Н.Х.Ибрагимов

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Книга отражает современное развитие теоретико-групповых методов применительно к задачам математической физики. Она включает теорию инвариантов групп преобразований в римановых пространствах и групповой анализ уравнений Эйнштейна. Изучаются алгебро-геометрические аспекты принципа Гюйгенса и законов сохранения. Излагаются основы теории формальных групп преобразований Ли—Беклунда, инвариантных дифференциальных многообразий и проводится групповая классификация нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассчитана на математиков, физиков и механиков, интересующихся вопросами качественного анализа дифференциальных уравнений.

Содержание

Предметный указатель

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является итогом исследования определенного круга задач математической физики методами теории групп. Достаточно полное понятие о содержании книги дает ее оглавление. Чтобы сделать изложение замкнутым и более доступным для специалистов по прикладным дисциплинам, добавлена вводная глава.

Моей работе в большой степени способствовало многолетнее общение с Л. В. Овсянниковым, а также наш совместный семинар по групповому анализу в Новосибирском государственном университете. Идея представить полученные результаты в виде отдельной книги возникла во время обсуждения с Г. Биркгофом. Я глубоко признателен им за критические замечания и ценные советы.

Значительная часть материала излагалась в лекциях (см. [11]), которые я читал в разное время для студентов НГУ. Окончательный вариант книги сложился после прочтения курса лекций в Коллеж де Франс весной 1979 г. Считаю своим приятным долгом выразить сердечную благодарность А. Лихнеровичу, который организовал эти лекции и принял живейшее участие в их обсуждении.

На различных этапах работы отдельные части книги подверглись критическому разбору со стороны С. П. Новикова и А. Б. Шабата. В. М. Тешуков оказал ценную помощь при написании § 4.4. Р. С. Хамитова внимательно прочитала всю рукопись и внесла ряд улучшений при отработке отдельных фрагментов. Всем им я выражаю искреннюю благодарность. Я также признателен коллегам, приславшим свои работы и указавшим на новые результаты по обсуждаемым вопросам.

18 января 1982 г. *Н. Х. Ибрагимов*

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ВВОДНАЯ ГЛАВА

ГРУППЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Непрерывные группы

1.1. Топологические группы. Топологическое пространство G с заданной в нем групповой операцией $\cdot$ называется *топологической группой*, если отображение $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ (b^{-1} — обратный к b элемент в группе G) пространства-произведения $G \times G$ в пространство G непрерывно.

При изучении локальных свойств топологических групп можно ограничиться рассмотрением окрестности единицы группы G, так как для любого фиксированного элемента $a \in G$ отображение $x \mapsto x \cdot a^{-1}$ задает гомеоморфизм топологического пространства G на себя и переводит элемент a в единицу группы G.

Множество $H \subset G$ называется *подгруппой* топологической группы G, если оно является замкнутым множеством топологического пространства G и подгруппой группы G. Если при этом H — инвариантная подгруппа группы G ($a^{-1} \cdot H \cdot a = H$ для каждого элемента a из G), то H называется *инвариантной*, или *нормальной*, подгруппой топологической группы G. Пусть H — инвариантная подгруппа топологической группы G и G/H — семейство всех взаимно непересекающихся множеств вида $H \cdot a$, $a \in G$. В G/H естественным путем вводятся топология и групповая операция, индуцированные топологией и групповой операцией в G. В результате получается топологическая группа G/H, называемая *факторгруппой* топологической группы G по ее инвариантной подгруппе H.

Отображение f: $G \to G'$ называется *изоморфизмом* топологической группы G на топологическую группу G', если f — изоморфизм группы G на группу G' и гомеоморфизм топологического пространства G на топологическое пространство G'. Если отображение f непрерывно и является гомоморфизмом группы G в группу G', то оно называется *гомоморфизмом* топологической группы G в топологическую группу G'.

1.2. Группы Ли. Пусть M — связное хаусдорфово топологическое пространство, $U \subset M$ — открытое множество, а φ — гомеоморфизм U на открытое множество пространства $\mathbb{R}^m$. Пара (U, φ) называется (m-мерной) *картой* на M, множество U — *областью* этой карты, и функции $\varphi^i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$: $U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ называются *локальными координатами*. Символом pr_i обозначена здесь проекция на i-ю координатную ось в $\mathbb{R}^m$: если $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$, то $\mathrm{pr}_i(x) = x^i$. Для любой точки $a \in U$ набор $(\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ называют *системой локальных координат* в точке a, а вещественные числа $x^i = \varphi^i(a)$ — координатами точки a в указанной системе координат. Система локальных координат будет обозначаться также символом $\{x^i\}$.

Топологическое пространство M называется m-мерным (топологическим) *многообразием*, если на M существует семейство карт, области которых покрывают M. Если (U, φ) — карта на M, а $V \subset U$ — открытое множество, то сужение $\varphi|_V$ будет гомеоморфизмом V на открытое множество в $\mathbb{R}^m$; поэтому $(V, \varphi|_V)$ является картой на M и называется *сужением* карты (U, φ) на V.

Возможность использования аналитического аппарата на многообразиях достигается путем введения дифференцируемой структуры, определяемой следующим образом. Карты (U, φ) и (U, ψ) на многообразии M, имеющие одну и ту же область, называются *C^p-согласованными*, если отображения $\psi \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U) \to \psi(U)$ и $\varphi \circ \psi^{-1}$: $\psi(U) \to \varphi(U)$ p раз непрерывно дифференцируемы. Две произвольно взятые карты (U, φ) и (V, ψ) на M называются *C^p-согласованными*, если их сужения на $U \cap V$ C^p-согласованы или пересечение областей этих карт пусто. *Атлас* класса C^p m-мерного многообразия M — это семейство $\mathcal{A}$ попарно C^p-согласованных карт на M, области которых покрывают M. Два атласа $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ класса C^p называются *эквивалентными*, если $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ является атласом класса C^p. *Дифференцируемой структурой* класса C^p (p — целое положительное число или ∞) на многообразии M называется семейство всех эквивалентных атласов класса C^p многообразия M. Равносильным путем можно определить дифференцируемую структуру как максимальный атлас многообразия; таким максимальным атласом является объединение всех атласов рассматриваемого класса эквивалентных между собой атласов.

Многообразие M с заданной на нем дифференцируемой структурой класса C^p называется m-мерным *дифференцируемым многообразием* класса C^p. Для того чтобы получить дифференцируемое многообразие, достаточно задать любой из эквивалентных атласов рассматриваемого многообразия. Заменой (в определении атласа) функций класса C^p аналитическими функциями получают определение m-мерного аналитического многообразия. В дальнейшем, когда нет специальных оговорок, считается, что все рассматриваемые многообразия наделены дифференцируемой структурой класса C^∞.

Пусть M и N — дифференцируемые многообразия размерностей m и n соответственно. Непрерывное отображение f: $M \to N$ называется *p раз непрерывно дифференцируемым*, если для любых карт (U, φ) и (V, ψ) на M и N соответственно, области которых удовлетворяют условию $f(U)\subset V$, локальное изображение f, т. е. отображение $\psi\circ(f|_U)\circ\varphi^{-1}$ открытого множества $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m$ в открытое множество $\psi(V)\subset\mathbb{R}^n$, p раз непрерывно дифференцируемо. Если M, N — аналитические многообразия и локальное изображение f аналитично, то отображение f называется *аналитическим*. В случае $N=\mathbb{R}$ отображение f называется также (вещественной) *функцией*, определенной на многообразии M. Указанные понятия формулируются аналогичным образом и для отображений, определенных локально, т. е. заданных на некотором открытом множестве многообразия M.

Кривой в многообразии M, проходящей через точку $x\in M$, называется непрерывно дифференцируемое отображение γ: $I\to M$, где I — открытый интервал на вещественной прямой $\mathbb{R}$, содержащий точку 0, причем $\gamma(0)=x$. Говорят, что кривые γ_1 и γ_2, проходящие через точку $x\in M$, касаются друг друга в этой точке, если производные локальных изображений γ_1 и γ_2 в точке 0 совпадают. Понятие касания кривых в точке не зависит от выбора карты и задает соотношение эквивалентности между кривыми, проходящими через одну и ту же точку многообразия. Семейство всех кривых, касательных к кривой γ в точке $x\in M$, называется *касательным вектором* к M в точке x и обозначается символом $[\gamma]_x$. Касательный вектор $[\gamma]_x$ можно отождествить с производной $\gamma'(0)$ локального изображения кривой γ в точке 0; поэтому вместо $[\gamma]_x$ используется также обозначение $\gamma'(0)$. Множество всех касательных векторов в точке x называется *касательным пространством* к M в точке x и обозначается M_x. Если многообразие M имеет размерность m, то на касательном пространстве вводится структура m-мерного пространства, индуцированная дифференцируемой структурой многообразия M. Для этого выбирают некоторую карту (U, φ) в окрестности точки x, так что $x\in U$, и определяют отображение θ: $M_x\to\mathbb{R}^m$, сопоставляя каждому касательному вектору $[\gamma]_x\in M_x$ производную в точке 0 локального изображения $\varphi\circ\gamma$ кривой γ. Отображение θ является взаимно однозначным и позволяет ввести на M_x требуемую структуру векторного пространства. А именно, сумму касательных векторов $[\gamma_1]_x$, $[\gamma_2]_x$ и произведение на вещественное число λ можно определить формулами

$$[\gamma_1]_x+[\gamma_2]_x=\theta^{-1}(h_1+h_2),\qquad \lambda[\gamma]_x=\theta^{-1}(\lambda h),$$

где $h_i=\theta([\gamma_i]_x)$, $i=1, 2$.

Дуальное к M_x пространство M_x^*, представляющее собой m-мерное векторное пространство линейных отображений пространства M_x в $\mathbb{R}$, называется *кокасательным пространством* к M в точке x. Тензоры в точке $x\in M$ определяются как аффинные тензоры над векторным пространством M_x, т. е. как вещественные полилинейные отображения, определенные на произведении касательных и кокасательных пространств к многообразию M в точке x. А именно, тензором, контравариантным порядка r и ковариантным порядка s, или просто *тензором типа* $\binom{r}{s}$, определенным в точке $x \in M$, называется полилинейное отображение из произведения $\underbrace{M_x^* \times \ldots \times M_x^*}_{r} \times \underbrace{M_x \times \ldots \times M_x}_{s}$ в $\mathbb{R}$. Тензорное поле типа $\binom{r}{s}$ на многообразии M задается путем сопоставления каждой точке многообразия тензора указанного типа, определенного в этой точке. В частности, используя изоморфизм между пространствами $(M_x^*)^*$ и M_x, векторное поле ξ на многообразии M может быть определено как гладкое отображение $x \mapsto \xi(x) \in M_x$, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ однозначно определенный касательный вектор к M в точке x.

Аналитическое многообразие G с определенной на нем групповой операцией $\cdot$ называется *группой Ли*, если отображение $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ многообразия-произведения $G \times G$ на многообразие G аналитично.

1.3. Локальные группы. Топологическое пространство G называется *локальной группой*, если существуют элемент (единица) $e \in G$ и такие окрестности U, V (причем $V \subset U$) элемента e, что на произведении $U \times U$ определено отображение (локальная групповая операция на U) $\cdot : U \times U \to U$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $V \cdot V \subset U$;
2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для всех a, b, $c \in V$;
3) $e \cdot a = a \cdot e = a$ для всех $a \in U$;
4) для любого $a \in V$ существует (обратный) элемент $a^{-1} \in U$, такой, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$;
5) отображение $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$ непрерывно на $U \times V$.

Окрестности U и V, фигурирующие выше, не определяются однозначно: вместо U и V можно взять соответственным образом подобранные меньшие окрестности $U' \subset U$, $V' \subset V$. Этот произвол в определении локальной группы обеспечивает необходимую в локальных вопросах общность вводимого понятия и расширяет область применимости теоретико-групповых методов. Согласно приведенному определению, каждая топологическая группа является также локальной группой.

Замкнутое подмножество H локальной группы G, содержащее единицу $e \in G$, называется *подгруппой* локальной группы G, если оно является локальной группой относительно локальной групповой операции в G. Если при этом найдется такая открытая окрестность $U \subset G$ единицы, что $a^{-1} \cdot b \cdot a \in H$ для всех элементов $a \in U$ и $b \in U \cap H$, то H называется *инвариантной подгруппой* локальной группы G. Факторгруппа G/H локальной группы G по ее инвариантной подгруппе H строится как и в случае топологических групп, с тем отличием, что теперь в качестве элементов G/H берутся смежные классы по H элементов из некоторой окрестности единицы локальной группы G.

В множестве локальных групп вводится отношение эквивалентности с помощью понятия локального изоморфизма, определяемого следующим путем. Пусть G и G' — две локальные группы, e и e' — их единицы, а окрестности U, V и U', V' элементов e и e' соответственно выбраны так, что для них выполняются аксиомы 1)—5). Пусть f: $U \to U'$ — такой гомеоморфизм, что $f(V) \subset V'$ и для всех a, $b \in V$ выполняется условие $f(a, b) = f(a) \cdot f(b)$. Тогда отображение f называется *локальным изоморфизмом*, а сами группы G и G' — *локально изоморфными*. Обратное отображение f^{-1} (или, возможно, его сужение на некоторую окрестность элемента e') также является локальным изоморфизмом. Локальный изоморфизм также удовлетворяет обычным свойствам изоморфизма групп: $f(e) = e'$, $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$ для любого элемента $a \in V$.

1.4. Локальные группы Ли. Пусть G — локальная группа, (U, φ) — такая r-мерная карта на G, что $e \in U$, и на U определена локальная групповая операция, заданная в G, причем гомеоморфизм φ удовлетворяет условию $\varphi(e) = 0$. Пусть, далее, открытое множество $V \subset U$ выбрано так, что U и V удовлетворяют условиям 1)—5), § 1.6. Если при этом отображение $(a, b) \mapsto a \cdot b$ произведения $V \times V$ в U является аналитическим, то говорят, что в локальной группе G введены аналитические координаты. Другими словами, это означает, что координаты c^i $(i = 1, \ldots, r)$ элемента $c = a \cdot b \in U$ в локальной карте (U, φ) являются аналитическими функциями $c^i = \psi^i(a^1, \ldots, a^r, b^1, \ldots, b^r)$ координат a^i, b^i элементов a, $b \in V$ в локальной карте $(V, \varphi|_V)$.

Локальная группа G, в которой введены аналитические координаты, называется *локальной группой Ли*. Если при этом, как выше, размерность системы локальных координат равна r, то G называют *r-мерной локальной группой Ли* и обозначают G_r. Всякая группа Ли, как легко заметить, является одновременно и локальной группой Ли.

Локальная группа Ли G_r называется *разрешимой*, если существует ряд $G_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset G_1$ подгрупп размерностей r, $r-1$, ..., 1, такой, что каждая подгруппа G_{s-1} $(s = 2, \ldots, r)$ является инвариантной подгруппой в локальной группе Ли G_s. Группа G_r называется *простой*, если она не содержит инвариантных подгрупп, отличных от G_r и $\{e\}$, и *полупростой*, если она не содержит разрешимых инвариантных подгрупп, отличных от $\{e\}$.

Изучение структуры локальных групп Ли и их применение основываются на возможности описания локальной группы Ли в терминах ее алгебры Ли, представляющей собой более простой алгебраический объект.

§ 2. Алгебры Ли

2.1. Определения. *Алгеброй Ли* называется векторное пространство*) L с умножением (билинейным отображением $(\xi_1, \xi_2) \mapsto [\xi_1, \xi_2]$ произведения $L \times L$ в L), которое антисимметрично

$$[\xi_1, \xi_2] + [\xi_2, \xi_1] = 0$$

и удовлетворяет тождеству Якоби

$$[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0$$

для всех $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in L$. Произведение $[\xi_1, \xi_2]$ называется *коммутатором* векторов ξ_1 и ξ_2. Любое векторное пространство можно превратить в алгебру Ли. Если, например, определить умножение, полагая $[\xi_1, \xi_2] = 0$ для всех векторов ξ_1, ξ_2 рассматриваемого пространства, то получается алгебра Ли, называемая *коммутативной*, или *абелевой*. *Размерностью* алгебры Ли L называется размерность векторного пространства L. Алгебра L размерности r будет обозначаться также символом L_r.

Пусть L_r — алгебра Ли, $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — базис соответствующего векторного пространства L_r. Разложение коммутатора любой пары базисных векторов по этому базису имеет вид **)

$$[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k,$$

где c_{ij}^k $(i, j, k = 1, \ldots, r)$ — вещественные числа. Числа c_{ij}^k называются *структурными константами* (в данном базисе) алгебры L_r и образуют аффинный тензор над векторным пространством L_r. Антисимметричность коммутатора и тождества Якоби накладывают следующие условия на структурные константы:

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0, \qquad c_{im}^k c_{jn}^m + c_{jm}^k c_{ni}^m + c_{nm}^k c_{ij}^m = 0.$$

Линейное отображение $f\colon L \to K$ называется *гомоморфизмом* алгебры L в алгебру K, если для всех векторов ξ, ξ' из L выполняется равенство $f([\xi, \xi']) = [f(\xi), f(\xi')]$. Множество $f^{-1}(0)$ всех векторов из L, которые при гомоморфизме f переходят в нулевой вектор пространства K, называется *ядром гомоморфизма* f. Если f отображает L на K и $f^{-1}(0) = 0$, то гомоморфизм f называется *изоморфизмом*, а алгебры L и K — *изоморфными*. Изоморфизм алгебры L на себя называется *автоморфизмом*.

Пусть L — алгебра Ли, K и N — подпространства векторного пространства L, а $K \cap N$ обозначает их пересечение. Суммой подпространств K, N называется подпространство $K + N$, состоящее

*) Ниже рассматриваются вещественные алгебры Ли, так что речь идет о векторных пространствах над полем вещественных чисел.

**) Здесь и всюду в дальнейшем, когда нет специальных оговорок, используется обычное правило суммирования по индексам, повторяющимся как верхний и нижний, причем число соответствующих слагаемых бывает известно из контекста.

из всех векторов вида $\eta+\zeta$ ($\eta\in K$, $\zeta\in N$), а их произведением $[K, N]$ — линейная оболочка всех коммутаторов $[\eta, \zeta]$ ($\eta\in K$, $\zeta\in N$). Если $K\cap N=0$, то $K+N$ называется прямой суммой подпространств K, N.

Подпространство K пространства L называется подалгеброй алгебры Ли L, если $[K, K]\subset K$, и идеалом этой алгебры, если $[K, L]\subset K$.

Если K, N — идеалы алгебры L, то пересечение $K\cap N$, произведение $[K, N]$ и сумма $K+N$ подпространств K, N векторного пространства L также являются идеалами алгебры L, причем $[K, N]\subset K\cap N$. Если $K\cap N=0$, то $[K, N]=0$; при этом идеал $K+N$ называется прямой суммой идеалов K, N алгебры L и обозначается символом $K\oplus N$. Если в алгебре L существуют такие идеалы K, N, что $L=K\oplus N$, то алгебра L называется разложимой в прямую сумму своих подалгебр K и N. Пусть теперь K — идеал, а N — подалгебра алгебры L, причем $K\cap N=0$; тогда прямая сумма $K+N$ подпространств K, N пространства L является подалгеброй алгебры L и называется полупрямой суммой подалгебр K и N алгебры L. Если при этом $L=K+N$, то говорят, что алгебра L является полупрямой суммой своих подалгебр K и N.

Пусть K — идеал алгебры L. Семейство L/K попарно непересекающихся смежных классов $\xi+K$ ($\xi\in L$) естественно снабжается структурой алгебры Ли. Полученная алгебра L/K называется факторалгеброй алгебры L по идеалу K, а гомоморфизм $\xi\mapsto\xi+K$ алгебры L на алгебру L/K — естественным, или каноническим, гомоморфизмом; ядром этого гомоморфизма является идеал K. Сама алгебра L называется при этом расширением алгебры L/K с помощью K.

Алгебра Ли $L^{(1)}=[L, L]$ называется производной алгеброй алгебры Ли L. По построению, $L^{(1)}$ является идеалом в L. Производные алгебры более высокого порядка определяются рекуррентно: $L^{(n+1)}=(L^{(n)})^{(1)}$, $n=1, 2, \ldots$

Алгебра L называется *разрешимой*, если $L^{(n)}=0$ для некоторого $n>0$. Простейшим примером разрешимой алгебры является коммутативная алгебра Ли. Разрешимы также все одномерные и двумерные алгебры Ли. Подалгебра и гомоморфный образ любой разрешимой алгебры, очевидно, разрешимы; в частности, разрешима факторалгебра разрешимой алгебры по любому ее идеалу. Кроме того, если идеал K алгебры L и факторалгебра L/K разрешимы, то сама алгебра L также разрешима. Действительно, если $K^{(n)}=0$, $(L/K)^{(m)}=0$ для некоторых положительных n, m, а $f\colon L\to L/K$ — естественный гомоморфизм, то $f(L^{(m)})=(f(L))^{(m)}=(L/K)^{(m)}=0$, откуда следует, что $L^{(m)}\subset K$ и $L^{(n+m)}=0$.

Пусть K, N — разрешимые идеалы алгебры L_r. Факторалгебра $(K+N)/N$ изоморфна разрешимой алгебре $K/(K\cap N)$ и, значит, разрешима. Поэтому идеал $K+N$ разрешим как расширение разрешимой алгебры $(K+N)/N$ с помощью разрешимой алгебры N. Отсюда следует, что разрешимый идеал R максимальной размерности в конечномерной алгебре Ли L_r является единственным и содержит все разрешимые идеалы алгебры L_r. Этот максимальный разрешимый идеал R называется *радикалом* алгебры L_r.

Алгебра Ли L_r разрешима тогда и только тогда, когда существует ряд

$$L_r \supset L_{r-1} \supset \ldots \supset L_1 \tag{2.1}$$

подалгебр размерностей r, $r-1$, ..., 1 соответственно, в котором каждая подалгебра L_{s-1} является идеалом в L_s $(s=2, \ldots, r)$. Разрешимость алгебры L_r, для которой существует ряд (2.1), следует из соотношений

$$L_r^{(r)} = (L_r^{(1)})^{(r-1)} \subset L_{r-1}^{(r-1)} \subset \ldots \subset L_1^{(1)} = 0.$$

Пусть теперь алгебра L_r разрешима и $L_r^{(n)}=0$, $n>0$. Рассматривая ряд последовательных производных

$$L_r^{(1)} \supset L_r^{(2)} \supset \ldots \supset L_r^{(n)}, \tag{2.2}$$

легко видеть, что для любого $\nu=1, \ldots, n$ всякое подпространство в $L_r^{(\nu-1)}$, содержащее $L_r^{(\nu)}$, является идеалом в $L_r^{(\nu-1)}$. Отсюда ясно, как можно достроить ряд (2.2) до требуемого ряда (2.1).

Некоммутативная алгебра Ли L называется *простой*, если она не имеет идеалов, отличных от 0 и L. Примером простой алгебры может служить алгебра Ли группы вращений в $\mathbb{R}^3$; она представляет собой такую трехмерную алгебру L, производная алгебра $L^{(1)}$ которой совпадает с ней самой. Это свойство и обеспечивает простоту алгебры L: если бы в L существовал идеал K, отличный от 0 и L, то алгебры K и L/K, имея размерности один или два, были бы разрешимы, и, значит, была бы разрешима алгебра L, что противоречит условию $L^{(1)}=L$. Отсюда видно также, что любая трехмерная алгебра Ли или проста, или разрешима.

Алгебра Ли называется *полупростой*, если ее радикал равен нулю. Заметим, что всякий коммутативный идеал разрешим. С другой стороны, алгебра L, содержащая ненулевой разрешимый идеал K, содержит также ненулевой коммутативный идеал — им является предпоследний элемент последовательности производных: K, $K^{(1)}$, ..., $K^{(n-1)}$, $K^{(n)}=0$. Поэтому алгебра Ли полупроста в том и только том случае, если она не имеет отличных от нуля коммутативных идеалов.

Всякая простая алгебра Л и полупроста. Полупростой будет также любая конечномерная алгебра L, распадающаяся в прямую сумму

$$L = K \oplus \ldots \oplus N \tag{2.3}$$

своих идеалов K, ..., N, являющихся простыми алгебрами. Более того, такими алгебрами L исчерпывается весь класс конечномерных полупростых алгебр Ли. А именно, для каждой конечномерной полупростой алгебры L существует разложение (2.3) в прямую сумму своих простых идеалов, причем это разложение единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Для практического использования удобен критерий Картана полупростоты конечномерных алгебр Ли. В координатной форме этот критерий состоит в следующем:

Алгебра L_r со структурными константами c_{ij}^k полупроста тогда и только тогда, когда

$$\det[g_{ij}] \neq 0,$$

где $[g_{ij}]$—матрица с элементами $g_{ij} = c_{im}^k c_{jk}^m$ $(i, j = 1, \ldots, r)$.

Задача нахождения радикала данной алгебры Ли сводится к выяснению свойства полупростоты соответствующей факторалгебры. Действительно, всякий разрешимый идеал в факторалгебре L/R конечномерной алгебры L по любому ее разрешимому идеалу R имеет вид K/R, где K—разрешимый идеал в L, содержащий R. Поэтому разрешимый идеал R алгебры Ли L является ее радикалом тогда и только тогда, когда факторалгебра L/R полупроста.

2.2. Алгебры Ли и локальные группы Ли. Центральное место в теории групп Ли занимает соответствие между группами и алгебрами Ли. Каждой r-мерной группе Ли G_r сопоставляется r-мерная алгебра Ли L_r, представляющая собой совокупность векторных полей (с естественным определением их коммутатора) на многообразии G_r, инвариантных относительно левых (или, равносильно, правых) сдвигов группы G_r. С другой стороны, каждая конечномерная алгебра Ли изоморфна алгебре Ли некоторой группы Ли.

Это соответствие продолжается на структурные свойства групп и алгебр Ли. Если L_r—алгебра Ли группы G_r, то подгруппе, инвариантной подгруппе и факторгруппе группы G_r, соответствуют подалгебра, идеал и факторалгебра алгебры L_r. Отсюда следует, что алгебра Ли разрешимой (соответственно простой или полупростой) группы Ли является также разрешимой (соответственно простой или полупростой). При этом разложению алгебры L_r в прямую (полупрямую) сумму своих подалгебр отвечает представление группы G_r в виде прямого (полупрямого) произведения своих подгрупп, т. е. в виде $G_r = \mathcal{K} \cdot \mathcal{N}$, где $\mathcal{K}$ и $\mathcal{N}$—инвариантные подгруппы ($\mathcal{K}$—подгруппа, а $\mathcal{N}$—инвариантная подгруппа) группы G_r, причем $\mathcal{K} \cap \mathcal{N} = e$.

Процесс восстановления (с точностью до локального изоморфизма) локальной группы Ли G по ее алгебре Ли L конструктивно осуществляется с помощью уравнения Ли и определяемого им экспоненциального отображения exp: $L \to G$. Соответствующая процедура кратко может быть описана следующим образом (за подробностями можно обратиться, например, к монографиям Понтрягина [1], §§ 42, 56, и Шевалле [1], § VIII).

Кривая $g(t)\subset G$ ($t\in I\subset\mathbb{R}$), проходящая через единицу e локальной группы Ли G, называется *однопараметрической подгруппой* группы G, если отображение g: $I\to G$ является локальным гомоморфизмом аддитивной группы $\mathbb{R}$ вещественных чисел в локальную группу G. Другими словами, однопараметрическая подгруппа группы G—это ее одномерная подгруппа, параметризованная так, что выполняются условия

$$g(t)\cdot g(s)=g(t+s), \qquad g(0)=e. \tag{2.4}$$

Для любого $\xi\in L$ уравнение Ли позволяет построить такую однопараметрическую подгруппу $g(t)\subset G$, что касательный вектор $[g]_e$ к G в точке e, определяемый кривой g, совпадает с заданным вектором ξ, т. е. $g'(0)=\xi$. Уравнение Ли представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными данными, и локальная теорема существования и единственности решения дифференциальных уравнений обеспечивает существование и однозначную определенность указанной однопараметрической подгруппы $g(t)$, а также обусловливает ее локальный характер. Совокупность однопараметрических подгрупп, построенных для всех векторов $\xi\in L$, образует локальную группу Ли, локально изоморфную исходной группе G и поэтому отождествляемую с ней.

Пусть $g(t, \xi)$—однопараметрическая подгруппа (с групповым параметром t), соответствующая в указанном выше построении вектору ξ из алгебры L. Используя специфику уравнения Ли, можно показать, что

$$g(t, \xi)=g(1, t\xi)$$

тождественно по t. Из этого равенства с учетом (2.4) следует, что отображение exp: $L\to G$, определяемое формулой

$$\exp(\xi)=g(1, \xi)$$

и называемое *экспоненциальным* отображением, обладает обычными свойствами экспоненты:

$$\exp(t\xi)\cdot\exp(s\xi)=\exp[(t+s)\xi], \quad \exp(-t\xi)=(\exp(t\xi))^{-1},$$

где $t, s\in\mathbb{R}$. С помощью экспоненциального отображения однопараметрическая подгруппа с касательным вектором ξ записывается в виде $\exp(t\xi)$.

2.3. Внутренние автоморфизмы. Пусть G—локальная группа Ли, L—ее алгебра Ли. Каждый элемент $a\in G$ определяет внутренний автоморфизм f_a: $x\mapsto axa^{-1}$ группы G, а множество всех f_a образует локальную группу Ли—группу внутренних автоморфизмов $\operatorname{Int} G$ группы G. Поскольку всякому автоморфизму группы G соответствует некоторый автоморфизм алгебры L, то группе

$\operatorname{Int} G$ соответствует локальная группа Ли автоморфизмов алгебры L. Эта группа локально изоморфна группе $\operatorname{Int} G$; она называется *группой внутренних автоморфизмов* алгебры L, или *присоединенной группой* группы G, и обозначается G^A.

Алгеброй Ли группы G^A является присоединенная алгебра L^A алгебры L, определяемая следующим образом. Пусть ξ — произвольный элемент алгебры L. Линейное отображение $\operatorname{ad} \xi$: $\eta \mapsto [\xi, \eta]$ является автоморфизмом алгебры L и называется *присоединенным к* ξ *отображением*, или *внутренним дифференцированием*, алгебры Ли L. Множество всех внутренних дифференцирований $\operatorname{ad} \xi$ $(\xi \in L)$ образует алгебру Ли с коммутатором $[\operatorname{ad} \xi, \operatorname{ad} \eta] = \operatorname{ad} [\xi, \eta]$. Эта алгебра называется *присоединенной алгеброй* L^A для алгебры L. Присоединенная алгебра L^A является алгеброй Ли присоединенной группы G^A.

Две подгруппы H и H' группы G подобны, если существует такой внутренний автоморфизм группы G, который переводит H в H'. Соотношение подобия разбивает множество всех подгрупп группы G на непересекающиеся семейства подобных подгрупп. В этом разбиении возьмем семейства подгрупп одинаковой размерности s и выберем по одному представителю из каждого семейства. Полученное множество неподобных друг другу подгрупп группы G, описывающее совокупность всех ее s-мерных подгрупп с точностью до подобия, называется *оптимальной системой* s-мерных подгрупп группы G. Соответствие между подгруппами группы Ли и подалгебрами ее алгебры Ли сводит задачу описания подгрупп группы G к описанию подалгебр алгебры L. При этом подобие подалгебр определяется с помощью преобразований присоединенной группы G^A: две подалгебры подобны, если найдется преобразование из G^A, переводящее одну из этих подалгебр в другую. Оптимальной системе s-мерных подгрупп будет соответствовать совокупность неподобных друг другу s-мерных подалгебр, которая также называется *оптимальной системой* (порядка s) и обозначается θ_s.

В групповом анализе дифференциальных уравнений к вопросу об описании неподобных подгрупп приводит, например, задача классификации инвариантных и частично инвариантных решений (Овсянников [2]). При этом бывает важно не только выяснить общие свойства решений, но и построить их в более или менее «явном» виде, для чего в первую очередь необходимо найти оптимальные системы подалгебр рассматриваемой конкретной алгебры Ли. Как правило, построение оптимальной системы θ_1 легко осуществляется простым подбором подходящих преобразований из присоединенной группы, как это будет показано в § 5.3. Построение оптимальных систем более высокого порядка достаточно просто реализовать для разрешимых алгебр. В этом случае оптимальная система θ_{s+1} $(s \geqslant 1)$ может быть получена путем расширения элементов из θ_s до $(s+1)$-мерных подалгебр (с последующим исключением подобных подалгебр), так как согласно § 2.1 любая $(s+1)$-мерная подалгебра разрешимой алгебры содержит s-мерную подалгебру. Это же замечание справедливо также в случае построения разрешимых (например, двумерных) подалгебр произвольной алгебры Ли. Для классификации подалгебр размерности больше двух в случае неразрешимых алгебр с успехом может быть использована теорема Леви—Мальцева о существовании и единственности (с точностью до подобия) разложения произвольной конечномерной алгебры Ли в полупрямую сумму радикала и полупростой подалгебры. В большинстве случаев, встречающихся в практике группового анализа дифференциальных уравнений, применение этой теоремы позволяет полностью реализовать необходимую классификацию подалгебр.

2.4. Теорема Леви—Мальцева. Теорема Леви*) (теорема существования) утверждает, что всякая конечномерная алгебра Ли L разлагается в полупрямую сумму своего радикала R и полупростой подалгебры N:

$$L = R + N. \tag{2.5}$$

Если L—алгебра Ли локальной группы Ли G, то теорема Леви дает представление группы G в виде полупрямого произведения

$$G = \mathcal{R} \cdot \mathcal{N}. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathcal{R}$—максимальная разрешимая инвариантная подгруппа в G, соответствующая радикалу R алгебры L и называемая также радикалом группы G, а $\mathcal{N}$—полупростая подгруппа группы G, соответствующая подалгебре N алгебры L. Каждое из представлений (2.5) и (2.6) алгебры L и группы G называется *разложением Леви*, а подалгебра N и подгруппа $\mathcal{N}$—*подалгеброй* и *подгруппой Леви* соответственно.

В отличие от радикала подалгебра Леви не определяется однозначно. Однако все подалгебры Леви данной алгебры Ли подобны, и, следовательно, с точностью до подобия разложение Леви единственно. Это обеспечивает теорема Мальцева [1] (теорема единственности):

Пусть R—радикал конечномерной алгебры L и

$$L = R + N = R + N' \tag{2.7}$$

—два разложения Леви. Тогда найдется такой элемент ξ из R, что N' переводится в N внутренним автоморфизмом $\exp(\operatorname{ad}\xi)$.

Дальнейшее уточнение совокупности внутренних автоморфизмов, достаточной для преобразования друг в друга различных подалгебр Леви, содержится в работе Harish-Chandra [1] (см. также

*) В своем доказательстве Levi [1] опирается на классификацию Картана полупростых групп. Другое доказательство, не зависящее от этой классификации и справедливое как для комплексных, так и для вещественных алгебр, дал Whitehead [1]; его метод использован также в работе Мальцева [1].

Бурбаки [1], гл. 1, § 6, n°8). А именно, в теореме Мальцева достаточно ограничиться рассмотрением специальных автоморфизмов — внутренних автоморфизмов $\exp(\operatorname{ad}\xi)$, порожденных элементами ξ из нильпотентного радикала алгебры L.

Пусть дано разложение Леви (2.6) группы G. Из теоремы Мальцева следует, что всякая полупростая подгруппа группы G подобна некоторой подгруппе из $\mathcal{N}$. Поэтому для классификации полупростых подгрупп группы G достаточно перечислить все неподобные подгруппы из $\mathcal{N}$. Следующее простое следствие теоремы Мальцева показывает, что при этом $\mathcal{N}$ можно рассматривать независимо от исходной группы G и использовать только внутренние автоморфизмы группы $\mathcal{N}$: если две подгруппы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ из $\mathcal{N}$ подобны в G, скажем $\mathcal{Q}=a\cdot\mathcal{P}\cdot a^{-1}$ с $a\in G$, то они подобны и в $\mathcal{N}$, т. е. найдется элемент $n\in\mathcal{N}$ такой, что $\mathcal{Q}=n\cdot\mathcal{P}\cdot n^{-1}$ (Мальцев [2]). Действительно, если записать, согласно (2.6), $a=r\cdot n$ $(r\in\mathcal{R},\ n\in\mathcal{N})$, то из равенства $q=a\cdot p\cdot a^{-1}$ $(p\in\mathcal{P},\ q\in\mathcal{Q})$ имеем $r\cdot(n\cdot p\cdot n^{-1})=(q\cdot r\cdot q^{-1})\cdot q$. Отсюда, ввиду единственности разложения элементов из G в произведение элементов из $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$, следует $q=n\cdot p\cdot n^{-1}$, т. е. требуемое равенство $\mathcal{Q}=n\cdot\mathcal{P}\cdot n^{-1}$.

Обратимся теперь к вопросу о построении оптимальных систем подалгебр. Пусть L — конечномерная алгебра Ли, N — ее подалгебра Леви, а L' — некоторая подалгебра алгебры L. Если $L'=R'+N'$ — произвольное разложение Леви для подалгебры L', то R' и L' представляют собой разрешимую и полупростую подалгебры алгебры L. Отсюда и из приведенных выше замечаний относительно полупростых подгрупп следует, что построение оптимальных систем подалгебр алгебры L сводится к перечислению неподобных разрешимых подалгебр алгебры L и неподобных подалгебр алгебры N, рассматриваемой независимо от L. Например, оптимальная система θ_3 представляет собой объединение семейства неподобных трехмерных разрешимых подалгебр алгебры L с оптимальной системой трехмерных подалгебр алгебры N, так как любая трехмерная неразрешимая подалгебра проста и, следовательно, подобна некоторой подалгебре из N. Отметим еще, что довольно часто встречается в практике группового анализа дифференциальных уравнений случай, когда размерность подалгебры Леви N равна трем. В этом случае согласно теореме Леви—Мальцева задачу решает перечисление разрешимых подалгебр алгебры L.

§ 3. Группы преобразований

3.1. Локальные группы преобразований. Пусть $K\subset\mathbb{R}^r$ — открытый шар в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$ с центром в точке 0. Рассматриваются гладкие отображения

$$f\colon \mathbb{R}^n\times K\to\mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

и определяемые ими преобразования T_a пространства $\mathbb{R}^n$ в себя:

$$T_a x = f(x, a), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad a \in K. \tag{3.2}$$

При этом координаты точки $a = (a^1, \ldots, a^r)$ из K играют роль параметров преобразований (3.2). Предполагается, что преобразования существенно зависят от всех r вещественных параметров $a^1, \ldots, a^r$ и что каждое преобразование T_a взаимно однозначно. Пусть, далее, $f(x, 0) = x$, так что T_0 является тождественным преобразованием, и пусть для любого ненулевого значения параметра a соответствующее преобразование T_a отлично от тождественного.

Множество G_r всех преобразований (3.2), снабженное естественной топологией, называется *непрерывной r-параметрической локальной группой преобразований* в $\mathbb{R}^n$, если G_r является r-мерной локальной группой Ли относительно групповой операции, задаваемой с помощью умножения преобразований:

$$(T_b \cdot T_a)\, x = T_b (T_a x) \equiv f(f(x, a), b).$$

Допуская вольность в терминологии, эти локальные группы называют просто *группами преобразований*. Единицей в группе G_r является тождественное преобразование T_0, произведение $T_b \cdot T_a$ и обратное к T_a преобразование T_a^{-1} определены для любых точек a, b из некоторого открытого шара $K' \subset K$. При этом отображение φ: $K' \times K' \to K$, определяемое групповой операцией в G_r формулой $T_b \cdot T_a = T_{\varphi(a, b)}$, является аналитическим. Значение параметра, соответствующее обратному к T_a преобразованию, обозначается a^{-1}, так что $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$.

Для фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^n$ множество $G_r(x)$ всех ее образов Tx, $T \in G_r$, образует локальное многообразие в $\mathbb{R}^n$. Это многообразие называется *орбитой*, или *G_r-орбитой*, точки x. Орбитой множества $A \subset \mathbb{R}^n$ является многообразие $G_r(A) = \bigcup\limits_{x \in A} G_r(x)$.

3.2. Уравнение Ли. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал, содержащий точку 0, и G_1 — однопараметрическая группа преобразований

$$T_a x = f(x, a), \qquad a \in I \tag{3.3}$$

в $\mathbb{R}^n$. Орбита точки $x \in \mathbb{R}^n$ представляет собой кривую $a \mapsto f(x, a)$ в $\mathbb{R}^n$, проходящую через x. Касательный вектор к этой кривой в точке x имеет вид

$$\xi(x) = \left.\frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\right|_{a=0}. \tag{3.4}$$

Формула (3.4) определяет касательное векторное поле ξ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ группы G_1. Векторное поле (3.4) записывается также в виде линейного дифференциального оператора первого порядка

$$X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.5}$$

и называется *инфинитезимальным оператором*, или кратко оператором, однопараметрической группы G_1.

Теорема Ли устанавливает соответствие между группой G_1 и ее инфинитезимальным оператором (3.5). А именно, орбита $G_1(x)$ точки x является интегральной кривой уравнения Ли

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \quad f|_{a=0} = x. \tag{3.6}$$

Обратно, для любого гладкого векторного поля $\xi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует, притом единственное, решение уравнения Ли. Это решение определяет однопараметрическую группу преобразований (3.3), касательное векторное поле которой совпадает с заданным полем ξ.

Умножение поля ξ на постоянный множитель равносильно линейной замене параметра соответствующей однопараметрической группы, как это видно из уравнения Ли. Поэтому инфинитезимальные операторы рассматриваются с точностью до постоянного множителя.

Рассмотрим теперь r-параметрическую группу G_r преобразований (3.2) в $\mathbb{R}^n$. Если для каждой однопараметрической подгруппы группы G_r построить соответствующее касательное векторное поле, то эти поля образуют r-мерное векторное пространство L_r. Пространство L_r является алгеброй Ли относительно умножения

$$[\xi, \eta] = \eta'\xi - \xi'\eta, \tag{3.7}$$

где ξ', η' — производные отображений ξ, η: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Для соответствующих инфинитезимальных операторов $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ закон умножения (3.7) в алгебре L_r выражается следующей формулой:

$$[X, Y] = XY - YX = (X(\eta^i) - Y(\xi^i)) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.8}$$

В качестве базиса алгебры L_r можно взять векторные поля

$$\xi_\nu(x) = \left.\frac{\partial f(x, a)}{\partial a^\nu}\right|_{a=0}, \qquad \nu = 1, \ldots, r, \tag{3.9}$$

где a^ν — координаты параметрической точки $a \in K_\rho$ преобразований (3.2).

Уравнение Ли, связывающее группу G_r с ее алгеброй Ли L_r, имеет вид следующей вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial a^\nu} = V^\mu_\nu(a)\,\xi_\mu(f), \qquad \nu = 1, \ldots, r; \quad f_{a=0} = x. \tag{3.10}$$

Коэффициенты $V^\mu_\nu(a)$ системы (3.10) определяются по закону умножения $\varphi(a, b)$ в группе G_r формулой

$$V^\mu_\nu(a) = \frac{\partial\varphi^\mu(a, b)}{\partial a^\nu}\bigg|_{b=a^{-1}}. \tag{3.11}$$

Построение преобразований группы G_r по ее заданной алгебре Ли L_r удобно производить в канонических координатах второго рода. Для этого выбирается некоторый базис $\{\xi_\nu\}$ алгебры L_r и для каждого базисного вектора ξ_ν строится соответствующая однопараметрическая группа преобразований с помощью уравнения Ли:

$$\frac{df}{da^\nu} = \xi_\nu(f), \qquad f\big|_{a^\nu=0} = x.$$

Преобразования группы G_r получаются перемножением преобразований полученных однопараметрических групп. При этом параметры $a^1, \ldots, a^r$ выполняют роль координат параметрической точки a группы G_r и задают в локальной группе G_r систему координат, называемую канонической второго рода.

3.3. Инварианты. Функция $F(x)$ называется *инвариантом* группы G_r преобразований (3.2) в $\mathbb{R}^n$, если F постоянна на G_r-орбите каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$:

$$F(f(x, a)) = F(x). \tag{3.12}$$

Функция F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является инвариантом однопараметрической группы преобразований (3.3) тогда и только тогда, когда

$$XF \equiv \xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0. \tag{3.13}$$

Это следует из равенства

$$\frac{\partial F(f)}{\partial a} = F'(f)\cdot\xi(f),$$

справедливого в силу уравнения Ли (3.6) для произвольного дифференцируемого отображения F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; F' — производная этого отображения. Любой набор $n-1$ функционально независимых решений $J_1(x), \ldots, J_{n-1}(x)$ дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (3.13) образуют базис инвариантов: всякий инвариант F представи́м в виде $F(x) = \Phi(J_1(x), \ldots, J_{n-1}(x))$ с некоторой функцией Φ: $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

Для r-параметрической группы G_r преобразований в $\mathbb{R}^n$ критерий инварианта принимает вид следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\xi^i_\nu(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i} = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, r, \tag{3.14}$$

где ξ_ν — базисные векторные поля (3.9) алгебры Ли группы G_r. Число решений уравнений (3.14) определяется величиной

$$r_*(\xi) = \operatorname{rank}[\xi_\nu^i(x)]. \tag{3.15}$$

А именно, если x — точка общего положения (т. е. $r_* = \text{const}$ в некоторой окрестности точки x) и $r_* < n$, то система (3.14) имеет $n - r_*$ функционально независимых решений, которые образуют базис инвариантов группы G_r. При $r_* = n$ группа G_r не имеет инвариантов — она транзитивна.

В более общей ситуации, когда вместо преобразований в $\mathbb{R}^n$ рассматриваются группы преобразований в произвольном банаховом пространстве, роль базиса инвариантов играет универсальный инвариант группы (Овсянников [4], § 3). Пусть B, B_1, B_2 — банаховы пространства, G — группа преобразований в пространстве B, а отображение $J\colon B \to B_1$ является инвариантом группы G, т. е. $J \circ T = J$ для любого преобразования $T \in G$. Для любого отображения $\Phi\colon B_1 \to B_2$ суперпозиция $\Phi \circ J\colon B \to B_2$ является, очевидно, инвариантом группы G. Инвариант J называется *универсальным инвариантом* группы G, если для произвольного пространства B_2 каждый инвариант $F\colon B \to B_2$ группы G может быть представлен в виде $F = \Phi \circ J$ с гладким отображением Φ из пространства B_1 в B_2. Всякая r-параметрическая группа преобразований в банаховом пространстве B имеет универсальный инвариант.

3.4. Инвариантные многообразия. Рассматривается m-мерное локальное многообразие M в $\mathbb{R}^n$, т. е. множество $M \subset \mathbb{R}^n$, все точки которого с помощью диффеоморфизма некоторой окрестности $U \supset M$ в $\mathbb{R}^n$ приводятся к виду

$$x = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0) \tag{3.16}$$

с произвольными значениями координат $x^1, \ldots, x^m$. Пусть многообразие M параметризовано с помощью дифференцируемого отображения $h\colon V \to \mathbb{R}^n$, где V — открытое множество из $\mathbb{R}^m$. Отображение h устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами V и M, причем $\operatorname{rank} h'(y) = m$ для всех $y \in V$. Касательное пространство к M в точке $x \in M$ может быть представлено как

$$M_x = \{dx \in \mathbb{R}_x^n \mid dx = h'(y)\,dy,\ dy \in \mathbb{R}_y^m\},$$

где $\mathbb{R}_x^n$ — касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке x, причем элементы (x, dx) из $\mathbb{R}_x^n$ записываются сокращенно dx и рассматриваются как n-мерные векторы с началом в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Если использовать обозначение $x = (x_m, x_{n-m})$, где $x_m = (x^1, \ldots, x^m)$, $x_{n-m} = (x^{m+1}, \ldots, x^n)$, то условие (3.16) примет вид

$$x_{n-m} = 0. \tag{3.16$'$}$$

Пусть задано векторное поле F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и пусть точки многообразия M приведены к виду (3.16). Вектор $F(x)$ как элемент пространства $\mathbb{R}^n_x$ (т. е. пара $(x, F(x))$) принадлежит M_x тогда и только тогда, когда

$$F_{n-m}(x_m, 0) = 0,$$

где снова использовано обозначение $F = (F_m, F_{n-m})$.

Многообразие M называется *инвариантным* относительно группы G, если G-орбита каждой точки $x \in M$ содержится в M, т. е. $G(M) = M$. Удобно пользоваться следующим инфинитезимальным критерием инвариантности:

Многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ инвариантно относительно группы G_r тогда и только тогда, когда для всех векторных полей ξ из алгебры Ли L_r группы G_r выполняется условие

$$\xi(x) \in M_x \tag{3.17}$$

в каждой точке $x \in M$.

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть однопараметрическую группу G_1 преобразований (3.3) с касательным вектором (3.4) и считать, что точки многообразия M приведены подходящим диффеоморфизмом к виду (3.16). При этом инвариантность M означает выполнение равенства

$$f_{n-m}((x_m, 0), a) = 0, \tag{3.18}$$

а условие (3.17) дает

$$\xi_{n-m}(x_m, 0) = 0. \tag{3.19}$$

Из равенства (3.18) и формулы (3.4) сразу вытекает выполнение (3.19). Пусть теперь выполнено условие (3.19). Тогда уравнение Ли (3.6) для любого $x = (x_m, 0)$ имеет решение $f = (f_m, f_{n-m})$ с $f_{n-m} = 0$. В силу единственности решения отсюда следует выполнение равенства (3.18).

Пусть отображение F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ дифференцируемо и m-мерное многообразие M в $\mathbb{R}^n$ задано уравнением

$$F(x) = 0 \tag{3.20}$$

как множество решений этого уравнения; предположим, что $\operatorname{rank} F'(x) = n - m$ для всех $x \in M$. В этом случае инфинитезимальный критерий инвариантности (3.17) принимает вид

$$\xi^i_\nu(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x^i}\bigg|_M = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, r, \tag{3.21}$$

где ξ_ν — базисные векторные поля (3.9) алгебры L_r.

Замечание. Рассмотрим некоторое множество N, содержащееся в многообразии M. Если G-орбита каждой точки из N лежит в M (инвариантность многообразия M относительно группы G не предполагается), то геометрически очевидно, что $\xi(x) \in M_x$ для всех точек $x \in N$. В случае многообразия M, заданного уравнением (3.20), это означает выполнение условия $\xi_\nu^i \frac{\partial F}{\partial x^i}\Big|_N = 0$.

В дальнейшем рассматриваются только неособые (относительно группы G_r) многообразия M, т. е. такие, для которых $r_*(\xi|_M) = r_*(\xi)$. Пусть $r_*(\xi)$ постоянен в некоторой окрестности многообразия M и меньше n. В этом случае задание инвариантного многообразия M группы G_r уравнением (3.20) всегда может быть реализовано с помощью инвариантов группы G_r и записано в виде (см. Овсянников [4], § 18)

$$\Phi^k(J_1, \ldots, J_{n-r_*}) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n-m, \tag{3.22}$$

где $J_1(x), \ldots, J_{n-r_*}(x)$ — базис инвариантов группы G_r. Так как $G_r(x) \subset M$ для любой точки $x \in M$, то $r_* \leqslant m$. Уравнение (3.22) представляет m-мерное многообразие M в $\mathbb{R}^n$ как многообразие размерности

$$\rho = m - r_* \tag{3.23}$$

в пространстве инвариантов $J_1, \ldots, J_{n-r_*}$. Это число ρ называется *рангом* M.

Для произвольного многообразия $M \subset \mathbb{R}^n$ орбита $G_r(M)$ является минимальным инвариантным относительно G_r многообразием, содержащим M как подмногообразие коразмерности

$$\delta = \dim G_r(M) - \dim M. \tag{3.24}$$

Число δ называется *дефектом* многообразия M относительно группы G_r, а ранг орбиты $G_r(M)$ называется *рангом* M. Инвариантные многообразия характеризуются условием $\delta = 0$. Дефект многообразия, заданного уравнением (3.20), равен (см. Овсянников [3] или [4], § 21)

$$\delta = \operatorname{rank}\left[\xi_\nu^i(x)\frac{\partial F^k(x)}{\partial x^i}\right]_M, \tag{3.25}$$

где $\{\xi_\nu\}$ — базис инфинитезимальных операторов группы G_r. Ранг m-мерного многообразия, имеющего дефект δ, равен

$$\rho = m - r_* + \delta, \tag{3.26}$$

причем δ может принимать любые целые значения, удовлетворяющие условиям

$$\max\{r_* - m, 0\} \leqslant \delta \leqslant \min\{r_* - 1, n - m - 1\}. \tag{3.27}$$

§ 4. Инвариантные дифференциальные уравнения

4.1. Продолжение точечных преобразований. Рассматривается однопараметрическая группа G преобразований

$$\begin{aligned} x' &= f(x, u, a), \qquad & f|_{a=0} &= x, \\ u' &= \varphi(x, u, a), \qquad & \varphi|_{a=0} &= u \end{aligned} \tag{4.1}$$

в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ переменных $x=(x^1, \ldots, x^n)$, $u=(u^1, \ldots, u^m)$. Вводятся еще дополнительные переменные $\underset{1}{u}=\{u_i^\alpha \mid \alpha=1, \ldots, m;$ $i=1, \ldots, n\}$ и задаются их преобразования

$$u_i'^\alpha=\psi_i^\alpha\left(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ a\right), \qquad \psi_i^\alpha|_{a=0}=u_i^\alpha \tag{4.2}$$

так, чтобы формулы (4.2) и преобразования производных $\dfrac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i}$ при замене переменных (4.1) были согласованы с равенствами

$$u_i^\alpha=\frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^i} \tag{4.3}$$

для любой функции $u^\alpha=u^\alpha(x)$. Этим условием преобразования (4.2) однозначно определяются для каждой группы G, и в результате получается однопараметрическая группа $\underset{1}{G}$ преобразований (4.1), (4.2) в пространстве $\mathbb{R}^{n+m+nm}$ переменных $\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$. При этом преобразования (4.1) называются *точечными преобразованиями*, (4.2)—*продолжением* этих точечных преобразований, а группа $\underset{1}{G}$—*первым продолжением* группы G.

Пусть

$$X=\xi^i(x,\ u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha(x,\ u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \tag{4.4}$$

— инфинитезимальный оператор группы G, где

$$\xi=\frac{\partial f}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \qquad \eta=\frac{\partial\varphi}{\partial a}\bigg|_{a=0}. \tag{4.5}$$

Оператор продолженной группы $\underset{1}{G}$ равен

$$\underset{1}{X}=X+\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}.$$

Дополнительные координаты $\zeta_i^\alpha=\dfrac{\partial\psi_i^\alpha}{\partial a}\bigg|_{a=0}$ этого оператора подлежат определению из условия согласования (4.2) с равенствами (4.3). С помощью величины $\omega=(\omega^1, \ldots, \omega^m)$, где

$$\omega^\alpha=du^\alpha-u_i^\alpha\,dx^i, \tag{4.6}$$

равенства (4.3) переписываются в виде

$$\omega=0. \tag{4.7}$$

Условие согласования, накладываемое на продолжение, означает, что уравнение (4.7) задает инвариантное многообразие относительно группы $\underset{1}{\tilde{G}}$ преобразований (4.1), (4.2) и

$$dx'=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i+\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}du^\alpha, \qquad du'=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i+\frac{\partial\varphi}{\partial u^\alpha}du^\alpha$$

в пространстве переменных $\left(x, u, \underset{1}{u}, dx, du\right)$. С помощью инфинитезимального оператора

$$\tilde{X} = \underset{1}{X} + \tilde{\xi}^i \frac{\partial}{\partial\, dx^i} + \tilde{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial\, du^\alpha}$$

группы $\underset{1}{\tilde{G}}$, где в соответствии с (4.5)

$$\tilde{\xi} \equiv \frac{\partial\, dx'}{\partial a}\bigg|_{a=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \xi}{\partial u^\alpha} du^\alpha,$$

$$\tilde{\eta} \equiv \frac{\partial\, du'}{\partial a}\bigg|_{a=0} = \frac{\partial \eta}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \eta}{\partial u^\alpha} du^\alpha,$$

критерий инвариантности уравнений (4.7) записывается в виде

$$\tilde{X}\omega^\alpha|_{\omega=0} \equiv (\tilde{\eta}^\alpha - u_i^\alpha \tilde{\xi}^i - \zeta_i^\alpha dx^i)_{\omega=0} = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, m.$$

Из этих уравнений после подстановки найденных выражений для $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, находится следующая формула продолжения оператора (4.4):

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j). \tag{4.8}$$

Здесь $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \dfrac{\partial}{\partial u^\alpha}$ — оператор полного дифференцирования по переменной x^i.

Продолжения более высокого порядка осуществляются путем определения действия группы G на переменные $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots$, где

$$\underset{s}{u} = \{u^\alpha_{i_1 \ldots i_s} \,|\, \alpha = 1, \ldots, m; \quad i_1, \ldots, i_s = 1, \ldots, n\}.$$

Так, например, для второго продолжения группы G нужно определить действие этой группы на переменные $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}$, исходя из условия инвариантности системы уравнений

$$\omega = 0, \qquad \underset{1}{\omega} = 0, \tag{4.9}$$

где $\underset{1}{\omega} = \{\omega_i^\alpha \,|\, \alpha = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n\}$ определяются формулами

$$\omega_i^\alpha = du_i^\alpha - u_{ij}^\alpha dx^j.$$

В результате получается второе продолжение $\underset{2}{G}$ группы G. Инфинитезимальный оператор

$$\underset{2}{X} = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}$$

группы $\underset{2}{G}$ получается путем последовательного продолжения оператора (4.5): сначала находятся координаты ζ_i^α из формул первого продолжения (4.8), а затем вычисляются координаты ζ_{ij}^α по формулам второго продолжения:

$$\zeta^\alpha_{ij} = D_j(\zeta^\alpha_i) - u^\alpha_{ik} D_j(\xi^k). \tag{4.10}$$

Здесь оператор D_i, с учетом зависимости выражения ζ^α_i от переменных $\underset{1}{u}$, принимает вид $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u^\alpha_i \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u^\alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_j}$.

Продолжение произвольной r-параметрической группы преобразований и ее алгебры Ли осуществляется тем же путем. При этом s раз продолженная группа является r-параметрической группой, имеющей те же структурные свойства, что и исходная группа. Это следует из перестановочности продолжения операторов (4.5) с их умножением (3.8): если $Z = [X, Y]$, то $\underset{s}{Z} = [\underset{s}{X}, \underset{s}{Y}]$.

Инварианты продолженной группы $\underset{s}{G}$ для любого $s > 0$ называются *дифференциальными инвариантами* (порядка s) исходной группы G. Поскольку с ростом s число преобразуемых переменных x, u, $\underset{1}{u}$, ... неограниченно растет, то группа G обладает бесконечным множеством функционально независимых дифференциальных инвариантов. Однако для любой группы можно построить конечный базис дифференциальных инвариантов, если ввести в рассмотрение так называемые операторы инвариантного дифференцирования (см. Tresse [1], а также Овсянников [4], гл. VII). Эти операторы переводят любой дифференциальный инвариант данной группы снова в дифференциальный инвариант той же группы. Для всякой группы G_r можно построить n независимых операторов инвариантного дифференцирования вида $\lambda^i(x, u, \underset{1}{u}, \ldots) D_i$. Их коэффициенты $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^n)$ определяются из уравнений

$$\underset{s}{X_\nu} \lambda = \lambda^i D_i \xi_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, r,$$

где $X_\nu = \xi^i_\nu \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha_\nu \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ — базисные операторы группы G_r, $\underset{s}{X_\nu}$ — s-е продолжение оператора X_ν, а порядок продолжения s выбирается из условия $\operatorname{rank}[\xi^i_\nu, \eta^\alpha_\nu, \zeta^\alpha_{\nu i}, \ldots] = r$. Теорема Тресса о базисе утверждает, что существует конечный набор дифференциальных инвариантов порядка s, из которого всякий дифференциальный инвариант (произвольного порядка) рассматриваемой группы получается с помощью функциональных операций и инвариантного дифференцирования.

4.2. Определяющее уравнение. В пространстве переменных $(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})$ рассматривается локальное многообразие, заданное системой дифференциальных уравнений в частных производных порядка s:

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0, \tag{4.11}$$

где $F=(F^1, \ldots, F^p)$. Говорят, что система (4.11) инвариантна относительно группы G преобразований (4.1), или допускает эту группу, если многообразие, заданное уравнениями (4.11), инвариантно относительно s-го продолжения $\underset{s}{G}$ группы G.

Если X — инфинитезимальный оператор группы G, то в соответствии с § 3.4 критерий инвариантности уравнений (4.11) относительно группы G имеет вид

$$(\underset{s}{X}F)_{F=0}=0, \tag{4.12}$$

где $\underset{s}{X}$ — продолжение порядка s оператора X. Условие (4.12) называется *определяющим уравнением* группы, допускаемой системой (4.11).

Формулы продолжения (4.8), (4.10) и их высшие аналоги показывают, что уравнение (4.12) представляет собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений относительно координат $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$ оператора X. Следовательно, решения определяющего уравнения образуют векторное пространство. Кроме того, для любых двух решений X, Y уравнения (4.12) их коммутатор $[X, Y]$ снова является решением; это следует из геометрического смысла определяющего уравнения как условия инвариантности некоторого многообразия и перестановочности операций продолжения и умножения операторов X, Y. Таким образом, множество всех решений определяющего уравнения (4.12) образует алгебру Ли. Соответствующая этой алгебре локальная группа Ли представляет собой максимальную группу преобразований, допускаемую данной системой дифференциальных уравнений (4.11).

В определяющем уравнении все величины x, u, $\underset{1}{u}$, $\ldots$, $\underset{s}{u}$ играют роль независимых переменных, связанных только соотношениями (4.11), и условие (4.12) должно выполняться тождественно по всем «свободным» переменным. Это приводит к тому, что определяющее уравнение реализуется как переопределенная система дифференциальных уравнений относительно искомых функций $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$.

Группа G, допускаемая данной системой дифференциальных уравнений (4.11), может быть использована для построения новых решений из уже известных, так как под действием преобразований группы G всякое решение уравнений (4.11) переходит снова в решение. Поэтому в семействе всех решений уравнений (4.11) естественно ввести отношение эквивалентности, считая эквивалентными решения, преобразующиеся друг в друга с помощью группы G. Семейство неэквивалентных решений описывается некоторой системой дифференциальных уравнений, которую Ли назвал *разрешающей системой*. Разрешающая система дополняется автоморфной системой до исходной системы уравнений (4.11).

Автоморфная система задает для каждого решения разрешающей системы множество всех эквивалентных решений уравнений (4.11). При этом разрешающая система уже не допускает группу G, а на множестве решений автоморфной системы группа G действует транзитивно. Возможность разложения дифференциальных уравнений, допускающих непрерывную группу преобразований, на разрешающую и автоморфную системы впервые продемонстрировал Lie [5] на примере уравнений с двумя независимыми переменными. В общем виде задача была решена Vessiot [1] на основе теоремы Тресса о базисе дифференциальных инвариантов. Современное изложение этого вопроса имеется в монографии Овсянникова [4], § 26.

4.3. Инвариантные и частично инвариантные решения. В различных задачах математической физики свойства инвариантности дифференциальных уравнений используются для построения частных решений, известных (после появления работ Овсянникова [1, 2]) как инвариантные и частично инвариантные решения. Примерами инвариантных решений являются широко использующиеся в механике стационарные, одномерные, осесимметрические, автомодельные решения. В общей теории относительности инвариантные решения возникают как пространства Эйнштейна, имеющие заданную группу изометрических движений. В качестве наиболее известных частично инвариантных решений можно назвать функционально-инвариантные решения волнового уравнения, а также простые, двойные (вообще, произвольной кратности) волны для квазилинейных систем дифференциальных уравнений.

Пусть G — максимальная группа, допускаемая уравнениями (4.11), и H — подгруппа группы G. Всякое решение $u=u(x)$ можно трактовать как n-мерное многообразие U в $(n+m)$-мерном пространстве переменных (x, u), заданное уравнением

$$U:\ u-u(x)=0. \qquad (4.13)$$

В дальнейшем предполагается, что U — неособое многообразие относительно H. Дефект многообразия U относительно группы H равен

$$\delta=\dim H(U)-n. \qquad (4.14)$$

Если $\delta=0$, т. е. если U является инвариантным многообразием группы H, то рассматриваемое решение называется *инвариантным решением* (относительно группы H). При $0<\delta<m$ это решение называется *частично инвариантным решением дефекта* δ. Ранг многообразия U называется при этом *рангом* рассматриваемого *решения*.

Алгоритм построения инвариантных и частично инвариантных решений опирается на представление неособых инвариантных многообразий в виде (3.22) и состоит в следующем (подробности см. Овсянников [2] или [4]). Пусть H — r-параметрическая группа,

$\{(\xi_\nu, \eta_\nu)\}$ — базис алгебры Ли этой группы. Предположим, что $r_*(\xi_\nu, \eta_\nu) < n$ (формула (3.15)), и выберем базис инвариантов

$$J_1(x, u), \ldots, J_{m+n-r_*}(x, u) \tag{4.15}$$

группы H. Рассмотрим случай инвариантных решений. Неособые инвариантные решения (4.13) в соответствии с общей формулой (3.22) ищутся в виде

$$\Phi^\alpha(J_1, \ldots, J_{m+n-r_*}) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{4.16}$$

Для того чтобы многообразие (4.16) можно было записать в разрешенном виде (4.13), инварианты (4.15) должны быть независимы по отношению к переменным u, т. е. $\operatorname{rank}\left[\frac{\partial J_l}{\partial u^\alpha}\right] = m$ *). Предположим, что этому условию удовлетворяют первые m инвариантов $J_1, \ldots, J_m$. Введем теперь переменные v, y:

$$v^\alpha = J_\alpha(x, u), \quad y^i = J_{m+i}(x, u) \quad (\alpha = 1, \ldots, m; \ i = 1, \ldots, n-r_*), \tag{4.17}$$

и запишем равенства (4.16) в виде

$$v^\alpha = v^\alpha(y), \qquad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{4.18}$$

Из (4.17) и (4.18) можно выразить все величины $u, \underset{1}{u}, \ldots$ через переменные x, y, v и производные от v по y. Подстановка полученных выражений для $u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}$ в (4.11) дает систему уравнений, содержащую только величины y, v и производные от v по y. Эта система уравнений дает все инвариантные решения (4.18) исходных уравнений (4.11). Заметим, что ранг инвариантных решений, равный согласно формуле (3.23)

$$\rho = n - r_*, \tag{4.19}$$

представляет собой число независимых переменных в полученной системе уравнений; если $r_* = n$, то уравнение (4.18) берется в виде $J_\alpha(x, u) = c_\alpha$, $c_\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, \ldots, m$. Таким образом, ограничиваясь рассмотрением только инвариантных решений относительно заданной r-параметрической группы H, мы уменьшаем число независимых переменных на r_*. В приложениях наиболее часто встречается случай, когда у группы H имеется ρ инвариантов, зависящих только от переменных x; эти инварианты и выбираются в качестве y.

Построение частично инвариантных решений производится по аналогичной схеме. В этом случае сначала задают значение дефекта δ, выбирая его в соответствии с условиями (3.27):

$$\max\{r_* - n, 0\} \leqslant \delta \leqslant \min\{r_* - 1, m - 1\}. \tag{4.20}$$

*) Это равенство, требующее предварительного отыскания базиса инвариантов, можно заменить условием $r_*(\xi, \eta) = r_*(\xi)$; см. Овсянников [4], стр. 250.

Потом находят такие инварианты $J_1(x, u), \ldots, J_{m-\delta}(x, u)$ группы H, которые удовлетворяют условию rank $\left[\frac{\partial J_l}{\partial u^\alpha}\right] = m-\delta$, а затем переходят к переменным

$$v^l = J_l(x, u), \quad y^i = J_{m-\delta+i}(x, u) \quad (l = 1, \ldots, m-\delta;\ i = 1, \ldots, \rho).$$

Здесь ρ — ранг решения, который согласно формуле (3.26) равен

$$\rho = n - r_* + \delta. \tag{4.21}$$

Уравнения наименьшего инвариантного многообразия, содержащего искомое частично инвариантное решение (4.13) как подмногообразие коразмерности δ, записываются в виде

$$v^l = v^l(y), \qquad l = 1, \ldots, m-\delta. \tag{4.22}$$

Отсюда можно выразить переменные $u^1, \ldots, u^{m-\delta}$ через x, y, v и $w^\sigma = u^{m-\delta+\sigma}$, $\sigma = 1, \ldots, \delta$. Подстановка этих выражений для $u^1, \ldots, u^{m-\delta}$ и их производных в уравнения (4.11) приводит к системе дифференциальных уравнений относительно $m-\delta$ функций v^l от ρ независимых переменных $y^1, \ldots, y^\rho$ и системе уравнений относительно δ функций w^σ от n переменных $x^1, \ldots, x^n$. Полученными уравнениями описываются все частично инвариантные решения дефекта δ и ранга ρ, где ρ определяется формулой (4.21).

Таким образом, для описания всех типов инвариантных и частично инвариантных решений нужно указать возможные значения рангов r_* подгрупп группы G и в соответствии с (4.20), (4.21) выбрать все пары чисел (δ, ρ), характеризующие тип решения. Затем решение типа (δ, ρ) задается в виде (4.22).

Если две подгруппы H и H' группы G подобны, то соответствующие им инвариантные или частично инвариантные решения переводятся друг в друга тем же преобразованием группы G, которое осуществляет сопряжение этих подгрупп. Поэтому для отыскания существенно различных решений достаточно изучить решения, полученные на подгруппах из оптимальной системы подгрупп соответствующего порядка (§ 2.6).

4.4. Метод инвариантных мажорант. Выше был описан алгоритм построения инвариантных решений на основе группы, допускаемой рассматриваемыми уравнениями. Часто встречаются такие ситуации, когда исходные дифференциальные уравнения не допускают нетривиальную группу, но тем не менее понятие инвариантного решения может быть с успехом использовано для выяснения принципиальных теоретических вопросов. Например, при доказательстве теоремы Коши—Ковалевской существенно используется инвариантное решение, хотя обычно эта сторона вопроса не подчеркивается. Выделение идеи инвариантности позволяет доказать теорему существования решения в тех задачах, где классическая теорема Коши—Ковалевской не применима (Тешуков [1]).

Выясним, как используется понятие инвариантного решения при доказательстве теоремы Коши—Ковалевской. Следующий пример достаточно ясно иллюстрирует основные моменты доказательства. Рассматривается задача Коши *)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}=a^i(t,\ x,\ u)\frac{\partial u}{\partial x^i}+f(t,\ x,\ u),\\ &u\,|_{t=0}=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

где $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, коэффициенты a^i и f — аналитические функции своих аргументов в некоторой окрестности точки $t=0$, $x=x_0$, $u=0$. Первым этапом доказательства является построение решения u в виде формального степенного ряда по переменным t, $x-x_0$. Тем самым вопрос существования аналитического решения задачи (4.23) сводится к доказательству сходимости построенного ряда. Для этого рассматривается вспомогательная, мажорантная, задача

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=\tilde{a}^i(t,\ x,\ \tilde{u})\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x^i}+\tilde{f}(t,\ x,\ \tilde{u}), \tag{4.24}$$

$$\tilde{u}\,|_{t=0}\gg 0. \tag{4.25}$$

Коэффициенты $\tilde{a}^i$ уравнения (4.24) и функция $\tilde{f}$ мажорируют соответствующие величины исходной задачи (4.23): $\tilde{a}^i(t,\ x,\ v)\gg\gg a^i(t,\ x,\ v)$, $\tilde{f}(t,\ x,\ v)\gg f(t,\ x,\ v)$. Отношение мажорирования $\tilde{f}\gg f$ для формальных степенных рядов $\tilde{f}$ и f означает, что коэффициенты первого ряда не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов второго ряда. По виду задача (4.24), (4.25) не проще исходной задачи Коши. Однако можно прийти к существенному упрощению, если, пользуясь произволом в выборе коэффициентов мажорантной задачи, потребовать инвариантность уравнения (4.24) относительно некоторой группы G_r. Так как наличие r-параметрической группы позволяет искать инвариантные решения, зависящие от $\rho=n+1-r_*$ переменных (см. § 4.3), то задача сведется к решению обыкновенного дифференциального уравнения, если $r_*=n$. Выбор в качестве G_n простейшей группы переносов с операторами

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t}-\tau\frac{\partial}{\partial x^1},\quad X_k=\frac{\partial}{\partial x^1}-\frac{\partial}{\partial x^k},\quad k=2,\ \ldots,\ n,\ \ \tau=\mathrm{const} \tag{4.26}$$

дает

$$\tilde{a}^i=\tilde{a}^i(\tau t+x^1+\ldots+x^n,\ \tilde{u}),\qquad \tilde{f}=\tilde{f}(\tau t+x^1+\ldots+x^n,\ \tilde{u}).$$

---

*) Задача с произвольным начальным значением $u\,|_{t=0}$ заменой функции u сводится к виду (4.23).

Этому классу функций принадлежит стандартная мажоранта

$$A=\frac{K}{1-\frac{\xi}{r}}\cdot\frac{C}{1-\frac{\tilde{u}}{\rho}}, \tag{4.27}$$

где $\xi=\tau t+(x^1-x_0^1)+\ldots+(x^n-x_0^n)$, а K, C, r, $\rho=\mathrm{const}$. Подходящим выбором постоянных K, C, r, ρ можно добиться выполнения условий

$$A\gg f,\ a^i,\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

что позволяет положить в уравнении (4.24) $\tilde{a}^i=\tilde{f}=A$. Теперь можно искать инвариантную мажоранту, т. е. инвариантное (относительно группы G_n) решение уравнения (4.24), в виде

$$\tilde{u}=\tilde{u}(\xi). \tag{4.28}$$

При этом уравнение (4.24) принимает вид

$$\frac{d\tilde{u}}{d\xi}=\frac{1}{\tau}\cdot\frac{A}{1-\frac{nA}{\tau}}. \tag{4.29}$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.29), удовлетворяющее начальному условию

$$\tilde{u}(0)=0, \tag{4.30}$$

при достаточно большом значении постоянной τ дает аналитическую мажоранту $\tilde{u}$, удовлетворяющую (4.24), (4.25). Из отношения $\tilde{u}\gg u$ следует сходимость формального ряда u.

При построении инвариантных мажорант выбор группы G_r должен производиться с учетом специфики задачи. Применение группы переносов, использованной выше, оказывается эффективным не только в задаче Коши, но и в смешанной задаче (см. Duff [2]). В приводимом ниже примере в основу кладется группа растяжений. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений не является системой типа Коши—Ковалевской. При ее изучении групповое соображение является решающим и указывает метод доказательства существования решения.

Для системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} u_t&=a_1u_x+a_2v_x+a_3,\\ tv_t+v&=b_1u_x+ta_4v_x+b_2\end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

с двумя независимыми переменными t, x рассматривается задача с начальным условием *)

$$u|_{t=0}=u_0(x). \tag{4.32}$$

*) та задача представляет собой упрощенную модель задачи о течениях газа с особенностями типа центрированных волн, изученную Тешуковым [1]. Примененный там подход достаточно ясно иллюстрируется приводимым примером.

Коэффициенты уравнений (4.31) удовлетворяют условиям

$$a_i = a_i(t, x, u, v),\ i = 1, \ldots, 4;\ b_k = b_k(t, x, u, tv),\ k = 1, 2, \tag{4.33}$$

и предполагаются аналитическими функциями своих аргументов. Легко видеть, что начальное многообразие, прямая $t = 0$, является характеристикой. На этой прямой второе из уравнений (4.31) невозможно разрешить относительно величин v_t, v_x. Поэтому для системы (4.31) корректна (в классе аналитических функций) задача только с одним начальным условием (4.32). В силу условий (4.33) второе уравнение системы (4.31) разрешимо на прямой $t = 0$ относительно v.

Задача (4.31), (4.32) простой заменой функций u, v сводится к задаче

$$\left.\begin{aligned} u_t &= a_1 u_x + a_2 v_x + a_3, \\ tv_t + v &= b_1 u_x + t(a_4 v_x + a_5) + ub_2, \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

$$u|_{t=0} = 0 \tag{4.35}$$

с коэффициентами a_i $(i = 1, \ldots, 5)$, b_k $(k = 1, 2)$, удовлетворяющими условиям (4.33). Решение задачи ищется в окрестности точки $t = 0$, $x = x_0$ в виде формальных степенных рядов u, v от переменных t, $x - x_0$. Коэффициенты рядов, как нетрудно убедиться, однозначно определяются из (4.34), (4.35).

