

HOMOLOGY
and
FEYNMAN INTEGRALS

Rudolph C. HWA

State University
of New York at Stony Brook

Vigdor L. TEPLITZ

Massachusetts Institute
of Technology

W. A. BENJAMIN, INC.

New York, Amsterdam, 1966

Р. Хуа, В. Теплиц

**ГОМОЛОГИЯ
И
ФЕЙНМАНОВСКИЕ
ИНТЕГРАЛЫ**

*Перевод с английского
В. В. ТОЛМАЧЕВА*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1969

Одним из важных направлений современной физики является разработка и применение новых математических методов теоретического анализа, необходимых для решения возникающих в ходе развития науки все новых и все более сложных физических проблем. К числу таких проблем относится анализ фейнмановских интегралов в квантовой теории поля.

В последние годы для рассмотрения этих задач были предложены и начали успешно развиваться методы алгебраической топологии (теория гомологий и когомологий), которые до сих пор не входили в арсенал средств физиков-теоретиков.

Первые его применения к простым и решенным ранее обычными средствами задачам и некоторым новым показали, что этот подход обладает большой эффективностью. По-видимому, в будущем, используя эти методы, удастся получить новые ценные результаты также и для ряда сложных задач, ожидающих своего решения.

Настоящая книга является первой в научной физической литературе попыткой систематического и при этом достаточно простого изложения этих методов для физиков. Она рассчитана на физиков-теоретиков, работающих в области теории поля и физики элементарных частиц, а также математиков, интересующихся методами теоретической физики.

Редакция литературы по физике

Предлагаемая вниманию читателя книга американских физиков Хуа и Теплица имеет целью ввести читателя-физика в круг идей современной алгебраической топологии, познакомить с теорией гомологий и когомологий, которые в настоящее время начали использоваться при исследовании аналитических свойств фейнмановских интегралов в теории квантованных полей.

Фейнмановские интегралы — это просто вклады от отдельных фейнмановских диаграмм; как известно, с помощью последних можно удобно и экономно описать почленно весь ряд теории возмущений, появляющийся в квантовой теории поля для основной величины этой теории, а именно S -матрицы рассеяния. Исследование ряда теории возмущений для S -матрицы — основная проблема квантовой теории поля, проблема, важность которой не требует пояснений.

То более узкое направление работ по квантовой теории поля, которое тесно связано с затрагиваемыми авторами книги вопросами, стало интенсивно развиваться особенно в последние годы; оно возникло из попыток построения строгого математического доказательства спектральных представлений Мандельстама для двухчастичной амплитуды рассеяния [1]. Мандельстам при получении этих представлений опирался на принятую им без доказательства специальную гипотезу о расположении особенностей на комплексной плоскости соответствующих параметров амплитуды рассеяния S -матрицы для двух сталкивающихся и разлетающихся частиц. На основе этой гипотезы и вытекающих из нее спектральных представлений был получен целый ряд важных физических следствий в теории сильных взаимодействий элементарных частиц [2], и поэтому вполне оправданными были те огромные усилия, которые были предприняты физиками для ее строгого обоснования.

При доказательстве представлений Мандельстама и оправдании его гипотезы естественно было обратиться к ряду теории возмущений для соответствующих матричных элементов S -матрицы и пытаться осуществить следующую программу¹⁾.

¹⁾ Следует отметить, что для простейшей задачи потенциального рассеяния указанная программа в настоящее время полностью выполнена [3].

1) Сначала подробно, максимально полно, изучить аналитическую структуру фейнмановских интегралов для вкладов в амплитуду рассеяния, происходящих от важнейших в первых порядках теории возмущений фейнмановских диаграмм, соответствующих этой амплитуде.

2) После этого результаты, полученные для простейших фейнмановских интегралов для данной амплитуды рассеяния, следует обобщить на все фейнмановские интегралы, появляющиеся в теории возмущений. Тогда можно убедиться в правильности предложенной гипотетической аналитической структуры полной амплитуды рассеяния.

Реализация первого этапа этой программы — исследование аналитической структуры вкладов важных диаграмм, возникающих в первых порядках — не была трудной. Предложенная и использованная первоначально самим Мандельштамом, а затем разработанная Ландау, Бьеркеном и Куткоски [4—6] довольно тривиальная математическая техника [7] оказалась весьма эффективной. В последующих работах Идена, Ландсгоффа, Полкинхорна, Тейлора и др. [8—11] по изучению особенностей фейнмановских интегралов эти идеи получили весьма плодотворное развитие. Эта, можно сказать, традиционная техника состоит в том, что сингулярности исследуются непосредственно, без введения какого-либо специального математического аппарата, с помощью самых обычных математических методов [12]. Однако реализация второго этапа программы — изучение аналитической структуры общего фейнмановского интеграла для вклада общей диаграммы теории возмущений — почти сразу же столкнулась с очень серьезными математическими трудностями.

При переходе к более сложным фейнмановским диаграммам и интегралам теории возмущений, в рамках предложенной математической техники математические (даже скорее чисто технические) трудности становились непомерными, хотя бы уже по одной той причине, что даже простое описание окончательных результатов все возрастающего количества новых сингулярностей для изучаемых новых диаграмм требовало от исследователей очень большого кропотливого труда и внимания и занимало очень много места на бумаге. Совершенно ясно, что

усмотреть что-либо из результатов такого изучения для общей диаграммы теории возмущений оказалось невозможным, хотя именно для этого последнее и проводилось.

Выход из создавшегося положения был недавно найден Фотиади, Фруассаром, Ласку и Фамом [13—16], которые пошли по совершенно новому пути и предложили воспользоваться для исследования фейнмановских интегралов известной в алгебраической топологии математической теорией гомологий и когомологий. Суть этого нового подхода состоит в следующем. Вместо составления подробных описаний сложных римановых поверхностей, на которых заданы соответствующие функции комплексного переменного, связанные с фейнмановскими интегралами (что проводилась в более ранних работах), предлагается описывать топологию этих поверхностей при помощи связанных с ними цепочками так называемых групп гомологий. Таким образом, задача исследования аналитических особенностей фейнмановского интеграла сводится к чисто алгебраической задаче определения, или, как говорят, вычисления соответствующих гомологических групп. Фотиади и др. удалось найти эффективный совершенно новый математический аппарат, с помощью которого элегантно и с единой точки зрения решаются все вопросы, связанные с исследованиями фейнмановских интегралов.

Правда, здесь следует отметить, что основная математическая идея об использовании теории гомологий для исследования сложных интегралов на алгебраических поверхностях (к числу таких интегралов относятся и рассматриваемые фейнмановские интегралы) не является новой и уже рассматривалась в русской математической литературе. Как известно, имеются очень содержательные работы И. Г. Петровского, а также В. А. Боровикова [17—20], посвященные выводу необходимых и достаточных условий существования лакун (областей в основании характеристического конуса, где решение обращается в нуль) у фундаментальных решений линейных гиперболических уравнений, в которых возникающие сложные интегралы на алгебраических поверхностях изучались методами алгебраической топологии еще задолго до Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама.

Настоящая книга возникла как результат обсуждений основных работ Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама, проводившихся на семинарах по теоретической физике в Радиационной лаборатории в Беркли. Хорошо разобравшись в существе вопроса, Хуа и Теплиц написали хотя по существу и компилятивную, но очень полезную книгу, в которой в доступной, даже для математически мало подготовленного читателя, форме на большом количестве ясных примеров блестяще изложен весь круг сложных математических вопросов, связанных с указанными работами. Разумно отказавшись от стремления описать имеющийся материал с исчерпывающей математической полнотой, авторы сосредоточили свои основные усилия на том, чтобы дать читателю прежде всего общее представление о предмете, чтобы он увидел контуры красивого стройного здания полной теории. Подход авторов к изложению по существу математического предмета, надо сказать, необычен для современной математической литературы¹⁾; он особенно важен именно сейчас, на начальном этапе, когда получены лишь первые результаты, а впереди множество нерешенных и интересных задач.

Каково же положение в настоящий момент с новым гомологическим методом изучения фейнмановских интегралов? Несомненно, наконец найден, по-видимому, правильный математический язык для исследования и описания сингулярностей фейнмановских интегралов. К настоящему времени этим методом удалось очень просто получить заново почти все важнейшие старые, ставшие теперь классическими, результаты в отношении фейнмановских интегралов простейших диаграмм теории возмущений, диаграмм с одной и двумя замкнутыми петлями, в отношении сингулярностей типа рассмотренных Ландау и других типов, правда, пока что в самом важном случае простых квадратичных пинчей. Вместе с тем гомологическим методом в настоящее время не получено еще большого количества новых

¹⁾ В таком же стиле излагаются вопросы алгебраической топологии в статье Ч. Мизнера, недавно появившейся в сборнике [21]. Нам хотелось бы настоятельно рекомендовать математически неподготовленному читателю при первоначальном изучении дифференцируемых многообразий обратиться именно к этой статье, после чего ему легко будет перейти к более обстоятельному изучению предмета, например, по книге Де Рама [22].

результатов, хотя проявившаяся уже теперь его общность и особая эффективность в решении конкретных задач дают возможность выразить надежду, что этот метод окажется очень перспективным в будущем.

Наблюдающееся сейчас все же еще довольно медленное развитие работ по гомологическому методу объясняется тем, что в нем используется мало знакомый большинству физиков-теоретиков сложный математический аппарат алгебраической топологии. Хотелось бы иметь простое изложение математической теории гомологического метода, скажем подобное тому, которое существует в настоящее время в квантовой механике для математического аппарата теории групп [23]. Книга Хуа и Теплица — лишь самый первый шаг на этом пути.

В американском издании книги в качестве дополнения включены перепечатки ряда статей из периодики, посвященных вопросам изучения сингулярностей фейнмановских интегралов. Кроме упомянутых выше хорошо известных статей [8—11], переводы которых было признано нецелесообразным включить в русское издание, в английское издание включены также репринт основной работы Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама [13], отдельные, хотя и довольно большие куски из двух неопубликованных работ Фотиади и Фама [14], две статьи Федербуша [24, 25] и интересная чисто математическая работа Фама о формуле Пикара — Лефшеца [16]. Из этих работ мы решили включить в перевод, как наиболее интересные, работы [13, 24, 25]; к сожалению, перевод на русский язык работ [14] оказался невозможным ввиду совершенно фрагментарного характера последних.

При переводе на русский язык как основного текста книги, так и статей мы старались математические английские термины переводить терминами, наиболее употребительными в нашей математической литературе; было исправлено имевшееся в английском издании небольшое количество мелких опечаток.

Переводчику хотелось бы здесь поблагодарить И. Б. Адлера за ряд ценных замечаний при просмотре рукописи перевода и указание ряда ссылок на русские математические работы по применению алгебраической топологии к изучению сложных интегралов.

В. В. Толмачев

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelstam S., Phys. Rev., 112, 1344 (1958); 115, 1741, 1752 (1959).
2. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», сборник статей, ИЛ, 1960.
3. де Альфаро В., Редже Т., Потенциальное рассеяние, изд-во «Мир», 1966.
4. Ландау Л. Д., Nuclear Physics, 13, 181 (1959).
5. Bjorken J. B., Preprint, Stanford University, 1959.
6. Cutkosky R. E., Journ. Math. Phys., 1, 429 (1960).
7. Hadamard J., Acta Math., 22, 55 (1898).
8. Eden R. J., Phys. Rev., 119, 1763 (1960).
9. Eden R. J., Landshoff P. V., Polkinghorne J. C., Taylor J. C., Journ. Math. Phys., 2, 656 (1961).
10. Fairlie D. B., Landshoff P. V., Nuttall J., Polkinghorne J. C., Journ. Math. Phys., 3, 594 (1962).
11. Fairlie D. B., Landshoff P. V., Nuttall J., Polkinghorne J. C., Phys. Letters, 3, 55 (1962).
12. Eden R. J., Landshoff P. V., Polkinghorne J. C., Taylor J. C., The Analytic S-Matrix, Cambridge, 1966.
13. Fotiadi D., Froissart M., Lascoux J., Pham F., Topology, 4, 159 (1965).
14. Fotiadi D., Pham F., Preprint I and II, Centre de Physique Theorique de l'Ecole Normal, 1965 (не опубликовано).
15. Pham F., Ph. D. thesis, Paris, 1965.
16. Pham F., Bull. Soc. Math. France, 93, 333 (1965).
17. Петровский И. Г., О диффузии волн и лакунах для систем гиперболических уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, № 3, 101 (1944).
18. Петровский И. Г., On the diffusion of waves and lacunas for hyperbolic equation, Математический сборник, новая серия, 17(59), 3, 1945.
19. Боровиков В. А., Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Труды Моск. матем. общества, т. 8, 1959, стр. 199.
20. Боровиков В. А., Некоторые достаточные условия отсутствия лакун, Математический сборник, т. 55, вып. 3, 1961, стр. 237.
21. «Гравитация и топология», сборник статей, изд-во «Мир», 1966.
22. де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1957.
23. Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, 1961.
24. Federbush P., Journ. Math. Phys., 6, 641 (1965).
25. Federbush P., Journ. Math. Phys., 6, 825 (1965).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вскоре после того, как Мандельштам предложил свои двойные спектральные представления для амплитуд рассеяния, в течение нескольких лет ряд исследователей предпринимали согласованные усилия по изучению аналитической структуры таких амплитуд в рамках теории возмущений. Первоначальная цель состояла в том, чтобы, определив все сингулярности матричных элементов матрицы рассеяния для фейнмановской диаграммы данного порядка, обобщить затем результаты этих исследований на любой порядок в надежде доказать таким образом представления Мандельштама в рамках теории возмущений. Первый шаг для ряда простых диаграмм удалось сделать сравнительно просто, и была получена большая информация относительно аналитических свойств соответствующих фейнмановских интегралов. Однако, распространение рассмотрений на более сложные диаграммы, не говоря уже о полной амплитуде произвольного порядка, встретило непреодолимые трудности. Стало ясно, что применяемая математическая техника (составление подробных описаний сингулярностей) совершенно не годится для изучения общей проблемы. Рассматриваемые интегралы имеют вид

$$I(t_k) = \int \frac{\prod_{j=1}^l dx_j}{\prod_{i=1}^m s_i(x_j, t_k)},$$

где s_i — некоторые полиномы от x_j и t_k . Даже для таких весьма частных и простых интегралов описание структуры римановой поверхности по внешним переменным t_k оказалось настолько затрудненным, что всякие попытки объединения результатов при-

водили только к путанице и отчаянию. Все более ощущалась настоятельная потребность в новом методе, который позволил бы эффективно вести систематическое исследование.

Не так давно Фотиади, Фруассар, Ласку и Фам предложили привлечь к изучению аналитической структуры фейнмановских интегралов гомологический метод. Переформулировав проблему и применив некоторые важные теоремы алгебраической топологии, они свели геометрическую задачу определения структуры римановой поверхности для фейнмановских интегралов к чисто алгебраической. Описание поверхности выразилось в групповых терминах; результаты тоже представились в значительно более простой форме. Гомологический подход не только дал систематический язык для крайне сжатого и четкого описания классических результатов; этот подход, кажется, вообще является единственно возможным при изучении общей амплитуды рассеяния.

В настоящее время применение гомологии к задачам аналитичности амплитуд рассеяния находится еще на начальной стадии. Медленные темпы развития этой важной ветви математической физики объясняются, возможно, во-первых, тем, что указанная математическая техника является новой и необычной для большинства физиков, и, во-вторых, тем, что соответствующие физические проблемы неизвестны и неинтересны большинству математиков. Чтобы как-то изменить сложившуюся ситуацию, и была написана настоящая монография.

С самого начала мы предположили, что существуют два типа читателей, для которых была бы интересна эта книга: физики-теоретики с обычными знаниями математики, а также физически настроенные математики с обычным для них знанием физики.

Если читатель соединяет в себе оба эти типа, ему нужно сразу обратиться к прилагаемым к книге репринтам оригинальных статей¹⁾; они избавляют от поисков этих статей в журналах. Авторы сознают, что из-за разного уровня подготовленности читателей кому-нибудь из них некоторые части книги могут

¹⁾ В русское издание включены переводы трех из девяти репринтов, приложенных к американскому изданию. — *Прим. перев.*

показаться излишними, скучными или тривиальными. Например, в книге даются определения понятий группы, гомоморфизма и т. д. — самых основных математических понятий; вместе с тем приводится подробное описание фейнмановских диаграмм и интегралов, знакомых любому студенту-теоретику.

В гл. 1 дается обзор результатов изучения структуры сингулярностей фейнмановских интегралов при помощи классического метода. Материал главы подобран с учетом истории затрагиваемых в ней вопросов, а также важности их с точки зрения приложений гомологического метода.

В гл. 2 излагаются положения гомологической теории; она составляет математическую основу нового метода. Чтобы дать интуитивное представление о предмете, а не заниматься строгим изложением его (которое всегда можно найти в обычных учебниках), авторы опустили почти все доказательства приводимых теорем; зато возникающие вопросы поясняются многочисленными примерами.

В гл. 3 излагаются все подготовительные результаты, необходимые для ответа на вопрос: что происходит с интегралом, когда неинтегрируемая внешняя переменная пробегает значения на некотором пути, окружающем возможную сингулярность интеграла? Этот вопрос переводится на язык алгебраической топологии; здесь наиболее существенно использование теоремы Пикара — Лефшеца. Содержание главы основано на изложении деталей одной из неопубликованных работ Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама.

Гл. 4 излагает метод этих авторов для определения скачков, связанных с некоторой сингулярностью интеграла; при этом используется язык дифференциальных форм и поэтому дано краткое изложение теории таких форм.

Чтобы дать читателю возможность ориентироваться в имеющейся литературе, его необходимо ввести в круг большого количества современных математических идей, которые в настоящее время неизвестны большинству физиков; в гл. 5 предпринята попытка сделать это. Конечно, невозможно полностью изложить все нужные вопросы в небольшой главе. Поэтому мы ограничились определениями и пояснениями различных терминов и поня-

тий, так что читатель (если он захочет) может использовать гл. 5 как удобный справочник и не тратить время на бесполезное перелистывание толстых математических монографий. После чтения гл. 5 ему придется, конечно, обратиться к учебникам для углубления необходимых математических сведений.

В последней, шестой главе мы приводим сводку результатов, которые получены с помощью топологического метода. Эта глава не подводит какой-то черты под сказанным, а скорее должна побудить читателя к новым начинаниям.

Итак, гл. 2 и 5 являются кратким курсом алгебраической топологии, гл. 3, 4 и 6 касаются приложений ее к фейнмановским интегралам. Мы рекомендуем начинать чтение этой книги с примера, приведенного в начале гл. 3; он позволяет получить общее представление о предмете. Для тех, кому слово «гомология» совершенно незнакомо, следует сначала рассмотреть пример, приведенный в начале гл. 2.

Книга была написана по предложению проф. Чью после серии семинаров, которые были организованы с целью изучения работы Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама. Авторы весьма признательны сотрудникам теоретической группы Лоуренсовской радиационной лаборатории в Беркли, которые участвовали в обсуждениях на указанных семинарах, в особенности проф. Омнесу и д-ру Стаппу. Очень полезными для авторов оказались беседы с д-рами Фотиади, Ласку и Фамом, а также личные дискуссии с проф. Федербушем. Особую благодарность авторы хотели бы выразить д-ру Фаму за внимательное чтение рукописи книги и за ценные предложения.

*Р. Хуа
В. Теплиц*

СИНГУЛЯРНОСТИ

§ 1. Введение

В физике элементарных частиц основными величинами являются элементы матрицы рассеяния. В течение последних двадцати лет широко изучались общие свойства этих матричных элементов, а также делались попытки их количественных оценок в специально создаваемых теориях. Однако до сих пор единственной теорией, которая привела к сколько-нибудь существенным количественным результатам, является квантовая электродинамика в формулировке Томонаги, Швингера, Фейнмана и Дайсона, см. [1]¹⁾.

Уравнения движения, описывающие динамическое поведение системы, составленной из электронов и фотонов, являются релятивистскими обобщениями уравнений Шредингера и Максвелла. Квантовая электродинамика стала осмысленной теорией, свободной от внутренних противоречий, когда в ней были устранены известные трудности с расходимостями при помощи так называемой процедуры «ренормировок». После этого были проведены расчеты, которые можно было сравнивать с весьма прецизионными экспериментами над атомными системами; получилось изумительное согласие вычислений с экспериментом с очень высокой точностью.

В существующих расчетах матричные элементы матриц рассеяния разлагаются в ряды теории возмущений по степеням константы электромагнитного взаимодействия (в естественных единицах эта константа α равна $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$). В предложенной Фейнманом формулировке теории каждый член ряда очень наглядно представляется в виде вкладов от определенного типа диаграмм. Существует список правил, с помощью которых вклад в данный элемент матрицы рассеяния, соответствующий некоторой фейнмановской диаграмме, представим в виде интеграла, который может быть выписан только в результате рассмотрения взятой диаграммы. Указанный интеграл называется фейнмановским интегралом; в общем случае это многократный интеграл,

¹⁾ См. также: Ю. Швингер, Теория квантованных полей, ИЛ, 1956. — Прим. перев.

подынтегральное выражение которого является некоторой рациональной функцией переменных интегрирования; интеграл берется в бесконечных пределах. Если отвлечься от расходимостей, возникающих из-за обращения в нуль массы фотона (инфракрасные расходимости), то указанный интеграл всегда можно сделать почти сходящимся, если из него вычтеть соответствующий контринтеграл. После общепринятого переопределения важнейших физических величин (массы и заряда) указанная искусственная процедура вычитания оказывается физически приемлемой.

Попытки приложить квантовую полевую теорию в том виде, в каком она оказалась успешной в случае квантовой электродинамики, к процессам рассеяния с участием сильных взаимодействий потерпели неудачу. Среди многих трудностей, возникающих при этом, следует отметить хотя бы отсутствие внутренней согласованной вычислительной схемы. В случае взаимодействий с участием частиц с большим спином имеются такие расходящиеся интегралы, которые никак нельзя сделать конечными с помощью ренормировок. Вместе с тем сам метод теории возмущений становится неприменимым, поскольку константа связи оказывается слишком велика для того, чтобы использовать ее в качестве малого параметра разложения. По этой причине фейнмановские диаграммы и связанные с ними интегралы для процессов с участием сильных взаимодействий будут рассматриваться в дальнейшем лишь в целях наглядности.

Когда после крушения лагранжевой полевой теории были развиты все возможные (в буквальном смысле слова) подходы к изучению свойств амплитуд рассеяния, выявилась одна общая черта, которая присуща большей части этих подходов: они стремятся выяснить общие аналитические свойства матричных элементов матрицы рассеяния по кинематическим переменным, задающим процесс рассеяния. В аксиоматической формулировке квантовой полевой теории [2]¹⁾ вакуумные средние от произведений полевых операторов оказываются граничными значениями некоторых аналитических функций по импульсам и по скалярным произведениям импульсов; конечно, интересно определить области аналитичности таких функций. В подходе, постулирующем аналитические свойства матричных элементов S -матрицы [3], также оказывается существенным понимание структуры сингулярностей соответствующих аналитических функций.

Поскольку в обеих указанных теориях возникла необходимость определения областей аналитичности функций рассеяния,

¹⁾ См. также: Р. Йост, Общая теория квантованных полей, изд-во «Мир», 1967. — *Прим. перев.*

многие исследователи в течение нескольких последних лет проявили новый интерес к теории возмущений и к изучению аналитических свойств отдельных фейнмановских интегралов. Разумно было бы ожидать, что, несмотря на возможную бессмысленность самой теории возмущений (за исключением случая квантовой электродинамики), из структуры сингулярностей отдельных фейнмановских интегралов можно почерпнуть вполне осмысленную и ценную информацию в отношении аналитических свойств полных амплитуд рассеяния. Так или иначе, множество всех сингулярностей всех фейнмановских интегралов, относящихся к данному процессу рассеяния, исчерпывает все возможные сингулярности рассеяния: знание этого множества, несомненно, полезно хотя бы для дальнейших прогнозов. Кроме того, отдельные фейнмановские интегралы по существу совпадают (с точностью до тривиального множителя) с интегралами унитарности. По этой причине также полезно изучать аналитические свойства общих фейнмановских интегралов.

На протяжении последних лет в отношении сингулярностей фейнмановских интегралов стало известно большое количество фактов; возник даже специальный жаргон — «аномальные пороги», «сингулярности второго рода», «клювы», «разрезы Редже» и т. д. Вместе с тем ввиду крайней сложности фейнмановских интегралов для большинства диаграмм (кроме нескольких простейших) дальнейший прогресс в изучении аналитической структуры полной амплитуды был весьма скудным.

Общий метод, используемый в такого рода исследованиях, заключается в применении обобщенной леммы Адамара [4]. Согласно этой лемме, положение сингулярностей фейнмановского интеграла точно связывается с некоторой системой алгебраических уравнений. Если известны аналитические решения этих уравнений (хотя в общем случае их и очень трудно отыскать), нам остается только определить по ним структуру искомой многолистной римановой поверхности. Однако именно в этом пункте метод отказывается служить, ибо мы должны исследовать сингулярности путем аналитического продолжения. Ясно, что проблема становится совершенно неразрешимой для фейнмановской диаграммы с достаточно сложной внутренней структурой, или же если число внешних линий диаграммы настолько велико, что очень большое число комплексных аргументов у функции делает ее фактическое изучение невозможным. Необходим новый язык, с помощью которого описание свойств различных листов римановой поверхности было бы более доступным.

Гомологическая теория как раз в этом отношении и снабжает нас элегантно и мощным орудием, предлагая совершенно

новый подход к общей проблеме. Предметом гомологической теории является алгебраическое изучение свойств связности топологического пространства. Риман первым (см. [5]) осознал важность топологической структуры кривых при изучении абелевых интегралов от алгебраических функций одного переменного (в этой главе мы дадим краткое изложение теории абелевых интегралов). Пикар также изучал интегралы, связанные с алгебраическими поверхностями, и сумел с помощью аналитических методов достичь глубокого понимания топологических свойств алгебраических поверхностей, хотя развитие топологии в те времена было еще примитивным. После Пикара Лефшец [6] проделал непосредственное топологическое изучение алгебраических образований и вывел заново все топологические результаты Пикара, которые затем использовал для упрощения отдельных моментов общей теории. По-видимому, применение результатов современной математической топологии и связанных с ней других математических теорий должно привести к более глубокому пониманию аналитической структуры сингулярных интегралов, встречающихся в теории рассеяния.

Ниже дается краткий обзор ряда основных результатов, достигнутых чисто аналитическими методами в изучении сингулярных поверхностей фейнмановских интегралов. В последнем параграфе этой главы мы укажем на связь этих результатов с топологической теорией и на элементарном уровне изложим основные свойства абелевых интегралов, следуя основным этапам в истории развития комбинаторной топологии.

§ 2. Ландаувская поверхность

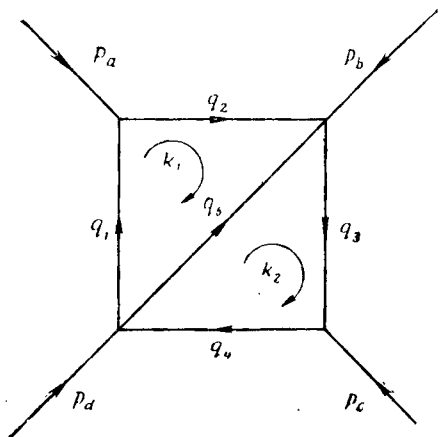
Здесь и в следующем параграфе мы кратко обсудим аналитические свойства фейнмановских интегралов, а также изложим метод, используемый при их изучении. Это мы делаем с двойной целью: во-первых, чтобы проиллюстрировать характер тех математических задач, которые возникают в современной физике; во-вторых, чтобы привести изложение обычного асимптотического метода исследования сингулярностей фейнмановских интегралов и получить возможность сравнить с ним гомологический метод.

Желая обратить внимание лишь на существенные особенности фейнмановских интегралов, которые мы возьмем в качестве отправной точки нашего математического анализа, рассмотрим случай бесспиновых частиц и будем пользоваться следующими правилами выписывания «упрощенных» интегралов по данной фейнмановской диаграмме (читатель, интересующийся деталями, может обратиться к любому стандартному

курсу квантовой теории поля [7]): а) потребуем, чтобы в каждом вертексе диаграммы удовлетворялся закон сохранения 4-импульса; б) определим внутренние импульсы q_j как линейные комбинации внешних импульсов p_l и некоторого числа независимых импульсов петель (k_i ¹⁾), причем в линейных комбинациях все эти импульсы входят с коэффициентами $+1$ и -1 ; в) составим следующий интеграл для данной диаграммы (имеющей n внутренних линий и r независимых внутренних петель):

$$F(p_l) = \int \prod_{i=1}^r d^4 k_i \left[\prod_{j=1}^n (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \right]^{-1}, \quad (1.1)$$

где m_j — масса частицы, связанная с линией j ; ϵ — фейнмановское положительное малое число.



Фиг. 1. Фейнмановская диаграмма с двумя петлями.

После подстановки в (1.1) $q_j = q_j(k_i, p_l)$ подынтегральное выражение оказывается рациональной функцией k_i и p_l . Интегрирование по всем k_i (где $i=1, \dots, r$) распространяется на все бесконечное реальное $4r$ -мерное пространство. Так мы получаем исходную форму фейнмановского интеграла, аналитические свойства которого по переменным p_l будем изучать в дальнейшем.

Проиллюстрируем процедуру составления фейнмановского интеграла по данной фейнмановской диаграмме на простом примере. Возьмем диаграмму, изображенную на фиг. 1. Припишем

¹⁾ Число независимых импульсов петель на единицу больше числа внутренних линий минус число вертексов.

произвольные направления всем линиям диаграммы и будем считать 4-импульсы линий положительными согласно этим направлениям. Законы сохранения импульсов в узлах диаграммы требуют, чтобы

$$\begin{aligned} p_a + q_1 - q_2 &= 0, \\ p_b + q_2 - q_3 + q_5 &= 0, \\ p_c + q_3 - q_4 &= 0, \\ p_d - q_1 + q_4 - q_5 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая k_1 равным q_1 и k_2 равным q_3 , получаем

$$\begin{aligned} q_1 &= k_1, \\ q_2 &= p_a + k_1, \\ q_3 &= k_2, \\ q_4 &= p_c + k_2, \\ q_5 &= p_d + p_c - k_1 - k_2, \\ p_a + p_b + p_c + p_d &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения импульсов q_j в (1.1), мы получаем фейнмановский интеграл для диаграммы, изображенной на фиг. 1.

Чтобы избежать инфракрасных расходимостей [7], предположим, что ни одна из масс m_j не обращается в нуль. Однако даже при этом интеграл (1.1) может расходиться в областях больших значений импульсов k_i и, чтобы приписать ему определенный смысл, нужно его ренормировать, т. е. вычесть из него соответствующие контрчлены. Как это было недавно установлено Хиппом¹⁾, указанные контрчлены не должны иметь других сингулярностей, кроме содержащихся в исходном интеграле. Здесь мы вообще не будем касаться проблемы расходимостей, ограничиваясь изучением сингулярностей функции $F(p_i)$, представляющей конечную часть фейнмановского интеграла и полученной в результате указанной ренормировки.

Обычный метод анализа структуры сингулярностей функции $F(p_i)$ основывается на том, что подынтегральное выражение с самого начала записывают в виде некоторого интеграла по Фейнману [8, 9]

$$\left[\prod_{j=1}^n A_j \right]^{-1} = (n-1)! \int_0^1 \prod_{j=1}^n da_j \left[\sum_{i=1}^n a_i A_i \right]^{-n} \delta \left(1 - \sum_{i=1}^n a_i \right). \quad (1.2)$$

¹⁾ К. Нерр, неопубликованная работа.

Далее (1.2) подставляют в (1.1) и изменяют порядок интегрирования по k_i и α_j ; последнее, конечно, нельзя делать для расходящихся интегралов. Однако, как мы только что сказали, при изучении структуры фейнмановских интегралов мы пренебрегаем проблемой расходимостей от бесконечных значений k_i . Поэтому без колебаний изменяем порядок интегрирования, о котором идет речь, в любом рассматриваемом интеграле. Таким образом с точностью до постоянного множителя получим

$$F(p) = \int_0^1 \prod_{j=1}^n d\alpha_j \int \prod_{i=1}^r d^4 k_i \frac{\delta(i - \sum \alpha_i)}{[\psi(k, p, \alpha) + i\epsilon]^n}, \quad (1.3)$$

где

$$\psi = \sum_{j=1}^n \alpha_j (q_j^2 - m_j^2) \quad (1.4)$$

(здесь для обозначения совокупности внешних импульсов мы пишем просто p).

Прежде чем приступить к выводу условий для сингулярностей функции $F(p)$, рассмотрим сначала простой интеграл

$$f(t) = \int_a^b g(s, t) ds,$$

в котором a и b — две фиксированные точки на комплексной s -плоскости. Когда функция $g(s, t)$ является целой функцией от s и t , функция $f(t)$ также должна быть целой функцией. Когда, наоборот, функция $g(s, t)$ сингулярна на некоторой поверхности $z(s, t) = 0$ в двумерном комплексном пространстве (s, t) , то функция $f(t)$ также может быть сингулярной при некоторых значениях t . Предположим, что $s = s_i(t)$ являются решениями уравнения $z(s, t) = 0$ при различных t ; эти функции описывают положение сингулярностей функции $g(s, t)$ на комплексной плоскости s при фиксированных t . Когда при некотором значении t какая-либо одна из сингулярностей $s_i(t)$ выходит на контур интегрирования, соединяющий точки a и b , то, поскольку контур всегда можно деформировать и избежать попадания сингулярности на него, мы заключаем, что функция $f(t)$ должна быть в этом случае регулярной. Сингулярности $f(t)$ появляются, только когда контур никак не может быть деформирован, чтобы избежать попадания на него сингулярности. Это происходит, если выполняются условия:

а) при некоторых i и t точка $s_i(t)$ совпадает либо с точкой a , либо с точкой b ; возникающие при этом сингулярности обычно называют *граничными сингулярностями*;

б) при некоторых i, j и t точки $s_i(t)$ и $s_j(t)$ совпадают и, таким образом, контур интегрирования зажимается между этими точками; возникающие при этом сингулярности обычно называют *пинчевыми сингулярностями*.

Подобным же образом, как и однократный интеграл, можно рассмотреть соответствующий многократный интеграл. Доказано [4, 10], что при этом для сингулярности многократного интеграла необходимо, чтобы в нем при каждом интегрировании появлялась либо граничная сингулярность, либо пинчевая сингулярность.

Теперь вернемся к рассмотрению интеграла (1.3). Интеграция по k_i ведется там в бесконечных пределах и подынтегральное выражение регулярно при бесконечных k_i ; поэтому единственной причиной появления сингулярностей является пинч пути интегрирования по этим переменным. Так как пинч может возникнуть только тогда, когда два нуля ψ совпадают, то мы должны иметь $\psi=0$ и $\partial\psi/\partial k_i=0$ ($i=1, 2, \dots, r$). При интеграции в конечных пределах по параметрам α_j возможно появление как граничных сингулярностей, так и пинчевых сингулярностей. Ввиду наличия в (1.3) δ -функции, когда какое-нибудь α оказывается равным единице ($\alpha_{j_1}=1$), тогда все оставшиеся α должны обязательно равняться нулю при $j \neq j_1$. Поэтому достаточно рассмотреть только конечные точки при $\alpha_j=0$. Необходимыми условиями появления сингулярностей являются либо $\alpha_j=0$, либо $\partial\psi/\partial\alpha_j=0$ для каждой вакуумной линии j ; эти условия также означают, что $\psi=0$ ввиду однородности функции ψ по α_j . Обратим внимание, что, несмотря на очевидную линейную зависимость ψ от α_j , мы все же можем иметь пинч по переменным α (с требуемыми двойными сингулярностями), ибо после интегрирования по k_i знаменатель становится сложной нелинейной функцией от α . Учитывая (1.4) и линейную зависимость q_j от k_i , соберем вместе и еще раз сформулируем все необходимые условия сингулярностей функции $F(p)$ в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

1. Для каждой независимой замкнутой петли диаграммы должно выполняться равенство $\sum \alpha_i q_i = 0$, где i пробегает все внутренние линии петли;

2. Для каждой внутренней линии диаграммы должно выполняться или $\alpha_j=0$, или $q_j^2 = m_j^2$ ($j=1, 2, \dots, n$).

Приведенные условия известны как условия для сингулярностей Ландау — Бьеркена [11]. Разумеется, в каждом вертексе должен выполняться закон сохранения энергии — импульса; поэтому указанные условия определяют некоторую гиперповерхность сингулярностей в пространстве, натянутом на внешние импульсы. Эту поверхность обычно называют ландауовской поверхностью.

Другая совокупность условий, также полностью задающих ландаувскую поверхность, была указана Иденом [12], который использовал интегральное представление Чисхольма [13] с проведением предварительного интегрирования по внутренним импульсам. Используя линейное преобразование переменных k_i , можно функцию $\psi(k, p, \alpha)$ привести к диагональной форме, т. е. будем иметь

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{ij} \alpha_{ij}(\alpha) k_i k_j + 2 \sum_i b_i(p, \alpha) k_i + c(p, \alpha) = \\ &= \sum_j \alpha'_j(\alpha) (k'_j)^2 + c'(p, \alpha). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение для ψ в формулу (1.3), мы получаем возможность провести интегрирования по внутренним импульсам и получить, с точностью до постоянного множителя, интегральное представление Чисхольма

$$F(p) = \int_0^1 \prod_{j=1}^n d\alpha_j \frac{\delta(1 - \sum \alpha_j) [C(\alpha)]^{n-2r-1}}{[D(p, \alpha)]^{n-2r}}, \quad (1.5)$$

где $D(p, \alpha)$ является дискриминантом функции ψ

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r & c \end{vmatrix}$$

и $C(\alpha)$ — главный минор r -го порядка детерминанта D (т. е. сам детерминант без последнего столбца и последней строки). Могут появляться как пинчевые, так и граничные сингулярности $F(p)$, и необходимыми условиями для их появления будут при всех $i=1, 2, \dots, n$

$$\text{либо } \alpha_i = 0 \text{ (граничная сингулярность),}$$

$$\text{либо } \frac{\partial D}{\partial \alpha_i} = 0 \text{ (пинчевая сингулярность).}$$

Это так называемые дискриминантные условия Идена. Ввиду однородности $D(p, \alpha)$ по α_i из них следует, что $D=0$; это, разумеется, также и необходимое условие. Как и в случае уравнений Ландау — Бьеркена, можно исключить параметры α_i из дискриминантных условий и получить уравнение, характеризующее ландаувскую поверхность.

Рассмотрим снова фейнмановскую диаграмму, изображенную на фиг. 1. В силу закона сохранения импульса $p_a + p_b + p_c + p_d = 0$

мы можем из четырех внешних импульсов составить только два независимых скалярных произведения, кроме задания масс $p_a^2 = m_a^2$ и т. д. Эти скалярные переменные обозначим s и t , так что

$$\begin{aligned} s &\equiv (p_a + p_b)^2 = (q_1 - q_3 + q_5)^2, \\ t &\equiv (p_b + p_c)^2 = (q_2 - q_4 + q_5)^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения Ландау — Бьеркена имеют вид ($j = 1, \dots, 5$)

$$\begin{aligned} \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 - \alpha_5 q_5 &= 0, \\ \alpha_3 q_3 + \alpha_4 q_4 + \alpha_5 q_5 &= 0, \\ q_j^2 &= m_j^2. \end{aligned}$$

Когда ни один из параметров α_j не равен нулю, скалярные произведения $q_i q_j$ должны удовлетворять системе алгебраических уравнений

$$\det(q_i q_j) = 0 \quad \text{при } i, j = 1, 2, 5 \text{ или } 3, 4, 5.$$

Эти уравнения, используемые вместе с (1.6), приводят к уравнению $L(s, t) = 0$, характеризующему ландауовскую поверхность в пространстве, образованном произведением комплексных плоскостей s и t . То же самое уравнение $L(s, t) = 0$ можно было бы получить из дискриминантных условий, налагаемых непосредственно на внешние импульсы.

Уравнение $L(s, t) = 0$ не указывает положения сингулярностей относительно других сингулярностей фейнмановского интеграла, таких, как нормальные пороги или сингулярности редуцированных диаграмм (соответствующие случаям, когда некоторые α_j принимают нулевые значения). Таким образом, структуру многолистной римановой поверхности для данного интеграла нужно еще определить, а чтобы сделать это, необходимо провести аналитическое продолжение (в частности, при помощи так называемой «продолжающей линии» [14]). Конечно, все описанное легко провести, если диаграмма достаточно простая. Однако после нескольких лет исследований стало ясно, что дальнейший прогресс в понимании аналитических свойств общей амплитуды рассеяния серьезно ограничивается недостатками описанного аналитического метода.

§ 3. Пинч в пространстве импульсов

В предыдущем параграфе мы вывели уравнения для ландауовской поверхности, изучая фейнмановский интеграл в параметрической форме; в этой форме знаменатель интеграла ха-

рактически характеризуется единственной функцией $\psi(k, p, \alpha)$ или $D(p, \alpha)$, так что оказывается возможным непосредственно использовать условия Адамара для нахождения сингулярностей. В настоящем параграфе мы изложим другой подход к проблеме (без использования параметрических интегралов); он состоит в рассмотрении пинчевых сингулярностей на массовой поверхности в импульсном пространстве, по которому ведется интегрирование в фейнмановском интеграле. Впервые это сделал Фаулер [15]; на таком пути удастся сразу получить условия Ландау — Бьеркена. Особое достоинство указанного подхода заключается в том, что естественным образом дается общая формулировка условий для пинча поверхностей сингулярностей (эти условия более подробно будут обсуждаться в гл. 3).

В целях иллюстрации метода рассмотрим двойной интеграл, соответствующий собственной энергии в двумерном евклидовом пространстве,

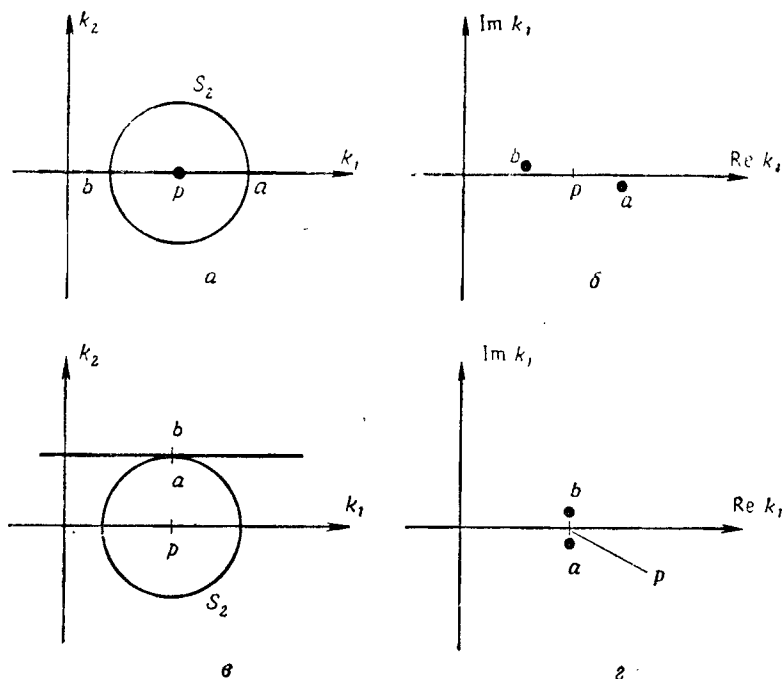
$$I(p) = \int \int \frac{d^2k}{[k^2 - m_1^2 + i\epsilon][k^2 - p^2 - m_2^2 + i\epsilon]}. \quad (1.7)$$

Подынтегральное выражение сингулярно в плоскости фейнмановских переменных k_1, k_2 на двух окружностях радиусов m_1 и m_2 с центрами в точках $k=0$ и $k=p$ соответственно. Конечно, имеется определенное комплексное продолжение этих поверхностей сингулярностей в комплексное пространство четырех реальных измерений. Интегрирование ведется по реальному пространству. Нашей целью является отыскание необходимых условий того, чтобы контуры интегрирования начинали касаться друг друга; тогда интеграл становится сингулярным.

Рассмотрим сначала одну из указанных поверхностей. Ее пересечение с любой двумерной плоскостью в четырехмерном пространстве состоит из двух точек. Так, например, если k_1 мы направим параллельно p , то поверхность S_2 , связанная с m_2 , пересечет комплексную плоскость k_1 , определяемую условием $k_2=0$, в точках $k_1=p \pm (m_2 - i\epsilon)$, как это показано на фиг. 2, а и б. Если плоскость $k_2=0$ поступательно смещается в положение, соответствующее $k_2=m_2$, тогда точки пересечения приближаются одна к другой, как это показано на фиг. 2, в и г. Таким образом, когда рассматриваемая плоскость касается поверхности S_2 , для пути интегрирования по переменной k_1 возникает пинч, связанный с поверхностью S_2 при каждом значении p . Однако это не есть условие появления сингулярности в интеграле, ибо при смещении k_2 на другое значение пинч сразу исчезает. Чтобы пинчевая точка P появилась на плоскости интегрирования, каждая линия на этой плоскости, проходящая через точку P , должна

быть зажата. Очевидно, это возможно в рассматриваемом случае лишь при условии $m_2=0$.

Рассмотрим теперь обе поверхности сингулярностей S_1 и S_2 в (1.7). Если ρ меньше, чем m_1+m_2 , две реальные окружности сингулярностей пересекаются в некоторых двух точках. Пусть L_1 (L_2) состоит из множества всех линий, которые не пересекают



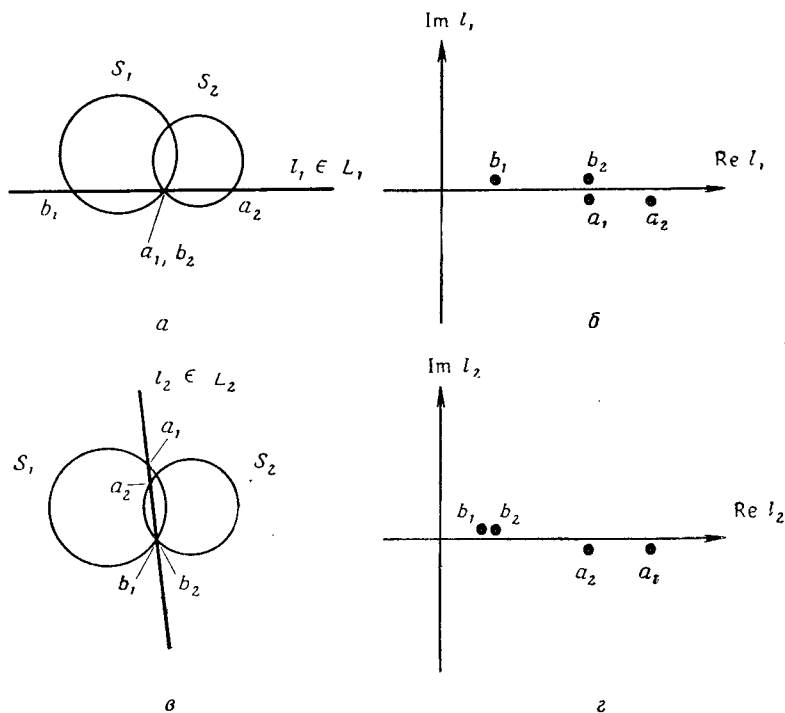
Фиг. 2. Поверхность S_2 и комплексная плоскость k_1 в реальном пространстве (k_1, k_2) .

a случай $k_1=0$, b случай $k_2=m_2$; на b и g изображены сечения S_2 плоскостью k_1 для случаев a и b соответственно.

(или пересекают) множества $D_1 \cap D_2$, где D_1 и D_2 — открытые диски, ограничиваемые рассматриваемыми окружностями.

Покажем теперь, что либо для линий L_1 , либо для линий L_2 имеется пинч. Рассмотрим линию l_1 из L_1 , которая, кроме того, проходит через одну из точек пересечения двух окружностей, как это показано на фиг. 3, a . Тогда комплексные поверхности S_1 и S_2 , соответствующие этим окружностям, пересекают комплексную плоскость l_1 , соответствующую рассматриваемой действительной линии, в четырех точках, как это показано на фиг. 3, b .

Ясно, что путь интегрирования вдоль любой действительной линии из L_1 будет иметь пинч, связанный с S_1 и S_2 в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для линии l_2 из L_2 (фиг. 3, в) четыре точки пересечения показаны на фиг. 3, г. Мы видим, что пинч исчезает. Таким образом, чтобы для плоскости интегрирования существовал пинч, L_2 должно исчезать. Для другого листа малые мнимые добавки



Фиг. 3. Пересечение линий l_i ($i=1, 2$) с поверхностями сингулярностей S_1 и S_2 .

a и $в$ — в действительном пространстве; $б$ и $г$ — на комплексных плоскостях l_i .

к a_2 и b_2 на фиг. 3, б и г будут иметь обратные знаки. В этом случае пинч для плоскости интегрирования возможен лишь тогда, когда L_1 будет исчезать. Итак, необходимым условием пинча является то, что обе окружности касаются друг друга либо внешним, либо внутренним образом, т. е. $p^2 = (m_1 \pm m_2)^2$. Это — хорошо известное утверждение о том, что существуют сингулярности, расположенные на пороге или псевдопороге по переменной p^2 , причем последние не лежат на физическом листе.

Общая формулировка условия касания поверхностей в некоторой точке гласит, что векторы нормалей к поверхности в этой

точке должны быть линейно зависимы. В случае когда подынтегральное выражение имеет n поверхностей сингулярностей S_1, \dots, S_n в пространстве импульсов петель k_i , каждая поверхность S_j ($j=1, 2, \dots, n$) характеризуется уравнением $s_j = q_j^2 - m_j^2 = 0$; нормаль к S_j в пространстве k_i задается производными $\frac{\partial s_j}{\partial k_i}$. В силу линейной зависимости q_j от k_i , если j -я внутренняя линия принадлежит i -й петле, то условие линейной зависимости нормалей к поверхностям требует существования совокупности коэффициентов α_i , которые не все равны нулю и для которых выполняется условие

$$\sum_{\text{петля}} \alpha_i q_i = 0$$

для каждой независимой петли. Эти условия вместе с уравнениями поверхностей $q_j^2 = m_j^2$, конечно, суть не что иное, как условия Ландау — Бьеркена. Мы видим, что фейнмановские параметры α теперь выступают в роли коэффициентов в соотношениях линейных зависимостей.

В гл. 3 мы снова вернемся к рассмотрению пространства импульсов и пинчей в нем; однако там структура поверхности Ландау будет изучаться гомологическим методом.

§ 4. Интегралы скачков и интегралы унитарности

Получив условия появления сингулярностей в фейнмановских интегралах, перейдем к определению скачков, связанных с этими сингулярностями. Ниже мы будем кратко излагать результаты рассмотрений аналитическим методом, которые приводят к формуле скачков, впервые полученной Куткоски [16]. В гл. 4 мы приведем другой вывод этой формулы.

Рассмотрим диаграмму с n внутренними линиями и будем интересоваться величиной скачка на разрезе, начинающемся от сингулярности, отвечающей требованию, чтобы первые m линий находились на массовой поверхности ($m \leq n$), т. е. выполнялись условия $q_j^2 = m_j^2$ при $1 \leq j \leq m$. Пусть v — число независимых петель в редуцированной диаграмме, получаемой из исходной удалением ее $n - m$ линий, для которых $m + 1 \leq j \leq n$. Выберем петли исходной диаграммы таким образом, чтобы связанные с ними импульсы k_i , от которых зависят импульсы q_j при $j \leq m$, зависели бы только от тех импульсов петель, для которых $i \leq v$. Ограничимся здесь рассмотрением только тех диаграмм, для которых мы в состоянии указать преобразование от переменных интегрирования k_i при $i \leq v$ к переменным q_j^2 при $j \leq m$ и не-

которым дополнительным «угловым» переменным ξ . Это последнее условие требует не только, чтобы $4\nu > m$, но также, чтобы матрица

$$J_{j, i\mu} = \frac{\partial q_j^2}{\partial k_{i\mu}}$$

имела ранг m . Однако Куткоски [16] показал, что если указанное ограничение снято, то окончательные результаты не изменятся.

Теперь фейнмановский интеграл можно записать в виде

$$F(p) = \left[\prod_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} dq_j^2 (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)^{-1} \right] \times \\ \times \int \prod_{m < l \leq 4\nu} 4\xi_l \prod_{i > \nu} d^4k_i \left[J \prod_{j=m+1}^{\infty} (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) \right]^{-1}, \quad (1.8)$$

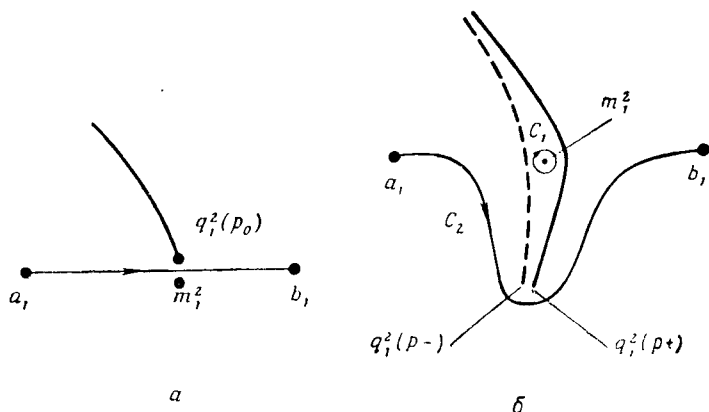
где J — якобиан, т. е. $J = |\det(\partial \xi_l / \partial k_{i\mu})|$, где $1 \leq l \leq 4\nu$. Так как переменные q_j^2 зависимы при $j \leq m$ в силу своей зависимости от k_i при $i \leq \nu$, то для фиксированных импульсов p пределы интегрирования a_j и b_j при $j \leq m$ не будут все независимыми. Для фиксированного q_j^2 интеграция по последующим $q_{j'}^2$, при $j' > j$ происходит в пределах, определяемых законом сохранения энергии — импульса в обоих вертексах на концах линии j' . Далее, представим $F(p)$ в виде последовательности m интегралов

$$F(p) = \int_{a_1}^{b_1} dq_1^2 \frac{1}{q_1^2 - m_1^2 + i\epsilon} F_1(p, q_1^2), \quad (1.9)$$

$$F_1(p, q_1^2) = \int_{a_2}^{b_2} dq_2^2 \frac{1}{q_2^2 - m_2^2 + i\epsilon} F_2(p, q_1^2, q_2^2) \quad (1.10)$$

и т. д. Рассматривая возможные пинчи, мы находим, что $F(p)$ имеет сингулярность при $p = p_0$, если при $p \rightarrow p_0$ в плоскости q_1^2 с полюсом при $m_1^2 - i\epsilon$ и сингулярностью $F_1(p, q_1^2)$, которую мы обозначим $q_1^2(p)$, связан пинч пути интегрирования. На фиг. 4, a схематически показана такая ситуация. Жирная линия изображает разрез, связанный с точкой ветвления $q_1^2(p)$, которая совпадает с точкой m_1^2 при $p \rightarrow p_0$. Путь интегрирования можно разделить на две части: на малую окружность C_1 с центром при $q_1^2 = m_1^2$ и непрерывную линию C_2 , соединяющую a_1 и b_1 и проходящую с другой стороны от m_1^2 .

Зафиксируем все внешние импульсы, кроме одного, и разложим $q_1^2(p)$ в ряд по p вблизи $p=p_0$. Перемещение в направлении по часовой стрелке или против часовой стрелки точки p около p_0 вызывает соответствующее перемещение точки $q_1^2(p)$ около $q_1^2(p_0)$. Покажем, что точка p окружает точку p_0 одним и другим способом, и определим возникающую при этом разность значений функции $F(p)$. Предельные положения разрезов,



Фиг. 4. *a* — контур интегрирования на плоскости q_1^2 для интеграла (1.9) зажимается между полюсом и точкой ветвления; *б* — показаны два возможных способа продолжения точки ветвления за полюс жирной и пунктирной линиями.

связанных с $q_1^2(p)$, по отношению к m_1^2 показаны сплошной и пунктирной жирными линиями на фиг. 4, б. Разность значений $F(p)$ можно получить как разность интегралов вида (1.9) от функции $F_1(p, q_1^2)$ вдоль C_1 по обоим берегам разреза. Скачок $F(p)$ определяется по формуле

$$\Delta F(p) = F(p_+) - F(p_-),$$

в которой точка p_+ получается продолжением функции вокруг точки p_0 в направлении по часовой стрелке, а точка p_- получается продолжением против часовой стрелки. Рассматривая фиг. 4 и применяя теорему о вычетах, получаем

$$\Delta F(p) = -2\pi i \Delta F_1(p, m_1^2),$$

где скачок ΔF_1 определяется в точности так же, как ΔF , т. е.

$$\Delta F_i(p, q_1^2, \dots, q_j^2) = F_i(p, q_1^2, \dots, q_{j+}^2) - F_i(p, q_1^2, \dots, q_{j-}^2).$$

Повторяя приведенное рассуждение снова и снова, мы получаем от каждого интегрирования множитель $-2\pi i$, и поэтому

$$\Delta F(p) = (-2\pi i)^{m-1} \Delta F_{m-1}(p, m_1^2, \dots, m_{m-1}^2), \quad (1.11)$$

где

$$F_{m-1}(p, m_1^2, \dots, m_{m-1}^2) = \int_{a_m(p)}^{b_m(p)} dq_m^2 \frac{G(p, m_1^2, \dots, m_{m-1}^2, q_m^2)}{q_m^2 - m_m^2 + i\varepsilon}; \quad (1.12)$$

здесь $G(p, q_m^2)$ означает последний интеграл в (1.8) при $q_j^2 = m_j^2$, где $j \leq m-1$. Пределы интегрирования по q_m^2 зависят от p в силу того, что при приближении точки p к точке p_0 , которая принадлежит ландаувской поверхности, нормали к m поверхностям сингулярностей становятся линейно зависимыми, так что один из экстремумов q_m^2 не только обязан лежать на поверхности $q_m^2 = m_m^2$ в пространстве импульсов петель, но фактически должен находиться в точке касания всех поверхностей. Таким образом, мы имеем граничную сингулярность при $p = p_0$. Положим, что $b_m(p_0) = m_m^2$; тогда скачок ΔF_{m-1} , как легко видеть, дается формулой

$$\Delta F_{m-1}(p, m_1^2, \dots, m_{m-1}^2) = -2\pi i G(p, m_1^2, \dots, m_m^2). \quad (1.13)$$

При $a_m(p_0) = m^2$ этот результат нужно брать с обратным знаком соответственно тому, что сингулярность находится на другом листе. В проводимом здесь рассмотрении мы не можем решить, какая из двух указанных ситуаций соответствует сингулярности на физическом листе.

Из (1.11) и (1.13) мы видим, что

$$\Delta F(p) = (-2\pi i)^m G(p, m_1^2, \dots, m_m^2);$$

этот результат можно получить также непосредственно из (1.8), заменив каждое $(q_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon)^{-1}$ на $-2\pi i \delta(q_j^2 - m_j^2)$. Конечно, та же самая формула для скачков получится, если мы применим указанную подстановку непосредственно к исходному интегралу по моментам петель k_i

$$\Delta F(p) = (-2\pi i)^m \int \prod_{i=1}^r d^4 k_i \frac{\prod_{j=1}^m \delta_+(q_j^2 - m_j^2)}{\prod_{j=m+1}^n (q_j^2 - m_j^2 + i\varepsilon)}, \quad (1.14)$$

где нижний индекс «+» при δ -функции означает, что нужно брать положительно частотную часть. Формула (1.14) является формулой Куткоски для скачка на разрезе, связанном с ландаувской сингулярностью.

Поскольку функция скачка $\Delta F(p)$ равна разности между значениями $F(p)$ на двух берегах разреза или же на двух смежных листах римановой поверхности, сингулярности $\Delta F(p)$ должны лежать по крайней мере на одном из указанных листов, а следовательно, должны являться также сингулярностями функции $F(p)$. Скачки для ΔF на ее собственных разрезах можно определить методом, подобным описанному выше. Легко видеть, что

$$\Delta_{m'}(\Delta_m F) = \Delta_{m' \cup m} F,$$

где индекс при Δ указывает на совокупность внутренних линий, характеризующих ландаувскую сингулярность, связанную с рассматриваемым скачком.

Покажем теперь, как формула для скачков связана с условием унитарности [3]. Последнее обычно записывается (с точностью до численных множителей) в виде

$$I_m M_{ab} = \int d\Omega_i T_{ia}^* T_{ib},$$

где состояния a , b и i могут иметь произвольные числа частиц. Мы используем обозначение M для матрицы перехода, характеризваемой связными диаграммами, и обозначение T для матрицы перехода, включающей в себя как связные, так и несвязные части. Интегрирование ведется по фазовому пространству промежуточного состояния i . Необходимо ввести определенные постулаты в отношении области аналитичности M , чтобы из приведенного интеграла выделить часть, которая происходит от вкладов только связной части T . В результате мы получаем p -скачок M_{ab} на разрезе нормального порога как раз по переменной полной энергии. Пусть порог соответствует m промежуточным частицам; тогда мы имеем

$$\Delta_m M_{ab} = \int d\Omega_m M_{ma}^* M_{mb}; \quad (1.15)$$

элемент объема $d\Omega_m$ m -частичного фазового пространства равен

$$d\Omega_m = \prod_{j=1}^m \left[\frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(q_j^2 - m_j^2) \theta(q_j^0) \right] (2\pi)^4 \delta^4 \left(P - \sum_j q_j \right),$$

где P есть 4-вектор полного импульса — энергии для состояний сходящихся или расходящихся волн. Проводя одну интеграцию, чтобы исключить δ -функцию сохранения полного импульса —

энергии, и выражая оставшиеся q_j через $m - 1$ линейно независимых импульсов k_i , мы можем записать (1.15), опять с точностью до численного множителя, в виде

$$\Delta_m M_{ab} = \int \prod_{i=1}^{m-1} d^4 k_i \prod_{j=1}^m \delta_+(q_j^2 - m_j^2) M_{ma}^* M_{mb}. \quad (1.16)$$

Если M_{ma} и M_{mb} суть постоянные, то диаграмма для M_{ab} имеет m внутренних линий, которые все выходят из одного вертекса и все кончаются в некотором другом вертексе. Имеется $m - 1$ петель, и (1.16) при постоянном $M_{ma}^* M_{mb}$ является в точности формулой Куткоски для скачка в случае, когда все внутренние линии оказываются на массовой поверхности. Для этой диаграммы единственной сингулярностью M_{ab} является нормальный порог при $P^2 = \left(\sum_{j=1}^m m_j \right)^2$.

Положим, что M_{ma} и M_{mb} соответствуют диаграммам с некоторой внутренней структурой. Подставляя соответствующие фейнмановские интегралы для них в (1.16), мы получаем правую часть, пропорциональную (1.14), только в пропагаторах M_{ma}^* величины i_e будут входить с отрицательными знаками. Таким образом, формула (1.16), которая следует из условия унитарности, является частным случаем общей формулы; если функция скачка (1.16) связана с разбиением диаграммы на две части, общая формула для скачков приложима к разбиению диаграммы на несколько частей.

Использование функции скачка — это самое основное при изучении структуры сингулярностей амплитуд рассеяния в аналитической теории S -матрицы. Только зная функцию скачка, можно использовать представление интегралами Коши. С помощью формулы для скачков путем последовательных интеграций могут быть найдены сингулярности амплитуды рассеяния. Интеграл скачка на каждом этапе указанного итерационного процесса имеет такую форму, что может изучаться гомологическим методом. Ниже мы еще остановимся на этом.

§ 5. Узлы и клювы

Здесь и в следующем параграфе мы рассмотрим некоторые специальные сингулярности необычного характера. Сейчас мы займемся узлами и клювами, являющимися частными случаями ландауовских сингулярностей. Такие сингулярности были найдены для фейнмановских интегралов для частных примеров диаграмм; у нас нет общего метода, с помощью которого можно

было бы предсказать их появление. Возможно, гомологический метод укажет новый путь понимания общих свойств этих сингулярностей¹⁾.

Узлы и клювы — это различные типы двойных точек на алгебраических кривых [19, 20]. Точка P на алгебраической кривой называется двойной точкой, если (почти) каждая прямая, проходящая через точку P , пересекается с кривой в двух точках, совпадающих с P . Исключительными прямыми являются касательные, которые можно определить как прямые, пересекающие кривую в трех точках, совпадающих с P .

Положим, что $G(x, y) = 0$ является уравнением степени n , расположенным по возрастающим степеням x и y , т. е.

$$G(x, y) = a + (b_0x + b_1y) + (c_0x^2 + 2c_1xy + c_2y^2) + \dots + (\dots + d_ny^n).$$

Выберем координаты так, чтобы кривая проходила через начало координат и, следовательно, $a = 0$. Двойные точки появляются, если $b_0 = b_1 = 0$. Тогда уравнение кривой примет вид

$$c_0x^2 + 2c_1xy + c_2y^2 + \dots = 0.$$

Любая линия, проходящая через начало координат и описываемая уравнением $y = tx$, пересекается с этой кривой в точках, где

$$x^2(c_0 + 2c_1t + c_2t^2) + \dots = 0.$$

Если $c_0 + 2c_1t + c_2t^2 \neq 0$, то последнее уравнение имеет два корня при $x = 0$, так что начало координат является двойной точкой на кривой и точкой пересечения с прямой $y = tx$ для всех значений t , за исключением тех, для которых

$$c_0 + 2c_1t + c_2t^2 = 0.$$

В этих исключительных случаях имеются три корня при $x = 0$ и соответствующие прямые являются касательными с уравнениями

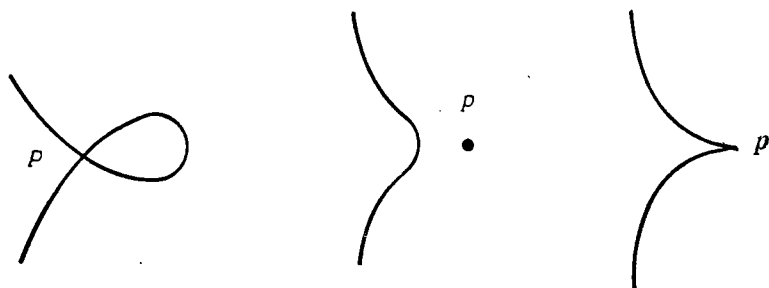
$$y = tx \text{ при } t = c_2^{-1} [-c_1 \pm (c_1^2 - c_0c_2)^{1/2}].$$

Если $c_1^2 \neq c_0c_2$, то двойная точка является узлом. В этой точке кривая имеет две различные касательные. Следовательно, кривая должна сама себя пересекать в узле. С другой стороны, если $c_1^2 = c_0c_2$, обе касательные к кривой в двойной точке совпадают, так что в двойной точке должен быть клюв.

