{pq}(p>q)$. Значит, dp_{jk} $(j<k)$ и dq_{jk} $(j>k)$ — линейные преобразования соответственно dv_{pq} $(p<q)$ и dv_{pq} $(p>q)$. Матрицы этих преобразований треугольные, и их определители равны $t_1^{n-1} t_2^{n-2} \ldots t_{n-1}$. Значит,

$$J = 2^n \cdot t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 t_n.$$

Так как

$$\left| \frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(x, y)} \right| = 2,$$

то

$$\left| \frac{\partial(p_{jk}, q_{jk})}{\partial(t'_{jk}, t''_{jk}, t_j, v_{jk})} \right| = 2^{n(n-1)} \left| \frac{\partial(p_{jk}, q_{jk})}{\partial(t_{jk}, \bar{t}_{jk}, t_j, v_{jk})} \right|.$$

Непосредственно имеем

$$\left| \frac{\partial(P, Q)}{\partial(T, V)} \right| = 2^{n^2} t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 \cdot t_n.$$

Далее, так как

$$\left| \frac{\partial(Z, \bar{Z})}{\partial(P, Q)} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial(Z, \bar{Z})}{\partial(X, Y)} \right| = 2^{n^2}.$$

мы получаем, наконец,

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 t_n \cdot \dot{T}\dot{U}.$$

3) Элемент объема в полярных координатах.

Теорема 3.4.4. *Соотношение между элементами объема в обеих системах координат Z и $[\mathfrak{U}_n] \times \Lambda \times \mathfrak{U}_n$ дается формулой*

$$\dot{Z} = 2^{-n^2} D^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \dot{U}\,[\dot{U}]. \qquad (3.4.12)$$

Доказательство. Положив $Z\bar{Z}' = T\bar{T}' = H$, из теоремы 3.4.3 получим

$$\dot{Z} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^3 t_n \dot{T}\dot{U},$$

следовательно, в силу теоремы 3.4.1 имеем

$$\dot{Z} = 2^{-n^2} \dot{H}\dot{U}.$$

Отсюда согласно (3.3.2)

$$\dot{Z} = 2^{-n^2} D^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \cdot \dot{U}\,[\dot{U}].$$

§ 3.5. Полярные координаты симметрических матриц

Если Z — симметрическая матрица с комплексными элементами, то, как доказано автором (Хуа Ло-кен [1]), ее можно представить в виде

$$Z = U\Lambda U', \qquad (3.5.1)$$

где U — унитарная, а $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ — диагональная матрица, причем $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Обозначим через $\{\mathfrak{U}_n\}$ множество левых классов смежности группы унитарных матриц $\mathfrak{U}_n$ по подгруппе диагональных матриц вида $[\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1]$. Легко показать, что соответствие между Z и $\{\mathfrak{U}_n\} \times \Lambda$ почти для всех матриц взаимно однозначно.

Дифференцируя (3.5.1), получаем

$$dZ = dU\Lambda U' + U\, d\Lambda \cdot U' + U\Lambda\, dU'.$$

$$\bar{U}'\, dZ\bar{U} = \delta U\Lambda + d\Lambda + \Lambda\, \delta U'.$$

(Здесь обозначено $\delta U = \bar{U}'\, dU$.) Отсюда имеем

$$\mathrm{Sp}\,(dZ\, d\bar{Z}') = \mathrm{Sp}\,(\bar{U}'\, dZ \cdot U\bar{U}' \cdot d\bar{Z}' \cdot U) =$$

$$= \mathrm{Sp}\,\{(\delta U \cdot \Lambda + d\Lambda + \Lambda\, \delta U')(\Lambda\, \delta\bar{U}' + d\Lambda + \delta\bar{U} \cdot \Lambda)\} =$$

$$= \mathrm{Sp}\,(d\Lambda \cdot d\Lambda) + \mathrm{Sp}\,\{(\delta U \cdot \Lambda + \Lambda\, \delta U')(\Lambda\, \delta\bar{U}' + \delta\bar{U} \cdot \Lambda)\}.$$

Положим

$$\delta U \cdot \Lambda + \Lambda\, \delta U' = (dg_{jk}), \qquad (dg_{jk} = dg_{kj}),$$

тогда

$$\mathrm{Sp}\,(dZ \cdot d\bar{Z}') = \sum_{j=1}^{n} d\lambda_j^2 + \sum_{j=1}^{n} |\, dg_{jj}\,|^2 + 2 \sum_{j<k} |\, dg_{jk}\,|^2,$$

где

$$dg_{jk} = \lambda_k\, \delta u_{jk} + \lambda_j\, \delta u_{kj}, \qquad j < k,$$

$$dg_{jj} = 2i\lambda_j\, \delta u_{jj}.$$

Чтобы определить теперь элемент объема $\{\dot{U}\}$ множества $\{\mathfrak{U}_n\}$, положим $\delta u_{jk} = \delta u'_{jk} + i\, \delta u''_{jk}$. Мы имеем

$$\{\dot{U}\} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n} \delta u''_{jj} \prod_{j<k} \delta u'_{jk} \cdot \delta u''_{jk}.$$

Следовательно,

$$\dot{Z} = 2^n \prod_{j<k} |\lambda_j^2 - \lambda_k^2|\, \lambda_1 \ldots \lambda_n\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n\, \{\dot{U}\}. \tag{3.5.2}$$

Рассмотрим еще полярные координаты вещественных симметрических матриц. Любая вещественная симметрическая матрица T может быть представлена в виде

$$T = \Gamma \Lambda \Gamma', \tag{3.5.3}$$

где Γ — вещественная ортогональная матрица с определителем $+1$, а

$$\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n], \qquad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n.$$

Легко видеть, что имеет место, вообще говоря, взаимно однозначное соответствие между вещественными симметрическими матрицами и $\{O\} \times \Lambda$, где $\{O\}$ — множество левых классов смежности группы ортогональных матриц с определителем $+1$, по подгруппе, состоящей из диагональных матриц вида $[\pm 1, \ldots, \pm 1]$.

Дифференцируя (3.5.3), получаем

$$\Gamma'\, dT\, \Gamma = \delta\Gamma \cdot \Lambda + d\Lambda - \Lambda\, \delta\Gamma.$$

Здесь $\delta\Gamma = \Gamma^{-1} d\Gamma$ — кососимметрическая матрица, так что

$$\mathrm{Sp}\,(dT \cdot dT') = \mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta\Gamma)(\delta\Gamma \cdot \Lambda - \Lambda\, \delta\Gamma)\} + \mathrm{Sp}\,(d\Lambda \cdot d\Lambda').$$

Положим $[\dot{O}] = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \delta\gamma_{ij}$. Используя те же соображения, что и

раньше, находим

$$\dot{T} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j| \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n [\dot{O}]. \qquad (3.5.4)$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех симметрических унитарных матриц S. Будем искать элемент объема $\mathfrak{S}$, инвариантный относительно преобразований

$$S_1 = USU', \qquad (3.5.5)$$

где U — унитарная матрица.

Положим

$$S = (I + iT)(I - iT)^{-1} \qquad (3.5.6)$$

и назовем матрицу T параметром матрицы S. Из унитарности S следует, что T эрмитова матрица; из симметричности S вытекает, что матрица T также симметрична. Значит $T = T' = \bar{T}'$, т. е. T — вещественная симметричная матрица. Формула, обратная к (3.5.6), имеет вид

$$T = i(I - S)(I + S)^{-1}. \qquad (3.5.7)$$

Формулы (3.5.6) и (3.5.7) устанавливают между S и T соотношение, которое почти для всех матриц взаимно однозначно. (Исключительные матрицы образуют многообразие, размерность которого меньше, чем $\frac{n(n+1)}{2}$).

Если матрица S переводится преобразованием (3.5.5) в матрицу S_1, то матрица T переходит в некоторую матрицу T_1. Найдем связь между T и T_1. Отделим в матрице U действительную и мнимую часть

$$U = A + Bi. \qquad (3.5.8)$$

Так как $U\bar{U}' = I$, то вещественные матрицы A и B удовлетворяют соотношениям

$$AA' + BB' = I, \quad AB' = BA'. \qquad (3.5.9)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} S_1 = USU' &= (A + Bi)(I + iT)(I - iT)^{-1}\bar{U}^{-1} = \\ &= [(A - BT) + (B + AT)i](I - iT)^{-1}(A - iB)^{-1} = \\ &= \left[I + i(B + AT)(A - BT)^{-1}\right]\left[I - i(B + AT)(A - BT)^{-1}\right]^{-1}, \end{aligned}$$

то

$$T_1 = (AT + B)(-BT + A)^{-1}. \qquad (3.5.10)$$

Из (3.5.9) очевидным образом следует, что

$$(AT + B)(-BT + A)^{-1} = (-TB' + A')^{-1}(TA' + B'). \qquad (3.5.11)$$

Дифференцируя (3.5.10) и используя соотношение (3.5.11), получаем

$$\begin{aligned} dT_1 &= A\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}+(AT+B)(-BT+A)^{-1}B\,dT\times \\ &\times(-BT+A)^{-1}=A\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}+(-TB'+A')^{-1}\times \\ &\times(TA'+B')B\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}=(-TB'+A')^{-1}\times \\ &\times[(-TB'+A')A+(TA'+B')B]\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}= \\ &=[(-BT+A)']^{-1}\,dT\cdot(-BT+A)^{-1}. \qquad (3.5.12) \end{aligned}$$

С помощью (3.5.9) и (3.5.11) находим

$$\begin{aligned} I+T_1^2 &= I+(-TB'+A')^{-1}(TA'+B')(AT+B)(-BT+A)^{-1}= \\ &=[(-BT+A)']^{-1}[(-TB'+A')(-BT+A)+ \\ &+(TA'+B')(AT+B)](-BT+A)^{-1}= \\ &=[(-BT+A)']^{-1}(I+T^2)(-BT+A)^{-1}. \qquad (3.5.13) \end{aligned}$$

Из (3.5.12) получаем

$$\dot{T}_1=\{\det(-BT+A)\}^{-(n+1)}\,\dot{T},$$

а из (3.5.13) имеем

$$\det\left(I+T_1^2\right)=\det\left(I+T^2\right)\{\det(-BT+A)\}^{-2}.$$

Значит,

$$\left\{\det\left(I+T_1^2\right)\right\}^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\dot{T}_1=\{\det(I+T^2)\}^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\dot{T}. \qquad (3.5.14)$$

Методом, аналогичным изложенному в § 3.1, мы получаем

$$\dot{S}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\{\det(I+T^2)\}^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\dot{T}, \qquad (3.5.15)$$

где $\dot{T}=2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod\limits_{j\leqslant k}dt_{jk}$. Очевидно, что $\dot{S}=\dot{S}_1$, т. е. это — инвариантный элемент объема. На основании теоремы 2.1.1 мы получаем, что полный объем $\mathfrak{S}$ равен

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathfrak{S}}\dot{S} &= 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\int\limits_{T}\{\det(I+T^2)\}^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\dot{T}= \\ &=2^n\cdot 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\cdot\pi^{\frac{n(n+1)}{4}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n-\nu+1)}. \end{aligned}$$

Применяя (3.5.4), мы преобразуем выражение для $\dot{S}$ к виду

$$\dot{S}=2^n\cdot 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_j|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\lambda_\nu^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}\cdot d\lambda_1\ldots d\lambda_n\cdot\{\dot{O}\}. \tag{3.5.16}$$

Положим $e^{i\theta_\nu}=(1+i\lambda_\nu)(1-i\lambda_\nu)^{-1}$. Поскольку $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$, мы можем считать, что $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\ldots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$. Легко проверить, что

$$e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}=\frac{2i(\lambda_\nu-\lambda_\mu)}{(1-i\lambda_\nu)(1-i\lambda_\mu)},$$

а потому

$$\left|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}\right|=\frac{2|\lambda_\nu-\lambda_\mu|}{\left(1+\lambda_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\lambda_\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

откуда получаем

$$\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}\right|=\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{\nu<\mu}|\lambda_\nu-\lambda_\mu|}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\lambda_\nu^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{3.5.17}$$

С другой стороны, имеем

$$d\theta_\nu=\left(\frac{1}{1+i\lambda_\nu}+\frac{1}{1-i\lambda_\nu}\right)d\lambda_\nu=\frac{2}{1+\lambda_\nu^2}\,d\lambda_\nu. \tag{3.5.18}$$

Комбинируя (3.5.16), (3.5.17) и (3.5.18), мы получаем еще одно выражение для $\dot{S}$

$$\dot{S}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left|e^{i\theta_\nu}-e^{i\theta_\mu}\right|d\theta_1\ldots d\theta_n\{\dot{O}\}. \tag{3.5.19}$$

Замечание. Из рассуждений, приведенных в этом параграфе, вытекает следующий результат: любая симметричная унитарная матрица может быть представлена в виде

$$S=\Gamma\Lambda\Gamma',$$

где Γ — вещественная ортогональная матрица с определителем, равным 1, а $\Lambda=\left[e^{i\theta_1},\ e^{i\theta_2},\ \ldots,\ e^{i\theta_n}\right]$, причем $\pi\geqslant\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\ldots\geqslant\theta_n\geqslant-\pi$ [1]).

---

[1]) Для доказательства достаточно использовать (3.5.6) и (3.5.3). — *Прим. ред.*

§ 3.6. Полярные координаты кососимметрических матриц

Автором было доказано (Хуа Ло-кен [1]), что любая кососимметрическая матрица Z с комплексными элементами может быть представлена в виде

$$Z = UMU', \tag{3.6.1}$$

где U — унитарная матрица, а

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\nu \geqslant 0.$$

Здесь при n четном последнее слагаемое равно $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_\nu \\ -\lambda_\nu & 0 \end{pmatrix}$, а при нечетном — сумма оканчивается на $\begin{pmatrix} 0 & \lambda_\nu \\ -\lambda_\nu & 0 \end{pmatrix} \dotplus 0 \left(\nu = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$.

Отметим также, что при нечетном n любая кососимметрическая унитарная матрица представима в виде

$$K = \Gamma F \Gamma', \tag{3.6.2}$$

где Γ — вещественная ортогональная матрица с определителем, равным 1, а

$$F = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ -e^{i\theta_1} & 0 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_2} \\ -e^{i\theta_2} & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots, \quad \pi \geqslant \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_\nu \geqslant 0.$$

При четном n любая кососимметрическая унитарная матрица также представима в виде (3.6.2), но лишь при условии, что определитель Γ может быть как $+1$, так и -1. Стоит упомянуть, что при замене в (3.6.2) вещественных параметров комплексными мы получаем представление многообразия вещественной размерности $n(n-1)$, образованного кососимметрическими матрицами.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество матриц, представимых в виде (3.6.2). Если $\Gamma F \Gamma' = \Gamma_1 F_1 \Gamma_1'$, то $F = F_1$, и если, кроме того, среди чисел $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}$ нет равных, то $\Gamma = \Gamma_1 \Delta$, где

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cos\delta_1 & \sin\delta_1 \\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} \cos\delta_2 & \sin\delta_2 \\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2 \end{pmatrix} \dotplus \ldots \tag{3.6.3}$$

Здесь сумма оканчивается на

$$\begin{pmatrix} \cos\delta_\nu & \sin\delta_\nu \\ -\sin\delta_\nu & \cos\delta_\nu \end{pmatrix} \quad \text{или на} \quad \begin{pmatrix} \cos\delta_\nu & \sin\delta_\nu \\ -\sin\delta_\nu & \cos\delta_\nu \end{pmatrix} \dotplus 1$$

$\left(\nu = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ в зависимости от того, является ли n четным или нечетным.

Обозначим через Γ группу ортогональных матриц с определителем $+1$, через Δ группу матриц вида (3.6.3), а через $\Sigma = \Gamma/\Delta$ —

множество левых классов смежности группы Γ по ее подгруппе Δ. Тогда соответствие между $\mathfrak{K}$ и $\Sigma \times F$ будет почти для всех матриц взаимно однозначным.

Дифференцируя (3.6.2), получаем

$$dK = d\Gamma \cdot F\Gamma' + \Gamma\, dF \cdot \Gamma' + \Gamma F\, d\Gamma'.$$

Положим $\delta\Gamma = \Gamma'\, d\Gamma$. Тогда

$$\Gamma'\, dK\, \Gamma = \delta\Gamma\, F + dF - F\, \delta\Gamma$$

и

$$\Gamma'\, d\bar{K}'\, \Gamma = -\bar{F}'\, \delta\Gamma + \delta\Gamma\, \bar{F}' + d\bar{F}'.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\,(dK\, d\bar{K}') &= \mathrm{Sp}\,(\Gamma'\, dK\, \Gamma \cdot \Gamma'\, d\bar{K}' \cdot \Gamma) = \\ &= \mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma\, F - F\, \delta\Gamma)(\delta\Gamma\, \bar{F}' - \bar{F}'\, \delta\Gamma)\} + \mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma\, F - F\, \delta\Gamma)\, d\bar{F}'\} + \\ &+ \mathrm{Sp}\,\{dF\,(-\bar{F}'\, \delta\Gamma + \delta\Gamma\bar{F}')\} + \mathrm{Sp}\,(dF\, d\bar{F}'). \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

Так как

$$dF = iF\,[d\theta_1,\ d\theta_1,\ d\theta_2,\ d\theta_2,\ \ldots],$$

мы имеем

$$\mathrm{Sp}\,(dF\, d\bar{F}') = 2\left(d\theta_1^2 + d\theta_2^2 + \ \ldots\ + d\theta_\nu^2\right) \quad (\nu = [n/2]). \tag{3.6.5}$$

Кроме того, поскольку $dF\, \bar{F}' = \bar{F}'\, dF$, мы имеем

$$\mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma\, F - F\, \delta\Gamma)\, d\bar{F}'\} = \mathrm{Sp}\,(\delta\Gamma \cdot F \cdot d\bar{F}') - \mathrm{Sp}\,(\delta\Gamma \cdot d\bar{F}' \cdot F) = 0 \tag{3.6.6}$$

и

$$\mathrm{Sp}\,\{dF\,(-\bar{F}'\, \delta\Gamma + \delta\Gamma\, \bar{F}')\} = 0. \tag{3.6.7}$$

Далее,

$$\mathrm{Sp}\,\{(\delta\Gamma\, F - F\, \delta\Gamma)(\delta\Gamma\, \bar{F}' - \bar{F}'\, \delta\Gamma)\} = 2\,\mathrm{Sp}\,(\delta\Gamma\, F\, \delta\Gamma\, \bar{F}') - 2\,\mathrm{Sp}\,((\delta\Gamma)^2\, \bar{F}' F). \tag{3.6.8}$$

Следовательно, из (3.6.4) и (3.6.8) мы получаем

$$\mathrm{Sp}\,(dK \cdot d\bar{K}') = 2\,\mathrm{Sp}\,(\delta\Gamma \cdot F \cdot \delta\Gamma \cdot \bar{F}') - 2\,\mathrm{Sp}\,((\delta\Gamma)^2\, \bar{F}' F) + 2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2. \tag{3.6.9}$$

Формально мы имеем квадратичную форму от $\frac{n(n-1)}{2} + \nu$ дифференциалов $\delta\gamma_{\alpha\beta}$, $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n$ и $d\theta_1, d\theta_2, \ldots, d\theta_\nu$, но фактически $\delta\gamma_{12}, \delta\gamma_{34}, \ldots$ отсутствуют. Другими словами, мы имеем квадратичную форму лишь от $\frac{n(n-1)}{2} + \nu - \nu = \frac{n(n-1)}{2}$ дифференциалов. Мы займемся вычислением ее дискриминанта (т. е. элемента объема).

Теорема 3.6.1 *Элемент объема многообразия $\mathfrak{K}$ в полярных координатах равен*

$$\dot{K} = \varkappa_n \cdot \prod_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) \cdot \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha \cdot \dot{\Sigma}, \tag{3.6.10}$$

где

$$\varkappa_n = \begin{cases} 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{\nu}{2}}, & n = 2\nu \\ 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{3\nu}{2}}, & n = 2\nu+1, \end{cases}$$

а $\dot{\Sigma}$ — *элемент объема в пространстве классов смежности* $\Sigma = \Gamma/\Delta$. *Более точно,* $\dot{\Sigma}$ *равно произведению всех* $\delta\gamma_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *за исключением* $\delta\gamma_{12}$, $\delta\gamma_{34}$, ... (*число которых равно* $\nu = [n/2]$).

Доказательство. Пусть сначала $n = 2\nu$ — четное число. Разобьем F и $\delta\Gamma$ на клетки, состоящие из матриц второго порядка

$$\delta\Gamma = (\delta\Gamma_{\alpha\beta})_1^{\nu}, \qquad (\delta\Gamma_{\alpha\beta})' = -(\delta\Gamma_{\beta\alpha})$$

и

$$F = F_1 \dotplus F_2 \dotplus \ldots \dotplus F_\nu,$$

где

$$F_\alpha = e^{i\theta_\alpha} \cdot F_0, \qquad \overline{F}'_\alpha = -e^{-i\theta_\alpha} F_0, \qquad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя в (3.6.9), получаем

$$\operatorname{Sp}(dK \cdot d\overline{K}') =$$

$$= 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu} \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot F_\beta \cdot \delta\Gamma_{\beta\alpha} \cdot \overline{F}'_\alpha) - 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu} \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta}\,\delta\Gamma_{\beta\alpha}) + 2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2 =$$

$$= -2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} \{\operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\alpha} \cdot F_0 \cdot \delta\Gamma_{\alpha\alpha} \cdot F_0) + \operatorname{Sp}((\delta\Gamma_{\alpha\alpha})^2)\} +$$

$$+ 4 \sum_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \nu} \{\operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot \delta\Gamma'_{\alpha\beta}) + \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot F_0 \cdot \delta\Gamma'_{\alpha\beta} \cdot F_0)\} +$$

$$+ 2 \sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2. \qquad (3.6.11)$$

Во-первых,

$$\delta\Gamma_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{pmatrix},$$

откуда имеем

$$\operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\alpha} \cdot F_0 \cdot \delta\Gamma_{\alpha\alpha} \cdot F_0) + \operatorname{Sp}((\delta\Gamma_{\alpha\alpha})^2) = 0. \qquad (3.6.12)$$

Далее положим

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$4 \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot \delta\Gamma'_{\alpha\beta}) + 4 \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha) \operatorname{Sp}(\delta\Gamma_{\alpha\beta} \cdot F_0 \cdot \delta\Gamma'_{\alpha\beta} \cdot F_0) =$$

$$= 4\{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)(bc - ad)\}. \qquad (3.6.13)$$

Мы получили квадратичную форму от четырех переменных a, b, c и d. Ее дискриминант равен

$$4^4 \sin^4(\theta_\beta - \theta_\alpha).$$

Из (3.6.12) и (3.6.13) мы видим, что (3.6.11) является квадратичной формой от $4\frac{1}{2}\nu(\nu-1)+\nu=\frac{n(n-1)}{2}$ переменных, и ее дискриминант равен

$$2^\nu 4^{2\nu(\nu-1)} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^4(\theta_\beta - \theta_\alpha).$$

Отсюда следует, что элемент объема $\mathfrak{K}$ равен

$$2^{\frac{\nu}{2}+2\nu(\nu-1)} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^4(\theta_\beta - \theta_\alpha) \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha \dot{\Sigma}. \tag{3.6.14}$$

Перейдем теперь к случаю, когда $n=2\nu+1$ — нечетное число Представим $\delta\Gamma$ и F в виде

$$\delta\Gamma = \begin{pmatrix} \delta\Gamma_1 & \delta v \\ -\delta v' & 0 \end{pmatrix}, \quad F = F_1 \dotplus 0.$$

Подставляя в (3.6.9), получаем

$$\mathrm{Sp}(dK\, d\overline{K}') = 2\,\mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1 F_1 & 0 \\ -\delta v' F_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1 \overline{F}_1' & 0 \\ -\delta v' \overline{F}_1' & 0 \end{pmatrix}\right\} -$$

$$-2\,\mathrm{Sp}\left\{\begin{pmatrix} \delta\Gamma_1\,\delta\Gamma_1 - \delta v\,\delta v' & \delta\Gamma_1\,\delta v \\ -\delta v'\,\delta\Gamma_1 & -\delta v'\,\delta v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2 =$$

$$= 2\,\mathrm{Sp}(\delta\Gamma_1 F_1 \delta\Gamma_1 \overline{F}_1') - 2\,\mathrm{Sp}((\delta\Gamma_1)^2) + 2\,\mathrm{Sp}(\delta v \cdot \delta v') + 2\sum_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha^2.$$

Используя результат, полученный для четных n, мы находим, что для нечетного n элемент объема $\mathfrak{K}$ равен

$$2^\nu\, 2^{2\nu(\nu-1)+\frac{\nu}{2}} \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu} \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) \prod_{\alpha=1}^{\nu} d\theta_\alpha \cdot \dot{\Sigma}. \tag{3.6.15}$$

Рассмотрим теперь множество кососимметрических матриц вида

$$K = U D U', \tag{3.6.16}$$

где U — унитарная матрица, а

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots$$

[последний член суммы есть $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ или 0 в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным]. Для четных n множество матриц вида (3.6.16) совпадает с множеством матриц вида (3.6.2). Но для нечетного n положение иное. Ясно, что множество матриц вида (3.6.2) имеет размерность $\frac{1}{2}n(n-1)$, а относительно (3.6.16) нетрудно доказать, что размерность множества матриц этого вида равна $\frac{1}{2}n(n+1)-1$.

§ 3.7. Объем пространства вещественных ортогональных матриц и применения

В заключение главы мы найдем элемент объема и полный объем множества матриц, образующих вещественную ортогональную группу, используя тот же метод, что и в предыдущих параграфах.

Сначала рассмотрим ортогональную группу O_n, т. е. множество всех вещественных матриц T, удовлетворяющих условию

$$TT' = I. \tag{3.7.1}$$

Очевидно, что $\det T = \pm 1$. Через O_n^+ будем обозначать группу матриц T с определителем, равным $+1$. Каждой матрице T поставим в соответствие матрицу K по формуле

$$K = (I-T)(I+T)^{-1}. \tag{3.7.2}$$

При этом случай, когда $\det(I+T)=0$, должен быть исключен. Однако теперь мы уже не можем сказать „почти для всех матриц определитель $I+T$ отличен от нуля". В самом деле, для каждой матрицы T с определителем, равным -1, мы имеем

$$\det(I+T) = \det(TT'+T) = \det T \cdot \det(T'+I) = -\det(I+T),$$

т. е. $\det(I+T)=0$. Таким образом, мы должны ограничиться матрицами из O_n^+. Можно показать, что множество матриц из O_n^+, для которых $\det(I+T)=0$, образует многообразие более низкой размерности.

Из (3.7.1) и (3.7.2) непосредственно следует, что

$$K' = -K. \tag{3.7.3}$$

Обращая формулу (3.7.2), сразу получаем

$$T = (I-K)(I+K)^{-1}. \tag{3.7.4}$$

Отсюда также следует, что $\det T = 1$, так как

$$\det(I-K) = \det(I-K') = \det(I+K).$$

Дифференцируя (3.7.4), мы найдем, что

$$dT = -2(I+K)^{-1}\,dK\,(I+K)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Sp}\,(dT\,dT') = -4\,\mathrm{Sp}\left\{dK\cdot(I-K^2)^{-1}\cdot dK\cdot(I-K^2)^{-1}\right\}. \qquad (3.7.5)$$

Положим

$$dK = (dk_{ij}), \qquad dk_{ij} = -dk_{ji},$$
$$(I-K^2)^{-1} = (u_{st}), \qquad u_{st} = u_{ts}.$$

Тогда (3.7.5) даст нам

$$\mathrm{Sp}\,(dT\cdot dT') = -8\sum_{i<j}\sum_{s<t}(u_{js}u_{it} - u_{is}u_{jt})\,dk_{ij}\,dk_{st},$$

откуда мы получаем выражение для элемента объема

$$\dot{T} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\{\det(I-K^2)\}^{-\frac{n-1}{2}}\dot{K}, \qquad (3.7.6)$$

где

$$\dot{K} = 2^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{i<j}dk_{ij}.$$

Значит, полный объем ортогональной группы O_n^+ равен

$$\int_T \dot{T} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\int_K\{\det(I-K^2)\}^{-\frac{n-1}{2}}\cdot\dot{K}.$$

Из теоремы 2.1.4 получаем

$$\int_T \dot{T} = 2^{\frac{3n(n-1)}{4}}\pi^{\frac{n(n-1)}{4}}\cdot\prod_{\nu=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}{\Gamma(\nu-1)}. \qquad (3.7.7)$$

Теперь мы можем найти полный объем многообразия $\mathfrak{R}$.