Рассмотрим теперь вопрос о построении подходящей мажорантной задачи. При ее выборе, руководствуясь предыдущим примером, будем требовать, чтобы она была «лучше» исходной задачи в том смысле, чтобы мажорантные уравнения допускали некоторую однопараметрическую группу G_1. С учетом неравноправности переменных t и x (это проявляется, в частности, в том, что производные по t порядка n от решения выражаются через производные от начальных данных по x порядка $2n$) в качестве G_1 возьмем группу растяжений, которая определится одновременно с видом мажорантной системы. Выберем постоянные C, α, β, γ, δ так, чтобы

$$\frac{C}{(1 - \alpha x)(1 - \beta t)(1 - \gamma u)(1 - \delta v)} \gg a_i(t, x, u, v), \tag{4.36}$$

$$\frac{C}{(1 - \alpha x)(1 - \beta t)(1 - \gamma u)(1 - \delta tv)} \gg b_k(t, x, u, tv), \tag{4.37}$$

и будем подвергать растяжению величины $1 - \alpha x$, t, u, v. Принимая во внимание, что инварианты группы растяжений имеют вид

$$\frac{t}{(1 - \alpha x)^p},\quad \frac{u}{(1 - \alpha x)^q},\quad \frac{v}{(1 - \alpha x)^s}$$

с некоторыми целыми p, q, s, отношения мажорирования (4.36), (4.37) заменим следующими:

$$\frac{C\theta^{n_i}\,[1+g_i\,(u\theta^q)+h_i\,(u\theta^s)]}{(1-\beta t\theta^p)\,(1-\gamma u\theta^q)\,(1-\delta v\theta^s)} \geqslant a_i, \tag{4.38}$$

$$\frac{C\theta^{m_k}\,(1+\lambda_k)}{(1-\beta t\theta^p)\,(1-\gamma u\theta^q)\,(1-\delta tv\theta^{s+p})} \geqslant b_k. \tag{4.39}$$

Здесь $\theta=(1-\alpha x)^{-1}$, $g_i(\sigma)\geqslant 0$, $h_i(\sigma)\geqslant 0$, $\lambda_k=\mathrm{const}\geqslant 0$, а n_i, m_k—целые положительные числа; при этом использовано, что $(1-\alpha x)^{-l}\geqslant 1$ для любого $l\geqslant 0$. Теперь в качестве коэффициентов мажорантных уравнений выбираются соответствующие функции из (4.38), (4.39). В результате получается задача

$$\left.\begin{aligned} \tilde u_t &= A\,[(1+g_1+h_1)\,\theta^{n_1}\tilde u_x+(1+g_2+h_2)\,\theta^{n_2}\tilde v_x+(1+g_3+h_3)\theta^{n_3}],\\ t\tilde v_t+\tilde v &= B\,[(1+\lambda_1)\,\theta^{m_1}\tilde u_x+(1+\lambda_2)\,\theta^{m_2}\tilde u]+\\ &\qquad +tA\,[(1+g_4+h_4)\,\theta^{n_4}\tilde v_x+(1+g_5+h_5)\,\theta^{n_5}], \end{aligned}\right\} \tag{4.40}$$

$$\tilde u\,|_{t=0}\geqslant 0 \tag{4.41}$$

для отыскания мажорант $\tilde u$, $\tilde v$. Здесь функции

$$A=\frac{C}{(1-\beta t\theta^p)\,(1-\gamma\tilde u\theta^q)\,(1-\delta\tilde v\theta^s)},$$

$$B=\frac{C}{(1-\beta t\theta^p)\,(1-\gamma\tilde u\theta^q)\,(1-\delta t\tilde v\theta^{s+p})}$$

являются инвариантами группы растяжений. Условия инвариантности системы (4.40) относительно преобразований

$$(1-\alpha x)\mapsto\tau\,(1-\alpha x),\quad t\mapsto\tau^p t,\quad \tilde u\mapsto\tau^q\tilde u,\quad \tilde v\mapsto\tau^s\tilde v$$

приводят к соотношениям

$$q-p=q-1-n_1=s-1-n_2=-n_3,$$
$$s=q-1-m_1=q-m_2=p+s-1-n_4=p-n_5,$$

которые удовлетворяются, например, при

$$\begin{aligned} &p=4,\quad q=2,\quad s=0,\\ &n_1=3,\quad n_2=1,\quad n_3=2,\quad n_4=3,\ n_5=4,\\ &m_1=1,\quad m_2=2; \end{aligned} \tag{4.42}$$

эти значения выбраны с учетом необходимых ограничений p, q, $s\geqslant 0$, n_i, $m_k\geqslant 1$.

Согласно описанному в § 4.3 алгоритму инвариантные решения уравнений (4.40) при условии (4.42) нужно искать в виде

$$\tilde u=(1-\alpha x)^2\,U\,(\xi),\quad \tilde v=V\,(\xi) \tag{4.43}$$

с $\xi=\frac{t}{(1-\alpha x)^4}$. Подставляя (4.43) в уравнения (4.40) и выбирая

$$g_1=g_2=g_4=g_5=h_1=h_2=h_4=0, \quad g_3=2\alpha U,$$
$$h_3=h_5=4\alpha V, \quad \lambda_1=0, \quad \lambda_2=2\alpha,$$

получаем

$$U'=A\left[4\alpha\xi U'+4\alpha(\xi V'+V)+1\right], \tag{4.44}$$
$$\xi V'+V=B\left[U+4\alpha\xi U'\right]+\xi A\left[4\alpha(\xi V'+V)+1\right]. \tag{4.45}$$

Ищется решение этой системы, удовлетворяющее начальному условию

$$U(0)=0. \tag{4.46}$$

Таким образом, поставленная цель — редукция задачи к более простой — достигнута: вопрос о существовании аналитического решения исходной задачи, как и в предыдущем случае, свелся к соответствующему вопросу для обыкновенных дифференциальных уравнений. Если найдется решение типа мажоранты (т. е. аналитические функции $U(\xi)$ и $V(\xi)$ с неотрицательными коэффициентами их тейлоровских разложений) задачи (4.44) — (4.46), то по формулам (4.43) определятся $\tilde{u}(t, x)$, $\tilde{v}(t, x)$, которые также будут функциями типа мажоранты ($U(0)=0$!).

Для полноты изложения докажем существование аналитического решения задачи (4.44) — (4.46). Первое уравнение можно разрешить относительно U', а второе — относительно $\xi V'+V$:

$$U'=\frac{1}{1-4\alpha\xi A}\left[1+4\alpha(\xi V'+V)\right],$$
$$\xi V'+V=\frac{1}{1-4\alpha\xi A}\left[\xi A+BU+4\alpha\xi BU'\right],$$

причем $\frac{1}{1-4\alpha\xi A}\gg 0$ для малых значений ξ. Из этих уравнений находятся

$$U'=F(\xi, U, V), \tag{4.47}$$
$$\xi V'+V=UB(\xi, U, \xi V)+\xi H(\xi, U, V) \tag{4.48}$$

с функциями F и H типа мажорант. Поэтому решение определяется в виде рядов $U(\xi)$, $V(\xi)$ с неотрицательными коэффициентами. Из (4.48) путем дифференцирований в точке $\xi=0$ получаются соотношения

$$V^{(n)}(0)=\frac{n}{n+1}\frac{d^{n-1}H}{d\xi^{n-1}}(0)+\frac{1}{n+1}\frac{d^n(UB)}{d\xi^n}(0),$$

справедливые для всех $n=1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что мажорантной задачей для (4.47), (4.48), (4.46) является

$$\tilde{U}'=F(\xi, \tilde{U}, \tilde{V}),$$
$$V'=H(\xi, \tilde{U}, \tilde{V})+\frac{d}{d\xi}\left[\tilde{U}B(\xi, \tilde{U}, \xi\tilde{V})\right],$$
$$\tilde{U}(0)=\tilde{V}(0)=0.$$

Написанная система дифференциальных уравнений для $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$ после подстановки во второе уравнение значения $\tilde{U}'$ из первого уравнения и разрешения относительно величины $\tilde{V}'$ (это возможно при малых ξ) становится системой типа Коши—Ковалевской. Применение теоремы Коши—Ковалевской завершает доказательство.

Замечание 1. Аналогично рассматривается случай нескольких переменных $x^1, \ldots, x^n$. При этом используется группа G_n, состоящая из переносов и растяжений.

Замечание 2. Использование группы переносов в теореме Коши—Ковалевской не является обязательным. Например, в основу доказательства можно было бы положить также группу растяжений. Если, скажем, рассматривается задача (4.23) с $n=1$, то, рассуждая как во втором примере, приходим к мажорантной задаче

$$\tilde{u}_t = \frac{A}{1-\alpha x}\left(\tilde{u}_x + \frac{1}{1-\alpha x}\right),$$

$$\tilde{u}\,|_{t=0} \geqslant 0,$$

где

$$A = \frac{C}{(1-\beta t\,(1-\alpha x)^{-2})\,(1-\gamma\tilde{u})},$$

а C, α, β, γ — подходящим образом выбранные неотрицательные постоянные. Мажорантное уравнение допускает группу растяжений

$$(1-\alpha x) \mapsto \tau\,(1-\alpha x), \quad t \mapsto \tau^2 t, \quad \tilde{u} \mapsto \tilde{u}.$$

Соответствующее инвариантное решение

$$\tilde{u} = U(\xi), \quad \xi = \frac{t}{(1-\alpha x)^2}$$

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$U' = \frac{A(\xi, U)}{1-2\alpha\xi A(\xi, U)}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $U(0)=0$, при малых ξ представляет собой мажоранту для исходной задачи.

Замечание 3. Выше расматривались примеры со скалярными функциями u, v. Легко видеть, что приведенные доказательства с небольшими изменениями переносятся на случай векторов u, v.

§ 5. Примеры

5.1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$. Преобразования

$$x' = xe^a$$

образуют однопараметрическую группу с законом умножения $\varphi(a, b) = a + b$. Эта группа называется *группой растяжений* в пространстве $\mathbb{R}^n$. Каждое преобразование состоит здесь в умножении всех векторов x из $\mathbb{R}^n$ на одно и то же вещественное число. Группой растяжений называется также группа более общих преобразований

$$(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1 e^{a\lambda_1}, \ldots, x^n e^{a\lambda_n}),$$

где λ_i — некоторые произвольно заданные вещественные числа, $a \in \mathbb{R}$ — групповой параметр. Преобразования этой группы записываются также в виде $x' = (a^{\lambda_1} x^1, \ldots, a^{\lambda_n} x^n)$ с очевидной заменой группового параметра. Инфинитезимальный оператор группы растяжений равен

$$X = \lambda_1 x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \lambda_n x^n \frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{5.1}$$

Многообразие, заданное уравнением

$$F(x) \equiv x^1 - \sum_{i=2}^{n} (x^i)^2 = 0,$$

инвариантно относительно группы растяжений

$$x' = (a^2 x^1, ax^2, \ldots, ax^n),$$

так как $F(x') = a^2 F(x)$; выполнение инфинитезимального критерия (3.21) видно из равенства $XF(x) = 2F(x)$, где X — оператор (5.1) с $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^2$, $a = (l, \theta)$ с $l \in \mathbb{R}^2$, $-\pi < \theta < \pi$. Преобразования (3.2), заданные отображением

$$f(x, a) = A(\theta)x + l,$$

где

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

образуют 3-параметрическую группу преобразований в $\mathbb{R}^2$, которая называется *группой изометрических движений в плоскости*. Закон умножения в этой группе имеет вид $\varphi(a_1, a_2) = (A(\theta_2) l_1 + l_2, \theta_1 + \theta_2)$, где $a_i = (l_i, \theta_i)$, $i = 1, 2$. Одномерная подгруппа этой группы, соответствующая значению $l = 0$, представляет собой группу вращений в $\mathbb{R}^2$ с оператором

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Полагая теперь $\theta = 0$, $l = tl_0$, где l_0 — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^2$, t — вещественный параметр, получаем другую однопараметрическую подгруппу, представляющую собой *группу переносов* в направлении вектора l_0. Группа переносов в $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$x \mapsto x + al_0,$$

где l_0 — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$, a — вещественный групповой параметр.

Группа изометрических движений в $\mathbb{R}^3$ представляет собой 6-параметрическую группу, образованную переносами и вращениями. Стандартный базис алгебры Ли L_6 этой группы состоит из операторов

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Разложение Леви (2.5) алгебры L_6 реализуют радикал R с базисом $\{X_1, X_2, X_3\}$ и фактор Леви N с базисом $\{X_{12}, X_{23}, X_{31}\}$.

5.2. Алгоритм вычисления группы, допускаемой дифференциальными уравнениями, иллюстрируется на примере уравнения второго порядка

$$u_x u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{5.2}$$

описывающего стационарное околозвуковое течение газа. Пусть

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \tag{5.3}$$

— искомый оператор, а

$$\underset{2}{X} = X + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_y} + \zeta_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{12} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial u_{yy}}$$

— его второе продолжение. Определяющее уравнение (4.12) в данном случае имеет вид

$$(u_{xx}\zeta_1 + u_x\zeta_{11} + \zeta_{22})_{u_{yy} = -u_x u_{xx}} = 0. \tag{5.4}$$

Формулы продолжения (4.8), (4.10) дают

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi^1) - u_y D_x(\xi^2) = \\
&\qquad = \eta_x + u_x\eta_u - u_x\xi^1_x - (u_x)^2\xi^1_u - u_y\xi^2_x - u_x u_y \xi^2_u, \\
\zeta_2 &= D_y(\eta) - u_x D_y(\xi^1) - u_y D_y(\xi^2) = \\
&\qquad = \eta_y + u_y\eta_u - u_x\xi^1_y - u_x u_y\xi^1_u - u_y\xi^2_y - (u_y)^2\xi^2_u, \\
\zeta_{11} &= D_x(\zeta_1) - u_{xx} D_x(\xi^1) - u_{xy} D_x(\xi^2) = \\
&= \eta_{xx} + 2u_x\eta_{xu} + u_{xx}\eta_u + (u_x)^2\eta_{uu} - 2u_{xx}\xi^1_x - u_x\xi^1_{xx} - \\
&\quad - 2(u_x)^2\xi^1_{xu} - 3u_x u_{xx}\xi^1_u - (u_x)^3\xi^1_{uu} - 2u_{xy}\xi^2_x - u_y\xi^2_{xx} - \\
&\qquad - 2u_x u_y \xi^2_{xu} - (u_y u_{xx} + 2u_x u_{xy})\xi^2_u - (u_x)^2 u_y \xi^2_{uu}, \\
\zeta_{22} &= D_y(\zeta_2) - u_{xy} D_y(\xi^1) - u_{yy} D_y(\xi^2) = \\
&= \eta_{yy} + 2u_y\eta_{yu} + u_{yy}\eta_u + (u_y)^2\eta_{uu} - 2u_{xy}\xi^1_y - u_x\xi^1_{yy} - \\
&\quad - 2u_x u_y \xi^1_{yu} - (u_x u_{yy} + 2u_y u_{xy})\xi^1_u - u_x(u_y)^2\xi^1_{uu} - \\
&\qquad - 2u_{yy}\xi^2_y - u_y\xi^2_{yy} - 2(u_y)^2\xi^2_{yu} - 3u_y u_{yy}\xi^2_u - (u_y)^3\xi^2_{uu}.
\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в левую часть уравнения (5.4) и выделим сначала члены, содержащие переменную u_{xy}:

$$-2u_{xy}(\xi^1_y + u_x\xi^2_x + u_y\xi^1_u + (u_x)^2\xi^2_u).$$

Мы должны приравнять нулю каждое слагаемое в этом выражении, так как в уравнении (5.4) величины x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} играют роль независимых переменных, а искомые функции ξ^i, η зависят только от x, y, u. Следовательно,

$$\xi^1_y=0,\quad \xi^1_u=0,\quad \xi^2_x=0,\quad \xi^2_u=0. \tag{5.5}$$

Коэффициент при u_{xx} (с учетом (5.5)) равен $\eta_x+u_x(\eta_u-3\xi^1_x-2\xi^2_y)$, поэтому из тех же соображений имеем

$$\eta_x=0, \tag{5.6}$$

$$\eta_u=3\xi^1_x-2\xi^2_y. \tag{5.7}$$

Из (5.7), (5.5), (5.6) получаем

$$\eta_{uu}=0,\quad \xi^1_{xx}=0. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.4) принимает теперь следующий вид:

$$\eta_{yy}+u_y(2\eta_{yu}-\xi^2_{yy})=0,$$

откуда

$$\eta_{yy}=0, \tag{5.9}$$

$$2\eta_{yu}=\xi^2_{yy}. \tag{5.10}$$

Уравнение (5.10) с учетом (5.7) дает

$$\xi^2_{yy}=0,\quad \eta_{yu}=0.$$

Следовательно, ξ^1 и ξ^2 являются линейными функциями от x и y соответственно, а η — линейной функцией от y, u, причем зависимость η от u определяется соотношением (5.7). Окончательно получается общее решение определяющего уравнения (5.4):

$$\xi^1=C_1x+C_2,\quad \xi^2=C_3y+C_4,\quad \eta=(3C_1-2C_3)u+C_5y+C_6,$$

зависящее от шести произвольных постоянных C_i $(i=1, \ldots, 6)$. Полагая здесь поочередно одну из постоянных C_i равной 1, а остальные равными 0, имеем следующий базис полученной алгебры Ли:

$$\begin{gathered} X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_4=y\frac{\partial}{\partial u},\\ X_5=x\frac{\partial}{\partial x}+3u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_6=y\frac{\partial}{\partial y}-2u\frac{\partial}{\partial u}. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Таким образом, решения уравнения (5.4) образуют 6-мерную алгебру Ли, и, следовательно, максимальная группа точечных преобразований, допускаемая уравнением (5.2), является 6-параметрической.

5.3. Уравнение Кортевега—де **Фриза**

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{5.12}$$

инвариантно относительно 4-параметрической группы, порожденной однопараметрическими группами переносов

$$t \mapsto t+a, \tag{5.13}$$

$$x \mapsto x+a, \tag{5.14}$$

преобразований Галилея

$$x \mapsto x+ta, \quad u \mapsto u+a \tag{5.15}$$

и растяжений

$$t \mapsto a^3 t, \quad x \mapsto ax, \quad u \mapsto a^{-2}u. \tag{5.16}$$

Базис алгебры Ли L_4 этой группы образуют инфинитезимальные операторы указанных преобразований:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{5.17}$$

Элементы X алгебры L_4 в базисе (5.17) записываются в виде

$$X = \sum_{i=1}^{4} e^i X_i. \tag{5.18}$$

Опишем все инвариантные решения ранга $\rho=1$ уравнения (5.12). Для этого сначала строится оптимальная система θ_1 одномерных подалгебр алгебры L_4. Группа внутренних автоморфизмов алгебры L_4 легко строится по присоединенной алгебре L_4^A (§ 2.6) и представляет собой 4-параметрическую группу линейных преобразований операторов (5.18) в операторы $X' = \sum_{i=1}^{4} e'^i X_i$:

$$\begin{aligned}
&e'^1 = a_4^{-3}e^1 + 3a_1 e^4,\\
&e'^2 = -a_3 a_4^{-3} e^1 + a_4^{-1}e^2 + a_1 a_4^2 e^3 + (a_2 - 2a_1 a_3)e^4,\\
&e'^3 = a_4^2 e^3 - 2a_3 e^4,\\
&e'^4 = e^4.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Параметры a_1, a_2, a_3 преобразований (5.19) могут принимать произвольные вещественные значения, а параметр a_4 — любые положительные значения. Если $e^4 \neq 0$, то первые три уравнения системы (5.19) разрешимы относительно параметров a_1, a_2, a_3 при любых значениях координат e^i, e'^i, $i=1, 2, 3$. Кроме того, при $e^4 \neq 0$ можно считать $e^4=1$, так как инфинитезимальные операторы определены с точностью до умножения на постоянный множитель. Следовательно, все векторы (5.18) с отличной от нуля компонентой e^4 подобны между собой, и в качестве их представителя можно выбрать X_4. В случае $e^4=0$ простым перебором устанавливается, что всякий вектор $X = \sum_{i=1}^{3} e^i X_i$ подобен одному из следующих неподобных между собой операторов: X_1, X_2, X_3, $X_1 + X_3$, $X_1 - X_3$. Таким образом, искомая оптимальная система θ_1 состоит из шести неподобных операторов:

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_1+X_3,\ X_1-X_3. \tag{5.20}$$

Если для каждого из этих операторов построить инвариантное решение ранга $\rho=1$, то из них преобразованиями (5.13)—(5.16) можно получить все инвариантные решения ранга 1.

Для однопараметрической подгруппы с оператором X_1 в качестве базиса можно взять инварианты $J_1=u$, $J_2=x$. В результате получается стационарное решение $u=\varphi(x)$, которое определяется из обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка $\varphi'''+\varphi\varphi'=0$. Это уравнение можно дважды проинтегрировать (второй раз после умножения на $2\varphi'$) в предположении $\varphi\to -c=\text{const}$, φ', $\varphi''\to 0$ при $|x|\to\infty$. Полученное уравнение первого порядка $\varphi'^2+\frac{1}{3}\varphi^3-c^2\varphi=0$ при дополнительном условии $\varphi'(0)=0$ дает

$$\varphi(x)=c\left(3\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}x-1\right). \tag{5.21}$$

Оператор X_2 имеет инварианты $J_1=u$, $J_2=t$; соответствующее инвариантное решение $u=u(t)$ тривиально: $u=\text{const}$. Для X_3 с базисом инвариантов $J_1=u-\frac{x}{t}$, $J_2=t$ инвариантное решение имеет вид $u=\frac{x}{t}+v(t)$. Подстановка этого выражения в уравнение (5.12) дает $v=\frac{c}{t}$, $c=\text{const}$, т. е. $u=\frac{x+c}{t}$.

Базис инвариантов для X_4 образуют $J_1=ut^{2/3}$, $J_2=x^3t^{-1}$, и формулы (4.17), (4.18) принимают вид

$$u=t^{-2/3}v(y),\quad y=x^3t^{-1}.$$

Подстановкой в (5.12) получается следующее уравнение для $v(y)$:

$$9y^2v'''+18yv''+\left(\frac{16}{9}+y^{2/3}v\right)v'-\frac{1}{3}yv=0.$$

Для X_1+X_3 имеем $J_1=u-t$, $J_2=x-\frac{t^2}{2}$. В этом случае инвариантное решение $u=t+v(y)$, $y=x-\frac{t^2}{2}$ находится из уравнения

$$v'''+vv'+1=0.$$

Оператор X_1-X_3 дает инвариантное решение $u=-t+v(y)$, $y=x+\frac{t^2}{2}$, определяемое из уравнения

$$v'''+vv'-1=0.$$

В приложениях могут оказаться интересными другие инвариантные решения, отличающиеся от приведенных выше канонических представителей инвариантных решений. Например, хорошо известное решение вида бегущей волны

$$u=\psi(x-ct), \qquad c=\mathrm{const}, \tag{5.22}$$

представляет собой инвариантное решение для однопараметрической подгруппы с инфинитезимальным оператором X_1+cX_2, подобной подгруппе с оператором X_1. В соответствии с этим солитонное решение (5.22) подобно стационарному решению (5.21) *и получается из него заменой* $x=\bar{x}-ct$, $u=\bar{u}-c$. При этом $\psi=\varphi+c$. Физически важные многосолитонные решения также представляют собой инвариантные решения. Для их получения недостаточно использовать только точечные преобразования, а нужно воспользоваться теорией групп касательных преобразований высшего порядка, или преобразований Ли—Беклунда, изложенной во второй части книги.

5.4. Рассмотрим уравнения движения политропного газа

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho}\,\nabla p=0,\\ &\rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\\ &p_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+\gamma p\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \qquad \gamma=\mathrm{const},\end{aligned} \tag{5.23}$$

где вектор скорости $\boldsymbol{v}=(v^1, \ldots, v^n)$, давление p и плотность ρ являются функциями времени t и пространственного вектора $\boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^n)$, число n принимает значения 1, 2 и 3 соответственно для одномерного, плоского и пространственного течений газа, а операторы ∇ и div выполняются относительно переменных x^i. Групповая классификация уравнений газовой динамики показывает (Овсянников [2], § 22), что при произвольном показателе адиабаты γ группа, допускаемая уравнениями (5.23), зависит от $4+\frac{1}{2}n(n+3)$ параметров и имеет следующие базисные инфинитезимальные операторы:

$$\begin{aligned}&X_0=\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j}+v^j\frac{\partial}{\partial v^i}-v^j\frac{\partial}{\partial v^i},\\ &Y_i=t\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial v^i}, \quad Z_1=t\frac{\partial}{\partial t}+x^i\frac{\partial}{\partial x^i},\\ &=t\;\;\frac{\partial}{\partial t}-v^i\frac{\partial}{\partial v^i}+2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad Z_3=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+p\frac{\partial}{\partial p}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

В случае

$$\gamma=\frac{n+2}{n} \tag{5.25}$$

происходит расширение группы: к (5.24) добавляется оператор

$$X_+=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}+(x^i-tv^i)\frac{\partial}{\partial v^i}-nt\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-(n+2)\,tp\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.26}$$

Используя оператор (5.26), можно построить инвариантные решения, описывающие течения ограниченного объема газа со специальным значением (5.25) показателя адиабаты (Ибрагимов [2]).

В качестве примера рассмотрим случай $n=2$ и найдем инвариантные решения относительно двухпараметрической группы, порожденной операторами X_{12} и X_0+X_+. При этом вместо декартовых координат (x^1, x^2) и (v^1, v^2) удобнее пользоваться полярными координатами (r, φ) и (v_r, v_φ):

$$\begin{aligned} &x^1 = r\cos\varphi, \quad v_r = v^1\cos\varphi + v^2\sin\varphi,\\ &x^2 = r\sin\varphi; \quad v_\varphi = v^2\cos\varphi - v^1\sin\varphi. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Преобразование инфинитезимальных операторов (5.24) при указанной замене переменных легко находится из условия инвариантности дифференциальных операторов первого порядка относительно точечных преобразований: если $y=(x^1, x^2, v^1, \ldots, p)$, $y'=y'(y)$, то

$$X \equiv \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \xi'^i \frac{\partial}{\partial y'^i} \Rightarrow \xi'^i = \xi^k \frac{\partial y'^i}{\partial y^k} \equiv X(y'^i).$$

Например,

$$X_{12}(r) = x^2\frac{\partial r}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial r}{\partial x^2} = 0, \quad X_{12}(\varphi) = X_{12}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^1}\right) = -1,$$
$$X_{12}(v_r) = -v^1\sin\varphi\, X_{12}(\varphi) + v^2\cos\varphi X_{12}(\varphi) + v^2\cos\varphi - v^1\sin\varphi = 0,$$
$$X_{12}(v_\varphi) = -v^2\sin\varphi X_{12}(\varphi) - v^1\cos\varphi X_{12}(\varphi) - v^1\cos\varphi - v^2\sin\varphi = 0;$$

следовательно, $X_{12} = -\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Аналогичные вычисления дают

$$X_0 + X_+ = (1+t^2)\frac{\partial}{\partial t} + tr\frac{\partial}{\partial r} + (r - tv_r)\frac{\partial}{\partial v_r} - tv_\varphi\frac{\partial}{\partial v_\varphi} - $$
$$-2t\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - 4tp\frac{\partial}{\partial p}.$$

Из системы уравнений

$$X_{12}J = 0, \quad (X_0 + X_+)J = 0$$

находится следующий базис инвариантов:

$$J_1 = rv_r - \frac{tr^2}{1+t^2}, \quad J_2 = rv_\varphi, \quad J_3 = (1+t^2)\rho,$$
$$J_4 = (1+t^2)^2 p, \quad J_5 = \frac{r}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Поэтому инвариантное решение ищется в виде

$$\begin{aligned} &v_r = \frac{tr}{1+t^2} + \frac{1}{r}U(\lambda), \quad v_\varphi = \frac{1}{r}V(\lambda),\\ &\rho = \frac{1}{1+t^2}R(\lambda), \quad p = \frac{1}{(1+t^2)^2}P(\lambda), \quad \lambda = \frac{r}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Так как при $n=2$ формула (5.25) дает $\gamma=2$, то уравнения газовой динамики (5.23) после подстановки

$$p=\frac{1}{2}\rho^2 \tag{5.29}$$

переходят в уравнения движения «мелкой воды»

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla\rho=0,\\ &\rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0; \end{aligned} \tag{5.30}$$

здесь величина ρ при соответствующем выборе единиц измерения обозначает высоту воды над ровным дном. Группа, допускаемая уравнениями (5.30), получается из соответствующей группы для газовой динамики путем наложения требования инвариантности равенства (5.29). При этом операторы X_0, X_i, X_{12}, Y_i, Z_1 остаются без изменения, а из операторов Z_2 и Z_3 образуется их линейная комбинация Z_2-4Z_3, сохраняющая равенство (5.29), которая после замены переменной p ее значением $p=\frac{1}{2}\rho^2$ принимает вид

$$Z_2'=t\frac{\partial}{\partial t}-v^i\frac{\partial}{\partial v^i}-2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Оператор (5.26) после замены (5.29) принимает вид

$$X_+'=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}+(x^i-tv^i)\frac{\partial}{\partial v^i}-2t\rho\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Пользуясь этой интерпретацией уравнений газовой динамики и инвариантными решениями (5.28), можно описать некоторые специальные виды течений мелкой воды под действием силы тяжести при определенных начальных условиях.

Подстановка функций v_r, v_φ и ρ, определенных формулами (5.28), в уравнения (5.30), записанные в полярных координатах, дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda UU'-U^2-V^2+\lambda^3R'+\lambda^4&=0,\\ UV'&=0,\\ (UR)'&=0 \end{aligned}$$

для функций U, V, R от λ. Рассмотрим простое решение этой системы, получающееся при $U=0$. В этом случае V может быть произвольной функцией от λ, а $R=\int V^2(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^3}-\frac{1}{2}\lambda^2+C$, $C=\mathrm{const}$. В частном случае $V=0$ полученное решение описывает растекание под действием силы тяжести ограниченной массы воды, в начальный момент $t=0$ находящейся в покое и имеющей форму

$$\rho=\begin{cases}\frac{1}{2}(a^2-r^2), & r\leqslant a,\\ 0, & r>a,\end{cases}$$

где a — положительная постоянная. Решение задачи дается формулами

$$v_r = \frac{tr}{1+t^2}, \quad v_\varphi = 0, \quad \rho = \frac{1}{2(1+t^2)}\left(a^2 - \frac{r^2}{1+t^2}\right),$$

откуда видно, что граница воды ($\rho = 0$) движется по закону $r = a\sqrt{1+t^2}$, а высота вершины, находящейся в точке $r = 0$, убывает со временем в соответствии с формулой $\rho_{\max} = \frac{a^2}{2(1+t^2)}$. Скорость течения в этом решении остается ограниченной: $|\boldsymbol{v}| = v_r < a$. Это решение можно видоизменить путем добавления вращения жидкости как твердого тела, если в качестве $V(\lambda)$ выбрать функцию $V = b\lambda^2$, $b = \mathrm{const}$. Другое интересное решение получается при $V = \alpha\lambda$, $\alpha = \mathrm{const}$. Соответствующее решение

$$v_r = \frac{tr}{1+t^2}, \quad v_\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \rho = \frac{1}{1+t^2}\left(C - \frac{r^2}{2(1+t^2)} + \alpha^2 \ln \frac{r}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

уравнений (5.30) легко анализируется. Оно, в частности, описывает движение кольцеобразно распределенной массы воды с заданной начальной угловой скоростью $\omega = \frac{\alpha}{r}$. При растекании воды под действием сил тяжести и вращения угловая скорость убывает по формуле $\omega = \frac{\alpha}{r\sqrt{1+t^2}}$, а граница воды на дне состоит из двух концентрических окружностей, радиусы которых увеличиваются со временем по формулам

$$r_1 = r_1^0\sqrt{1+t^2}, \quad r_2 = r_2^0\sqrt{1+t^2},$$

если при $t = 0$ радиусы граничных окружностей были равны $r_1^0 > 0$ и $r_2^0 > r_1^0$. Полученные решения допускают сопряжение друг с другом через контактный разрыв. Обсуждение этого вопроса, а также более подробный анализ инвариантных решений вида (5.28) имеются в статье Хабирова [1].

Читатель, интересующийся применением теоретико-групповых методов в механике, может обратиться к книгам: Биркгоф [1], Седов [1], Овсянников [4], Ames [1], Bluman & Cole [1], а также к обзору Овсянникова и Ибрагимова [1], содержащему подробную библиографию, и к Proceedings [1, 2].

ГЛАВА 1

ДВИЖЕНИЯ В РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 6. Общая группа движений

6.1. Локальные римановы многообразия. Пусть M — риманово многообразие, т. е. дифференцируемое многообразие, на котором задан метрический тензор — гладкое симметричное ковариантное тензорное поле порядка 2. В соответствии с локальным характером изучаемых задач римановы многообразия рассматриваются в дальнейшем локально, и *n-мерным римановым пространством* V_n называется локальное риманово многообразие, представляющее собой открытое множество из $\mathbb{R}^n$, диффеоморфное окрестности n-мерного риманова многообразия M. При этом удобно пользоваться следующей трактовкой метрического тензора риманова пространства V_n.

Пусть x^i, y_{ij} $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$ — вещественные переменные. Рассматриваются вещественные функции $g_{ij}(x)$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$, определенные на открытом множестве $V_n \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие условиям

$$g_{ij}(x)=g_{ji}(x), \quad \det [g_{ij}(x)] \neq 0.$$

Пусть $\mathfrak{S}$ — n-мерное локальное многообразие в пространстве переменных $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, $y=(y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{nn})$, заданное уравнениями

$$y_{ij}=g_{ij}(x) \qquad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n). \tag{6.1}$$

Многообразие $\overline{\mathfrak{S}}$, заданное уравнениями

$$y_{ij}=\overline{g}_{ij}(x),$$

называется *эквивалентным* многообразию $\mathfrak{S}$ ($\overline{\mathfrak{S}} \sim \mathfrak{S}$), если система дифференциальных уравнений

$$\overline{g}_{kl}(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j}=g_{ij}(x) \qquad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n) \tag{6.2}$$

имеет непрерывно дифференцируемое решение

$$f=(f^1,\ \ldots,\ f^n),$$

удовлетворяющее условию $\det f' \neq 0$ (f' — производная f). При этом множество всех многообразий $\mathfrak{G}$, заданных уравнениями (6.1), разбивается на классы эквивалентных многообразий. Каждый класс эквивалентности называется *метрическим тензором* и обозначается g_{ij}. Если $\overline{\mathfrak{G}} \sim \mathfrak{G}$, то будем говорить, что многообразие $\mathfrak{G}$ (или, что то же самое, уравнения (6.1)) задает метрический тензор риманова пространства V_n в системе координат $\{x^i\}$, а многообразие $\overline{\mathfrak{G}}$ — в системе координат $\{\overline{x^i}\}$, где $\overline{x^i} = f^i(x)$, f — решение уравнений (6.2).

Выясним, с каким произволом определяется система координат в римановом пространстве V_n заданием многообразия $\mathfrak{G}$ (т. е. функций $g_{ij}(x)$). Пусть при преобразовании координат $\overline{x^i} = f^i(x)$ функции $g_{ij}(x)$, определяющие многообразие $\mathfrak{G}$, не изменяются. В силу уравнений (6.2) функция f удовлетворяет уравнениям

$$g_{kl}(f)\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j} = g_{ij}(x) \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n). \tag{6.3}$$

Уравнения (6.3) определяют преобразования, сохраняющие основную метрическую форму

$$ds^2 = g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j \tag{6.4}$$

риманова пространства V_n с метрическим тензором g_{ij}, т. е. изометрические движения в пространстве V_n (см. § 7.1). Таким образом, задание многообразия $\mathfrak{G}$ определяет систему координат в римановом пространстве с точностью до изометрических движений. Поэтому мы будем отождествлять (с указанной точностью) систему координат в V_n с многообразием $\mathfrak{G}$.

В дальнейшем особый интерес будут представлять римановы пространства, метрические формы (6.4) которых имеют сигнатуру $(- \ldots - +)$. Это означает, что в некоторой окрестности каждой точки $x \in V_n$ существует замена координат, приводящая форму (6.4) в точке x к виду

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - \ldots - (dx^{n-1})^2 + (dx^n)^2.$$

Такие римановы пространства V_n называются *лоренцевыми пространствами* или *пространствами гиперболического типа* (Адамар [1]), так как в этом случае линейные дифференциальные уравнения второго порядка со старшими коэффициентами $g^{ij}(x)$ ($g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$) имеют гиперболический тип.

Метрическая форма (6.4) не зависит от выбора системы координат и задает длину ds касательного вектора $dx = (dx^1, \ldots, dx^n)$ к V_n в точке $x \in V_n$. Длина s кривой

$$x = x(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \tag{6.5}$$

соединяющей точки x_0, x_1 в пространстве V_n, определяется интегралом

$$s=\int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}\, dt, \tag{6.6}$$

где

$$\mathscr{L}=\sqrt{g_{ij}(x)\,\dot{x}^i\dot{x}^j}, \quad \dot{x}^i=\frac{dx^i(t)}{dt}.$$

Кривая (6.5), являющаяся экстремалью интеграла (6.6), т. е. решением уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^i}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^i}=0 \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{6.7}$$

называется *геодезической*, соединяющей точки x_0, x_1 пространства V_n. Взяв в качестве параметра кривой (6.5) длину дуги s, отсчитываемую от точки x_0, получим из уравнений (6.7) следующую форму уравнений геодезических в пространстве V_n:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{6.8}$$

Коэффициенты этих уравнений вычисляются по формулам

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right) \tag{6.9}$$

и называются *символами Кристоффеля*.

С помощью символов Кристоффеля определяется операция ковариантного дифференцирования тензоров в римановом пространстве V_n, приводящая снова к тензорам. Ковариантное дифференцирование будет обозначаться нижним индексом, написанным после запятой. Например,

$$a_{,i}=\frac{\partial a}{\partial x^i}, \quad a_{i,j}=\frac{\partial a_i}{\partial x^j}-a_k\Gamma^k_{ij}, \quad a^i_{,j}=\frac{\partial a^i}{\partial x^j}+a^k\Gamma^i_{kj},$$

и т. д. При повторном ковариантном дифференцировании условимся писать только одну запятую; например, $a_{i,jk}\equiv a_{i,j,k}$.

Если a — скаляр, то

$$a_{,ij}=a_{,ji}.$$

Однако для тензоров, вообще говоря, повторное дифференцирование зависит от порядка дифференцирования. А именно,

$$a_{i,jk}=a_{i,kj}+a_lR^l_{ijk}, \quad a^i_{,jk}=a^i_{,kj}-a^lR^i_{ljk}$$

и т. д., где величины

$$R^l_{ijk}=\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial x^k}+\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj}-\Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk} \tag{6.10}$$

представляют собой компоненты тензора, называемого *тензором Римана — Кристоффеля*. Из приведенных формул повторного дифференцирования следует, что последовательные ковариантные дифференцирования тензоров перестановочны тогда и только тогда, когда

$$R^l_{ijk} = 0 \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, n). \tag{6.11}$$

Риманово пространство, удовлетворяющее условию (6.11), называется *плоским* и обозначается S_n.

Из тензора Римана—Кристоффеля R^l_{ijk} свертыванием по индексам l и k получается *тензор Риччи*

$$R_{ij} \equiv R^k_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^k_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} - \Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{lk}. \tag{6.12}$$

Умножив тензор Риччи на g^{ij} и произведя свертывание, получим *скалярную кривизну* пространства V_n:

$$R = g^{ij} R_{ij}. \tag{6.13}$$

При рассмотрении конформных преобразований римановых пространств используется *тензор Вейля* $(n > 3)$

$$C^l_{ijk} = R^l_{ijk} + \frac{1}{n-2}(\delta^l_j R_{ik} - \delta^l_k R_{ij} + g_{ik} R^l_j - g_{ij} R^l_k) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^l_k g_{ij} - \delta^l_j g_{ik}). \tag{6.14}$$

В частности, пространство V_n конформно плоскому пространству тогда и только тогда, когда (см. Эйзенхарт [2], § 28)

$$C^l_{ijk} = 0 \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, n). \tag{6.15}$$

Для произвольной функции $u = u(x)$ выражения

$$\Delta_1 u = g^{ij} u_{,i} u_{,j} \equiv g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j}, \tag{6.16}$$

$$\Delta_2 u = g^{ij} u_{,ij} \equiv g^{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x^k} \right) \tag{6.17}$$

не зависят от выбора системы координат в V_n. Эти инвариантные выражения называются *дифференциальными параметрами Бельтрами первого* и *второго рода* соответственно.

6.2. Произвольные движения в V_n. Преобразования

$$\bar{x} = f(x) \tag{6.18}$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем рассматривать как преобразования в римановом пространстве V_n: точке $x \in V_n$ с координатами x^i ставится в соответствие точка $\bar{x} \in V_n$ с координатами $\bar{x}^i$ в фиксированной системе координат $\{x^i\}$. При преобразованиях (6.18) касательные векторы к V_n преобразуются следующим образом.

Если $dx=(dx^1, \ldots, dx^n)$—касательный вектор в точке $x \in V_n$, то соответствующий ему касательный вектор $d\bar{x}$ в точке $\bar{x} \in V_n$ имеет компоненты

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^k} dx^k.$$

При этом длина ds касательного вектора dx определяется формулой (6.4), а длина $d\bar{s}$ вектора $d\bar{x}$—формулой

$$d\bar{s}^2 = g_{ij}(\bar{x})\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j. \tag{6.19}$$

Для сравнения величин ds и $d\bar{s}$ удобно перейти к касательному пространству в одной точке, например в точке $\bar{x}$, интерпретируя (6.18) как преобразование координат и рассматривая $\bar{x}^i$ как координаты точки x в новой системе координат $\{\bar{x}^i\}$. Ввиду инвариантности метрической формы относительно выбора системы координат формулу (6.4) можно записать в новой системе координат:

$$ds^2 = \bar{g}_{ij}(\bar{x})\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j, \tag{6.20}$$

где $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$—компоненты метрического тензора в системе координат $\{\bar{x}^i\}$, определяемые из уравнений (6.2). Из формул (6.19) и (6.20) следует, что изменение элемента длины ds касательного вектора dx определяется разностью между функциями $g_{ij}(\bar{x})$ и $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$.

Таким образом, изучение изменения длины касательного вектора сводится к изучению соответствующих преобразований функций $g_{ij}(x)$ под действием преобразований (6.8). Более удобным является рассмотрение преобразований не самих функций $g_{ij}(x)$, а преобразований многообразия, задаваемого уравнениями (6.1). При этом наряду с преобразованиями (6.18) переменных x^i следует преобразовывать переменные y_{ij} как компоненты ковариантного тензора:

$$\bar{x}^i = f^i(x), \qquad y_{ij} = \bar{y}_{kl} \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^i} \frac{\partial f^l(x)}{\partial x^j}. \tag{6.21}$$

Преобразование (6.18), сопровождаемое преобразованием переменных y_{ij} в соответствии с формулами (6.21), называется в дальнейшем *движением* в римановом пространстве V_n. Множество всех движений (6.18) образует бесконечную локальную группу Ли G_∞ относительно композиции и называется *общей группой движений* в пространстве V_n. Формулы (6.21) продолжают действие группы G_∞ преобразований переменных x на переменные y и определяют продолженную группу $\tilde{G}_\infty$, изоморфную G_∞.

Преобразования (6.21) приводят к следующим формулам продолжения инфинитезимальных операторов однопараметрических групп движений. Пусть G_1 — однопараметрическая группа движений в V_n:

$$\bar{x}=f(x, a) \tag{6.22}$$

с инфинитезимальным оператором

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6.23}$$

где

$$\xi(x)=\left.\frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Оператор $\tilde{X}$ продолженной группы $\tilde{G}_1$ будет иметь вид

$$\tilde{X}=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta_{ij}\frac{\partial}{\partial y_{ij}},$$

где

$$\eta_{ij}=\left.\frac{\partial \bar{y}_{ij}}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Здесь считается, что из формул (6.21) найдены выражения величин $\bar{y}_{ij}$ через x, y и групповой параметр a. Не выписывая эти выражения, предположим, что они подставлены в формулы (6.21), и продифференцируем получающиеся при этом тождества по параметру a при $a=0$. Используя обозначения (6.23) и условия $\bar{y}_{ij}|_{a=0}=y_{ij}$, в результате такого дифференцирования получаем

$$0=\eta_{kl}\delta^k_i\delta^l_j+y_{kl}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}\delta^l_j+y_{kl}\delta^k_i\frac{\partial\xi^l}{\partial x^j}=$$

$$=\eta_{ij}+y_{kj}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}+y_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j} \qquad (i, j=1, \ldots, n),$$

откуда

$$\eta_{ij}=-\left(y_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}+y_{kj}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}\right).$$

Таким образом, группе G_1 преобразований (6.22) с инфинитезимальным оператором (6.23) соответствует продолженная группа $\tilde{G}_1$ с оператором

$$\tilde{X}=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}-\left(y_{ik}\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^j}+y_{kj}\frac{\partial\xi^k(x)}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y_{ij}}. \tag{6.24}$$

Из формулы (6.24) видно, что если X и Y — операторы двух однопараметрических групп, то $[\tilde{X}, \tilde{Y}]=\widetilde{[X, Y]}$. Поэтому группе G_r движений (6.22) соответствует группа $\tilde{G}_r$ преобразований переменных x, y по формулам (6.21). Если алгебра Ли L_r группы G_r имеет базисные операторы X_ν $(\nu=1, \ldots, r)$, причем

$$[X_\mu, X_\nu]=c^\lambda_{\mu\nu}X_\lambda,$$

то алгебра Ли $\tilde{L}_r$ группы $\tilde{G}_r$ будет иметь базисные операторы $\tilde{X}_\nu (\nu = 1, \ldots, r)$ и те же структурные константы $c^\lambda_{\mu\nu}$, так как

$$[\tilde{X}_\mu, \tilde{X}_\nu] = \widetilde{[X_\mu, X_\nu]} = c^\lambda_{\mu\nu}\tilde{X}_\lambda.$$

При движениях в римановых пространствах с помощью общей группы G_∞ геометрические фигуры перемещаются без сохранения каких-либо своих метрических характеристик — группа G_∞ произвольных движений не имеет геометрических инвариантов. Ниже выделяются подгруппы группы G_∞, позволяющие перемещаться в римановом пространстве V_n с сохранением некоторых (инфинитезимальных) метрических свойств тел. В дальнейшем всякая подгруппа G общей группы движений G_∞ называется *группой движений*. Важной характеристикой группы движений G в пространстве V_n является дефект — целое неотрицательное число $\delta \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$, определяющее количество геометрических инвариантов группы G формулой $\frac{n(n+1)}{2} - \delta$. Дефект $\delta = \delta(V_n, G)$ любой пары (V_n, G) легко вычисляется с помощью производной Ли метрического тензора пространства V_n относительно группы G.

6.3. Дефект группы движений в V_n. Рассматриваются риманово пространство V_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ в системе координат $\{x^i\}$ и группа движений G в V_n. Преобразование $\tilde{T} \in \tilde{G}$ переводит многообразие $\mathfrak{S}$, заданное уравнениями (6.1), в эквивалентное многообразие $\bar{\mathfrak{S}} = \tilde{T}(\mathfrak{S})$; это следует из построения (6.21) группы $\tilde{G}$. Орбита

$$\tilde{G}(\mathfrak{S}) = \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{G}} \tilde{T}(\mathfrak{S}) \tag{6.25}$$

многообразия $\mathfrak{S}$ представляет собой минимальное инвариантное многообразие группы $\tilde{G}$, содержащее $\mathfrak{S}$ (см. § 3.4). Поскольку $\dim \mathfrak{S} = n$, то формула (3.24) для определения дефекта инвариантности многообразия $\mathfrak{S}$ относительно группы $\tilde{G}$ принимает вид

$$\delta = \dim \tilde{G}(\mathfrak{S}) - n.$$

Пусть векторные поля

$$X_\nu = \xi^i_\nu(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{6.26}$$

образуют базис алгебры Ли L группы G. При фиксированном базисе (6.26) алгебры L производная Ли (см. Yano [1] или Lichnerowicz [2]) метрического тензора g_{ij} относительно группы G представляет собой матрицу $\left[\underset{\nu}{\mathfrak{L}} g_{ij}\right]$:

$$\underset{\nu}{\mathfrak{L}} g_{ij} = \xi_{\nu i, j} + \xi_{\nu j, i}, \tag{6.27}$$

строки которой нумеруются индексом ν, а столбцы — двойным индексом ij. Здесь $\xi_{\nu i}=g_{ik}\xi^k_\nu$ — ковариантные компоненты вектора ξ_ν, индексы i и j, написанные после запятой, обозначают ковариантное дифференцирование в V_n в соответствии с принятым в § 6.1 соглашением.

Лемма. *Дефект инвариантности многообразия $\mathfrak{S}$ относительно группы $\tilde{G}$ равен*

$$\delta(\mathfrak{S}, \tilde{G})=\operatorname{rank}\left[\xi^k_\nu(x)\frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}+g_{ik}(x)\frac{\partial \xi^k_\nu(x)}{\partial x^j}+g_{jk}(x)\frac{\partial \xi^k_\nu(x)}{\partial x^i}\right]. \qquad (6.28)$$

Доказательство. В формулу (3.25) нужно подставить вместо M многообразие $\mathfrak{S}$, заданное уравнениями (6.1), и координаты оператора (6.24).

Следствие. *Дефект инвариантности не зависит от выбора системы координат в V_n: если $\overline{\mathfrak{S}}\sim\mathfrak{S}$, то $\delta(\overline{\mathfrak{S}}, \tilde{G})=\delta(\mathfrak{S}, \tilde{G})$.*

Доказательство. Из тождества

$$\xi^k_\nu\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+g_{ik}\frac{\partial \xi^k_\nu}{\partial x^j}+g_{jk}\frac{\partial \xi^k_\nu}{\partial x^i}=\xi_{\nu i,\,j}+\xi_{\nu j,\,i} \qquad (6.29)$$

следует, что каждая строка матрицы в правой части равенства (6.28) представляет собой ковариантный тензор порядка 2. Поэтому при замене координат в V_n все строки указанной матрицы под вергаются линейному преобразованию, не зависящему от номера ν что, очевидно, не влияет на ранг матрицы. Этим утверждени доказано.

Таким образом, дефект инвариантности многообразия $\mathfrak{S}$ относительно группы $\tilde{G}$ зависит только от пространства V_n и группы движений G в нем. Поэтому корректно следующее

Определение. Пусть многообразие $\mathfrak{S}$ задает метрический тензор риманова пространства V_n в некоторой системе координат, и пусть G — группа движений в V_n. Дефект инвариантности многообразия $\mathfrak{S}$ относительно продолженной группы $\tilde{G}$ называется *дефектом группы движений G в пространстве V_n* и обозначается $\delta=\delta(V_n, G)$.

Учитывая инвариантность векторных полей (6.26) относительно выбора системы координат $\{x^i\}$ и используя выражения (6.27) для производной Ли и равенство (6.28), получаем следующее утверждение (Ибрагимов [7]).

Теорема. *Дефект группы движений G в пространстве V_n равен*

$$\delta(V_n, G)=\operatorname{rank}\left[\underset{\nu}{\mathfrak{L}}g_{ij}\right]. \qquad (6.30)$$

6.4. Инвариантное семейство пространств. Пусть G — группа движений в римановом пространстве V_n, а δ — соответствующий дефект. Будем предполагать, что в пространстве V_n введена определенная система координат $\{x^i\}$, и многообразие $\mathfrak{G}$ задано уравнениями (6.1). Согласно § 6.3, минимальным инвариантным многообразием группы $\tilde{G}$, содержащим многообразие $\mathfrak{G}$, является многообразие $\tilde{G}(\mathfrak{G})$ размерности

$$\dim \tilde{G}(\mathfrak{G}) = n + \delta.$$

Рассмотрим некоторое многообразие $\mathfrak{G}^* \subset \tilde{G}(\mathfrak{G})$, заданное уравнениями

$$y_{ij} = g^*_{ij}(x) \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Многообразие $\mathfrak{G}^*$, вообще говоря, не эквивалентно $\mathfrak{G}$. Согласно § 6.1, многообразие $\mathfrak{G}^*$ определяет некоторое риманово пространство V^*_n в системе координат $\{x^i\}$. Выбирая всевозможные многообразия $\mathfrak{G}^* \subset \tilde{G}(\mathfrak{G})$, получаем семейство $G(V_n)$ n-мерных римановых пространств, зависящее от δ произвольных функций от x. Это семейство, которое по построению не зависит от выбора системы координат в пространстве V_n, представляет собой инвариантное семейство пространств для пары (V_n, G) в следующем смысле.

Определение. Пусть группе G преобразований (6.18) и каждому пространству V_n сопоставляется семейство $G(V_n)$ римановых пространств указанным выше способом. *Инвариантным семейством пространств* для пространства V_n и группы движений G в нем называется множество $\mathfrak{M}$ римановых пространств, удовлетворяющее условиям:

1) $V_n \in \mathfrak{M}$;
2) если $V^*_n \in \mathfrak{M}$, то $G(V^*_n) \subset \mathfrak{M}$;

3) $\mathfrak{M}$ является минимальным множеством n-мерных римановых пространств, обладающим свойствами 1) и 2).

Для всякой пары (V_n, G) инвариантное семейство пространств определено единственным образом и, следовательно, совпадает с семейством $G(V_n)$. Из свойства 2) следует, что $\delta(V^*_n, G) \leqslant \delta(V_n, G)$ для всех $V^*_n \in G(V_n)$. Особый интерес представляют следующие два экстремальных случая.

I. Существует такое $V^*_n \in G(V_n)$, что $\delta(V^*_n, G) = 0$. Это означает (см. § 7.1), что группа движений G в пространстве V_n является группой изометрических движений в некотором пространстве $V^*_n \in G(V_n)$.

II. $\delta(V^*_n, G) = \delta(V_n, G)$ для любого $V^*_n \in G(V_n)$, так что $G(V^*_n) = G(V_n)$ для всех $V^*_n \in G(V_n)$.

Инвариантами группы G назовем функции $J(g_{ij})$, удовлетворяющие условию

$$J(g_{ij}(\bar{x})) = J(\bar{g}_{ij}(\bar{x})) \tag{6.31}$$

для преобразований (6.18) группы G. Например, для групп изометрических движений имеется $\frac{1}{2}n(n+1)$ независимых инвариантов $J_{ij}=g_{ij}$ $(i, j=1, \ldots, n)$; для групп конформных движений такими инвариантами будут $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ отношений g_{ij}/g_{kl}.

Равенство (6.31) имеет простой геометрический смысл: значение функции J в точке $\bar{x}\in V_n$, полученной из точки $x\in V_n$ групповым преобразованием (6.18), совпадает со значением этой же функции в точке x. При этом значение J в точке x (правая часть равенства (6.31)) записано в системе координат $\{\bar{x}^i\}$ по соображениям, приведенным в § 6.2.

Изучение инвариантов удобно вести в терминах многообразия $\mathfrak{G}$ пространства V_n и продолженной группы $\tilde{G}$ преобразований (6.21). Рассмотрим функцию $J(y_{ij})$ и точку P на многообразии $\mathfrak{G}$, имеющую координаты x^i, $y_{ij}=g_{ij}(x)$ $(i, j=1, \ldots, n)$. При преобразовании $\tilde{T}\in\tilde{G}$ точка P перейдет в точку $\bar{P}\in\tilde{T}(\mathfrak{G})$, имеющую координаты $\bar{x}^i$, $y_{ij}=\bar{g}_{ij}(\bar{x})$. Равенство (6.31) означает, что значение функции J на проекции точки $\bar{P}$ в пространство переменных $y_{ij}(i, j=1, \ldots, n)$ совпадает со значением этой же функции, которое она принимает на проекции точки $Q\in\mathfrak{G}$ с координатами $\bar{x}^i$, $y_{ij}=g_{ij}(\bar{x})$ $(i, j=1, \ldots, n)$, причем это верно для всех $x\in V_n$ и всех $T\in G$. Поэтому, отождествляя проекцию сечения многообразия $\tilde{G}(\mathfrak{G})$ гиперплоскостью $x=\text{const}$ на пространство переменных y_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ с самим этим сечением, можно определить инвариант группы движений G в римановом пространстве V_n как такую функцию $J(y_{ij})$, которая во всех точках многообразия $\tilde{G}(\mathfrak{G})$ при фиксированном $x\in V_n$ принимает одно и то же значение. Отсюда вытекает процедура отыскания инвариантов. Как было сказано выше, инвариантный класс пространств $G(V_n)$ представляет собой семейство римановых пространств, зависящее от $\delta=\delta(V_n, G)$ произвольных функций. Исключение этих произвольных функций дает $\frac{n(n+1)}{2}-\delta$ соотношений между компонентами метрического тензора. Полученные соотношения, одинаковые для всех пространств семейства $G(V_n)$, и будут искомыми инвариантами. Таких инвариантных соотношений не может быть больше, чем $\frac{n(n+1)}{2}-\delta$, так как $\tilde{G}(\mathfrak{G})$ является наименьшим инвариантным многообразием группы $\tilde{G}$, содержащим многообразие $\mathfrak{G}$. Таким образом, группа движений G в пространстве V_n имеет $\frac{n(n+1)}{2}-\delta(V_n, G)$ независимых инвариантов $J(g_{ij})$.

Проиллюстрируем процесс отыскания инвариантов на примере группы конформных движений G в пространстве V_n. Как будет показано в § 7.2, в этом случае инвариантное семейство пространств $G(V_n)$ совпадает с семейством всех пространств V_n^*, конформных V_n, дефект $\delta(V_n, G)=1$, так что $G(V_n)$ зависит от одной произвольной функции. Пусть пространство V_n определяется многообразием $\mathfrak{G}$: $y_{ij}=g_{ij}(x)$, а пространство V_n^* конформно V_n. Тогда для пространства V_n^* можно выбрать многообразие $\mathfrak{G}^*$: $y_{ij}=g_{ij}^*(x)$ такое, что

$$g_{ij}^*(x)=\sigma(x)\,g_{ij}(x) \tag{6.32}$$

с некоторой функцией $\sigma(x)\neq 0$. Выбирая функцию σ произвольно, получаем инвариантное семейство $G(V_n)$. Полагая для простоты $g_{11}\neq 0$ и исключая σ из уравнений (6.32), приходим к равенствам

$$\frac{g_{ij}^*(x)}{g_{11}^*(x)}=\frac{g_{ij}(x)}{g_{11}(x)},$$

т. е. величины g_{ij}/g_{11} не изменяются при переходе от пространства V_n к любому конформному ему пространству V_n^*. Поэтому в данном случае имеем хорошо известные в римановой геометрии инварианты

$$J_{ij}=\frac{g_{ij}}{g_{11}} \qquad (i\leqslant j;\ i=1,\ \ldots,\ n;\ j=2,\ \ldots,\ n).$$

§ 7. Примеры движений

7.1. Изометрии. Пусть G — группа движений в римановом пространстве V_n. Она называется *группой изометрических движений* *), или *группой изометрий*, если сохраняет значение основной метрической формы: $d\bar{s}^2=ds^2$.

Согласно (6.19) и (6.20), преобразование (6.18) является изометрией в пространстве с метрическим тензором g_{ij}, если

$$g_{ij}(\bar{x})=\bar{g}_{ij}(\bar{x}). \tag{7.1}$$

Умножение обеих частей равенства (7.1) на $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial f^j}{\partial x^l}$ и суммирование по i, j от 1 до n с учетом уравнений (6.2) приводят к равенствам (6.3). Наоборот, из (6.3) следует (7.1), если преобразование (6.18) обратимо. Следовательно, преобразование (6.18) является изометрией тогда и только тогда, когда выполняются (6.3).

Пусть G_1 — однопараметрическая группа изометрических движений с инфинитезимальным оператором (6.23). Дифференцированием равенств (6.3) по групповому параметру a при $a=0$

*) Killing [1], который ввел в риманову геометрию группу изометрических движений, говорил о «движении твердых тел»; употребляется также термин «движение метрики» (Дубровин, Новиков, Фоменко [1]). Иногда изометрические движения называются просто движениями (см., например, Эйзенхарт [2]), но в данной книге движение будет означать общее преобразование вида (6.21).

получаются уравнения (Killing [1])

$$\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} + g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0, \tag{7.2}$$

представляющие собой необходимое и достаточное условие изометричности группы движений G_1 в пространстве с метрикой g_{ij}. Уравнения Киллинга (7.2), используя производную Ли (6.27) и тождества (6.29), можно записать в ковариантной форме:

$$\mathfrak{L} g_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{7.3}$$

Теорема. *Для того чтобы группа движений G в римановом пространстве V_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ была группой изометрий, необходима и достаточна инвариантность многообразия $\mathfrak{G}$, заданного уравнениями* (6.1), *относительно продолженной группы $\tilde{G}$.*

Доказательство. Необходимое и достаточное условие $\tilde{X}(g_{ij}(x) - y_{ij})|_{\mathfrak{G}} = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ инвариантности многообразия $\mathfrak{G}$ относительно группы $\tilde{G}$ после подстановки формулы (6.24) принимает вид уравнений Киллинга (7.2).

7.2. Конформные движения. Группа движений G_r в пространстве V_n называется *группой конформных движений*, если при всех преобразованиях группы G_r выполняется равенство $d\bar{s}^2 = \Phi(x, a)\, ds^2$ с некоторой функцией $\Phi(x, a) \neq 0$. Согласно § 6.2 это равносильно тому, что

$$g_{ij}(\bar{x}) = \Phi(x, a)\, \bar{g}_{ij}(\bar{x}) \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

для всех преобразований группы G_r. Умножая эти равенства на $\frac{\partial f^i}{\partial x^k} \frac{\partial f^j}{\partial x^l}$, суммируя по i, j и используя уравнения (6.2), получаем

$$g_{ij}(f(x, a)) \frac{\partial f^i(x, a)}{\partial x^k} \frac{\partial f^j(x, a)}{\partial x^l} = \Phi(x, a)\, g_{kl}(x).$$

Продифференцируем теперь полученные равенства по параметрам a^ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ при $a = 0$. В результате, обозначив $\Phi_\nu = \left.\frac{\partial \Phi(x, a)}{\partial a^\nu}\right|_{a=0}$, получим обобщенные уравнения Киллинга

$$\underset{\nu}{\mathfrak{L}} g_{ij} = \Phi_\nu g_{ij} \qquad (\nu = 1, \ldots, r;\ i, j = 1, \ldots, n) \tag{7.4}$$

относительно инфинитезимальных операторов (6.26) группы G_r конформных движений в пространстве V_n. Обобщенные уравнения Киллинга (7.4) дают в терминах инфинитезимальных операторов необходимое и достаточное условие того, что группа G_r является группой конформных движений в пространстве V_n.

Найдем дефект $\delta(V_n, G_r)$ для группы конформных движений. Предположим, что хотя бы одна из функций $\Phi_\nu(x)$ в уравнениях

(7.4) отлична от нуля (если все $\Phi_\nu(x)\equiv 0$, то группа G_r является группой изометрий — в этом случае уравнения (7.4) совпадают с уравнениями Киллинга (7.3)). Тогда по формуле (6.30) имеем

$$\delta=\operatorname{rank}\left[\underset{\nu}{\mathfrak{L}} g_{ij}\right]=\operatorname{rank}[\Phi_\nu g_{ij}]=1.$$

Поэтому согласно § 6.4 инвариантное семейство пространств $G_r(V_n)$ в этом случае будет представлять собой семейство n-мерных римановых пространств, зависящее от одной произвольной функции.

Покажем, что семейство $G_r(V_n)$ определяется уравнениями

$$\frac{y_{ip}}{y_{11}}=\frac{g_{ip}(x)}{g_{11}(x)}\qquad (i=1,\ \ldots,\ n;\ p=2,\ \ldots,\ n),\tag{7.5}$$

где $g_{ij}(x)$ — метрический тензор пространства V_n (предполагается, что $g_{11}(x)\neq 0$). В качестве произвольного параметра многообразия (7.5) можно будет взять y_{11}. Семейство римановых пространств, определяемое уравнениями (7.5), содержит в себе пространство V_n, так как (7.5) выполняется при $y_{ij}=g_{ij}(x)$ $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$. Поэтому для доказательства того, что $G_r(V_n)$ задается уравнениями (7.5), достаточно показать, что (7.5) определяет инвариантное многообразие группы $\tilde G_r$.

Пусть G_1 — некоторая однопараметрическая подгруппа группы G_r, $\tilde X$ — инфинитезимальный оператор (6.24) группы $\tilde G_1$; функции $\xi^i(x)$ удовлетворяют обобщенным уравнениям Киллинга (7.4). Запишем уравнения (7.5):

$$F_{ip}\equiv\frac{g_{ip}(x)}{g_{11}(x)}y_{11}-y_{ip}=0\qquad (i=1,\ \ldots,\ n;\ p=2,\ \ldots,\ n).$$

Условия инвариантности многообразия, заданного этими уравнениями, относительно группы $\tilde G_1$ имеют вид

$$\tilde X F_{ip}\,|_{(7.5)}=0.$$

Рассмотрим сначала эти условия для $i=1$:

$$\tilde X F_{1p}\,|_{(7.5)}=\left(y_{1k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^p}+y_{pk}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^1}-2\frac{g_{1p}(x)}{g_{11}(x)}y_{1k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^1}\right)_{(7.5)}+$$
$$+\frac{y_{11}}{g_{11}(x)}\left(\xi^k\frac{\partial g_{1p}(x)}{\partial x^k}-\frac{g_{1p}(x)}{g_{11}(x)}\xi^k\frac{\partial g_{11}(x)}{\partial x^k}\right).$$

Выражение, стоящее справа в первых скобках, в силу (7.5) равно

$$\frac{y_{11}}{g_{11}}\left(g_{1k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^p}+g_{pk}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^1}-2\frac{g_{1p}}{g_{11}}g_{1k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^1}\right).$$

Поэтому тождества (6.29) и уравнения (7.4) дают

$$\tilde X F_{1p}\,|_{(7.5)}=\frac{y_{11}}{g_{11}^2}\left(g_{11}(\xi_{1,\,p}+\xi_{p,\,1})-2g_{1p}\xi_{1,\,1}\right)=$$
$$=\frac{y_{11}}{g_{11}^2}(g_{11}\cdot\Phi g_{1p}-g_{1p}\cdot\Phi g_{11})=0.$$

Для $i \geqslant 2$ аналогичным путем получаются равенства

$$\tilde{X}F_{ip}\,|_{(7.5)} = \left(y_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^p} + y_{pk}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i} - 2\frac{g_{ip}}{g_{11}}y_{1k}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^1}\right)_{(7.5)} +$$

$$+\frac{y_{11}}{g_{11}}\left(\xi^k\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^k} - \frac{g_{ip}}{g_{11}}\xi^k\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}\right) = \frac{y_{11}}{g_{11}^2}\left(g_{11}(\xi_{i,\,p}+\xi_{p,\,i}) - 2g_{ip}\xi_{1,\,1}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$\tilde{X}F_{ip}\,|_{(7.5)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ p = 2, \ldots, n).$$

Это означает, что уравнения (7.5) задают инвариантное многообразие группы $\tilde{G}_1$. Поскольку это верно для любой однопараметрической подгруппы группы G_r, то (7.5) определяет инвариантное многообразие $\tilde{G}_r(\mathfrak{G})$ группы $\tilde{G}_r$.

Пусть V_n^* — некоторое пространство семейства $G_r(V_n)$, определенного уравнениями (7.5). Если уравнения, задающие многообразие $\mathfrak{G}^*$ пространства V_n^*, записать в виде $y_{ij} = g_{ij}^*(x)$ и ввести обозначения $\sigma(x) = \dfrac{g_{11}^*(x)}{g_{11}(x)}$, то из уравнений (7.5) следуют равенства

$$g_{ij}^*(x) = \sigma(x)\,g_{ij}(x) \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{7.6}$$

Следовательно, пространство V_n^* конформно V_n. Наоборот, если некоторое риманово пространство V_n^* конформно V_n и имеет метрический тензор $g_{ij}^*(x)$ вида (7.6), то многообразие $y_{ij} = g_{ij}^*(x)$ содержится в многообразии, заданном уравнениями (7.5). Однопараметрическому произволу в (7.5) соответствует произвольная функция $\sigma(x)$ в равенствах (7.6), так что уравнения (7.5) задают семейство всех пространств, конформных V_n. Этим доказано следующее утверждение.

Теорема. *Группа конформных движений G_r в римановом пространстве V_n имеет дефект $\delta = 1$, а соответствующее инвариантное семейство пространств $G_r(V_n)$ совпадает с множеством всех римановых пространств, конформных V_n.*

7.3. Движения с $\delta = 2$. Предположим, что координаты $\xi_\nu^i(x)$ операторов (6.26) группы движений G_r ($r \geqslant 2$) в пространстве V_n ($n > 2$) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\xi_{\nu k,\,l} + \xi_{\nu l,\,k} = \Phi_\nu g_{kl} && (k, l = 1, \ldots, n-1),\\ &\xi_{\nu i,\,n} + \xi_{\nu n,\,i} = \Psi_\nu g_{in} && (i = 1, \ldots, n),\\ & && (\nu = 1, \ldots, r). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Если $\Phi_\nu(x) = \Psi_\nu(x)$ ($\nu = 1, \ldots, r$), то уравнения (7.7) совпадают с обобщенными уравнениями Киллинга (7.4) для групп конформных движений. Пусть $\Phi_\nu \neq \Psi_\nu$ хотя бы для одного значения ν, а векторы $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ и $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_r)$ линейно независимы. Нетрудно подсчитать, что в этих предположениях $\operatorname{rank}\left[\underset{\nu}{\mathfrak{L}}g_{ij}\right] = 2$, так что $\delta(V_n, G_r) = 2$.

Покажем теперь, что действительно существуют группы, обладающие указанными свойствами. Возьмем для этого плоское n-мерное пространство S_n с метрическим тензором $g_{ij}=\delta_{ij}$. Уравнения (7.7) имеют вид

$$\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}+\frac{\partial\xi^l}{\partial x^k}=\Phi\delta_{kl} \qquad (k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1), \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial\xi^n}{\partial x^k}+\frac{\partial\xi^k}{\partial x^n}=0 \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1), \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial\xi^n}{\partial x^n}=\frac{1}{2}\Psi. \tag{7.10}$$

В этом параграфе индексы k, l принимают значения $1, \ldots, n-1$; в частности, если по этим индексам ведется суммирование, то оно также распространяется на значения от 1 до $n-1$.

Уравнения (7.8) относительно $\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}$, рассматриваемых как функции переменных $x^1, \ldots, x^{n-1}$, имеют вид обобщенных уравнений Киллинга (7.4) в плоском $(n-1)$-мерном пространстве (см. § 8.3); при этом переменная x^n, от которой также зависят функции ξ^k, играет роль параметра. Поэтому общее решение уравнений (7.8) дается известной формулой

$$\xi^k=A_l(x^n)(2x^kx^l-\rho^2\delta^{kl})+a^k_l(x^n)x^l+b(x^n)x^k+c^k(x^n) \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1), \tag{7.11}$$

где

$$\rho^2=(x^1)^2+\ldots+(x^{n-1})^2, \quad a^k_l=-a^l_k,$$

а A_l, $a^k_l\,(k<l)$, $c^k\,(k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1)$ и b — произвольные функции от x^n.

Уравнения (7.9) при известных функциях ξ^k определяют функцию ξ^n. Условия совместности этих уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}-\frac{\partial\xi^l}{\partial x^k}\right)=0$$

после подстановки из формул (7.11) значений

$$\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}-\frac{\partial\xi^l}{\partial x^k}=4(A_lx^k-A_kx^l)+2a^k_l$$

принимают вид

$$2(\dot A_lx^k-\dot A_kx^l)+\dot a^k_l=0,$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по x^n. Отсюда

$$\dot A_k=0, \quad \dot a^k_l=0,$$

так что все величины A_k и $a^k_l\,(k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1)$ в формуле (7.11) являются постоянными. Теперь уравнения (7.9) легко решаются и дают

$$\xi^n = -\frac{1}{2}\dot{b}(x^n)\rho^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \dot{c}^k(x^n)x^k + f(x^n),$$

где $f(x^n)$ — произвольная функция. Таким образом, общее решение уравнений (7.8), (7.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^k &= A_l(2x^kx^l - \rho^2\delta^{kl}) + a_l^kx^l + b(x^n)x^k + c^k(x^n), \\ \xi^n &= -\frac{1}{2}\dot{b}(x^n)\rho^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \dot{c}^k(x^n)x^k + f(x^n). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Функция $\Phi(x)$ находится из уравнений (7.8), а $\Psi(x)$ — из (7.10). Этим решение системы (7.8) — (7.10) заканчивается.

Уравнения (7.4) представляют собой условие инвариантности многообразия, заданного уравнениями (7.5), поэтому множество всех решений уравнений (7.4) образует алгебру Ли относительно умножения (коммутации) операторов X. В отличие от этого векторные поля (7.12) не образуют алгебру Ли.

Выделим из решений (7.12) некоторое множество решений, образующее алгебру Ли. Положим

$$a_l^k = 0, \quad c^k = 0 \qquad (k, l = 1, \ldots, n-1), \quad b = 0,$$

а постоянные A_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ и функцию $f(x^n)$ оставим произвольными. Операторы

$$X_f = f(x^n)\frac{\partial}{\partial x^n}$$

определяют бесконечную группу преобразований на вещественной прямой. Максимальный порядок конечной подгруппы этой бесконечной группы равен 3; в качестве базисных операторов подгруппы можно взять операторы, соответствующие функциям $f = 1$, $f = x^n$, $f = (x^n)^2$. Взяв произвольные A_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ и указанные значения функции f, получим следующую $(n+2)$-параметрическую группу G_{n+2} с базисными операторами

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad X_2 = x^n\frac{\partial}{\partial x^n}, \quad X_3 = (x^n)^2\frac{\partial}{\partial x^n}, \\ &Y_k = (2x^kx^l - \rho^2\delta^{kl})\frac{\partial}{\partial x^l} \quad (k = 1, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{7.13}$$

Для них имеем

$$\begin{aligned} &[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3, \\ &[X_\alpha, Y_k] = 0, \quad [Y_k, Y_l] = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3; \ k, l = 1, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

Подставив (7.13) в формулу (6.30), получим

$$\delta(S_n, G_{n+2}) = 2,$$

т. е. группа G_{n+2} с базисными инфинитезимальными операторами (7.13) представляет собой группу движений с дефектом $\delta=2$ в пространстве S_n.

Вопрос о соответствующем инвариантном семействе пространств и инвариантах полученной группы пока не рассматривается. Это будет сделано в § 7.5.

7.4. Неконформные движения с $\delta=1$. Согласно теореме 7.1 группа изометрических движений в любом римановом пространстве V_n характеризуется тем, что ее дефект $\delta=0$. Группа конформных движений имеет дефект $\delta=1$, но это равенство не является достаточным условием того, что рассматриваемая группа является группой конформных движений. Ниже приводится пример бесконечной группы неконформных движений с дефектом $\delta=1$ в плоском n-мерном пространстве.

Рассмотрим частный случай уравнений (7.8)—(7.10), полагая в них $\Phi=0$. Из формул (7.11) получаем

$$\Phi=4A_k(x^n)\,x^k+2b\,(x^n),$$

и условие $\Phi=0$ дает $A_k=0$ $(k=1,\ \ldots,\ n-1)$, $b=0$. Подстановка этих значений A_k, b в (7.12) дает общее решение уравнений (7.8), (7.9) при $\Phi=0$:

$$\begin{aligned}\xi^k&=a^k_l x^l+c^k(x^n)\qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1),\\ \xi^n&=-\sum_{k=1}^{n-1}\dot{c}^k(x^n)\,x^k+f(x^n),\end{aligned}\tag{7.14}$$

где a^k_l, $c^k(x^n)$ и $f(x^n)$ имеют тот же смысл, что и в формулах (7.12).

Из множества всех векторных полей (7.14), которые при произвольных a^k_l, $c^k(x^n)$, $f(x^n)$ не образуют алгебру Ли, можно выделить следующие алгебры Ли (ниже выписаны только базисные операторы и размерности этих алгебр):

$$\begin{aligned}X_1&=e^{x^n}\frac{\partial}{\partial x^1}-x^1e^{x^n}\frac{\partial}{\partial x^n},\\ X_i&=\frac{\partial}{\partial x^i}\qquad (i=2,\ \ldots,\ n),\\ X_{ij}&=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j}\qquad (i<j;\ i,\ j=2,\ \ldots,\ n-1),\\ r&=n+\frac{1}{2}(n-2)(n-3);\end{aligned}\tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}X_k&=\frac{\partial}{\partial x^k}\qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1),\\ X_{kl}&=x^l\frac{\partial}{\partial x^k}-x^k\frac{\partial}{\partial x^l}\qquad (k<l;\ k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1),\\ X_f&=f(x^n)\frac{\partial}{\partial x^n},\\ r&=\infty,\end{aligned}\tag{7.16}$$

здесь $f(x^n)$ — произвольная функция;

$$
\begin{aligned}
&X_1 = h(x^n)\frac{\partial}{\partial x^1} - h(x^n)\,x^1\,\frac{\partial}{\partial x^n},\\
&X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (i=2,\ \ldots,\ n-1),\\
&X_{kl} = x^l\,\frac{\partial}{\partial x^k} - x^k\,\frac{\partial}{\partial x^l} \qquad (k<l;\ k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1),\\
&r = (n-1) + \frac{1}{2}(n-2)(n-3),
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

здесь $h(x^n)$ — фиксированная функция (в зависимости от выбора h получаются разные алгебры).

Кроме того, имеются алгебры Ли с базисными операторами, получающимися из (7.15) и (7.17) заменой переменной x^1 на любую из переменных $x^2,\ \ldots,\ x^{n-1}$, а также алгебра Ли группы изометрий в пространстве S_n при $\Psi=0$.

Для всех групп, соответствующих выписанным алгебрам, дефект $\delta=1$. Среди этих групп есть и бесконечная группа, соответствующая бесконечномерной алгебре Ли с базисными операторами (7.16). Нетрудно проверить, что уравнения

$$
y_{ik} = \delta_{ik} \qquad (i=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots,\ n-1),
$$

определяют минимальное инвариантное многообразие продолжения $\tilde{G}$ группы G с операторами (7.16). Согласно § 6.4 инвариантное семейство пространств $G(S_n)$ задается уравнениями

$$
\begin{aligned}
&g_{ik} = \delta_{ik} \qquad (i=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots,\ n-1),\\
&g_{nn} = \sigma(x),
\end{aligned}
$$

где $\sigma(x)$ — произвольная функция от $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$. Инвариантами группы G преобразований в пространстве S_n будут компоненты g_{ik} $(i=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots,\ n-1)$ метрического тензора. Нетрудно понять и геометрический смысл этих инвариантов, так как любой инфинитезимальный n-мерный шар радиуса ε:

$$
(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2 \leqslant \varepsilon^2,
$$

при преобразованиях группы G переходит в эллипсоид с полуосями $=\varepsilon$ в направлениях осей $x^1,\ \ldots,\ x^{n-1}$ и полуосью произвольной длины в направлении x^n.