Узел называется *истинным*, если $c_1^2 > c_0c_2$. Обе касательные будут действительными прямыми на действительной плоскости

¹⁾ Недавно Фам [17] в связи с этим обратил внимание на работу Тома [18] и рассмотрел приложения этой работы к изучению фейнмановских интегралов.

(x, y) , и кривая реально пересечет себя в истинном узле. Если $c_1^2 < c_0 c_2$, то узел называется *мнимым*. Это изолированная точка кривой на действительной плоскости (x, y) ; кривая пересекает себя в плоскости действительных x и мнимых y или в плоскости мнимых x и действительных y . Все три типа двойных точек проиллюстрированы на фиг. 5.



Фиг. 5. Примеры истинного узла, мнимого узла и клюва.

На основе сказанного легко установить точное условие появления двойной точки на кривой $G(x, y) = 0$. Точка $p = (x_0, y_0)$ является двойной, если

$$G(x_0, y_0) = \frac{\partial G}{\partial x_0} = \frac{\partial G}{\partial y_0} = 0.$$

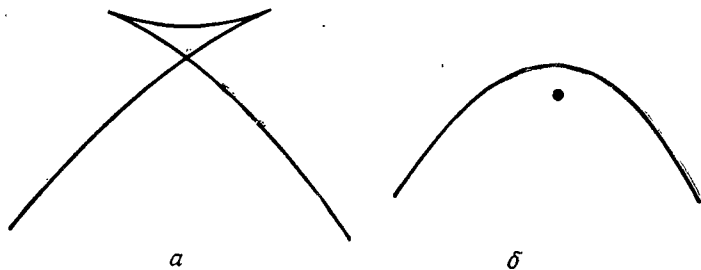
Двойная точка является истинным узлом, мнимым узлом или клювом, согласно тому, является ли величина

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_0 \partial y_0} \right)^2 - \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2}$$

соответственно положительной, отрицательной или равной нулю.

Свойства указанных сингулярных точек на алгебраических кривых известны уже на протяжении века. При изучении изменений абелевых интегралов в зависимости от вида алгебраической кривой Клейн [21] рассматривал преобразование кривой с истинным узлом в кривую с мнимым узлом. Уже в то время было известно, что действительная кривая с самопересечением, имеющая два действительных клюва по соседству с истинным узлом (фиг. 6, а), преобразуется в непрерывную кривую плюс изолированная точка (фиг. 6, б), когда действительные клювы приближаются к истинному узлу и становятся двумя мнимыми узлами. Это обстоятельство было переоткрыто Иденом, Ландсхофом, Полкинхорном и Тейлором [22] при их изучении ландауских кривых.

Диаграмма, которую рассматривали эти авторы, показана на фиг. 1. В этой задаче имеются две независимые скалярные переменные, и, когда все массы частиц равны, не существует никаких аналогий. Амплитуда удовлетворяет представлению Мандельштама [23] с обычными ландауовскими сингулярностями. Однако если значения некоторых внешних масс увеличиваются и достигают определенных значений, появляются два истинных узла, сначала совпадавшие, как это показано на фиг. 6, а, а потом разделенные.



Фиг. 6. а — кривая с действительным узлом и двумя клювами; б — кривая с мнимым узлом.

Как было уже сказано, мнимый узел является изолированной действительной точкой, в которой комплексные части алгебраической кривой испытывают самопересечения. Было найдено, что комплексные части ландауовской кривой, которая соединяет друг с другом два мнимых узла, перед тем как одна из них станет действительной кривой, имеют сингулярности на физическом листе. В этом случае обычное представление Мандельштама для амплитуды рассеяния перестает выполняться. При увеличении внешних масс указанные комплексные сингулярности не исчезают. После появления двух действительных клювов комплексная часть ландауовской кривой начинает соединять узел с действительной частью кривой между клювами.

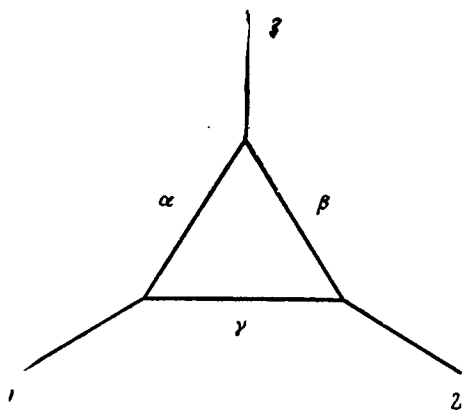
Пока не существует никаких исследований условий появления узлов и клювов для общего фейнмановского интеграла, хотя без более глубокого проникновения в существо этой проблемы наше понимание аналитической структуры амплитуд рассеяния остается неполным.

§ 6. Неландауовские сингулярности

При определении ландауовских сингулярностей мы требовали, чтобы сингулярности подынтегрального выражения либо совпадали с пределами интегрирования, либо образовывали пинч для

пути интегрирования в некоторой конечной точке. Теперь рассмотрим пинч пути интегрирования в бесконечности или же случай удаления пути интегрирования на бесконечности при фиксации пределов интегрирования в конечных точках. Получаемые при этом сингулярности не принадлежат ландаувской поверхности и поэтому называются неландаувскими сингулярностями; иногда их называют сингулярностями второго рода.

На существование таких сингулярностей впервые обратил внимание Куткоски [16] при изучении функции скачка. Для трехвертексной диаграммы он нашел, что функция скачка, связанная



Фиг. 7. Треугольная (вертексная) диаграмма.

с сингулярностью, когда импульсы всех трех внутренних линий лежат на массовой поверхности, сама имеет сингулярность в точке, где якобиан преобразования переменных обращается в нуль (т. е. когда площадь дуального треугольника, образованного внешними импульсами, становится равной нулю). Отсюда следует, что рассматриваемая вертексная функция также должна иметь указанную сингулярность на одном из листов ее римановой поверхности. Поскольку положение этой сингулярности никак не зависит от величины внутренних масс, то она, следовательно, не лежит на ландаувской поверхности.

Чтобы понять причину появления этой сингулярности, рассмотрим двухчастичную функцию скачка, связанную с сингулярностью нормального порога при $p_3^2 = (p_1 + p_2)^2 = (m_\alpha + m_\beta)^2$ для треугольной диаграммы (фиг. 7). В (1.15) мы положим величину $M_{m\beta}$ равной постоянной, а $M_{m\alpha}$ имеющей полюс в точке m_β^2 по переменной $(p_1 - q_\alpha)^2$. Обозначая величины 3-импульсов частиц 1 и α через P и Q соответственно, имеем в системе центра

масс частиц 1 и 2, с точностью до числового множителя,

$$\Delta_{\alpha\beta} M(P) = \frac{1}{P s^{1/2}} \int_{-1}^{+1} dz \frac{1}{z - z_0(P)},$$

где

$$z_0(P) = \{m_\gamma^2 - m_\alpha^2 - m_1^2 + 2[(P^2 + m_1^2)(Q^2 + m_\alpha^2)]^{1/2}\} [2PQ]^{-1},$$

$$s^{1/2} = (P^2 + m_1^2)^{1/2} + (P^2 + m_2^2)^{1/2} = (Q^2 + m_\alpha^2)^{1/2} + (Q^2 + m_\beta^2)^{1/2}.$$

Мы видим, что на главном листе логарифмической функции, задаваемой интегралом, функция $\Delta_{\alpha\beta} M(P)$ не имеет никакой сингулярности в точке $P=0$, однако на любом другом листе при $P \rightarrow 0$ полюс $z_0(P)$ заставляет путь интегрирования уходить в бесконечность и функция $\Delta_{\alpha\beta} M(P)$ при $P=0$ приобретает сингулярность. Таким образом, также и сама вертексная функция M имеет сингулярности, расположенные на нефизическом листе, в точках $(m_1 \pm m_2)^2$ на комплексной плоскости внешнего инварианта $s = p_3^2 = (p_1 + p_2)^2$. Это неландаувская сингулярность. Такого рода сингулярность, непосредственно связанная с редуцированной собственно-энергетической диаграммой, получаемой из диаграммы фиг. 7 стягиванием в нуль линии γ , имеется также при $s=0$.

Мы видим, таким образом, что неландаувская сингулярность связана с удалением пути интегрирования в бесконечность. Чтобы понять, как это происходит, можно изучить наш фейнмановский интеграл методом, подобным § 3 этой главы. Там мы рассматривали пересечения поверхностей сингулярностей (сфер) и нашли, что условия Ландау — Бьеркена характеризуют случаи взаимного касания сфер. Однако в § 3 мы не рассматривали случаи концентрических сфер. Легко видеть вместе с тем, что концентрические сферы (любых радиусов) касаются друг друга в бесконечности, поскольку мнимые сечения рассматриваемых поверхностей являются гиперболами, которые в случае концентрических сфер имеют одинаковые асимптоты. Следовательно, совпадение центров сфер является необходимым условием для наличия пинча в бесконечности [24]. Такого рода пинчи ведут к сингулярностям, которые оказываются неландаувскими, поскольку условие их появления не зависит от величины внутренних масс в противоположность условиям Ландау — Бьеркена.

Евклидово понятие концентрических сфер обобщается в лоренцевском пространстве в понятие сфер с центрами, разделенными вектором нулевой длины. Для собственно-энергетической диаграммы получаем условие $p^2=0$, где p — внешний импульс. Для общей диаграммы с N внешними линиями условие выражается в том, что пространство, натягиваемое на $N-1$ незави-

симых импульсов, имеет размерность, меньшую $N - 1$, т. е. определитель Грама

$$\det(p_i \cdot p_j) = 0, \quad (1.17)$$

где $i, j = 1, \dots, N - 1$.

Условие (1.17) для появления неландауовских сингулярностей впервые было получено Фэрли, Ландсхофом, Наталлом и Полкинхорном [25]. Эти авторы работали с фейнмановским интегралом в представлении Чисхольма и нашли, что если $C(\alpha)$ в (1.5) обращается в нуль, то возникает сингулярность всякий раз, когда линейная комбинация независимых внешних импульсов образует вектор нулевой длины, скалярное произведение которого с каждым внешним вектором равно нулю. Отсюда сразу получается условие (1.17) на определитель Грама. Используя технику погружения области интегрирования в компактное аналитическое многообразие, Федербуш [26] недавно рассмотрел эту задачу в ряде частных случаев.

Наконец, отметим, что неландауовские сингулярности не зависят от величин внутренних масс только тогда, если они являются неландауовскими сингулярностями чистого типа. Для сложных диаграмм может возникнуть пинч от ландауовской и неландауовской сингулярностей, образуемых разными частями диаграммы, и таким образом появится неландауовская сингулярность смешанного типа. Положение таких неландауовских сингулярностей зависит от величины внутренних масс.

§ 7. Абелевы интегралы и топология

В настоящем параграфе мы даем мотивировку применения топологии в задачах, которые внешне выглядят чисто аналитическими по своему характеру. Таким образом здесь осуществляется логическая связь между тем, что было изложено до сих пор, и тем, что будет изложено ниже. Построение изложения отражает историю развития топологии [27].

Положим, что мы имеем алгебраическую кривую, уравнение которой имеет вид $G(x, y) = 0$. Пусть $y = f(x)$ является алгебраической функцией, удовлетворяющей этому уравнению, и пусть s — соответствующая риманова поверхность, на которой функция y однозначна. Если P и Q — два некоторых полинома от x и y , то функция $R(x, y)$, определяемая как отношение

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

является рациональной функцией от x и y , однозначной на S . Единственными сингулярностями $R(x, y)$ на S является конечное множество полюсов.

Абелев интеграл имеет вид

$$\int_{x_0 y_0}^{xy} R(x, y) dx,$$

где путь интегрирования лежит на римановой поверхности S . Значения интеграла зависят от пути интегрирования. Рассматривая интеграл в функции от (x, y) , мы видим, что он регулярен для всех путей интегрирования, которые конечны и не проходят через полюса подынтегрального выражения. В качестве примера можно рассмотреть эллиптический интеграл, для которого $R = 1/y$ и

$$G(x, y) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) - y^2 = 0.$$

Существуют три типа абелевых интегралов. Абелев интеграл называется:

- 1) интегралом *первого* типа, если он всюду регулярен;
- 2) интегралом *второго* типа, если его единственными сингулярностями являются полюса;
- 3) интегралом *третьего* типа, если он имеет логарифмические сингулярности.

Абелевы интегралы не могут иметь никаких других сингулярностей. Следует подчеркнуть, что интеграл первого типа, хотя он и является везде конечным, не равен обязательно константе, поскольку он определен для x на римановой поверхности, а не на комплексной плоскости (эллиптический интеграл является интегралом первого типа).

Причина, по которой мы рассматриваем здесь абелевы интегралы, заключается в следующем: можно показать, что при фиксированных пределах интегрирования все возможные значения абелева интеграла можно найти, изучая комбинаторную топологию поверхности S . Пусть A и B — две фиксированные точки на римановой поверхности S , для которой рассматривается абелев интеграл первого типа

$$I = \int_A^B R(x, y) dx.$$

Если L — некоторый путь на S из A в B , то любой другой путь на S из A и B можно представить в виде $L + \Gamma$, где Γ — некоторый замкнутый путь, проходящий через A и B . Пусть J — значение абелева интеграла для замкнутого пути Γ . Путь Γ можно непрерывно изменять без изменения значения J , если только путь Γ все время остается на поверхности S и не пересекает при своем изменении полюса функции $R(x, y)$. Если два замкну-

тых пути Γ_1 и Γ_2 можно преобразовать один в другой, то они называются гомологичными, или гомологически эквивалентными, $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ (хотя это определение и не совсем точное, но оно сейчас вполне достаточно для нас). Очевидно, наша задача будет решена, если мы найдем такую совокупность путей Γ_i (где $i=1, \dots, m$ для всех гомологически неэквивалентных замкнутых путей на S), для которой любой произвольный замкнутый путь Γ на S оказывается гомологичным некоторой алгебраической сумме этих Γ_i с целыми коэффициентами, т. е. $\Gamma \sim \sum m_i \Gamma_i$; тогда нам останется только вычислить значения J_i интеграла I для всех путей Γ_i . Значения J_i называются периодами интеграла. Таким образом, при фиксированных точках A и B все возможные значения интеграла I отличаются друг от друга на некоторую сумму $\sum m_i J_i$. Риманова поверхность оказывается сферой с p ручками, имеет $2p$ базисных замкнутых путей, на которые можно разложить произвольный замкнутый путь Γ . В топологии каждый такой замкнутый путь называется циклом.

Подобные рассуждения с незначительными изменениями можно обобщить на абелевы интегралы второго и третьего типов. Конечно, существует значительно больше разных свойств абелевых интегралов, чем это видно из приведенного здесь элементарного рассмотрения их. Нашей целью было только объяснить связь теории этих интегралов с топологией римановой поверхности. В последующих главах этой книги мы проведем уточнение понятий, введенных в этом параграфе, а также изложим другой математический аппарат, более удобный для получения дальнейших результатов.

§ 1. Введение

В этой главе мы будем заниматься отверстиями в пространствах. Дадим определения и изучим свойства некоторых абелевых групп¹⁾, которые характеризуют число отверстий и их размерности.

Перед тем как заняться существом излагаемого в этой главе формализма, рассмотрим круговое кольцо R , изображенное на фиг. 8. Любая линия, лежащая в R , называется *1-цепью* (одномерной цепью); 1-цепь может быть сегментом линии или замкнутой петлей. Границами сегмента являются его концы. 1-цепь без граничных точек не имеет границ и называется *1-циклом*. На фиг. 8 замкнутые петли c_1 , c_2 и c_3 — это такие 1-цепи, которые в то же время являются 1-циклами, а 1-цепь (a, b) не есть цикл. Цепь, являющаяся границей некоторой площадки, которая лежит целиком в R , называется *1-границей*. Так, c_1 является 1-границей; c_2 и c_3 не являются таковыми. Отметим, что каждая граница является циклом, т. е. любая граница не имеет граничных точек.

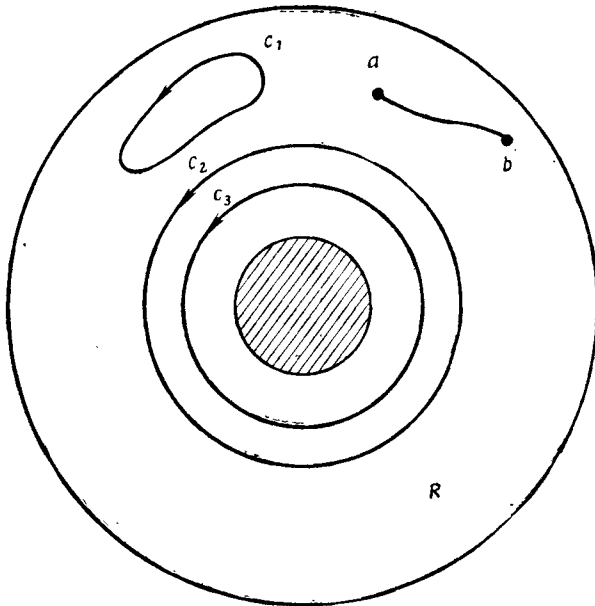
Сумма $c_2 + c_3$ циклов c_2 и c_3 является циклом, который окружает отверстие дважды. Разность $c_2 - c_3$ циклов c_2 и c_3 является границей небольшой кольцевой площадки между ними. Два цикла называются гомологичными (эквивалентными) друг другу, если их разность является границей. Так, цикл c_2 гомологичен циклу c_3 ; мы пишем $c_2 \sim c_3$. Имеем далее $c_1 \sim 0$, поскольку c_1 является границей. Часто $c_2 \sim c_3$ означает, что c_2 можно непрерывно деформировать в c_3 , все время оставаясь в пространстве R . Более точное определение будет дано в § 4.

¹⁾ Множество элементов называется группой, если: 1) в этом множестве задана операция, обозначаемая значком $*$, для которой при любых g_1 и g_2 , принадлежащих G , результат этой операции $g_1 * g_2$ принадлежит G ; 2) в G существует элемент e , для которого $e * g = g * e = g$ для любого g из G ; 3) для каждого g из G существует элемент g^{-1} из G , для которого $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$; 4) если g_1 , g_2 и g_3 принадлежат G , то $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$. Если $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$, то группа G называется абелевой и тогда вместо значка $*$ используют знак «+»; примером абелевой группы является множество всех целых чисел Z . Нам будут встречаться только группы из счетного числа элементов, обычно абелевы, и мы не будем заниматься такими более сложными непрерывными группами, как $SU(3)$. Изложение основ теории групп см., например, в работе [28].

Рассмотрим теперь совокупность 1-циклов

$$H_1 = \{ \dots, -2c_2, -c_2, 0, c_2, 2c_2, 3c_2, \dots \},$$

где nc_2 — цикл, который образуется n обходами отверстия по пути c_2 в направлении против часовой стрелки. Никакие два цикла из совокупности H_1 не гомологичны друг другу, в то время как для каждого цикла в H_1 существует гомологичный ему в R .



Фиг. 8. 1-цепи в пространстве кругового кольца (заштрихованная область не принадлежит пространству).

Два цикла из H_1 можно складывать, просто складывая коэффициенты, характеризующие число раз, которое цикл окружает отверстие, так что $mc_2 + nc_2 = (m+n)c_2$. Совокупность 1-циклов H_1 называется первой гомологической группой для R . Очевидно, H_1 является просто аддитивной группой целых чисел Z , и мы пишем $H_1(R) = Z$. Для листа бумаги с k отверстиями в нем для группы SP^k ¹⁾ мы имеем

$$H_1(SP^k) = Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z \quad (k \text{ раз}).$$

Правая часть приведенного равенства, являющаяся прямой суммой, представляет всевозможные k -мерные векторы

¹⁾ SP — сокращение от Sheet of Paper (лист бумаги). — Прим. перев.

с целочисленными координатами; p -я координата вектора указывает на число раз, которое рассматриваемый цикл окружает p -е отверстие.

Ниже в этой главе мы дадим более точное определение гомологических групп или групп гомологий (§ 2—4), а также введем в рассмотрение еще одно понятие — группы относительных гомологий (§ 5). Далее мы рассмотрим, что происходит с группами гомологий пространства, когда пространство отображается на другое пространство (§ 6), и, наконец, опишем удобную технику точных последовательностей для расчета групп гомологий (§ 7 и 8). Существует несколько разных определений групп гомологий: симплициальные, сингулярные, Чеха, кубические и т. д. Указанные определения эквивалентны друг другу для многих топологических пространств. Здесь мы рассмотрим только самые простые, симплициальные гомологии. Другие типы гомологий будут кратко упомянуты, когда это понадобится. Подробное изложение теории гомологий читатель может найти в работах [29—31].

§ 2. Симплициальные комплексы

Основными элементами в симплициальной гомологической теории являются симплексы в n -мерном евклидовом пространстве E^n ; p -мерный симплекс (называемый p -симплексом) обозначается через σ^p ; 0-симплекс σ^0 является точкой и называется *вертексом*; 1-симплекс σ^1 является интервалом прямой (без обеих граничных точек); 2-симплекс σ^2 является внутренностью треугольника; 3-симплекс σ^3 — внутренностью объемного тетраэдра и т. д. Поскольку p -симплекс однозначно определяется заданием $p+1$ различных вертексов, мы можем p -симплекс σ^p записывать в виде

$$\sigma^p = \langle v_0, \dots, v_p \rangle, \quad (2.1)$$

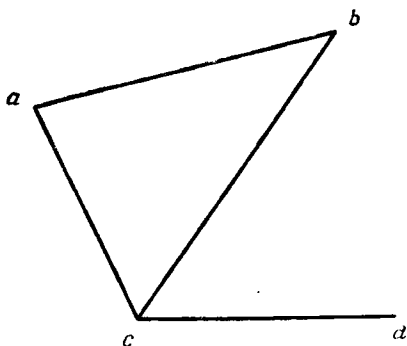
где v_i есть i -й вертекс. Отметим, что любое подмножество из $k+1$ вертексов данного p -симплекса σ^p определяет некоторый k -симплекс. Каждый такой подсимплекс называется *гранью*, и он обозначается через $\langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots \widehat{v}_j \dots v_p \rangle$, где символом \widehat{v}_i обозначено, что вертекс v_i отсутствует в рассматриваемом подмножестве вертексов. Таким образом, грани симплекса σ^2 — это его три стороны (1-грани) и его три вертекса (0-грани).

Симплициальный комплекс K — это совокупность симплексов $\{\sigma_1^0, \sigma_1^1, \sigma_k^2, \dots, \sigma_l^p\}$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

а) симплексы комплекса K не связаны друг с другом и никакие два из них не совпадают по всем их вертексам;

б) если некоторый симплекс принадлежит K , то все его грани также принадлежат K .

Приведем пример. Совокупность симплексов $\sigma_i^0 = \{a, b, c, d\}$ и $\sigma_j^1 = \{ab, bc, ca, cd\}$, показанных на фиг. 9, составляет 1-комплекс. Заметим, что 1-симплексы ab и bc не связаны друг с другом, так как они не включают в себя вертекса b , являющегося 0-симплексом. Очевидно, симплекс не может пересекаться ни с каким другим симплексом или кончатся на другом симплексе,

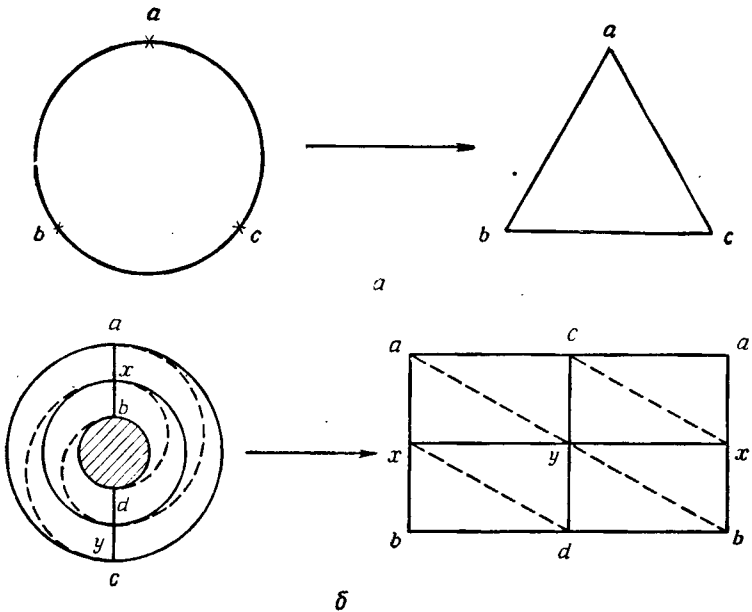


Фиг. 9. Пример 1-комплекса.

Подмножества точек в евклидовом пространстве, представляемые симплициальными комплексами, называются *политопами*. Таким образом, политопы — это такие образования, как полигоны, полиэдры и т. д., которые можно построить из отрезков прямых, треугольников, тетраэдров и т. д. Говорят, что топологическое пространство допускает *триангуляцию*, если оно гомеоморфно некоторому политопу (т. е. может быть непрерывно взаимно однозначно преобразовано, или натянуто, на этот политоп). Например, триангуляция диска дается треугольником; триангуляция кругового кольца — прямоугольником с идентифицированными противоположными парами сторон (фиг. 10). Ниже все необходимые триангуляции мы будем рассматривать качественно; редко когда оказывается действительно необходимым проводить их.

Упорядочим произвольным фиксированным образом вертексы симплекса σ^p (2.1). Симплекс σ^p с таким упорядочением его вертексов, которое получается из указанного фиксированного упорядочения с помощью четной перестановки, назовем *положительно ориентированным* и будем его обозначать $+\sigma^p$; нечетная перестановка дает *отрицательно ориентированный* симплекс, который мы обозначим $-\sigma^p$. *Ориентированный симплициальный*

комплекс получается, когда мы упорядочиваем произвольным, но раз и навсегда фиксированным образом вертексы каждого его симплекса. Мы будем рассматривать только ориентированные комплексы.



Фиг. 10. Триангуляция диска (а) и кругового кольца (б).

Для данного ориентированного комплекса K инцидентное число $[\sigma^p, \sigma^{p-1}]$ для любых двух его симплексов, размерности которых отличаются на единицу, определяется следующим образом:

$$[\sigma^p, \sigma^{p-1}] = \begin{cases} 0, & \text{если симплекс } \sigma^{p-1} \text{ не является гранью симплекса } \sigma^p \text{ в комплексе } K, \\ \pm 1, & \text{если симплекс } \sigma^{p-1} \text{ является гранью симплекса } \sigma^p \text{ в комплексе } K, \end{cases}$$

где в последнем случае мы должны записать симплекс в виде $\sigma^{p-1} = \langle v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p \rangle$, а инцидентное число равно ± 1 в соответствии с тем, будет ли симплекс $\langle v_i v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_p \rangle$ ориентирован положительно или отрицательно.

Пример. Пусть $\sigma^3 = \langle abcd \rangle$, $\sigma_1^2 = \langle abd \rangle$, $\sigma_2^2 = \langle acd \rangle$; тогда $[\sigma^3, \sigma_1^2] = +1$ и $[\sigma^3, \sigma_2^2] = -1$.

Теорема 2.1. Для каждого симплекса σ_0^p комплекса K мы имеем

$$\sum_i [\sigma_0^p, \sigma_i^{p-1}] [\sigma_i^{p-1}, \sigma_i^{p-2}] = 0.$$

Для доказательства заметим, что σ_i^{p-2} является гранью точно для двух $(p-1)$ -мерных граней симплекса σ_0^p . Знаки инцидентных чисел определены как раз таким образом, что в приведенной сумме два соответствующих произведения входят с противоположными знаками.

§ 3. Цепи, циклы и границы

Понятия, введенные в предыдущем параграфе (симплекс, симплициальный комплекс и инцидентное число), — это все, что нам необходимо, чтобы перейти теперь к точному определению понятий, введенных при рассмотрении конкретного примера в § 1 этой главы. Рассмотрим симплициальный комплекс K (или топологическое пространство, для которого можно построить триангуляцию, соответствующую этому симплициальному комплексу). *Цепью* c_p на K называется совокупность p -симплексов σ_i^p , записываемая в виде формальной суммы с постоянными коэффициентами g_i

$$c_p = \sum_i g_i \sigma_i^p.$$

Числа g_i , вообще говоря, можно рассматривать как элементы произвольной абелевой группы, но для наших целей достаточно считать их целыми числами.

Пример. Для комплекса K , приведенного на фиг. 9, цепью является $\langle bc \rangle + \langle cd \rangle$; другой цепью является $g_1 \langle ab \rangle + g_2 \langle cd \rangle$, где g_1, g_2 принадлежат некоторой фиксированной абелевой группе.

Для p -цепей имеем, что $c_p = 0$, если все $g_i = 0$, и что $c_p + c_{p'} = \sum (g_i + g'_i) \sigma_i^p$. Очевидно, совокупность всех p -цепей для K образует абелеву группу, которую мы обозначаем $C_p(K)$.

Определение 2.1. Граничный оператор ∂ определяется как оператор, для которого

$$\partial \sigma_i^0 = 0,$$

$$\partial \sigma_i^p = \sum_j [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] \sigma_j^{p-1},$$

где суммирование распространяется на все $(p-1)$ -мерные симплексы комплекса K . Короче говоря, граничный оператор переводит p -цепь в ее границу.

Определение 2.2. Назовем p -цепь *границей* b_p , если существует такая $(p+1)$ -мерная цепь c_{p+1} , что $\partial c_{p+1} = b_p$.

Пример. Границей цепи $\langle ab \rangle + \langle bc \rangle$ на фиг. 9 является $\langle c \rangle - \langle a \rangle$.

Теорема 2.2. Можно утверждать, что для любой цепи

$$\partial(\partial c_p) = 0.$$

Доказательство. Достаточно доказать это утверждение для симплекса σ_i^p ; в силу теоремы 2.1

$$\partial(\partial \sigma_i^p) = \partial \left(\sum_j [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] \sigma_j^{p-1} \right) = \sum_{jk} [\sigma_i^p, \sigma_j^{p-1}] [\sigma_j^{p-1}, \sigma_k^{p-2}] \sigma_k^{p-2} = 0.$$

Доказанная теорема интуитивно не вызывает никаких сомнений; например, очевидно, что граница диска сама не имеет границ.

Определение 2.3. Циклом z_p называется p -цепь, для которой $\partial z_p = 0$.

Пример. На фиг. 8 цепь c_2 является циклом, поскольку она не является границей ни для какой 2-цепи (площадки) на R ; однако c_1 является границей. Совокупность p -циклов z_p на K образует p -мерную циклическую группу $Z_p(K)$, которая, очевидно, является подгруппой группы $C_p(K)$. Аналогично совокупность p -границ b_p для K образует p -мерную группу границ $B_p(K)$.

§ 4. Группы гомологий

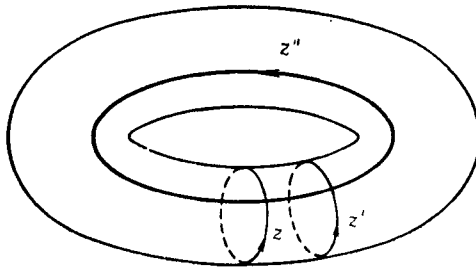
В силу теоремы 2.2 группа $B_p(K)$ является подгруппой группы $Z_p(K)$. Поскольку обе группы абелевы, мы можем ввести в рассмотрение факторгруппу.

Определение 2.4. Назовем p -мерной *гомологической группой* $H_p(K)$ комплекса K факторгруппу¹⁾

$$H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}.$$

¹⁾ Если F является подгруппой группы G и x принадлежит G , то множество элементов $x \oplus F = \{y \in G | y = x + f, f \in F\}$ называется *сопряженным классом*. Когда G — абелева группа, сопряженные классы сами составляют группу с операцией $x_1 \oplus F + x_2 \oplus F = (x_1 + x_2) \oplus F$ и нулевым элементом $0 \oplus F = F$. Эта группа называется факторгруппой G по модулю F и обозначается G/F . Элементы G , принадлежащие одному и тому же классу, называются эквивалентными,

Таким образом, элементы группы $H_p(K)$ являются классами эквивалентности p -циклов; два цикла называются гомологичными (эквивалентными), если они различаются на границу. Мы обозначаем это соотношение эквивалентности символом \sim . Группа $H_0(K)$ имеет простой смысл; это группа $Z \oplus \dots \oplus Z$, где Z повторено l раз, Z — группа целых чисел, а l — число несвязных кусков, из которых построен комплекс K (компонент, соединенных дугами). Общая структура группы $H_p(K)$ есть $H_p(K) = Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z \oplus G_T^p$, где число повторений Z называется p -м



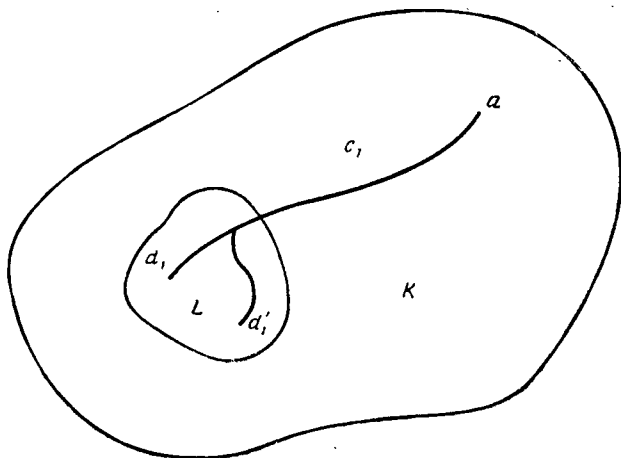
Фиг. 11. 1-циклы на торе.

числом Бетти для K и G_T^p — некоторая абелева группа с конечным числом элементов. Группа G_T^p называется подгруппой кручения группы гомологий $H_p(K)$, она описывает p -мерный поворот комплекса K , в то время как число Бетти описывает p -мерные отверстия в K . Ниже мы будем рассматривать только такие комплексы, для которых подгруппы кручения исчезают.

Пример. Пусть двумерным комплексом является тор T , показанный на фиг. 11. Два цикла z и z' эквивалентны, ибо их разность $z - z'$ является границей цилиндра между ними. Поэтому z представляет собой элемент группы $H_1(T)$; фактически он порождает подгруппу [для $H_1(T)$], элементы которой mz , где m — произвольное целое число. На фиг. 11 mz обозначает цикл, который обертывает тор m раз по z . Другой класс эквивалентных 1-циклов на T представляется циклом z'' , который порождает другую бесконечную подгруппу $H_1(T)$. Мы имеем, таким образом, $H_1(T) = Z \oplus Z$. Поскольку комплекс T связан, для него $H_0(T) = Z$. Нетрудно показать, что $H_2(T) = Z$, поскольку только сам тор T и его кратные являются единственными 2-цепями, не имеющими границ.

§ 5. Группы относительных гомологий

Теперь дадим обобщение понятия группы гомологий. В то время как p -циклы на K определялись как такие цепи c_p на K , которые не имеют границ, мы теперь ослабим это условие и потребуем только, чтобы границы цепей c_p принадлежали некоторому фиксированному подкомплексу L , содержащемуся в комплексе K . Неэквивалентные циклы опять образуют группу, которая, конечно, зависит от выбора подкомплекса L . Так как L



Фиг. 12. 2-комплексы K и L , причем $K \supset L$.

содержится в K , то группа цепей $C_p(L)$ является подгруппой $C_p(K)$. Определим теперь *относительную группу цепей* $C_p(K, L)$ для K по модулю L [которую иногда обозначают $C_p(K/L)$] следующим образом:

$$C_p(K, L) = \frac{C_p(K)}{C_p(L)}.$$

Каждый элемент \bar{c}_p группы $C_p(K, L)$ является некоторым классом эквивалентности p -цепей: $\bar{c}_p = c_p \oplus C_p(L)$, где c_p — любая p -цепь на K , порождающая класс \bar{c}_p . Таким образом, \bar{c}_p состоит из цепей вида $c_p + d_p$, где $d_p \in C_p(L)$; разность между двумя такими цепями является цепью на L . Короче говоря, $\bar{c}_p = \{c'_p \mid c'_p \sim c_p\} = \{c'_p \mid c'_p - c_p \in C_p(L)\}$. Обратим внимание, что символ эквивалентности \sim в этом параграфе отличается от символа \sim , введенного в предыдущем параграфе.

Пример. Пусть 2-комплекс L содержится в комплексе K , как это показано на фиг. 12. Цепи $c_1 + d_1$ и $c_1 + d'_1$ на K принадлежат одному и тому же относительному классу \bar{c}_1 на (K, L) .

Определим теперь новый граничный оператор на $C_p(K, L)$.

Определение 2.5. Граничный оператор $\bar{\partial}$, действующий на элементы \bar{c}_p из группы относительных цепей $C_p(K, L)$, где $\bar{c}_p = c_p \oplus C_p(L)$, определяется соотношением

$$\bar{\partial} \bar{c}_p = \partial c_p \oplus C_{p-1}(L).$$

Таким образом, границей относительной p -цепи является сопряженный класс по модулю $C_{p-1}(L)$, порождаемый границей на K . В вышеприведенном примере $\bar{\partial} \bar{c}_1$ является линейной комбинацией $\langle a \rangle$ на K и других вертексов на L . Основное свойство введенного граничного оператора $\bar{\partial}$, так же как и оператора ∂ , заключено в следующей теореме.

Теорема 2.3. Можно утверждать, что

$$\bar{\partial}(\bar{\partial} \bar{c}_p) = 0.$$

Доказательство этой теоремы мы получим сразу, если воспользуемся определением оператора $\bar{\partial}$ и тем обстоятельством, что $C_{p-2}(L)$ является нулевым элементом для $C_{p-2}(K, L)$.

Как и выше, мы можем теперь определить *группу относительных циклов* $Z_p(K, L)$ и *группу относительных границ* $B_p(K, L)$. Относительная цепь является относительным циклом $[\bar{z}_p \in Z_p(K, L)]$ тогда и только тогда, если $\bar{\partial} \bar{z}_p = 0$; относительная цепь является относительной границей $[b_p \in B_p(K, L)]$ тогда и только тогда, если $b_p = \bar{\partial} \bar{c}_{p+1}$. Очевидно, группа $B_p(K, L)$ содержится в группе $Z_p(K, L)$. Мы можем определить *группу относительных гомологий* $H_p(K, L)$ следующим образом:

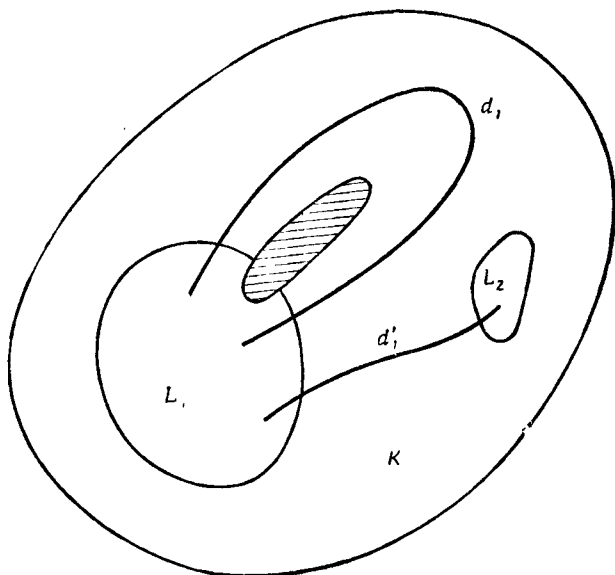
$$H_p(K, L) = \frac{Z_p(K, L)}{B_p(K, L)}.$$

Другими словами, два относительных цикла эквивалентны, если они отличаются на относительную границу.

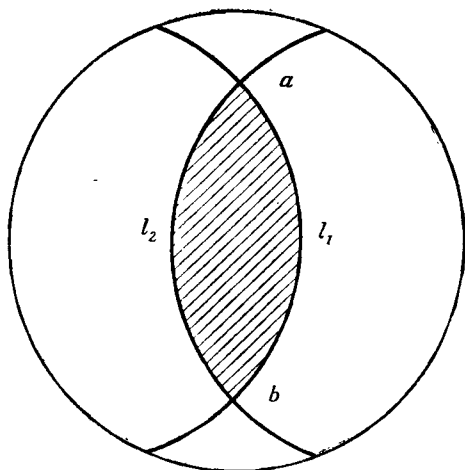
Остановимся теперь немного на свойствах относительных циклов и относительных границ.

А. Относительные циклы. Из определения $\bar{\partial} \bar{z}_p = 0$ получаем, что относительный цикл \bar{z}_p , записываемый в виде $\bar{z}_p = z'_p \oplus C_p(L)$, должен обладать свойством $\partial z'_p \in C_{p-1}(L)$. Важно отметить, что z'_p не должен обязательно быть циклом в K , если его границы принадлежат L ; действительно, так как $\partial \partial z'_p = 0$, то $\partial z'_p$ является циклом (не обязательно границей) в $Z_{p-1}(L) \in C_{p-1}(L)$.

Пример. На фиг. 13 изображен комплекс K и его подкомплекс L , состоящий из двух несвязанных частей L_1 и L_2 . Обе



Фиг. 13. 2-комплекс K , для которого $K \supset L_1$, $K \supset L_2$ и K не содержит заштрихованную область.



Фиг. 14. Диск K (заштрихованная область принадлежит K).

цепи d_1 и d'_1 являются относительными циклами K по модулю L . Действительно, они представляют два разных элемента группы относительных гомологий $H_1(K, L)$.

Б. Относительные границы. Пусть относительная граница b_p записывается в виде $b_p = b'_p \oplus C_p(L)$. Тогда в силу определения $\bar{b}_p = \overline{\partial c_{p+1}}$ должна существовать такая цепь c_{p+1} в K , что ∂c_{p+1} отличается от b'_p только на цепь из L , т. е. $b'_p - \partial c_{p+1} \in C_p(L)$. Таким образом, мы видим, что \bar{b}_p можно записать в виде $\bar{b}_p = b_p \oplus C_p(L)$, где $b_p = \partial c_{p+1}$ является границей в K .

Пример. Если мы изменим фиг. 13 так, чтобы заштрихованная область целиком принадлежала K , то d_1 станет относительной границей K по модулю L .

Пример. Пусть K является единичным диском, изображенным на фиг. 14, а L — объединение двух линий l_1 и l_2 , т. е. $L = l_1 \cup l_2$. Тогда $H_1(K) = H_2(K) = 0$, $H_1(L) = Z$ и $H_2(K, L) = Z$. Цикл, порождающий $H_1(L)$, есть $c_1 = [(a, b) \text{ на } l_1 + (b, a) \text{ на } l_2]$. Относительный цикл, порождающий $H_2(K, L)$, есть c_2 — заштрихованная площадка на фиг. 14. Отметим, что $\partial c_2 = c_1$. Этот пример будет полезен нам в гл. 3.

§ 6. Цепное отображение и индуцированный гомоморфизм

Для данных двух комплексов K_1 и K_2 линейная функция f , определенная на множестве цепей K_1 со значениями в множестве цепей в K_2 , определяется как линейное отображение, при котором каждая цепь c_p из K_1 соответствует одной и только одной цепи d_p из K_2 , причем соответствие таково, что

$$f(c_p + c'_p) = f(c_p) + f(c'_p) = d_p + d'_p.$$

Обозначим эту функцию символом $f: K_1 \rightarrow K_2$.

Определение 2.6. Линейная функция f называется *цепным отображением*, если она коммутирует с граничным оператором ∂ , т. е. $f(\partial c_p) = \partial(f c_p)$ для всех цепей c_p комплекса K ; в операторной форме мы просто пишем $f\partial = \partial f$.

Сразу очевидны два следующих свойства цепных отображений.

А. Цепное отображение f переводит цепь c_p и ее границу ∂c_p соответственно в цепь $d_p = f c_p$ и границу этой цепи ∂d_p . Следовательно, f переводит цикл в цикл и границу в границу.

Б. Если K_1, K_2, K_3 — комплексы и f, g — цепные отображения $f: K_1 \rightarrow K_2$ и $g: K_2 \rightarrow K_3$, тогда gf — цепное отображение $K_1 \rightarrow K_3$.

Лемма. Если z_p и z'_p — гомологичные p -циклы в K_1 , то после применения цепного отображения f образы $f(z_p)$ и $f(z'_p)$ будут гомологичными p -циклами в K_2 .

Доказательство. Поскольку из $z_p \sim z'_p$ следует $z_p - z'_p = \partial c_{p+1}$, то $f(z_p) - f(z'_p) = f(z_p - z'_p) = \partial(f c_{p+1})$.

Так как линейная функция переводит цепь из K_1 в одну и только одну цепь из K_2 , то она индуцирует некоторый гомоморфизм группы цепей $C_p(K_1)$ на группу цепей $C_p(K_2)$. Отображение f группы A на группу B обозначается символом $f: A \rightarrow B$ и называется гомоморфизмом, если 1) любому элементу a из A соответствует один и только один элемент b из B и 2) сохраняется при этом групповая операция, т. е. $f(a_1 * a_2) = f(a_1) * f(a_2)$ (символ $*$ означает групповую операцию). Гомоморфизм обычно является отображением внутрь; это значит, что в B могут быть элементы, не имеющие при данном отображении отвечающих им элементов в A . Единица из A должна отображаться в единицу из B .

Теорема 2.4. Если f — цепное отображение, которое переводит $C_p(K_1)$ в $C_p(K_2)$, то оно индуцирует некоторый гомоморфизм групп гомологий, т. е. гомоморфизм $f: H_p(K_1) \rightarrow H_p(K_2)$.

Данная теорема сразу следует из предыдущей леммы. Примеры гомоморфизмов будут рассмотрены в § 8 этой главы.

Справедливо нетривиальное утверждение, что непрерывное отображение одного пространства на другое представляет (или индуцирует) цепное отображение комплекса, соответствующего первому пространству, в комплекс, соответствующий второму пространству.

§ 7. Точные последовательности

Рассматривая последовательность гомоморфизмов, можно рассчитать группу по другим группам, участвующим в этой последовательности.

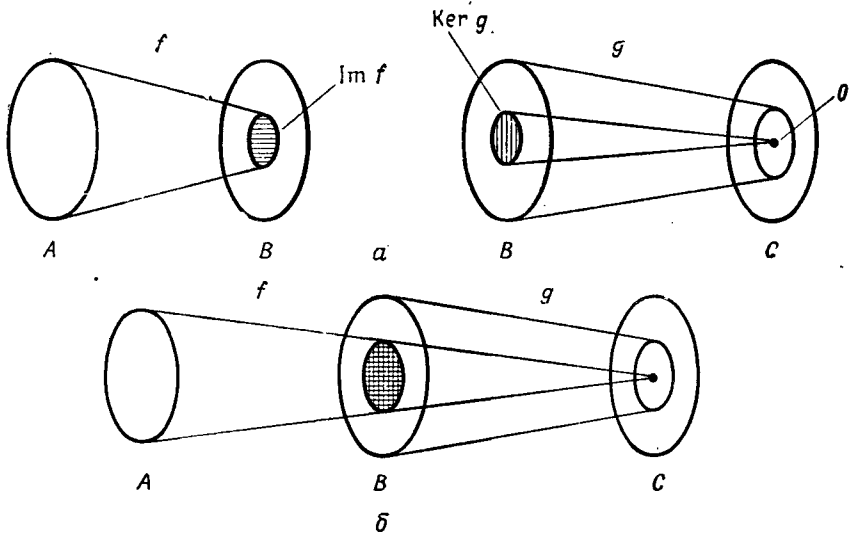
Обозначим образ A при гомоморфизме $f: A \rightarrow B$ символом $\text{Im } f$, так что, по определению, A отображается гомоморфизмом f в $\text{Im } f = f(A) \subset B$. Очевидно, $\text{Im } f = B$ тогда и только тогда, если f отображает A на B . Далее, если $A = 0$ (является единственным элементом), то $\text{Im } f = 0$.

Назовем множество элементов A , отображаемых f в нуль, *ядром* f и будем обозначать его символом $\text{Ker } f$, так что $\text{Ker } f = f^{-1}(0)$, т. е. ядро равно образу единичного элемента при обратном преобразовании. Таким образом, для $f: A \rightarrow 0$ мы имеем $A = \text{Ker } f$.

Определение 2.7. Гомоморфизм $f: A \rightarrow B$ называется *изоморфизмом*, если для каждого b из B существует один и только один элемент a из A , такой, что $f(a) = b$; изоморфизм обозначается символом \cong .

Из самого определения ясно, что изоморфизм является как взаимно однозначным отображением A в B , так и отображением A на B .

Теорема 2.5. Если гомоморфизм f переводит A в B , то $\text{Im } f \cong A/\text{Ker } f$.



Фиг. 15. Два гомоморфизма (а) образуют точную последовательность (б).

Указанная теорема утверждает, что существует взаимно однозначное соответствие между каждым элементом b из $\text{Im } f$ и совокупностью элементов из A , которые отображаются на это b . Нетрудно видеть, что такое соответствие сохраняет групповую операцию.

Рассмотрим теперь последовательность гомоморфизмов.

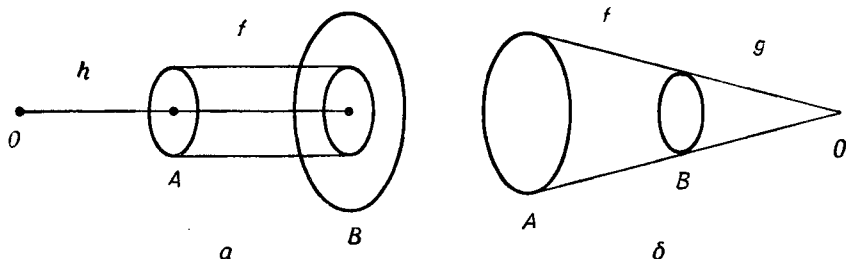
Определение 2.8. Последовательность $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ называется *точной* в B тогда и только тогда, если $\text{Im } f = \text{Ker } g$.

На фиг. 15, а мы даем наглядное изображение обоих гомоморфизмов $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$. Требование, чтобы последовательность была точной в B , заключается в том, чтобы $\text{Im } f = \text{Ker } g$; последнее соотношение наглядно представлено на

фиг. 15, б. Мы видим, что точная последовательность отображает A в 0 в два этапа; это очень полезное правило нужно помнить.

Из самого определения точной последовательности следуют ее свойства.

А. Последовательность $0 \xrightarrow{h} A \xrightarrow{f} B$ точна в A тогда и только тогда, когда f является взаимно однозначным отображением A в B .



Фиг. 16. Две точные последовательности.

Доказательство. Так как последовательность точна, то $\text{Ker } f = \text{Im } h = 0$ и поэтому по теореме 2.5 $\text{Im } f \cong A$, откуда следует, что f является взаимно однозначным отображением. Обращая рассуждение, можно убедиться также в справедливости обращенного утверждения. Фиг. 16, а иллюстрирует указанную ситуацию.

Б. Последовательность $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} 0$ точна в B тогда и только тогда, когда f является отображением A на B .

Доказательство. Так как последовательность точная, то $\text{Im } f = \text{Ker } g = B$ и, следовательно, f является отображением A на B . Фиг. 16, б иллюстрирует это.

В. Последовательность $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ точная¹⁾ тогда и только тогда, если f изоморфизм.

Обе части этого утверждения уже доказаны выше в А и Б. Наглядное изображение ситуации приведено на фиг. 17.

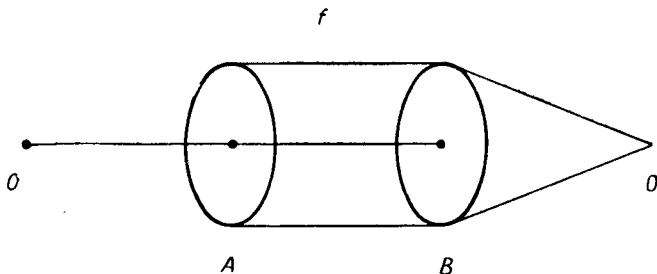
Г. Последовательность $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ точная тогда и только тогда, если $C \cong B/\text{Im } f$.

Доказательство. Так как последовательность точная, то f — взаимно однозначное отображение и g — отображение B на C . Поэтому $\text{Ker } g = \text{Im } f \cong A$ и $\text{Im } g = C$. Используя для g тео-

¹⁾ Последовательность называется точной вообще, если она точна на каждой своей группе.

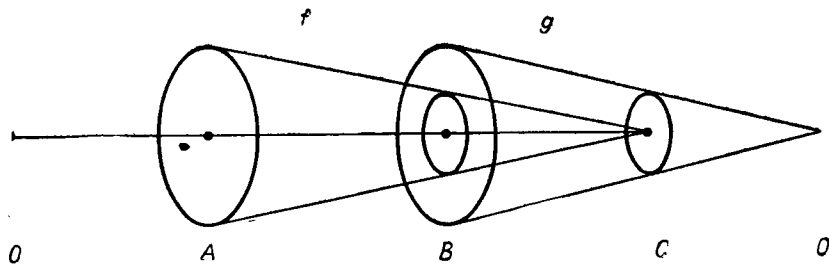
рему 2.5, из которой следует, что $\text{Im } g \cong B/\text{Ker } g$, мы получаем $C \cong B/\text{Im } f$. Доказательство обратного утверждения аналогично. Фиг. 18 наглядно изображает соответствующую ситуацию.

При расчете какой-либо группы G часто полезно делать следующее: во-первых, найти точную последовательность, содержащую группу G ; во-вторых, оценить более простые группы в ука-



Фиг. 17. Точная последовательность.

званной последовательности по соседству с G и, в-третьих, определить G , пользуясь известными свойствами точных последовательностей. Часто явный вид соответствующих гомоморфизмов



Фиг. 18. Точная последовательность.

в последовательности бывает вовсе не нужен; достаточно доказать их существование и установить свойство точности последовательности. Пример, иллюстрирующий описываемый способ расчета группы, будет приведен в конце следующего параграфа.

§ 8. Точная гомологическая последовательность

Рассмотрим комплекс K и его подкомплекс L , $L \subset K$. Естественно ожидать, что существует связь между тремя совокупностями групп гомологий $H_p(K)$, $H_p(L)$ и $H_p(K, L)$. Такого рода связь выражается в существовании точной гомологической по-

следовательности, что мы рассмотрим ниже. Однако сначала определим три основных отображения: вложение i , проекцию π и граничное отображение ∂ .

А. Вложение i определяется следующим образом:

$$H_p(L) \xrightarrow{i} H_p(K).$$

Поскольку L содержится в K , каждая цепь на L отображается в некоторую цепь на K при действии i . Индуцированное отображение $H_p(L)$ в $H_p(K)$ является гомоморфизмом, поскольку два цикла, эквивалентные на L , должны быть также эквивалентными на K (в противном случае существовала бы граница на L , которая не отображалась бы в границу на K , в противоречии с предположением, что L содержится в K).

Б. Проекция π определяется следующим образом:

$$H_p(K) \xrightarrow{\pi} H_p(K, L).$$

Отображение π сопоставляет каждой цепи c_p на K сопряженный класс по модулю $C_p(L)$, так как $\pi(c_p) = c_p \oplus C_p(L)$. Отображение π обладает свойством $\pi\partial = \bar{\partial}\pi$, как это легко видеть: $\bar{\partial}(\pi c_p) = \partial c_p \oplus C_{p-1}(L) = \pi(\partial c_p)$. Следовательно, π является цепным отображением и по теореме 2.4 индуцирует гомоморфизм $H_p(K) \rightarrow H_p(K, L)$.

В. Граничное отображение ∂ определяется следующим образом:

$$H_p(K, L) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(L).$$

Пусть относительный цикл \bar{z}_p записан в виде

$$\bar{z}_p = z_p \oplus C_p(L).$$

Отображение ∂ для $H_p(K, L)$ в $H_{p-1}(L)$ является гомоморфизмом, поскольку соответствующие любым двум гомологическим относительным циклам \bar{z}_p и \bar{z}'_p циклы ∂z_p и $\partial z'_p$ на L гомологичны. То, что это действительно циклы, было установлено в § 5 (А); то, что они гомологичны, следует из § 5 (Б).

Теорема 2.6. Следующая гомологическая последовательности является точной:

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{i} H_p(K) \xrightarrow{\pi} H_p(K, L) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(L) \xrightarrow{i} \\ \longrightarrow H_{p-1}(K) \xrightarrow{\pi} H_{p-1}(K, L) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Доказательство этой теоремы, хотя и элементарно, но довольно длинно; оно здесь не приводится.

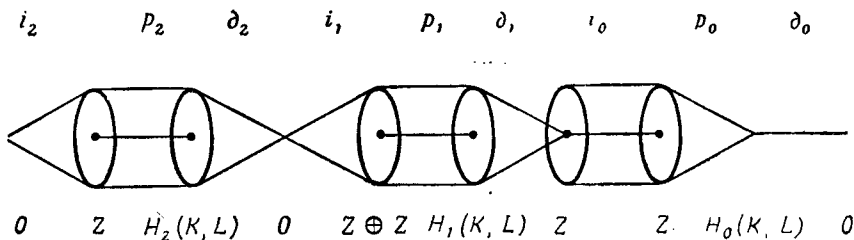
Удобный способ представить указанную точную гомологическую последовательность — записать ее в виде треугольника

$$\begin{array}{ccc}
 H(K, L) & & \dim \partial = -1, \\
 \nearrow \pi & & \searrow \partial \\
 H(K) \xleftarrow{i} H(L) & & \dim i = \dim \pi = 0.
 \end{array}$$

Обобщение этого точного треугольника на случай, когда L является объединением двух подкомплексов S и S' , выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc}
 H(K, S \cup S') & & \\
 \nearrow \pi & & \searrow \partial \\
 H(K, S') \xleftarrow{i} H(S, S \cap S') & &
 \end{array}$$

Пример. Пусть 2-комплекс K представляет собой тор, а L — связный диск на K . Рассчитаем группы относительных гомологий $H_p(K, L)$ с помощью точной последовательности групп.



Фиг. 19. Точная гомологическая последовательность.

Прежде всего приведем без доказательств следующие простые результаты: $H_2(L) = H_1(L) = 0$, $H_0(L) = H_2(K) = H_0(K) = Z$, $H_1(K) = Z \oplus Z$. Начиная последовательность с $H_2(L)$, получаем

$0 \xrightarrow{i_2} Z \xrightarrow{\pi_2} H_2(K, L) \xrightarrow{\partial_2} 0 \xrightarrow{i_1} Z \oplus Z \xrightarrow{\pi_1} H_1(K, L) \xrightarrow{\partial_1} Z \xrightarrow{i_0} Z \xrightarrow{\pi_0} H_0(K, L) \xrightarrow{\partial_0} 0$. Отсюда следует, что $H_2(K, L) = Z$. Теперь установим независимым образом, что $H_0(K, L) = 0$; это следует из того обстоятельства, что каждый вертекс на K образует вместе с любым вертексом на L границу для некоторой 1-цепи на K . Свойство точности последовательности означает теперь, что i_0 является гомоморфизмом Z на Z ; поскольку он переводит множество всех целых чисел само в себя, он должен быть также взаимно однозначным. Из $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } i_0 = 0$ сразу следует, что π_1 является изоморфизмом (фиг. 19). Следовательно, $H_1(K, L) \cong Z \oplus Z$.

ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Введение

В качестве введения к изучению сингулярных интегралов методом теории гомологий мы рассмотрим сначала с помощью трех различных методов один простой пример.

Рассмотрим функцию $F(t)$, определяемую интегралом

$$F(t) = \int_a^b \frac{dx}{x^2 - t}, \quad (3.1)$$

где $b > a > 0$, и займемся изучением ее аналитических свойств а) путем непосредственного интегрирования, б) с помощью процедуры деформации контура и в) с помощью гомологических методов.

а) Функция $F(t)$ сводится к выражению

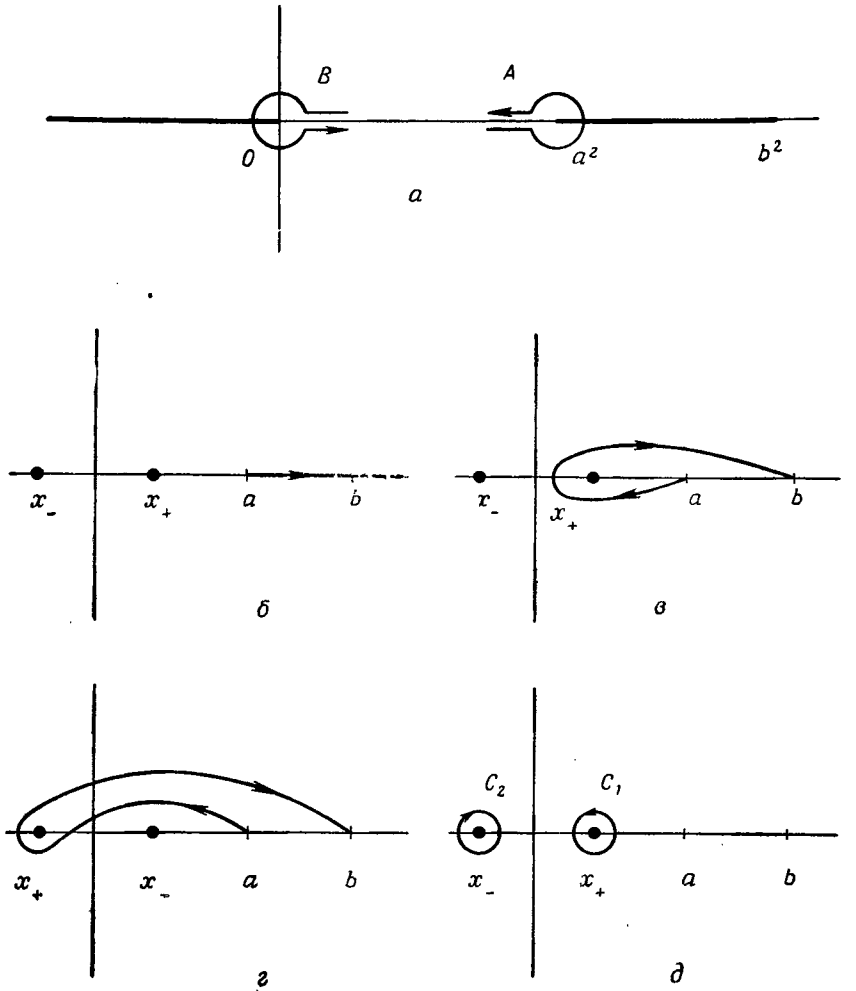
$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \ln \frac{(a + \sqrt{t})(b - \sqrt{t})}{(a - \sqrt{t})(b + \sqrt{t})}, \quad (3.2)$$

из которого видно, что она имеет логарифмические точки ветвления при $t = a^2$ и $t = b^2$. Точка $t = 0$ является точкой ветвления типа квадратного корня на всех листах римановой поверхности функции (3.2), за исключением главного листа логарифма; это легко видеть, если заметить, что при малых $|t|$ для логарифма можно использовать приближение $2(a^{-1} - b^{-1})t^{1/2} + 2\pi i n$, где $t = |t|e^{i\theta}$ при $-\pi < \theta < \pi$ и n — целое число; $n = 0$ соответствует главному листу логарифма.

В приложениях методов «б» и «в» нас особенно интересует именно этот вопрос о сингулярности типа квадратного корня, которая имеется на одном листе и отсутствует на других.

б) При $0 < t < a$ для получения главной ветви логарифма (3.2) контур интегрирования в (3.1) показан на фиг. 20, б, где жирными точками отмечены сингулярности подынтегрального выражения при $x = x_{\pm} = \pm \sqrt{t}$. Логарифмические сингулярности функции $F(t)$ достигаются при $t = a^2$ (b^2), когда точки x_+ (x_-) совмещены с a (b). При $t = 0$ точки x_+ и x_- совмещаются друг с другом, но они при этом не захватывают контур интегри-

рования (пинча не происходит); следовательно, сингулярность типа квадратного корня не появляется на рассматриваемом листе функции F . Теперь предположим, что мы берем t на пути A ,



Фиг. 20. a — пути для аналитического продолжения на t -плоскости (A и B); $б - д$ — контуры интегрирования на x -плоскости.

изображенном на фиг. 20, a . Тогда точка x_+ обойдет точку a , и контур интегрирования должен быть деформирован от положения, изображенного на фиг. 20, б, до положения, изображенного на фиг. 20, в. Поскольку мы окружаем точку $t=a^2$ (а не

точку $t=b^2$), контур фиг. 20, *в* дает значения функции F на втором листе ее логарифмической сингулярности. На этом листе при $t \rightarrow 0$ для контура интегрирования происходит пинч, и функция F при $t=0$ оказывается сингулярной.

Чтобы найти скачок, связанный с этой сингулярностью, мы возьмем t на пути B (фиг. 20, *а*). Контур интегрирования должен тогда деформироваться от положения, изображенного на фиг. 20, *в*, до положения, изображенного на фиг. 20, *г*. Разность контуров до и после деформирования показана на фиг. 20, *д*. Интеграл по контуру фиг. 20, *д* можно легко рассчитать с помощью теоремы Коши, и мы получим

$$\Delta F(t) = \oint_{C_1+C_2} \frac{dx}{(x+\sqrt{t})(x-\sqrt{t})} = \frac{2\pi i}{\sqrt{t}},$$

что полностью согласуется с результатом, который можно получить по вышеизложенному методу «а», если положить $n=1$.