Теорема 3.7.1. *Имеют место равенства*

$$\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu = 2^{-\nu^2}\cdot(2\pi)^\nu \qquad (3.7.8)$$

и

$$\int\cdots\int_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\beta-\cos\theta_\alpha)^2\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu = \frac{\pi}{2^{(\nu-1)^2}}. \qquad (3.7.9)$$

Доказательство. Из формулы

$$\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha) = \frac{1}{4}\left|e^{2i\theta_\alpha} - e^{2i\theta_\beta}\right|^2$$

и из ортогональности функций $e^{im\theta}$ следует, что

$$\int\limits_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\ldots\int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=\frac{1}{\nu!\,2^\nu\cdot 2^{\nu(\nu-1)}}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\left|e^{i\theta_\alpha}-e^{i\theta_\beta}\right|^2 d\theta_1\ldots d\theta_\nu=\frac{(2\pi)^\nu\cdot\nu!}{\nu!\,2^{\nu^2}}=\frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}}.$$

Из ортогональности же функций $\cos m\theta$ имеем

$$\int\limits_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\ldots\int \prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\beta-\cos\theta_\alpha)^2\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=\frac{1}{2^\nu\cdot\nu!}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\left\{\det(\cos^{i-1}\theta_j)_1^\nu\right\}^2 d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=\frac{1}{2^\nu\cdot\nu!\,2^{(\nu-1)(\nu-2)}}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{2\pi}\left\{\det(\cos(i-1)\theta_j)_1^\nu\right\}^2 d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=\frac{1}{2^\nu\nu!\,2^{(\nu-1)(\nu-2)}}\cdot\nu!\cdot 2\cdot\pi^\nu=\frac{\pi^\nu}{2^{(\nu-1)^2}},$$

так как $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$ и $\cos^m\theta=2^{-(m-1)}\cos m\theta+\ldots$.

Рассмотрим теперь множество ортогональных матриц G вида

$$G=\Gamma M\Gamma', \tag{3.7.10}$$

где Γ — матрица из O_n^+, а

$$M=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\dotplus\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\dotplus\ldots,\quad \pi\geqslant\theta_1\geqslant\ldots\geqslant\theta_\nu\geqslant 0. \tag{3.7.11}$$

Здесь при $n=2\nu$ сумма кончается членом $\begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix}$, а при $n=2\nu+1$ членами $\begin{pmatrix}\cos\theta_\nu & \sin\theta_\nu\\ -\sin\theta_\nu & \cos\theta_\nu\end{pmatrix}\dotplus 1$. Множество матриц такого вида обозначим также через G, а через $V(G)$ обозначим объем этого множества. При нечетном n множество G совпадает с O_n^+ и, следовательно,

$$V(G)=(8\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{\alpha=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-1)} \tag{3.7.12}$$

в силу (3.7.7). При четном n любая матрица из O_n^+ также представима в виде (3.7.10), но при условии, что определитель Γ может

быть равен как $+1$, так и -1. Значит,

$$V(G)=\frac{1}{2}(8\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}}\prod_{\alpha=2}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-1)}. \tag{3.7.13}$$

Вычислим теперь $V(G)$ другим способом. Из соотношения

$$G=\Gamma M\Gamma'=\Gamma_1 M_1\Gamma_1', \qquad \pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0,$$

выводим $\Gamma=\Gamma_1\Delta$, $M=M_1$, где

$$\Delta=\begin{pmatrix}\cos\delta_1 & \sin\delta_1\\ -\sin\delta_1 & \cos\delta_1\end{pmatrix}\dot{+}\begin{pmatrix}\cos\delta_2 & \sin\delta_2\\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2\end{pmatrix}\dot{+}\ldots.$$

Значит можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множеств G и $\Sigma\times M$ (здесь, как и выше, $\Sigma=\Gamma/\Delta$), за исключением, разумеется, многообразия меньшей размерности.

С помощью метода, обычно используемого в этой главе, мы находим, что элемент объема G равен

$$\dot{G}=b_n\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\alpha-\cos\theta_\beta)^2\prod_{\alpha=1}^{\nu}d\theta_\alpha\cdot\dot{\Sigma},$$

где

$$b_n=\begin{cases}2^{2\nu(\nu-1)+\frac{\nu}{2}}, & n=2\nu,\\ 2^{2\nu^2+\frac{\nu}{2}}, & n=2\nu+1.\end{cases}$$

Положим

$$V(\Sigma)=\int_\Sigma\dot{\Sigma}.$$

Тогда

$$V(G)=b_nV(\Sigma)\int\limits_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\ldots\int\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}(\cos\theta_\alpha-\cos\theta_\beta)^2\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu=$$

$$=b_nV(\Sigma)\cdot\frac{\pi^\nu}{2^{(\nu-1)^2}}. \tag{3.7.14}$$

Из теоремы 3.6.1 нам известно, что

$$V(\mathfrak{K})=\varkappa_n\cdot V(\Sigma)\cdot\int\limits_{\pi>\theta_1>\ldots>\theta_\nu>0}\ldots\int\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant\nu}\sin^2(\theta_\alpha-\theta_\beta)\,d\theta_1\ldots d\theta_\nu,$$

так что в силу (3.7.8)

$$V(\mathfrak{K})=\varkappa_nV(\Sigma)\cdot\frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}}. \tag{3.7.15}$$

Комбинируя (3.7.14) и (3.7.15), имеем

$$V(\mathfrak{K}) = \frac{\varkappa_n}{b_n} \cdot \frac{2^{(\nu-1)^2}}{\pi^\nu} \cdot \frac{(2\pi)^\nu}{2^{\nu^2}} \cdot V(G).$$

Заменяя $\varkappa_n$, b_n и $V(G)$ их значениями, получаем окончательно

$$V(\mathfrak{K}) = \lambda_n \frac{1}{2^{\nu-1}} (8\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}} \cdot \prod_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \lambda_n = \begin{cases} 1, & n = 2\nu, \\ 2^{-\nu}, & n = 2\nu + 1. \end{cases}$$

Для четных n множество $\mathfrak{K}$ совпадает с $\mathfrak{G}_{\mathrm{III}}$ — характеристическим многообразием области $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$. Таким образом, мы получили, в частности, объем $\mathfrak{G}_{\mathrm{III}}$.

Глава IV

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 4.1. Введение

Пусть $\mathfrak{R}$ — ограниченная область в $2n$-мерном эвклидовом пространстве n комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Известно, что максимум модуля функции $f(z)$, аналитической в $\mathfrak{R}$, не может достигаться во внутренней точке $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{C}$ — многообразие на границе $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:

1. Каждая аналитическая в $\mathfrak{R}$ функция достигает своего максимума модуля на многообразии $\mathfrak{C}$.

2. Для любой точки a из $\mathfrak{C}$ существует аналитическая в $\mathfrak{R}$ функция $f(z)$, достигающая своего максимума модуля в точке a.

Такое многообразие назовем характеристическим многообразием области $\mathfrak{R}$. Очевидно, что $\mathfrak{C}$ определяется по $\mathfrak{R}$ единственным образом. Нетрудно доказать, что $\mathfrak{C}$ замкнуто и что любая функция, аналитическая в окрестности каждой точки $\mathfrak{C}$, определяется ее значениями на $\mathfrak{C}$ единственным образом. Следовательно, вещественная размерность n_1 многообразия $\mathfrak{C}$ не меньше n. Через $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_{n_1})$ мы будем обозначать переменные на $\mathfrak{C}$, через $d\xi\,\overline{d\xi'}=\sum_{i=1}^{n_1}|d\xi_i|^2$ — метрику на $\mathfrak{C}$ и через $\dot{\xi}$ элемент объема $\mathfrak{C}$.

Если область $\mathfrak{R}$ допускает аналитические отображения, переводящие ее в себя, то очевидно, что при этих отображениях $\mathfrak{C}$ также переходит в себя. В частности, $\mathfrak{C}$ инвариантно относительно группы движений $\mathfrak{R}$, сохраняющих данную точку неподвижной. Если область $\mathfrak{R}$ допускает группу преобразований $z=e^{i\theta}w$, то мы назовем $\mathfrak{R}$ круговой областью, если же, кроме того, с точкой z в $\mathfrak{R}$ лежит и точка rz, $0\leqslant r\leqslant 1$, то мы назовем $\mathfrak{R}$ полной круговой областью. Очевидно, что если $\mathfrak{R}$ — круговая область, то и $\mathfrak{C}$ также.

Пусть теперь $\mathfrak{R}$ — круговая область. Рассмотрим вектор $z^{[f]}$ с компонентами

$$\sqrt{\frac{f!}{a_1!\ldots a_n!}}\,z_1^{a_1}\ldots z_n^{a_n},\quad a_1+\ldots+a_n=f. \tag{4.1.1}$$

Размерность вектора $z^{[f]}$ равна

$$N_f=\frac{1}{f!}n(n+1)\ldots(n+f-1)=\binom{n+f-1}{f}.$$

При $f \neq g$

$$\int_{\mathfrak{R}} (\overline{z^{[f]}})' \cdot z^{[g]} \cdot \dot{z} = 0$$

и

$$\int_{\mathfrak{C}} (\overline{\xi^{[f]}})' \cdot \xi^{[g]} \cdot \dot{\xi} = 0.$$

В самом деле, так как $\mathfrak{R}$ — круговая область, то, делая замену $z = e^{i\theta} w$, получаем

$$\int_{\mathfrak{R}} (\overline{z^{[f]}})' \cdot z^{[g]} \cdot \dot{z} = e^{i\theta(f-g)} \int_{\mathfrak{R}} (\overline{w^{[f]}})' \cdot w^{[g]} \cdot \dot{w},$$

откуда следует наше утверждение, поскольку $e^{i\theta(f-g)} \neq 1$.

Положим

$$\int_{\mathfrak{R}} (\overline{z^{[f]}})' \cdot z^{[f]} \cdot \dot{z} = H_1 \tag{4.1.2}$$

и

$$\int_{\mathfrak{C}} (\overline{\xi^{[f]}})' \cdot \xi^{[f]} \cdot \dot{\xi} = H_2. \tag{4.1.3}$$

Ясно, что H_1 и H_2 — положительно определенные эрмитовы матрицы порядка N_f. Существует такая матрица Γ, что

$$\overline{\Gamma}' H_1 \Gamma = \Lambda, \qquad \overline{\Gamma}' H_2 \Gamma = I,$$

где $\Lambda = [\beta_1^f, \beta_2^f, \ldots, \beta_{N_f}^f]$ — диагональная матрица.

Положим

$$z_f = z^{[f]} \cdot \Gamma, \qquad \xi_f = \xi^{[f]} \cdot \Gamma,$$

а через $\{\varphi_\nu^f(z)\}$ мы будем обозначать компоненты вектора z_f. Тогда имеем

$$\int_{\mathfrak{R}} \varphi_\nu^f(z)\, \overline{\varphi_\mu^g(z)}\, \dot{z} = \delta_{\nu\mu} \cdot \delta_{fg} \cdot \beta_\nu^f \tag{4.1.4}$$

и

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\nu^f(\xi)\, \overline{\varphi_\mu^g(\xi)}\, \dot{\xi} = \delta_{\nu\mu} \cdot \delta_{fg}. \tag{4.1.5}$$

Таким образом, функции $\left\{(\beta_\nu^f)^{-\frac{1}{2}} \varphi_\nu^f(z)\right\}$ образуют ортонормальную систему в области $\mathfrak{R}$. Известна следующая теорема (А. Картан [1]).

Теорема 4.1.1. *Для полной круговой области $\mathfrak{R}$ система функций*

$$(\beta_\nu^f)^{-\frac{1}{2}} \varphi_\nu^f(z), \quad \begin{matrix} f = 0, 1, 2, \ldots, \\ \nu = 1, 2, \ldots, N_f, \end{matrix} \tag{4.1.6}$$

является полной ортонормальной системой в области $\mathfrak{R}$. Напротив, система $\{\varphi_\nu^f(\xi)\}$ ортонормальна, но, вообще говоря, не полна в пространстве функций, непрерывных на $\mathfrak{C}$.

Известно также, что ряд

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{N_f}\frac{\varphi_\nu^f(z)\,\overline{\varphi_\nu^f(w)}}{\beta_\nu^f}=K(z,\overline{w})$$

равномерно сходится при любых z и w, лежащих внутри $\mathfrak{R}$, и представляет там функцию, называемую ядром Бергмана[1]).

Сумму ряда (если он сходится)

$$\sum_{f=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{N_f}\varphi_\nu^f(z)\,\overline{\varphi_\nu^f(\xi)}=H(z,\overline{\xi})$$

мы назовем ядром Коши для области $\mathfrak{R}$.

Наконец, функцию

$$P(z,\xi)=\frac{|H(z,\overline{\xi})|^2}{H(z,\overline{z})}$$

мы назовем ядром Пуассона для области $\mathfrak{R}$.

Целью настоящей главы являются методы непосредственного нахождения этих ядер.

§ 4.2. Ядро Бергмана

Пусть $\mathfrak{R}$ — ограниченная область, содержащая внутри начало, Γ — группа аналитических отображений $\mathfrak{R}$ на себя и Γ_0 — подгруппа Γ, оставляющая начало неподвижным. Известно (А. Картан [1]), что элемент из Γ_0 полностью определяется его линейными членами в окрестности начала, т. е. отображение $\mathfrak{R}$ на себя, имеющее вид

$$w_i=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}z_j+\sum_{\substack{m_1\ldots m_n\\ m_1+\ldots+m_n\geqslant 2}}a^{(i)}_{m_1\ldots m_n}z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n},\qquad(4.2.1)$$

полностью определено, если известна матрица $(u_{ij})_1^n$. Так как известно, что Γ_0 компактна, то без ограничения общности можно считать, что матрицы $(u_{ij})=U$, образующие представление Γ_0, унитарны. Букву U мы будем использовать и для обозначения самого нелинейного преобразования (4.2.1), определяемого линейным элементом U.

---

[1]) В русской литературе ядро Бергмана обычно называют „кернфункция области". В этой книге такой термин был бы не очень удачен, поскольку мы имеем три ядра, которые могли бы носить такое название. — *Прим. перев.*

Рассмотрим теперь множество классов смежности Γ/Γ_0. Все преобразования группы, принадлежащие одному и тому же классу смежности, переводят в начало одну и ту же точку a. Совокупность всех таких точек a образует в $\mathfrak{R}$ некоторое множество $\mathfrak{M}$. Его называют транзитивным множеством относительно группы Γ, содержащим начало. Таким образом, любой элемент из Γ однозначно определяется точкой a из $\mathfrak{M}$ и унитарной матрицей U из Γ_0. Запишем преобразования, определяемые элементами из Γ в виде

$$w=f(z,\ a,\ U),\quad a\in\mathfrak{M},\quad U\in\Gamma_0. \tag{4.2.2}$$

Пусть

$$z=f(x,\ b,\ V),\quad b\in\mathfrak{M},\quad V\in\Gamma_0, \tag{4.2.3}$$

— другое преобразование, и

$$w=f(f(x,\ b,\ V),\ a,\ U)=f(x,\ c,\ W) \tag{4.2.4}$$

— произведение преобразований (4.2.2) и (4.2.3). Полагая $w=0$, сразу получаем

$$a=f(c,\ b,\ V). \tag{4.2.5}$$

Дифференцируя (4.2.4), имеем

$$\frac{\partial f_i(x,\ c,\ W)}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i(z,\ a,\ U)}{\partial z_k}\,\frac{\partial f_k(x,\ b,\ V)}{\partial x_j}. \tag{4.2.6}$$

Матрицу якобиана преобразования (4.2.2) обозначим

$$J(z,\ a,\ U)=(a_{ij}),\quad a_{ij}=\frac{\partial f_i(z,\ a,\ U)}{\partial z_j}.$$

Если в (4.2.6) положить $x=c$, то получим $z=a$. Значит,

$$J(c,\ c,\ W)=J(a,\ a,\ U)\cdot J(c,\ b,\ V).$$

Изменяя обозначения, получаем

$$J(x,\ x,\ W)=J(z,\ z,\ U)\,J(x,\ b,\ V). \tag{4.2.7}$$

Эта формула имеет место для x и z из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих соотношению

$$z=f(x,\ b,\ V). \tag{4.2.8}$$

Если мы имеем другое преобразование

$$u=f(x,\ b,\ V_0),$$

то преобразование u в z оставляет начало неподвижным. Значит,

$$U_0=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{z=0}$$

— унитарная матрица. Отсюда следует, что

$$\{J(x, b, V)\}_{x=b} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{z=0} \cdot \{J(x, b, V_0)\}_{x=b},$$

так что мы имеем

$$J(b, b, V) = U_0 J(b, b, V_0), \tag{4.2.9}$$

где U_0 — унитарная матрица из Γ_0. Таким образом,

$$\overline{J(z, z, V)'} \cdot J(z, z, V) = \overline{J(z, z, V_0)'} \cdot J(z, z, V_0). \tag{4.2.10}$$

Это показывает, что $\overline{J'}J$ зависит от класса смежности Γ/Γ_0, но не зависит от выбора представителей этого класса. Значит, мы можем записать

$$|\det J(z, z, V)|^2 = Q(z, \bar{z}).$$

Из (4.2.7) для z и x, лежащих в $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющих соотношению (4.2.8), имеем

$$Q(x, \bar{x}) = Q(z, \bar{z})\,|\det J(x, b, V)|^2. \tag{4.2.11}$$

Бергман [1] доказал, что при преобразовании (4.2.8) ядро Бергмана области $\mathfrak{R}$ меняется по такому же закону

$$K(x, \bar{x}) = K(z, \bar{z})\,|\det J(x, b, V)|^2. \tag{4.2.12}$$

Таким образом, для z и x из $\mathfrak{M}$

$$\frac{K(x, \bar{x})}{Q(x, \bar{x})} = \frac{K(z, \bar{z})}{Q(z, \bar{z})}. \tag{4.2.13}$$

Теорема 4.2.1. *Если $\mathfrak{R}$ — ограниченная круговая область, то для z, лежащих в $\mathfrak{M}$, имеем*

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\Omega} Q(z, \bar{z}),$$

где Ω — полный объем $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Имея в виду сказанное в § 4.1, мы можем предложить следующий процесс построения ортонормальной системы функций.

Ортонормализуем члены

$$z_1^{a_1} \cdot z_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{a_n}, \quad a_1 + \ldots + a_n = m,$$

при данном m и возьмем совокупность всех таких функций при $m = 0, 1, 2, \ldots$. Эта совокупность образует полную ортонормальную систему.

Среди полученных этим процессом функций $\varphi_\nu(z)$ имеется константа $\Omega^{-\frac{1}{2}}$, а остальные являются однородными формами степеней $m \geqslant 1$. Значит,

$$\varphi_0(z) = \Omega^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi_\nu(0) = 0, \quad \nu \geqslant 1.$$

Поэтому из равенства

$$K(z, \bar{z}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \overline{\varphi_\nu(z)}$$

сразу получаем

$$K(0, 0) = \frac{1}{\Omega}.$$

С другой стороны, из определения $Q(z, \bar{z})$ имеем $Q(0, 0) = 1$. Отсюда в силу (4.2.13) получаем теорему.

Предположив теперь, что $\mathfrak{R}$ — транзитивная область (т. е. $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{M}$), мы установим геометрические свойства $Q(z, \bar{z})$. Из (4.2.7) имеем

$$J(x, x, W)\, dx' = J(z, z, U)\, dz',$$

следовательно,

$$\overline{dx} \cdot \overline{J(x, x, W)'} \cdot J(x, x, W) \cdot dx' = \overline{dz} \cdot \overline{J(z, z, U)'} \cdot J(z, z, U) \cdot dz'.$$

Эту инвариантную форму можно рассматривать в качестве метрики нашего пространства. Элемент объема в этой метрике равен

$$|\det J(z, z, U)|^2 \dot{z} = Q(z, \bar{z}) \cdot \dot{z},$$

так что $Q(z, z)$ можно назвать *плотностью объема*.

Из теоремы 4.2.1 мы получаем следующее утверждение:

Ядро Бергмана для любой транзитивной круговой области равно отношению плотности объема к эвклидову объему области.

В следующих параграфах мы найдем ядро Бергмана для наших четырех типов классических областей, руководствуясь лишь этим соображением и не обращаясь к полным ортонормальным системам.

§ 4.3. Ядра Бергмана для областей $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ и $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$

1°. Группа Γ для области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ состоит из следующих преобразований (см. Хуа Ло-кен [1]):

$$Z_1 = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \tag{4.3.1}$$

где A, B, C, D — матрицы с размерами $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$, $n \times n$ соответственно, удовлетворяющие соотношениям

$$\bar{A}A' - \bar{B}B' = I^{(m)}, \quad \bar{A}C' = \bar{B}D', \quad \bar{C}C' - \bar{D}D' = -I^{(n)}.$$

При $m = n$ мы предполагаем, кроме того, что

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = +1. \tag{4.3.2}$$

Найдем преобразования, переводящие произвольную точку $Z=P$ в начало. По определению области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ имеем

$$I^{(m)}-\bar{P}P'>0.$$

По теореме 2.1.2 отсюда следует, что и

$$I^{(n)}-P'\bar{P}>0.$$

Известно, что существуют $m\times m$-матрица Q и $n\times n$-матрица R, такие, что

$$\bar{Q}\left(I^{(m)}-\bar{P}P'\right)Q'=I^{(m)},\quad \bar{R}\left(I^{(n)}-P'\bar{P}\right)R'=I^{(n)}. \tag{4.3.3}$$

Преобразование

$$Z_1=Q(Z-P)(I^{(n)}-\bar{P}'Z)^{-1}R^{-1} \tag{4.3.4}$$

переводит P в начало. Легко убедиться, что это преобразование принадлежит к виду (4.3.1).

Дифференцируя (4.3.4), имеем

$$dZ_1=Q\left\{dZ\cdot(I-\bar{P}'Z)^{-1}+(Z-P)\,d\,(I-\bar{P}'Z)^{-1}\right\}R^{-1}.$$

Положим $Z=P$. Тогда

$$dZ_1=Q\cdot dZ\cdot(I-\bar{P}'P)^{-1}R^{-1}=Q\cdot dZ\cdot\bar{R}',$$

т. е. в точке $Z=P$

$$\dot{Z}_1=\left|(\det Q)^m\cdot(\det\bar{R}')^n\right|^2\cdot\dot{Z}=\left\{\det(I-P\bar{P}')\right\}^{-m-n}\cdot\dot{Z}.$$

Следовательно,

$$Q(Z,\bar{Z})=\left\{\det(I-Z\bar{Z}')\right\}^{-(m+n)}.$$

Используя результаты § 4.2, получаем следующую теорему.

Теорема 4.3.1. *Ядро Бергмана области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ равно*

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})}\cdot\left\{\det(I-Z\bar{Z}')\right\}^{-(m+n)}, \tag{4.3.5}$$

где согласно (2.2.2)

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})=\frac{1!\,2!\ldots(m-1)!\,1!\,2!\ldots(n-1)!}{1!\,2!\ldots(m+n-1)!}\pi^{mn}.$$

2°. Группа Γ области $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ состоит из преобразований вида

$$Z_1=(AZ+B)(\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}, \tag{4.3.6}$$

где

$$A'B=B'A,\quad \bar{A}A'-\bar{B}B'=I.$$

Пусть P — точка $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$. Найдется такая матрица R, что

$$\bar{R}(I-\bar{P}P')R'=I. \tag{4.3.7}$$

Преобразование

$$Z_1 = R(Z-P)(I-\bar{P}Z)^{-1}\bar{R}^{-1}, \tag{4.3.8}$$

принадлежащее Г, переводит точку P в начало.

Дифференцируя (4.3.8), имеем

$$dZ_1 = R\{dZ\cdot(I-\bar{P}Z)^{-1}+(Z-P)\,d(I-\bar{P}Z)^{-1}\}\,\bar{R}^{-1}.$$

Полагая $Z=P$, получаем

$$dZ_1 = R\cdot dZ\cdot(I-\bar{P}P)^{-1}\bar{R}^{-1} = R\cdot dZ\cdot R'.$$

Значит, в точке $Z=P$

$$\dot{Z}_1 = |(\det R)^{n+1}|^2\cdot\dot{Z} = \{\det(I-P\bar{P})\}^{-(n+1)}\cdot\dot{Z}.$$

Таким образом,

$$Q(Z,\bar{Z}) = \{\det(I-Z\bar{Z})\}^{-(n+1)}.$$

Теорема 4.3.2. *Ядро Бергмана области* $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ *равно*

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}})}\cdot\{\det(I-Z\bar{Z})\}^{-(n+1)}, \tag{4.3.9}$$

где согласно (2.3.2)

$$V(\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}) = \pi^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\frac{2!\,4!\ldots(2n-2)!}{n!\,(n+1)!\ldots(2n-1)!}.$$

3°. Группа Г области $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ состоит из преобразований вида

$$Z_1 = (AZ+B)(-\bar{B}Z+\bar{A})^{-1}, \tag{4.3.10}$$

где

$$A'B = -B'A,\quad \bar{A}'A-\bar{B}'B = I.$$

Пусть P — точка $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$, т. е. $I+P\bar{P}>0$. Тогда найдется такая матрица Q, что

$$\bar{Q}(I+P\bar{P})Q' = I.$$

Тогда в Г имеется преобразование

$$Z_1 = Q(Z-P)(I+\bar{P}Z)^{-1}\bar{Q}^{-1}, \tag{4.3.11}$$

переводящее точку P в начало.

Дифференцируя (4.3.11), имеем

$$dZ_1 = Q\{dZ\cdot(I+\bar{P}Z)^{-1}+(Z-P)\,d(I+\bar{P}Z)^{-1}\}\,\bar{Q}^{-1}.$$

При $Z=P$ получаем

$$dZ_1 = Q\cdot dZ\cdot(I+\bar{P}P)^{-1}\cdot\bar{Q}^{-1} = Q\cdot dZ\cdot Q'.$$

Значит, в точке $Z=P$

$$\dot{Z}_1 = |(\det Q)^{n+1}|^2\,\dot{Z} = \{\det(I+\bar{P}P)\}^{-n+1}\cdot\dot{Z}.$$

Поэтому

$$Q(Z, \bar{Z}) = \{\det(I + Z\bar{Z})\}^{-n+1}.$$

Теорема 4.3.3. *Ядро Бергмана области* $\mathfrak{R}_{III}$ *равно*

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{III})}\{\det(I + Z\bar{Z})\}^{-n+1},$$

где согласно (2.4.2)

$$V(\mathfrak{R}_{III}) = \pi^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{2!\,4!\ldots(2n-4)!}{(n-1)!\,n!\ldots(2n-3)!}.$$

§ 4.4. Ядро Бергмана для области $\mathfrak{R}_{IV}$

Группа Γ области $\mathfrak{R}_{IV}$ состоит из преобразований вида

$$w = \left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)A' + zB'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)C' + zD'\right\}, \quad (4.4.1)$$

где A, B, C и D — вещественные матрицы размеров соответственно 2×2, $2\times n$, $n\times 2$ и $n\times n$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(n)}\end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

и

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = +1. \quad (4.4.3)$$

Найдем теперь преобразования из Γ, переводящие точку z_0 в начало. Исходя из вектора z_0, построим $2\times n$-матрицу X_0 следующим образом:

$$X_0 = 2\begin{pmatrix}z_0z_0'+1 & i(z_0z_0'-1)\\ \overline{z_0z_0'}+1 & -i(\overline{z_0z_0'}-1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix} = 2A_0^{-1}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{1-|z_0z_0'|^2}\begin{pmatrix}z_0+\bar{z}_0-(\overline{z_0z_0'}\cdot z_0+z_0z_0'\cdot\bar{z}_0)\\ i(z_0-\bar{z}_0)+i(\overline{z_0z_0'}\cdot z_0-z_0z_0'\cdot\bar{z}_0)\end{pmatrix}. \quad (4.4.4)$$

Эта матрица, очевидно, вещественна. Имеем

$$I - X_0X_0' = \bar{A}_0^{-1}\left(\bar{A}_0A_0' - 4\overline{\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}z_0\\ \bar{z}_0\end{pmatrix}'\right)\cdot A_0'^{-1} =$$
$$= 2\bar{A}_0^{-1}\begin{pmatrix}1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0' & 0\\ 0 & 1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'\end{pmatrix}\cdot A_0'^{-1}. \quad (4.4.5)$$

Следовательно,

$$(I-X_0X_0')^{-1}=\frac{1}{2\left(1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'\right)}A_0'\bar{A}_0=\frac{1}{1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}(z_0z_0'+1)\left(\overline{z_0z_0'}+1\right) & i\left(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}\right)\\ i\left(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}\right) & (z_0z_0'-1)\left(\overline{z_0z_0'}-1\right)\end{pmatrix}=A'A, \qquad (4.4.6)$$

где

$$A=\frac{1}{2}\left(1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'\right)^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-i\left(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}\right) & z_0z_0'+\overline{z_0z_0'}-2\\ z_0z_0'+\overline{z_0z_0'}+2 & i\left(z_0z_0'-\overline{z_0z_0'}\right)\end{pmatrix}. \qquad (4.4.7)$$

Подберем D, удовлетворяющую условию $D(I^{(n)}-X_0'X_0)D'=I^{(n)}$; тогда преобразование

$$w=\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\{zD'-\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)X_0D'\right\} \qquad (4.4.8)$$

имеет вид (4.4.1) и переводит точку z_0 в начало.