7.5. Движения с заданными инвариантами. Следующий пример иллюстрирует способ отыскания группы движений по заданным инвариантам. Рассматривается плоское пространство S_n с метрическим тензором $g_{ij}=\delta_{ij}$, и ищется группа движений G с дефектом $\delta=2$, имеющая следующие инварианты:

$$
\begin{aligned}
&g_{ki} \qquad (k\neq i;\ k=1,\ \ldots,\ n-1;\ i=1,\ \ldots,\ n),\\
&\frac{g_{kk}}{g_{11}} \qquad (k=2,\ \ldots,\ n-1).
\end{aligned}
$$

Согласно § 6.4 инвариантное семейство пространств $G(S_n)$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &y_{ki}=0 \qquad (k \neq i;\ k=1,\ \ldots,\ n-1;\ i=1,\ \ldots,\ n), \\ &y_{kk}=y_{11} \qquad (k=2,\ \ldots,\ n-1). \end{aligned} \tag{7.18}$$

Группа G, имеющая указанные инварианты, находится из условия инвариантности многообразия (7.18) относительно продолженной группы $\tilde{G}$:

$$\tilde{X} y_{ki} = -\left(y_{11} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + y_{ii} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \right) = 0 \qquad (k \neq i) \tag{7.19}$$

(по индексу i суммирования нет),

$$\tilde{X}\,(y_{11}-y_{kk}) = 2y_{11} \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} \right) = 0 \qquad (k=2,\ \ldots,\ n-1) \tag{7.20}$$

(здесь также нет суммирования по k). Учитывая, что в (7.18) величины y_{11} и y_{nn} являются свободными переменными, (7.19), (7.20) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} = 0 \qquad (k \neq l;\ k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1), \tag{7.21}$$

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} = 0, \quad \frac{\partial \xi^n}{\partial x^k} = 0 \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1), \tag{7.22}$$

$$2\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} = \Phi \qquad (k=1,\ \ldots,\ n-1). \tag{7.23}$$

Общее решение уравнений (7.21)—(7.23) образует алгебру Ли, поскольку эти уравнения представляют собой необходимое и достаточное условие инвариантности некоторого многообразия. Так как система (7.21), (7.23) совпадает с (7.8), то общее решение уравнений (7.21), (7.22) дается формулами (7.11). Подстановка (7.11) в (7.22) дает, что все величины

$$A_k, \quad a_l^k, \quad c^k, \quad b \qquad (k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1)$$

постоянны, а $\xi^n = \xi^n(x^n)$. Таким образом, система дифференциальных уравнений (7.21)—(7.23) имеет общее решение

$$\begin{aligned} &\xi^k = A_l\,(2x^k x^l - \rho^2 \delta^{kl}) + a_l^k x^l + b x^k + c^k, \\ &\xi^n = f(x^n), \end{aligned} \tag{7.24}$$

зависящее от $\frac{1}{2} n(n+1)$ произвольных постоянных A_k, a_l^k $(k < l)$, c^k $(k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1)$, b и одной произвольной функции $f(x^n)$. Следовательно, искомая группа G является бесконечной и имеет базисные операторы

$$
\begin{gathered}
X_k=\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad X_{kl}=x^l\frac{\partial}{\partial x^k}-x^k\frac{\partial}{\partial x^l}, \\
Y_k=(2x^kx^l-\rho^2\delta^{kl})\frac{\partial}{\partial x^l}, \\
Z=x^k\frac{\partial}{\partial x^k}, \quad X_f=f(x^n)\frac{\partial}{\partial x^n} \\
(k,\ l=1,\ \ldots,\ n-1).
\end{gathered} \tag{7.25}
$$

Алгебра Ли с базисом (7.25) содержит в качестве своих подалгебр конечномерную алгебру с базисом (7.13) и бесконечномерную алгебру с базисом (7.16). При этом группы G_{n+2} и G с инфинитезимальными операторами (7.13) и (7.25) соответственно имеют одинаковый дефект $\delta=2$ и, следовательно, одни и те же инварианты. Действительно, все инварианты группы движений G в пространстве V_n являются инвариантами любой ее подгруппы G', а если $\delta(V_n,\ G)=\delta(V_n,\ G')$, то G и G' имеют одни и те же инварианты.

В связи с рассмотрением групп движений возникает задача классификации римановых пространств по группам движений в них. Такая задача в случае групп изометрических и конформных движений уже давно рассматривается в римановой геометрии (Killing [1], Fubini [1]; подробное изложение этих вопросов и полную библиографию читатель найдет с следующих книгах: Эйзенхарт [2], Yano [1], Lichnerowicz [2]); основой исследования этих групп являются уравнения Киллинга (7.3) и обобщенные уравнения Киллинга (7.4). В случае произвольных групп движений аналогом уравнений Киллинга может служить равенство (6.30). Однако, как было выяснено в § 7.2, обобщенные уравнения Киллинга (как и уравнения Киллинга для групп изометрий) определяют не только значение дефекта δ, но и соответствующее инвариантное семейство пространств. В отличие от этого, равенство (3.30) определяет только величину дефекта, поэтому при переходе к общей задаче классификации римановых пространств по группам движений появляется произвол, связанный с выбором инвариантного семейства пространств.

§ 8. Римановы пространства с нетривиальной конформной группой

8.1. Конформные пространства. Если метрические тензоры g_{ij} и $\tilde{g}_{ij}$ римановых пространств V_n и $\tilde{V}_n$ связаны соотношением вида (7.6) в некоторой системе координат $\{x^i\}$, то пространства V_n и $\tilde{V}_n$ называются *конформными*. Будем считать функцию $\sigma(x)$ в равенствах (7.6) положительной и записывать конформное соответствие между пространствами V_n и $\tilde{V}_n$ в виде

$$\tilde{g}_{ij}(x)=e^{2\sigma(x)}g_{ij}(x). \tag{8.1}$$

В дальнейшем будут использоваться следующие формулы, связывающие соответствующие величины в пространствах V_n и $\tilde{V}_n$ (Эйзенхарт [2], § 28):

$$
\begin{aligned}
g^{ij} &= e^{2\sigma}\tilde{g}^{ij};\\
\Gamma^k_{ij} &= \tilde{\Gamma}^k_{ij} - \delta^k_i\sigma_{,j} - \delta^k_j\sigma_{,i} + \tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{kl}\sigma_{,l};\\
R &= e^{2\sigma}\left(\tilde{R} - 2(n-1)\tilde{\Delta}_2\sigma + (n-1)(n-2)\tilde{\Delta}_1\sigma\right);\\
C^l_{ijk} &= \tilde{C}^l_{ijk}.
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Группа конформных движений G в V_n является группой конформных движений в каждом пространстве $\tilde{V}_n$, конформном V_n. Действительно, если однопараметрическая группа G_1 с инфинитезимальным оператором (6.23) удовлетворяет обобщенным уравнениям Киллинга

$$\mathfrak{L}g_{ij} = \Phi g_{ij} \tag{8.3}$$

в пространстве V_n, то из формулы (8.1) следует, что

$$\mathfrak{L}\tilde{g}_{ij} = \tilde{\Phi}\tilde{g}_{ij},$$

где

$$\tilde{\Phi} = \Phi + 2\xi^i \frac{\partial\sigma}{\partial x^i}. \tag{8.4}$$

Согласно теореме 7.2 дефект группы конформных движений G_r в пространстве V_n равен 1, поэтому выполняется либо условие I, либо условие II из § 6.4. Соответственно этому группа G_r называется либо тривиальной, либо нетривиальной группой конформных движений. Ниже группой конформных движений в V_n называется максимальная группа, соответствующая общему решению обобщенных уравнений Киллинга (7.4).

Определение. Группа конформных движений G_r в пространстве V_n называется *нетривиальной*, если $\delta(\tilde{V}_n, G_r) = 1$ для каждого пространства $\tilde{V}_n$, конформного V_n; риманово пространство V_n при этом называется *пространством с нетривиальной конформной группой*. Если существует такое пространство $\tilde{V}_n$, конформное V_n, что $\delta(\tilde{V}_n, G_r) = 0$, то V_n называется *пространством с тривиальной конформной группой*, а G_r — *тривиальной группой конформных движений* в этом пространстве.

Согласно этому определению для пространства V_n с тривиальной конформной группой найдется такое конформное пространство $\tilde{V}_n$, в котором группа конформных движений является группой изометрий. Рассмотрим один пример. Пусть V_4 — пространство с метрической формой

$$ds^2 = -(1+t)\,dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2, \qquad t \geqslant 0. \tag{8.5}$$

Обозначив

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = t,$$

запишем обобщенные уравнения Киллинга (8.3) в виде следующих двух систем уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\xi^2}{\partial x^3}+\frac{\partial\xi^3}{\partial x^2}=\frac{\partial\xi^2}{\partial x^4}-\frac{\partial\xi^4}{\partial x^2}=\frac{\partial\xi^3}{\partial x^4}-\frac{\partial\xi^4}{\partial x^3}=0,\\ &\frac{\partial\xi^2}{\partial x^2}=\frac{\partial\xi^3}{\partial x^3}=\frac{\partial\xi^4}{\partial x^4}=\frac{1}{2}\Phi; \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned} &(1+t)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^2}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x^1}=(1+t)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^3}+\frac{\partial\xi^3}{\partial x^1}=(1+t)\frac{\partial\xi^1}{\partial x^4}-\frac{\partial\xi^4}{\partial x^1}=0,\\ &\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1}=\frac{1}{2}\Phi-\frac{1}{2(1+t)}\xi^4. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Система (8.6) при фиксированном значении x^1 имеет вид обобщенных уравнений Киллинга в плоском 3-мерном пространстве переменных $(x^2,\ x^3,\ x^4)$, и поэтому

$$\begin{aligned} \xi^2&=a_1[(x^2)^2-(x^3)^2+(x^4)^2]+2a_2x^2x^3+2a_3x^2x^4+bx^2+c_1x^3+c_2x^4+d_1,\\ \xi^3&=2a_1x^2x^3+a_2[(x^3)^2-(x^2)^2+(x^4)^2]+2a_3x^3x^4+bx^3-c_1x^2+c_3x^4+d_2,\\ \xi^4&=2a_1x^2x^4+2a_2x^3x^4+a_3[(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2]+bx^4+c_2x^2+c_3x^3+d_3, \end{aligned} \tag{8.8}$$

где $a_i,\ c_i,\ d_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$ и b — произвольные функции от x^1. Эти функции подлежат определению из уравнения (8.7). Подставляя выражения (8.8) в систему (8.7) и исследуя условия совместности полученных уравнений относительно функции ξ^1, получаем

$$\begin{gathered} a_i=0\quad (i=1,\ 2,\ 3),\qquad c_2=c_3=0,\quad c_1=\mathrm{const},\\ d_i=\mathrm{const}\quad (i=1,\ 2,\ 3),\qquad b=d_3. \end{gathered}$$

Подстановка этих соотношений в формулы (8.8) дает общее решение уравнений (8.6)—(8.7):

$$\begin{aligned} &\xi^1=\frac{1}{2}bx^1+k_1, &&\xi^2=bx^2+cx^3+k_2,\\ &\xi^3=bx^3-cx^2+k_3, &&\xi^4=b(1+x^4), \end{aligned}$$

зависящее от пяти произвольных постоянных $b,\ c,\ k_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$.

Таким образом, пространство V_4 имеет 5-параметрическую группу G_5 конформных движений. В качестве базисных операторов этой группы можно взять

$$\begin{aligned} &X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial z},\quad X_4=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},\\ &X_5=\frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+(1+t)\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Группой изометрических движений в V_4 является 4-параметрическая группа с инфинитезимальными операторами $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4$. Убедимся теперь, что V_4 является пространством с тривиальной конформной группой. Найдем для этого пространство $\tilde{V}_4$, конформное V_4, в котором группа G_5 с базисными инфинитезимальными операторами (8.9) является группой изометрий.

Заметим сначала, что в соответствии с формулой (8.4) V_n представляет собой пространство с тривиальной конформной группой тогда и только тогда, когда уравнения

$$2\xi^i_\nu(x)\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}+\Phi_\nu(x)=0 \qquad (\nu=1, \ldots, r) \tag{8.10}$$

совместны для всех операторов $X_\nu=\xi^i_\nu\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(\nu=1, \ldots, r)$ группы G_r конформных движений в V_n. В том случае, когда уравнения (8.10) совместны, G_r является группой изометрических движений в пространстве $\tilde{V}_n$ с метрическим тензором (8.1), где $\sigma(x)$ — решение системы (8.10).

В нашем случае уравнение (8.10), записанное для операторов X_1, X_2, X_3 из (8.9), приводит к условию $\sigma=\sigma(t)$. При этом для оператора X_4 (8.10) выполняется тождественно, а для оператора X_5 дает

$$(1+t)\frac{d\sigma}{dt}+1=0.$$

Опуская несущественное здесь постоянное слагаемое, решение полученного уравнения запишем в виде

$$\sigma=\ln(1+t)^{-1}.$$

Таким образом, группа G_5 с базисными инфинитезимальными операторами (8.9) является группой изометрических движений в пространстве $\tilde{V}_4$ с метрической формой

$$d\tilde{s}^2=(1+t)^{-2}(-(1+t)\,dx^2-dy^2-dz^2+dt^2).$$

Пространства V_n с нетривиальной конформной группой характеризуются тем, что группу конформных движений в V_n нельзя превратить в группу изометрий переходом к конформному пространству. Легко видеть, что плоское пространство или любое конформно-плоское пространство представляет собой пространство с нетривиальной конформной группой. Действительно, в каждом конформно-плоском пространстве V_n порядок группы конформных движений достигает максимально возможного значения $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, тогда как порядок группы изометрических движений в любом n-мерном римановом пространстве не превосходит $\frac{1}{2}n(n+1)$.

8.2. Пространства постоянной кривизны. Риманово пространство V_n постоянной кривизны характеризуется условием

$$R_{ijkl}=K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}), \tag{8.11}$$

где $R_{ijkl}=g_{im}R^m_{jkl}$ — тензор Римана — Кристоффеля, $K=\text{const}$ — риманова кривизна пространства V_n. В любом пространстве постоянной кривизны можно выбрать систему координат $\{x^i\}$ так, чтобы метрическая форма (6.4) имела вид (Эйзенхарт [2], § 27)

$$ds^2=(A_1+\ldots+A_n)^{-2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(dx^i)^2, \tag{8.12}$$

где каждое ε_i равно $+1$ или -1 в соответствии с сигнатурой пространства V_n, а

$$A_i=\varepsilon_i(a(x^i)^2+2b_ix^i+c_i)$$

(по i нет суммирования) с постоянными a, b_i, c_i, удовлетворяющими условию

$$4\sum_i\varepsilon_i(ac_i-b_i^2)=K. \tag{8.13}$$

Каноническая риманова форма

$$ds^2=\frac{1}{\theta^2}\sum_i\varepsilon_i(dx^i)^2,\quad \theta=1+\frac{K}{4}\sum_i\varepsilon_i(x^i)^2, \tag{8.14}$$

получается из (8.2) при $b_i=0$, $\sum\limits_i\varepsilon_ic_i=1$. Другой удобный вид метрической формы пространства постоянной кривизны получается из (8.2), когда $\varepsilon_iK<0$ для некоторого $i=i_0$. Если в этом случае взять $a=0$, $b_i=0$ для $i\neq i_0$ и в соответствии с (8.3) $b_{i_0}=\frac{1}{2}\sqrt{|K|}$, то формула (8.2) примет вид

$$ds^2=\frac{1}{|K|(x^{i_0})^2}\sum_i\varepsilon_i(dx^i)^2. \tag{8.15}$$

Рассмотрим теперь для произвольного риманова пространства V_n уравнения Киллинга (7.3), которые представляют собой переопределенную систему дифференциальных уравнений первого порядка: $\frac{1}{2}n(n+1)$ уравнений относительно n функций ξ^i $(i=1,\ldots,n)$. Из условий совместности этой системы следует, что ее общее решение зависит от $r\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)$ произвольных постоянных, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда выполняется (8.11). Это свойство групп изометрических движений в римановых пространствах выражается следующей теоремой (Эйзенхарт [2], § 71).

Теорема. *Порядок группы изометрических движений в V_n не превосходит $\frac{1}{2}n(n+1)$, и это максимальное значение достигается только для пространств постоянной кривизны.*

Группы изометрических движений в пространствах постоянной кривизны были исследованы еще Киллингом (Killing [1],

§§ 11, 12). Уравнения Киллинга (7.3) для пространства V_n постоянной кривизны легко решаются в системе координат, приводящей метрическую форму пространства V_n к виду (8.14). Найдя общее решение уравнений Киллинга, получим базис алгебры Ли группы изометрических движений в пространстве V_n постоянной кривизны K:

$$
\begin{aligned}
X_i &= \left(\frac{K}{2} x^i x^j + (2-\theta)\,\varepsilon_i \delta^{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^j},\\
X_{ij} &= \varepsilon_j x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - \varepsilon_i x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n);
\end{aligned}
\tag{8.16}
$$

здесь в выражениях $\varepsilon_i x^i$, $\varepsilon_j x^j$, $\varepsilon_i \delta^{ij}$ индексы i, j фиксированы и по ним не производится суммирование; δ^{ij} — символ Кронекера.

Из формулы (8.12) видно, что пространство постоянной кривизны конформно плоскому пространству и, следовательно, принадлежит классу римановых пространств, имеющих группу конформных движений максимального порядка $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

8.3. Конформно-плоские пространства. Обобщенные уравнения Киллинга (8.3) при $n \geqslant 3$ представляют собой переопределенную систему уравнений относительно функций Φ, ξ^i ($i=1,\ \ldots,\ n$). Дифференциальные следствия этих уравнений позволяют выразить производные второго и более высокого порядков функций Φ и ξ^i через величины Φ, $\Phi_{,k}$, ξ^i, $\xi^i_{,k}$. Эти $(n+1)^2$ величин, в свою очередь, связаны $\frac{1}{2}n(n+1)$ соотношениями (8.3) и, кроме того, некоторыми условиями совместности, так что группа конформных движений в пространстве V_n содержит не более $(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ произвольных параметров. Условия совместности обобщенных уравнений Киллинга удобно записать с помощью тензора конформной кривизны Вейля C^l_{ijk}, определенного формулой (6.14), и тензора

$$
R_{ijk} = \frac{2}{n-2}\left(L_{ik,\,j} - L_{ij,\,k}\right),
\tag{8.17}
$$

где

$$
L_{ik} = -R_{ik} + \frac{R}{2(n-1)} g_{ik}.
\tag{8.18}
$$

Полная система условий совместности уравнений (8.3) представляет собой цепочку уравнений для производных Ли от тензоров C^l_{ijk}, R_{ijk} и от их ковариантных производных (Taub [1]; Yano [1], стр. 161). Два первых уравнения этой цепочки имеют вид

$$
\mathfrak{L} C^l_{ijk} = 0,
\tag{8.19}
$$

$$
\mathfrak{L} R_{ijk} = \frac{1}{2} C^l_{ijk} \Phi_{,\,l},
\tag{8.20}
$$

где производные Ли вычисляются по следующим формулам:

$$\mathfrak{L}C^l_{ijk} = \xi^m C^l_{ijk,\,m} - C^m_{ijk}\xi^l_{,m} + C^l_{mjk}\xi^m_{,i} + C^l_{imk}\xi^m_{,j} + C^l_{ijm}\xi^m_{,k};$$

$$\mathfrak{L}R_{ijk} = \xi^m R_{ijk,\,m} + R_{mjk}\xi^m_{,i} + R_{imk}\xi^m_{,j} + R_{ijm}\xi^m_{,k}.$$

Для того чтобы группа конформных движений в V_n содержала максимально возможное число $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ произвольных параметров, все условия совместности должны выполняться тождественно по переменным Φ, $\Phi_{,k}$, ξ^i, $\xi^i_{,k}$, связанным только уравнениями (8.3). Уравнения (8.19), (8.20) при этом условии дают

$$C^l_{ijk} = 0, \tag{8.21}$$

$$R_{ijk} = 0. \tag{8.22}$$

Если $n=3$, то равенство (8.21) выполняется для любого V_3, а (8.22) представляет собой критерий того, что V_3 конформно плоскому пространству. При $n>3$, наоборот, уравнение (8.21) выполняется тогда и только тогда, когда V_n конформно плоскому пространству, а (8.22) является следствием равенства (8.21) (см. Эйзенхарт [2], § 28). Таким образом, справедливо следующее утверждение (Taub [1]).

Теорема. *Группа конформных движений G_r в пространстве V_n, $n \geqslant 3$, имеет максимальный порядок $r = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ тогда и только тогда, когда V_n конформно плоскому пространству.*

Выпишем для справок инфинитезимальные операторы группы конформных движений в конформно-плоских пространствах. При этом достаточно рассмотреть плоское пространство с положительно определенной метрикой; переход к случаю произвольной сигнатуры легко осуществляется формальной заменой соответствующих вещественных переменных x^i на $\sqrt{-1}\,x^i$. Пусть S_n — плоское пространство, в котором введена декартова система координат: $g_{ij} = \delta_{ij}$. В этой системе координат все символы Кристоффеля Γ^k_{ij} равны нулю, а $\xi_i = \xi^i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Поэтому обобщенные уравнения Киллинга (8.3) имеют вид

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = \Phi\delta_{ij}. \tag{8.23}$$

Общее решение этих уравнений хорошо известно и может быть записано в следующей форме:

$$\xi^i = A_j(2x^i x^j - |x|^2\delta^{ij}) + a^i_j x^j + bx^i + c^i, \tag{8.24}$$

где $a^i_j = -a^j_i$, A_i, a^i_j $(i<j)$, c^i $(i, j = 1, \ldots, n)$ и b — произвольные постоянные, а $|x|^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$.

В согласии с приведенной выше теоремой решение зависит от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ произвольных постоянных. Полагая последовательно одну из этих постоянных равной 1, а другие равными 0 получаем базисные операторы группы конформных движений в S_n,

$$
\begin{aligned}
&X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i < j),\\
&Y_i = (2x^i x^j - |x|^2 \delta^{ij}) \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n), \qquad (8.25)\\
&Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned}
$$

8.4. Пространства с определенной метрикой. Как отмечалось выше, любое конформно-плоское пространство имеет нетривиальную группу конформных движений. Задача классификации всех римановых пространств с нетривиальной конформной группой в случае пространств V_n произвольной сигнатуры не решена. Однако в двух случаях (когда V_n либо имеет лоренцеву сигнатуру $(- \ldots - +)$, либо является пространством с определенной метрикой), особенно важных в геометрии и физике, имеется полное описание множества пространств с нетривиальной конформной группой. Рассмотрим сначала более простой случай пространств с определенной метрикой. В этом случае задачу решает следующая теорема (см. Yano [1], стр. 275; приводимое ниже доказательство принадлежит Suguri, Ueno [1]).

Теорема. *Пространство V_n, $n \geqslant 3$, с определенной метрикой имеет нетривиальную группу конформных движений тогда и только тогда, когда V_n конформно плоскому пространству.*

Доказательство. Достаточно показать, что всякое пространство V_n с положительно определенной метрической формой (6.4) и не конформное плоскому пространству имеет только тривиальную группу конформных движений. Будем считать $n > 3$; в случае $n = 3$ тензор C^l_{ijk} надо заменить на тензор R_{ijk}, определенный формулой (8.17).

Запишем обобщенные уравнения Киллинга (8.3) для контравариантных компонент метрического тензора:

$$\mathfrak{L} g^{ij} = -\Phi g^{ij}, \qquad (8.26)$$

и рассмотрим функцию

$$C^2 = g_{l_1 l_2} g^{i_1 i_2} g^{j_1 j_2} g^{k_1 k_2} C^{l_1}_{i_1 j_1 k_1} C^{l_2}_{i_2 j_2 k_2}. \qquad (8.27)$$

Эта функция не обращается в нуль тождественно. Действительно, выберем точку $x \in V_n$, в которой тензор Вейля отличен от нуля, и заменой координат приведем метрический тензор в этой точке к виду $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Тогда $C^2(x) = \sum\limits_{i,\,j,\,k,\,l=1}^{n} (C^l_{ijk}(x))^2 > 0$. Поэтому можно осуществить переход V_n в конформное ему пространство

$\tilde{V}_n$ преобразованием

$$\tilde{g}_{ij}=Cg_{ij}. \tag{8.28}$$

Так как $\mathfrak{L}C^2=2C\mathfrak{L}C$ и в силу формул (8.3), (8.26), (8.27) $\mathfrak{L}C^2=-2\Phi C^2$, то

$$\mathfrak{L}C+\Phi C=0. \tag{8.29}$$

Поэтому

$$\mathfrak{L}\tilde{g}_{ij}=\mathfrak{L}(Cg_{ij})=g_{ij}\mathfrak{L}C+C\mathfrak{L}g_{ij}=(\mathfrak{L}C+\Phi C)\,g_{ij}=0,$$

так что группа конформных движений в V_n является группой изометрических движений в конформном пространстве $\tilde{V}_n$.

8.5. Лоренцевы пространства. Доказательство теоремы 8.4 не переносится на случай пространств V_n с неопределенной метрикой, так как для таких V_n функция C, определенная формулой (8.27), может обращаться в нуль и при отличном от нуля тензоре конформной кривизны. Утверждение, подобное теореме 8.4, в этом случае неверно: существуют пространства с лоренцевой сигнатурой $(-\ldots-+)$, имеющие нетривиальную группу конформных движений, и не конформные плоскому пространству. Это — пространства V_{n+1}, $n\geqslant 3$, с метрической формой

$$ds^2=(dx^0)^2-(dx^1)^2-\sum_{i,\,j=2}^{n}a_{ij}(x^1-x^0)\,dx^i\,dx^j, \tag{8.30}$$

где $[a_{ij}]$ — произвольная положительно определенная матрица с элементами, зависящими от одной переменной x^1-x^0. Группа конформных движений в каждом пространстве V_{n+1} с метрикой вида (8.30) (а также в любом пространстве, конформном такому V_{n+1}) нетривиальна, в общем случае зависит от $2n$ параметров и имеет инфинитезимальные операторы

$$
\begin{aligned}
&X_1=\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^1},\quad X_i=\frac{\partial}{\partial x^i},\\
&Y_i=x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^1}\right)+\sum_{j=2}^{n}A^{ij}(x^1-x^0)\frac{\partial}{\partial x^j}\qquad (i=2,\ \ldots,\ n),\\
&Z=(x^0+x^1)\left(\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^1}\right)+\sum_{j=2}^{n}x^j\frac{\partial}{\partial x^j},
\end{aligned}
\tag{8.31}
$$

где $A^{ij}(\tau)=\int a^{ij}(\tau)\,d\tau$, $[a^{ij}]=[a_{ij}]^{-1}$. Кроме того, существуют коэффициенты $a_{ij}(x^1-x^0)$ специального вида, когда группа конформных движений расширяется (например, для $n=3$ см. Петров [1], §§, 41, 27) и имеет размерность либо $2n+1$ (если V_{n+1} не является конформно-плоским пространством), либо $\frac{1}{2}(n+2)\times$ $\times(n+3)$ (тогда V_{n+1} конформно плоскому пространству).

Рассмотрим частный случай $n=3$. В этом случае метрика (8.30) будет использоваться в более простом виде, так как один из произвольных коэффициентов, скажем a^{33}, можно исключить путем перехода к конформному пространству. Метрический тензор

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{22} & -a^{23} & 0 \\ 0 & -a^{23} & -a^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

пространства V_4 рассматриваемого типа приводится сначала к виду

$$[\bar{g}^{ij}]=\begin{bmatrix} -a^{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^{22} & -a^{23} & 0 \\ 0 & -a^{23} & -a^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{33} \end{bmatrix}$$

заменой координат

$$\overline{x^0}=\frac{1}{2}(x^0+x^1-A^{33}(x^1-x^0)),\quad \overline{x^1}=\frac{1}{2}(x^0+x^1+A^{33}(x^1-x^0)),$$
$$\overline{x^2}=x^2,\quad \overline{x^3}=x^3,$$

где, как и выше, $A^{33}(x^1-x^0)$ означает первообразную функции $a^{33}(x^1-x^0)$. После этого переход к конформному пространству с метрическим тензором $g^{ij}=\frac{1}{a^{33}}\bar{g}^{ij}$ позволяет исключить из рассмотрения функцию a^{33}. Таким образом, всякое пространство V_4 с метрикой вида (8.30) можно конформно преобразовать в пространство с метрическим тензором

$$[g^{ij}]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(x-t) & -\varphi(x-t) & 0 \\ 0 & -\varphi(x-t) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad f-\varphi^2>0. \tag{8.32}$$

Здесь использованы индивидуальные обозначения $t=x^0$, $x=x^1$, $y=x^2$, $z=x^3$ и контравариантные компоненты метрического тензора, более удобные в дальнейшем при рассмотрении римановых пространств, связанных с дифференциальными уравнениями второго порядка.

Пространства V_{n+1} с метрикой (8.30) вместе с конформными им пространствами исчерпывают все множество лоренцевых пространств с нетривиальной конформной группой. Для $n=3$ это доказал Билялов [1] (полное изложение доказательства содержится в книге Петрова [1], § 41; см. также Ибрагимов [11], § 9); обобщение на случай произвольных $n\geqslant 3$ недавно получил Чупахин [1]. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Риманово пространство V_{n+1}, $n\geqslant 3$, с лоренцевой сигнатурой имеет нетривиальную группу конформных движе-*

ний тогда и только тогда, когда V_{n+1} конформно пространству с метрикой (8.30).

Следствие. *Всякое лоренцево пространство с нетривиальной конформной группой конформно пространству с $R_{ij}=0$.*

Доказательство. Покажем это для пространств V_4; общий случай рассматривается аналогично. Для V_4 с метрическим тензором (8.32) все компоненты тензора Риччи равны нулю за исключением

$$R_{11}=R_{00}=-R_{10}=h(x^1-x^0),$$

где функция $h(x^1-x^0)$ выражается через $f(x^1-x^0)$, $\varphi(x^1-x^0)$ и в общем случае отлична от нуля. Конформное пространство $\tilde{V}_4$, удовлетворяющее условию $\tilde{R}_{ij}=0$, будем искать по формуле (8.1) с функцией $\sigma=\sigma(x^1-x^0)$. В этом случае $\Delta_2\sigma=0$, $\Delta_1\sigma=0$, и по формулам преобразования тензора Риччи при переходе к конформному пространству имеем

$$\tilde{R}_{11}=\tilde{R}_{00}=-\tilde{R}_{10}=R_{11}+2(\sigma''-(\sigma')^2),$$

где σ' — производная от σ. Поэтому решение $\sigma\neq 0$ обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\sigma''-(\sigma')^2+\frac{1}{2}h(x^1-x^0)=0$$

реализует необходимое конформное отображение пространства V_4.

Среди пространств с метрикой (8.30) полезно выделить конформно-плоские. Для этого надо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (6.15) относительно функций $a_{ij}(x^1-x^0)$. Рассмотрим следующий простой случай метрики (8.30):

$$a_{ij}=0\ (i\neq j),\quad a_{ii}=-1\ (i=2,\ \ldots,\ n-1),\quad a_{nn}=f(x^1-x^0). \tag{8.33}$$

Одной из компонент тензора (6.14), не равной нулю тождественно, является

$$C^1_{n1n}=R^1_{n1n}+\frac{1}{n-1}(R_{nn}-fR^1_1)+\frac{f}{n(n-1)}R.$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля равны

$$\Gamma^0_{nn}=\Gamma^1_{nn}=-\frac{1}{2}f',\qquad \Gamma^n_{1n}=-\Gamma^n_{0n}=\frac{1}{2}(\ln f)',$$

и формулы (6.10), (6.12), (6.13) дают

$$R^1_{n1n}=fR^1_1,$$

$$R_{ii}=0\quad (i=2,\ \ldots,\ n),\quad R_{00}=R_{11}=-R^1_1=\frac{1}{2f}\left(f''-\frac{f'^2}{2f}\right),\quad R=0.$$

Поэтому $C^1_{n1n}=\frac{n-2}{n-1}fR^1_1$, и равенство $C^1_{n1n}=0$ принимает вид дифференциального уравнения

$$f''-\frac{f'^2}{2f}=0,$$

имеющего общее решение

$$f=(a(x^1-x^0)+b)^2, \qquad a,\ b=\mathrm{const}. \tag{8.34}$$

Остальные компоненты тензора C^l_{ijk} также обращаются в нуль в силу (8.34) (более того, $R^l_{ijk}=0$). Следовательно, метрика (8.33) определяет конформно-плоское пространство V_{n+1} тогда и только тогда, когда функция f имеет вид (8.34).

При $n=3$ все конформно-плоские пространства с метрикой (8.30) выделил Лапко [1]. В этом случае достаточно рассмотреть пространства V_4 с метрическим тензором вида (8.32) и найти все функции f и φ, удовлетворяющие уравнениям (6.15). Общее решение этих уравнений выражается формулами

$$f=[a(x-t)+b]^{-2}+\alpha^2, \qquad \varphi=\alpha; \tag{8.35}$$

$$f=\alpha^2, \qquad \varphi=\frac{\alpha[a(x-t)+b]}{(1+[a(x-t)+b]^2)^{1/2}}; \tag{8.36}$$

$$f=\frac{\beta}{(\beta^2-1)^{1/2}}\varphi+\frac{4\alpha^2-\beta^2}{4(\beta^2-1)}, \quad \varphi=\frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,[a(x-t)+b]}{(1+\beta^2\,\mathrm{tg}^2\,[a(x-t)+b])^{1/2}}+\frac{\beta}{2(\beta^2-1)^{1/2}}, \tag{8.37}$$

где постоянные a, b, α, β должны выбираться в соответствии с условием гиперболичности $f-\varphi^2>0$.

Для завершения локальной классификации лоренцевых пространств с нетривиальной конформной группой нужно провести разбиение пространств с метрикой плоской волны (8.30) на классы конформно-эквивалентных пространств. Эта задача не решена, хотя имеется обобщение классического алгоритма Кристоффеля для исследования проблемы эквивалентности квадратичных форм на случай конформной эквивалентности (Лапко [1]). Можно получить простой пример конформно не эквивалентных друг другу пространств с нетривиальной конформной группой, если в (8.32) положить $\varphi=0$, а в качестве f выбирать функции

$$1,\ e^{x-t}, \quad e^{-(x-t)^2}. \tag{8.38}$$

Указанные пространства допускают конформные группы, имеющие максимальный порядок 15, 7 и 6 соответственно.

§ 9. Групповой анализ уравнений Эйнштейна

9.1. Гармонические координаты. В некоторых вопросах геометрии и теории гравитации удобно пользоваться так называемыми гармоническими системами координат в римановых пространствах (Lanczos [1], Фок [1]). В плоском пространстве S_n декартовы координаты являются гармоническими. В случае произвольных пространств V_n гармонические координаты определяются условиями

$$\Gamma^i \equiv g^{ik}\Gamma^i_{jk} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9.1}$$

Так как символы Кристоффеля Γ^i_{jk}, а вместе с ними и величины Γ^i не обладают тензорным характером относительно общих преобразований координат, то уравнения (9.1) действительно выделяют специальные системы координат.

Перепишем координатные условия (9.1) в терминах многообразия $\mathfrak{G}$, заданного уравнениями (6.1). Свертывая равенства

$$g^{ij}_{,k} \equiv \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + g^{il}\Gamma^j_{lk} + g^{jl}\Gamma^i_{lk} = 0$$

по индексам k, j и пользуясь формулами

$$\Gamma^j_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \ln |g|^{1/2}, \quad |g| = |\det[g_{ij}]|,$$

получаем

$$\Gamma^i = -|g|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^j} (|g|^{1/2} g^{ij}).$$

Поэтому условия (9.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (|g|^{1/2} g^{ij}) = 0. \tag{9.2}$$

Таким образом, гармонические системы координат в римановы пространствах задаются решениями (6.1) следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (|y|^{1/2} y^{ij}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{9.3}$$

где $|y| = |\det[y_{ij}]|$, $[y^{ij}] = [y_{ij}]^{-1}$. Эти уравнения определяют гармонические координаты в семействе всех n-мерных римановых пространств. Для выделения множества гармонических систем координат в одном определенном пространстве V_n нужно взять только те решения уравнений (9.3), которые задают эквивалентные между собой многообразия $\mathfrak{G}$, соответствующие рассматриваемому пространству V_n.

Уравнения (9.3) не инвариантны относительно произвольных преобразований вида (6.21). Поэтому общая группа движений в V_n не сохраняет свойство гармоничности системы координат в этом пространстве. Найдем максимальную подгруппу общей группы движений, сохраняющую множество всех гармонических систем координат в V_n *).

*) Задача полного описания преобразований, переводящих одну фиксированную гармоническую систему координат в некоторые гармонические системы координат, является более сложной и пока не решена. При исследовании этой задачи наряду с локальными условиями (9.1) задаются еще дополнительные условия на бесконечности (см. Фок [1], § 93).

Пусть G — группа преобразований (6.18), а $\tilde{G}$ — ее продолжение по формулам (6.21).

Определение. Группа G называется *группой, сохраняющей гармонические системы координат в пространстве* V_n, если для всех $\tilde{T} \in \tilde{G}$ и для каждой гармонической системы координат $\mathfrak{S}$ в V_n преобразованная система координат $\overline{\mathfrak{S}} = \tilde{T}(\mathfrak{S})$ является гармонической.

Лемма 1. *Продолжение* $\tilde{G}$ *группы* G *допускается системой дифференциальных уравнений* (9.3) *тогда и только тогда, когда* G — *группа линейных преобразований*

$$\bar{x}^i = a^i_k x^k + b^i, \tag{9.4}$$

где a^i_k, b^i — *произвольные постоянные.*

Доказательство. Введем обозначения

$$z^{ij} = |y|^{1/2} y^{ij}, \quad \theta^{ij}_k = \frac{\partial z^{ij}}{\partial x^k}$$

и перепишем уравнения (9.3) в виде

$$\theta^{ij}_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9.5}$$

В переменных z^{ij} преобразования (6.21) имеют вид

$$\begin{gathered} \bar{x}^i = f^i(x, a), \\ J\left(\frac{\bar{x}}{x}\right) \bar{z}^{ij} = z^{kl} \frac{\partial f^i(x, a)}{\partial x^k} \frac{\partial f^j(x, a)}{\partial x^l}, \end{gathered} \tag{9.6}$$

где $J\left(\frac{\bar{x}}{x}\right)$ — якобиан преобразования $\bar{x}^i = f^i(x, a)$.

Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы преобразований (9.6) равен (см. формулу (6.24))

$$\tilde{X} = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(z^{ik}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} + z^{jk}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - z^{ij}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial z^{ij}}. \tag{9.7}$$

Если

$$\underset{1}{X} = \tilde{X} + \zeta^{ij}_k \frac{\partial}{\partial \theta^{ij}_k}$$

— оператор группы, полученной продолжением преобразований (9.6) на величины θ^{ij}_k, то условие инвариантности уравнений (9.5) имеет вид

$$\underset{1}{X}\theta^{ij}_j \big|_{(9.5)} = \zeta^{ij}_j \big|_{(9.5)} = 0. \tag{9.8}$$

По формулам продолжения (4.8)

$$\zeta^{ij}_k = z^{il}\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial x^l \partial x^k} + z^{jl}\frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^l \partial x^k} - z^{ij}\frac{\partial^2 \xi^l}{\partial x^l \partial x^k} + \theta^{il}_k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} + \theta^{jl}_k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} - \theta^{ij}_k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^l} - \theta^{ij}_l \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k}. \tag{9.10}$$

Поэтому уравнения (9.8) имеют вид

$$z^{jk}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^k}=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{9.11}$$

В уравнениях (9.11) все величины x^i, z^{ij} играют роль независимых переменных, поэтому

$$\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\,\partial x^k}=0 \qquad (i,\ j,\ k=1,\ \ldots,\ n).$$

Решение этих уравнений определяет общую линейную группу преобразований (9.4).

Лемма 2. *Группа G движений в пространстве V_n сохраняет гармонические координаты в V_n тогда и только тогда, когда система дифференциальных уравнений* (9.3) *инвариантна относительно продолженной группы $\tilde{G}$.*

Доказательство. Пусть система уравнений (9.3) инвариантна относительно группы $\tilde{G}$. Так как в этом случае всякий элемент $\tilde{T}\in\tilde{G}$ преобразует каждое решение уравнений (9.3) снова в решение и $\tilde{T}(\mathfrak{G})\sim\mathfrak{G}$, то любая гармоническая система координат $\mathfrak{G}$ в пространстве V_n переводится преобразованием $\tilde{T}\in\tilde{\mathfrak{G}}$ в некоторую гармоническую систему координат $\bar{\mathfrak{G}}=\tilde{T}(\mathfrak{G})$ в том же пространстве V_n.

Пусть теперь известно, что группа G сохраняет гармонические системы координат в V_n. Воспользуемся замечанием 3.4, взяв в качестве M многообразие в пространстве переменных $(x^i,\ z^{ij},\ \theta_k^{ij})$, заданное уравнениями (9.5), а в качестве $N\subset M$ — совокупность всех гармонических систем координат в пространстве V_n, т. е. совокупность тех эквивалентных между собой многообразий $\mathfrak{G}$, которые задаются решениями (6.1) уравнений (9.3) и определяют метрический тензор рассматриваемого пространства V_n. Так как G сохраняет гармонические системы координат в V_n, то продолжение группы G на переменные x^i, z^{ij}, θ_k^{ij} удовлетворяет условиям замечания 3.4. Поэтому

$$\zeta_i^{ij}\big|_N=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{9.12}$$

где величины ζ_k^{ij} имеют вид (9.10). Из леммы 1 следует, что линейные преобразования сохраняют гармонические системы координат в любом пространстве. С другой стороны, нетрудно видеть, что образ любого многообразия $\mathfrak{G}$ вида (6.1) при общих линейных преобразованиях (9.4) содержит открытое множество пространства переменных $(x^i,\ y_{ij})$. Взяв здесь некоторое $\mathfrak{G}\in N$, получим, что на многообразии $\bar{N}$ все величины x^i, z^{ij} $(i,\ j=1,\ \ldots,\ n)$ могут рассматриваться как независимые переменные. Поэтому уравнения

(9.12) и (9.11) равносильны, так как (9.12) можно записать в виде

$$z^{jk}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\,\partial x^k}\Big|_N=0.$$

Следовательно, система уравнений (9.3) допускает группу $\tilde{G}$.

Теорема (Ибрагимов [3]). *Для любого риманова пространства V_n максимальная группа движений G, сохраняющая гармонические системы координат, совпадает с общей линейной группой преобразований* (9.4).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 1 и 2.

9.2. Группа, допускаемая уравнениями Эйнштейна. Общековариантность (т. е. независимость от выбора системы координат) уравнений Эйнштейна

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}=T_{ik},\quad T^{ik}_{,k}=0\qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ 4)\tag{9.13}$$

можно интерпретировать, отождествляя g_{ij} с переменными y_{ij} (см. § 6.1 и § 9.3), как инвариантность относительно бесконечной группы преобразований (6.21) с произвольными $f^i(x)$. Для применения методов группового анализа в полном объеме к уравнениям Эйнштейна необходимо выяснить, является ли эта группа максимальной группой точечных преобразований

$$\begin{aligned} x'^i&=f^i(x,\ y),\\ y'_{ij}&=\varphi_{ij}(x,\ y),\end{aligned}\tag{9.14}$$

допускаемой уравнениями (9.13).

Рассмотрим для простоты случай свободного пространства, когда тензор энергии-импульса T_{ik} равен нулю. Формулу (6.12), используя для частных производных обозначения $g_{ij\,|\,k}=\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, $g_{ij\,|\,kl}=\dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k\,\partial x^l}$, удобно переписать в виде

$$2R_{ik}=g^{lm}(g_{lk\,|\,im}+g_{im\,|\,lk}-g_{lm\,|\,ik}-g_{ik\,|\,lm})+P_{ik}[g],$$

где $P_{ik}[g]=2g^{lm}(\Gamma^n_{im}\Gamma_{nlk}-\Gamma^n_{ik}\Gamma_{nlm})$, $\Gamma_{nlk}=g_{nm}\Gamma^m_{lk}$. В этих обозначениях уравнения Эйнштейна

$$R_{ik}=0\qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ 4)\tag{9.15}$$

записываются в виде следующей квазилинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$2R_{ik}[y]\equiv y^{lm}(y_{lk\,|\,im}+y_{im\,|\,lk}-y_{lm\,|\,ik}-y_{ik\,|\,lm})+P_{ik}[y]=0\tag{9.16}$$

относительно зависимых переменных y_{ij} $(y_{ij}=y_{ji};\ y^{ij}y_{jk}=\delta^i_k)$.

Пусть

$$X = \xi^i(x,\ y)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_{ij}(x,\ y)\frac{\partial}{\partial y_{ij}}$$

— оператор группы преобразований вида (9.14), а

$$\underset{2}{X} = X + \zeta_{ijk}\frac{\partial}{\partial y_{ij\,|\,k}} + \zeta_{ijkl}\frac{\partial}{\partial y_{ij\,|\,kl}}$$

— второе продолжение этого оператора, где в соответствии с формулами продолжения (4.8), (4.10)

$$\begin{aligned} \zeta_{ijk} &= D_k(\eta_{ij}) - y_{ij\,|\,m}D_k(\xi^m), \\ \zeta_{ijkl} &= D_l(\zeta_{ijk}) - y_{ij\,|\,km}D_l(\xi^m). \end{aligned} \tag{9.17}$$

Определяющее уравнение (4.12) группы, допускаемой системой (9.16), можно записать с неопределенными множителями Ω_{ik}^{jl} в виде

$$\underset{2}{X}R_{ik}[y] = \Omega_{ik}^{jl}R_{jl}[y] \tag{9.18}$$

и рассматривать все величины x^i, y_{ij}, $y_{ij\,|\,k}$, $y_{ij\,|\,kl}$ в качестве независимых переменных. Согласно формулам (9.16) и (9.17) левые части равенств (9.18) зависят от величин $y_{ij\,|\,kl}$ линейно. Поэтому множители Ω_{ik}^{jl} являются функциями только переменных x^i, y_{ij}, $y_{ij\,|\,k}$. Это позволяет отделить в (9.18) члены, содержащие величины $y_{ij\,|\,kl}$, и записать определяющее уравнение как переопределенную систему дифференциальных уравнений для функций ξ^i, η_{ij}. Стандартный анализ полученных уравнений приводит к следующему общему решению определяющего уравнения (9.18):

$$\xi^i = \xi^i(x), \qquad \eta_{ij} = -\left(\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}y_{kj} + \frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}y_{ki}\right) + cy_{ij}, \tag{9.19}$$

где $\xi^i(x)$ — произвольные функции, $c = \text{const}$. Сравнив формулы (9.19) и (6.24), можно сформулировать окончательный результат (Ибрагимов [1], § 6; глобальную инвариантность рассмотрел Pham Mau Quan [1]).

Теорема. *Преобразования* (6.21) *вместе с однопараметрической группой растяжений*

$$y'_{ij} = ay_{ij} \tag{9.20}$$

образуют максимальную группу точечных преобразований (9.14), *допускаемую уравнениями* (9.16).

9.3. Разложение Ли — Вессио. В соответствии с общей теорией Ли—Вессио (см. § 4.2) и теоремой 9.2 уравнения (9.16) можно разложить на разрешающую и автоморфную системы относительно любой подгруппы бесконечной группы преобразований (6.21), (9.20). В общей теории относительности неявно осуществляется такое разложение с помощью группы преобразований (6.21). Это достигается путем включения эквивалентности относительно преобразований (6.21) в понятие решения уравнений Эйнштейна. Решением уравнений (9.15) называется не отдельное решение

$$\mathfrak{G}:\ y_{ij}=g_{ij}(x) \tag{9.21}$$

дифференциальных уравнений (9.16), а соответствующее риманово пространство V_4, т. е. семейство всех решений

$$\overline{\mathfrak{G}}:\ y_{ij}=\overline{g}_{ij}(x), \tag{9.22}$$

эквивалентных (9.21). Согласно такому определению решения, уравнения Эйнштейна описывают классы g_{ij} эквивалентных решений уравнений (9.16). Это означает, что уравнения (9.15) представляют собой разрешающую систему для дифференциальных уравнений (9.16). Для реализации разрешающей системы (9.15) как системы уравнений для представителей различных классов эквивалентности достаточно зафиксировать систему координат в V_4. При этом автоморфная система, которая описывает преобразования системы координат по формулам (6.2), физического интереса не представляет и поэтому не рассматривается. В соответствии с общими свойствами разрешающей системы действие преобразований (6.21) на решения уравнений (9.15) является тривиальным (тождественным). Поэтому максимальная группа, допускаемая разрешающей системой (9.15), состоит из преобразований (9.20).

Рассмотрим случай, соответствующий выбору гармонических координат. Согласно теореме 9.1 гармонические системы координат определяются с точностью до линейных преобразований. В соответствии с этим разложение Ли — Вессио уравнений (9.16) осуществляется не всей группой координатных преобразований (6.21), а некоторой ее подгруппой. Разрешающая система получается присоединением к (9.16) дифференциальных уравнений первого порядка (9.3) и в соответствии с леммой 9.11 и теоремой 9.2 допускает группу линейных преобразований (9.4).

Использование гармонических координат удобно, например, при исследовании задачи Коши для уравнений Эйнштейна, так как в этих координатах система уравнений (9.16) имеет гиперболический тип на любом решении, и поэтому задача Коши корректна в классе функций конечной гладкости (см. Lichnerowicz [1] и работы Choquet-Bruhat, например, Fourés-Bruhat [1], а также Choquet-Bruhat, Christodoulou, Francaviglia [1]). В произвольной системе координат уравнения Эйнштейна не являются гиперболическими. Такая зависимость типа уравнения от выбора системы координат, необычная для теории дифференциальных уравнений, связана с определением решения уравнений Эйнштейна как класса эквивалентных решений уравнений (9.16). Ввиду нелинейности системы дифференциальных уравнений (9.16) ее тип зависит от решения, поэтому при переходе от решения (9 21) к произвольному эквивалентному решению (9.22) тип рассматриваемой системы, естественно, изменяется.

9.4. Точные решения. Ввиду сложности общего анализа задач теории гравитации возникает необходимость выяснения характерных особенностей этих задач путем изучения частных точных решений уравнений Эйнштейна. Точные решения, ставшие теперь классическими, первоначально были найдены путем априорного требования определенной симметрии искомых решений. Например, метрика Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) + \left(1-\frac{1}{r}\right) dt^2 \qquad (9.23)$$

получается подстановкой в уравнения (9.15) общей центрально-симметрической метрики

$$ds^2 = A\, dr^2 + B(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) + C\, dt^2 + D\, dr\, dt, \qquad (9.24)$$

где t — время, r, θ, φ — сферические координаты пространственной точки, связанные с декартовыми координатами x^i $(i = 1, 2, 3)$ соотношениями

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta, \qquad (9.25)$$

коэффициенты A, B, C, D — произвольные функции от r, t. Центральная симметрия означает, что рассматриваемое пространство V_4 допускает в качестве изометрических движений трехпараметрическую группу пространственных вращений. В других случаях частные решения также ищутся как пространства V_4, которые обладают определенной группой изометрий. Подробное описание возможных локальных решений подобного типа вместе с группами изометрий имеется в книге Петрова [1].

Обобщая этот классический способ, в основу построения точных решений можно положить произвольные движения, введенные в § 6. В этом случае по заданной группе G нужно найти пространства V_4 гиперболического типа, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна и допускающие G в качестве группы движений дефекта δ. Значение $\delta = 0$ соответствует, как видно из теорем 6.3 и 7.1, уже рассмотренному случаю групп изометрических движений.

Алгоритм построения таких частных решений вытекает из определения 6.3 и описан в § 4.3. При этом уравнения Эйнштейна отождествляются с системой дифференциальных уравнений (9.16). Согласно теореме 7.1 отыскание пространств V_4, обладающих группой изометрий G и удовлетворяющих равенствам (9.15), равносильно построению инвариантных (относительно группы $\tilde{G}$, полученной продолжением G по формулам (6.21)) решений (9.21) уравнений (9.16). Аналогично пространства V_4, имеющие некоторую заданную группу G в качестве группы движений дефекта δ, получаются с по мощью продолженной группы $\tilde{G}$ как частично инвариантные решения дефекта δ уравнений (9.16).

В соответствии с условиями (4.20) можно выделить следующие 24 типа пространств V_4, обладающих нетривиальной (т. е. не сводящейся к тождественному преобразованию и не совпадающей с общей группой всех движений (6.18)) группой движений:

$$\delta=0,\ \rho\begin{array}{l}3(1)\\2(2)\\1(3)\\0(4)\end{array};\quad \delta=1,\ \rho\begin{array}{l}3(2)\\2(3)\\1(4)\\0(5)\end{array};\quad \delta=2,\ \rho\begin{array}{l}3(3)\\2(4)\\1(5)\\0(6)\end{array};$$
$$\delta=3,\ \rho\begin{array}{l}3(4)\\2(5)\\1(6)\\0(7)\end{array};\quad \delta=4,\ \rho\begin{array}{l}3(5)\\2(6)\\1(7)\\0(8)\end{array};\quad \delta=5,\ \rho\begin{array}{l}3(6)\\2(7)\\1(8)\\0(9)\end{array}. \qquad (9.26)$$

Здесь указаны значения дефекта δ и ранга ρ частично инвариантного решения, которые полностью определяют тип рассматриваемого решения. Для наглядности в скобках указано также значение ранга $r_*=r_*(\xi, \eta)$ матрицы (3.15), составленной из координат базисных инфинитезимальных операторов (6.24) группы $\tilde{G}_r$; числа δ, ρ, r_* связаны равенством (4.21). Тип частично инвариантного решения, или соответствующего пространства V_4, будет обозначаться символом $[\delta, \rho(r_*)]$. Хотя неравенства (4.20) позволяют дефекту δ принимать также значения 6, 7, 8, 9, однако эти случаи можно исключить из рассмотрения путем выбора определенной системы координат. Особый интерес представляют решения ранга $\rho=1$, так как в этом случае задача сводится в основном к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $10-\delta$ функций. Многие из таких решений описываются динамическими системами с алгебраическими нелинейностями и могут быть подвергнуты качественному анализу современными геометрическими методами (см. Хокинг, Эллис [1], Дубровин, Новиков, Фоменко [1], Богоявленский, Новиков [1] и Богоявленский [1]).

Приводимый ниже пример достаточно ясно иллюстрирует алгоритм построения частично инвариантных решений, когда дефект $\delta\neq 0$. Ищется решение типа $[1, 0(5)]$, допускающее в качестве группы движений дефекта $\delta=1$ группу G_5 с базисными операторами

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i=1, \ldots, 4), \qquad X_5=x^1\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

В синхронной системе координат, определяемой уравнениями

$$g_{k4}=0 \quad (k=1, 2, 3), \qquad g_{44}=-1,$$

формулы продолжения (6.24) дают

$$\tilde{X}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \tilde{X}_5 = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - 2y_{12}\frac{\partial}{\partial y_{11}} - y_{22}\frac{\partial}{\partial y_{12}} - y_{23}\frac{\partial}{\partial y_{13}}.$$

Из уравнений

$$\tilde{X}_i J = 0, \qquad i = 1, \ldots, 5,$$

относительно функции $J = J(x, y)$ находятся следующие независимые инварианты продолженной группы $\tilde{G}_5$:

$$\begin{gathered} J_1 = y_{11}y_{22} - y_{12}^2, \quad J_2 = y_{12}y_{23} - y_{13}y_{22}, \\ J_3 = y_{22}, \quad J_4 = y_{23}, \quad J_5 = y_{33}. \end{gathered} \tag{9.27}$$

Так как здесь ищутся частично инвариантные решения ранга $\rho = 0$, то уравнения (4.22) для таких решений имеют вид

$$J_\alpha = C_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, 5), \quad C_\alpha = \mathrm{const}. \tag{9.28}$$

Равенства (9.27) и (9.28) дают

$$y_{11} = \frac{1}{C_3}(C_1 + f^2), \quad y_{13} = \frac{1}{C_3}(C_4 f - C_2),$$

$$y_{22} = C_3, \quad y_{23} = C_4, \quad y_{33} = C_5,$$

где $f = y_{12}$ — свободная переменная, которая выбирается в качестве произвольной функции от x в соответствии с § 4.3. Простой заменой координат можно добиться выполнения условий $C_1 = C_4 = 0$, $C_2 = -C_3 = 1$ и записать общий вид искомой метрики:

$$ds^2 = -(f(x)\,dx^1 - dx^2)^2 + 2\,dx^1\,dx^3 + C\,(dx^3)^2 - (dx^4)^2. \tag{9.29}$$

Для метрики (9.29) отличны от нуля следующие символы Кристоффеля:

$$\Gamma^1_{11} = ff_3, \quad \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{2}f_3, \quad \Gamma^2_{11} = f^2 f_3 - ff_2 - f_1,$$

$$\Gamma^2_{12} = -\frac{1}{2}ff_3, \quad \Gamma^2_{13} = -\frac{1}{2}f_3, \quad \Gamma^2_{14} = -\frac{1}{2}f_4, \quad \Gamma^3_{11} = f^2 f_2,$$

$$\Gamma^3_{12} = -ff_2, \quad \Gamma^3_{13} = -\frac{1}{2}ff_3, \quad \Gamma^3_{22} = f_2, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}f_3,$$

$$\Gamma^3_{14} = -\frac{1}{2}ff_4, \quad \Gamma^3_{24} = \frac{1}{2}f_4, \quad \Gamma^4_{11} = -ff_4, \quad \Gamma^4_{12} = \frac{1}{2}f_4.$$

Подстановка этих формул в уравнения (9.16) дает

$$C=0, \quad f=ax^2+\left[-2\left(\frac{da}{dx^1}+a^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} x^4, \tag{9.30}$$

где $a=a(x^1)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\frac{da}{dx^1}+a^2<0$. Полученная метрика

$$ds^2=-(f\,dx^1-dx^2)^2+2\,dx^1\,dx^3-(dx^4)^2 \tag{9.31}$$

с функцией $f(x)$ вида (9.30) определяет пространство V_4, удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна (9.15) и допускающее G_5 в качестве группы движений дефекта $\delta=1$. При произвольной функции $a(x^1)$ тензор кривизны отличен от нуля; например, $R^4_{141}=$ $=\frac{3}{2}\left(\frac{da}{dx^1}+a^2\right)$.

Метрика Шварцшильда дает пример особого инвариантного решения типа [0, 2 (2)], способ получения которого несколько отличается от описанного в § 4.3 общего алгоритма построения неособых инвариантных решений. В качестве группы изометрий выбирается группа G_3 трехмерных вращений. Операторы $X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-$ $-x^i\frac{\partial}{\partial x^j}$ $(i, j=1, 2, 3)$ этой группы удобно записать в сферических координатах (9.25) в виде

$$X_1=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad X_2=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$X_3=\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{9.32}$$

Формулы продолжения (6.24) дают:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1={}&X_1+y_{r\varphi}\sin^{-2}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y_{r\theta}}-\\&-(y_{r\theta}\cos\varphi-y_{r\varphi}\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{r\varphi}}+2y_{\theta\varphi}\sin^{-2}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y_{\theta\theta}}+\\&+(-y_{\theta\theta}\cos\varphi+y_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi+y_{\varphi\varphi}\sin^{-2}\theta\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\theta\varphi}}-\\&-2(y_{\theta\varphi}\cos\varphi-y_{\varphi\varphi}\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\varphi\varphi}}+y_{\varphi t}\sin^{-2}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y_{\theta t}}-\\&-(y_{\theta t}\cos\varphi-y_{\varphi t}\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\varphi t}},\end{aligned}$$

$$\tilde{X}_2 = X_2 - y_{r\varphi}\sin^{-2}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y_{r\theta}} + (y_{r\theta}\sin\varphi + y_{r\varphi}\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{r\varphi}} - 2y_{\theta\varphi}\sin^{-2}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y_{\theta\theta}} + (y_{\theta\theta}\sin\varphi + y_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi - y_{\varphi\varphi}\sin^{-2}\theta\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\theta\varphi}} + 2(y_{\theta\varphi}\sin\varphi + y_{\varphi\varphi}\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\varphi\varphi}} - y_{\varphi t}\sin^{-2}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y_{\theta t}} + (y_{\theta t}\sin\varphi + y_{\varphi t}\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial y_{\varphi t}},$$

$$\tilde{X}_3 = X_3.$$

Для этих операторов $r_*(\xi) = 2$, $r_*(\xi, \eta) = 3$, так что условие существования неособых инвариантных решений, имеющее вид $r_*(\xi) = r_*(\xi, \eta)$ (см. сноску в § 4.3), в данном случае не выполнено. Поэтому нужно рассматривать особые инвариантные решения, на которых в соответствии с определением особого инвариантного многообразия (Эйзенхарт [1], § 19) должно выполняться условие $r_*(\xi, \eta) < 3$. Для этого нужно приравнять нулю все миноры третьего порядка матрицы, составленной из коэффициентов операторов X_i $(i = 1, 2, 3)$. Из вида оператора X_3 ясно, что достаточно приравнять нулю миноры второго порядка матрицы, составленной из коэффициентов $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ с исключением коэффициентов при $\frac{\partial}{\partial\varphi}$. Например, условие

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi & y_{r\varphi}\sin^{-2}\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & -y_{r\varphi}\sin^{-2}\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

дает $y_{r\varphi} = 0$. Аналогично получаются остальные равенства следующих условий:

$$y_{r\theta} = y_{r\varphi} = y_{\theta\varphi} = y_{\theta t} = y_{\varphi t} = 0. \tag{9.33}$$

Из оставшегося уравнения

$$\begin{vmatrix} \sin\varphi & (-y_{\theta\theta} + y_{\varphi\varphi}\sin^{-2}\theta)\cos\varphi \\ \cos\varphi & (y_{\theta\theta} - y_{\varphi\varphi}\sin^{-2}\theta)\sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

следует равенство

$$y_{\varphi\varphi} = y_{\theta\theta}\sin^2\theta. \tag{9.34}$$

В силу формул (9.33), (9.34) многообразие (9.21) записывается в виде

$$y_{rr} = A, \quad y_{\theta\theta} = B, \quad y_{\varphi\varphi} = B\sin^2\theta, \quad y_{tt} = C, \quad y_{rt} = D \tag{9.35}$$

с произвольными функциями A, B, C, D от r, θ, φ, t. Из условия инвариантности (3.21) многообразия (9.35) относительно группы $\tilde{G}_3$ следует, что функции A, B, C, D зависят только от r и t.

Например, уравнения

$$\tilde{X}_1(y_{rr}-A)=-\sin\varphi\,\frac{\partial A}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\,\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0,$$

$$\tilde{X}_3(y_{rr}-A)=-\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0$$

дают $\frac{\partial A}{\partial\theta}=\frac{\partial A}{\partial\varphi}=0$. Полученный общий вид инвариантного решения совпадает с центрально-симметрической метрикой (9.24).

Решения, имеющие ранг $\rho=2$, представляют интерес с точки зрения теории солитонов и обсуждаются в работах: Harrison [1], Neugebauer [1], Neugebauer & Kramer [1], Maison [1, 2], Белинский, Захаров [1], Алексеев, Белинский [1], Cosgrove [1].

§ 10. Конформно-инвариантные уравнения второго порядка

10.1. Предварительные рассмотрения. Известно, что изучение линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$g^{ij}(x)\,u_{ij}+b^i(x)\,u_i+c(x)\,u=0,$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, удобно вести в терминах риманова пространства V_n, метрика которого определяется старшими коэффициентами g^{ij} (Адамар [1], Овсянников [2]). При таком геометрическом подходе к уравнениям второго порядка естественно записывать их в ковариантной форме

$$g^{ij}u_{,ij}+a^iu_i+cu=0,\quad a^i=b^i+g^{jk}\Gamma^i_{jk},$$

или

$$L[u]\equiv\Delta_2u+a^iu_i+cu=0,\tag{10.1}$$

где Δ_2u — дифференциальный параметр Бельтрами второго рода (6.17) в римановом пространстве V_n с метрикой (6.4). Этот геометрический подход эффективен также при исследовании групповых свойств более общих полулинейных уравнений (Ибрагимов [4]):

$$F[u]\equiv\Delta_2u+a^iu_i+\psi(x,\ u)=0.\tag{10.2}$$

Этот параграф посвящен в основном изучению уравнений (10.1) и (10.2), инвариантных относительно групп конформных движений в пространстве V_n. В следующей главе будут рассмотрены дополнительные свойства линейных конформно-инвариантных уравнений, связанные с принципом Гюйгенса. Краткие сведения о линейных уравнениях с максимальной группой изометрий из § 10.5 также используются при обсуждении принципа Гюйгенса.

Инфинитезимальный оператор

$$X=\xi^i(x,\ u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta(x,\ u)\frac{\partial}{\partial u}$$

группы, допускаемой уравнением (10.2), удовлетворяет условию

$$\underset{2}{X}F[u]=\lambda F[u], \tag{10.3}$$

где $\lambda=\lambda\left(x, u, \underset{1}{u}\right)$ — вообще говоря, произвольная функция. Так же, как и в случае линейных уравнений, доказывается, что

$$\lambda=\lambda(x, u), \quad \xi^i=\xi^i(x), \quad \eta=\sigma(x)u+\tau(x). \tag{10.4}$$

Поэтому в определяющее уравнение (10.3) нужно подставить оператор

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+[\sigma(x)u+\tau(x)]\frac{\partial}{\partial u}. \tag{10.5}$$

Формулы продолжения (4.8), (4.10) дают

$$\underset{1}{X}=X+\zeta_i\frac{\partial}{\partial u_i}, \quad \zeta_i=\sigma u_i-u_k\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}+u\sigma_i+\tau_i;$$

$$\underset{2}{X}=\underset{1}{X}+\zeta_{ij}\frac{\partial}{\partial u_{ij}}, \quad \zeta_{ij}=\sigma u_{ij}-\left(u_{ik}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}+u_{jk}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^i}\right)+$$
$$+u_i\sigma_j+u_j\sigma_i-u_k\frac{\partial^2\xi^k}{\partial x^i\partial x^j}+u\sigma_{ij}+\tau_{ij}.$$

После подстановки полученных выражений для координат оператора $\underset{2}{X}$ и приведения подобных членов уравнение (10.3) приводится к виду

$$\left(\xi^k\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}-g^{ik}\frac{\partial\xi^j}{\partial x^k}-g^{jk}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}+\sigma g^{ij}\right)u_{ij}+$$
$$+\left(2g^{ij}\sigma_j-g^{jk}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^k}-b^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+\sigma b^i+\xi^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j}\right)u_i+$$
$$+(g^{ij}\sigma_{ij}+b^i\sigma_i)u+X\psi+g^{ij}\tau_{ij}+b^i\tau_i=\lambda g^{ij}u_{ij}+\lambda b^iu_i+\lambda\psi,$$

где

$$b^i=a^i-g^{jk}\Gamma^i_{jk}.$$

Так как введение множителя λ в определяющее уравнение позволяет считать все переменные x^i, u, u_i, u_{ij} $(i\leqslant j)$ независимыми, то полученное равенство эквивалентно системе уравнений

$$\xi^k\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}-g^{ik}\frac{\partial\xi^j}{\partial x^k}-g^{jk}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}+\sigma g^{ij}=\lambda g^{ij}, \tag{10.6}$$

$$2g^{ij}\sigma_j-g^{jk}\frac{\partial^2\xi^i}{\partial x^j\partial x^k}-b^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+\sigma b^i+\xi^j\frac{\partial b^i}{\partial x^j}=\lambda b^i, \tag{10.7}$$

$$(g^{ij}\sigma_{ij}+b^i\sigma_i)u+X\psi+g^{ij}\tau_{ij}+b^i\tau_i=\lambda\psi. \tag{10.8}$$

Из (10.6) сразу следует, что $\lambda=\lambda(x)$. Используя обозначения,

$$\mu=\sigma-\lambda, \quad a_i=g_{ij}a^j, \quad K_{ij}=a_{i,j}-a_{j,i},$$

уравнения (10.6), (10.7) можно записать в ковариантной форме:

$$\mathfrak{L}g_{ij}=\mu g_{ij}, \tag{10.9}$$

$$\sigma_i=\frac{2-n}{4}\mu_i-\frac{1}{2}(a_j\xi^j)_i-\frac{1}{2}K_{ij}\xi^j. \tag{10.10}$$

Условия совместности уравнений (10.10)

$$\sigma_{,ij}=\sigma_{,ji}$$

дают дополнительную систему уравнений

$$(K_{il}\xi^l)_{,j}-(K_{jl}\xi^l)_{,i}=0. \tag{10.11}$$

Воспользовавшись тождеством

$$\Delta_2 u+a^i\sigma_i\equiv\xi^i E_i+\mu E,$$

где $E=-\frac{1}{2}\left(a^i_{,i}+\frac{1}{2}a^i a_i+\frac{n-2}{2(n-1)}R\right)$, R — скалярная кривизна пространства V_n, (10.8) можно переписать в виде

$$(\xi^i E_i+\mu E)u+(X+\mu-\sigma)\psi+\Delta_2\tau+a^i\tau_i=0. \tag{10.12}$$

Условия (10.9)—(10.12) образуют систему определяющих уравнений группы, допускаемой уравнением (10.2).

Пусть G — группа преобразований в пространстве переменных (x, u) с оператором (10.5), а G_x — ее сужение на переменные x, определяемое «усеченным» оператором

$$X_x=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{10.13}$$

Если G допускается уравнением (10.2), то инфинитезимальные операторы (10.13) удовлетворяют обобщенным уравнениям Киллинга (10.9) и, кроме того, некоторым дополнительным условиям (10.11) и (10.12). Таким образом, как и в случае линейных уравнений (Овсянников [2], § 28.2), справедлива следующая теорема (Ибрагимов [11]).

Теорема. *Сужение G_x группы G, допускаемой уравнением* (10.2), *является подгруппой группы конформных движений в пространстве V_n.*

Определение. Уравнение (10.2) называется *конформно-инвариантным*, если оно допускает группу G, сужение G_x которой совпадает с максимальной группой конформных движений в V_n.

Пусть старшие коэффициенты двух уравнений вида (10.2) удовлетворяют условиям разрешимости системы (6.2). Тогда этим уравнениям соответствует одно и то же V_n, и о них можно говорить как об уравнениях в римановом пространстве V_n. Уравнения (10.2) рассматриваются с точностью до замены координат

$$x'^i=f^i(x) \tag{10.14a}$$

в V_n, преобразований

$$u' = \alpha(x) u + \beta(x), \quad \alpha(x) \neq 0, \tag{10.14b}$$

переводящих V_n в конформное ему пространство, и

$$F'[u] = e^{-\nu(x)} F[ue^{\nu(x)}]. \tag{10.14c}$$

Уравнения, получающиеся друг из друга указанными преобразованиями, называются эквивалентными. В каждом пространстве V_n имеется по крайней мере одно конформно-инвариантное уравнение вида (10.1). В качестве него можно взять

$$\Delta u \equiv \Delta_2 u + \frac{n-2}{4(n-1)} Ru = 0. \tag{10.15}$$

Если V_n обладает достаточно широкой группой конформных движений, то, как будет показано ниже, (10.15) является единственным линейным конформно-инвариантным уравнением в V_n.

10.2. Линейные уравнения в S_n. Согласно теоремам 10.1 и 8.3 порядок группы, допускаемой уравнением вида (10.2), не превосходит числа $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, причем это значение достигается только для конформно-инвариантных уравнений в конформно-плоских пространствах V_n. Переход к конформному пространству с помощью преобразования (10.14b) позволяет ограничиться при этом рассмотрением плоского пространства S_n, а формальная замена вещественных координат на комплексные, использовавшаяся в § 8.3,—считать, что метрика пространства S_n положительно определена. Таким образом, для нахождения всех уравнений (10.2), допускающих группу максимального порядка $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, достаточно рассмотреть уравнения вида

$$\Delta u + a^i(x) u_i + \psi(x, u) = 0, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{ii}. \tag{10.16}$$

Группа, допускаемая линейным уравнением (10.1), содержит инвариантную подгруппу, порожденную операторами $X_0 = u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_\tau = \tau(x)\frac{\partial}{\partial u}$, где $\tau(x)$—решение уравнения (10.1). Беря фактор-группу по этой инвариантной подгруппе, операторы (10.5), допускаемые линейным уравнением, можно записать в виде

$$X = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sigma(x) u, \tag{10.17}$$

причем функция σ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Определяющие уравнения в этом случае претерпевают небольшие изменения: уравнения (10.9), (10.10) и (10.11) остаются прежними, а (10.12) принимает вид

$$\xi^i H_i + \mu H = 0, \tag{10.18}$$

где H — *инвариант Коттона* (Cotton [1]):

$$H \equiv E + c = -\frac{1}{2} a^i_{,i} - \frac{1}{4} a^i a_i - \frac{n-2}{4(n-1)} R + c. \tag{10.19}$$

Вопрос о линейных уравнениях с группой максимального порядка решает следующая теорема (Ибрагимов [4]).

Теорема. *Всякое конформно-инвариантное уравнение* (10.1) *в S_n приводится к уравнению Лапласа*

$$\Delta u = 0 \tag{10.20}$$

преобразованиями (10.14а), (10.14с). *Уравнение Лапласа инвариантно относительно $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$-параметрической группы, порожденной операторами*

$$\begin{aligned} &X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij} = x^j \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ &Y_i = (2x^i x^j - |x|^2 \delta^{ij}) \frac{\partial}{\partial x^j} + (2-n) x^i u \frac{\partial}{\partial u}, \\ &Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{2-n}{2} u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{10.21}$$

Доказательство. Среди уравнений

$$\Delta u + a^i(x) u_i + c(x) u = 0 \tag{10.22}$$

нужно выделить все конформно-инвариантные. Уравнения (10.9) в этом случае совпадают с (8.23), и их общее решение (8.24) дает операторы (8.25). Подстановка функций ξ^i из (8.24) в уравнения (10.11), (10.18) дает переопределенную систему уравнений для коэффициентов a^i и c.

Так как

$$(K_{il}\xi^l)_{,j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(K_{il}\xi^l) - K_{pl}\xi^l \Gamma^p_{ij}$$

и справедливы тождества

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial K_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial K_{li}}{\partial x^j} = 0,$$

то уравнения (10.11) можно переписать в виде

$$\mathfrak{L} K_{ij} \equiv \xi^l \frac{\partial K_{ij}}{\partial x^l} + K_{lj} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} + K_{il} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} = 0. \tag{10.11'}$$

Эти уравнения, записанные для операторов $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, дают $K_{ij} = \mathrm{const}$, и ввиду этого подстановка в (10.11′) координат $\xi^i = x^i$ оператора растяжения Z из (8.25) приводит к условию

$$K_{ij} = 0. \tag{10.23}$$

Поэтому

$$a_i = \frac{\partial \varphi (x)}{\partial x^i}.$$

Так как под действием (10.14с) величины a_i преобразуются по формуле $a'_i = a_i + 2\gamma_i$, то это преобразование эквивалентности с $\gamma = -\frac{1}{2}\varphi$ дает $a'_i = 0$. Поэтому в уравнении (10.22) можно положить $a^i = 0$.

Подстановка тех же операторов X_i (для них $\mu = 0$) и Z (для него $\mu \neq 0$) в уравнение (10.18) дает $H = 0$. Так как для уравнения (10.22) при $a^i = 0$ $H = c(x)$, то этим доказана первая часть теоремы.

Для нахождения операторов (10.17), допускаемых уравнением Лапласа, достаточно решить уравнения (10.10) для функции σ. Для операторов X_i, X_{ij} и Z из (8.25) $\mu = \text{const}$, и поэтому $\sigma = \text{const}$. Эту постоянную можно выбрать произвольно, так как функция $\sigma(x)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого. Удобно взять $\sigma = 0$ для операторов переноса и вращения и $\sigma = \frac{2-n}{2}$ для оператора растяжения. Для операторов Y_i уравнения (10.9) дают $\mu = 4x^i$, поэтому $\sigma = (2-n)x^i + \text{const}$.

10.3. Полулинейные уравнения в S_n. Предыдущая теорема переносится также на полулинейные уравнения.

Теорема. *Уравнение* (10.16) *конформно-инвариантно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно уравнению*

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ii} + a u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \quad a = \text{const}. \tag{10.24}$$

Это уравнение допускает группу с операторами (10.21).

Доказательство. Так как рассуждения, приводящие к равенствам (10.23), и в этом случае остаются в силе, то достаточно рассмотреть уравнение

$$\Delta u + \psi(x, u) = 0. \tag{10.25}$$

Равенство (10.12) для (10.25) имеет вид

$$\xi^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + (\sigma u + \tau)\frac{\partial \psi}{\partial u} + (\mu - \sigma)\psi + \Delta\tau = 0, \tag{10.12'}$$

а уравнения (10.9) и (10.10) дают следующий общий вид операторов (10.5) (операторы вращения пока не используются):

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + (\sigma^i u + \tau^i)\frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_i = (2x^i x^k - |x|^2 \delta^{ik})\frac{\partial}{\partial x^k} + [(\sigma^{n+i} + (2-n)x^i)u + \tau^{n+i}]\frac{\partial}{\partial u}, \tag{10.26}$$

$$Z = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (\sigma^0 u + \tau^0)\frac{\partial}{\partial u},$$

где σ^ν $(\nu=0, 1, \ldots, 2n)$ — произвольные постоянные, а τ^ν — произвольные функции от x.

Подстановка операторов (10.26) в уравнение (10.12′) дает

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+(\sigma^i u+\tau^i)\frac{\partial\psi}{\partial u}-\sigma^i\psi+\Delta\tau^i=0, \tag{10.27}$$

$$x^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+(\sigma^0 u+\tau^0)\frac{\partial\psi}{\partial u}+(2-\sigma^0)\psi+\Delta\tau^0=0, \tag{10.28}$$

$$(2x^ix^j-|x|^2\delta^{ij})\frac{\partial\psi}{\partial x^j}+[(\sigma^{n+i}+(2-n)x^i)u+\tau^{n+i}]\frac{\partial\psi}{\partial u}+$$
$$+[(2+n)x^i-\sigma^{n+i}]\psi+\Delta\tau^{n+i}=0 \quad (i=1, \ldots, n). \tag{10.29}$$

Уравнение (10.28), используя равенства (10.27), можно заменить на

$$\left[\sum_{i=1}^n x^i(\sigma^i u+\tau^i)-\sigma^0 u-\tau^0\right]\frac{\partial\psi}{\partial u}+\left(\sigma^0-2-\sum_{i=1}^n x^i\sigma^i\right)\psi+$$
$$+\sum_{i=1}^n x^i\Delta\tau^i-\Delta\tau^0=0. \tag{10.30}$$

Кроме того, (10.28) и (10.27) дают

$$(2x^ix^j-|x|^2\delta^{ij})\frac{\partial\psi}{\partial x^j}=[|x|^2(\sigma^i u+\tau^i)-2x^i(\sigma^0 u+\tau^0)]\frac{\partial\psi}{\partial u}+$$
$$+(2x^i(\sigma^0-2)-|x|^2\sigma^i)\psi+|x|^2\Delta\tau^i-2x^i\Delta\tau^0,$$

и равенства (10.29) заменяются на

$$[(|x|^2\sigma^i+(2-n-2\sigma^0)x^i+\sigma^{n+i})u+|x|^2\tau^i-2\tau^0x^i+\tau^{n+i}]\frac{\partial\psi}{\partial u}-$$
$$-(|x|^2\sigma^i+(2-n-2\sigma^0)x^i+\sigma^{n+i})\psi+|x|^2\Delta\tau^i-2x^i\Delta\tau^0+\Delta\tau^{n+i}=0. \tag{10.31}$$

Уравнения (10.30) и (10.31) удобно записать в виде

$$A\frac{\partial\psi}{\partial u}-(p+2)\psi+B=0, \tag{10.30′}$$

$$A^i\frac{\partial\psi}{\partial u}-p^i\psi+B^i=0 \quad (i=1, \ldots, n), \tag{10.31′}$$

где

$$A=pu+q, \quad A^i=p^iu+q^i,$$
$$B=\sum_{i=1}^n x^i\Delta\tau^i-\Delta\tau^0, \quad B^i=|x|^2\Delta\tau^i-2x^i\Delta\tau^0+\Delta\tau^{n+i}; \tag{10.32}$$

$$p=\sum_{i=1}^n x^i\sigma^i-\sigma^0, \quad p^i=|x|^2\sigma^i+(2-n-2\sigma^0)x^i+\sigma^{n+i},$$
$$q=\sum_{i=1}^n x^i\tau^i-\tau^0, \quad q^i=|x|^2\tau^i-2x^i\tau^0+\tau^{n+i}. \tag{10.33}$$

Можно считать $A \neq 0$, так как при $A=0$ уравнение (10.25) линейно. Действительно, если $A=0$, то из (10.32) и (10.30) следует $\psi=\frac{1}{2}B(x)$.