Описанным способом удастся в рассматриваемом примере очень просто определить структуру всех листов римановой поверхности. Однако обобщить метод на более сложные случаи не так легко. Рассмотрим, например, функцию

$$F(t) = \int_{\Gamma} f(z, t) d^l x, \quad (3.3)$$

где

$$t = (t_1, \dots, t_m), \\ z = (z_1, \dots, z_l) = (x_1 + iy_1, \dots, x_l + iy_l),$$

Γ — контур в пространстве l комплексных измерений ($2l$ действительных измерений) и f — функция, имеющая сингулярности на m поверхностях S_i (каждая $l-1$ комплексного измерения). Изложенный выше простой геометрический метод, конечно, может быть применен к изучению этого более общего случая, однако его применение оказывается громоздким. Указанный случай удобнее рассматривать с помощью гомологической теории [в качестве интеграла (3.3) представим себе фейнмановский интеграл или интеграл унитарности].

в) Возвращаясь к рассматриваемому простому примеру, займемся сингулярностями подынтегрального выражения интеграла (3.1) при $x = \pm \sqrt{t} = x_{\pm}$ (фиг. 21, *а*). Заметим, что отрезок прямой от x_- до x_+ исчезает при $t=0$ (и только при $t=0$), и точки x_+ и x_- совмещаются друг с другом. Таким образом, указанное совмещение сингулярностей эквивалентно исчезновению отрезка. Рассмотрим комплексную плоскость \mathcal{C} как симпли-

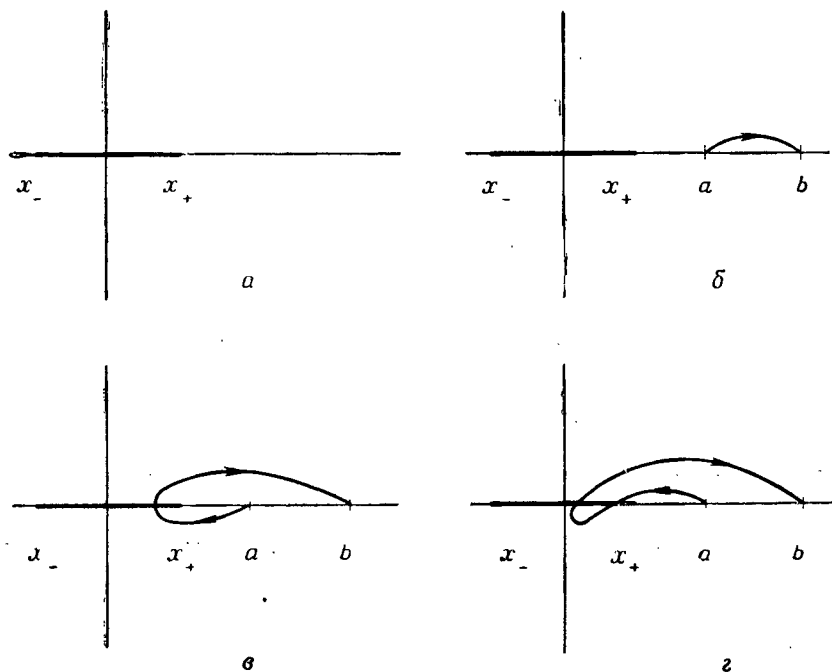
циальный комплекс, а точки x_+ и x_- как субкомплекс $(x_+ \cup x_-)$; тогда

$$H_2(\mathbb{C}, x_+ \cup x_-) = 0,$$

$$H_1(\mathbb{C}, x_+ \cup x_-) \approx \mathbb{Z},$$

$$H_0(\mathbb{C}, x_+ \cup x_-) = 0,$$

где циклом, порождающим $H_1(\mathbb{C}, x_+ \cup x_-)$, является отрезок прямой от x_- до x_+ . Указанный отрезок называется *исчезающим циклом*.



Фиг. 21. Исчезающий цикл и контур интегрирования на x -плоскости.

Мы покажем ниже, что аналитическая геометрическая проблема определения пинчей для функции F (3.3) эквивалентна алгебраической проблеме отыскания групп относительных гомологий

$$H_1(\mathbb{C}^l, S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m).$$

Рассмотрим теперь фиг. 21, б, где показаны и контур интегрирования, и исчезающий цикл для t на главном листе логарифмической сингулярности функции F . Заметим, что исчезаю-

ший цикл и контур интегрирования не пересекаются. На фиг. 21, в показаны контур интегрирования и исчезающий цикл для t на втором листе логарифмической сингулярности функции F ; теперь они пересекаются. Ясно, что для того, чтобы контур интегрирования захватывался при совмещении друг с другом каких-либо сингулярностей функции f (т. е. при исчезновении цикла), число пересечений контура интегрирования Γ с исчезающим циклом e не должно равняться нулю; это число называется *кронекеровским индексом* e и Γ и обозначается символом $KI[e, \Gamma]$. Так, для фиг. 21, б имеем $KI=0$; для фиг. 21, в $KI=1$. Для фиг. 21, г $KI=1-1=0$ (поскольку Γ и e пересекаются в двух точках, но с противоположными ориентациями в каждой точке); последнее следовало ожидать, поскольку контур интегрирования для фиг. 21, г в точности совпадает с контуром интегрирования для фиг. 21, б и получается из последнего деформированием без затрагивания сингулярностей функции f .

Рассмотрим еще контур Γ_1 , изображенный на фиг. 21, д. Выше мы видели, что, когда точка t обходит нуль по пути B , изображенном на фиг. 21, а, контур Γ превращается в $\Gamma + \Gamma_1$. Контур Γ_1 мы можем построить следующим образом. Граница исчезающего цикла $de(\mathcal{C}, x_- \cup x_+)$ равна как раз разности $x_+ - x_-$. Для любой точки p в \mathcal{C} путь δp означает окружность вокруг p с направлением обхода против часовой стрелки; тогда мы имеем

$$\Gamma_1 = \delta de(\mathcal{C}, x_- \cup x_+) = \delta(x_+) - \delta(x_-)$$

(δ называется *кограничным оператором Лере*). Изменение контура можно теперь представить в виде

$$\Gamma \rightarrow \Gamma + KI[e(\mathcal{C}, x_- \cup x_+), \Gamma] \delta de(\mathcal{C}, x_- \cup x_+). \quad (3.4)$$

Формула (3.4) составляет содержание так называемой *теоремы Пикара — Лефшеца*; с ее помощью аналитическая проблема определения структуры листов римановой поверхности для интеграла сводится к алгебраической проблеме расчета кронекеровских индексов.

Итак, основные понятия, требуемые формулой (3.4), таковы: 1) исчезающий цикл, 2) кронекеровский индекс, 3) кограничный оператор Лере. Все эти понятия были введены в науку Лере [32]¹⁾. Однако осознанием их важности для изучения интересных в физике интегралов мы обязаны Фотиади, Фруассару, Ласку и Фаму. Будем следовать здесь их идеям.

¹⁾ См. также: J. Lerau, Bull. Soc. Math. France, 90, 39, 156 (1962) и Ж. Лере, Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, ИЛ, 1961. — *Прим. перев.*

§ 2. Компактные и замкнутые гомологии

Для того чтобы подобающим образом изложить теорему Пикара — Лефшеца, нам необходимо рассмотреть компактные и замкнутые гомологии в дополнение к симплициальным гомологиям, теория которых изложена в гл. 2. Сначала дадим определения и кратко рассмотрим свойства *компактных пространств* [30]. Обычно наиболее удобно основывать все определения на рассмотрении открытых покрытий.

Определение 3.1. *Покрытием* пространства X называется совокупность его подмножеств $\{A_\alpha\}$, объединением которых является X . Если все A_α — открытые множества, то $\{A_\alpha\}$ называется *открытым покрытием*.

Покрытие называется конечным, когда указанная совокупность подмножеств состоит из конечного числа их.

Определение 3.2. Пространство X называется компактным тогда и только тогда, если каждое открытое его покрытие содержит некоторое конечное подпокрытие.

Открытым покрытием подмножества S из пространства X называется совокупность открытых множеств из X , объединение которых *содержит* S ; если существует конечное подпокрытие, то S тоже называется компактным.

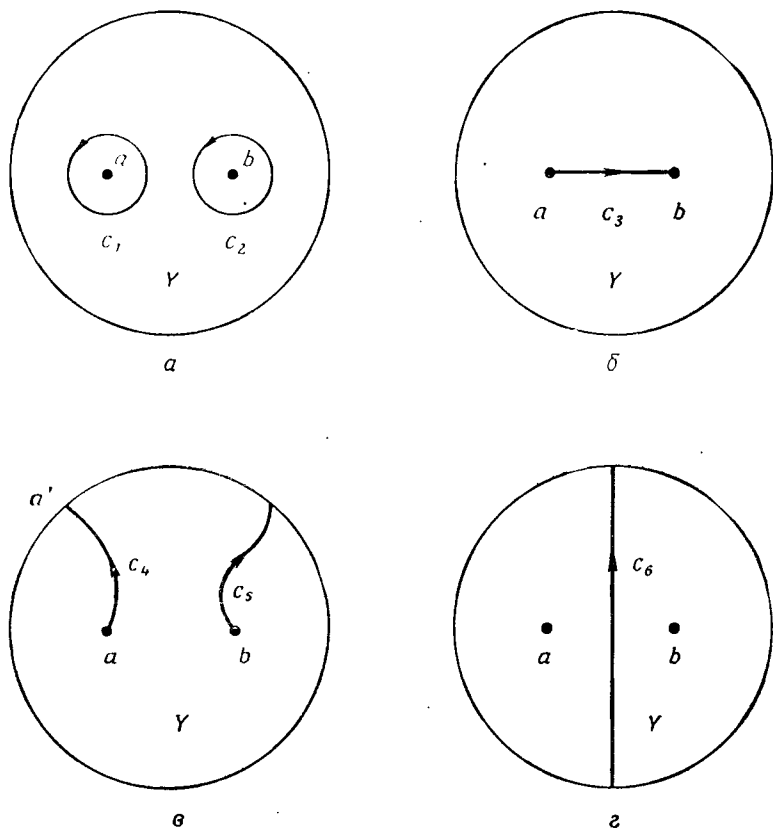
Определение 3.3. Множество $A \subset X$ *замкнуто*, если оно содержит все свои предельные точки, являющиеся точками X (т. е. $X - A$ открыто).

Теорема 3.1. Подмножество евклидова пространства компактно тогда и только тогда, если оно замкнуто и ограничено (теорема Гейне — Бореля).

С целью проиллюстрировать понятие компактности и ввести читателя в компактную гомологию рассмотрим следующий пример. Предположим, что S состоит из двух точек a и b в 2-комплексе K , и пусть Y — двумерный открытый шар, содержащий S . Поскольку Y открыто, оно не содержит своих границ. Рассмотрим цепь c_1 на фиг. 22, а. Очевидно, это компактная цепь на Y , ибо она может быть покрыта конечной совокупностью открытых множеств из Y . Изображенная на фиг. 22, в 1-цепь c_2 не является компактной на Y , так как конец цепи на границе не содержит своей предельной точки a' , так что никакая конечная совокупность открытых множеств из Y не может покрыть ее. Однако указанная цепь *замкнута* на Y , ибо предельная точка a' , которую она не содержит, не лежит в Y . На фиг. 22, б изображена цепь c_3 , определенная так, что она включает в себя свои концевые точки; цепь c_3 компактна на Y . В то же время цепь c_6 ,

изображенная на фиг. 22, г, является только замкнутой на $Y-S$, т. е. как на Y , так и на $Y-S$.

Возвращаясь к компактной цепи c_1 , отметим, что она является границей на Y , а не только ненулевым циклом на $Y-S$,



Фиг. 22. Порождающие элементы групп: а) $H_1^C(Y-S)$, б) $H_1^C(Y, S)$, в) $H_1^F(Y-S)$ и г) $H_1^F(\underline{Y}-S)$.

где существуют лишь два базисных одномерных компактных цикла c_1 и c_2 ; они порождают компактную группу гомологий $H_1^C(Y-S) \cong Z \oplus Z$.

В пространстве Y по модулю S цепи c_1 и c_2 не являются компактными циклами, но будут границами. Цепь c_3 является компактным циклом на (Y, S) , ибо ее граница принадлежит S . Поскольку компактная цепь на Y не может оканчиваться на границе Y , цепь c_3 является единственным базисным одномер-

ным компактным циклом на (Y, \bar{S}) ; она порождает компактную группу гомологий $H_1^C(Y, S) \cong Z$. Заметим, что, когда a и b — две сингулярные точки функции, которые могут совмещаться друг с другом при определенных значениях переменных положения, c_3 можно идентифицировать с исчезающим циклом.

Рассмотрим теперь замкнутые циклы на $Y - S$. Цепь c_4 (без a) и цепь c_5 (без b) оказываются такими замкнутыми циклами; цепь c_3 (без a и b) также является замкнутым циклом на $Y - S$, который, однако, гомологичен $c_4 - c_5$. Цепь c_6 замкнута на $Y - S$ и является границей замкнутой 2-цепи A ; цепь A образуется открытым множеством справа от c_6 на фиг. 22 вместе с самой цепью c_6 . Аналогично цепи c_1 и c_2 являются замкнутыми границами на $Y - S$. Таким образом, единственными порождающими элементами группы замкнутых гомологий $H_1^F(Y - S)$ будут цепи c_4 и c_5 .

Более интересна группа замкнутых гомологий $H_1^F(\underline{Y} - S)$. Для нее единственным порождающим элементом будет цепь c_6 , ибо c_3 , c_4 и c_5 не замкнуты либо на Y , либо на $Y - S$. В нашем случае замкнутая цепь c_6 является циклом, но не является границей, поскольку рассматриваемая выше цепь A не является замкнутой в Y . Наконец, очевидно, что c_1 и c_2 , рассматриваемые как цепи в $\underline{Y} - S$, гомологичны c_6 . Отметим, что замкнутый цикл в $\underline{Y} - S$ [или компактный цикл в $H^C(Y - S)$] должен избегать S в точности так же, как контур интегрирования должен избегать (пока это возможно) сингулярностей подынтегрального выражения. Мы вводим в рассмотрение группу $H^F(\underline{Y} - S)$, так как пересечение контура интегрирования в (3.3) с открытым шаром (в \mathcal{C}^1), окружающим место пинча, является циклом в $H^F(\underline{Y} - S)$. Отметим, что группа $H^F(Y - S)$ идентична с $H^C(\underline{Y} - S)$, поскольку компактная в $Y - \bar{S}$ цепь всегда компактна в Y .

Итак, приведенные на фиг. 22, $a - g$ циклы являются порождающими элементами для групп $H_1^C(Y - S)$, $H_1^C(Y, S)$, $H_1^F(Y - S)$ и $H_1^F(\underline{Y} - S)$ соответственно.

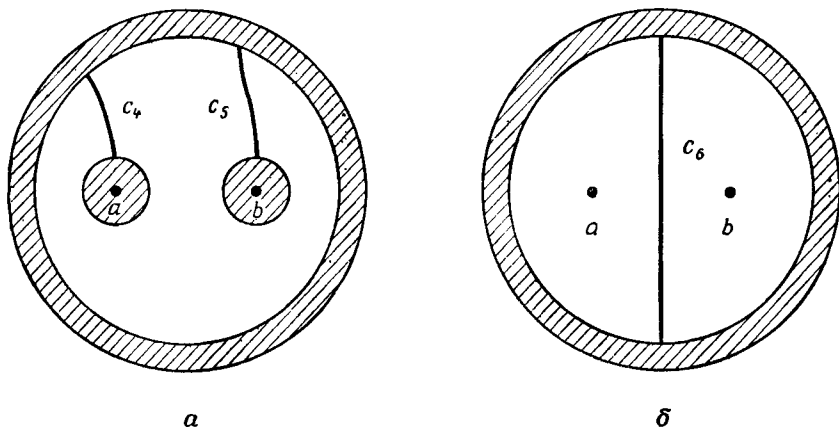
Компактные и замкнутые гомологи (C и F) можно связать с симплициальными гомологиями (гл. 2) следующим образом. Одно из требований в определении симплициального комплекса Σ заключалось в том, что если симплекс σ входит в Σ , то любая его грань также входит в Σ . Если мы удалим, например, точку P из двумерного комплекса Σ_2 , то в результате мы не получим симплициального комплекса. Чтобы обойти это формальное затруднение, мы должны удалить вместе с точкой P маленькую площадку A_P с центром P . Гомология $\Sigma_2 - A_P$ не зависит от размеров площадки A_P , если, конечно, площадка A_P

выбрана достаточно маленькой, чтобы не затрагивать другие отверстия в Σ_2 . По определению, $H^C(\Sigma - P)$ — это просто $H(\Sigma - A_P)$ для достаточно малого A_P , где $H(\Sigma - A_P)$ есть как раз та симплициальная гомология, которую мы рассматривали в гл. 2. Мы можем обобщить данное определение и сформулировать его не для Σ , а для $\Sigma' = \Sigma - P$.

Определение 3.4. Компактная гомология определяется через симплициальную гомологию следующим образом:

$$H^C(\Sigma') = \lim_{K \subset \Sigma'} H(K),$$

где K — компактно и предел¹⁾ берется в смысле обращения ко все большим и большим компактным множествам K , соответствующим удалению все меньших и меньших площадок из Σ при получении из него Σ' .



Фиг. 23. Группы гомологий: а) $H^C(Y - S)$ и б) $H^F(\underline{Y} - S)$ по определению 3.6 получаются, когда площадь заштрихованных областей обращается в нуль.

Подобное определение имеет место для компактных относительных гомологий.

Определение 3.5. Имеем

$$H^C(\Sigma_1, \Sigma_2) = \lim_{\substack{K_1 \subset \Sigma_1 \\ K_2 \supset \Sigma_2}} H(K_1, K_2).$$

Замкнутые гомологии можно определить через компактные гомологии.

¹⁾ Пределы в определениях 3.5—3.7 известны под названием прямых и обратных пределов [30, 33].

Определение 3.6. Имеем

$$H^F(Y-S) = \lim_{K \subset Y-S} H^C(Y-S, Y-S-K),$$

$$H^F(\underline{Y-S}) = \lim_{K \subset Y} H^C(Y-S, Y-S-K).$$

Определение 3.6 иллюстрируется на фиг. 23, где множества $Y-S-K$ изображены заштрихованными областями.

§ 3. Кограничный гомоморфизм

Переформулируем сначала изучаемую в этой главе проблему. Мы рассматриваем задачу аналитического продолжения интеграла вида ¹⁾

$$F(t) = \int_{\Gamma} \frac{\prod_{j=1}^l dx_j}{\prod_{i=1}^m s_i(x, t)}, \quad (3.5)$$

где контур интегрирования Γ является действительным l -мерным подпространством (циклом) для комплексного l -мерного пространства X (действительное $2l$ -мерное пространство).

В качестве пространства X мы возьмем компактное комплексное аналитическое многообразие. Комплексное l -мерное многообразие [33, 34, 36]²⁾ (см. § 3 гл. 5) обладает свойством локальной гомеоморфности в комплексное l -мерное евклидово пространство, так что в окрестности любой точки P мы можем ввести координаты $(x_1, \dots, x_l) = x$, где $x_j = \operatorname{Re} x_j + i \operatorname{Im} x_j$. Функции $s_i(x, t)$ в (3.5) могут быть, в частности, фейнмановскими знаменателями, где t — внешние импульсы и $l/4$ — число независимых петель. При фиксированном t подынтегральное выражение в (3.5) имеет сингулярности на гиперповерхностях, лежащих в X и определяемых уравнениями $s_i(x, t) = 0$. Обозначим эти

¹⁾ См. в [34] и в § 1 гл. 6 более четкую формулировку условий, при которых (3.5) определяют аналитическое продолжение интеграла $F(t_0)$ с окрестности точки t_0 до полной аналитической функции $F(t)$.

²⁾ См. также: Чжень Шен-шень, Комплексные многообразия, ИЛ, 1961; Л. Шварц, Комплексные аналитические многообразия, изд-во «Мир», 1964; М. Постников, Вариационная теория геодезических, М., 1965; С. Ленг, Введение в теорию дифференцируемых многообразий, изд-во «Мир», 1967; Р. Бишоп, Р. Криттенден, Геометрия многообразий, изд-во «Мир», 1967. — *Прим. перев.*

гиперповерхности через S_i и будем использовать обозначения для пересечения и объединения граничных S_i :

$${}^{(h)}S = S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_h},$$

$${}^{(h)}S = S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \dots \cup S_{i_h},$$

где $(h) = \{i_1, i_2, \dots, i_h\}$. Для дальнейшего существенно предположить, что гиперповерхности S_i являются связными $(l-1)$ -мерными многообразиями [т. е. не существует окрестностей на S_i , которые были бы гомеоморфными пересечению двух или более $(l-1)$ -мерных окрестностей евклидова пространства]. Обобщение результатов гл. 3 и 4 на случай сингулярных аналитических областей изменения [37, 38], для которых указанное ограничение устраняется, необходимо в случае фейнмановских диаграмм, имеющих более одной петли; в настоящее время такое обобщение еще не проведено (см. также § 4 гл. 6).

Как отмечалось в § 1 этой главы, для изучения сингулярностей функции $F(t)$ (3.5) и ее изменения, когда путь точки t окружает одну из этих сингулярностей, мы должны ввести в рассмотрение три понятия: исчезающего цикла, кограничного оператора и кронекеровского индекса. В настоящем параграфе мы рассмотрим кограничный оператор.

Пусть S обозначает одну из введенных выше гиперповерхностей S_i . Мы сначала рассмотрим *трубчатую окрестность* V^e для S . Поскольку комплексная размерность S равна $\dim \mathbb{C}S = l-1$, то существует комплексная переменная z_0 , в плоскости которой S выступает локально как точка, а X локально представляется прямым произведением S и комплексной плоскости z_0 . Именно здесь мы используем то, что S является многообразием, как это было предположено выше. Пусть $y \in S$. Тогда V_y^e — круговая окрестность y с радиусом ϵ на описанной выше плоскости, трубчатая окрестность V^e — это окрестность V_y^e , расширенная на все измерения S , т. е.

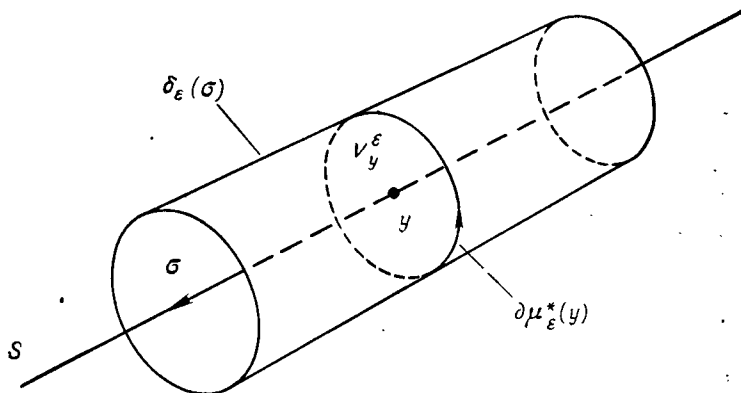
$$V^e = \bigcup_{y \in S} V_y^e.$$

Мы можем определить *стягивающее* отображение $\mu_\epsilon: \bar{V}^e \rightarrow S$, как $\mu_\epsilon(\bar{V}_y^e) = y$ для каждого y в S . Таким образом, μ_ϵ стягивает диск \bar{V}_y^e в точку его центра y . Для данной ориентированной цепи σ в S определим $\mu_\epsilon^*(\sigma)$ как обратный образ $\mu_\epsilon^{-1}(\sigma)$ с естественной ориентацией каждого диска V_y^e при $y \in \sigma$. 1-цепь $d\mu_\epsilon^{-1}(y)$ является окружностью с направлением обхода против часовой

стрелки на плоскости z_0 ; 1-цепь $\partial\mu_\varepsilon^*(y)$ при $y \in \sigma$ является одномерной окружностью в X с такой ориентацией, что ее «нормальная» ориентация согласуется с ориентацией σ .

Определение 3.7. Кограничный оператор¹⁾ δ_ε переводит цепь $\sigma \in S$ в $\delta_\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\dim \sigma} \partial\mu_\varepsilon^*(\sigma) = \sigma \otimes \partial\mu_\varepsilon^{-1}(y)$.

Кограничный оператор можно представить наглядно, если заменить все измерения S одним действительным измерением. Тогда \bar{V}^ε будет иметь вид объемного цилиндра, как это показано



Фиг. 24. Наглядное представление кограничного оператора; здесь гиперповерхность S «сжата» до одного измерения. Цилиндр представляет собой трубчатую окрестность V^ε для S .

на фиг. 24; кограница цепи на S , т. е. $\partial\bar{V}^\varepsilon$, представляется цилиндрической поверхностью, окружающей S . Отметим, что операция взятия кограницы δ_ε увеличивает действительную размерность на единицу.

Оператор δ_ε является цепным отображением²⁾ ($\delta_\varepsilon \partial = \partial \delta_\varepsilon$) и индуцирует кограничный гомоморфизм групп компактных гомологий

$$\delta: H_p^C(S) \rightarrow H_{p+1}^C(X - S).$$

Очевидно, компактный цикл в S можно отобразить только на один компактный цикл в $X - S$ с размерностью на единицу боль-

¹⁾ Определение Лере отличается от принятого здесь знаковым множителем $(-1)^{\dim \sigma}$. Поскольку вся теория (что касается ее физических приложений) находится еще в начальной стадии, исследователи имеют известную свободу в выборе определений.

²⁾ Выбирая знак в согласии с Лере, получаем здесь $\delta_\varepsilon \partial = -\partial \delta_\varepsilon$.

ше. Возьмем, например, фиг. 22, а; мы имеем $S = a \cup b$. Точка a сама образует цикл, порождающий некоторый класс эквивалентности для $H_0^C(S)$. При действии δ мы получим цепь c_1 , являющуюся компактным циклом в $Y - S$ и элементом из $H_1^C(Y - S)$.

Повторное применение оператора δ приводит к итерированным кограничным гомоморфизмам. Пусть δ^m означает m раз итерированный гомоморфизм δ ; тогда

$$H_{p+m}^C(X - (m)S) \xleftarrow{\delta} H_{p+m-1}^C(S_1 - (m-)S) \xleftarrow{\delta} \dots \\ \dots \xleftarrow{\delta} H_{p+1}^C((m-1)S - S_m) \xleftarrow{\delta} H_p^C((m)S).$$

Отметим, что каждая операция δ увеличивает действительную размерность пространства на два и цепи на единицу. На каждом этапе δ является взаимно однозначным отображением. Теорема Фруассара о разложении (§ 3 гл. 6) показывает, что совокупность всех циклов для $X - (m)S$ вида $\delta^p - (p)S$ оказывается в точности совокупностью порождающих элементов группы $H_1^C(X - (m)S)$.

§ 4. Исчезающий класс

Обратимся к определению класса исчезающих циклов для точек пинчей. До этого, однако, рассмотрим свойства поверхностей S_i при простом пинче.

Определение 3.8. Семейство поверхностей $S_i (i = 1, \dots, n)$ будем называть занимающим общее положение в некоторой области $R \subset X$, если для любого x в $(m)SUR$ ($1 \leq m \leq n$) дифференциалы $ds_i(x)$ при $i \in (m)$ являются линейно независимыми функциями dx_k ($k = 1, \dots, l$).

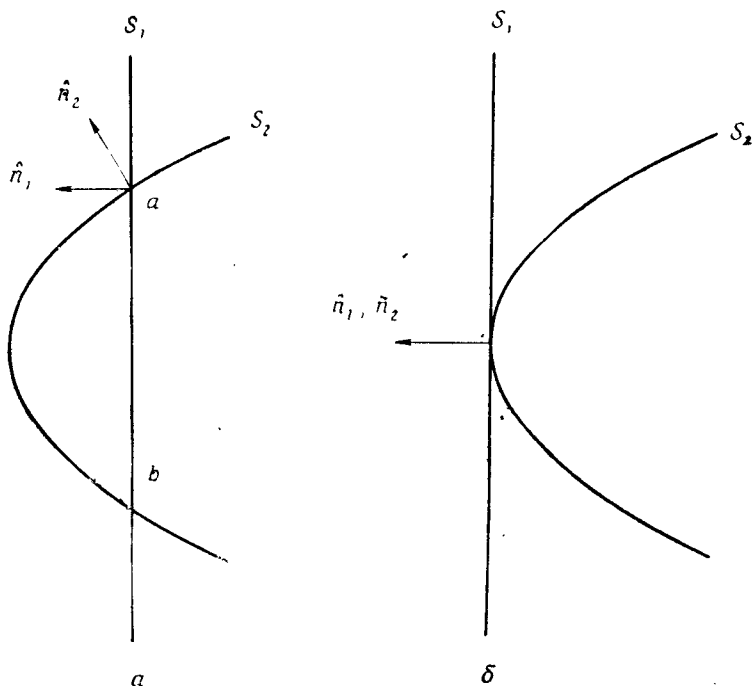
Пинчи возникают, когда поверхности не занимают общего положения, т. е. выполняются следующие условия:

- 1) $s_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, m$),
- 2) $\sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial s_i}{\partial x_k} = 0$ ($k = 1, \dots, l$), но некоторые $\alpha_i \neq 0$.

Условие 1 означает, что точка x должна принадлежать $(m)S$, а условие 2 — что векторы нормалей к S_i в точке x должны быть линейно зависимыми. Например, в случае $m=2$ условие 2 означает, что обе нормали должны быть параллельны, в случае $m=3$ три нормали компланарны и т. д.

Проиллюстрируем связь условия 2 с появлением пинчей в случае $m=2$. На фиг. 25, а показаны две поверхности S_1 и S_2 , занимающие общее положение; они пересекаются в двух точ-

ках a и b . Показаны векторы нормалей \hat{n}_1 и \hat{n}_2 в точке a ; очевидно, они линейно независимы. Необходимое условие для пинча заключается в совмещении друг с другом точек a и b , что происходит, когда \hat{n}_1 и \hat{n}_2 становятся параллельными, как это показано на фиг. 25, б.



Фиг. 25. a — поверхности S_1 и S_2 занимают общее положение; b — поверхности S_1 и S_2 не занимают общего положения.

В § 3 гл. 1 при явном рассмотрении фейнмановского интеграла мы пришли к заключению, что необходимое условие для появления сингулярности в интеграле заключается в касании поверхностей сингулярностей подынтегрального выражения друг с другом. Это эквивалентно требованию того, чтобы поверхности занимали необщее положение. В принципе нетрудно найти уравнение, решение которого описывает поверхность сингулярностей (например, ландаувскую поверхность), пока мы не интересуемся структурой всей римановой поверхности. Однако эту структуру важно знать; именно для того, чтобы найти ее, мы в настоящей главе закладываем фундамент теоремы Пикара — Лефшеца, которая позволяет разрешить указанную задачу.

Предположим, что система поверхностей сингулярностей $\{S_i\}$ при $i \in (m)$ находится в своем необщем положении, и положим, что α_m в условии 2 не равно нулю. Тогда, исключая из 2 $\partial s_m / \partial x_k$, мы видим, что оставшиеся $\partial s_i / \partial x_k$ ($i=1, \dots, m-1$) должны быть линейно зависимы. Говорят, что система имеет простой, квадратичный пинч в точке x , если $\det M(x) \neq 0$, где

$$M = \begin{array}{c} h \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ l \end{array} \right. \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{1 \ 2 \ \dots \ l}^k & \overbrace{1 \ \dots \ m-1}^l \\ \hline \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial^2 s_i}{\partial x_h \partial x_k} & \frac{\partial s_l}{\partial x_h} \\ \hline \hline \frac{\partial s_l}{\partial x_k} & 0 \\ \hline \end{array} \right] \begin{array}{c} i \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{array} \right. \end{array}$$

В приведенной матрице все $\alpha_i \neq 0$ (если хотя бы некоторое α_j равнялось нулю, то пинч наблюдался бы в подсистеме $\{S_i\}$, $i=1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$). Условие $\det M \neq 0$ заключается в требовании такой кривизны поверхностей S_i , чтобы они касались в одной точке и квадратичным образом.

Вернемся к примеру на фиг. 25. Уравнения поверхностей S_1 и S_2 можно взять соответственно в виде $s_1 = x_1$ и $s_2 = x_2^2/r - x_1 - t$. Очевидно, поверхность S_1 — плоская, а S_2 — искривленная и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Матрица M имеет вид

$$M = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2/r & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Таким образом, $\det M \neq 0$ для любого конечного r , и мы имеем простой пинч при $t=0$. Если, однако, $r \rightarrow \infty$, то S_2 становится параллельной S_1 (в пределе при $\det M \rightarrow 0$) и совпадает с S_1 при $t=0$. В этом случае мы не получаем простого пинча.

Для простого пинча максимальное значение m равно $l+1$. Введем теперь удобную систему координат для наглядного геометрического описания исчезающего цикла. Поскольку любые $m-1$ (или меньше) поверхностей системы линейно независимы, мы можем их рассматривать каждую как непараллельные плоскости $(l-1)$ -го комплексного измерения. Поэтому в l -мерном шаре W , окружающем необщее положение поверхностей, мы мо-

жем выбрать такие локальные координаты, для первых $m - 1$ из которых

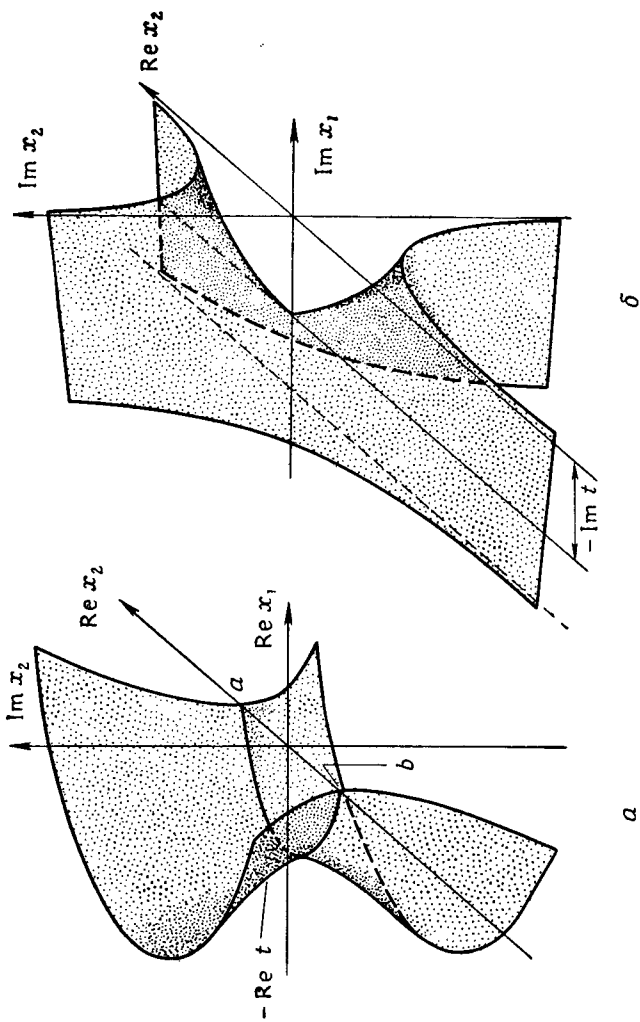
$$\begin{aligned} x_1 &= s_1(x, t), \\ \dots & \\ x_{m-1} &= s_{m-1}(x, t). \end{aligned} \quad (3.6a)$$

Очевидно, x_i направлены по нормальям к плоскостям S_i при $1 \leq i \leq m - 1$. Поверхность S_m должна быть такой, чтобы ее нормаль в точке пинча была линейно зависимой от других нормалей, и, кроме того, S_m должна пересекать $(m-1)S$ только в одной точке; последнее условие вынуждает S_m быть искривленной. Предположим, что точка пинча находится при $t=0$, тогда достаточно взять $s_m(x, t)$ в виде

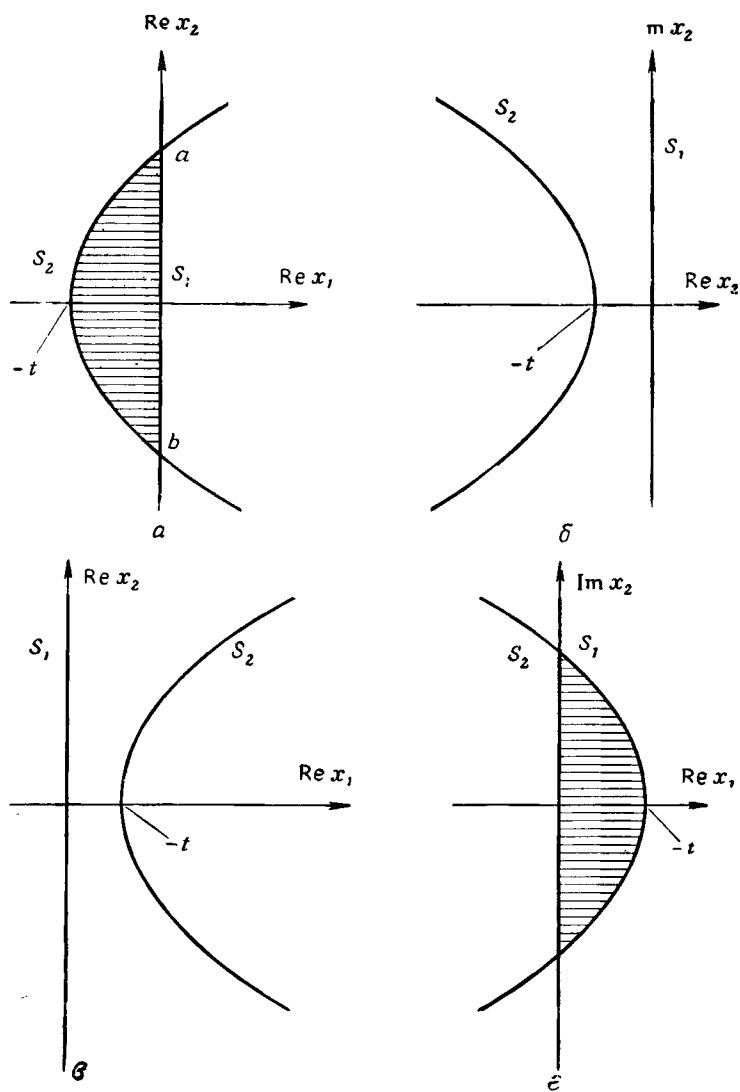
$$s_m(x, t) = x_m^2 + \dots + x_l^2 - (x_1 + \dots + x_{m-1}) - t. \quad (3.6б)$$

Легко показать, что условие для простого пинча ($\det M=0$) удовлетворяется, когда выполнено (3.6б). Рассмотрим, например, случай $l=m=2$. Для него имеем $S_1: s_1=x_1=0$ и $S_2: s_2 = x_2^2 - x_1 - t = 0$. На фиг. 26 приведены трехмерные графики S_i для $\operatorname{Re} t > 0$ и $\operatorname{Im} t > 0$ в указанных координатах: S_1 является плоскостью $\operatorname{Re} x_1 = \operatorname{Im} x_1 = 0$. Пересечение $S_1 \cap S_2$ состоит из двух изолированных точек, которые расположены на пересечении двух гипербол в комплексных плоскостях x_2 фиг. 26 для $\operatorname{Re} x_1 = \operatorname{Im} x_1 = 0$.

Положим $\operatorname{Im} t = 0$; тогда уравнение $\operatorname{Im} s_2 = 2(\operatorname{Re} x_2)(\operatorname{Im} x_2) - \operatorname{Im} x_1 = 0$ требует при $\operatorname{Im} x_1 = 0$, чтобы либо $\operatorname{Re} x_2 = 0$, либо $\operatorname{Im} x_2 = 0$. На фиг. 27, а и б показаны проекции S_1 и S_2 на действительные двумерные пространства в обоих указанных случаях. Заштрихованная область на фиг. 27, а представляет двумерный цикл в $H_2^C(W, S_1 \cup S_2)$, исчезающий при $t \rightarrow 0$. Обозначим этот исчезающий цикл $e(W, (2)S)$. Мы видим, что на фиг. 27, б нет ни одного исчезающего цикла. Если $\operatorname{Re} t < 0$ при $\operatorname{Im} t = 0$, то фиг. 27, а и б принимают вид фиг. 27, в и г. Опять получаем, что только на одной из этих двух фигур имеется исчезающий цикл $e(W, (2)S)$. К аналогичным заключениям мы придем, если отбросить условие $\operatorname{Im} t = 0$. Таким образом, в пространстве W двух комплексных измерений (т. е. четырех действительных измерений) максимальная действительная размерность цикла равна 2. Кривизна поверхностей S_2 на фиг. 27, а и б противоположна, так что только одна из этих поверхностей может образовывать с S_1 исчезающий цикл. В общем случае размерность $e(W, (m)S)$ равна l , если W находится в \mathcal{C}^l .



Ф и г. 26. Поверхность S_2 с уравнением $x_2^2 - x_1 - t = 0$ показана в виде трехмерных графиков: a) $\text{Re } x_1, \text{Re } x_2, \text{Im } x_2$; b) $\text{Im } x_1, \text{Re } x_2, \text{Im } x_2$.



Ф и г. 27. Заштрихованные области являются исчезающими циклами.
 а) $\text{Re } t > 0$, $\text{Im } x_1 = \text{Im } x_2 = \text{Im } t = 0$; б) $\text{Re } t > 0$, $\text{Im } x_1 = \text{Re } x_2 = \text{Im } t = 0$; в) $\text{Re } t < 0$, $\text{Im } x_1 = \text{Im } x_2 = \text{Im } t = 0$; г) $\text{Re } t < 0$, $\text{Im } x_1 = \text{Re } x_2 = \text{Im } t = 0$.

Пусть ∂_1 — граничный оператор, который сопоставляет исчезающему циклу часть его границы на S_1 , т. е.

$$\partial_1: e(W, (2)S) \rightarrow e(S_1 \cap W, S_2).$$

Тогда $e(S_1 \cap W, S_2)$ будет отрезком прямой между a и b на фиг. 27, a . Это одномерный исчезающий цикл, т. е. $e(S_1 \cap W, S_2)$ является исчезающим циклом для задачи отыскания простого пинча, появляющегося в окрестности $S_1 \cap W$ в случае $l=1, m=1$.

Дальнейшее сокращение размерности происходит при действии граничного оператора ∂_2 :

$$\partial_2: e(S_1 \cap W, S_2) \rightarrow e^{(2)}(S \cap W),$$

где $e^{(2)}(S \cap W)$ в точности равно $b - a$, исчезающему циклу нулевой размерности.

Обобщение последовательности $\{\partial_2, \partial_1\}$ на случаи более высоких измерений и большего числа поверхностей дается граничной последовательностью исчезающих циклов

$$e(W, (m)S) \xrightarrow{\partial} e(S_1 \cap W, (2 \dots m)S) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} e^{(m)}(S \cap W), \quad (3.7)$$

где $\partial e^{(m-p)}(S \cap W, (p)S)$ — та часть границы e , которая лежит в S_p ; как и выше, все ∂e по очереди являются исчезающими циклами. Нужно заметить, что в (3.7) мы имеем $\partial^2 \neq 0$; это происходит потому, что ∂ здесь отображает цепи на одном пространстве в цепи на подпространстве, т. е. $\partial_1 e$ не является границей e , это только часть границы, которая лежит в S_1 .

Рассмотрим теперь группы гомологий, порождаемые классами исчезающих циклов. Удобно пользоваться редуцированными группами гомологий $\tilde{H}_p^C(Y)$, определяемыми следующим образом:

$$\hat{H}_p^C(Y) = \begin{cases} H_p^C(Y), & p \neq 0, \\ \frac{H_p^C(Y)}{H_0^C(P)}, & p = 0, \end{cases}$$

где P — точка в Y . Таким образом, если Y связано по дугам, мы имеем $\hat{H}_0^C(Y) = 0$. Тогда граничная последовательность *исчезающих классов* (теорема 2.4) индуцирует последовательность гомоморфизмов

$$\tilde{H}_l^C(W, (m)S) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{l-1}^C(S_1 \cap W, (2 \dots m)S) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{l-m}^C((m)S \cap W). \quad (3.8)$$

Чтобы понять эту последовательность гомоморфизмов, рассмотрим гомологию в $(m)S \cap W$. Возьмем сначала гомологию в $(k)S \cap W$ при $(k) \subset \{1, \dots, m\}$, но $(k) \neq (m) = \{1, \dots, m\}$. Поскольку

$(k)S = S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_k}$, каждое S_i при $i \in (k)$ можно рассматривать как плоскую поверхность в силу (3.6а). Так как группы гомологий любого плоского пространства без отверстий тривиальны (т. е. равны нулю), мы имеем $\tilde{H}_p((k)S \cap W) = 0$ для каждого p . С другой стороны, $(m)S$ — не плоское пространство. Из (3.6а) и (3.6б) мы видим, что $x_1 = \dots = x_{m-1} = 0$ и $x_m^2 + \dots + x_l^2 = t$, т. е. имеем комплексную сферу $l - m$ комплексных измерений. Гомология комплексной сферы та же, что и гомология действительной части указанной сферы [см. сказанное в отношении формулы (3.7)]; следовательно,

$$\tilde{H}_p^C((m)S \cap W) = \begin{cases} Z & \text{при } p = l - m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что когда t стремится к нулю, указанная сфера сжимается в точку. Поскольку гомология точки есть нуль, мы видим, что $\tilde{H}_{l-m}^C((m)S \cap W)$ исчезает для необщего положения сингулярных поверхностей. Мы применили определение, по которому порождающим элементом $\tilde{H}_l^C((m)S \cap W)$ является исчезающий класс для $(m)S \cap W$, обозначаемый $e((m)S \cap W)$.

Полученные заключения, конечно, не зависят от частного выбора системы координат. То, что пространство $(m)S \cap W$ для поверхностей сингулярностей S в общем случае оказывается комплексной $(l - m)$ -сферой, есть результат нашего допущения о простом квадратичном пинче. Для других типов пинчей поверхности $(m)S \cap W$ будут более сложными.

В заключение этого параграфа упомянем о дуальности, существующей между $\tilde{H}_p^C(Y, S)$ и $H_p^F(Y - S)$. При $p = 0$ эта дуальность иллюстрируется на фиг. 22, б и г. Как следствие существует дуальная последовательность изоморфизмов для (3.8):

$$H_l^F(W - (m)S) \xleftarrow{\delta} H_{l-1}^F(S_1 \cap W - (2 \dots m)S) \xleftarrow{\delta} \dots \xleftarrow{\delta} H_{l-m}^F((m)S \cap W).$$

Дуальность между δ и δ будет рассмотрена в следующем параграфе.

§ 5. Кронекеровский индекс

Как мы уже видели в § 1 этой главы, сингулярности интеграла характеризуются пересечениями контура интегрирования с исчезающими циклами; эти пересечения алгебраически описываются *кронекеровским индексом* KI.

Установим определенный порядок координат в шаре W , окружающем положение поверхностей сингулярностей в l -мерном комплексном пространстве при определенной ориентации

z_1, \dots, z_l . В действительных компонентах такой стандартный порядок задается следующим образом:

$$\{\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2, \dots, \operatorname{Re} z_l, \operatorname{Im} z_l\}. \quad (3.9)$$

Указанный порядок $\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i$ соответствует положительному (против часовой стрелки) направлению кограничного оператора Лере.

Рассмотрим теперь две цепи σ_p и σ_q , пересекающиеся в точке, которую мы возьмем за начало координат $\{0\}$. В окрестности $\{0\}$ можно писать

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_p}\}, \\ \sigma_q &= \{y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_q}\}, \end{aligned}$$

при этом действительная размерность $p+q$ равна $2l$. Мы упорядочим обе системы координат следующим образом:

$$\{\sigma_p \sigma_q\} = \{y_{i_1}, \dots, y_{i_p}, y_{j_1}, \dots, y_{j_q}\}. \quad (3.10)$$

Будем говорить, что ориентация $\operatorname{OR}\{\sigma_p \sigma_q\}$ положительна (отрицательна), если (3.10) можно получить из (3.9) с помощью четной (нечетной) перестановки.

Определение 3.9. Кронекеровский индекс для двух цепей σ_p и σ_q равен

$$\operatorname{KI}[\sigma_q, \sigma_p] = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_p \text{ и } \sigma_q \text{ пересекаются,} \\ +1, & \text{если } \operatorname{OR}\{\sigma_p \sigma_q\} \text{ положительна,} \\ -1, & \text{если } \operatorname{OR}\{\sigma_p \sigma_q\} \text{ отрицательна.} \end{cases}$$

Если σ_p и σ_q пересекаются более чем в одной точке, кронекеровский индекс $\operatorname{KI}[\sigma_q, \sigma_p]$ равен сумме индивидуальных KI для всех точек пересечения.

Пример. Рассмотрим цепь c_3 , изображенную на фиг. 22, б. Обозначим ее здесь через σ и считаем $\operatorname{KI}[\sigma, \delta\sigma]$. Очевидно, $\delta\delta\sigma = \delta b - \delta a$, как это показано на фиг. 28. Для действительных координат y_1 и y_2 , изображенных на той же фиг. 28, стандартным порядком будет $\{y_1, y_2\}$. Так что легко видеть, что

$$\operatorname{KI}[\sigma, \delta\delta\sigma] = \operatorname{KI}[\sigma, \delta b] + \operatorname{KI}[\sigma, -\delta a] = 1 + 1 = 2.$$

В приведенном примере мы можем также убедиться, что $\operatorname{KI}[\delta\sigma, \delta\sigma]$ точно равен двум. Действительно $\operatorname{KI}[\delta\sigma, \delta\sigma] = \operatorname{KI}[b - a, b - a] = 2$. Можно даже заподозрить наличие некоторого общего соотношения между указанными кронекеровскими индексами. В самом деле, существует следующая лемма о пересечениях:

$$\operatorname{KI}[\sigma, \delta\tau] = \operatorname{KI}[\delta\sigma, \tau], \quad (3.11)$$

в которой проявляется дуальный характер операторов δ и δ .

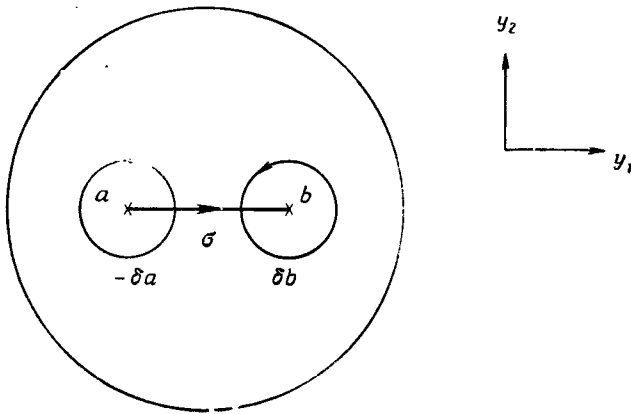
Используем (3.11) и (3.7) и получим

$$\begin{aligned} & \text{KI}[e(W, {}^{(m)}S), \delta^m e({}^{(m)}S \cap W)] = \\ & = \text{KI}[\partial^m e(W, {}^{(m)}S), e({}^{(m)}S \cap W)] = \\ & = \text{KI}[e({}^{(m)}S \cap W), e({}^{(m)}S \cap W)]. \end{aligned}$$

Мы уже знаем, что при $l=1, m=1, S=a \cup b$

$$\text{KI}[e(S \cap W), e(S \cap W)] = 2.$$

Для $l=2, m=1$ можно показать, что этот кронекеровский индекс обращается в нуль. Поверхность S в этом случае — это компактная сфера $x_1^2 + x_2^2 - t = 0$, пересечение которой с плоскостью

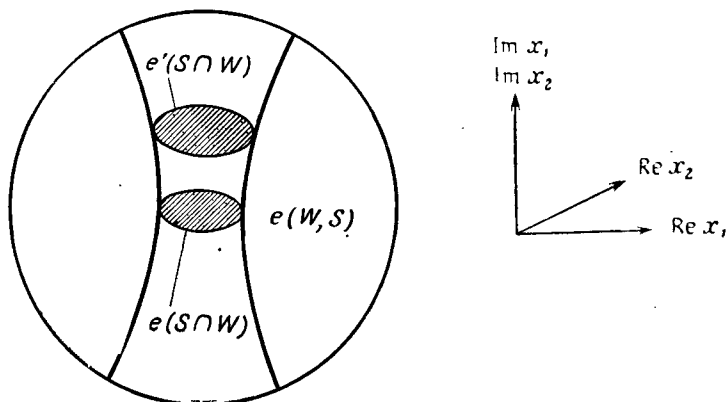


Фиг. 28. 1-цепи, соответствующие $\delta \delta \sigma$.

$(\text{Re } x_1, \text{Re } x_2)$ — окружность, а с плоскостью $(\text{Im } x_1, \text{Im } x_2)$ — гипербола. Исчезающий цикл $e(W, S)$ — это действительный диск внутри действительной окружности $(\text{Re } x_1)^2 + (\text{Re } x_2)^2 = t$. Таким образом, $e(S \cap W) = \partial e(W, S)$ является действительной окружностью; эта окружность, оставаясь все время на комплексной 1-сфере $x_1^2 + x_2^2 = t$, может быть деформирована без пересечения своего первоначального положения, как это показано на фиг. 29. Следовательно, $\text{KI}[e(S \cap W), e(S \cap W)] = 0$. Обобщая приведенные рассуждения, мы приходим к данной Картаном формуле для сфер

$$\begin{aligned} & \text{KI}[e({}^{(m)}S \cap W), e({}^{(m)}S \cap W)] = \\ & = \begin{cases} 2(-1)^{(l-m)/2} & \text{при } l-m \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } l-m \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Мы воспроизведем здесь рассуждение Германна о том, что указанный КИ может принимать только значения ± 2 или 0. Цикл $e^{(m)}S \cap W$ является $(l-m)$ -мерной действительной сферой, погруженной в $(l-m)$ -мерную комплексную сферу в \mathbb{C}^{l-m+1} . Пусть $z \equiv (z_1, \dots, z_{l-m+1})$ есть комплексные координаты в пространстве \mathbb{C}^{l-m+1} , и пусть уравнение комплексной сферы пишется в виде $z^T z = 1$. Вычислим КИ $[e, e]$, производя замену $e \rightarrow e' \subset S^{l-m+1}$ и определяя КИ $[e, e']$. Отображению $e \rightarrow e'$ отвечает $z \rightarrow z' = Uz$; так как $e' \subset S^{l-m+1}$, отсюда следует $z'^T z' = 1$. Это в свою очередь



Ф и г. 29. Примеры исчезающих циклов для $S: x_1^2 + x_2^2 - t = 0$.

означает $U^T U = 1$, т. е. что U ортогонально. Положим $U = e^A \cong 1 + A$; тогда A должно быть антисимметричным. Отметим, что если A имеет нулевое собственное значение, то соответствующие собственные векторы z_0 и $-z_0$ не меняются при отображении $e \rightarrow e'$; следовательно, существуют два пересечения e и e' для каждого нулевого собственного значения. Наименьшее число нулей антисимметричной матрицы $n \times n$ — единица, если n нечетное, и нуль, если n четное (поскольку ненулевые собственные значения с противоположными знаками группируются в пары). Поэтому если $l-m+1$ (т. е. n) будет четным, то $\text{KI}[e^{(m)}S \cap W]$, $e^{(m)}S \cap W] = 0$; если же $l-m+1$ будет нечетным, то (можно показать, что оба вклада в КИ не сокращаются) мы имеем $\text{KI} = \pm 2$.

Укажем теперь ряд общих свойств кронекеровских индексов, связанных с исчезающими циклами. Воспользуемся следующим сокращением:

$$e_{(m)} \equiv e(W, (m)S).$$

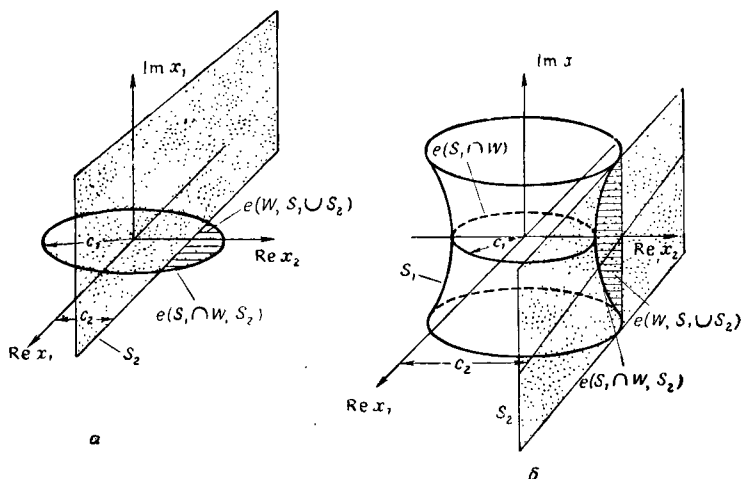
В силу (3.11) имеем

$$\text{KI}[e_{(n)}, \delta^m \partial^m e_{(m)}] = \text{KI}[\partial^m e_{(n)}, \partial^m e_{(m)}]. \quad (3.13)$$

Для входящего сюда кронекеровского индекса возможны лишь пять следующих значений:

- а) 0 при $(m) \not\subset (n)$;
 б) ± 2 или 0 при $(m) = (n)$;
 в) ± 1 при $(m) \subset (n)$.

Подчеркнем, что указанные результаты снова относятся только к частному случаю простого квадратичного пинча и что $({}^m)S \cap W$ является сферой.



Фиг. 30. Поверхности $S_1: x_1^2 + x_2^2 = c_1$ и $S_2: x_2 = c_2$ в случаях: а) $c_2 < c_1$, б) $c_2 > c_1$.

а) Если $(m) \not\subset (n)$, то существует индекс j из (m) , который не принадлежит (n) . Поэтому

$$KI[e_{(n)}, \delta^m \partial^m e_{(m)}] = KI[\partial_j e_{(n)}, \delta^{m-1} \partial^m e_{(m)}].$$

Поскольку j не принадлежит (n) , мы можем найти такой шар W , что $e(W, ({}^n)S)$ содержит пересечение $({}^m)S$ и не содержит S_j . Тогда, очевидно, $\partial_j e_{(n)} = 0$; следовательно, кронекеровский индекс (3.13) равен нулю.

б) Если $(m) = (n)$, то выполняется равенство

$$KI[\partial^m e_{(m)}, \partial^m e_{(m)}] = KI[e^{(m)}S \cap W, e^{(m)}S \cap W].$$

Последний индекс, как мы уже показали, имеет значения ± 2 или 0.

в) Если $(m) \subset (n)$, то

$$\text{KI} [\partial^m e_{(n)}, \partial^m e_{(m)}] = \text{KI} [e^{(m)} S \cap W, {}_{(m+1, \dots, n)} S), e^{(m)} S \cap W)].$$

Отметим, что $e^{(m)} S \cap W$ является $(l - m)$ -мерной сферой, и $e^{(m)} S \cap W, {}_{(m+1, \dots, n)} S$ можно рассматривать как полусферу того же числа измерений. Чтобы легче было все это представить, рассмотрим случай $l = n = 2, m = 1$. Пусть $S_1: x_1^2 + x_2^2 = c_1(t)$ и $S_2: x_2 = c_2(t)$, причем зависимость c_1 и c_2 от t такова, что при $t = 0$ происходит простой пинч. Если для $t \neq 0$ мы имеем $0 < c_2 < c_1$, то $e(S_1 \cap W)$ является действительной окружностью $x_1^2 + x_2^2 = c_1$ и $e(S_1 \cap W, S_2)$ будет дугой окружности, показанной на фиг. 30, а. Однако из этой фигуры трудно сказать, чему равен соответствующий кронекеровский индекс, поскольку не представляется, что пересечение происходит в изолированных точках. Задача не упрощается, если рассмотреть случай $c_2 > c_1$. В этом случае $e(S_1 \cap W, S_2)$ является дугой гиперболы на плоскости $(\text{Re } x_2, \text{Im } x_1)$, как это показано на фиг. 30, б. Очевидно, она пересекается с окружностью $e(S_1 \cap W)$ только в одной точке. Поэтому соответствующий кронекеровский индекс p равен ± 1 независимо от величины отношения c_2/c_1 . Этот результат можно распространить на общий случай $(m) \subset (n)$.

§ 6. Теорема Пикара — Лефшеца

Рассмотрим систему поверхностей $\{S_i(t)\}$ при $i \in (m)$ в компактном комплексном многообразии X размерности l . Предположим, что при t , изменяющемся на комплексной плоскости, указанная система занимает общее положение для $t \neq 0$ и что при $t = 0$ происходит простой пинч. Основная наша задача — ответить на вопрос, что происходит с контуром интегрирования, когда точка t , начиная с некоторого отличного от нуля своего значения, обходит начало координат в положительном направлении и затем возвращается в исходное положение. При $t \neq 0$ контур интегрирования в X можно представить компактным циклом $h_p(X - {}_{(m)} S(t))$, являющимся элементом гомологической группы $H_p^C(X - {}_{(m)} S(t))$.

Сформулируем *теорему Пикара — Лефшеца* без доказательства [32].

Теорема 3.2. Если t обходит точку $t = 0$ в положительном направлении, то при этом

$$h_p(X - {}_{(m)} S) \rightarrow h_p(X - {}_{(m)} S) \quad (p \neq l \text{ или } p = l = m - 1)$$

и

$$h_l(X - {}_{(m)} S) \rightarrow h_l(X - {}_{(m)} S) + n \delta^m e^{(m)} S \cap W \quad (l > m - 1),$$

где

$$n = (-1)^{\frac{1}{2}(l-m+1)(l-m+2)} \text{KI} [e(W, (m)S), h_l(X - (m)S)].$$

Это очень сильная теорема, поскольку она утверждает, что задание системы всех соответствующих кронекеровских индексов полностью эквивалентно заданию структуры сингулярностей рассматриваемого интеграла.

Например, если $\text{KI} = 0$, то точка $t=0$ не будет сингулярной точкой функции $F(t)$ (3.5). Если $\text{KI} \neq 0$, то при обходе вокруг точки $t=0$ имеем

$$h_l(X - (m)S) \rightarrow h_l(X - (m)S) + n\delta^m e^{(m)}S \cap W$$

и при следующем ее обходе получим

$$h_l(X - (m)S) + n(2 + n')\delta^m e^{(m)}S \cap W,$$

где

$$n' = (-1)^{\frac{1}{2}(l-m+1)(l-m+2)} \text{KI} [e(W, (m)S)\delta^m e^{(m)}S \cap W].$$

Из (3.12) и (3.13) имеем $n' = -2$ при четном $l - m$ и $n' = 0$ при нечетном $l - m$. Таким образом, в первом случае после двойного обхода вокруг $t=0$ мы опять приходим к $h_l(X - (m)S)$, т. е. в точке $t=0$ имеется сингулярность типа квадратного корня. В случае же нечетного $l - m$ при каждом из двух рассмотренных обходов $h_l(X - (m)S)$ изменяется на величину $n\delta^m e^{(m)}S \cap W$; при $t=0$ существует сингулярность логарифмического типа.

Заметим, что в случае $l = m - 1$ цикл $h_l(X - (m)S)$ переходит сам в себя и возможна сингулярность единственного типа — полюс. Если $n = 0$, то этот полюс не находится на рассматриваемом листе. Напомним, что при $l < m - 1$ не может быть простого пинча.

Теперь мы должны обратиться к пространству T , в котором изменяется внешний параметр t в (3.5). Обозначим через $\tilde{L}_{(m)}$ множество всех точек t , для которых исчезающий цикл $e_{(m)}$ действительно исчезает (т. е. для таких t поверхности S_i при $i \in (m)$ занимают свое необщее положение). Точка t_1 на $\tilde{L}_{(m)}$ будет сингулярностью функции $F(t)$ в (3.5) только в том случае, если для контура интегрирования Γ действительно имеется пинч при $t \rightarrow t_1$, т. е. если кронекеровский индекс $\text{KI}[e_{(m)}, \Gamma]$ для $e_{(m)}$ и Γ отличен от нуля. Назовем ландаувской поверхностью (ее мы обозначим здесь через $L_{(m)}$) множество всех точек из $\tilde{L}_{(m)}$, для которых $\text{KI} \neq 0$ и имеется сингулярность функции $F(t)$.

Применим теперь теорему Пикара — Лефшеца для того, чтобы описать результаты обходов вокруг ландаувских поверхностей $L_{(m)}$, совершаемых более чем по одному разу.

Ситуация оказывается особенно простой, если t представлено единственной комплексной переменной, и мы ограничимся исследованием только такой области T , в которой поверхности $L_{(m)}$ не пересекаются друг с другом. Начнем с рассмотрения контура интегрирования Γ . Когда t обходит $L_{(m)}$, контур Γ превращается в контур $\Gamma' = \Gamma + \delta^m \partial^m e_{(m)}$. Чтобы посмотреть, являются ли точки поверхности $L_{(n)}$, для которых поверхности S_i занимают необщее положение при $i \in (n)$, сингулярными для функции $F(t)$, мы должны рассчитать кронекеровский индекс

$$\text{KI}[e_{(n)}, \Gamma'] = \text{KI}[e_{(n)}, \Gamma + \delta^m \partial^m e_{(m)}].$$

Если этот индекс не равен нулю, то точки $t \in L_{(n)}$ также принадлежат $L_{(m)}$, т. е. существуют сингулярности $L_{(n)}$ на новом листе, который мы получили обходом вокруг $L_{(m)}$.

Если обе поверхности $L_{(m)}$ и $L_{(n)}$ пересекаются, ситуация оказывается более сложной. Мы должны теперь позаботиться об описании того, каким образом (т. е. «с какой стороны» от места их пересечения) t достигает точки $L_{(m)}$ или $L_{(n)}$. По-видимому, если $L_{(m)}$ разбивается на два куска $L_{(m)}^1$ и $L_{(m)}^2$ пересечением $L_{(m)} \cap L_{(n)}$, нужно исследовать сингулярность точек L^1 и L^2 по отдельности. В § 8 этой главы мы бегло рассмотрим пример с пересечением двух поверхностей. После определения в § 2 гл. 5 группы гомотопий мы кратко изложим в § 1 гл. 6 некоторые результаты Фотиади и Фама в отношении этих поверхностей. Здесь заметим только, что решающим моментом при этом оказывается возможное отличие исчезающего цикла $e_{(m)}^2$ для $L_{(m)}^2$ от $e_{(m)}^1$; в этом случае $e_{(m)}^2$ не будет новым, независимым, исчезающим циклом, но оказывается линейной комбинацией цикла $e_{(m)}^1$ и других циклов $e_{(n)}$.