Кроме того,

$$\det A=\det D=\frac{1-|z_0z_0'|^2}{1+|z_0z_0'|^2-2\bar{z}_0z_0'}. \qquad (4.4.9)$$

Дифференцируя (4.4.8), имеем ($z=(z^{(1)},\ \ldots,\ z^{(n)})$)

$$dw=\left\{dz\cdot D'-\left(\sum_{p=1}^{n}z^{(p)}dz^{(p)},\ i\sum_{p=1}^{n}z^{(p)}dz^{(p)}\right)X_0D'\right\}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}+$$

$$+\left\{zD'-\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)X_0D'\right\}\times$$

$$\times d\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(zz'+1),\ \frac{i}{2}(zz'-1)\right)A'-zX_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}.$$

Полагая $z=z_0$, получаем

$$dw=\left\{dz\cdot D'-\left(\sum_{p=1}^{n}z_0^{(p)}dz^{(p)},\ i\sum_{p=1}^{n}z_0^{(p)}dz^{(p)}\right)X_0D'\right\}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(z_0z_0'+1),\ \frac{i}{2}(z_0z_0'-1)\right)A'-z_0X_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1},$$

т. е.

$$dw=\{dz\cdot D'-d(zz')\cdot(1,\ i)X_0D'\}\times$$

$$\times\left\{\left[\left(\frac{1}{2}(z_0z_0'+1),\ \frac{i}{2}(z_0z_0'-1)\right)A'-z_0X_0'A'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}. \qquad (4.4.10)$$

Используя (4.4.4) и (4.4.7), имеем

$$dw = -i\,dz \cdot \left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} \cdot z_0' z_0}{1 - |z_0 z_0'|^2} \right\} \cdot D' \cdot \left(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.4.11}$$

Из (4.4.9) получаем

$$\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=z_0} =$$

$$= \det\left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} \cdot z_0' z_0}{1 - |z_0 z_0'|^2} \right\} \cdot \frac{1 - |z_0 z_0'|^2}{\left(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'\right)} \times$$

$$\times \left(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'\right)^{-\frac{n}{2}},$$

или

$$\left|\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=z_0}\right|^2 = \left(1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'\right)^{-n}. \tag{4.4.12}$$

Здесь использовано тождество

$$\det\left\{ I - 2\frac{z_0'\bar{z}_0 - \overline{z_0 z_0'} \cdot z_0' z_0}{1 - |z_0 z_0'|^2} \right\} = \frac{1 + |z_0 z_0'|^2 - 2\bar{z}_0 z_0'}{1 - |z_0 z_0'|^2}, \tag{4.4.13}$$

являющееся следствием соотношения $\det(I - u'\bar{v}) = 1 - \bar{v}u'$ (см. теорему 2.1.2).

Таким образом, мы пришли к теореме.

Теорема 4.4.1. *Ядро Бергмана области* $\mathfrak{R}_{IV}$ *равно*

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})}\left(1 + |zz'|^2 - 2\bar{z}z'\right)^{-n},$$

где согласно (2.5.7) $V(\mathfrak{R}_{IV}) = \dfrac{\pi^n}{2^{n-1} \cdot n!}$.

§ 4.5. Ядро Коши

Перейдем теперь к изучению ядра Коши

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(z)\,\overline{\varphi_\nu^f(\xi)} = H(z, \bar{\xi}). \tag{4.5.1}$$

(Здесь z принадлежит $\mathfrak{R}$, а ξ — $\mathfrak{E}$.)

Пусть Γ_0 — группа движений $\mathfrak{R}$, оставляющих начало неподвижным. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{E}$ транзитивно относительно Γ_0, т. е. любые две точки из $\mathfrak{E}$ могут быть переведены одна в другую преобразованием, принадлежащим Γ_0.

Теорема 4.5.1. *Ряд*

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_f} |\varphi_\nu^f(\xi)|^2 r^f \tag{4.5.2}$$

равномерно сходится при $\xi \in \mathfrak{E}$ *и* $0 \leqslant r \leqslant r_0 < 1$. *Сумма ряда равна* $[V(\mathfrak{E})]^{-1}(1-r)^{-n}$, *где* $V(\mathfrak{E})$ — *объем* $\mathfrak{E}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать Γ_0 состоящей из унитарных преобразований $\eta = \xi U$. Выражение (4.5.2) можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{f=0}^{\infty} \xi_f \overline{\xi}'_f r^f = \sum_{f=0}^{\infty} \xi^{[f]} H_2^{-1} \overline{\xi^{[f]}}' r^f = \sum_{f=0}^{\infty} \xi^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{E}} \overline{\zeta^{[f]}}' \zeta^{[f]} \dot{\zeta} \right)^{-1} \overline{\xi^{[f]}}' r^f =$$

$$= \sum_{f=0}^{\infty} \eta^{[f]} \left(\int_{\mathfrak{E}} \overline{\zeta^{[f]}}' \zeta^{[f]} \dot{\zeta} \right)^{-1} \overline{\eta^{[f]}}' r^f = \sum_{f=0}^{\infty} \eta_f \overline{\eta}'_f r^f,$$

откуда видно, что оно не зависит от ξ на $\mathfrak{E}$. Поэтому, интегрируя по $\mathfrak{E}$, получаем

$$\frac{1}{V(\mathfrak{E})} \cdot \int_{\mathfrak{E}} \sum_{f=0}^{\infty} \eta_f \overline{\eta}'_f r^f \cdot \dot{\eta} = \frac{1}{V(\mathfrak{E})} \sum_{f=0}^{\infty} \binom{n+f-1}{f} r^f = \frac{1}{V(\mathfrak{E})} \cdot (1-r)^{-n}, \tag{4.5.3}$$

и теорема доказана.

Из предыдущей теоремы с помощью неравенства Буняковского — Шварца получаем следующее утверждение.

Теорема 4.5.2. *При* ξ *и* η *на* $\mathfrak{E}$ *и* $0 \leqslant r \leqslant r_0 < 1$ *ряд*

$$\sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(\xi) \overline{\varphi_\nu^f(\eta)} r^f \tag{4.5.4}$$

равномерно сходится.

Теорема 4.5.3. *Пусть* $\mathfrak{R}$ — *звездообразная круговая область. Обозначим через* $\mathfrak{R}(r)$ *область, получающуюся из* $\mathfrak{R}$ *подобным преобразованием с коэффициентом подобия* r, $0 < r < 1$. *При* $z \in \mathfrak{R}(r)$ *и* $\xi \in \mathfrak{E}$ *ряд* (4.5.1) *равномерно сходится.*

Доказательство. Так как аналитическая в $\mathfrak{R}$ функция достигает максимума модуля на $\mathfrak{E}$, то

$$\left| \sum_{f=m}^{m'} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(z) \overline{\varphi_\nu^f(\xi)} \right| = \left| \sum_{f=m}^{m'} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f\left(\frac{z}{r}\right) \overline{\varphi_\nu^f(\xi)} r^f \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\zeta \in \mathfrak{E}} \left| \sum_{f=m}^{m'} \sum_{\nu=1}^{N_f} \varphi_\nu^f(\zeta) \overline{\varphi_\nu^f(\xi)} r^f \right|$$

[$\varphi_\nu^f(z)$ — однородные формы от z степени f]. При m, $m' \to \infty$ правая часть последнего равенства стремится к нулю по теореме 4.5.2. Тем самым теорема доказана.

§ 4.6. Формула Коши

По существу, следующие две теоремы уже полностью доказаны в предыдущем параграфе. Однако ввиду их важности мы сформулируем их отдельно.

Теорема 4.6.1. *Пусть* $\mathfrak{C}$ — *характеристическое многообразие области* $\mathfrak{R}$, *удовлетворяющей условиям теоремы* 4.5.3, *и пусть* $f(\xi)$ — *непрерывная на* $\mathfrak{C}$ *функция. Тогда интеграл*

$$\varphi(z)=\int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) f(\xi)\, \dot{\xi} \tag{4.6.1}$$

представляет аналитическую функцию, регулярную в $\mathfrak{R}$. *Если же* $f(z)$ — *функция, аналитическая в* $\mathfrak{R}$ *и на границе* $\mathfrak{R}$, *то*

$$f(z)=\int_{\mathfrak{C}} H(z, \bar{\xi}) f(\xi)\, \dot{\xi}.$$

Эта теорема следует из равномерной сходимости ряда для $H(z, \bar{\xi})$ (теорема 4.5.3).

Теорема 4.6.2. *Пусть* $\{\varphi_\nu(\xi)\}$ — *ортонормальная система функций на* $\mathfrak{C}$, *обладающая следующими свойствами*:

1) $\varphi_\nu(z)$ — *аналитические функции, регулярные в области* $\mathfrak{R}$ *и на ее границе.*

2) *Ряд*

$$H_1(z, \bar{\xi})=\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z)\, \overline{\varphi_\nu(\xi)}$$

равномерно сходится при $\xi \in \mathfrak{C}$ *и* z, *лежащем в любой замкнутой подобласти* $\mathfrak{R}$.

3) *Любая функция* $f(z)$, *аналитическая в области* $\mathfrak{R}$ *и на ее границе, может быть разложена в ряд*

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(z),$$

равномерно сходящийся в любой замкнутой подобласти $\mathfrak{R}$.

Тогда

$$H_1(z, \bar{\xi})=H(z, \bar{\xi}).$$

Доказательство. Если ортонормальная система $\{\varphi_\nu(z)\}$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то легко убедиться, что теорема 4.6.1 имеет место. Другими словами, если $f(z)$ аналитична в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, то

$$f(z)=\int_{\mathfrak{C}} H_1(z, \bar{\xi}) f(\xi)\, \dot{\xi}. \tag{4.6.2}$$

Из принципа максимума модуля следует, что ряд

$$H(z, \overline{w}) = \sum_{f, i} \varphi_i^f(z) \overline{\varphi_i^f(\omega)}$$

равномерно сходится при z, лежащих в любой замкнутой подобласти $\mathfrak{R}$ и w, лежащих в $\mathfrak{R}$ или на ее границе. Но $H_1(z, \overline{w})$ обладает теми же свойствами. Значит,

$$H(z, \overline{w}) = \int_{\mathfrak{C}} H_1(z, \overline{\xi}) H(\xi, \overline{w}) \dot{\xi} =$$

$$= \overline{\int_{\mathfrak{C}} H_1(\overline{z}, \xi) H(\overline{\xi}, w) \dot{\xi}} = \overline{H_1(\overline{z}, w)} = H_1(z, \overline{w}),$$

откуда видно, что $H_1(z, \overline{w}) \equiv H(z, \overline{w})$. При $w = \xi$ получаем утверждение нашей теоремы.

Теорема 4.6.3. *Предположим, что область $\mathfrak{R}$ в дополнение к прежним условиям транзитивна и что $\mathfrak{C}$ имеет вещественную размерность n. Тогда*

$$H(z, \overline{\xi}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})} B^{\frac{1}{2}}(z, z, U) \overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi, z, U)},$$

где $B(z, a, U)$ — значение якобиана преобразования из группы Γ, переводящего точку a в начало.

Доказательство. Пусть

$$w = f(z, a, U) \tag{4.6.3}$$

— преобразование из группы Γ, переводящее точку a в начало. Это преобразование переводит $\mathfrak{C}$ в себя. Положим

$$\zeta = f(\xi, a, U). \tag{4.6.4}$$

Тогда

$$\dot{\zeta} = B(\xi, a, U) \dot{\xi}. \tag{4.6.5}$$

(Это имеет место, поскольку вещественная размерность $\mathfrak{C}$ равна комплексной размерности $\mathfrak{R}$, и тем самым переход с границы внутрь области может быть осуществлен простой заменой вещественных параметров комплексными.)

Мы знаем, что на $\mathfrak{C}$ существует ортонормальная система $\{\varphi_\nu^f(\xi)\}$, которую мы будем для простоты обозначать $\{\varphi_\nu(\xi)\}$. Тогда

$$\int_{\mathfrak{C}} \varphi_\mu(\zeta) \overline{\varphi_\nu(\zeta)} \dot{\zeta} = \int_{\mathfrak{C}} \varphi_\mu(f(\xi)) \overline{\varphi_\nu(f(\xi))} |B(\xi, a, U)| \dot{\xi} = \delta_{\mu\nu}.$$

Значит, система

$$\psi_\mu(\xi) = \varphi_\mu(f(\xi, a, U)) B^{\frac{1}{2}}(\xi, a, U)$$

также является ортонормальной. Докажем, что система $\{\psi_\mu(\xi)\}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.6.2. Очевидно, что $\psi_\mu(z)$ аналитичны в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_\nu(z)\overline{\psi_\nu(\xi)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(w)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\cdot B^{\frac{1}{2}}(z,\ a,\ U)\overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi,\ a,\ U)}. \qquad (4.6.6)$$

Обозначим через

$$z=f^{-1}(w,\ a,\ U)$$

преобразование, обратное к (4.6.3). Любой функции $\psi(z)$, аналитичной в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, поставим в соответствие функцию

$$\varphi(w)=\psi\left(f^{-1}(w,\ a,\ U)\right)B^{-\frac{1}{2}}(z,\ a,\ U),$$

также аналитическую в $\mathfrak{R}$ и на ее границе. Поскольку $\varphi(w)$ может быть разложена в ряд

$$\varphi(w)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\varphi_\nu(w),$$

то мы получаем и

$$\psi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\psi_\nu(z).$$

Это показывает, что условие 3) теоремы 4.6.2 выполнено. Таким образом, из (4.6.6) следует

$$H(z,\ \overline{\xi})=H(w,\ \overline{\zeta})\cdot B^{\frac{1}{2}}(z,\ a,\ U)\overline{B^{\frac{1}{2}}(\xi,\ a,\ U)}.$$

Так как $H(0,\ \overline{\zeta})=[V(\mathfrak{C})]^{-1}$, то, заменяя a на z, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Ортонормальная система $\{\psi_\mu(\xi)\}$, рассмотренная выше, не является полной на $\mathfrak{C}$. На $\mathfrak{C}$ существует и полная ортонормальная система (см. Г. Вейль [1]); она может быть получена добавлением к $\{\psi_\mu(\xi)\}$ некоторой системы функций $\psi_{-\nu}(\xi)$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots$. Здесь идет речь о полноте в пространстве функций, непрерывных на $\mathfrak{C}$, т. е. если $g(\xi)$ — непрерывная функция на $\mathfrak{C}$, то из

$$\int_{\mathfrak{C}} g(\xi)\overline{\varphi_\nu(\xi)}\,\dot{\xi}=0 \qquad (\nu=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

следует $g(\xi)\equiv 0$.

§ 4.7. Ядра Коши для классических областей

Применение теоремы 4.6.3 позволяет непосредственно найти ядра Коши для классических областей.

1°. В $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ характеристическое многообразие $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ определяется условием $U\overline{U'}=I$. Предположим сначала, что $m=n$. Тогда размерность

характеристического многообразия равна половине размерности $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ и следовательно,

$$H(Z, \bar{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}})} \cdot \{\det(I - Z\bar{U}')\}^{-n}, \tag{4.7.1}$$

где согласно теореме 3.1.1

$$V(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}) = \frac{(2\pi)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1!\,2!\ldots(n-1)!}.$$

Если $m \neq n$, то, предполагая для определенности $m < n$, имеем

$$H(Z, \bar{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}})} [\det(I - Z\bar{U}')]^{-n}, \tag{4.7.2}$$

где (см. § 5.4)

$$V(\mathfrak{E}_{\mathrm{I}}) = \frac{(2\pi)^{mn - \frac{m(m-1)}{2}}}{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!}.$$

Выражение (4.7.2) проще получить из (4.7.1), чем непосредственно из теоремы 4.6.3. В самом деле, мы имеем

$$f(Z) = \frac{1}{V(\mathfrak{U}_n)} \int\limits_{\mathfrak{U}_n} f(U_n) [\det(I - Z\bar{U}'_n)]^{-n} \dot{U}_n, \tag{4.7.3}$$

где интегрирование производится по множеству всех унитарных матриц порядка n. Положим

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } Z_1 \text{ — } m \times n\text{-матрица}, \quad U_n = \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}.$$

Тогда получим

$$f\left[\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{V(\mathfrak{U}_n)} \int\limits_{U_{mn}} \int\limits_{V} f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}\right] [\det(I - Z_1\bar{U}'_{mn})]^{-n} \dot{U}_{mn} \dot{V} =$$

$$= \frac{1}{V(\mathfrak{U}_n)} \int\limits_{U_{mn}} [\det(I - Z_1\bar{U}'_{mn})]^{-n} \dot{U}_{mn} \int\limits_{V} f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}\right] \dot{V}, \tag{4.7.4}$$

где V пробегает множество всех $(n-m) \times n$-матриц, удовлетворяющих условиям

$$V\bar{V}' = I^{(n-m)}, \quad U_{mn}\bar{V}' = 0. \tag{4.7.5}$$

Для фиксированной матрицы U_{mn} найдутся также две унитарные матрицы: $m \times m$-матрица P и $n \times n$-матрица Q, что

$$PU_{mn}Q = (I^{(m)}, 0).$$

Отсюда следует, что $(I^{(m)}, 0)\overline{Q}'\overline{V}' = 0$, т. е. $VQ = (0, W)$, где W — унитарная матрица порядка $n-m$. Поэтому

$$\int_V f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}\right] \dot{V} = \int_W f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ (0, W) \end{pmatrix}\right] \dot{W}.$$

В силу (4.7.3), где положено $n-m$ вместо n и $Z=0$, имеем

$$\int_V f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ V \end{pmatrix}\right] \dot{V} = V(\mathfrak{U}_{n-m}) f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Из (4.7.4) следует теперь, что

$$f\left[\begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{V(\mathfrak{U}_{n-m})}{V(\mathfrak{U}_n)} \int_{U_{mn}} f\left[\begin{pmatrix} U_{mn} \\ 0 \end{pmatrix}\right] [\det(I - Z\overline{U}'_{mn})]^{-n} \dot{U}_{mn},$$

откуда и получаем формулу (4.7.2) для ядра Коши.

2°. Характеристическое многообразие области $\mathfrak{R}_{II}$ определяется из условия $U\overline{U} = I$, т. е. оно совпадает с множеством симметрических унитарных матриц. Поскольку размерность $\mathfrak{C}_{II}$ равна половине размерности $\mathfrak{R}_{II}$, то теорема 4.6.3 сразу дает нам

$$H(Z, \overline{U}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{II})} \cdot [\det(I - Z\overline{U})]^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{4.7.6}$$

где (см. § 3.5)

$$V(\mathfrak{C}_{II}) = 2^{\frac{n(3n+1)}{4}} \cdot \pi^{\frac{n(n+1)}{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(n-\nu+1)}.$$

3°. Характеристическое многообразие области $\mathfrak{R}_{III}$ совпадает с множеством матриц K, определенных равенством (3.6.16).

Для четного n

$$H(Z, \overline{K}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III})} \cdot [\det(I + Z\overline{K})]^{-\frac{n-1}{2}}, \tag{4.7.7}$$

где (см. § 3.7)

$$V(\mathfrak{C}_{III}) = \frac{1}{2^{\nu-1}} \cdot (8\pi)^{\frac{n(n-1)}{4}} \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s)}, \quad \nu = \frac{n}{2}.$$

Для нечетного n

$$H(Z, \overline{K}) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{III})} \cdot \{\det(I + Z\overline{K})\}^{-\frac{n}{2}}, \tag{4.7.8}$$

где

$$V(\mathfrak{C}_{III}) = 2\pi \frac{1}{2^{\nu-1}} \cdot (8\pi)^{\frac{n(n+1)}{4}} \cdot \prod_{s=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s)}, \quad \nu = \frac{n+1}{2}.$$

Равенство (4.7.7) получается сразу из теоремы 4.6.3, а (4.7.8) мы выведем сейчас из (4.7.7). Взяв $n+1$ вместо n, напишем формулу Коши с ядром (4.7.7)

$$f(Z)=\frac{1}{V}\cdot\int\limits_{K} f(K)\{\det(I+Z\overline{K})\}^{-\frac{n}{2}}\dot{K}, \tag{4.7.9}$$

где Z и K — матрицы порядка $(n+1)$, а $V=V\left(\mathfrak{S}_{\mathrm{III}}^{(n+1)}\right)$. Положим

$$Z=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix},\ \text{где } Z_1 — (n\times n)\text{-матрица}$$

и соответственно

$$K=\begin{pmatrix}0 & k\\ -k' & K_1\end{pmatrix},\ \text{где } K_1 — (n\times n)\text{-матрица},\ k — (1\times n)\text{-матрица}.$$

Тогда

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{V}\int\limits_{K_1}\{\det(I+Z_1\overline{K}_1)\}^{-\frac{n}{2}}\dot{K}_1\int\limits_{k} f\left(\begin{pmatrix}0 & k\\ -k' & K_1\end{pmatrix}\right)\dot{k}. \tag{4.7.10}$$

Так как K унитарна, то

$$k\overline{k}'=1,\ k\overline{K}_1'=0;\ k'\overline{k}+K_1\overline{K}_1'=I^{(n)}.$$

Поскольку матрица $I-K_1\overline{K}_1'=k'\overline{k}$ имеет ранг единица и, кроме того, $\left(I-K_1\overline{K}_1'\right)^2=k'\overline{k}k'\overline{k}=k'\overline{k}=I-K_1\overline{K}_1'$, то найдется унитарная матрица U, такая, что

$$U\left(I-K_1\overline{K}_1'\right)\overline{U}'=[1,\ 0,\ \ldots,\ 0],$$

т. е.

$$UK_1\overline{K}_1'\overline{U}'=[0,\ 1,\ \ldots,\ 1]=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}}',$$

где

$$F=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\dot{+}\ \ldots\ \dot{+}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как элемент в левом верхнем углу матрицы $UK_1\overline{K}_1'\overline{U}'$ равен нулю, то первая строка матрицы UK_1 состоит из одних нулей, т. е.

$$UK_1=\begin{pmatrix}0,\ 0,\ \ldots,\ 0\\ *\end{pmatrix}.$$

Из того, что UK_1U' — кососимметрическая матрица, мы имеем

$$UK_1U'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix},$$

где Q — кососимметрическая матрица порядка $n-1$, причем $Q\overline{Q}'=$ $=I=F\overline{F}'$. Но раз Q — унитарная кососимметрическая матрица, то

найдется такая унитарная матрица V_0, что $V_0QV_0'=F$. Следовательно, найдется и такая унитарная матрица U_0, что

$$\bar{U}_0'K_1\bar{U}_0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}.$$

Положим $h=k\bar{U}_0$, тогда

$$h\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{pmatrix}'=k\bar{U}_0U_0'\bar{K}_1'U_0=0.$$

Это значит, что

$$h=[e^{i\theta},\ 0,\ \ldots,\ 0].$$

Таким образом, внутренний интеграл в формуле (4.7.10) равен

$$\int_0^{2\pi} f\left[\begin{pmatrix}0 & hU_0'\\ -U_0h' & K_1\end{pmatrix}\right]d\theta=2\pi f\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & K_1\end{pmatrix}\right]$$

и мы получаем (4.7.8) из (4.7.10).

[Мы воспользовались формулой

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z_1e^{i\theta},\ \ldots,\ z_ne^{i\theta})\,d\theta=\varphi(0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

справедливой для $\varphi(z)$, аналитической в замкнутой круговой области с центром в начале, и z, лежащих в этой области.]

4°. Характеристическое многообразие области $\mathfrak{R}_{IV}$ состоит из векторов вида $e^{i\theta}x$, где $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, а $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — вещественный вектор, удовлетворяющий условию $xx'=1$.

$$H(z,\ \theta,\ x)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{IV})\,[(x-e^{-i\theta}z)(x-e^{-i\theta}z)']^{n/2}},\qquad(4.7.11)$$

Легко вычислить величину объема $V(\mathfrak{C}_{IV})$:

$$V(\mathfrak{C}_{IV})=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

§ 4.8. Ядро Пуассона для круговых областей

Пусть $\mathfrak{R}$, как и в § 4.5, звездообразная круговая область, а $\mathfrak{C}$ — ее характеристическое многообразие, транзитивное относительно группы Γ_0 движений $\mathfrak{R}$, оставляющих начало неподвижным. Тогда по теореме 4.6.1 существует ядро Коши для области $\mathfrak{R}$, и для любой функции $f(z)$, аналитической в $\mathfrak{R}$ и на ее границе, имеет место формула Коши.

Полагая, в частности,

$$f(z)=H(z,\ \bar{w})\,g(z),$$

где $g(z)$ — произвольная функция, аналитическая в $\mathfrak{R}$ и на ее

границе, имеем

$$H(z, \overline{w})\, g(z) = \int\limits_{\mathfrak{C}} H(z, \overline{\xi})\, H(\xi, \overline{w})\, g(\xi)\, \dot{\xi}.$$

При $w = z$ получаем формулу Пуассона

$$g(z) = \int\limits_{\mathfrak{C}} P(z, \xi)\, g(\xi)\, \dot{\xi}, \tag{4.8.1}$$

где ядро

$$P(z, \xi) = \frac{H(z, \overline{\xi})\, H(\xi, \overline{z})}{H(z, \overline{z})} \tag{4.8.2}$$

уже встречалось нам под названием ядра Пуассона области $\mathfrak{R}$.

Пока мы установили, что формула (4.8.1) справедлива для аналитических $g(z)$, но она переносится и на другие классы функций (см. § 5.8). Для любой непрерывной функции $u(\xi)$ интеграл

$$u(z) = \int\limits_{\mathfrak{C}} P(z, \xi)\, u(\xi)\, \dot{\xi} \tag{4.8.3}$$

определяет некоторую функцию. Можно показать (см. § 5.8), что $u(z) \to u(\xi)$ при $z \to \xi$. Функции вида (4.8.3) мы будем называть гармоническими в $\mathfrak{R}$ функциями. Можно ожидать, что если на $\mathfrak{C}$ имеется полная ортонормальная система $\{\psi_\nu(\xi)\}$, то множество функций, гармонических в $\mathfrak{R}$, является замыканием линейной оболочки системы $\{\psi_\nu(z)\}$ (см. § 5.10).

Если $\mathfrak{R}$ удовлетворяет предположениям теоремы 4.6.3, то ядро Пуассона записывается в следующем простом виде:

$$P(z, \xi) = \frac{1}{V(\mathfrak{C})} \cdot |B(\xi, z, U)|. \tag{4.8.4}$$

В заключение приведем ядра Пуассона для классических областей.

1) Для $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

$$P(Z, U) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \cdot \frac{[\det(I - Z\overline{Z}')]^n}{|\det(I - Z\overline{U}')|^{2n}}, \tag{4.8.5}$$

где $U \in \mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$. В частности, при $m = n$ можно также написать

$$P(Z, U) = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \cdot \frac{[\det(I - Z\overline{Z}')]^n}{|\det(Z - U)|^{2n}}.$$

2) Для $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$

$$P(Z, U)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}})}\cdot\frac{[\det(I-Z\bar{Z})]^{\frac{n+1}{2}}}{|\det(I-Z\bar{U})|^{n+1}}, \tag{4.8.6}$$

где $U\in\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$.