Удобно отдельно рассмотреть случаи, когда

1° $A^i=0$ $(i=1, \ldots, n)$,

2° $A^i \neq 0$ хотя бы для одного значения i.

В случае 1° согласно формулам (10.32) и уравнениям (10.31) выполняются равенства

$$p^i=0, \quad q^i=0, \quad B^i=0,$$

или

$$|x|^2\sigma^i+(2-n-2\sigma^0)x^i+\sigma^{n+i}=0, \tag{10.34}$$

$$|x|^2\tau^i-2x^i\tau^0+\tau^{n+i}=0, \tag{10.35}$$

$$|x|^2\Delta\tau^i-2x^i\Delta\tau^0+\Delta\tau^{n+i}=0. \tag{10.36}$$

Так как $\sigma^\nu=\text{const}$, уравнения (10.34) дают

$$\sigma^0=\frac{2-n}{2}, \quad \sigma^i=0, \quad \sigma^{n+i}=0. \tag{10.37}$$

Поэтому (10.27) и (10.30′) принимают вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^i}=-\frac{1}{A}\left(\frac{n+2}{2}\psi-B\right)\tau^i-\Delta\tau^i, \tag{10.38}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{1}{A}\left(\frac{n+2}{2}\psi-B\right). \tag{10.39}$$

Из условий совместности уравнений (10.38) и (10.39):

$$\left(\frac{n+2}{2}\psi-B\right)\left(\frac{n-2}{2}\tau^i+\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)+A\left(\frac{n+2}{2}\Delta\tau^i+\frac{\partial B}{\partial x^i}\right)=0$$

в случае нелинейной функции $\psi(x, u)$ получаются уравнения

$$\frac{n-2}{2}\tau^i+\frac{\partial q}{\partial x^i}=0 \tag{10.40}$$

и

$$\frac{n+2}{2}\Delta\tau^i+\frac{\partial B}{\partial x^i}=0$$

для функции τ^i. Введя обозначение

$$\varphi=\frac{2}{2-n}q, \tag{10.41}$$

уравнения (10.40) можно записать в виде

$$\tau^i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}. \tag{10.42}$$

Уравнения (10.41) и (10.42) дают

$$\Delta\varphi = \frac{2}{2-n}(2\Delta\varphi + x^i\Delta\tau^i - \Delta\tau^0),$$

откуда

$$x^i\Delta\tau^i - \Delta\tau^0 = -\frac{n+2}{2}\Delta\varphi.$$

Уравнение (10.39) принимает теперь вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{n+2}{n-2}\,\frac{\psi+\Delta\varphi}{u-\varphi},$$

общее решение которого дается формулой

$$\psi = a(x)(u-\varphi)^{\frac{n+2}{n-2}} - \Delta\varphi, \tag{10.43}$$

где $a(x)$ — произвольная функция. Подстановка формулы (10.43) в уравнения (10.38) дает

$$(u-\varphi)^{\frac{n+2}{n-2}}\cdot\frac{\partial a}{\partial x^i} = 0,$$

откуда $a = \mathrm{const}$. Таким образом, в случае 1° конформно-инвариантное уравнение (10.24) эквивалентно уравнению

$$\Delta u + a(u-\varphi)^{\frac{n+2}{n-2}} - \Delta\varphi = 0$$

с произвольной функцией $\varphi(x)$ и $a = \mathrm{const}$. Это уравнение преобразованием эквивалентности $u' = u - \varphi$ приводится к виду (10.24). Нетрудно проверить, что уравнение (10.24) допускает группу с операторами (10.21).

В случае 2° для определенности можно предположить $A^1 \neq 0$. Исключение $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ из уравнений (10.30′) и (10.31′) при $i=1$ дает

$$(A^1(p+2) - Ap^1)\psi + AB^1 - BA^1 = 0.$$

Из этого уравнения после дифференцирования по u с использованием (10.30′) и (10.31′) при $i=1$ следует, что

$$p^1\psi - B^1 = 0.$$

Поэтому уравнение (10.31′) дает $\psi = \psi(x)$. Следовательно, случай 2° приводит только к линейной функции ψ.

10.4. Уравнения с группой изометрий максимального порядка. Аналогично предыдущему можно описать все уравнения вида (10.2), инвариантные относительно группы изометрий в пространствах постоянной кривизны, и доказать следующее утверждение (Ибрагимов [4]).

Теорема. *Уравнение* (10.2) *в пространстве* V_n *постоянной кривизны инвариантно относительно группы изометрических движений в* V_n *тогда и только тогда, когда оно преобразованиями эквивалентности приводится к виду*

$$\Delta u+\varphi(u)=0, \tag{10.44}$$

где оператор Δ *определяется формулой* (10.15), *а* φ — *произвольная функция.*

Эта теорема дает, в частности, описание всех линейных уравнений (10.1), инвариантных относительно группы изометрий максимального порядка $\frac{1}{2}n(n+1)$. Они имеют вид

$$\Delta u+\lambda u=0, \qquad \lambda=\text{const}. \tag{10.45}$$

Если использовать риманову форму (8.14) метрики пространства V_n постоянной кривизны K, то уравнение (10.45) конкретизируется в виде уравнения (Овсянников [2])

$$\theta^2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i u_{ii}+\lambda u=0. \tag{10.46}$$

Переход к системе координат, приводящей метрику в V_n к форме (8.15), дает эквивалентное уравнение

$$|K|(x^{i_0})^2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i u_{ii}+\lambda u=0. \tag{10.47}$$

10.5. Волновое уравнение в лоренцевых пространствах. Согласно теореме 10.2 уравнение (10.15) является единственным (с точностью до преобразований эквивалентности (10.14)) линейным конформно-инвариантным уравнением в конформно-плоских пространствах V_n. В пространствах с тривиальной конформной группой подобное утверждение о единственности неверно. Действительно, пусть V_n — пространство с тривиальной конформной группой и $\tilde{V}_n$ — конформное ему пространство, в котором группы изометрий и конформных движений совпадают. Уравнение

$$\tilde{\Delta}u+\lambda u=0, \tag{10.48}$$

где $\tilde{\Delta}u$ определяется формулой (10.15) в пространстве $\tilde{V}_n$, а λ — произвольная постоянная, конформно-инвариантно в $\tilde{V}_n$. Это следует из того, что $K_{ij}=0$, $H=\lambda=\text{const}$, $\mu=0$, и поэтому уравнения (10.11), (10.18) выполнены. Соответствующее уравнение в V_n, полученное из (10.48) преобразованиями (10.14), конформно-инвариантно и при $\lambda\neq 0$ удовлетворяет условию $H\neq 0$. Это означает, что полученное уравнение не эквивалентно (10.15), так как для уравнения (10.15) $H=0$, а при преобразованиях эквивалентности (10.14) величина H может только умножаться на функцию, отличную от нуля.

В соответствии с § 8.4 теорему 10.2 можно рассматривать как утверждение о единственности конформно-инвариантного уравнения в пространствах V_n с определенной метрикой, имеющих нетривиальную группу конформных движений. В такой формулировке это утверждение переносится на лоренцевы пространства с нетривиальной конформной группой (Ибрагимов [11]).

Теорема. *В лоренцевом пространстве* V_n, $n \geqslant 4$, *с нетривиальной группой конформных движений линейное уравнение* (10.1) *конформно-инвариантно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно уравнению* (10.15).

Доказательство. Достаточно показать, что линейные конформно-инвариантные уравнения в лоренцевых пространствах V_n с нетривиальной конформной группой удовлетворяют условиям

$$K_{ij}=0, \quad H=0. \tag{10.49}$$

Теорема доказывается одинаково для любой размерности n, поэтому можно ограничиться случаем $n=4$ и в соответствии с теоремой 8.5 рассмотреть уравнения (10.1) со старшими коэффициентами (8.32).

Из операторов (8.31) группы конформных движений в V_4 здесь будут использоваться только X_l $(l=1,\ 2,\ 3)$ и Z. Удобно перейти к координатам

$$x'^1=x^1+x^0, \quad x'^2=x^2, \quad x'^3=x^3, \quad x'^4=x^1-x^0$$

и записать эти операторы в виде

$$X_l=\frac{\partial}{\partial x'^l}, \quad Z=2x'^1\frac{\partial}{\partial x'^1}+x'^2\frac{\partial}{\partial x'^2}+x'^3\frac{\partial}{\partial x'^3}.$$

Подстановка координат операторов X_l в (10.11) дает $K_{ij}=K_{ij}(x'^4)$, после чего уравнение (10.11) для оператора Z принимает вид

$$2(K_{1j}\delta_i^1+K_{i1}\delta_j^1)+\sum_{\alpha=2}^{3}(K_{\alpha j}\delta_i^\alpha+K_{i\alpha}\delta_j^\alpha)=0,$$

или

$$2K_{ij}+K_{1j}\delta_i^1+K_{i1}\delta_j^1-K_{4j}\delta_i^4-K_{i4}\delta_j^4=0.$$

Отсюда следует, что $K_{ij}=0$. Уравнение (10.18), записанное для операторов X_l (для них из (10.9) следует $\mu=0$), дает $H=H(x'^4)$. Поэтому (10.18) для оператора Z принимает вид $\mu H=0$, откуда $H=0$, так как $\mu\neq 0$ для Z. Следовательно, условия (10.49) выполнены и теорема доказана.

Для изучения конформно-инвариантных уравнений полезна следующая формула перехода от операторов Δ в V_n к соответствующему оператору $\tilde{\Delta}$ в конформном к V_n пространстве $\tilde{V}_n$. Если $g_{ij}(x)$ и

$\tilde{g}_{ij}(x)=e^{2\sigma(x)}g_{ij}(x)$—метрические тензоры пространств V_n и $\tilde{V}_n$ соответственно, то

$$\tilde{\Delta}u=e^{-\frac{n+2}{2}\sigma}\Delta\left(ue^{\frac{n-2}{2}\sigma}\right). \qquad (10.50)$$

Действительно,

$$e^{-\frac{n+2}{2}\sigma}\Delta\left(ue^{\frac{n-2}{2}\sigma}\right)=e^{-\frac{n+2}{2}\sigma}g^{ij}\left(ue^{\frac{n-2}{2}\sigma}\right)_{,ij}+\frac{n-2}{4(n-1)}e^{-2\sigma}Ru=$$
$$=e^{-2\sigma}g^{ij}\Big[u_{ij}+(n-2)u_i\sigma_j+\frac{1}{2}(n-2)u\sigma_{ij}+\frac{1}{4}(n-2)^2u\sigma_i\sigma_j-$$
$$-\Gamma^k_{ij}u_k-\frac{1}{2}(n-2)u\Gamma^k_{ij}\sigma_k\Big]+\frac{n-2}{4(n-1)}e^{-2\sigma}Ru.$$

С помощью формул (8.2) правая часть этого равенства переписывается в виде

$$\tilde{g}^{ij}\Big[u_{ij}-\tilde{\Gamma}^k_{ij}u_k+nu_i\sigma_j-\tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{kl}u_k\sigma_l+$$
$$+\frac{1}{2}(n-2)u\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(n-2)\sigma_i\sigma_j-\tilde{\Gamma}^k_{ij}\sigma_k+2\sigma_i\sigma_j-\tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{kl}\sigma_l\sigma_k\right)\Big]+$$
$$+\frac{n-2}{4(n-1)}[\tilde{R}-2(n-1)\tilde{g}^{ij}(\sigma_{ij}-\tilde{\Gamma}^k_{ij}\sigma_k)+(n-1)(n-2)\tilde{g}^{ij}\sigma_i\sigma_j]u.$$

Так как это выражение равно

$$\tilde{g}^{ij}(u_{ij}-\tilde{\Gamma}^k_{ij}u_k)+\frac{n-2}{4(n-1)}\tilde{R}u\equiv\tilde{\Delta}u,$$

то равенство (10.50) доказано.

Подобно линейному уравнению (10.15) обобщение

$$\Delta_{(a)}u\equiv g^{ij}u_{,ij}+\frac{n-2}{4(n-1)}Ru+au^{\frac{n+2}{n-2}}=0, \quad a=\text{const}, \qquad (10.51)$$

нелинейного уравнения (10.24) на произвольное риманово пространство конформно-инвариантно для любого пространства V_n. Инфинитезимальные операторы группы, допускаемой уравнением (10.51), имеют вид (10.17) с функцией $\sigma=\frac{2-n}{4}\mu$, где величина μ определяется из уравнений (10.9). Операторы $\Delta_{(a)}$ в конформных друг другу пространствах связаны также равенством (10.50).

Линейное конформно-инвариантное уравнение (10.15) в пространстве V_n гиперболического типа естественно называть *волновым уравнением* в V_n, обобщающим классическое волновое уравнение на произвольные лоренцевы пространства (этот вопрос неоднократно обсуждался с разных точек зрения; см., например, Эддингтон [1], стр. 116, Pauli [1], Penrose [1], Ибрагимов [6]). Теорема 10.5 выделяет уравнение (10.15) по ее алгебро-геометрическим свойствам. Другое важное свойство этого уравнения, связанное с принципом Гюйгенса, подчеркивает его физическое значение.

ГЛАВА 2

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА С ГРУППОВОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

§ 11. Общие рассмотрения и история вопроса

11.1. Проблема Адамара. Исторически принцип Гюйгенса возник в связи с задачами оптики. Первоначально сформулированный Христианом Гюйгенсом [1] как геометрический способ построения фронта волны, он служил для объяснения основных свойств распространения света. В своих основополагающих работах, посвященных изучению волновых уравнений, Kirchhoff [1], Beltrami [1, 2], Volterra [1] осветили математические аспекты принципа Гюйгенса. Следует отметить, что долгое время в понятие принципа Гюйгенса вкладывался различный смысл. Окончательную ясность внес Адамар, исследования которого (Hadamard [1—4]) привели к современному пониманию математической природы принципа Гюйгенса и послужили стимулом для дальнейшего развития этого направления.

Здесь принцип Гюйгенса будет отождествляться с утверждением о существовании заднего фронта волны, вызванной локализованным в пространстве и во времени источником (принцип Гюйгенса в «узком смысле» по терминологии Адамара [1], п. 33); в этом случае говорят также о распространении волн без диффузии. Для классического волнового уравнения в трехмерном пространстве принцип Гюйгенса означает, что значение решения произвольной задачи Коши в точке $P=(t, x_0, y_0, z_0)$ определяется значениями начальных данных и их производных только на поверхности сферы в пространстве переменных x, y, z радиуса t с центром в точке (x_0, y_0, z_0); другими словами, решение в точке P зависит от начальных данных только на пересечении начального многообразия $t=0$ с характеристическим конусом, выходящим из точки P. Принцип Гюйгенса справедлив также для волнового уравнения с любым нечетным числом пространственных переменных, не меньшим трех. Это непосредственно следует из формулы Пуассона в случае трех пространственных переменных и представления решения, данного Tedone [1], в общем случае.

Для общего линейного гиперболического уравнения второго порядка

$$L[u] \equiv g^{ij}(x)\, u_{ij} + b^i(x)\, u_i + c(x)\, u = 0 \tag{11.1}$$

принцип Гюйгенса формулируется так же, как для волного уравнения с заменой характеристического конуса на характеристический коноид. Пусть для уравнения (11.1) с $n+1$ независимыми переменными $x=(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ рассматривается задача Коши:

$$L[u]=0, \quad u|_M=f, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_M=g. \tag{11.2}$$

Здесь M — пространственно-подобное многообразие размерности n, называемое *начальным многообразием*, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная в направлении нормали ν к M. Так как в этой главе изучаются только уравнения гиперболического типа, то пространство V_{n+1}, связанное с уравнением (11.1), является лоренцевым. Нужно также иметь в виду, что в дальнейшем изложении речь идет о локальном решении задачи Коши, и поэтому можно ограничиться рассмотрением такой области $U \subset V_{n+1}$, в которой любые две точки соединяются единственной геодезической (в метрике пространства V_{n+1}), полностью лежащей в U. Из теории Адамара [1] следует, что для произвольного уравнения (11.1) решение задачи Коши (11.2) в точке $x_0 \in V_{n+1}$ определяется значениями начальных данных на части M_0 многообразия M, заключенной внутри характеристического коноида с вершиной в точке x_0.

Определение. Если решение задачи Коши (11.2) с произвольными начальными данными зависит в каждой точке x_0 от начальных данных только на пересечении начального многообразия M с характеристическим коноидом с вершиной в точке x_0 (т. е. на границе M_0), то говорят, что *уравнение* (11.1) *удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Задача отыскания всех уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, известна в литературе как *проблема Адамара.* Она до настоящего времени полностью не решена. При исследовании этой задачи наиболее значительных результатов достигли Hadamard [1, 5, 6], Mathisson [1], Åsgeirsson [1], Stellmacher [1, 2], Günther [1, 2].

11.2. Критерий Адамара. Как показал Адамар [1, 5], принцип Гюйгенса не выполняется для уравнений (11.1) при всех четных n и при $n=1$ *). В случае нечетных $n \geqslant 3$ Адамар [1] получил следующий критерий справедливости принципа Гюйгенса в терминах элементарного решения сопряженного к (11.1) уравнения

$$L^*[v] \equiv (g^{ij}v)_{ij}-(b^iv)_i+cv \equiv g^{ij}v_{ij}+b^{*i}v_i+c^*v=0. \tag{11.3}$$

*) Уравнения с двумя независимыми переменными, которые рассмотрел Hornich [1] в качестве уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, имеют особенности на начальном многообразии. Поэтому для них задача Коши с произвольными начальными данными не разрешима и, следовательно, принцип Гюйгенса в указанном выше смысле не выполняется.

Пусть элементарное решение (в смысле Адамара) уравнения (11.3) *при нечетном* $n \geqslant 3$ *с «полюсом» в точке* x_0 *имеет вид*

$$v_0(x) = V(x_0, x)\,\Gamma^{\frac{1-n}{2}} - W(x_0, x)\log\Gamma, \tag{11.4}$$

где $V(x_0, x)$, $W(x_0, x)$ — *аналитические по переменной точке* x *функции,* $\Gamma = \Gamma(x_0, x)$ — *квадрат геодезического расстояния между точками* x_0, $x \in V_{n+1}$. *Для того чтобы уравнение* (11.1) *удовлетворяло принципу Гюйгенса, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$W(x_0, x) = 0 \tag{11.5}$$

для всех точек x_0, x.

Ниже мы применим этот критерий в случае $n=3$. При этом удобно переписать равенство (11.5) более подробно, используя формулу Адамара [1] (Книга II, глава III)

$$V(x_0, x) = \exp\left[-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}\left(L^*[\Gamma] - c^*\Gamma - 8\right)\frac{ds}{s}\right] \tag{11.6}$$

для коэффициента V в элементарном решении (11.4). Здесь интегрирование ведется вдоль геодезической, соединяющей точки x_0 и x, а $\Gamma(x_0, x)$ рассматривается как функция переменной точки x. Из общей теории Адамара [1] (Книга IV, глава I) следует, что условие (11.5) выполняется тогда и только тогда, когда $V(x_0, x)$ как функция от x удовлетворяет сопряженному уравнению (11.3) для всех точек x, лежащих на характеристическом коноиде с вершиной x_0. Так как этот коноид задается уравнением

$$\Gamma(x_0, x) = 0, \tag{11.7}$$

то критерий Адамара справедливости принципа Гюйгенса для уравнения (11.1) в случае четырех независимых переменных можно записать в виде следующего уравнения для функции (11.6):

$$L^*[V]\,|_{\Gamma(x_0, x)=0} = 0; \tag{11.8}$$

это уравнение должно выполняться для всех точек x_0 некоторого открытого множества риманова пространства V_4.

11.3. Теорема Матиссона — Асгейрссона. В связи с проблемой Адамара возникает вопрос: существуют ли кроме обычных волновых уравнений с нечетным числом $n \geqslant 3$ пространственных переменных другие гиперболические уравнения вида (11.1), удовлетворяющие принципу Гюйгенса? Первый важный результат в этом направлении получили Mathisson [1] и Ásgeirsson [1] *).

*) Хотя Асгейрссон опубликовал свою работу значительно позже, оба автора получили этот результат примерно одновременно; см. об этом Douglis [1] и цитированную работу Асгейрссона.

Они показали, что при $n=3$ в случае уравнений с постоянными старшими коэффициентами g^{ij} на поставленный выше вопрос нужно ответить отрицательно. Учитывая, что преобразования эквивалентности (10.14) не влияют на выполнение принципа Гюйгенса, теорему Матиссона—Асгейрссона можно сформулировать в следующем виде.

Теорема. *Если уравнение* (11.1) *в конформно-плоском пространстве* V_4 *гиперболического типа удовлетворяет принципу Гюйгенса, то оно эквивалентно классическому волновому уравнению*

$$\square\ u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial \xi^i)^2}\right) u = 0. \qquad (11.9)$$

Для доказательства этой теоремы Матиссон использовал приближенное решение—параметрикс Гильберта; задача сводилась при этом к тому, чтобы найти условия, при которых параметрикс является точным решением. Асгейрссон применил другой метод, предложенный Beltrami [1] в связи с обсуждением принципа Гюйгенса для уравнения (11.9). Этот метод использует только специальное свойство линейного дифференциального оператора L, удовлетворяющего принципу Гюйгенса, а не конкретное представление решения. В случае уравнения (11.9) это свойство состоит в том, что волновой оператор $\square$ удовлетворяет тождеству Бельтрами

$$-\frac{1}{r}\square = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{x^i - x_0^i}{r^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x^i - x_0^i}{r^3}\right) \qquad (11.10)$$

на характеристическом конусе

$$C\colon\ (t-t_0)^2 - r^2 = 0,$$

где

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i - x_0^i)^2, \qquad \xi^i = x^i - x_0^i.$$

Это тождество достаточно рассматривать на «нижней» половине

$$C^-\colon\ t - t_0 + r = 0$$

характеристического конуса. После параметризации C^- уравнениями

$$x^i = x_0^i + \xi^i, \qquad t = t_0 - \left[\sum_{i=1}^{3} (\xi^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

дифференцирование по ξ^i в правой части (11.10) выполняется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{x^i - x_0^i}{r}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Дивергентный вид правой части тождества (11.10) объясняет выполнение принципа Гюйгенса для волнового уравнения. Кроме того, если применить это тождество к решениям уравнения (11.9), то после интегрирования по части конуса C^-, отсекаемой начальным многообразием, с использованием теоремы Гаусса—Остроградского и стандартного метода выделения сингулярности при вершине конуса получается формула для решения задачи Коши для уравнения (11.9). Обобщая идею Бельтрами, Асгейрссон показал, что тождество типа (11.10) справедливо для любого уравнения (11.1) с $n=2m+1$, удовлетворяющего принципу Гюйгенса. Это тождество имеет вид

$$RL=\sum_{i=1}^{2m+1}\frac{\partial}{\partial\xi^i}A^i \tag{11.11}$$

и выполняется на характеристическом полуконоиде C^- (для рассматриваемого уравнения (11.1)) с некоторой параметризацией $\{\xi^i\}$. Здесь R — линейные дифференциальный оператор порядка $m-1$, а A^i — линейный дифференциальные операторы порядка $\leqslant m$. При этом существование операторов R и A^i, удовлетворяющих указанному тождеству, необходимо, но не достаточно для выполнения принципа Гюйгенса. Так как любое уравнение (11.1) в конформно-плоском пространстве V_4 гиперболического типа с помощью подходящих преобразований эквивалентности (10.14) можно привести к виду

$$\Box u+a^iu_i+cu=0, \tag{11.12}$$

то при доказательстве теоремы достаточно рассмотреть уравнения (11.12) с произвольными переменными коэффициентами a^i, c. Асгейрссон показал, что для существования тождества вида (11.11) коэффициенты уравнения (11.12) должны удовлетворять равенствам (10.49). Это доказывает теорему, так как всякое уравнение (11.12), удовлетворяющее условиям (10.49), эквивалентно волновому уравнению (Cotton [1]; см. также доказательство теоремы 10.2).

Еще одно доказательство теоремы Матиссона—Асгейрссона дал Hadamard [6]. Он исходил из критерия (11.8), который для уравнения (11.12) имеет особенно простой вид ввиду того, что в этом случае квадрат геодезического расстояния является простой квадратичной формой. Нетрудно убедиться, что всякое уравнение (11.12) с помощью некоторого преобразования (10.14c) можно привести к такому уравнению (имеющему, очевидно, также вид (11.12) с преобразованными коэффициентами $\bar{a}^i$, $\bar{c}$), для которого функция $V(x_0, x)$, определенная формулой (11.6), будет равна 1. Подстановка функции

$$V(x_0,\ x)=1 \tag{11.13}$$

в равенство (11.8) с учетом инвариантности величины H относительно преобразования (10.14c) сразу дает равенство $H=0$ в качестве первого необходимого условия справедливости принципа Гюйгенса для уравнений вида (11.12). Затем из (11.13), (11.6) и (11.8) путем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 получаются равенства $K_{ij}=0$, т. е. все условия (10.49).

11.4. Необходимые условия Гюнтера и Макленагана. Здесь снова рассматриваются уравнения с четырьмя независимыми переменными. Хотя в этом случае критерий Адамара (11.8) дает описание всех уравнений (11.1), удовлетворяющих принципу Гюйгенса, но он сложен и не достаточно эффективен при исследовании уравнений с произвольными переменными старшими коэффициентами. Это связано с тем, что в соответствии с формулой (11.6) для применения критерия Адамара нужно явно найти или же достаточно детально описать квадрат геодезического расстояния Г в рассматриваемом римановом пространстве V_4. В некоторых вопросах бывает достаточно вместо общего критерия использовать более простые необходимые условия выполнения принципа Гюйгенса, как это было, например, при доказательстве теоремы Матиссона—Асгейрссона. Ряд простых необходимых условий, имеющих тензорный характер, получили Günther [1] и McLenaghan [2] для произвольных уравнений вида (11.1) с $n=3$.

Гюнтер получил следующие четыре условия на коэффициенты уравнений (11.1), удовлетворяющих принципу Гюйгенса:

$$H=0, \tag{11.14}$$

$$g^{jl}K_{ij,\,l}=0, \tag{11.15}$$

$$g^{pq}\left[R_{jip,\,q}+C^m_{ijp}L_{mq}\right]=\frac{5}{2}g^{pq}\left[K_{ip}K_{jq}-\frac{1}{4}g_{ij}g^{ml}K_{pm}K_{ql}\right], \tag{11.16}$$

$$\frac{3}{2}g^{pq}R_{(ijp}K_{l)q}+g^{pq}C^m_{(ijp}K_{l)q,\,m}=\lambda_{(i}g_{jl)}. \tag{11.17}$$

Здесь использованы прежние обозначения (см. формулы (10.19), (8.17) и (8.18)):

$$H=c-\frac{1}{2}a^i_{,\,i}-\frac{1}{4}a^ia_i-\frac{1}{6}R,\quad K_{ij}=a_{i,\,j}-a_{j,\,i},$$

$$L_{ij}=-R_{ij}+\frac{1}{6}Rg_{ij},\quad R_{ijp}=L_{ip,\,j}-L_{ij,\,p}.\text{*})$$

В уравнениях (11.17) λ_i—произвольный вектор, а круглыми скобками обозначена стандартная операция симметризации по индексам i, j, l; например, $\lambda_{(i}g_{jl)}=\frac{1}{3!}\sum\lambda_ig_{jl}$ с суммированием по всем перестановкам индексов i, j, l. В выражениях типа $g^{pq}R_{(ijp}K_{l)q}$ индекс суммирования p не участвует в процессе симметризации.

*) В работах Гюнтера и Макленагана вместо R_{ijp} используется тензор $S_{ijp}=-\frac{1}{2}R_{pji}$.

Вектор λ_i можно исключить из уравнений (11.17) путем преобразования тензоров в симметричные тензоры с нулевым следом. Говорят, что симметричный тензор $t_{i_1 \dots i_r}$ в римановом пространстве V_m с метрическим тензором g_{ij} имеет нулевой след, если $g^{kl} t_{kli_1 \dots i_{r-2}} = 0$. Любой тензор можно превратить в симметричный тензор с нулевым следом. Например, при $m=4$ и $r=2, 3, 4$ преобразование T симметричного тензора $t_{i_1 \dots i_r}$ в симметричный тензор $T\{t_{i_1 \dots i_r}\}$ с нулевым следом определяется следующими формулами:

$$T\{t_{ij}\} = t_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} \operatorname{Sp} t, \qquad \operatorname{Sp} t = g^{pq} t_{pq}; \tag{11.18}$$

$$T\{t_{ijk}\} = t_{ijk} - \frac{1}{4} g_{(ij} [\operatorname{Sp} t]_{k)}, \qquad [\operatorname{Sp} t]_k = 2 g^{pq} t_{pqk}; \tag{11.19}$$

$$T\{t_{ijkl}\} = t_{ijkl} - \frac{1}{4} g_{(ij} [\operatorname{Sp} t]_{kl)}, \qquad [\operatorname{Sp} t]_{kl} = 3 g^{pq} t_{pqkl} - \\ - \frac{1}{4} g_{kl} g^{pq} g^{rs} t_{pqrs}. \tag{11.20}$$

Пользуясь преобразованием (11.19) и принимая во внимание, что $T\{\lambda_{(i} g_{jl)}\} = 0$ для любого вектора λ_i, равенства (11.17) можно переписать в виде

$$T\left\{\frac{3}{2} g^{pq} R_{(ijp} K_{l)q} + g^{pq} C^m_{(ijp} K_{l)q,m}\right\} = 0. \tag{11.17'}$$

McLenaghan [2] дополнил четыре необходимых условия (11.14)—(11.17) следующим пятым условием:

$$TS\{3g^{rs} C_{pijq,r} C^p{}_{kl,s}{}^q - 4C^p{}_{kl}{}^q{}_{,k} R_{lqp} + 10 R^p_{ij} R_{pkl} + \\ + 4C^p{}_{ij}{}^q R_{kqp,l} + 12 C^p{}_{ij}{}^q R_{pkl,q} + 4C^p{}_{ij}{}^q C_q{}^r{}_{kp} K_{lr} + \\ + 12 C^p{}_{ij}{}^q C^r_{klq} K_{pr} + 12 K_{pi,jk} K^p_l - 16 K_{pi,j} K^p_{k,l} - \\ - 84 C_{pjkq} K^p_i K^q_l - 18 K_{pi} K^p_j L_{kl}\} = 0. \tag{11.21}$$

Здесь символом S обозначена симметризация произвольного тензора и использованы обычные тензорные операции перемещения индексов из верхнего положения в нижнее и обратно с помощью метрического тензора. Все необходимые условия (11.14)—(11.17), (11.21), как и общий критерий справедливости принципа Гюйгенса, инвариантны относительно преобразований эквивалентности уравнения (11.1).

При дополнительном предположении $R_{ij} = 0$ уравнение (11.21) упрощается и принимает вид

$$TS\{g^{rs} R_{pijq,r} R^p{}_{kl}{}^q{}_{,s}\} = 0, \tag{11.22}$$

так как в этом случае $C^m_{ijk} = R^m_{ijk}$, а тензоры L_{ij} и $R_{ij,k}$ равны нулю, в силу чего равенства (11.16) дают $K_{ij} = 0$. Дальнейший анализ показывает (McLenaghan [1], § 5), что условие (11.22) характеризует пустые ($R_{ij} = 0$) пространства V_4, обладающие нетривиальной группой конформных движений: метрика каждого пространства V_4 гиперболического типа, удовлетворяющего условиям $R_{ij}=0$ и (11.22), приводится к виду (8.30). Ввиду инвариантности принципа Гюйгенса относительно перехода к конформному пространству это означает, что всякое пространство V_4, которое комформно пустому пространству и в котором существует уравнение вида (11.1), удовлетворяющее принципу Гюйгенса, обладает нетривиальной конформной группой. Поэтому анализ уравнений в пространствах V_4 с нетривиальной конформной группой позволяет перенести теорему Матиссона—Асгейрссона на конформно-пустые пространства.

11.5. Преобразование Лагнеза — Штельмахера. Первый пример уравнения, удовлетворяющего принципу Гюйгенса и не приводимого преобразованиями (10.14) к волновому уравнению, построил Stellmacher [1]. Он исходил из уравнения

$$(\Box_6+c)u\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}+c\right)u=0 \qquad (11.23)$$

с произвольным переменным коэффициентом $c=c(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^5)$ и показал, что наряду с тривиальным случаем $c=0$ принцип Гюйгенса выполняется при следующих двух значениях коэффициента c:

$$c=-\frac{2}{t^2},\quad c=\frac{2}{(x^1)^2}. \qquad (11.24)$$

Уравнения (11.23), соответствующие (11.24), не эквивалентны между собой и не приводятся к вол овому уравнению; последнее обстоятельство очевидно, так как инвариант Коттона (10.19) для уравнений вида (11.23) совпадает с коэффициентом c, и поэтому в случаях (11.24) не выполняется второе из условий (10.49). Оказалось, что при $c\neq 0$ всякое уравнение (11.23), удовлетворяющее принципу Гюйгенса, приводится к одному из случаев (11.24).

Позже Stellmacher [2] обобщил свой пример на произвольные нечетные n, рассмотрев уравнения

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\lambda_0}{t^2}\,u\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2}+\frac{\lambda_i}{(x^i)^2}\,u\right)=0 \qquad (11.25)$$

с параметрами λ_k. Условие выполнения принципа Гюйгенса имеет вид

$$\lambda_k=-p_k(p_k+1),\quad p_k=0,\ 1,\ \ldots;\quad \sum_{k=0}^{n}p_k\leqslant\frac{n-3}{2} \qquad (11.26)$$

и при $n=3$ согласуется с теоремой Матиссона—Асгейрссона. Ввиду симметрии рассматриваемых уравнений относительно переменных t и x^i достаточно рассмотреть случай одного параметра λ_0. Тогда пример Штельмахера представляет собой специальное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\left(\Box_{n+1}-\frac{p(p+1)}{t^2}\right)u=0, \qquad p=0,\ 1,\ \ldots, \tag{11.27}$$

удовлетворяющее условиям: $n\geqslant 3$ нечетно, $p\leqslant\frac{n-3}{2}$. Здесь

$$\Box_{n+1}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_n, \quad \Delta_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}.$$

Уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\left(\Box_{n+1}+\frac{\lambda}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)u=0,$$

эквивалентное (11.27) при соответствующих значениях параметра λ, изучалось с точки зрения сингулярной задачи Коши (см. Weinstein [1, 2], Diaz & Weinberger [1]):

$$u(x,\ 0)=f(x), \quad u_t(x,\ 0)=0.$$

Использованное при этом соотношение $u^{(\lambda)}=t^{1-\lambda}u^{(2-\lambda)}$ между решениями $u^{(\lambda)}(x,\ t)$ и $u^{(2-\lambda)}(x,\ t)$, соответствующими значениям параметра λ и $2-\lambda$, позволяет получать нетривиальные уравнения, удовлетворяющие принципу Гюйгенса, но только в случае сингулярной задачи. Более общий метод построения уравнений специального вида, удовлетворяющих принципу Гюйгенса, предложили Lagnese & Stellmacher [1]. Суть метода состоит в следующем.

Рассматриваются операторы

$$L_{n+1}=\Delta_n-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c(t)\right) \tag{11.28}$$

с гладким коэффициентом $c(t)$. Подстановка $b=\frac{\mu'}{\mu}$, где $\mu=\mu(t)$ — ненулевое решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\mu''+c(t)\mu=0 \qquad \left(\mu'=\frac{d\mu}{dt}\right), \tag{11.29}$$

реализует разложение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c=\left(\frac{\partial}{\partial t}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-b\right)\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b'-b^2.$$

Линейные дифференциальные операторы первого порядка, участвующие в этом разложении, обозначаются l, l^*:

$$l=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\mu'}{\mu}, \quad l^*=-\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\mu'}{\mu}, \tag{11.30}$$

и оператор (11.28) записывается в виде

$$L_{n+1}=\Delta_n+l^*l. \tag{11.31}$$

Вместе с (11.31) рассматривается оператор

$$\tilde{L}_{n+1} = \Delta_n + ll^*, \tag{11.32}$$

который также имеет вид (11.28) с коэффициентом $\tilde{c}(t)$, определяемым из равенства

$$ll^* = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + c(t) + 2\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2. \tag{11.33}$$

Из (11.31) и (11.32) следует коммутационное соотношение

$$lL_{n+1} = \tilde{L}_{n+1} l. \tag{11.34}$$

Из (11.29) и (11.33) видно, что совпадение операторов L_{n+1} и $\tilde{L}_{n+1}$ (т. е. коммутативность l и l^*) возможно только при $c(t) = \mathrm{const}$. Значение преобразования Лагнеза—Штельмахера $L_{n+1} \mapsto \tilde{L}_{n+1}$ выясняет следующее утверждение (Lagnese & Stellmacher [1], теорема 1):

Если оператор L_{n+1} (или, что то же самое, соответствующее уравнение $L_{n+1}u = 0$) удовлетворяет принципу Гюйгенса, то этим свойством обладает также оператор $\tilde{L}_{n+3}$.

Рассмотрим частный случай $n = 3$ и $L_4 = -\Box_4$. Уравнение (11.29) имеет общее решение $\mu = k_1 t + k_2$. При $k_1 = 0$ теорема Лагнеза—Штельмахера приводит к волновому уравнению с пятью пространственными переменными, а при $k_1 \neq 0$ — к оператору $\tilde{L}_6 = \Delta_5 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2(t+k)^{-2}$, $k = \frac{k_2}{k_1}$, который после замены $t \mapsto t + k$ дает уравнение Штельмахера (11.23) с коэффициентом $c = -\frac{2}{t^2}$. Это верно для любого значения n: исходя из волнового оператора $L_{n+1} = -\Box_{n+1}$ и пользуясь формулами (11.32), (11.33), можно получить уравнения (11.27) с $p = 0$ и $p = 1$. Остальные из уравнений (11.27) получаются последовательным применением этой процедуры. Действительно, для $c(t) = -\frac{p(p+1)}{t^2}$ уравнению (11.29) удовлетворяет функция $\mu = t^{p+1}$, и формулы (11.32), (11.33) осуществляют необходимое преобразование

$$\Box_{n+1} - \frac{p(p+1)}{t^2} \mapsto \tilde{L}_{n+1} = \Box_{n+1} - \frac{(p+1)(p+2)}{t^2}.$$

Таким образом, все упомянутые выше примеры Штельмахера при произвольном нечетном $n \geqslant 5$ можно получить по теореме Лагнеза—Штельмахера, исходя из волнового уравнения (11.9). Однако эта теорема позволяет построить также новые примеры уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса. Например, если в качестве исходного оператора L_{n+1} взять

$$L_{n+1} = \Delta_n - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{t^2}\right) \tag{11.35}$$

с произвольным нечетным $n \geqslant 5$ и подставить в формулу (11.33) общее решение $\mu = k_1 t^2 + k_2 t^{-1}$ соответствующего уравнения (11.29), то

$$\tilde{L}_{n+1} = \Delta_n - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{6t\,(t^3 - 2k)}{(t^3 + k)^2}\right), \quad k = \frac{k_2}{k_1}.$$

Постоянную k можно исключить (например, положить $k = -1$, если $k \neq 0$) с помощью подходящих преобразований (10.14). Следовательно, оператор

$$L_{n+3} = \Delta_{n+2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{6t\,(2 + t^3)}{(1 - t^3)^2}\right) \tag{11.36}$$

удовлетворяет принципу Гюйгенса. Продолжение этого процесса приводит к более сложным примерам.

Возникает естественный вопрос о широте класса уравнений, получаемых указанным способом. В частности, интересно выяснить, можно ли получить все операторы (11.28), удовлетворяющие принципу Гюйгенса, исходя из классического волнового оператора $\square_4$ и последовательно применяя преобразование Лагнеза — Штельмахера $L_{n+1} \mapsto \tilde{L}_{n+3}$. Lagnese [1] дал положительный ответ на этот вопрос и тем самым решил проблему Адамара для операторов вида (11.28). Это обстоятельство с учетом специальных свойств преобразования Лагнеза — Штельмахера позволяет описать структуру коэффициента $c(t)$ всех операторов (11.28), удовлетворяющих принципу Гюйгенса (Lagnese [2]).

Метод Лагнеза — Штельмахера переносится также на операторы вида

$$L_{n+1}^{(i)} = \square_{n+1} + c\,(x^i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11.37}$$

Так как t-операторы (11.30) коммутируют с аналогичными x-операторами, то теорема Лагнеза — Штельмахера применима к суперпозиции t- и x-преобразований Лагнеза — Штельмахера.

11.6. Современное состояние и обобщения проблемы Адамара. Примеры Штельмахера показывают, что теорема Матиссона — Асгейрссона о единственности гюйгенсова уравнения в четырехмерных конформно-плоских пространствах не переносится на пространства большей размерности. В соответствии с теоремой Лагнеза — Штельмахера число таких уравнений растет вместе с размерностью пространства. Это подчеркивает особое положение четырехмерного пространства. К настоящему времени проблема Адамара наиболее полно исследована именно в пространствах V_4, в основном благодаря работам Гюнтера и его учеников (Günther [1—4], Günther & Wünsch [1], Wünsch [1, 2], Schimming [1]).

Günther [3] первым установил существование пространств, которые не конформны плоскому пространству и в которых выполняется принцип Гюйгенса. Он рассмотрел пространства V_4 с метрикой плоской волны (8.30) и показал, что в них для волнового уравнения (10.15) выполняется критерий Адамара. Кроме того, необходимые условия (11.14)—(11.16) позволяют перенести теорему единственности Матиссона—Асгейрссона на рассматриваемые пространства. В силу теоремы 8.5 это решает проблему Адамара в пространствах V_4 с нетривиальной конформной группой, и для полного решения проблемы при $n=3$ остается рассмотреть уравнения (11.1) в пространствах с тривиальной конформной группой. Здесь первостепенное значение имеет следующий вопрос: существуют ли пространства V_4 с тривиальной конформной группой, в которых уравнения вида (11.1) удовлетворяют принципу Гюйгенса? На основе предварительных результатов, полученных с помощью необходимых условий Гюнтера и Макленагана для пространств специального вида (см. McLenaghan [2] и Schimming [2]), можно ожидать, что ответ должен быть отрицательным. Доказательство справедливости этого предположения было бы окончательным решением проблемы Адамара при $n=3$.

В отличие от $n=3$ при $n\geqslant 5$, насколько мне известно, до сих пор проблема Адамара не решена ни в каком пространстве V_{n+1}. В случае произвольного n кроме результатов Штельмахера и Лагнеза, относящихся к уравнениям специального вида в плоских пространствах, имеется доказательство справедливости принципа Гюйгенса для волнового уравнения в каждом пространстве V_{n+1} с нетривиальной конформной группой (см. Ибрагимов, Мамонтов [2] и теорему 8.5). Можно также отметить обобщение некоторых результатов на сингулярную задачу Коши (Fox [1], Günther [2], Solomon [1]).

Открытие принципа Гюйгенса в неплоских пространствах явилось стимулом для систематического изучения основных уравнений математической физики в полях тяготения с точки зрения принципа Гюйгенса. Были рассмотрены уравнения Максвелла

$$d\omega=0, \quad \delta\omega=0$$

для произвольных дифференциальных форм ω (Günther [4], Künzle [1], Günther & Wünsch [1], Wünsch [1]; см. также Penrose [2]), линейные уравнения второго порядка для произвольных полей (Schimming [1]) и спинорные полевые уравнения (Wünsch [2]). Изложение общей теории, удобной для подобных исследований, можно найти, например, в следующих работах: Riesz [1], Duff [1], Lichnerowicz [3, 4], Friedlander [1].

В случае классического волнового уравнения принцип Гюйгенса эквивалентен образованию заднего фронта волны за конечное время. Для уравнений с переменными коэффициентами это можно установить лишь после соответствующего глобального анализа задачи. В качестве нетривиального примера можно привести волновое уравнение на сфере

$$u_{tt}-\Delta_s u+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 u=0, \tag{11.38}$$

которое рассмотрели Lax & Phillips [1]. Здесь Δ_s—оператор Лапласа—Бельтрами на n-мерной единичной сфере, n нечетно. Локальное выполнение принципа Гюйгенса здесь очевидно, так как соответствующее риманово пространство V_{n+1} представляет собой прямое произведение вещественной прямой с n-мерным пространством постоянной кривизны и поэтому локально конформно плоскому пространству. Однако уравнение (11.38) невозможно глобально преобразовать в волновое уравнение в плоском пространстве преобразованиями вида (10.14). Более общий случай гиперболических систем уравнений рассмотрел Семенов-Тян-Шанский [1] в связи с изучением инвариантных операторов в римановых симметрических пространствах. Глобальное изучение гладких лоренцевых пространств, локально обладающих нетривиальной конформной группой, показывает (Cahen & Kerbrat [1]), что таким свойством обладают только классические пространства. Поэтому для глобального изучения принципа Гюйгенса важно исследовать особенности римановых многообразий гиперболического типа с локально нетривиальной группой конформных движений. Следует также отметить, что проблема глобального анализа принципа Гюйгенса тесно соприкасается с обширной программой изучения лакун в областях зависимости гиперболических систем дифференциальных уравнений (см. Петровский [1], Atiyah, Bott, Gårding [1], Gårding [1]).

В следующих параграфах излагается теоретико-групповой подход к проблеме Адамара. Изучение конформно-инвариантных уравнений в римановых пространствах естественно ведет к рассмотрению волнового уравнения (10.15) в пространствах с нетривиальной конформной группой и позволяет установить взаимосвязь принципа Гюйгенса с конформной инвариантностью в пространствах V_4. Волновое уравнение в метрике (8.30) может быть детально исследовано. Полученное интегральное представление решения задачи Коши (Ибрагимов, Мамонтов [1, 2]) обобщает классические формулы Пуассона и Тедоне на произвольные пространства V_{n+1} с нетривиальной конформной группой и выявляет справедливость принципа Гюйгенса.

§ 12. Волновое уравнение в V_4

12.1. Вычисление геодезического расстояния в метрике плоской волны. Пусть геодезическая линия, проходящая через фиксированную точку $x_0 \in V_n$ и переменную точку $x \in V_n$, параметризована с помощью длины дуги s, отсчитываемой от точки x_0. Тогда координаты $x^i = x^i(s)$ точки x удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}(x)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \qquad (12.1)$$

и начальным условиям

$$x^i\big|_{s=0}=x_0^i,\qquad \left.\frac{dx^i}{ds}\right|_{s=0}=\alpha^i\qquad (i=1,\ \ldots,\ n).\tag{12.2}$$

Постоянный вектор $\alpha=(\alpha^1,\ \ldots,\ \alpha^n)$ должен удовлетворять условию

$$g_{ij}(x_0)\,\alpha^i\alpha^j=1.\tag{12.3}$$

Равенство (12.3) получается подстановкой выражений

$$dx^i=\frac{dx^i}{ds}\,ds$$

в формулу (6.4) с учетом условий (12.2). Пусть

$$x^i=x^i(s;\ x_0,\ \alpha)\tag{12.4}$$

— решение задачи Коши (12.1), (12.2). Из равенств (12.4) при достаточно малом $|\alpha|$ можно найти величины α^i. Подстановка полученных функций

$$\alpha^i=\psi^i(s;\ x_0,\ x)\tag{12.5}$$

в условие (12.3) и решение равенства

$$g_{ij}(x_0)\,\psi^i(s;\ x_0,\ x)\,\psi^j(s;\ x_0,\ x)=1\tag{12.6}$$

относительно s дает квадрат геодезического расстояния

$$\Gamma(x_0,\ x)=s^2(x_0,\ x)$$

между точками x_0 и x в пространстве V_n.

Рассмотрим теперь пространство V_4 с метрическим тензором (8.32) и вычислим функцию $\Gamma(x_0,\ x)$ описанным выше способом. При этом будет удобно пользоваться обозначениями

$$\begin{gathered}x=(x,\ y,\ z,\ t),\quad x_0=(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau),\quad \alpha=(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta),\\ f=f(x-t),\quad f_0=f(\xi-\tau),\ \ldots,\ \mathscr{D}=\varphi^2-f,\ \mathscr{D}_0=\varphi_0^2-f_0.\end{gathered}\tag{12.7}$$

По формулам (6.9) находятся следующие (и отличающиеся от них перестановкой нижних индексов) отличные от нуля символы Кристоффеля:

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{22}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{D}}\right)',\quad \Gamma^1_{23}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi}{\mathscr{D}}\right)',\quad \Gamma^1_{33}=\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi^2}{\mathscr{D}}\right)',\\ \Gamma^2_{12}=-\Gamma^2_{02}=\frac{1}{2}\left(\mathscr{D}\left(\frac{1}{\mathscr{D}}\right)'+\frac{\varphi\varphi'}{\mathscr{D}}\right),\quad \Gamma^2_{13}=-\Gamma^2_{03}=-\varphi\Gamma^2_{12}-\frac{\varphi'}{2},\\ \Gamma^3_{12}=-\Gamma^3_{02}=\frac{\varphi'}{2\mathscr{D}},\quad \Gamma^3_{13}=-\Gamma^3_{03}=-\frac{\varphi\varphi'}{2\mathscr{D}},\quad \Gamma^0_{ij}=\Gamma^1_{ij}\quad (i,\ j=2,\ 3),\end{gathered}\tag{12.8}$$

где штрих обозначает дифференцирование, например, $\varphi'(\sigma)=\dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}$.

В силу формул (12.8) уравнения (12.1) записываются в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathscr{D}}\right)'\left(\frac{dy}{ds}-\varphi\frac{dz}{ds}\right)^2+\frac{\varphi'}{\mathscr{D}}\left(\frac{dy}{ds}-\varphi\frac{dz}{ds}\right)\frac{dz}{ds}&=0,\\
\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{\mathscr{D}}\left(\frac{dy}{ds}-\varphi\frac{dz}{ds}\right)\right]&=0,\\
\frac{d^2z}{ds^2}+\frac{1}{\mathscr{D}}\left(\frac{dy}{ds}-\varphi\frac{dz}{ds}\right)\frac{d\varphi}{ds}&=0,\\
\frac{d^2(x-t)}{ds^2}&=0,
\end{aligned}
\tag{12.9}
$$

где $\frac{d\varphi}{ds}=\varphi'\frac{d(x-t)}{ds}$. Второе и четвертое уравнения этой системы с учетом начальных условий (12.2) дают

$$x-t=\xi-\tau+(\alpha-\delta)s, \tag{12.10}$$

$$\varphi\frac{dz}{ds}-\frac{dy}{ds}=\frac{\gamma\varphi_0-\beta}{\mathscr{D}_0}\mathscr{D}. \tag{12.11}$$

Поэтому

$$\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{\gamma\varphi_0-\beta}{\mathscr{D}_0}\frac{d\varphi}{ds},$$

так что

$$\frac{dz}{ds}=\frac{1}{\mathscr{D}_0}[(\gamma\varphi_0-\beta)\varphi+\beta\varphi_0-\gamma f_0], \tag{12.12}$$

$$\frac{dy}{ds}=\frac{1}{\mathscr{D}_0}[(\gamma\varphi_0-\beta)f+(\beta\varphi_0-\gamma f_0)\varphi]. \tag{12.13}$$

Уравнения (12.13) и (12.12) в силу равенства (12.10) имеют решения

$$y=\eta+a(F-F_0)+b(\Phi-\Phi_0), \tag{12.14}$$

$$z=\zeta+a(\Phi-\Phi_0)+b(\alpha-\delta)s, \tag{12.15}$$

где

$$a=\frac{\gamma\varphi_0-\beta}{(\alpha-\delta)\mathscr{D}_0},\quad b=\frac{\beta\varphi_0-\gamma f_0}{(\alpha-\delta)\mathscr{D}_0}, \tag{12.16}$$

а F и Φ — первообразные для функций f и φ соответственно, причем $F=F(x-t)$, $F_0=F(\xi-\tau)$ в соответствии с обозначениями (12.7). С учетом (12.11) и (12.12) первое уравнение системы (12.9) принимает вид

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\gamma\varphi_0-\beta}{\mathscr{D}_0^2}\left[\frac{1}{2}(\gamma\varphi_0-\beta)f'+(\beta\varphi_0-\gamma f_0)\varphi'\right]=0.$$

Отсюда

$$x=\xi+\left(\alpha+\beta a-\frac{\alpha-\delta}{2}a^2f_0\right)s-\frac{1}{2}a^2(F-F_0)-ab(\Phi-\Phi_0). \tag{12.17}$$

Решение задачи (12.9), (12.2) приводится к виду (12.4) подстановкой выражения (12.10) для $x-t$ в формулы (12.14), (12.15), (12.17) и полученного из формулы (12.17) значения x — в равенство (12.10).

Для рассматриваемого пространства V_4 условие (12.3) в обозначениях (12.7), (12.16) имеет вид

$$-(\alpha-\delta)(\alpha+\delta+\beta a+\gamma b)=1. \tag{12.18}$$

Теперь (12.18) нужно привести к виду (12.6). Из формул (12.16) находятся

$$\beta=(\alpha-\delta)(af_0+b\varphi_0), \quad \gamma=(\alpha-\delta)(a\varphi_0+b), \tag{12.19}$$

а (12.14) и (12.15) дают

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{A}[(y-\eta)(\alpha-\delta)s-(z-\zeta)(\Phi-\Phi_0)],\\ b&=\frac{1}{A}[(z-\zeta)(F-F_0)-(y-\eta)(\Phi-\Phi_0)], \end{aligned} \tag{12.20}$$

где

$$A=(F-F_0)(\alpha-\delta)s-(\Phi-\Phi_0)^2. \tag{12.21}$$

Выделив главный член в формуле (12.21):

$$A=-\mathscr{D}_0(\alpha-\delta)^2s^2+\ldots, \tag{12.22}$$

легко видеть, что функция $A\neq 0$ при достаточно малых $s\neq 0$, так как из равенства (12.18) и из невырожденности матрицы $[g^{ij}]$ следует, что $\alpha-\delta\neq 0$, $\mathscr{D}_0\neq 0$. Из формул (12.17) и (12.19) находятся

$$2\alpha=2\frac{x-\xi}{s}-(\alpha-\delta)(a^2f_0+2ab\varphi_0)+\frac{1}{s}[a^2(F-F_0)+2ab(\Phi-\Phi_0)],$$

$$\beta a+\gamma b=(\alpha-\delta)(a^2f_0+2ab\varphi_0+b^2).$$

Поэтому

$$\alpha+\delta+\beta a+\gamma b=$$
$$=\frac{1}{s}[2(x-\xi)-(\alpha-\delta)s+a^2(F-F_0)+2ab(\Phi-\Phi_0)+b^2(\alpha-\delta)s],$$

так как $\alpha+\delta=2\alpha-(\alpha-\delta)$. Полученное выражение для $\alpha+\delta+$ $+\beta a+\gamma b$ после подстановки значения $(\alpha-\delta)s$, найденного из (12.10), и значений a и b из формулы (12.20) принимает вид

$$\alpha+\delta+\beta a+\gamma b=\frac{1}{s}\Big\{x-\xi+t-\tau+\frac{1}{A}[(y-\eta)^2(x-\xi-t+\tau)-$$
$$-2(y-\eta)(z-\zeta)(\Phi-\Phi_0)+(z-\zeta)^2(F-F_0)]\Big\}.$$

Подстановка в (12.18) полученного значения $\alpha+\delta+\beta a+\gamma b$ вместе с $\alpha-\delta$ из (12.10) приводит равенство (12.18) к виду (12.6). Умножением на s^2 получается искомая формула для геодезического расстояния (Ибрагимов [10]):

$$\Gamma(x_0, x) = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - \frac{x-\xi-t+\tau}{(x-\xi-t+\tau)(F-F_0)-(\Phi-\Phi_0)^2} \times$$
$$\times [(x-\xi-t-\tau)(y-\eta)^2 - 2(\Phi-\Phi_0)(y-\eta)(z-\zeta)+(F-F_0)(z-\zeta)^2]. \quad (12.23)$$

Если формулу (12.23) записать в форме, предложенной Фридлендером (Friedlander [1], § 5.7), то она легко обобщается на случай произвольного значения $n \geqslant 3$. Пусть $x=(x^0, x^1, \ldots, x^n)$, $x_0=(x_0^0, x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — точки пространства V_{n+1} с метрикой плоской волны (8.30) и

$$A^{ij}(\lambda) = \int a^{ij}(\lambda)\, d\lambda, \qquad i, j = 2, \ldots, n.$$

Тогда квадрат геодезического расстояния между x и x_0 равен

$$\Gamma(x_0, x) = (x^0-x_0^0)^2 - (x^1-x_0^1)^2 -$$
$$-(x^0-x_0^0-x^1+x_0^1)\sum_{i,j=2}^{n} \tilde{A}_{ij}(x^i-x_0^i)(x^j-x_0^j), \quad (12.24)$$

где

$$[\tilde{A}_{ij}] = [A^{ij}(x^1-x^0) - A^{ij}(x_0^1-x_0^0)]^{-1}.$$

12.2. Конформная инвариантность и принцип Гюйгенса.

Лемма 1. *Каждое конформно-инвариантное уравнение* (11.1) *в лоренцевом пространстве* V_4 *с нетривиальной конформной группой эквивалентно уравнению*

$$L[u] \equiv u_{tt} - u_{xx} - f(x-t)\, u_{yy} - 2\varphi(x-t)\, u_{yz} - u_{zz} = 0. \quad (12.25)$$

Доказательство. В силу теорем 8.5 и 10.5 достаточно рассмотреть волновое уравнение (10.15) в пространстве V_4 с метрическим тензором (8.32). Скалярная кривизна этого пространства равна нулю. Действительно, в силу соотношений

$$\Gamma_{0j}^i = -\Gamma_{1j}^i, \qquad \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^0} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^1},$$

очевидных из (12.8), формулы (6.12) дают

$$R_{00} = R_{11} = -R_{04}, \qquad R_{ij} = 0 \qquad (i, j = 2, 3).$$

Поэтому

$$R = R_{00} - R_{11} - fR_{22} - 2\varphi R_{23} - R_{33} = 0,$$

так что уравнение (15.10) в данном случае имеет вид

$$\Delta_2 u \equiv g^{ij}u_{ij} - g^{ij}\Gamma_{ij}^k u_k = 0. \quad (12.26)$$

Из формул (12.8) легко находятся величины $\Gamma^k = g^{ij}\Gamma^k_{ij}$:

$$\Gamma^0 = \Gamma^1 = -(\ln\sqrt{-\mathscr{D}})', \qquad \Gamma^2 = \Gamma^3 = 0.$$

Если теперь сделать преобразование эквивалентности

$$\overline{L}[u] = e^{-\gamma} L[ue^{\gamma}]$$

с функцией $\gamma = \frac{1}{2}\ln\sqrt{-\mathscr{D}}$, то уравнение (12.26) с коэффициентами $a^i = 0$ перейдет в эквивалентное уравнение с коэффициентами $\overline{a}^i = \Gamma^i$ $(i = 0, \ldots, 3)$, т. е. в уравнение

$$\Delta_2 u + \Gamma^i u_i \equiv g^{ij}u_{ij} = 0,$$

которое в силу (8.32) совпадает с (12.25).

Лемма 2. *Уравнение* (12.25) *удовлетворяет принципу Гюйгенса.*

Доказательство. Так как оператор L в (12.25) является самосопряженным, а $c^* = 0$, то в формуле (11.6) имеем

$$L^*[\Gamma] - c^*\Gamma - 8 = L[\Gamma] - 8.$$

Функция Γ, определенная формулой (12.23), имеет вид

$$\Gamma = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 + \gamma(x-t,\ y,\ z).$$

Поэтому

$$\Gamma_{tt} - \Gamma_{xx} = 4$$

и

$$L[\Gamma] - 8 = \frac{2(x-\xi-t+\tau)}{(x-\xi-t+\tau)(F-F_0)-(\Phi-\Phi_0)} \times \\ \times [(x-\xi-t+\tau)f - 2(\Phi-\Phi_0)\varphi + (F-F_0)] - 4.$$

Используя функцию A, определенную формулой (12.21), полученное выражение для $L[\Gamma] - 8$ можно записать вдоль геодезической линии в виде

$$L[\Gamma] - 8 = 2s\frac{d\ln A}{ds} - 4.$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}(L[\Gamma]-8)\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{2}\int_0^s\left(\frac{d\ln A}{d\sigma} - \frac{2}{\sigma}\right)d\sigma = \ln\frac{\sigma}{\sqrt{A}}\Big|_0^s,$$

где параметр s соответствует переменной точке $x = (x,\ y,\ z,\ t)$. Согласно формуле (12.22)

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\sqrt{A(\sigma)}}{\sigma} = (\alpha-\delta)\sqrt{-\mathscr{D}_0}.$$

Поэтому

$$-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x}(L[\Gamma]-8)\frac{d\sigma}{\sigma} = \ln\left[(\alpha-\delta)s\sqrt{\frac{-\mathscr{D}_0}{A(s)}}\right].$$

Если сюда подставить значения $A(s)$ и $(\alpha-\delta)s$ из (12.21) и (12.10), то формула (11.6) дает

$$V=(x-\xi-t+\tau)\left(\frac{-\mathscr{D}_0}{(x-\xi-t+\tau)(F-F_0)-(\Phi-\Phi_0)^2}\right)^{1/2}. \quad (12.27)$$

Так как функция V зависит только от $x-t$ и $\xi-\tau$, то $L[V]=0$. Следовательно, самосопряженное уравнение (12.25) удовлетворяет критерию Адамара (11.8).

Замечание. Согласно § 8.5 уравнение (12.25) эквивалентно классическому волновому уравнению только в случаях (8.35) — (8.37).

Проблему Адамара в пространствах V_4 с нетривиальной конформной группой решает следующая теорема (Ибрагимов [9]).

Теорема. *В лоренцевом пространстве V_4 с нетривиальной группой конформных движений уравнение* (11.1) *удовлетворяет принципу Гюйгенса тогда и только тогда, когда оно конформно-инвариантно, т. е. эквивалентно уравнению* (12.25).

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 остается доказать, что любое гюйгенсово уравнение вида (11.1) в пространстве с метрическим тензором (8.32) удовлетворяет условиям (10.49) конформной инвариантности. Так как второе из уравнений (10.49) совпадает с первым необходимым условием Гюнтера (11.14), то нужно получить равенства $K_{ij}=0$. Рассмотрим для этого равенства (11.16), левые части которых образуют *тензор Баха* (Bach [1])

$$B_{ij}=g^{kl}(R_{jik,l}+C^m_{ijk}L_{ml}). \quad (12.28)$$

Этот тензор для лоренцевых пространств V_4 с нетривиальной конформной группой равен нулю. Действительно, уравнение (12.25) для которого величины K_{ij}, а вместе с ними и правые части (11.16), равны нулю, удовлетворяет равенствам (11.16). Поэтому остается только заметить, что тензор (12.28) не зависит от коэффициентов a^i и c уравнения (11.1), а при конформном отображении (8.1) преобразуется конформно: $\tilde{B}_{ij}=e^{-2\sigma}B_{ij}$. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$g^{pq}\left(K_{pi}K_{qj}-\frac{1}{4}g_{ij}g^{ml}K_{pm}K_{ql}\right)=0, \qquad i,\ j=0,\ \ldots,\ 3,$$

которую с учетом (8.32) удобно записать в следующем виде:

$$K_{1i}K_{1j}+fK_{2i}K_{2j}+\varphi(K_{2i}K_{3j}+K_{3i}K_{2j})+ \\ +K_{3i}K_{3j}-K_{0i}K_{0j}+Ng_{ij}=0, \quad (12.29)$$

где

$$N=\frac{1}{2}(fK_{12}^2+K_{13}^2-\mathscr{D}K_{23}^2+2\varphi K_{12}K_{13}-K_{01}^2-fK_{02}^2-2\varphi K_{02}K_{03}-K_{03}^2).$$

Для $(i, j)=(1,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(4,4)$ уравнения (12.29) дают

$$fK_{12}^2+2\varphi K_{12}K_{13}+K_{13}^2-K_{01}^2-N=0, \qquad (12.30)$$

$$K_{12}^2+K_{23}^2-K_{02}^2+\frac{1}{\mathscr{D}}N=0, \qquad (12.31)$$

$$K_{12}K_{13}-K_{02}K_{03}-\varphi K_{23}^2-\frac{\varphi}{\mathscr{D}}N=0, \qquad (12.32)$$

$$K_{13}^2+fK_{23}^2-K_{03}^2+\frac{f}{\mathscr{D}}N=0, \qquad (12.33)$$

$$K_{01}^2+fK_{02}^2+2\varphi K_{02}K_{03}+K_{03}^2+N=0. \qquad (12.34)$$

Исключение величины N сначала из уравнений (12.31), (12.32), а затем из (12.31), (12.33) приводит к равенствам

$$K_{12}K_{13}-K_{02}K_{03}=\varphi\,(K_{02}^2-K_{12}^2), \qquad (12.35)$$

$$K_{03}^2-K_{13}^2=f\,(K_{02}^2-K_{12}^2). \qquad (12.36)$$

В результате вычитания левой части уравнения (12.30) из левой части (12.34) с учетом (12.35) и (12.36) получается равенство $K_{01}^2-\mathscr{D}K_{23}^2=0$, которое в силу условия $\mathscr{D}<0$ дает

$$K_{01}=K_{23}=0. \qquad (12.37)$$

Теперь (12.30) упрощается и приводит к уравнениям

$$K_{02}=0,\ \ K_{13}=-\varphi K_{12}. \qquad (12.38)$$

Окончательный результат $K_{ij}=0$ $(i,\ j=0,\ \ldots,\ 3)$ является следствием уравнений (12.36)—(12.38). Теорема доказана.

12.3. Решение задачи Коши. Для уравнения (12.25) рассматривается задача Коши с гладкими начальными данными

$$u|_{t=0}=g(x,\ y,\ z), \quad u_t|_{t=0}=h(x,\ y,\ z). \qquad (12.39)$$

Здесь, как и в случае обычного волнового уравнения, доста точно решить задачу Коши специального вида:

$$L[u]=0, \quad u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=h(x,\ y,\ z), \qquad (12.40)$$

а затем воспользоваться коммутативностью оператора

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-f(x-t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}-2\varphi(x-t)\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (12.41)$$

с оператором $\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}$. Действительно, если v и w решают частную задачу (12.40) с $v_t|_{t=0}=g$ и $w_t|_{t=0}=g_x-h$ соответственно, то функция

$$u=v_t+v_x-w \qquad (12.42)$$

является решением задачи Коши с начальными данными (12.39).

При $f=1$, $\varphi=0$ оператор $L=\Box$, и решение задачи (12.40) в этом случае дается формулой Пуассона

$$u(t, x, y, z)=\frac{1}{4\pi t}\iint_{S(t)} h\,dS,$$

где $S(t)$ — сфера радиуса t с центром в точке (x, y, z). Если в плоскости (y, z) ввести полярные координаты, то точки $(\xi, \eta, \zeta)\in S(t)$ записываются в виде

$$\xi=\xi, \quad \eta=y+\rho\cos\theta, \quad \zeta=z+\rho\sin\theta$$

с координатами (ξ, ρ, θ), удовлетворяющими условиям

$$(\xi-x)^2+\rho^2=t^2, \quad x-t\leqslant\xi\leqslant x+t, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

В этих координатах $dS=t\,d\xi\,d\theta$, и формула Пуассона принимает вид

$$u(t, x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\int_{x-t}^{x+t} d\xi\int_0^{2\pi} h\left(\xi,\ y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\cos\theta,\right.$$
$$\left. z+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\sin\theta\right)d\theta. \qquad (12.43)$$

Такое представление решения задачи Коши можно получить также в случае оператора (12.41) (Ибрагимов, Мамонтов [1], Ибрагимов [10]). Для этого удобно сделать преобразование Фурье по переменным y, z.

Пусть

$$\hat{u}(t, x, \lambda, \mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda y+\mu z)}\,u(t, x, y, z)\,dy\,dz.$$

Аналогичное преобразование Фурье переводит $h(x, y, z)$ в $\hat{h}(x, \lambda, \mu)$. Задача (12.40) переходит при этом в задачу Коши

$$\hat{L}[\hat{u}]=0, \quad \hat{u}|_{t=0}=0, \quad \hat{u}_t|_{t=0}=\hat{h}(x, \lambda, \mu) \qquad (12.44)$$

для оператора $\hat{L}$:

$$\hat{L}[\hat{u}]=\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}+(f\lambda^2+2\varphi\lambda\mu+\mu^2)\,\hat{u}$$

с двумя независимыми переменными t, x и с параметрами λ, μ. Уравнение $\hat{L}[\hat{u}]=0$ заменой

$$\bar{t}=\frac{1}{2}(x+t), \quad \bar{x}=-\frac{1}{2}\left[\lambda^2F(x-t)+2\lambda\mu\Phi(x-t)+\mu^2(x-t)\right]$$

преобразуется в уравнение

$$\hat{u}_{\bar{t}\bar{x}}+\hat{u}=0 \qquad (12.45)$$

с известной функцией Римана

$$R(\bar{\tau}, \bar{\xi}; \bar{t}, \bar{x})=J_0\left(\sqrt{4(\bar{t}-\bar{\tau})(\bar{x}-\bar{\xi})}\right), \qquad (12.46)$$

где J_0—функция Бесселя. Затем переходом к старым переменным t и x получается функция Римана для уравнения $\hat{L}[\hat{u}]=0$: $R(\tau, \xi;\ t, x)=$

$$=J_0\left(\sqrt{(t-\tau+x-\xi)[\lambda^2(F_0-F)+2\lambda\mu(\Phi_0-\Phi)+\mu^2(t-\tau+\xi-x)]}\right).$$

Поэтому решение задачи (12.44) находится по формуле

$$\hat{u}(t, x, \lambda, \mu)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\hat{h}(\xi, \lambda, \mu)R(0, \xi;\ t, x)\,d\xi,$$

которая после подстановки значения $\hat{h}(\xi, \lambda, \mu)$ принимает вид

$$\hat{u}(t, x, \lambda, \mu)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t}R(0, \xi;\ t, x)\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-i(\lambda\eta+\mu\zeta)}h(\xi, \eta, \zeta)\,d\eta\,d\zeta.$$

Из этой формулы с помощью обратного преобразования Фурье получается следующее представление решения исходной задачи (12.40):

$$u(t, x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{\mathbb{R}^2}Ih(\xi, \eta, \zeta)\,d\eta\,d\zeta, \tag{12.47}$$

где

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-i[\lambda(\eta-y)+\mu(\zeta-z)]}J_0\left(k\sqrt{Q(\lambda, \mu)}\right)d\lambda\,d\mu.$$

Здесь $k=\sqrt{x+t-\xi}$, а через $Q(\lambda, \mu)$ обозначена квадратичная форма

$$Q(\lambda, \mu)=a^2\lambda^2+2b\lambda\mu+c^2\mu^2$$

с коэффициентами

$$a^2=F(\xi)-F(x-t),\ b=\Phi(\xi)-\Phi(x-t),\ c^2=\xi-(x-t).$$

Для преобразования интеграла I к более удобному виду заметим, что из условия

$$-\mathscr{D}(\sigma)=f(\sigma)-\varphi^2(\sigma)>0$$

гиперболичности оператора (12.41) следует положительная определенность квадратичной формы

$$q(\sigma;\ \lambda, \mu)=f(\sigma)\lambda^2+2\varphi(\sigma)\lambda\mu+\mu^2$$

от λ и μ, имеющей дискриминант $-\mathscr{D}(\sigma)$. Следовательно, положительно определена также квадратичная форма

$$Q(\lambda, \mu)=\int\limits_{x-t}^{\xi}q(\sigma;\ \lambda, \mu)\,d\sigma$$

и ее дискриминант $a^2c^2-b^2$ положителен. Поэтому можно сделать замену переменных λ, μ, η, ζ, определенную формулами

$$\lambda=\frac{1}{a}\left(\bar{\lambda}-\frac{b}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}\bar{\mu}\right),\quad \mu=\frac{a}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}\bar{\mu}$$

и

$$\begin{gathered}\bar{\eta}-\bar{y}=\frac{1}{a}(\eta-y),\\ \bar{\zeta}-\bar{z}=\frac{1}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}\left[a(\zeta-z)-\frac{b}{a}(\eta-y)\right].\end{gathered} \tag{12.48}$$

В этих переменных

$$Q=\bar{\lambda}^2+\bar{\mu}^2,\quad \lambda(\eta-y)+\mu(\zeta-z)=\bar{\lambda}(\bar{\eta}-\bar{y})+\bar{\mu}(\bar{\zeta}-\bar{z}),$$

$$d\eta\,d\zeta=\sqrt{a^2c^2-b^2}\,d\bar{\eta}\,d\bar{\zeta},\qquad d\lambda\,d\mu=\frac{d\bar{\lambda}\,d\bar{\mu}}{\sqrt{a^2c^2-b^2}},$$

и интеграл I принимает вид

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R^2}e^{-i\,[\bar{\lambda}(\bar{\eta}-\bar{y})+\bar{\mu}(\bar{\zeta}-\bar{z})]}J_0\left(k\sqrt{\bar{\lambda}^2+\bar{\mu}^2}\right)\frac{d\bar{\lambda}\,d\bar{\mu}}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}.$$

Пользуясь известной формулой преобразования Фурье сферически симметричных функций и свойствами функции Бесселя J_0, можно показать (см. § 13.2), что

$$I=\frac{1}{\sqrt{a^2c^2-b^2}}\int\limits_0^\infty J_0(kr)\,J_0(\rho r)\,r\,dr=\frac{\delta(k-\rho)}{\rho\sqrt{a^2c^2-b^2}},$$

где δ — дельта-функция, а $\rho^2=(\bar{\eta}-\bar{y})^2+(\bar{\zeta}-\bar{z}^2)^2$.

Используя полученное значение интеграла I, легко вычислить внутренний интеграл в (12.47). Для этого удобно перейти к полярным координатам ρ, θ в плоскости переменных $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$:

$$\bar{\eta}-\bar{y}=\rho\cos\theta,\quad \bar{\zeta}-\bar{z}=\rho\sin\theta.$$

Из этих формул и из (12.48) находятся функции $\eta(\rho,\theta)$ и $\zeta(\rho,\theta)$. Теперь можно вычислить указанный интеграл:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{R^2}Ih(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\eta\,d\zeta=\\ &\quad=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^\infty Ih(\xi,\ \eta(\rho,\ \theta),\ \zeta(\rho,\ \theta))\sqrt{a^2c^2-b^2}\,\rho\,d\rho=\\ &\quad=\int\limits_0^{2\pi}h(\xi,\ \eta(k,\ \theta),\ \zeta(k,\ \theta))\,d\theta=\\ &\quad=\int\limits_0^{2\pi}h\left(\xi,\ y+ak\cos\theta,\ z+\frac{b}{a}k\cos\theta+\frac{\sqrt{a^2c^2-b^2}}{a}k\sin\theta\right)d\theta.\end{aligned}$$

Если ввести обозначения

$$A=\{(x+t-\xi)[F(\xi)-F(x-t)]\}^{1/2},$$
$$B=\frac{x+t-\xi}{A}[\Phi(\xi)-\Phi(x-t)],\quad C=[t^2-(x-\xi)^2-B^2]^{1/2}, \tag{12.49}$$

то формулу (12.47) можно записать в следующем окончательном виде:

$$u(t,\ x,\ y,\ z)=T[h](t,\ x,\ y,\ z)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{x-t}^{x+t}d\xi\int_0^{2\pi}h(\xi,\ y+A\cos\theta,\ z+B\cos\theta+C\sin\theta)\,d\theta. \tag{12.50}$$

Очевидно, что при $f=1$, $\varphi=0$ (12.50) совпадает с формулой (12.43).