Напомним еще раз ограничение, которое было нами сделано в § 4 этой главы: поверхности S_i (для $m \leq l$) пересекаются по сферам. Такое допущение сильно упрощает задачу, поскольку если $H_n(S^n)$ имеет только один порождающий элемент, то для контура интегрирования может возникнуть пинч только одного типа. В общем случае существует несколько независимых исчезающих циклов для каждой системы поверхностей S_i и, следовательно, может быть несколько различных типов сингулярностей по t (и нужно рассчитать соответственно несколько различных кронекеровских индексов). Замечательного успеха в этом направлении добился Фам [39], которому удалось обобщить теорему Пикара — Лефшеца на случаи неквадратичных пересечений поверхностей S_i вида $\sum x_i^{v_i} = t$, $v_i \neq 2$.

Подведем итог. Из всего сказанного выше следует: если мы предположим, что 1) пересечениями $(m)S$ и S_i являются сферы и

2) поверхности $L_{(m)}$ не пересекаются друг с другом в T , то теорема Пикара — Лефшеца сразу же дает нам простое описание функции $F(t)$ в (3.5). Если для t на L_1, \dots, L_p имеет место необщее положение поверхностей S_i , мы должны обратиться к табл. 1. В этой таблице отдельные пинчи взяты в порядке $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p$.

Таблица 1

n	$\delta^{i_1} \partial^{i_1} e_1$	$\delta^{i_2} \partial^{i_2} e_2 \dots \delta^{i_p} \partial^{i_p} e_p$	Γ
e_1	$0, \pm 2$	(0)	± 1
e_2		$0, \pm 2$	
\vdots		\cdot	
e_p	(± 1)	$0, \pm 2$	

Совершая обходы вокруг сингулярностей L_a, \dots, L_b (в некотором порядке), мы можем получить ответ на вопрос, имеется ли сингулярность на достигаемом при этом листе римановой поверхности, вычисляя значение кронекеровского индекса $KI[e_c, \Gamma_{a \dots b}]$, где контур $\Gamma_{a \dots b}$ получается из первоначального контура интегрирования путем повторного применения теоремы 3.2 для каждого обхода вокруг сингулярностей (в том же порядке). После обхода L_c контур интегрирования изменится следующим образом:

$$\Gamma_{a \dots c} = \Gamma_{a \dots b} + n \delta^{i_c} \partial^{i_c} e_c,$$

где число $n = n(e_c, \Gamma_{a \dots b})$ можно взять из табл. 1, выражая контур $\Gamma_{a \dots b}$ в виде линейной комбинации Γ и $\delta^{i_j} \partial^{i_j} e$.

Следует подчеркнуть, что в теореме Пикара — Лефшеца предполагается, что оба контура интегрирования до и после обхода сингулярности являются компактными циклами в $X - \bigcup_i S_i$.

В следующей главе будет показано, что интеграл фактически зависит только от гомологического класса контура интегрирования; последний должен рассматриваться как компактный цикл. Поэтому основная задача, возникающая при изучении сингулярностей интеграла, — определение компактных гомологических групп $H_i^c(X - (m)S)$, поскольку число образующих элементов этой группы дает нам максимально возможное число независимых типов разных пинчей для контура интегрирования и, следовательно, максимальное число типов сингулярностей функции $F(t)$ в (3.5).

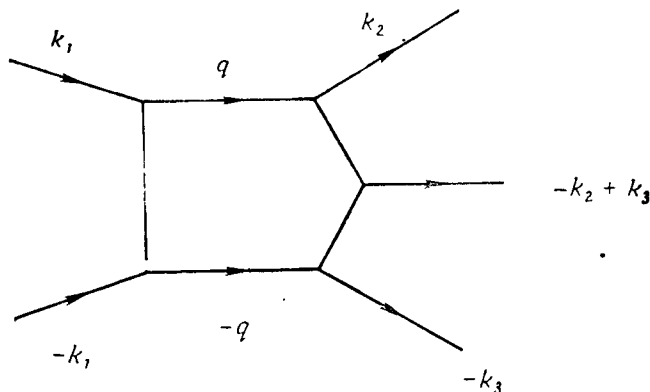
Замкнутая гомология H^F описывает только пересечение элементов H^C с шаром W . Использование ее ограничено потребностями построения доказательств нескольких лемм; она вовсе не появляется в окончательных результатах.

§ 7. Пример: интеграл унитарности

Рассмотрим предложенный Фотиади и Фамом¹⁾ пример двухчастичного интеграла унитарности для амплитуды порождения, диаграмма для которого изображена на фиг. 31. Этот интеграл имеет вид

$$M_s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{\rho}{8} \int d^2q \frac{1}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_1 - h_1)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_2 - h_2)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}_3 - h_3)}, \quad (3.14)$$

где \mathbf{k}_i — 3-импульсы центров масс указанных внешних частиц, \mathbf{q} — внутренний 3-импульс, ρ — объем фазового пространства



Фиг. 31. Пятиугольная диаграмма.

промежуточного состояния, h_i — некоторые функции внешних переменных. Интегрирование проводится по всем направлениям вектора \mathbf{q} . Интеграл (3.14) можно представить в более удобном виде

$$M_s(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{\rho}{8h_1 h_2 h_3} A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3),$$

где

$$A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \int_{\Gamma} \frac{d^2\hat{\mathbf{q}}}{(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_1 - 1)(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_2 - 1)(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_3 - 1)}$$

¹⁾ D. Fotiadi, F. Pham, неопубликованная работа.

и

$$\mathbf{p}_i = \frac{k_i |\mathbf{q}|}{h_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.15)$$

Отметим, что $\mathbf{p}_i = 0$ как на внешнем, так и на внутреннем пороге. Поверхность интегрирования Γ является действительной частью двумерной сферы

$$Q: q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = 1; \quad (3.16)$$

поверхности сингулярностей подынтегрального выражения суть плоскости

$$R_i: \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_i = 1 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.17)$$

Следует отметить, что сделанный здесь выбор координат отличается от рассмотренного в § 4 этой главы. Ниже мы рассматриваем аналитическую структуру $A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ в функции от \mathbf{p}_i , не требуя, чтобы эти импульсные векторы лежали на массовой поверхности.

Существуют три типа необщих положений поверхностей сингулярностей.

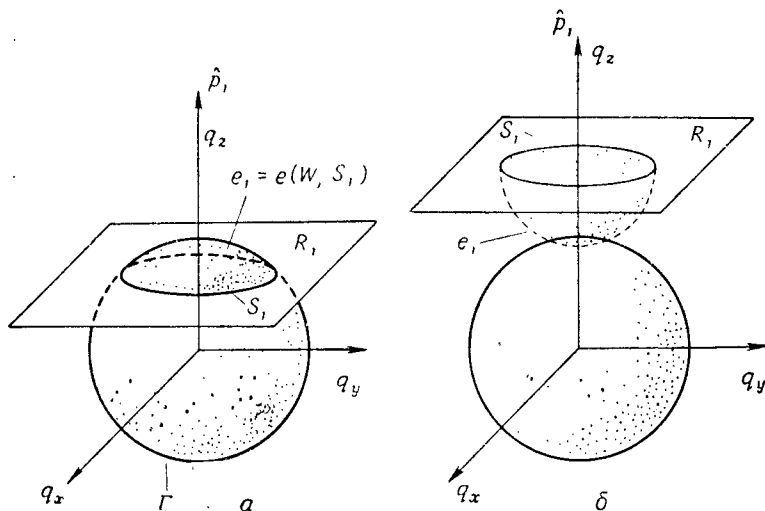
- L_i : поверхность R_i касается Q при $i = 1, 2, 3$;
- L_{ij} : пересечение $R_i \cap R_j$ касается Q при $i \neq j$;
- L_{123} : пересечение поверхностей R_1, R_2, R_3 лежит на Q .

Рассмотрим L_1 . Если $|\mathbf{p}_1| > 1$, то плоскость $\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1$ пересекает действительную часть Q , т. е. действительную сферу Γ , по действительной окружности S_1 , как это показано на фиг. 32, а. Если $|\mathbf{p}_1| < 1$, то плоскость R_1 не пересекает Γ , но пересекает Q при некоторых комплексных значениях q_x и q_y (если \mathbf{p}_1 направить по z -оси), как это показано пунктиром на фиг. 32, б. Необычное положение L_1 достигается при $p_1 \left[\equiv (p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2)^{1/2} \right]$, равном ± 1 , когда R_1 касается Γ .

Рассмотрим L_{12} . Ограничения в этом случае таковы: а) $q^2 = 1$, б) $\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1$, в) $\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1$, г) существуют ненулевые α_i , такие, что $\alpha_0 \mathbf{q} + \alpha_1 \mathbf{p}_1 + \alpha_2 \mathbf{p}_2 = 0$. Чтобы векторы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 могли принадлежать L_{12} , а не только L_1 или L_2 , они должны быть комплексными. Следовательно, полагая, что \mathbf{m} и \mathbf{n} — два действительных вектора, где \mathbf{m} параллельно \mathbf{q} , а \mathbf{n} перпендикулярно \mathbf{q} , можно просто удовлетворить ограничениям а) — г), считая $\mathbf{p}_1 = \mathbf{m} + i\mathbf{n}$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{m} - i\alpha\mathbf{n}$, при условии, что $\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1$.

Подобным образом можно построить пинчи L_{123} , которые принадлежат и L_{ij} и L_i . Мы ограничимся здесь рассмотрением только такой области \mathbf{p}_i , в которой L не пересекаются.

Чтобы найти аналитическую структуру функции $A(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$, нужно определить все соответствующие кронекеровские индексы нашей задачи. Поскольку интегрирование ведется по действительной сфере Γ , мы можем считать Q тем комплексным много-



Фиг. 32. Единичная сфера Γ и плоскость $R_1: q_z = \frac{1}{|p_1|}$ в случаях: а) $|p_1| > 1$, б) $|p_1| < 1$.

образием X , в котором рассматриваем сингулярности подынтегрального выражения. Таким образом, $l = \dim_{\mathbb{C}} Q = 2$, и поверхностями сингулярностей в Q будут $S \equiv R_i \cap Q$, причем каждая поверхность имеет размерность 1. В предыдущем параграфе было показано, что кронекеровские индексы для простых квадратичных пинчей могут принимать только пять возможных значений. Наша задача, следовательно, фактически состоит в определении знаков кронекеровских индексов.

Показано, что фейнмановскую диаграмму — «ящик» можно привести к рассматриваемой канонической форме. Для общей фейнмановской диаграммы или диаграммы унитарности задача более сложна (см. гл. 6).

При применении теоремы Пикара — Лефшеца для положительных обходов вокруг L_i , L_{ij} и L_{123} на любом листе римановой поверхности необходимо знать следующие кронекеровские

индексы:

- а) $KI[e_i(W, S_i), h]$,
- б) $KI[e_{ij}(W, S_i \cup S_j), h]$,
- в) $KI[e_{123}(W, {}_{(3)}S), h]$,

где h нужно взять в виде

- 1) Γ ,
- 2) $\delta e^l = \delta \partial e_i$,
- 3) $\delta^2 e^{ij} = \delta^2 \partial^2 e_{ij}$;

отметим, что цикл $e^{123} = \partial^3 e_{123}$ исчезает.

Сначала рассмотрим случай 1, в котором $h = \Gamma$. Поскольку Γ — действительная сфера и e_i, e_{ij}, e_{123} — сечения сферической поверхности, то нужно использовать случай «в» из § 5 этой главы, т. е. кронекеровский индекс должен равняться ± 1 . Чтобы определить его знак, рассмотрим $KI[e_1, \Gamma]$; e изображено на фиг. 32, б. Имеем $KI[e_1, \Gamma] = OR[\Gamma, e_1] = OR[Re q_x, Re q_y, Im q_x, Im q_y] = -OR[Re q_x, Im q_x, Re q_y, Im q_y] = -1$. Аналогичное рассуждение показывает, что $KI[e_{ij}, \Gamma] = KI[e_{123}, \Gamma] = -1$.

Далее рассмотрим случай 2, в котором $h = \delta e^i$. Используя (3.11), видим, что необходимо определить кронекеровские индексы $KI[\partial e_i, \partial e_i]$, $KI[\partial e_{ij}, \partial e_{ij}]$ и $KI[\partial e_{123}, \partial e_{123}]$. Второй и третий из этих индексов в точности совпадают с рассмотренными в случае 1, только теперь размерность на единицу меньше, так что их значения равны -1 . Первый кронекеровский индекс равен $KI[e^i(S_i \cap W), e^i(S_i \cap W)]$ и описывает пересечение двух окружностей в случае $l=2, m=1$. Из (3.12) сразу заключаем, что значение этого индекса равно нулю.

Наконец, рассмотрим случай 3, в котором $h = \delta^2 e^{ij}$. Снова в силу (3.11) мы должны определить кронекеровские индексы $KI[\partial^2 e_i, \partial^2 e_{ij}]$, $KI[\partial^2 e_{ij}, \partial^2 e_{ij}]$ и $KI[\partial^2 e_{123}, \partial^2 e_{123}]$. Первый из указанных индексов равен нулю, так как $\partial^2 e(W, S_i) = 0$. Второй индекс равен $KI[e(S_i \cap S_j \cap W), e(S_i \cap S_j \cap W)]$, и поэтому его значение равно $+2$ согласно (3.12). Последний индекс равен $KI[e(S_i \cap S_j \cap W, S_h), e(S_i \cap S_j \cap W)]$ и эквивалентен индексу $KI[b, b - a]$, где a, b — точки. Следовательно, этот индекс имеет значение $+1$.

Результаты собраны в табл. 2. Так как в теорему Пикара — Лефшеца входит число n , которое отличается от KI только несущественным множителем $(-1)^{1/2(l-m+1)(l-m+2)}$, в табл. 2 приведены сразу значения этого числа $n[e, h]^1$.

¹⁾ Если выбор знака отвечает определению кограничного оператора по Лере (определение 3.7), знаки в теореме 3.2 и в нижнем левом углу табл. 2 изменятся на обратные. Разумеется, окончательная структура листов римановой поверхности не будет зависеть от этих знаков.

Таблица 2

$e \backslash h$	δe^i	$\delta^2 e^{ij}$	$\delta^3 e^{123}$	Γ
e_i	0	0	0	+1
e_{ij}	+1	-2	0	+1
e_{123}	-1	+1	0	-1

Вот пример использования табл. 2. Рассмотрим лист, получаемый в результате положительного обхода вокруг L_{12} и затем вокруг L_1 . Контур интегрирования при этом изменится следующим образом:

$$\Gamma \xrightarrow{L_{12}} \Gamma + \delta^2 e^{12} \xrightarrow{L_1} \Gamma + \delta e^1 + \delta^2 e^{12} \equiv \Gamma'.$$

На указанном листе сингулярность L_{12} отсутствует, но имеется сингулярность L_{123} , поскольку $n[e_{12}, \Gamma'] = 0$, в то время как $n[e_{123}, \Gamma'] = -1$.

§ 8. Эффективное пересечение

Рассмотрим вкратце простой интеграл, иллюстрирующий одну из ситуаций, которая может возникнуть при пересечении двух ландауских поверхностей. Возьмем

$$F(t_1, t_2) = \int_{\Gamma} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 - 1)(x - t_1)(y - t_2)},$$

причем подынтегральное выражение сингулярно на следующих поверхностях $S_i \subset \subset X = \mathbb{C}^2$:

$$S_1 = \{x, y \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\},$$

$$S_2 = \{x, y \mid x - t_1 = 0\},$$

$$S_3 = \{x, y \mid y - t_2 = 0\}.$$

Поверхности в T , для которых имеются необщие положения (S_1, S_2) , (S_1, S_3) , (S_1, S_2, S_3) , суть

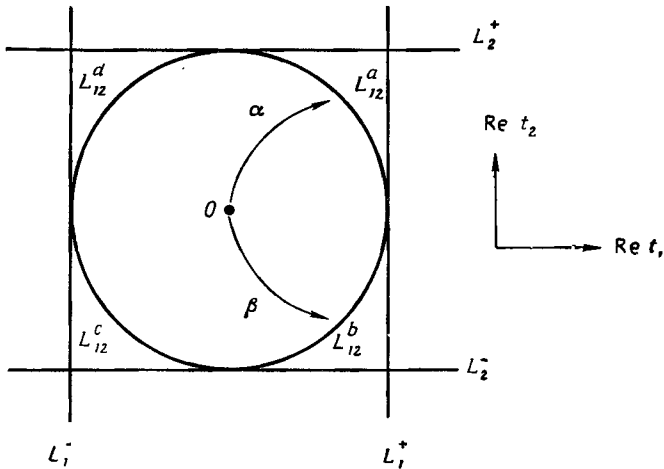
$$L_1 = \{t_1, t_2 \mid t_1 = \pm 1\},$$

$$L_2 = \{t_1, t_2 \mid t_2 = \pm 1\},$$

$$L_{12} = \{t_1, t_2 \mid t_1^2 + t_2^2 = 1\}.$$

На фиг. 33 изображены все поверхности L на действительной плоскости t_1, t_2 . Рассмотрим достигаемые по путям α и β (выхо-

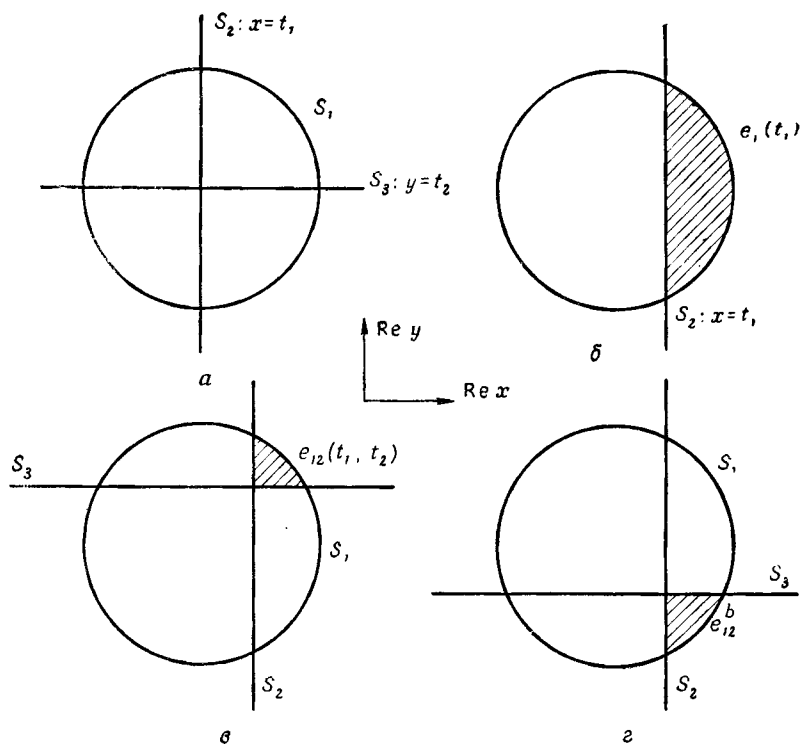
дящим из точки $t_1=t_2=0$) соседние части L_{12} на фиг. 33. На фиг. 34, а показаны положения поверхностей S_i при $t_1^2+t_2^2 < 1$. Исчезающий цикл $e_1(t_1)$ приведен на фиг. 34, б; он исчезает при $t_1=+1$, т. е. на L_1^+ . Исчезающий цикл $e_{12}(t_1, t_2)$ показан на фиг. 34, в; цикл e_{12} исчезает при $t_1^2+t_2^2=1$ ($t_1, t_2 > 0$), т. е. на L_{12}^a . Чтобы убедиться, что функция $F(t)$ сингулярна при t на L_1^+ ,



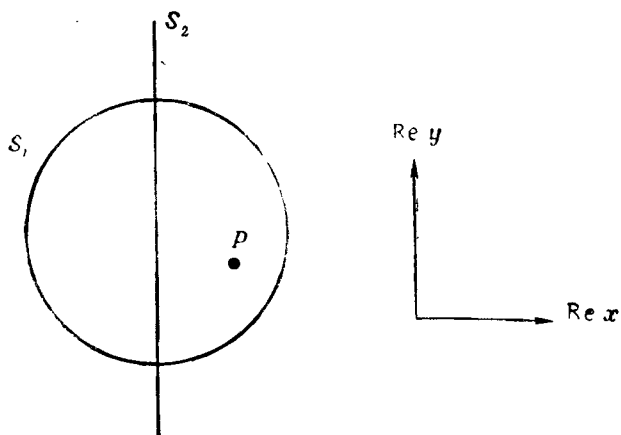
Фиг. 33. Пересечение ландауовских поверхностей L_{12} (окружность) и L_1^\pm (L_2^\pm (прямые линии); пути α и β ведут к двум различным сторонам пересечения.

мы должны проверить, что $KI(e_1, \Gamma) \neq 0$; аналогично для L_{12}^a нужно рассмотреть $KI[e_{12}, \Gamma]$. Однако когда t подходит к L_{12}^b , соответствующим исчезающим циклом e_{12}^b будет цикл, показанный на фиг. 34, г. Заметим, что исчезающий цикл e_{12}^a [$e_{12}^a = e_{12}$ на фиг. 34, в] не исчезает при t , приближающемся к L_{12}^b . Из фигур видно, что цикл e_1 , рассматриваемый как множество точек, может быть представлен в виде $e_1 = e_{12}^a \cup e_{12}^b$. Следовательно, два исчезающих цикла e_{12}^a и e_{12}^b , хотя они и различны, не являются независимыми.

Рассмотрим случай, когда $t_1=t_2=0$. Контур Γ становится параллельным плоскостям $\text{Im } x$, $\text{Im } y$ и пересекает действительный диск в точке $P=(x_p, y_p)$. Пусть $x_p > 0$ и $x_p^2 + y_p^2 < 1$, так что имеет место ситуация, изображенная на фиг. 35. Тогда $KI[e_1, \Gamma]=1$ и L_1^+ оказывается сингулярной при $t_1=1$. Из фиг. 35



Фиг. 34. Различные положения поверхностей S_2 и S_3 по отношению к S_1 в пространстве $\text{Re } x, \text{Re } y$.



Фиг. 35. Контур Γ пересекает действительный диск внутри S_1 в точке P .

видно, что точка P лежит либо в e_{12}^a , либо в e_{12}^b (для $y_p > 0$ или $y_p < 0$ соответственно). Поэтому

$$\text{KI} [e_{12}^a, \Gamma] = 1, \quad \text{KI} [e_{12}^b, \Gamma] = 0$$

или

$$\text{KI} [e_{12}^a, \Gamma] = 0, \quad \text{KI} [e_{12}^b, \Gamma] = 1. \quad (3.18)$$

Когда мы подходим к поверхности L_{12}^a и L_{12}^b вдоль путей α и β , оказывается, что только одна из этих поверхностей сингулярна. Короче говоря, при пересечении L_{12} листы переставляются с L_1 ; такое пересечение называется *эффективным пересечением*. Соотношения (3.18) можно записать в виде

$$\text{KI} [e_1, \Gamma] = \text{KI} [e_{12}^a, \Gamma] + \text{KI} [e_{12}^b, \Gamma]. \quad (3.19)$$

Фам [17] показал, что (3.19) остается справедливым для ландаувских поверхностей L_{12} и L_1 в их общем положении даже в том случае, когда $(^m)S$ не являются сферами.

СКАЧКИ НА РАЗРЕЗАХ

§ 1. Введение

Изучив с помощью теоремы Пикара—Лефшеца контуры, по которым проводится интегрирование, мы обратимся теперь к изучению подынтегральных выражений. Вначале обобщим известные понятия криволинейного и поверхностного интегралов в трехмерном пространстве. Криволинейный интеграл имеет вид

$$\int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int_C (P dx + Q dy + R dz),$$

а поверхностный интеграл —

$$\int_S \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S (P dy dz + Q dx dz + R dx dy),$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор нормали к поверхности S , который можно определить как векторное произведение двух касательных векторов к ней. При интегрировании по p -мерному «контуру» в q -мерном пространстве мы должны использовать новые понятия.

1) Векторное произведение $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ нужно заменить на *внешнее произведение* $u \wedge v$. В отличие от $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ произведение $u \wedge v$ не является вектором; однако, как и $\mathbf{u} \times \mathbf{u}$, произведение $u \wedge u$ равно нулю.

2) Подынтегральные выражения следует называть *дифференциальными формами*. Так, выражения $\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{S}$ соответственно являются одномерной и двумерной дифференциальными формами.

3) Определим операцию d , называемую операцией взятия *внешней производной* для дифференциальной формы; она переводит равенство $\mathbf{F}_2 = \mathbf{V} \times \mathbf{F}_1$ в равенство $\mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{S} = d(\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r})$.

Используя эти понятия, мы можем получить обобщенную форму теоремы Стокса $\left(\int_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} \right)$, теоремы Коши о вычетах, а также формулы Куткоски для скачков на разрезах.

§ 2. Дифференциальные формы

Начнем с определения *грассмановой*, или *внешней, алгебры*¹⁾. Возьмем множество действительных чисел R и векторное пространство V над R (т. е. с коэффициентами из R). Построим далее новое векторное пространство $\Lambda(V)$, которое является алгеброй над R и обладает следующими свойствами:

а) Пространство $\Lambda(V)$ содержит единичный элемент 1 из R .

б) Пространство $\Lambda(V)$ порождается единичным элементом 1 и элементом из V .

в) Если $x \in V$, то $x \wedge x = 0$ [в указанной алгебре произведение обозначается символом \wedge]; алгебра ассоциативна.

г) Размерность векторного пространства $\Lambda(V)$ должна равняться 2^n , где n — число базисных векторов в V .

В силу свойств а) и б) любой элемент из пространства $\Lambda(V)$ можно записать в виде линейной комбинации единичного элемента 1 из R и произведений элементов из V . Пусть e_i — базисные векторы из V , где $i=1, \dots, n$. Тогда $\Lambda(V)$ будет содержать произведения вида $1, e_i, e_i \wedge e_j, \dots, e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$. В силу свойства в) имеем $e_i \wedge e_i = 0$ и $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$. Таким образом, пространство $\Lambda(V)$ натянуто на 2^n элементов вида $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ и где p пробегает значения от 0 до n (элемент e_{i_0} отождествляется с единичным элементом 1 из R). Поскольку в силу свойства г) $\dim \Lambda(V) = 2^n$, указанные элементы должны быть линейно независимы. Ясно, что $\Lambda(V)$ — прямая сумма подпространств $\Lambda^p(V)$, где $0 \leq p \leq n$; подпространства $\Lambda^p(V)$, называемые пространствами p -векторов, натянуты на элементы $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, где $i_1 < \dots < i_p$. Таким образом, имеем $\Lambda^0(V) = R, \Lambda^1(V) = V$. Если $n=3$, то $\Lambda^2(V)$ составлено из элементов $a_1 e_1 \wedge e_2 + a_2 e_2 \wedge e_3 + a_3 e_3 \wedge e_1$, где $a_i \in R$.

Определив внешнюю алгебру, мы рассмотрим теперь *внешние дифференциальные формы*. Пусть P — точка в n -мерном евклидовом пространстве, и пусть U — *координатная окрестность* точки с локальными координатами x_1, \dots, x_n и естественным базисом dx_1, \dots, dx_n для векторного пространства ковариантных векторов для P , которое обозначается T_P . Дифференциальная форма степени p (p -форма) для точки P определяется как

¹⁾ Алгеброй называется векторное пространство X , в котором определена операция произведения (обозначаемая звездочкой), которая сопоставляет любым двум векторам x_1 и x_2 из X третий вектор $x_1 * x_2$ из X . Примером алгебры является алгебра $n \times n$ -матриц X ($n \times n$ -матрицы) с произведением $x_1 * x_2 = [x_1, x_2]$, где $[,]$ — коммутатор. Основные результаты теории современной алгебры читатель может почерпнуть, например, из [28]. Грассманова алгебра излагается в [35, 36].

элемент из $\Lambda^p(T_p^*)$, и в U она может быть представлена в виде

$$\omega^p = \sum_{i_1, \dots, i_p} f_{i_1 \dots i_p}(x_p) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad (4.1)$$

где $f_{i_1 \dots i_p}(x_p)$ — гладкая бесконечно дифференцируемая функция в U . Произведение p -формы ω и q -формы φ в U является $(p+q)$ -формой $\omega \wedge \varphi$ в U . Приведем примеры p -форм для пространства с размерностью $n=3$:

$$\begin{aligned} \omega^0: & \text{ Гладкие функции } F(x), \\ \omega^1: & P dx + Q dy + R dz, \\ \omega^2: & A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy, \\ \omega^3: & G dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Отметим, что при преобразовании координат $dx_i = a_{ij} dx'_j$ форма ω^p (4.1) преобразуется в форму

$$\begin{aligned} \omega^p &= \sum f_{i_1 \dots i_p}(a_{i_1 j_1} dx'_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{i_p j_p} dx'_{j_p}) = \\ &= \sum f'_{i_1 \dots i_p} dx'_{i_1} \wedge \dots \wedge dx'_{i_p}, \end{aligned}$$

где

$$f'_{i_1 \dots i_p} = \sum f_{i_1 \dots i_p} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_p j_p}.$$

Для $n=3$, например, можно рассмотреть преобразования

$$dx' = dx \cos \theta + dz \sin \theta; \quad dz' = -dx \sin \theta + dz \cos \theta.$$

Определяя отсюда dx и dz и подставляя их в выражение для ω^2 (с учетом соотношений $dx' \wedge dz' = -dz' \wedge dx'$, $dx' \wedge dx' = 0$ и т. п.), получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (A \cos \theta + C \sin \theta) dy' \wedge dz' + B dz' \wedge dx' + \\ &+ (-A \sin \theta + C \cos \theta) dx' \wedge dy'. \end{aligned}$$

Три компоненты ω^2 преобразуются как ковариантный (псевдо) вектор.

Интеграл от ω^p по p -мерной плоскости в U , определяемый первыми x_1, \dots, x_p из x_1, \dots, x_n , по определению равен

$$\int_{\{x_1, \dots, x_p\} \cap U} \omega^p = \int_{\{x_1, \dots, x_p\} \cap U f_1, \dots, p} dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

При интегрировании дифференциальной формы ω^p по p -мерному подмногообразию C_p в n -мерном многообразии ¹⁾ M нужно раз-

¹⁾ n -мерным многообразием (см. § 3 гл. 5) называется пространство, которое локально гомеоморфно n -мерному евклидову пространству.

бить интеграл по окрестностям U и в этих окрестностях ввести координаты так, чтобы каждый интеграл (в каждой окрестности U) брался по плоскости. Рассматриваемый интеграл будем обозначать символом

$$\int_{C_p} \omega^p.$$

Хотя это и не следует с очевидностью из сказанного, но преимущество данного определения интеграла заключается в том, что интеграл оказывается независимым от выбора окрестностей U и координат в этих окрестностях (см. § 3 гл. 5).

Определим теперь оператор *внешнего дифференцирования* d , который переводит p -формы в $(p+1)$ -формы и обладает такими свойствами:

- 1) $d(\omega + \varphi) = d\omega + d\varphi$,
- 2) $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)(\deg \omega)\omega \wedge d\varphi$,
- 3) $d(d\omega) = 0$ для любого ω ,
- 4) $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ для любой 0-формы f .

В частности, для отдельного члена в сумме (4.1) имеем

$$d[f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Свойство 3 следует из того, что $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ и $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j = \partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$. Для $n=3$ имеем

$$\begin{aligned} d\omega^0 &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz, \\ d\omega^1 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx, \\ d\omega^2 &= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \\ d\omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

Назовем p -форму ω^p *замкнутой*, если $d\omega^p = 0$, и назовем ω^p *точной*, если $\omega^p = d\varphi^{p-1}$. В силу свойства 3 ясно, что точная p -форма всегда замкнута. Пусть C^p означает класс замкнутых форм ω^p , а E^p — класс точных форм ω^p . Тогда когомология де Рама

¹⁾ Под $\deg \omega$ здесь понимается степень дифференциальной формы ω . — *Прим. перев.*

определяется следующим образом:

$$D^p = \frac{C^p}{E^p}. \quad (4.2)$$

Таким образом, две замкнутые p -формы эквивалентны, если их разность является точной p -формой. Согласно теории гомологий, замкнутая p -форма может рассматриваться как p -коцикл, в то время как точная p -форма — как p -кограница.

Пример. Пусть M — диск без точки, взятый на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$. Пусть этой точкой будет точка $z = 0$. Рассмотрим 1-форму $z^{-1} dz$ на M :

$$\frac{dz}{z} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + i \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d[\operatorname{Re} \operatorname{Ln} z] + id[\operatorname{Im} \operatorname{Ln} z].$$

Форма $\operatorname{Re} \operatorname{Ln} z$ является 0-формой, регулярной в M ; это означает, что ее можно дифференцировать сколько угодно раз, но она не является голоморфной, так как для этого должны выполняться условия Коши — Римана. Таким образом, $d[\operatorname{Re} \operatorname{Ln} z]$ является точной регулярной 1-формой. Поскольку форма $\operatorname{Im} \operatorname{Ln} z$ не является однозначной в M , она не является 0-формой. Однако форма $d[\operatorname{Im} \operatorname{Ln} z]$ является однозначной и поэтому замкнутой регулярной 1-формой; это порождающий элемент группы $D^1(M, R)$, где R указывает, что группа D^1 образована из регулярных 1-форм. С другой стороны, 1-форма $z^{-1} dz = d(\operatorname{Ln} z)$ является замкнутой и голоморфной; следовательно, эта форма является порождающим элементом группы $D^1(M, H)$, где H указывает на голоморфность.

Характеристика геометрии пространства с помощью групп когомологий основывается на некоторых теоремах дуальности между группами когомологий и гомологий. Наиболее важной является обобщенная *теорема Стокса*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega, \quad (4.3)$$

где ω есть p -форма на многообразии M и c является $(p+1)$ -цепью. Ясно, что интеграл (4.3) обращается в нуль, если либо ω замкнуто, либо c является циклом.

§ 3. Формула вычетов

Займемся сначала делением форм. Предположим, что S подмногообразие¹⁾ в X , задаваемое уравнением $S(x) = 0$, и что $\omega(x)$ — регулярная в X дифференциальная форма.

¹⁾ Обобщение излагаемой в § 3 и 4 теории на случай сингулярных гиперповерхностей S неизвестно. Гиперповерхность S сингулярна, если она имеет «самопересечения» (см. § 3 гл. 5).

Лемма 4.1. Если $\omega \wedge ds = 0$ в X , то существует регулярная в X форма ψ , такая, что $\omega = \psi' \wedge ds$.

Определение 4.1. Операция взятия ограничения ψ для S , обозначаемая $\psi|_S$, определяется как $(\omega/ds)|_S$.

Чтобы доказать лемму, возьмем $\omega = f(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_p$ и $s = x_j$. Условие $\omega \wedge ds = 0$ означает, что $j \in (p) = (1, \dots, p)$, так что можно написать, с точностью до знака, $\omega = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} \wedge dx_j$. Очевидно, имеем $\psi = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} = (\omega/ds)|_S$.

Пример. Пусть $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ и S — сфера $s = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)/2$. Тогда $ds = xdx + ydy + zdz$ и $\omega \wedge ds = 0$. Легко проверить, что

$$\frac{\omega}{ds} \Big|_S = \frac{dx \wedge dy}{z} \Big|_S = \frac{dz \wedge dx}{y} \Big|_S = \frac{dy \wedge dz}{x} \Big|_S.$$

Поскольку каждое из трех приведенных эквивалентных выражений представляет элемент площади на сфере S , то мы имеем

$$\frac{\omega}{ds} \Big|_S = \omega \delta(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Таким образом, деление на дифференциальную форму эквивалентно умножению на δ -функцию, сосредоточенную на действительном многообразии. Это деление легко обобщается на комплексный случай.

Вообще, если $\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$, то

$$\frac{\omega}{ds} \Big|_S = \frac{f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{p-1}}{\partial s / \partial x_p} \Big|_S.$$

Нетрудно убедиться в перестановочности операций дифференцирования и ограничения

$$d(\omega|_S) = (d\omega)|_S.$$

Используя лемму 4.1, легко показать, что если форма ω регулярна и замкнута в X , причем $\omega \wedge ds = 0$, то существует последовательность форм ω_n ($n = 1, 2, \dots$); следовательно,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 \wedge ds, \\ d\omega_1 &= \omega_2 \wedge ds, \\ &\dots \dots \dots \\ d\omega_{n-1} &= \omega_n \wedge ds. \end{aligned}$$

Фактически когомологический класс $\omega_n|_S$ в S определен однозначно (т. е. если ω — кограница, то $\omega_n|_S$ тоже кограница). Обозначим этот класс символом $(d^{n-1}\omega/ds^n)|_S$.

Сформулируем теперь теорему о вычете формы [32].

Теорема 4.2. Пусть φ — регулярная и замкнутая в $X - S$ дифференциальная форма, имеющая простой полюс на S (т. е. форма $\omega = s\varphi$ регулярна в X). Тогда существуют регулярные в X формы ψ и θ , такие, что

$$\varphi = \psi \wedge \frac{ds}{s} + \theta. \quad (4.4)$$

Кроме того, форма $\psi|_S$ замкнута и зависит только от φ ; эта форма называется *вычетом формы* φ

$$\text{res} [\varphi] = \frac{\omega}{ds} \Big|_S = \frac{s\varphi}{ds} \Big|_S.$$

Доказательство приведенной теоремы основывается на лемме 4.1. Существование форм ψ и θ можно доказать, заметив, что $d\varphi = 0 \Rightarrow d\omega = ds \wedge \varphi \Rightarrow d\omega \wedge ds = 0 \Rightarrow d\omega = -\theta' \wedge ds$, где θ' регулярна в X . Поэтому $s(\varphi - \theta) \wedge ds = 0$. Отсюда, согласно лемме 4.1, замечаем, что существует форма ψ , регулярная в X и такая, что $s(\varphi - \theta) = \psi \wedge ds$; следовательно, выполняется (4.4). Если в условиях теоремы 4.2 мы считали бы, что φ гомеоморфно, то форма $\psi|_S$ в (4.4) был бы голоморфной.

Обобщением сформулированной теоремы является следующая теорема [32].

Теорема 4.3. Если форма φ из теоремы 4.2 имеет полюс порядка q на S , то φ когологична в $X - S$ некоторой форме, имеющей простой полюс на S .

Используя (4.4), мы можем теперь написать *формулу вычетов*. Напомним, что кограничный оператор δ переводит цепь σ на S в цепь $\delta\sigma$ на $X - S$. В частности, при применении его к элементу $h(S)$ из группы гомологий $H_p(S)$ мы имеем

$$\delta: h(S) \in H_p(S) \rightarrow \delta h(S) \in H_{p+1}(X - S).$$

Пусть γ будет представителем класса эквивалентности $h(S)$, тогда $\delta_\varepsilon \gamma$ будет представителем $\delta h(S)$. Следовательно, если форма φ регулярна и замкнута в $X - S$ и имеет простой полюс на S , такой, что $\varphi = (ds/s) \wedge \psi + \theta$, где ψ и θ регулярны в X , то мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta_\varepsilon \gamma} \varphi(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta_\varepsilon \gamma} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \psi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta_\varepsilon \gamma} \theta = \\ &= \oint \frac{dx_1}{x_1} \int_\gamma \psi = 2\pi i \int_\gamma \psi = 2\pi i \int_\gamma \text{res} [\varphi]. \end{aligned}$$

Поскольку класс эквивалентности $\delta h(S)$ не зависит от индекса ε его представителей, формула вычетов может быть представлена в виде

$$\int_{\delta h(S)} \varphi = 2\pi i \int_{h(S)} \text{res}[\varphi]. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) легко сводится к обычной формуле вычетов для теории функций одного комплексного переменного, если мы возьмем в качестве S точку на комплексной плоскости X . Заметим, что добавление любой точной формы φ в (4.5) не ведет ни к какому дополнительному вкладу в интеграл для любого $h(S)$ в силу теоремы Стокса. Таким образом, из (4.5) следует, что класс когомологий $\text{res}[\varphi]$ в S зависит только от класса когомологий φ в $X - S$.

Если форма φ имеет кратный полюс, то для нее теорема 4.3 утверждает, что найдется форма θ'/s с кратным полюсом, которая когомологична исходной форме φ . Обозначим класс когомологий $\text{res}[\theta'/s]$ через $\text{Res}[\varphi]$ (обратите внимание на букву R). Тогда формула вычетов для форм с полюсами любых порядков точно совпадает с формулой (4.5)

$$\int_{\delta h(S)} \varphi = 2\pi i \int_{h(S)} \text{Res}[\varphi],$$

так что, если φ имеет полюс порядка q , т. е. форма $\omega = s^q \varphi$ перерегулярна в X , то

$$\text{Res}[\varphi] = \text{Res} \left[\frac{\omega}{s^q} \right] = \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1} \omega}{ds^q} \Big|_S.$$

Обобщение на случай более чем одной поверхности имеет вид

$$\int_{\delta^m h^{(m)}(S)} \varphi = (2\pi i)^m \int_{h^{(m)}(S)} \text{Res}^m[\varphi], \quad (4.6)$$

где

$$\text{Res}^m[\varphi] = \frac{1}{(q_1-1)! (q_2-1)! \dots (q_m-1)!} \times \\ \times \frac{d^{q_1+q_2+\dots+q_m-m} \omega}{ds_1^{q_1} \wedge ds_2^{q_2} \wedge \dots \wedge ds_m^{q_m}}. \quad (4.7)$$

§ 4. Формулы для скачков на разрезах

Рассмотрим интеграл вида

$$J(t) = \int_{h(X_{-(m)}S(t))} \frac{\omega}{s_1^{q_1} s_2^{q_2} \dots s_m^{q_m}},$$

где ω — дифференциальная форма степени l и где форма $\omega/s_1^{q_1} \dots s_m^{q_m}$ замкнута. Пусть L — поверхность сингулярностей, соответствующая простому пинчу m подмногообразий S_i ($i = 1, \dots, m$). Согласно теореме Пикара — Лефшеца, положительный обход контура L переводит $J(t)$ в $J'(t)$:

$$J'(t) - J(t) = \Delta J(t) = n \int_{\delta_e^m e^{(m)} S(t)} \frac{\omega}{s_1^{q_1} \dots s_m^{q_m}}.$$

Используя (4.6) и (4.7), отсюда получаем

$$\Delta J(t) = \frac{n(2\pi i)^m}{(q_1 - 1)! \dots (q_m - 1)!} \int_{e^{(m)} S(t)} \frac{d^{q_1 + \dots + q_m - m} \omega}{ds_1^{q_1} \wedge \dots \wedge ds_m^{q_m}}. \quad (4.8)$$

Это скачок функции $J(t)$ при $l > m + 1$; если $l = m + 1$, то $\Delta J(t) = 0$. Это означает, что $J(t)$ может иметь самое большое полюс при $t = L$.

Как указывалось в предыдущем параграфе, деление на дифференциальную форму эквивалентно умножению на δ -функцию; дифференцирование квадрата дифференциальной формы эквивалентно умножению на производную δ -функции и т. д. Формула (4.8) при $q_i = 1$, s_i равных фейнмановским знаменателям, и $\omega = \prod_p d^4 k_p$ (где k_p — импульс для p -й петли линий) является обобщенным вариантом формулы Куткоски для скачков на разрезах.

Приведем пример использования формулы (4.8) и рассмотрим скачок функции $A(p_i)$ в (3.15) при обходе L_{12} :

$$\begin{aligned} \Delta A(p_i) &= n \int_{\delta_{12}^2 e^{12}} \frac{d^2 \hat{q}}{(\hat{q} \cdot p_1 - 1)(\hat{q} \cdot p_2 - 1)(\hat{q} \cdot p_3 - 1)} = \\ &= n(2\pi i)^2 \int_{e^{12}} \frac{1}{(\hat{q} \cdot p_3 - 1)} \frac{d^2 \hat{q}}{d(\hat{q} \cdot p_1 - 1) \wedge d(\hat{q} \cdot p_2 - 1)} = \\ &= -4\pi^2 n \left[\frac{1}{\hat{q}_a \cdot p_3 - 1} - \frac{1}{\hat{q}_b \cdot p_3 - 1} \right] \frac{1}{2k^{1/2}}, \end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{q}}_a$ и $\hat{\mathbf{q}}_b$ — пара векторов, которые удовлетворяют условиям $q^2 = \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_1 = \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_2 = 1$ в согласии с (3.16) и (3.17). Заметим, что

$$\frac{1}{2k^{1/2}} = \frac{d^2 \hat{\mathbf{q}}}{d(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_1 - 1) \wedge d(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_2 - 1)} = \frac{d^3 \hat{\mathbf{q}}}{d(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_1 - 1) \wedge d(\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{p}_2 - 1) \wedge d(q^2 - 1)},$$

и для формы, входящей в знаменатель, имеем

$$(\mathbf{p}_1 \cdot d\hat{\mathbf{q}}) \wedge (\mathbf{p}_2 \cdot d\hat{\mathbf{q}}) \wedge 2(\hat{\mathbf{q}} \cdot d\hat{\mathbf{q}}) = 2\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 \times \hat{\mathbf{q}}) d^3 \hat{\mathbf{q}}.$$

Поэтому

$$k^{1/2} = \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 \times \hat{\mathbf{q}}) = \begin{vmatrix} p_1^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1 \\ \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & p_2^2 & \mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1 \\ \mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1 & \mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{q}} = 1 & \hat{\mathbf{q}}^2 = 1 \end{vmatrix}^{1/2}.$$

§ 1. Введение

Выше мы в основном сосредоточили свое внимание на двух приложениях современной геометрии к фейнмановским интегралам и интегралам унитарности, предложенных Фотиади, Фруассаром, Ласку и Фамом. Они касались применения теоремы Пикара — Лефшеца к отысканию структуры римановой поверхности для интегралов и последующих обобщений формулы Куткоски для скачков на разрезах.

Оба указанных приложения не исчерпывают ни результатов, полученных в рассматриваемой области исследования, ни относящейся сюда математики. В этой и следующей главах мы вводим читателя в круг вопросов, которые не стремились излагать подробно: сначала дадим определение ряда понятий, с которыми можно встретиться в литературе, а в гл. 6 резюмируем все результаты и бегло остановимся на некоторых приложениях.

Такие понятия (определение которых дано ниже), как категории и функторы, пучки и расслоенные пространства, непосредственно не нужны для изучения фейнмановских интегралов или интегралов унитарности, но постоянно встречаются и используются в соответствующей математической литературе. С другой стороны, понятия гомотопических групп, многообразия и когомологических групп весьма существенны. Понятие спектральной последовательности, хотя и довольно специальное, все же используется в расчетах Федербуша по трехступенчатым лестничным диаграммам.

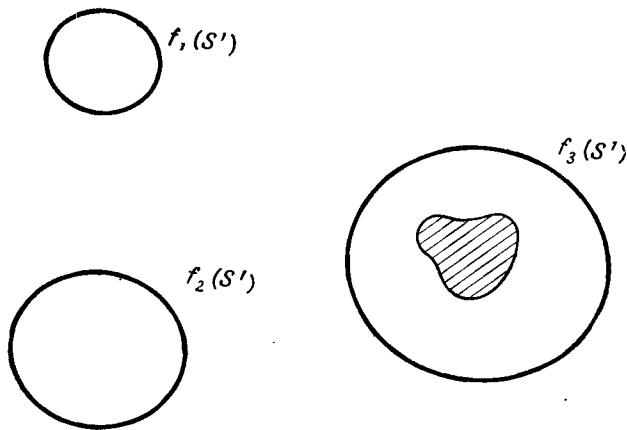
Нам хотелось бы подчеркнуть вводный и незаконченный характер предлагаемого читателю текста¹⁾. Каждый затронутый здесь вопрос был предметом обстоятельного изучения, на что в кратком изложении мы можем лишь только намекнуть. С другой стороны, в этой главе мы, по-видимому, даем читателю очень большую порцию материала, которую он, может быть, и не сумеет переварить за один раз. Поэтому читатель может сразу после § 2 перейти к гл. 6 и использовать оставшуюся непрочитанной часть гл. 5 только для справок.

¹⁾ В таком стиле топологи беседуют между собой за чашкой чая

§ 2. Гомотопия

В этом параграфе мы сначала уточним смысл того, что два отображения f_1 и f_2 ($f_i: X \rightarrow Y$) можно деформировать одно в другое (т. е. они гомотопны), а затем определим группы (гомотопий), которые характеризуют (однако не полностью) данное пространство, но не совпадают с группами гомологий этого пространства [30, 31, 40].

Назовем два отображения $f_1: X \rightarrow Y$ и $f_2: X \rightarrow Y$ *гомотопическими* $f_1 \approx f_2$, если существует непрерывное отображение



Фиг. 36. Три отображения единичной окружности в плоскость с исключенной площадкой (она заштрихована).

$g: I \times X \rightarrow Y$ (где $I = [0, 1]$ — действительный единичный интервал), такое, что $f_1(x) = g(0, x)$ и $f_2(x) = g(1, x)$. Отображение g называется гомотопией для f_1 в f_2 .

Например, если мы рассмотрим три отображения f_1 , f_2 и f_3 , переводящие единичную окружность S^1 в область плоскости, имеющей исключенную площадку (фиг. 36), то $f_1 \approx f_2$, но $f_1 \not\approx f_3$.

Рассмотрим теперь множество отображений f , обозначаемое $C_n(Y, y_0)$, n -мерного куба I^n в пространство Y такое, что $f(\partial I^n) = y_0$, где ∂I^n — граница I^n и y_0 — точка из Y . Назовем f_1 гомотопным f_2 по модулю y_0 и введем обозначения $f_1 \approx f_2$, если а) существует непрерывное отображение $g: I \times I^n \rightarrow Y$, такое, что $f_1(x) = g(0, x)$ и $f_2(x) = g(1, x)$ для $x \in I^n$, т. е. f_1 и f_2 гомологичны; б) для g выполняется $g(I, \partial I^n) = y_0$.

Другими словами, два отображения n -куба в Y , переводящие границу в y_0 , гомотопны по модулю y_0 , если их образы могут быть непрерывно преобразованы одни в другие, при условии,

что образы границ I^n фиксируются на y_0 . Классы эквивалентности для отображений из $C_n(Y, y_0)$ являются элементами n -й группы гомологий. Определим произведение $f_1 * f_2$ двух отображений из $C_n(Y, y_0)$ как

$$(f_1 * f_2)(x^1, \dots, x^n) = \begin{cases} f_1(2x^1, x^2, \dots, x^n), & 0 \leq x^1 \leq \frac{1}{2}, \\ f_2(2x^1 - 1, x^2, \dots, x^n), & \frac{1}{2} \leq x^1 \leq 1. \end{cases}$$

Вводя понятие класса эквивалентности \dot{f} отображений f' , гомотопных по модулю y_0 отображению f , можно показать, что произведение $\dot{f}_1 * \dot{f}_2$ имеет смысл, поскольку $(f'_1 * f'_2) \cdot = (f_1 * f_2) \cdot$, если $f_1 \approx f'_1$ и $f_2 \approx f'_2$. Определим тогда n -ю группу гомотопий Y по модулю y_0 , обозначаемую символом $\pi_n(Y, y_0)$, как множество различных классов эквивалентности \dot{f} .

Укажем некоторые свойства групп π_n .

1) Группа $\pi_n(Y, y_0)$ зависит только от y_0 ; если существует дуга в Y , которая связывает y_0 с y'_0 , то $\pi_n(Y, y_0)$ изоморфна $\pi_n(Y, y'_0)$.

2) Группа π_n , вообще говоря, отлична от группы гомологий $H_n(Y)$; действительно, в общем случае π_1 не обязана быть абелевой группой.

3) Для k -сферы $\pi_n(S^k) = 0$ при $n < k$ и $\pi_n(S^k) = Z$; при $n > k$ группа $\pi_n(S^k)$ ненулевая, так же как и $H_n(S^k)$ (с помощью спектральных последовательностей эта группа была вычислена для некоторых n).

4) Группа $\pi_1(Y, y_0)$ называется фундаментальной группой (или группой Пуанкаре) для Y . Когда π_1 абелева, она изоморфна $H_1(Y)$; когда π_1 нулевая, Y является односвязным пространством, т. е. в нем все замкнутые кривые могут быть непрерывно стянуты в точку.

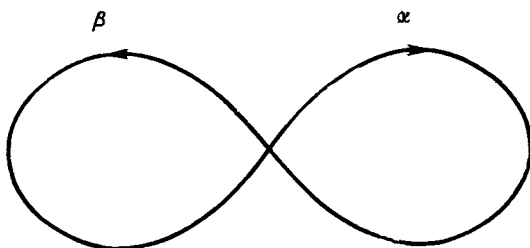
5) Можно определить группы относительных гомотопий и рассматривать точные гомотопические последовательности, аналогичные точным гомологическим последовательностям, определение которых дано в § 8 гл. 2.

Как пример рассмотрим группы гомотопий для восьмерки Y , изображенной на фиг. 37. Для гомологий мы имеем $H_1(Y) = Z^2 = \{n\alpha, n\beta\}$, т. е. Z^2 является абелевой группой с двумя порождающими элементами α и β . Для гомотопий $\pi_1(Y)$ является общей группой с двумя порождающими элементами α и β , т. е. собранием всех мономов, составленных из произведений степеней обоих порождающих элементов

$$\pi_1(Y) = \{\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha * \beta, \beta * \alpha, \alpha^{-1} * \beta, \dots\}. \quad (5.1)$$

Обратим внимание, что в случае гомологий $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, но в случае гомотопий $\alpha * \beta \neq \beta * \alpha$.

Может быть, читателю уже стало ясно, что проблема определения структуры римановой поверхности для интеграла (см.



Ф и г. 37. Пространство восьмерки.

гл. 3) в то же время является проблемой отыскания фундаментальной группы пространства внешних переменных (см. § 2 гл. 6).

§ 3. Многообразия и алгебраические многообразия

Многообразием называется пространство, составленное из отдельных кусков евклидова пространства, непрерывно соприкасающихся друг с другом. Более точно [33, 35] топологическое пространство M называется *действительным n -мерным многообразием*, если существует семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}$ из M и семейство таких непрерывных отображений $\{f_\alpha\}$, где каждое f_α переводит U_α в n -мерное евклидово пространство $E^n = \{(x^1, \dots, x^n)\}$, причем

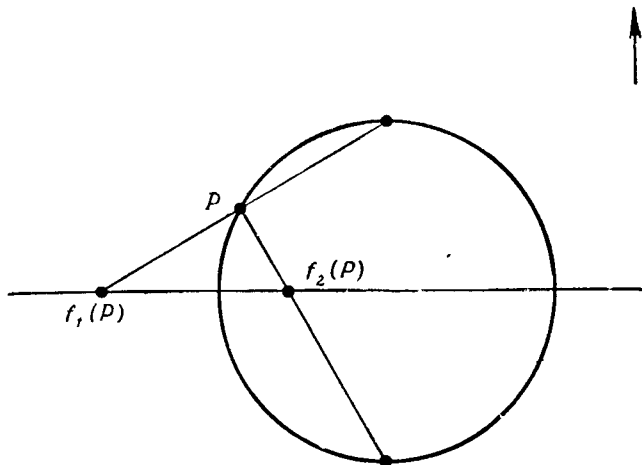
- 1) $M = \bigcup U_\alpha$, т. е. семейство $\{U_\alpha\}$ является покрытием для M ;
- 2) f_α является гомеоморфизмом U_α на $f(U_\alpha)$;
- 3) если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, то отображение $f_\alpha f_\beta^{-1} \equiv g$ будет функцией, заданной в E^n , с областью значений в E^n и непрерывной внутри $U_\alpha \cap U_\beta$.

Если функция g дифференцируема n раз, то пространство M называется *n -кратно дифференцируемым многообразием*. С помощью отображения f_α построим локальные координаты на M внутри U_α . Условие 3 гарантирует, что а) точки, оказывающиеся близкими друг к другу в координатах α , также будут близкими в координатах β и б) окрестность данной точки не зависит от используемых для ее описания координат. Примером n -мерного многообразия служит n -мерная сфера S^n , где области U_1 и U_2 представляют собой исходную сферу S^n без северного или южного полюса соответственно, причем f_i будут стереографическими

проекциями указанных областей на E^n , как это показано на фиг. 38 в случае S' .

Заменяя в этом определении многообразия действительные координаты в R^n на комплексные координаты в \mathbb{C}^n , мы назовем пространство M комплексным n -мерным многообразием (и действительным $2n$ -мерным многообразием).

Если $f_\alpha f_\beta^{-1}$ является аналитической функцией, переводящей $U_\alpha \cap U_\beta \subset \mathbb{C}^n$ само в себя, то пространство M называется *аналитическим многообразием*.



Фиг. 38. Стереографические проекции f_1 и f_2 точки на окружности.

Для точки P дифференцируемого n -многообразия M рассмотрим множество S_P всех функций, дифференцируемых в окрестности P . Будем писать $h \sim g$, если

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (h - g) = 0,$$

где $i=1, \dots, n$. Заметим, что эти условия не зависят от взятых координат (U_α, f_α) , поскольку при $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ и $f_\alpha(P) = (x^1, \dots, x^n)$, $f_\beta(P) = (y_1, \dots, y_n)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial y^i} (h - g) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j} (h - g) = \frac{\partial}{\partial y^i} (f_\alpha f_\beta^{-1})^j \frac{\partial}{\partial x^j} (h - g).$$

Множество T_P^* классов эквивалентности для элементов h из S_P называется пространством ковариантных касательных векторов. В каждой системе координат базис T_P^* состоит из величин

dx^i ; элементы из T_P^* можно записывать в виде $dh = \frac{\partial h}{\partial x^i} dx^i$.

Дуальное к пространству T_P^* пространство T_P составляется из контравариантных касательных векторов (т. е. пространство производных по направлениям в точке P). В конкретной координатной системе элементы этого пространства можно записать в виде $\sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Пространство T_P называется касательной плоскостью для M в точке P . Очень важно отметить, что определение пространств T_P и T_P^* не зависит от выбора системы координат. Ковариантные и контравариантные векторы и тензоры определяются, конечно, как и обычно в тензорном анализе. Весьма абстрактные определения, подобные приведенным выше, наряду с прочими позволяют уменьшить количество оговорок, которые потребовались бы в современной геометрии многообразий.

Теперь можно дать уточненное определение интеграла от дифференциальной p -формы по компактной p -цепи на n -мерном ориентированном¹⁾ многообразии M . Достаточно определить интеграл $\int_M \omega^n$ для компактного многообразия M (поскольку ком-

пактная p -цепь является p -мерным подмногообразием). Существенным моментом в этом определении является сведение интеграла к риманову интегралу в евклидовом пространстве с помощью разбиения единицы. Для данного семейства координатных окрестностей $\{U_\alpha\}$ система функций $\psi_\alpha: M \rightarrow R$ (или C) называется разбиением единицы для $\{U_\alpha\}$, если

$$1) \sum \psi_\alpha = 1;$$

2) для каждого ψ_α существует некоторое такое $\beta = \beta(\alpha)$, для которого $\psi_\alpha(p) = 0$, если p не принадлежит $U_{\beta(\alpha)}$.

При заданных ψ_α интеграл $\int_M \omega^n$ можно записать в виде

$$\int_M \omega^n = \sum_\alpha \int_{U_{\beta(\alpha)}} \omega^n \psi_\alpha, \quad (5.2)$$

где каждая область интегрирования в правой части соответствует своей координатной окрестности U_β . Интеграл можно записать в виде

$$\int_{U_{\beta(\alpha)}} \omega^n \psi_\alpha = \int_{f(U_{\beta(\alpha)})} \omega^n (f_\beta^{-1}(x)) \psi_\alpha (f_\beta^{-1}(x)), \quad (5.3)$$

¹⁾ Многообразие M называется ориентированным, если $\det (j_{\omega f_\beta^{-1}}) > 0$ всякий раз, когда $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

где интеграл в правой части равенства является просто n -мерным римановым интегралом. Выражения (5.2) и (5.3) вместе дают определение интеграла $\int_M \omega^n$.

Интересными для нас пространствами другого рода являются алгебраические многообразия [38, 39]. *Алгебраическим (аффинным) многообразием* V называется множество всех точек в n -мерном евклидовом пространстве, которые удовлетворяют системе уравнений $f_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, p$), где f_i — полиномы от x_j ($j = 1, \dots, n$). Сами x_j и коэффициенты при полиномах могут быть действительными или комплексными числами или элементами из любого поля. Многообразие V называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде $V = V_1 \cup V_2$, где ни V_1 , ни V_2 не содержатся одно в другом и оба являются алгебраическими многообразиями (т. е. уравнения $f_i = 0$ не факторизуются). Если мы не требуем, чтобы функции f_i были полиномами, а считаем их просто аналитическими функциями от x_j , то V называется *аналитическим многообразием*.

Рассмотрим множество K всех полиномов от n переменных x_1, \dots, x_n . Поскольку из того, что f_1 и f_2 принадлежат K , следует, что $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$ и $f_1 f_2$ принадлежат K , то множество K является кольцом¹⁾. Пусть K_V будет подмножеством K , состоящим из всех полиномов, обращающихся в нуль на V . Если f_1 и f_2 принадлежат K_V , то $f_1 + f_2$ и $f_1 - f_2$ будут также лежать в K_V ; кроме того, если хотя бы один из элементов f или g лежит в K_V , то fg будет принадлежать K_V . Поэтому K_V является идеалом²⁾ для K . Идеал K_V определяется алгебраическим многообразием V ; обратно, любой идеал K определяет некоторое алгебраическое многообразие. Геометрические свойства алгебраических многообразий в n -мерном пространстве таким образом связываются с алгебраическими свойствами идеалов кольца полиномов n измерений. Например, алгебраическое многообразие V неприводимо тогда и только тогда, когда K_V является главным идеалом (fg принадлежит K_V только, если либо f , либо g принадлежит K_V). Пересечение двух идеалов соответствует объеди-

¹⁾ Аддитивная группа G называется кольцом, если для g_1 и g_2 из G существуют не обязательно равные друг другу элементы $g_1 * g_2$ и $g_2 * g_1$ (тоже из G), такие, что $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$ и $g * (g_1 + g_2) = g * g_1 + g * g_2$. Если $g_1 * g_2 \neq 0$ для $g_1, g_2 \neq 0$, то кольцо G называется областью целостности. Если операция $*$ коммутативна и для любого элемента $g \neq 0$ существует в G элемент g^{-1} , такой, что $g * g^{-1} = g^{-1} * g = 1$ (где 1 — мультипликативная единица), то кольцо G называется полем.

²⁾ Идеалом называется аддитивная подгруппа кольца, замкнутая относительно операции умножения элементов в кольце.

нению соответствующих алгебраических многообразий: $V_1 \subset V_2$ тогда и только тогда, когда $K_{V_2} \subset K_{V_1}$.

Рассмотрим алгебраическое неприводимое многообразие V , определяемое полиномами $f_i(x) = 0$, где $i = 1, \dots, p$ и $x \in E^n$. Размерность $V = n - p$, причем p называется коразмерностью. Если $p = 1$, то V называется гиперповерхностью. Почти для всех точек V существуют окрестности, гомеоморфные окрестностям $(n - p)$ -мерного евклидова пространства; такие точки называются общими. Точки, для которых не существует таких окрестностей, называются сингулярными. Можно показать, что они составляют алгебраическое подмногообразие. Если алгебраическое многообразие V не имеет сингулярных точек, оно является просто *многообразием*. Если $n = 2$, $p = 1$ и V определено для действительных чисел, то оно является некоторой кривой на действительной двумерной плоскости и сингулярными точками V будут точки, в которых кривая пересекает сама себя (действительный узел) или касается сама себя (клюв). Современная алгебраическая геометрия опирается на понятие пучков (§ 8 этой главы) и более сложных структур.

§ 4. Когомология

В § 2 гл. 4 было дано определение когомологии де Рама для дифференциального многообразия M . В настоящем параграфе будут определены группы симплициальных когомологий [30, 31], которые изоморфны группам де Рама [33].

Для данного симплициального комплекса K мы в § 3 гл. 2 построили абелеву группу $C_p(K)$ для p -цепей на K , т. е. для линейных комбинаций p -симплексов. Определим теперь абелеву группу $C^p(K, G)$ для p -коцепей f^p на K с коэффициентами из (абелевой) группы G следующим образом:

$$C^p(K, G) = \{f \mid f: C_p(K) \rightarrow G \text{ гомоморфизм}\} \equiv \text{Hom}(C_p(K), G).$$

То есть p -коцепью f^p является гомоморфизм, который сопоставляет каждой цепи c_p из $C_p(K)$ элемент $f^p(c_p)$ из G . Гомоморфизм $f_1^p + f_2^p$ является отображением, которое переводит c_p в $f_1^p(c_p) + f_2^p(c_p)$, поэтому C^p — абелева группа. Если обозначить $f_{\sigma_i}^p$ гомоморфизм $f_{\sigma_i}^p(\sigma_j^p) = \delta_{ij}$, где σ_j^p — j -й p -симплекс, то элементы группы C^p можно записывать в виде $f^p = \sum g_i f_{\sigma_i}^p$ (сумма не обязательно конечная) и можно убедиться, что эти элементы находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $c_p = \sum g_i \sigma_i^p$ из C_p , если только мы имеем конечное число отдельных σ_i^p .

По аналогии с граничным оператором ∂ , действующим на цепи, определим когомологический оператор δ , переводящий p -коцепи в $(p+1)$ -коцепи. Коцепи f^p из C^p мы сопоставим коцепь δf^p из C^{p+1} , определяя действие δf^p на $(p+1)$ -цепи следующим образом:

$$\delta f^p(c_{p+1}) = f^p(\partial c_{p+1}).$$

Ясно, что $\delta\delta=0$, поскольку $\partial\partial=0$. Далее мы можем определить коциклы $Z^p = \text{Ker } \delta: C^p \rightarrow C^{p+1}$, кограницы $B^p = \text{Im } \delta: C^{p-1} \rightarrow C^p$ и p -ю когомологическую группу K с коэффициентами из G , обозначаемую через $H^p(K, G) = Z^p/B^p$.