3) Для $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ при четном n

$$P(Z, K)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})}\cdot\frac{[\det(I+Z\bar{Z})]^{\frac{n-1}{2}}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{n-1}}, \tag{4.8.7}$$

а при нечетном n

$$P(Z, K)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{III}})}\cdot\frac{[\det(I+Z\bar{Z})]^{\frac{n}{2}}}{|\det(I+Z\bar{K})|^{n}}. \tag{4.8.8}$$

В обоих случаях $K\in\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$.

4) Для $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$

$$P(z, \xi)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}})}\cdot\frac{(1+|zz'|^2-2\bar{z}z')^{\frac{n}{2}}}{|(z-\xi)(z-\xi)'|^{n}}, \tag{4.8.9}$$

где $\xi\in\mathfrak{C}_{\mathrm{IV}}$.

Глава V

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

§ 5.1. Ортогональные системы в пространстве прямоугольных матриц

Обозначим через $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ вектор в m-мерном комплексном пространстве. Через $x^{[f]}$ мы будем обозначать вектор с компонентами

$$\sqrt{\frac{f!}{s_1! \ldots s_m!}}\, x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_m^{s_m} \qquad (s_1+\ldots+s_m=f), \tag{5.1.1}$$

размерность которого

$$\frac{1}{f!}\, m(m+1)\ldots(m+f-1). \tag{5.1.2}$$

Когда вектор x преобразовывается в вектор y линейным преобразованием с матрицей P, то вектор $x^{[f]}$ преобразовывается в вектор $y^{[f]}$ линейным преобразованием с матрицей $P^{[f]}$. Вектор $x^{[f]}$ мы назовем f-й симметризованной кронекеровской степенью вектора x, а матрицу $P^{[f]}$ — f-й симметризованной кронекеровской степенью матрицы P.

Очевидно, что выражение (5.1.1) содержит все одночлены степени f, т. е. любая однородная форма от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ степени f является линейной комбинацией выражений вида (5.1.1). Любой многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_m$ является линейной комбинацией выражений вида (5.1.1), если f придавать значения 0, 1, 2, ...

Соотношение

$$\operatorname{Sp}\left((P\times Q)^{[f]}\right)= \\ = \sum_{\substack{f_1+\ldots+f_m=f \\ f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_m\geqslant 0}} \chi_{f_1,\ldots,f_m}(P)\cdot\chi_{f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0}(Q), \quad \begin{matrix} P\in GL(m), \\ Q\in GL(n), \end{matrix} \tag{5.1.3}$$

составляющее утверждение теоремы 1.4.1, в терминах теории представлений может быть сформулировано следующим образом: f-я симметризованная кронекеровская степень кронекеровского произведения $GL(m)$ на $GL(n)$ может быть разложена в прямую сумму неприводимых компонент, причем каждая из компонент встречается ровно один раз. Эти неприводимые компоненты являются кронекеровским

произведением представления $GL(m)$ с сигнатурой $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ и представления $GL(n)$ с сигнатурой $(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)$. (Мы предполагаем всюду, что $n \geqslant m$.)

Для пояснения рассмотрим преобразование

$$W = P'ZQ, \tag{5.1.4}$$

где преобразуемыми переменными являются $m \times n$-матрицы Z и W, а $m \times m$-матрица P и $n \times n$-матрица Q определяют преобразование. Расположим элементы матриц Z и W в виде векторов

$$\left.\begin{aligned} z &= (z_{11}, \ldots, z_{1n}, z_{21}, \ldots, z_{2n}, \ldots, z_{m1}, \ldots, z_{mn}), \\ w &= (w_{11}, \ldots, w_{1n}, w_{21}, \ldots, w_{2n}, \ldots, w_{m1}, \ldots, w_{mn}). \end{aligned}\right\} \tag{5.1.5}$$

Преобразование (5.1.4) матрицы Z в матрицу W индуцирует некоторое преобразование вектора z в вектор w. Матрица этого преобразования равна кронекеровскому произведению матриц P и Q, т. е. $P \times Q$, а матрицей соответствующего преобразования $z^{[f]}$ в $w^{[f]}$ служит $(P \times Q)^{[f]}$. Изложенная выше теорема утверждает, что инвариантное при этом преобразовании подпространство $z^{[f]}$ разбивается в прямую сумму подпространств с размерностями

$$q(f_1, \ldots, f_m) = N(f_1, \ldots, f_m) \cdot N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0). \tag{5.1.6}$$

Обозначим через

$$\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(z), \quad i = 1, 2, \ldots, q(f_1, \ldots, f_m), \tag{5.1.7}$$

компоненты $z^{[f]}$. Когда Z преобразуется в W преобразованием (5.1.4), то $\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(z)$ преобразуются в линейные комбинации от $\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(w)$ посредством матрицы

$$A_{f_1, \ldots, f_m}(P) \times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(Q). \tag{5.1.8}$$

Группа движений $\mathfrak{R}_1$, оставляющих начало неподвижным, состоит из преобразований вида

$$W = U'ZV,$$

где U и V — унитарные матрицы порядков m и n соответственно. Для различных $(f_1, \ldots, f_m)$ представления

$$A_{f_1, \ldots, f_m}(U) \times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(V)$$

не эквивалентны. Следовательно, по лемме Шура

$$\int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \psi^{(i)}_f(z)\, \overline{\psi^{(j)}_g(Z)} \cdot \dot{Z} = \delta_{fg} \cdot \delta_{ij} \cdot \rho_f \tag{5.1.9}$$

[f обозначает сокращенно $(f_1\, f_2, \ldots, f_m)$], где ρ_f не зависит от i. Таким образом, множество функций

$$\left\{ \psi^{(i)}_f(Z) \right\}_{i, f}$$

образует ортогональную систему. Из результатов гл. IV следует, что эта система полна. Нам остается вычислить интегралы

$$\rho_f = \int\limits_{I-Z\bar{Z}'>0} |\psi_f^{(i)}(Z)|^2 \dot{Z}. \tag{5.1.10}$$

Для этой цели мы прежде всего уточним процесс получения функций $\psi_f^{(i)}(Z)$. Вектор, полученный из матрицы Z, преобразуется посредством матрицы (5.1.8), когда матрица Z подвергается преобразованию (5.1.4). Для диагональной матрицы $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ матрица $A_{f_1, \ldots, f_n}(\Lambda)$ также диагональна. Располагая в подходящем порядке строки и столбцы, мы можем считать, что

$$\lim_{\substack{\lambda_{m+1} \to 0 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_n \to 0}} A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(\Lambda) = \begin{pmatrix} A_{f_1, \ldots, f_m}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что и для

$$X = \begin{pmatrix} X_1^{(m)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(X) = \begin{pmatrix} A_{f_1, \ldots, f_m}(X_1^{(m)}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1.11}$$

Дополним теперь, $m \times n$-матрицу Z, $n \geqslant m$, до квадратной матрицы порядка n

$$\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\left[\begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\left[\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}\right] \times$$
$$\times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(Q) = A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\left[\begin{pmatrix} P'ZQ \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Отсюда следует, что

$$A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\left[\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} L(Z) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.12}$$

и

$$A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(P') \cdot L(Z) \cdot A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(Q) = L(P'ZQ). \tag{5.1.13}$$

Матрица $L(Z)$ имеет $N(f_1, \ldots, f_m)$ строк и $N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)$ столбцов, ее элементы являются формами степени f от элементов Z.

Если элементы матрицы $L(Z)$ расположить в виде вектора $l(Z)$, то при соответствующем преобразовании Z в W вектор $l(Z)$ преобразуется в вектор $l(W)$ матрицей

$$A_{f_1, \ldots, f_m}(P) \times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(Q).$$

Значит, мы можем считать, что $\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(Z)$ совпадают с элементами матрицы $L(Z)$, расположенными в некотором порядке. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{q(f_1, \ldots, f_m)} \left|\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(Z)\right|^2 = \operatorname{Sp}\{L(Z)\,\overline{L(Z)'}\},$$

и мы имеем

$$q(f_1, \ldots, f_m)\,\rho_{f_1, \ldots, f_m} = \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \operatorname{Sp}\{L(Z)\,\overline{L(Z)'}\}\,\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \operatorname{Sp}\left[A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} \overline{A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}'}\right]\dot{Z} =$$

$$= \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \operatorname{Sp}[A_{f_1, \ldots, f_m}(Z\bar{Z}')]\,\dot{Z} = \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \chi_{f_1, \ldots, f_m}(Z\bar{Z}')\,\dot{Z}. \quad (5.1.14)$$

§ 5.2. Интегралы от функций, инвариантных при преобразованиях $Z \to \Gamma Z \Gamma^{-1}$

Рассмотрим интеграл вида

$$\Omega = \int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \chi(Z\bar{Z}')\,\dot{Z}, \quad (5.2.1)$$

где $\chi(W)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\chi(\Gamma W \Gamma^{-1}) = \chi(W) \quad (5.2.2)$$

для любой невырожденной квадратной матрицы Γ.

Пусть сначала $m = n$. Тогда по теореме 3.4.4. имеем

$$\Omega = \frac{2^{-n^2}}{n}\,\omega_n \omega'_n \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \chi([\lambda_1, \ldots, \lambda_n])\,D^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,d\lambda_1 \ldots d\lambda_n, \quad (5.2.3)$$

где

$$\omega_n = V(\mathfrak{U}_n), \quad \omega'_n = V([\mathfrak{U}_n]).$$

Для случая, когда $\chi = \chi_f$, интеграл (5.2.3) может быть вычислен с помощью следующей теоремы.

Теорема 5.2.1.

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \det\left|\lambda_j^{l_i}\right|_{i,j=1}^n \cdot \det\left|\lambda_j^{m_i}\right|_{i,j=1}^n (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{a-1}\, d\lambda_1 \dots d\lambda_n =$$

$$= n!\,\frac{D(l_1, \dots, l_n)\, D(m_1, \dots, m_n)}{\prod\limits_{j=1}^n \prod\limits_{i=1}^n (a + l_j + m_i)}. \qquad (5.2.4)$$

Доказательство. Поскольку подинтегральная функция равна

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{a-1} \sum_j \delta_{j_1 \dots j_n}^{1 \dots n} \lambda_{j_1}^{l_1} \dots \lambda_{j_n}^{l_n} \cdot \sum_s \delta_{s_1 \dots s_n}^{1 \dots n} \lambda_{s_1}^{m_1} \dots \lambda_{s_n}^{m_n} =$$

$$= (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{a-1} \sum_j \lambda_{j_1}^{l_1} \dots \lambda_{j_n}^{l_n} \cdot \sum_k \delta_{k_1 \dots k_n}^{1 \dots n} \lambda_{j_1}^{m_{k_1}} \dots \lambda_{j_n}^{m_{k_n}},$$

то, интегрируя по λ_j от нуля до единицы, мы найдем, что интеграл, стоящий в левой части (5.2.4), равен

$$\sum_j \sum_s \delta_{s_1 \dots s_n}^{1 \dots n} \int_0^1 \dots \int_0^1 \lambda_{j_1}^{l_1 + m_{s_1} + a - 1} \dots \lambda_{j_n}^{l_n + m_{s_n} + a - 1}\, d\lambda_1 \dots \delta\lambda_n =$$

$$= \sum_j \sum_s \delta_{s_1 \dots s_n}^{1 \dots n} \frac{1}{l_1 + m_{s_1} + a} \dots \frac{1}{l_n + m_{s_n} + a} =$$

$$= \sum_j \det\left(\frac{1}{l_i + m_k + a}\right)_1^n = n! \det\left(\frac{1}{l_i + m_k + a}\right)_1^n;$$

для завершения доказательства используется теорема 1.1.3.

В частности, полагая

$$m_1 = n - 1,\ m_2 = n - 2,\ \dots,\ m_n = 0,\ a = 1,$$

мы получаем

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \chi_f([\lambda_1, \dots, \lambda_n])\, D^2(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_n =$$

$$= n!\,((n-1)! \dots 2!\,1!)^2 \prod_{j=1}^n \frac{l_j!}{(l_j + n)!} N(f_1, \dots, f_n), \qquad (5.2.5)$$

где $l_j = f_j + n - j$.

Таким образом, при $m = n$ мы имеем

$$\Omega = \frac{1}{n!}\, 2^{-n^2} \omega_n \omega_n' n!\,((n-1)! \dots 2!\,1!)^2 \prod_{j=1}^n \frac{l_j!}{(l_j + n)!} N(f_1, \dots, f_n) =$$

$$= \pi^{n^2} \prod_{j=1}^n \frac{l_j!}{(l_j + n)!} N(f_1, \dots, f_n). \qquad (5.2.6)$$

Теперь рассмотрим случай $m \leqslant n$. Пусть

$$X = X^{(n)} = \begin{pmatrix} Z \\ * \end{pmatrix};$$

согласно теореме 2.2.2 мы имеем

$$\int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \chi(Z\bar{Z}')\,[\det(I - Z\bar{Z}')]^{\lambda}\,\dot{Z} =$$

$$= c_1 \int\limits_{I - X\bar{X}' > 0} \chi(Z\bar{Z}')\,[\det(I - Z\bar{Z}')]^{\lambda - (n-m)}\,\dot{X}, \qquad (5.2.7)$$

где

$$c_1 = \frac{n!\,(n+1)!\,\ldots\,(2n-m-1)!}{1!\,2!\,\ldots\,(n-m-1)!}\,\pi^{-n(n-m)},$$

а λ — комплексный параметр, от которого требуется только, чтобы интеграл в правой части (5.2.7) сходился. Представим X в виде TU, где U — унитарная, а T — треугольная (с нулями выше диагонали) матрица с вещественными диагональными элементами. Записывая T в виде

$$T = \begin{pmatrix} T_1^{(m)} & 0 \\ T_2 & T_3 \end{pmatrix},$$

сразу получаем $Z = (T_1, 0)\,U$, $Z\bar{Z}' = T_1\bar{T}_1'$, откуда (по теореме 3.4.3)

$$\int\limits_{I - Z\bar{Z}' > 0} \chi(Z\bar{Z}')\,[\det(I - Z\bar{Z}')]^{\lambda} \cdot \dot{Z} =$$

$$= \frac{c_1\omega_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int\limits_{I - T\bar{T}' > 0} \chi(T_1\bar{T}_1')\,[\det(I - T_1\bar{T}_1')]^{\lambda - (n-m)}\, t_1^{2(n-1)+1} \ldots t_{n-1}^{3} t_n \cdot \dot{T}. \qquad (5.2.8)$$

Заметим, что

$$I - T\bar{T}' = \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1' & -T_1\bar{T}_2' \\ -T_2\bar{T}_1' & I - T_2\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1' & -T_1\bar{T}_2' \\ -T_2\bar{T}_1' & I - T_2\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \bar{P}' \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I - T_1\bar{T}_1' & 0 \\ 0 & I - T_2(I - \bar{T}_1'T_1)^{-1}\bar{T}_2' - T_3\bar{T}_3' \end{pmatrix},$$

где $P = T_2\bar{T}_1'(I - T_1\bar{T}_1')^{-1}$. Так как $I - \bar{T}_1'T_1$ — положительно определенная матрица, то найдется такая матрица Γ, что $(I - \bar{T}_1'T_1)^{-1} = \Gamma\bar{\Gamma}'$.

Положив $Q = T_2\Gamma$, получим

$$\dot{Q} = (\det \Gamma\overline{\Gamma}')^{n-m}\,\dot{T}_2 = \{\det(I - T_1\overline{T}_1')\}^{-n+m}\cdot\dot{T}_2.$$

Поэтому

$$\int\limits_{I-Z\overline{Z}'>0} \chi(Z\overline{Z}')\,[\det(I - Z\overline{Z}')]^{\lambda}\,\dot{Z} =$$

$$= \frac{c_1\omega_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int\limits_{1-T_1\overline{T}_1'>0} \chi(T_1\overline{T}_1')\,[\det(I - T_1\overline{T}_1')]^{\lambda}\, t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_m^{2(n-m)+1}\,\dot{T}_1 \times$$

$$\times \int\limits_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\ldots t_n\cdot\dot{Q}\cdot\dot{T}_3. \qquad (5.2.9)$$

Это верно для любого λ. Полагая, в частности, $\lambda = 0$, имеем

$$\Omega = \frac{c_1\omega_n}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int\limits_{I-T_1\overline{T}_1'>0} \chi(T_1\overline{T}_1')\cdot t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_m^{2(n-m)+1}\,\dot{T} \times$$

$$\times \int\limits_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\ldots t_n\cdot Q\dot{T}_3. \qquad (5.2.10)$$

Вычислим сначала последний интеграл. Так как $I - T_3\overline{T}_3'$ — положительно определенная эрмитова матрица, то найдется такая матрица Γ, что $I - T_3\overline{T}_3' = \Gamma\overline{\Gamma}'$. Положим $Q = \Gamma R$. Тогда

$$\dot{Q} = (\det \Gamma\overline{\Gamma}')^{n-m}\cdot\dot{R} = \{\det(I - T_3\overline{T}_3')\}^{n-m}\cdot\dot{R}.$$

Значит,

$$\int\limits_{I-Q\overline{Q}'-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m+1)-1}\ldots t_n\cdot\dot{Q}\dot{T}_3 =$$

$$= \int\limits_{I-R\overline{R}'>0} \dot{R}\cdot \int\limits_{I-T_3\overline{T}_3'>0} t_{m+1}^{2(n-m-1)+1}\ldots t_n\,[\det(I - T_3\overline{T}_3')]^{n-m}\cdot\dot{T}_3 =$$

$$= \frac{V_{m,\,n-m}}{\omega_{n-m}\cdot 2^{-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}}} \int\limits_{I-Z_3\overline{Z}_3'>0} [\det(I - Z_3\overline{Z}_3')]^{n-m}\cdot\dot{Z}_3 \qquad (5.2.11)$$

(по теореме 3.4.3).

Далее,

$$\int\limits_{I-T_1\overline{T}_1'>0} \chi\left(T_1\overline{T}_1'\right)\cdot t_1^{2(n-1)+1}\ldots t_m^{2(n-m)+1}\cdot \dot{T}_1 =$$

$$= \frac{2^{\frac{m(m-1)}{2}}}{\omega_m} \int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \chi\left(Z_1\overline{Z}_1'\right)\left\{\det Z_1\overline{Z}_1'\right\}^{n-m}\cdot \dot{Z}_1. \quad (5.2.12)$$

Согласно (5.2.10) имеем

$$\Omega = C \int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \chi\left(Z_1\overline{Z}_1'\right)\left(\det Z_1\overline{Z}_1'\right)^{n-m}\cdot \dot{Z}_1, \quad (5.2.13)$$

где C — постоянная, зависящая только от m и n, значение которой мы вычислим следующим образом.

Взяв $\chi\left(Z_1\overline{Z}_1'\right)=1$, получим [ср. (5.2.1)]

$$V_{m,n} = C \int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \left(\det Z_1\overline{Z}_1'\right)^{n-m}\cdot \dot{Z}_1 =$$

$$= C\cdot \pi^{m^2}\frac{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!}{n!\,(n+1)!\ldots(n+m-1)!}.$$

Но $V_{m,n} = V(\mathfrak{R}_1)$, так что (теорема 2.2.1)

$$C = V_{m,n}\cdot \pi^{-m^2}\frac{n!\,(n+1)!\ldots(n+m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!} =$$

$$= \pi^{m(n-m)}\frac{1!\,2!\ldots(m-1)!\;1!\,2!\ldots(n-1)!}{1!\,2!\ldots(n+m-1)!}\times$$

$$\times\frac{n!\,(n+1)!\ldots(n+m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!} =$$

$$= \pi^{m(n-m)}\frac{1!\,2!\ldots(m-1)!}{(n-m)!\,(n-m+1)!\ldots(n-1)!} = V_{m,n-m}.$$

Следовательно,

$$\Omega = V_{m,n-m}\int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \chi\left(Z_1\overline{Z}_1'\right)\left(\det Z_1\overline{Z}_1'\right)^{n-m}\dot{Z}_1. \quad (5.2.14)$$

При $\chi(X) = \chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)$, поскольку

$$\chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)\,(\det X)^{n-m} = \chi_{f_1+n-m,\ldots,f_m+n-m}(X),$$

мы получаем в силу (5.2.6)

$$\int\limits_{I-Z_1\overline{Z}_1'>0} \chi_f(Z_1\overline{Z}_1')(\det Z_1\overline{Z}_1')^{n-m}\cdot \dot{Z}_1 =$$

$$= \frac{\omega_m\omega_m'}{2^{\frac{m(m+1)}{2}}}[1!2!\ldots(m-1)!]^2\cdot\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\ldots,f_m)=$$

$$=\pi^{m^2}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}\cdot N(f_1,\ldots,f_m). \qquad (5.2.15)$$

Отсюда, окончательно,

$$\Omega=\pi^{m^2}V_{m,n-m}\prod_{j=1}^{m}\frac{(l_j+n-m)!}{(l_j+n)!}N(f_1,\ldots,f_m), \qquad (5.2.16)$$

где $l_j=f_j+m-j$.

§ 5.3. Ортогональная система и ядро Бергмана

Теперь мы имеем для $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ ортогональную систему функций

$$(\rho_{f_1,\ldots,f_m})^{-\frac{1}{2}}\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_m}(Z), \qquad i=1,2,\ldots,q(f_1,\ldots,f_m),$$

которые были получены по рецепту § 5.1. Эта система полна. С помощью этой системы мы еще раз найдем ядро Бергмана для $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

Положим в теореме 1.2.5 $\rho=m+1$. Тогда при $|\lambda_i|<1$ имеем

$$\left(\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda_i)\right)^{-n-m}=C_{m+1}\sum_{l_1>\ldots>l_m\geqslant 0}a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0)\cdot\chi_{f_1,\ldots,f_m}([\lambda_1,\ldots,\lambda_m]), \qquad (5.3.1)$$

где

$$l_j=f_j+m-j,\quad a_l=\frac{(m+l)!}{m!\,l!},\quad C_{m+1}=\frac{1}{a_{n-m}\ldots a_{n-1}}.$$

Так как $\chi_{f_1,\ldots,f_m}(X)$ и $\det(I-X)$ инвариантны относительно преобразований $X_1=\Gamma X\Gamma^{-1}$, то отсюда следует равенство

$$[\det(I-W\overline{Z}')]^{-(n+m)}=$$

$$=C_{m+1}\sum_{l_1>\ldots>l_m\geqslant 0}a_{l_1+n-m}\cdots a_{l_m+n-m}\times$$

$$\times N(f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0)\chi_{f_1,\ldots,f_m}(W\overline{Z}') \qquad (5.3.2)$$

при условии, что собственные значения матрицы $W\overline{Z}'$ по модулю не превосходят единицы. Если W и Z принадлежат $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, т. е.

$$I - W\overline{W}' > 0, \quad I - Z\overline{Z}' > 0,$$

то нетрудно убедиться, что это условие всегда выполнено.

Мы знаем, что

$$K(Z, \overline{W}) = \sum_{f, i} \frac{\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(Z)\overline{\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_m}(W)}}{\rho_{f_1, \ldots, f_m}} = \sum_{f} \frac{\chi_{f_1, \ldots, f_m}(Z\overline{W}')}{\rho_{f_1, \ldots, f_m}} \tag{5.3.3}$$

Из (5.1.14) и (5.2.16) следует, что

$$q(f_1, \ldots, f_m) \cdot \rho_{f_1, \ldots, f_m} = \pi^{m^2} V_{m, n-m} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{(l_j + n - m)!}{(l_j + n)!} N(f_1, \ldots, f_m). \tag{5.3.4}$$

Подставляя в (5.3.3), получаем

$$K(Z, \overline{W}) = \frac{\pi^{-m^2}}{V_{m, n-m}} \sum_{f} \prod_{j=1}^{m} \frac{(l_j + n)!}{(l_j + n - m)!} \times$$

$$\times N(f_1 \ldots, f_m, 0, \ldots, 0) \chi_{f_1, \ldots, f_m}(Z\overline{W}'),$$

откуда с помощью (5.3.2) находим

$$K(Z, \overline{W}) = \frac{\pi^{-m^2}}{V_{m, n-m}} \cdot a_{n-m} \ldots a_{n-1} \cdot (m!)^m \{\det(I - Z\overline{W}')\}^{-m-n} =$$

$$= c\{\det(I - Z\overline{W}')\}^{-m-n},$$

где

$$c^{-1} = \pi^{m^2} V_{m, n-m} \prod_{i=1}^{m} \frac{(n-i)!}{(m+n-i)!} =$$

$$= \pi^{mn} \cdot \frac{1!\,2! \ldots (m-1)!}{n!\,(n+1)! \ldots (n+m-1)!} = V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}).$$

Таким образом, мы еще раз получили формулу

$$K(Z, \overline{W}) = \frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{I}})} \{\det(I - Z\overline{W}')\}^{-m-n}.$$

§ 5.4. Гармонический анализ на характеристическом многообразии

Пусть для определенности $n \geqslant m$, и пусть U — $m \times n$-матрица, удовлетворяющая условию

$$U\overline{U}' = I^{(m)}. \tag{5.4.1}$$

Совокупность всех таких матриц образует многообразие $\mathfrak{U}_{m,n}$, совпадающее с множеством классов смежности унитарной группы $\mathfrak{U}_n$ относительно ее подгруппы $\mathfrak{U}_{n-m}$, состоящей из матриц вида

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 \\ 0 & U^{(n-m)} \end{pmatrix}.$$

Более подробно, положим

$$U_n = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ P \end{pmatrix}, \quad V_n = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ Q \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$U_n V_n^{-1} = \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{m,n} \\ Q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что если $f(U)$ определена на $\mathfrak{U}_{m,n}$, т. е. постоянна на классах смежности группы $\mathfrak{U}_n$ по указанной подгруппе, то

$$\int\limits_{\mathfrak{U}_n} f(U)\dot{U}_n = \int\limits_{\mathfrak{U}_{m,n}} f(U)\dot{U} \cdot \int\limits_{\mathfrak{U}_{n-m}} \dot{U}_{n-m}.$$

В этом случае определим интеграл по $\mathfrak{U}_{m,n}$ равенством

$$\int\limits_{\mathfrak{U}_{m,n}} f(U)\dot{U} = \frac{1}{\omega_{n-m}} \int\limits_{\mathfrak{U}_n} f(U)\dot{U}_n. \tag{5.4.2}$$

Объем $\mathfrak{U}_{m,n}$, как нетрудно видеть, равен

$$\frac{\omega_n}{\omega_{n-m}} = \frac{(2\pi)^{mn-\frac{m(m-1)}{2}}}{(n-m)!\ldots(n-1)!}.$$

Обозначим (мы опять пишем f вместо $f_1, f_2, \ldots, f_m$)

$$P_f(U) = \left(\psi_f^{(1)}(U), \ldots, \psi_f^{(q(f))}(U)\right),$$

$$q(f) = N(f_1, \ldots, f_m)\, N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0),$$

где $\psi_f^{(i)}(Z)$ — построенные выше функции ортогональной системы в $\mathfrak{R}_1$. При преобразовании $U \to V'^{(m)}UW^{(n)}$ имеем

$$P_f\left(V'^{(m)}UW^{(n)}\right) = P_f(U) \cdot \left(A_{f_1, \ldots, f_m}(V) \times A_{f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0}(W)\right). \tag{5.4.3}$$

Полагая

$$\int\limits_{U\overline{U}'=I} P'_f(U)\,\overline{P_g(U)}\,\dot{U} = R = R^{(q(f),\,q(g))}$$

и замечая, что при преобразованиях $V'UW$, где V и W — унитарные матрицы порядков m и n, интеграл не меняется, мы получаем для матрицы R соотношение

$$R = A_1' R \overline{A_2},$$

$$A_1 = A_{f_1,\ldots,f_m}(V) \times A_{f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0}(W),$$

$$A_2 = A_{g_1,\ldots,g_m}(V) \times A_{g_1,\ldots,g_m,0,\ldots,0}(W).$$

Из этого соотношения следует, что при $f \neq g$ матрица $R = 0$, а при $f = g$ имеем $R = \beta_f \cdot I$. Иными словами, функции $\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_m}(U)$ образуют на $\mathfrak{S}_1$ ортогональную систему. Нам остается вычислить нормирующие множители β_f,

$$\beta_f = \int\limits_{U\overline{U}'=I} |\psi^{(i)}_f(U)|^2\,\dot{U},$$

которые, как это видно из условия $R = \beta_f \cdot I$, не зависят от f.