Прямой подстановкой можно проверить, что функция u, определенная формулой (12.50), удовлетворяет задаче (12.40). Так как выполнение начальных условий очевидно, то нужно лишь убедиться в выполнении уравнения $L[u]=0$. Для этого удобно перейти к переменным $\alpha=x-t$, $\beta=x+t$ и оператор L записать в виде

$$L[u]=4u_{\alpha\beta}+f(\alpha)\,u_{yy}+2\varphi(\alpha)\,u_{yz}+u_{zz}, \tag{12.51}$$

а формулу (12.50) — в виде

$$u(\alpha,\ \beta,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi}\int_\alpha^\beta d\xi\int_0^{2\pi}h(\xi,\ y+A\cos\theta,\ z+B\cos\theta+C\sin\theta)\,d\theta.$$

Из (12.49) следует, что функции A, B, и C удовлетворяют соотношениям

$$A_\alpha A_\beta=-\frac{1}{4}f(\alpha),\quad AB_\beta=BA_\beta,\quad AC_\beta=CA_\beta,$$
$$A_\alpha B_\beta+A_\beta B_\alpha=-\frac{1}{2}\varphi(\alpha),\quad B_\alpha B_\beta+C_\alpha C_\beta=-\frac{1}{4}, \tag{12.52}$$
$$AA_{\alpha\beta}=A_\alpha A_\beta,\quad BB_{\alpha\beta}=B_\alpha B_\beta,\quad CC_{\alpha\beta}=C_\alpha C_\beta.$$

Имеем в (12.51)

$$u_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\int_\alpha^\beta\Big\{P+\int_0^{2\pi}[h_{yy}A_\alpha A_\beta\cos^2\theta+$$
$$+h_{yz}((A_\alpha C_\beta+A_\beta C_\alpha)\cos\theta\sin\theta+(A_\alpha B_\beta+A_\beta B_\alpha)\cos^2\theta)+$$
$$+h_{zz}(B_\alpha B_\beta\cos^2\theta+(B_\alpha C_\beta+B_\beta C_\alpha)\cos\theta\sin\theta+C_\alpha C_\beta\sin^2\theta)]\,d\theta\Big\}\,d\xi, \tag{12.53}$$

где

$$P=\int_0^{2\pi}[h_y A_{\alpha\beta}\cos\theta+h_z(B_{\alpha\beta}\cos\theta+C_{\alpha\beta}\sin\theta)]\,d\theta.$$

Если P с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^{2\pi} h_y\cos\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi} h_y\,d(\sin\theta)=-\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d(h_y)=$$

$$=\int_0^{2\pi}[h_{yy}A\sin^2\theta+h_{yz}(B\sin^2\theta-C\sin\theta\cos\theta)]d\theta$$

(аналогично преобразуется второе слагаемое в P) переписать в виде

$$P=\int_0^{2\pi}\{h_{yy}AA_{\alpha\beta}\sin^2\theta+$$
$$+h_{yz}[(AB_{\alpha\beta}+BA_{\alpha\beta})\sin^2\theta-(AC_{\alpha\beta}+CA_{\alpha\beta})\cos\theta\sin\theta]+$$
$$+h_{zz}[BB_{\alpha\beta}\sin^2\theta-(BC_{\alpha\beta}+CB_{\alpha\beta})\cos\theta\sin\theta+CC_{\alpha\beta}\cos^2\theta]\}\,d\theta,$$

то равенство (12.53) с учетом уравнений (12.52) дает

$$4u_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\int_\alpha^\beta d\xi\int_0^{2\pi}-[f(\alpha)h_{yy}+2\varphi(\alpha)h_{yz}+h_{zz}]d\theta. \qquad (12.54)$$

Дифференцирование функции $u(\alpha, \beta, y, z)$ по переменным y, z осуществляется непосредственно, и с помощью формулы (12.54) легко проверяется необходимое равенство $L[u]=0$.

Формулы (12.42) и (12.50) показывают, что решение задачи Коши с начальными данными (12.39) представляется в виде

$$u=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)T[g]-T[g_x-h] \qquad (12.55)$$

с определенным в (12.50) оператором T. Теорема 12.2 и формулы (12.55) и (10.50) позволяют найти решение задачи Коши для всех конформно-инвариантных уравнений (11.1) в пространствах V_4 с нетривиальной конформной группой.

12.4. Случай тривиальной конформной группы. В § 11.4 уже отмечалось, что в пустом пространстве V_4 принцип Гюйгенса может выполняться только тогда, когда это пространство имеет нетривиальную конформную группу. Дополнительным примером в пользу гипотезы об отсутствии гюйгенсовых уравнений в пространствах с тривиальной конформной группой может служить пространство с метрикой (8.5). Рассмотрим этот пример подробнее.

В данном случае достаточно воспользоваться необходимым условием (11.16). По формулам (12.28) находятся следующие компоненты тензора Баха:

$$B_{11}=47(1+t)B_{44},\quad B_{22}=B_{33}=\frac{5}{3}B_{44},\quad B_{44}=-\frac{1}{48(1+t)^4}. \tag{12.56}$$

Подстановка (12.56) в уравнения (11.16) при $i=j$ приводит к уравнениям

$$\frac{1}{1+t}(K_{12}^2+K_{13}^2-K_{14}^2)-N=-\frac{94}{5}B_{44}, \tag{12.57}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{23}^2-K_{24}^2-N=-\frac{2}{3}B_{44}, \tag{12.58}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{13}^2+K_{23}^2-K_{34}^2-N=-\frac{2}{3}B_{44}, \tag{12.59}$$

$$\frac{1}{1+t}K_{14}^2+K_{24}^2+K_{34}^2+N=-\frac{2}{5}B_{44}, \tag{12.60}$$

где

$$N=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{13}^2-K_{14}^2)+K_{23}^2-K_{24}^2-K_{34}^2\right]. \tag{12.61}$$

Уравнения (12.58), (12.59) путем почленного вычитания и сложения с учетом (12.61) переписываются в виде

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{34}^2=\frac{1}{1+t}K_{13}^2+K_{24}^2, \tag{12.62}$$

$$K_{23}^2+\frac{1}{1+t}K_{14}^2=-\frac{4}{3}B_{44}. \tag{12.63}$$

Уравнения (12.57) и (12.60) с учетом (12.62) дают

$$\frac{1}{1+t}K_{12}^2+K_{34}^2=-\frac{48}{5}B_{44}. \tag{12.64}$$

Из (12.57), (12.63), (12.64) следует равенство

$$B_{44}=0. \tag{12.65}$$

Очевидное противоречие между равенствами (12.65) и (12.56) доказывает, что в рассматриваемом пространстве V_4 никакое уравнение вида (11.1) не удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Из формул (12.56) следует, что пространство с метрикой (8.5) невозможно конформно отобразить на пустое пространство. Действительно, в силу формул (12.28), (8.17) и (8.18) из $R_{ij}=0$ следует уравнение $B_{ij}=0$, которое сохраняется при любом конформном отображении.

§ 13. Принцип Гюйгенса в V_{n+1}

13.1. Предварительный анализ решения. Метод, использованный в § 12.3 при решении задачи Коши для волнового уравнения в пространствах V_4 с нетривиальной конформной группой, с небольшими изменениями переносится на случай произвольной размерности (Ибрагимов, Мамонтов [2]). При этом в силу теоремы 8.5 и очевидного обобщения леммы 12.2.1 на многомерный случай достаточно рассмотреть уравнение

$$L[u] \equiv u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,\, j=1}^{n-1} a^{ij}(x-t)\, u_{y^i y^j} = 0 \qquad (13.1)$$

с произвольным числом $n \geqslant 2$ пространственных переменных (x, y), где $y = (y^1, \ldots, y^{n-1})$. Коэффициенты a^{ij} считаются произвольными бесконечно дифференцируемыми функциями только одной переменной $x-t$, такими, что уравнение (13.1) строго гиперболично, т. е. квадратичная форма $a^{ij}\lambda_i\lambda_j$ положительно определена.

Для уравнения (13.1) в области $t > 0$ ищется решение задачи Коши с данными при $t = 0$:

$$L[u] = 0, \quad u|_{t=0} = f(x, y), \quad u_t|_{t=0} = g(x, y). \qquad (13.2)$$

Функции f и g предполагаются финитными, бесконечно дифференцируемыми. Эти требования на коэффициенты уравнения и на начальные данные приняты лишь для удобства изложения и не являются необходимыми для справедливости окончательных результатов. При сделанных предположениях задача Коши имеет, и притом единственное, бесконечно дифференцируемое решение; оно является финитным по пространственным переменным. Следующая лемма позволяет ограничиться рассмотрением специальной задачи Коши:

$$L[u] = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = h(x, y). \qquad (13.3)$$

Лемма 1. *Пусть $v(t, x, y)$ — решение задачи* (13.3) *с* $h = f$, *а $w(t, x, y)$ — решение задачи* (13.3) *с* $h = f_x - g$. *Тогда функция*

$$u = v_t + v_x - w \qquad (13.4)$$

является решгнием задачи (13.2).

Доказательство. Выполнение начальных условий задачи (13.2) для функции u, определенной формулой (13.4), проверяется непосредственно, а выполнение уравнения (13.1) — с учетом коммутационного соотношения $\left[L, \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\right] = 0$.

Для получения формулы, дающей представление решения задачи (13.3), применяется преобразование Фурье по переменным y. Если $u(t, x, y)$ — решение этой задачи, то его преобразование Фурье

$$\hat{u}(t, x; \lambda) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{R^{n-1}} u(t, x, y)\, e^{-i(y,\lambda)}\, dy \qquad (13.5)$$

удовлетворяет уравнению

$$\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a^{ij}(x-t)\,\lambda_i\lambda_j\hat{u} = 0 \qquad (13.6)$$

с двумя независимыми переменными t, x (с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ и начальным условиям

$$\hat{u}\big|_{t=0}=0, \quad \hat{u}_t\big|_{t=0}=\hat{h}(x;\ \lambda), \tag{13.7}$$

где $\hat{h}$ — преобразование Фурье функции $h(x, y)$:

$$\hat{h}(x;\ \lambda)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{R^{n-1}} h(x, y)\, e^{-i(y,\lambda)}\, dy.$$

Здесь $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$, $(y, \lambda)=y^i\lambda_i\equiv\sum\limits_{i=1}^{n-1} y^i\lambda_i$.

Лемма 2. *Функция Римана уравнения* (13.6) *имеет вид*

$$R(\tau, \xi;\ t, x)=J_0\left(\sqrt{(t-\tau+x-\xi)\left[A^{ij}(\xi-\tau)-A^{ij}(x-t)\right]\lambda_i\lambda_j}\right),$$

где J_0 — функция Бесселя, $A^{ij}(\sigma)=\int a^{ij}(\sigma)\, d\sigma$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если вектор λ равен нулю. Если $\lambda\neq 0$, то невырожденная замена переменных

$$\bar{t}=\frac{1}{2}(t+x), \quad \bar{x}=-\frac{1}{2}A^{ij}(x-t)\,\lambda_i\lambda_j$$

приводит к равенству

$$\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}=a^{ij}(x-t)\,\lambda_i\lambda_j\hat{u}_{\bar{t}\bar{x}}$$

и уравнение (13.6) принимает вид (12.45). Утверждение леммы получается из формулы (12.46), в которой нужно положить $\bar{\tau}=\frac{1}{2}(\tau+\xi)$, $\bar{\xi}=-\frac{1}{2}A^{ij}(\xi-\tau)\,\lambda_i\lambda_j$ и вернуться к старым переменным t, x, τ, ξ.

Решение задачи (13.6), (13.7) можно получить по формуле Римана

$$\hat{u}(t, x;\ \lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} R(0, \xi;\ t, x)\,\hat{h}(\xi, \lambda)\, d\xi,$$

или с учетом определения функции $\hat{h}$:

$$\hat{u}(t, x;\ \lambda)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{x-t}^{x+t} R(0, \xi;\ t, x)\int\limits_{R^{n-1}} h(\xi, \eta)\, e^{-i(\lambda,\eta)}\, d\eta.$$

В силу доказанной выше леммы эта формула дает

$$\hat{u}(t, x;\ \lambda)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{x-t}^{x+t} J_0\left(k\sqrt{Q(\lambda)}\right) d\xi\int\limits_{R^{n-1}} h(\xi, \eta)\, e^{-i(\lambda,\eta)}\, d\eta, \tag{13.8}$$

где

$$Q(\lambda)=[A^{ij}(\xi)-A^{ij}(x-t)]\lambda_i\lambda_j, \quad k=\sqrt{t+x-\xi}.$$

Из (13.8) с помощью обратного преобразования Фурье

$$u(t, x, y)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int\limits_{R^{n-1}}\hat{u}(t, x; \lambda)e^{i(y, \lambda)}\,d\lambda$$

после изменения порядка интегрирования по λ и ξ получается следующее представление решения задачи (13.3):

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{2}(2\pi)^{-(n-1)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{R^{n-1}}J_0\left(k\sqrt{Q(\lambda)}\right)d\lambda\int\limits_{R^{n-1}}h(\xi, \eta)e^{-i(\lambda, \eta-y)}\,d\eta. \tag{13.9}$$

Формула (13.9) допускает дальнейшие упрощения. Так как квадратичную форму $Q(\lambda)$ можно записать как интеграл $Q(\lambda)=\int\limits_{x-t}^{\xi}q(\sigma; \lambda)\,d\sigma$ от квадратичной формы $q(\sigma; \lambda)=a^{ij}(\sigma)\lambda_i\lambda_j$, положительно определенной при каждом значении σ, то $Q(\lambda)$ положительно определена при $\xi>x-t$. Поэтому существует невырожденное вещественное линейное преобразование

$$\mu=T\lambda, \tag{13.10}$$

приводящее форму $Q(\lambda)$ к сумме квадратов: $Q=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\mu_i^2$. Теперь в интеграле (13.9) удобно сделать замену переменных λ, η по формулам (13.10) и

$$\eta-y=T'z, \tag{13.10'}$$

где T' обозначает транспонированную матрицу преобразования (13.10). Указанные преобразования сохраняют скалярное произведение: $(\lambda, \eta-y)=(\mu, z)$ и элемент объема: $d\lambda\,d\mu=d\eta\,dz$. Поэтому формула (13.9) в новых переменных принимает вид

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{2}(2\pi)^{-(n-1)}\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{R^{n-1}}J_0(k|\mu|)\,d\mu\int\limits_{R^{n-1}}h(\xi, y+T'z)e^{-i(\mu, z)}\,dz, \tag{13.11}$$

где $|\mu|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1}\mu_i^2\right)^{1/2}$. Векторы в координатной форме записываются в строку, хотя алгебраические операции над ними производятся по обычным правилам действия с векторами-столбцами. Это соглашение, принятое для удобства записи, применяется без специальных оговорок.

Последующие упрощения формулы (13.11) связаны с вычислением входящих в нее интегралов. Непосредственное изменение порядка интегрирования по переменным μ и z не приводит к цели, так как соответствующий интеграл расходится. Поэтому нужно изучить внутренний интеграл в формуле (13.11) как преобразование Фурье обобщенной функции, задаваемой локально интегрируемой функцией $J_0(k|\mu|)$.

13.2. Преобразование Фурье функции Бесселя $J_0(a|\mu|)$. Рассмотрим обобщенную функцию, определяемую локально интегрируемой функцией $J_0(a|\mu|)=J_0\left(a\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i^2}\right)$ (a — произвольная неотрицательная постоянная) и действующую на основные функции $\psi(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ по формуле

$$\langle J_0(a|\mu|),\ \psi(\mu)\rangle=\int_{\mathbb{R}^{n-1}} J_0(a|\mu|)\,\psi(\mu)\,d\mu. \qquad (13.12)$$

Эта обобщенная функция является, очевидно, медленно растущей (Schwartz [1]), так что можно говорить о преобразовании Фурье $\mathcal{F}[J_0(a|\mu|)]$. В этом пункте удобно обозначать символом $\mathcal{F}$ преобразование Фурье как обычных, так и обобщенных функций.

Преобразованием Фурье функции $\varphi(z)$ из пространства быстро убывающих функций является функция

$$\psi(\mu)=\mathcal{F}[\varphi(z)]=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(z)\,e^{-i(\mu,z)}\,dz.$$

Обратное преобразование Фурье определяется формулой

$$\varphi(z)=\mathcal{F}^{-1}[\psi(\mu)]=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\psi(\mu)\,e^{i(\mu,z)}\,d\mu.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}[J_0(a|\mu|)]$ обобщенной функции $J_0(a|\mu|)$ определяется равенством

$$\langle\mathcal{F}[J_0(a|\mu|)],\ \varphi(z)\rangle=\langle J_0(a|\mu|),\ \psi(\mu)\rangle. \qquad (13.13)$$

Найдем преобразование Фурье обобщенной функции $J_0(a|\mu|)$ для случая нечетных $n\geqslant 3$. Этого будет достаточно для желаемого упрощения формулы (13.11). Пусть j_a — обобщенная функция, действующая на функции $\varphi(z^1, \ldots, z^{2m+2})$ по формуле

$$\langle j_a(z),\ \varphi(z)\rangle=\frac{d^m}{d\sigma^m}\left[\sigma^m\int_{S_{2m+2}}\varphi(\zeta\sqrt{\sigma})\,dS\right]\Bigg|_{\sigma=a^2}, \qquad (13.14)$$

где S_{2m+2} — единичная сфера с центром в начале координат в $(2m+2)$-мерном пространстве, $\zeta\in S_{2m+2}$, $z=\zeta\sqrt{\sigma}$.

Теорема. *Пусть* $n=2m+3,\ m\geqslant 0,\ \mu=(\mu_1, \ldots, \mu_{2m+2})$. *Тогда*

$$\mathcal{F}[J_0(a|\mu|)]=2^m j_a.$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\mathcal{F}^{-1}[j_a]=2^{-m}J_0(a|\mu|). \tag{13.15}$$

Так как обобщенная функция j_a имеет компактный носитель, то $\mathcal{F}^{-1}[j_a]=(2\pi)^{-(m+1)}\langle j_a(z), e^{i(\mu, z)}\rangle=$

$$=(2\pi)^{-(m+1)}\frac{d^m}{d\sigma^m}\left[\sigma^m\int\limits_{S_{2m+2}} e^{i\sqrt{\sigma}(\mu, \zeta)}\,dS\right]\Bigg|_{\sigma=a^2}.$$

Пусть θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ — угол между векторами μ и ζ. Тогда $(\mu, \zeta)=|\mu|\cos\theta$ и

$$\int\limits_{S_{2m+2}} e^{i\sqrt{\sigma}(\mu, \zeta)}\,dS=\Omega_{2m+1}\int\limits_0^\pi e^{i\sqrt{\sigma}|\mu|\cos\theta}(\sin\theta)^{2m}\,d\theta,$$

где $\Omega_{2m+1}=\dfrac{2\pi^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}$ — площадь поверхности единичной сферы в $(2m+1)$-мерном пространстве. Последний интеграл выражается через функцию Бесселя (см. Ватсон [1], стр. 34):

$$\int\limits_0^\pi e^{i\sqrt{\sigma}|\mu|\cos\theta}(\sin\theta)^{2m}\,d\theta=2^m\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(\sqrt{\sigma}|\mu|)^m}J_m(\sqrt{\sigma}|\mu|).$$

Отсюда

$$\mathcal{F}^{-1}[j_a]=\frac{d^m}{d\sigma^m}\left[\sigma^{\frac{m}{2}}|\mu|^{-m}J_m(\sqrt{\sigma}|\mu|)\right]\Big|_{\sigma=a^2}.$$

Правая часть полученной формулы упрощается введением переменной $x=|\mu|\sqrt{\sigma}$. Имеем $\dfrac{d}{d\sigma}=\dfrac{|\mu|^2}{2}\dfrac{d}{x\,dx}$, поэтому

$$\mathcal{F}^{-1}[j_a]=2^{-m}\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m[x^m J_m(x)]\big|_{x=a|\mu|}.$$

Равенство (13.15) получается отсюда с использованием формулы приведения для бесселевых функций:

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^m[x^\nu J_\nu(x)]=x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x).$$

13.3. Метод спуска. Представление решения для произвольных *n*. Возвратимся теперь к вычислениям, связанным с упрощением формулы (13.11) для решения задачи Коши. Сначала будет рассмотрен случай нечетных $n \geqslant 3$. Затем методом спуска (Адамар [1]) получается представление решения для четных $n \geqslant 2$.

Пусть $n=2m+3$, $m \geqslant 0$. Используя результаты § 13.2, формулу (13.11) можно записать в виде

$$u(t, x, y)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-(m+1)} \int\limits_{x-t}^{x+t} \langle J_0(k|\mu|), \mathcal{F}[\varphi_\xi(z)]\rangle\, d\xi,$$

где $\varphi_\xi(z)=h(\xi, y+T'z)$. Согласно определению (13.13) преобразования Фурье обобщенных функций

$$\langle J_0(k|\mu|), \mathcal{F}[\varphi_\xi(z)]\rangle = \langle \mathcal{F}[J_0(k|\mu|), \varphi_\xi(z)\rangle.$$

Поэтому

$$u(t, x, y)=\frac{1}{2}(2\pi)^{-(m+1)} \int\limits_{x-t}^{x+t} \langle \mathcal{F}[J_0(k|\mu|)], \varphi_\xi(z)\rangle\, d\xi. \quad (13.16)$$

Дальнейшее упрощение формулы (13.16) осуществляется на основе теоремы 13.2 и определения (13.14) обобщенной функции j_a с неотрицательным $a=k=\sqrt{x+t-\xi}$. В результате получается следующее окончательное представление решения задачи (13.3) в случае нечетных $n \geqslant 3$:

$$u(t, x, y)=$$

$$=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)} \int\limits_{x-t}^{x+t} \frac{\partial^m}{\partial\sigma^m}\left[\sigma^m \int\limits_{S_{2m+2}} h(\xi, y+\sqrt{\sigma}T'\zeta)\, dS\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi} d\xi. \quad (13.17)$$

В формуле (13.17) используются введенные ранее обозначения: T' — транспонированная матрица преобразования (13.10), $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^{2m+2})$ — точки единичной сферы S_{2m+2} в $(2m+2)$-мерном пространстве с центром в начале координат, по которой ведется интегрирование.

Пусть теперь $n=2m+2$, $m \geqslant 2$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши:

$$\begin{aligned} &\tilde{L}[u] \equiv u_{tt}-u_{xx}-a^{ij}(x-t)\, u_{y^i y^j}-u_{pp}=0, \\ &u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=h(x, y). \end{aligned} \quad (13.18)$$

Так как функция h не зависит от переменной p, то в силу единственности решения задачи Коши решение u задачи (13.18) также не зависит от этой переменной и тем самым является решением интересующей нас задачи Коши

$$\begin{aligned} &L[u] \equiv u_{tt}-u_{xx}-a^{ij}(x-t)\, u_{y^i y^j}=0, \\ &u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=h(x, y), \end{aligned} \quad (13.19)$$

где $y=(y^1, \ldots, y^{2m+1})$. Формулу для решения задачи (13.19) можно получить, воспользовавшись представлением (13.17), записанным для вспомогательной задачи (13.18). Пусть T — $(2m+1)\times(2m+1)$-матрица преобразования (13.10), соответствующего рассматриваемой задаче (13.19), и T' — транспонированная матрица. Тогда в качестве $(2m+2)\times(2m+2)$-матрицы преобразования (13.10), соответствующего вспомогательной задаче (13.18), можно взять матрицу

$$\tilde{T}=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & & & 0\\ & & & .\\ & T & & .\\ & & & .\\ & & & 0\\ 0 & 0\ldots 0 & & 1\end{pmatrix}. \tag{13.20}$$

Транспонированная матрица $\tilde{T}'$ имеет тот же вид с заменой T на T'. Пусть далее $\tilde{\zeta}=(\zeta^1, \ldots, \zeta^{2m+1}, \varkappa)\in S_{2m+2}$. Решение вспомогательной задачи (13.18) в соответствии с формулой (13.17) имеет вид

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{\partial^m}{\partial\sigma^m}\left[\sigma^m\int\limits_{S_{2m+2}}h(\xi, y+\sqrt{\sigma}\tilde{T}'\tilde{\zeta})\,dS\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi}d\xi. \tag{13.21}$$

Ввиду того, что функция h в задаче (13.18) не зависит от переменной p, интеграл по поверхности единичной сферы S_{2m+2} записывается в виде интеграла по $(2m+1)$-мерному шару. В самом деле, пусть K_{2m+1} — шар единичного радиуса в $(2m+1)$-мерном пространстве с центром в начале координат, и пусть $\zeta\in K_{2m+1}$; если $\tilde{\zeta}=(\zeta, \varkappa)\in S_{2m+2}$, то $\varkappa$ вещественно, $|\varkappa|\leqslant 1$. Пользуясь специальным видом (13.20) матрицы $\tilde{T}$, интеграл по сфере S_{2m+2} в формуле (13.21) можно переписать в виде

$$\int\limits_{S_{2m+2}}h(\xi, y+\sqrt{\sigma}\tilde{T}'\tilde{\zeta})\,dS=2\int\limits_{K_{2m+1}}h(\xi, y+\sqrt{\sigma}T'\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}. \tag{13.22}$$

Здесь использованы равенство $\tilde{T}'\tilde{\zeta}=(T'\zeta, \varkappa)$ и стандартное преобразование интегралов по поверхности сферы в $(2m+2)$-мерном пространстве по функций, не зависящих от одной из переменных, к интегралам по $(2m+1)$-мерному шару. Формулы (13.21) и (13.22) дают следующее представление решения задачи (13.19):

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{2}\pi^{-(m+1)}\int\limits_{x-t}^{x+t}\frac{\partial^m}{\partial\sigma^m}\left[\sigma^m\int\limits_{K_{2m+1}}h(\xi, y+\sqrt{\sigma}\,T'\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi}d\xi. \tag{13.23}$$

Полученные результаты могут быть сформулированы в виде следующей теоремы (Ибрагимов, Мамонтов [2]).

Теорема *Решение задачи Коши*

$$u_{tt}-u_{xx}-\sum_{i,j=1}^{n-1} a^{ij}(x-t)\,u_{y^iy^j}=0, \qquad t>0,$$
$$u|_{t=0}=0, \qquad u_t|_{t=0}=h(x, y)$$

для нечетных $n\geqslant 3$ *дается формулой*

$$u(t, x, y)=$$
$$=\frac{1}{4}\pi^{-\frac{n-1}{2}}\int_{x-t}^{x+t}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left[\sigma^{\frac{n-3}{2}}\int_{S_{n-1}} h(\xi, y+\sqrt{\sigma}T'\zeta)\,dS\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi} d\xi, \tag{13.24}$$

а для четных $n\geqslant 2$ — *формулой*

$$u(t, x, y)=\frac{1}{2}\pi^{-\frac{n}{2}}\int_{x-t}^{x+t}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left[\sigma^{\frac{n-2}{2}}\int_{K_{n-1}} h(\xi, y+\sqrt{\sigma}T'\zeta)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d\zeta}{\sqrt{1-|\zeta|^2}}\right]\Bigg|_{\sigma=x+t-\xi} d\xi, \tag{13.25}$$

где S_{n-1} *и* K_{n-1} — *сфера и шар единичного радиуса в* $(n-1)$-*мерном пространстве с центром в начале координат, переменная интегрирования* $\zeta=(\zeta^1, \ldots, \zeta^{n-1})$ *пробегает сферу* S_{n-1} *и шар* K_{n-1} *соответственно, а* T' *обозначает транспонированную матрицу преобразования* (13.10).

Замечание. Невырожденная матрица T, участвующая в теореме, определена неоднозначно. Единственным требованием, накладываемым на нее, является выполнение равенства

$$A(\xi)-A(x-t)=T'T,$$

где $A(\sigma)$ представляет собой $(n-1)\times(n-1)$-матрицу с элементами $A^{ij}(\sigma)=\int a^{ij}(\sigma)\,d\sigma$. Этим условием матрица T определяется с точностью до умножения на произвольную ортогональную матрицу. Поэтому в качестве T можно взять, например, симметрическую положительно определенную матрицу $T=[A(\xi)-A(x-t)]^{1/2}$, которая бесконечно дифференцируема по переменным x, t и $\xi>x-t$.

13.4. Обсуждение принципа Гюйгенса. На основе полученных результатов легко доказывается следующая

Теорема. *Для любого нечетного* $n\geqslant 3$ *волновое уравнение*

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} g^{ij}u_{,ij}+\frac{n-1}{4n}Ru=0 \tag{13.26}$$

в лоренцевом пространстве V_{n+1} с нетривиальной конформной группой удовлетворяет принципу Гюйгенса.

Доказательство. Формулы (13.24) и (13.4) показывают, что решение задачи Коши (13.2) определяется значениями начальных данных f, g и их производных до некоторого порядка на $(n-1)$-мерном многообразии в n-мерном пространстве переменных x, y. Из теории Адамара [1] следует, что это многообразие с необходимостью является пересечением характеристического коноида и гиперплоскости $t=0$, несущей начальные данные *). Это означает, что уравнение (13.1) удовлетворяет принципу Гюйгенса, так как принципу Гюйгенса связан только со свойствами самого уравнения, и его справедливость не зависит от вида начального многообразия. Многомерный вариант леммы 12.2.1 и теорема 8.5 завершают доказательство.

Нетрудно показать, что в случае классического волнового уравнения теорема 13.3 приводит к известной формуле для решения задачи Коши

$$\square_{n+1}u=0, \quad u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=h(x), \tag{13.27}$$

где $x=(x^1, \ldots, x^n)$. При этом достаточно рассмотреть нечетные значения $n\geqslant 3: n=2m+3$. Формула Тедоне для решения задачи (13.27) (см. Tedone [1], Курант [1]) в использованных выше обозначениях записывается в виде

$$u(t, x)=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m\left[t^{2m+1}\int\limits_{S_{2m+3}} h(x+t\alpha)\,dS\right], \tag{13.28}$$

где $\alpha\in S_{2m+3}$ — переменная интегрирования. Формула (13.28) приводится к виду (13.17) следующими преобразованиями. Удобно сначала переобозначить переменные: $x=x^1$, $y^i=x^{i+1}$ $(i=1, \ldots, 2m+2)$, и в формуле (13.28) сделать замену переменных интегрирования, введя переменные ξ и ζ^i $(i=1, \ldots, 2m+2)$ согласно формулам

$$\alpha^1=\frac{\xi-x}{t}, \quad \alpha^{i+1}=\frac{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}}{t}\zeta^i.$$

Тогда $x-t\leqslant\xi\leqslant x+t$ и $|\zeta|=1$, где $\zeta=(\zeta^1, \ldots, \zeta^{2m+2})$. После указанных замен переменных формула (13.28) перепишется в виде

$$u(t, x, y)=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)}\times$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{S_{2m+1}}[t^2-(\xi-x)^2]^m h\left(\xi, y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\,\zeta\right)dS$$

---

*) В этом можно убедиться также путем сравнения многообразия, по которому производится интегрирование в формуле (13.24), с уравнением характеристического коноида $\Gamma(x_0, x)=0$, воспользовавшись явным видом (12.24) функции $\Gamma(x_0, x)$.

с $y=(y^1, \ldots, y^{2m+2})$. Здесь использована связь между элементами dS_{2m+2} и dS_{2m+3} площади поверхности единичной сферы в пространствах размерностей $2m+2$ и $2m+3$ соответственно:

$$dS_{2m+3}=\frac{[t^2-(\xi-x)^2]^m}{t^{2m+1}}\,dS_{2m+2}\,d\xi.$$

Выражение $t^2-(\xi-x)^2$ обращается в нуль при $\xi=x-t$ и $\xi=x+t$ вместе со всеми производными по t^2 до порядка $m-1$ включительно. Поэтому

$$u(t,\ x,\ y)=\frac{1}{4}\pi^{-(m+1)}\times$$
$$\times\int\limits_{x-t}^{x+t}d\xi\int\limits_{S_{2m+2}}\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m[(t^2-(\xi-x)^2)^m h(\xi,\ y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\,\zeta)]dS.$$

Для завершения преобразования формулы (13.28) к виду (13.17) достаточно убедиться, что справедливо тождество

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)^m[(t^2-(\xi-x)^2)^m h(\xi,\ y+\sqrt{t^2-(\xi-x)^2}\,\zeta)]=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^m[\sigma^m h(\xi,\ y+\sqrt{\sigma(\xi-x+t)}\,\zeta)]\Big|_{\sigma=x+t-\xi}. \qquad (13.29)$$

Если вместо t^2 ввести новую переменную $s=t^2-(\xi-x)^2$, то левая часть равенства (13.29) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m[s^m h(\xi,\ y+\zeta\sqrt{s})]\Big|_{s=t^2-(\xi-x)^2}.$$

Правая часть равенства (13.29) приводится к тому же виду с помощью замены σ на $s=\sigma(\xi-x+t)$. Тождество (13.29) доказано.

Легко видеть, что полученное в § 12.3 решение задачи Коши для уравнения (12.25) также содержится в теореме 13.3. Действительно, при $n=3$, $a^{11}=f$, $a^{12}=\varphi$, $a^{22}=1$ формула (13.24) принимает вид (12.50), если в качестве T' выбрать матрицу

$$T'=\frac{1}{\sqrt{x+t-\xi}}\begin{pmatrix}A & 0\\ B & C\end{pmatrix}$$

с функциями A, B и C, определенными в (12.49).

Как отмечалось в § 8.5, множество лоренцевых пространств с нетривиальной конформной группой не исчерпывается конформно-плоскими пространствами. В соответствии с этим уравнение (13.1) с произвольными коэффициентами $a^{ij}\ (x-t)$ нельзя преобразовать в классическое волновое уравнение. Например, в простом случае одного переменного коэффициента, соответствующего формулам (8.33), такое преобразование возможно только при условии (8.34).

13.5. Нарушение связи принципа Гюйгенса с конформной инвариантностью. Уравнения Штельмахера и Лагнеза выявляют ослабление связи принципа Гюйгенса со свойством «максимальной» инвариантности уравнения при переходе от V_4 к пространствам более высокой размерности. Наиболее простое из них, уравнение (11.27), в случае $p \neq 0$ принадлежит к числу уравнений с группой изометрий максимального порядка (см. (10.47)). Его удобно переписать в ковариантной форме (10.45). Для этого заметим, что дифференциальному оператору $-Kt^2 \square_{n+1}$ соответствует риманово пространство V_{n+1} постоянной отрицательной кривизны K. Если Δ — волновой оператор (10.15) в этом пространстве, то формула (10.50) дает

$$-Kt^2 \square_{n+1} u = t^{-\frac{n-1}{2}} \Delta \left(u t^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

Поэтому

$$[-Kt^2 \square_{n+1} + Kp(p+1)] \left(u t^{-\frac{n-1}{2}} \right) = t^{-\frac{n-1}{2}} [\Delta + Kp(p+1)] u.$$

Следовательно, (11.27) эквивалентно уравнению (10.45) с параметром $\lambda = Kp(p+1)$. Аналогичное уравнение в пространстве положительной постоянной кривизны получается при рассмотрении вместо (11.27) другого уравнения Штельмахера (11.25), которое получается заменой параметра λ_0 на любой из параметров λ_i, $i \neq 0$; все они эквивалентны между собой, поэтому достаточно рассмотреть, например, уравнение

$$\square_{n+1} u + \frac{p(p+1)}{(x^1)^2} u = 0.$$

Таким образом, в пространстве V_{n+1} постоянной кривизны K при любом нечетном $n \geqslant 5$ уравнение

$$\Delta u + Kp(p+1) u = 0 \tag{13.30}$$

удовлетворяет принципу Гюйгенса для $p = 0, 1, \ldots, \frac{n-3}{2}$. Из результатов Штельмахера следует, что для уравнения (10.45) принцип Гюйгенса может выполняться только при указанных здесь значениях параметра λ. Так как скалярная кривизна пространства V_{n+1} постоянной кривизны в силу условия (8.11) равна $R = -n(n+1)K$, то после подстановки выражения (10.15) волнового оператора Δ уравнение (13.30) принимает вид

$$g^{ij} u_{,ij} + K \left[p(p+1) - \frac{1}{4}(n-1)(n+1) \right] u = 0.$$

Другие уравнения Штельмахера и Лагнеза инвариантны только относительно некоторых подгрупп группы, допускаемой уравнением (13.30). Возможно, что в многомерном случае удастся установить связь принципа Гюйгенса со свойством максимальной инвариантности на основе теории групп касательных преобразований высшего порядка.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ГЛАВА 3

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРУПП ЛИ—БЕКЛУНДА

§ 14. Касательные преобразования Ли и теорема Беклунда

14.1. Контактные преобразования. Естественное обобщение идеи продолжения точечных преобразований (§ 4.1) приводит к касательным, или контактным *), преобразованиям Ли (Lie [6], том 4). При этом рассматривается группа G (для простоты можно ограничиться однопараметрическими группами) точечных преобразований

$$
\begin{aligned}
&x'^i = f^i\left(x, u, \underset{1}{u}, a\right),\\
&u'^\alpha = \varphi^\alpha\left(x, u, \underset{1}{u}, a\right),\\
&u_i'^\alpha = \psi_i^\alpha\left(x, u, \underset{1}{u}, a\right), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad \alpha = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

в пространстве независимых переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$, $\underset{1}{u} = (u_1^1, u_2^1, \ldots, u_n^m)$. Действие группы G продолжается на переменные dx, du, $\underset{1}{du}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
dx'^i &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j}dx^j + \frac{\partial f^i}{\partial u^\beta}du^\beta + \frac{\partial f^i}{\partial u_j^\beta}du_j^\beta,\\
du'^\alpha &= \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^j}dx^j + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u_j^\beta}du_j^\beta,\\
du_i'^\alpha &= \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j}dx^j + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta + \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial u_j^\beta}du_j^\beta,
\end{aligned}
\tag{14.2}
$$

в результате чего получается продолженная группа $\tilde{G}$, действующая в пространстве $\left(x, u, \underset{1}{u}, dx, du, \underset{1}{du}\right)$. Преобразования (14.1) называются *контактными*, если группа $\tilde{G}$ сохраняет уравнение

*) В дальнейшем термин «контактный» используется исключительно для касания первого порядка, тогда как термин «касательный»—в общем случае касания произвольного (в частности, первого и бесконечного) порядка.

(4.7), выражающее условие касания первого порядка. Ли рассматривал только случай $m=1$, так как, оказывается, при $m>1$ контактные преобразования сводятся к точечным *):

Теорема. *Если* $m>1$, *то группа* G *контактных преобразований* (14.1) *является первым продолжением* (*в смысле* § 4.1) *группы точечных преобразований* (4.1).

Доказательство. Если

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$$

— оператор группы G, где

$$\xi^i=\frac{\partial f^i}{\partial a}\bigg|_{a=0},\quad \eta^\alpha=\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial a}\bigg|_{a=0},\quad \zeta_i^\alpha=\frac{\partial\psi_i^\alpha}{\partial a}\bigg|_{a=0},$$

то оператор группы $\tilde{G}$ имеет вид (дифференцирование по du_i^α, которое здесь не используется, опущено)

$$\tilde{X}=X+\tilde{\xi}^i\frac{\partial}{\partial(dx^i)}+\tilde{\eta}^\alpha\frac{\partial}{\partial(du^\alpha)}$$

с

$$\tilde{\xi}^i=\frac{\partial(dx'^i)}{\partial a}\bigg|_{a=0},\quad \tilde{\eta}^\alpha=\frac{\partial(du'^\alpha)}{\partial a}\bigg|_{a=0}.$$

В силу (14.2) величины $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ и ξ, η связаны соотношениями

$$\tilde{\xi}^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta}du^\beta+\frac{\partial\xi^i}{\partial u_j^\beta}du_j^\beta,$$

$$\tilde{\eta}^\alpha=\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u_j^\beta}du_j^\beta.$$

С помощью полученного выражения для оператора $\tilde{X}$ критерий инвариантности уравнения (4.7):

$$\tilde{X}\omega^\alpha\big|_{\omega=0}=0,\qquad \alpha=1,\ \ldots,\ m,$$

можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^j}+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta}u_j^\beta-u_i^\alpha\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}-u_i^\alpha u_j^\beta\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta}-\zeta_j^\alpha\right)dx^j+\left(\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u_j^\beta}-u_i^\alpha\frac{\partial\xi^i}{\partial u_j^\beta}\right)du_j^\beta=0.$$

Так как здесь все величины dx^j, du_j^β играют роль независимых переменных, то коэффициенты при них должны обращаться в нуль. Следовательно, функции $\xi^i\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$, $\eta^\alpha\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$, $\zeta_i^\alpha\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$

*) По-видимому, этот факт был хорошо известен во времена Ли. Хотя в классической литературе мне не встречалось явное упоминание о нем, но нетрудно заметить, что приводимая здесь теорема эквивалентна теореме Беклунда (§ 14.2) о несуществовании касательных преобразований конечного порядка >1. См. также Ибрагимов [1], §§ 2, 3 и Anderson & Ibragimov [2], стр. 39.

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\zeta_i^\alpha = \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} - u_j^\alpha \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta} \right), \quad \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u_i^\beta} - u_j^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial u_i^\beta} = 0,$$

или

$$\zeta_i^\alpha = \frac{\partial W^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial W^\alpha}{\partial u^\beta}, \quad \xi^i \delta_\beta^\alpha + \frac{\partial W^\alpha}{\partial u_i^\beta} = 0, \tag{14.3}$$

где

$$W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha. \tag{14.4}$$

При $m > 1$ второе семейство уравнений (14.3) дает

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial u_i^\beta} = 0, \qquad \alpha \neq \beta,$$

$$\frac{\partial W^1}{\partial u_i^1} = \frac{\partial W^2}{\partial u_i^2} = \ldots = \frac{\partial W^m}{\partial u_i^m},$$

откуда

$$W^\alpha = U^\alpha (x, u) - u_i^\alpha V^i (x, u)$$

с произвольными функциями U^α, V^i. Подстановка полученной формулы в уравнения (14.3), (14.4) приводит к выражениям

$$\xi^i = V^i (x, u), \qquad \eta^\alpha = U^\alpha (x, u),$$
$$\zeta_i^\alpha = D_i (\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i (\xi^j)$$

для координат оператора X. Сравнение с (4.4) и (4.8) завершает доказательство теоремы.

В случае $m = 1$ из уравнений (14.3), (14.4) получается хорошо известная инфинитезимальная характеристика касательных преобразований Ли: *оператор*

$$X = \xi^i \left(x, u, \underset{1}{u} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \left(x, u, \underset{1}{u} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_i \left(x, u, \underset{1}{u} \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \tag{14.5}$$

является инфинитезимальным оператором группы контактных преобразований тогда и только тогда, когда

$$\xi^i = -\frac{\partial W}{\partial u_i}, \quad \eta = W - u_i \frac{\partial W}{\partial u_i}, \quad \zeta_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial W}{\partial u} \tag{14.6}$$

с некоторой функцией $W = W \left(x, u, \underset{1}{u} \right)$.

Классическим примером контактного преобразования является преобразование Лежандра

$$x'^i = u_i, \quad u' = u_i x^i - u, \quad u'_i = x^i;$$

сохранение условия касания

$$du - u_i \, dx^i = 0 \tag{14.7}$$

очевидно, так как в данном случае

$$du' - u'_i \, dx'^i = -(du - u_i \, dx^i).$$

Контактные преобразования появляются в оптике в виде геометрического построения Гюйгенса (см., например, Baker & Copson [1], § 2), а их роль в механике обсуждается в любом обстоятельном учебнике по аналитической механике. Что касается литературы по теории групп контактных преобразований и их применениям в механике и геометрии, то кроме уже цитированного 4-го тома Собрания сочинений С. Ли этой теме посвящены книги Lie & Scheffers [1] и Lie & Engel [1], том 2; следует еще назвать вторую часть книги Клейна [3], в особенности насыщенный идеями § 76.

Благодаря работам Ли контактные преобразования заняли особое место в теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Объясняется это тем, что под действием контактных преобразований всякое уравнение первого порядка переходит снова в уравнение первого порядка, а решения исходного уравнения — в решения преобразованного уравнения, причем любые два уравнения можно перевести друг в друга подходящим контактным преобразованием. Можно сказать, что группа контактных преобразований действует на множестве уравнений первого порядка, причем это действие транзитивно; это связано с тем, что в качестве производящей функции W (формула (14.6)) группы контактных преобразований можно выбрать произвольную функцию от x, u, $\underset{1}{u}$. Естественно спросить, нельзя ли построить подобную теорию преобразований для уравнений более высокого порядка, введя в рассмотрение касательные преобразования высших порядков. Эта задача была поставлена еще в основополагающей работе С. Ли по теории инвариантов контактных преобразований (Lie [1], стр. 223) в виде следующих двух вопросов:

1. Существуют ли преобразования, не являющиеся контактными, но сохраняющие условия касания высшего порядка?

2. Допускают ли дифференциальные уравнения в частных производных порядка выше первого такие преобразования, которые не являются контактными?

Ли считал, что ответ на первый из этих вопросов должен быть отрицательным, а на второй — положительным, и подчеркивал важность реализации этой второй возможности обобщения контактных преобразований. Вскоре Lie [2] установил, что такое обобщение действительно возможно: он построил соответствующее преобразование, придав аналитическую форму известной геометрической конструкции Bianchi [1], переводящей любую поверхность отрицательной постоянной кривизны снова в поверхность той же кривизны. Справедливость гипотезы Ли об отсутствии касательных преобразований высшего порядка подтвердил Bäcklund [1, 2]: он доказал, что всякое (однозначное) преобразование, сохраняющее условия касания конечного порядка, является контактным. Эти результаты кратко излагаются ниже; их подробное обсуждение читатель может найти в нашей недавно вышедшей книге (Anderson & Ibragimov [2], глава 1).

14.2. Касательные преобразования конечного порядка. Рассматриваются преобразования

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}, a\right), \\ u'^\alpha &= \varphi^\alpha\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}, a\right), \\ u'^\alpha_{i_1 \ldots i_s} &= \psi^\alpha_{i_1 \ldots i_s}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}, a\right), \qquad s = 1, \ldots, k, \end{aligned} \tag{14.8}$$

переменных $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$,

$\underset{s}{u} = \{u^\alpha_{i_1 \ldots i_s} \mid \alpha = 1, \ldots, m;\ i_1, \ldots, i_s = 1, \ldots, n\}$, $s = 1, \ldots, k$,

где $u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}$ симметричны по нижним индексам.

Определение. Преобразование T вида (14.8) называется *касательным преобразованием порядка* k, если его продолжение на дифференциалы dx, du, $d\underset{1}{u}$, ... сохраняет пфаффову систему

$$\Omega_k\colon\ \omega = 0,\ \underset{1}{\omega} = 0,\ \ldots,\ \underset{k-1}{\omega} = 0, \tag{14.9}$$

где $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^m)$, $\underset{s}{\omega} = \{\omega^\alpha_{i_1 \ldots i_s} \mid \alpha = 1, \ldots, m;\ i_1, \ldots, i_s = 1, \ldots, n\}$ — дифференциальные формы с компонентами

$$\omega^\alpha = du^\alpha - u^\alpha_j dx^j,\quad \omega^\alpha_{i_1 \ldots i_s} = du^\alpha_{i_1 \ldots i_s} - u^\alpha_{i_1 \ldots i_s j}\, dx^j. \tag{14.10}$$

Теорема Беклунда о несуществовании касательных преобразований конечного порядка k, отличных от контактных преобразований, относится к случаю $m = 1$ и гладких однозначных и однозначно обратимых отображений T. Bäcklund [1] пользовался следующими геометрическими рассуждениями (для простоты берется случай $n = 1$, $k = 2$). Пусть в плоскости (x, u) заданы две произвольные гладкие кривые C_1 и C_2, имеющие касание первого порядка в точке P. Нужно показать, что кривые $C_1' = T(C_1)$ и $C_2' = T(C_2)$ имеют касание первого порядка в точке $P' = T(P)$. Для этого достаточно заметить, что при произвольно выбранных точках $P_1 \in C_1$ и $P_2 \in C_2$ можно построить гладкую кривую C, имеющую касание второго порядка с C_1 и C_2 в точках P_1 и P_2 соответственно. По предположению теоремы кривая $C' = T(C)$ будет иметь касание второго порядка с C_1' и C_2' в точках $P_1' = T(P_1)$ и $P_2' = T(P_2)$; пусть τ_1, τ_2 — соответствующие касательные в этих точках. При любой заданной окрестности точки P' можно выбрать точки P_1, P_2 так, чтобы их образы P_1' и P_2' принадлежали этой окрестности. Поэтому касательные τ_1 и τ_2 в пределе совпадают и дают касательную к кривым C_1' и C_2' в точке P'.

Приведенные рассуждения можно обобщить на произвольные m, n и k. Однако удобнее пользоваться инфинитезимальным критерием инвариантности уравнений (14.9), предполагая, что преобразования (14.8) образуют однопараметрическую группу (Ибрагимов [1], Ibragimov & Anderson [1]). Пусть G—группа касательных преобразований (14.8) порядка $k<\infty$ с инфинитезимальным оператором

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}+\ldots+\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_k}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\ldots i_k}},\tag{14.11}$$

где

$$\xi^i=\frac{\partial f^i}{\partial a}\Big|_{a=0},\quad \eta^\alpha=\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0},\quad\ldots,\quad \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}=\frac{\partial\psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial a}\Big|_{a=0},$$
$$s=1,\ \ldots,\ k.$$

Оператор (14.11) продолжается на дифференциалы dx, du, $d\underset{1}{u}$, ..., $d\underset{k-1}{u}$ по формулам

$$\tilde X=X+\tilde\xi^i\frac{\partial}{\partial(dx^i)}+\tilde\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial(du^\alpha)}+\tilde\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial(du_i^\alpha)}+\ldots$$
$$\ldots+\tilde\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_{k-1}}\frac{\partial}{\partial\left(du^\alpha_{i_1\ldots i_{k-1}}\right)};\tag{14.12}$$

$$\tilde\xi^i=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta}du^\beta+\ldots+\frac{\partial\xi^i}{\partial u^\beta_{j_1\ldots j_k}}du^\beta_{j_1\ldots j_k},$$
$$\tilde\eta^\alpha=\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta}du^\beta+\ldots+\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta_{j_1\ldots j_k}}du^\beta_{j_1\ldots j_k},\tag{14.13}$$
$$\tilde\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}=\frac{\partial\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial x^j}dx^j+\frac{\partial\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta}du^\beta+\ldots+\frac{\partial\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta_{i_1\ldots j_k}}du^\beta_{j_1\ldots j_k}.$$

Критерий инвариантности уравнений (14.9):

$$\tilde X\omega=0,\quad \underset{1}{\tilde X}\omega=0,\quad\ldots,\quad \underset{k-1}{\tilde X}\omega=0\ \text{на}\ \Omega_k,$$

в силу (14.12), (14.10) записывается в виде

$$(\tilde\eta^\alpha-\tilde\xi^j u_j^\alpha-\zeta_j^\alpha\,dx^j)|_{\Omega_k}=0,$$
$$(\tilde\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}-\tilde\xi^j u^\alpha_{i_1\ldots i_s j}-\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s j}\,dx^j)|_{\Omega_k}=0,\tag{14.14}$$
$$s=1,\ \ldots,\ k-1.$$

Из уравнений (14.9), (14.10) можно выразить дифференциалы du^α, ..., $du^\alpha_{i_1\ldots i_{k-1}}$ через независимые величины $u^\alpha_{i_1}, \ldots, u^\alpha_{i_1\ldots i_k}$, dx^i. Подстановка этих выражений в уравнения (14.14) с использованием формул (14.13) и дифференциальных операторов

$$\underset{s}{D}_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+u_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+u_{ii_1}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha}+\ldots+u_{ii_1\ldots i_s}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{i_1\ldots i_s}^\alpha} \tag{14.15}$$

дает (так как здесь величины dx^i и $du_{i_1\ldots i_k}^\alpha$ играют роль независимых переменных)

$$\begin{gathered}\zeta_i^\alpha=\underset{k-1}{D_i}(\eta^\alpha)-u_j^\alpha\underset{k-1}{D}{}_i(\xi^j),\\ \zeta_{ii_1\ldots i_s}^\alpha=\underset{k-1}{D_i}(\zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha)-u_{i_1\ldots i_sj}^\alpha\underset{k-1}{D_i}(\xi^j),\\ s=1,\ \ldots,\ k-1;\end{gathered} \tag{14.16}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u_{i_1\ldots i_k}^\beta}-u_j^\alpha\frac{\partial\xi^j}{\partial u_{i_1\ldots i_k}^\beta}=0,\\ \frac{\partial\zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}-u_{i_1\ldots i_sj}^\alpha\frac{\partial\xi^j}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}=0,\ s=1,\ \ldots,\ k-1.\end{gathered} \tag{14.17}$$

Уравнения (14.17) удобно переписать с помощью функций

$$W^\alpha=\eta^\alpha-\xi^ju_j^\alpha,\qquad W_{i_1\ldots i_s}^\alpha=\zeta_{i_1\ldots i_s}^\alpha-\xi^ju_{i_1\ldots i_sj}^\alpha \tag{14.18}$$

в следующей форме:

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}=0,\qquad\frac{\partial W_{i_1\ldots i_s}^\alpha}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}=0,\qquad s=1,\ \ldots,\ k-2, \tag{14.19}$$

$$\frac{\partial W_{i_1\ldots i_{k-1}}^\alpha}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}=\xi^{j_k}\delta_\beta^\alpha\,\delta_{i_1\ \ldots\ i_{k-1}}^{j_1\ldots j_{k-1}}. \tag{14.20}$$

Пусть сначала $m>1$. Тогда из (14.20) следует, что

$$\frac{\partial W_{i_1\ldots i_{k-1}}^\alpha}{\partial u_{j_1\ldots j_k}^\beta}=0,\qquad\alpha\neq\beta, \tag{14.21}$$

для всех значений индексов $\alpha,\ i_1,\ \ldots,\ i_{k-1},\ j_1,\ \ldots,\ j_k$ и

$$\xi^j=-\frac{\partial W_{i_1\ldots i_{k-1}}^\alpha}{\partial u_{i_1\ldots i_{k-1}j}^\alpha} \tag{14.22}$$

(в последней формуле ни по каким индексам суммирования нет). Из (14.22) сразу следует, что величины ξ^i не зависят от $\underset{k}{u}$, и общее решение уравнений (14.22) имеет вид

$$W_{i_1\ldots i_{k-1}}^\alpha=U_{i_1\ldots i_{k-1}}^\alpha-\xi^ju_{i_1\ldots i_{k-1}j}^\alpha$$

с произвольными функциями $U^{\alpha}_{i_1 \ldots i_{k-1}}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k-1}{u}\right)$. **Из уравнений** (14.18), (14.19) следует, что координаты ξ^i, η^α, $\ldots$, $\zeta^{\alpha}_{i_1 \ldots i_{k-1}}$ оператора (14.11) не зависят от $\underset{k}{u}$. Это означает, что в **формулах** (14.8) величины $x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k-1}{u}$ преобразуются независимо от $\underset{k}{u}$. Индукция и теорема 14.1 дают, что $\xi^i = \xi^i(x, u)$, $\eta^\alpha = \eta^\alpha(x, u)$, а координаты $\zeta^{\alpha}_{i_1 \ldots i_s}$ даются формулами (14.16). Следовательно, в случае $m > 1$ группа G представляет собой k раз продолженную группу точечных преобразований в пространстве (x, u).

Пусть теперь $m = 1$. Если $n > 1$, то уравнения (14.20) дают

$$\xi^j = -\frac{\partial W_{i_1 \ldots i_{k-1}}}{\partial u_{i_1 \ldots i_{k-1} j}} \quad \text{(суммирования нет)},$$

$$\left.\frac{\partial W_{i_1 \ldots i_{k-1}}}{\partial u_{j_1 \ldots j_{k-1} j}}\right|_{(j_1, \ldots, j_{k-1}) \neq (i_1, \ldots, i_{k-1})} = 0.$$

Отсюда, как и выше, следует, что ξ^i не зависят от $\underset{k}{u}$ и

$$W_{i_1 \ldots i_{k-1}} = U_{i_1 \ldots i_{k-1}}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k-1}{u}\right) - \xi^j\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k-1}{u}\right) u_{i_1 \ldots i_{k-1} j}.$$

По индукции получается, что координаты ξ^i, η, ζ_i зависят **только** от x, u, $\underset{1}{u}$, а остальные координаты $\zeta_{i_1 \ldots i_s}$ $(s = 2, \ldots, k)$ **даются** обычными формулами продолжения. Следовательно, в этом случае G представляет собой $(k-1)$-е продолжение группы контактных преобразований.

Сказанное выше верно и в случае $m = n = 1$. Уравнения (14.18)—(14.20) дают

$$W = \eta - \xi u_1, \quad W_1 = \zeta_1 - \xi u_2, \quad \ldots, \quad W_{k-1} = \zeta_{k-1} - \xi u_k, \tag{14.23}$$

где $u_s = \underset{s}{u}$, $\zeta_s = \zeta_{\underbrace{1 \ldots 1}_{s}}$, и

$$\frac{\partial W}{\partial u_k} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_k} = 0, \tag{14.24}$$

$$\xi = -\frac{\partial W_{k-1}}{\partial u_k}. \tag{14.25}$$

С помощью (14.23) и (14.16) получаются равенства

$$\underset{k-1}{D}(W_{k-2}) = \underset{k-1}{D}(\zeta_{k-2}) - u_{k-1} \underset{k-1}{D}(\xi) - \xi u_k = \zeta_{k-1} - \xi u_k = W_{k-1},$$

или, используя определение оператора $\underset{k-1}{D}$,

$$W_{k-1} = \frac{\partial W_{k-2}}{\partial x} + \ldots + u_{k-1} \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-2}} + u_k \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}}.$$

Это равенство вместе с (14.23) и (14.25) дает

$$\xi = -\frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}}, \quad \eta = W - u_1 \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}},$$
$$\zeta_1 = W_1 - u_2 \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}}, \ \ldots, \ \zeta_{k-2} = W_{k-2} - u_{k-1} \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-1}},$$
$$\zeta_{k-1} = \frac{\partial W_{k-2}}{\partial x} + u_1 \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u} + \ldots + u_{k-1} \frac{\partial W_{k-2}}{\partial u_{k-2}}.$$

Отсюда с учетом уравнений (14.24) следует, что $\xi, \eta, \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$ зависят только от $x, u, u_1, \ldots, u_{k-1}$, и дальше вопрос решается по индукции. Таким образом, справедлива теорема Беклунда в следующей формулировке.

Теорема. *Всякая группа касательных преобразований порядка $k < \infty$ является продолжением группы точечных преобразований, если $m > 1$, и группы контактных преобразований, если $m = 1$.*

14.3. Преобразование Бианки — Ли. В трехмерном евклидовом пространстве рассматривается поверхность S постоянной отрицательной кривизны $-1/a^2$, где a — произвольная положительная постоянная; этой поверхности сопоставляется другая поверхность S' так, что каждой точке $M \in S$ соответствует точка $M' \in S'$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $|MM'| = a$, где $|MM'|$ — расстояние между M и M';

2) $\angle(\tau, \tau') = 90°$, где τ, τ' — касательные плоскости к S, S' в точках M, M' соответственно;

3) $MM' \in \tau \cap \tau'$.

Bianchi [1] доказал, что при этих условиях S' также представляет собой поверхность постоянной кривизны $-1/a^2$.

Для изучения свойств семейства преобразованных поверхностей S' Ли выразил геометрическое построение Бианки в эквивалентной аналитической форме. В основу рассмотрения кладется дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$s^2 - rt = \frac{1 + p^2 + q^2}{a^2}, \tag{14.26}$$

которому удовлетворяет любая поверхность постоянной кривизны $-1/a^2$; здесь использованы обычные обозначения p, q, r, s, t для первых и вторых частных производных от z по x и y. Пусть (x, y, z) и (x', y', z') — координаты точек $M \in S$ и $M' \in S'$, а (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') — соответствующие элементы поверхности. В этих обозначениях условия 1)—3) построения Бианки принимают вид

$$\begin{aligned} &(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = a^2, \\ &p(x-x') + q(y-y') - (z-z') = 0, \\ &p'(x-x') + q'(y-y') - (z-z') = 0, \\ &pp' + qq' + 1 = 0. \end{aligned} \tag{14.27}$$

Для любого заданного элемента поверхности (x, y, z, p, q) уравнения (14.27) задают четыре соотношения между пятью величинами x', y', z', p', q' и, следовательно, определяют ∞^1 элементов поверхности. Будем считать z заданной функцией от x, y и отождествлять величины p, q, r, s, t с частными производными z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}. Пусть функция $z=z(x, y)$ задает поверхность S. Если элемент (x', y', z', p', q'), связанный с элементом поверхности $(x, y, z, p, q) \in S$ соотношениями (14.27), удовлетворяет условию интегрируемости

$$\frac{\partial p'}{\partial y'}-\frac{\partial q'}{\partial x'}=0 \quad \text{на} \quad S, \tag{14.28}$$

то говорят, что *поверхность* $S': z'=z'(x', y')$ *получена из* S *преобразованием* (14.27). Lie [2] показал, что это преобразование дает положительный ответ на второй из его вопросов (§ 14.1), так как верна следующая

Теорема. *Преобразование* (14.27) *определено только на поверхностях кривизны* $-1/a^2$ *и допускается уравнением* (14.26).

Доказательство. Дифференцирование двух первых соотношений из (14.27) и равенства $dz=p\,dx+q\,dy$, $dz'=p'\,dx'+q'\,dy'$ позволяют выразить dx, dy в виде линейных функций от dx', dy' с переменными коэффициентами. Применение аналогичной операции к двум последним соотношениям из (14.27) с учетом предыдущих выражений для dx, dy и уравнений $dp=r\,dx+s\,dy$, $dq=s\,dx+t\,dy$ позволяет выразить dp', dq' как линейные функции от dx', dy'. Полученные выражения приводят к равенству

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial y'}-\frac{\partial q'}{\partial x'}\right)\sigma=s^2-rt-\frac{1+p^2+q^2}{a^2} \tag{14.29}$$

с некоторой функцией σ, зависящей от $x, y, z, p, q, r, s, t, x', y', z', p', q'$. Этим доказана первая часть теоремы, так как из (14.28), (14.29) вытекает уравнение (14.26).

Теперь нужно заметить, что в предыдущих рассуждениях элементы (x, y, z, p, q) и (x', y', z', p', q') можно поменять местами. Принимая во внимание эту симметрию, легко видеть, что поверхность S', полученная путем преобразования (14.27) поверхности S постоянной кривизны $-1/a^2$, также представляет собой поверхность кривизны $-1/a^2$. Это и означает инвариантность уравнения (14.26) относительно преобразования (14.27).

На основе доказанной теоремы с учетом структуры преобразования (14.27) можно, начав с некоторой поверхности постоянной отрицательной кривизны и используя только квадратуры, построить семейство поверхностей той же кривизны. Такая возможность использования многозначных обобщений касательных преобразований Ли для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка была использована в цитированной работе Бианки для поверхностей постоянной кривизны специального типа. Эта идея была затем развита Lie [2], который на примере уравнения (14.26) продемонстрировал, что многозначные преобразования поверхностей можно использовать подобно тому, как в его предыдущей теории дифференциальных уравнений использовались контактные и точечные преобразования. В частности, из инвариантности уравнения (14.26) относительно преобразования (14.27) следует, что всякое решение уравнения (14.26) под действием этого преобразования переходит в семейство решений того же уравнения; в данном случае преобразованные решения получаются квадратурами, точнее, как решения вполне интегрируемой системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для $z'(x', y')$, получающейся после подстановки в (14.27) известного решения $z=z(x, y)$ уравнения (14.26) и исключения переменных x и y.

Преобразование, заданное соотношениями (14.27), называется *преобразованием Бианки—Ли* (Anderson & Ibragimov [1, 2]). Обобщение описанной процедуры путем замены соотношений (14.27) произвольными четырьмя уравнениями, связывающими элементы (x, y, z, p, q) и (x', y', z', p', q'), приводит к задаче классификации таких преобразований, которые определены на решениях соответствующих дифференциальных уравнений (Bäcklund [3, 4]). Эта задача, известная в литературе как *проблема Беклунда*, довольно подробно исследована (см., например, Clairin [1], Goursat [1]), но полностью не решена.

14.4. Преобразования Беклунда. Примеры. Bäcklund [5] обобщил результат Бианки на поверхности S, S', получающиеся друг из друга с помощью модифицированного построения Бианки: условие ортогональности касательных плоскостей τ и τ' (см. 2), § 14.3) Беклунд заменил условием постоянства (т. е. независимости от точки M) угла между τ и τ':

2′) $\angle(\tau, \tau')=\text{const}$.

Тогда преобразование Бианки—Ли (14.27) заменяется уравнениями

$$\begin{gathered}(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=a^2,\\ p(x-x')+q(y-y')-(z-z')=0,\\ p'(x-x')+q'(y-y')-(z-z')=0,\\ pp'+qq'+1-b\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}=0.\end{gathered}\tag{14.30}$$

(Геометрический смысл постоянной b указывается ниже в связи с более общими рассмотрениями Дарбу.) Беклунд перенес на преобразование (14.30) теорему Ли: оно определено только для поверхностей постоянной кривизны $-1/a^2$, и преобразованная поверхность S' имеет ту же кривизну. В классической геометрической литературе преобразование (14.30) поверхностей постоянной кривизны называется *преобразованием Беклунда*.

Darboux [1] (стр. 442—444) завершил геометрический анализ построения Бианки. Он заменил условие 3) Бианки требованием, чтобы прямая, соединяющая точки M, M', находилась под постоянным углом как с плоскостью τ, так и с плоскостью τ' (эти два угла не обязательно должны быть равны между собой); условие 2) он также заменил условием Беклунда 2'). В результате получаются уравнения

$$\begin{gathered}(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=a^2,\\ p(x-x')+q(y-y')-(z-z')+ba\sqrt{1+p^2+q^2}=0,\\ p'(x-x')+q'(y-y')-(z-z')+b'a\sqrt{1+p'^2+q'^2}=0,\\ pp'+qq'+1-c\sqrt{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}=0.\end{gathered} \qquad (14.31)$$

Постоянные b, b', c имеют следующий геометрический смысл:

$$b=\sin\angle(MM',\tau),\quad b'=\sin\angle(MM',\tau'),\quad c=\cos\angle(\tau,\tau').$$

Затем Дарбу классифицирует уравнения (14.31), удовлетворяющие условию интегрируемости (14.28), вместе с соответствующими поверхностями S. Результат этой классификации показывает, что на этом пути не достигается существенное обобщение преобразования Бианки—Ли. Так, например, преобразование Беклунда (14.30) отличается от преобразования Бианки—Ли добавлением однопараметрической группы точечных преобразований. Для выяснения этой связи удобнее использовать вместо (14.26) уравнение

$$2z_{xy}=\sin(2z). \qquad (14.32)$$

При таком описании поверхностей постоянной кривизны преобразование Бианки—Ли, допускаемое уравнением (14.32), имеет вид ($x'=x,\ y'=y$)

$$z_x+z'_x=\sin(z-z'),\quad z_y-z'_y=\sin(z+z'), \qquad (14.33)$$

а преобразование Беклунда задается уравнениями

$$z_x+z'_x=\frac{1}{a}\sin(z-z'),\quad z_y-z'_y=a\sin(z+z') \qquad (14.34)$$

с произвольной постоянной $a\neq 0$ (Darboux [1], глава 12; Bianchi [2], § 262). Из инвариантности уравнения (14.32) относительно группы растяжений

$$x'=ax,\quad y'=\frac{1}{a}y \qquad (14.35)$$

очевидно, что (14.32) допускает суперпозицию преобразований (14.33) и (14.35); полученное преобразование совпадает с (14.34).

В качестве аналитического обобщения преобразования Бианки—Ли Bäcklund [3] рассмотрел четыре *) соотношения общего

---

*) Случай пяти соотношений приводит к контактным преобразованиям (Cartan [1]).

вида:

$$F_i(x, y, z, p, q, x', y', z', p', q') = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \quad (14.36)$$

Буквальное повторение рассуждений Ли относительно специальных соотношений (14.27) применительно к общему случаю (14.36) приводит к тому, что называется в литературе преобразованием Беклунда. Вспомним сначала, что в случае соотношений (14.27) Ли решал задачу отыскания семейства поверхностей, на которых может действовать преобразование (14.27). Его результат, выраженный теоремой 14.3, заключается в том, что искомое семейство состоит из поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Если теперь, поступая аналогично в общем случае (14.36), подставить в соотношения (14.36) заданную функцию $z = z(x, y)$ и два из полученных четырех равенств использовать для исключения x, y, то в результате получится переопределенная система двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\begin{aligned} f_1(x', y', z', p', q') &= 0, \\ f_2(x', y', z', p', q') &= 0 \end{aligned} \qquad (14.37)$$

для одной функции z'. Условия совместности этой системы имеют вид дифференциальных уравнений для функции $z(x, y)$ и в общей форме записаны в статье Беклунда (Bäcklund [3], стр. 311). Если $z(x, y)$ удовлетворяет условиям совместности, то (14.36) задают преобразование поверхности $z = z(x, y)$ в пространстве (x, y, z) в поверхность в пространстве (x', y', z'), заданную решением $z' = z'(x', y')$ интегрируемой системы (14.37).

В классической литературе в основном изучались преобразования Беклунда для дифференциальных уравнений второго порядка (Clairin [1], Forsyth [1], глава 21, Goursat [1]). В этом случае исключение x', y', z', p', q' сводит соотношения (14.36) к дифференциальному уравнению второго порядка для $z(x, y)$ и, наоборот, исключение величин x, y, z, p, q из (14.36) приводит к уравнению второго порядка для $Z(X, Y)$. В последнее время преобразования Беклунда стали использоваться также для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений более высокого порядка. Преобразования Беклунда интересны в основном своими конкретными приложениями. Рассмотрим некоторые хорошо известные примеры.

Пример 1. Преобразования Бианки—Ли—Беклунда (14.27), (14.34).

Пример 2. (Wahlquist & Estabrook [1], Шабат [1], Lamb [1]). Уравнение Кортевега—де Фриза

$$z_y + 3z_x^2 + z_{xxx} = 0$$

допускает преобразование, заданное уравнениями

$$z_x+z'_x+\frac{1}{2}(z-z')^2=a, \qquad a=\text{const},$$
$$z_y+z'_y+2(z_x^2+z_xz'_x+z_x'^2)-(z-z')(z_{xx}-z'_{xx})=0.$$

Пример 3. Для модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$z_y+2z_x^3+z_{xxx}=0$$

преобразование Беклунда имеет вид

$$z_x-\varepsilon z'_x-a\sin(z+\varepsilon z')=0,$$
$$z_y-\varepsilon z'_y+a[(z_{xx}+\varepsilon z'_{xx})\cos(z+\varepsilon z')+(z_x^2+z_x'^2)\sin(z+\varepsilon z')],$$

где $\varepsilon=\pm 1$, a — произвольная постоянная.

Пример 4 (Lamb [1]). Нелинейное уравнение Шредингера

$$iz_y+z_{xx}+|z|^2z=0$$

для комплексной функции z инвариантно относительно преобразования

$$z_x-z'_x=iau-\frac{i}{2}v\tau,$$
$$z_y-z'_y=\frac{\tau}{2}(z_x+z'_x)-aw+\frac{i}{4}u(|u|^2+|v|^2).$$

Здесь использованы обозначения

$$u=z-z', \quad v=z+z', \quad w=iau-\frac{i}{2}v\tau,$$
$$\tau=i\varepsilon(b-2|u|^2)^{1/2},$$

где $\varepsilon=\pm 1$, a, b — вещественные параметры.

Выше рассматривались преобразования, сохраняющие данное дифференциальное уравнение. В следующих примерах приводятся преобразования Беклунда, связывающие решения двух уравнений.

Пример 5. Классический пример такого типа — преобразование Лапласа для линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$z_{xy}+az_x+bz_y+cz=0, \tag{14.38}$$

где a, b, c — произвольные функции от x, y. Рассматриваются x- и y-преобразования Лапласа, которые задаются уравнениями

$$z'=z_y+az, \quad z'_x=(a_x-c)z-bz_y \tag{14.39}$$

и

$$z'=z_x+bz, \quad z'_y=(b_y-c)z-az_x \tag{14.40}$$

соответственно. Исключение переменной z' из соотношений (14.39) (соответственно из (14.40)) приводит к уравнению (14.38), и каждое из уравнений (14.39) и (14.40) задает преобразование Беклунда, определенное на решениях уравнения (14.38). Преобразованное уравнение для функции $z'=z'(x, y)$ получается исключением z из уравнений (14.39), если функция $h=a_x+ab-c$, называемая *инвариантом Лапласа* уравнения (14.38), не равна нулю; аналогично можно поступить с y-преобразованием Лапласа (14.40), если второй инвариант Лапласа $k=b_y+ab-c$ отличен от нуля. Полученное уравнение для z' снова представляет собой линейное уравнение второго порядка, которое в общем случае не совпадает с исходным уравнением (14.38).

Пример 6. Уравнение Лиувилля

$$z_{xy}=e^z$$

переводится в линейное уравнение $z'_{xy}=0$ преобразованием Беклунда, заданным уравнениями

$$z_x-z'_x+ae^{\frac{1}{2}(z+z')}=0,$$

$$z_y+z'_y+\frac{2}{a}e^{\frac{1}{2}(z-z')}=0.$$

Эта линеаризация достигается также каждым из следующих преобразований (Жибер, Ибрагимов, Шабат [2]):

$$z=\ln\left(2\frac{z'_xz'_y}{z'^2}\right), \quad z=\ln[2(1+\mathrm{tg}^2z')z'_xz'_y].$$

Пример 7. Аналогично предыдущему линеаризуется уравнение

$$z_{xy}+z_ye^{-z}=0.$$

Соответствующее преобразование Беклунда имеет вид (Clairin[1])

$$z_x-z'_x=e^{-z}, \quad z_y=e^{z'-z}.$$

Пример 8. Уравнения

$$z_{xy}=\sin z \quad \text{и} \quad z'_{xy}=z'\sqrt{1-z'^2_y}$$

связаны преобразованием

$$z'=z_x, \quad z'_y=\sin z.$$

Пример 9. Уравнение Бюргерса

$$z_y+zz_x+z_{xx}=0$$

переходит в уравнение теплопроводности

$$z'_y+z'_{xx}=0$$

после преобразования Беклунда:

$$z'_x-\frac{1}{2}zz'=0, \quad z_y+\frac{1}{2}(zz')_x=0;$$

первое из соотношений, задающих это преобразование Беклунда, называется также *преобразованием Хопфа—Коула*.

Пример 10. Miura [1] нашел преобразование

$$z_x = \varepsilon(z' + z^2), \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

связывающее решения уравнений

$$z_y - 6z^2 z_x + z_{xxx} = 0 \quad \text{и} \quad z'_y + 6z' z'_x + z'_{xxx} = 0.$$

Lamb [1] построил соответствующее преобразование Беклунда, дополнив преобразование Миуры соотношением

$$z_y = \varepsilon z'_{xx} - 2(zz')_x.$$

14.5. Понятие касательных преобразований бесконечного порядка. Теорема Беклунда о несуществовании касательных преобразований высшего порядка, отличных от продолженных контактных преобразований Ли, не исключает возможность существования преобразований, сохраняющих условия касания бесконечного порядка, когда в уравнениях (14.9) $k = \infty$. Примеры таких преобразований уже давно встречались в литературе, например в связи с обсуждением преобразования Лежандра (см. du Bois-Reymond [1], §§ 76—79). В более общем контексте они рассматриваются в цитированных выше работах Беклунда. В частности, касательные преобразования бесконечного порядка можно получить, исходя из преобразований вида

$$\begin{aligned} x' &= f\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}\right), \\ u' &= \varphi\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}\right) \end{aligned} \tag{14.41}$$

с произвольным $k < \infty$ и определяя преобразование переменных $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots$ путем последовательного дифференцирования u' по x'. При этом возникает естественный и важный в применении к дифференциальным уравнениям (для того, чтобы дифференциальные уравнения высшего порядка можно было преобразовывать без повышения их порядка) вопрос, имеются ли такие преобразования (14.41), которые после их продолжения на величины $\underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}$ будут иметь замкнутый $\left(\text{в конечномерном пространстве переменных } x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}\right)$ вид (14.8). Как ожидал Lie [1], таких преобразований, кроме контактных преобразований (14.1), нет (Bäcklund [2]). Мы вернемся к этому утверждению (в виде теоремы 16.1.2 *)) при рассмотрении касательных преобразований бесконечного порядка, образующих группу.

*) По существу речь идет об одной теореме Беклунда в ее различных формулировках в виде теорем 14.1, 14.2 и 16.1.2.

Переходя от преобразований вида (14.41) к более общему случаю, можно рассматривать преобразования

$$\begin{aligned} x' &= f\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ u' &= \varphi\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ \underset{1}{u'} &= \underset{1}{\psi}\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{14.42}$$

в бесконечномерном пространстве переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots$ Преобразование вида (14.42), сохраняющее бесконечную ($k=\infty$) пфаффову систему (14.9), называется *преобразованием Ли—Беклунда* (Ibragimov & Anderson [1]). Попытка инфинитезимального описания преобразований Ли—Беклунда приводит к рассмотрению бесконечномерного аналога уравнения Ли (3.6). Согласно теореме Беклунда (в форме теоремы 16.1.2) эта бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка сводится к конечномерной системе только для точечных и контактных преобразований Ли (этот вопрос обсуждался также в работе Noether [1], § 3). Указанный факт служит препятствием на пути к построению аналитической теории групп преобразований Ли—Беклунда. Недавно было дано (Ибрагимов [16]) алгебраическое решение вопроса путем отказа от аналитической точки зрения на непрерывные группы и ее замены методом формальных степенных рядов. На этом пути удается построить простую формальную теорию групп преобразований Ли—Беклунда, сохранив основные свойства теории Ли контактных преобразований. Изложению этого материала посвящены §§ 15, 16.

§ 15. Формальные группы

15.1. Уравнение Ли для формальных однопараметрических групп. Рассматривается алгебра формальных степенных рядов от одной переменной с аналитическими коэффициентами. Формальной однопараметрической группой называется элемент этой алгебры, удовлетворяющий специальному («групповому») свойству. Это свойство в дальнейшем удобно использовать в виде некоторых соотношений на коэффициенты формального ряда. Эти соотношения и кладутся в основу определения формальной группы.

Пусть Z—пространство последовательностей $z=(z^i)_{i\geqslant 1}$ переменных z^i, $i=1, 2, \ldots$ Рассматривается последовательность формальных степенных рядов от одного символа a:

$$f^i(z, a) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z)\, a^k, \quad i=1, 2, \ldots, \tag{15.1}$$

коэффициенты которых являются аналитическими функциями от конечного числа переменных z^i, причем разные коэффициенты могут зависеть от разного набора этих переменных. Предполагается, что

$$A_0^i(z)=z^i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots, \tag{15.2}$$

а коэффициенты A_1^i обозначаются через ξ^i:

$$\xi^i(z)=A_1^i(z). \tag{15.3}$$

Формулы (15.1) можно трактовать как преобразование в пространстве Z, переводящее последовательность $z=(z^i)_{i\geqslant 1}$ в последовательность $z'=(z'^i)_{i\geqslant 1}$ переменных

$$z'^i=f^i(z,\ a). \tag{15.4}$$

Линейная комбинация и произведение формальных степенных рядов вида (15.1), определяемые формулами

$$\lambda\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_k a^k\right)+\mu\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_k a^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda A_k+\mu B_k)\,a^k,$$

$$\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}A_{k_1}a^{k_1}\right)\cdot\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}B_{k_2}a^{k_2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+k_2=k}A_{k_1}B_{k_2}\right)a^k,$$

снова представляют собой формальные ряды того же вида. Поэтому определена суперпозиция формальных преобразований (15.4)

$$z''^i=f^i(z',\ b)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^i(z')\,b^k,$$

которая в общем случае переводит формальные степенные ряды z'^i от одного символа a в формальные степенные ряды z''^i от двух символов a, b и т. д. Следующим определением выделяется специальный класс формальных преобразований, для которых не происходит такого увеличения числа символов формальных рядов.