Бегло упомянем о двух операциях, производимых над элементами прямых сумм когомологических групп $H^* = \sum H^p(K, G)$, а именно операции \cup -произведения и \cap -произведения¹⁾. Пусть абелева группа G является кольцом, например кольцом действительных чисел R . Если $f_1^p \in C^p$, $f_2^q \in C^q$ и $\sigma^{p+q} = \langle v_0, \dots, v_{p+q} \rangle$, то мы считаем \cup -произведением $f_1^p \cup f_2^q$ такой элемент из C^{p+q} , действие которого на σ^{p+q} дает

$$(f_1^p \cup f_2^q)(\sigma^{p+q}) = f_1^p(\langle v_0, \dots, v_p \rangle) * f_2^q(\langle v_p, \dots, v_{p+q} \rangle).$$

Если мы определим $e^0 \in C^0$ как $e^0(v) = 1$ для любого вертекса $v \in K$, то получим следующие свойства \cup -произведения:

- 1) $(f_1^p + f_2^p) \cup (f_3^q + f_4^q) = f_1^p \cup f_3^q + f_1^p \cup f_4^q + f_2^p \cup f_3^q + f_2^p \cup f_4^q$;
- 2) $(f_1^p \cup f_2^q) \cup f_3^r = f_1^p \cup (f_2^q \cup f_3^r)$;
- 3) $f^p \cup e^0 = e^0 \cup f^p = f^p$;
- 4) $\delta(f_1^p \cup f_2^q) = (\delta f_1^p) \cup f_2^q + (-1)^p f_1^p \cup \delta f_2^q$.

Из свойства 4 мы видим, что произведение $f_1^p \cup f_2^q$ является коциклом, если f_1^p и f_2^q являются коциклами; оно является кограницей, если f_1^p является кограницей, а f_2^q — коциклом или наоборот. Это позволяет определить \cup -произведение элементов из H^p и H^q . Отметим, что если Z_p принадлежит H^p и если Z_q принадлежит H^q , то $Z_p \cup Z_q = 0$ при $p+q > n$, где n — размерность симплицального комплекса K .

Хотя \cup -произведение, как оно было определено выше для коцепей, зависит от способа упорядочения вертексов симплексов

¹⁾ В литературе \cup -произведение называют также произведением Колмогорова — Александера, а \cap -произведение — произведением Уитни. — Прим. перев.

комплекса, можно показать, что эта операция для элементов когомологических групп на K фактически не зависит от указанного способа упорядочивания. Таким образом, \cup -произведение делает прямую сумму когомологических групп

$$H^*(K, G) = \sum_p H^p(K, G)$$

кольцом, а именно когомологическим кольцом.

Назовем \cap -произведением коцепи f^p и цепи $c_q = \sum_i g_i \sigma_i^p$ при $p \leq q$ такую $(q - p)$ -цепь:

$$f^p \cap c_q = f^p \cap \sum_i g_i \langle v_0^i, \dots, v_q^i \rangle = \sum_i [g_i * f^p (\langle v_0^i, \dots, v_p^i \rangle)] \langle v_p^i, \dots, v_q^i \rangle,$$

где звездочка обозначает умножение в кольце G . Если $p > q$, то $f^p \cap c_q = 0$; если f^p — коцикл и c_q — цикл, то $f^p \cap c_q$ является циклом; если, кроме того, f^p — кограница или c_q — граница, то $f^p \cap c_q$ также является границей. Аналогично свойствам 1—4 для \cup -произведения имеем следующие свойства для \cap -произведения:

- 1) $(f_1^p + f_2^p) \cap (C_q^1 + C_q^2) = f_1^p \cap C_q^1 + f_1^p \cap C_q^2 + f_2^p \cap C_q^1 + f_2^p \cap C_q^2$;
- 2) $f^p \cap (f^q \cap C_r) = (f^p \cap f^q) \cap C_r$;
- 3) $e^0 \cap C_p = C_p$;
- 4) $\partial(f^p \cap C_q) = (-1)^{q-p} (\delta f^p) \cap C_q + f^p \cap (\partial C_q)$.

Для элементов $H^* = \sum H^p$ и элементов $H_* = \sum H_p$ \cap -произведение не зависит от способа упорядочения вертексов на K . Отметим следующее.

а) Если пространство K является ориентированным n -мерным многообразием, то можно показать, что $H_n(K) = Z$ (например, S^2 или T^2). Тогда \cap -произведение элементов из H^p с порождающими элементами \dot{Z}_n (фундаментальными циклами) из H_n дает элементы H_{n-p} : $\dot{Z}^p \cap \dot{Z}_n = \dot{Z}_{n-p}$. Можно показать, что гомоморфизм $\dot{Z}^p \rightarrow \dot{Z}_{n-p}$ является изоморфизмом $H^p \cong H_{n-p}$ (свойство двойственности Пуанкаре).

б) Подобно тому как \cup -произведение превращает симплициальную когомологию в кольцо, внешнее произведение (\wedge) дифференциальных форм, рассмотренное в гл. 4, превращает когомологию де Рама в кольцо. Аналогично в когомологической теории де Рама можно определить соответствующее внутреннее произведение

$$\omega^p \wedge \sigma_q = \omega^p \wedge \langle v_0, \dots, v_q \rangle = \left[\int_{\langle v_0, \dots, v_p \rangle} \omega^p \right] \langle v_p, \dots, v_q \rangle \quad (p \leq q).$$

Ввиду указанного соответствия становится очевидным, что группы симплициальных когомологий и группы когомологий де Рама для любого многообразия действительно изоморфны (теорема де Рама, к которой мы вернемся ниже в § 7 этой главы).

в) Π -произведение $Z^p \cap Z_p$ называют также кронекеровским индексом для Z^p и Z_p ; это определение индекса Кронекера согласуется с определением, данным в гл. 3 при рассмотрении пересечений замкнутых и компактных циклов. Можно показать, что замкнутые когомологические группы изоморфны компактным когомологическим группам.

г) Относительные когомологические группы и точные последовательности для них определяются так же, как для гомологий (§ 7 гл. 2) и гомотопий.

Кроме симплициальных когомологий и когомотопий де Рама, можно определить большое количество других когомологий. Ниже мы очень кратко остановимся на гомологиях Чеха¹⁾, а также на сингулярных гомологиях и когомологиях.

Сначала рассмотрим теорию Чеха. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}$ будет покрытием X открытыми множествами. Рассмотрим симплициальный комплекс $K_{\mathcal{U}}$ с вертексами U_i и p -симплексы $\langle U_{i_0}, \dots, U_{i_p} \rangle$, для которых $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ непусто. Комплекс $K_{\mathcal{U}}$ называется нервом покрытия \mathcal{U} . Легко убедиться, что он удовлетворяет условиям, накладываемым на симплициальные комплексы (условия 1 и 2 из § 2 гл. 2). Таким образом, мы опять можем ввести понятия цепей, коцепей, операторов ∂ , δ и т. д. и построить группы $H_p(X, \mathcal{U})$ и $H^q(X, \mathcal{U})$. Группы гомологий (когомологий) Чеха $H(X)$ определяются как пределы групп $H(X, \mathcal{U})$ в случае, когда покрытие становится все мельче и мельче. Отметим, что комплекс $K_{\mathcal{U}}$, вообще говоря, имеет симплексы сколь угодно высокой размерности в противоположность симплициальным комплексам, возникающим при триангуляции пространства X . Тем не менее группы Чеха и симплициальные группы совпадают для всех пространств, для которых существуют такие триангуляции, когда каждый симплекс является гранью только конечного числа других симплексов.

Наконец, в теории сингулярных гомологий мы связываем с пространством X (полный) сингулярный комплекс K_s . Симплексы комплекса K_s имеют вид $\langle v_0, \dots, v_p \rangle_f$, где $\langle v_0, \dots, v_p \rangle$ — «стандартный симплекс» в евклидовом пространстве $v_0 = (0, \dots, 0)$, $v_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ и т. д., f — непрерывное отображение подмножества евклидова пространства

¹⁾ Употребляется также название «теория Александрова — Чеха». — *Прим. перев.*

$\langle v_0, \dots, v_2 \rangle$ в X . Симплекс $\langle v_0, \dots, v_p \rangle_f$ является гранью симплексов $\langle v_0, \dots, v_q \rangle_g$, причем $q > p$, если g при действии на $\langle v_0, \dots, v_p \rangle$ равно f . Группы сингулярных гомологий и когомологий являются группами симплициальных гомологий и когомологий для симплициального комплекса K_g . На конечномерных многообразиях гомологии и когомологии Чеха, симплициальные и сингулярные гомологии и когомологии совпадают.

§ 5. Расслоенные пространства

Пространство X называется *расслоенным пространством* [41], если даны пространство F (называемое *слоем*), пространство B (называемое *базой*) и непрерывное отображение $p: X \rightarrow B$ (называемое *проекцией*), причем

1) для каждого $x \in B$ множество элементов $p^{-1}(x) = F_x$, называемое *слоем отображения p над точкой x* , гомеоморфно *данной* слою F ;

2) для каждого $x \in B$ имеются окрестность V для x и гомеоморфизм φ

$$\varphi: V \times F \rightarrow p^{-1}(V),$$

такие, что

$$p(\varphi(x', y)) = x',$$

где $x' \in V$, $y \in F$.

Пример. Пусть $X = B \times F$ и $p(x, y) = x$. Пространство X в этом случае называется *произведением слоев*. В силу условия 2 локально, т. е. «над» окрестностью точки из B , каждый слой выглядит как произведение слоев, но глобально могут возникать осложнения, связанные с кручением. Нетривиальным примером в этом отношении служит лист Мёбиуса (фиг. 39). База B является сегментом с отождествленными друг с другом концевыми точками, т. е. B — окружность; слой F является линейным сегментом. Полагая $b = \gamma$, $c = \beta$, получаем произведение слоев; полагая $b = \beta$, $c = \gamma$, получаем лист Мёбиуса.

Чтобы описать соединение концов друг с другом, нужно ввести в рассмотрение группу, которая будет описывать получаемую структуру. Точнее расслоенное пространство называется *расслоением*, если даны: а) группа G , называемая группой *расслоения*, которая действует на слое F , т. е. для каждых $g \in G$ и $y \in F$ существует элемент $g \cdot y$ из F ; б) семейство открытых множеств $\{U_\alpha\}$ для B (таких, что $B = \bigcup U_\alpha$); в) непрерывные отображения $\{\varphi_\alpha\}$, где $\varphi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$, такие, что

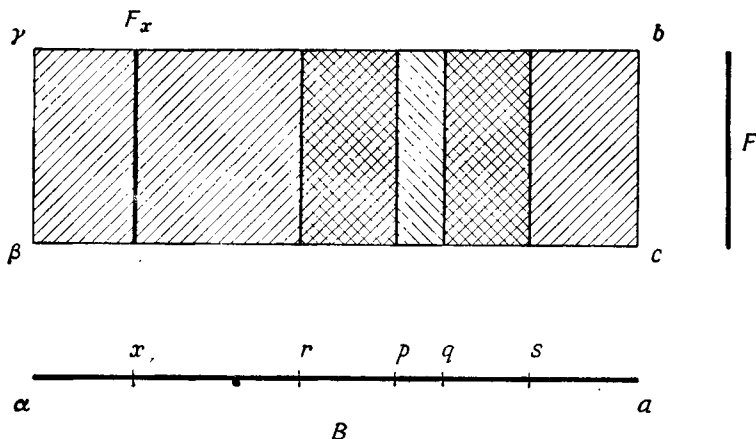
1) никакое $g \in G$ не оставляет F неизменным, кроме единичного элемента в G ;

2) если $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то отображение $\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha|_x$ для F самого в себя, определяемое как

$$\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(x, y)) = (x, y')$$

(где $y, y' \in F$), идентично с отображением F самого в себя, задаваемым элементом $g_{\alpha\beta}(x)$ группы G ;

3) отображение $x \rightarrow g_{\alpha\beta}(x)$ для $U_\alpha \cap U_\beta$ в группу G непрерывно.



Фиг. 39. Лист Мёбиуса, как расслоенное пространство с базой B и слоем F .

Перечисленные условия обеспечивают нам, что группа G описывает кручение в X . В примере с листом Мёбиуса (фиг. 39) имеем $G = \{e, g \mid g^2 = e\}$, причем области U_α можно выбрать следующим образом:

$$U_1 = (a, p) \cup (q, a), \quad U_2 = (r, s),$$

$$g_{12}(x) = e \quad \text{для } x \in (r, p), \quad g_{12}(x) = g \quad \text{для } x \in (q, s)$$

(g_{12} — непрерывное отображение $U_1 \cap U_2$ в G , поскольку $U_1 \cap U_2$ является объединением двух не связанных друг с другом множеств; g_{12} равно константе на каждом из них).

Часто встречается расслоение, которое является тангенциальным расслоением для n -мерного дифференциального многообразия M : $X = \bigcup_{p \in M} T_p$. Здесь $B = M$ и F — n -мерное векторное пространство. Если $x \in X$ (где x — контравариантный тангенциальный вектор в точке P), то $p(x) = P$; G — полная линейная группа n измерений.

Непрерывное отображение ψ на $U \subset B$ в X называется сечением над U , если $p(\psi(x)) = x$, т. е. ψ переводит каждое $x \in U \subset B$ в точку в F_x на слое над x . Если X — тангенциальное расслоенное пространство, то его сечения являются векторными полями. Следует отметить, что для данного X часто бывает полезным указывать пространства B и F , которые превращают X в расслоенное пространство, чтобы иметь возможность пользоваться теоремами, связывающими свойства X , B и F . Например, для гомотопии относительная гомотопическая точная последовательность [40, 41] позволяет построить точную последовательность, связывающую $\pi_n(X)$, $\pi_n(B)$ и $\pi_n(F)$,

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(B, b_0) \rightarrow \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0) \rightarrow \dots,$$

где $F = p^{-1}(b_0)$. Однако соотношения между тремя рядами гомологических групп оказываются значительно более сложными, как это будет показано в следующем параграфе. Напомним, однако, что для сфер наблюдается обратное: гомологические группы для них просты, однако до сих пор проблема расчета высших гомотопических групп остается нерешенной.

При выводе приведенной точной последовательности требуется использовать очень полезное свойство гомотопического покрытия для расслоенного пространства, которое заключается в следующем. Если дано $G: K \times I \rightarrow B$, где $I = [0, 1]$, и такое отображение $f: K \rightarrow X$, что $p^{-1}(G(K, 0)) = f(K)$, где $p: X \rightarrow B$ является проекцией на X , то существуют такие $\varphi: K \times I \rightarrow X$, что $p \cdot \varphi = G$. Короче, гомотопия G базы всегда покрыта гомотопией расслоенного пространства.

§ 6. Спектральные последовательности

Разумно ожидать, что для данного расслоенного пространства X со слоем F и базой B должна существовать связь между гомологическими группами для X [т. е. группами $H_n(X)$] и группами $H_n(F)$ и $H_n(B)$ для F и B . Такого рода связь, в частности, вскрывается в теоретико-групповой конструкции, называемой спектральной последовательностью [40, 42]. Сначала дадим определение спектральной последовательности, а затем укажем применения этого понятия.

Назовем абелеву группу E (в первом квадранте) *биградуированной*, если E является прямой суммой групп $E_{p,q}$, где $p, q = 0, 1, \dots$, т. е. $E = \sum_{p,q} E_{p,q}$. Группа E называется дифференциальной группой, если существует гомоморфизм $d: E \rightarrow E$ (называемый *дифференциалом*), такой, что $dd = 0$. *Спектральной последовательностью* (в первом квадранте) называется последова-

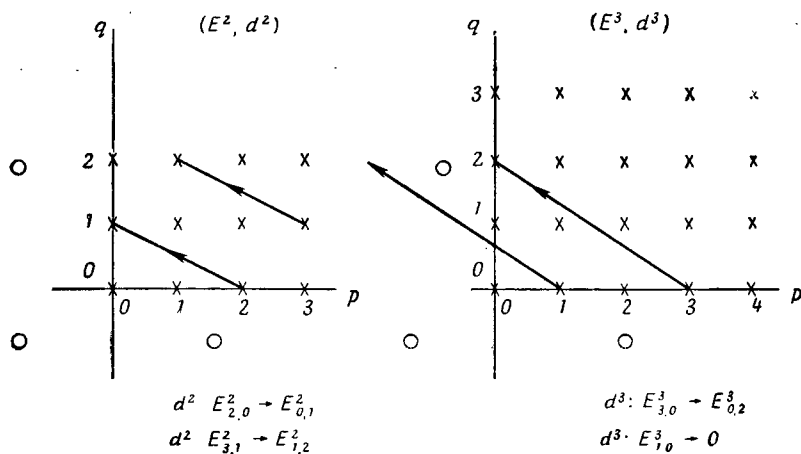
тельность биградуированных дифференциальных абелевых групп (E^r, d^r) при $r=2, 3, \dots$, которые связаны следующим образом:

$$1) d^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r,$$

$$2) E_{p,q}^{r+1} = \frac{\text{Ker} [d^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r]}{\text{Im} [d^r: E_{p+r, q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r]}$$

(во втором условии $E_{p,q}$ полагаем равной нулю при отрицательных p или q).

Таким образом, E^{r+1} — гомология цепочки групп E^r с граничным оператором d^r . На фиг. 40 изображены E^r для $r=2$ и $r=3$.



Фиг. 40. Графическое изображение спектральных последовательностей.

Очевидными свойствами спектральной последовательности (в первом квадранте) при $r > p, q+1$ являются следующие свойства:

$$\text{Im} [d^r: E_{p+r, q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r] = 0 \quad (5.4)$$

и

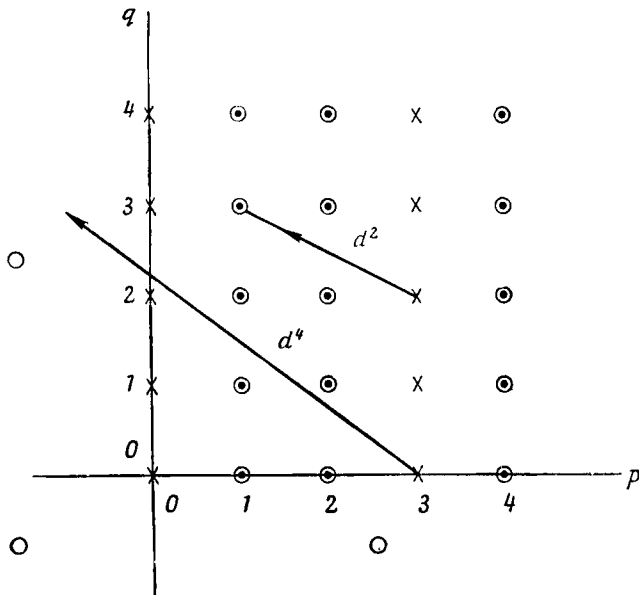
$$\text{Ker} [d^r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r, q+r-1}^r] = E_{p,q}^r, \quad (5.5)$$

поскольку $E_{p+r, q-r+1}^r$ и $E_{p-r, q+r-1}^r$ — оба из первого квадранта и поэтому обращаются в нуль. Таким образом, при $r > \max(p, q+1)$ получаем $E_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^r / \{0\}$, и поэтому

$$E_{p,q}^r = E_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^{r+2} = \dots \equiv E_{p,q}^\infty; \quad (5.6)$$

так определяется $E_{p,q}^\infty$.

Обычно в приложениях сначала доказывают существование спектральной последовательности, а затем уже вычисляют E^∞ , используя E^r в качестве последовательных приближений. Расчет очень прост в случае, когда E^2 имеет только два столбца, т. е. $E_{p,q}^2 = 0$ при $p \neq 0, k$. Поскольку при $r \neq k$ имеют место (5.4) и (5.5), сразу получаем [ср. с (5.6)], что $E^2 = E^3 = \dots = E^k$ и



Фиг. 41. Спектральные последовательности для случая, когда $E_{p,q}^2$ имеет только два столбца; $p = 0, 3$.

$E^{k+1} = E^{k+2} = \dots = E^\infty$. Это следует из того, что $E_{p+r, q-r+1}^r$ и $E_{p-r, q+r-1}^r$ даже в первом квадранте обращаются в нуль при $r \neq k$. Последнее проиллюстрировано на фиг. 41 для $k=3$. В этом случае из определения (E^r, d^r) следует точность последовательности

$$0 \rightarrow E_{k,q}^\infty \rightarrow E_{k,q}^2 \xrightarrow{d^k} E_{0,q+k-1}^2 \rightarrow E_{0,q+k-1}^\infty \rightarrow 0. \quad (5.7)$$

Рассмотрим теперь бегло гомологию расслоенного пространства. Введем сначала вариант сингулярной гомологии, описанной в § 4 этой главы, а именно кубическую сингулярную гомологию. Непрерывное отображение u n -куба I^n в пространство X называется n -кубическим симплексом (n -кубом); положение точки в X задается функцией $u(t_1, \dots, t_n)$, где $t_i \in I^n$ при

$1 \leq i \leq n$. Группа Q_n для n -цепей образована из формальных линейных комбинаций симплексов, как в теории симплициальных гомологий (а не из композиций их, как в теории гомологий). Пусть u^n будет n -кубом, тогда du^n будет $(n-1)$ -кубом и $\partial\partial=0$. Группы кубических гомологий¹⁾

$$H_n(X) = \frac{\text{Ker}[\partial: \tilde{Q}_n \rightarrow \tilde{Q}_{n-1}]}{\text{Im}[\partial: \tilde{Q}_{n+1} \rightarrow \tilde{Q}_n]}$$

всегда совпадают с группами симплициальных сингулярных гомологий из § 3 этой главы. Пусть X — расслоенное пространство со слоем F , базой B и проекцией $\pi: X \rightarrow B$. Говорят, что n -куб u на X имеет вес p [$\omega(u) = p$], если отображение $\pi \cdot u: I^n \rightarrow B$ не зависит от последних p координат, т. е. точка $u(t_1, \dots, t_n)$ остается внутри одного и того же слоя при неизменных t_{p+1}, \dots, t_n ; при изменении их точка переходит из слоя в слой.

Опишем теперь структуру спектральной последовательности, связывающей $H(B)$, $H(F)$ и $H(X)$. Пусть $A_{p,q}$ — множество $(p+q)$ -цепей на X , таких, что $\omega(u) \leq p$. Поскольку $0 \leq \omega(u) \leq \dim(u)$, положим $A_{p,q} = 0$ при $p < 0$ и $A_{p,q} = Q_{p+q}$ при $p \geq -q \geq 0$. Заметим, что $\partial A_{p,q} \subset A_{p,q-1}$ [словами: граница $(p+q)$ -цепи с весом, меньшим или равным p , сама является $(p+q-1)$ -цепью с весом, меньшим или равным p]. Введем определения

$$B_{p,q}^r = \{u \mid u \in A_{p,q}, u = \partial v, v \in A_{p+r, q+1-r}\}, \quad (5.8)$$

$$C_{p,q}^r = \{u \mid u \in A_{p,q}, \partial u \in A_{p-r, q+r-1}\} \quad (5.9)$$

и с их помощью найдем следующую последовательность включений:

$$\begin{aligned} B_{p,q}^0 &\subset B_{p,q}^1 \subset \dots \subset B_{p,q}^{q+1} = B_{p,q}^{q+2} = \dots \equiv B_{p,q}^\infty \subset \\ &\subset C_{p,q}^\infty \equiv \dots \equiv C_{p,q}^{p+1} = C_{p,q}^p \subset C_{p,q}^{p-1} \subset \dots \subset C_{p,q}^0 = A_{p,q}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Элементы формул от (5.8) до (5.10) можно выразить словами: $B_{p,q}^\infty$ — множество $(p+q)$ -границ с весом, меньшим или равным единице; $C_{p,q}^\infty$ — множество $(p+q)$ -циклов с весом, меньшим или равным p ; $B_{p,q}^r$ — множество таких $(p+q)$ -границ с весом, меньшим или равным p , которые являются границами цепей с весом, меньшим или равным $p+q$; $C_{p,q}^r$ — множество $(p+q)$ -цепей, чьи границы (не обязательно нулевые) имеют вес, меньший или

¹⁾ Группы кубических гомологий образованы только из невырожденных n -кубов Q_n , т. е. таких, для которых в функции $u(t_i)$ изменяются все t_1, \dots, t_n .

равный $p - r$. Отметим, что $B_{p,q}^r = \partial C_{p+r, q-r+1}^r$. Для элементов спектральной последовательности имеем

$$E_{p,q}^r = \frac{C_{p,q}^r}{C_{p-1, q+1}^{r-1} + B_{p,q}^{r-1}}.$$

Это означает, что $(p+q)$ -цепи с весом, равным p , границы которых имеют вес $\leq p - r$, являются $(p+q)$ -границами с весом, равным p , которые сами являются границами цепей с весом $\leq p + r - 1$. При $r > \max(p, q+1)$ имеем $E_{p,q}^r = E_{p,q}^{r+1} = \dots = E_{p,q}^\infty$, что описывает «гомологию» $(p+q)$ -цепей с весом p , т. е. «приближения» $E_{p,q}^r$ для $E_{p,q}^\infty$ являются достаточно хорошими при достаточно больших r .

Другим семейством «гомологических групп» для $(p+q)$ -цепей с весом $\leq p$ являются группы

$$D_{p,q} = \frac{C_{p,q}^\infty}{B_{p,q}^\infty},$$

причем

$$E_{p,q}^\infty = \frac{D_{p,q}}{D_{p-1, q+1}}. \quad (5.11)$$

Гомология пространства X описывается группами

$$H_n(X) = D_{n,0},$$

и мы имеем последовательность включений¹⁾

$$0 = D_{-1, n+1} \subset D_{0, n} \subset \dots \subset D_{n-1, 1} \subset D_{n, 0} = H_n(X).$$

Теорема Серра утверждает, что $E_{p,q}^2 = H_p(B) \otimes H_q(F)$ (тензорное произведение²⁾). Из этой теоремы можно получить непосредственное следствие в случае, когда база B — сфера (размерности 2 и более). В этом случае $H_0(B) = H_k(B) = Z$ и $H_i(B) = 0$ для всех других i . Следовательно, E^2 имеет только два столбца:

$$E_{0,q}^2 = E_{k,q}^2 = H_q(F) \otimes Z \cong H_q(F),$$

и для точной последовательности (5.7) мы получим

$$0 \rightarrow E_{k,q}^\infty \rightarrow H_q(F) \xrightarrow{d^k} H_{q+k-1}(F) \rightarrow E_{0, q+k-1}^\infty \rightarrow 0. \quad (5.12)$$

¹⁾ В итоге мы построили группы $A_{p,q}, B_{p,q}, C_{p,q}, D_{p,q}$ и $E_{p,q}^r$ из групп Q_n для того, чтобы рассчитывать $H_i(X)$ из $H_i(B)$ и $H_i(F)$; это, конечно, довольно громоздкая операция.

²⁾ Если U и V — соответственно m - и n -мерные векторные пространства, то произведение $U \otimes V$ есть пространство $(m \times n)$ -тензоров $u \otimes v$, причем $au \otimes bv = ab(u \otimes v)$.

Формула (5.11) принимает вид

$$D_{p,q} = D_{p-1,q+1} \quad \text{для } p \neq k,$$

$$E_{0,q}^\infty = D_{0,q},$$

и, следовательно,

$$E_{k,q}^\infty = \frac{H_{k+q}(X)}{E_{0,k+q}},$$

т. е. последовательность

$$0 \rightarrow E_{0,k+q}^\infty \rightarrow H_{k+q}(X) \rightarrow E_{k,q}^\infty \rightarrow 0 \quad (5.13)$$

точная. Объединяя обе точные последовательности (5.12) и (5.13), приходим к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{k+q}(X) & & & & \\
 & & \downarrow & \cdot & & & \\
 & & & \cdot & \searrow & & \\
 & & & & \cdot & & \\
 & & & & & \cdot & \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & \\
 0 & \rightarrow & E_{k,q}^\infty & \rightarrow & H_q(F) & \rightarrow & H_{k+q-1}(F) \rightarrow E_{0,k+q-1}^\infty \rightarrow 0 \\
 & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & H_{k+q-1}(X)
 \end{array}$$

Из точности сплошных стрелок следует точность пунктирных стрелок, и мы приходим к следующей точной последовательности (Ван):

$$\cdots \rightarrow H_{k+q}(X) \rightarrow H_q(F) \xrightarrow{d^k} H_{k+q-1}(F) \rightarrow H_{k+q-1}(X) \rightarrow \cdots,$$

с помощью которой можно вычислить группы $H_n(X)$ по группам $H_n(F)$. Существует аналогичная последовательность членов $H(B)$ (Гизин) в случае, когда F — сфера. Информация о «кручениях» при получении X из B и F заключена в гомоморфизме d^k , однако во многих случаях можно провести расчеты, не зная d^k в явном виде. В § 4 гл. 6 описано предложенное Федербушем использование спектральных последовательностей для определения H^c в случае трехступенчатых лестничных диаграмм.

§ 7. Категории и функторы

Категорией [43] называется совокупность а) элементов, называемых *объектами* (A, B, \dots), б) элементов, называемых *морфизмами* (f_{AB}, f_{AC}, \dots). Например, в качестве объектов можно взять группы, а в качестве морфизмов — включения.

Потребуем

1) чтобы для каждой пары объектов A, B существовало (по возможности непустое) множество морфизмов (A и B), обозначаемых $\text{hom}(A, B)$;

2) чтобы для каждой тройки объектов A, B, C пара морфизмов $f_{AB} \in \text{hom}(A, B)$ и $f_{BC} \in \text{hom}(B, C)$ определяла некоторый элемент $f_{BC} * f_{AB} \in \text{hom}(A, C)$;

3) чтобы морфизмы были ассоциативны, т. е.

$$f_{CD} * (f_{BC} * f_{AB}) = (f_{CD} * f_{BC}) * f_{AB};$$

4) чтобы для каждого A множество $\text{hom}(A, A)$ содержало элемент 1_A , называемый единицей, для которого при $f_{AB} \in \text{hom}(A, B)$

$$f_{AB} * 1_A = 1_B * f_{AB} = f_{AB}.$$

Функтором T , переводящим категорию \mathcal{C} в категорию \mathcal{D} , называется правило, согласно которому каждому объекту A из \mathcal{C} сопоставляется объект $T(A)$ из \mathcal{D} и каждому морфизму $f_{AB} \in \text{hom}(A, B)$ приписывается морфизм $T(f_{AB})$ так, что

$T(f_{AB})$ лежит в $\text{hom}(T(A), T(B))$ для ковариантного функтора,

$T(f_{AB})$ лежит в $\text{hom}(T(B), T(A))$ для контравариантного функтора,

причем $T(1_A) = 1_{T(A)}$ и

$T(f_{BC} * f_{AB}) = T(f_{BC}) * T(f_{AB})$ для ковариантного функтора,

$T(f_{BC} * f_{AB}) = T(f_{AB}) * T(f_{BC})$ для контравариантного функтора.

В качестве примера функтора рассмотрим для любой категории \mathcal{C} и некоторого объекта X из \mathcal{C} новую категорию $\text{Hom}_X(\mathcal{C})$ с объектами $\text{Hom}_X(A) = \text{hom}(X, A)$ для любых A в \mathcal{C} и морфизмы $\text{Hom}_X(f_{AB})$, переводящие $\text{hom}(X, A)$ в $\text{hom}(X, B)$, согласно правилу $\text{Hom}_X(f_{AB}): f_{XA} \rightarrow f_{AB} * f_{XA}$. Тогда Hom_X будет ковариантным функтором из категории \mathcal{C} в категорию $\text{Hom}_X(\mathcal{C})$. Существует также контравариантный функтор Hom^Y , который для заданного Y в \mathcal{C} переводит \mathcal{C} в категорию, элементами которой являются множества $\text{hom}(A, Y)$ и морфизмы $\text{Hom}^Y(f_{AB})$ приписывают элементу f_{BY} из объекта $\text{hom}(B, Y)$ элемент $f_{BY} * f_{AB}$ из объекта $\text{hom}(A, Y)$. Короче говоря, $\text{Hom}(X, Y)$ — функтор, контравариантный по его первому аргументу (при фиксированном втором аргументе) и ковариантный по его второму аргументу (при фиксированном первом аргументе).

В качестве второго примера рассмотрим категорию \mathcal{C} , объект которой есть абелевы градуированные дифференциальные группы $[A = \sum A_n, d: A_n \rightarrow A_{n-1}, d^2 = 0]$ и морфизмы которой

есть цепные отображения $[f: A \rightarrow B; df = [d]]$. Тогда гомология H будет функтором из \mathcal{C} в категорию абелевых градуированных групп, причем

$$H: A = \sum A_n \rightarrow H(A) = \sum H(A_n) = \frac{\sum \text{Ker}[d: A_n \rightarrow A_{n-1}]}{\text{Im}[d: A_{n+1} \rightarrow A_n]}.$$

Здесь $H(f)$ — отображение для $H(A)$ в $H(B)$ (рассматриваемое в теореме 2.4), индуцированное f .

Понятия, определенные выше, оказываются очень удобными во многих разделах математики; в разделе, называемом гомологической алгеброй, в настоящее время ведутся широкие исследования специальных функторов и категорий.

§ 8. Пучки

Наш обзор важных понятий современной математики мы закончим рассмотрением *пучков* [44, 45]¹⁾, которые служат полезным инструментом при установлении связи между локальными и глобальными свойствами. В качестве примера применения понятия пучков рассмотрим теорему де Рама.

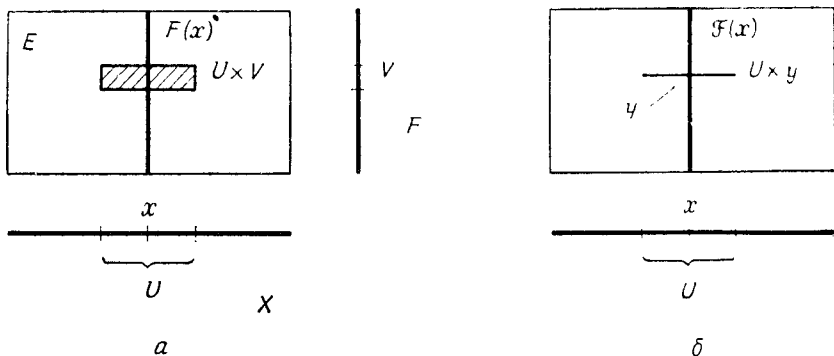
Пространство \mathcal{F} называется пучком над базисным пространством X , если существует непрерывное отображение $p: \mathcal{F} \rightarrow X$ (называемое проекцией), которое локально является гомеоморфизмом. Для $x \in X$ множество $p^{-1}(x) = \mathcal{F}(x)$ называется слоем над x .

Локальные множества для пучка \mathcal{F} являются произведениями точек из $\mathcal{F}(x)$ на открытые множества из X , содержащие точку x (это вытекает из требования, что p — локальный гомеоморфизм). С другой стороны, для пространства E с послойным отображением открытые множества E локально являются произведениями открытых множеств в слое F и открытых множеств из базы X . На фиг. 42, а заштрихованная область $U \times V$ означает открытое множество из пространства E с послойным отображением над X со слоем F . На фиг. 42, б открытым множеством пучка \mathcal{F} над X является линейный сегмент $U \times y$, где $y \in \mathcal{F}(x)$. Слои $\mathcal{F}(x)$ пучка (все) могут быть множествами (пучками множеств), группами (пучками групп) и т. д.; не требуется, чтобы множества были гомеоморфными, а группы — изоморфными.

Пучок в общем случае определяется предпучком. Предпучком множество, групп и т. д. над пространством X называется совокупность $\{\mathcal{F}(U)\}$ множеств, групп и т. д. по одному (или

¹⁾ См. также: Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2-е изд., М., 1963. — *Прим. перев.*

одной) на каждую открытую окрестность U каждой точки в X вместе с совокупностью отображений r_U^V , называемых отображениями ограничения и переводящих $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$, если $U \subset V$. Отображения ограничения должны удовлетворять двум условиям: 1) r_U^U является тождественным отображением; 2) $r_U^V r_V^W = r_U^W$ для $U \subset V \subset W$. Предпучок определяет пучок следующим образом (прямой предел): если $U \subset V$, $\alpha_U \in \mathcal{F}(U)$ и



Фиг. 42. а — расслоение, б — пучок.

$\alpha_V \in \mathcal{F}(V)$, то будем говорить, что α_U эквивалентно α_V ($\alpha_U \sim \alpha_V$), когда $r_U^V \alpha_V = \alpha_U$. Элемент α_x из $\mathcal{F}(x)$, определяемый элементом α_U из $\mathcal{F}(U)$ (где U — открытая окрестность точки x), является множеством всех таких α_V , для которых x лежит в V и α_V эквивалентно α_U ; α_x называется *ростком* α_U . Короче говоря,

$$\alpha_x(\alpha_U) = \{\alpha_V \mid x \in V, \alpha_V \in \mathcal{F}(V), \alpha_V \sim \alpha_U\},$$

$$\mathcal{F}(x) = \{\alpha_x(\alpha_U) \mid x \in U, \alpha_U \in \mathcal{F}(U)\}.$$

Два предпучка могут определять один и тот же пучок.

С другой стороны, пучок определяет канонический предпучок. Если $U \subset X$, то сечение s для U является таким непрерывным отображением из U в \mathcal{F} , для которого $p(s(x)) = x$. По каждому пучку мы можем построить канонический предпучок, для которого $\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F})$ [где $\Gamma(U, \mathcal{F})$ — совокупность всех сечений для U] и отображения r_U^V , $U \subset V$ приписывают сечению s для V его ограничение в U [т. е. $(r_U^V s)(x) = s(x)$, где $x \in U \subset V$].

Пример 1 (простой пучок над X). Пусть $\mathcal{F} = X \times Y$ (где Y — множество, группа и т. д.). Открытыми множествами семейства \mathcal{F} будут $U \times y$ (U открыто в X , y лежит в Y). Если $\alpha = (x, y)$, то $p(\alpha) = x$ (на языке пространств с посылками

отображениями пространство \mathcal{F} распадается в произведение слоев, обладающих дискретной топологией — каждое множество есть открытое множество). \mathcal{F} определяется предпучком, для которого $\mathcal{F}(U) = Y$ для любой окрестности U . Отображения ограничения r_U^V переводят $\alpha_V = y \in \mathcal{F}(V) = Y$ в $\alpha_U = y \in \mathcal{F}(U) = Y$, т. е. r_U^V равно тождественному отображению. $\mathcal{F}(U) = Y$ также является множеством всех сечений над U , поскольку все сечения должны быть постоянными, чтобы они могли быть непрерывными. Для понимания этого напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, если для любого открытого множества $U \subset Y$ окрестность $U = \{x \in X \mid f(x) \in U\}$ открыта в X . В настоящем случае точка $y \in Y$ является открытым множеством, так что $\{x \mid f(x) = y\}$ должно быть открыто в X . Следовательно, пока X нельзя записать как сумму не взаимодействующих открытых множеств, сечение s должно быть постоянным. Указанное свойство частично можно перенести и на рассматриваемые пучки; если два сечения совпадают в точке x , то они совпадают в некоторой окрестности x .

Пример 2 (пучок ростков непрерывных действительных функций, заданных в пространстве X). Предпучок имеет в качестве $\mathcal{F}(U)$ множество непрерывных действительных функций для U ; $\mathcal{F}(U)$ — кольцо, поскольку непрерывные функции можно складывать и перемножать. Элементами $\mathcal{F}(x)$ будут ростки непрерывных функций (т. е. если f — функция, непрерывная в точке x , то $\alpha_f \in \mathcal{F}(x)$ будет совокупностью всех функций, непрерывных в точке x , которые совпадают с f в некоторой окрестности точки x). Сечением в $\Gamma(V, \mathcal{F})$ будет функция, непрерывная на V .

Пример 3 (пучок ξ^p ростков дифференциальных p -форм для некоторого многообразия). Для предпучка в качестве $\mathcal{F}(U)$ будут использованы дифференциальные p -формы на U и т. д.

В качестве примера применения понятия пучка мы остановимся в общих чертах на определении обобщенной когомологии Чеха с коэффициентами в пучке, а затем изложим основные пункты доказательства теоремы де Рама [34, 46].

Пусть $\mathcal{F}(U)$ — предпучок абелевых групп над X , связанный с пучком \mathcal{F} . Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}$ будет открытым покрытием X и $K_{\mathcal{U}}$ будет нервом \mathcal{U} (см. § 4, «г»). Определим тогда коцепь f , как правило, приписывающее каждому симплексу $\langle U_{i_0}, \dots, U_{i_p} \rangle$ в $K_{\mathcal{U}}$ элемент $\mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p})$. Поскольку $\mathcal{F}(U)$ не является идентичным, отображение f не будет отображением из $K_{\mathcal{U}}$ в фиксированную группу коэффициентов, как и в § 4. Исторически понятие пучка в определенной степени возникло из понятия локальных коэффициентов для групп гомологии и кого-

мологий. Кограничный оператор δ определяется следующим образом:

$$\delta f(\langle U_{i_0}, \dots, U_{i_{p+1}} \rangle) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k r_{\mathbb{W}^k} f(\langle U_{i_0}, \dots, \hat{U}_{i_k}, \dots, U_{i_{p+1}} \rangle),$$

где

$$\mathbb{W} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}} \quad \mathbb{W}^k = U_{i_0} \cap \dots \cap \hat{U}_{i_k} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}$$

и где $r_{\mathbb{W}^k}$ — определенное выше отображение ограничения. Как обычно, $\delta\delta=0$, и мы можем определить $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ и их отношения $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Совершая (третий) предельный переход, когда покрытие \mathcal{U} становится все мельче и мельче, мы получаем p -ю группу когомологий для X с коэффициентами в пучке \mathcal{F} , т. е. группу $H^p(X, \mathcal{F})$. Если все $\mathcal{F}(U)$ идентичны, то \mathcal{F} — постоянный пучок и $H^p(X, \mathcal{F})$ задают когомологию Чеха из § 4. Поучительный пример неидентичного $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ дает $\mathcal{F} = \xi^q$; получается когомология с коэффициентами в пучке дифференциальных q -форм над X .

Когомологической резольвентой пучка \mathcal{F} над X называется любая точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{h_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{h_1} \dots,$$

где \mathcal{F}_i над X и $H^p(x, \mathcal{F}_i) = 0$ при $p \geq 1$, $i \geq 0$. Гомоморфизм пучка \mathcal{F} в пучок \mathcal{F} над одним и тем же пространством X определяется как гомоморфизм $\mathcal{F}(U)$ в $\mathcal{F}(U)$ для любого U . С помощью точной последовательности можно получить (теорема Серра)

$$H^p(X, \mathcal{F}) = \frac{\text{Ker} \{h_p^x: \Gamma(X, \mathcal{F}_p) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}_{p+1})\}}{\text{Im} \{h_{p-1}^x: \Gamma(X, \mathcal{F}_{p-1}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}_p)\}}. \quad (5.14)$$

Чтобы доказать теорему де Рама о том, что обычная когомология Чеха (т. е. симплициальная когомология) является когомологией де Рама на многообразии M , нужно показать, что последовательность пучков ξ^q , *ростков* дифференциальных q -форм над M , дает резольвенту простого пучка, причем $\mathcal{F}(x) = R$ над M . Тогда правая часть (5.14) в точности окажется когомологией де Рама, а левая часть даст обычную когомологию Чеха.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В заключение остановимся на двух важных теоремах и одном преобразовании, необходимых для приложений, описанных в гл. 3 и 4. Теорема об окружающей изотопии (§ 1) позволяет указать класс интегралов, к которым применимы полученные там результаты. Процедура перехода к компактному окружающему пространству и компактному циклу интегрирования (так называемая процедура компактификации), излагаемая в § 2, касается преобразования фейнмановских интегралов и интегралов унитарности к стандартному виду. Теорема о разложении (§ 3) дает в наши руки метод для расчета компактных гомологических групп. Наконец в § 4 мы описываем направления развития исследований в рассматриваемой области.

§ 1. Теорема об окружающей изотопии

Теорема об окружающей изотопии указывает точные условия, при которых интеграл (4.85) определяет аналитическую функцию (т. е. когда для него можно использовать результаты гл. 4).

Теорема Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама [34]¹⁾. Интеграл

$$I(t_0) = \int_{\Gamma} \frac{\omega(t_0)}{\prod_i S_i(t_0)} \quad (6.1)$$

определяет в точке t_0 элемент аналитической функции, который можно продолжить вдоль любого пути на комплексном асимптотическом многообразии (в пространстве параметров) T' , если

а) для каждого $t \in T'$ множества $S_i(t) = \{x | S_i(t, x) = 0\}$ замкнутые аналитические подмножества n -мерного комплексного многообразия X , аналитически зависящие от t ;

б) $\omega(t)$ — регулярная n -форма на X , голоморфная при $t \in T'$;

в) $\Gamma \subset X - \bigcup_i S_i(t_0)$ является комплексным n -мерным циклом;

г) X компактно и $S_i(t)$ занимают общее положение для всех $t \in T'$.

¹⁾ См. дополнение 1. — Прим. перев.

Фотиади и др. доказали эту теорему при более слабом предположении, чем г), наше предположение г) достаточно, однако, для большинства приложений.

Пространство X называется окружающим для многообразий $S_i(t)$, которые перемещаются в X при изменениях t . Гомеоморфизм $g_{01}: X \rightarrow X$, который переводит $S(t_0) = \bigcup_i S_i(t_0)$ в $S(t_1)$,

называется окружающей изотопией, если поверхности S можно перевести от $S(t_0) \subset X$ к $S(t_1) \subset X$ без сминания. (Например, отражение в начале координат четно-мерной сферы $S^n \subset X = R^{n+1}$ не будет окружающей изотопией.) Точнее окружающей изотопией называется гомеоморфизм $g_{01}: X \rightarrow X$, если существует такой гомеоморфизм $g: X \times I \rightarrow X \times I$ (где $I = [t_0, t_1]$), для которого $g(S(t_0), t) = (S(t), t)$, причем g называется реализацией окружающей изотопии g_{01} . Так как g — гомеоморфизм, то окружающая изотопия g_{01} индуцирует следующие изоморфизмы компактных гомологических групп:

$$\begin{aligned} g_{01}^*: H_q^C(X) &\cong H_q^C(X); \\ H_q^C(X - S(t_0)) &\cong H_q^C(X - S(t_1)); \\ H_q^C(S(t_0)) &\cong H_q^C(S(t_1)). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из условий а) и б) следует, что каждый путь $[t_0, t_1]$ в T' определяет окружающую изотопию g_{01} в X . Аналитическим продолжением интеграла (6.1) является тогда интеграл

$$I(t) = \int_{\Gamma(t)} \frac{\omega(t)}{\prod S_i(t)}, \quad (6.3)$$

где $\Gamma(t)$ — любой представляющий цикл из класса $H_n^C(X - S(t))$, определяемого как образ при g_{0t}^* класса $H_n^C(X - S(t_0))$, причем $\Gamma(t_0) = \Gamma$. Важно отметить, что два гомотопических пути из t_0 в t_1 приводят к одному и тому же изоморфизму g_{01}^* компактных групп гомологий и дают одно и то же аналитическое продолжение $I(t)$.

Рассмотрим элемент f первой гомотопической группы из T' — группы $\pi_1(T', t_0)$. Все замкнутые кривые для f в классе эквивалентности f определяют один и тот же изоморфизм $f^*: H_q^C(X - S(t_0)) \rightarrow H_q^C(X - S(t_0))$. Таким образом, действие f на $H_q^C(X - S(t_0))$ хорошо известно. Короче говоря, мы имеем представление гомотопической группы $\pi_1(T, t_0)$ операторами групп компактных гомологий $H_q^C(X - S(t_0))$. Сравнивая с § 6 гл. 3, мы видим, что к теореме Пикара — Лефшеца можно прийти, характеризуя указанное представление индексами Кронекера.

В общем случае нам даны $\omega(t)$ и $S_i(t)$ для t в T (где $T \supset T'$) и требуется найти множество точек $L = T - T'$, в которых S_i занимают необщее положение. Для t из $T' = T - L$ мы должны найти компактную гомологию для пространства $X - \bigcup_i S_i(t)$. После этого нужно вычислить представление группы $\pi_1(T - L)$ в $H^c(X - S)$, где $S = \bigcup_i S_i(t)$. Затем нужно определить сингуляр-

ности и структуру римановой поверхности аналитического продолжения $I(t)$ для $I(t_0)$ из (6.1). Связь между фундаментальной группой T' и кронекеровскими индексами (см. гл. 3) изучалась Фотиади и Фамом¹⁾. Элемент α_i из подгруппы π_1 , описывающий замкнутый контур, окружающий поверхность сингулярностей L_i , и элемент β_j , описывающий замкнутый контур, окружающий поверхность сингулярностей L_j , коммутируют, если L_i и L_j пересекаются в общем положении. Следовательно, в этом случае оба кронекеровских индекса $KI[e_i, \delta^j \delta^j e_j]$ и $KI[e_j, \delta^i \delta^i e_i]$ равны нулю. Если L_i и L_j встречаются в необщем положении, то α_i и β_j не могут коммутировать, и один из указанных кронекеровских индексов, скажем $KI[e_i, \delta^j \delta^j e_j]$, не будет равен нулю. В этом случае Фам [17] тщательным образом описал группу $\pi_1(T - L)$ и ее действие в $H^c(X - S)$, когда $(^m)S$ — сферы. Он рассмотрел также указанную задачу для ключов на ландаувской кривой. В его вычислениях группы π_1 пространство $T - L$ рассматривается как некоторое расслоенное пространство и применяется точная гомотопическая последовательность для такого пространства (см. § 5 гл. 5). Фам обнаружил интересный факт, что группу π_1 можно рассчитать, зная только форму L ; если же группа π_1 известна, то это уже дает очень большую информацию относительно кронекеровских индексов еще до вычисления действия π_1 в H^c .

В рассмотренном в § 7 гл. 3 примере с интегралом унитарности поверхность L_{12} разбивалась на части с помощью L_1 и результаты для кронекеровских индексов относились только к одной из получаемых частей L_{12} .

Определение, какая из двух частей сингулярна на физическом листе, т. е. сингулярна при достижении ее из t_0 без обхода L_1 , является самостоятельной геометрической проблемой. Эта проблема одинаково возникает как в классическом, так и в гомологическом подходе; если ее удастся разрешить, то после этого легко определить сингулярности на всех других листах,

¹⁾ К моменту написания книги авторами эта работа не была закончена и частично опубликована на правах черновой рукописи в виде приложения к американскому изданию. — *Прим. перев.*

рассчитывая кронекеровские индексы, как в гл. 3. Отметим, что указанная проблема бросает интригующий вызов гомологическому методу.

§ 2. Процедура компактификации

Будем говорить, что интеграл $I(t)$ в виде (6.1) при выполнении условий а) — г) представлен в стандартном виде. Фейнмановский интеграл в общем случае не имеет стандартной формы по крайней мере по двум причинам. Действительно, допустим, что после некоторого преобразования импульсы петель изменяются в евклидовом (не лоренцевском) 4-пространстве, и фейнмановский интеграл принимает вид

$$\int_{\text{Действ. } k} d^4k \frac{1}{\prod_i S_i(t, k)}. \quad (6.4)$$

Тогда окружающим пространством, в котором движутся $S_i(t)$, является пространство \mathcal{C}^4 , и оно не компактно. Далее, цикл интегрирования — это $R^4 \subset \mathcal{C}^4$; он также не компактный. Тем не менее Фотиади, Фруассар, Ласку и Фам [34] указали такое преобразование интеграла (6.4), после которого окружающее пространство и цикл интегрирования становятся компактными. Преобразование заключается в следующем: сначала погрузим R^4 в $R^5 - \{0\}$, сопоставляя точке $x \in R^4$ точку $x = (x, 1) \in R^5$; затем рассмотрим преобразование R^5 , переводящее $(x, 1)$ в $2(x^2 + 1)^{-1}(x, 1)$. При этом R^4 отображается в такие точки (x, x_5) из R^5 , для которых

$$2x_5 = x^2 + x_5^2, \quad (6.5)$$

т. е. $x^2 + (x_5 - 1)^2 = 1$. Цикл интегрирования, которым является R^4 , оказывается таким образом действительной сферой в R^5 , а всякая сфера, конечно, компактна. Чтобы добиться компактности, следует единственную точку, а именно начало в R^5 , добавить к образу R^4 . Вместе с тем окружающее пространство \mathcal{C}^4 является теперь компактной четырехмерной сферой $\bar{\Sigma}^4$ в \mathcal{C}^5 и поэтому не будет компактным; необходимо погрузить его в пятимерное проективное пространство.

Дадим сначала определение проективного пространства [28]. Пусть V_{n+1} есть $(n+1)$ -мерное векторное пространство. Точкой в n -мерном проективном пространстве P^n называется одномерное подпространство, т. е. линия в пространстве V_{n+1} . Если (x_1, \dots, x_{n+1}) — координаты точки p в V_{n+1} , то они соответствуют линии в V_{n+1} , проходящей через начало координат и точку p . Для любого $c \neq 0$ все координаты (cx_1, \dots, cx_{n+1}) являются координатами одной и той же точки в P^n . Указанные

координаты называются однородными. Для каждой точки (x_1, \dots, x_{n+1}) в P^n (если $x_{n+1} \neq 0$) в качестве координат мы можем взять $(x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1}, 1)$, затем опустить единицу и просто писать $(x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1})$. Полученные координаты называются неоднородными. Гиперплоскость P^{n-1} — это подпространство в P^n , задаваемое в однородных координатах уравнением $a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1} = 0$, когда не все a_i равны нулю. Если, скажем, только a_{n+1} не нули, то гиперплоскость $P^{n-1} = \{(x_i) | x_{n+1} = 0\}$ называется в P^n бесконечно удаленной. Пространство P^n компактно; грубо говоря, оно отличается от R^n бесконечно удаленной гиперплоскостью. Если x_i — действительные (комплексные) числа, пространство P^n называется действительным (комплексным) проективным n -пространством.

Возвратимся к описанию процедуры перехода к компактному окружающему пространству. Сперва мы проведем сдвиг \mathcal{C}^5 на единицу вдоль оси x_5 , после чего начало координат совместится с центром сферы $\bar{\Sigma}^4$, в которую было отображено пространство \mathcal{C}^4 . Затем погрузим \mathcal{C}^5 в комплексное пятимерное проективное пространство \bar{P}^5 с помощью отображения

$$(x, x_5) \in \mathcal{C}^5 \rightarrow (x, x_5, 1) \in \bar{P}^5. \quad (6.6)$$

Таким образом, замыкание образа $\bar{\Sigma}^4$ оказывается новым окружающим пространством, которое в однородных координатах дается множеством $X = \{(x, x_5, x_6) | x^2 + x_5^2 = x_6^2\} \subset \bar{P}^5$, причем пространство X компактно. В результате обоих отображений (6.5) и (6.6) k из \mathcal{C}^4 переходит (в однородных координатах) в

$$x = (2k, 1 - k^2, 1 + k^2) \quad (6.7)$$

из \bar{P}^5 . Фейнмановские знаменатели в (6.4) имеют вид $S_i(t, k) = (a_i(t) + k)^2 - m_i^2$. Подмножества $S_i(t)$, т. е. множества $\{k | S_i(t, k) = 0\}$, оказываются плоскостями в \bar{P}^5 (в случае единственной петли все знаменатели имеют указанный вид); в явном виде

$$S_i(t, k) \rightarrow S_i(t, x) = \frac{x \cdot A}{x_5 + x_6}, \quad (6.8)$$

где $A = (2a_i(t), a_i^2(t) - m_i^2 - 1, a_i^2(t) - m_i^2 + 1)$. С помощью (6.7) можно проверить, что $S_i(t, x(k)) = S_i(t, k)$ для всех k . Очевидно, что в (6.8) должен входить знаменатель, линейный по компонентам x , поскольку мы используем однородные координаты, в которых x и cx ($c \neq 0$) описывают одну и ту же точку. Аналогично на x

$$d^4 k \rightarrow \left(\frac{1}{x_5 + x_6} \right)^4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \quad (6.9)$$

Из (6.8) и (6.9) мы видим, что, если имеется менее четырех фейнмановских знаменателей на k -петлю (например, для диаграммы нормального порога или треугольной диаграммы, которые являются диаграммами с одной петлей), поверхность S_0 , задаваемая в X уравнением $x_5 + x_6 = 0$, будет сингулярной. Сингулярности, возникающие при необщем положении S_0 и S_i , служат примерами сингулярностей второго типа из § 6 гл. 1. При нашем подходе они, оказывается, не зависят от внутренних масс, так как из $x_5 = -x_6$ следует, что $x \cdot A$ не зависит от m^2 . Фотиади и Фам¹⁾ подчеркивают, что название «неландаувские» или «второго типа» для указанных сингулярностей может привести к путанице, поскольку они получаются при простом пинче в точности так же, как другие рассматриваемые сингулярности.

Процедура компактификации не однозначна. Так, Итайксон использовал более простую альтернативу:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^4 &\rightarrow \text{парабола} \subset \mathbb{C}^5 \rightarrow p^5, \\ k &\rightarrow (k, k^2, 1) = (\alpha k, \alpha k^2, \alpha) = (x, x_5, x_6), \end{aligned}$$

где $x^2 = x_5 x_6$. К тому же не ясно, приведут ли различные указанные процедуры к одним и тем же компактным гомологическим группам.

В связи с задачей придания фейнмановскому интегралу стандартного вида следует заметить (на это также указали Фотиади и Фам), что в определении фейнмановского интеграла для случая более одной петли существует неоднозначность. Например, при наличии двух импульсов петель k и q можно $d^4 k d^4 q$ интерпретировать либо как $d^3 k d^3 q d k_0 d q_0$, либо как $d^3 k d k_0 d^3 q d q_0$. Обе интерпретации после поворота путей в энергетических интегралах ведут к определению «фейнмановского интеграла» на двух разных листах. В этом направлении необходимы дальнейшие исследования.

§ 3. Теорема о разложении

Изучая кограничный оператор Лере, в гл. 3 мы видели, что для каждого компактного цикла e для $(^m)S \cap X$ имеется соответствующий цикл в $H^c(X - S)$. Фруассар [34] показал, что все циклы в $H^c(X - S)$ оказываются такими соответствующими циклами.

Теорема. Пусть S_i при $i=1, \dots, v+1$ и S^j — два конечных семейства компактных комплексных аналитических $(n-1)$ -мерных подмногообразий, занимающих общее положение в комплексном проективном n -пространстве \bar{P}^n . Пусть S_{v+1} — гипер-

¹⁾ См. примечание на стр. 132.

плоскость, которую можно идентифицировать с бесконечно удаленной гиперплоскостью

$$S_{v+1} = \bar{P}_\infty^{-1} = \bar{P}^n - \mathcal{C}^n.$$

Пусть $X = \bar{P}^n \cap \left(\bigcap_I S^j \right)$ и $Y = \mathcal{C}^n \cap \left(\bigcap_I S^j \right)$.

Тогда

$$\begin{aligned} H_q^C \left(X - \bigcup_{i=1}^{v+1} S_i \right) &= H_q^C \left(Y - \bigcup_{i=1}^v S_i \right) = \\ &= \bigoplus_{h \in (1, \dots, v)} \delta^h H_{q-1, h}^C \left(Y \cap \left(\bigcap_h S_i \right) \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

или, расписывая правую часть (6.10) в явном виде, имеем

$$H_q^C(Y) \oplus \sum_{i=1}^v \delta^i H_{q-1}^C(Y \cap S_i) \oplus \sum_{i < j} \delta^i \delta^j H_{q-2}^C(Y \cap S_i \cap S_j) \oplus \dots$$

В качестве примера рассчитаем компактные гомологические группы для интеграла унитарности из § 7 гл. 3. Прежде всего возьмем в качестве $Y = \bar{\Sigma}^2 = Q$ комплексную 2-сферу и пусть $v=3$, причем S_1, S_2, S_3 — плоскости сингулярностей в интеграле (3.15). Тогда группа $H_2^C(Q - S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ порождается следующими циклами:

$$\Gamma, \delta^1 e^1, \delta^2 e^2, \delta^3 e^3, \delta^{12} O^{12}, \delta^{12} O^{21}, \delta^{13} O^{13}, \delta^{13} O^{31}, \delta^{23} O^{23}, \delta^{23} O^{32}, \quad (6.11)$$

где Γ — порождающий элемент для $H_2^C(Q)$, e^i — порождающие элементы для $H_1^C(Q \cap S_i)$, а O^{ij} и O^{ji} — пара порождающих элементов для $H_0^C(Q \cap S_i \cap S_j)$. Заметим, что в теорему Пикара — Лефшеца O^{ij} и O^{ji} входят только в комбинациях $e^{ij} = O^{ij} - O^{ji}$ [мы воспользовались тем, что $H_q^C(\Sigma^p) = Z$ при $p \neq 0$ и $q = p$, 0; $H_q^C(\Sigma^p) = Z \times Z$ при $q = p = 0$; $H_q^C(\Sigma^p) = 0$ в противном случае; Σ^p является p -сферой].

С другой стороны, Q некомпактно и интеграл (3.21) не имеет стандартной формы. Поэтому погрузим Q в \bar{P}^3 в точности так, как мы погрузили Σ^4 в \bar{P}^5 в предыдущем параграфе. Никакой бесконечно удаленной поверхности сингулярностей вводить при этом не нужно, ибо знаменателей больше, чем дифференциалов. Мы можем далее идентифицировать S_3 с бесконечно удаленной гиперповерхностью и X с \bar{Q} , где \bar{Q} получается из Q путем процедуры компактификации. Отыскивая с помощью (6.10) порождающие элементы для $H_2^C(\bar{Q} - S_1 \cup S_2 \cup S_3)$, получаем

$$\Gamma, \delta^1 e^1, \delta^2 e^2, \delta^{12} O^{12}, \delta^{12} O^{21}. \quad (6.12)$$

Десять порождающих элементов (6.11) сводятся к пяти порождающим элементам (6.12), если рассмотреть для обеих систем элементов кронекеровские индексы с исчезающими циклами e_i, e_{ij}, e_{123} , где $i \neq j$ и $i, j = 1, 2, 3$. Тогда шесть ненулевых скачков на разрезах при окружении поверхностей сингулярностей L_i, L_{ij} можно записать через интегралы по результирующим четырём циклам (6.12) или с помощью другой подходящей системы четырёх независимых порождающих элементов для H_2^C . Конечно, можно применить теорему о вычетах [см. (4.8)]. Циклы $\delta^{12}e^{12}$, $\delta^{13}e^{13}$ и $\delta^{23}e^{23}$ оказываются независимыми, так что шесть разрезов на скачках можно записать с помощью трёх функций и однократного интеграла.

§ 4. Заключение

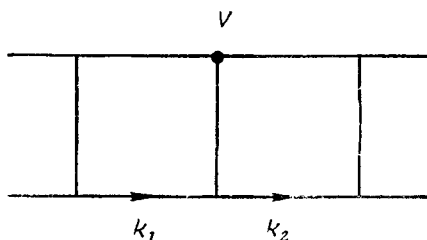
Перечислим основные достижения гомологического метода к настоящему времени.

1. С его помощью воспроизведены классические результаты для диаграмм с одной петлей¹⁾; это рассмотрение аналогично приведенному для интеграла унитарности в § 7 гл. 3. Стоит отметить, что Фотиади и Фам работают с компонентами 4-импульсов. Из теоремы Холла — Вайтмана следует, что при переходе к инвариантам $(p_i + p_j)^2$ не появляется никаких дополнительных особенностей.

2. Теорему Пикара — Лефшеца легко обобщить на случай, когда интегрирование проводится по относительно (компактному) циклу [17]. Это обобщение позволяет применять гомологическую технику к рассмотрению фейнмановских интегралов в параметризованной форме, когда $\Gamma = \{\alpha_i \mid \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$. Фам [17] указал также обобщения теоремы на более сложные случаи, чем квадратичные пинчи. Последние позволяют рассматривать подынтегральные выражения с точками ветвления, которые появляются, например, в интегралах унитарности. Более того, Фам рассчитал гомологию для ${}^{(m)}S = \left\{ \xi_i \mid \sum_{i=m+1}^l \xi_i^v = t \right\}$ через v_i . Если v_i не все равны двум (т. е. если S_i не все сферы), то может существовать более одного порождающего элемента; следовательно, возможно большое число независимых пинчей. Еще не ясно, включают ли в себя все эти обобщения самые общие возможные случаи или нет. Никаких приложений приведенных результатов еще не дано.

¹⁾ См. примечание на стр. 132.

3. Совсем другой подход к вопросу об изучении сингулярностей фейнмановских амплитуд состоит в исследовании дифференциальных уравнений для амплитуд A [46]. Его можно связать с рассмотрениями, проводимыми здесь. Действительно, в существовании дифференциального уравнения легко убедиться из того факта, что группы $\pi_1(T)$ имеют конечное число порождающих элементов (скажем, p), рассуждая следующим образом. При $t_0 \in T$ амплитуду $A(t_0)$ на любом листе можно выразить через периоды (см. § 7 гл. 1) или через значения амплитуды $A(t_0)$ на листах $1, \dots, p$. Последние величины обозначим как A_i , где $i=1, \dots, p$. Тогда детерминант $|A_i^{(j)}|$ при $i, j=0, \dots, p$



Фиг. 43. Фейнмановская диаграмма с двумя петлями.

будет нулем (индекс (j) означает j -ю производную и $A_0=A$), так как строка $i=0$ есть линейная комбинация других строк. Разлагая по минорам для этой строки, получаем дифференциальное уравнение с мероморфными коэффициентами, поскольку миноры инвариантны под действием π_1 .

4. Федербушу [26]¹⁾ удалось получить интересные результаты в отношении диаграмм с двумя петлями, применяя мощную вычислительную технику. Он рассмотрел диаграмму с двумя петлями, изображенную на фиг. 43, без наложения закона сохранения энергии — импульса в вертексе V и на четырех внешних линиях; H_8^C получилось равным 126. После упрощения проблемы с помощью должным образом обобщенной теоремы о разложении пространства с искомой гомологией оказывается возможным подвергнуть простым расслоениям (например, сферами) и соответствующие спектральные последовательности позволяют провести вычисления. Применение указанной техники к другим диаграммам не проводилось, и действие π_1 в H_8^C не рассчитывалось. Не делалось также попыток изучения диаграммы с дву-

¹⁾ См. дополнение 2. — Прим. перев.

мя петлями с учетом законов сохранения. Естественно ожидать, что законы сохранения поведут к связям между 126 порождающими элементами, и реальное число порождающих элементов в задаче диаграмм с двумя петлями окажется меньшим.