Поскольку

$$q(f)\,\beta_f = \int\limits_{U\overline{U}'=I} \sum_i |\psi^{(i)}_f(U)|^2\,\dot{U} =$$

$$= \int\limits_{U\overline{U}'=I} \chi_f(U\overline{U}')\,\dot{U} = N(f_1,\ldots,f_m) \int\limits_{U\overline{U}'=I} \dot{U},$$

мы имеем

$$\beta_f = \frac{c}{N(f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0)},$$

где

$$c = \frac{\omega_n}{\omega_{n-m}} = \frac{(2\pi)^{mn-\frac{m(m-1)}{2}}}{(n-m)!\ldots(n-1)!}.$$

Полагая в теореме 1.2.5 $\rho = 1$, получаем равенство

$$\prod_{i=1}^{m}(1-x_i)^{-n} = \sum_{l_1>\ldots>l_m\geqslant 0} N(f_1,\ldots,f_m,0,\ldots,0) \times$$

$$\times \chi_{f_1,\ldots,f_m}([x_1,\ldots,x_m]) \quad (l_j = f_j + m - j).$$

Для $Z \in \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, $U \in \mathfrak{U}_{m,n}$ собственные значения матрицы $Z\overline{U}'$ меньше единицы по модулю, так что

$$[\det(I - Z\overline{U}')]^{-n} =$$

$$= \sum_{l_1 > \ldots > l_m \geqslant 0} N(f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)\chi_{f_1, \ldots, f_m}(Z\overline{U}') =$$

$$= c \sum_f \frac{1}{\beta_f} \sum_i \psi_f^{(i)}(Z)\overline{\psi_f^{(i)}(U)}. \quad (5.4.4)$$

Отсюда легко заключить, что для $0 < r < 1$ ряд (5.4.4) равномерно сходится при Z, лежащих в области $rI - Z\overline{Z}' > 0$.

Если $f(U)$ — интегрируемая на $\mathfrak{U}_{m,n}$ функция, то, умножая (5.4.4) на $f(U)$ и интегрируя почленно, получаем

$$\int_{U\overline{U}'=I} [\det(I - Z\overline{U}')]^{-n} f(U)\,\dot{U} = \sum_{f,i} a_f^{(i)} \frac{\psi_f^{(i)}(Z)}{\sqrt{\beta_f}},$$

где

$$a_f^{(i)} = \frac{c}{\sqrt{\beta_f}} \cdot \int_{U\overline{U}'=I} f(U)\overline{\psi_f^{(i)}(U)} \cdot \dot{U}.$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 5.4.1. *Пусть $f(U)$ — интегрируемая функция, и пусть*

$$a_f^{(i)} = \frac{(2\pi)^{mn - \frac{m(m-1)}{2}}}{(n-m)! \ldots (n-1)!} \int_{U\overline{U}'=I} f(U) \frac{\overline{\psi_f^{(i)}(U)}}{\sqrt{\beta_f}} \dot{U}$$

— коэффициенты Фурье этой функции относительно ортонормальной системы

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta_f}} \psi_f^{(i)}(U) \right\}.$$

Тогда интеграл

$$\int_{U\overline{U}'=I} [\det(I - Z\overline{U}')]^{-n} f(U)\,\dot{U}$$

представляет в области $I - Z\overline{Z}' > 0$ аналитическую функцию, разлагающуюся в этой области в ряд

$$\sum_{f,i} a_f^{(i)} \frac{\psi_f^{(i)}(Z)}{\sqrt{\beta_f}}.$$

§ 5.5. Интегралы типа Коши

Мы ограничимся лишь случаем $m=n$, так как другие получаются совершенно аналогично. Мы попытаемся выяснить при каких Z существует интеграл

$$F(Z)=\int\limits_U f(U)\{\det(I-Z\overline{U}')\}^{-n}\cdot \dot{U} \tag{5.5.1}$$

при заданной интегрируемой функции $f(U)$.

Теорема 5.5.1. *Если все собственные значения матрицы $Z\overline{Z}'$ больше единицы или все меньше единицы, то для любой унитарной матрицы U*

$$\det(I-Z\overline{U}')\neq 0.$$

В противном случае всегда найдется такая унитарная матрица U, что

$$\det(I-Z\overline{U}')=0.$$

Доказательство. Предположим, что $\det(I-Z\overline{U}')=0$. Тогда найдется такой вектор z, что

$$z(I-Z\overline{U}')=0,$$

т. е.

$$z=zZ\overline{U}',\quad \overline{z}'=U\overline{Z}'\overline{z}',$$

значит,

$$z\overline{z}'=zZ\overline{Z}'\overline{z}',$$

откуда непосредственно следует первая половина утверждения.

Чтобы доказать вторую половину утверждения теоремы, заметим, прежде всего, что без ограничения общности мы можем считать, что

$$Z=[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n],\quad \lambda_\nu\geqslant 0.$$

Из равенства

$$\det\left[I-\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right]=\begin{vmatrix}1-\lambda_1\cos\theta & -\lambda_1\sin\theta\\ \lambda_2\sin\theta & 1-\lambda_2\cos\theta\end{vmatrix}=$$
$$=1-(\lambda_1+\lambda_2)\cos\theta+\lambda_1\lambda_2=0$$

находим

$$\cos\theta=\frac{1+\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{5.5.2}$$

Если $\lambda_1\geqslant 1\geqslant\lambda_2$, то $1+\lambda_1\lambda_2\leqslant\lambda_1+\lambda_2$, так что θ, удовлетворяющее условию (5.5.2), существует, и вторая половина теоремы также доказана.

Теорема 5.5.2. *Интеграл* (5.5.1) *имеет смысл в каждой из двух областей $I-Z\overline{Z}'>0$ и $I-Z\overline{Z}'<0$.*

Перейдем теперь к более подробному изучению интегралов типа Коши. В первую очередь мы расширим определение функций $\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ на случай, f_i любых знаков. Мы сделаем это при помощи равенства

$$\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U)=\psi^{(i)}_{f_1-f_n,f_2-f_n,\ldots,f_{n-1}-f_n,0}(U)\cdot(\det U)^{f_n},$$

для любых $f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_n$. Пусть теперь ряд Фурье для $f(U)$ имеет вид

$$\sum_{f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_n}\sum_i a^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\cdot\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U).$$

Тогда для Z, принадлежащих области $I-Z\overline{Z}'>0$, имеем

$$F(Z)=\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i a^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(Z). \quad (5.5.3)$$

Для Z, принадлежащих области $I-Z\overline{Z}'<0$, имеем

$$F(Z)=\int\limits_{U\overline{U}'\leqslant 1} f(U)\left[\det(I-Z\overline{U}')\right]^{-n}\cdot\dot{U}=$$

$$=[-\det Z]^{-n}\int\limits_U f(U)(\det U)^n\cdot\left[\det\left(I-UZ^{-1}\right)\right]^{-n}\cdot\dot{U}.$$

Так как

$$(\det U)^n\left[\det\left(I-UZ^{-1}\right)\right]^{-n}=$$

$$=c(\det U)^n\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-1}\sum_i\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U)\cdot\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(Z^{-1}\right)$$

$$=c\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-1}\sum_i\psi^{(i)}_{f_1+n,\ldots,f_n+n}(U)\,\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(Z^{-1}\right),$$

то умножая на $f(U)$ и интегрируя почленно, получаем

$$F(Z)=\int\limits_{U\overline{U}'=1} f(U)\left[\det(I-Z\overline{U}')\right]^{-n}\cdot\dot{U}=$$

$$=(-\det Z)^{-n}\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\sum_i b^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}\left(Z^{-1}\right),$$

где

$$b^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n} = c\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{U\overline{U}'=1} f(U)\,\psi^{(i)}_{f_1+n,\ldots,f_n+n}(U)\,\dot{U} =$$

$$= c\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{U\overline{U}'=1} f(U)\,\overline{\psi^{(i)}_{-f_n-n,\,-f_{n-1}-n,\ldots,-f_1-n}(U)}\cdot\dot{U} =$$

$$= a^{(i)}_{-f_n-n,\ldots,-f_1-n}\ ^{1)}.$$

Следовательно, в области $I - Z\overline{Z}' < 0$ интеграл (5.5.1) представляет аналитическую функцию от Z^{-1}, имеющую разложение

$$F(Z) = \sum_{f_1 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0} \sum_i a^{(i)}_{-f_n-n,\ldots,-f_1-n}\left(\beta_{f_1,\ldots,f_n}\right)^{-\frac{1}{2}} \psi^{(i)}_{-f_n-n,\ldots,-f_1-n}(Z^{-} \qquad (5.5$$

---

1) Автор использует здесь соотношение $\psi^{(i)}_{f_1,\ldots,f_n}(U) = \psi^{(i)}_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)$. Укажем, как это соотношение получается.

Рассмотрим неприводимое представление $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$. Тогда $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)} = A_{-f_n,\ldots,-f_1}(\overline{U})$ также является неприводимым представлением, и нужно показать, что оно эквивалентно исходному. Для этого воспользуемся понятием старшего веса неприводимого представления.

Пусть $U = \left[e^{i\varphi_1},\ldots,e^{i\varphi_n}\right]$ — диагональная матрица. Тогда $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ также является (в подходящем базисе) диагональной матрицей, на диагонали которой стоят числа вида $e^{i(m_1\varphi_1+\cdots+m_n\varphi_n)}$. Системы целых чисел $(m_1,\ldots,m_n)$ называют весами представления $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$. Упорядочим веса лексикографически. Тогда, как нетрудно показать, старшим весом представления $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ является как раз система $(f_1,\ldots,f_n)$, а младшим — система $(f_n,\ldots,f_1)$. Известно, что представлениями $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ исчерпываются с точностью до эквивалентности все неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ унитарных матриц. Следовательно, всякое неприводимое представление группы $\mathfrak{U}$ вполне определяется своим старшим (или младшим) весом.

Рассмотрим теперь представление $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)}$. Очевидно, что веса представлений $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)}$ и $A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)$ различаются лишь знаком. Поскольку младший вес представления $A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)$ есть $(-f_1,\ldots,-f_n)$, то старшим весом представления $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)}$ будет $(f_1,\ldots,f_n)$. Следовательно, представления $\overline{A_{-f_n,\ldots,-f_1}(U)}$ и $A_{f_1,\ldots,f_n}(U)$ эквивалентны, что и требовалось доказать. — *Прим. ред.*

§ 5.6. Дифференциальные операторы [1])

В первую очередь мы введем дифференциальный оператор

$$\partial_Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_{11}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z_{m1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{mn}} \end{pmatrix}. \tag{5.6.1}$$

Пусть Γ_{I} — группа движений области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Известно (см. Хуа Ло-кен [1]), что Γ_{I} состоит из преобразований вида

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} = (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}' + \overline{C}'), \tag{5.6.2}$$

где A — $m \times m$-матрица, B — $m \times n$-матрица, C — $n \times m$-матрица, D — $n \times n$-матрица.

Эти матрицы удовлетворяют условиям

$$A\overline{A}' - B\overline{B}' = I, \quad A\overline{C}' = B\overline{D}', \quad C\overline{C}' - D\overline{D}' = -I, \tag{5.6.3}$$

которые можно также записать и в виде

$$\overline{A}'A - \overline{C}'C = I, \quad \overline{A}'B = \overline{C}'D, \quad \overline{B}'B - \overline{D}'D = -I. \tag{5.6.4}$$

Дифференцируя (5.6.2), имеем в силу (5.6.4)

$$\begin{aligned} dW &= [A - (AZ + B)(CZ + D)^{-1}C]\, dZ \cdot (CZ + D)^{-1} = \\ &= [A - (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1}(Z\overline{D}' + \overline{C}')C]\, dZ \cdot (CZ + D)^{-1} = \\ &= (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1}\, dZ \cdot (CZ + D)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.6.5}$$

В контравариантной записи это дает нам

$$\partial'_W = (CZ + D)\,\partial'_Z\,(Z\overline{B}' + \overline{A}'). \tag{5.6.6}$$

Положив

$$W_1 = (AZ_1 + B)(CZ_1 + D)^{-1}, \tag{5.6.7}$$

имеем

$$\begin{aligned} I - \overline{W}'_1 W &= I - (\overline{Z}'_1\overline{C}' + \overline{D}')^{-1}(\overline{Z}'_1\overline{A}' + \overline{B}')(AZ + B)(CZ + D)^{-1} = \\ &= (\overline{Z}'_1\overline{C}' + \overline{D}')^{-1}(I - \overline{Z}'_1 Z)(CZ + D)^{-1} \end{aligned} \tag{5.6.8}$$

и аналогично

$$I - W\overline{W}'_1 = (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1}(I - Z\overline{Z}'_1)(B\overline{Z}'_1 + A)^{-1}. \tag{5.6.9}$$

Обозначив

$$\Delta_Z = (I - Z\overline{Z}')\,\overline{\partial}_Z \cdot (I - \overline{Z}'Z) \cdot \partial'_Z,$$

[1]) Хуа Ло-кен и К. Лу [3].

мы получим, следовательно,

$$\Delta_W = (Z\overline{B}' + \overline{A}')^{-1} \Delta_Z \cdot (Z\overline{B}' + \overline{A}'). \tag{5.6.10}$$

Оператор

$$\operatorname{Sp} \Delta_Z$$

мы назовем оператором Лапласа области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. [Заметим, что $\overline{\partial}_Z \cdot (I - \overline{Z}'Z)$ означает лишь формальное умножение матриц, т. е. элементы матрицы $I - \overline{Z}'Z$ не дифференцируются.] Более подробная запись оператора $\operatorname{Sp} \Delta_Z$ выглядит следующим образом:

$$\operatorname{Sp} \Delta_Z = \sum_{i,\, j=1}^{m} \sum_{\beta,\, \gamma=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \sum_{\alpha=1}^{n} z_{i\alpha} \bar{z}_{j\alpha} \right) \left(\delta_{\beta\gamma} - \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_{k\beta} z_{k\gamma} \right) \frac{\partial^2}{\partial z_{i\gamma} \partial \bar{z}_{j\beta}}. \tag{5.6.11}$$

Это выражение для оператора Лапласа инвариантно относительно преобразований вида (5.6.2), т. е. относительно группы движений области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

Определение 1. Вещественную функцию $u(Z)$, удовлетворяющую уравнению $\operatorname{Sp} \Delta_Z \cdot u = 0$, мы назовем гармонической в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

§ 5.7. Смысл оператора Лапласа на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

Пусть $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$ означает замыкание $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Множество точек из $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$, таких, что матрица $I - Z\overline{Z}'$ имеет ранг r, обозначим через $\mathfrak{C}^{(r)}$, $r = 0, 1, \ldots, m$. Ясно, что $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$ равно сумме всех $\mathfrak{C}^{(r)}$, $r = 0, 1, \ldots, m$, и что $\mathfrak{C}^{(0)} = \mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{C}^{(m)} = \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

Определение 2. Пусть U и V — две фиксированные унитарные матрицы соответственно порядков m и n. Множество точек:

$$Z = U \begin{pmatrix} I^{(m-r)} & 0 \\ 0 & Z_0^{(r,\, n-m+r)} \end{pmatrix} V, \quad I - Z_0 \overline{Z}_0' > 0, \tag{5.7.1}$$

назовем r-накрывающей.

Очевидно, что каждая точка из $\mathfrak{C}^{(r)}$ содержится в некоторой r-накрывающей, но две различные накрывающие могут иметь общие точки.

Теперь мы перейдем к установлению смысла оператора Лапласа на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Пусть Z — точка на $\mathfrak{C}^{(r)}$, и пусть (5.7.1) — какая-либо из ее r-накрывающих. Поскольку оператор Лапласа инвариантен относительно преобразований $Z_1 = UZV$, то достаточно рассматривать r-накрывающие вида

$$Z = \begin{pmatrix} I^{(m-r)} & 0 \\ 0 & Z_0^{(r,\, n-m+r)} \end{pmatrix}, \quad I - Z_0 \overline{Z}_0' > 0. \tag{5.7.2}$$

Пусть функция $u(Z)$ определена в $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ и имеет непрерывные производные второго порядка по всем элементам Z на любой r-накрывающей, $r > 0$. Для точек r-накрывающей (5.7.2) оператор $\operatorname{Sp} \Delta_Z$ приводится к виду

$$\operatorname{Sp} \Delta_Z = \operatorname{Sp} \left\{ (I - Z_0 \overline{Z}_0') \overline{\partial}_{Z_0} \cdot (I - \overline{Z}_0' Z_0) \cdot \partial_{Z_0}' \right\}.$$

Мы будем считать

$$(\operatorname{Sp} \Delta_Z)\, u(Z) = \operatorname{Sp} \left\{ (I - Z_0 \overline{Z}_0') \overline{\partial}_{Z_0} \cdot (I - \overline{Z}_0' Z_0) \partial_{Z_0}' \right\} u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_0 \end{pmatrix}. \tag{5.7.3}$$

Определение 3. Вещественная функция $u(Z)$ с описанными выше дифференциальными свойствами называется гармонической в $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$, если она удовлетворяет условию

$$(\operatorname{Sp} \Delta_Z)\, u(Z) = 0 \tag{5.7.4}$$

в каждой точке $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$.

Ясно, что свойство гармоничности инвариантно относительно группы Γ_{I}. Множество гармонических функций является линейным.

Определение 4. Совокупность гармонических в $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}$ функций, непрерывных на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$, мы будем называть классом $\mathfrak{H}$.

Теорема 5.7.1. *Для любой непрерывной на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ функции $\varphi(U)$ интеграл Пуассона*

$$u(Z) = \int_{\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}} \varphi(U) P_{\mathrm{I}}(Z, U) \dot{U} \tag{5.7.5}$$

представляет гармоническую функцию класса $\mathfrak{H}$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Теорема 5.7.2. *Если U на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ переводится в V (тоже на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$) преобразованием* (5.6.2), то

$$P_{\mathrm{I}}(W, V) = P_{\mathrm{I}}(Z, U) \left| \det (B\overline{U}' + A) \right|^{2n}. \tag{5.7.6}$$

Доказательство. Из (5.6.8) и (5.6.9) следует, что

$$(I - W\overline{V}')^{-1} (I - W\overline{W}') (I - V\overline{W}')^{-1} =$$
$$= (B\overline{U}' + A)(I - Z\overline{U}')^{-1} (I - Z\overline{Z}') (I - U\overline{Z}')^{-1} (U\overline{B}' + \overline{A}'). \tag{5.7.7}$$

Следовательно,

$$\frac{[\det (I - W\overline{W}')]^n}{|\det (I - W\overline{V}')|^{2n}} = \frac{[\det (I - Z\overline{Z}')]^n}{|\det (I - Z\overline{U}')|^{2n}} \left| \det (B\overline{U}' + A) \right|^{2n},$$

что и доказывает теорему 5.7.2.

Теорема 5.7.3. *Ядро Пуассона $P_{\mathrm{I}}(Z, U)$ (при фиксированном U) является гармонической в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ функцией, но не принадлежит классу $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что

$$(\operatorname{Sp}\Delta_Z)\,P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)=0$$

при $Z=0$. Положим

$$Z=(z_{j\alpha}),\quad U=(u_{j\alpha}),\quad 1\leqslant j\leqslant m,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant n.$$

Тогда имеем

$$(\operatorname{Sp}\Delta_Z)\,P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\big|_{Z=0}=\operatorname{Sp}\left(\bar\partial_Z\cdot\partial'_Z\right)\cdot P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\big|_{Z=0}=$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\bar z_{j\alpha}\,\partial z_{j\alpha}}P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\right]_{Z=0}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\bar z_{j\alpha}\,\partial z_{j\alpha}}\,\frac{[\det(I-Z\bar Z')]^n}{[\det(I-Z\bar U')(I-U\bar Z')]^n}\Bigg|_{Z=0}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\bar z_{j\alpha}\partial z_{j\alpha}}[\det(I-Z\bar Z')]^n+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}}\det(I-Z\bar U')^{-n}\,\frac{\partial}{\partial\bar z_{j\alpha}}[\det(I-\bar Z'U)]^{-n}\right\}\Bigg|_{Z=0}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\bar z_{j\alpha}\partial z_{j\alpha}}\left(1-n\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|z_{k\beta}|^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}}\left(1+n\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}z_{k\beta}\bar u_{k\beta}\right)\frac{\partial}{\partial\bar z_{j\alpha}}\left(1+n\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\bar z_{k\beta}u_{k\beta}\right)\right\}\Bigg|_{Z=0}=0.$$

В силу транзитивности области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ относительно группы Γ_{I} и в силу теоремы 5.7.2 мы получаем утверждение теоремы для любой внутренней точки области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Теорема 5.7.3 доказана.

Дифференцируя под знаком интеграла, мы получаем для любой внутренней точки $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

$$(\operatorname{Sp}\Delta_Z)\,u(Z)=0.$$

Однако доказательство теоремы 5.7.1 еще не закончено. Нам нужно выяснить поведение интеграла (5.7.5) на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$.

§ 5. 8. Поведение интеграла Пуассона на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

Чтобы закончить доказательство теоремы 5.7.1, нам достаточно доказать следующие две теоремы.

Теорема 5.8.1. *Для любой* $V\in\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$

$$\lim_{Z\to V}u(Z)=\varphi(V). \tag{5.8.1}$$

Теорема 5.8.2. *Пусть* $m > 1$, *а*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_0 \end{pmatrix}, \text{ где } Z_0 - (m-1) \times (n-1)\text{-матрица}, \ I^{(m-1)} - Z_0 \bar{Z}_0' > 0. \tag{5.8.2}$$

Тогда

$$\lim_{Z \to Q} \int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}} \varphi(U) P_{\mathrm{I}}(Z, U) \dot{U} = \int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}} \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_0 \end{pmatrix} P_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}(Z_0, U_0) \dot{U}_0, \tag{5.8.3}$$

где через $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}$ *и* $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}$ *обозначены* $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ *и* $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ *для* $(m-1) \times \times (n-1)$-*матриц, а через* $P_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}(Z_0, U_0)$ — *ядро Пуассона для области* $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}^{m-1,\, n-1}$.

Как следствие из теоремы 5.8.2 получаем, что теорему 5.8.1 достаточно доказать для $m = 1$. Теореме 5.8.1 мы придадим для этого случая несколько иную форму, слегка изменив обозначения.

Теорема 5.8.1′. *Положим* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. *Для любого* v, *удовлетворяющего условию* $v\bar{v}' = 1$, *и для любой функции* $\varphi(u)$, *непрерывной на многообразии* $u\bar{u}' = 1$, *имеем*

$$\varphi(v) = \lim_{z \to v} \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \frac{(1 - z\bar{z}')^n}{|1 - z\bar{u}'|^{2n}} \dot{u}. \tag{5.8.4}$$

Доказательство. Так как вектор v унитарным преобразованием может быть переведен в вектор $e = (1, 0, \ldots, 0)$, то мы можем считать, что $v = e$.

Докажем сначала (5.8.4) для $z = \rho e$, $\rho \to 1$, $0 < \rho < 1$, т. е.

$$\varphi(e) = \lim_{\rho \to 1} \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \int_{u\bar{u}'=1} \varphi(u) \frac{(1 - \rho^2)^n}{|1 - \rho\bar{u}_1|^{2n}} \dot{u}. \tag{5.8.5}$$

При $\varphi(u) \equiv 1$ формула (5.8.5) справедлива, так что

$$1 = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})} \int_{u\bar{u}'=1} \frac{(1 - \rho^2)^n}{|1 - \rho\bar{u}_1|^{2n}} \dot{u}. \tag{5.8.6}$$

Следовательно, достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ можно взять ρ_0 настолько близким к единице, чтобы при $\rho_0 \leqslant \rho < 1$

$$\left| \int_{u\bar{u}'=1} (\varphi(u) - \varphi(e)) \frac{(1 - \rho^2)^n}{|1 - \rho\bar{u}_1|^{2n}} \dot{u} \right| < \varepsilon. \tag{5.8.7}$$

Мы воспользуемся параметрическим представлением многообразия $u\bar{u}' = 1$:

$$u_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2$$

$$u_2 = \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3 + i\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\theta_3 \cdot \cos\theta_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{2n-4} \cdot \cos\theta_{2n-3} + \\ + i\sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{2n-4} \cdot \sin\theta_{2n-3} \cdot \cos\theta_{2n-2},$$

$$u_n = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{2n-2} \cdot \cos\theta_{2n-1} + i\sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{2n-2} \cdot \sin\theta_{2n-1},$$

$$0 \leqslant \theta_j < \pi, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n-2; \quad 0 \leqslant \theta_{2n-1} < 2\pi.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать δ настолько малым, что

$$|\varphi(u) - \varphi(e)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \delta$. Следовательно,

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_1)} \left| \int\limits_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \delta}} (\varphi(u) - \varphi(e)) \frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}} \cdot \dot{u} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, при уже выбранном δ имеем при $\delta < \theta_1 < \pi$

$$|1 - \rho\bar{u}_1|^{2n} = \{(1 - \rho\cos\theta_1)^2 + \rho^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\}^n \geqslant \\ \geqslant (1 - \rho\cos\theta_1)^{2n} \geqslant (1 - \cos\delta)^{2n} = 2^{2n}\sin^{4n}\frac{\delta}{2}.$$

Выберем ρ настолько близким к единице, чтобы

$$(1-\rho)^n < \frac{2^{n-1}\sin^{4n}\frac{\delta}{2}}{M} \cdot \frac{\varepsilon}{2}, \qquad M = \sup_{u\bar{u}'=1} |\varphi(u)|.$$

Тогда

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_1)} \left| \int\limits_{\substack{u\bar{u}'=1 \\ \delta \leqslant \theta_1 \leqslant \pi}} (\varphi(u) - \varphi(e)) \frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}} \dot{u} \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{2M \cdot 2^n}{V(\mathfrak{C}_1)} \cdot \frac{(1-\rho)^n}{2^{2n}\sin^{4n}\frac{\delta}{2}} \cdot \int\limits_{u\bar{u}'=1} \dot{u} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тем самым формула (5.8.7) доказана.

Следовательно, (5.8.4) имеет место при $z \to v$ вдоль радиуса. Но поскольку это стремление является равномерным и $\varphi(u)$ непрерывна, то (5.8.4) имеет место и при $z \to v$ по любому пути.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 5.8.2, мы сделаем одно замечание. Из формулы Пуассона (5.7.5) следует, очевидно, формула

$$u(0)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\cdot\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)\cdot\dot{U} \tag{5.8.8}$$

(теорема о среднем). Однако, используя преобразования (5.6.2), мы можем без труда получить (5.7.5) из (5.8.8).

Доказательство теоремы 5.8.2. В силу сделанного только что замечания достаточно доказать, что

$$\lim_{Z\to\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\dot{U}=\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{(m-1,\ n-1)}}\varphi\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&U_0\end{pmatrix}\right]\cdot\dot{U}_0. \tag{5.8.9}$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$Z=\begin{pmatrix}\rho&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \rho\to 1,\qquad 0<\rho<1.$$

Записывая

$$U=\begin{pmatrix}u\\U_1\end{pmatrix},\qquad u=(u_1,\ \ldots,\ u_n),$$

имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\dot{U}=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\dot{U}=$$

$$=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\int\limits_{u\bar{u}'=1}\frac{(1-\rho^2)^n}{|1-\rho\bar{u}_1|^{2n}}\tau(u)\dot{u}, \tag{5.8.10}$$

где

$$\tau(u)=\int\limits_{U_1}\varphi(U)\dot{U}_1.$$

Так как $\tau(u)$ непрерывна на многообразии $u\bar{u}'=1$ и

$$V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})=V\left(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{(m-1,\ n-1)}\right)\cdot\int\limits_{u\bar{u}'=1}\dot{u},$$

то из теоремы 5.8.1′ мы получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}\varphi(U)P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\dot{U}=\frac{1}{V\left(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}^{(m-1,\ n-1)}\right)}\tau(e), \tag{5.9.11}$$

где $e=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Так как $U\bar{U}'=I$, то при $u=e$ имеем

$$U_1=(0,\ U_0),\quad U_0=U_0^{(m-1,\ n-1)}\quad\text{и}\quad \tau(e)=\int\limits_{U_0}\varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&U_0\end{pmatrix}\cdot\dot{U}_0.$$

Таким образом, равенство (5.8.3) доказано, когда Z стремится к Q по фиксированному пути. Но опять, из равномерности этого стремления мы получаем, что (5.8.3) справедливо и тогда, когда Z стремится к Q по любому пути.