Определение. Последовательность $f(z,\ a)=(f^i(z,\ a))_{i\geqslant 1}$ формальных степенных рядов (15.1) называется *формальной однопараметрической группой*, если коэффициенты этих рядов удовлетворяют условиям

$$A_k^i(f(z,\ a))=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(k+l)!}{k!\,l!}A_{k+l}^i(z)\,a^l, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{15.5}$$

Замечание. Формулы (15.5) эквивалентны равенствам (см. также Бухштабер, Мищенко, Новиков [1])

$$f^i(f(z,\ a),\ b)=f^i(z,\ a+b), \qquad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{15.6}$$

Действительно, левые части равенств (15.6) равны

$$f^i(f(z, a),\ b) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(f(z, a))\, b^k,$$

а правые части (15.6) можно преобразовать следующим образом:

$$f^i(z, a+b) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z)\,(a+b)^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(z) \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!}\, a^{k_1} b^{k_2} =$$

$$= \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!}\, A^i_{k_1+k_2}(z)\, a^{k_1} b^{k_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!\,l!}\, A^i_{k+l}(z)\, a^l \right) b^k. \tag{15.7}$$

Поэтому равенства (15.6) имеют вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k^i(f(z, a))\, b^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!\,l!}\, A^i_{k+l}(z)\, a^l \right) b^k,$$

эквивалентный условиям (15.5).

Если ряды (15.1) сходятся, то формулы (15.4) определяют обычную однопараметрическую группу преобразований T_a: $z \mapsto z'$. При этом групповое свойство (15.6) утверждает, что суперпозиция $T_b \circ T_a$ преобразований, соответствующих конкретным значениям a и b группового параметра, равна преобразованию T_{a+b}, соответствующему сумме этих значений. В случае же формальных рядов (15.1) формула (15.6) выражает равенство формальных рядов $f(f(z, a), b)$ от двух символов a, b и формальных рядов $f(z, a+b)$ от одного символа $c = a+b$. Подстановка $b = -a$ в формальных рядах $f(f(z, a), b)$ от двух символов с последующим разложением выражений $f(f(z, a), -a)$ в формальные степенные ряды от a приводит к формальным рядам от одного символа. При этом в соответствии с (15.6) получаются равенства

$$f^i(f(z, a),\ -a) = z^i, \tag{15.8}$$

которые формально можно трактовать как свойство обратимости формальных преобразований (15.4). Далее, в теории формальных однопараметрических групп можно использовать замену «группового параметра» $a \mapsto \bar{a}$ с помощью подстановки в (15.1) вместо символа a формального ряда $a = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \bar{a}^k$ с вещественными коэффициентами λ_k. В частности, замена $a \mapsto \lambda \bar{a}$ может использоваться для сокращения на общий постоянный множитель коэффициентов (15.3).

Если для формальных степенных рядов $f(z, a) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z)\, a^k$ ввести обозначение $f(z, a)|_{a=0} \equiv A_0(z)$, то формулы (15.2) и (15.3) можно символически записать в виде

$$f^i(z, a)|_{a=0} = z^i, \tag{15.2'}$$

$$\xi^i(z) = \left.\frac{df^i(z, a)}{da}\right|_{a=0}. \tag{15.3'}$$

Последовательность $\xi(z) = (\xi^i(z))_{i \geqslant 1}$ аналитических функций (15.3') назовем *касательным векторным полем* формальной однопараметрической группы (15.1). Следующее утверждение переносит на формальные однопараметрические группы теорему Ли о соответствии между локальными однопараметрическими группами преобразований и их касательными векторными полями.

Теорема. *Последовательность формальных рядов* (15.1), *образующая формальную однопараметрическую группу с касательным векторным полем* (15.3'), *удовлетворяет дифференциальным уравнениям*

$$\frac{df^i}{da} = \xi^i(f), \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{15.9}$$

Обратно, для любой последовательности $\xi(z) = (\xi^i(z))_{i \geqslant 1}$ *аналитических функций* $\xi^i(z)$ *от конечного числа переменных* z^i *существует, и притом единственное, решение уравнений* (15.9) *в виде формальных степенных рядов* (15.1) *с «начальными условиями»* (15.2'); *это решение образует формальную однопараметрическую группу, касательное векторное поле которой совпадает с заданной последовательностью* $\xi(z)$.

Доказательство. Пусть последовательность рядов (15.1) образует формальную однопараметрическую группу. По определению производной формального степенного ряда имеем

$$\frac{df^i}{da} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) A^i_{k+1}(z) a^k.$$

С другой стороны, из свойства (15.5) формальной однопараметрической группы вытекают равенства

$$\xi^i(f) \equiv A^i_1(f(z, a)) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) A^i_{k+1}(z) a^k$$

и, следовательно, справедливость уравнений (15.9).

Пусть теперь задана некоторая последовательность $\xi(z)$. Подстановка рядов (15.1) в дифференциальные уравнения (15.9) с учетом начальных условий (15.2) дает рекуррентные формулы для коэффициентов A^i_k. Остается показать, что полученное решение (15.1) задачи (15.9), (15.2') удовлетворяет условиям (15.5). Для этого рассмотрим следующие две последовательности формальных рядов:

$$v^i = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i (f(z, a))\, b^k, \tag{15.10}$$

$$w^i = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!\,l!} A_{k+l}^i (z)\, a^l \right) b^k. \tag{15.11}$$

Так как ряды $f^i(z, a)$ удовлетворяют уравнениям (15.9) и начальным условиям (15.2′), то

$$\frac{dv^i}{db} = \xi^i (v), \quad v^i|_{b=0} \equiv A_0^i (f(z, a)) = f^i (z, a).$$

С другой стороны, согласно тождествам (15.7) ряды w^i можно переписать в виде

$$w^i = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^i (z)\, (a+b)^k. \tag{15.11′}$$

Поэтому

$$\frac{dw^i}{d(a+b)} = \xi^i (w).$$

Кроме того, из представления (15.11) рядов w^i следует, что

$$\frac{dw^i}{db} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l+1)!}{k!\,l!} A_{k+l+1}^i (z)\, a^l \right) b^k,$$

а из представления (15.11′) этих рядов повторным применением (15.7) получаются равенства

$$\frac{dw^i}{d(a+b)} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, A_{k+1}^i (z)\, (a+b)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A_{k+1}^i (z) \sum_{k_1+k_2=k} \frac{(k+1)!}{k_1!\,k_2!} a^{k_1} b^{k_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l+1)!}{k!\,l!} A_{k+l+1}^i (z)\, a^l \right) b^k.$$

Следовательно, $\dfrac{dw^i}{db} = \dfrac{dw^i}{d(a+b)}$, так что последовательность формальных рядов (15.11) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dw^i}{db} = \xi^i (w).$$

Из формул (15.11) видно, что

$$w^i|_{b=0} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} A_l^i (z)\, a^l = f^i (z, a).$$

Таким образом, формальные степенные ряды (15.10) и (15.11) удовлетворяют (по символу b) одной и той же системе дифференциальных уравнений вида (15.9) и одинаковым начальным условиям. Поэтому в силу единственности решения задачи (15.9), (15.2′) ряды (15.10) и (15.11) совпадают, т. е. решение задачи (15.9) и (15.2′) удовлетворяет условиям (15.5). Наконец, совпадение касательного векторного поля полученной формальной однопараметрической группы с исходной последовательностью $\xi(z)$ непосредственно видно из рекуррентных формул.

15.2. Инварианты и инвариантные многообразия. Действие формальных преобразований (15.4) можно распространить на аналитические функции $F(z)$ от произвольного конечного набора переменных z^i формулой $F(z) \mapsto F(z')$. При этом $F(z')$ представляет собой формальный степенной ряд от a. Пусть

$$F(z') = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(z)\, a^k.$$

Коэффициенты этого ряда выражаются через $F(z)$ и коэффициенты рядов (15.1). В частности, в силу (15.2), (15.3),

$$B_0(z) = F(z), \quad B_1(z) = \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i}.$$

Поэтому

$$F(z') = F(z) + a\xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} + a^2 F_1(z, a), \tag{15.12}$$

где $F_1(z, a)$ также является формальным степенным рядом вида (15.1). В принятой выше символической записи

$$F(z')\big|_{a=0} = F(z), \tag{15.13}$$

$$\frac{dF(z')}{da}\bigg|_{a=0} = \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i}. \tag{15.14}$$

Аналитическая функция $F(z)$ называется *инвариантом формальных преобразований* (15.4), если $F(z') = F(z)$.

Теорема 1. *Функция $F(z)$ является инвариантом формальной однопараметрической группы преобразований* (15.4) *тогда и только тогда, когда*

$$\xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = 0. \tag{15.15}$$

Доказательство. Выполнение условия (15.15) для инварианта $F(z)$ обеспечивается формулой (15.14). Пусть теперь $F(z)$ — произвольная аналитическая функция, удовлетворяющая условию (15.15). Поскольку (15.14) — тождество по z, то

$$\xi^i(z') \frac{\partial F(z')}{\partial z'^i} = 0. \tag{15.16}$$

Кроме того,

$$\frac{dF(z')}{da}=\frac{\partial F(z')}{\partial z'^i}\frac{df^i(z,a)}{da},$$

откуда в силу уравнений (15.9) следует, что

$$\frac{dF(z')}{da}=\xi^i(z')\frac{\partial F(z')}{\partial z'^i}. \tag{15.17}$$

Равенства (15.16) и (15.17) показывают, что формальный ряд $F(z')$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dF(z')}{da}=0. \tag{15.18}$$

Так как решение дифференциального уравнения (15.18) при заданном начальном условии (15.13) определено единственным образом, то $F(z')=F(z)$. Теорема доказана.

Аналогично можно доказать формальный аналог инфинитезимального критерия инвариантности многообразий. Рассматривается многообразие $M\subset Z$, заданное системой уравнений

$$\psi_\nu(z)\equiv z^{i_\nu}+\varphi_\nu(\bar z)=0, \qquad \nu=1,\ \ldots,\ p, \tag{15.19}$$

где $\varphi_\nu(\bar z)$ — аналитические функции, $z=(z^{i_1},\ \ldots,\ z^{i_p},\ \bar z)$, i_ν — натуральные числа, $p\leqslant\infty$. Многообразие M называется *инвариантным относительно формальных преобразований* (15.4), если для каждого решения $z=(z^i)_{i\geqslant 1}$ уравнений (15.19) преобразованная точка $z'=(f^i(z,a))_{i\geqslant 1}$ также удовлетворяет уравнениям (15.19).

Теорема 2. *Многообразие M, заданное системой уравнений* (15.19), *инвариантно относительно формальной однопараметрической группы преобразований* (15.4) *тогда и только тогда, когда*

$$\xi^i(z)\frac{\partial\psi_\nu(z)}{\partial z^i}=0, \quad \nu=1,\ \ldots,\ p, \ \textit{для всех}\ z\in M. \tag{15.20}$$

Доказательство. Если многообразие M инвариантно, то для каждой точки z из M имеем равенства $\psi_\nu(z)=0$ и $\psi_\nu(z')=0$ для всех $\nu=1,\ \ldots,\ p$. Поэтому из разложения каждого ряда $\psi_\nu(z')$ по формуле (15.12)

$$\psi_\nu(z')=\psi_\nu(z)+a\xi^i(z)\frac{\partial\psi_\nu(z)}{\partial z^i}+a^2\psi_{1\nu}(z,a)$$

следует выполнение (15.20).

Пусть теперь многообразие M удовлетворяет условиям (15.20). Рассмотрим произвольную точку $z=(z^i)_{i\geqslant 1}$ из M и ее образ $z'=(f^i(z,a))_{i\geqslant 1}$. Согласно формулам (15.17), (15.13), (15.19) формальные ряды $\psi_\nu(z')$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\psi_\nu(z')}{da}=\xi^i(z')\frac{\partial\psi_\nu(z')}{\partial z'^i}, \qquad \nu=1,\ \ldots,\ p, \tag{15.21}$$

и начальным условиям

$$\psi_\nu(z')|_{a=0}=0, \qquad \nu=1, \ldots, p. \tag{15.22}$$

Так как $\psi_\nu(z')$ и правые части уравнений (15.21) являются аналитическими функциями от z', решение задачи (15.21), (15.22) в виде формальных степенных рядов от a определяется по рекуррентным формулам и, следовательно, единственно. Это единственное решение равно нулю: $\psi_\nu(z')=0$, $\nu=1, \ldots, p$. Действительно, согласно условиям (15.20) правые части равенств (15.21) обращаются в нуль при $\psi_\nu(z')=0$, и поэтому тождественно равные нулю ряды $\psi_\nu(z')$ удовлетворяют всем условиям задачи (15.21), (15.22). Следовательно, образ z' каждой точки $z\in M$ удовлетворяет (15.19), т. е. $z'\in M$.

§ 16. Однопараметрические группы преобразований Ли — Беклунда

16.1. Определение и инфинитезимальный критерий. Пусть пространство Z представлено в виде прямого произведения

$$Z=\mathbb{R}^n\times V, \tag{16.1}$$

где $V=\sum\limits_{s\geqslant 0} V^s$ является градуированным векторным пространством с конечномерными однородными компонентами V^s. Элементы пространства V задаются своими координатами: u^α — координаты однородных элементов нулевой степени, $u^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ — координаты однородных элементов степени $s\geqslant 1$, причем величины $u^\alpha_{i_1\cdots i_s}$ при $s\geqslant 2$ симметричны по нижним индексам. Здесь $\alpha=1, \ldots, m$; $i_1, \ldots, i_s=1, \ldots, n$. В обозначениях $x=(x^1, \ldots, x^n)\in\mathbb{R}^n$ и $y=(u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots)\in V$ с $u=(u^1, \ldots, u^m)\in V^0$, $\underset{s}{u}=\{u^\alpha_{i_1\cdots i_s}|\alpha=1, \ldots, m; i_1, \ldots, i_s=1, \ldots, n\}\in V^s$ точки $z=(z^1, z^2, \ldots)\in Z$ представляются в виде $z=(x, y)=(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots)$. В пространстве Z формулами

$$D_i(x^j)=\delta^j_i \quad \text{(символ Кронекера)},$$
$$D_i(u^\alpha)=u^\alpha_i, \quad D_i(u^\alpha_{i_1\cdots i_s})=u^\alpha_{ii_1\cdots i_s}, \qquad s=1, 2, \ldots, \tag{16.2}$$

определяются дифференцирования D_i, $i=1, \ldots, n$, действие которых распространяется на функции, зависящие от любого конечного набора переменных *) x^i, u^α, ..., $u^\alpha_{i_1\cdots i_s}$ путем отождествления D_i с дифференциальным оператором первого порядка

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+u^\alpha_i\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+u^\alpha_{ii_1}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1}}+u^\alpha_{ii_1i_2}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1i_2}}+\ldots \tag{16.3}$$

---

*) Речь идет, таким образом, о функциях от обычных переменных x^i и дифференциальных переменных u^α (см. Ritt [1]).

Пусть $T(Z)$ — касательное расслоение пространства Z, а $Z_z = \mathbb{R}_x^n \times V_y$ — касательное пространство к Z в точке $z=(x, y)$, элементы которого обозначаются $dz=(dx, dy)$, где $dx \in \mathbb{R}_x^n$, $dy \in V_y$. Пространство Z_z удобно отождествлять с другим экземпляром пространства Z; пусть V_y^s $(s=0, 1, 2, \ldots)$ — однородные компоненты пространства V_y, градуированного отождествлением V_y с V. При этом элементы dy из V_y записываются в виде $dy=(du, \underset{1}{du}, \ldots)$, где однородные элементы du, $\underset{s}{du}$, $s \geqslant 1$, имеют соответственно координаты du^α, $du^\alpha_{i_1 \ldots i_s}$. Теперь в каждом пространстве V_y^s $(s=0, 1, 2, \ldots)$ выделяется подпространство, порожденное элементами вида

$$du^\alpha = u_i^\alpha dx^i; \quad du^\alpha_{i_1 \ldots i_s} = u^\alpha_{i i_1 \ldots i_s} dx^i,$$

где dx^i — координаты произвольного вектора dx из $\mathbb{R}_x^n$. В результате получается подрасслоение касательного расслоения $T(Z)$, представляющее собой n-мерное (т. е. имеющее n-мерный слой) векторное расслоение над Z; будем называть его *касательной структурой* (бесконечного порядка) и обозначать символом Z^T. Таким образом, касательная структура Z^T определяется бесконечной системой уравнений

$$\Omega\colon\ \omega = 0, \quad \underset{s}{\omega} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{16.4}$$

где ω, $\underset{1}{\omega}$, ... — дифференциальные формы, определенные в (14.10).

Пусть G — группа Ли. Векторное расслоение F над пространством B называется *векторным G-расслоением над G-пространством* B, если: 1) определено непрерывное действие группы G на пространствах F и B; 2) проекция $F \mapsto B$ согласована с действием группы G на пространствах F и B; 3) для любой точки $b \in B$ каждый элемент g группы G задает линейное отображение слоя F_b над b в слой $F_{g(b)}$ над $g(b)$. Это понятие очевидным образом переформулируется на случай локальной (а также формальной) группы G.

Рассмотрим теперь формальную однопараметрическую группу G преобразований

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i(z, a), \\ u'^\alpha &= \varphi^\alpha(z, a), \\ u'^\alpha_{i_1 \ldots i_s} &= \psi^\alpha_{i_1 \ldots i_s}(z, a), \qquad s = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{16.5}$$

в пространстве $Z = \mathbb{R}^n \times V$. Здесь согласно § 15.1 $f^i(z, a)$, $\varphi^\alpha(z, a)$, $\psi^\alpha_{i_1 \ldots i_s}(z, a)$ представляют собой формальные степенные ряды от a, коэффициенты которых являются аналитическими функциями конечного числа переменных $x, u, \underset{1}{u}, \ldots$ Касательное расслоение $T(Z)$ становится векторным G-расслоением над G-пространством Z, если действие формальной группы G распространить на элементы касательного пространства формулами

$$
\begin{gathered}
dx'^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\,dx^j + \frac{\partial f^i}{\partial u^\beta}\,du^\beta + \frac{\partial f^i}{\partial u^\beta_j}\,du^\beta_j + \ldots, \\
du'^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^j}\,dx^j + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}\,du^\beta + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta_j}\,du^\beta_j + \ldots, \qquad (16.6) \\
du'^\alpha_{i_1\ldots i_s} = \frac{\partial \psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial x^j}\,dx^j + \frac{\partial \psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta}\,du^\beta + \frac{\partial \psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta_j}\,du^\beta_j + \ldots, \qquad s = 1, 2, \ldots
\end{gathered}
$$

Правые части равенств (16.6) содержат только конечное число отличных от нуля слагаемых и являются формальными степенными рядами от a с аналитическими коэффициентами, зависящими от конечного числа переменных $x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, dx, du, d\underset{1}{u}, d\underset{2}{u}, \ldots$ Таким образом, преобразования (16.6) имеют ту же природу, что и (16.5).

Определение. Формальное преобразование (16.5) называется *преобразованием Ли — Беклунда*, если касательная структура (16.4) инвариантна относительно преобразований (16.5), (16.6).

Замечание. Если G — формальная однопараметрическая группа преобразований Ли — Беклунда, то ввиду инвариантности уравнений (16.4) относительно преобразований (16.5), (16.6) определено действие группы G на касательной структуре Z^T. При этом Z^T представляет собой векторное G-расслоение над G-пространством Z. Указанное свойство можно было бы взять в качестве определения группы Ли — Беклунда. Такое определение допускает очевидное геометрическое обобщение: пусть F — бесконечномерное векторное расслоение, локально устроенное как тривиальное расслоение (16.1), а F^T — соответствующая касательная структура (т. е. n-мерное подрасслоение касательного расслоения $T(F)$, локально задаваемое уравнениями (16.4)). Группа G, действующая на F, называется *группой Ли — Беклунда*, если F^T является векторным G-расслоением над G-пространством F относительно действия группы G на F^T, индуцированного продолжением G на касательное расслоение $T(F)$.

Пусть G — формальная однопараметрическая группа преобразований (16.5). Согласно формуле (15.3′) касательное векторное поле группы G имеет вид

$$
\Xi = (\xi^i, \eta^\alpha, \zeta^\alpha_{i_1}, \zeta^\alpha_{i_1 i_2}, \ldots), \qquad (16.7)
$$

где

$$
\xi^i = \left.\frac{df^i}{da}\right|_{a=0}, \quad \eta^\alpha = \left.\frac{d\varphi^\alpha}{da}\right|_{a=0}, \quad \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s} = \left.\frac{d\psi^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{da}\right|_{a=0}. \qquad (16.8)
$$

Рассмотрим теперь действие группы G на касательном расслоении $T(Z)$, заданное формулами (16.5), (16.6). Касательным полем этого продолженного действия группы G является последовательность

$$\tilde{\Xi} = (\Xi, \tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^\alpha, \tilde{\zeta}^\alpha_{i_1}, \tilde{\zeta}^\alpha_{i_1 i_2}, \ldots). \qquad (16.9)$$

Дополнительные к (16.7) координаты $\tilde{\xi}^i, \tilde{\eta}^\alpha, \tilde{\zeta}^\alpha_{i_1}, \ldots$ поля (16.9) определяются формулами

$$\tilde{\xi}^i = \left.\frac{d(dx'^i)}{da}\right|_{a=0}, \quad \tilde{\eta}^\alpha = \left.\frac{d(du'^\alpha)}{da}\right|_{a=0}, \quad \tilde{\zeta}^\alpha_{i_1\ldots i_s} = \left.\frac{d\left(du'^\alpha_{i_1\ldots i_s}\right)}{da}\right|_{a=0}$$

и в силу (16.6), (16.8) равны

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^i &= \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \xi^i}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \xi^i}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j + \ldots, \\ \tilde{\eta}^\alpha &= \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j + \ldots, \\ \tilde{\zeta}^\alpha_{i_1\ldots i_s} &= \frac{\partial \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial x^j} dx^j + \frac{\partial \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta} du^\beta + \frac{\partial \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta_j} du^\beta_j + \ldots \end{aligned} \qquad (16.10)$$

Согласно теореме 15.1 каждому векторному полю (16.7) соответствует формальная однопараметрическая группа преобразований вида (16.5). Следующая теорема выделяет те векторные поля, которым соответствуют группы преобразований Ли—Беклунда, и тем самым дает инфинитезимальную характеристику преобразований Ли—Беклунда (Ibragimov & Anderson [1]).

Теорема 1. *Формальная однопараметрическая группа G является группой преобразований Ли—Беклунда тогда и только тогда, когда ее касательное векторное поле Ξ удовлетворяет условиям*

$$\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s} = D_{i_1}\ldots D_{i_s}(\eta^\alpha - \xi^j u^\alpha_j) + \xi^j u^\alpha_{j i_1\ldots i_s}, \qquad s = 1, 2, \ldots \qquad (16.11)$$

Доказательство. В силу теоремы 15.2.2 условие инвариантности уравнений (16.4) относительно преобразований (16.5), (16.6) имеет вид

$$\begin{aligned} &(\tilde{\eta}^\alpha - u^\alpha_i \tilde{\xi}^i - \zeta^\alpha_i dx^i)_\Omega = 0, \\ &(\tilde{\zeta}^\alpha_{i_1\ldots i_s} - u^\alpha_{i i_1\ldots i_s} \tilde{\xi}^i - \zeta^\alpha_{i i_1\ldots i_s} dx^i)_\Omega = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots \end{aligned} \qquad (16.12)$$

Подстановка формул (16.10) в уравнения (16.12) с последующей заменой величин du^α, $du^\alpha_{i_1\ldots i_s}$ выражениями $u^\alpha_i dx^i$, $u^\alpha_{i i_1\ldots i_s} dx^i$ в соответствии с уравнениями (16.4) приводит уравнения (16.12) к виду (16.11).

В соответствии с этой теоремой векторное поле Ξ группы преобразований Ли—Беклунда определяется координатами $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^m)$, которые могут быть произвольными аналитическими функциями. Координаты $\zeta^\alpha_{i_1}$, $\zeta^\alpha_{i_1 i_2}$, ... определяются формулами «продолжения» (16.11). Имея это в виду и используя стандартную трактовку векторов (16.7) как дифференциальных (или инфинитезимальных) операторов

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\sum_{s\geqslant 1}\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\ldots i_s}}, \tag{16.13}$$

касательные векторные поля групп преобразований Ли—Беклунда можно записывать в сокращенном виде:

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots \tag{16.14}$$

В дальнейшем они называются *операторами Ли — Беклунда*, а бесконечная система дифференциальных уравнений первого порядка (15.9), соответствующая оператору Ли—Беклунда (16.7), (16.11), называется *уравнением Ли — Беклунда.* Следующая теорема (Ibragimov & Anderson [1]), обобщающая рассмотрения Беклунда (Bäcklund [2]) показывает, что уравнение Ли—Беклунда сводится к конечномерной системе только для групп точечных и контактных преобразований.

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли — Беклунда, Ξ — ее касательное векторное поле. Если координаты ξ^i, η^α, $\zeta^\alpha_{i_1}$, ..., $\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_k}$ поля Ξ зависят только от переменных x, u, $\underset{1}{u}$, ..., $\underset{k}{u}$, то G является группой точечных или контактных преобразований.*

Доказательство. Пусть сначала $k=1$. Так как ζ^α_i зависит только от x, u, $\underset{1}{u}$, то первое из уравнений (16.11)

$$\zeta^\alpha_i=D_i(\eta^\alpha)-u^\alpha_j D_i(\xi^j)$$

с учетом формулы

$$D_i(\eta^\alpha)-u^\alpha_j D_i(\xi^j)=$$
$$=\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial x^i}+u^\beta_i\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta}-u^\alpha_j\left(\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}+u^\beta_i\frac{\partial\xi^j}{\partial u^\beta}\right)+u^\beta_{ik}\left(\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta_k}-u^\alpha_j\frac{\partial\xi^j}{\partial u^\beta_k}\right)$$

приводит к уравнениям (14.3), (14.4). Отсюда следует утверждение теоремы в случае $k=1$.

Пусть теперь $k>1$. В этом случае нужно рассмотреть первые k уравнений системы (16.11):

$$\zeta^\alpha_i=D_i(\eta^\alpha)-u^\alpha_j D_i(\xi^j),$$
$$\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_{s+1}}=D_{i_{s+1}}(\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s})-u^\alpha_{ji_1\ldots i_s}D_{i_{s+1}}(\xi^j),\qquad s=1,\ldots,k-1.$$

Правые части этих уравнений можно записать, используя «усеченные» операторы дифференцирования $\underset{k-1}{D_i}$ (формула (14.15)), в виде

$$D_i(\eta^\alpha)-u_j^\alpha D_i(\xi^j)=$$
$$=\underset{k-1}{D_i}(\eta^\alpha)-u_j^\alpha \underset{k-1}{D_i}(\xi^j)+u^\beta_{ii_1\ldots i_k}\left(\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial u^\beta_{i_1\ldots i_k}}-u_j^\alpha\frac{\partial\xi^j}{\partial u^\beta_{i_1\ldots i_k}}\right),$$
$$D_{i_{s+1}}(\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s})-u^\alpha_{ji_1\ldots i_s}D_{i_{s+1}}(\xi^j)=$$
$$=\underset{k-1}{D_{i_{s+1}}}(\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s})-u^\alpha_{ji_1\ldots i_s}\underset{k-1}{D_{i_{s+1}}}(\zeta^j)+$$
$$+u^\beta_{i_{s+1}j_1\ldots j_k}\left(\frac{\partial\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}}{\partial u^\beta_{j_1\ldots j_k}}-u^\alpha_{ji_1\ldots i_s}\frac{\partial\xi^j}{\partial u^\beta_{j_1\ldots j_k}}\right),$$

где члены, содержащие $\underset{k-1}{D}$, не зависят от $\underset{k+1}{u}$. В силу этих соотношений и условия теоремы о том, что величины $\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}$, $s=1,\ldots,k$, зависят только от переменных x, u, $\underset{1}{u}$, $\ldots$, $\underset{k}{u}$, рассматриваемые k уравнений приводят к равенствам (14.16), (14.17). Поэтому доказательство завершается теми же рассуждениями, что и доказательство теоремы 14.2.

16.2. Операторы Ли — Беклунда. Канонический оператор. Как говорилось выше, оператором Ли — Беклунда называется векторное поле (16.7) (или соответствующий ему дифференциальный оператор первого порядка (16.13)), удовлетворяющее условию (16.11); операторы Ли — Беклунда записываются сокращенно в виде (16.14).

Лемма 1. *Оператор Ли — Беклунда* (16.14) *удовлетворяет коммутационному соотношению*

$$XD_i-D_iX=-D_i(\xi^j)D_j. \tag{16.15}$$

Доказательство. Равенство (16.15) устанавливается прямым вычислением.

Лемма 2. *Оператор*

$$X_*=\xi^i_*D_i\equiv\xi^i_*\frac{\partial}{\partial x^i}+\xi^i_*u^\alpha_i\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots \tag{16.16}$$

с произвольными аналитическими коэффициентами $\xi^i_*=\xi^i_*(z)$ *является оператором Ли — Беклунда. Множество операторов* (16.16) *образует идеал в алгебре Ли всех операторов Ли — Беклунда с умножением* $[X, Y]\equiv XY-YX$.

Доказательство. Первая часть утверждения, т. е. справедливость соотношений (16.11) для любого оператора вида (16.16), очевидна. Вторая часть утверждения следует из коммутационного соотношения

$$[X, X_*]=(X(\xi^i_*)-X_*(\xi^i))D_i,$$

справедливого в силу предыдущей леммы.

Часто вместо алгебры произвольных операторов Ли—Беклунда бывает удобнее использовать факторалгебру по указанному в лемме 2 идеалу L_*, состоящему из операторов вида (16.16). В соответствии с этим два оператора Ли—Беклунда X и Y называются *эквивалентными*, если $X-Y\in L_*$. В частности, всякий оператор (16.14) эквивалентен некоторому оператору Ли—Беклунда с координатами $\xi^i=0$ $(i=1, \ldots, n)$; а именно,

$$X\sim Y=X-\xi^i D_i=(\eta^\alpha-\xi^i u_i^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots \tag{16.17}$$

Операторы Ли—Беклунда вида

$$X=\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots \tag{16.18}$$

будут называться *каноническими операторами*. Для них формулы продолжения (16.11) имеют простой вид:

$$\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}=D_{i_1}\ldots D_{i_s}(\eta^\alpha). \tag{16.19}$$

Из леммы 1 следует, что канонические операторы Ли—Беклунда коммутируют с дифференцированием D_i. Обратно, перестановочность оператора (16.13) (при $\xi=0$) с дифференцированиями D_i приводит к выполнению условий (16.19) и, следовательно, может быть положена в основу определения преобразований Ли—Беклунда.

Переход от (16.14) к эквивалентному каноническому оператору (16.18), удобный во многих вопросах, в некоторых случаях приводит к потере геометрической наглядности. В первую очередь это относится к группам точечных и контактных преобразований. Например, инфинитезимальный оператор $X=\frac{\partial}{\partial x^i}$ однопараметрической группы простейших преобразований—переносов $x'^i=x^i+a$ вдоль координатной оси x^i—после перехода к канонической форме (16.18) имеет вид $Y=u_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots$; соответствующее этому оператору формальное преобразование Ли—Беклунда будет выписано в § 16.3. Поэтому полезно выделить те операторы Ли—Беклунда, которые эквивалентны инфинитезимальным операторам групп точечных и контактных преобразований.

Теорема. *Оператор Ли—Беклунда* (16.14) *эквивалентен инфинитезимальному оператору группы точечных преобразований тогда и только тогда, когда*

$$\xi^i=\xi_1^i(x,\ u)+\xi_2^i(z),\qquad \eta^\alpha=\eta_1^\alpha(x,\ u)+[\xi_2^i(z)+\xi_3^i(x,\ u)]\,u_i^\alpha, \tag{16.20}$$

где $\xi_1^i(x,\ u)$, $\xi_2^i(z)$, $\xi_3^i(x,\ u)$, $\eta_1^\alpha(x,\ u)$—*произвольные функции. При* $m=1$ *операторы* (16.14), *эквивалентные операторам групп* *контактных преобразований Ли, характеризуются условиями*

$$\xi^i = \xi_1^i\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right) + \xi_2^i(z), \quad \eta = \eta_1\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right) + \xi_2^i(z)\, u_i. \quad (16.21)$$

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Чтобы доказать ее вторую часть, достаточно показать, что любой оператор Ли—Беклунда вида

$$X = \xi^i\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots \quad (16.22)$$

эквивалентен оператору (14.5), (14.6) с некоторой функцией $W = W\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)$. В качестве такой функции W можно взять $W = \eta - \xi^i u_i$, где ξ^i, η—координаты рассматриваемого оператора (16.22). Действительно, при указанном выборе функции W выполняется равенство

$$X - Y = \left(\xi^i + \frac{\partial W}{\partial u_i}\right) D_i,$$

где

$$Y = -\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(W - u_i\frac{\partial W}{\partial u_i}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} + u_i\frac{\partial W}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial u_i}. \quad (16.23)$$

16.3. Примеры. Рассматриваются простые примеры однопараметрических групп преобразований Ли—Беклунда в случае $m = n = 1$; величина $\underset{s}{u}$ обозначается u_s.

Пример 1. Пусть в операторе (16.18) $\eta = u_1$. Для построения соответствующего формального преобразования (16.5) надо решить уравнение Ли—Беклунда

$$\frac{du'}{da} = u_1', \quad \frac{du_s'}{da} = u_{s+1}', \quad s = 1,\ 2,\ \ldots,$$

при начальных условиях

$$u'|_{a=0} = u, \quad u_s'|_{a=0} = u_s, \quad s = 1,\ 2,\ \ldots$$

Для решения указанной задачи достаточно построить формальный степенной ряд

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots)\, a^k, \quad A_0 = u,$$

удовлетворяющий уравнению

$$\frac{du'}{da} = D(u'), \quad (16.24)$$

где $D = \sum\limits_{s=0}^{\infty} u_{s+1}\frac{\partial}{\partial u_s}$. При этом переменная x не преобразуется, а значения преобразованных величин u_1', u_2', ... находятся дифференцированием:

$$u_1' = D(u'), \quad u_2' = D^2(u'), \ \ldots$$

Подстановка ряда u' в уравнение (16.24) дает рекуррентную формулу

$$(k+1)A_{k+1} = D(A_k), \qquad A_0 = u$$

для определения коэффициентов искомого ряда u'. В результате получается следующая формальная однопараметрическая группа:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{k!} a^k, \quad u_s' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{k+s}}{k!} a^k, \qquad s = 1, 2, \ \ldots \qquad (16.25)$$

Ее касательное векторное поле $X = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \ldots$ эквивалентно, как уже отмечалось, оператору $Y = \frac{\partial}{\partial x}$ группы переносов $x' = x + a$, $u' = u$.

Пример 2. Обобщая предыдущий пример, возьмем оператор

$$X = u_p \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad (16.26)$$

где p — произвольное натуральное число. В этом случае вместо (16.24) берется уравнение

$$\frac{du'}{da} = D^p(u'),$$

откуда для отыскания формального преобразования $u' = \sum_{k=0}^{\infty} A_k a^k$ получается рекуррентная формула

$$(k+1)A_{k+1} = D^p(A_k), \qquad A_0 = u.$$

Таким образом, группа Ли — Беклунда, порожденная оператором (16.26), задается следующим формальным преобразованием:

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{pk}}{k!} a^k, \quad u_s' = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{pk+s}}{k!} a^k, \qquad s = 1, 2, \ \ldots \qquad (16.27)$$

Нетрудно выяснить, когда эти ряды сходятся, т. е. когда формулы (16.27) задают обычную (аналитическую) однопараметрическую группу преобразований. Пусть ряд u' в (16.27) сходится в круге $|a| \leqslant r$. Тогда последовательность $(u, u_1, u_2, \ldots)$ удовлетворяет неравенствам

$$|u_{pk}| \leqslant Ck!r^{-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots; \quad C = \text{const}. \qquad (16.28)$$

При выполнении условий (16.28) преобразованная последовательность $(u', u_1', u_2', \ldots)$ снова удовлетворяет неравенствам вида (16.28). Действительно, для $|a| < r$ использование (16.27) и (16.28) дает

$$|u'_{ps}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a|^k}{k!} |u_{p(k+s)}| \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+s)!}{k!} \left(\frac{|a|}{r}\right)^k r^{-s} =$$

$$= Cr^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+s)!}{k!} b^k = Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+s} =$$

$$= Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} b^k = Cr^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial b}\right)^s \frac{1}{1-b} = Cr^{-s} \frac{s!}{(1-b)^{s+1}} =$$

$$= C \frac{r}{r-|a|} s! (r-|a|)^{-s} \leqslant Cs! r_1^{-s}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, группа Ли—Беклунда (16.27) действует как обычная группа преобразований в классе целых функций $u = u(x)$, определенном условиями (16.28). Этот класс совпадает с семейством всех аналитических функций только при $p = 1$.

Пример 3. Для оператора $X = u_1^2 \frac{\partial}{\partial u} + \ldots$ построение преобразований Ли—Беклунда осуществляется с помощью рекурренции

$$(k+1) A_{k+1} = \sum_{i+j=k} D(A_i) \cdot D(A_j), \qquad A_0 = u.$$

В соответствии с теоремой 16.2 рассматриваемый оператор X эквивалентен оператору

$$Y = -2u_1 \frac{\partial}{\partial x} - u_1^2 \frac{\partial}{\partial u},$$

порождающему группу контактных преобразований

$$x' = x - 2u_1 a, \quad u' = u - u_1^2 a, \quad u_1' = u_1.$$

§ 17. Инвариантные дифференциальные многообразия

17.1. Критерий инвариантности. Основное пространство Z здесь также имеет вид (16.1). Пусть $F = (F^1, \ldots, F^p)$ — аналитическая функция от $x = (x^1, \ldots, x^n)$ и дифференциальной переменной $u = (u^1, \ldots, u^m)$, т. е. $F = F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})$, где $s \geqslant 1$ — некоторое натуральное число. Символом $\underset{\nu}{F}$ обозначается совокупность функций $D_{i_1} \ldots D_{i_\nu}(F)$. Уравнение порядка s

$$F(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) = 0 \tag{17.1}$$

рассматривается вместе со всеми дифференциальными следствиями и тем самым порождает (бесконечномерное) многообразие $[F] \subset Z$, заданное бесконечной системой уравнений

$$[F]\colon\ F=0,\quad \underset{\nu}{F}=0,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots \tag{17.2}$$

Будем говорить, что уравнение (17.1) задает дифференциальное многообразие $[F]$. Уравнение (17.1) называется *инвариантным относительно группы Ли—Беклунда* G, если инвариантно многообразие $[F]$. С помощью теоремы 15.2.2, справедливой также при переходе от уравнений специального вида (15.19) к более общим уравнениям (17.2), получается следующий инфинитезимальный критерий инвариантности дифференциальных многообразий.

Теорема. *Пусть G—группа преобразований Ли—Беклунда, а X—ее касательное векторное поле. Дифференциальное многообразие $[F]$ инвариантно относительно G тогда и только тогда, когда*

$$(XF)_{[F]}=0. \tag{17.3}$$

Доказательство. Применение теоремы 15.2.2 дает в качестве критерия инвариантности многообразия $[F]$ бесконечную цепочку уравнений

$$(XF)_{[F]}=0,\quad (X\underset{\nu}{F})_{[F]}=0,\qquad \nu=1,\ 2,\ \ldots$$

Все уравнения этой цепочки являются следствием первого из них. Это легко устанавливается при помощи леммы 16.2.1 с учетом аналитичности рассматриваемых функций. Возьмем, например, выражения XD_iF, составляющие $X\underset{1}{F}$. По лемме 16.2.1

$$XD_iF=D_iXF-D_i(\xi^j)\,D_jF.$$

Очевидно, что второе слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль на многообразии $[F]$. Поэтому остается показать, что выражение D_iXF обращается в нуль в силу равенств (17.2) и (17.3). Это следует из того, что функция XF ввиду ее аналитичности и обращения в нуль на $[F]$ может быть представлена в виде линейной формы

$$XF=\lambda F+\lambda^jD_jF+\lambda^{jk}D_jD_kF+\ldots$$

от F, $\underset{1}{F}$, $\underset{2}{F}$, ... с регулярными коэффициентами.

Следствие 1. *Всякое дифференциальное многообразие инвариантно относительно группы, порожденной операторами X_* вида* (16.16).

Следствие 2. *Пусть X_F—оператор Ли—Беклунда, координаты ξ^i, η^α которого являются линейными формами от F, $\underset{1}{F}, \ldots$ с произвольными коэффициентами, регулярными в точках $z\in[F]$. Тогда дифференциальное многообразие $[F]$ инвариантно относительно группы с оператором X_F.*

Подстановка в (17.3) выражений (16.11) для координат ζ оператора X превращает (17.3) в систему уравнений для функций $\xi^i(z)$ и $\eta^\alpha(z)$, которая называется *определяющим уравнением группы Ли — Беклунда, допускаемой уравнением* (17.1). В силу следствия 2 можно считать, что функции ξ^i, η^α зависят только от тех величин x^i, u^α, u_i^α, ..., которые на многообразии $[F]$ играют роль независимых переменных. Дальнейшее упрощение определяющего уравнения достигается с помощью следствия 1, согласно которому вместо (16.14) можно рассматривать канонические операторы Ли — Беклунда (16.18). Тогда определяющее уравнение (17.3) имеет следующий вид:

$$\left(\eta^\alpha \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} + D_i(\eta^\alpha)\frac{\partial F}{\partial u_i^\alpha} + \ldots\right)_{[F]} = 0. \tag{17.4}$$

Замечание 1. Пусть уравнение (17.1) инвариантно относительно группы G с оператором (16.18). Тогда каждое решение $u = u(x)$ дифференциального уравнения (17.1) под действием G переходит снова в решение (являющееся формальным степенным рядом от a) $u = u(x, a)$. Учитывая это обстоятельство, читатель, предпочитающий язык дифференциальных уравнений, может рассматривать определяющее уравнение (17.4) как условие совместности исходной системы дифференциальных уравнений (17.1) с уравнением Ли — Беклунда, записанным в виде системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial a} = \eta^\alpha(x, u, \underset{1}{u}, \ldots), \qquad \alpha = 1, \ldots, m.$$

Замечание 2. Если G — группа точечных преобразований, то условие (17.3) формально отличается от классического определяющего уравнения (4.12) в том случае, когда порядок некоторых из уравнений системы (17.1) меньше s. Отличие состоит в том, что в (4.12) учитываются только связи между $x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}$, заданные уравнениями (17.1), тогда как в (17.3) наряду с (17.1) используются также дифференциальные следствия (до порядка s) тех уравнений системы (17.1), порядок которых меньше s. Для таких систем дифференциальных уравнений замена определяющего уравнения (4.12) условием (17.3) может привести к расширению допускаемой группы точечных преобразований.

Замечание 3. Следующий пример иллюстрирует возможность использования преобразований Беклунда для расширения допускаемой группы. Рассматривается уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \tag{17.5}$$

для которого определяющее уравнение (17.4) имеет вид

$$D_t^2(\eta) - D_x^2(\eta) = 0.$$

Уравнение (17.5) допускает преобразование Беклунда

$$v_t - u_x = 0, \quad v_x - u_t = 0. \tag{17.6}$$

Пусть u, v — два решения уравнения (17.5), связанные соотношениями (17.6). Тогда (17.5) инвариантно относительно группы, порожденной оператором

$$X = \eta(u+v)\frac{\partial}{\partial u} \tag{17.7}$$

с произвольной функцией η. Выполнение определяющего уравнения проверяется легко. Так как для оператора (17.7)

$$(D_t - D_x)\eta = [(u_t - v_x) + (v_t - u_x)]\eta', \tag{17.8}$$

то

$$(D_t^2 - D_x^2)\eta = (D_t + D_x)(D_t - D_x)\eta = (D_t + D_x)[(u_t - v_x) + (v_t - u_x)]\eta' = 0$$

для любых u, v, удовлетворяющих уравнениям (17.6). При этом всякая пара решений u, v уравнения (17.5), связанная преобразованием Беклунда (17.6), под действием рассматриваемой группы снова переходит в пару решений, связанную тем же преобразованием Беклунда. В самом деле, из (17.8) видно, что «удвоенный» оператор (17.7)

$$X = \eta(u+v)\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

удовлетворяет условию инвариантности (17.6): $(D_t\eta - D_x\eta)_{(17.6)} = 0$

17.2. Примеры решения определяющего уравнения. Первый пример иллюстрирует алгоритм отыскания группы точечных преобразований на основе определяющего уравнения (17.4) и теоремы 16.2. Приводимые ниже вычисления полезно сравнить с § 5.2. Рассматривается уравнение (5.2)

$$u_x u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

и ищутся допускаемые этим уравнением канонические операторы

$$X = \mu\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{17.9}$$

эквивалентные инфинитезимальным операторам точечных преобразований. Для этого в соответствии с теоремой 16.2 нужно найти все решения вида

$$\mu = \xi^1(x, y, u)\,u_x + \xi^2(x, y, u)\,u_y + \eta(x, y, u) \tag{17.10}$$

определяющего уравнения

$$(u_{xx}D_x + u_x D_x^2 + D_y^2)\,\mu = 0; \tag{17.11}$$

в уравнении (17.11) делаются подстановки $u_{yy} = -u_x u_{xx}$, $u_{xyy} =$

$=-u_x u_{xxx}-u_{xx}^2$, ... Производные функции μ вида (17.10) равны

$$D_x(\mu)=\xi^1 u_{xx}+\xi^2 u_{xy}+\xi_u^1 u_x^2+\xi_u^2 u_x u_y+(\xi_x^1+\eta_u)\,u_x+\xi_x^2 u_y+\eta_x,$$

$$\begin{aligned}D_x^2(\mu)=\xi^1 u_{xxx}+\xi^2 u_{xxy}+(3\xi_u^1 u_x+\xi_u^2 u_y+2\xi_x^1+\eta_u)\,u_{xx}+\\ +2(\xi_u^2 u_x+\xi_x^2)\,u_{xy}+\xi_{uu}^1 u_x^3+\xi_{uu}^2 u_x^2 u_y+(2\xi_{xu}^1+\eta_{uu})\,u_x^2+\\ +2\xi_{xu}^2 u_x u_y+(\xi_{xx}^1+2\eta_{xu})\,u_x+\xi_{xx}^2 u_y+\eta_{xx},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_y^2(\mu)=\xi^1 u_{xyy}+\xi^2 u_{yyy}+2(\xi_u^1 u_y+\xi_y^1)\,u_{xy}+\\ +(\xi_u^1 u_x+3\xi_u^2 u_y+2\xi_y^2+\eta_u)\,u_{yy}+\xi_{uu}^1 u_x u_y^2+\xi_{uu}^2 u_y^3+\\ +2\xi_{yu}^1 u_x u_y+(2\xi_{yu}^2+\eta_{uu})\,u_y^2+\xi_{yy}^1 u_x+(\xi_{yy}^2+2\eta_{yu})\,u_y+\eta_{yy}.\end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в определяющее уравнение дает

$$\begin{aligned}2(\xi_u^2 u_x^2+\xi_x^2 u_x+\xi_x^1 u_y+\xi_y^1)\,u_{xy}+\\ +[3\xi_u^1 u_x^2-\xi_u^2 u_x u_y+(3\xi_x^1-2\xi_y^2+\eta_u)+\xi_x^2 u_y+\eta_x]\,u_{xx}+\ldots=0,\end{aligned}$$

где опущенные члены зависят только от переменных x, y, u, u_x, u_y. Дальше повторяются рассуждения, приведенные в § 5.2. Равенство нулю коэффициента при u_{xy} приводит к уравнениям (5.5), с учетом которых условие равенства нулю коэффициента при u_{xx} дает уравнения (5.6) и $\eta_u=2\xi_y^2-3\xi_x^1$; последнее соотношение отличается от (5.7) знаком при ξ^1, ξ^2 вследствие перехода от оператора вида (5.3) к его каноническому представителю (17.9) по формуле (16.7). Из полученных соотношений выводятся также уравнения (5.8), и определяющее уравнение (17.11) принимает следующий простой вид:

$$\eta_{yy}+(2\eta_{yu}+\xi_{yy}^2)\,u_y=0.$$

В результате получается общее решение

$$\xi^1=c_1x+c_2,\quad \xi^2=c_3y+c_4,\quad \eta=(2c_3-3c_1)\,u+c_5y+c_6,$$

зависящее от шести произвольных постоянных c_i, $i=1,\ldots,6$, и базис искомой алгебры образуют канонические операторы Ли—Беклунда

$$X_1=u_x\frac{\partial}{\partial u}+\ldots,\quad X_2=u_y\frac{\partial}{\partial u}+\ldots,\quad X_3=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_4=y\frac{\partial}{\partial u}+\ldots,$$

$$X_5=(3u-xu_x)\frac{\partial}{\partial u}+\ldots,\quad X_6=(2u+yu_y)\frac{\partial}{\partial u}+\ldots,$$

эквивалентные операторам (5.11).

Второй пример—стационарное уравнение Шредингера для атома водорода:

$$Lu\equiv\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}D_i^2+\frac{1}{r}-E\right)u=0,\qquad (17.12)$$

где $r=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}(x^i)^2}$, E—положительная постоянная. Хорошо известно, что это уравнение инвариантно относительно 6-мерной группы Фока [2], которая после преобразования Фурье уравнения (17.12) может быть записана в виде группы вращений в 4-мерном пространстве. В исходных переменных x, u группа Фока представляется преобразованиями Ли—Беклунда: она образована трехмерными вращениями в пространстве $x=(x^1, x^2, x^3)$ и 3-параметрической группой Ли—Беклунда с каноническими операторами (Ibragimov & Anderson [1])

$$X_k=\eta_k\frac{\partial}{\partial u}+\ldots, \quad k=1, 2, 3. \tag{17.13}$$

Координаты операторов (17.13) задаются формулами

$$\eta_k=P_k(u), \tag{17.14}$$

где P_k—линейные дифференциальные операторы второго порядка:

$$P_k=\frac{x^k}{r}-D_k+\sum_{i\neq k}(x^kD_i-x^iD_k)D_i. \tag{17.15}$$

Операторы (17.15) коммутируют с оператором L из (17.12):

$$LP_k=P_kL, \qquad k=1, 2, 3.$$

Отсюда следует инвариантность уравнения (17.12) относительно рассматриваемой группы Ли—Беклунда, так как $X_kLu=L\eta_k$. Функции η_k, заданные формулами (17.14), зависят от $\underset{2}{u}$ и в силу теоремы 16.2 операторы (17.13) не эквивалентны операторам групп точечных или контактных преобразований.

17.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка могут допускать самое большее 8-параметрическую группу точечных преобразований, причем это максимальное значение достигается для линейных уравнений (см. лекции Lie [4] или Овсянников [4], § 8.8)

$$\frac{d^2u}{dx^2}=a(x)\frac{du}{dx}+b(x)u.$$

Например, для уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0 \tag{17.16}$$

оператор

$$X=\xi(x, u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{17.17}$$

максимальной группы точечных преобразований задается формулами

$$\begin{aligned}\xi&=A_1+A_2x+A_3u+A_4xu+B_4x^2,\\ \eta&=B_1+B_2x+B_3u+B_4xu+A_4u^2,\end{aligned} \tag{17.18}$$

где A_i, B_i ($i=1, \ldots, 4$)—произвольные постоянные.

Если вместо уравнения (17.16) рассмотреть эквивалентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du^1}{dx}=u^2, \quad \frac{du^2}{dx}=0 \tag{17.19}$$

с зависимыми переменными

$$u^1=u, \quad u^2=\underset{1}{u}\equiv\frac{du}{dx}, \tag{17.20}$$

то допускаемая группа расширяется. А именно, уравнения (17.19) инвариантны относительно бесконечной группы точечных преобразований, порожденной операторами

$$X_*=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\xi u^2\frac{\partial}{\partial u^1}, \tag{17.21}$$

$$X=(u^1g+h)\frac{\partial}{\partial u^1}+u^2g\frac{\partial}{\partial u^2}, \tag{17.22}$$

где $\xi=\xi(x, u^1, u^2)$, $g=g(u^1-xu^2, u^2)$, $h=h(u^1-xu^2, u^2)$ — произвольные функции указанных аргументов. Эта группа является максимальной группой точечных преобразований, допускаемой системой (17.20), в чем легко убедиться, решая соответствующие определяющие уравнения.

Если операторы (17.21), (17.22) переписать в терминах функции u, делая замену (17.20), т. е. $u^1\mapsto u$, $u^2\mapsto \underset{1}{u}$, то в результате получатся следующие операторы Ли — Беклунда, допускаемые уравнением (17.16):

$$X_*=\xi\left(x,\ u,\ \underset{1}{u}\right)D, \quad D=\frac{\partial}{\partial x}+\underset{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}+\ldots, \tag{17.23}$$

$$X=\left[ug\left(u-x\underset{1}{u},\ \underset{1}{u}\right)+h\left(u-x\underset{1}{u},\ \underset{1}{u}\right)\right]\frac{\partial}{\partial u}+\ldots \tag{17.24}$$

Оператор (17.23) — тривиальный (см. лемму 16.2.2 и следствие 17.1.1), а оператор (17.24) эквивалентен инфинитезимальному оператору группы контактных преобразований по теореме 16.2: $X\backsim Y$, где Y — оператор вида (16.23) с $W=ug\left(u-x\underset{1}{u},\ \underset{1}{u}\right)+$ $+h\left(u-x\underset{1}{u},\ \underset{1}{u}\right)$. Этот оператор Y задает максимальную группу контактных преобразований, допускаемую уравнением (17.16) (см. Anderson & Ibragimov [2], стр. 59); с другой стороны, для уравнения (17.16) нужно рассматривать только такие операторы Ли — Беклунда, координаты которых зависят от x, u, $\underset{1}{u}$, т. е. эквивалентные операторам контактных преобразований. Следовательно, наиболее широкая группа Ли — Беклунда, допускаемая (17.16), порождается оператором (17.24).

Предыдущие результаты переносятся также на уравнения более высокого порядка. Например, максимальная группа Ли — Беклунда для уравнения порядка $n \geqslant 2$

$$\underset{n}{u} \equiv \frac{d^n u}{dx^n} = 0 \tag{17.25}$$

вычисляется так (Anderson & Ibragimov [2], § 15). Оператор

$$X = \eta\left(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{n-1}{u}\right)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{17.26}$$

допускаемый уравнением (17.25), ищется из определяющего уравнения

$$D^n(\eta)\,|_{\underset{n}{u}=0} = 0,$$

которое, очевидно, равносильно уравнению

$$\underset{n-2}{D^n}(\eta) = 0, \tag{17.27}$$

где (формула (14.15))

$$\underset{n-2}{D} = \frac{\partial}{\partial x} + \underset{1}{u}\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + \underset{n-1}{u}\frac{\partial}{\partial \underset{n-2}{u}}.$$

Общее решение уравнения (17.27) выражается через функции

$$J_{n-k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(-x)^{k-j}}{(k-j)!}\underset{n-j}{u}, \qquad k = 1,\ \ldots,\ n, \tag{17.28}$$

образующие базис инвариантов оператора $\underset{n-2}{D}$ для функций от переменных $x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{n-1}{u}$. Удобно взять общее решение уравнения

$$\underset{n-2}{D}\,F(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{n-1}{u}) = 0$$

в виде

$$F = \underset{n-1}{u}\,g_{n-1}(J_0,\ \ldots,\ J_{n-1})$$

и один раз проинтегрировать уравнение (17.27):

$$\underset{n-2}{D^{n-1}}(\eta) = \underset{n-1}{u}\,g_{n-1}. \tag{17.29}$$

С помощью частного решения $F = \underset{n-2}{u}\,g_{n-1}$ уравнения $\underset{n-2}{D}\,F = \underset{n-1}{u}\,g_{n-1}$ можно еще раз проинтегрировать уравнение (17.29) и получить

$$\underset{n-2}{D^{n-2}}(\eta) = \underset{n-2}{u}\,g_{n-1} + \underset{n-1}{u}\,g_{n-2}$$

с произвольными функциями g_{n-1}, g_{n-2} от $J_0, \ldots, J_{n-1}$. Повторение этого процесса дает общее решение уравнения (17.27):

$$\eta = ug_{n-1} + \underset{1}{u}g_{n-2} + \ldots + \underset{n-2}{u}g_1 + g_0, \tag{17.30}$$

где $g_0, \ldots, g_{n-1}$ — произвольные функции от $J_0, \ldots, J_{n-1}$.

Операторы

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial x}, \quad x^2\frac{\partial}{\partial x} + (n-1)xu\frac{\partial}{\partial u},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}, \quad u\frac{\partial}{\partial u}, \quad x\frac{\partial}{\partial u}, \quad x^2\frac{\partial}{\partial u}, \quad \ldots, \quad x^{n-1}\frac{\partial}{\partial u},$$

порождающие $(n+4)$-параметрическую (максимальную) группу точечных преобразований, допускаемую уравнением (17.27) (Lie [4]), а также операторы контактных преобразований, легко получаются из формулы (17.30).

Оператор Ли — Беклунда (17.26), (17.30), можно получить также тем способом, который использовался выше в случае уравнения второго порядка. Для этого нужно переписать уравнение (17.25) в виде системы уравнений первого порядка и искать группу точечных преобразований, допускаемую этой системой.

17.4. Теорема об изоморфизме. Рассмотренные в § 17.3 примеры показывают, что уравнение произвольного порядка и равносильная ему система уравнений первого порядка обладают разными свойствами инвариантности по отношению к точечным преобразованиям. Расширение допустимых преобразований за счет преобразований Ли — Беклунда устраняет это различие.

Теорема. *Группы Ли — Беклунда, допускаемые дифференциальным уравнением* (17.1) *и равносильной системой уравнений первого порядка, полученной из* (17.1) *стандартным преобразованием*

$$v^\alpha = u^\alpha, \quad v^{\alpha i} = u^\alpha_i, \quad \ldots, \tag{17.31}$$

изоморфны.

Доказательство. Для простоты можно ограничиться случаем уравнений второго порядка

$$F\left(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}\right) = 0, \tag{17.32}$$

так как в общем случае рассуждения аналогичны. Пусть

$$X = \eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + D_i(\eta^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_i} + D_iD_j(\eta^\alpha)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{ij}} + \ldots \tag{17.33}$$

— канонический оператор Ли — Беклунда, допускаемый уравнением (17.32). При переходе от старых зависимых переменных u^α к новым зависимым переменным v^α, $v^{\alpha i}$ из (17.33) получается оператор

$$\overline{X}=\overline{\eta}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+\overline{\zeta}_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha i}}+\overline{\zeta}_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v_j^{\alpha i}}+\ldots, \qquad (17.34)$$

где

$$\overline{\eta}^{\alpha}=\overline{\eta}^{\alpha}\left(x,\, v,\, \underset{1}{v},\, \ldots\right),\quad \overline{\zeta}_i^{\alpha}=\overline{D}_i(\overline{\eta}^{\alpha}),\quad \overline{\zeta}_{ij}^{\alpha}=\overline{D}_j(\overline{\zeta}_i^{\alpha}), \qquad (17.35)$$

$$\overline{D}_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+v^{\alpha i}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+v_i^{\alpha j}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha j}}+\ldots$$

Здесь временно принято правило суммирования по всем, а не только по верхним и нижним, повторяющимся индексам.

Так как оператор (17.33) на решениях уравнения (17.32) удовлетворяет условию $XF=0$, то для оператора (17.34) справедливо равенство

$$\overline{X}H=0 \qquad (17.36)$$

на решениях уравнения

$$H\left(x,\; v,\; \underset{1}{v}\right)=0, \qquad (17.37)$$

полученного из (17.32) заменой (17.31). Уравнение (17.37) вместе с равенствами

$$v_i^{\alpha}=v^{\alpha i},\quad \ldots, \qquad (17.38)$$

вытекающими из (17.31), образуют систему дифференциальных уравнений первого порядка, равносильную исходному уравнению второго порядка (17.32).

Оператор (17.34), (17.35) не является оператором Ли—Беклунда в пространстве переменных $x,\ v,\ \underset{1}{v},\ \ldots$ Соответствующий оператор Ли—Беклунда равен

$$Y=\overline{\eta}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+\overline{\zeta}_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha i}}+\mu_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v_i^{\alpha}}+\mu_j^{\alpha i}\frac{\partial}{\partial v_j^{\alpha i}}+\ldots, \qquad (17.39)$$

где

$$\begin{gathered}\mu_i^{\alpha}=D_i'(\overline{\eta}^{\alpha}),\quad \mu_j^{\alpha i}=D_j'(\overline{\zeta}_i^{\alpha}),\\ D_i'=\frac{\partial}{\partial x^i}+v_i^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+v_i^{\alpha j}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha j}}+v_{ij}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial v_j^{\alpha}}+\ldots\end{gathered} \qquad (17.40)$$

Докажем, что система уравнений (17.37), (17.38) инвариантна относительно группы с оператором Y. Для этого достаточно показать, что справедливо равенство

$$Y=\overline{X}\quad \text{на}\quad (17.38),$$

и воспользоваться условием (17.36). Пусть

$$w^{\alpha i}=v_i^{\alpha}-v^{\alpha i},\quad w_j^{\alpha i}=v_{ij}^{\alpha}-v_j^{\alpha i},\quad \ldots$$

Так как
$$D'_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+(v^{\alpha i}+w^{\alpha i})\frac{\partial}{\partial v^\alpha}+v^{\alpha j}\frac{\partial}{\partial v^\alpha}-v_i^{\alpha j}\frac{\partial}{\partial w^{\alpha j}}+v_{ij}^\alpha\frac{\partial}{\partial w^{\alpha j}}+\ldots,$$
то с учетом (17.38) из формул (17.35) и (17.40) следует, что
$$\mu_i^\alpha=\bar{\zeta}_i^\alpha,\quad \mu_j^{\alpha i}=\bar{\zeta}_{ij}^\alpha,\ \ldots$$

Поэтому на многообразии, заданном уравнениями (17.38),
$$Y=\bar{\eta}^\alpha\frac{\partial}{\partial v^\alpha}+\bar{\zeta}_i^\alpha\frac{\partial}{\partial v^{\alpha i}}-\bar{\zeta}_i^\alpha\frac{\partial}{\partial w^{\alpha i}}+\mu_i^\alpha\frac{\partial}{\partial w^{\alpha i}}+\ldots=\bar{X}.$$

Приведенные рассуждения обратимы. Если система уравнений (17.37), (17.38) инвариантна относительно группы, порожденной оператором (17.39), (17.40), то уравнение (17.32) инвариантно относительно группы с оператором (17.33). При этом формулы (17.33) и (17.39), (17.40) устанавливают взаимно однозначное соответствие между группами Ли—Беклунда, допускаемыми уравнением (17.32) и равносильной системой уравнений первого порядка (17.37), (17.38). Очевидно, что это соответствие является изоморфизмом.

17.5. Линеаризация преобразованиями Ли—Беклунда. Приводимость дифференциальных уравнений в частных производных к линейным уравнениям путем точечной замены переменных можно установить на основе свойства инвариантности исходных уравнений относительно группы точечных преобразований: группа должна быть бесконечной, причем степень ее бесконечности определяется множеством решений рассматриваемых уравнений. Однако многие встречающиеся на практике способы линеаризации не ограничиваются точечными заменами и не могут быть указаны из априорных групповых соображений, если ограничиться только группами точечных преобразований. Хорошей иллюстрацией является уравнение Бюргерса
$$u_t+uu_x-u_{xx}=0, \tag{17.41}$$
которое переводится в линейное уравнение теплопроводности
$$v_t-v_{xx}=0 \tag{17.42}$$
преобразованием Хопфа—Коула (Hopf [1], Cole [1])
$$u=-2\frac{v_x}{v}. \tag{17.43}$$

Максимальная группа точечных преобразований, допускаемая уравнением Бюргерса, является 5-параметрической, а уравнение (17.42) инвариантно относительно бесконечной группы точечных преобразований, которая, в частности, содержит бесконечную подгруппу, порожденную операторами
$$X=h(t,\ x)\frac{\partial}{\partial v} \tag{17.44}$$

с произвольным решением $h(t, x)$ уравнения (17.42). Кроме того, упомянутая 5-параметрическая группа для уравнения Бюргерса под действием преобразования (17.43) переходит в группу точечных преобразований для уравнения теплопроводности. Указанное различие в групповых свойствах делает очевидной невозможность точечного соответствия между уравнениями (17.41) и (17.42); отсюда же ясно, что не существует точечная замена (в пространстве переменных t, x, u!), линеаризующая уравнение Бюргерса.

Заметим теперь, что преобразование (17.43) вместе с его дифференциальными следствиями

$$u_t = D_t\left(-2\frac{v_x}{v}\right), \quad u_x = D_x\left(-2\frac{v_x}{v}\right), \ \ldots$$

является преобразованием Ли—Беклунда. Под действием этого преобразования оператор (17.44) переходит в оператор Ли—Беклунда

$$X = (hu + 2h_x)\, e^{\varphi/2}\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad \varphi_x = u, \tag{17.45}$$

который допускается уравнением (17.41) для любой функции $h(t, x)$, удовлетворяющей уравнению (17.42). Таким образом, оператор Ли—Беклунда (17.45) линеаризует уравнение Бюргерса. Однако следует отметить наличие нелокальности, связанной с зависимостью оператора (17.45) от потенциала φ. Чтобы исключить нелокальность, можно переписать уравнение Бюргерса в переменной φ, подставив $u = \varphi_x$ в уравнение (17.41) и один раз проинтегрировав полученное уравнение. Если учесть неоднозначность выбора потенциала, то уравнение Бюргерса можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_x^2 - \varphi_{xx} = 0. \tag{17.46}$$

Так как $(h\varphi_x + 2h_x)\, e^{\varphi/2} = 2\,(he^{\varphi/2})_x$, оператор (17.45) переходит в оператор

$$X = h(t, x)\, e^{\varphi/2}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

порождающий бесконечную группу точечных преобразований, допускаемую уравнением (17.46). Это говорит о линеаризуемости уравнения (17.46) точечной заменой. Соответствующая замена, равносильная преобразованию (17.43), имеет вид

$$\varphi = -2\ln v. \tag{17.47}$$

Приведенный пример достаточно полно иллюстрирует следующий общий вывод из теоремы об изоморфизме*):

*) Эта теорема, доказанная в § 17.4 в случае преобразований частного вида (17.31), переносится, если рассматривать алгебры с нелокальными (см. стр. 191) элементами, на произвольные преобразования Ли—Беклунда.

Всякое дифференциальное уравнение в частных производных, допускающее линеаризацию некоторым преобразованием Ли—Беклунда, инвариантно относительно бесконечной группы Ли—Беклунда.

Еще один пример—уравнение стационарного околозвукового течения газа (5.2). Это уравнение не допускает линеаризацию точечной заменой, так как оно инвариантно только относительно 6-параметрической группы точечных преобразований (см. § 5.2 или § 17.2). Однако оно линеаризуется методом годографа, так как допускает бесконечную группу Ли—Беклунда, порожденную операторами

$$X=\eta(u_x,\ u_y)\frac{\partial}{\partial u}+\ldots, \tag{17.48}$$

где $\eta(\alpha,\ \beta)$—произвольное решение линейного уравнения второго порядка

$$\eta_{\alpha\alpha}+\alpha\eta_{\beta\beta}=0. \tag{17.49}$$

Именно уравнение (17.49) реализует указанную линеаризацию. В данном случае линеаризацию можно осуществить также с помощью контактных преобразований, что хорошо известно в механике. Действительно, к оператору (17.48) применима теорема 16.2, в соответствии с которой оператор Ли—Беклунда (17.48) эквивалентен инфинитезимальному оператору

$$X=\eta_\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\eta_\beta\frac{\partial}{\partial y}+(\alpha\eta_\alpha+\beta\eta_\beta-\eta)\frac{\partial}{\partial u}$$

группы контактных преобразований

$$\begin{aligned}&x'=x+a\eta_\alpha,\quad y'=y+a\eta_\beta,\\&u'=u+a(\alpha\eta_\alpha+\beta\eta_\beta-\eta),\\&\alpha'=\alpha,\quad \beta'=\beta,\end{aligned} \tag{17.50}$$

где $\alpha=u_x$, $\beta=u_y$. Теоретико-групповые аспекты метода годографа обсуждаются также в книгах Биркгофа [1] и Овсянникова [2].

Условие линеаризуемости преобразованиями Ли—Беклунда, высказанное выше, более точно формулируется как свойство автоморфности рассматриваемого дифференциального уравнения. Уравнение (17.1), инвариантное относительно группы Ли—Беклунда G, называется *автоморфным* (относительно группы G), если G действует транзитивно на множестве решений этого уравнения, иначе говоря, если все решения уравнения (17.1) получаются из одного решения преобразованиями группы G. Например, любое линейное уравнение автоморфно. Примеры нелинейных автоморфных уравнений приводились выше; они появятся еще в следующей главе.

Теорема. *Дифференциальное уравнение, линеаризуемое преобразованием Ли—Беклунда, автоморфно относительно некоторой группы Ли—Беклунда.*

Доказательство. Свойство автоморфности инвариантно относительно произвольных преобразований Ли—Беклунда. Поэтому утверждение вытекает из теоремы об изоморфизме.

ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ ЛИ—БЕКЛУНДА

§ 18. Характерные примеры

18.1. Уравнение теплопроводности. Всякое линейное эволюционное уравнение*) $u_t = \sum_{i=0}^{m} a^i u_i$ с постоянными коэффициентами a^i допускает бесконечную нетривиальную (т. е. не точечную) группу Ли — Беклунда. Алгоритм построения соответствующей бесконечномерной алгебры иллюстрируется здесь на примере уравнения

$$u_t = u_2. \tag{18.1}$$

Уравнение теплопроводности с точки зрения точечных преобразований рассматривал еще С. Ли (см. Lie [6], том 3, стр. 514): наряду с очевидной бесконечной группой с операторами вида (17.44), уравнение (18.1) допускает 6-параметрическую группу точечных преобразований, порожденную инфинитезимальными операторами

$$X_0 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_5 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Эти операторы эквивалентны каноническим операторам Ли — Беклунда

$$X = f(t,\ x,\ u,\ u_1,\ \ldots)\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{18.2}$$

где f принимает значения

$$\begin{aligned} &f_0 = u, \quad f_1 = u_1, \quad f_2 = u_2, \quad f_3 = xu + 2tu_1, \\ &f_4 = xu_1 + 2tu_2, \quad f_5 = (x^2+2t)u + 4txu_1 + 4t^2u_2. \end{aligned} \tag{18.3}$$

Первые три функции в (18.3) связаны рекуррентной формулой

$$f_k = Df_{k-1}, \qquad k = 1,\ 2. \tag{18.4}$$

*) Здесь используются обозначения $u_0 = u$, $u_1 = u_x$, $u_2 = u_{xx}$, ..., $D = D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i \geq 0} u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i}$.

На самом деле рекурренция (18.4) переводит любое решение f определяющего уравнения

$$(D_t - D^2) f|_{u_t=u_2} = 0 \tag{18.5}$$

для (18.1) в решение $\tilde{f} = Df$ уравнения (18.5). Это следует из коммутационного соотношения $[D_t - D^2, D] = 0$. Поэтому можно, исходя из простейшего решения $f_0 = u$ определяющего уравнения, получить бесконечную последовательность операторов Ли—Беклунда

$$X_k = u_k \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{18.6}$$

допускаемых уравнением теплопроводности *). Кроме того, действие D на остальные функции из (18.3) дает

$$\begin{aligned} &Df_3 = f_0 + f_4, \quad Df_4 = f_1 + xu_2 + 2tu_3, \\ &Df_5 = 2f_3 + (x^2 + 2t)u_1 + 4txu_2 + 4t^2u_3. \end{aligned} \tag{18.7}$$

Поэтому уравнение (18.1) наряду с (18.6) допускает следующие две последовательности операторов:

$$X_k = (xu_k + 2tu_{k+1}) \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{18.8}$$

$$X_k = ((x^2 + 2t)u_k + 4txu_{k+1} + 4t^2u_{k+2}) \frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{18.9}$$

Таким образом, уравнение (18.1) инвариантно относительно бесконечной группы Ли—Беклунда, алгебра Ли которой порождена операторами (18.6), (18.8), (18.9). Из соотношений (18.4) и (18.7) видно, что эту алгебру можно получить путем последовательного действия дифференцирования D на функции f_0, f_3 и f_5 из (18.3).

Приведенные соображения подсказывают следующий подход к решению определяющего уравнения (18.5). Пусть функция L, зависящая от независимых переменных t, x, от дифференциальной переменной u (т. е. от u, u_1, u_2, ...; величины u_t, u_{tx}, ... исключаются с помощью уравнения (18.1)) и от символа D, удовлетворяет условию

$$[D_t - D^2, L]_{u_t=u_2} = 0. \tag{18.10}$$

Тогда любое решение $f = f(t, x, u, u_1, \ldots)$ уравнения (18.5) переводится в решение Lf уравнения (18.5), если определено действие оператора L на f. Выше рассматривался случай $L = D$. В качестве простого обобщения этого случая найдем все решения уравнения (18.10), являющиеся дифференциальными операторами

---

*) Операторы (18.6) допускаются любым линейным уравнением с постоянными коэффициентами.

первого порядка,

$$L=\alpha D+\beta, \tag{18.11}$$

где α, β зависят от t, x, u, u_1, ... Подстановка (18.11) в (18.10) дает

$$[D_t-D^2,\ L]=-2D(\alpha)D^2+(D_t(\alpha)-2D(\beta)-D^2(\alpha))D+ \\ +D_t(\beta)-D^2(\beta)=0.$$

Отсюда следуют уравнения

$$D(\alpha)=0,\quad D_t(\alpha)-2D(\beta)=0,\quad D_t(\beta)-D^2(\beta)=0.$$

Так как из первых двух уравнений следует равенство $D^2(\beta)=0$, то третье уравнение принимает вид $D_t(\beta)=0$. Поэтому $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(x)$, и уравнение $D_t(\alpha)-2D(\beta)=0$ дает $\alpha'=2\beta'=\mathrm{const}$, откуда

$$\alpha=2at+b,\quad \beta=ax+c,$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Опуская несущественную постоянную c, общее решение вида (18.11) уравнения (18.10) можно записать как линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами следующих двух дифференциальных операторов:

$$L_1=D,\quad L_2=2tD+x. \tag{18.12}$$

Полученные операторы L_1 и L_2 позволяют построить описанную выше алгебру операторов Ли — Беклунда для уравнения теплопроводности, исходя из одного элемента $f_0=u$. В силу формул (18.4), (18.7) достаточно показать, что f_3 и f_5 можно получить из f_0. Имеем

$$f_3=L_2f_0,\quad f_5=L_2f_3=L_2^2f_0.$$

Отсюда ясно также, что «рекурренции» L_1 и L_2 позволяют построить для уравнения теплопроводности более широкую алгебру, чем алгебра операторов (18.6), (18.8), (18.9).

С помощью замены (17.47) из операторов (18.12) можно получить рекурренции для построения бесконечной алгебры операторов Ли — Беклунда, допускаемых уравнением Бюргерса. Заметим сначала, что при замене переменной

$$v=\Phi(u) \tag{18.13}$$

координата f оператора (18.2) переходит в $\tilde{f}=\Phi'f$, и поэтому Lf переходит в $\Phi'Lf=\Phi'L\Phi'^{-1}\tilde{f}=M\tilde{f}$. Следовательно, оператор рекурренции L при замене (18.13) принимает вид

$$M=\Phi'L\Phi'^{-1}. \tag{18.14}$$

Рассмотрим теперь уравнение Бюргерса

$$v_t=v_2-\frac{1}{2}v_1^2, \tag{18.15}$$

которое связано с (18.1) заменой

$$v=-2\ln u. \tag{18.16}$$

Преобразование (18.14) в этом случае имеет вид

$$M=\frac{1}{u}Lu=e^{\frac{v}{2}}Le^{-\frac{v}{2}}.$$

Подставляя сюда значения (18.12) оператора L и учитывая инвариантность дифференцирования, $D=\frac{\partial}{\partial x}+\sum\limits_{i\geqslant 0}u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i}=\frac{\partial}{\partial x}+$ $+\sum\limits_{i\geqslant 0}v_{i+1}\frac{\partial}{\partial v_i}$, получаем следующие два оператора рекурренции для уравнения (18.15):

$$M_1=D-\frac{1}{2}v_1,\quad M_2=2tM_1+x. \tag{18.17}$$

Рекурренция M_1 использовалась в статье Ибрагимова и Шабата [2] при описании алгебры, не зависящей от t, x. Для построения операторов (18.2), допускаемых уравнением (18.15), можно в качестве исходного элемента алгебры взять $f_0=1$ и действовать на него операторами M_1, M_2. В частности, инфинитезимальные операторы точечных преобразований соответствуют следующим элементам алгебры:

$$f_0=1,\quad f_1=M_1f_0=v_1,\quad f_2=M_1^2f_0=v_2-\frac{1}{2}v_1^2=v_t,$$
$$f_3=M_2f_0=x-tv_1,\quad f_4=M_2M_1f_0=2tv_t+xv_1,$$
$$f_5=M_2^2f_0=(x^2+2t)-2t^2v_t-2txv_1$$

и равны

$$X_0=\frac{\partial}{\partial u},\quad X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_3=t\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},\quad X_5=2t^2\frac{\partial}{\partial t}+2tx\frac{\partial}{\partial x}+(x^2+2t)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Коммутационные соотношения в этой 6-мерной алгебре определяются свойствами операторов M_1 и M_2 и поэтому переносятся на бесконечномерную алгебру операторов Ли—Беклунда, порожденную рекурренциями M_1, M_2. Например, элементы вида $M_1^nf_0$ и $M_2^nf_0$, $n=0, 1, 2, \ldots$ (или элементы $L_1^nf_0$ и $L_2^nf_0$ в случае уравнения теплопроводности), образуют две бесконечномерные коммутативные, но не коммутирующие друг с другом, подалгебры.