5. Отметим новый момент, появляющийся в диаграммах с двумя петлями по сравнению с диаграммами с одной петлей. Он заключается в наличии гиперповерхности $S_0 \subset X$, которая сама сингулярна (т. е. смята, см. § 3 гл. 5). Сингулярное алгебраическое многообразие S_0 соответствует фейнмановскому знаменателю для общей линии для обеих петель $(k_1 - k_2)^2 - m^2$ (фиг. 43). Оно сингулярно потому, что линии, соответствующие $k_1 = k_2 \pm m$, пересекаются в бесконечности с плоскостью k_1, k_2 . Федербуш утверждает, что сингулярности (второго типа) для $I(t)$ появляются в интеграле (6.3), когда несингулярные $S_i(t)$ пересекают сингулярную часть $S_0(t)$ в необщем положении. Существует возможность избежать появления сингулярного алгебраического многообразия для $S_0(t)$ путем преобразования $I(t)$ и приведения интеграла к виду, удовлетворяющему условиям теоремы об окружающей изотопии. Такая возможность покоится на теореме Хиронаки [47] о том, что сингулярное алгебраическое подмногообразие S_1 алгебраического многообразия S в пространстве X всегда можно «раздуть», отображая S в новое пространство X' взаимно однозначно для $S' = S_1$ и переводя каждую точку из S_1 в несколько точек в X' (соответственно неэквивалентным направлением подхода). Вествотер [48] подробно изучил процедуру «раздутия» для диаграммы Федербуша. Другая процедура, предложенная Томом [49] и Уитни [50] для работы с сингулярными алгебраическими многообразиями, использовалась Фамом [17]. Она состоит в разложении сингулярного алгебраического многообразия в сумму несингулярных алгебраических многообразий, называемых стратами, и в сравнении тривиального расслоенного пространства, состоящего из произведения окружающего пространства и пространства параметров, с расслоенными подпространствами, определяемыми стратами. Исследование осложнений, вызванных сингулярностями алгебраических многообразий $S_i \subset X$, возможно, наиболее интересная область в настоящее время.

Как мы видим, приложение методов алгебраической топологии в физике элементарных частиц находится еще на первом своем этапе. Создан общий язык и ряд методов, которые зарекомендовали себя в смежных областях. По-видимому, полученные к настоящему времени результаты демонстрируют пока что лишь жизнеспособность гомологического подхода и еще не раскрыли всех его потенциальных возможностей. Можно надеяться, что это произойдет в недалеком будущем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J., Quantum Electrodynamics, New York, 1958.
2. Streater R. F., Wightman A. S., PCT, Spin and Statistics and All That, New York, 1964 (см. перевод: Р. Стритер, А. Вайтман, PCT, спин и статистика и все такое, М., 1966).
3. Chew G. F., S-Matrix Theory of Strong Interactions, New York, 1961.
4. Hadamard J., Acta Math., **22**, 55 (1898).
5. Fox R. H., Spencer D. C., Tucker A. W., Algebraic Geometry and Topology, Princeton, 1957.
6. Lefschetz S., L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique, Paris, 1950.
7. Schweber S. S., An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Evanston, Illinois, 1961 (см. перевод: С. Швeбер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963).
8. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 769 (1949).
9. Jauch J. M., Rohrlich F., Theory of Photons and Electrons, Reading, Massachusetts, 1955 (Appendix A5).
10. Polkinghorne J. C., Screation G. R., Nuovo Cimento, **15**, 289, 925 (1960).
11. Landau L. D., Nucl. Phys., **13**, 181 (1959).
12. Eden R. J., Phys. Rev., **119**, 1763 (1960).
13. Chisholm R., Proc. Camb. Phil. Soc., **48**, 300 (1952).
14. Eden R. J., Polkinghorne J. C., Lectures in Theoretical Physics, New York, 1961.
15. Fowler M., Journ. Math. Phys., **3**, 936 (1962).
16. Cutkosky R. E., Journ. Math. Phys., **1**, 429 (1960).
17. Pham F., Introduction à l'Etude Topologique des Singularités de Landau, Tesis, Paris, 1965.
18. Thom R., Ann. Inst. Fourier, **6**, 43 (1956).
19. Hilton H., Plane Algebraic Curves, Oxford, 1920.
20. Walker R. J., Algebraic Curves, Princeton, 1950 (см. перевод: Р. Уокер, Алгебраические кривые, ИЛ, 1952).
21. Klein F., Math. Ann., **10**, 199, 363 (1876).
22. Eden R. J., Landshoff P. V., Polkinghorne J. C., Taylor J. C., Journ. Math. Phys., **2**, 656 (1961).
23. Mandelstam S., Phys. Rev., **112**, 1344 (1959); **115**, 1741, 1752 (1959).
24. Fowler M., Nuovo Cimento, **27**, 952 (1963).
25. Fairlie D. B., Landshoff P. V., Nuttall J., Polkinghorne J. C., Journ. Math. Phys., **3**, 594 (1962); Phys. Lett., **3**, 55 (1962).
26. Federbush P., Journ. Math. Phys., **6**, 825 (1965) (дополнение 2).
27. Appell P., Goursat E., Théorie des Fonctions Algébriques et de leurs Intégrales, Paris, 1895.
28. Birkhoff G., Mc Lane S., A Survey of Modern Algebra, 3rd ed., New York, 1965.
29. Lefschetz S., Introduction to Topology, Princeton, 1949.
30. Hocking J. G., Young G. S., Topology, Reading, Massachusetts, 1961.
31. Hilton P. J., Wylie S., Homology Theory, Cambridge, Massachusetts, 1960 [см. перевод: П. Хилтон, С. Уайли, Теория гомологий (введение в алгебраическую топологию), изд-во «Мир», 1966].
32. Lera y J., Bull. Soc. Math. France, **87**, 81 (1959).
33. Goldberg S. I., Curvature and Homology, New York, 1962.
34. Fotiadi D., Froissart M., Lascoux J., Pham F., Topology, **4**, 159 (1965) (дополнение 1).

35. Helgason S., Differential Geometry and Symmetric Spaces, New York, 1962 (см. перевод: С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметричные пространства, изд-во «Мир», 1964)
36. Flanders H., Differential Forms, New York, 1963.
37. Van de Waerden B. L., Modern Algebra Vol. I, 1949, Vol. II, 1950 (см. перевод 2-го изд.: Ван де Варден, Современная алгебра, ч. I—II, М.—Л., 1947).
38. Leifschetz S., Algebraic Geometry, Princeton, 1953.
39. Pham F., Bull. Soc. Math. France, **93**, 333 (1965) (готовится перевод в сб. «Математика», изд-во «Мир»).
40. Hu S. T., Homotopy Theory, New York, 1959 (см. перевод: Ху Сыцзян, Теория гомотопий, изд-во «Мир», 1964).
41. Steenrod N., The Topology of Fibre Bundles, Princeton, 1951 (см. перевод: Н. Стинрод, Топология косых произведений, ИЛ, 1953).
42. Serre J., Ann. Math., **54**, 425 (1951) (см. перевод в сб. «Расслоенные пространства», ИЛ, 1958)
43. Cartan H., Eilenberg S., Homological Algebra, Princeton, 1956 (см. перевод: А. Картан, С. Эйленберг, Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960).
44. Godement R., Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Paris, 1958 (см. перевод: Р. Годеман, Алгебраическая топология и теория пучков, ИЛ, 1961).
45. Gunning R. C., Rossi H., Analytic Functions of Several Complex Variables, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
46. de Alfaro V., Jaksic B., Regge T., Proc. of Lect. at the Intern. Centre for Theoret. Phys., Trieste, 263 (1965).
47. Hiroonaka H., Ann. Math., **79**, 109 (1964) (см. перевод в сб. «Математика», изд-во «Мир», **9**: 6 (1965), **2**; **10**: 1 (1966), **3**; **10**: 2 (1966), **3**).
48. Westwater J., Princeton University Preprint 965.
49. Thom R., L'Enseignement Mathématique, **VIII**, 24 (1962).
50. Whitney H., Ann. Math., **37**, 645 (1936).

ПРИЛОЖЕНИЕ ИЗОТОПИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ

Д. Фотиади, М. Фруассар, Ж. Ласку, Ф. Фам

D. Fotiadi*, M. Froissart**, J. Lascooux**,
F. Pham*, Topology, 4, 159 (1965)

Введение

Наша предварительная задача состояла в изучении аналитичности функции, определяемой интегралом

$$I(t) = \int_{\Gamma} \Phi_t(x),$$

где $t \in T$, $x \in X$; T и X — комплексные аналитические многообразия, Γ — компактный цикл X , $\Phi_t(x)$ — замкнутая дифференциальная форма в X , аналитически зависящая от параметра t .

Наша работа основывается на идеях Лере [1]; в особенности мы используем два следующих момента из его работы:

1) Свойства голоморфности функции $I(t)$ не изменяются, если цикл Γ непрерывно деформируется.

2) Локальное ветвление функции $I(t)$ при обходе вокруг сингулярностей можно изучить с помощью формулы Пикара — Лефшеца.

Что касается первого пункта, здесь мы доказываем теорему о деформации, которая позволяет беспрепятственно деформировать циклы. Во втором пункте мы даем *обобщение* формулы Пикара — Лефшеца на случай, когда формула $\Phi_t(x)$ сингулярна на объединении неприводимых подмногообразий x .

Мы очень признательны проф. Р. Тому за его помощь и руководство.

1. ОКРУЖАЮЩИЕ ИЗОТОПИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ

Пусть T — фиксированное топологическое пространство (пространство параметров), а Y — другое топологическое пространство. Триплет $Y \xrightarrow{\pi} T$, где π — непрерывное отображение, будет называться проекционным пространством в T . Обозначим $\mathcal{J} \subset Y$ любое подпространство для Y с индуцированной топологией и обозначим $V \subset T$ любое подпространство T с индуцированной топологией.

* Ecole Polytechnique, Paris.

** Centre d'Études Nucléaires de Saclay, Gif-sur-Yvette.

§ 1. Обозначения и определения

Ниже мы будем постоянно пользоваться обозначениями (Y, π) ; (\mathcal{G}, π) ; $(Y|B, \pi)$; $(\mathcal{G}|B, \pi)$, а иногда просто обозначениями Y ; \mathcal{G} ; $Y|B$; $\mathcal{G}|B$ для следующих проекционных пространств:

$$Y \xrightarrow{\pi} T; \quad \mathcal{G} \xrightarrow{\pi|_{\mathcal{G}}} T; \quad \pi^{-1}B \xrightarrow{\pi|_{\pi^{-1}B}} B; \quad \mathcal{G} \cap \pi^{-1}B \xrightarrow{\pi|_{\mathcal{G} \cap \pi^{-1}B}} B.$$

Отметим, что существуют следующие соотношения включения проекционных пространств:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}, \pi) &\subset (Y, \pi), \\ (\mathcal{G}|B, \pi) &\subset (Y|B, \pi) \end{aligned}$$

и что $(Y|B, \pi)$ — обратный образ (Y, π) при отображении $B \xrightarrow{\pi} T$.

Определение 1. Пространство \mathcal{G} называется *тривиально расслоенным подпространством* пространства Y , если $[* *]$; существует *послойная тривиализация* Y , которая является также *тривиализацией* и для \mathcal{G} .

Это означает, что можно найти такое топологическое пространство Z , подпространство S в Z и такой гомеоморфизм g для Y на произведение $Z \times T$, что образ \mathcal{G} при действии g будет произведением $S \times T$ и притом таким, что если $(z, t) = g(y)$, то $t = \pi(y)$.

Обозначение 1. В указанном случае мы будем писать

$$(\mathcal{G}, \pi) \subset^{**} (Y, \pi).$$

Замечание. Описанное свойство сильнее, чем свойство, что $Y \xrightarrow{\pi} T$ и $\mathcal{G} \xrightarrow{\pi|_{\mathcal{G}}} T$ являются тривиально расслоенными пространствами.

Определение 2. Пространство \mathcal{G} называется *тривиально расслоенным подпространством* Y , являющимся C^∞ -многообразием, если $[* * \infty]$: триплет $Y \xrightarrow{\pi} T$ и описанная тривиализация $g: Y \rightarrow Z \times T$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) пространства Y , T и Z — все являются C^∞ -многообразиями;
- 2) отображение π является C^∞ -отображением;
- 3) отображение $g^{-1}: Z \times T \rightarrow Y$ дифференцируемо по второй переменной t .

Поэтому из $z \in Z$ вытекает, что отображение ${}_z g^{-1}: T \rightarrow Y$, определяемое как ${}_z g^{-1}(t) = g^{-1}(z, t)$, имеет дифференциал $D_t({}_z g^{-1})$ для любого $t \in T$.

Замечание. Поскольку g — биективное отображение, то условие 3 означает, что если \mathbf{H} — любое векторное поле на T , то имеется вполне определенный обратный образ $(g^{-1} \cdot \mathbf{H})$, являющийся векторным полем на Y : если $(z, t) = g(y)$, то вектор в точке $y \in Y$ будет $(g^{-1} \cdot \mathbf{H})_y = D_t(z, g^{-1}) \cdot \mathbf{H}_t$, где \mathbf{H}_t — вектор в точке $t \in T$.

Для удобства приложений мы не накладываем никаких условий дифференцируемости по переменной Z , а вместо этого требуем:

4) если \mathbf{H} обозначает C^∞ -векторное поле на T , то поле $g^{-1} \cdot \mathbf{H}$ является векторным полем на Y , локально удовлетворяющим условию Липшица.

В силу этого из $y \in Y$ следует существование такого $k > 0$, что в малой координатной окрестности y мы имеем $\|(g^{-1} \cdot \mathbf{H})_y - (g^{-1} \cdot \mathbf{H})_{y'}\| \leq k \|y - y'\|$, где $\|\cdot\|$ есть любая выбранная норма в R^p и $p = \dim Y$.

Обозначение 2. Будем писать

$$(\mathcal{J}, \pi) \overset{**\infty}{\subset} (Y, \pi).$$

Замечание. В общем случае пространство \mathcal{J} не является топологическим многообразием.

Определение 3. Подпространство \mathcal{J} называется *локально тривиально расслоенным подпространством* Y (или многообразием Y), если [*]: из $b \in T$ следует, что существует такая открытая окрестность W точки b , что

$$(\mathcal{J} | W, \pi) \overset{**}{\subset} (Y | W, \pi);$$

соответственно [* ∞]: из $b \in T$ следует, что существует такая открытая окрестность W точки b , что

$$(\mathcal{J} | W, \pi) \overset{**\infty}{\subset} (Y | M, \pi).$$

Обозначение 3. Тогда будем писать

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}, \pi) &\overset{*}{\subset} (Y, \pi) \\ \text{соответственно} \\ (\mathcal{J}, \pi) &\overset{*\infty}{\subset} (Y, \pi). \end{aligned}$$

§ 2. Теорема о деформациях и ее следствие

Изотопическая теорема (локальное поведение в Y свойства $[* \infty]$). Если

1) $\pi: Y \rightarrow T$ является открытым C^∞ -отображением C^∞ -многообразий,

2) π является собственным,

3) \mathcal{J} является открытым или замкнутым, тогда оказываются эквивалентными следующие два утверждения:

а) $(\mathcal{J}, \pi) \subset^{*\infty} (Y, \pi)$,

б) любая точка y из Y имеет такую открытую окрестность N в Y , что

$$+ + (\mathcal{J} \cap N, \pi) \subset^{*\infty} (N, \pi).$$

Следствие 1. Пусть T — C^∞ -многообразие и X — компактное C^∞ -многообразие. Пусть $\{S_i(t)\}$ будет семейством замкнутых C^∞ -многообразий из X , которое оказывается C^∞ -зависимым от $t \in T$ и находится в общем положении для всех $t \in T$.

Если $\mathcal{J} = \bigcup_{t \in T} [(U S_i(t)), t] \subset X \times T$, то $(\mathcal{J}, \pi) \subset^{*\infty} (X \times T, \pi)$.

Для доказательства теоремы докажем сначала две леммы.

Лемма 1¹⁾. Пусть F — векторное поле на C^∞ -многообразии Y . Если F удовлетворяет условию Липшица и обладает компактной базой K , то F порождает одномерную группу $\gamma(t)$ гомеоморфизмов Y .

Доказательство. Если $\gamma(t)$ — однопараметрическая группа гомеоморфизмов, порождаемых F , то для каждого фиксированного y кривая $t \rightsquigarrow \gamma(t, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $d\gamma(t, y)/dt = F_{\gamma(t, y)}$ с начальным условием $\gamma(0, y) = y$, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(t, y)}{dt}(f) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t+h, y)) - f(\gamma(t, y))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(h, y')) - f(y')}{h} = F_{y'}(f), \end{aligned}$$

где $y' = \gamma(t, y)$.

Приведенное дифференциальное уравнение локально имеет единственное решение, поскольку F удовлетворяет условию Липшица. Это решение удовлетворяет условиям Липшица в смысле зависимости от начальных условий. Таким образом, для любой

¹⁾ Ср. с леммой (2.4) в [2].

точки Y существует такая окрестность U и такое число $\varepsilon > 0$, что дифференциальное уравнение

$$\frac{d\gamma(t, y)}{dt} = F_{\gamma(t, y)}, \quad \gamma(0, y) = y$$

имеет единственное решение при $y \in U$ и $|t| < \varepsilon$. Компактное множество K можно покрыть конечным числом таких окрестностей U . Пусть $\varepsilon_0 > 0$ будет наименьшим из соответствующих чисел ε . Полагая $\gamma(t, y) = y$ для $y \notin K$, получаем, что приведенное дифференциальное уравнение имеет единственное решение $\gamma(t, y)$ при $|t| < \varepsilon_0$ для всех $y \in Y$. Указанное решение является непрерывной функцией обеих переменных. Кроме того, $\gamma(t+s) = \gamma(t) \circ \gamma(s)$ при $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon_0$. Следовательно, каждое такое $\gamma(t)$ — гомеоморфизм. Теперь, чтобы определить $\gamma(t)$ для $t \geq \varepsilon_0$, поделим t на $\varepsilon_0/2$ и представим его в виде $t = k \cdot (\varepsilon_0/2) + r$, где k — положительное целое число и остаток $|r| < \varepsilon_0/2$. Положим $\gamma(t) = \gamma(\varepsilon_0/2) \circ \dots \circ \gamma(\varepsilon_0/2) \circ \gamma(r)$. Для отрицательных t используем отрицательные целые числа k и заменим $\gamma(\varepsilon_0/2)$ на $\gamma(-\varepsilon_0/2)$ и будем $\gamma(-\varepsilon_0/2)$ интегрировать ($-k$) раз.

Замечание. Гомеоморфизм $\gamma(t): Y \rightarrow Y$ удовлетворяет условиям Липшица.

Лемма 2 [3] (суперпозиционная лемма). Пусть $\mathcal{J} \subset Y$ будет подмножеством C^∞ -многообразия Y ; пусть F_1, F_2 — векторные поля, удовлетворяющие условиям Липшица с компактной базой в Y ; пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ — однопараметрические группы гомеоморфизмов Y , порождаемые соответственно F_1, F_2 и $F = F_1 + F_2$ (эти группы существуют в силу леммы 1). Предположим, что γ_1 и γ_2 оставляют \mathcal{J} (глобально) инвариантным. Тогда однопараметрическая группа γ оставляет \mathcal{J} (глобально) инвариантным ($\bar{\mathcal{J}}$ означает замыкание множества \mathcal{J}).

Доказательство. Обозначим через $\beta(t)$ композицию гомеоморфизмов $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ в Y самого в себя $\beta(t) = \gamma_1(t) \circ \gamma_2(t)$. Тогда $\beta(t)$ будет таким гомеоморфизмом Y , который оставляет \mathcal{J} инвариантным, однако $t \rightsquigarrow \beta(t)$ не является однопараметрической группой. Чтобы доказать лемму, мы должны показать, что *равномерный предел* при $n \rightarrow \infty$ последовательности гомеоморфизмов h_n в Y , оставляющих \mathcal{J} инвариантным, где $h_n = [\beta(t/n)]^n$ [n раз повторенное $\beta(t/n)$], в точности равен $\gamma(t)$ (значение при t однопараметрической группы γ порождается суперпозицией полей $F = F_1 + F_2$), т. е. (L): $\gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\beta\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n$, в однородной топологии множества эндоморфизмов Y . Эта топология вполне определена, поскольку Y как (паракомпактное) C^∞ -многообра-

зие является метрическим и поэтому однородным пространством, и h_n — тождество вне компакта K .

Доказательство утверждения (L). Поскольку F_1, F_2 имеют компактный носитель, достаточно доказать утверждение в случае, когда Y — числовое пространство R^q с евклидовой нормой $\| \cdot \|$. Нам нужно доказать, что

$$\gamma(t) - \left[\beta \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n \text{ имеет порядок } \frac{1}{n},$$

или, точнее, что для фиксированного t существует такое $B \geq 0$, что для любого y

$$\| \gamma(t) \cdot y - \left[\beta \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n \cdot y \| \leq \frac{1}{n} B.$$

Чтобы доказать последнее неравенство, воспользуемся фундаментальными тождествами

$$\gamma(t) = \left[\gamma \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n$$

и

$$\alpha^n - \beta^n = \sum_{r=0}^{n-1} (\alpha^r \alpha \beta^{n-r+1} - \alpha^r \beta \beta^{n-r+1}).$$

В последнем положим $\alpha = \gamma(t/n)$, $\beta = \beta(t/n)$. Мы докажем, что $\alpha \cdot y - \beta \cdot y$ имеет порядок $1/n^2$ и что $\alpha^r \alpha \beta^{n-r+1} \cdot y - \alpha^r \beta \beta^{n-r+1} \cdot y$ имеет порядок $1/n^2$, так что $\alpha^n \cdot y - \beta^n \cdot y$ имеет порядок $1/n$. Соответствующие выкладки стандартны для теории дифференциальных уравнений и проводятся следующим образом. Пусть $M \geq 0$ таково, что для всех $y \in R^p$ имеем $\|F_1(y)\| + \|F_2(y)\| < M + + < \infty$. Такое M должно существовать, так как F_1 и F_2 имеют компактный носитель и непрерывны, поскольку они удовлетворяют условию Липшица. Пусть $k \geq 0$ является общей константой в условиях Липшица для $F_1, F_2, F = F_1 + F_2$. Тогда

$$\alpha \cdot y - \beta \cdot y = \gamma \left(\frac{t}{n} \right) \cdot y - \gamma_1 \left(\frac{t}{n} \right) \circ \gamma_2 \left(\frac{t}{n} \right) \cdot y = \eta - \eta_0 - \eta_1,$$

где

$$\eta = \gamma \left(\frac{t}{n} \right) \cdot y - y - \frac{t}{n} F(y),$$

$$\eta_2 = \gamma_2 \left(\frac{t}{n} \right) \cdot y - y - \frac{t}{n} F_2(y),$$

$$\eta_1 = \gamma_1 \left(\frac{t}{n} \right) \cdot y' - y' - \frac{t}{n} F_1(y),$$

где $y' = \gamma_2\left(\frac{t}{n}\right) \cdot y$. Поскольку γ порождается F , то мы имеем

$$\eta = \int_0^{t/n} [F(\gamma(\tau) \cdot y) - F(y)] d\tau,$$

где

$$\gamma(\tau) \cdot y = y = \int_0^\tau F(\gamma(\theta) \cdot y) \cdot d\theta.$$

Поэтому

$$\|\eta\| < \frac{t}{n} \cdot \sup_{\tau} \|F(\gamma(\tau) \cdot y) - F(y)\| \leq \frac{t}{n} \cdot k \cdot \sup_{\tau} \|\gamma(\tau) \cdot y - y\| \leq \frac{1}{n^2} \cdot t^2 \cdot k \cdot M.$$

Аналогично же убеждаемся, что $\|\eta_2\| \leq \frac{1}{n^2} \cdot t^2 \cdot k \cdot M$; учитывая, что

$$\gamma_1(\tau) \cdot y' - y = \gamma_1(\tau) \cdot y' - y' + \{y' - y\},$$

получаем

$$\|\eta_1\| \leq \frac{2}{n^2} \cdot t^2 \cdot k \cdot M.$$

Следовательно, для всех $y \in R^p$ имеем $\|\alpha \cdot y - \beta \cdot y\| \leq \frac{1}{n^2} \cdot C$, где $C = 4 \cdot t^2 \cdot k \cdot M$.

Теперь положим $y'' = \beta^{n-r+1} \cdot y$, $y_1 = \alpha \cdot y''$, $y_2 = \beta \cdot y''$. Тогда

$$\|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{n^2} \cdot C.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \alpha^r \alpha \beta^{n-r+1} \cdot y - \alpha^r \beta \beta^{n-r+1} \cdot y &= \alpha^r \cdot y_1 - \alpha^r \cdot y_2 = \\ &= \gamma\left(\frac{rt}{n}\right) \cdot y_1 - \gamma\left(\frac{rt}{n}\right) \cdot y_2 = v\left(\frac{rt}{n}\right), \end{aligned}$$

где

$$v(\theta) = \gamma(\theta) \cdot y_1 - \gamma(\theta) \cdot y_2 = y_1 - y_2 + \int_0^\theta [(F(\gamma(\tau) \cdot y_1) - F(\gamma(\tau) \cdot y_2))] d\tau.$$

В силу условия Липшица $\|v(\theta)\| \leq \|y_1 - y_2\| + k \int_0^\theta \|v(\tau)\| d\tau$; отсюда легко получаем, что $\|v(\theta)\| \leq \|y_1 - y_2\| e^{k\theta}$. Следовательно,

для всех $r \in \{0, \dots, n-1\}$ и $y \in R^p$ имеем

$$\|\alpha^r \beta^{n-r+1} \cdot y - \alpha^r \beta^n \cdot y\| \leq \frac{1}{n^2} B,$$

где $B = 4 \cdot t^2 k \cdot M \cdot e^{kt}$. Поэтому

$$\left\| \gamma(t) \cdot y - \left[\beta \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n \cdot y \right\| \leq \frac{1}{n} B$$

для всех $y \in R^p$. Тем самым лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Утверждение $a \Rightarrow b$ становится очевидным, если положить $N = Y$. Кроме того, пусть $y \in Y$, $t = \pi(y)$ и N_2 — такая открытая окрестность t , для которой $\mathcal{G} \cap N_2 \subset Y \cap N_2$. Пусть $(z, t) = g(y)$, N_1 — любая открытая окрестность точки z в Z и $N = g^{-1}(N_1 \times N_2)$. Тогда $(\mathcal{G} \cap N, \pi) \subset (N, \pi)$.

Чтобы убедиться, что $b \Rightarrow a$, достаточно из $t_0 \in T$ доказать существование такого $W(t_0)$, что $[++]: (\mathcal{G} \cap W, \pi) \subset (Y \cap W, \pi)$.

В силу компактности $\pi^{-1}(t_0)$ существует конечное покрытие $\pi^{-1}(t_0)$ открытыми множествами N^j (где $j \in J$ — конечное множество) в Y , которые удовлетворяют условию $[++]$, и $\pi(N^j)$ открыто в T . Пусть $W(t_0)$ — наименьшая (открытая) окрестность точки t_0 среди окрестностей $\pi(N^j)$. Тогда мы можем ограничить пространство (N^j, π) пространствами $(N^j \cap W, \pi)$, причем условие $[++]$ все еще сохраняет свою силу (мы по-прежнему обозначаем $N^j \cap W$, как N^j). Можно допустить, что окрестность $W(t_0)$ — координатная окрестность, и поэтому она является открытым кубом $\overset{\circ}{K}_2^p$ с центром в точке t_0 в R^p , с длиной отдельного ребра, равной двум (p — действительная размерность T). Возьмем точку t_0 за начало в R^p . Теперь пусть f — фиксированная заданная положительная C^∞ -функция с компактной областью определения $\overset{\circ}{K}_2^p$ и знаменателем 1 на $\overset{\circ}{K}_1^p = \overset{\circ}{K}^p$ (длина каждого ребра равна единице) и p_j — C^∞ -разрешение единицы для C^∞ -многообразия $Y \cap W$, связанного с открытым покрытием N^j . Пусть \mathbf{H} — любое единичное постоянное векторное поле для R^p ; оно C^∞ и $f\mathbf{H}$ тоже C^∞ с компактным носителем. Теперь для всех $j \in J$ по предположению

$[++]$ имеем $(\mathcal{G} \cap N^j, \pi) \subset (N^j, \pi)$. Поэтому векторное поле $g_j^{-1} f \mathbf{H}$ в N^j удовлетворяет условию Липшица; $F_j = p_j g_j^{-1} f \mathbf{H}$ также будет векторным полем на N^j , удовлетворяющим условию Липшица и обладающим компактным носителем; будучи расширено с помощью нулевого поля в $Y \cap W$, оно окажется векторным полем на $Y \cap W$, удовлетворяющим условию Липшица и обладающим компактным носителем. Согласно лемме 1, F^j порождают однопара-

метрические группы γ^j гомеоморфизмов пространства Y/W ; эти группы γ^j оставляют неизменным \mathcal{G}/W . Фактически из $[+ +]$ следует, что траектория любой точки пространства Y/W либо никогда не встречает $\mathcal{G} | W$, либо полностью лежит в \mathcal{G} . Пусть теперь \mathbf{F} — векторное поле, удовлетворяющее условию Липшица и обладающее компактным носителем в $Y | W$; согласно его определению, $\mathbf{F} = \sum_{j \in J} \mathbf{F}^j$. Пусть $\gamma(t)$ — однопараметрическая группа,

порождаемая \mathbf{F} . Согласно лемме 2, γ оставлен \mathcal{G} -инвариантным. Кроме того, \mathbf{F} имеет горизонтальную компоненту $f\mathbf{H}$. Сделаем теперь единичное векторное поле \mathbf{H} параллельным p -й оси куба $\overset{\circ}{K}^p$. Рассмотрим каноническое разложение $\overset{\circ}{K}_1^p = \overset{\circ}{K}^{p-1} \times \overset{\circ}{K}_1^p$, где $\overset{\circ}{K}^{p-1} = \{t \in \overset{\circ}{K}_1^p \mid p\text{-я координата } t \text{ равна нулю}\}$, $\overset{\circ}{K}_1^p = \{\tau \in \overset{\circ}{K}^p \mid \text{все координаты } t, \text{ кроме } p\text{-й, равны нулю}\}$.

Рассмотрим непрерывное отображение $g_p^{-1} : (Y | \overset{\circ}{K}^{p-1}) \times \overset{\circ}{K}_1^p \rightarrow Y$, определяемое как $(y, \tau) \rightsquigarrow \gamma(\tau, y)$. Оно совместимо с последней координатной проекцией, поскольку $f\mathbf{H}$ равно \mathbf{H} на $\overset{\circ}{K}_1^p$. Оно совместимо с другими координатными проекциями по тем же самым причинам, является тождеством на $(Y | \overset{\circ}{K}^{p-1}) \times \{O\}$ и отображает $(\mathcal{G} | \overset{\circ}{K}^{p-1}) \times \overset{\circ}{K}_1^p$ на \mathcal{G} . Кроме того, это послыное отображение является гомеоморфным, поскольку оно имеет обратное отображение g_p , которое определяется следующим образом: $g_p(y) = (\gamma(-\tau, y), \tau)$, где $\tau = \pi(y)$. Далее воспользуемся индукцией по $p = \dim T$.

Когда $\dim T = 0$, теорема, очевидно, справедлива. Предположим, что теорема справедлива для T размерности $p - 1$, где $p \geq 1$; докажем ее для пространства T с размерностью p . Легко проверить, что условиям теоремы удовлетворяют многообразия $(Y | \overset{\circ}{K}^{p-1}, \pi)$ и множество $(\mathcal{G} | \overset{\circ}{K}^{p-1}, \pi)$. Следовательно, по предположению индукции существует отображение g^{p-1} , такое, что

$$(\mathcal{G} | \overset{\circ}{K}^{p-1}, \pi) \stackrel{** \infty}{\underset{g^{p-1}}{\subset}} (Y | \overset{\circ}{K}^{p-1}, \pi).$$

С другой стороны, теперь определим g^p с помощью $g^p = (g^{p-1} \times Id_{\overset{\circ}{K}_1^p}) \circ g_p$, т. е. с помощью композиции слоевых гомеоморфизмов

$$Y \xrightarrow{g_p} (Y | \overset{\circ}{K}^{p-1}) \times \overset{\circ}{K}_1^p \xrightarrow{g^{p-1} \times Id} (X(t_0) \times \overset{\circ}{K}^{p-1}) \times \overset{\circ}{K}_1^p = X(t_0) \times \overset{\circ}{K}^p.$$

Тогда из свойств g_p с очевидностью следует, что $(\mathcal{G} | \overset{\circ}{K}^p, \pi) \stackrel{** \infty}{\underset{g^p}{\subset}} \subset (Y, \pi)$. Тем самым теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Пусть r — размерность пространства X , и пусть π — проекция $X \times T \rightarrow T$. Для простоты предположим, что подмногообразия $S_i(T)$ имеют комплексную коразмерность, равную единице, в X . Для каждого y в Y C^∞ -зависимость от t означает, что y имеет такую π -расслоенную координатную окрестность N_y , для которой каждое

$$\mathcal{G}_i = \{(x, t) \mid x \in S_i(t)\}$$

совпадает с множеством нулей функции $s_i(x, t)$, которая обладает свойством C^∞ по x и t .

Общее положение в точке x_0 градиентного вектора X многообразий $s_i(t_0)$ означает, что при $y = (x_0, t_0)$ производные $(\partial s_i / \partial x)(x_0, t_0)$ при $i \in I_y$ (где $I_y = \{i \mid x_0 \in S_i(t_0)\}$) линейно независимы. Общее положение в X для любого t означает, что сказанное удовлетворяется для каждого y в Y .

Поскольку \mathcal{G}_i замкнуто в $X \times T$, можно взять такую окрестность N_y , что выполняется $i \notin I_y \Rightarrow N_y \cap \mathcal{G}_i = \emptyset$. Тогда тривиализация суммы $\bigcup_{i \in I_y} \mathcal{G}_i$ в N_y реализуется в координатной окрестности с использованием гомеоморфизма g , задаваемого следующей заменой координат:

$$g: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\mu \\ x_{\mu+1} \\ \vdots \\ x_r \\ t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} S_{i_1}(x, t) \\ S_{i_2}(x, t) \\ \vdots \\ S_{i_\mu}(x, t) \\ x_{\mu+1} \\ \vdots \\ x_r \\ t \end{pmatrix},$$

причем $\{i_1, \dots, i_\mu\} = I_y$ и $D(s_{i_1}, \dots, s_{i_\mu})/D(x_1, \dots, x_\mu) \neq 0$ в окрестности N_y . Теперь рафинируем окрестность N_y так, чтобы ее образ gN_y стал произведением; этим реализуется условие «б» теоремы об изотопии. Тем самым следствие доказано.

§ 3. Z -окружающая изотопия; отображение, класс, подпространство, компонент

Определение 4. Отображение $g_1: \{Z, S_0\} \rightarrow \{Z, S_1\}$, $S_i \in Z$ называется Z -окружающим изотопическим отображением S_0 (из S_0 в S_1), если существуют такие $\mathcal{G} \subset Z \times I$ и $g = (g_t)_{t \in [t_0, t_1]}$, где I —

линейный сегмент $[t_0, t_1]$, что а) $(\mathcal{J}, \pi) \overset{**}{\subset} (Z \times I, \pi)$ (π — вторая проекция); б) $S_0 = \mathcal{J} | t_0, S_1 = \mathcal{J} | t_1$; в) $g_{t_0}^g =$ тождественному отображению на $Z, g_{t_1} = g_1$.

Отображение g и пара (g, \mathcal{J}) называются *реализацией* окружающей изотопии g_1 .

Определение 5. Два отображения g_1 и g'_1 принадлежат к одному и тому же *окружающему изотопическому классу* \dot{g}_1 , если существуют такие (g, \mathcal{J}) и (g', \mathcal{J}') и такие реализации g_1 и g'_1 , для которых $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$ как подпространства $Z \times I$.

Определение 6. Z -окружающая изотопия g_1 называется *оставляющей инвариантным* $\Sigma \subset Z$, если

$$(\mathcal{J} \cup (\Sigma \times I), \pi) \overset{**}{\subset} (Z \times I, \pi).$$

Предложение 1. Если

$$(\mathcal{J}, \pi) \overset{*}{\subset} (Z \times T, \pi) \quad (1)$$

и если S_0, S_1 — слои в \mathcal{J} при $t_0, t_1 \in T$, то

а) любой путь $I \xrightarrow{\sigma} t_0 t_1 \subset T$ определяет Z -окружающий изотопический класс \dot{g}_1 от S_0 к S_1 ,

б) два пути, принадлежащих к одному и тому же гомотопическому классу в T , определяют один и тот же Z -окружающий изотопический класс \dot{g}_1 .

Для доказательства а) заметим, что $(\mathcal{J}^*, \pi^*) \overset{**}{\subset} (Z \times I, \pi^*)$ для обратных образов для отображения $I \xrightarrow{\sigma} T$; теперь для б) остается тривиальное упражнение на гомотопию.

Определение 7. $B \subset T$ называется *Z -окружающим изотопическим подпространством* T для \mathcal{J} , если $(\mathcal{J}, \pi) \overset{*}{\subset} (Z \times T, \pi)$, B связано по дугам и $(\mathcal{J} | B, \pi) \overset{*}{\subset} (Z \times B, \pi)$.

Определение 8. $B \subset T$ называется *Z -окружающим изотопическим компонентом* для \mathcal{J} в T для $b \in B$, если B — Z -окружающее изотопическое подпространство T для \mathcal{J} и, кроме того, B максимален в T (для этого условия).

Обозначение 8. Когда такое B существует, его будем записывать в виде $B(b, \mathcal{J}, Z \times T)$.

Важное замечание. Z -окружающий изотопический класс \dot{g}_1 определяет гомотопический класс \dot{g}_1 гомеоморфизмов Z , отобра-

жающих S_0 на S_1 . Следовательно, он определяет изоморфизм \tilde{g}_1^* (ко)гомологических групп (для любого семейства баз)

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1^*: H(S_0) &\leftrightarrow H(S_1), \quad \tilde{g}_1^*: H(Z - S_0) \leftrightarrow H(Z - S_1), \\ \tilde{g}_1^*: H(Z) &\xrightarrow{id} H(Z); \end{aligned}$$

все они обладают желаемой коммутативностью.

Это — весьма существенное замечание, которое надо иметь в виду всякий раз, как мы пользуемся окружающей изотопией.

Важный пример. Если $B = B(t_0, \mathcal{J}, Z \times T)$, то гомотопической группой $\pi_1(B, t_0)$ для B в точке t_0 будет группа операторов для группы $H(S_0)$, $H(Z - S_0)$ и т. д. (где $S_0 = \mathcal{J}/t_0$).

§ 4. Аналитичность интеграла (приложение изотопии)

Предложение. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{\omega(t_0)}{S(t_0)},$$

где

а) множество $\{S(t) = 0\}$ является топологически замкнутым аналитическим подмножеством комплексного аналитического многообразия Z^n размерности n , которое аналитически зависит от параметра $t \in T$ (T — комплексное аналитическое многообразие);

б) форма $\omega(t)$ является регулярной аналитической n -формой на Z^n , голоморфно зависящей от $t \in T$;

в) цикл $\Gamma \subset Z - S(t_0)$ является компактным циклом размерности n .

Предположим, кроме того, что

г) множество $\mathcal{J} = \bigcup_{t \in T} S(t) \subset Z \times T$ удовлетворяет условию

$(\mathcal{J}, \pi) \subset (Z \times T, \pi)$ [случай, когда Z компактно и $S(t)$ находится в общем положении для всех t].

При этих условиях указанный интеграл определяет в точке элемент аналитической функции, которую можно аналитически продолжить вдоль любого пути T ; это продолжение на t_1 дается интегралом:

$$\int_{\Gamma'} \frac{\omega(t_1)}{S(t_1)},$$

где Γ' — соответствующий класс $H_n^c(Z - S(t_1))$.

Доказательство. 1) Форма ω аналитична и имеет размерность n , так что она замкнута в Z . Поскольку $S(t_0)$ — аналитическое множество, то $\omega(t_0)/S(t_0)$ замкнуто в $\widehat{Z} - S(t_0)$. Поэтому, согласно формуле Стокса, интеграл зависит только от класса Γ в $H_n^c(Z - S(t_0))$. 2) Цикл Γ компактный, $S(t)$ замкнуто и $\omega(t)/S(t)$ аналитично в точке t_0 , следовательно, \mathcal{C} можно дифференцировать под знаком суммы в точке t_0 . Таким образом, интеграл определяет элемент аналитической функции в точке t_0 . 3) Возьмем любой путь $\alpha(\theta)\widehat{t_0 t_1}$ в T . Ему соответствует по предположению r X -окружающий изотопический класс $S(\alpha(\theta))$ в Z , который индуцирует непрерывную деформацию класса Γ в $Z - S(\alpha(\theta))$. Кроме того, в силу компактности Γ при $t=t_0$ и замкнутости $S(\alpha(\theta))$ в Z для каждого θ такое непрерывное деформирование класса Γ вдоль $\widehat{t_0 t_1}$ можно представить как ступенчатое изменение Γ . Тем самым доказательство заканчивается.

Определение. Интеграл $\int_{\Gamma} \frac{\omega(t_0)}{S(t_0)}$ называется *имеющим стандартную форму* в точке $t_0 \in T$, если выполняются приведенные в начале этого параграфа условия а), б) и в).

Следствие. Если интеграл $\int_{\Gamma} \frac{\omega(t_0)}{S(t_0)}$ имеет стандартную форму в точке $t_0 \in T$, то он определяет в точке t_0 элемент аналитической функции I_{Γ} , которую можно аналитически продолжить вдоль любого пути $B(t_0) \subset T$, где $B(t_0)$ есть X -окружающий изотопический компонент точки t_0 в T для $\mathcal{J} = \bigcup_{t \in T} S(t)$.

Замечание. Полезно заметить, что хотя точка t_0 может оказаться точкой сингулярности на некоторой ветви (неоднородной) аналитической функции (с сингулярностями) I_{Γ} на T , тем не менее ни одну из этих ветвей нельзя достигнуть по путям, лежащим исключительно в $B(t_0)$.

Замечание относительно возможных обобщений изотопической теоремы. Двумя важнейшими моментами доказательства были следующие: 1) *суперпозиционная лемма*, которая позволяет путем суперпозиции ассоциированных векторных полей сшить вместе локальные окружающие изотопии; 2) *компактность слоя X* , которая позволяет построить векторное поле с компактным носителем и, таким образом, использовать лемму Милнора [2].

Отметим, однако, что 1) суперпозиционную лемму можно применить, даже если потребовать, чтобы группа деформаций оставляла инвариантным не только множество $\bar{\mathcal{J}}$, но также

каждого представителя (может быть, и бесконечного) семейства подмножеств \bar{J}_i (где $i \in I$); так получается первое обобщение теоремы; 2) условие компактности X можно откинуть, изменяя условие б) изотопической теоремы на следующее:

Существует такое открытое покрытие N_j пространства Y , для которого

$$** (\mathcal{J} \cap N_j, \pi) \stackrel{**\infty}{\subset}_{g_j} (N_j, \pi)$$

для всех $j \in J$, причем g_j — тождественное отображение, за исключением конечного числа относительно компактных N'_j (ср. с понятием стабильного диффеоморфизма [4]).

II. ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИЯХ

Основная цель этого раздела — доказательство теоремы 3. Ослабленная ее форма читается так: если $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$ — алгебраические подмногообразия коразмерности единицы для \mathbb{C}^n , находящиеся в общем положении и хорошо ведущие себя на бесконечности, то сингулярная гомология с коэффициентами в \mathbb{C} для их дополнения в \mathbb{C}^n распадается в прямую сумму сингулярных гомологий для каждого из пересечений одного с одним, двух с двумя, p с p .

§ 1. Лемма об исчезновении

Лемма 1. Пусть Y — топологическое пространство, и пусть $\Sigma' \subset Y$ — подпространство Y . Если задан любой компакт K в Y , то существует соответствующая Y -окружающая изотопия Σ' , σ_h , которая переводит Σ' во внешность K : $\sigma_h(\Sigma') = {}^h\Sigma' \subset Y - K$. Тогда компактное когомотопическое отображение ограничения $H_c^q(Y) \xrightarrow{i^*} H_c^q(\Sigma')$ будет нулевым отображением.

Доказательство. Если h — любой компактный когомотопический класс в $H_c^p(Y)$, то нужно показать, что $i^*(h) = 0$. Пусть $\omega \in h = h(\omega)$ берется в качестве представителя для h . Этот представитель обращается в нуль вне некоторого компактного K_ω , для которого по предположению можно найти такую Y -окружающую изотопию $\sigma_{h\omega}$ для Σ , что $\sigma_{h\omega}(\Sigma') = {}^{h\omega}\Sigma' \subset Y - K_\omega$.

Пусть $i_{k\omega}$ — отображение включения ${}^{h\omega}\Sigma' \subset Y$. Заметим, что а) $i_{k\omega}^*(h(\omega)) = 0$, б) $\sigma_{k\omega}^*$ — идентичное отображение, в) $\sigma_{h\omega}(\sigma_{h\omega}|_{\Sigma'})^*$ — изоморфизм, г) ниже приводимая диаграмма комму-

тативна

$$\begin{array}{ccc} H_c^q(Y) & \xrightarrow{i^*} & H_c^q(\Sigma') \\ \sigma_{k\omega}^* \updownarrow & & \updownarrow (\sigma_{k\omega} | \Sigma')^* \\ H_c^q(Y) & \xrightarrow{i_{k\omega}^*} & H_c^q(k\omega\Sigma'). \end{array}$$

Следовательно, $i^*(h) = 0$.

§ 2. Компактное когомотопическое разложение пространств

Теорема 1. Пусть Y — паракомпактное топологическое пространство, и пусть $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$ — конечное семейство замкнутых подпространств $Y: \Sigma_i \subset Y$.

Предположим, что для всех компактов K , где $K \subset Y$, и для всех $i \in \{1, \dots, p\} = J$ существует Y -окружающая изотопия σ_{hi} семейства $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_p\}$, которая а) отображает Σ_i во внешность для $K: \sigma_{hi}(\Sigma_i) \subset Y - K$ и б) оставляет инвариантными Σ_j при всех $j \neq i$.

Тогда для компактной когомологии с коэффициентами в поле или для когомологии по модулю кручения с коэффициентами \mathbf{Z} существует (неканоническое) разложение

$$\begin{aligned} H_c^q\left(Y - \bigcup_j \Sigma_j\right) &= \bigoplus_{h \subset P} \delta^h H_c^{q-|h|}\left(Y \bigcap_{j \in h} \Sigma_j\right) = \\ &= \bigoplus_{h \subset P} H_c^{q-|h|}\left(\bigcap_{j \in h} \Sigma_j\right), \end{aligned}$$

где $P(J)$ — множество из подмножеств J , $|h|$ — число точек в h , оператор

$$\delta^h: H_c^{q-|h|}\left(Y \bigcap_{j \in h} \Sigma_j\right) \rightarrow H_c^q\left(Y - \bigcup_{j \in h} \Sigma_j\right)$$

является h -итерированным кограничным оператором, определение которого будет дано в процессе доказательства.

Доказательство. Используем индукцию по p . Для $p=0$ теорема просто утверждает, что $H_c^q(Y) = H_c^q(Y)$, и мы считаем, что δ^\emptyset равно тождеству (\emptyset — пустое множество). Предположим теперь, что теорема справедлива для $p-1$. Пусть

$$\Sigma' = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_{p-1}, \quad \Sigma = \Sigma_p.$$

Тогда $\Sigma - \Sigma' \xrightarrow{i} Y - \Sigma'$ — замкнутое множество $Y - \Sigma'$ (где $A - B$ означает $A - A \cap B$) и точная последовательность замкнутых

множеств имеет вид

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{i^*} H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') \xrightarrow{\delta} H_c^q(Y - \Sigma' \cup \Sigma) \rightarrow \\ & \rightarrow H_c^q(Y - \Sigma') \xrightarrow{i^*} H_c^q(\Sigma - \Sigma'). \end{aligned}$$

Однако i^* — нулевое отображение, в то время как Y -окружающая изотопия $\sigma_{\text{кр}}$ оставляет Σ' фиксированным и переводит Σ во внешность для K , и поэтому ограничение $\sigma_{\text{кр}}|_{Y - \Sigma'}$ будет $(Y - \Sigma')$ -окружающей изотопией и переводит $\Sigma - \Sigma'$ во внешность $K - \Sigma'$. Теперь можно выбрать для K любое компактное подмножество для $Y - \Sigma'$. Поэтому может быть применена лемма 1 и мы получаем точную последовательность

$$\xrightarrow{0} H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') \xrightarrow{\delta} H_c^q(Y - \Sigma' \cup \Sigma) \rightarrow H_c^q(Y - \Sigma') \xrightarrow{0}, \quad (1)$$

которая распадается по предположению на коэффициенты когомологий

$$H_c^q(Y - \Sigma' \cup \Sigma) = \delta H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') \oplus H_c^q(Y - \Sigma'),$$

где кограницный оператор δ инъективен.

Индукция приложима к $H_c^q(Y - \Sigma')$; она приложима также к $H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma')$. Фактически ограничения $\sigma_{k_1}|_{\Sigma}, \dots, \sigma_{k_{p-1}}|_{\Sigma}$ являются Σ -окружающими изотопиями для семейства

$$\{\Sigma \cap \Sigma_i\}_{i \in \{1, \dots, p-1\}}$$

из замкнутых подмножеств для Σ и удовлетворяют предположению теоремы. Поэтому

$$H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') = \bigoplus_{h_1 \in \mathbf{P}\{1, \dots, p-1\}} \delta^{h_1} H_c^{q-1-h_1}(\Sigma \cap_{h_1} \Sigma_j)$$

и

$$H_c^q(Y - \Sigma') = \bigoplus_{h_2 \in \mathbf{P}\{1, \dots, p-1\}} \delta^{h_2} H_c^{q-1-h_2}(Y \cap_{h_2} \Sigma_i).$$

Теперь мы определим по индукции кограницный оператор

$$\boxed{\delta^h = \delta \circ \delta^{h_1},}$$

где $h = h_1 \cup \{p\}$ (отметим, что δ^h — инъективное отображение), и заметим, что

$$\mathbf{P}\{1, \dots, p\} = \mathbf{P}\{1, \dots, p-1\} \cup [h = \{p\} \cup h_1 \mid h_1 \in \mathbf{P}\{1, \dots, p-1\}].$$

Этим доказательство заканчивается.

Замечание. Антиккоммутативность. То обстоятельство, что индексы, нумерующие подпространство Σ_s , берутся из множества $(1, 2, \dots, p)$, позволяет неявно ввести индуцированный порядок для множества $h \subset P(1, 2, \dots, p)$. Перестановка двух индексов в h превращает δ^h в $(-\delta^h)$.

§ 3. Компактное гомологическое разложение для многообразий

Теорема 2. В дополнение к условиям теоремы 1 мы допустим, что Y — комплексное аналитическое многообразие и что $\{\Sigma_i\}$ — семейство комплексных аналитических подмногообразий Y комплексной коразмерности единицы, которые занимают общее положение в Y . Тогда имеем для компактной гомологии (по модулю кручения) следующее (не каноническое) разложение:

$$H_p^c\left(Y - \bigcup_i \Sigma_i\right) = \bigoplus_{h \in P(1, \dots, p)} \delta^h H_{p-|h|}^c\left(Y \bigcap_h \Sigma_i\right),$$

где δ^h — h -итерированный кограничный оператор Лере [1], определение которого будет дано в процессе доказательства.

Доказательство. Напомним: утверждение, что " $\{\Sigma_i\}$ занимают общее положение в точке $x \in Y''$ ", означает, что дифференциалы $d\Sigma_i$, вычисленные для точки x для поверхностей, содержащих x , все независимы. Вместе с тем утверждение, что $\{\Sigma_i\}$ заключают общее положение в Y'' , означает, что это справедливо для любой точки $x \in Y$. Таким образом, $\bigcap_{i \in h} \Sigma_i$ является ком-

плексным аналитическим подпространством пространства Y и имеет комплексную коразмерность $|h|$. Заметим, что в точной когомологической последовательности [1], приведенной при доказательстве теоремы 1, а именно в точной последовательности

$$\xrightarrow{0} H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') \xrightarrow{\delta} H_c^q(Y - \Sigma' \cup \Sigma) \rightarrow H_c^q(Y - \Sigma') \xrightarrow{0} \quad (1)$$

$(\Sigma - \Sigma')$ — подмногообразие для $(Y - \Sigma')$ комплексной коразмерности единицы. Также $(Y - \Sigma' \cup \Sigma)$ — многообразие той же самой размерности, что Y в $Y - \Sigma'$. Они (будучи комплексными многообразиями) канонически ориентированы. Поэтому мы можем применить к каждому члену вышеприведенной последовательности (1) изоморфизм Пуанкаре Φ и получить точную последовательность

$\xrightarrow{0} H_{r-1}^c(\Sigma - \Sigma') \xrightarrow{\delta^*} H_r^c(Y - \Sigma' \cup \Sigma) \xrightarrow{f^*} H_r^c(Y - \Sigma') \xrightarrow{0}$, где f — включение $(Y - \Sigma' \cup \Sigma) \subset (Y - \Sigma')$ и где

$$\delta^* = \Phi \circ \delta \circ \Phi^{-1}$$

по определению кограничный оператор $[1]^1$) для гомологии, который ниже обозначается δ . Далее доказательство проводится так же, как для теоремы 1. Теперь δ^h определяется по индукции с помощью $\delta^h = \delta \circ \delta^{h-1}$ и называется h -итерированным кограничным оператором $[1]$ для гомологии, определяемой подмножеством $h \subset \{1, \dots, p\}$. Оператор δ^h тоже антикоммутативен.

Замечание 1. Приведенное доказательство можно перенести также на действительные топологические ориентированные многообразия. Для этого заменим предположение, что Σ_i находятся в общем положении в Y и имеют комплексную коразмерность единицу, на предположение, что для всех $h \subset \{1, \dots, p\}$ пересечение $\bigcap_h \Sigma_i$ является топологическим (замкнутым) подмногообразием и имеет действительную коразмерность $2|h|$; остальные условия теоремы 1 надо оставить без изменения.

Замечание 2. Кроме того, условия относительно коразмерности можно ослабить, и мы получим подобную формулу, но теперь гомологический оператор δ не будет больше входить только в степени $+1$.

Теорема 3. Пусть $\{S^{i'}, S_0 S_i\}$ — конечное семейство компактных комплексных аналитических многообразий, находящихся в общем положении и обладающих коразмерностями единицы в (комплексном) n -мерном проективном пространстве \bar{P}^n , где $S_0 = \bar{P}^n - \mathbb{C}^n = \bar{P}^n - \infty$ — бесконечно удаленная гиперплоскость и где $(i', i) \in J' \times J$. Пусть $Y = \mathbb{C}^n \cap_{J'} S^{i'}$, $\Sigma_i = Y \cap S_i$ для всех $i \in J$.

Тогда (ко)гомологическое разложение имеет вид

$$H_*^c \left(Y - \bigcup_{i \in J} \Sigma_i \right) = \bigoplus_{h \in \mathbf{P}(J)} \delta^h H_{*+|h|}^c \left(Y \cap_h \Sigma_i \right),$$

причем используются такие же обозначения, как в теоремах 2 и 1.

Доказательство. Нам достаточно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 2. Для всех компактных $K \subset \mathbb{C}^n$ и для всех $i \in J$ существует такая Y -окружающая изотопия σ_{hi} , оставляющая инвариантными все Σ , кроме Σ_i , которая переводит Σ во внешность K : $\sigma_{hi}(\Sigma_i) \subset Y - K$.

Доказательство леммы. Используем однородные координаты $z = (x_0, x) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \{0\}$. Рассмотрим $S_0 = \bar{P}^n - \infty$, определяемое точкой $x_0 = 0$; \mathbb{C}^n определяется $x_0 = 1$ и \bar{P}^n — пространство отношений $z \sim \lambda z (\lambda \in \mathbb{C} - \{0\})$. Пусть отобра-

¹⁾ Строго говоря, δ^* отличается от оператора δ в $[1]$ знаком: $\delta_* \sigma = (-1)^{1+d \dim \sigma} \delta^* \sigma$.

жение $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{\tau} \bar{P}^n$ будет естественным. Тогда, согласно теореме Чью и нашим предположениям, существует такой неприводимый однородный полином f_i (соответственно $f^{i'}$) $\in \mathbb{C}[z]$, что S_i (соответственно $S^{i'}$) будут образом при действии τ на множество нулей $\hat{f}_i(x_0, x)$ [соответственно $\hat{f}^{i'}(x_0, x)$]. Можно предположить, что точка $z = (1, 0)$ не принадлежит ни одному S и (после перенумерации) что $i = 1$. Тогда существует замкнутый шар $B(0, \rho)$ в $\bar{P}^n - S_0 = \mathbb{C}^n$ с центром в $(1, 0)$ и радиуса $\rho > 0$, лежащий вне $S_i, S^{i'}$ для всех i и i' . Тогда положим $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ и определим функцию ${}^\lambda f_1(x_0, x) = f_1(\lambda x_0, x)$ и ${}^\lambda S_1$ как множество нулей функции ${}^\lambda f_1(1, x)$.

Таким образом, S_1 и $B(0, \lambda\rho)$ не пересекаются с ${}^\lambda S_1$. Однако семейство $B(0, \lambda\rho)$ конечно в семействе компактов в $\mathbb{C}^n = \bar{P}^n - S_0$, и поэтому любой данный компакт $K \subset \mathbb{C}^n$, ${}^\lambda S_1$ лежит вне K при условии, что $|\lambda|$ достаточно велико.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 3. Множество $L \subset \mathbb{C} - \{0\}$ таких λ , для которых $\{S', \dots, S^{p'}, S_0, {}^\lambda S_1, \dots, S_p\}$ не находится в общем положении, является алгебраическим подмножеством $\mathbb{C} - \{0\}$ (поскольку $1 \notin L$, то $L \neq \mathbb{C} - \{0\}$) и поэтому L — конечное множество в $\mathbb{C} - \{0\}$.

Доказательство. Действительно, $\lambda \in L$ тогда и только тогда, если приводимая ниже матрица с $(n+1+p+p')$ строками и $(1+p+p')$ столбцами имеет ранг строго меньше $(1+p+p')$:

$${}^\lambda M = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & \frac{\partial f^{i'}}{\partial x_0} & \frac{\partial f_i}{\partial x_0} \\ 0 & \frac{\partial f^{i'}}{\partial x} & \frac{\partial f_i}{\partial x} \\ \hline x_0 & f^1 & 0 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & f^{p'} \\ & 0 & {}^\lambda f_1 \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & f_p \\ \hline \end{array}$$

где f_1 везде надо заменить на ${}^\lambda f_1$. Вместе с тем каждый детерминант, который можно выделить из матрицы ${}^\lambda M$ — однородный полином и, согласно теории исключения, мы видим, что L — алгебраическое множество. Тем самым лемма 3 доказана.

Теперь заметим, что

$$\bigcap_{\lambda} \left[\bigcap_{j'} S_{j'} \cup S_0 \cup \lambda S_1 \cup \dots \cup S_p \right] \times \{\lambda\} \subset \bar{P}^n \times [\mathcal{C} - \{0\} - L]$$

(в силу следствия 1 изотопической теоремы). Далее, мы берем в качестве σ окружающий изотопический класс, ассоциированный с любым достаточно длинным линейным сегментом 1λ из $\mathcal{C} - \{0\} \cup L$. Этим заканчивается доказательство теоремы 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение: *кограничный оператор Лере δ^* является функтором.*

Указанный оператор был определен в теореме 2. Категория, на которой определяется этот функтор, следующая. *Объектами* категории являются пары (Z, S) , составленные из ориентированного C^∞ -многообразия Z и (топологически замкнутого) ориентированного C^∞ -подмногообразия S реальной коразмерности два в Z .

Морфизмами $(Z, S) \xrightarrow{g} (Z', S')$ будут изоморфизмы ориентированных топологических многообразий $g: Z \rightarrow Z'$, которые, будучи ограниченными на S или $Z - S$, индуцируют изоморфизмы ориентированных топологических подмногообразий, а именно изоморфизмы $g: S \rightarrow S'$ (и потому $g: Z - S \rightarrow Z' - S'$).

Отметим, что окружающая изотопия приводит к таким морфизмам.

Доказательство. Поскольку нижеприведенная коммутативная диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} H_{\Phi}^{*+1}(S') & \xrightarrow{\delta} & H_{\Phi}^*(Z' - S') \\ g^* \downarrow & & \downarrow g^* \\ H_{\Phi}^{*+1}(S) & \xrightarrow{\delta} & H_{\Phi}^*(Z - S), \end{array}$$

где Φ означают семейства F на c (см. раздел III), а также коммутативна по самому определению δ^* диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{\Phi}^{*+1}(S) & \xrightarrow{\delta} & H_{\Phi}^*(Z - S) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ H_{n-s-1}^{\Phi}(S) & \xrightarrow{\delta^*} & H_{n-s}^{\Phi}(Z - S), \end{array}$$

где Φ — изоморфизм Пуанкаре (см. приложение к разделу III), то остается только доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_{\Phi}^*(Y) \xrightarrow{(g^*)^{-1}} H_{\Phi}^*(Y') \\ \Phi \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \Phi' \\ H_{n-*}^{\Phi}(Y) \xrightarrow{g_*} H_{n-*}^{\Phi'}(Y'), \end{array}$$

где $g: Y \rightarrow Y'$ — ориентация, сохраняющая гомеоморфизм топологических многообразий размерности n ; поэтому $g_*[\mu] = [\mu']$, где $[\mu]$, $[\mu']$ — фундаментальные классы ориентированных многообразий

$$[\mu] \in H_n^F(Y), \quad [\mu'] \in H_n^F(Y').$$

Теперь изоморфизм Пуанкаре Φ (соответственно Φ') есть не что иное, как \cap -произведение фундаментальных классов $\Phi(a) = a \cap [\mu]$. На этом доказательство заканчивается, ибо при любом непрерывном отображении $g: Y \rightarrow Y'$ топологических пространств мы имеем для \cap -произведения $H_{\Phi}^p(Y) \otimes H_q^F(Y) \xrightarrow{\cap} \xrightarrow{\cap} H_{q-p}^{\Phi}(Y)$ формулу

$$g_*(g^*a \cap b) = (a \cap g_*b)$$

(см. приложение к разделу III).

III. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПРИ ТОЧЕЧНОМ ПЕРЕСЕЧЕНИИ

Лемма. Пусть Ω — (паракомпактное) ориентированное C^{∞} -многообразие действительной размерности r , пусть $S' = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{\mu}$ — объединение ориентированных C^{∞} -подмногообразий, занимающих общее положение в Ω и топологически замкнутых в Ω . Тогда дуальным пространством для $H_p^c(\Omega, S') \otimes \mathcal{C}$ будет $H_q^F(\Omega - S') \otimes \mathcal{C}$, где $p + q = r = \dim \Omega$ и где $H_q^F(\Omega - S')$ — (замкнутая в Ω) гомология для $(\Omega - S')$ (см. приложение к этому разделу).

Двойственность возникает от (алгебраического) пересечения поверхностей, т. е. от билинейной формы

$$H_q^F(\Omega - S') \otimes H_p^c(\Omega, S') \xrightarrow{I} Z.$$

Более того, если $h \in H_p^c(\Omega, S) \otimes \mathcal{C}$ и $\sigma \in H_q^F(\Omega - S') \otimes \mathcal{C}$, тогда

$$I(\sigma, h) = \langle \sigma | h \rangle = \int_h (G \circ \Phi^{-1})(\sigma),$$

где Φ — изоморфизм Пуанкаре (определенный в приложении к этому разделу), G — изоморфизм Годемана (определяемый в на-

стоящем доказательстве) и интеграл \int в силу сильной действительности Лере и де Рама является Π -произведением (см. приложение к этому разделу).

Доказательство. Проведем индукцию по μ , числу многообразий. Пусть $S = S_\mu$ и $S'' = S_1 \cup \dots \cup S_{\mu-1}$. Тогда $S' = S \cup S''$. Мы будем пользоваться простым обозначением $S - S''$ для $S - (S'' \cap S)$. Теперь доказательство состоит в построении следующей диаграммы (стр. 164):

1) Исходим из точного триплета (2) когомологии замкнутого подмножества для семейства F носителей. Заметим, что все эти пространства — многообразия при общем значении аргументов. Ориентируем их (по возможности, каноническим образом).

2) Приложим к (2) изоморфизм Пуанкаре Φ (распространенный Картаном на более общие семейства, чем семейства компактов)¹⁾. Так получаем точный триплет 1 и кограничный гомологический оператор Лере δ (отличающийся знаком от первоначально введенного [1]).

3) Применим к каждому члену точного триплета (2) изоморфизм Годемана G (имеющий смысл для паракомпактного пространства, замкнутого пространства и коэффициентов Z или \mathbb{C} ; см. [5]). Так получается точный триплет (3).

4) Начало индукции. Возьмем $S'' = \emptyset =$ Пустое множество. Тогда интеграл определяет горизонтальную линию в (3), которая двойственна к горизонтальной линии в (4). По сути дела это есть теорема де Рама для C^∞ -многообразия (см. [1], стр. 115). Заметим, что $H_F^p(\Omega)$ в точности когомология пространства Ω размерности p .

5) Индукция. Интегральная сумма — билинейная форма между (3) и (4). Предположим, что она определяет горизонтальную линию триплета (3), которая двойственна к горизонтальной линии триплета (4). Тогда она определяет (см. [1], стр. 115) верхние группы триплета (3) как двойственные к верхним группам триплета (4) и, следовательно, триплетов (2) и (1).

6) Теперь заметим, что если $p+q=r$, то $\int (C \circ \Phi^{-1})\sigma$ оказывается обычным точечным пересечением $\langle \sigma | \overset{h}{h} \rangle$ (если $p+q \neq r$, то произведение $[G \circ \Phi^{-1}\sigma] \cap h$ оказывается обычным пересечением $I\langle \sigma | h \rangle$ с размерностью $p+q-r$).

Отметим, что из пятого утверждения непосредственно следует, что в нашем случае существует гомоморфизм Годемана G , и он фактически является изоморфизмом.

¹⁾ Определение Φ см. в приложении к этому разделу.