Итак, мы доказали теорему 5.8.2, а с нею и теорему 5.8.1.

§ 5.9. Решение задачи Дирихле в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$

В §§ 5.7 и 5.8 мы доказали, что для любой непрерывной на $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ функции $\varphi(U)$ интеграл Пуассона (5.7.5) дает нам гармоническую функцию класса $\mathfrak{H}$, имеющую своими граничными значениями $\varphi(U)$.

Теперь мы переходим к доказательству единственности решения такой задачи, опираясь на принцип максимума.

Теорема 5.9.1. *Гармоническая функция класса $\mathfrak{H}$ достигает максимума и минимума на многообразии $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$.*

Заметим, что достаточно доказать эту теорему, заменив $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ всей границей $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, так как на каждой $\mathfrak{C}^{(r)}$, $0 < r < m$, возникает снова та же задача $\left(\text{для } \mathfrak{R}_{\mathrm{I}}^{(r,\, n-m+r)}\right)$.

Доказательству предпошлем следующую теорему.

Теорема 5.9.2. *Пусть $\rho(Z)$ — вещественная функция, а $v(Z)$ — решение уравнения в частных производных*

$$(\mathrm{Sp}\,\Delta_Z)\, v(Z) = \rho(Z). \tag{5.9.1}$$

Если $\rho(Z) > 0$, то $v(Z)$ не может достигать в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ максимума, а если $\rho(Z) < 0$, то минимума.

Доказательство. Поскольку вторая часть утверждения теоремы сразу получается из первой заменой $\rho(Z)$ и $v(Z)$ на $-\rho(Z)$ и $-v(Z)$, то мы можем ограничиться доказательством первой части.

Предположим, что $v(Z)$ достигает своего максимума во внутренней точке Z_0, которую без ограничения общности мы можем считать нулем. Тогда (5.9.1) дает нам

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_{j\alpha}\partial \bar{z}_{j\alpha}} v(Z)\Big|_{Z=0} = \rho(0) > 0. \tag{5.9.2}$$

Но поскольку $v(Z)$ имеет в точке $Z=0$ максимум, то

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{j\alpha}\partial \bar{z}_{j\alpha}} v(Z)\Big|_{Z=0} \leqslant 0,$$

что противоречит (5.9.2), и теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.9.1. Обозначим через M точную верхнюю грань $u(Z)$ на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Допустим, что найдется внутри $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ такая точка W_0, что

$$u(W_0) > M + \varepsilon. \tag{5.9.3}$$

Построим вспомогательную функцию

$$v(Z)=u(Z)+\eta\,\mathrm{Sp}\,[(Z-W_0)\overline{(Z-W_0)'}],$$

где η выбрано настолько малым, что

$$\eta \sup_{Z\in\overline{\mathfrak{R}}_{\mathrm{I}}} \mathrm{Sp}\,[(Z-W_0)\overline{(Z-W_0)'}]<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любой точки P, лежащей на границе $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$, имеем

$$v(W_0)=u(W_0)\geqslant u(P)+\varepsilon=$$
$$=v(P)-\eta\,\mathrm{Sp}\,((P-W_0)\overline{(P-W_0)'})+\varepsilon>v(P)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, $v(Z)$ достигает максимума во внутренней точке $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$. Но

$$(\mathrm{Sp}\,\Delta_Z)\,v(Z)=(\mathrm{Sp}\,\Delta_Z)\,u(Z)+\eta\,(\mathrm{Sp}\,\Delta_Z)\,\{\mathrm{Sp}\,[(Z-W_0)\overline{(Z-W_0)'}]\}=$$
$$=\eta\,\mathrm{Sp}\,(I-Z\overline{Z}')\,\mathrm{Sp}\,(I-\overline{Z}'Z). \qquad (5.9.4)$$

Поскольку $\mathrm{Sp}\,(I-Z\overline{Z}')>0$ и $\mathrm{Sp}\,(I-\overline{Z}'Z)>0$, мы пришли к противоречию с теоремой 5.9.2.

Из теоремы 5.9.1 мы сразу получаем важные следствия.

Теорема 5.9.3. *Единственной гармонической функцией класса $\mathfrak{H}$, имеющей предельные значения на $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$, равные нулю, является тождественный нуль.*

Теорема 5.9.4. *Каждая гармоническая функция из класса $\mathfrak{H}$ единственным образом определяется по своим граничным значениям на $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$ при помощи формулы Пуассона*

$$u(Z)=\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}} u(U)\,P(Z,\ U)\,\dot{U}.$$

Замечание. Можно непосредственно убедиться, что

$$\Delta_Z P(Z,\ U)=0.$$

Это уравнение матричное и оно равносильно m^2 дифференциальным уравнениям второго порядка. Следовательно, любая гармоническая в $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ функция удовлетворяет m^2 дифференциальным уравнениям второго порядка.

§ 5.10. Базис для гармонических функций

Пусть теперь $m=n$, и пусть

$$A_{f_1,\ \ldots,\ f_n}(U)=A_f(U)=\left(a^f_{ij}(U)\right)^{N(f)}_{i,j=1}$$

обозначает неприводимое унитарное представление унитарной группы $\mathfrak{U}_n$ с сигнатурой $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$, порядок которого, как

мы знаем, равен $N(f)=N(f_1, \ldots, f_n)$. Нетрудно убедиться, что множество функций

$$\varphi_{ij}^f(U)=\sqrt{\frac{N(f)}{V(\mathfrak{S}_{\mathrm{I}})}}\,a_{ij}^f(U) \tag{5.10.1}$$

образует ортонормальную систему на $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$. В силу теоремы 1.2.5 с $\rho=1$

$$[\det(I-Z\overline{U}')]^{-n}=\sum_{f\geqslant 0} N(f)\,\mathrm{Sp}\,[A_f(Z\overline{U}')]=$$

$$=V(\mathfrak{S}_{\mathrm{I}})\sum_{f_1\geqslant\ldots\geqslant f_n\geqslant 0}\ \sum_{i,j=1}^{N(f)}\varphi_{ij}^f(Z)\,\overline{\varphi_{ij}^f(U)}, \tag{5.10.2}$$

причем ряд равномерно сходится при Z, лежащих в замыкании области

$$rI-Z\overline{Z}'>0, \quad 0<r<1. \tag{5.10.3}$$

Функции

$$a_{ij}^f(U)\,\overline{a_{st}^g(U)}, \qquad f\geqslant 0, \qquad g\geqslant 0,$$

являются элементами матрицы

$$A_f(U)\times\overline{A_g(U)},$$

которая может быть разложена в прямую сумму

$$\sum_h A_h(U),$$

причем $N(f)N(g)=\sum_h N(h)$, $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $h_1\geqslant h_2\geqslant\ldots\geqslant h_n$ [1]). Следовательно,

$$a_{ij}^f(U)\,\overline{a_{st}^g(U)}=\sum\lambda_{pq}^h a_{pq}^h(U)$$

и $\sum|\lambda_{pq}^h|^2=1$. Отсюда получаем

$$\varphi_{ij}^f(U)\,\overline{\varphi_{st}^g(U)}=\sum\mu_{pq}^h\varphi_{pq}^h(U), \tag{5.10.4}$$

где

$$\mu_{pq}^h=\lambda_{pq}^h\sqrt{\frac{N(f)N(g)}{V(\mathfrak{S}_{\mathrm{I}})N(h)}}.$$

---

[1]) Иными словами, пространство, в котором действует представление $A_f(U)\times\overline{A_g(U)}$, раскладывается в прямую сумму неприводимых инвариантных подпространств. $A_h(U)$ — матрицы соответствующих неприводимых представлений. — *Прим. ред.*

Из (5.10.2) получаем разложение ядра Пуассона

$$\frac{1}{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}\frac{[\det(I-Z\overline{Z}')]^n}{|\det(I-Z\overline{U}')|^{2n}}=$$

$$=V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})\cdot\sum_{f\geqslant 0}\sum_{g\geqslant 0}\{\det(I-Z\overline{Z}')\}^n\sum_{i,j}\sum_{s,t}\overline{\varphi_{ij}^f(U)}\,\varphi_{ij}^f(Z)\,\varphi_{st}^g(U)\,\varphi_{st}^g(\overline{Z})=$$

$$=\sum_h\sum_{i,j}\Phi_{ij}^h(Z)\,\overline{\varphi_{ij}^h(U)}. \qquad (5.10.5)$$

Можно показать, что последний ряд равномерно сходится при Z, лежащих в замыкании множества (5.10.3). Следовательно,

$$\Phi_{ij}^h(Z)=\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\,\varphi_{ij}^h(U)\,\dot{U},$$

$$\lim_{Z\to U}\Phi_{ij}^h(Z)=\varphi_{ij}^h(U).$$

Поэтому мы имеем теорему.

Теорема 5.10.1. *Система гармонических функций*

$$\{\Phi_{ij}^h(Z)\}$$

образует базис для гармонических функций класса $\mathfrak{H}$.

§ 5.11. Абелева суммируемость рядов Фурье на унитарной группе

Определение. Если

$$\lim_{Z\to U}\sum_h\sum_{i,j}c_{ij}^h\Phi_{ij}^h(Z)=\varphi(U),$$

то мы будем говорить, что ряд

$$\sum_h\sum_{i,j}c_{ij}^h\varphi_{ij}^h(U)$$

А-суммируем или суммируем по Абелю к сумме $\varphi(U)$.

Теорема 5.11.1. *Ряд Фурье функции, непрерывной на* $\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}$, *А-суммируем к этой функции.*

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 5.8.1 и формулы (5.10.5).

Положим теперь

$$\mathfrak{B}_h(Z)=\sqrt{\frac{V(\mathfrak{C}_{\mathrm{I}})}{N(h)}}\left(\Phi_{ij}^h(Z)\right)_{i,j=1}^{N(h)}.$$

Тогда

$$\mathfrak{B}_h(Z)=\int_{\mathfrak{C}_{\mathrm{I}}}P_{\mathrm{I}}(Z,\ U)\,A_h(U)\,\dot{U}. \qquad (5.11.1)$$

Любая матрица Z порядка n из множества (5.10.3) может быть представлена в виде

$$Z = V\Lambda W,$$

где V и W — унитарные матрицы, а $\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, $0 \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \ldots \leqslant \lambda_1 \leqslant \sqrt{r}$. Подставляя в (5.11.1), получаем

$$\mathfrak{B}_h(Z) = \int\limits_{\mathfrak{C}_I} P_I(V\Lambda W, U) A_h(U) \dot{U} =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{C}_I} P_I(\Lambda, \overline{V}'U\overline{W}') A_h(U) \dot{U} = A_h(V) \mathfrak{B}_h(\Lambda) A_h(W) \qquad (5.11.2)$$

(заменой переменной U на VUW).

В частности, при $\Lambda = \lambda I$ имеем

$$A_h(V) \mathfrak{B}_h(\lambda I) = \mathfrak{B}_h(\lambda I) A_h(V),$$

т. е. матрица $\mathfrak{B}_h(\lambda I)$ перестановочна с матрицами $A_h(V)$ неприводимого представления. По лемме Шура

$$\mathfrak{B}_h(\lambda I) = \rho_h(\lambda) I^{(N(h))},$$

где $\rho(\lambda) \to 1$, когда $\lambda \to 1$.

Более точно, мы имеем следующий частный случай предыдущей теоремы.

Теорема 5.11.2. *Для любой непрерывной на $\mathfrak{C}_I$ функции $\varphi(U)$ имеем*

$$\varphi(U) = \lim_{\lambda \to 1} \sum_h \sum_{i,j} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U), \qquad (5.11.3)$$

где

$$c_{ij}^h = \frac{1}{V(\mathfrak{C}_I)} \int\limits_{\mathfrak{C}_I} \varphi(U) \varphi_{ij}^h(U) \dot{U}. \qquad (5.11.4)$$

Отсюда мы сразу получаем более точную форму теоремы Петера — Вейля.

Теорема 5.11.3. *Любая функция $\varphi(U)$, непрерывная на унитарной группе, может быть сколь угодно точно приближена функциями системы $\{\varphi_{ij}^h(U)\}$.*

Доказательство. Из (5.11.3) мы видим, что при любом $\varepsilon > 0$ можно выбрать λ столь близким к единице, чтобы

$$\left| \varphi(U) - \sum_h \sum_{ij} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем мы можем выбрать N настолько большим, чтобы

$$\left| \varphi(U) - \sum_{N \geqslant h_1 \geqslant \ldots \geqslant h_n \geqslant -N} \sum_{i,j} c_{ij}^h \rho_h(\lambda) \varphi_{ij}^h(U) \right| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Так как любая непрерывная функция на компактной подгруппе унитарной группы $\mathfrak{U}_n$ может быть непрерывным образом продолжена на всю группу $\mathfrak{U}_n$, то в качестве следствия из теоремы 5.11.3 мы получаем соответствующий результат для любой компактной группы конечной размерности (при некоторой необходимой ортонормализации системы $\{\varphi_{ij}^h(U)\}$ на этой подгруппе).

Замечание 2. Любая непрерывная функция на множестве классов смежности $\mathfrak{U}_n$ относительно какой-либо компактной подгруппы может рассматриваться как непрерывная функция на $\mathfrak{U}_n$. В качестве следствия теоремы 5.11.3 мы получаем поэтому соответствующий результат для компактных однородных пространств конечной размерности [с соответствующим усреднением $\varphi_{ij}^h(U)$ по подгруппе].

Глава VI

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ И КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ

§ 6.1. Ортонормальные системы в пространстве симметрических унитарных матриц

Нас интересуют ортонормальные системы в пространствах $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ и $\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}$. Преобразование

$$T = USU' \tag{6.1.1}$$

с унитарной матрицей U переводит симметрическую унитарную матрицу S в симметрическую унитарную матрицу T. Расположим элементы матрицы S в виде вектора s

$$(s_{11}, \sqrt{2}s_{12}, \sqrt{2}s_{13}, \ldots, \sqrt{2}s_{1n}, s_{22}, \sqrt{2}s_{23}, \ldots$$
$$\ldots, \sqrt{2}s_{2n}, \ldots, s_{n-1,\,n-1}, \sqrt{2}s_{n-1,\,n}, s_{nn})$$

размерности $n(n+1)/2$, и соответствующую операцию проделаем для матрицы T, обозначив полученный вектор через t. Когда матрица S преобразуется в матрицу T преобразованием (6.1.1), то вектор s преобразуется в вектор t линейным преобразованием с матрицей $U^{[2]}$, имеющей порядок $n(n+1)/2$.

Из вектора s мы построим вектор $s^{[f]}$ размерности

$$\frac{(n(n+1)/2+f-1)!}{f!\,(n(n+1)/2-1)!}.$$

Матрицей преобразования $s^{[f]}$ в $t^{[f]}$ является

$$\left(U^{[2]}\right)^{[f]}. \tag{6.1.2}$$

Компонентами $s^{[f]}$ являются одночлены от s_{ij} степени f. Эти компоненты линейно независимы, и любой однородный многочлен степени f может быть записан в виде линейной комбинации этих компонент.

Из теорем 1.3.2 и 1.4.2 мы знаем, что пространство однородных многочленов степени f от s_{ij} может быть разложено в прямую сумму подпространств, инвариантных относительно преобразования (6.1.2). Эти подпространства имеют размерности $N(2f_1, \ldots, 2f_n)$, где $f_1 + \ldots + f_n = f$. Многочлены, образующие базис подпространства размерности $N(2f_1, \ldots, 2f_n)$, обозначим

$$\varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S), \qquad i = 1, 2, \ldots, N(2f_1, \ldots, 2f_n). \tag{6.1.3}$$

Когда S преобразуется в T преобразованием (6.1.1), $\varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S)$ преобразуется в $\varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(T)$ преобразованием с матрицей $A_{2f_1, \ldots, 2f_n}(U)$. Кроме того, система (6.1.3) ортогональна на $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$, т. е.

$$\int\limits_{\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}} \varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S)\, \overline{\varphi^{(j)}_{g_1, \ldots, g_n}(S)}\, \dot{S} = \delta_{ij}\delta_{fg} \cdot \rho_f,$$

где $\dot{S}$ — элемент объема пространства симметрических унитарных матриц, найденный нами в § 3.5.

Положив

$$\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S) = \rho^{-\frac{1}{2}}_{f_1, \ldots, f_n} \cdot \varphi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S),$$

получим ортонормальную систему в $\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}$.

§ 6.2. Проекция ядра в подпространство

Займемся изучением функций

$$\Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{T}) = \sum_i \psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(S)\, \overline{\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_n}(T)}. \tag{6.2.1}$$

Непосредственно имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{S}_{\mathrm{II}}} \Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{S})\, \dot{S} = N(2f_1, \ldots, 2f_n). \tag{6.2.2}$$

Так как $\Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{S})$ не зависят от S, то

$$\Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{S}) = \frac{1}{V(\mathfrak{S}_{\mathrm{II}})} \cdot N(2f_1, \ldots, 2f_n).$$

Таким образом, $\Psi_{f_1, \ldots, f_n}(S, \overline{S})$ выглядит очень просто. Мы попытаемся упростить и выражение (6.2.1).

Упорядочим лексикографически системы индексов $(f_1, \ldots, f_n)$. Мы будем писать $f > g$, где $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n)$, если $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$, $\ldots$, $f_{q-1} = g_{q-1}$, $f_q > g_q$.

Из (6.1.1) следует

$$A_{f_1, \ldots, f_n}(T) = A_{f_1, \ldots, f_n}(U)\, A_{f_1, \ldots, f_n}(S)\, A_{f_1, \ldots, f_n}(U'). \tag{6.2.3}$$

Пусть L — линейное пространство, порожденное элементами матриц $A_{f_1, \ldots, f_n}(S)$. Когда S преобразуется в T, L преобразуется само в себя. Это означает, что L является инвариантным подпространством. Это инвариантное подпространство может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств, соответствующих $A_{2g_1, \ldots, 2g_n}(X)$. Очевидно, $(2g_1, \ldots, 2g_n) \leqslant (2f_1, \ldots, 2f_n)$, причем

случай равенства наверняка имеется. Выражение

$$\mathrm{Sp}\left[A_{f_1,\ldots,f_n}(S)\,A_{f_1,\ldots,f_n}(\bar{T})\right]=\mathrm{Sp}\,A_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T})$$

инвариантно при замене S и T одновременно на USU' и UTU'. Так как

$$\mathrm{Sp}\,A_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T})=\chi_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T}),$$

то

$$\chi_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T})=\sum_{g\leqslant f}c_{f,g}\,\Psi_{g_1,\ldots,g_n}(S,\ \bar{T}), \tag{6.2.4}$$

причем $c_{f,f}\neq 0$. Это соотношение обратимо, т. е. мы можем написать

$$\Psi_{f_1,\ldots,f_n}(S,\ \bar{T})=\sum_{g\leqslant f}d_{f,g}\,\chi_{g_1,\ldots,g_n}(S\bar{T}). \tag{6.2.5}$$

Из последнего равенства ясно, что

$$\Psi_{f_1,\ldots,f_n}(S,\ \bar{T})=\Psi_{f_1,\ldots,f_n}(S\bar{T}).$$

Теперь мы постараемся найти эффективный метод определения коэффициентов в формуле (6.2.5). Так как $c_{f,g}$ и $d_{f,g}$ определены лишь при $g\leqslant f$, то мы положим $c_{f,g}=d_{f,g}=0$ при $g>f$. Кроме того, поскольку мы упорядочили системы индексов $f=(f_1,\ldots,f_n)$, мы можем теперь рассматривать f как простой индекс, т. е. $f=1, 2, 3, \ldots$ Тогда матрицы $C=(c_{f,g})_1^k$ и $D=(d_{f,g})_1^k$ будут невырожденными треугольными матрицами при любом целом положительном k.

Рассмотрим интеграл

$$\int_S\int_T\Psi_f(S\bar{T})\,\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T},\qquad g\leqslant f.$$

Подставляя в этот интеграл выражение χ_g, даваемое формулой (6.2.4), и используя (6.2.1), мы получаем

$$\sum_{h\leqslant g}c_{g,h}\int_S\int_T\Psi_f(S\bar{T})\,\Psi_h(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}=$$

$$=\sum_{h\leqslant g}c_{g,h}\sum_i\sum_j\int_S\int_T\psi_f^{(i)}(S)\,\overline{\psi_f^{(i)}(T)}\,\psi_h^{(j)}(T)\,\overline{\psi_h^{(j)}(S)}\,\dot{S}\dot{T}=\sum_{i,j}\sum_{h\leqslant g}c_{g,h}\delta_{ij}\delta_{fh},$$

откуда следует

$$\int_S\int_T\Psi_f(S\bar{T})\,\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}=0\quad\text{при}\quad g<f, \tag{6.2.6}$$

и

$$\int_S\int_T\Psi_f(S\bar{T})\,\chi_f(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}=N_f c_{f,f}\neq 0\ ^{1)}. \tag{6.2.7}$$

---

[1]) $N_f=N(2f_1,\ldots,2f_n)$. — *Прим. ред.*

Положим

$$\beta_{f,g}=\int\limits_S\int\limits_T \chi_f(S\bar{T})\chi_g(T\bar{S})\,\dot{S}\dot{T}. \tag{6.2.8}$$

Из **(6.2.5)**, **(6.2.6)**, (6.2.7) и (6.2.8) мы имеем

$$\sum_{h\leqslant g} d_{f,h}\beta_{h,g}=0, \qquad g<f, \tag{6.2.9}$$

и

$$\sum_{h\leqslant f} d_{f,h}\beta_{h,f}=N_f c_{f,f}\neq 0. \tag{6.2.10}$$

Очевидно, что матрица $B=(\beta_{h,f})_1^k$ положительно определена при любом целом $k\geqslant 1$. Равенства (6.2.9) и (6.2.10) могут быть заменены матричным равенством

$$DB=\begin{pmatrix} N_1c_{1,1} & * & \dots & * \\ 0 & N_2c_{2,2} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_kc_{k,k}\end{pmatrix}=K. \tag{6.2.11}$$

Отсюда видно, что $d_{f,g}$ могут быть выражены через $\beta_{f,g}$ и элементы матрицы K. Но поскольку элементы матрицы K неизвестны, то мы получим из (6.2.10) другую систему уравнений, из которой $d_{f,g}$ будут получаться рекуррентно через $\beta_{f,g}$ и некоторые другие величины, которые легко могут быть вычислены.

Положим

$$\alpha_f=\int\limits_S \chi_f(S\bar{S})\,\dot{S}. \tag{6.2.12}$$

Полагая в (6.2.5) $T=S$ и интегрируя по S, получаем

$$\sum_{h\leqslant f} d_{f,h}\,\alpha_h=N_f. \tag{6.2.13}$$

При $f=1$ имеем, очевидно, $d_{1,1}=\dfrac{N_1}{c_{1,1}}$. Предположим, что при $f\leqslant k-1$ величины $d_{f,g}$ $(g=1, 2, \dots, f)$ выражены через $\beta_{f,g}$ и α_f, и рассмотрим, что будет при $f=k$. Из (6.2.9) и (6.2.13) мы находим

$$\begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k,1} & d_{k,2} & \dots & d_{k,k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,k-1} & \alpha_1 \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \dots & \beta_{2,k-1} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \dots & \beta_{k,k-1} & \alpha_k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d_{1,1}\beta_{1,1} & * & \dots & * \\ 0 & d_{2,1}\beta_{1,2}+d_{2,2}\beta_{2,2} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_k\end{pmatrix}. \tag{6.2.14}$$

Треугольная матрица в правой части невырождена, так как в силу (6.2.10) ее диагональные элементы отличны от нуля. Так как матрица D является обратной к матрице C и поэтому невырождена, то матрица

$$B_k = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,k-1} & \alpha_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{k,1} & \cdots & \beta_{k,k-1} & \alpha_k \end{pmatrix}$$

тоже невырождена. Имеем из (6.2.14)

$$(d_{k,1},\ d_{k,2},\ \ldots,\ d_{k,k}) = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ N_k)\, B_k^{-1}.$$

Этим доказано, что $d_{f,g}$ при любых f выражаются через $\beta_{f,g}$ и α_f. Остается указать эффективный способ вычисления $\beta_{f,g}$ и α_f.

Любая симметрическая унитарная матрица S может быть записана в виде $S = UU'$, где U — унитарная матрица. Полагая $T = UWU'$ из

$$\chi_f(S\overline{T}) = \chi_f(U\overline{W}\overline{U}') = \chi_f(\overline{W}),$$

находим

$$\beta_{f,g} = \int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}} \dot{S} \int\limits_{\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}} \chi_g(W)\, \overline{\chi_f(W)}\, \dot{W}.$$

В силу (3.5.19) имеем

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}) \cdot C \int\limits_{2\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \ldots \geqslant \theta_n \geqslant 0} \ldots \int \chi_g([e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}]) \times$$

$$\times \overline{\chi_f([e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}])} \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} |e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}|\, d\theta_1 \ldots d\theta_n, \quad (6.2.15)$$

где

$$C = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \int\limits_{\{O\}} \{\dot{O}\}.$$

Так как

$$e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu} = 2i \sin \frac{\theta_\nu - \theta_\mu}{2} \cdot e^{\frac{i}{2}(\theta_\nu + \theta_\mu)}, \quad (6.2.16)$$

то

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{C}_{\mathrm{II}}) \cdot C \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \int\limits_{2\pi \geqslant \theta_1 \geqslant \ldots \geqslant \theta_n \geqslant 0} \ldots \int \chi_g([e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}]) \times$$

$$\times \chi_f([e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{-i\theta_n}]) \prod_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} \sin \frac{\theta_\nu - \theta_\mu}{2} \cdot d\theta_1 \ldots d\theta_n. \quad (6.2.17)$$

Следующий метод вычисления $\beta_{f,g}$ несколько более удобен. В силу (6.2.16) имеем при $2\pi \geqslant \theta_\nu \geqslant \theta_\mu \geqslant 0$

$$|e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| = 2\sin\frac{\theta_\nu - \theta_\mu}{2} = -i\left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}\right)e^{-\frac{i}{2}(\theta_\nu+\theta_\mu)}$$

и

$$\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}|e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}| =$$
$$= (-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}\right)e^{-\frac{i}{2}(n-1)(\theta_1+\ldots+\theta_n)}.$$

Значит,

$$\beta_{f,g} = V(\mathfrak{E}_{\mathrm{II}})\cdot C\cdot(-i)^{\frac{n(n-1)}{2}}\int\limits_{2\pi\geqslant\theta_1\geqslant\ldots\geqslant\theta_n\geqslant 0}\ldots\int\chi_g\left([e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}]\right)\times$$
$$\times\chi_f\left([e^{-i\theta_1},\ldots,e^{-i\theta_n}]\right)\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}\right)\times$$
$$\times e^{-\frac{i}{2}(n-1)(\theta_1+\ldots+\theta_n)}d\theta_1\ldots d\theta_n. \quad (6.2.18)$$

Поскольку выражение

$$\chi_g\left([e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}]\right)\prod_{1\leqslant\nu<\mu\leqslant n}\left(e^{i\theta_\nu} - e^{i\theta_\mu}\right)$$

совпадает с $M_g\left([e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}]\right)$, а $\chi_f\left([e^{-i\theta_1},\ldots,e^{-i\theta_n}]\right)$ может быть выражено через элементарные симметрические функции от $e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_n}$, то мы можем вычислить $\beta_{f,g}$ для любого частного случая. Однако получить значение $\beta_{f,g}$ в общем виде не удается.