Вместо (18.13) можно взять более общие преобразования

$$v=\Phi(u, u_1, u_2, \ldots). \tag{18.18}$$

При этом происходит следующая замена операторов Ли—Беклунда:

$$X\equiv f\frac{\partial}{\partial u}+D(f)\frac{\partial}{\partial u_1}+\ldots=X(v)\frac{\partial}{\partial v}+\ldots=\Phi_*(f)\frac{\partial}{\partial v}+\ldots,$$

где Φ_* — дифференциальный оператор, равный

$$\Phi_* = \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} D + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} D^2 + \dots \tag{18.19}$$

Поэтому формула (18.14) обобщается в виде

$$\tilde{L}\Phi_* = \Phi_* L, \tag{18.20}$$

где L и $\tilde{L}$ — операторы рекурренции в переменных u и v соответственно. Примером такой замены переменной является переход в уравнении Бюргерса (18.15) (один раз продифференцированном) от потенциала v к скорости $u = -v_1$. При указанной замене уравнение Бюргерса принимает вид

$$u_t = u_2 + uu_1, \tag{18.21}$$

а $\Phi_* = -D$. Формула (18.20) дает соотношение

$$L = DMD^{-1} \tag{18.22}$$

между рекурренциями M и L для уравнений (18.15) и (18.21) соответственно. Подстановкой в (18.22) операторов M из (18.17) получаются два оператора рекурренции для уравнения (18.21):

$$\begin{gathered} L_1 = D + \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} u_1 D^{-1}, \\ L_2 = 2tD + (x + tu) + (1 + tu_1) D^{-1}. \end{gathered} \tag{18.23}$$

18.2. Уравнение Кортевега — де Фриза. Операторы (18.2), допускаемые уравнением Кортевега — де Фриза

$$u_t = u_3 + uu_1, \tag{18.24}$$

находятся из определяющего уравнения

$$(D_t - D^3 - uD - u_1) f = 0. \tag{18.25}$$

В соответствии с общей теорией уравнение (18.25) рассматривается на дифференциальном многообразии (с естественными координатами t, x, u, u_1, u_2, ...), заданном уравнением (18.24). Четыре решения

$$\begin{gathered} f_1 = u_1, \quad f_2 = u_3 + uu_1, \quad f_3 = 1 + tu_1, \\ f_4 = 2u + xu_1 + 3t(u_3 + uu_1) \end{gathered} \tag{18.26}$$

определяющего уравнения соответствуют операторам

$$\begin{gathered} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} \end{gathered} \tag{18.27}$$

группы точечных преобразований, порожденной переносами по x, t, преобразованием Галилея и растяжением. В дальнейшем решения определяющего уравнения, имеющие вид

$$f=f(t,\ x,\ u,\ \ldots,\ u_n),\quad \frac{\partial f}{\partial u_n}\neq 0, \tag{18.28}$$

называются *решениями порядка n* и обозначаются $\overset{(n)}{f}$.

На основе следующей леммы все решения определяющего уравнения, не зависящие от t, x, можно построить с помощью одной рекурренции (Ибрагимов, Шабат [1]).

Лемма. *Решение порядка n,*

$$\overset{(n)}{f}=f(u,\ \ldots,\ u_n), \tag{18.28$'$}$$

определяющего уравнения единственно по модулю решений меньшего порядка, причем нетривиальные решения существуют только для нечетных n.

Доказательство. Подстановка функции (18.28′) в левую часть уравнения (18.25) дает

$$(D_t-D^3-uD-u_1)\overset{(n)}{f}=3u_{n+2}D\left(\frac{\partial\overset{(n)}{f}}{\partial u_n}\right)+g$$

с некоторой функцией $g=g(u,\ \ldots,\ u_{n+1})$. Поэтому из уравнения (18.25) следует, что

$$\overset{(1)}{f}=u_1,\qquad \overset{(n)}{f}=u_n+h(u,\ \ldots,\ u_{n-1}),\qquad n>1. \tag{18.29}$$

Отсюда индукцией по n получается единственность решения порядка n. Для того чтобы доказать отсутствие решений четного порядка, уточним формулу (18.29). Подстановка функции вида (18.29) при $n>3$ в уравнение (18.25) дает (см. также § 19.2)

$$\overset{(n)}{f}=u_n+c_1u_{n-1}+c_2u_{n-2}+\frac{n}{3}uu_{n-2}+h, \tag{18.29$'$}$$

где c_1, $c_2=\text{const}$, а $h=h(u,\ \ldots,\ u_{n-3})$. Теперь можно воспользоваться тем, что для произвольного решения $f(t,\ x,\ u,\ u_1,\ \ldots)$ определяющего уравнения (18.25) коммутатор соответствующего оператора (18.2) с оператором X_3 из (18.27) дает решение

$$t\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial u} \tag{18.30}$$

определяющего уравнения. Применительно к решению порядка n вида (18.29′) формула (18.30) дает решение порядка $n-2$:

$$\frac{\partial\overset{(n)}{f}}{\partial u}=\frac{n}{3}u_{n-2}+h(u,\ \ldots,\ u_{n-3}).$$

Таким путем, начав с решения произвольного четного порядка n, можно спуститься до решения порядка 2. Однако легко убедиться, что уравнение (18.25) не имеет решений порядка 2. Это доказывает лемму.

Таким образом, для построения всех решений определяющего уравнения, не зависящих от t, x, достаточно для каждого нечетного n найти одно решение порядка n. Эти решения можно построить по рекурренции. По аналогии с оператором L_1 из (18.23), принимая во внимание доказанную выше лемму, естественно искать оператор рекурренции для уравнения (18.24) в виде

$$L = D^2 + \alpha + \beta D^{-1} \tag{18.31}$$

с коэффициентами α, β, зависящими от t, x, u, $u_1 \ldots$; из сравнения функций f_1 и f_2 из (18.26) ясно, что в L не может входить слагаемое вида γD.

Коммутатор оператора (18.31) с оператором, входящим в определяющее уравнение (18.25), равен

$$[D_t - D^3 - uD - u_1, L] = (2u_1 - 3D(\alpha))\, D^2 + (3u_2 - 3D^2(\alpha) - 3D(\beta))\, D + \\ + (D_t - D^3 - uD)(\alpha) + u_3 - 3D^2(\beta) + (D_t - D^3 - uD - u_1)(\beta)\, D^{-1}.$$

Для того чтобы это выражение обращалось в нуль, нужно, чтобы равнялись нулю коэффициенты при всех степенях D. В частности, коэффициенты при D^2 и D равны нулю тогда и только тогда, когда

$$\alpha = \frac{2}{3} u + c_1(t), \qquad \beta = \frac{1}{3} u_1 + c_2(t).$$

Из следующих двух уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов при D^0 и D^{-1}, видно, что $c_1 = \mathrm{const}$, $c_2 = 0$. Таким образом, коэффициенты α и β однозначно (с точностью до несущественного постоянного слагаемого в α) определились. Искомый оператор рекурренции равен

$$L = D^2 + \frac{2}{3} u + \frac{1}{3} u_1 D^{-1} \tag{18.32}$$

и удовлетворяет коммутационному соотношению

$$[D_t - D^3 - uD - u_1,\ L] = \frac{2}{3}(u_t - u_3 - uu_1) + \frac{1}{3} D(u_t - u_3 - uu_1) \cdot D^{-1}. \tag{18.33}$$

Бесконечная группа Ли — Беклунда для уравнения Кортевега — де Фриза, т. е. последовательность уравнений Ли — Беклунда

$$u_\tau = \overset{(n)}{f}(u, \ldots, u_n), \tag{18.34}$$

называемых *старшими уравнениями Кортевега — де Фриза*, была ранее найдена методом обратной задачи рассеяния (см. Lax [1], Gardner [1]); рекурренцию (18.32) нашел A. Lenard (формулы (5.10), (5.11) в Gardner, Greene, Kruskal, Miura [1]; см. также Olver [1]).

Действие оператора (18.32) на функцию f_1 из (18.26) дает следующую бесконечную последовательность решений (18.28) нечетного порядка определяющего уравнения (18.25):

$$\overset{(1)}{f}=u_1, \qquad \overset{(n+2)}{f}=\left(D^2+\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}u_1D^{-1}\right)\overset{(n)}{f}, \qquad n=1,\ 3,\ \ldots \tag{18.35}$$

В частности, $\overset{(3)}{f}$ совпадает с функцией f_2 из (18.26), а

$$\overset{(5)}{f}=u_5+\frac{5}{3}uu_3+\frac{10}{3}u_1u_2+\frac{5}{6}u^2u_1.$$

Так как в L входит оператор D^{-1}, то при построении решений по рекурренции (18.35) появляются постоянные «интегрирования». Однако эти постоянные можно опускать, так как они добавляют к $\overset{(n)}{f}$ решения меньшего порядка.

Из коммутационного соотношения (18.33) следует, что оператор (18.32) переводит любое решение определяющего уравнения снова в решение. В частности, функции f_3 и f_4 из (18.26) связаны равенством

$$f_4=3Lf_3.$$

Таким образом, исходя из группы точечных преобразований и действуя оператором рекурренции (18.32), можно построить две серии решений определяющего уравнения. В отличие от первой серии, представленной формулой (18.35), вторая серия

$$\overset{(1)}{g}=1+tu_1, \qquad \overset{(n+2)}{g}=\left(D^2+\frac{2}{3}u+\frac{1}{3}u_1D^{-1}\right)\overset{(n)}{g}, \qquad n=1,\ 3,\ \ldots \tag{18.36}$$

приводит к «нелокальной» группе преобразований, допускаемой уравнением Кортевега—де Фриза (см. Ибрагимов, Шабат [1]). Это означает, что функции $\overset{(n)}{g}$, определяемые рекурренцией (18.36), зависят не только от t, x и дифференциальной переменной u, но также от новых переменных, связанных с u дифференциальными соотношениями *). Например,

$$\overset{(5)}{g}=t\overset{(5)}{f}+\frac{1}{3}x\overset{(3)}{f}+\frac{4}{3}u_2+\frac{4}{9}u^2+\frac{1}{9}\varphi u_1,$$

где функции $\overset{(3)}{f}$ и $\overset{(5)}{f}$ определены формулой (18.35), а φ—потенциал для u, т. е. $\varphi_1=u$, $\varphi_t=u_2+\frac{1}{2}u^2$. Функция $\overset{(7)}{g}$ будет содержать наряду с φ еще одну новую переменную ψ, связанную с u равенством $\psi_1=u^2$ и т. д.

*) Определяющее уравнение (18.25) не имеет локальных решений (18.28), зависящих от t, x, кроме f_3 и f_4 из (18.26) (см. Магадеев, Соколов [1]).

В связи с групповым анализом уравнения Кортевега—де Фриза следует отметить, что коммутативная бесконечная группа Ли—Беклунда, порожденная преобразованиями (18.34), (18.35), может быть положена в основу исследования решений типа солитонов. А именно, если алгоритм построения инвариантных решений уравнения (18.24), описанный в § 5.3 для случая групп точечных преобразований, перенести на однопараметрическую группу преобразований Ли—Беклунда (18.34), то соответствующее инвариантное решение представляет собой совместное решение исходного уравнения (18.24) и обыкновенного дифференциального уравнения

$$\overset{(n)}{f}(u, u_1 \ldots, u_n) = 0. \tag{18.37}$$

Первоначально это уравнение (а также уравнение (18.34)) связывалось с законами сохранения следующей процедурой, которую предложил C. Gardner (см. Lax [1], стр. 163): пусть для уравнения (18.24) известен закон сохранения $D_t(T) + D(F) = 0$ с полиномиальной плотностью $T = T(u, \ldots, u_p)$, тогда правая часть уравнения (18.34) определяется формулой (с $n = 2p+1$)

$$\overset{(n)}{f} = D\frac{\delta T}{\delta u}, \quad \frac{\delta}{\delta u} = \sum_{i \geqslant 0} (-D)^i \frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{18.38}$$

Наличие бесконечной коммутативной алгебры позволяет понизить порядок уравнения (18.37) и в конечном счете проинтегрировать его *).

18.3. Уравнение пятого порядка. Рекурренция более сложного вида реализуется для уравнения **)

$$u_t = u_5 + 5(uu_3 + u_1u_2 + u^2u_1), \tag{18.39}$$

которое не принадлежит серии (18.35). Здесь опять можно начать с группы точечных преобразований. Рассматриваемое уравнение инвариантно относительно 3-параметрической группы, порожденной переносами по x, t и растяжением $x' = ax$, $t' = a^5t$, $u' = a^{-2}u$. Поэтому в данном случае определяющее уравнение имеет решения

$$\begin{gathered} f_1 = u_1, \quad f_2 = u_5 + 5(uu_3 + u_1u_2 + u^2u_1), \\ f_3 = 2u + xf_1 + 5tf_2. \end{gathered} \tag{18.40}$$

Дальнейшее построение алгебры, допускаемой уравнением (18.39), осуществляется с помощью оператора рекурренции

$$L = (D^2 + 4u + 2u_1D^{-1})(D^2 + u)D(D^2 + u)D^{-1}, \tag{18.41}$$

который нашли В. В. Соколов и А. Б. Шабат.

---

*) Подробнее об этом и о способе перехода от бесконечной алгебры Ли—Беклунда к обратной задаче рассеяния см. Ибрагимов, Шабат [1, 4].

**) Sawada & Kotera [1] показали, что уравнение (18.39) интегрируется методом обратной задачи рассеяния (см. также Caudrey, Dodd & Gibbon [1], Dodd & Gibbon [1]).

Чтобы выявить, на какие функции $f=f(t, x, u, u_1, \ldots)$ можно действовать (оставаясь в пространстве функций от переменных $t, x, u, u_1, \ldots$) оператором L, формулу (18.41) удобно переписать в виде

$$L=D^6+6uD^4+9u_1D^3+(11u_2+9u^2)D^2+(10u_3+21uu_1)D+$$
$$+(5u_4+6u_1^2+16uu_2+4u^3)+(u_5+5uu_3+5u_1u_2+5u^2u_1)D^{-1}+$$
$$+u_1D^{-1}\cdot(2u_2+u^2).$$

Отсюда видно, что f должна удовлетворять условиям

$$f=D(g), \quad (2u_2+u^2)f=D(h)$$

с некоторыми функциями g и h от $t, x, u, u_1, \ldots$ Иначе говоря, функция f должна быть решением вариационных уравнений

$$\frac{\delta f}{\delta u}=0, \quad \frac{\delta}{\delta u}[(2u_2+u^2)f]=0. \tag{18.42}$$

Легко проверить, что функции f_1 и f_2 из (18.40) удовлетворяют указанным условиям. Например,

$$f_1=D(u), \quad (2u_2+u^2) \quad f_1=D\left(u_1^2+\frac{1}{3}u^3\right).$$

Действие оператора (18.41) на функции f_1 и f_2 из (18.40) дает две последовательности

$$\begin{aligned} &\overset{(1)}{f}=f_1, \quad \overset{(n+6)}{f}=L\overset{(n)}{f}, \quad n=1+6k; \\ &\overset{(5)}{f}=f_1, \quad \overset{(m+6)}{f}=L\overset{(m)}{f}, \quad m=5+6k; \quad k=0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{18.43}$$

которые образуют бесконечную коммутативную алгебру Ли—Беклунда, допускаемую уравнением (18.39). Функции f, получаемые по формулам (18.43), удовлетворяют условиям (18.42). Например,

$$\overset{(7)}{f}=Lf_1=$$
$$=u_7+7\left(uu_5+2u_1u_4+3u_2u_3+2u^2u_3+6u_1u_2u_3+u_1^3+\frac{4}{3}u^3u_1\right)=$$
$$=D\left[u_6+7\left(uu_4+u_1u_3+u_2^2+2u^2u_2+uu_1^2+\frac{1}{3}u^4\right)\right]$$

в соответствии с первым из уравнений (18.42); выполнение второго из этих уравнений легко проверяется подстановкой значения $\overset{(7)}{f}$.

Функция f_3 из (18.40) не удовлетворяет условиям (18.42). Поэтому действие оператора L на f_3 порождает, как и в случае уравнения Кортевега—де Фриза, нелокальные преобразования.

18.4. Волновое уравнение. Для уравнения

$$u_{xy}=0 \tag{18.44}$$

определяющее уравнение имеет вид

$$D_xD_yf\,|_{u_{xy}=0}=0.$$

Подстановкой сюда функции

$$f=f(x,\,y,\,u,\,u_x,\,\ldots,\,u_{nx},\,u_y,\,\ldots,\,u_{ny}),$$

где $u_{nx}=D_x^nu$, $u_{ny}=D_y^nu$, получается общее решение порядка n:

$$\overset{(n)}{f}=cu+g(x,\,u_x,\,\ldots,\,u_{nx})+h(y,\,u_y,\,\ldots,\,u_{ny}) \tag{18.45}$$

с произвольными функциями g и h и $c=\text{const}$.

Таким образом, алгебра Ли—Беклунда, допускаемая волновым уравнением, бесконечномерна и состоит из элементов $\overset{(n)}{f}$, $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$, вида (18.45). В частности, для получения группы точечных преобразований нужно в (18.45) положить (теорема 16.2)

$$f=cu+a(x)+b(y)-\xi(x)\,u_x-\eta(y)\,u_y.$$

Это дает инфинитезимальный оператор

$$X=\xi(x)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(y)\frac{\partial}{\partial y}+[cu+a(x)+b(y)]\frac{\partial}{\partial u}$$

с произвольными функциями ξ, η, a, b. Функции (18.45) при $n=1$ соответствует группа контактных преобразований: инфинитезимальный оператор этой группы определяется формулами (14.6) с $W=cu+g(x,\,u_x)+h(y,\,u_y)$.

§ 19. Эволюционные уравнения

19.1. Алгебра $\mathcal{A}_F$. Изучение алгебры Ли—Беклунда, допускаемой дифференциальными уравнениями, является задачей дифференциальной алгебры. С этой точки зрения в настоящее время наиболее полно исследованы скалярные эволюционные уравнения

$$u_t=F(x,\,u,\,u_1,\,\ldots,\,u_m),\qquad m\geqslant 2, \tag{19.1}$$

с одной пространственной переменной x.

В соответствии с принятой в дифференциальной алгебре терминологией (см., например, Ritt [1]) u называется *дифференциальной переменной* (относительно дифференцирования $D=D_x$); ее *последовательные производные* — это переменные u_1, u_2, ... такие, что $D(u_i)=u_{i+1}$, $u_0=u$. Функция $f=f(x,\,u,\,u_1,\,\ldots,\,u_n)$, $n<\infty$, аналитическая по всем переменным и такая, что $\partial f/\partial u_n\neq 0$, называется *дифференциальной функцией порядка* n, а функция $f_n=$ $=\partial f/\partial u_n$ — ее *сепарантой*.

Рассматривается пространство $\mathcal{A}$ всех дифференциальных функций конечного порядка, снабженное дифференцированием

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{i\geqslant 0} u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i} \tag{19.2}$$

и двумя алгебраическими структурами: структурой ассоциативной алгебры, заданной обычным умножением функций, и структурой алгебры Ли, заданной скобкой

$$\{f, g\}=f_*g-g_*f, \tag{19.3}$$

где

$$f_*=\sum_{i\geqslant 0} f_i D^i, \quad f_i=\frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad D^i \text{—} i\text{-я степень } D.$$

Элементы $\mathcal{A}$ могут зависеть от параметра t. Эволюционное уравнение (19.1) рассматривается как динамическая система

$$\frac{du_i}{dt}=D^i(F), \qquad i=0, 1, 2, \ldots, \tag{19.1$'$}$$

в $\mathcal{A}$. Дифференцирование вдоль траекторий этой динамической системы обозначается $\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i\geqslant 0} D^i(F)\frac{\partial}{\partial u_i}. \tag{19.4}$$

В этих обозначениях определяющее уравнение (17.4) для канонических операторов Ли—Беклунда (18.2), допускаемых уравнением (19.1), записывается в виде

$$\left(\frac{d}{dt}-F_*\right)f=0, \tag{19.5}$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\{F, f\}=0. \tag{19.5$'$}$$

Множество решений уравнения (19.5′) образует подалгебру алгебры Ли $\mathcal{A}$; эта подалгебра обозначается $\mathcal{A}_F$,

$$\mathcal{A}_F=\left\{f\in\mathcal{A}\colon\ \frac{\partial f}{\partial t}-\{F, f\}=0\right\},$$

и называется *алгеброй Ли—Беклунда уравнения* (19.1). Ввиду инвариантности (19.1) относительно переносов по x и t алгебра $\mathcal{A}_F$ содержит элементы $f=u_1$ и $f=F$; если $\mathcal{A}_F$ помимо этих двух тривиальных элементов содержит хотя бы одну функцию порядка $n>1$, то (19.1) называется *уравнением с нетривиальной алгеброй*.

В дальнейшем за исключением специальных случаев, которые будут указываться особо, рассматриваются дифференциальные функции, не зависящие от t, x, и вместо (19.5′) решается уравнение

$$\{f, F\} = 0. \tag{19.6}$$

При этом алгебра $\mathcal{A}_F$ совпадает с централизатором элемента $F \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}_F$ с помощью динамической системы

$$\frac{du_i}{d\tau} = D^i(f), \quad f \in \mathcal{A}_F, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19.7}$$

порождает формальную группу преобразований Ли—Беклунда, допускаемую эволюционным уравнением (19.1). Используя отождествление эволюционного уравнения (19.1) с динамической системой (19.1′) и замечание 17.1.1, определяющее уравнение (19.6) можно трактовать как условие совместности исходного уравнения (19.1) с эволюционным уравнением

$$u_\tau = f(u, u_1, \ldots, u_n). \tag{19.7′}$$

Так как функции F и f входят в (19.6) симметрично, а коммутатор операторов Ли—Беклунда $X = F\frac{\partial}{\partial u} + \ldots$ и $Y = f\frac{\partial}{\partial u} + \ldots$ равен $[X, Y] = \{f, F\}\frac{\partial}{\partial u} + \ldots$, то условие (19.6) означает, что уравнения (19.1′) и (19.7) задают две коммутирующие друг с другом однопараметрические группы Ли—Беклунда. Содержательным обобщением этого свойства взаимности является приводимая ниже теорема о коммутативности централизатора дифференциального полинома.

Лемма 1. *Пусть функция F имееет постоянную сепаранту, т. е.*

$$F_m \equiv \partial F / \partial u_m = \text{const}. \tag{19.8}$$

Тогда все решения f порядка $n \geqslant 1$ уравнения (19.6) имеют постоянную сепаранту f_n, а для решений порядка $n = 0$ это справедливо при дополнительном предположении

$$F_{m-1} = \text{const}. \tag{19.9}$$

Более того, если

$$F_{m-i} = \text{const}, \qquad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{19.10}$$

то для решений порядка n справедливо представление

$$f = \sum_{i=0}^{k+1} c_i u_{n-i} + \frac{n}{m} F_{m-k-1} u_{n-k-1} + g(u, \ldots, u_{n-k-2}),$$
$$c_i = \text{const}. \tag{19.11}$$

Доказательство. В силу условия (19.8) можно считать, что

$$F = u_m + \Phi(u, \ldots, u_l), \qquad l \leqslant m-1. \tag{19.12}$$

Для этой функции F и произвольной функции f порядка n по формуле (19.3) при $m>2$, $n>0$ получается выражение

$$\{f, F\}=-mu_{m+n-1}Df_n+\ldots, \qquad (19.13)$$

где опущенные члены имеют порядок $<m+n-1$. Поэтому из уравнения (19.6) следует, что $Df_n=0$, т. е. $f_n=\mathrm{const}$. Для $f=f(u)$ выражение (19.13) заменяется на

$$\{f, F\}=-mu_{m-1}Df'+(\Phi-u_{m-1}\Phi_{m-1})f'+\ldots,$$

и из (19.6) при условии (19.9) следует, что $Df'=0$. При $m=2$ эти рассуждения проводятся с заменой (19.13) на

$$\{f, F\}=f_{nn}u_{n+1}^2-2u_{n+1}Df_n+\ldots \qquad (19.14)$$

Таким образом, любая функция $f\in\mathcal{A}_F$ порядка n с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$f=u_n+g(u, \ldots, u_{n-1}). \qquad (19.15)$$

Скобка функций (19.12), (19.15) при $m, n\geqslant 3$ равна

$$\{f, F\}=-mu_{m+n-2}Dg_{n-1}+nu_{n+l-1}D\Phi_l+\ldots,$$

и при условии (19.9) уравнение (19.6) дает $g=cu_{n-1}+$ $+h(u, \ldots, u_{n-2})$, а если $l=m-1$ и $D\Phi_l\neq 0$, то

$$f=u_n+cu_{n-1}+\frac{n}{m}\Phi_l u_{n-1}+g(u, \ldots, u_{n-2}), \qquad c=\mathrm{const}. \qquad (19.16)$$

Повторением этого процесса получается формула (19.11). Для меньших значений m, n доказательство проводится аналогично.

Следующая лемма показывает, что централизатор дифференциального полинома с постоянной сепарантой состоит из полиномов.

Лемма 2. *Пусть F — дифференциальный полином вида* (19.12), *удовлетворяющий условию* (19.9), *и пусть f — решение уравнения*

$$\{f, F\}=P \qquad (19.17)$$

с полиномиальной правой частью. Тогда f — полином.

Доказательство. Простое доказательство, предложенное Магадеевым и Соколовым [1], использует формулу (19.13) и разрешимость в полиномах уравнения $Dg=Q$, если Q — дифференциальный полином, удовлетворяющий условию $\delta Q/\delta u=0$. Для $f=f(u)$ из формулы $\{f, F\}=-mu_{m-1}Df'+\ldots$ и из уравнения (19.17) следует, что Df' — полином, так что f' и, следовательно, f — полиномы. Пусть теперь f имеет порядок $n\geqslant 1$, и пусть утверждение леммы справедливо для функций порядка $\leqslant n-1$. Согласно формуле (19.13) (при $m=2$ используется (19.14)) из уравнения (19.17) следует полиномиальность Df_n и, значит, f_n. Поэтому $f=Q(u, \ldots, u_n)+g(u, \ldots, u_l)$, $l<n$, где Q — полином. Подстановка этого выражения в уравнение (19.17) приводит

к уравнению вида (19.17) для функции g порядка $l \leqslant n-1$. По предположению индукции отсюда следует, что g — полином.

В дополнение к леммам, доказанным выше, предположим, что элементы алгебры $\mathcal{A}_F$ не имеют постоянных слагаемых; этого легко добиться соответствующей факторизацией. При указанных условиях теорема о коммутативности алгебры для уравнения Кортевега — де Фриза (Gardner [1], см. также Богоявленский, Новиков [2], Гельфанд, Дикий [2]) переносится на общие эволюционные уравнения (19.1) с полиномиальной правой частью (Ибрагимов, Шабат [2]).

Теорема. *Пусть F — дифференциальный полином порядка $m \geqslant 2$ с постоянной сепарантой F_m, удовлетворяющий дополнительному условию $F_{m-1} = \text{const}$. Тогда его централизатор $\mathcal{A}_F$ коммутативен.*

Доказательство. Пусть $f, g \in \mathcal{A}_F$; согласно лемме 2 они являются полиномами, а их коммутатор $\{f, g\}$ представляет собой дифференциальный полином, не содержащий линейных членов. Последнее обстоятельство не противоречит лемме 1 только в том случае, когда $\{f, g\} = 0$.

Следствие. *Пусть уравнение* (19.1) *имеет нетривиальную алгебру Ли — Беклунда $\mathcal{A}_F$ и пусть F удовлетворяет условиям теоремы. Тогда для каждой функции $f \in \mathcal{A}_F$ уравнение* (19.7′) *также имеет нетривиальную алгебру, причем $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}_F$.*

Это утверждение позволяет перейти от конкретного уравнения (19.1) с нетривиальной алгеброй к рассмотрению всей серии эволюционных уравнений (19.7′). В этих сериях выбираются представители минимального порядка > 1, и их групповая классификация решает задачу перечисления серий эволюционных уравнений с нетривиальной алгеброй Ли — Беклунда.

С помощью формулы (19.13) можно дальше уточнять вид (19.11) элементов из $\mathcal{A}_F$. Следующие примеры поясняют сказанное.

Пример 1. Пусть $F = u_3 + \Phi(u, u_1)$. По формулам (19.11), (19.13) находится следующее выражение для решения порядка 5 уравнения (19.6):

$$f = u_5 + \frac{5}{3}\Phi_1 u_3 + \frac{5}{3}\Phi_0 u_2 + \frac{5}{6}\Phi_{11} u_2^2 + \frac{5}{3}\Phi_{01} u_1 u_2 + \\ + c_1\left(u_4 + \frac{4}{3}\Phi_1 u_2\right) + c_2 u_2 + g(u, u_1). \qquad (19.18)$$

Пример 2. С помощью описанной процедуры можно убедиться, что централизатор функции $F = u_4 + \frac{1}{4}u_1^4$ не содержит элементов порядков 5, 6 и 7. Действительно, для этих значений n по формуле (19.11) находятся

$$\overset{(5)}{f} = u_5 + \frac{5}{4}u_1^3 u_2 + c_1 u_3 + c_2 u_2 + g(u, u_1),$$

$$\overset{(6)}{f} = u_6 + \frac{3}{2} u_1^3 u_3 + \frac{9}{4} u_1^2 u_2^2 + c_3 \overset{(5)}{f} + \tilde{g}(u, u_1),$$

$$\overset{(7)}{f} = u_7 + \frac{7}{4} u_1^3 u_4 + \frac{63}{8} u_1^2 u_2 u_3 + c_4 \overset{(6)}{f} + c_5 \overset{(5)}{f} + h(u, u_1, u_2).$$

Здесь $c_i = \text{const}$, а функции $g(u, u_1)$ и $h(u, u_1, u_2)$ нужно найти из определяющего уравнения. Для этих функций формула (19.13) дает

$$\{g, F\} = -4u_4 Dg_1 + \ldots, \quad \{h, F\} = -4u_5 Dh_2 + \ldots$$

Поэтому

$$\left\{\overset{(5)}{f}, F\right\} = -\frac{15}{2} u_4 D(u_1^2 u_2) - 4u_4 Dg_1 + \ldots,$$

$$\left\{\overset{(6)}{f}, F\right\} = -\frac{3}{2} u_1^2 u_4^2 - 4u_4 D\tilde{g}_1 + \ldots,$$

$$\left\{\overset{(7)}{f}, F\right\} = u_5 D\left(\frac{21}{4} u_1^2 u_3 + \frac{147}{2} u_1 u_2^2 - 4h_2\right) + \ldots$$

В силу первой из этих формул определяющее уравнение (19.6) принимает вид следующего противоречивого равенства:

$$g_1(u, u_1) + \frac{15}{8} u_1^2 u_2 = \text{const}.$$

Точно так же убеждаемся в отсутствии решений при $n = 6, 7$.

Вернемся теперь к изучению централизатора произвольной функции F порядка $m \geqslant 2$, уделяя при этом особое внимание таким бесконечным алгебрам $\mathcal{A}_F$, которые содержат элементы произвольно большого порядка. Для анализа определяющего уравнения (19.6) запишем выражения для производных вида $D^k f$ в удобной для нас форме.

19.2. Формула Фаа де Бруно. Высшие производные $D^k f(u, v, \ldots)$ функции f дифференциальных переменных $u, v, \ldots$ выражаются через $u_j = D^j u$, $v_j = D^j v, \ldots$ известной формулой Faà de Bruno [1]. Эта формула эквивалентна выражению оператора D^k через коммутирующие дифференциальные операторы

$$d_j = \frac{1}{j!}\left(u_j \frac{\partial}{\partial u} + v_j \frac{\partial}{\partial v} + \ldots\right), \tag{19.19}$$

которые действуют на функции конечного числа переменных $u, v, \ldots$ и переводят их в функции переменных $u, u_j, v, v_j, \ldots$ Для вывода формулы Фаа де Бруно достаточно заметить, что d_1 совпадает с D:

$$d_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + v_1 \frac{\partial}{\partial v} + \ldots = D,$$

а при $j > 1$ выполняется соотношение

$$j d_j = D d_{j-1} - d_{j-1} d_1.$$

Отсюда следует равенство

$$D^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} d^\alpha, \quad d^\alpha = d_1^{\alpha_1} \dots d_k^{\alpha_k}, \tag{19.20}$$

эквивалентное формуле Фаа де Бруно (ср. Гурса [2], стр. 77). В формуле (19.20) норма мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ равна

$$|\alpha| = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k.$$

При анализе определяющего уравнения (19.6) используется линейная по старшим производным часть формулы Фаа де Бруно. Выделим эту главную линейную часть. Пусть l — «длина» мультииндекса α, т. е. номер его последней отличной от нуля компоненты α_l. Если $l > \left[\frac{k}{2}\right]$, то из равенства $|\alpha| = k$ следует, что $\alpha_l = 1$. Поэтому

$$D^k = \sum_{l=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} d_l \sum_{|\alpha'|=k-l} \frac{k!}{\alpha!} d_1^{\alpha_1} \dots d_{l-1}^{\alpha_{l-1}} + \dots, \quad \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}),$$

где опущенные члены зависят только от $u_i, v_i, \dots$ с $i \leqslant \left[\frac{k}{2}\right]$ — целой части $\frac{k}{2}$. Так как в этом равенстве в соответствии с (19.20) внутренняя сумма равна $\frac{k!}{(k-l)!} D^{k-l}$, то отсюда получается следующее выражение для главной линейной части формулы Фаа де Бруно:

$$D^k = \sum_{l=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} \frac{k!}{(k-l)!} d_l D^{k-l} + \dots,$$

или

$$D^k f(u, v, \dots) = \sum_{l=\left[\frac{k}{2}\right]+1}^{k} \binom{k}{k-l} \left(u_l D^{k-l} \frac{\partial f}{\partial u} + v_l D^{k-l} \frac{\partial f}{\partial v} + \dots \right) + \dots$$

Подстановкой $v = u_1, \dots$ получается главная линейная часть для $D^k f(u, u_1, \dots, u_n)$, которую удобно записать в виде

$$D^k f(u, \dots, u_n) = \widehat{D^k f}_* u \left(\operatorname{mod} u_{\left[\frac{k}{2}\right]+n} \right). \tag{19.21}$$

Здесь

$$D^k f_* = \sum_{p=0}^{n+k} a_p D^p, \qquad a_p \in \mathcal{A},$$

разложение обычного произведения дифференциальных операторов D^k и f_*, а

$$\widehat{D^k f_*} = \sum_{p=\left[\frac{k}{2}\right]+n+1}^{n+k} a_p D^p;$$

выражение $\operatorname{mod} u_p$ означает, что соответствующее равенство верно с точностью до слагаемых, содержащих производные u_i порядка $\leqslant p$.

Пример. Для функции $f(u, u_1)$ формула (19.21) дает

$$D^3 f(u, u_1) = \widehat{D^3 f_*} u \; (\operatorname{mod} u_2).$$

Так как в данном случае $\widehat{D^3 f_*} = f_1 D^4 + (3Df_1 + f_0) D^3$, то окончательно

$$D^3 f(u, u_1) = f_1 u_4 + (3Df_1 + f_0) u_3 \; (\operatorname{mod} u_2).$$

19.3. Алгебра $\mathscr{L}_F$. Рассматривается ассоциативная алгебра $\mathscr{L}$ формальных операторов

$$L = \sum_{i=-\infty}^{n} a_i D^i, \qquad a_i \in \mathscr{A}. \tag{19.22}$$

Целое число n называется *порядком* оператора (19.22). Умножение в $\mathscr{L}$ определяется правилом Лейбница и формулой

$$D^{-1} a = aD^{-1} - (Da) D^{-2} + (D^2 a) D^{-3} - \ldots$$

Функции $F \in \mathscr{A}$ ставится в соответствие подалгебра $\mathscr{L}_F \subset \mathscr{L}$ как множество решений уравнения

$$L_t = F_* L - L F_*, \tag{19.23}$$

где L_t получается дифференцированием (19.4) коэффициентов оператора L. Значение алгебры $\mathscr{L}_F$ определяется теоремой о разрешимости уравнения (19.23) для функций F с бесконечным централизатором, причем операторное уравнение (19.23) позволяет выписать в явном виде ряд необходимых условий разрешимости определяющего уравнения (19.6) и поэтому дает конструктивный метод классификации эволюционных уравнений с нетривиальной алгеброй (Ибрагимов, Шабат [3, 4]). Если в $\mathscr{L}_F$ содержатся операторы, рационально зависящие от D (т. е. являющиеся отношением дифференциальных операторов, см., например, формулы (18.23), (18.41)), то рациональные операторы $L \in \mathscr{L}_F$ служат для рекуррентного построения алгебры $\mathscr{A}_F$, а соотношение (19.23) задает представление Лакса уравнения (19.1).

Следующая лемма утверждает, что алгебра $\mathscr{L}_F$ порождена дробными степенями одного из своих элементов (Гельфанд, Дикий [3], Mumford [1], Манин [1]; см. также Wilson [1]).

Лемма. 1. *Пусть алгебра* $\mathscr{L}_F$ *содержит оператор* M *порядка* $r \neq 0$. *Тогда* $M^{1/r} \in \mathscr{L}_F$ *и* *) $\mathscr{L}_F = \mathbb{C}[[M^{1/r}]]$.

Доказательство. Из уравнения $L_1^r = M$ однозначно (с точностью до корней из единицы) находится оператор первого порядка L_1. Подстановка в (19.23) оператора $M = L_1^r$ (пусть $r = 2$) дает

$$QL_1 + L_1 Q = 0, \tag{19.24}$$

где $Q = (L_1)_t - [F_*, L_1]$. Из (19.24) вытекает (достаточно проследить за старшими членами левой части (19.24)), что $M = 0$, т. е. $L_1 = M^{1/r} \in \mathscr{L}_F$. Поэтому $L_1^k \in \mathscr{L}_F$ при любом целом k и, следовательно, формальный ряд

$$L = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k M^{k/r}, \qquad c_k = \mathrm{const}, \tag{19.25}$$

с комплексными коэффициентами c_k удовлетворяет уравнению (19.23), т. е. $\mathbb{C}[[M^{1/r}]] \subset \mathscr{L}_F$. Обратное включение следует из того, что порядок n оператора $L \in \mathscr{L}_F$ можно понизить, переходя к оператору $L - cL_1^n$ с подходящей постоянной c. Действительно, подстановка оператора (19.22) в уравнение (19.23) дает

$$\left[\frac{d}{dt} - F_*,\ L\right] = (na_n DF_m - mF_m Da_n) D^{m+n-1} + \ldots = 0, \tag{19.26}$$

поэтому старший коэффициент a_n оператора $L \in \mathscr{L}_F$ определяется однозначно с точностью до постоянного множителя:

$$a_n = \mathrm{const} \cdot (F_m)^{n/m}. \tag{19.27}$$

Индукция завершает доказательство леммы.

Из уравнения (19.26), приравнивая нулю следующие коэффициенты, можно получить цепочку уравнений для последовательного определения коэффициентов операторов $L \in \mathscr{L}_F$. Изучение нетривиальной алгебры $\mathscr{L}_F$ сводится к исследованию разрешимости в $\mathscr{A}$ этой цепочки уравнений. При этом удобно рассматривать приближенные решения уравнения (19.23). Пусть L_0 — оператор порядка n из алгебры $\mathscr{L}_F$ и $p > 0$ — целое число. Любой оператор $L \in \mathscr{L}$ порядка n, первые p коэффициентов которого совпадают с соответствующими коэффициентами оператора L_0 (это условие будет записываться $L = L_0 \pmod{D^{n-p}}$), удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d}{dt} - F_*,\ L\right] = 0 \pmod{D^{m+n-p-1}}. \tag{19.28}$$

Рассмотрим множество решений этого уравнения при фиксированном p. Решения L, L' уравнения (19.28) порядка n называются *эквивалентными*, если $L' = L \pmod{D^{n-p}}$, а соответствующий

*) Здесь существенно, что коэффициенты операторов (19.22) не зависят от t.

класс эквивалентности — *p-решением порядка n уравнения* (19.23). Произведение любых двух p-решений (порядков n_1 и n_2) снова является p-решением (порядка n_1+n_2). Для p-решения L порядка $n\neq 0$ оператор $L^{1/n}$ является p-решением первого порядка, а L^{-1} — p-решением порядка $-n$. На приближенные решения переносится также формула (19.25): любое p-решение L порядка n допускает представление

$$L=\sum_{k=0}^{p-1} c_{n-k}L_1^{n-k} (\operatorname{mod} D^{n-p}), \tag{19.29}$$

где L_1 — произвольное p-решение первого порядка.

Лемма 2. *Нетривиальная алгебра $\mathscr{L}_F$ содержит оператор порядка m вида*

$$L=F_*+\alpha D+\beta+\gamma D^{-1}+\delta D^{-2}+\ldots \tag{19.30}$$

Доказательство. Оператор F_* является p-решением с $p=m-1$. Поэтому его можно представить в виде (19.29), взяв в качестве L_1 оператор первого порядка из $\mathscr{L}_F$; такой выбор L_1 возможен в силу леммы 1. Из полученного представления для F_*:

$$F_*=c_mL_1^m+\ldots+c_2L_1^2 (\operatorname{mod} D),$$

видно, что оператор $L=c_mL_1^m+\ldots+c_2L_1^2$, принадлежащий алгебре $\mathscr{L}_F$, удовлетворяет условию (19.30).

Лемма 3. *Пусть для каждого $p\geqslant 1$ существует p-решение порядка $n=n(p)\neq 0$ уравнения* (19.23). *Тогда алгебра $\mathscr{L}_F$ нетривиальна.*

Доказательство. Для оператора (19.22) из $\mathscr{L}_F$ оператор

$$L_k=a_nD^n+\ldots+a_{n-k+1}D^{n-k+1}$$

при любом $k\geqslant 1$ является k-решением, и поэтому

$$\left[\frac{d}{dt}-F_*,\ L_k\right]+\psi_kD^{m+n-k-1}=0 (\operatorname{mod} D^{m+n-k-2}). \tag{19.31}$$

Коэффициент ψ_k в (19.31) является функцией от $a_n, \ldots, a_{n-k+1}$ и их производных. Если теперь в соотношении (19.26) заменить L на $L-L_k$, то для определения следующего коэффициента a_{n-k} оператора L получится следующее уравнение:

$$mF_mDa_{n-k}-(n-k)a_{n-k}DF_m=\psi_k. \tag{19.32}$$

Отсюда с учетом (19.27) и (19.31) следует, что

$$a_{n-k}=a_{n-k}(u,\ u_1, \ldots, u_{m+k}), \qquad k=0,\ 1, \ldots \tag{19.33}$$

Уравнение (19.28) для p-решения L эквивалентно системе уравнений (19.32) с $k=0,\ 1, \ldots, p-1$. Эта система из p уравнений с учетом определения оператора D и условий (19.33) записывается в виде обычной переопределенной системы дифференциальных уравнений. Для этого к каждому из уравнений (19.32) следует добавить уравнения

$$\frac{\partial a_{n-k}}{\partial u_i}=0, \qquad i=m+k+1,\ m+k+2, \ldots$$

При фиксированном значении n разрешимость этой переопределенной системы зависит только от функции F. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что из существования p-решения L порядка n следует существование p-решения любого порядка s: им является $L^{s/n}$. Поэтому условия совместности полученной переопределенной системы уравнений при разных значениях n эквивалентны.

Замечание. Так как F_* является p-решением с $p=m-1$, как уже отмечалось при доказательстве леммы 2, то условия разрешимости первых $m-1$ уравнений (19.32) выполнены для любой функции F. Первое нетривиальное условие соответствует уравнению (19.32) с $k=m-1$. Подстановка (19.30) в (19.28) дает равенство

$$mF_mD\alpha-\alpha DF_m=\frac{dF_m}{dt}, \tag{19.34}$$

которое можно переписать в виде

$$D(\alpha F_m^{-1/m})=-\frac{dF_m^{-1/m}}{dt}.$$

Отсюда получается следующее условие существования m-решения уравнения (19.23):

$$\frac{dF_m^{-1/m}}{dt}\in D(\mathcal{A}), \quad \text{или} \quad \frac{\delta}{\delta u}\frac{dF_m^{-1/m}}{dt}=0. \tag{19.35}$$

При выполнении этого условия из уравнения (19.34) находится первый коэффициент α оператора (19.30). Следующий коэффициент этого оператора при $m\geqslant 3$ (случай $m=2$ подробно обсуждается в § 20.1) определяется уравнением

$$D\left(m\beta+\binom{m}{2}D\alpha-\alpha F_m^{-1}F_{m-1}\right)=\frac{d}{dt}(F_m^{-1}F_{m-1}). \tag{19.36}$$

Поэтому для существования $(m+1)$-решения уравнения (19.23) необходимо и достаточно, чтобы кроме (19.35) выполнялось условие *)

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d}{dt}(F_m^{-1}F_{m-1})=0. \tag{19.37}$$

*) Алгебраическое доказательство равенства $D(\mathcal{A})=\operatorname{Ker}\frac{\delta}{\delta u}$, использованного в (19.35), (19.37), см. Гельфанд, Дикий [1].

Согласно лемме 3 уравнения (19.35), (19.37) представляют собой первые два необходимых условия нетривиальности алгебры $\mathscr{L}_F$. Дополняя их условиями существования p-решений для $p=m+2$, $m+3, \ldots,$ можно получить следующие необходимые условия нетривиальности $\mathscr{L}_F$, которые, как сейчас будет показано, являются также необходимыми условиями нетривиальности алгебры Ли—Беклунда $\mathcal{A}_F$ для уравнения (19.1).

Ниже рассматриваются такие бесконечные алгебры $\mathcal{A}_F$, которые содержат элементы произвольно большого порядка. Для них справедлива следующая теорема (Ибрагимов, Шабат [4]).

Теорема. *Для уравнения* (19.1) *с бесконечной алгеброй Ли — Беклунда $\mathcal{A}_F$ алгебра $\mathscr{L}_F$ нетривиальна и задает* (*формула* (19.41)) *главную линейную часть алгебры $\mathcal{A}_F$.*

Доказательство. Для функций $F=F(u, u_1, \ldots, u_m)$ и $f=f(u, u_1, \ldots, u_n)$ старший член скобки (19.5) при $m, n>2$ равен

$$\{f, F\}=(nf_nDF_m-mF_mDf_n)\,u_{n+m-1}+\ldots \tag{19.38}$$

Поэтому решение f уравнения (19.6) удовлетворяет условию

$$nf_nDF_m-mF_mDf_n\equiv f_nF_mD\ln(f_n^mF_m^{-n})=0,$$

и следовательно,

$$f_n=\mathrm{const}\,(F_m)^{n/m}. \tag{19.39}$$

В случае $m=2$ (пусть $n>2$) вместо (19.38) имеем

$$\{f, F\}=f_{nn}u_{n+1}^2+(nf_nDF_2-2F_2Df_n)u_{n+1}+\ldots, \tag{19.38'}$$

откуда снова получается формула (19.39) для решения f. Для определения производных $f_{n-k}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial u_{n-k}}$, $k=1, 2, \ldots,$ из (19.6) находятся уравнения вида (19.32) (с заменой a_{n-k} на f_{n-k}), которые дают

$$f_{n-k}=f_{n-k}(u, u_1, \ldots, u_{m+k}), \qquad k=0, 1, \ldots, n-l. \tag{19.40}$$

Формулы (19.40) справедливы для $l\geqslant\left[\dfrac{m+n}{2}\right]+1$.

При любом фиксированном p элемент $f\in\mathcal{A}_F$ достаточно большого порядка n в силу условий (19.40) представляется в виде

$$f=Lu+g(u, \ldots, u_{n-p}), \tag{19.41}$$

где

$$L=\sum_{k=0}^{p-1}a_{n-k}D^{n-k}, \qquad a_{n-k}=f_{n-k}. \tag{19.42}$$

Дифференцирование функции (19.41) по t и использование формулы (19.21) дают

$$\frac{df}{dt}=L_t(u)+L(F)+\frac{dg}{dt}=\frac{dg}{dt}+(L_t+LF_*)\,u\ (\mathrm{mod}\,u_{m+n-p-1}).$$

Отсюда с учетом равенств $F_*f=F_*Lu+F_*g$, $\frac{df}{dt}=F_*f$ следует, что

$$\left(\frac{d}{dt}-F_*\right)f=\left(\frac{d}{dt}-F_*\right)g+(L_t-[F_*,\ L])\,u\,(\mathrm{mod}\,u_{m+n-p-1}). \quad (19.43)$$

Левая часть (19.43) равна нулю в силу определяющего уравнения (19.5), а первое слагаемое в правой части зависит только от переменных $u,\ u_1,\ \ldots,\ u_{m+n-p-1}$. Следовательно, оператор (19.42) удовлетворяет соотношению (19.28). Так как число p может быть выбрано произвольно ввиду бесконечности алгебры $\mathcal{A}_F$, лемма 3 завершает доказательство теоремы.

Замечание. Если алгебра $\mathcal{A}_F$ содержит элемент порядка $n>m$, то в силу формул (19.40)—(19.43) уравнение (19.23) имеет p-решение с $p=\left[\frac{n-m+1}{2}\right]$. Поэтому для нетривиальности алгебры $\mathcal{A}_F$ необходимо выполнение указанных в замечании к лемме 3 условий существования p-решений.

19.4. Преобразования эквивалентности. Рассматриваются преобразования Ли—Беклунда в $\mathcal{A}$, определяемые заменой переменных $(x,\ u)\mapsto(y,\ v)$ вида

$$y=\varphi(x,\ u,\ u_1,\ \ldots,u_n),\quad v=\Phi(x,\ u,\ u_1,\ \ldots,\ u_n); \quad (19.44)$$

при этом осуществляются замены

$$D_x\mapsto D_y,\quad u_i\mapsto v_i,\quad u_t\mapsto v_t,\ f\mapsto\tilde{f}$$

по формулам

$$D_x=D_x(\varphi)\,D_y, \quad (19.44\mathrm{a})$$

$$D_x(\Phi)=v_1D_x(\varphi)),\quad v_{i+1}=D_y(v_i), \quad (19.44\mathrm{b})$$

$$\frac{d\Phi}{dt}=v_t+v_1\frac{d\varphi}{dt}, \quad (19.44\mathrm{c})$$

$$D_x(\varphi)\tilde{f}=(D_x(\varphi)\,\Phi_*-D_x(\Phi)\,\varphi_*)\,f,\quad f\in\mathcal{A}. \quad (19.44\mathrm{d})$$

Определение. Эволюционное уравнение

$$v_t=H(y,\ v,\ v_1,\ \ldots,\ v_m) \quad (19.45)$$

эквивалентно (19.1), если существует преобразование (19.44) динамической системы (19.1′) в (19.45).

Замечание 1. При отображении (19.1)$\mapsto$(19.45) дифференцирование $\frac{d}{dt}$ в формуле (19.44c) осуществляется с помощью оператора (19.4).

Замечание 2. Обратное к (19.44) преобразование $(y,\ v)\mapsto$ $\mapsto(x,\ u)$ уравнения (19.45) в (19.1) является в общем случае преобразованием Беклунда в $\mathcal{A}$.

Теорема. *Если уравнения* (19.1) *и* (19.45) *с бесконечной алгеброй Ли—Беклунда эквивалентны, то алгебры* $\mathcal{L}_F$ *и* $\mathcal{L}_H$ *подоб-*

ны. Подобие этих алгебр задается соотношением

$$\tilde{L}\,(\Phi_*-v_1\varphi_*)=(\Phi_*-v_1\varphi_*)\,L, \tag{19.46}$$

где $L\in\mathscr{L}_F$, $\tilde{L}\in\mathscr{L}_H$, *а* $v_1=D_x(\Phi)/D_x(\varphi)$.

Доказательство. Используется инвариантность уравнения Лакса $L_t=[A,\ L]$ относительно преобразования $\tilde{A}=MAM^{-1}+$ $+M_tM^{-1}$, $\tilde{L}=MLM^{-1}$ с произвольным $M\in\mathscr{L}$. Действительно,

$$\tilde{L}_t-[\tilde{A},\ \tilde{L}]=M\,(L_t-[A,\ L])\,M^{-1}.$$

Пример 1. Для уравнения теплопроводности (18.1) алгебра $\mathscr{L}_F$ состоит из формальных степенных рядов от двух дифференциальных операторов первого порядка L_1, L_2 (формулы (18.12)) с постоянными коэффициентами. Из этой алгебры по формуле (19.46) получается алгебра $\mathscr{L}_F$ для уравнения Бюргерса (см. § 18.1). Для уравнения

$$v_t=v_2+\frac{2}{y}\,v_1 \tag{19.47}$$

подстановкой (18.11) в соотношение (19.23) находятся операторы

$$L_1=D_y+\frac{1}{y}\,,\quad L_2=2tL_1+y.$$

Будем искать преобразование эквивалентности, заданное точечной заменой переменных $y=\varphi(x,\ u)$, $v=\Phi(x,\ u)$, при помощи операторного равенства (19.46) с $L=D_x$ и $\tilde{L}=D_y+\dfrac{1}{y}$. Это равенство с учетом формулы (19.44a) может быть записано в виде

$$\left(D_x+\frac{1}{\varphi}\,D_x(\varphi)\right)\frac{\varphi_x\Phi_u-\varphi_u\Phi_x}{D_x(\varphi)}=(\varphi_x\Phi_u-\varphi_u\Phi_x)\,D_x, \tag{19.48}$$

где $\varphi_x\Phi_u-\varphi_u\Phi_x\neq 0$, так как φ и Φ предполагаются функционально независимыми. Равенство коэффициентов при D_x достигается при $D_x(\varphi)=1$, и с учетом этого условия (19.48) дает $\Phi_u+xD_x(\Phi_u)=0$, откуда $\Phi=\dfrac{u}{x}$. Следовательно, замена переменных, сводящая (19.47) к уравнению теплопроводности (18.1), имеет вид $y=x$, $v=\dfrac{u}{x}$.

Пример 2. Найдем преобразование эквивалентности (19.44) с $y=x$ для уравнений

$$u_t=u_3+u^2u_1, \tag{19.49}$$

и

$$v_t=v_3+vv_1 \tag{19.49'}$$

с алгебрами $\mathscr{L}_F$ и $\mathscr{L}_H$, порожденными операторами

$$L = D^2 + \frac{2}{3} u^2 + \frac{2}{3} u_1 D^{-1} u \tag{19.50}$$

и

$$\tilde{L} = D^2 + \frac{2}{3} v + \frac{1}{3} v_1 D^{-1} \tag{19.50$'$}$$

соответственно. Подстановка этих операторов L, $\tilde{L}$ и $\varphi_* = 0$ в равенство (19.46) дает условия $\Phi_i = 0$ при $i = 2, \ldots, n$ и уравнения

$$D(\Phi_1) = 0, \qquad 2D(\Phi_0) + \frac{2}{3} \Phi\Phi_1 = \frac{2}{3} u^2 \Phi_1$$

для функции $\Phi = \Phi(x, u, u_1)$. Отсюда легко находится преобразование Миуры (ср. замечание 2 с интерпретацией этого преобразования в примере 10 из § 14.4):

$$v = u^2 + \varepsilon\sqrt{6}\, u_1, \qquad \varepsilon = \pm i. \tag{19.51}$$

Пример 3. Для преобразования эволюционных уравнений, правые части которых имеют переменную сепаранту, замена переменной x существенна. Это необходимо, в частности, когда одно из преобразуемых уравнений имеет постоянную, а другое из них переменную сепаранту. Рассмотрим, например, уравнение

$$v_t = v_1^{-2} v_2, \quad v = v(t, y). \tag{19.52}$$

Для него легко находится решение $\tilde{L} = D_y \cdot v_1^{-1}$ уравнения (19.23). С этим оператором $\tilde{L}$ и с $L = D_x$, $\varphi = \varphi(x, u)$, $\Phi = \Phi(x, u)$ соотношение (19.46) имеет вид

$$D_x \cdot \frac{\varphi_x \Phi_u - \varphi_u \Phi_x}{D_x(\Phi)} = (\varphi_x \Phi_u - \varphi_u \Phi_x) D_x.$$

Сравнением коэффициентов при D_x отсюда получается условие $D_x(\Phi) = 1$, с учетом которого оставшееся уравнение дает $D_x(\varphi_u) = 0$. Следовательно, уравнение (19.52) эквивалентно уравнению теплопроводности (18.1) и получается из него точечным преобразованием

$$y = u, \qquad v = x.$$

Замечание 3. Определение эквивалентности эволюционных уравнений можно обобщить, рассматривая вместо (19.44) преобразование

$$y = \varphi(t, x, u, \ldots, u_n), \quad s = \psi(t, x, u, \ldots, u_n),$$
$$v = \Phi(t, x, u, \ldots, u_n). \tag{19.53}$$

В этом случае вместо (19.44a)—(19.44d), (19.46) используются следующие формулы:

$$D_x = D_x(\varphi) D_y + D_x(\psi) D_s, \qquad D_t = D_t(\varphi) D_y + D_t(\psi) D_s,$$
$$D_x(\Phi) = v_1 D_x(\varphi) + v_s D_x(\psi), \qquad v_{i+1} = D_y(v_i),$$
$$D_t(\Phi) = v_1 D_t(\varphi) + v_s D_t(\psi),$$
$$\tilde{f} = (\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) f, \qquad f \in \mathcal{A},$$
$$\tilde{L}(\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) = (\Phi_* - v_1\varphi_* - v_s\psi_*) L.$$

В следующем параграфе подробно рассматриваются случаи $m=2$ и 3 для иллюстрации описанного выше метода групповой классификации.

§ 20. Анализ эволюционных уравнений второго и третьего порядка

20.1. $m=2$. В соответствии с теоремой 19.3 и леммой 19.3.2 для групповой классификации уравнений

$$u_t = F(u, u_1, u_2) \tag{20.1}$$

используется соотношение (19.23) с оператором

$$L = F_* + \alpha D + \beta + \gamma D^{-1} + \ldots, \tag{20.2}$$

коэффициенты α, β, γ, ... которого принадлежат $\mathcal{A}$ и могут зависеть от t, x. Так как в данном случае

$$L_t - [F_*, L] = \left(\frac{dF_2}{dt} - 2F_2 D\alpha + \alpha DF_2\right) D^2 + \\ + \left(\frac{d(F_1+\alpha)}{dt} - F_2 D^2\alpha - 2F_2 D\beta - F_1 D\alpha + \alpha DF_1\right) D + \\ + \left(\frac{d(F_0+\beta)}{dt} - F_2 D^2\beta - 2F_2 D\gamma - F_1 D\beta + \alpha DF_0 - \gamma DF_2\right) + \ldots,$$

равенство (19.23) приводит к уравнениям

$$\frac{dF_2}{dt} - 2F_2 D\alpha + \alpha DF_2 = 0, \tag{20.3}$$

$$\frac{d(F_1+\alpha)}{dt} - F_2 D^2\alpha - 2F_2 D\beta - F_1 D\alpha + \alpha DF_1 = 0, \tag{20.4}$$

$$\frac{d(F_0+\beta)}{dt} - F_2 D^2\beta - 2F_2 D\gamma - F_1 D\beta + \alpha DF_0 - \gamma DF_2 = 0 \tag{20.5}$$

между функцией F и коэффициентами α, β, γ.

Условие разрешимости уравнения (20.3) (см. (19.35)),

$$\frac{\delta}{\delta u} \frac{dF_2^{-1/2}}{dt} = 0, \tag{20.6}$$

является первым необходимым условием нетривиальности алгебры $\mathcal{A}_F$. Второе необходимое условие,

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{dF_2^{-1}F_1}{dt}+F_2^{-1}\frac{d\alpha}{dt}\right)=0, \tag{20.7}$$

следует из уравнения (20.4), записанного с использованием (20.3) в виде

$$\frac{dF_2^{-1}F_1}{dt}+F_2^{-1}\frac{d\alpha}{dt}=D\left(D\alpha+2\beta-\alpha F_2^{-1}F_1\right).$$

В (20.7) величина α считается известной функцией, найденной из уравнения (20.3). Остальные необходимые условия в общем виде далее не используются.

С помощью условия (20.6) легко показать, что F является рациональной функцией от переменной u_2. Для этого достаточно выделить старший член левой части (20.6). Имеем

$$\frac{dF_2^{-1/2}}{dt}=-\frac{1}{2}\left(F_2^{-1/2}F_{22}u_4+F_2^{-3/2}F_{2?}^2\, u_3^2\right)+\ldots$$

и соответственно

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dF_2^{-1/2}}{dt}=\frac{1}{2}F_2^{-3/2}\left(3F_{22}^2-2F_2F_{222}\right)u_6 \pmod{u_5}.$$

Поэтому из равенства (20.6) следует обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка $3(F_{22})^2-2F_2\cdot F_{222}=0$ для сепаранты F_2 функции F, откуда

$$F_2=(\varphi u_2+\psi)^{-2}, \quad \text{если} \quad F_{22}\neq 0, \tag{20.8}$$

или

$$F=\varphi u_2+\psi, \tag{20.9}$$

где функции φ и ψ зависят только от переменных u, u_1.

При подстановке (20.8) и (20.9) в левую часть (20.6) коэффициенты при u_5 и u_4^2 также обращаются в нуль, так что старший член функции $\dfrac{\delta}{\delta u}\dfrac{dF_2^{-1/2}}{dt}$ линейно зависит от u_4. В частности, в случае (20.9)

$$\frac{dF_2^{-1/2}}{dt}=-\frac{1}{2}\left(\varphi^{-1/2}\varphi_1u_3+\varphi^{-3/2}\varphi_1^2u_2^2\right)+\ldots,$$

и поэтому

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dF_2^{-1/2}}{dt}=\frac{1}{2}\varphi^{-3/2}\left(2\varphi\varphi_{11}-3\varphi_1^2\right)u_4 \pmod{u_3}.$$

Значит, $2\varphi\varphi_{11}-3\varphi_1^2=0$, и коэффициент $\varphi(u, u_1)$ в (20.9) равен

$$\varphi=(p(u)\,u_1+q(u))^{-2}, \quad \text{если} \quad \varphi_1\neq 0, \tag{20.9'}$$

или

$$\varphi=\varphi(u). \tag{20.9''}$$

Дальнейший анализ необходимых условий ведется в предположении (20.9''), т. е. для полулинейного уравнения

$$u_t=\varphi(u)\,u_2+\psi(u,\ u_1). \tag{20.10}$$

Для уравнения (20.10) с постоянной сепарантой,

$$u_t=u_2+\psi(u,\ u_1), \tag{20.11}$$

выполнение первого необходимого условия (20.6) очевидно. Так как из уравнения (20.3) следует, что $\alpha=\alpha(t)$, то второе необходимое условие (20.7) принимает вид

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\psi_1}{dt}=0. \tag{20.12}$$

Здесь

$$\frac{d\psi_1}{dt}=\psi_{11}D(u_2+\psi)+\psi_{01}(u_2+\psi)=Au_3+Bu_2+C,$$

где $A=\psi_{11}$, $B=\psi_{01}+\psi_1\psi_{11}$, $C=\psi\psi_{01}+\psi_0\psi_{11}u$. Отсюда получается выражение

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\psi_1}{dt}=-D^3A+D^2B-D(A_1u_3+B_1u_2+C_1)+A_0u_3+B_0u_2+C_0,$$

старший член которого равен $-2A_1u_4$, и уравнение (20.12) дает $A=A(u)$, т. е.

$$\psi=a(u)\,u_1^2+b(u)\,u_1+c(u). \tag{20.13}$$

Теперь левая часть (20.12) имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\psi_1}{dt}=(-3A''u_1+B_{01}u_1+2B_0-C_{11})\,u_2-A'''u_1^3+B_{00}u_1^2-C_{01}u_1+C_0,$$

и поэтому

$$(-3A''+B_{01})\,u_1+2B_0-C_{11}=0,\quad -A'''u_1^3+B_{00}u_1^2-C_{01}u_1+C_0=0.$$

Эти уравнения после подстановки в A, B, C выражения (20.13) принимают вид

$$b''-ab'=0, \tag{20.14}$$

$$(cb')'=0. \tag{20.15}$$

Если $b'(u)\neq 0$, то заменой $v=b(u)$ с учетом (20.13)—(20.15) уравнение (20.11) приводится к виду $v_t=v_2+vv_1+k$, $k=\text{const}$. Это уравнение переходит в уравнение Бюргерса (18.21) после точечной замены переменных $\bar v=v-kt$, $\bar x=x+\frac{1}{2}kt^2$.

Если в (20.13) $b=\text{const}$, можно положить $b=0$, так как $u_1\in\mathcal{A}_F$, и вместо (20.11), (20.13) рассматривать уравнение

$$u_t=u_2+a(u)u_1^2+c(u) \tag{20.16}$$

с произвольными коэффициентами $a(u)$, $c(u)$. Оба условия (20.14) и (20.15) при этом выполнены, и уравнения (20.3), (20.4) дают

$$\alpha=\alpha(t),\quad \beta=au_2+a^2u_1^2+\alpha au_1+ac+\frac{1}{2}\dot{\alpha}'x+k(t).$$

Теперь, пользуясь этими значениями коэффициентов α и β, можно записать условие интегрируемости уравнения (20.5) — третье необходимое условие нетривиальности алгебры Ли — Беклунда для (20.16):

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{d}{dt}(a'u_1^2+c'+\beta)-2au_1D\beta\right)=0.$$

Отсюда следуют условия $\alpha=0$ и

$$c''+(ac)'=0. \tag{20.17}$$

Замечая, что решение $c(u)$ уравнения (20.17) принадлежит централизатору функции $F=u_2+au_1^2$, вместо (20.16) можно рассматривать уравнение

$$u_t=u_2+a(u)u_1^2. \tag{20.16$'$}$$

Как и уравнение Бюргерса (18.15), оно линеаризуется и переводится в уравнение теплопроводности (18.1) подстановкой

$$v=\Phi(u)=\int\exp\left(\int a(u)\,du\right)du. \tag{20.18}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякое эволюционное уравнение* (20.1) *с постоянной сепарантой, допускающее нетривиальную алгебру Ли — Беклунда, точечной заменой переменных приводится либо к уравнению теплопроводности* (18.1), *либо к уравнению Бюргерса* (18.21) *).

Для уравнения (20.10) с переменной сепарантой ($\varphi'(u)\neq 0$) первое необходимое условие (20.6) нетривиальности алгебры $\mathcal{A}_F$ дает

$$\psi=\left(\frac{\varphi\varphi''}{\varphi'}-\frac{1}{2}\varphi'\right)u_1^2+\lambda(u)u_1+k\frac{\varphi^{3/2}}{\varphi'},$$

где $\lambda(u)$ — произвольная функция, $k=\text{const}$. Замена $\varphi(u)=v^2$ с учетом полученного выражения для ψ приводит уравнение (20.10) к виду

$$v_t=v^2(v_2+h(v)v_1+k).$$

*) К такому же результату приводит классификация уравнений вида (20.11) по специальному признаку, когда условие нетривиальности алгебры $\mathcal{A}_F$ заменяется требованием, чтобы она содержала элемент третьего порядка (Ибрагимов, Шабат [2], см. также Ибрагимов [17], Fokas [1]).

Для этого уравнения из (20.3) находится

$$\alpha = vv_1 + v\int h(v)\,dv + kxv + C(t),$$

и условие (20.7),

$$\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{dh}{dt} + v^{-2}\frac{d\alpha}{dt}\right) = 2(vh'' + 3h')vv_2 + \\ + (vh''' + 3h' + (vh'' + 3h')'v)v_1^2 + k(vh' + h) - 2C'(t)v^{-3} = 0,$$

дает

$$k = 0, \quad h(v) = \lambda + \mu v^{-2}, \quad \lambda,\ \mu = \mathrm{const}.$$

Постоянные λ, μ можно положить равными нулю, так как наличие μ приводит в рассматриваемом уравнении лишь к несущественному слагаемому μv_1, а λ исчезает после замены $\lambda x = \ln y$, $\lambda v = \overline{v}e^{-\lambda x}$. Этим доказана

Лемма 2. *Уравнение* (20.10) *с переменной сепарантой, допускающее нетривиальную алгебру Ли—Беклунда, точечным преобразованием приводится к виду*

$$v_t = v^2 v_2, \quad v = v(t,\ y). \tag{20.19}$$

4-параметрическая группа, состоящая из переносов по t, y и растяжений $y \mapsto ay$, $t \mapsto a^2 t$ и $y \mapsto by$, $v \mapsto bv$, является максимальной группой точечных преобразований, допускаемой уравнением (20.19). Поэтому (20.19) точечным преобразованием нельзя перевести в уравнение теплопроводности или Бюргерса (см. § 17.5). Однако (20.19) эквивалентно уравнению теплопроводности в смысле определения 19.4. Для нахождения преобразования эквивалентности удобно переписать (20.19) в дивергентной форме

$$w_t = D(w^{-2}w_1), \quad w = v^{-1}, \tag{20.19'}$$

и, введя потенциал z (т. е. полагая $w = z_1$), проинтегрировать:

$$z_t = z_1^{-2} z_2. \tag{20.19''}$$

Это уравнение линеаризуется и приводится к уравнению теплопроводности (18.1) для $u = u(t,\ x)$ точечным преобразованием (см. пример 19.4.3)

$$y = u, \quad z = x. \tag{20.20}$$

Отсюда с помощью формулы (19.44b) находятся преобразования

$$y = u, \quad w = u_1^{-1}, \tag{20.20'}$$

или

$$y = u, \quad v = u_1, \tag{20.20''}$$

переводящие каждое решение $u(t,\ x)$ уравнения (18.1) в решения уравнений (20.19′) и (20.19) соответственно.

Для преобразования (20.20″) $\varphi=u$, $\Phi=u_1$,

$$\Phi_*-v_1\varphi_*=D_x-\frac{u_2}{u_1}=u_1D_xu_1^{-1},\quad (\Phi_*-v_1\varphi_*)^{-1}=u_1D_x^{-1}u_1^{-1},$$

$D_x=u_1D_y$, $D_x^{-1}=D_y^{-1}u_1^{-1}$, и дифференциальные операторы (18.12) преобразованием (19.46) переводятся в рациональные операторы

$$\begin{aligned} L_1&=u_1D_xu_1^{-1}D_xu_1D_x^{-1}u_1^{-1}=v^2D_y^2vD_y^{-1}v^{-2},\\ L_2&=2tL_1+u_1D_xxD_x^{-1}u_1^{-1}=(2tv^2D_y^2+1)\,vD_y^{-1}v^{-2}+x, \end{aligned} \tag{20.21}$$

порождающие алгебру $\mathscr{L}_F$ для уравнения (20.19); с их помощью по рекурренции строится алгебра Ли—Беклунда $\mathscr{A}_F$. Аналогично получаются операторы рекурренции

$$\begin{aligned} M_1&=D_y^2w^{-1}D_y^{-1},\\ M_2&=(2tD_y^2w^{-1}+w)\,D_y^{-1}+x \end{aligned} \tag{20.21′}$$

для уравнения (20.19′) *). Полученные результаты доказывают справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Всякое уравнение* (20.1) *с сепарантой* $F_2(u)$ (*зависящей только от переменной* u), *допускающее нетривиальную алгебру Ли—Беклунда* $\mathscr{A}_F$, *точечным преобразованием приводится к одной из канонических форм* (18.1), (18.21) *или* (20.19) *с операторами рекурренции* (18.12), (18.23) *и* (20.21). *Все эти уравнения эквивалентны между собой относительно преобразований Ли—Беклунда вида* (19.44).

20.2. $m=3$. Пусть

$$u_t=F(u,\ u_1,\ u_2,\ u_3),$$

а L—оператор вида (19.30). Из равенства

$$L_t-[F_*,\ L]=0\ (\mathrm{mod}\ D^{-1})$$

получаются четыре уравнения: (19.34), (19.36) и

$$\begin{aligned} \frac{d(F_1+\alpha)}{dt}&=F_3D^3\alpha+3F_3D^2\beta+3F_3D\gamma+\gamma DF_3+\\ &\quad+F_2D^2\alpha+2F_2D\beta+F_1D\alpha-\alpha DF_1, \end{aligned} \tag{20.22}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(F_0+\beta)}{dt}&=F_3D^3\beta+3F_3D^2\gamma+3F_3D\delta-\gamma D^2F_3+2\delta DF_3+F_2D^2\beta+\\ &\quad+2F_2D\gamma+\gamma DF_2+F_1D\beta-\alpha DF_0. \end{aligned} \tag{20.23}$$

Здесь эти соотношения используются для групповой классификации эволюционных уравнений вида

$$u_t=u_3+\varphi(u,\ u_1). \tag{20.24}$$

---

*) Rosen [1] нашел преобразование Беклунда (являющееся обратным к (20.20″)), линеаризующее уравнение (20.19). То же преобразование для (20.19′) независимо нашли Bluman & Kumei [1], которые получили также рекурренцию M_1 из (20.21′), занимаясь групповой классификацией уравнений вида (20.10) с $\psi=\varphi(u)\,u_1^2$. Одновременно был получен оператор L_1 из (20.21) (Ибрагимов, Шабат [4]).

Так как при $F_3=1$, $F_2=0$ условия (19.35) и (19.37) выполнены, то для (20.24) уравнения (19.34) и (19.36) разрешимы и дают $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$. Уравнения (20.22), (20.23) можно записать теперь в виде

$$\frac{dF_1}{dt}=D(3\gamma-\alpha(t)F_1-\alpha'(t)x), \tag{20.22'}$$

$$\frac{dF_0}{dt}=D(3D\gamma+3\delta-\alpha(t)F_0-\beta'(t)x) \tag{20.23'}$$

и получить следующие два необходимых условия нетривиальности алгебры Ли — Беклунда для уравнения (20.24):

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\varphi_1}{dt}=0, \quad \frac{\delta}{\delta u}\frac{d\varphi_0}{dt}=0. \tag{20.25}$$

Из (20.25), выделяя старшие члены, получаем равенства

$$\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial u_1^2}=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial u\,\partial u_1}=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial u^2}=0,$$

откуда

$$\varphi=cu_1^3+(ku+l)u_1^2+a(u)u_1+b(u), \tag{20.26}$$

где c, k, $l=\mathrm{const}$. Подстановка выражения (20.26) в оставшиеся уравнения, вытекающие из (20.25), дает соотношения

$$k=0, \quad lb''=0, \quad (bb'')'=0, \quad (b''+2cb)''=0,$$
$$(ba')'=0, \quad (a'+8ca)'=0, \quad (6cb+la)'=0.$$

Отсюда простым перебором находится полный набор решений системы уравнений (20.25):

$$\varphi=-\frac{1}{8}u_1^3+(ce^u+ke^{-u})u_1, \tag{20.27}$$

$$\varphi=cu_1^3+ku_1^2, \tag{20.28}$$

$$\varphi=(cu^2+ku)u_1, \tag{20.29}$$

$$\varphi=cuu_1+k, \tag{20.30}$$

$$\varphi=cu_1^2+ku, \tag{20.31}$$

где c, k — произвольные постоянные; несущественное слагаемое cu_1 опущено, а в (20.31), кроме того, опущено постоянное слагаемое за счет замены $u\mapsto u+c$.

Уравнение $u_t=u_3+uu_1+k$ заменой $u=v+\frac{k}{2}t$ приводится к виду $v_t=v_3+vv_1+\frac{k}{2}(1+tv_1)$; слагаемым $\frac{k}{2}(1+tv_1)$ можно пренебречь, так как $1+tv_1$ является элементом алгебры $\mathcal{A}_F$ для уравнения Кортевега — де Фриза (§ 18.2). Следовательно, случай (20.30) приводится к функции (20.29), которая, в свою очередь, получается из (20.28) дифференцированием D и заменой $u_1\mapsto u$. Функция (20.31), как сейчас будет показано, удовлетворяет уравнению (19.23) только при $k=0$. Если подставить выражение

(20.31) в левую часть (19.23) и приравнять нулю коэффициент при D^{-1}, то условие разрешимости полученного уравнения имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d\gamma}{dt}=0,$$

где $\gamma=\frac{1}{3}\left(u_3+\frac{1}{2}u_1^2+\alpha(t)u_1+ku+\alpha'(t)x\right)$ в силу (20.22); отсюда сразу получается $k=0$. Поэтому остаются только случаи (20.27) и (20.28). При $c\neq 0$ в (20.28) можно взять $c=1/3$, а $k=0$ (замена $u=v-kx$); при $c=0$ положим $k=1/2$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякое нелинейное уравнение* (20.24) *с нетривиальной алгеброй приводится к одному из следующих уравнений:*

$$u_t=u_3-\frac{1}{8}u_1^3+(ce^u+ke^{-u})u_1,\quad c,\ k=\mathrm{const},\tag{20.32}$$

$$u_t=u_3+\frac{1}{3}u_1^3,\tag{20.33}$$

$$u_t=u_3+\frac{1}{2}u_1^2.\tag{20.34}$$

Уравнения (20.34) и (19.49′) эквивалентны и связаны преобразованием $v=u_1$; формула (19.46) переводит (19.50′) в оператор рекурренции для уравнения (20.34)

$$L=D^{-1}\tilde{L}D=D^2+\frac{2}{3}u_1-\frac{1}{3}D^{-1}u_2.\tag{20.35}$$

То же преобразование $v=u_1$ переводит уравнение (20.33) в (19.49), в оператор (19.50) — в оператор рекурренции

$$L=D^2+\frac{2}{3}u_1^2-\frac{2}{3}u_1D^{-1}u_2\tag{20.36}$$

для уравнения (20.33). Ввиду эквивалентности уравнений (19.49) и (19.49′) это означает, что уравнения (20.33) и (20.34) эквивалентны (формула (19.51) реализуется для них в виде преобразования Беклунда). Кроме того, справедливо следующее утверждение *).