Замечание. В качестве важного побочного результата получаем

$$\langle \delta\sigma | h \rangle = \langle \sigma | \delta h \rangle.$$

(1) F -гомология

$$H_*^F(\underline{\Omega} - S \cup S'') \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \end{array} H_*^F(\underline{\Omega} - S'') \rightarrow H_*^F(S - S'')$$

δ -когомология Лере для F -гомологии (с точностью до знака).

Изоморфизм Пуанкаре — Картана = Φ \Uparrow (G. P.) \Rightarrow каждое множество является многообразием.

(2) F -когомология

$$H_F^*(\underline{\Omega} - S \cup S'') \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \end{array} H_F^*(\underline{\Omega} - S'') \xrightarrow{i^*} H_F^*(S - S'')$$

точный триплет для замкнутого множества (S, S'') замкнуто в Ω .

Изоморфизм Годемана = G \Downarrow Паракомпактные пространства, замкнутые пространства, коэффициенты Z или \mathbb{C} .

(3) Когомология

$$H^*(\Omega, S \cup S'') \begin{array}{c} \downarrow p^* \\ \rightarrow \end{array} H^*(\Omega, S'') \xrightarrow{i^*} H_F^*(S, S'')$$

(обычная относительная когомология).

Дуальность (\cap -произведения или интеграл) \Updownarrow (коэффициенты в \mathbb{C}).

(4) Гомология

$$H_*^c(\Omega, S \cup S'') \begin{array}{c} \uparrow p \\ \leftarrow \end{array} H_*^c(\Omega, S'') \leftarrow H_*^c(S, S'')$$

∂ -обычная граница (обычная относительная гомология).

Замечание. Точная последовательность (4) не будет точной последовательностью, ассоциированной с триплетом $(\Omega, S \cup S'', S'')$; она отличается от нее на изоморфизм вырезания $H_*^c(S \cup S'', S'') \cong H_*^c(S, S'')$ в силу свойства стягивания окрестности для $S \cap S''$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приводятся классические результаты о семействах носителей, о \cap -умножении и об обобщенной двойственности Пуанкаре [6].

Определение. Семейством носителей в паракомпактном топологическом пространстве называется:

S_0 : Семейство таких замкнутых множеств φ для X , что:

S_1 : $A \in \varphi$ и $B \in \varphi \Rightarrow A \cup B \in \varphi$

S_2 : $A \in \varphi$
 A' — замкнутое подмножество } $\Rightarrow A' \in \varphi$

S_3 : $A \in \varphi \Rightarrow \exists N(A)$, такая окрестность A , для которой $N(A) \in \varphi$.

Определение. Для двух семейств баз φ и ψ в X семейство определяется согласно $A \in \varphi\psi \Leftrightarrow (A \in \varphi \text{ и } A \in \psi)$.

Примеры семейств (нам понадобится каждое из них).

$\varphi = F(x)$ — семейство в X всех замкнутых подмножеств на X ,
 $\varphi = F(X - S)$ — семейство в X таких замкнутых подмножеств на X , которые не пересекаются с замкнутым подмножеством S ; это семейство называется замкнутым в X семейством для $X - S$.

$\varphi = c$ — семейство в X компактных подмножеств на X (если X — локально компактно и если отбрасывается S_3). φ — сингулярная гомология на X (с коэффициентами в Z).

Случай 1. φ — семейство $F(X)$ всех замкнутых подмножеств X_n .

Пусть $X_n = \text{Hom}(\Delta_n, X)$ обозначает множество сингулярных n -симплексов на X , и пусть $C_*(X)$ обозначает обычный комплекс групп сингулярных цепей, где $C_n(X)$ — свободная абелева группа на X_n . Пусть $C_*^F(X)$ обозначает комплексные абелевы группы, построенные следующим образом. Пусть $C_n^F(X)$ — абелева группа локально конечных линейных комбинаций сингулярных n -симплексов на X . Это значит, если $(\sigma_i)_{i \in I}$ — семейство различных сингулярных n -симплексов с (компактным) образом σ_i в X , то бесконечная линейная комбинация $\gamma = \sum n_i \sigma_i$ принадлежит $C_n^F(X)$ тогда и только тогда, когда каждая точка имеет открытую окрестность, которая пересекается только с конечным числом симплексов — $\sigma_i s$. Назовем базой рассматриваемой цепи γ объединение соответствующих ей симплексов $\sigma_i s$; это — замкнутое множество в X .

Очевидно, что $C_n(X) \subset C_n^F(X)$. Граничный оператор $C_n^F(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^F(X)$ локально индуцирован обычным граничным оператором $C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X)$, и поэтому $\partial \circ \partial = 0$. Пусть $H_n^F(X)$ обозначает гомологию размерности n для комплекса $C_*^F(X)$.

Определение. $H_n^F(X)$ называется n -группой $F(X)$ -сингулярной гомологии для X .

Замечание. $X \rightsquigarrow H_n^F(X)$ оказывается ковариантным функтором (скажем, на категории собственных отображений).

Случай 2. φ — любое семейство баз для X .

Очевидно, $\varphi \subset F(X)$ (см. аксиому S_0). Пусть $C_n^\varphi(X) \subset C_n^F(X)$ означает подмножество $C_n^F(X)$ (см. аксиомы S_1 и S_2). Образ $\partial C_n^\varphi(X)$ в $C_{n-1}^F(X)$ фактически лежит в $C_{n-1}^\varphi(X)$ (см. S_1 и S_2). Поэтому C_*^φ — комплекс абелевых групп.

Определение. φ -сингулярной гомологией X называется $H_*^\varphi(X)$, гомология комплекса $C_*^\varphi(X)$.

Замечание. Аксиома S_3 не была использована в приведенном определении, и поэтому обычная сингулярная гомология для X есть не что иное, как $H_*^c(X)$ (см. пример 3, в котором $\varphi = c$).

Замечание. Функтор $(\varphi, X) \rightsquigarrow H_p^\varphi(X)$ ковариантный (на очевидной категории топологических пространств с семейством баз).

Напомним основную теорему теории сингулярных гомологий.

Определение. Семейство «малых множеств» для X — это семейство \mathcal{F} подмножеств X , которые стабильны относительно включений (т. е. из $A \in \mathcal{F}$ и $B \subset A$ следует $B \in \mathcal{F}$) и содержат открытое покрытие X (это понятие совершенно отлично от понятия семейства баз). Мы полагаем $\tilde{X}_n^\mathcal{F} = \{\sigma \in X_n \mid \bar{\sigma} \in \mathcal{F}\}$ и ${}^\mathcal{F}C_n(X)$ — свободная абелева группа на $\tilde{X}_n^\mathcal{F}$, и, следовательно, ${}^\mathcal{F}C_n(X) \xrightarrow{i} C_n(X)$ — включение комплексов.

Сформулируем теперь основную теорему: индуцированный i гомоморфизм ${}^\mathcal{F}H_n(X) \xrightarrow{i_*} H_n(X)$ гомологий этих комплексов является изоморфизмом.

Подобным образом для данного семейства φ носителей определим

$${}^\varphi C_n^\varphi(X) = \{\alpha = \sum n_i \sigma_i \in C_n^\varphi(X) \mid \bar{\sigma}_i \in \mathcal{F}\}.$$

Тогда ${}^\varphi C_n^\varphi(X) \xrightarrow{i} C_n^\varphi(X)$ будет подкомплексом $C_n^\varphi(X)$ и из приведенного доказательства основной теоремы следует (с использованием локальной конечности), что i индуцирует изоморфизм

$${}^\varphi H_n^\varphi(X) \xrightarrow{i_*} H_n^\varphi(X).$$

φ -сингулярная когомология

Случай I. $\varphi = F(X)$. Пусть $C^*(X)$ обозначает обычный комплекс сингулярной когомологии. Поэтому $C^n(X) = Z^{\tilde{X}}_n$ — группа Z -значных функций на $X_n = \text{Hom}(\Delta_n, X)$. Говорят, что коцепь $\alpha \in C^n(X)$ обращается в нуль на открытом подмножестве U для X , если $\bar{\alpha}(\sigma) = 0$ для каждого сингулярного симплекса σ с носителем $\bar{\sigma}$ в U .

Определение. Носителем α называется дополнение к объединению открытых множеств, на которых он обращается в нуль. Это замкнутое множество обозначим $\bar{\alpha}$ (заметим, что α не обязательно исчезает для открытого подмножества $X - \bar{\alpha}$).

Мы определяем $C_F^*(X)$ как $C^*(X)$ и $H_F^*(X)$ как гомологию $C^*(X)$.

Случай II. φ — любое семейство носителей в X . Пусть $C_\varphi^n(X) \subset C_F^n(X)$ обозначает подмножество из $C_F^n(X)$, образованное коцепями с базой в φ . Из аксиом S_1 и S_2 следует, что $C_\varphi^*(X)$ — комплекс абелевых групп.

Определение. φ -сингулярной когомологией для X называется гомология $H_\varphi^*(X)$ только что определенного комплекса $C_\varphi^*(X)$.

Замечание. Функтор $(\varphi, X) \rightsquigarrow H_\varphi^*(X)$ является контравариантным функтором (на очевидной категории пространств с семейством баз).

 Π -произведение

Пусть Δ_{p+r} — полиэдр с вертексами $\{0, 1, \dots, p+r\}$; назовем его передней p -гранью полиэдра ${}^p\Delta$ с вертексами $\{0, 1, \dots, p\}$ и противоположной r -гранью полиэдра Δ^r с вертексами $\{p, p+1, \dots, p+r\}$.

Определение. Если $\sigma: \Delta_{p+r} \rightarrow X$ является сингулярным симплексом, то мы будем называть для σ передней p -гранью ${}^p\sigma$ и противоположной r -гранью σ^r соответственно ограничениям ${}^p\sigma = \sigma|{}^p\Delta$ и $\sigma^r = \sigma|\Delta^r$.

Определение. Π -произведением называется билинейное отображение $C^p(X) \times C_{p+r}(X) \xrightarrow{\Pi} C_r(X)$, индуцированное $(\alpha, \sigma) \rightsquigarrow \alpha \cap \sigma = \alpha({}^p\sigma) \cdot \sigma^r = \alpha \cap \sigma$.

Формула 1

$$\alpha \cap \delta\sigma = (\delta\alpha) \cap \sigma + (-1)^{\dim \alpha} \delta(\alpha \cap \sigma).$$

Формула 2

$$f_*(f^*\alpha \cap \sigma) = \alpha \cap f_*\sigma,$$

где $f: X \rightarrow Y$ является отображением топологических пространств. Очень простое доказательство этих формул мы предоставляем читателю.

Предложение. Если φ и ψ — два семейства носителей в X , то существует гомоморфизм $H_\varphi^p(X) \otimes H_{\psi+r}^\psi(X) \xrightarrow{\alpha \cap} H_r^{\varphi\psi}(X)$.

Доказательство состоит из нескольких этапов.

1) Пусть $\alpha \in C_\varphi^p(X)$. Поскольку $C^p(X) \subset C_\varphi^p(X)$, то существует группа гомоморфизмов $\alpha \cap : C_{p+r}^\psi(X) \xrightarrow{\alpha \cap} C_r^\psi(X)$, которые определяются следующим образом: $\gamma = \sum n_i \sigma_i \rightsquigarrow \alpha \cap \gamma = \sum n_i (\alpha \cap \sigma_i)$ (см. аксиомы S_1 и S_2).

2) В силу третьей аксиомы S_3 для семейства φ существует окрестность $N(\bar{\alpha}) \in \varphi$ носителя $\bar{\alpha}$ для α .

3) По определению носителя $\bar{\alpha}$ для α существует такое открытое покрытие \underline{U} для $X - \bar{\alpha}$, что если σ — такой сингулярный симплекс, что $\sigma \subset u_j$ для некоторых $u_i \in \underline{U}$, то

$$\alpha \cap \sigma = \alpha \cdot (\sigma) \cdot \sigma' = 0,$$

поскольку тогда $\sigma \subset u_j$.

4) Семейство $\mathcal{F} = \underline{U} \cup N(\bar{\alpha})$, которое определяется согласно $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A = N(\bar{\alpha}) \text{ или } A \in \underline{U})$, порождает семейство «малых множеств» для X , также обозначаемое через \mathcal{F} . Поэтому можно рассмотреть с помощью ограничения гомоморфизм $\alpha \cap : \mathcal{F} C_{p+r}^\psi(X) \rightarrow \mathcal{F} C_r^\psi(X)$, который в силу этапа 3 в действительности является группой гомоморфизмов $**\alpha \cap : \mathcal{F} C_{p+r}^\psi(X) \rightarrow \mathcal{F} C_r^{\varphi\psi}(X)$.

5) По формуле 1, если α — коцикл, то гомоморфизм $**$ оказывается гомоморфизмом комплексов $\alpha \cap : \mathcal{F} C_{p+r}^\psi(X) \rightarrow \mathcal{F} C_r^{\varphi\psi}(X)$, а также гомоморфизмом его гомотопий $\mathcal{F} H_{p+r}^\psi(X) \xrightarrow{\alpha \cap} \mathcal{F} H_r^{\varphi\psi}(X)$.

6) Также по формуле 1 указанный гомоморфизм оказывается нулевым гомоморфизмом, если α — кограница.

7) С использованием канонических изоморфизмов из основной теоремы мы определяем гомоморфизм $H_{p+r}^\psi(X) \xrightarrow{\alpha \cap} H_r^{\varphi\psi}(X)$ как двойную стрелку, которая делает нижеприводимую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} H_{p+r}^\psi(X) & \xrightarrow{\alpha \cap} & H_r^{\varphi\psi}(X) \\ (i_*)^{-1} \downarrow \approx & & \approx \uparrow i_* \\ \mathcal{F} H_{p+r}^\psi(X) & \xrightarrow{\alpha \cap} & \mathcal{F} H_r^{\varphi\psi}(X). \end{array}$$

Таким образом, этапом 6 заканчивается доказательство существования гомоморфизма

$$\boxed{H_{\Phi}^p(X) \otimes H_{p+r}^{\Psi}(X) \xrightarrow{\cap} H_r^{\Phi\Psi}(X).}$$

Следствие. Если $\psi = F(X)$ — семейство всех замкнутых множеств из X , то $\varphi\psi = \varphi F(X) = \varphi$. Отсюда получаем гомоморфизм

$$H_{\Phi}^p(X) \otimes H_{p+r}^F(X) \xrightarrow{\cap} H_r^{\varphi}(X).$$

Гомоморфизм Пуанкаре Φ

В том случае, когда топологическое пространство X — ориентированное связное паракомпактное топологическое многообразие размерности n , существует предпочтительный порождающий элемент $[\mu]$ для $F(X)$ — гомологии размерности n , а именно элемент $[\mu] \in H_n^F(X)$. Поэтому существует предпочтительный гомоморфизм

$$H_{\Phi}^{n-p}(X) \xrightarrow{\cap[\mu]} H_p^{\Phi}(X).$$

Последний называется гомоморфизмом Пуанкаре Φ .

Теорема Пуанкаре. *Определенный гомоморфизм Φ является изоморфизмом. Следовательно, имеет смысл Φ^{-1} .*

Определение. Гомоморфизмом $H_p^{\Phi}(X) \times H_q^{\Psi}(X) \rightarrow H_{p+q-n}^{\Phi\Psi}$, даваемым $(a, b) \rightsquigarrow (\Phi^{-1}a) \cap b$, называется гомоморфизм пересечений в гомологии для ориентированного многообразия X .

Замечание. Если возьмем определенное выше X и замкнутое множество S , которое является стянутой окрестностью, то

$$H_p^F(X) = \underset{\leftarrow K}{L} H_p(X, X - K) \quad \text{и} \quad H_p^F(X - S) = \underset{\leftarrow K}{L} H_p(X - S, X - K \cup S),$$

где L — проективный предел по компактным множествам K из X .

Элементарное доказательство сформулированной обобщенной теоремы Пуанкаре слишком длинно, чтобы его можно было привести здесь. Мы даем лишь набросок доказательства с использованием теории пучков [7].

I. Для любого паракомпактного топологического пространства X сделаем следующее.

1) Образует сингулярный когомологический дифференциальный градуированный пучок $\mathcal{G}^*(X)$ и сингулярный гомологический дифференциальный градуированный пучок $\mathcal{E}_*(X)$, ассоциируемый с очевидными предпучками: $U \rightsquigarrow C^*(U)$ для $\mathcal{G}^*(X)$ и $V \rightsquigarrow C_*(X, X - V)$ для $\mathcal{E}_*(X)$ [U, V — открытые множества в X ; C^* , C_* — обычные сингулярные (ко)цепные группы].

2) Образует билинейный гомоморфизм пучков $[\cap]: \mathcal{F}^*(X) \times \mathcal{E}_*(X) \rightarrow \mathcal{E}_*(X)$, который определяется так: если X паракомпактно, а следовательно, нормально, то для любого открытого множества U в X существует такое открытое множество V , для которого $\bar{V} \subset U$. Отсюда для такой пары (U, V) мы получаем гомоморфизм \cap -произведения из обычной сингулярной (ко)гомологии

$$C^p(U) \otimes C_{p+r}(U, U-V) \xrightarrow{\cap} C_r(U, U-V).$$

Однако вырезание $C_*(X, X-V) \approx C_*(U, U-V)$. Следовательно, росток гомоморфизма предпучков

$$(\bar{V} \subset U) \rightsquigarrow [C^p(U) \otimes C_{p+r}(X, X-V) \xrightarrow{\cap} C_r(X, X-V)],$$

что индуцирует $[\cap]$ -гомоморфизм для соответствующих пучков.

3) Покажем, что пучок $\mathcal{F}^p(X)$ оказывается *мягким* для всех p [5].

4) Используя основную теорему для сингулярной (ко)гомологии, покажем, что дифференциальный пучок $\mathcal{E}_*(X)$ оказывается гомотопически мелким [6, 7]. Следовательно, когомология размерности q для X со значением в указанном пучке равна нулю, т. е. $H^q(X, \mathcal{E}_*, X) = 0$ для всех $q \geq 1$.

II. Для ориентированного связного топологического многообразия размерности n мы имеем следующий гомоморфизм правых резольвент простого пучка Z

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow Z \rightarrow \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{F}^1 & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{F}^2 & \rightarrow & \\ & \downarrow id & \downarrow \cap \mu & \downarrow \cap \mu & \downarrow \cap \mu & & \\ 0 \rightarrow Z & \xrightarrow{i} & \mathcal{E}_n & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}_{n-1} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{E}_{n-2} \rightarrow \dots \end{array}$$

где $\mu = i1$ — образ в \mathcal{E}_* порождающего элемента $1 \in Z$ ($[\mu]$ — фундаментальный класс для X) и $\cap \mu = [\cap]\mu$ определено в п. 2. Использование п. 3 и 4 и фундаментальной теоремы теории когомологий [7] завершает доказательство.

IV. ФОРМУЛА ПИКАРА — ЛЕФШЕЦА

Введение

Основной вопрос состоит в следующем: какого рода сингулярность определяет элемент аналитической функции, определенный в следствии 4, передними точками окружающей изотопической компоненты $B(t_0, \mathcal{F})$?

Ответ мы дадим только в следующем простом случае.

1) Когда аналитическое подмножество $S(t_0)$ для X оказывается объединением для семейства комплексных аналитических подмногообразий $S_i(t)$, находящихся в общем положении и обладающих размерностью единицы (напомним следствие 1 из § 2 разд. I).

2) Когда фронт для $B(t_0, \mathcal{F})$, который окружает рассматриваемую точку, сделан из 1-комплексных аналитических подмногообразий L для T , где L имеет размерность единица.

3) Когда для $t \in L$ поверхности $S_i(t)$ занимают общее положение в X , за исключением изолированной точки $x_0(t) \in X$ (нулевой пинч), когда эти (гипер)поверхности имеют невырожденный квадратичный компакт (подробности см. ниже).

Ответ на поставленный вопрос будет дан в § 2 этого раздела, где описывается изменение гомологического класса $h_q(X - S(t)) \in \in H_q^c(X - S(t))$ под действием окружающей изотопии ψ , ассоциированной с петлей \widehat{tt} вокруг L .

§ 1. Нулевой пинч и квадратичный нулевой пинч для (S_1, S_2, \dots, S_m)

Описываемую ниже ситуацию мы называем квадратичным нулевым пинчем (иногда применяется неточное и расплывчатое название «простой пинч»). Многообразию $Y = \overset{r}{X} \times T$ допускает такое локальное отображение $y \rightsquigarrow (x_1, x_2, \dots, x_r, t)$, для которого

$$\begin{cases} S_1: & s_1 \equiv x_1 = 0, \\ S_{m-1}: & s_{m-1} \equiv x_{m-1} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$S_m: s_m \equiv x_m^2 + x_{m+1}^2 + \dots + x_r^2 - (x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}) - k(t) = 0, \quad (1.1a)$$

где $k(t)$ — гомоморфная функция от t .

При $k(t) \neq 0$ имеется общее положение; при $k(t) = 0$ имеется общее положение для любого подсемейства для $\{S_1, \dots, S_m\}$, но не для всего семейства; для пересечения ${}^{(m)}S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m$ локальное уравнение (в многообразии $S_1 \cap S_2 \dots \cap S_{m-1}$) квадратично

$$x_m^2 + x_{m-1}^2 + \dots + x_r^2 - k(t) = 0$$

[имеет квадратичную точку при $k(t) = 0$].

Определение. Будем говорить, что система имеет квадратично нулевой пинч в точке $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$, если $k(t) = 0$. Указанная терминология возникла в связи со следующим. Если система $\{S_i\}_{i=1, \dots, m}$ не находится в общем положении в точке

$x \in {}^{(m)}S = S_1 \cap \dots \cap S_m$, то это означает, что приводимая ниже система уравнений для фиксированного t

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial s_i}{\partial x_k} = 0 & \text{при } k = 1, 2, \dots, r, \\ s_i(x, t) = 0 & \text{при } i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1.2)$$

имеет в качестве решения в этой точке x α_i не все равные нулю.

Определение. Если в окрестности $t_1 \in T$ приведенная система не имеет нетривиального решения, кроме как в точках $t \in L$ (L — подмножество для T), и если для $\forall t \in L$ решение системы (1.2) единственно для x и (с точностью до однородного множителя) для α , то мы говорим, что система $\{S_1, \dots, S_m\}$ имеет нулевой пинч в точке $x(t)$ (для $t \in L$).

Следует заметить, что L — аналитическое подмножество пространства параметров T . Здесь мы интересуемся только такими L , которые есть (локально) аналитические подмногообразия размерности единица¹⁾.

Замечание. Из теоремы о неявной функции следует, что $x(t)$ и $\alpha_i(t)$ — аналитические функции от $t \in L$.

Определение. (Аналитическое) множество L называется из физических соображений ландаувской поверхностью.

Характеристика квадратичного пинча. Квадратичный нулевой пинч характеризуется такой точкой нулевого пинча, в которой гессиан для S_m в ${}^{(m-1)}S = S_1 \cap \dots \cap S_{m-1}$ отличен от нуля.

Замечание. Для нулевого неквадратичного пинча локальные уравнения те же самые, что и система (1.1), за тем исключением, что для последнего многообразия S_m будет иметь

$$S_m: s_m = f(x_m, x_{m+1}, \dots, x_r) - (x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}) - k(t) = 0, \quad (1.3)$$

где f — аналитическая функция, на которую наложены некоторые ограничения.

§ 2. Теорема Пикара — Лефшеца

Эта теорема описывает автоморфизм ψ_* групп гомологий $H_*^c(X - S(t)) \xrightarrow{\psi_*} H_*^c(X - S(t))$, который индуцируется X -окружающей изотопией ψ , ассоциируемой с петлей t , окружающей L (L — поверхность для квадратичного нулевого пинча).

¹⁾ В противном случае $T - L$ будет просто-связно и ψ будет изотопным единице.

Теорема. Указанный автоморфизм ψ_* дается при $q \neq r$ или в случае $r = m - 1$ при $q = r = m - 1$ тождественным отображением

$$h_q(X - S(t)) \overset{\psi_*}{\rightsquigarrow} h_q(X - S(t)); \quad (2.1)$$

в случае $r \neq m - 1$, ψ_* отображением

$$h_r(X - S(t)) \overset{\psi_*}{\rightsquigarrow} h_r(X - S(t)) + ne(X - S(t)), \quad (2.1a)$$

где определения исчезающего класса $e(X - S(t))$ и целого числа n даются в процессе доказательства.

Чтобы упростить обозначения, мы возьмем

$$T \neq \emptyset \text{ и } L = \{0\},$$

т. е. $k(t) \equiv t$, и введем обозначения

$${}^{(h)}S = Si_1 \cap Si_2 \cap \dots \cap Si_h,$$

$${}^{(h)}S = Si_1 \cup Si_2 \cup \dots \cup Si_h,$$

где $(h) = \{i_1, i_2, \dots, i_h\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ с индуцированным порядком.

Идея доказательства состоит в том, чтобы разобраться, что происходит в ${}^{(m)}S$.

1. Локализация.

Выделим в X пинчевую точку x_0 с помощью шаровой окрестности W . Например, положим в локальных координатах

$$s_1(x, t) \equiv x_1,$$

$$s_2(x, t) \equiv x_2,$$

$$\dots$$

$$s_{m-1}(x, t) \equiv x_{m-1},$$

$$s_m(x, t) \equiv x_m^2 + \dots + x_r^2 - (x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1}) - t.$$

Возьмем

$$W = \{x \mid \|x\| < 1\} \subset X.$$

Тогда для $|t| < 1$ поверхности $S_i(t)$ пересекают переднюю границу $\dot{W} = \{x \mid \|x\| = 1\}$ в общем положении. Используя изотопическую теорему и замечание 2 после нее (см. раздел I), придем к следующей лемме.

Лемма 1 (о локализации). Окружающая изотопия $\{S_i(t)\}$ в X , привязанная к любому пути в $0 \neq |t| < 1$, оставляет границы \dot{W} глобально инвариантными и индуцирует: (внутреннюю) окружающую изотопию $\{S_i(t)\}$ в $\bar{W} : \|x\| < 1$; (внешнюю) окружающую изотопию $\{S_i(t)\}$ в $X - W$. Обе изотопии совпадают на \dot{W} . Кроме того, внешняя окружающая изотопия определена даже для пути, проходящего через точку $t = 0$, так что ее классы зависят только от концевой точки этого пути.

Следствие 1. Для любой замкнутой петли в $0 \neq |t| < 1$ результирующая окружающая изотопия ψ изотопична (или может быть взята такой) тождественному отображению вне W .

Следствие 2. Если класс $h(X - {}^{(m)}S(t))$ содержит цикл, который лежит в $X - {}^{(m)}S - W$, он инвариантен относительно любой петли в $0 \neq |t| < 1$.

2. Гомология в W .

Отметим, что в W все ${}^{(h)}S$ гомеоморфны евклидовым пространствам, за исключением ${}^{(m)}S(t)$, где ${}^{(m)}S(t)$ — комплексная $(r - m)$ -сфера в \mathbb{C}^{r-m+1}

$${}^{(m)}S(t): x_m^2 + \dots + x_r^2 - t = 0 \quad (2.2)$$

(последнее справедливо для $m = r + 1$; в этом случае пустое множество рассматривается как сфера с размерностью минус единица). Ее можно стянуть¹⁾ в «действительную» $(r - m)$ -сферу

$$x_m^2 + \dots + x_r^2 - t = 0,$$

где $x_m/\sqrt{t}, \dots, x_r/\sqrt{t}$ действительны. После ориентирования эта действительная сфера определяет цикл, гомологический класс которого $e({}^{(m)}S \cap W) \in H_{r-m}^c({}^{(m)}S \cap W)$ оказывается единственным порождающим элементом группы редуцированных гомологий $\tilde{H}_*^c({}^{(m)}S \cap W)$.

Определение. Гомологический класс $e({}^{(m)}S \cap W)$ назовем исчезающим классом для ${}^{(m)}S \cap W$ (действительно, i^1 исчезает для $t = 0$). Таким образом, для всех $(k) \subset \{1, 2, \dots, m\}$, таких, что $(k) \neq \{1, 2, \dots, m\}$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{H}_*^c({}^{(m)}S \cap W) &\cong \tilde{H}_*^c(W) = 0 && \text{для всех размерностей;} \\ \tilde{H}_*^c({}^{(m)}S \cap W) &= 0 && \text{для всех размерностей, за исключением} \\ &&& \text{размерности } r - m; \quad (2.3) \\ \tilde{H}_{r-m}^c({}^{(m)}S \cap W) &\neq 0 && \text{для размерности } r - m; \\ \tilde{H}_{r-m}^c({}^{(m)}S \cap W) &= J && \text{тождественная циклическая} \\ &&& \text{группа.} \quad (2.3a) \end{aligned}$$

Лемма. Приводимая ниже граничная последовательность является последовательностью изоморфизмов

$$\begin{array}{c} \tilde{H}_r^c(W, {}^{(m)}S) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{r-1}^c(S_1 \cap W, {}^{(2\dots m)}S) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \\ \left[\begin{array}{c} \tilde{H}_{r-k}^c({}^{(1\dots k)}S \cap W, {}^{(k+1\dots m)}S) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{r-m}^c({}^{(m)}S \cap W) \\ \partial^m \end{array} \right] \uparrow \end{array}$$

¹⁾ Комплексная n -сфера диффеоморфна касательному расслоенному пространству действительной n сферы.

Доказательство. Положим

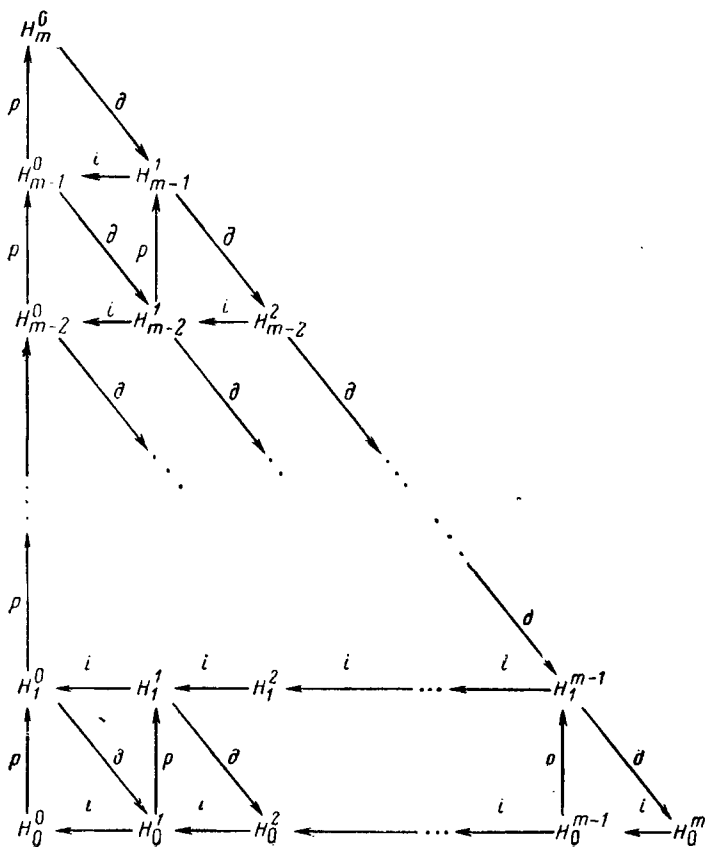
$$H_h^k = \tilde{H}^c({}^{(k)}S \cap W, {}_{(h)}S),$$

где (h) и (k) — непересекающиеся друг с другом подмножества для $\{1, \dots, m\}$, и условимся, что $(\emptyset)S = W, \emptyset S = \emptyset$.

Обратим внимание, что H_h^k зависит только от чисел h и k , а не от отдельных элементов множеств (h) и (k) . Поэтому можно построить из точных треугольников из гомологий

$$\begin{array}{ccc} H_{h+1}^k & & \\ \rho \uparrow & \searrow \partial & \\ H_h^k & \xleftarrow{i} & H_h^{k+1} \end{array}$$

следующую диаграмму:



где только треугольники $\rho \begin{array}{c} \nearrow \partial \\ \downarrow i \end{array}$ являются точными. Далее, формула (2.3) говорит нам, что все группы последней строки тривиальны, кроме H_0^m , и поэтому все самые нижние $\partial \searrow$ являются изоморфизмами. После этого те же рассуждения можно применить к предпоследней строке и т. д. Самая верхняя диагональ приводит к граничной последовательности из леммы.

Определение. Порождающие элементы групп из только что доказанной леммы называются исчезающими классами соответствующих пространств и обозначаются следующим образом:

$$e(W, (m)S) \xrightarrow{\partial} e(S_1 \cap W, (2 \dots m)S) \xrightarrow{\partial} \dots \\ \dots \xrightarrow{\partial} e((1 \dots k)S \cap W, (k+1 \dots m)S) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} e((m)S \cap W)$$

δ^m

Лемма. Кограничная последовательность

$$H_r^F(W - (m)S) \xleftarrow{\partial} H_{r-1}^F(S_1 \cap W - (2 \dots m)S) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} \\ H_{r-k}^F((k)S \cap W - (k+1 \dots m)S) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} H_{r-m}^F((m)S \cap W)$$

δ^m

является последовательностью изоморфизмов и все другие группы этих гомологий тривиальны [кроме $H_{2(r-m)}^F((m)S \cap W)$], если мы условимся, что $H_q^F((m)S \cap W) = \tilde{H}_q^c((m)S \cap W)$, когда $(m)S \cap W$ — компакт.

Доказательство. Указанная последовательность выводится из леммы о граничной последовательности с использованием леммы о двойственном пересечении (см. раздел III).

Определение. Порождающие элементы этих групп называются (ко)исчезающими классами соответствующих пространств и обозначаются так:

$$\varepsilon(W - (m)S) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} \varepsilon((k)S \cap W - (k+1 \dots m)S) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} \varepsilon((m)S \cap W)$$

δ^m

Кронекеровский индекс (или индекс пересечения) определяется следующим образом.

$$\text{Лемма. } \text{KI}[\varepsilon(W - (m)S), e(W, (m)S)] = +1.$$

Лемма. Если $r \neq m - 1$, то гомоморфизм

$$H_{r-m}^c({}^{(m)}S \cap W) \xrightarrow{\delta^m} H_r^c(W - {}_{(m)}S)$$

является изоморфизмом (δ^m — итерированный кограничный оператор).

Доказательство. Теорема 3 о разложении из раздела II справедлива в рассматриваемом случае. Поэтому имеем

$$H_r^c(W - {}_{(m)}S) = \bigoplus_{h=\{1, \dots, m\}} \delta^h H_{r-|h|}^c({}^{(h)}S \cap W).$$

Воспользуйтесь формулами (2.3) и закончите доказательство.

Определение. Пусть i_* будет гомоморфизмом $H_*^c(W - {}_{(m)}S) \rightarrow H_*^c(X - {}_{(m)}S)$, который дается выключением $W \subseteq X$. Мы обозначим через

$$e(W - {}_{(m)}S) \in H_r^c(W - {}_{(m)}S), \quad e(X - {}_{(m)}S) \in H_r^c(X - {}_{(m)}S)$$

классы, определяемые как

$$\left. \begin{aligned} e(W - {}_{(m)}S) &= \delta^m e({}^{(m)}S \cap W); \\ e(X - {}_{(m)}S) &= i_* e(W - {}_{(m)}S) = i_* \delta^m e({}^{(m)}S \cap W). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

3. W есть след или следовой (в шаре) гомоморфизм.

Интуитивно ясно, что W след. Например, $H_*^c(X - {}_{(m)}S) \xrightarrow{W^*} H_*^F(W - {}_{(m)}S)$ — это естественный гомоморфизм, определяемый как *будущий геометрический след* цикла из $X - {}_{(m)}S$ в шаре W . Точное определение состоит в следующем.

Как и прежде, W — открытый шар в X с центром в точке x_0 . Пусть \dot{W} — его передняя граница; это — компактное подмногообразие в X действительной размерности единица, и оно является областью — ретрактом в \bar{W} (замыкание для W); пусть K — компакт в \dot{W} .

W -следовой гомоморфизм дается композицией, указанной в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} H_*^c(X - W - S) & \rightarrow & H_*^c(X - S) & \rightarrow & H_*^c(X - S, X - W - S) \\ & \searrow & & & \downarrow \text{Вырезание} \\ & & H_*^c(\bar{W} - S, \dot{W} - S) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & H_*^F(\bar{W} - S) & = & L H_*^c(W - S, W - K - S), \\ & & \swarrow & & \downarrow \bar{K} \\ & & H_*^F(\bar{W} - S) & & \end{array}$$

W -следовой гомоморфизм

(См. замечание в приложении к разделу III после теоремы Пуанкаре.)

4. Доказательство теоремы Пикара — Лефшеца.

Дадим теперь более аккуратную формулировку этой теоремы.

Теорема. Одна петля по t вокруг L индуцирует автоморфизм ψ для $H_q^c(X - S(t))$, который для $q \neq r$ и в случае $q = r = m - 1$ оказывается тождеством, а для $q = r \neq m - 1$ оказывается отображением

$$h_r(X - (m)S(t)) \xrightarrow{\psi} h_r(X - (m)S(t)) + ne(X - (m)S(t)), \quad (2.5)$$

где $e(X - (m)S(t)) = i_* \delta^m e^{(m)}S \cap W$, согласно (2.4),

$$n = (-1)^{[(r-m+1)(r-m+2)]/2} \text{KI}[h_r(X - (m)S(t)), e(W, (m)S(t))],$$

δ^m — это m раз итерированный кограничный оператор Лере, определение которого дано в разделе III. Здесь $e^{(m)}S \cap W$ и $e(W, (m)S(t))$ — исчезающие классы, KI есть кронекеровский индекс.

Доказательство строится в несколько этапов. Мы имеем следующую диаграмму, относительно которой докажем, что ее квадраты коммутативны:

$$\begin{array}{ccccc} H_q^c(X - (m)S) & \xleftarrow{\delta} & H_{q-1}^c(S_1 \cap X - (2\dots m)S) & \xleftarrow{\delta} & \dots & \xleftarrow{\delta} & H_{q-m}^c({}^{(m)}S) \\ \downarrow W_* & & \downarrow W_* & & & & \downarrow W_* \\ H_q^F(W - (m)S) & \xleftarrow{\delta} & H_{q-1}^F(S \cap W - (2\dots m)S) & \xleftarrow{\delta} & \dots & \xleftarrow{\delta} & H_{q-m}^F({}^{(m)}S \cap W), \\ H_{2r-q}^c(W, (m)S) & \xrightarrow{\partial} & H_{2r-q-1}(S_1 \cap W, (2\dots m)S) & \xrightarrow{\partial} & \dots & \xrightarrow{\partial} & H_{2r-q-m}^c({}^{(m)}S \cap W), \\ & & & & & & (2.6) \\ H_q^F(W - (m)S) & \xleftarrow{\delta} & H_{q-1}^F(S_1 \cap W - (2\dots m)S) & \xleftarrow{\delta} & \dots & \xleftarrow{\delta} & H_{q-m}^F({}^{(m)}S \cap W) \\ \downarrow \text{var} & & \downarrow \text{var} & & & & \downarrow \text{var} \\ H_q^c(W - (m)S) & \xleftarrow{\delta} & H_{q-1}^c(S_1 \cap W - (2\dots m)S) & \xleftarrow{\delta} & \dots & \xleftarrow{\delta} & H_{q-m}^c({}^{(m)}S \cap W) \\ \downarrow i_* & & \downarrow i_* & & & & \downarrow i_* \\ H_q^c(X - (m)S) & \xleftarrow{\delta} & H_{q-1}^c(S_1 - (2\dots m)S) & \xleftarrow{\delta} & \dots & \xleftarrow{\delta} & H_{q-m}^c({}^{(m)}S). \end{array}$$

Здесь ∂ — граничный оператор, δ — кограничный оператор Лере, W_* — следовой (в шаре) гомоморфизм, i_* — гомоморфизм, индуцированный включением $W \xrightarrow{i} X$, var — вариационный гомоморфизм.

Рассмотрим этот гомоморфизм. Пусть ψ_* — автоморфизм, который индуцируется одной петлей вокруг L , для исследуемой группы $H_*^c(X - S(t))$. Назовем Var — гомоморфизм, определяемый как разность

$$\text{Var} = (\psi - \text{тождество}): H_*^c(X - S(t)) \rightarrow H_*^c(X - S(t)).$$

Предложение. Var можно факторизовать на W_* и i_* с помощью нового гомоморфизма var следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} H_q^c(X - (m)S) & \xrightarrow{\text{Var}} & H_q^c(X - (m)S) \\ \downarrow W_* & & \uparrow i_* \\ H_q^F(\underline{W} - (m)S) & \xrightarrow{\text{var}} & H_q^c(W - (m)S), \end{array}$$

или обобщенно

$$\begin{array}{ccc} H_q^c(kS - kS) & \xrightarrow{\text{Var}} & H_q^c(kS - k'S) \\ \downarrow W_* & & \uparrow i_* \\ H_q^F(kS \cap \underline{W} - kS) & \xrightarrow{\text{var}} & H_q^c(kS \cap W - k'S), \end{array}$$

где $k = \{1, 2, \dots, k\}$ и $k' = \{k+1, k+2, \dots, m\}$.

Доказательство. Нужно просто перефразировать два следствия из леммы о локализации (см. раздел I).

Действительно, из второго следствия вытекает факторизация Var на Var и i_*

$$\begin{array}{ccc} H_q^c(X - (m)S) & \xrightarrow{\text{Var}} & H_q^c(X - (m)S) \\ & \searrow \text{Var} & \uparrow i_* \\ & & H_q^c(W - (m)S), \end{array}$$

поскольку изменение цикла для $(X - (m)S)$ должно быть циклом $W - (m)S$. Из первого следствия вытекает факторизация var на Var и W_*

$$\begin{array}{ccc} H_q^c(X - (m)S) & & \\ W_* \downarrow & \searrow \text{Var} & \\ H_q^F(\underline{W} - (m)S) & \xrightarrow{\text{var}} & H_q^c(W - (m)S), \end{array}$$

поскольку изменение цикла из $(X - (m)S)$ то же, что его образа в W , при условии, что сохраняется поточечно фиксированным его пересечение с передней границей \dot{W} для W ; это определение var .

Подобные рассуждения можно провести для других групп цепочки. Основной пункт состоит в наличии коммутативности

квадратов, которая очевидна, поскольку граничный и кограничный операторы являются функторами (см. раздел II).

Теперь по лемме о кограничной последовательности группа $H_q^F(W - (m)S) = 0$ при $q \neq r$. Следовательно, var — нулевой гомоморфизм при $q \neq r$; он также оказывается нулевым при $r = m - 1$ и $q = m - 1$. Фактически четвертая цепочка гомоморфизмов для диаграммы (2.6) оказывается цепочкой изоморфизмов и самая правая группа оказывается пустым множеством, или что ее гомоморфизм var нулевой. Этим заканчивается доказательство формулы (2.5).

Теперь при $q = r \neq m - 1$ вторая, третья и четвертая цепочки диаграммы (2.6) оказываются цепочками изоморфизмов соответственно самым правым группам

$$H_{r-m}^F((m)S \cap W), \quad H_{r-m}^c((m)S \cap W), \quad H_{r-m}^F((m)S \cap W)$$

для $((m)S \cap W)$. Теперь учтем, что

- 1) четвертая цепочка — это цепочка изоморфизмов при $q = r$ (лемма о кограничной последовательности),
- 2) квадраты диаграммы (2.6) коммутативны,
- 3) для факторизации Var имеем $\text{Var} = i_* \text{var } W^*$.

Тогда получим основную формулу

$$\text{Var } h_r^c(X - (m)S) = \delta^m i_* \text{var} [(\delta^m)^{-1} W_* h_r^c(X - (m)S)].$$

Обратим внимание, что $[(\delta^m)^{-1} W_* h_r^c(X - (m)S)] \in H_{r-m}^F((m)S \cap W)$.

(2.7)

Указанной формулой можно пользоваться для любого нулевого пинча.

Из предосторожности мы проводим ниже все рассуждения специально для случая нулевого квадратичного пинча.

Для этого специального случая пространство $(m)S \cap W$ изотопно комплексу $(r - m)$ -сферы S^{r-m} . Пусть γ — порождающий элемент, выбранный с учетом ориентации $e((m)S \cap W) = \gamma H_{r-m}^c((m)S \cap W) = H_{r-m}^c(S^{r-m})$.

Тогда классическая формулировка теоремы Пикара — Лефшеца для сферы, на которую ссылается Лере [1], заключается в том, что

$$\text{var } \gamma = n'' e(S^{r-m}) = n'' e((m)S \cap W),$$

где

$$n'' = (-1)^{(r-m+1)(r-m+2)/2}$$

и

$e^{(m)}S \cap W \in H_{r-m}^c({}^{(m)}S \cap W)$ — порождающий элемент, дуальный к γ ; $KI [e^{(m)}S \cap W, e^{(m)}S \cap W] = +1$.

Теперь воспользуемся тем, что

4) кронекеровский индекс факторизуется с помощью W_* согласно

$$n' = KI [h_r^c(X - (m)S), e(W, (m)S)] = KI [W_* h_r^c(W - (m)S), e(W, (m)S)],$$

5) формулу $\langle \delta\sigma | h \rangle = \langle \sigma | \delta h \rangle$ для двойственного пересечения можно итерировать ($KI[\cdot, \cdot] = \langle \cdot | \cdot \rangle$), см. раздел III).

6) имеется двойственность пересечения бесконечных циклических групп

$$H_{r-m}^c({}^{(m)}S \cap W), \quad H_{r-m}^F({}^{(m)}S \cap W).$$

Тогда получим $(\delta^m)^{-1} W_* H_r^c(X - (m)S) = n' e^{(m)}S \cap W = n' \gamma$; отсюда следует формула

$$\text{Var } h_r^c(X - (m)S) = n e(X - (m)S),$$

где $n = n' n''$ и

$$e(X - (m)S) = i_* \delta^m e^{(m)}S \cap W.$$

Тем самым заканчивается доказательство формулы (2.5) и всей обобщенной теоремы Пикара — Лефшеца.

Замечание. Напомним, что наш выбор знака для δ отличается от Лере [1].

§ 3. Локальное ветвление интеграла

Изменение интеграла

$$I(t) = \int_h \frac{\overset{r}{\omega}}{S_1(t) \dots S_m(t)}, \quad (3.1)$$

где $\overset{r}{\omega}$ — гомоморфная r -форма в X , когда t один раз обходит ландаувскую поверхность L , соответствующую квадратичному нулевому пинчу для семейства $\{S_1, \dots, S_m\}$ (см. определение нулевого пинча семейства), можно рассчитать по формуле

$$(\text{Var } I)(t) = \int \frac{\overset{r}{\omega}}{i_* \delta^m e^{(m)}S \cap W \cdot S_1(t) \dots S_m(t)} \quad (3.2)$$

или

$$(\text{Var } I)(t) = (2\pi i)^m \int_{e^{(m)}S \cap W} \text{res}^m \frac{\omega^r}{S_1(t) \dots S_m(t)}, \quad (3.3)$$

где $(2\pi i)^m (\text{res})^m$ — транспонированный (в отношении итераций) гомоморфизм

$$H_F^*(X - {}^{(m)}S) \rightarrow H_F^{*-m}({}^{(m)}S)$$

для

$$H_*^c(X - {}^{(m)}S) \leftarrow \frac{\delta^m}{\delta} H_{*-m}^c({}^{(m)}\delta).$$

Как явно вычислить $(2\pi i)^m \text{res}^m$, описано в работе Лере [1] по теории вычетов. Следует обратить внимание, что в интеграл (3.3) входит форма степени $r - m$, а в интеграл (3.2) — форма степени r (из физических соображений аналитическая функция $\text{Var } I$ называется иногда абсорбционной частью для L для аналитической функции I).

ЛИТЕРАТУРА

1. Leray J., Bull. Soc. Math. Fr., 87, 81 (1959).
2. Milnor J., Morse theory, Ann. Math. Studies No. 55, Princeton.
3. Brown M., Gluck H., Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963).
4. Godement R., Théorie des Faisceaux, p. 161.
5. Cartan H., Seminaire H. Cartan, No. 20, 1950—1951.
6. Cartan H., Seminaire H. Cartan, Exposé 20, 1950—1951; Exposé 17, 1948—1949.
7. Cartan H., Seminaire H. Cartan, No. 19 Théorème 4, 1950—1951.

ОТНОСИТЕЛЬНО НЕЛАНДАУВСКИХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ

П. Федербуш

P. Federbush*, Journ. Math. Phys., 6, 825 (1965)

На основе формализма Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама [1] обсуждаются некоторые неландауовские сингулярности; рассматриваются простые случаи собственно-энергетической и вертексной диаграмм, а также лестничной диаграммы шестого порядка.

§ 1. Введение

Сингулярности фейнмановских диаграмм можно классифицировать как ландауовские и неландауовские. При изучении фейнмановской амплитуды в виде интеграла по внутренним импульсам (в котором путь интегрирования всегда можно так деформировать, чтобы он не проходил через сингулярности подынтегрального выражения) неландауовские сингулярности появляются тогда, когда с контуром возникают трудности на бесконечности. В формализме [1] область интегрирования преобразуется в поверхность в компактном аналитическом многообразии. В настоящей статье с помощью указанного формализма делается попытка изучить некоторые неландауовские сингулярности.

Вертексная и собственно-энергетическая диаграммы имеют неландауовские сингулярности очень специального вида. Они возникают потому, что в интеграле при преобразовании его в интеграл в компактном аналитическом многообразии появляется дополнительный эффективный знаменатель. С более интересным случаем мы сталкиваемся, когда диаграмма содержит более одной петли, подобно рассматриваемой ниже диаграмме шестого порядка.

§ 2. Собственно-энергетическая и вертексная диаграммы

Делаем замену переменных в интеграле, переводящую

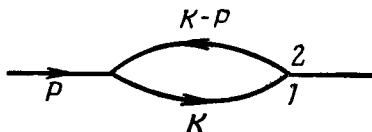
$$k_i \in C^4 \quad \text{в} \quad (x_1, \dots, x_6) \in W \subset CP^5,$$

* Department of Physics and the Laboratory of Nuclear Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

полагая

$$\begin{aligned} x_\alpha &= k_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, 4, \\ x_5 &= \frac{1}{2}(1 - k^2), \quad x_6 = 1 + k^2, \\ \left\{ \sum_1^5 x_i^2 = \frac{1}{4} x_6^2 \right\} &= W. \end{aligned} \quad (1)$$

При подобном преобразовании интеграла по переменным k_i в интеграл по переменным x_i , как это показано в [1], возникает дополнительный эффективный знаменатель $x_6 + 2x_5$. В случае собственно-энергетической диаграммы, изображенной на



Фиг. 1. Собственно-энергетическая диаграмма.

фиг. 1, неландаувские сингулярности возникают, когда поверхности 1, 2 и $x_6 + 2x_5$ не занимают общего положения в W , а поверхности 1, 2 занимают его [т. е. нули x_6 , $x_6 - 2P_\alpha x_\alpha + \frac{1}{2}(x_6 + 2x_5)(M_2^2 + P^2 - 1)$ и $x_6 + 2x_5$ не занимают общего положения в W ; M_1 следует положить равным единице]. В случае собственно-энергетической диаграммы указанные три поверхности не занимают общего положения только тогда, когда пересечение всех трех их сингулярно. Другими словами, когда

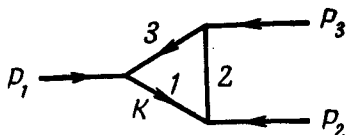
$$\begin{aligned} \sum_1^5 x_i^2 &= \frac{1}{4} x_6^2, \quad x_6 + 2x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \\ x_6 - 2P_\alpha x_\alpha + \frac{1}{2}(x_6 + 2x_5)(M_2^2 + P^2 - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и четыре дифференциальные формы

$$\begin{aligned} \sum_1^4 2x_\alpha dx_\alpha + 2x_5 dx_5 - \frac{1}{2} x_6 dx_6, \\ dx_6 + 2dx_5, dx_6, \\ dx_6 - 2P_\alpha dx_\alpha + \frac{1}{2}(dx_6 + 2dx_5)(M_2^2 + P^2 - 1) \end{aligned} \quad (3)$$

линейно зависимы (мы будем полагать без ограничения общности, что $x_1 \neq 0$, $P_1 = 0$). Легко видеть, что это имеет место, если $P_2^2 = 0$.

В случае вертексной диаграммы, изображенной на фиг. 2, неландауовские сингулярности появляются, когда поверхности 1, 2, 3 и $x_6 + 2x_5$ не занимают общего положения в W , но поверхности 1, 2, 3 занимают его. Если 1, 2 и $x_6 + 2x_5$ не находятся в общем положении, как и в случае собственно-энергетической диаграммы, получаем $P_2^2 = 0$. Рассмотрев, кроме того, еще два слу-



Фиг. 2. Вертексная диаграмма.

чая с откидыванием 1 или 2 из 1, 2, 3, мы окончательно получим условия появления неландауовских сингулярностей

$$P_1^2 = 0, \text{ или } P_2^2 = 0, \text{ или } P_3^2 = 0. \quad (4)$$

Наконец, нужно взять еще один случай, когда все рассматриваемые совокупности поверхностей занимают общее положение, но совокупность поверхностей 1, 2, 3 и $x_6 + 2x_5$ не занимают его. Тогда

$$\sum_1^5 x_i^2 = \frac{1}{4} x_6^2,$$

$$x_6 = 0, \quad x_6 + 2x_5 = 0,$$

$$x_6 + 2P_{2a}x_a + \frac{1}{2}(x_6 + 2x_5)(M_2^2 + P_2^2 - 1) = 0, \quad (5)$$

$$x_6 - 2P_{1a}x_a + \frac{1}{2}(x_6 + 2x_5)(M_3^2 + P_1^2 - 1) = 0$$

и следующие пять дифференциалов

$$\sum_1^5 2x_a dx_a - \frac{1}{2} x_6 dx_6,$$

$$dx_6, \quad dx_6 + 2 dx_5,$$

$$dx_6 + 2P_{2a} dx_a + \frac{1}{2}(dx_6 + 2 dx_5)(M_2^2 + P_2^2 - 1), \quad (6)$$

$$dx_6 - 2P_{1a} dx_a + \frac{1}{2}(dx_6 + 2 dx_5)(M_3^2 + P_1^2 - 1)$$

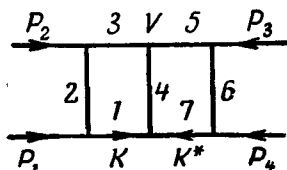
линейно зависимы (опять мы предполагаем, что $x_1 \neq 0$, $P_{11} = P_{21} = 0$). Это имеет место, когда

$$P_1^2 P_2^2 = (P_1 \cdot P_2)^2, \quad (7)$$

условия (4) и (7) описывают все неландаувские сингулярности вертексной диаграммы.

§ 3. Лестничная диаграмма шестого порядка

Изображенная на фиг. 3 диаграмма подробно исследована в [2]. Прежде всего нужно отобразить пространства k , k^* в $W_1 \times W_2 \subset CP^5 \times CP^5$ подобно тому, как это сделано в § 2. В случае рассматриваемой диаграммы не возникает никаких эффективных знаменателей. Сингулярности появляются, когда 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 занимают необщее положение в $W_1 \times W_2$. В общем



Фиг. 3. Лестничная диаграмма шестого порядка.

положении все знаменатели, кроме 4, оказываются несингулярными многообразиями. Оставаясь вне суммы 1 и 7, можно положить $x_6 = y_6 = 1$. Знаменатель 4 сингулярен при $x_5 = y_5 = -1/2$, $x_\alpha = -y_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, 4$, $\sum_1^4 x_\alpha^2 = 0$. Обозначим указанные точки

через SG . Знаменатели и их пересечения оказываются сингулярными в общем положении только в местах пересечения их с SG . В общем положении каждый отдельный знаменатель, отличный от 4, пересекает SG по 2-сфере; пересечение двух знаменателей — по 1-сфере; пересечение трех знаменателей — по 0-сфере. Как и в [2], мы не требуем сохранения импульса в вертексе V .

Оставаясь вне 1 и 7 и явно раскрывая сформулированные условия, находим следующее соответствие между поверхностями и отдельными сингулярностями от мест, где они неправильно пересекают SG :

$$\begin{array}{ll} 6, & P_4^2 = 0, \\ 5, & (P_3 + P_4)^2 = 0, \\ 2, & P_1^2 = 0, \\ 3, & (P_1 + P_2)^2 = 0, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cap 6, & \quad (P_1 + P_4)^2 = 0, \\
 5 \cap 6, & \quad P_3^2 = 0, \\
 2 \cap 3, & \quad P_2^2 = 0, \\
 3 \cap 5, & \quad (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)^2 = 0, \\
 3 \cap 6, & \quad (P_1 + P_2 + P_4)^2 = 0, \\
 5 \cap 2, & \quad (P_1 + P_3 + P_4)^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Мы рассмотрели только один способ выбора трех знаменателей; другие способы получаются путем соответствующих подстановок, а именно $2 \cap 5 \cap 6$,

$$P_3^2(P_1 + P_4)^2 - [P_3(P_1 + P_4)]^2 = 0. \tag{9}$$

Примечание при корректуре. Когда некоторые внешние импульсы становятся линейно зависимыми (те импульсы, которые связаны с рассматриваемыми поверхностями), возникают также другого типа сингулярности, появляющиеся, когда пересечения с SG неправильные. Например, с пересечением $2 \cap 6$ связана неландаувская сингулярность, возникающая в случае, когда P_1 и P_4 становятся линейно зависимыми; с пересечением $2 \cap 5 \cap 6$ связана сингулярность, возникающая, когда P_1 , P_3 и P_4 становятся линейно зависимыми (автор благодарен Дж. С. Полкингхорну за это замечание).

§ 4. Заключение

Неландаувские сингулярности, рассчитываемые методом [3] или методом, предлагаемым в нашей статье, могут быть разных типов. Для более сложных диаграмм они будут зависеть и от внутренних масс. Наиболее интересны неландаувские сингулярности, появляющиеся не от эффективных знаменателей. В принятом здесь подходе они возникают при рассмотрении постоянных сингулярностей для поверхностей определенных знаменателей или их пересечений; в других подходах они появляются от пинчей дискриминанта. Остается еще многое сделать, чтобы понять природу указанных сингулярностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fotiadi D., Froissart M., Lascoux J., Pham F., *Topology*, **4**, 159 (1965) (дополнение 1).
2. Federbush P., *Journ. Math. Phys.*, **6**, 941 (1965) (дополнение 3).
3. Fairlie D. P., Landshoff P. V., Nuttall J., Polkinghorne J. C., *Journ. Math. Phys.*, **3**, 594 (1962).

**ВЫЧИСЛЕНИЕ
ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ
ДЛЯ ФЕЙНМАНОВСКОЙ ДИАГРАММЫ
ШЕСТОГО ПОРЯДКА***П. Федербуш*

P. Federbush*, Journ. Math. Phys., 6, 941 (1965)

Вычисляется гомологическая группа, порядок которой оценивает сверху число линейно независимых аналитических функций, связанных с диаграммой шестого порядка. Используется формализм Фотиади, Фруассара, Ласку и Фама [1] и расчет проводится методами стандартной теории гомологий. Показано, что существует не больше 127 указанных независимых функций.

§ 1. Введение

Новое изучение аналитических свойств отдельных фейнмановских диаграмм недавно было начато Фотиади, Фруассаром, Ласку и Фамом [1]. Оно более детализированное, чем все, что было сделано до сих пор. Его цель — получить полную информацию относительно амплитуд на всех листах римановой поверхности и о всех скачках вокруг всех сингулярностей.

В работе [1] рассматривались почти исключительно диаграммы с одной внутренней петлей, и в этом случае оказалось возможным получить окончательные результаты. Когда в диаграмме больше одной внутренней петли линий, все намного сложнее.

Ниже мы пытаемся решить хотя бы частично задачу, связанную с рассмотрением фейнмановской диаграммы, имеющей две внутренние петли. Фактически мы ограничимся здесь только вычислением соответствующей гомологической группы. Порядок гомологической группы дает верхнюю оценку для числа инвариантных функций, связанных с данной диаграммой. Если рассмотреть контурный интеграл по одной комплексной переменной, то независимо от того, где расположен полюс подынтегрального выражения, значение интеграла изменяется при интегрировании по пути, окружающему полюс с другой стороны. Порядок вычисляемой гомологической группы — это обобщение понятия числа подобных полюсов для интеграла по более чем одной комплексной переменной. Расчет гомологической группы — скорее чисто техническая задача. Используемые здесь методы, вероятно, годятся для расчета гомологических групп более сложных диаграмм.

* Department of Physics and the Laboratory of Nuclear Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

Основная цель работы — продемонстрировать те математические проблемы, с которыми приходится сталкиваться в гомологическом подходе к изучению фейнмановских диаграмм. Необходимо дальнейшая большая работа, чтобы наше знание рассматриваемой здесь диаграммы стало столь же полным, как и диаграмм с одной петлей. Хочется не только подчеркнуть необходимость дальнейшего изучения указанной диаграммы частного вида, но и отметить также другие возможные направления исследования. Возможно, стоит пытаться найти лучшее компактное многообразие, используемое при преобразовании фейнмановского интеграла, чем то, которым мы пользуемся в настоящее время. Кроме того, могут существовать более эффективные способы расчета гомологических групп, например с использованием когомологии голоморфных дифференциальных форм. Имеются и другие подобные вопросы математического характера. Новые затрагиваемые здесь математические методы, видимо, заинтересуют физиков, которые до этого не были широко знакомы с соответствующими разделами математики.

§ 2. Математические утверждения и обозначения

Пусть $H_i(A, B)$, $H^i(A, B)$ — группы сингулярных гомологий и когомологий для пары $A, B (B \subset A)$ с откинутым кручением¹⁾.

1. Имеется точная триплетная последовательность

$$\begin{aligned} \rightarrow H_{i+1}(A, B) \rightarrow H_i(B, C) \rightarrow H_i(A, C) \rightarrow \\ \rightarrow H_i(A, B) \rightarrow H_{i-1}(B, C) \rightarrow, \\ \rightarrow H^{i-1}(B, C) \rightarrow H^i(A, B) \rightarrow H^i(A, C) \rightarrow \\ \rightarrow H^i(B, C) \rightarrow H^{i+1}(A, B) \rightarrow. \end{aligned}$$

2. Имеется точная последовательность Майера — Виториса

$$\begin{aligned} \rightarrow H_{i+1}(A \cup B) \rightarrow H_i(A \cap B) \rightarrow H_i(A) + H_i(B) \rightarrow \\ \rightarrow H_i(A \cup B) \rightarrow H_{i-1}(A \cap B) \rightarrow. \end{aligned}$$

Приведем пример использования этой последовательности в случае комплексного аналитического открытого многообразия M и его подмногообразия N коразмерности единица, задаваемого нулями некоторой аналитической функции. Тогда в последовательности нужно взять $A \sim M - N$, $B \sim N$, $A \cap B \sim S^1 \times N$, $A \cup B \sim M$ (всегда S^k означает k -сферу). Знак \sim означает гомотопическую эквивалентность.

¹⁾ Сведения из области топологии читатель может почерпнуть в монографии [2].

3. Свойство дуальности Пуанкаре. Пусть M — компактное многообразие с границей B действительной размерности n . Тогда $H_i(M, B) = H^{n-i}(M - B)$.

4. Если E — расслоенное пространство со слоем F и базой B , то это мы запишем символически в виде

$$\begin{array}{c} (F \rightarrow E \\ \downarrow \\ B). \end{array}$$

Мы всюду будем использовать символы $E_{p,q}^2$ для обозначения членов соответствующих спектральных последовательностей. Будем рассматривать штейновские многообразия комплексной размерности n следующих двух типов [3].

1) Все одновременные нули некоторой совокупности полиномов в каком-то комплексном аффинном пространстве (если они образуют многообразие).

2) Штейновское многообразие типа 1 за вычетом всех нулей некоторого полинома (по переменным окружающего аффинного пространства).

5. Для каждого такого штейновского многообразия S имеем $H_i(S) = 0$ при $i > n$.

6. Пусть S — штейновское многообразие в $C^N(x_1, \dots, x_N)$ типа 1 или 2, и пусть P — полином от x_1, \dots, x_N и a_1, \dots, a_M , причем $a_i \in C^M$. Интуитивно ясное утверждение, имеющееся в алгебраической геометрии, гласит, что, за исключением точек некоторого алгебраического множества, в C^M можно двигать точки a_i и соответствующие нули P в S и строить изотопию окружающего многообразия S . Будем считать точки a_i вне указанного алгебраического множества занимающими общее положение. При этом имеем

$$H_i(S - N) = H_i(S) + H_{i-1}(N),$$

где $N = \{x \in S \mid P(x) = 0\}$. Это справедливо, если N — такое подмногообразие S , занимающее общее положение, которое может быть сдвинуто в бесконечность (за пределы любого данного компактного множества) путем изменения a_i . Сформулированное утверждение следует из рассуждения Фруассара [1]. Для нас a_i — параметры (внешние импульсы и внутренние массы). Как следствие утверждения получаем, что сингулярности фейнмановских диаграмм лежат на алгебраических множествах в пространстве рассматриваемых переменных.

7. Теорему о разложении из [1] можно обобщить, с использованием утверждения 6, на некоторые многообразия, лежащие в

штейновском многообразии. Нам будут нужны следующие многообразия:

$$\{x_i \in C^N \mid x_1^{\alpha_1} + \dots + x_N^{\alpha_N} = 1, \alpha_i - \text{целые положительные}\} = \\ = M(\alpha_1, \dots, \alpha_N), \\ \{x_i \in C^N - \text{начало} \mid x_1^2 + \dots + x_N^2 = 0\} = TB_{N-1}.$$

8. Многообразие $M(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ гомотопно клину $\prod_i (\alpha_i - 1) S^{N-1}$ (все сферы пересекаются в одной точке); многообразии TB_{N-1} гомотопно тангенциальному пучку единичных векторов для S^{N-1} (см. приложение I).

9. Рассмотрим несингулярное многообразие, заданное как множество одновременных нулей в C^N функций $g_1(x), g_2(x), F(x, a), x \in C^N, a \in C^N$. Предположим, что $\nabla g_i \cdot (\nabla g_2)^* = 0$ (∇ — градиент в C^N , $*$ — комплексное сопряжение, ∇_a — градиент в C^M). Определим

$$\nabla_{\perp} f = \nabla f - \sum_1^2 \frac{\nabla g_i [\nabla f \cdot (\nabla g_i)^*]}{|\nabla g_i|^2}.$$

Когда уравнение

$$dx = - \frac{(\nabla_{\perp} f)^* \nabla_a f \cdot da}{|\nabla_{\perp} f|^2}$$

интегрируемо между значениями a_1 и a_2 вдоль некоторого пути непрерывно по всему многообразию, оно явным образом задает гомотопию между многообразиями, соответствующими различным значениям a .