§ 6.3. Ортонормальная система на $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$

В соответствии с результатами предыдущего параграфа мы знаем, что функции

$$\psi_f^{(i)}(Z)$$

образуют в $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ полную ортогональную систему. Остается вычислить интеграл

$$\rho_f = \int\limits_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}}|\psi_f^{(i)}(Z)|^2\,\dot{Z}.$$

Так как известно, что ρ_f не зависит от i, то

$$\rho_f\cdot N(2f_1,\ldots,2f_n) = \int\limits_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}}\Psi_f(Z\bar{Z})\,\dot{Z}.$$

В силу соотношения (6.2.5) задача сводится к вычислению интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}} \chi_f(Z\bar{Z})\,\dot{Z}.$$

В соответствии с (3.5.2) имеем для этого интеграла выражение

$$2^n \int\limits_{\{\mathfrak{U}_n\}} \{\dot{U}_n\} \int\limits_{0\leqslant\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant 1} \ldots \int \prod_{j<k} |\lambda_j^2-\lambda_k^2|\cdot\chi_f([\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2])\,\lambda_1\ldots\lambda_n\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n =$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\omega_n \int\limits_{0\leqslant\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant 1} \ldots \int \det\left|\lambda_i^{2l_j}\right|_{i,j=1}^{n}\cdot\lambda_1\ldots\lambda_n\,d\lambda_1\ldots d\lambda_n =$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\omega_n \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\, r_1^{2l_{i_1}+1}\, r_2^{2l_{i_1}+2l_{i_2}+3}\ldots$$

$$\ldots r_n^{2l_{i_1}+\ldots+2l_{i_n}+2n-1}\,dr_1\ldots dr_n =$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,2^{-n}\,\omega_n \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\, t_1^{l_{i_1}}\, t_2^{l_{i_1}+l_{i_2}+1}\ldots$$

$$\ldots t_n^{l_{i_1}+\ldots+l_{i_n}+n-1}\,dt_1\ldots dt_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,2^{-n}\,\omega_n \sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\times$$

$$\times\frac{1}{(l_{i_1}+1)(l_{i_1}+l_{i_2}+2)\ldots(l_{i_1}+\ldots+l_{i_n}+n)} = \frac{\omega_n D(l_1,\ldots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(l_i+l_j+2)}.$$

При последнем преобразовании мы использовали следующее тождество.

Лемма.

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n}^{1\ldots n}\frac{1}{l_{i_1}(l_{i_1}+l_{i_2})\ldots(l_{i_1}+\ldots+l_{i_n})} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,2^n D(l_1,\ldots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(l_i+l_j)}$$

Доказательство. При $n=2$ тождество тривиально. Предположим, что для $n-1$ оно справедливо. Тогда для n его левая

часть преобразуется к виду

$$\frac{2^{n-1}}{l_1+l_2+\ldots+l_n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\frac{D(l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}(l_k+l_j)}\prod_{j=1}^{n}(l_i+l_j)=$$

$$=\frac{2^{n-1}}{\sigma_1}(-1)^{n-1}\prod_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}(l_j+l_k)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\times$$

$$\times D(l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)\left(l_i^n+\sigma_1 l_i^{n-1}+\ldots+\sigma_n\right),$$

где σ_ν — элементарная симметрическая функция степени ν от $l_1,\ldots,l_n$. Так как

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)\,l_i^n=\sigma_1 D(l_1,\ldots,l_n),$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}D(l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)\,l_i^{n-1}=D(l_1,\ldots,l_n),$$

а все прочие суммы равны нулю, то лемма доказана.

§ 6.4. Характеристическое многообразие пространства кососимметрических матриц

Многообразие (3.6.16) является характеристическим многообразием $\mathfrak{C}_{\mathrm{III}}$ области $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$. Рассмотрим преобразование

$$L=UKU', \tag{6.4.1}$$

переводящее кососимметрическую матрицу K в кососимметрическую матрицу L (U — унитарная матрица). Расположив элементы матрицы K в виде строки

$$(k_{1,2},\ldots,k_{1,n},k_{2,3},\ldots,k_{2,n},\ldots,k_{n-1,n}),$$

мы обозначим полученный $\frac{n(n-1)}{2}$-мерный вектор через k, а вектор, соответствующий матрице L, через l. Когда матрица K преобразуется в матрицу L преобразованием (6.4.1), то вектор k преобразуется в вектор l линейным преобразованием с матрицей $U^{(2)}$ (см. § 1.4).

Рассмотрим теперь вектор $k^{[f]}$, размерность которого равна

$$\frac{(n(n-1)/2+f-1)!}{f!\,(n(n-1)/2-1)!}.$$

Когда матрица K преобразуется в L преобразованием (6.4.1), то $k^{[f]}$ преобразуется в $l^{[f]}$ линейным преобразованием с матрицей

$$\left(U^{(2)}\right)^{[f]}. \tag{6.4.2}$$

Из теорем 1.4.3 и 1.3.3 мы знаем, что пространство, натянутое на векторы $k^{[f]}$, может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств, имеющих размерности $N(f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots)$. Базисные векторы (т. е. однородные многочлены от элементов K) в этих подпространствах обозначим через

$$\psi^{(i)}_{f_1, \ldots, f_{[n/2]}}(K), \qquad i = 1, 2, \ldots, N(f_1, f_1, f_2, f_2, \ldots).$$

Легко доказать, что

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{III}} \psi^{(i)}_f(Z)\,\overline{\psi^{(j)}_g(Z)}\,\dot{Z} = \rho_f \cdot \delta_{ij}\delta_{fg},$$

и

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{III}} \psi^{(i)}_f(K)\,\overline{\psi^{(j)}_g(K)}\,\dot{K} = \beta_f\delta_{ij}\delta_{fg}.$$

Дальнейшие результаты для кососимметрических матриц получаются совершенно аналогично тому, что мы делали для симметрических матриц.

Глава VII

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА СФЕРАХ ЛИ

§ 7.1. Многочлены Гегенбауэра

Для удобства читателя мы начнем с изложения некоторых основных фактов из теории многочленов Гегенбауэра и гармонического анализа на обычный эвклидовой сфере (в n-мерном пространстве).

Многочлены Гегенбауэра[1]) определяются равенством

$$C_m^\lambda(\xi) = \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \frac{\Gamma(m+\lambda-s)}{s!\,(m-2s)!\,\Gamma(\lambda)} (2\xi)^{m-2s}, \qquad \lambda > -\frac{1}{2}. \quad (7.1.1)$$

Можно доказать, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^\lambda(\xi)\, w^m = (1 - 2\xi w + w^2)^{-\lambda}. \quad (7.1.2)$$

Нам понадобится еще и следующая формула:

$$(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_m^\lambda(\xi) = \frac{(-2)^m}{m!} \frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}, \quad (7.1.3)$$

называемая формулой Родрига. Ее доказательство легко получается, если, используя представление (7.1.1), доказать, что $\frac{d}{d\xi} C_m^\lambda(\xi) = 2\lambda C_{m-1}^{\lambda+1}(\xi)$, а затем провести индукцию.

Пусть теперь $f(\xi)$ — функция, m раз непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1, 1]$. Из (7.1.3) имеем

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, C_m^\lambda(\xi) \left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi =$$

$$= \frac{(-2)^m}{m!} \cdot \frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)} \int_{-1}^{1} f(\xi) \left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} d\xi. \quad (7.1.4)$$

---

[1]) В оригинале эти многочлены называются ультрасферическими и обозначаются через $P_m^{(\lambda)}$. — *Прим. ред.*

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi =$$

$$= f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi.$$

Так как $\lambda > -\frac{1}{2}$, то $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1} = 0$, и значит,

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m (1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi = -\int_{-1}^{1} f'(\xi)\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{m-1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi.$$

Повторяя эту операцию, получаем окончательно

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,C_m^{\lambda}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi =$$

$$= \frac{2^m}{m!}\cdot\frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^m f(\xi)\,d\xi. \qquad (7.1.5)$$

Если $f(\xi)$ — многочлен степени m со старшим коэффициентом a, то

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\,C_m^{\lambda}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi = 2^m\frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{1} a(1-\xi^2)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi =$$

$$= 2^m\cdot\frac{\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)\,\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)\,\Gamma(m+\lambda+1)}\,a. \qquad (7.1.6)$$

Полагая, в частности, $f(\xi) = C_l^{\lambda}(\xi)$, получаем из (7.1.6) и (7.1.5)

$$\int_{-1}^{1} C_l^{\lambda}(\xi)\,C_m^{\lambda}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi = \begin{cases} 0, & l \neq m, \\ \dfrac{\pi\cdot 2^{1-2\lambda}\cdot\Gamma(m+2\lambda)}{[\Gamma(\lambda)]^2\,(m+\lambda)\,m!}, & l = m. \end{cases} \qquad (7.1.7)$$

Если же мы возьмем в формуле (7.1.5) $f(\xi) = \xi^l$, то при $l \geqslant m$

$$\int_{-1}^{1} \xi^l C_m^{\lambda}(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi =$$

$$= \binom{l}{m}\frac{2^m\,\Gamma(m+\lambda)\,\Gamma(m+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(2m+2\lambda)}\int_{-1}^{1}\xi^{l-m}\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-\frac{1}{2}}d\xi. \qquad (7.1.8)$$

Если $l-m$ — нечетное число, то этот интеграл обращается в нуль, а если $l-m=2k$, то в силу равенства

$$\int_{-1}^{1} \xi^{l-m}\left(1-\xi^2\right)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} d\xi =$$

$$= \int_{0}^{1} \xi^{k-\frac{1}{2}}(1-\xi)^{m+\lambda-\frac{1}{2}} d\xi = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+m+\lambda+1)}$$

мы получаем

$$\int_{-1}^{1} \xi^l C_m^\lambda(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } l<m \text{ или } l=m+2k+1, \\ \dfrac{\pi}{2^{l+2\lambda-1}} \cdot \dfrac{l!}{k!\,(l-2k)!} \dfrac{\Gamma(l-2k+2\lambda)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(l-k+\lambda+1)}, & l=m+2k. \end{cases} \tag{7.1.9}$$

Любой многочлен $f(\xi)$ степени m может быть представлен в виде

$$f(\xi)=\sum_{l=0}^{m} a_l C_l^\lambda(\xi).$$

Умножая это равенство на $C_l^\lambda(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ и интегрируя, получаем

$$a_l = \frac{2^{2\lambda-1}[\Gamma(\lambda)]^2(l+\lambda)\cdot l!}{\pi\Gamma(l+2\lambda)} \int_{-1}^{1} f(\xi)\, C_l^\lambda(\xi)\left(1-\xi^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\xi.$$

Отсюда мы легко выводим следующую теорему.

Теорема 7.1.1. *Если $f(\xi)$ — многочлен степени m, для которого обращаются в 0 интегралы в последней формуле при $0 \leqslant l \leqslant m-1$, то $f(\xi)$ отличается от $C_m^\lambda(\xi)$ лишь постоянным множителем.*

Из этой теоремы и из (7.1.9) легко находим

$$\xi^m = \frac{m!\,\Gamma(\lambda)}{2^m} \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m-2k+\lambda}{k!\,\Gamma(m-k+\lambda+1)} C_{m-2k}^\lambda(\xi). \tag{7.1.10}$$

В дальнейшем нам понадобится также следующая формула: при $\nu>\lambda$

$$C_m^\nu(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{k=0}^{[m/2]} c_k C_{m-2k}^\lambda(\xi), \tag{7.1.11}$$

где

$$c_k = \frac{m-2k+\lambda}{k!} \cdot \frac{\Gamma(k+\nu-\lambda)}{\Gamma(\nu-\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(m+\nu-k)}{\Gamma(m+\lambda-k+1)}. \tag{7.1.12}$$

Эта формула может быть доказана следующим образом. В силу (7.1.1) и (7.1.10) имеем

$$C_m^\nu(\xi) = \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(\nu)\Gamma(s+1)\Gamma(m-2s+1)} (2\xi)^{m-2s} =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(s+1)} \sum_{k=0}^{[m/2]-s} \frac{m-2s-2k+\lambda}{k!\,\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)} C_{m-2s-2k}^\lambda(\xi) =$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)} \sum_{t=0}^{[m/2]} c_t C_{m-2t}^\lambda(\xi),$$

где

$$c_t = \sum_{s+k=t} (-1)^s \frac{\Gamma(\nu+m-s)(m-2s-2k+\lambda)}{s!\,k!\,\Gamma(m-2s-k+\lambda+1)} =$$

$$= \frac{(m-2t+\lambda)}{t!} \sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{t}{s} \frac{\Gamma(\nu+m-s)}{\Gamma(m-t-s+\lambda+1)} =$$

$$= \frac{(m-2t+\lambda)\Gamma(t+\nu-\lambda)\Gamma(\nu+m-t)}{t!\,\Gamma(\nu-\lambda)\Gamma(m-t+\lambda+1)}.$$

[Мы использовали формулу для q-й разности

$$\Delta^q f(x) = \sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{q}{s} f(x+q-s).$$

Так как $\Delta \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} = (\alpha-\beta)\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+1)}$, то при $\alpha > \beta$

$$\Delta^q \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} = \frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha-\beta-q+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x+q)}\Big].$$

§ 7.2. Гармонический анализ на сфере

Пусть γ — единичная сфера в вещественном n-мерном эвклидовом пространстве, т. е. геометрическое место точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих равенству

$$xx' = 1. \tag{7.2.1}$$

Хорошо известно, что единичная сфера допускает следующее параметрическое представление:

$$x_\nu = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{\nu-1} \cdot \cos\theta_\nu, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant n-1,$$
$$x_n = \sin\theta_1 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2} \cdot \sin\theta_{n-1}.$$

где θ_ν подчинены ограничениям

$$0 \leqslant \theta_\nu \leqslant \pi, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n-2; \quad 0 \leqslant \theta_{n-1} \leqslant 2\pi.$$

При таком выборе параметров элемент объема единичной сферы равен

$$\dot{x} = \sin^{n-2}\theta_1 \cdot \sin^{n-3}\theta_2 \cdot \ldots \cdot \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1 \cdot \ldots \cdot d\theta_{n-1}. \quad (7.2.2)$$

Построим на единичной сфере ортогональную систему.

Пусть u — вещественный вектор. Рассмотрим f-ю симметризованную кронекеровскую степень $u^{[f]}$ вектора u, т. е. вектор размерности

$$N_f = \frac{1}{f!} n(n+1) \ldots (n+f-1)$$

с компонентами

$$\sqrt{\frac{f!}{j_1! \ldots j_n!}}\, u_1^{j_1} \ldots u_n^{j_n}, \quad j_1 + \ldots + j_n = f.$$

Нетрудно показать, что

$$u^{[f]}(v^{[f]})' = (uv')^f.$$

Значит,

$$x^{[f]}(x^{[f]})' = 1.$$

Рассмотрим теперь вещественное ортогональное преобразование

$$v = uT, \quad TT' = 1. \quad (7.2.3)$$

Имеет место соотношение

$$v^{[f]} = u^{[f]}T^{[f]}.$$

Разложим теперь пространство векторов $u^{[f]}$ в прямую сумму неприводимых инвариантных подпространств. Очевидно, что векторы

$$(uu')\, u^{[f-2]}$$

образуют N_{f-2}-мерное инвариантное подпространство пространства $u^{[f]}$. Отсюда можно доказать, что $T^{[f]}$ может быть разложена в прямую сумму

$$T^{[f]} = T_f \dotplus T_{f-2} \dotplus \ldots \dotplus T_{f-2\left[\frac{f}{2}\right]}, \quad (7.2.4)$$

где T_ν — квадратная матрица порядка $N_\nu - N_{\nu-2}$. Известно, что T_ν неприводимы и попарно неэквивалентны (см. Мурнаган [1], стр. 328—329), и мы можем считать, что они ортогональны. Обозначим через $V_{f-2l}(u)$ проекцию вектора $u^{[f]}$ в инвариантное подпространство, соответствующее слагаемому T_{f-2l} в (7.2.4), и пусть

$$(uu')^l \varphi^{(i)}_{f-2l}(u), \quad i = 1, 2, \ldots, N_{f-2l} - N_{f-2l-2},$$

— компоненты вектора $V_{f-2l}(u)$ в этом инвариантном подпространстве.

Применив, как обычно, лемму Шура, мы получим:

Теорема 7.2.1. *Имеем*

$$\int_{\gamma} \varphi_{\nu}^{(i)}(x)\,\varphi_{\mu}^{(j)}(x)\,\dot{x} = \beta_{\nu}\cdot\delta_{ij}\delta_{\nu\mu}, \tag{7.2.5}$$

где β_{ν} *не зависит от* i.

Положим

$$\psi_{\nu}^{(i)}(u) = \beta_{\nu}^{-\frac{1}{2}}\,\varphi_{\nu}^{(i)}(u). \tag{7.2.6}$$

Эти функции образуют на сфере ортонормальную систему.

§ 7.3. Проекция ядра в подпространство

Рассмотрим функцию

$$\Phi_{\nu}(u, v) = \sum_{i=1}^{N_{\nu}-N_{\nu-2}} \psi_{\nu}^{(i)}(u)\,\psi_{\nu}^{(i)}(v) = V_{\nu}(u)\,V_{\nu}'(v). \tag{7.3.1}$$

Очевидно, что для любой ортогональной матрицы T

$$\Phi_{\nu}(uT, vT) = V_{\nu}(uT)\,V_{\nu}'(vT) = V_{\nu}(u)\,T_{\nu}T_{\nu}'V_{\nu}'(v) = V_{\nu}(u)\,V_{\nu}'(v) = \Phi_{\nu}(u, v),$$

так что $\Phi_{\nu}(u, v)$ инвариантна относительно ортогональных преобразований. Значит, по соответствующей теореме теории инвариантов (см. Г. Вейль [2], стр. 53) $\Phi(u, v)$ может быть представлена в виде функции от uu', vv' и uv'. Поскольку $\Phi_{\nu}(u, v)$ — однородная функция от координат каждого из векторов u и v степени ν, мы можем написать

$$\Phi_{\nu}(u, v) = \sum_{l=0}^{[\nu/2]} c_{l,\nu}\,(uv')^{\nu-2l}\,(uu'vv')^{l}.$$

Если $u = x$ и $v = y$ — точки на сфере, то

$$\Phi_{\nu}(x, y) = \sum_{l=0}^{[\nu/2]} c_{l,\nu}\,(xy')^{\nu-2l}.$$

Положим

$$\Phi_{\nu}(x, y) = Q_{\nu}(\xi), \quad \xi = xy'. \tag{7.3.2}$$

Ясно, что ξ равно косинусу угла между лучами, направленными из начала в точки x и y.

Из (7.3.1) и (7.2.5) имеем

$$\int_{\gamma}\int_{\gamma} \Phi_{\nu}(x, y)\,\Phi_{\mu}(x, y)\,\dot{x}\dot{y} = (N_{\nu} - N_{\nu-2})\,\delta_{\mu\nu}. \tag{7.3.3}$$

Подставляя (7.3.2) в (7.3.3), получаем

$$\int_\gamma \int_\gamma Q_\nu(xy')\,Q_\mu(xy')\,\dot{x}\dot{y} = (N_\nu - N_{\nu-2})\,\delta_{\mu\nu}. \tag{7.3.4}$$

Для фиксированного x существует такая ортогональная матрица T с определителем $+1$, что $xT=(1, 0, \ldots, 0)$. Положив $w=yT$, мы найдем, что интеграл (7.3.4) равен $[w=(w_1, \ldots, w_n)]$

$$\int_\gamma \int_\gamma Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,\dot{w}\dot{x} = \omega \int_\gamma Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,\dot{w},$$

где ω — площадь поверхности n-мерной единичной сферы. Сделаем замену

$$w_1=\xi, \quad w_i=(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}\,\xi_i, \qquad 2 \leqslant i \leqslant n.$$

Тогда

$$\omega \int_\gamma Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,\dot{w} = 2\omega \int\limits_{w_1^2+\ldots+w_{n-1}^2 \leqslant 1} \ldots \int Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,\frac{dw_1 \ldots dw_{n-1}}{\sqrt{1-w_1^2-\ldots-w_{n-1}^2}} =$$

$$= 2\omega \int_{-1}^{1} Q_\nu(w_1)\,Q_\mu(w_1)\,dw_1 \cdot \int\limits_{w_2^2+\ldots+w_{n-1}^2 \leqslant 1-w_1^2} \ldots \int \frac{dw_2 \ldots dw_{n-1}}{\sqrt{1-w_1^2-\ldots-w_{n-1}^2}} =$$

$$= 2\omega \int_{-1}^{1} Q_\nu(\xi)\,Q_\mu(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi \cdot \int\limits_{\xi_2^2+\ldots+\xi_{n-1}^2 \leqslant 1} \ldots \int \frac{d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}}{\sqrt{1-\xi_2^2-\ldots-\xi_{n-1}^2}} =$$

$$= \omega\omega' \int_{-1}^{1} Q_\nu(\xi)\,Q_\mu(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi, \tag{7.3.5}$$

где ω' — площадь поверхности $(n-1)$-мерной единичной сферы. В силу равенств (7.3.4) и (7.3.5) получаем

$$\int_{-1}^{1} Q_\nu(\xi)\,Q_\mu(\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi = \frac{N_\nu - N_{\nu-2}}{\omega\omega'}\,\delta_{\mu\nu}. \tag{7.3.6}$$

Согласно теореме 7.1.1

$$Q_\nu(\xi) = c\,C_\nu^{\frac{n}{2}-1}(\xi). \tag{7.3.7}$$

Определим постоянную c. В силу (7.3.6) и (7.1.7) имеем

$$\frac{N_\nu - N_{\nu-2}}{\omega\omega'} = c^2 \int_{-1}^{1} \left\{C_\nu^{\frac{n}{2}-1}(\xi)\right\}^2 (1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi = c^2\,\frac{\pi \cdot 2^{3-n} \cdot \Gamma(\nu+n-2)}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^2 \nu!\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)}.$$

Значит,

$$c^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2\cdot\nu!\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{n}{2}+\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{3-n}\cdot\pi\cdot\Gamma(\nu+n-2)}\times$$

$$\times\left[\binom{n+\nu-1}{\nu}-\binom{n+\nu-3}{\nu-2}\right]=\frac{1}{4}\pi^{-n}\cdot\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)^2\cdot\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^2,$$

так что

$$c=\frac{1}{2}\cdot\pi^{-\frac{n}{2}}\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right). \tag{7.3.8}$$

Итак, окончательно

$$\Phi_\nu(u, v)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\left(\nu+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)(uu'vv')^{\frac{\nu}{2}}C_\nu^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{uv'}{\sqrt{uu'vv'}}\right). \tag{7.3.9}$$

§ 7.4. Ортонормальные системы на $\mathfrak{C}_{IV}$

Характеристическое многообразие $\mathfrak{C}_{IV}$ области $\mathfrak{R}_{IV}$ состоит из точек вида

$$u=e^{i\theta}x, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \tag{7.4.1}$$

где x — вещественный вектор, лежащий на единичной сфере в n-мерном эвклидовом пространстве. Для $\dot{u}$ — элемента объема $\mathfrak{C}_{IV}$, имеем выражение $\dot{u}=d\theta\cdot\dot{x}$, где $\dot{x}$ определено равенством (7.2.2).

Пусть $u^{[f]}$ и $\psi_\nu^{(i)}(u)$ то же, что и в § 7.2. Тогда пространство векторов $u^{[f]}$ по-прежнему может быть разложено в прямую сумму инвариантных подпространств, определяемых базисными векторами

$$\left\{(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)\right\}, \qquad i=1, 2, \ldots, N_{f-2l}-N_{f-2l-2}.$$

Мы без труда получаем теорему.

Теорема 7.4.1. *При $f\neq g$ или $l\neq k$, или $i\neq j$ имеем*

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{IV}}(uu')^l\psi_{f-2l}^{(i)}(u)\overline{(uu')^k\psi_{g-2k}^{(j)}(u)}\,\dot{u}=0. \tag{7.4.2}$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_{IV}}|uu'|^{2l}|\psi_{f-2l}^{(i)}(u)|^2\dot{u}=\int\limits_0^\pi d\theta\int\limits_\gamma|\psi_{f-2l}^{(i)}(x)|^2\dot{x}=\pi. \tag{7.4.3}$$

Следовательно, функции

$$\frac{(uu')^l}{\sqrt{\pi}}\psi_{f-2l}^{(i)}(u) \tag{7.4.4}$$

образуют ортонормальную систему на $\mathfrak{C}_{IV}$.

Из этого факта, а также из (7.3.9), (7.1.11) и (7.1.12) мы получаем

$$H(z, \bar{u}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} \sum_{i} (zz')^l (\overline{uu'})^l \psi_{m-2l}^{(i)}(z) \overline{\psi_{m-2l}^{(i)}(u)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} (zz'\overline{uu'})^l \Phi_{m-2l}(z, \bar{u}) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} \left(m - 2l + \frac{n}{2} - 1\right)(zz'\overline{uu'})^l \times$$

$$\times (zz'\overline{uu'})^{\frac{m}{2}-l} C_{m-2l}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{z\bar{u}'}{\sqrt{zz'\overline{uu'}}}\right) =$$

$$= \left(\frac{n}{2}-1\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+1}} \sum_{m=0}^{\infty} (zz'\overline{uu'})^{\frac{m}{2}} C_m^{\frac{n}{2}}\left(\frac{z\bar{u}'}{\sqrt{zz'\overline{uu'}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot (1 - 2z\bar{u}' + zz'\overline{uu'})^{-\frac{n}{2}}. \qquad \textbf{(7.4.5)}$$

Замечание 1. Так как $uu' = e^{2i\theta}$, $\bar{u}'e^{2i\theta} = u'$, то

$$1 - 2z\bar{u}' + zz'\overline{uu'} = \overline{uu'}(uu' - 2z\bar{u}'uu' + zz') =$$

$$= uu'(uu' - 2zu' + zz') = \overline{uu'}(u - z)(u - z)',$$

так что формула Коши может быть записана в виде

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_0^{\pi} \int_{\gamma} \frac{f(e^{i\theta}x)\, e^{in\theta}}{[(e^{i\theta}x - z)(e^{i\theta}x - z)']^{\frac{n}{2}}} d\theta \cdot \dot{x} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}+1}} \int_0^{\pi} \int_{\gamma} \frac{f(e^{i\theta}x)}{[(x - e^{-i\theta}z)(x - e^{-i\theta}z)']^{\frac{n}{2}}} d\theta \cdot \dot{x}. \qquad (7.4.6)$$

§ 7.5. Полная ортонормальная система в $\mathfrak{R}_{IV}$

Мы уже знаем, что функции

$$(zz')^l \psi^{(i)}_{f-2l}(z)$$

образуют в $\mathfrak{R}_{IV}$ полную ортогональную систему. Теперь мы займемся определением постоянной

$$\tau_{l,\, f-2l} = \int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} |zz'|^{2l} \left|\psi^{(i)}_{f-2l}(z)\right|^2 \dot{z},$$

или, что то же самое,

$$\tau_{l,\, f-2l} = \frac{1}{N_{f-2l} - N_{f-2l-2}} \int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} |zz'|^{2l} \Phi_{f-2l}(z, \bar{z}) \dot{z}. \qquad (7.5.1)$$

Если мы начнем с вычисления интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} (z\bar{z}')^s |z\bar{z}'|^{2t} \dot{z},$$

то задача окажется совсем не такой простой. Поэтому мы предпочтем менее прямой путь. Из определения ядра Бергмана и из его выражения для $\mathfrak{R}_{IV}$ следует, что

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})}(1 - 2z\bar{z}' + |zz'|^2)^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} \frac{1}{\tau_{l,\, m-2l}} |zz'|^{2l} \Phi_{m-2l}(z, \bar{z}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[m/2]} \frac{|zz'|^m \left(m - 2l + \frac{n}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\tau_{l,\, m-2l} \cdot 2\pi^{\frac{n}{2}}} C^{\frac{n}{2}-1}_{m-2l}(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \sum_{m=0}^{\infty} |zz'|^m \sum_{l=0}^{[m/2]} \frac{m - 2l + \frac{n}{2} - 1}{\tau_{l,\, m-2l}} C^{\frac{n}{2}-1}_{m-2l}(\xi),$$

где $\xi = \frac{z\bar{z}'}{|zz'|}$.