§ 3. Фейнмановская диаграмма

Обратимся к фиг. 1, на которой изображена лестничная диаграмма шестого порядка. Величины k и k^* — переменные интегрирования. Мы не будем налагать на внешние импульсы условие $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$; на изменения, возникающие от этого условия, мы указываем в конце статьи. Цифрами на фиг. 1 пронумерованы соответствующие знаменатели.

Преобразуем переменные интегрирования так, чтобы интеграл брался в произведении двух комплексных проективных пространств

$$(k, k^*) \rightarrow (x_i, y_i) \in CP_1^5 \times CP_2^5,$$

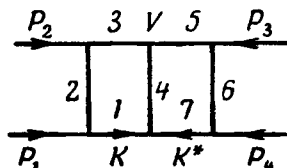
где

$$(x_1, \dots, x_6) \in CP_1^5, (y_1, \dots, y_6) \in CP_2^5.$$

Положим для этого

$$\begin{aligned} x_\alpha &= k_\alpha, & y_\alpha &= k_\alpha^*, \\ x_5 &= \frac{1}{2}(1 - k^2), & y_5 &= \frac{1}{2}[1 - (k^*)^2], \\ x_6 &= 1 + k^2, & y_6 &= 1 + (k^*)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha=1, \dots, 4$. «Нормируем» k и k^* так, чтобы выполнялось $M_1^2 = M_7^2 = 1$, где M_i — масса для знаменателя i . Для простоты предположим, что $M_1 = M_7$; это условие, однако, не необходимо.



Фиг. 1.

Точки в $CP^5 \times CP^5$, которые необходимо рассматривать при этом отображении, удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^5 x_i^2 &= \frac{x_6^2}{4} \\ \sum_{i=1}^5 y_i^2 &= \frac{y_6^2}{4} \end{aligned} \right\} = W_1 \times W_2 \subset CP^5 \times CP^5. \quad (2)$$

Знаменателям соответствуют те точки в $W_1 \times W_2$, в которых эти знаменатели обращаются в нуль. Если внешние параметры не принимают значений, при которых возникают сингулярности (единственный случай, который мы будем здесь рассматривать), то знаменателю 4 отвечает сингулярное многообразие в произведении $W_1 \times W_2$, а остальным знаменателям — несингулярные многообразия. Рассмотрим поэтому «десингуляризованную» фейнмановскую диаграмму, для которой знаменатель 4 изменен путем добавления к нему слагаемого $\in (1 + k^2)(1 + k^{*2})$. Измененному знаменателю 4 теперь соответствует несингулярное многообразие, лежащее вне суммы многообразий знаменателей 1 и 7.

Цель настоящей статьи — расчет порядка восьмимерной гомологической группы для пространства, являющегося дополнением в $W_1 \times W_2$, к образам всех знаменателей от 1 до 7.

После «десингуляризации» используем утверждение 7 для $\{W_1 \times W_2 - 1U7\} = St_1$ (пространство $W_1 \times W_2$ без многообразий знаменателей 1 и 7). Без «десингуляризации» приложим это утверждение к пространству $\{W_1 \times W_2 - 1U7U4\} = St_2$. В силу утверждения 7 вычисление групп гомологий $H_i\{W_1 \times W_2 - 1U \dots U7\}$ сводится к вычислению гомологических групп для пересечений пространств знаменателей с пространствами St_1 или St_2 .

Так, в частности, в «десингуляризованном» случае имеем

$$\begin{aligned}
 H_8(W_1 \times W_2 - 1U \dots U7) = & \\
 = H_8(A St_1) + 4H_7(B 2 \cap St_1) + H_7(C 4 \cap St_1) + 2H_6(D 2 \cap 3 \cap St_1) + & \\
 + 4H_6(E 2 \cap 5 \cap St_1) + 4H_6(F 2 \cap 4 \cap St_1) + 4H_5(G 2 \cap 3 \cap 5 \cap St_1) + & \\
 + 2H_5(H 2 \cap 3 \cap 4 \cap St_1) + 4H_5(I 2 \cap 4 \cap 5 \cap St_1) + & \\
 + H_4(J 2 \cap 3 \cap 5 \cap 6 \cap St_1) + 4H_4(K 2 \cap 3 \cap 4 \cap 5 \cap St_1) + & \\
 + H_3(L 2 \cap 3 \cap 4 \cap 5 \cap 6 \cap St_1) & \quad (3)
 \end{aligned}$$

и в случае без «десингуляризации» получим

$$\begin{aligned}
 H_8(W_1 \times W_2 - 1U \dots U7) = & \\
 = H_8(M St_2) + 4H_7(N 2 \cap St_2) + 2H_6(O 2 \cap 3 \cap St_2) + 4H_6(P 2 \cap 5 \cap St_2) + & \\
 + 4H_5(Q 2 \cap 3 \cap 5 \cap St_2) + H_4(R 2 \cap 3 \cap 5 \cap 6 \cap St_2). & \quad (4)
 \end{aligned}$$

При написании формул использовалась симметрия между 2 и 3, 5 и 6 и 2, 3 и 5, 6. Большими буквами, расположенными снизу, обозначены отдельные гомологические группы, которые нужно вычислить. Их расчет проводится в следующих разделах, но не в том порядке, который соответствует их нумерации. В результате вычислений оказывается, что порядок первой группы равен 1 4 2, а второй — 1 2 6. Поскольку исходная поверхность интегрирования — относительный цикл в $(W_1 \times W_2, 1U \dots U7)$, то можно найти 1 2 7 функций, связанных с рассматриваемой диаграммой, если не наложено условие $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$.

РАЗДЕЛ 1 (A, B, D, E, G, J)

а) Имеем $A = H_8(St_1)$ и

$$St_1 = \begin{cases} \sum_1^5 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^5 y_i^2 = 1 \end{cases} \sim S^4 \times S^4 \quad (5)$$

в силу утверждения 8; следовательно, $A = Z$ (бесконечная абелева группа с единственным порождающим элементом). В уравнениях нужно сделать тривиальные замены переменных, на которых мы здесь не останавливаемся.

б) Имеем $B = H_7(2 \cap St_1)$ и

$$2 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^4 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^5 y_i^2 = 1 \end{cases} \sim S^3 \times S^4, \quad (6)$$

следовательно, $B = Z$.

в) Имеем $D = H_6(2 \cap 3 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 3 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^3 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^5 y_i^2 = 1 \end{cases} \sim S^2 \times S^4, \quad (7)$$

следовательно, $D = Z$.

г) Имеем $E = H_6(2 \cap 5 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 5 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^4 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^4 y_i^2 = 1 \end{cases} \sim S^3 \times S^3, \quad (8)$$

следовательно, $E = Z$.

д) Имеем $G = H_5(2 \cap 3 \cap 5 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 3 \cap 5 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^3 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^4 y_i^2 = 1 \end{cases} \sim S^2 \times S^3, \quad (9)$$

следовательно, $G = Z$.

е) Имеем $J = H_4(2 \cap 3 \cap 5 \cap 6 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 3 \cap 5 \cap 6 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^3 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^3 y_i^2 = 1 \end{cases} \sim S^2 \times S^2, \quad (10)$$

следовательно, $J = Z$.

РАЗДЕЛ 2 (C, F, H)

а) Имеем $C = H_7(4 \cap St_1)$ и

$$4 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^5 x_i^2 = \frac{1}{4}, \\ \sum_1^5 y_i^2 = \frac{1}{4}, \\ \sum_1^4 x_i y_i + \frac{1}{2} (M^2 - 2) x_5 y_5 + \frac{1}{4} M^2 (x_5 + y_5) = \\ = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} M^2 - \varepsilon. \end{cases} \quad (11)$$

Если воспользоваться утверждением 9, мы должны вместо приведенных уравнений работать со следующей системой уравнений:

$$4 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^5 x_i^2 = 1, \\ \sum_1^5 y_i^2 = 1, \\ \sum_1^4 x_i y_i + \alpha x_5 y_5 = 0, \quad \alpha^2 \neq 1, \end{cases} \quad (12)$$

хотя без утверждения 9 можно работать также и с исходной системой уравнений. При рассмотрении группы M нужно будет работать с системой уравнений, полностью аналогичной приведенной. Далее мы будем обозначать через π проекцию точки, лежащей на какой-либо поверхности, на ее координаты y . Указанное отображение порождает расслоение со слоем $\sim S^3$ вне несингулярного подмногообразия

$$LR = \left\{ \sum_1^4 y_i^2 + \alpha^2 y_5^2 = 0 \right\}. \quad (13)$$

Над LR получается свое расслоение со слоем $\sim S^2$. Каждое из этих двух расслоений — некоторое многообразие, второе — подмногообразие многообразия $4 \cap St_1$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_1^5 y_i^2 = 1 \\ \sum_1^4 y_i^2 + \alpha^2 y_5^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_5 = \pm (1 - \alpha^2)^{-1/2}. \quad (14)$$

Применим теперь утверждение 2 к $4 \cap St_1$ и к подмногообразию $\pi^{-1}(LR)$:

$$\begin{array}{c} \rightarrow H_i(BR) \rightarrow H_i\{(S^3 \rightarrow M - R) + H_i(R) \rightarrow H_i(M) \rightarrow, \\ \quad \quad \quad \downarrow \pi \\ \quad \quad \quad S'^4 - LR), \end{array} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} S'^4 &= \left\{ \sum_1^5 y_i^2 = 1 \right\}, \quad M = 4 \cap St_1, \\ BR &= S^1 \times \pi^{-1}(LR), \quad R = \pi^{-1}(LR); \end{aligned}$$

здесь R расслоено следующим образом:

$$\begin{array}{c} (S^2 \rightarrow R \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad LR \sim S^3 \cup S^3). \end{array}$$

Для членов $E_{p,q}^2$ спектральной последовательности для R имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 2, & p = 0, 3, \\ 0, & p \neq 0, 3, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 2, \\ 0, & q \neq 0, 2, \end{cases} \quad (16)$$

и для дополнения $M - R$ к R имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 2, & p = 1, \\ 3, & p = 4, \\ 0, & p \neq 0, 1, 4, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3, \end{cases} \quad (17)$$

причем мы используем утверждение 7 для $S'^4 - LR$. Во всех расслоениях мы имеем базу π_1 , которая тривиально действует на гомологию слоя.

Часть последовательности (15) теперь очевидна, ибо

$$0 \rightarrow Z^3 + 0 \rightarrow H_7(M) \rightarrow Z^2 \rightarrow 0, \quad (18)$$

и, следовательно, мы видим, что $C = Z^5$.

б) Имеем $F = H_6(2 \cap 4 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 4 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^5 x_i^2 = 1, \\ \sum_1^4 y_i^2 = 1, \\ \sum_1^3 x_i y_i + \alpha x_4 y_4 = 0, \quad \alpha^2 \neq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Поступая, как в разд. 2а (с тривиальными изменениями вроде $i \rightarrow i - 1$), мы находим $F = Z^5$.

в) Имеем $H = H_5(2 \cap 3 \cap 4 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 3 \cap 4 \cap St_1 = M = \begin{cases} \sum_1^5 x_i^2 = 1, \\ \sum_1^3 y_i^2 = 1, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + \alpha x_3 y_3 = 0, \quad \alpha^2 \neq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Мы вынуждены пользоваться различными обозначениями; однородные объекты, рассматриваемые в разных разделах, мы будем обозначать одинаково. Переписывая формулы (11) и (12), получаем

$$\begin{array}{ccc} \rightarrow H_i(BR) \rightarrow H_i\{(S^3 \rightarrow M - R) + H_i(R) \rightarrow H_i(M) \rightarrow; & (S^2 \rightarrow R) & \\ & \downarrow & \swarrow \\ & S^{r^2} - LR & LR \sim S^1 \cup S^1. \end{array} \quad (21)$$

Для R имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 2, & p = 0, 1, \\ 0, & p \neq 0, 1, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 2, \\ 0, & q \neq 0, 2. \end{cases} \quad (22)$$

Для $M - R$ имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 2, & p = 1, \\ 3, & p = 2, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3. \end{cases} \quad (23)$$

Следовательно, (18) нужно заменить на

$$0 \rightarrow Z^3 + 0 \rightarrow H_5(M) \rightarrow Z^2 \xrightarrow{f} Z^2. \quad (24)$$

Нам нужно знать отображение f , чтобы рассчитать $H_5(M)$; f равно нулю. Чтобы убедиться в этом, нужно обратиться к преобразованию симметрии $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow y$. Для него $H_4(BR)$ меняет знак, а $H_4(M - R)$ не меняет знака.

Следовательно, $H = Z^5$.

РАЗДЕЛ 3 (J, K, L)

а) Имеем $I = H_5(2 \cap 4 \cap 5 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 4 \cap 5 \cap St_1 = M = \begin{cases} \sum_1^4 x_i^2 = 1, \\ \sum_1^4 y_i^2 = 1, \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + \alpha x_3 y_3 + \beta x_4 y_4 = 0, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$1 \neq \alpha^2 \neq \beta^2 \neq 1.$$

Опять попытаемся построить расслоение над y . Вне многообразия

$$LR = \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + \alpha^2 y_3^2 + \beta^2 y_4^2 = 0, \\ \sum_1^4 y_i^2 = 1 \end{cases}$$

имеется расслоенное пространство со слоем $\sim S^2$. Образ $\pi^{-1}(LR)$ — несингулярное многообразие R , расслоенное над LR со слоем $\sim S^1$. Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^1 \rightarrow R \\ \downarrow \\ LR) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, 1, \\ 4, & p = 2, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases} \quad (26)$$

Гомология LR рассмотрена в приложении 1. Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^2 \rightarrow M - R \\ \downarrow \\ S^3 - LR) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, 1, 2, \\ 5, & p = 3, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, 3, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 2, \\ 0, & q \neq 0, 2. \end{cases} \quad (27)$$

Часть последовательности

$$\rightarrow H_i(BR) \rightarrow H_i(M - R) + H_i(R) \rightarrow H_i(M) \rightarrow$$

теперь можно представить в виде

$$0 \rightarrow Z^5 \rightarrow H_5(M) \rightarrow Z^4 \xrightarrow{f} Z \rightarrow . \quad (28)$$

В силу тех же аргументов, что и в разделе 2в, получаем $f=0$; следовательно, $I=Z^9$.

б) Имеем $K = H_4(2 \cap 3 \cap 4 \cap 5 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 3 \cap 4 \cap 5 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^4 x_i^2 = 1, \\ \sum_1^3 y_i^2 = 1, \\ x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \beta x_3 y_3 = 0, \end{cases} \quad (29)$$

где $1 \neq \alpha^2 \neq \beta^2 \neq 1$;

$$LR = \begin{cases} \sum_1^3 y_i^2 = 1, \\ y_1^2 + \alpha^2 y_2^2 + \beta^2 y_3^2 = 0. \end{cases}$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^1 \rightarrow R \\ \downarrow \\ LR) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 5, & p = 1, \\ 0, & p \neq 0, 1, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases} \quad (30)$$

Гомология LR описана в приложении 1. Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^2 \rightarrow M - R \\ \downarrow \\ S^2 - LR) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, 1, \\ 6, & p = 2, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 2, \\ 0, & q \neq 0, 2. \end{cases} \quad (31)$$

Последовательность

$$\rightarrow H_i(S^1 \times R) \rightarrow H_i(M - R) + H_i(R) \rightarrow H_i(M) \rightarrow$$

обращается в последовательность

$$0 \rightarrow Z^6 \rightarrow H_4(M) \rightarrow Z^5 \xrightarrow{f} Z \rightarrow, \quad (32)$$

где f равно нулю по тем же причинам, что и в разделе 3а. Таким образом, $K = Z^{11}$.

в) Имеем $L = H_3(2 \cap 3 \cap 4 \cap 5 \cap 6 \cap St_1)$ и

$$2 \cap 3 \cap 4 \cap 5 \cap 6 \cap St_1 = \begin{cases} \sum_1^3 x_i^2 = 1, \\ \sum_1^3 y_i^2 = 1, \\ x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \beta x_3 y_3 = 0, \end{cases} \quad (33)$$

где $1 \neq \alpha^2 \neq \beta^2 \neq 1$. Далее

$$LR = \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1, \\ y_1^2 + \alpha^2 y_2^2 + \beta^2 y_3^2 = 0. \end{cases}$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^0 \rightarrow R \\ \downarrow \\ LR) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 5, & p = 1, \\ 0, & p \neq 0, 1, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 2, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (34)$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S' \rightarrow M - R \\ \downarrow \\ S'^2 - LR) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, 1, \\ 6, & p = 2, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 1, \\ 0, & q \neq 0, 1. \end{cases} \quad (35)$$

Часть последовательности

$$\rightarrow H_i(BR) \rightarrow H_i(M - R) + H_i(R) \rightarrow H_i(M) \rightarrow$$

принимает вид

$$0 \rightarrow Z^6 \rightarrow H_3(M) \rightarrow Z^{10} \xrightarrow{f} (Z^7 \text{ или } Z^6) \rightarrow. \quad (36)$$

Сомнения относительно группы, заключенной в скобки, объясняются тем, что мы не вычислили дифференциала d^2 в соответствующей спектральной последовательности; f имеет ранг 5. Мы не останавливаемся на доказательстве этого; оно подобно приведенному после (53).

Таким образом, имеем $L = Z^{11}$.

РАЗДЕЛ 4 (M)

а) Вычислить группы от M до R более трудно, чем рассмотренные до сих пор. Процедура расчета, однако, полностью аналогична.

Имеем $M = H_8(St_2)$ и

$$\begin{aligned} St_2 = & \begin{cases} \sum_1^5 x_i^2 = \frac{1}{4} \\ \sum_1^5 y_i^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \\ & - \left\{ \sum_1^4 x_i y_i + \frac{1}{2} (M^2 - 2) x_5 y_5 + \frac{1}{4} M^2 (x_5 + y_5) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} M^2 = \right. \\ & \left. = W_1 \times W_2 - 4 - \infty. \right. \quad (37) \end{aligned}$$

Здесь ∞ обозначает «гиперплоскость на бесконечности» в пространстве $W_1 \times W_2$, равную $1 \cup 7$. Из утверждения 3 следует, что

$H_8(W_1 \times W_2 - 4 - \infty) = H^8(W_1 \times W_2, 4 \cup \infty)$. Из утверждения 1 получаем

$$H^7(W_1 \times W_2, \infty) \rightarrow H^7(4 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^8(W_1 \times W_2, 4 \cup \infty) \xrightarrow{g} H^8(W_1 \times W_2, \infty), \quad (38)$$

причем $H^7(W_1 \times W_2, \infty) = 0$ в силу утверждения 3 и $H^8(W_1 \times W_2, \infty) = Z$. В приложении 2 показано, что $g = 0$, так что

$$H^8(W_1 \times W_2, 4 \cup \infty) = H^7(4 \cup \infty, \infty).$$

Рассмотрим теперь отображение π для 4. Оно дает расслоение со слоем $\sim S^3$ без тех y , которые удовлетворяют одному из трех условий:

1)

$$\begin{aligned} \sum_1^4 y_i^2 + \left(\frac{M^2 - 2}{2} y_5 + \frac{M^2}{4} \right)^2 &= 0, \\ \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{8} M^2 - \frac{M^2}{4} y_5 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (39a)$$

Здесь получаем, что $\pi^{-1}(pt.) \sim S^2$ и является несингулярным многообразием.

2)

$$\begin{aligned} \sum_1^4 y_i^2 + \left(\frac{M^2 - 2}{2} y_5 + \frac{M^2}{4} \right)^2 &= 0, \\ \left(-\frac{1}{4} - \frac{M^2}{8} - \frac{M^2}{4} y_5 \right) &\neq 0. \end{aligned} \quad (39b)$$

Теперь получаем, что $\pi^{-1}(pt.) \sim pt.$ и является несингулярным многообразием.

3)

$$\begin{aligned} \sum_1^4 y_i^2 + \left(\frac{M^2 - 2}{2} y_5 + \frac{M^2}{4} \right)^2 &= 4 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{8} M^2 - \frac{M^2}{4} y_5 \right)^2, \\ \left(-\frac{1}{4} - \frac{M^2}{8} - \frac{M^2}{4} y_5 \right) &\neq 0. \end{aligned} \quad (39v)$$

Тогда получаем, что $\pi^{-1}(pt.) \sim pt.$ и является сингулярным в одной точке многообразием.

В результате простых алгебраических выкладок убеждаемся, что случай 1) вообще не осуществляется, случай 3) осуществляется при $y_5 = -1/2$, а случай 2) осуществляется при $y_5 = C_1$ и при $y_5 = C_2$, где C_1 и C_2 различны и не равны $\pm 1/2$. Положим

LR_1 равным многообразию $\sum_1^5 y_i^2 = 1/4$ при $y_5 = C_1$ или C_2 и

LR_2 — множеству тех y в $\sum_1^5 y_i^2 = 1/4$, для которых $y_5 = -1/2$. Пусть

p — точка с $y_5 = -1/2$, $y_\alpha = 0$, $\alpha \neq 5$ и SR_2 — объединение сингулярных точек над LR_2 ; одна точка в SR_2 для каждой точки в LR_2 . Наконец, определим $SN = SR_2 \cup \pi^{-1}(p)$. Алгебраически легко проверить, что $4 - SN$ — несингулярное многообразие. Обратимся к точной последовательности

$$\begin{aligned} H^6(4 \cup \infty, \infty) &\rightarrow \\ &\rightarrow H^6(SN \cup \infty, \infty) \rightarrow H^7(4 \cup \infty, SN \cup \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^7(4 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^7(SN \cup \infty, \infty) \end{aligned} \quad (40)$$

и найдем четвертый член этой последовательности. Расчет показывает, что второй и пятый члены равны соответственно Z^2 и 0 , а также что третий член равен Z^6 . Первый член равен нулю, в чем легко убедиться, продолжая последовательность (38)

$$H^6(W_1 \times W_2, \infty) \rightarrow H^6(4 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^7(W_1 \times W_2, 4 \cup \infty), \quad (41)$$

причем $H^6(W_1 \times W_2, \infty) = 0$ и $H^7(W_1 \times W_2, 4 \cup \infty) = 0$ в силу утверждений 3 и 5. Следовательно, $H^7(4 \cup \infty, \infty) = Z^4$ и $M = Z^4$.

б) Изучение групп $H^i(SN \cup \infty, \infty)$. Рассмотрим члены в точной последовательности

$$\begin{aligned} &\rightarrow H^i(SN \cup \infty, \pi^{-1}(p) \cup \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^i(SN \cup \infty, \infty) \rightarrow H^i(\pi^{-1}(p) \cup \infty, \infty) \rightarrow. \end{aligned} \quad (42)$$

Сначала изучим $H^i(\pi^{-1}(p) \cup \infty, \infty)$. Имеем

$$\begin{aligned} &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(p) \cup \infty, \pi^{-1}(p) \cap SR_2 \cup \infty) \rightarrow H^i(\pi^{-1}(p) \cup \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(p) \cap SR_2 \cup \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(p) \cap SR_2 \cup \infty, \infty) = \begin{cases} Z & \text{для } i = 0, \\ 0 & \text{для } i \neq 0; \end{cases} \end{aligned}$$

таким образом,

$$H^i(\pi^{-1}(p) \cup \infty, \infty) = H^i(\pi^{-1}(p) \cup \infty, \pi^{-1}(p) \cap SR_2 \cup \infty), \quad i > 1,$$

и далее

$$\begin{aligned} H^i(\pi^{-1}(p) \cup \infty, \pi^{-1}(p) \cap SR_2 \cup \infty) &= H_{6-i}(\pi^{-1}(p) - \pi^{-1}(p) \cap SR_2) = \\ &= H_{6-i}(TB_3) = \begin{cases} Z & \text{для } i = 6, 4, 3. \\ 0 & \text{для } i \neq 6, 4, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (43)$$

По поводу последнего результата см. работу [4]. Рассмотрим $H^i(SN \cup \infty, \pi^{-1}(p) \cup \infty)$; имеем

$$\begin{aligned} H^i(SN \cup \infty, \pi^{-1}(p) \cup \infty) &= H_{6-i}(SR_2 - \pi^{-1}(p)) = H_{6-i}(LR_2 - p) = \\ &= H_{6-i}(TB_3) = \begin{cases} Z & \text{для } i = 6, 4, 3, 1, \\ 0 & \text{для } i \neq 6, 4, 3, 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (44)$$

Возвращаясь к (42), видим, что

$$\begin{aligned} H^6(SN \cup \infty, \infty) &= Z^2, \\ H^7(SN \cup \infty, \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

в) Изучение группы $H^7(4 \cup \infty, SN \cup \infty)$. Имеем

$$H^7(4 \cup \infty, SN \cup \infty) = H_7(4 - SN).$$

Воспользуемся далее замечанием, приведенным после утверждения 2, и напишем

$$\begin{aligned} H_i(BR_1) + H_i(BR_2) \rightarrow H_i\{(S^3 \rightarrow 4 - SN - R_1 - R_2) + \\ \downarrow \\ S^A - LR_1 - LR_2\} \\ + H_i(R_1) + H_i(R_2) \rightarrow H_i(4 - SN) \rightarrow, \end{aligned} \quad (46)$$

где $BR_i = S^1 \times R_i$, $R_1 = \pi^{-1}(LR_1)$, $R_2 = \pi^{-1}(LR_2 - p)$.

Имеем расслоение для R_1

$$\begin{aligned} (pt. \rightarrow R_1 \\ \downarrow \\ LR_1) \sim LR_1 \sim S^3 \cup S^3 \end{aligned} \quad (47)$$

и для R_2

$$\begin{aligned} (TB_3 \rightarrow R_2 \\ \downarrow \\ LR_2 - p), \end{aligned}$$

причем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$\begin{aligned} A(p) &= \begin{cases} 1, & p = 0, 2, 3, 5, \\ 0, & p \neq 0, 2, 3, 5; \end{cases} \\ B(q) &= \begin{cases} 1, & q = 0, 2, 3, 5, \\ 0, & q \neq 0, 2, 3, 5. \end{cases} \end{aligned} \quad (48)$$

В силу утверждения 6 получим

$$H_i(S^A - LR_1 - LR_2) = H_i(S^A - LR_2) + H_{i-1}(LR_1)$$

и в силу утверждения 3

$$H_i(S^4 - LR_2) = H^{8-i}(S^4 \cup \infty, LR_2 \cup \infty).$$

Обратимся к последовательности

$$\rightarrow H^i(S^4 \cup \infty, \infty \cup LR_2) \xrightarrow{r^i} H^i(S^4 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^i(LR_2 \cup \infty, \infty) \rightarrow. \quad (49)$$

Заметим, что

$$H^i(LR_2 \cup \infty, \infty \cup \rho) = \begin{cases} Z & \text{при } i = 6, 4, 3, 1; \\ 0 & \text{при } i \neq 6, 4, 3, 1. \end{cases}$$

Тогда (49) примет вид

$$\begin{aligned} G_1 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow G_2 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow G_3 \rightarrow 0 \rightarrow Z \rightarrow \\ \rightarrow G_4 \xrightarrow{r^4} Z \rightarrow Z \rightarrow G_5 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow G_6 \rightarrow 0 \rightarrow Z \rightarrow \\ \rightarrow G_7 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow G_8 \rightarrow Z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$G_i = H^i(S^4 \cup \infty, \infty \cup LR_2). \quad (50)$$

Как показано в приложении 2, отображение r^4 равно нулю:

$$H_i(S^4 - LR_2) = \begin{cases} Z & \text{при } i = 0, 1, 4, \\ 0 & \text{при } i \neq 0, 1, 4. \end{cases}$$

Тогда для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^3 \rightarrow 4 - SN - R_1 - R_2 \\ \downarrow \\ S^4 - LR_1 - LR_2) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 3, & p = 1, 4, \\ 0, & p \neq 1, 4, 0, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3. \end{cases} \quad (51)$$

Если бы мы знали d^2 и d^3 для (48), мы смогли бы найти $E_{p,q}^\infty$. Мы утверждаем, что $d^3 = 0$, так как расслоенное пространство имеет поперечное сечение. Поперечное сечение можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(y_\alpha, y_5 = -\frac{1}{2}\right) &\rightarrow (y_\alpha, y_5, x_\alpha, x_5), \\ \left(y_\alpha, -\frac{1}{2}\right) &\rightarrow \left(y_\alpha, -\frac{1}{2}, y_\alpha, -\frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (52)$$

где $\alpha=1, \dots, 4$. Другой аргумент, показывающий, что d^2 и d^3 оба равны нулю, приведен после (60). Следовательно, получаем $H_5(R_2) = Z^4$. Напишем теперь часть последовательности (46)

$$0 \rightarrow (0 \text{ или } Z) \rightarrow Z^3 \xrightarrow{i} H_7(4 - SN) \rightarrow Z^4 \rightarrow 0. \quad (53)$$

Условимся, что $H_i(R) = 0$, и при расчете $H_i(S^1 \times R)$ сохраним только члены от $H_1(S^1)$, но не от $H_0(S^1)$, так как эти последние автомагически сокращаются; это условие будем подразумевать в дальнейшем. Нам нужно знать ранг i ; он равен 2. Чтобы показать это, мы рассмотрим подпространство 4, для которого $\sum_1^5 |x_i|^2 = M(y)$, где $M(y)$ — непрерывная положительная функция, численные значения которой берутся достаточно большими, чтобы $\pi^{-1}(pt.) \sim TB_3$. Нам следует избегать LR_1 , где это возможно. Отобразим последовательность, подобную (46), но написанную для указанного подпространства, в (46). Используя то обстоятельство, что одно из отображений переводит $H_3(TB_3)$ изоморфно в $H_3(S^3)$, $H_3(S^3)$ в слой расслоения

$$\begin{array}{c} (S^3 \rightarrow 4 - SN - R_1 - R_2 \\ \downarrow \\ S^4 - LR_1 - LR_2), \end{array}$$

$H_3(TB_3)$ в слой расслоения, соответствующего этому расслоению, получаем, что ранг отображения i равен 2.

Таким образом, $M = Z^4$.

РАЗДЕЛ 5 (N, O)

а) Имеем $N = H_7(2 \cap St_2)$ и

$$2 \cap St_2 = \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^5 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^4 y_i^2 = 1 \end{array} \right. - \left\{ \sum_1^3 x_i y_i + \alpha x_4 y_4 = 1, \quad (54)$$

где $\alpha^2 \neq 1$. Мы здесь допускаем, что справедливо (54), представляющее многообразие $2 \cap St_2$ с использованием рассуждения, подобного приведенному в утверждении 9, для соответствующих сингулярных многообразий. Четыре обстоятельства, видимо, делают такое допущение законным.

1) Первые два уравнения идентичны точным в общем случае.

2) Третье уравнение имеет те же квадратичные члены, что и точная система уравнений, если опустить члены, линейные по

переменным; следовательно, оно имеет те же пересечения с «гиперплоскостью на бесконечности».

3) Точная система уравнений и приведенная система уравнений имеют одинаковое расположение сингулярностей.

4) Они имеют изоморфные им соответствующие «десингуляризованные многообразия».

Мы должны проверить сделанное допущение по крайней мере для интересующей нас гомологической группы. Имеем

$$H_i(2 \cap St_2) = H^{14-i}(2 \cup \infty, 4 \cup \infty);$$

$$0 \rightarrow H^6(4 \cap 2 \cap \infty, \infty) \rightarrow H^7(2 \cup \infty, 4 \cup \infty) \xrightarrow{g} H^7(2 \cup \infty, \infty), \quad (55)$$

причем $H^7(2 \cup \infty, \infty) = Z$. В силу приложения 2 отображение g является отображением «на». Далее

$$N = Z + H^6(4 \cap 2 \cup \infty, \infty).$$

Введем в рассмотрение, как и в предыдущем разделе, многообразие

$$LR_1 = \left\{ \sum_1^4 y_i^2 = 1, \quad \sum_1^3 y_i^2 + \alpha^2 y_4^2 = 0 \right\}.$$

Слой над LR_1 несингулярен $\sim pt.$

$$LR_2 = \left\{ \sum_1^4 y_i^2 = 1, \quad \sum_1^3 y_i^2 + \alpha^2 y_4^2 = 1 \right\}.$$

Слой над LR_2 изотопен $\sim pt.$ и сингулярен в единственной точке. Многообразие SN — объединение сингулярных точек над LR_2 . Имеем

$$R_1 = \pi^{-1}(LR_1), \quad R_2 = \pi^{-1}(LR_2),$$

$$\begin{aligned} \rightarrow H^5(SN \cup \infty, \infty) &\rightarrow H^6(4 \cap 2 \cup \infty, SN \cup \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^6(4 \cap 2 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^6(SN \cup \infty, \infty), \end{aligned} \quad (56)$$

$H^6(4 \cap 2 \cup \infty, \infty) = H^6(4 \cap 2 \cup \infty, \infty \cup SN) = H_6(4 \cap 2 - SN)$,
причем $H^5(SN \cup \infty, \infty) = 0$ и $H^6(SN \cup \infty, \infty) = 0$.

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (pt. \rightarrow R_1 \\ \downarrow \\ LR_1) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 2, & p = 0, 2, \\ 0, & p \neq 0, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (57)$$

Для расслоения

$$(TB_3 \rightarrow R_2 \\ \downarrow \\ LR_2)$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, 2, \\ 0, & p \neq 0, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 2, 3, 5, \\ 0, & q \neq 0, 2, 3, 5. \end{cases} \quad (58)$$

Для расслоения

$$(S^3 \rightarrow 4 \cap 2 - R_1 - R_2 - SN \\ \downarrow \\ S^3 - LR_1 - LR_2)$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 3, & p = 1, \\ 4, & p = 3, \\ 0, & p \neq 0, 1, 3, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3. \end{cases} \quad (59)$$

Соответствующая последовательность Майера—Виториса принимает вид

$$Z^2 \xrightarrow{k} Z^4 \rightarrow H_6(4 \cap 2 - SN) \rightarrow (Z \text{ или } 0) \rightarrow 0. \quad (60)$$

Ранг отображения k равен 1, что легко видеть, рассматривая два предшествующих члена ряда или используя аргументы, подобные приведенным после (53). Сомнение в выборе Z или 0 связано с нашим незнанием d^2 в (58). Рассмотрим этот вопрос подробнее. Расслоение (58) — тривиальное расслоение, поскольку многообразие LR_2 можно стянуть в точку, которая лежит в $S^3 - LR_1$, прибегая к конструкции, описанной после (53). Следовательно, $d^2 = 0$, и окончательно $N = Z^5$.

б) Имеем

$$O = H_6(2 \cap 3 \cap St_2)$$

и

$$2 \cap 3 \cap St_2 = \begin{cases} \sum_1^5 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^3 y_i^2 = 1 \end{cases} - \{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \alpha x_3 y_3 = 1, \alpha^2 \neq 1. \quad (61)$$

Отметив, что

$$H_6(2 \cap 3 \cap St_2) = H^6(2 \cap 3 \cup \infty, 4 \cup \infty),$$

как и в разделе 5а, рассмотрим многообразия

$$\begin{aligned} LR_1 &= \{y_3 = \pm (1 - \alpha^2)^{-1/2}\}, \\ LR_2 &= \{y_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Пусть SN — объединение сингулярных точек над LR_2 ;

$$R_1 = \pi^{-1}(LR_1), \quad R_2 = \pi^{-1}(LR_2).$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} O &\rightarrow H^5(2 \cap 3 \cap 4 \cup \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^6(2 \cap 3 \cup \infty, 2 \cap 3 \cap 4 \cup \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^6(2 \cap 3 \cup \infty, \infty), \end{aligned} \quad (62)$$

причем $H^6(2 \cap 3 \cap \infty, \infty) = Z$. Таким образом,

$$\begin{aligned} O &= Z + H^5(2 \cap 3 \cap 4 \cup \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^4(SN \cup \infty, \infty) \rightarrow H^5(2 \cap 3 \cap 4 \cup \infty \cup SN \cup \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^5(2 \cap 3 \cap 4 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^5(SN \cup \infty, \infty), \end{aligned} \quad (63)$$

причем $H^4(SN \cup \infty, \infty) = 0$ и $H^5(SN \cup \infty, \infty) = 0$,

$$O = Z + H^5(2 \cap 3 \cap 4 \cup \infty, SN \cup \infty) = Z + H_5(2 \cap 3 \cap 4 - SN).$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (pt. \rightarrow R_1 \\ \downarrow \\ LR_1) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 2, & p = 0, 1, \\ 0, & p \neq 0, 1, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (64)$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (TB_3 \rightarrow R_2 \\ \downarrow \\ LR_2) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, 1, \\ 0, & p \neq 0, 1, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 2, 3, 5, \\ 0, & q \neq 0, 2, 3, 5. \end{cases} \quad (65)$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^3 \rightarrow 4 \cap 2 \cap 3 - SN - R_1 - R_2 \\ \downarrow \\ S'^2 - LR_1 - LR_2) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p=0, \\ 3, & p=1, \\ 4, & p=2, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q=0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3. \end{cases} \quad (66)$$

Соответствующая последовательность Майера – Виториса принимает вид

$$Z \xrightarrow{k} Z^4 \rightarrow H_5(2 \cap 3 \cap 4 - SN) \rightarrow Z^2 \xrightarrow{g} Z^3, \quad (67)$$

где ранг отображения k равен 1 в силу аргумента, приведенного после (53), и в силу тех же причин ранг g равен 1.

Таким образом, имеем $O = Z^5$.

РАЗДЕЛ 6 (P, Q)

а) Имеем

$$P = H_6(2 \cap 5 \cap St_2)$$

и

$$2 \cap 5 \cap St_2 = \begin{cases} \sum_1^4 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^4 y_i^2 = 1 \end{cases} - \{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \alpha x_3 y_3 + \beta x_4 y_4 = 1, \quad (68)$$

где $1 \neq \alpha^2 \neq \beta^2 \neq 1$. Далее

$$H_i(2 \cap 5 \cap St_2) = H^{12-i}(2 \cap 5 \cup \infty, 4 \cup \infty),$$

где 4 означает $4 \cap 2 \cap 5$. Далее

$$\begin{aligned} H^5(2 \cap 5 \cup \infty, \infty) &\rightarrow H^5(4 \cup \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^6(2 \cap 5 \cup \infty, 4 \cup \infty) \xrightarrow{f} H^6(2 \cap 5 \cup \infty, \infty). \end{aligned} \quad (69)$$

При этом $H^5(2 \cap 5 \cup \infty, \infty) = 0$, $H^6(2 \cap 5 \cup \infty, \infty) = Z$ и отображение f является отображением «на» в силу аргумента, приведенного в приложении 2.

$$P = H^5(4 \cup \infty, \infty) + Z.$$

Теперь обратимся к расслоению π и рассмотрим три типа расположения сингулярностей, подобные (39):

1) их нет;

$$2) LR_1 = \begin{cases} \sum_1^4 y_i^2 = 1, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \alpha^2 + y_4^2 \beta^2 = 0 \end{cases}$$

со стягиваемым несингулярным слоем;

$$3) LR_2 = \begin{cases} \sum_1^4 y_i^2 = 1, \\ y_1^2 + y_2^2 + \alpha^2 y_3^2 + \beta^2 y_4^2 = 1 \end{cases}$$

со стягиваемым слоем, сингулярным в одной точке.

Объединение сингулярных точек — SR_2 . Теперь (LR_1 проанализировано в приложении 1) для LR_2 имеем

$$LR_2 = \begin{cases} (1 - \alpha^2) y_3^2 + (1 - \beta^2) y_4^2 = 0, \\ y_3 = \pm [-(1 - \beta^2)/(1 - \alpha^2)]^{1/2} y_4. \end{cases} \quad (70)$$

Таким образом, LR_2 представляет собой как бы две сферы S^2 , соединенные вдоль $SM = \{y_3 = y_4 = 0\}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} H_0(LR_2) &= Z, \\ H_2(LR_2) &= Z^3, \\ H_i(LR_2) &= 0, \quad i \neq 1, 2. \end{aligned}$$

Далее

$$SN = SR_2 \cup \pi^{-1}(SM),$$

$$R_1 = \pi^{-1}(LR_1), \quad R_2 = \pi^{-1}(LR_2 - SM).$$

Затем

$$\begin{aligned} H^4(4U \infty, \infty) &\rightarrow H^4(SN \cup \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^5(4U \infty, SN \cup \infty) \rightarrow H^5(4U \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^5(SN \cup \infty, \infty) \xrightarrow{k} H^6(4U \infty, SN \cup \infty), \end{aligned} \quad (71)$$

причем $H^4(4U \infty, \infty) = 0$, $H^4(SN \cup \infty, \infty) = Z^2$ и $H^5(SN \cup \infty, \infty) = Z$. Установим справедливость двух последних равенств для групп выписанной выше последовательности, а также покажем, что ранг k равен 1. Итак,

$$H^5(4U \infty, \infty) = \frac{H^5(4U \infty, SN \cup \infty)}{Z^2};$$

Возьмем последовательность

$$\begin{aligned} &\rightarrow H^i(SN \cup \infty, \pi^{-1}(SM) \cup \infty) \rightarrow H^i(SN \cup \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) \rightarrow \end{aligned} \quad (72)$$

и изучим первый ее член. В силу утверждения 6 имеем

$$\begin{aligned} H^i(SN \cup \infty, \pi^{-1}(SM) \cup \infty) &= H_{4-i}(SN - \pi^{-1}(SM)); \\ H_i(SN - \pi^{-1}(SM)) &= \begin{cases} Z^2 & \text{при } i = 0, 1, \\ Z^4 & \text{при } i = 2, \\ 0 & \text{при } i \neq 0, 1, 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (73)$$

Для третьего члена в (72) имеем

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, SR_2 \cap \pi^{-1}(SM) \cup \infty) \rightarrow \\
 &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) \rightarrow \\
 &\rightarrow H^i(SR_2 \cap \pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) \rightarrow \\
 &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, SR_2 \cap \pi^{-1}(SM) \cup \infty) = \\
 &= H_{6-i}(\pi^{-1}(SM) - SR_2)
 \end{aligned} \tag{74}$$

и, следовательно,

$$H^i(SR_2 \cap \pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq 1, 2, \\ Z & \text{при } i = 1, 2. \end{cases}$$

Пространство $\pi^{-1}(SM) - SR_2$ расслоено следующим образом:

$$\begin{array}{c}
 (TB_2 \rightarrow \pi^{-1}(SM) - SR_2 \\
 \downarrow \\
 S^1 \sim SM),
 \end{array}$$

причем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p = 0, 1, \\ 0, & p \neq 0, 1, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q = 0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3. \end{cases} \tag{75}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) &= \begin{cases} Z & \text{при } i = 5, \\ 0 & \text{при } i = 4; \end{cases} \\
 H^i(SN \cup \infty, \pi^{-1}(SM) \cup \infty) &= \begin{cases} 0 & \text{при } i = 5, \\ Z^2 & \text{при } i = 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H^5(SN \cup \infty, \infty) = Z$$

и

$$H^4(SN \cup \infty, \infty) = Z^2$$

при условии, что

$$\begin{aligned}
 &H^3(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) \xrightarrow{f} \\
 &\xrightarrow{\perp} H^4(SN \cup \infty, \pi^{-1}(SM) \cup \infty),
 \end{aligned}$$

где f — нулевое отображение. Чтобы это показать, рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ H^3(\pi^{-1}(SM) \cap SR_2 \cup \infty, \infty) & \rightarrow \\ & \downarrow \cong \\ & \rightarrow H^4(SN \cup \infty, \pi^{-1}(SM) \cap SR_2 \cup \infty) \end{aligned}$$

и воспользуемся тем, что

$$H^3(\pi^{-1}(SM) \cap SR_2 \cup \infty, \infty) = 0.$$

Наконец рассмотрим отображение k в (71). Возьмем следующее подмножество множества $4'$:

$$4' = \begin{cases} \sum_1^4 x_i^2 = 1, \\ y_1 = \operatorname{ch} \lambda, \quad y_2 = i \operatorname{sh} \lambda, \quad iy_3 = y_4, \quad \lambda - \text{действительно}, \\ x_1 \operatorname{ch} \lambda + ix_2 \operatorname{sh} \lambda + \alpha x_3 y_3 + i\beta x_4 y_3 = 1. \end{cases}$$

Со слоем S^2 , за исключением $y_3=0$, существует несингулярное расслоение отображением π над всем подмножеством $4'$. Пусть $\pi^{-1}(\{y_3=0\}) = (SN)'$. Посмотрим на отображения:

$$\begin{aligned} H^5(4 \cup \infty, \infty) & \rightarrow H^5(SN \cup \infty, \infty) \xrightarrow{k} H^6(4 \cup \infty, SN \cup \infty) \\ & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ H^5(4' \cup \infty, \infty) & \rightarrow H^5((SN)' \cup \infty, \infty) \xrightarrow{\langle \text{на} \rangle} H^6(4' \cup \infty, (SN)' \cup \infty), \end{aligned} \quad (76)$$

где $H^5((SN)' \cup \infty, \infty) = Z$, $H^6(4' \cup \infty, (SN)' \cup \infty) = Z$. Изоморфизм и отображение «на» можно интерпретировать геометрически. Переходя к последовательности Майера—Виториса, мы должны знать

$$H_i(S^3 - LR_2 - LR_1).$$

Получаем в силу утверждения 7

$$\begin{aligned} H_i(S^3 - LR_1 - LR_2) &= H_i(S^3) + H_{i-1}(LR_2) + H_{i-2}(S^1) + \\ & \qquad \qquad \qquad + 2H_{i-1}(S^2) = \begin{cases} Z^8, & i = 3, \\ Z, & i = 0, \\ Z^2, & i = 2, \\ Z^3, & i = 1, \\ 0, & i \neq 0, 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (pt. \rightarrow R_1 \\ \downarrow \\ LR_1) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p=0, 1, \\ 4, & p=2, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q=0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (77)$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (TB_2 \rightarrow R_2 \\ \downarrow \\ LR_2 - SM) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 2, & p=0, 1, \\ 4, & p=2, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q=0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3. \end{cases} \quad (78)$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^2 \rightarrow 4 - SN - R_1 - R_2 \\ \downarrow \\ S^3 - LR_1 - LR_2) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p=0, \\ 3, & p=1, \\ 2, & p=2, \\ 8, & p=3, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, 3, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q=0, 2, \\ 0, & q \neq 0, 2. \end{cases} \quad (79)$$

Таким образом, часть последовательности Майера—Виториса принимает вид

$$Z^2 \rightarrow Z^8 \rightarrow H_5(4 - SN) \rightarrow Z^2 \rightarrow Z^2 \quad (80)$$

и, следовательно,

$$H_5(4 - SN) = Z^{10}.$$

Окончательно получим $P = Z^9$.

б) Имеем

$$Q = H_5(2 \cap 3 \cap 5 \cap St_2),$$

$$2 \cap 3 \cap 5 \cap St_2 = \begin{cases} \sum_1^4 x_i^2 = 1 \\ -x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \beta x_3 y_3 = 1, \\ \sum_1^3 y_i^2 = 1 \end{cases} \quad (81)$$

где $1 \neq \alpha^2 \neq \beta^2 \neq 1$. Далее

$$H_i(2 \cap 3 \cap 5 \cap St_2) = H^{10-i}(2 \cap 3 \cap 5 \cup \infty, 4 \cup \infty);$$

$$H^4(2 \cap 3 \cap 5 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^4(4 \cup \infty, \infty) \rightarrow$$

$$\rightarrow H^5(2 \cap 3 \cap 5 \cup \infty, 4 \cup \infty) \rightarrow H^5(2 \cap 3 \cap 5 \cup \infty, \infty) \rightarrow, \quad (82)$$

причем $H^4(2 \cap 3 \cap 5 \cup \infty, \infty) = 0$ и $H^5(2 \cap 3 \cap 5 \cup \infty, \infty) = Z$. Следовательно, $H^5(2 \cap 3 \cap 5 \cup \infty, 4 \cup \infty) = Z + H^4(4 \cup \infty, \infty)$. Теперь рассмотрим сингулярные точки расслоения.

1) Их нет ни одной;

$$2) LR_1 = \begin{cases} \sum_1^3 y_i^2 = 1, \\ y_1^2 + \alpha^2 y_2^2 + \beta^2 y_3^2 = 0 \end{cases}$$

есть стягивающийся несингулярный слой;

$$3) LR_2 = \begin{cases} \sum_1^3 y_i^2 = 1, \\ y_1^2 + \alpha^2 y_2^2 + \beta^2 y_3^2 = 1 \end{cases}$$

— стягивающийся сингулярный слой.

Множество SR_2 — объединение сингулярных точек над LR_2 . Множество LR_1 описано в приложении 1. Далее

$$LR_2 = \left\{ y_2 = \pm \left[-\frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} \right]^{1/2} y_3 \right\},$$

так что LR_2 представляет собой две сферы S^1 , пересекающиеся по S^0 . Теперь заметим, что

$$\{y_2 = y_3 = 0\} = SM.$$

Обозначим

$$SN = SR_2 \cup \pi^{-1}(SM), \quad R_1 = \pi^{-1}(LR_1) \quad \text{и} \quad R_2 = \pi^{-1}(LR_2 - SM)$$

и рассмотрим последовательность

$$H^3(4 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^3(SN \cup \infty, \infty) \rightarrow H^4(4 \cup \infty, SN \cup \infty) \rightarrow$$

$$\rightarrow H^4(4 \cup \infty, \infty) \rightarrow H^4(SN \cup \infty, \infty), \quad (83)$$

где $H^3(4 \cup \infty, \infty) = 0$, $H^3(SN \cup \infty, \infty) = 0$ и $H^4(SN \cup \infty, \infty) = Z^2$.

Следовательно,

$$H^4(4 \cup \infty, \infty) = H^4(4 \cup \infty, SN \cup \infty).$$

Возьмем теперь последовательность

$$\begin{aligned} &\rightarrow H^i(SN \cup \infty, \pi^{-1}(SM) \cup \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^i(SN \cup \infty, \infty) \rightarrow H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) \rightarrow. \end{aligned} \quad (84)$$

Для ее первого члена

$$\begin{aligned} H^i(SN \cup \infty, \pi^{-1}(SM) \cup \infty) &= H_{2-i}(SN - \pi^{-1}(SM)); \\ H_i(SN - \pi^{-1}(SM)) &= \begin{cases} Z^2, & i=0, \\ Z^6, & i=1, \\ 0, & i \neq 0, 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Для третьего члена последовательности (84) имеем

$$\begin{aligned} &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, SR_2 \cap \pi^{-1}(SM) \cup \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) \rightarrow \\ &\rightarrow H^i(SR_2 \cap \pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) \rightarrow, \\ H^i(\pi^{-1}(SM) \cup \infty, SR_2 \cap \pi^{-1}(SM) \cup \infty) &= \\ &= H_{4-i}(\pi^{-1}(SM) - SR_2), \\ H^i(SR_2 \cap \pi^{-1}(SM) \cup \infty, \infty) &= \begin{cases} Z^2, & i=0, \\ 0, & i \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (85)$$

Пространство $\pi^{-1}(SM) - SR_2$ — расслоенное пространство. Для расслоения

$$\begin{array}{c} (TB_2 \rightarrow \pi^{-1}(SM) - SR_2 \\ \downarrow \\ S^0) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 2, & p=0, \\ 0, & p \neq 0, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q=0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3. \end{cases} \quad (86)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H^4(SN \cup \infty, \infty) &= Z^2, \\ H^3(SN \cup \infty, \infty) &= 0. \end{aligned}$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (pt. \rightarrow R_1 \\ \downarrow \\ LR_1) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p=0, \\ 5, & p=1, \\ 0, & p \neq 0, 1, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q=0, \\ 0, & q \neq 0. \end{cases} \quad (87)$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (TB_2 \rightarrow R_2 \\ \downarrow \\ LR_2 - SM) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p=0, \\ 3, & p=1, \\ 0, & p \neq 0, 1, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 2, & q=0, 3, \\ 0, & q \neq 0, 3. \end{cases} \quad (88)$$

Для расслоения

$$\begin{array}{c} (S^2 \rightarrow 4 - SN - R_1 - R_2 \\ \downarrow \\ S'^2 - LR_1 - LR_2) \end{array}$$

имеем $E_{p,q}^2 = Z^{A(p)B(q)}$, где

$$A(p) = \begin{cases} 1, & p=0, \\ 3, & p=1, \\ 10, & p=2, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2, \end{cases} \quad B(q) = \begin{cases} 1, & q=0, 2, \\ 0, & q \neq 0, 2. \end{cases} \quad (89)$$

Таким образом, часть последовательности Майера—Виториса принимает вид

$$Z^2 \rightarrow Z^{10} \rightarrow H_4(4 - SN) \rightarrow 0. \quad (90)$$

Следовательно, окончательно $Q = Z^{11}$.

РАЗДЕЛ 7 (R)

Имеем

$$R = H_4(2 \cap 3 \cap 5 \cap 6 \cap St_2)$$

и

$$2 \cap 3 \cap 5 \cap 6 \cap St_2 = \begin{cases} \sum_1^3 x_i^2 = 1 \\ \sum_1^3 y_i^2 = 1 \end{cases} - \{x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \beta x_3 y_3 = 0, \quad (91)$$

где $1 \neq \alpha^2 \neq \beta^2 \neq 1$. Вследствие того что $2 \cap 3 \cap 5 \cap 6$ в своем общем положении пересекает 4 несингулярным образом,

$$\begin{aligned} H_4(2 \cap 3 \cap 5 \cap 6 \cap St_2) &= H_4(2 \cap 3 \cap 5 \cap 6 - 4) = \\ &= H_4(2 \cap 3 \cap 5 \cap 6) + H_3(2 \cap 3 \cap 4 \cap 5 \cap 6) = J + L \end{aligned}$$

в силу утверждения 6, и, следовательно, $R = Z^{12}$.

§ 4. Заключение

Отметим, что произойдет, если наложить условие $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0$, т. е. не пренебрегать сохранением импульса в вертексе V . Тогда при фиксировании многообразия \mathcal{Z} многообразие \mathcal{B} не может сдвигаться в бесконечность при изменении свободных параметров. Во-первых, по необходимости при наложении этого условия ранг гомологической группы не может возрасти по сравнению с тем значением, которое он имел, когда указанное условие не было наложено. Во-вторых, отметим, что нам неизвестно, сколько именно функций, предсказываемых изложенным расчетом, действительно имеют отношение к рассматриваемому фейнмановскому интегралу. Оба указанных вопроса связаны с общей проблемой расчета скачков на разрезах при обходе сингулярностей из геометрии соответствующей гомологической группы [рассматривая действие $\pi_1(T - L)$ на $H_8(W_1 \times W_2 - U_1^7 i)$].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

1. Рассмотрим многообразие $x_1^2 + \dots + x_N^2 = 0 - \{\text{начало}\}$; оно гомотопно своему сечению с $\sum_1^N |x_i|^2 = 2$ при сдвиге точек в радиальном направлении. Разбивая x_i на суммы действительных и мнимых частей $x_i = u_i + iv_i$, получаем

$$\sum_1^N [(u_i^2 - v_i^2) + 2iu_i v_i] = 0,$$

$$\sum_1^N (u_i^2 + v_i^2) = 2.$$

Складывая и вычитая эти два уравнения и приравнявая нулю по отдельности мнимые и действительные части, получаем

$$\sum_1^N u_i^2 = 1, \quad \sum_1^N v_i^2 = 1, \quad \sum_1^N u_i v_i = 0.$$

Ясно, что это пучок единичных тангенциальных векторов к S^{N-1} .

2. Рассмотрим многообразие $x_1^{\alpha_1} + \dots + x_N^{\alpha_N} = 1$, где α_i — целые положительные числа.

а) Зафиксируем действительные части $x_i^{\alpha_i}$ и устремим мнимые части $x_i^{\alpha_i}$ к нулю. Все x_i будем менять одновременно так, чтобы сумма мнимых частей оставалась нулем. Это можно сделать, разбив x_i на две совокупности, в одной из которых мнимые части $x_i^{\alpha_i} \geq 0$, а во второй $x_i^{\alpha_i} \leq 0$, и затем двигая точки в обеих совокупностях так, чтобы абсолютные значения мнимых частей уменьшались монотонно при сдвиге одних лишь точек с максимальным значением $|\operatorname{Im} x_i^{\alpha_i}|$ в каждой совокупности.

б) Все x_i теперь будут лежать на прямых, углы которых с действительной осью равны $k\pi/\alpha_i$, где k — целые. Теперь сдвинем плавно точки на этих прямых линиях по направлению к началу, сохраняя условие $\sum x_i^{\alpha_i} = 1$, до тех пор пока все точки на линиях с нечетным k не окажутся вначале. Это можно сделать с помощью непрерывного преобразования:

$$x_i \rightarrow sx_i \quad \text{при } x_i \in (\text{линии с нечетными } k),$$

$$x_i \rightarrow rx_i \quad \text{при } x_i \in (\text{линии с четными } k);$$

при этом r, s — действительные числа. Нужно начать с $r=1, s=1$ и плавно уменьшать r, s , пока s не станет равным нулю, все время сохраняя условие $\sum x_i^{\alpha_i} = 1$.

в) Теперь нетрудно сообразить: то, что у нас получилось, — это $\{\alpha_1\} * \{\alpha_2\} * \dots * \{\alpha_N\}$, где $\{\alpha_i\}$ — множества точек α_i и где $*$ означает операцию топологического связывания. Это клин $\prod_i (\alpha_i - 1) S^{N-1}$.

3. Возьмем многообразие

$$\left. \begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 1 \\ y_1^2 + y_2^2 + \alpha^2 y_3^2 + \beta^2 y_4^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - 1} y_4^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}; \\ y_1^2 + y_2^2 + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 - 1} y_3^2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \end{cases}$$

и рассмотрим

$$LB_N = \begin{cases} \sum_1^N x_i^2 + y^2 = 1, \\ \sum_1^N x_i^2 + z^2 = a^2, \end{cases}$$

где a^2 — действительное положительное. Рассуждая, как в пункте 2, мы можем сделать y либо чисто действительным, либо чисто мнимым. Рассмотрим две возможные области

$$а) \quad 1 > y^2 > 0,$$

$$б) \quad 0 > y^2 > 1 - a^2$$

с границами $(y = \pm 1, z = \pm a)$, $(y = 0, z = \pm (a^2 - 1)^{1/2})$, $(y = \pm (1 - a^2)^{1/2}, z = 0)$. Области a и b выглядят как $S^{N-1} \cup S^{N-1} \cup S^{N-1} \cup S^{N-1}$. Первая граница — это четыре точки; вторая граница — это $S^{N-1} \cup S^{N-1}$; третья — это $S^{N-1} \cup S^{N-1}$. В силу сказанного

$$\left. \begin{aligned} H_N(LB_N) &= Z^4 \\ H_1(LB_N) &= Z \end{aligned} \right\} = Z^5$$

при $N = 1$. Далее

$$H_0(LB_N) = Z,$$

$$H_i(LB_N) = 0$$

при $i \neq 0, 1, N$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

1. Отметим, что отображение $H^4(S^4 \cup \infty, LR_2 \cup \infty) \rightarrow H^4(S^4 \cup \infty, \infty)$ нулевое.

Рассмотрим дуальную гомологию $H_4(S^4 \cup \infty, \infty) \rightarrow H_4(S^4 \cup \infty, LR_2 \cup \infty)$. Порождающий элемент группы

$$H_4(S^4 \cup \infty, \infty) = \pi_4(S^4 \cup \infty, \infty)$$

равен

$$E = \begin{cases} y_i = u_i + iv_i, & u_i \text{ и } v_i \text{ действительны,} \\ u_i = 0, & i \neq 5, \\ u_5 = (1 + \sum v_i^2)^{1/2}, & v_5 = 0. \end{cases}$$

Покажем, что отображение $\pi_4(S^4 \cup \infty, \infty) \rightarrow \pi_4(S^4 \cup \infty, LR_2 \cup \infty)$ нулевое при преобразовании E внутри LR_2 .

Подберем непрерывное поле единичных векторов на S^3 , связывающее S^3 с направлением $n(v_i)$ для v_i . Теперь отобразим E внутри LR_2 , полагая

$$\left. \begin{aligned} u_i &= 0, \\ u_5 &= (1 + \sum v_i^2)^{1/2}, \\ v_i, v_5 &= 0, \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda \sum v_i^2 n(v_i), \\ [1 + (1 - \lambda^2) \sum v_i^2]^{1/2}, \\ v_i, v_5 = 0, \end{cases}$$

где λ непрерывно меняется от нуля до единицы.

2. Отображение $H_8(S^4 \times S^4 - 4) \stackrel{f}{=} H_8(S^4 \times S^4)$ нулевое. Возьмем цикл в $H_8(S^4 \times S^4)$. Его можно представить как произведение кратных двух сферических циклов. Может ли цикл в $H_8(S^4 \times S^4 - 4)$ покрывать такой цикл? Для данных y_i ($S^4 \times S^4$ с координатами x_i, y_i , как принято в статье) обратный образ $\pi^{-1}(y_i)$ обладает сферическим циклом, если y_i не принадлежит симметричной поверхности $y_5 = -1/2$. Однако нет сферического цикла на S^4 , который бы избегал $y_5 = -1/2$ по п. 1. Поэтому отображение f не может быть отображением в цикл такого типа. Далее имеем

$$H^8(S^4 \times S^4 \cap 2U \infty, 4 \cap 2U \infty) \rightarrow H^8(S^4 \times S^4 \cap 2U \infty, \infty).$$

Подобный цикл может быть покрыт, если избегать таких поверхностей, как $y_5 = C$, и построить цикл для S^3 при условии, что $y_1 = C$ не совпадает ни с одной из двух сингулярных поверхностей, касательных к S^3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Fotiadi D., Froissart M., Lascoux J., Pham F., *Topology.*, 4, 159 (1965) (дополнение 1).
2. Hilton P. J., Wylie S., *Homology Theory*, New York, 1960 [см. перевод: П. Дж. Хилтон, С. Уайли, Теория гомологий (Введение в алгебраическую топологию), изд-во «Мир», 1966].
3. Steenrod N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, New Jersey, 1951 (см. перевод: Н. Стиррод, Топология косых произведений, ИЛ, 1953).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчика	5
Литература	10
Предисловие	11
Глава 1. СИНГУЛЯРНОСТИ	15
§ 1. Введение	15
§ 2. Ландаувская поверхность	18
§ 3. Пинч в пространстве импульсов	24
§ 4. Интегралы скачков и интегралы унитарности	28
§ 5. Узлы и клювы	33
§ 6. Неландаувские сингулярности	36
§ 7. Абелевы интегралы и топология	39
Глава 2. ГОМОЛОГИЯ	42
§ 1. Введение	42
§ 2. Симплициальные комплексы	44
§ 3. Цепи, циклы и границы	47
§ 4. Группы гомологий	48
§ 5. Группы относительных гомологий	50
§ 6. Цепное отображение и индуцированный гомоморфизм	53
§ 7. Точные последовательности	54
§ 8. Точная гомологическая последовательность	57
Глава 3. ИНТЕГРАЛЫ	60
§ 1. Введение	60
§ 2. Компактные и замкнутые гомологии	65
§ 3. Кограничный гомоморфизм	69
§ 4. Исчезающий класс	72
§ 5. Кронекеровский индекс	79
§ 6. Теорема Пикара — Лефшеца	84
§ 7. Пример: интеграл унитарности	88
§ 8. Эффективное пересечение	92
Глава 4. СКАЧКИ НА РАЗРЕЗАХ	96
§ 1. Введение	96
§ 2. Дифференциальные формы	97
§ 3. Формула вычетов	100
§ 4. Формулы для скачков на разрезах	104
Глава 5. ЕЩЕ О ГОМОЛОГИИ	106
§ 1. Введение	106
§ 2. Гомотопия	107
§ 3. Многообразия и алгебраические многообразия	109
§ 4. Когомология	113
§ 5. Расслоенные пространства	117
§ 6. Спектральные последовательности	119
§ 7. Категории и функторы	124
§ 8. Пучки	126

Глава 6. РЕЗУЛЬТАТЫ	130
§ 1. Теорема об окружающей изотопии	130
§ 2. Процедура компактификации	133
§ 3. Теорема о разложении	135
§ 4. Заключение	137
Литература	140

Дополнение 1. ПРИЛОЖЕНИЕ ИЗОТОПИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ (Д. Фогтади, М. Фруассар, Ж. Ласку, Ф. Фам)	142
--	-----

Введение	142
I. Окружающие изотопические деформации	142
§ 1. Обозначения и определения	143
§ 2. Теорема о деформациях и ее следствие	145
§ 3. Z-окружающая изотопия; отображение, класс, подпространство, компонент	151
§ 4. Аналитичность интеграла (приложение изотопии)	153
II. Теоремы о разложениях	155
§ 1. Лемма об исчезновении	155
§ 2. Компактное когомотопическое разложение пространств	156
§ 3. Компактное гомологическое разложение для многообразий	158
Приложение	161
III. Двойственность при точечном пересечении	162
Приложение	164
IV. Формула Пикара — Лефшеца	170
Введение	170
§ 1. Нулевой пинч и квадратичный нулевой пинч для (S_1, S_2, \dots, S_m)	171
§ 2. Теорема Пикара — Лефшеца	172
§ 3. Локальное ветвление интеграла	181
Литература	182

Дополнение 2. ОТНОСИТЕЛЬНО НЕЛАНДАУВСКИХ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ (П. Федербуш)	183
§ 1. Введение	183
§ 2. Собственно-энергетическая и вертексная диаграммы	183
§ 3. Лестничная диаграмма шестого порядка	186
§ 4. Заключение	187
Литература	187

Дополнение 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ДЛЯ ФЕЙНМАНОВСКОЙ ДИАГРАММЫ ШЕСТОГО ПОРЯДКА (П. Федербуш)	188
§ 1. Введение	188
§ 2. Математические утверждения и обозначения	189
§ 3. Фейнмановская диаграмма	191
§ 4. Заключение	218
Приложение 1	218
Приложение 2	220
Литература	221