С другой стороны, согласно (7.1.2), мы имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} w^m C^{\lambda}_m(\xi) = (1 - 2w\xi + w^2)^{-\lambda},$$

откуда

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})}(1 - 2z\bar{z}' + |zz'|^2)^{-n} = \frac{1}{V(\mathfrak{R}_{IV})} \sum_{m=0}^{\infty} |zz'|^m C^n_m(\xi).$$

Сравнивая коэффициенты, находим

$$\frac{1}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})} C_m^n(\xi) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\sum_{l=0}^{[m/2]}\frac{m-2l+\frac{n}{2}-1}{\tau_{l,\,m-2l}} C_{m-2l}^{\frac{n}{2}-1}(\xi).$$

Согласно (7.1.11)

$$C_m^{\nu}(\xi) = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{[m/2]} c_k C_{m-2k}^{\lambda}(\xi),$$

где

$$c_k = \frac{(m-2k+\lambda)\,\Gamma(k+\nu-\lambda)\,\Gamma(m+\nu-k)}{k!\,\Gamma(\nu-\lambda)\,\Gamma(m-k+\lambda+1)}.$$

Значит,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n-l)}{V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}})\,\Gamma(n)\,l!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(m-l+\frac{n}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(m-2l+\frac{n}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}\tau_{l,\,m-2l}},$$

и мы получаем

$$\tau_{l,\,m-2l} = \frac{l!\,\Gamma(n)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(m+\frac{n}{2}-l\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n-l)} V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}). \qquad (7.5.2)$$

В заключение напишем

$$\int_{\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}} |zz'|^{2l}\,\Phi_{f-2l}(z,\bar{z})\,\dot{z} =$$

$$= (N_{f-2l} - N_{f-2l-2})\frac{l!\,\Gamma(n)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(f+\frac{n}{2}-l\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(f+n-l)} V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}). \qquad (7.5.3)$$

Так как

$$N_{f-2l} = \frac{(n+f-2l-1)!}{(f-2l)!\,(n-1)!}, \qquad V(\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}) = \frac{\pi^n}{2^{n-1}\,n!},$$

а

$$\Phi_{f-2l}(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\left(f-2l+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)|zz'|^{f-2l}C_{f-2l}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right),$$

то формула (7.5.3) эквивалентна следующей формуле

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} |zz'|^f C_{f-2l}^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right)\cdot \dot{z} =$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{(n+f-2l-3)!}{(f-2l)!\,(n-3)!}\cdot \frac{l!\,\Gamma\left(f+\frac{n}{2}-l\right)}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(f+n-l)}. \qquad (7.5.4)$$

Ниже мы получим прямое доказательство формулы (7.5.4).

§ 7.6. Сведение многократного интеграла к однократному

Как мы знаем, область $\mathfrak{R}_{IV}$ может быть определена неравенством

$$xx'+yy'+2\sqrt{xx'yy'-(xy')^2}<1,$$

где положено $z=x+iy$ (см. § 2.5).

Рассмотрим интеграл

$$I=\int\limits_{\mathfrak{R}_{IV}} |zz'|^f F\left(\frac{z\bar{z}'}{|zz'|}\right)\dot{z}. \qquad (7.6.1)$$

При фиксированном x сделаем замену переменного

$$y=\sqrt{xx'}\,u.$$

Тогда, очевидно, $\dot{y}=(xx')^{\frac{n}{2}}\,\dot{u}$. Область интегрирования будет теперь определяться неравенством

$$xx'\left(1+uu'+2\sqrt{uu'-\left(\frac{xu'}{\sqrt{xx'}}\right)^2}\right)<1.$$

Возьмем такую ортогональную матрицу Γ с определителем, равным 1, что

$$x\Gamma=(\sqrt{xx'},\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

и сделаем замену

$$u\Gamma=(\xi,\ v),$$

где v — $(n-1)$-мерный вектор, $v=(v_2,\ \ldots,\ v_n)$. Так как

$$z\bar{z}'=xx'+yy'=xx'(1+\xi^2+vv')$$

и

$$|zz'|^2=(xx'-yy')^2+4(xy')^2=(xx')^2\{(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2\},$$

то мы имеем

$$I=\int\limits_{xx'(1+\xi^2+vv'+2\sqrt{vv'})<1}(xx')^{f+\frac{n}{2}}\{(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2\}^{\frac{f}{2}}\times$$
$$\times F\left(\frac{1+\xi^2+vv'}{[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{1/2}}\right)d\xi\cdot\dot{v}\cdot\dot{x}.$$

Далее, с помощью равенства

$$\int\limits_{xx'\leqslant A^2}(xx')^{f+\frac{n}{2}}\dot{x}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^A r^{n-1}\cdot r^{2f+n}dr=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{A^{2(f+n)}}{f+n},$$

получаем

$$I=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(f+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int(1+\xi^2+vv'+2\sqrt{vv'})^{-(f+n)}\times$$
$$\times[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{1+\xi^2+vv'}{[(1-\xi^2-vv')^2+4\xi^2]^{1/2}}\right)d\xi\cdot\dot{v}=$$
$$=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\cdot 2^n}{(f+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{v_i\geqslant 0,\ \xi\geqslant 0}\dots\int(*)\,d\xi\cdot\dot{v}. \qquad (7.6.2)$$

Положим $vv'=\eta^2$, $\eta>0$, $v_2=\sqrt{\eta^2-v_3^2-\dots-v_n^2}$. Тогда

$$\dot{v}=\frac{\eta\,d\eta\,dv_3\dots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\dots-v_n^2}},$$

и мы получаем

$$I=\frac{2^n\pi^{\frac{n}{2}}}{(f+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{\substack{v_i\geqslant 0,\ i=3,\dots,n\\ \xi\geqslant 0,\ \eta\geqslant 0}}\dots\int(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}\{(1-\xi^2-\eta^2)+4\xi^2\}^{\frac{f}{2}}\times$$
$$\times F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)\frac{\eta\,d\eta\,d\xi\,dv_3\dots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\dots-v_n^2}}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\substack{v_3^2+\dots+v_n^2\leqslant\eta^2\\ v_3\geqslant 0,\dots,v_n\geqslant 0}}\dots\int\frac{dv_3\dots dv_n}{\sqrt{\eta^2-v_3^2-\dots-v_n^2}}=$$
$$=\frac{\eta^{n-3}}{2^{n-2}}\int\limits_{v_3^2+\dots+v_n^2\leqslant 1}\dots\int\frac{dv_3\dots dv_n}{\sqrt{1-v_3^2-\dots-v_n^2}}=\frac{\eta^{n-3}}{2^{n-2}}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

мы получаем

$$I=\frac{2^n\pi^{\frac{n}{2}}}{(f+n)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}\times$$

$$\times\{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2\}^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)\eta^{n-2}\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^\infty\int_0^\infty(1+\xi^2+\eta^2+2\eta)^{-(f+n)}\times$$

$$\times\{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2\}^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{1+\xi^2+\eta^2}{\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2}}\right)\eta^{n-2}\,d\xi\,d\eta$$

$\left[\text{мы воспользовались формулой } \Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2x)\,2^{1-2x}\right]$.

Заметим, что

$$(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2=(1+\xi^2+\eta^2)^2-4\eta^2,$$

и сделаем замену переменной $\tau=\frac{1+\xi^2+\eta^2}{2\eta}$. Тогда

$$\frac{1+\eta^2}{2\eta}\leqslant\tau<\infty,\qquad d\tau=\frac{\xi}{\eta}\,d\xi,\qquad d\xi=\frac{\eta\,d\tau}{\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}},$$

и мы получаем

$$I=\frac{2^n\pi^{n-1}}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_0^\infty\frac{d\eta}{\eta}\int_{\frac{1+\eta^2}{2\eta}}^\infty 2^{-n}(1+\tau)^{-(f+n)}\times$$

$$\times(\tau^2-1)^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}.$$

Но

$$\int_{2\eta\tau-1-\eta^2\geqslant 0}\frac{d\eta}{\eta\sqrt{2\eta\tau-1-\eta^2}}=\pi,$$

и мы получаем окончательно

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\Gamma(n-1)}\int_1^\infty(\tau+1)^{-(f+n)}(\tau^2-1)^{\frac{f}{2}}F\left(\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}\right)d\tau. \qquad (7.6.3)$$

§ 7.7. Другая форма равенства (7.6.3)

Положим

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-1}},\qquad d\tau=-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}\,dt.$$

Тогда (7.6.3) примет вид

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\,\Gamma(n-1)}\int_1^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(f+n)}(t^2-1)^{\frac{n-3}{2}}F(t)\,dt. \quad (7.7.1)$$

Чтобы доказать теперь (7.5.4), нам достаточно установить, что

$$\int_1^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(2l+m+n)}(t^2-1)^{\frac{n-3}{2}}C_m^{\frac{n}{2}-1}(t)\,dt=$$

$$=\frac{(2l+m+n)(n-2)}{2^n}\cdot\frac{l!\,(n+m-3)!\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+l\right)}{m!\,\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n+l)}. \quad (7.7.2)$$

По формуле Родрига имеем

$$(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}C_m^{\frac{n}{2}-1}(t)=$$

$$=\frac{(-2)^m}{m!}\cdot\frac{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}-1\right)\Gamma(m+n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma(2m+n-2)}\cdot\left(\frac{d}{dt}\right)^m(1-t^2)^{m+\frac{n-3}{2}}.$$

Поэтому (7.7.2) сводится к равенству

$$\int_1^\infty\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^{-(2l+m+n)}\left(\frac{d}{dt}\right)^m(t^2-1)^{m+\frac{n-3}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{m+n-1}}\cdot\frac{(2l+m+n)\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+l\right)\Gamma(2m+n-2)\,l!}{\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m+n+l)\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}-1\right)}. \quad (7.7.3)$$

Эта формула не содержит специальных функций, но ее прямое доказательство представляет значительную трудность.

Сделаем теперь в (7.7.1) замену $t=\operatorname{ch}x$. Тогда получим

$$I=\frac{\pi^n}{(f+n)\,\Gamma(n-1)}\int_0^\infty e^{-x(f+n)}(\operatorname{sh}x)^{n-2}F(\operatorname{ch}x)\,dx. \quad (7.7.4)$$

Равенству (7.5.4) эквивалентна следующая формула:

$$\int_0^\infty e^{-x(m+n+2l)}(\operatorname{sh} x)^{n-2} C_m^{\frac{n}{2}-1}(\operatorname{ch} x)\,dx =$$

$$= \frac{(2l+m+n)(n-2)}{2^n} \cdot \frac{l!\,(m+n-3)!\,\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+l\right)}{m!\,\Gamma\left(l+\frac{n}{2}+1\right)\Gamma(m-n+l)}. \qquad (7.7.5)$$

§ 7.8. Доказательство формулы (7.7.5)

Обозначим

$$a^{(q)} = a(a+1)\ldots(a+q-1).$$

Очевидно

$$\frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)} = a^{(q)}, \quad \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-q)} = (-1)^q(1-a)^{(q)},$$

$$2^{-2q}\frac{\Gamma(a+2q)}{\Gamma(a)} = \left(\frac{a}{2}\right)^{(q)}\left(\frac{a+1}{2}\right)^{(q)}.$$

Обобщенный гипергеометрический ряд определяется (см. Бейли [1]) [1]) равенством

$${}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; z\\ \beta_1, \ldots, \beta_p\end{matrix}\right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)^{(q)}\ldots(\alpha_{p+1})^{(q)}}{(\beta_1)^{(q)}\ldots(\beta_p)^{(q)}} \cdot \frac{z^q}{q!}. \qquad (7.8.1)$$

Лемма 1. При $s > l$

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-xs}(\operatorname{sh} x)^l\,dx = \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}+1\right)}.$$

Доказательство. Делая замену $y = e^{-2x}$, получаем

$$I_1 = \frac{1}{2^l}\int_0^\infty e^{-(s-l)x}(1-e^{-2x})^l\,dx = \frac{1}{2^{l+1}}\int_0^1 y^{\frac{s-l}{2}-1}(1-y)^l\,dy =$$

$$= \frac{1}{2^{l+1}} \frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma\left(\frac{s-l}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l}{2}+1\right)}.$$

---

[1]) См. также Erdélyi., Magnus и др., Higher transcendental functions, vol. I, 1953. — *Прим. ред.*

Лемма 2. При $s > l+1$

$$I_2 = \int_0^\infty e^{-xs} \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)^l \, dx = s \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-l}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l}{2} + \frac{3}{2}\right)}.$$

Доказательство. В силу леммы 1 имеем

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x(s-1)} (\operatorname{sh} x)^l \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x(s+1)} (\operatorname{sh} x)^l \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{s-l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l-1}{2} + 1\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{s-l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l+1}{2} + 1\right)} \right\} =$$

$$= \frac{\Gamma(l+1)}{2^{l+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+l+3}{2}\right)} \left(\frac{s+l+1}{2} + \frac{s-l-1}{2}\right).$$

Лемма 3. Если одно из чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ является отрицательным целым числом, то

$$\int_0^\infty e^{-xs} (\operatorname{sh} x)^{2\lambda} {}_{p+1}F_p \left(\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; \\ \beta_1, \ldots, \beta_p \end{matrix} -\operatorname{sh}^2 x \right) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda + 1\right)} {}_{p+3}F_{p+2} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + 1; 1 \\ \beta_1, \ldots, \beta_p, \frac{s}{2} + \lambda + 1, \lambda + 1 - \frac{s}{2} \end{matrix} \right).$$

Доказательство. Подставим в левую часть равенства выражение (7.8.1) и проинтегрируем почленно. Так как общий член полученного ряда равен

$$(-1)^q \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q! (\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{2\lambda+2q} e^{-xs} \, dx =$$

$$= (-1)^q \cdot \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q! (\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda + 2q + 1)}{2^{2\lambda+2q+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda - q\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda + q + 1\right)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q! (\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \cdot \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^{(q)} (\lambda+1)^{(q)}}{\left(\frac{s}{2} + \lambda + 1\right)^{(q)} \left(\lambda - \frac{s}{2} + 1\right)^{(q)}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} - \lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \lambda + 1\right)},$$

то мы получим утверждение леммы.

Известно (см. Сегё [1], стр. 84), что

$$C_{2\nu}^{\lambda}(x)=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\cdot{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda;\ 1-x^2\\ \lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

По лемме 3 имеем

$$\int_0^\infty(\operatorname{sh}x)^{2\lambda}C_{2\nu}^{\lambda}(\operatorname{ch}x)\,e^{-xs}\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\int_0^\infty(\operatorname{sh}x)^{2\lambda}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda;\ -\operatorname{sh}^2x\\ \lambda+\frac{1}{2}\end{matrix}\right)e^{-xs}\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+1\right)}\,{}_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda,\ \lambda+\frac{1}{2},\ \lambda+1;\ 1\\ \lambda+\frac{1}{2},\ \frac{s}{2}+\lambda+1,\ \lambda-\frac{s}{2}+1\end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\,\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+1\right)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu,\ \nu+\lambda,\ \lambda+1;\ 1\\ \frac{s}{2}+\lambda+1,\ \lambda-\frac{s}{2}+1\end{matrix}\right),$$

где ${}_3F_2$ удовлетворяет условию Заальшютца (см. Бейли [1], стр. 9), т. е. $a+b+c+1=d+e$, и хотя бы одно из a, b, c — отрицательное целое число. Тогда (теорема Заальшютца)

$${}_3F_2\left(\begin{matrix}a,\ b,\ c;\ 1\\ d,\ e\end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(d)\,\Gamma(a-e+1)\,\Gamma(b-e+1)\,\Gamma(c-e+1)}{\Gamma(1-e)\,\Gamma(d-a)\,\Gamma(d-b)\,\Gamma(d-c)}\ ^{1)}.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty(\operatorname{sh}x)^{2\lambda}C_{2\nu}^{\lambda}(\operatorname{ch}x)\,dx=\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda)}{(2\nu)!\,\Gamma(2\lambda)}\cdot\frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+1}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+1\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\lambda+\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)},$$

и равенство (7.7.5) для четных m доказано.

---

1) См. также примечание на стр. 153. *Прим. ред.*

Лемма 4. Если хотя бы одно из $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ — отрицательное целое число, то

$$\int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{2\lambda}\, {}_{p+1}F_p\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}; & -\operatorname{sh}^2 x\\ \beta_1, \ldots, \beta_p & \end{matrix}\right) e^{-sx} \operatorname{ch} x\, dx =$$

$$= s \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)} \times$$

$$\times\, {}_{p+3}F_{p+2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}, & \lambda+\frac{1}{2}, & \lambda+1; & 1\\ \beta_1, \ldots, \beta_p, & \lambda-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}, & \lambda+\frac{s}{2}+\frac{3}{2} & \end{matrix}\right).$$

Доказательство. Подставляя в левую часть выражение (7.8.1) и интегрируя почленно, получаем, что общий член равен

$$(-1)^q \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q!\,(\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{2\lambda+2q} \operatorname{ch} x \cdot e^{-xs}\, dx =$$

$$= (-1)^q \cdot s \cdot \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q!\,(\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{(q)}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+2q+1)}{2^{2\lambda+2q+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda-q\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda+q\right)} =$$

$$= s\, \frac{(\alpha_1)^{(q)} \ldots (\alpha_{p+1})^{(q)}}{q!\,(\beta_1)^{(q)} \ldots (\beta_p)^{q}} \cdot \frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^{(q)} (\lambda+1)^{(q)}}{\left(\lambda-\frac{s-3}{2}\right)^{(q)} \left(\lambda+\frac{s+3}{2}\right)^{(q)}} \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)},$$

что и дает нам утверждение леммы.

Известно, что

$$C_{2\nu+1}^{\lambda}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\,\Gamma(2\lambda)} \cdot x \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\nu, & \nu+\lambda+1, & 1-x^2\\ & \lambda+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right).$$

Отсюда по лемме 4

$$I = \int_0^\infty (\operatorname{sh} x)^{2\lambda} C_{2\nu+1}^{\lambda}(\operatorname{ch} x)\, e^{-xs}\, dx = \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!\,\Gamma(2\lambda)} \times$$

$$\times\, s \cdot \frac{\Gamma(2\lambda+1)}{2^{2\lambda+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)}\, {}_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu, & \nu+\lambda+1, & \lambda+\frac{1}{2}, & \lambda+1; & 1\\ \lambda+\frac{1}{2}, & \lambda-\frac{s-3}{2}, & \lambda+\frac{s+3}{2} & & \end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1) \cdot s \cdot \lambda \cdot \Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{(2\nu+1)!\,2^{2\lambda+1} \cdot \Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)}\, {}_3F_2\left(\begin{matrix}-\nu, & \nu+\lambda+1, & \lambda+1; & 1\\ \frac{s+3}{2}+\lambda, & \lambda-\frac{s-3}{2} & & \end{matrix}\right).$$

Используя теорему Заальшютца, получаем

$$I=\frac{s\lambda}{2^{2\lambda+1}}\cdot\frac{\Gamma(2\nu+2\lambda+1)}{(2\nu+1)!}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda\right)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}-\lambda-\nu\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}+\lambda+\nu\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)},$$

и (7.7.5) полностью доказано.

ЛИТЕРАТУРА

Бейли (Bailey W. N.)

[1] Generalized hypergeometric series, Cambridge tracts, № 32, 1935.

Бенке, Туллен (Behnke H., Thullen P.)

[1] Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Ergebnisse der Math., Vol. 3, № 3, Berlin, 1934.

Бергман (Bergmann S.)

[1] Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec applications à la thèorie des fonctions analytiques, Gauthier — Villars, Paris, 1947.

[2] Kernel function and extended classes in the theory of functions of several complex variables, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes, tenu à Bruxelles, 1953, 125—157.

Борель (Borel A.)

1] Les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes, Bull. Soc. Math. France, 80 (1952), 167—182.

Бохнер (Bochner S.)

[1] Group invariance of Cauchy's formula in several variables. Ann. of Math., 45 (1944), 686—707.

[2] A theorem on analytic continuation of functions in several variables, Ann. of Math., 39 (1938), 14—19.

[3] Boundary values of analytic functions in several variables and of almost periodic functions, Ann. of Math., 45 (1944), 708—722.

Бохнер, Мартин (Bochner S., Martin W. T.)

[1] Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951.

Вейль А. (Weil A.)

[1] Интегрирование в топологических группах, ИЛ, М., 1950.

[2] L'Intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, Math. Ann. 111 (1935), 178—182.

Вейль Г. (Weyl H.)

[1] Harmonics on homogeneous manifolds, Ann. of Math., 35 (1934), 486—499.

[2] Классические группы, ИЛ, М., 1947.

Вейль, Петер (Weyl H., Peter F.)

[1] Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., 97 (1927), 737—755.

Зигель (Siegel C. L.)
[1] Symplectic geometry, Amer. J. Math., 45 (1943), 1—86.
Картан А. (Cartan H.)
[1] Sur les fonctions de deux variables complexes et problème de la représentation analytique, J. Math. pures et appl, ser. 9, 10 (1931), 1—114.
Картан Э. (Cartan E.)
[1] Sur les domaines bornés homogenes de l'espace de n variables complexes, Hamburg Univ. Math. Sem. Abhandl., 11 (1935), 116—162.
Митчелл (Mitchell J.)
[1] The kernel function in the geometry of matrices, Duke Math. J., 19 (1952), 575—583.
[2] Potential theory in the geometry of matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 401—422.
Мурнаган (Murnaghan F. D.)
[1] Теория представлений групп, ИЛ, М., 1950.
Понтрягин Л. С.
[1] Непрерывные группы, ГТТИ, М.—Л., 1954.
Рыжик И. М. и Градштейн И. С.
[1] Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М., 1951.
Сеге (Szegö G.)
[1] Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Col. Publ., Vol. 23, 1938.
Тралл (Thrall R. M.)
[1] On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring, Amer. J. of Math., 64 (1942), 371—388.
Хуа Ло-кен (Hua L. K.)
[1] On the theory of automorphic functions of a matrix variables, 1, Geometrical basis, Amer. J. Math., 66 (1944), 470—488.
[2] On the theory of automorphic functions of a matrix variables, II, The classification hypercircles under the symplectic group, Amer. J. Math., 66 (1944), 531—561.
[3] On the theory of Fuchsian functions of several variables, Ann. of Math., 47 (1946), 167—191.
[4] О теории функций многих комплексных переменных, I, Полные ортонормальные системы в пространствах матриц, Acta Math. Sinica, 2(1952), 288—323, (по-китайски).
[5] О теории функций многих комплексных переменных, II, Полные ортонормальные системы на гиперсферах Ли, Acta Math. Sinica, 5 (1955), 1—25, (по-китайски).
[6] О теории функций многих комплексных переменных, III, Полные ортонормальные системы в пространствах симметрических и кососимметрических матриц, Acta Math. Sinica., 5 (1955), 205—242, (по-китайски).
[7] Некоторые определенные интегралы, Acta Math. Sinica, 6 (1956), (по-китайски).

[8] On a system of partial differential equations, Sci. Rec., New ser., (6), 1 (1957), 7—9.

Хуа Ло-кен, Лу (Hua L. K., Look K. H.)

[1] On Cauchy formula for the space of skew-symmetric matrices of odd order, Sci. Rec., New ser., (1), 2 (1958), 19—22.

[2] Boundary properties of the Poisson integral of Lie sphere, Sci. Rec., New ser. (2), 2 (1958), 77—80.

[3] Theory of harmonic functions of classical domains, I, The harmonic functions of the hyperbolic space of matrices Acta Math. Sinica, 8 (1958), 531—547.

Фукс Б. А.

[1] Теория аналитических функций многих комплексных переменных, ГТТИ, М.—Л., 1948.

Эрдели, Магнус и др. (Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi)

[1] Higher transcendental functions, vol. I, 1953.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Березин Ф. А., Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, Труды Моск. матем. об-ва, 6 (1957), 371—463.

[2] Березин Ф. А., и Гельфанд И. М., Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, Труды Моск. матем. об-ва, 5 (1956), 311—352.

[3] Гельфанд И. М., Сферические функции на симметрических римановых пространствах, ДАН СССР, 70 (1950), 5—8.

[4] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Унитарные представления вещественной унимодулярной группы (основные невырожденные серии), Изв. АН СССР, сер. матем., 17 (1953), 189—248.

[5] Гельфанд И. М. и Граев М. И., Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. I, Труды Моск. матем. о-ва, 8 (1959), 321—390.

[6] Гельфаид И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления классическнх групп, Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 36 (1950).

[7] Гельфанд И. М. и Пятецкий-Шапиро И. И., Теория представлений и теория автоморфных функций, Успехи матем. наук, 14, вып. 2 (86), (1959), 171—194.

[8] Граев М. И., Унитарные представления вещественных простых групп Ли, Труды Моск. матем. об-ва, 7 (1958), 335—389.

[9] Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, ИЛ, М., 1954.

[10] Карпелевич Ф. И., Геодезические линии и гармонические функции на симметрических пространствах, ДАН СССР, **124** (1959), 1119—1202.

[11] Пятецкий-Шапиро И. И., Дискретные подгруппы группы аналитических автоморфизмов полицилиндра и полилинейные формы, ДАН СССР, **124** (1959), 760—763.

[12] Cartan E., Sur la determination d'un systeme ortogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Rend. Circ. mat. Palermo, **53** (1929), 217—252.

[13] Godement R., A theory of spherical functions, I, Trans. Amer. Math. Soc., **73** (1952).

[14] Harish-Chandra, Spherical functions of a semisimple Lie Groups, Amer. J. of Math., **80**:2 (1958), 241—310; **80**:3, 553—612.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора 5
Предисловие 7

Введение

I. Классические области 9
II. Характеристические многообразия в областях 10
III. Эвристические соображения 11
IV. Замечания относительно используемых методов 14
V. Применения к теории представлений 16

Глава I. **Алгебраический аппарат** 19

§ 1.1. Алгебраические тождества 19
§ 1.2. Тождества, содержащие степенные ряды 25
§ 1.3. Тождественные соотношения для $N(f_1, \ldots, f_n)$ 33
§ 1.4. Тождественные соотношения для характеров 34

Глава II. **Вычисление некоторых интегралов** 37

§ 2.1. Матричные аналоги интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}$ 37

§ 2.2. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{I}}$ 44
§ 2.3. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{II}}$ 46
§ 2.4. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{III}}$ 49
§ 2.5. Полный объем области $\mathfrak{R}_{\mathrm{IV}}$ 50

Глава III. **Полярные координаты матриц** 55

§ 3.1. Элемент объема пространства унитарных матриц 55
§ 3.2. Интегралы по пространству классов смежности унитарной группы 58
§ 3.3. Полярные координаты эрмитовых матриц 60
§ 3.4. Полярные координаты произвольных квадратных матриц . . 61
§ 3.5. Полярные координаты симметрических матриц 65
§ 3.6. Полярные координаты кососимметрических матриц 70
§ 3.7. Объем пространства вещественных ортогональных матриц и применения 74

Глава IV. **Некоторые общие теоремы и их применения** 79

§ 4.1. Введение 79
§ 4.2. Ядро Бергмана 81
§ 4.3. Ядра Бергмана для областей $\mathfrak{R}_{I}$, $\mathfrak{R}_{II}$ и $\mathfrak{R}_{III}$ 84
§ 4.4. Ядро Бергмана для области $\mathfrak{R}_{IV}$ 87
§ 4.5. Ядро Коши 89
§ 4.6. Формула Коши 91
§ 4.7. Ядра Коши для классических областей 93
§ 4.8. Ядро Пуассона для круговых областей 97

Глава V. **Гармонический анализ в пространстве прямоугольных матриц** 100

§ 5.1. Ортогональные системы в пространстве прямоугольных матриц 100
§ 5.2. Интегралы от функций, инвариантных при преобразованиях $Z \to \Gamma Z \Gamma^{-1}$ 103
§ 5.3. Ортогональная система и ядро Бергмана 108
§ 5.4. Гармонический анализ на характеристическом многообразии 110
§ 5.5. Интегралы типа Коши 113
§ 5.6. Дифференциальные операторы 116
§ 5.7. Смысл оператора Лапласа на границе $\mathfrak{R}_{I}$ 117
§ 5.8. Поведение интеграла Пуассона на границе $\mathfrak{R}_{I}$ 119
§ 5.9. Решение задачи Дирихле в $\mathfrak{R}_{I}$ 123
§ 5.10. Базис для гармонических функций 124
§ 5.11. Абелева суммируемость рядов Фурье на унитарной группе 126

Глава VI. **Гармонический анализ в пространстве симметрических и кососимметрических матриц** 129

§ 6.1. Ортонормальные системы в пространстве симметрических унитарных матриц 129
§ 6.2. Проекция ядра в подпространство 130
§ 6.3. Ортонормальная система на $\mathfrak{R}_{II}$ 134
§ 6.4. Характеристическое многообразие пространства кососимметрических матриц 136

Глава VII. **Гармонический анализ на сферах Ли** 138

§ 7.1. Многочлены Гегенбауэра 138
§ 7.2. Гармонический анализ на сфере 141
§ 7.3. Проекция ядра в подпространство 143
§ 7.4. Ортонормальные системы на $\mathfrak{C}_{IV}$ 145
§ 7.5. Полная ортонормальная система в $\mathfrak{R}_{IV}$ 147
§. 7.6. Сведение многократного интеграла к однократному 149
§ 7.7. Другая форма равенства (7.6.3) 152
§ 7.8. Доказательство формулы (7.7.5) 153

Литература 158