Лемма 2. *Уравнение* (20.32) *эквивалентно уравнению Кортевега — де Фриза.*

Доказательство. Достаточно показать, что (20.32) эквивалентно модифицированному уравнению Кортевега — де Фриза

$$v_t=v_3-6v^2v_1+\lambda v_1,\qquad \lambda=\mathrm{const}.\tag{20.37}$$

*) Calogero & Degasperis [1] получили уравнение (20.32) методом редукции из интегрируемых матричных эволюционных уравнений. Преобразование этого уравнения к уравнению Кортевега — де Фриза нашли А. Б. Шабат (доклад на Советско-американском симпозиуме по солитонам, Киев, 4—16 сентября 1979 г. см. также Ибрагимов, Шабат [4]), F. Magri, A. Degasperis (см. Degasperis [1]).

Подстановкой выражения $v=\Phi(u, u_1)$ в (20.37) однозначно (с точностью до выбора знаков между слагаемыми) находится замена

$$v=\frac{1}{4}u_1+\frac{i}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{c}\,e^{u/2}+\sqrt{k}\,e^{-u/2}\right), \tag{20.38}$$

переводящая (20.32) в уравнение (20.37) с $\lambda=-2\sqrt{ck}$. Суперпозиция (20.38) с преобразованием Миуры $w=-(v_1+v^2)$ переводит (20.32) в уравнение Кортевега—де Фриза $w_t=w_3+6ww_1$.

Замечание. Алгебра $\mathscr{L}_F$ для уравнения (20.32) порождается оператором

$$L=D^2-\frac{1}{4}u_1^2-\frac{2}{3}\left(\sqrt{c}\,e^{u/2}+\sqrt{k}\,e^{-u/2}\right)^2+ \\ +u_1D^{-1}\left(\frac{1}{4}u_2+\frac{1}{3}ce^u-\frac{1}{3}ke^{-u}\right). \tag{20.39}$$

Он получается из оператора рекурренции

$$\tilde{L}=D^2-4v^2-4v_1D^{-1}v$$

для уравнения (20.37) путем преобразований (20.38), (19.46). Если по аналогии с $\tilde{L}$ оператор L искать в виде

$$L=D^2+\alpha+\beta D^{-1}\gamma,$$

то из уравнения $\tilde{L}\Phi_*=\Phi_*L$, где $\Phi=\Phi(u, u_1)$—правая часть (20.38), легко находится оператор (20.39).

Из предыдущих лемм вытекает классификационный результат относительно уравнений с постоянной сепарантой.

Теорема. *Любое уравнение вида* (20.24) *с нетривиальной алгеброй Ли—Беклунда эквивалентно либо линейному уравнению с постоянными коэффициентами, либо уравнению Кортевега—де Фриза.*

Теорему дополняет следующее

Предложение (Ибрагимов [18]). *Уравнение* *)

$$u_t=u^3u_3, \quad u=u(t, x), \tag{20.40}$$

эквивалентно уравнению Кортевега—де Фриза

$$v_t=v_3+vv_1, \quad v=v(t, y). \tag{20.41}$$

Доказательство. Уравнение (20.41) преобразованием

$$v=3w_1^{-1}w_3-\frac{9}{2}w_1^{-2}w_2^2 \tag{20.42}$$

приводится к виду

$$w_t=w_3-\frac{3}{2}w_1^{-1}w_2^2, \quad w=w(t, y). \tag{20.43}$$

*) Его нашел H. Dym (см. Kruskal [1], стр. 313). Уравнение (20.40) записывается также в виде $z_t=(z^{-1/2})_{xxx}$, $z=u^{-2}$.

Сделаем теперь замену

$$x = w, \quad u = w_1, \tag{20.44}$$

для которой формулы (19.44) дают $w_{1t} = u_t + u_1 w_t$, $w_1 = u$, $w_2 = uu_1$, $w_3 = u^2 u_2 + uu_1^2$, $w_4 = u^3 u_3 + 4u^2 u_1 u_2 + uu_1^3$. Подстановкой этих выражений в равенство

$$w_{1t} = w_4 - 3w_1^{-2} w_2 w_3 + \frac{3}{2} w_1^{-2} w_2^3, \tag{20.45}$$

полученное дифференцированием (20.43), приходим к (20.40). Таким образом, преобразование эквивалентности между уравнениями (20.40) и (20.41) осуществляется формулами (20.42) и (20.44).

20.3. Две системы нелинейных уравнений. Рассматриваемые системы возникают в теории распространения волн в нелинейных средах. Они представимы в форме Лакса и имеют счетное множество полиномиальных законов сохранения (Захаров, Манаков [1], Манаков [1]). По групповым свойствам эти системы подобны скалярным эволюционным уравнениям.

Первая система

$$\left(\frac{d}{dt} + c_{ij} D\right) u_{ij} = \sum_{k \neq i,\, j} (c_{ik} - c_{kj}) u_{ik} u_{kj}, \quad i,\, j = 1, \ldots, n, \tag{20.46}$$

описывает резонансное взаимодействие n волн. Здесь $D = D_x$, $c_{ij} = \dfrac{b_i - b_j}{a_i - a_j}$; a_i, $b_i = \mathrm{const}$, $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$, $u_{ii} = 0$, все индексы принимают значения от 1 до n. Операторы $X = f_{ij} \dfrac{\partial}{\partial u_{ij}} + \ldots$, допускаемые системой (20.46), находятся из определяющих уравнений

$$\left(\frac{d}{dt} + c_{ij} D\right) f_{ij} - \sum_{k \neq i,\, j} (c_{ik} - c_{kj}) (u_{ik} f_{kj} + u_{kj} f_{ik} = 0. \tag{20.47}$$

Эти уравнения имеют $n-1$ линейно независимых решений нулевого порядка

$$\overset{(0)}{f}_{ij} = u_{ij}, \quad \overset{(0)}{f}_{ji} = -u_{ji}, \quad \overset{(0)}{f}_{jk} = 0 \ (j,\, k \neq i), \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{20.48}$$

Функции (20.48) и рекуррентная формула

$$\begin{aligned} \overset{(m+1)}{f}_{ij} = \frac{1}{a_i - a_j} D\overset{(m)}{f}_{ij} + \sum_{k \neq i,\, j} \left(\frac{1}{a_k - a_j} u_{ik} \overset{(m)}{f}_{kj} - \frac{1}{a_i - a_k} u_{kj} \overset{(m)}{f}_{ik}\right) + \\ + u_{ij} \left[\sum_{k \neq i} \frac{1}{a_k - a_i} D^{-1} \left(u_{ik} \overset{(m)}{f}_{ki} + u_{ki} \overset{(m)}{f}_{ik}\right) - \right. \\ \left. - \sum_{k \neq j} \frac{1}{a_k - a_j} D^{-1} \left(u_{jk} \overset{(m)}{f}_{kj} + u_{kj} \overset{(m)}{f}_{jk}\right)\right] \end{aligned} \tag{20.49}$$

порождают общее решение (не зависящее от t, x) определяющих уравнений. Формула (20.49) переводит любое решение порядка m в решение порядка $m+1$, так как справедливо соотношение

$$(a_i-a_j)\,R\left[\overset{(m+1)}{f_{ij}}\right]=DR\left[\overset{(m)}{f_{ij}}\right],$$

где $R[f_{ij}]$ — левая часть (20.47).

Второй пример — система нелинейных уравнений Шредингера

$$\left(i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)u_k=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)v_k=0,\qquad k=1,\ \ldots,\ n,\tag{20.50}$$

где $i=\sqrt{-1}$, $u\cdot v=\sum\limits_{k=1}^{n}u_kv_k$. Определяющие уравнения для операторов Ли — Беклунда $X=f_k\frac{\partial}{\partial u_k}+g_k\frac{\partial}{\partial v_k}+\ldots$ имеют вид

$$\left(i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)f_k+u_k(u\cdot g+v\cdot f)=0,$$
$$\left(-i\frac{d}{dt}+D^2+u\cdot v\right)g_k+v_k(u\cdot g+v\cdot f)=0.$$

Их общее решение задается рекурренцией

$$\overset{(m+1)}{f_k}=-D\overset{(m)}{f_k}-\frac{1}{2}u_kD^{-1}\left(u\cdot\overset{(m)}{g}+v\cdot\overset{(m)}{f}\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}u_jD^{-1}\left(v_j\overset{(m)}{f_k}+u_k\overset{(m)}{g_j}\right),$$

$$\overset{(m+1)}{g_k}=D\overset{(m)}{g_k}+\frac{1}{2}v_kD^{-1}\left(u\cdot\overset{(m)}{g}+v\cdot\overset{(m)}{f}\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}v_jD^{-1}\left(u_j\overset{(m)}{g_k}+v_k\overset{(m)}{f_j}\right),$$

$$\overset{(0)}{f_k}=-u_k,\quad \overset{(0)}{g_k}=v_k,\quad k=1,\ \ldots,\ n;\quad m=0,\ 1,\ \ldots,\tag{20.51}$$

и следующими решениями нулевого порядка: $\overset{(0)}{f_k}=u_j$, $\overset{(0)}{g_j}=-v_k$, $\overset{(0)}{f_p}=0$, $\overset{(0)}{g_l}=0$, j, $p\neq k$; $l\neq j$, $k=1,\ \ldots,\ n$. Приведенные здесь коммутативные алгебры построил Жибер [1].

§ 21. Уравнение $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$

21.1. Анализ общего случая. Теория групп Ли — Беклунда позволяет по-новому взглянуть на классическую задачу групповой классификации и интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Остановимся сначала на вопросе о построении допускаемой алгебры, взяв в качестве примера уравнение Монжа — Ампера, являющееся типичным представителем нелинейных уравнений с нетривиальной группой контактных преобразований.

Рассмотрим уравнение *)

$$s^2-rt=0. \tag{21.1}$$

Для него определяющее уравнение (17.4),

$$(tD_x^2-2sD_xD_y+rD_y^2)f=0,$$

можно переписать в виде

$$(D_x-\lambda D_y)^2 f=0, \quad \lambda=\frac{s}{t}, \tag{21.2}$$

так как $(D_x-\lambda D_y)\lambda=0$ в силу (21.1). Группе контактных преобразований соответствуют решения первого порядка $\overset{(1)}{f}=f(x, y, z, p, q)$ уравнения (21.2). Для их отыскания заметим, что на дифференциальном многообразии, заданном уравнением (21.1), оператор $(D_x-\lambda D_y)^2$ действует по формуле

$$(D_x-\lambda D_y)^2=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}\right)-\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]^2+\ldots,$$

где опущенные слагаемые не содержат дифференцирований по p и q. Поэтому в случае решений первого порядка уравнение (21.2) распадается на систему трех уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial z}\right)f=0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}+q\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=0.$$

Отсюда

$$\overset{(1)}{f}=x\xi(p, q, z-xp-yq)+y\eta(p, q, z-xp-yq)+\zeta(p, q, z-xp-yq)$$

с произвольными функциями ξ, η, ζ. В этой формуле содержатся, в частности, функции $f=$

$$1,\ x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ xp,\ yp,\ zp,\ xq,\ yq,\ zq,$$
$$x(z+xp+yq), \quad y(z+xp+yq), \quad z(z+xp+yq),$$

порождающие максимальную (15-параметрическую) группу точечных преобразований, допускаемую уравнением (21.1). Общее решение определяющего уравнения (21.2) дается формулой (см. Чупахин [2] и Хабиров [2])

$$\overset{(n)}{f}=\sum_{i=0}^{n} R^{i-1}(y)\varphi_i(p, q, \omega, Rq, R\omega, \ldots, R^{n-1}q, R^{n-1}\omega), \tag{21.3}$$

где

$$\omega=z-xp-yq, \quad R=(rt)^{-1/2}D_y, \quad R^{-1}(y)\overset{\text{def}}{=}1, \qquad n=2, 3, \ldots,$$

дифференцирование D_y производится с учетом уравнения (21.1).

---

*) Используются стандартные обозначения Монжа: $p=z_x$, $q=z_y$, $r=z_{xx}$, $s=z_{xy}$, $t=z_{yy}$.

Для общего уравнения

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \qquad (21.4)$$

построение алгебры Ли—Беклунда сводится к решению уравнения

$$F_* f=0, \qquad (21.5)$$

где

$$F_*=F_z+F_pD_x+F_qD_y+F_rD_x^2+F_sD_yD_x+F_tD_y^2.$$

Равенство (21.5) должно выполняться на дифференциальном многообразии $[F]$, заданном уравнением (21.4) (см. § 17.1). Анализ определяющего уравнения упрощается, если $[F]$ можно записать в разрешенном виде (15.19). Предположим, например, что $F_s \neq 0$, и потребуем, чтобы $[F]$ можно было разрешить относительно всех смешанных производных. Для разрешимости уравнений $D_xF=0$, $D_yF=0$ относительно переменных z_{xxy}, z_{xyy} нужно, чтобы был отличен от нуля определитель

$$\begin{vmatrix} F_s & F_r \\ F_t & F_s \end{vmatrix} = (F_s)^2(1-\tau), \quad \text{где} \quad \tau=\frac{F_rF_t}{(F_s)^2}.$$

Продолжение этого процесса приводит к условию, чтобы $P_n(\tau)$, определенные рекуррентно по формуле

$$P_1=1, \quad P_2=1-\tau, \quad P_n=P_{n-1}-\tau P_{n-2}, \qquad (21.6)$$

были отличны от нуля. Вопрос о нулях решает следующее утверждение (Хабиров [2]).

Теорема. *Полиномы* (21.6) *представимы в виде*

$$P_n(\tau)=\frac{(1+a)^{n+1}-(1-a)^{n+1}}{2^{n+1}a}, \qquad a=\sqrt{1-4\tau},$$

и имеют корни

$$\tau_{nk}=\frac{1}{4}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi k}{n+1}\right), \qquad k=1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \qquad (21.7)$$

Согласно формуле (21.7) все корни полиномов $P_n(\tau)$ строго больше $1/4$, причем $\tau=1/4$ является точкой сгущения минимальных корней. К особому случаю $\tau=1/4$ относится, в частности, уравнение минимальных поверхностей

$$2s=\frac{q}{p}r+\frac{p}{q}t. \qquad (21.8)$$

Для него общее решение порядка $n \geqslant 1$ определяющего уравнения (21.5) дается формулой

$$\overset{(n)}{f}=\sum_{i=0}^{n} T^{i-1}(a)\,\varphi_i(z, \rho, \omega, \ldots, R^{n-1}\rho, R^{n-1}\omega), \qquad (21.9)$$

где

$$a=\sqrt{pq}, \quad \rho=qp^{-1}, \quad \omega=x+y\rho,$$

$$T=q^{-1}D_y-p^{-1}D_x, \quad R=q^{-1}D_y, \quad R^{-1}(a)\overset{\text{def}}{=}1.$$

Вывод этой формулы, а также более подробный анализ определяющего уравнения в общем случае имеются в цитированной выше работе Хабирова.

21.2. Классификация уравнений $s = F(z)$. В настоящее время имеется групповая классификация уравнений второго порядка вида

$$s = F(z). \tag{21.10}$$

Lie [3] провел классификацию таких уравнений на основе контактных преобразований, чтобы выяснить, какие из них допускают интегрирование методом Дарбу. Выяснилось, что для уравнений вида (21.10) допускаемая группа контактных преобразований сводится к точечным преобразованиям вида (с точностью до несущественной замены $x \mapsto y$, $y \mapsto x$)

$$\bar{x} = X(x), \quad \bar{y} = Y(y), \quad \bar{z} = Z(x, y, z), \tag{21.11}$$

а единственным нелинейным уравнением, интегрируемым методом Дарбу, является уравнение Лиувилля

$$s = e^z. \tag{21.12}$$

Ли выделил также уравнение Бонне

$$s = \sin z, \tag{21.13}$$

чтобы подчеркнуть геометрическое значение результата групповой классификации. Для (21.12) преобразование (21.11) имеет вид

$$\bar{x} = X(x), \quad \bar{y} = Y(y), \quad \bar{z} = z - \ln X'(x) - \ln Y'(y), \tag{21.14}$$

и Ли констатирует, что уравнение Лиувилля, как и линейные уравнения, инвариантно относительно бесконечной группы, содержащей две произвольные функции, но не линеаризуется. Последнее утверждение верно, однако, только по отношению к точечным преобразованиям: как указывалось в примере 14.4.6, уравнение Лиувилля можно линеаризовать преобразованием Ли — Беклунда. Итак, первым дополнением к классификации Ли является

Лемма. *Уравнение Лиувилля* (21.12) *эквивалентно волновому уравнению*

$$s' = 0 \tag{21.15}$$

и приводится к нему одним из следующих преобразований Ли — Беклунда:

$$z = \ln\left(2\,\frac{p'q'}{z'^2}\right), \tag{21.16}$$

$$z = \ln\left[2\left(1 + \operatorname{tg}^2 z'\right) p'q'\right]. \tag{21.16'}$$

Замечание 1. Пусть даны два уравнения: (21.10) и $s' = G(z')$. Прямой подстановкой функции $z = \Phi(z', p', q')$ во второе уравнение с учетом первого из них доказывается несколько более общее утверждение. Преобразование Ли—Беклунда первого порядка существует только между уравнениями (21.12) и (21.15) (за исключением тривиальных точечных замен и случаев линейных уравнений), а само преобразование дается либо формулой (21.16), либо формулой (21.16′).

Замечание 2. Класс эквивалентных уравнений не удается увеличить за счет преобразований Ли—Беклунда второго порядка $z=\Phi(z', p', q', r', t')$: если такое преобразование переводит (21.10) в уравнение $s'=G(z')$, то, за исключением тривиальных случаев линейных уравнений, $F=Ce^{kz}$, $G=0$, C, $k=\text{const}$.

При переходе от классификации по группам контактных преобразований к рассмотрению уравнений с нетривиальной группой Ли—Беклунда получается следующий классификационный результат (Жибер, Шабат [1], см. также Жибер, Ибрагимов, Шабат [1, 2]).

Теорема. *Пусть для уравнения* (21.10) *определяющее уравнение*

$$(D_yD_x-F'(z))f=0 \tag{21.17}$$

имеет решение порядка $n\geqslant 3$

$$\overset{(n)}{f}=f(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad z_i=D_x^i(z). \tag{21.18}$$

Тогда с помощью точечных преобразований уравнения (21.10) *функцию* F *можно привести к одному из стандартных видов:*

$$0, \quad e^z, \quad \sin z, \quad e^z+e^{-2z}, \tag{21.19}$$

причем случаи $s=e^z$ *и* $s=0$ *эквивалентны относительно преобразований Ли—Беклунда.*

Доказательство. Сначала следует заметить, что подстановка произвольной дифференциальной функции порядка n в равенство (21.17) приводит к разложению (18.45), составляющие g и h которого должны быть решениями уравнения (21.17), причем для нелинейных уравнений (21.10) $c=0$. Ограничившись рассмотрением функций, не зависящих от x и y, легко показать, что определяющее уравнение не имеет решений порядка 2. Таким образом, формулой (21.18) представлен общий вид решения (не зависящего от x и y) определяющего уравнения.

Подстановка (21.18) в левую часть (21.17) дает

$$(D_yD_x-F'(z))\overset{(n)}{f}=z_{n+1}D_y\left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)+\ldots,$$

и из определяющего уравнения получается первое условие

$$D_y\left(\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)=\sum_{i=1}^{n} D_x^{i-1}(F)\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\,\partial z_n}=0. \tag{21.20}$$

Отсюда в случае $(F'/F)' \neq 0$ следует представление решения: $\overset{(n)}{f} = z_n + cz_{n-1} + g(z_1, \ldots, z_{n-2})$. Повторением процедуры находится следующее необходимое условие нетривиальности алгебры (детали доказательства см. Жибер, Шабат [1]):

$$F'' = \alpha F + \beta F', \tag{21.21}$$

где α, β — комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\beta(\alpha - 2\beta^2) = 0. \tag{21.22}$$

Общее решение уравнений (21.21), (21.22) и $(F'/F)' = 0$ представлено в каноническом виде таблицей (21.19).

Остается проверить, что уравнения (21.13) и

$$s = e^z + e^{-2z} \tag{21.23}$$

имеют нетривиальную алгебру. В случае (21.13) определяющее уравнение имеет нетривиальное решение третьего порядка

$$\overset{(3)}{f} = z_3 + \frac{1}{2} z_1^3, \tag{21.24}$$

а в случае (21.23) — нетривиальное решение пятого порядка

$$\overset{(5)}{f} = z_5 + 5(z_2 z_3 - z_1^2 z_3 - z_1 z_2^2) + z_1^5. \tag{21.25}$$

Лемма завершает доказательство теоремы.

Следствие. *Уравнения* (21.13) *и* (21.23) *допускают бесконечную коммутативную алгебру элементов вида* (21.18).

Доказательство. Коммутативность вытекает из представления решения $\overset{(n)}{f}$ в случае $(F'/F)' \neq 0$. В силу коммутативности алгебра, допускаемая уравнением (21.13), совпадает с централизатором функции (21.24), т. е. с бесконечной алгеброй Ли — Беклунда модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза $z_t = z_3 + \frac{1}{2} z_1^3$. Аналогично алгебра, допускаемая уравнением (21.23), совпадает с алгеброй Ли — Беклунда эволюционного уравнения

$$z_t = z_5 + 5(z_2 z_3 - z_1^2 z_3 - z_1 z_2^2) + z_1^5. \tag{21.25'}$$

В этом случае вопрос решают замена *)

$$u = -(z_2 + z_1^2), \tag{21.26}$$

переводящая (21.25′) в уравнение (18.39), рекурренция (18.41) и теорема 19.4.

*) Эту замену нашли Ибрагимов, Шабат (см. Соколов, Шабат [1]) и Fordy & Gibbons [1].

Замечание 3. Для уравнения Лиувилля (21.12) алгебра некоммутативна и состоит из элементов

$$f=(D_x+z_1)\,\varphi(x,\ w,\ w_1,\ w_2,\ \ldots), \tag{21.27}$$

где $w=z_2-{}^1/_2 z_1^2$, $w_i=D_x^i w$.

21.3. Система двух нелинейных уравнений. Аналогично предыдущему исследуются системы

$$u_{xy}=A(u,\ v),\quad v_{xy}=B(u,\ v). \tag{21.28}$$

Как и в случае скалярного уравнения, достаточно рассматривать операторы Ли—Беклунда $X=f\frac{\partial}{\partial u}+g\frac{\partial}{\partial v}+\ldots$ с координатами f и g, зависящими от переменных $u_i=D_x^i(u)$, $v_i=D_x^i(v)$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Условие (21.20) заменяется уравнением

$$\sum_{i=1}^{n}\left(D_x^{i-1}(A)\frac{\partial w}{\partial u_i}+D_x^{i-1}(B)\frac{\partial w}{\partial v_i}\right)=0, \tag{21.29}$$

которому должны удовлетворять производные функций f и g по переменным u_n, v_n. В уравнении (21.29) присутствуют «лишние» переменные u, v, и поэтому оно представляет собой переопределенную систему: это можно выразить явно, добавив к (21.29) уравнения $\partial w/\partial u=0$, $\partial w/\partial v=0$. Исследование разрешимости уравнения (21.29) занимает центральное место при групповой классификации. В следующей теореме перечислены все системы (21.28) (с точностью до линейных преобразований функций u, v), для которых уравнение (21.29) имеет нетривиальное решение w второго порядка (Жибер, Ибрагимов, Шабат [2]).

Теорема. *Системы* (21.28), *для которых существует решение* $w(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2)\neq\mathrm{const}$ *уравнения* (21.29), *имеют вид*

$$u_{xy}=\Phi(au+bv)\,e^{av},\quad v_{xy}=\Phi'(au+bv)\,e^{av}, \tag{21.30}$$

где Φ—произвольная функция, Φ'—ее производная, a и b—комплексные параметры. При этом

$$w=u_2-au_1v_1-\frac{b}{2}v_1^2, \tag{21.31}$$

а формулы

$$f=\left(-\frac{b}{a^2}D_x+u_1\right)\varphi(w,\ D_xw,\ \ldots),\quad g=\left(\frac{1}{a}D_x+v_1\right)\varphi(w,\ D_xw,\ \ldots) \tag{21.32}$$

задают бесконечную алгебру, допускаемую системой (21.30).

Замечание. Кроме общего случая (21.30) уравнение (21.29) имеет нетривиальное решение $w=u_2-{}^1/_2u_1^2$ для вырожденной системы

$$u_{xy}=e^u,\quad v_{xy}=B(u,\ v) \tag{21.33}$$

с произвольной функцией B.

Доказательство. При $n=2$ уравнение (21.29) может иметь одно, два или три функционально независимых решения. Оставляя в стороне специальные случаи, когда число независимых решений равно двум или трем, предположим, что имеется только одно функционально независимое решение $w_0=w_0(u_1, v_1, u_2, v_2)$. Так как коэффициенты уравнения (21.29) при $n=2$ не зависят от u_2, v_2, то вместе с функцией w_0 решениями являются также ее производные по u_2 и v_2, так что

$$\frac{\partial w_0}{\partial u_2}=\varphi(w_0), \quad \frac{\partial w_0}{\partial v_2}=\psi(w_0).$$

Поэтому $\alpha\frac{\partial w_0}{\partial u_2}+\beta\frac{\partial w_0}{\partial v_2}=0$ с некоторыми постоянными α, β, откуда $w_0=w_0(u_1, v_1, p)$ с $p=\beta u_2-\alpha v_2$. Так как $\frac{\partial w_0}{\partial p}$ — снова решение, то $\frac{\partial w_0}{\partial p}=\varphi(w_0)$. Положив $w=\psi(w_0)$, где $\psi'(w_0)=\varphi^{-1}(w_0)$, получим линейное по p решение w. Подстановка этой функции w в уравнение (21.29) дает общий возможный вид решения:

$$w=\beta u_2-\alpha v_2+c_{11}u_1^2+2c_{12}u_1v_1+c_{22}v_1^2, \qquad c_{ij}=\mathrm{const}.$$

Отсюда линейной заменой переменных u, v в общем случае получается формула (21.31), а в вырожденном случае — указанная в замечании функция w. Из уравнения (21.29) после подстановки туда значения w находятся функции $A(u, v)$ и $B(u, v)$. Элементы алгебры строятся однозначно и даются формулами (21.32).

В случае линейной функции Φ, т. е. для системы

$$u_{xy}=(u+bv)e^v, \qquad v_{xy}=e^v, \tag{21.34}$$

и только в этом случае уравнение (21.29) имеет два независимых решения порядка 2; три независимых решения порядка 2 оно имеет при $\Phi=\mathrm{const}$. Система (21.34) допускает полное интегрирование путем сведения к волновому уравнению с помощью преобразования Ли—Беклунда первого порядка вида

$$u=\varphi(z, z', p, p', q, q'), \qquad v=\psi(z, z', p, p', q, q'). \tag{21.35}$$

Подстановкой (21.35) в (21.34) находится преобразование

$$u+bv=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p'}+\frac{q}{q'}\right)-\frac{z}{z'}, \quad v=\ln\left(2\frac{p'q'}{z'^2}\right), \tag{21.36}$$

которое два произвольных решения $z(x, y)$ и $z'(x, y)$ волнового уравнения $s=0$ переводит в решение системы (21.34); формула (21.36) задает представление общего решения этой системы.

Выше рассматривались только те системы, для которых уравнение (21.29) имеет решение порядка 2. Недавно получены (см. Лезнов, Смирнов, Шабат [1], Шабат, Ямилов [1], Лезнов, Савельев [1]) общие классификационные результаты для систем с экспоненциальными правыми частями и найдены алгебраические критерии интегрируемости этих систем.

Г Л А В А 5

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 22. Основные теоремы

22.1. Тождество Нётер. Пусть $\mathcal{A}$ — пространство дифференциальных функций от n независимых переменных x^i и m дифференциальных переменных u^α, т. е. функций вида (см. § 19.1 и § 17.1) $f\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}\right)$, $s < \infty$. Рассмотрим следующие линейные операторы, действующие в пространстве $\mathcal{A}$:

оператор Ли — Беклунда

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geqslant 1} \zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}}, \tag{22.1}$$

координаты ξ^i, η^α которого являются произвольными функциями из $\mathcal{A}$, а координаты $\zeta^\alpha_{i_1 \ldots i_s}$ определяются формулами (16.11); операторы Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geqslant 1} (-1)^s D_{i_1} \ldots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1 \ldots i_s}}; \tag{22.2}$$

операторы Нётер

$$\begin{aligned} N^i = \xi^i + (\eta^\alpha - \xi^l u^\alpha_l) \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha_i} + \sum_{s \geqslant 1} (-1)^s D_{j_1} \ldots D_{j_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i j_1 \ldots j_s}} \right) + \\ + \sum_{r \geqslant 1} D_{k_1} \ldots D_{k_r} (\eta^\alpha - \xi^l u^\alpha_l) \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i k_1 \ldots k_r}} + \right. \\ \left. + \sum_{s \geqslant 1} (-1)^s D_{j_1} \ldots D_{j_s} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i k_1 \ldots k_r j_1 \ldots j_s}} \right), \end{aligned} \tag{22.3}$$

где функции ξ^i и η^α совпадают с соответствующими координатами оператора (22.1).

Т е о р е м а (Noether [1], Ибрагимов [15]). *Справедливо равенство*

$$X + D_i(\xi^i) = (\eta^\alpha - \xi^j u^\alpha_j) \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + D_i N^i. \tag{22.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используется формула продолжения (16.11).

Операторное равенство (22.4) называется *тождеством Нётер*; оно лежит в основе теорем о законах сохранения.

22.2. Теорема Нётер. В работах Якоби, Клейна, Нётер было установлено, что законы сохранения для дифференциальных уравнений, получающихся из вариационного принципа, связаны с инвариантностью вариационной задачи. Якоби [1] ввел в обиход классической механики вывод законов сохранения на основе симметрии. Klein [1, 2] анализировал с этой точки зрения уравнения общей теории относительности и подчеркивал важность изучения теоретико-группового природы законов сохранения для произвольных дифференциальных уравнений. Объединив методы формального вариационного исчисления и теории групп Ли, Noether [1] указала общий алгоритм построения законов сохранения для уравнений Эйлера—Лагранжа при условии инвариантности интеграла (действия)

$$\int\limits_{\Omega} \mathscr{L}\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots\right) dx \tag{22.5}$$

для всех допустимых функций $u=u(x)$ и любой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Доказательство теоремы Нётер упрощается, если вместо интеграла (22.5) ввести в рассмотрение дифференциальную функцию (элементарное действие) $\mathscr{L}\left(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots\right)dx$.

Рассматриваются дифференциальное уравнение (17.1) и определяемое им дифференциальное многообразие $[F]$, т. е. бесконечномерное многообразие, заданное системой уравнений (17.2). Под законом сохранения для уравнения (17.1) понимается соотношение

$$D_i\,(C^i)=0, \tag{22.6}$$

где $C^i\in\mathcal{A}$, а само равенство (22.6) должно выполняться на многообразии $[F]$. Если G—группа преобразований (16.5), то ее действие на элемент объема dx задается формулой $dx'=\det\,(D_i x'^k)\,dx$, откуда $\left.\frac{\partial}{\partial a}dx'\right|_{a=0}=D_i\,(\xi^i)\,dx$. Поэтому инфинитезимальный оператор (22.1) группы G, продолженный на дополнительную независимую переменную dx, имеет вид

$$\tilde{X}=X+D_i\,(\xi^i)\,dx\,\frac{\partial}{\partial\,dx}. \tag{22.7}$$

Теорема. *Пусть $\mathscr{L}\in\mathcal{A}$, и пусть элементарное действие*

$$\mathscr{L}\,dx \tag{22.8}$$

инвариантно относительно группы Ли—Беклунда с оператором (22.7). *Тогда функции*

$$C^i=N^i\,(\mathscr{L}),\qquad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{22.9}$$

удовлетворяют закону сохранения (22.6) *для уравнений Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u^\alpha}=0, \qquad \alpha=1, \ldots, m. \tag{22.10}$$

Доказательство. По теореме 15.2.1 условие инвариантности функции (22.8) имеет вид $\tilde{X}(\mathscr{L}\,dx)=0$, т. е.

$$X(\mathscr{L})+\mathscr{L}D_i(\xi^i)=0. \tag{22.11}$$

С помощью тождества Нётер это условие переписывается в виде

$$(\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha)\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u^\alpha}+D_i N^i(\mathscr{L})=0, \tag{22.12}$$

откуда следует утверждение теоремы.

Замечание. Согласно тождеству Нётер законы сохранения получаются также тогда, когда условие инвариантности (22.11) заменяется соотношением

$$X(\mathscr{L})+\mathscr{L}D_i(\xi^i)=D_i(B^i) \tag{22.13}$$

с некоторыми $B^i \in \mathscr{A}$. В этом случае закон сохранения будет выполняться с функциями $C'^i=C^i-B^i$, где по-прежнему $C^i=N^i(\mathscr{L})$.

22.3. Инвариантность на экстремалях. Теорема 22.2 дает достаточное условие, при котором операторы Нётер переводят лагранжиан $\mathscr{L}$ в закон сохранения. Таким условием является инвариантность элементарного действия, или интеграла (22.5). Следующая теорема утверждает, что необходимым и достаточным условием является инвариантность экстремальных значений интеграла (22.5) (Ибрагимов [8], см. также Candotti, Palmieri & Vitale [1]).

Теорема. *Пусть уравнения Эйлера — Лагранжа инвариантны относительно группы G с оператором* (22.1). *Функции $C^i=N^i(\mathscr{L})$ удовлетворяют закону сохранения тогда и только тогда, когда значения элементарного действия $\mathscr{L}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u})\,dx$ в точках $(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) \in [F]$, где $F=\left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u^\alpha}\right)_{\alpha=1}^m$, инвариантны относительно группы G.*

Доказательство. Введем в рассмотрение переменную λ, на которую группа G действует по формуле

$$\lambda' \det[D_i x'^k]=\lambda. \tag{22.14}$$

Отсюда с использованием стандартного правил дифференцирования определителя находится $\left.\frac{\partial \lambda'}{\partial a}\right|_{a=0}=-\lambda D_i(\xi^i)$, так что оператор (22.1) после продолжения на λ принимает вид

$$\tilde{X}=X-\lambda D_i(\xi^i)\frac{\partial}{\partial \lambda}. \tag{22.15}$$

Инвариантность уравнений Эйлера—Лагранжа и значений элементарного действия на дифференциальном многообразии, определяемом этими уравнениями, означает тогда, что (22.10) вместе с равенством

$$\lambda = \mathscr{L}(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{s}{u}) \tag{22.16}$$

задают инвариантное многообразие группы G в пространстве переменных λ, x, u, $\underset{1}{u}$, ... Согласно теореме 15.2.2 (см. также теорему 17.1) критерий инвариантности этого многообразия записывается в виде равенств

$$X\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta u^\alpha} = 0, \qquad \tilde{X}(\lambda - \mathscr{L}) = 0,$$

которые должны выполняться на рассматриваемом многообразии. Первое из этих равенств выполнено в силу предполагаемой инвариантности уравнений Эйлера—Лагранжа*), и остается рассмотреть второе из них. С учетом формул (22.15), (22.16) и (22.1) оно переписывается в виде уравнения (22.12), которое в данном случае должно выполняться в силу уравнений (22.10) и их дифференциальных следствий. Таким образом, указанный критерий инвариантности состоит в выполнении равенства

$$D_i N^i(\mathscr{L}) = 0 \tag{22.17}$$

на дифференциальном многообразии, определяемом уравнениями Эйлера—Лагранжа, что и утверждалось в теореме.

Замечание. Теорема обобщается на произвольные дифференциальные уравнения путем замены лагранжиана на так называемый слабый лагранжиан (Ибрагимов [13, 14]). *Слабый лагранжиан* для уравнения (17.1)—это функция $\mathscr{L} \in \mathscr{A}$, удовлетворяющая условию $(\delta\mathscr{L}/\delta u^\alpha)_{[F]} = 0$; он существует для любого уравнения. Обобщенный вариант теоремы (доказательство аналогично предыдущему) состоит в следующем.

Пусть уравнение (17.1) инвариантно относительно группы G с оператором (22.1), $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, u, u_1, \ldots, u_s)$—слабый лагранжиан для (17.1). Функции $C^i = N^i(\mathscr{L})$ удовлетворяют закону сохранения (22.6) для уравнения (17.1) тогда и только тогда, когда значения функции $\mathscr{L}(x, u, u_1, \ldots, u_s)\,dx$ в точках $(x, u, u_1, \ldots, u_s) \in [F]$ инвариантны относительно группы G.

22.4. Действие присоединенной алгебры. Для применения теоремы Нётер или ее обобщений помимо группы, допускаемой рассматриваемым дифференциальным уравнением, нужно знать либо лагранжиан, либо слабый лагранжиан и проверить выполнение

*) В теореме 22.2 такое предположение не делается, потому что инвариантность уравнений Эйлера—Лагранжа является следствием инвариантности элементарного действия.

некоторых дополнительных условий инвариантности. Здесь описывается простой способ построения законов сохранения, основанный на действии присоединенной алгебры, и предыдущие теоремы дополняются утверждением о базисе законов сохранения.

Лемма. *Пусть $\overline{X}$ — канонический оператор Ли—Беклунда, допускаемый дифференциальным уравнением* (17.1) *с известным законом сохранения* (22.6). *Тогда функции*

$$C'^i = \overline{X}(C^i) \tag{22.18}$$

также удовлетворяют закону сохранения.

Доказательство. Согласно лемме 16.2.1 всякий канонический оператор (16.18) коммутирует с дифференцированием D_i, поэтому $D_i C'^i = \overline{X} D_i C^i$. Из равенств $(D_i C^i)_{[F]} = 0$, $(\overline{X}F)_{[F]} = 0$ ввиду аналитичности рассматриваемых функций следует (см. доказательство теоремы 17.1), что $(\overline{X} D_i C^i)_{[F]} = 0$.

Теорема Нётер в случае r-параметрической группы дает r-мерное пространство векторов $C = (C^i)_{i=1}^n$, удовлетворяющих закону сохранения, а в случае бесконечной группы*) — соответствующее бесконечное семейство независимых законов сохранения. Доказанная лемма позволяет выделить среди этих законов сохранения несколько фундаментальных, из которых можно получить остальные простым преобразованием (22.18). Таким образом, между законами сохранения кроме очевидной линейной зависимости можно ввести нетривиальную зависимость на основе равенства (22.18) и выделить фундаментальные законы сохранения следующим определением.

Определение. Пусть L — алгебра Ли операторов Ли—Беклунда, допускаемых дифференциальным уравнением (17.1), S — некоторое множество векторов $C = (C^i)_{i=1}^n$, удовлетворяющих закону сохранения (22.6) для уравнения (17.1). *Базисом*, или *L-базисом*, множества S называется такое минимальное подмножество этого множества, из которого S получается кратным действием (22.18) с каноническими операторами $\overline{X}$ из L и линейными комбинациями.

Возникает вопрос о построении базиса и, в частности, о его конечности. Как можно при этом использовать структуру алгебры L? Рассмотрим подробнее важный случай, когда множество S получено применением теоремы Нётер к алгебре L. Пусть L^A — присоединенная алгебра для L (§ 2.3); ее элементами являются внутренние дифференцирования ad X в L:

$$\operatorname{ad} X(Y) = [X, Y], \qquad X, Y \in L. \tag{22.19}$$

*) Здесь не рассматриваются бесконечные группы, содержащие произвольные функции от всех независимых переменных $x^1, \ldots, x^n$. Если элементарное действие инвариантно относительно такой группы, то имеются зависимости между левыми частями (22.10) (Noether [1]).

Определим действие алгебры L^A на векторы $C=(C^i)_{i=1}^n$ формулой

$$\mathrm{ad}\, X(C)=\overline{X}(C), \tag{22.20}$$

где $\overline{X}$ — канонический оператор, эквивалентный X (см. § 16.2). Согласно предыдущей лемме множество S остается при этом инвариантным. Следующее утверждение (Хамитова [1]) показывает, что действие алгебры L^A на множестве S согласовано с теоремой Нётер (для простоты считается, что L — алгебра Ли точечных преобразований).

Теорема. *Пусть операторам* X_1, $X_2 \in L$ *соответствуют векторы* C_1, $C_2 \in S$. *Тогда* $(\mathrm{ad}\, X(X_1)=X_2) \Rightarrow (\mathrm{ad}\, X(C_1)=C_2)$, *т. е. диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\mathrm{ad}\, X} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1 & \xrightarrow{\mathrm{ad}\, X} & C_2 \end{array} \tag{22.21}$$

коммутативна.

Доказательство. Из равенств (22.11), (22.12) выводится соотношение

$$\overline{X}(C_1^i)=C_2^i+D_k(\xi^i C_1^k-\xi^k C_1^i)+\xi^i(\eta_1^\alpha-\xi_1^k u_k^\alpha)\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u^\alpha},$$

где

$$\overline{X}=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots, \qquad X_1=\xi_1^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta_1^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\ldots$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть* $\{X_\nu\}$ — *минимальное множество операторов из* L, *порождающее алгебру* L (*т. е.* L *совпадает с линейной оболочкой операторов, полученных из* $\{X_\nu\}$ *кратным действием* L^A). *Тогда векторы* C_ν, *соответствующие операторам* X_ν, *образуют базис множества* S. *Если, в частности,* L — *конечно-порожденная алгебра, то множество* S *имеет конечный базис.*

22.5. Интегралы эволюционных уравнений. Для уравнения (19.1) соотношение (22.6) имеет вид

$$\frac{dh}{dt}+D\varphi=0, \tag{22.22}$$

где h, $\varphi \in \mathcal{A}$, дифференцирования D и $\frac{d}{dt}$ определены формулами (19.2) и (19.4). Функция

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} h\left(t,\ x,\ u(x,\ t),\ \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x},\ \ldots\right)dx$$

не зависит от времени t для любого решения $u(x,\ t)$ уравнения (19.1) и называется *интегралом уравнения* (19.1). При изучении интегралов можно применять изложенные в § 19 понятия и методы, пользуясь следующим утверждением (Lax [1], лемма 1.1).

Теорема. *Если h удовлетворяет равенству* (22.22), *то функция*

$$g = \frac{\delta h}{\delta u} \tag{22.23}$$

является решением уравнения

$$\frac{dg}{dt} + \sum_{i=0}^{m} (-D)^i F_i g = 0, \qquad F_i \equiv \frac{\partial F}{\partial u_i}, \tag{22.24}$$

формально сопряженного определяющему уравнению (19.5).

Доказательство. Условие (22.22) равносильно уравнению

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{dh}{dt} \equiv \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + h_* F\right) = 0. \tag{22.22'}$$

Так как выражение h_*F можно переписать в виде

$$h_* F = F\frac{\delta h}{\delta u} + D\psi \tag{22.25}$$

с некоторой функцией $\psi \in \mathcal{A}$, то равенство (22.22′) с учетом формулы (22.23) дает

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\delta}{\delta u}(Fg) = 0. \tag{22.26}$$

Функцию g можно представить в виде (22.23) тогда и только тогда, когда выполняется операторное равенство (см. Манин [1], § 7.12)

$$\sum_{i \geqslant 0} (-D)^i \cdot g_i = \sum_{i \geqslant 0} g_i D^i \equiv g_*. \tag{22.27}$$

Поэтому

$$\frac{\delta}{\delta u}(Fg) = \sum_{i \geqslant 0} (-D)^i (g_i F + F_i g) = g_* F + \sum_{i \geqslant 0} (-D)^i F_i g,$$

и уравнение (22.26) принимает вид (22.24).

Из этой теоремы следует, что эволюционные уравнения четного порядка не могут иметь бесконечное множество интегралов с неограниченным ростом порядка входящих в них производных u_i (Abellanas & Galindo [1], см. также Капцов [1]). Достаточно проверить, что уравнение (22.24) не имеет решений $g(t, x, u, u_1, \ldots, u_s)$ порядка $s > m$, если m четно. Действительно, при $s > m$ старший член левой части (22.24) равен $2g_s F_m u_{m+s}$, поэтому уравнение (22.24) дает $g_s = 0$. Следовательно, для уравнения (19.1) порядка $m = 2n$ плотность закона сохранения (22.22) (т. е. функция h, рассматриваемая с точностью до слагаемых вида $D\psi$) не зависит от производных порядка $> n$. Утверждение можно усилить, но в дальнейшем это не будет использовано (см. Abellanas & Galindo [1]).

Лемма 22.4 в случае эволюционных уравнений утверждает, что для любых решений f и g уравнений (19.5) и (22.24) соответственно их произведение fg удовлетворяет (22.22). Действительно, для $\overline{X}=f\frac{\partial}{\partial u}+\ldots$ имеем, используя (22.25), (22.23),

$$\overline{X}h=h_*f=f\frac{\delta h}{\delta u}+D\psi=fg\,(\mathrm{mod}\,D\psi). \qquad (22.28)$$

§ 23. Примеры

23.1. Движение в пространстве де Ситтера. Свободная частица в 4-мерном пространстве-времени V_4 движется по геодезической. Лагранжиан частицы с массой m, движущейся в пространстве V_4 с метрической формой (6.4), равен

$$\mathscr{L}=-mc\sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j}, \qquad (23.1)$$

где c — скорость света, x^i, $i=1,\ldots,4$, — дифференциальные переменные, $\dot{x}^i$ — их производные по независимой переменной, в качестве которой выбирается произвольный параметр σ, так что траекторией частицы будет кривая $x^i=x^i(\sigma)$, $i=1,\ldots,4$, в V_4. Элементарное действие $\mathscr{L}\,d\sigma$ инвариантно относительно группы изометрических движений в V_4. Поэтому применима теорема Нётер, в которой в качестве оператора (22.1) участвуют операторы

$$X=\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

с координатами η^i, удовлетворяющими уравнениям Киллинга (7.3). В качестве параметра σ удобно выбрать длину s кривой. Тогда $g_{kl}(x)\dot{x}^k\dot{x}^l=1$, так что

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^i}=-mc\,(g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l)^{-1/2}g_{ij}\dot{x}^j=-mcg_{ij}\dot{x}^j.$$

С учетом этого равенства по формуле (22.9) получается следующее выражение для вычисления интегралов движения:

$$I=mcg_{ij}\dot{x}^i\eta^j. \qquad (23.2)$$

Пространство де Ситтера — это пространство-время V_4 постоянной кривизны. Так как оно имеет 10-параметрическую группу изометрий (§ 8.2), то имеется 10 линейно независимых интегралов движения. Их вычисление удобно проводить в системе координат, в которой метрическая форма имеет вид (8.14), т. е.

$$ds^2=\theta^{-2}(c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2), \qquad (23.3)$$

где

$$\theta=1+\frac{K}{4}(c^2t^2-x^2-y^2-z^2), \qquad K=\mathrm{const}.$$

Пусть $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, $x^4=t$, латинские индексы i, j принимают значения от 1 до 4, а греческие μ, ν — от 1 до 3. Для трехмерных пространственных векторов $\boldsymbol{x}=(x^1, x^2, x^3)$, $\boldsymbol{v}=(v^1, v^2, v^3)$ используются обычные обозначения $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}$ для скалярного и векторного произведений. Так как в силу (23.3) $ds=\frac{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}|^2}}{\theta}dt$, компоненты 4-скорости $\dot{x}^i=dx^i/ds$ связаны с компонентами $v^\mu=dx^\mu/dt$ физической скорости $\boldsymbol{v}$ соотношениями

$$\dot{x}^\mu=\frac{\theta v^\mu}{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}|^2}}, \qquad \dot{x}^4=\frac{\theta}{\sqrt{c^2-|\boldsymbol{v}|^2}}. \tag{23.4}$$

Операторы группы изометрий указаны в формулах (8.16); выпишем соответствующие им интегралы (23.2).

В классической и релятивистской механике инвариантность относительно переносов времени и пространственных координат приводит к законам сохранения энергии и импульса соответственно. В пространстве де Ситтера переносы заменяются однопараметрическими группами, порожденными операторами X_4 и X_μ, $\mu=1, 2, 3$, из (8.16). Соответствующие им интегралы движения также будут называться энергией и импульсом.

Оператор X_4 имеет координаты

$$\eta^\mu=\frac{K}{2}x^4x^\mu, \qquad \eta^4=\frac{1}{c^2}\left(\theta+\frac{K}{2}|\boldsymbol{x}|^2\right).$$

Подстановкой этих функций η^j в (23.2) с учетом соотношений (23.4) получается следующее выражение для энергии частицы, свободно движущейся в пространстве де Ситтера:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}}\left[1+\frac{K}{2\theta}(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{x}\right]. \tag{23.5}$$

Операторам X_μ с координатами

$$\eta^i_\mu=(\theta-2)\,\delta^{i\mu}+\frac{K}{2}x^ix^\mu$$

соответствует импульс

$$\boldsymbol{P}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}}\left[\left(\frac{2}{\theta}-1\right)\boldsymbol{v}+\frac{K}{2\theta}(c^2t-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{x}\right]. \tag{23.6}$$

Интегралы, соответствующие операторам вращения $X_{\mu\nu}$, образуют вектор углового момента, который с учетом формулы (23.6) и тождества $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}=0$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{2-\theta}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{P}). \tag{23.7}$$

Инвариантность относительно преобразований Лоренца в задаче N тел в релятивистской механике приводит к теореме о движении центра инерции. Аналогично обстоит дело и в пространстве де Ситтера. При $N=1$ эта теорема равносильна закону сохранения $d\boldsymbol{Q}/dt=0$ для вектора

$$\boldsymbol{Q}=\frac{m}{\theta\sqrt{1-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}}(\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{v}). \tag{23.8}$$

Легко проверить, что оператор X_{12} (или любой из операторов вращения $X_{\mu\nu}$) порождает 10-мерную алгебру с базисом (8.16). Поэтому в качестве базиса интегралов (23.5)—(23.8) можно взять одну из компонент вектора углового момента (23.7) (см. следствие теоремы 22.4). Это означает, что все эти интегралы можно получить из одной компоненты вектора $\boldsymbol{M}$ действием операторов (8.16), продолженных на первые производные $\dot{x}^i$.

23.2. Уравнение $u_{tt}+\Delta^2 u=0$. На этом примере иллюстрируется применение формулы (22.9) к лагранжианам, зависящим от производных порядка >1. Для $\mathscr{L}=\mathscr{L}(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u})$ формулы (22.9), (22.3) дают

$$C^i=\mathscr{L}\xi^i+(\eta^\alpha-\xi^k u_k^\alpha)\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i^\alpha}-D_j\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{ij}^\alpha}\right)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{ij}^\alpha}D_j(\eta^\alpha-\xi^k u_k^\alpha). \tag{23.9}$$

Рассматриваемое здесь уравнение поперечного колебания пластинок имеет лагранжиан

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}u_t^2-(\Delta u)^2, \quad \text{где } \Delta=D_x^2+D_y^2. \tag{23.10}$$

Для однопараметрической группы переносов $t'=t+a$ применение формулы (23.9) к лагранжиану (23.10) дает закон сохранения

$$D_t(u_t^2+(\Delta u)^2)+\operatorname{div}(2u_t\nabla(\Delta u)-\Delta u\nabla u_t)=0.$$

Инвариантность по отношению к группе вращений в плоскости (x, y) приводит к закону сохранения

$$D_t(\omega u_t)+\operatorname{div}(\omega\nabla(\Delta u)-\Delta u\nabla\omega+\mathscr{L}\lambda)=0,$$

где $\omega=xu_y-yu_x$, $\lambda=(y, -x)$. Элементарное действие инвариантно также относительно 2-параметрической группы переносов $x'^i=x^i+a^i$, $i=1, 2$, где $x^1=x$, $x^2=y$. Соответствующие законы сохранения можно записать в виде

$$D_t(\tau^i)+D_j(\gamma^{ij})=0, \qquad i=1, 2,$$

где $\tau^i=u_tu_i$, $\gamma^{ij}=u_i\Delta u_j-u_{ij}\Delta u$, $i, j=1, 2$.

23.3. Нестационарное околозвуковое течение газа. Уравнение

$$2u_{tx}+u_xu_{xx}-u_{yy}=0, \tag{23.11}$$

описывающее нестационарное потенциальное течение газа с околозвуковыми скоростями, имеет лагранжиан

$$\mathcal{L} = -u_t u_x - \frac{1}{6} u_x^3 + \frac{1}{2} u_y^2 \tag{23.12}$$

и допускает бесконечную группу точечных преобразований с каноническим оператором

$$\overline{X} = f\frac{\partial}{\partial u} + \ldots, \tag{23.13}$$

где

$$f = 3\alpha u_t + (\alpha' x + \alpha'' y^2 + \beta' y + \gamma) u_x + (2\alpha' y + \beta) u_y + \alpha' u - \alpha'' x^2 - \\ - 2\alpha''' x y^2 + \frac{1}{3}\alpha^{(4)} y^4 - 2\beta'' x y - \frac{2}{3}\beta''' y^3 - 2\gamma' x - 2\gamma'' y^2 + \sigma y + \tau. \tag{23.14}$$

Здесь α, β, γ, σ, τ — произвольные функции от t, $\alpha' = d\alpha/dt$, ... Максимальная группа, допускаемая уравнением (23.11), получается добавлением растяжений $t \mapsto a^2 t$, $x \mapsto x$, $y \mapsto ay$, $u \mapsto a^{-2}u$, которым не соответствует закон сохранения.

Оператор (23.13) может служить иллюстрацией к замечанию 22.2. Например, пусть в (23.14) отлична от нуля только одна функция σ. Тогда оператор (23.13) (продолженный на первые производные) равен

$$\overline{X}_\sigma = \sigma y \frac{\partial}{\partial u} + \sigma' y \frac{\partial}{\partial u_t} + \sigma \frac{\partial}{\partial u_y}$$

и удовлетворяет соотношению вида (22.13) (в данном случае $D_i \xi^i = 0$):

$$\overline{X}^\sigma (\mathcal{L}) = D_x(-\sigma' y u) + D_y(\sigma u).$$

Соотношение (22.13) выполняется и в общем случае, поэтому уравнение (23.11) имеет бесконечное семейство законов сохранения

$$D_t(C^1) + D_x(C^2) + D_y(C^3) = 0, \tag{23.15}$$

зависящее от пяти произвольных функций $\alpha(t)$, ..., $\tau(t)$. Все эти законы сохранения можно выписать с помощью формул (22.9), (22.13), однако проще воспользоваться теоремой 22.4 и ее следствием. Для этого сначала нужно найти минимальное множество элементов, порождающее бесконечномерную алгебру L операторов (23.13), (23.14). Построив присоединенную алгебру*) L^A, нетрудно заметить, что алгебра L порождена одним элементом, в качестве которого можно взять оператор группы переносов

*) Для вычисления коммутаторов удобнее перейти от канонического оператора (23.13) к эквивалентному оператору группы точечных преобразований $X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial u}$ по формуле (16.17).

$t \mapsto t+a$,

$$X=\frac{\partial}{\partial t}, \tag{23.16}$$

соответствующий функции f с $\alpha=\text{const}$, $\beta=\gamma=\sigma=\tau=0$. Следовательно, теорему Нётер достаточно применить к оператору (23.16), а затем воспользоваться леммой 22.4. Когда лагранжиан не зависит от производных высшего порядка, формула (22.9) принимает вид (см. (23.9))

$$C^i=\mathscr{L}\xi^i+(\eta^\alpha-\xi^k u_k^\alpha)\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i^\alpha}. \tag{23.17}$$

Применив эту формулу к оператору (23.16), получаем вектор C_0:

$$C_0^1=\frac{1}{2}u_y^2-\frac{1}{6}u_x^3, \qquad C_0^2=u_t^2+\frac{1}{2}u_x^2, \qquad C_0^3=-u_t u_y,$$

задающий базис законов сохранения для уравнения (23.11). Теперь осталось подействовать на этот вектор оператором (23.13). Ограничимся вычислением плотности (т. е. C^1) законов сохранения (23.15), опуская несущественные слагаемые вида $D_x(\varphi)+D_y(\psi)$. Функциям σ и τ соответствует тривиальная плотность, поэтому в (23.14) берется $\sigma=\tau=0$. Окончательно получается следующее значение плотности общего закона сохранения:

$$C^1=-\frac{1}{2}\alpha u_x^3+(\alpha'x+\alpha''y^2+\beta'y+\gamma)u_x^2+\frac{3}{2}\alpha u_y^2+(2\alpha'y+\beta)u_x u_y+$$
$$+\Big(\alpha'u-\alpha''x^2-2\alpha'''xy^2-\frac{1}{3}\alpha^{(4)}y^4-2\beta'''xy-\frac{2}{3}\beta'''y^3-2\gamma'x-$$
$$-2\gamma''y^2\Big)u_x+2(\alpha''x+\alpha'''y^2+\beta''y+\gamma')u.$$

Аналогично рассматривается уравнение

$$2u_{tx}+u_x u_{xx}-u_{yy}-u_{zz}=0 \tag{23.18}$$

для пространственного околозвукового течения газа. Функция Лагранжа для него имеет вид

$$\mathscr{L}=-u_t u_x-\frac{1}{6}u_x^3+\frac{1}{2}(u_y^2+u_z^2), \tag{23.19}$$

а максимальная группа точечных преобразований определяется бесконечномерной алгеброй с базисом

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2=5t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+3y\frac{\partial}{\partial y}+3z\frac{\partial}{\partial z}-3u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_3=t\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial x}-3u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},$$
$$X_5=\frac{5}{2}t^2\frac{\partial}{\partial t}+\Big(tx+\frac{3}{2}(y^2+z^2)\Big)\frac{\partial}{\partial x}+3ty\frac{\partial}{\partial y}+3tz\frac{\partial}{\partial z}+(x^2-3tu)\frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_0=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\alpha(t)\frac{\partial}{\partial y}+\beta(t)\frac{\partial}{\partial z}+\eta\frac{\partial}{\partial u},$$

где

$$\xi=\alpha'(t)\,y+\beta'(t)\,z+\gamma(t),$$

$$\eta=2xD_t(\xi)+(y^2+z^2)\,D_t^2(\xi)+\frac{2}{3}D_t^3(\alpha y^3+\beta z^3)+\varphi(t,\ y,\ z),$$

α, β, γ — произвольные функции от t, $\varphi(t,\ y,\ z)$ — решение уравнения Лапласа $(D_y^2+D_z^2)\,\varphi=0$, зависящее от t как от параметра. Уравнение (23.18) также имеет бесконечное семейство законов сохранения

$$D_t(C^1)+D_x(C^2)+D_y(C^3)+D_z(C^4)=0.$$

В данном случае базис образуют два вектора C и C', соответствующие операторам X_1 и X_4:

$$C^1=\mathscr{L}+u_tu_x,\quad C^2=u_t\left(u_t+\frac{1}{2}u_x^2\right),\quad C^3=-u_tu_y,\quad C^4=-u_tu_z;$$

$$C'^1=\omega u_x,\ C'^2=\omega\left(u_t+\frac{1}{2}u_x^2\right),\ C'^3=-\omega u_y-z\mathscr{L},\ C'^4=-\omega u_z+y\mathscr{L}.$$

Здесь $\mathscr{L}$ — лагранжиан (23.19), $\omega=zu_y-yu_z$.

23.4. Короткие волны. Система уравнений

$$u_y-2v_t-2\,(v-x)\,v_x-2kv=0,\qquad k=\text{const},$$
$$v_y+u_x=0,$$

описывающая распространение «коротких волн» в газовой динамике, заменой $u=w_y$, $v=-w_x$ сводится к уравнению второго порядка

$$2w_{tx}-2\,(x+w_x)\,w_{xx}+w_{yy}+2kw_x=0 \tag{23.20}$$

с лагранжианом

$$\mathscr{L}=\left(w_tw_x-\frac{1}{3}w_x^3-xw_x^2+\frac{1}{2}w_y^2\right)e^{2\,(k+1)\,t}. \tag{23.21}$$

Уравнение (23.20) допускает бесконечную группу, инфинитезимальный оператор которой эквивалентен каноническому оператору Ли — Беклунда

$$\overline{X}=f\frac{\partial}{\partial w}+\ldots \tag{23.22}$$

с координатой

$$f=aw_t+(bx+\alpha'y-\beta)\,w_x+\left(\frac{b}{2}y-\alpha\right)w_y-2bw+(\alpha''+\alpha')\,xy-$$
$$-(\beta'+\beta)\,x-\frac{y^3}{3}d_k(\alpha')+y^2d_k(\beta)+\sigma y+\tau, \tag{23.23}$$

где a, $b=\text{const}$, α, β, σ, τ — произвольные функции от t, $\alpha'=d\alpha/dt$, $\ldots$, $d_k=\frac{d^2}{dt^2}+(k+1)\frac{d}{dt}+k$. Указанная группа допускается при произвольном значении k, хотя по физическому содержанию задачи постоянная k принимает только значения 0 или 1 (для плоских и осесимметрических волн соответственно). Интересно отметить, что в результате групповой классификации уравнений (23.20) с произвольным параметром k выделяются особые значения $k=2$ и $k=1/2$, при которых происходит расширение группы: к (23.23) добавляется функция (Хамитова [1])

$$\begin{aligned} g = 9\gamma w_t &+ [(3\gamma' - 4(k+1)\gamma)x - (3\gamma'' - (k+1)\gamma')y^2]w_x + \\ &+ (6\gamma' - 2(k+1)\gamma)yw_y + (3\gamma' + 8(k+1)\gamma)w + \\ &+ (3\gamma'' + (5-4k)\gamma')\frac{x^2}{2} - (3\gamma''' + (2-k)\gamma'' - (k+1)\gamma')xy^2 + \\ &+ (3\gamma^{(4)} + 2(k+1)\gamma''' - (k^2-k+1)\gamma'' - k(k+1)\gamma')\frac{y^4}{6}, \end{aligned} \tag{23.24}$$

где γ — произвольная функция от t.

Рассматриваемое уравнение имеет бесконечное семейство законов сохранения. Как и в случае уравнения (23.11), функциям σ и τ из (23.23) соответствует закон сохранения с тривиальной плотностью, поэтому можно положить $\sigma = \tau = 0$. Кроме того, для применимости теоремы Нётер постоянные a и b должны удовлетворять условию $4(k+1)a + 9b = 0$. Пусть это условие выполнено, а все произвольные функции от t в формуле (23.23) выбраны равными нулю, т. е. оператор (23.22) имеет координату

$$f_0 = -9w_t + 4(k+1)xw_x + 2(k+1)yw_y - 8(k+1)w. \tag{23.25}$$

Его можно записать в виде оператора однопараметрической группы точечных преобразований

$$X_0 = 9\frac{\partial}{\partial t} - 4(k+1)x\frac{\partial}{\partial x} - 2(k+1)y\frac{\partial}{\partial y} - 8(k+1)w\frac{\partial}{\partial w} \tag{23.26}$$

и по теореме Нётер построить соответствующий ему закон сохранения с вектором (в обозначениях (23.15))

$$\begin{aligned} &C^1 = f_0\varepsilon w_x + 9\mathscr{L}, \quad C^2 = f_0\varepsilon(w_t - w_x^2 - 2xw_x) - 4(k+1)\mathscr{L}, \\ &C^3 = f_0\varepsilon w_y - 2(k+1)y\mathscr{L}, \end{aligned} \tag{23.27}$$

где $\mathscr{L}$ — лагранжиан (23.21), f_0 — функция (23.25), $\varepsilon = e^{2(k+1)t}$. Этим решена задача построения законов сохранения для уравнения (23.20), так как оператор (23.26) порождает алгебру, состоящую из операторов вида (23.22)—(23.24). Следовательно, вектор (23.27) задает базис законов сохранения.

§ 24. Группа Лоренца

24.1. Законы сохранения в релятивистской механике. Рассматривается свободное движение частицы (материальной точки) в пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = c^2(dx^4)^2 - \sum_{\mu=1}^{3}(dx^\mu)^2. \tag{24.1}$$

Группой изометрий в этом пространстве является 10-параметрическая группа Лоренца. Операторы

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{\mu\nu} = x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \qquad (\mu < \nu),$$
$$X_{\mu 4} = x^4 \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{c^2} x^\mu \frac{\partial}{\partial x^4}, \qquad i = 1, \ldots, 4; \ \mu, \ \nu = 1, 2, 3, \tag{24.2}$$

образуют базис алгебры Ли L_{10} группы Лоренца.

Законы сохранения были выведены в § 23.1; в приведенных там формулах в данном случае нужно положить $K=0$. В результате получаются следующие релятивистские интегралы движения свободной частицы:

энергия

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}},$$

импульс

$$\boldsymbol{P}_0 = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}},$$

момент импульса

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{P}_0,$$

а вектор (23.8) переходит в

$$\boldsymbol{Q}_0 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}} (\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}).$$

На этом примере легко проследить, как находится и используется базис законов сохранения для уравнений, основанных на группе Лоренца.

Соотношения

$$\mathrm{ad}\, X_i (X_1) = 0, \quad \mathrm{ad}\, X_{1i} (X_1) = X_i, \quad \mathrm{ad}\, X_{ij} (X_1) = 0 \qquad (i, j \neq 1)$$

показывают, что присоединенная алгебра L_{10}^A переводит оператор X_1 в подпространство из L_{10}, натянутое на операторы X_2, X_3, X_4, и $(L_{10}^A)^2 (X_1) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Так как здесь вместо X_1 можно взять любой из операторов переноса X_i, повторное действие алгебры L_{10}^A не выводит из $\{X_1, \ldots, X_4\}$. Таким образом, для каждого $i = 1, \ldots, 4$ и любого целого положительного числа $l \geqslant 2$

$$(L_{10}^A)^l (X_i) = \{X_1, \ldots, X_4\}. \tag{24.3}$$

Далее, $L_{10}^A (X_{12}) = \{X_1, X_2, X_{13}, X_{23}, X_{14}, X_{24}\}$, поэтому

$$(L_{10}^A)^2 (X_{12}) = L_{10}. \tag{24.4}$$

Здесь вместо X_{12} можно взять любой из операторов X_{ij}. Следовательно, в качестве элемента, порождающего алгебру L_{10}, можно выбрать один из операторов X_{ij}; пусть это будет X_{12}. Из теоремы 22.4 следует

Предложение. *Величина*

$$M_0^3 = mc\,(x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1)$$

образует базис (L_{10}-базис) релятивистских интегралов движения свободной частицы.

Согласно (24.4) интегралы E_0, $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{M}_0$, $\boldsymbol{Q}_0$ получаются из M_0^3 двукратным действием алгебры L_{10}^A. Так как операторы (24.2) имеют канонический вид (независимой переменной является параметр s), а величина M_0^3 зависит от первых производных, то для применения формулы (22.20), определяющей действие L_{10}^A на интегралы движения, операторы (24.2) нужно продолжить на $\dot{x}^i$. Получим, например, выражение для энергии. Оператор X_{14} после продолжения на производные по формуле (16.19) имеет вид

$$X_{14}' = x^4\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{c^2}x^1\frac{\partial}{\partial x^4} + \dot{x}^4\frac{\partial}{\partial \dot{x}^1} + \frac{1}{c^2}\dot{x}^1\frac{\partial}{\partial \dot{x}^4}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ad} X_{14}(M_0^3) = X_{14}(M_0^3) = mc\,(x^4\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^4) = -Q_0^2;$$

в последнем равенстве использованы соотношения (23.4) $c\dot{\theta} = 1$ и определение вектора $\boldsymbol{Q}_0$. Действие оператора X_2, продолжение которого совпадает с ним самим, дает

$$X_2\,(Q_0^2) = mc\dot{x}^4 = \frac{1}{c^2}E_0.$$

Таким образом, энергия (с точностью до постоянного множителя) получается из M_0^3 последовательным применением преобразований $\operatorname{ad} X_{14}$ и $\operatorname{ad} X_2$. Так же просто получаются остальные интегралы движения.

24.2. Нелинейное волновое уравнение. В релятивистской механике в качестве базиса можно было бы взять также одну из компонент вектора $\boldsymbol{Q}_0$. Этим произвол в выборе базиса исчерпывается: энергия и импульс не образуют базис в силу (24.3). Ситуация изменяется при расширении допускаемой группы. Рассмотрим, например, нелинейное волновое уравнение в пространстве Минковского (пусть $c = 1$):

$$u_{tt} - \Delta u + au^3 = 0, \qquad a = \text{const}, \tag{24.5}$$

где $\Delta u = \sum_{\mu=1}^{3} u_{\mu\mu}$. Это уравнение конформно-инвариантно (теорема 10.3): оно допускает 15-параметрическую группу, инфинитезимальные операторы которой получаются добавлением к базису (24.2) алгебры L_{10} (при $c = 1$) следующих операторов собственно конформных преобразований:

$$Y_\mu=(2x^\mu x^i+(t^2-|\boldsymbol{x}|^2)\delta^{\mu i})\frac{\partial}{\partial x^i}-2x^\mu u\frac{\partial}{\partial u},\quad \mu=1,\ 2,\ 3,$$
$$Y_4=2tx^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}+(t^2+|\boldsymbol{x}|^2)\frac{\partial}{\partial x^4}-2tu\frac{\partial}{\partial u},\tag{24.6}$$
$$Z=x^i\frac{\partial}{\partial x^i}-u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Здесь $|\boldsymbol{x}|^2=\sum\limits_{\mu=1}^{3}(x^\mu)^2$, двойное обозначение $t\equiv x^4$ используется для удобства записи. Пусть L_{15} — алгебра Ли с базисом (24.2), (24.6), L_{15}^A — ее присоединенная алгебра. Соотношение (24.4) обобщается в виде следующего утверждения.

Предложение. *Пусть* $X\in L_{15}$, $X\neq 0$. *Тогда*

$$(L_{15}^A)^2(X)=L_{15}.\tag{24.7}$$

Следовательно, для конформно-инвариантных уравнений все законы сохранения равноправны: любой из них образует базис. В частности, для рассматриваемого здесь нелинейного волнового уравнения в качестве такого фундаментального закона сохранения выберем закон сохранения энергии, являющийся результатом инвариантности относительно переноса t. Законы сохранения будем писать в виде

$$D_t(\rho)+\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\tag{24.8}$$

где ρ — плотность, $\boldsymbol{H}=(H^1,\ H^2,\ H^3)$, $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=D_\mu H^\mu$. Уравнение (24.5) имеет лагранжиан

$$\mathcal{L}=|\nabla u|^2-u_t^2+\frac{a}{2}u^4,$$

где $\nabla u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$, и формула (23.17) дает

$$H^\mu=2(\eta-\xi^i u_i)u_\mu+\xi^\mu\mathcal{L},$$
$$\rho=-2(\eta-\xi^i u_i)u_t+\xi^4\mathcal{L}.\tag{24.9}$$

Отсюда подстановкой координат $\xi^i=\delta^{i4}$, $\eta=0$ находится вектор

$$\boldsymbol{H}_0=-2u_t\nabla u,\quad \rho_0=u_t^2+|\nabla u|^2+\frac{a}{2}u^4,\tag{24.10}$$

определяющий закон сохранения энергии. Остальные законы сохранения можно получать по лемме 22.4, однако в данном случае проще пользоваться формулой (24.9). Рассмотрим, например, операторы Z и Y_4. Элементарное действие инвариантно относительно группы растяжений с оператором Z, и по формуле (24.9) находится плотность

$$\rho_1=t\rho_0+2u_t(u+\boldsymbol{x}\cdot\nabla u)$$

соответствующего закона сохранения, где ρ_0 — плотность энергии, определенная в (24.10). Преобразования с оператором Y_4 не сохраняют элементарное действие, но в данном случае выполняется условие (22.13). По формулам (22.13) и (24.9) находится следующая плотность закона сохранения:

$$\rho_2 = 2t\rho_1 + (|\boldsymbol{x}|^2 - t^2)\rho_0 - 2u^2,$$

где ρ_0 и ρ_1 — определенные выше плотности.

Другим классическим представителем конформо-инвариантных уравнений являются уравнения Максвелла. Соответствующие законы сохранения для них построил Bessel-Hagen [1].

24.3. Уравнение Дирака. Уравнение Дирака

$$\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m\psi = 0 \tag{24.11}$$

вместе с сопряженным уравнением

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k - m\tilde{\psi} = 0 \tag{24.11'}$$

можно получить из вариационного принципа с лагранжианом

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left\{\tilde{\psi}\left(\gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} + m\psi\right) - \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x^k}\gamma^k - m\tilde{\psi}\right)\psi\right\}. \tag{24.12}$$

Здесь ψ — комплексный четырехмерный вектор-столбец, γ^k — матрицы Дирака

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а $\tilde{\psi}$ — вектор-строка, определенная формулой

$$\tilde{\psi} = \bar{\psi}^{\mathrm{T}}\gamma^4, \tag{24.13}$$

где $\bar{\psi}$ — комплексно сопряженный вектор для ψ, символ $^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование. Независимыми переменными являются пространственные переменные x^μ, $\mu = 1, 2, 3$, и $x^4 = ict$.

Уравнение Дирака может служить примером к теореме 22.3. Рассмотрим для этого простое преобразование, состоящее в прибавлении к функции ψ произвольного решения уравнения Дирака. Такие преобразования (выражающие принцип суперпозиции) образуют бесконечную группу с инфинитезимальным оператором

$$X_\varphi = \varphi^k(x)\frac{\partial}{\partial\psi^k} + \tilde{\varphi}_k(x)\frac{\partial}{\partial\tilde{\psi}_k}, \tag{24.14}$$

где векторы $\varphi(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ с компонентами $\varphi^k(x)$ и $\tilde{\varphi}_k(x)$ связаны формулой (24.13) и удовлетворяют уравнениям (24.11) и (24.11′). Условия теоремы 22.3 выполнены, и оператору (24.14) соответствует закон сохранения с вектором C_φ, имеющим компоненты

$$C_\varphi^k = \tilde{\psi}\gamma^k\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)\gamma^k\psi. \tag{24.15}$$

Легко видеть, что элементарное действие (22.8) с лагранжианом (24.12) не инвариантно относительно преобразований

$$\psi' = \psi + a\varphi(x), \quad \tilde{\psi}' = \tilde{\psi} + a\varphi(x),$$

соответствующих оператору (24.14). Аналогичное утверждение о свойствах инвариантности элементарного действия справедливо также для группы растяжений с оператором

$$X = \psi^k\frac{\partial}{\partial\psi^k} + \tilde{\psi}_k\frac{\partial}{\partial\tilde{\psi}_k}, \tag{24.16}$$

но для этого оператора формула (22.9) дает нулевой вектор C.

Бесконечная группа с операторами (24.14) и (24.16) образует инвариантную подгруппу полной группы, допускаемой уравнением Дирака. В дальнейшем, говоря о группе, допускаемой уравнениями (24.11), (24.11′), будем иметь в виду факторгруппу по этой инвариантной подгруппе. Кроме того, условимся указывать преобразования только для переменных x и ψ, подразумевая, что $\tilde{\psi}$ преобразуется в соответствии с формулой (24.13), т. е. $\tilde{\psi}' = \bar{\psi}'^{\mathrm{T}}\gamma^4$.

Уравнение (24.11) инвариантно относительно группы Лоренца, а если масса m равна нулю, то оно конформно-инвариантно (Dirac [1], см. также Pauli [1]). Соответствующий инфинитезимальный оператор можно записать в виде

$$X = X^0 + (S\psi)^k\frac{\partial}{\partial\psi^k}, \tag{24.17}$$

где $X^0 = \xi^k(x)\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ пробегает множество операторов (8.25), если $m=0$, и совпадает с операторами X_l, X_{jl} группы Лоренца, если $m \neq 0$, а

$$S = \frac{1}{8}\sum_{k,l=1}^{4}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}(\gamma^k\gamma^l - \gamma^l\gamma^k - 3\delta^{kl}). \tag{24.18}$$

К этим преобразованиям нужно добавить фазовые преобразования

$$\psi' = \psi e^{-ia} \tag{24.19}$$

при произвольной массе и еще две однопараметрические группы,

$$\psi' = \psi e^{ia\gamma^5}, \quad \gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \tag{24.20}$$

$$\psi' = \psi e^{-a\gamma^5} \tag{24.21}$$

при $m=0$. Указанные преобразования образуют максимальную группу точечных преобразований для уравнения Дирака. Если же вместо (24.11) рассматривать систему уравнений (24.11), (24.11′), то допускаемая группа может расшириться за счет преобразований, в которых преобразованные переменные x', ψ' зависят от $\tilde{\psi}$. Pauli [2] нашел две однопараметрические группы таких преобразований,

$$\psi' = \psi\cos a + \gamma^3\gamma^1\tilde{\psi}^{\mathrm{T}}\sin a \tag{24.22}$$

и

$$\psi' = \psi\cos a + i\gamma^3\gamma^1\tilde{\psi}^{\mathrm{T}}\sin a, \tag{24.23}$$

которые оставляют систему (24.11), (24.11′) инвариантной, если $m=0$. 4-параметрическая группа преобразований (24.20)—(24.23) называется *группой Паули*. Если к группе Паули добавить однопараметрические группы преобразований

$$\psi' = \psi\,\mathrm{ch}\,a + \gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{sh}\,a \tag{24.24}$$

и

$$\psi' = \psi\,\mathrm{ch}\,a + i\gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{sh}\,a, \tag{24.25}$$

которые допускаются при произвольном значении массы m, то указанные преобразования образуют максимальную группу точечных преобразований, допускаемую системой (24.11), (24.11′) (Ибрагимов [5]). Итак, максимальная группа при $m=0$ задается формулами (24.17)—(24.25), а при $m \neq 0$ ее образуют группа Лоренца и преобразования (24.19), (24.24), (24.25).

Все перечисленные преобразования удовлетворяют условию инвариантности значений элементарного действия на экстремалях, так что применима теорема 22.3. Однако для преобразований (24.21)—(24.23) группы Паули соответствующие векторы (22.9) равны нулю, и остаются перечисленные ниже нетривиальные законы сохранения для уравнения Дирака. При записи этих законов сохранения тривиальные слагаемые, кратные $\mathscr{L}$, опускаются.

Операторам (24.17) с X^0, равным X_l и X_{jl}, соответствуют тензор энергии-импульса P_l^k и тензор момента импульса M_{jl}^k:

$$P_l^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x^l}\gamma^k\psi - \tilde{\psi}\gamma^k\frac{\partial\psi}{\partial x^l}\right),$$

$$M_{jl}^k = x^l P_j^k - x^j P_l^k + \frac{1}{4}\left[\tilde{\psi}(\gamma^k\gamma^j\gamma^l + \gamma^j\gamma^l\gamma^k)\psi\right].$$

При $m=0$ к ним добавляются тензоры

$$A_l^k = |x|^2 P_l^k + 2x^j M_{jl}^k, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^{4}(x^j)^2,$$

$$B^k = x^l P_l^k,$$

соответствующие операторам Y_l и Z конформных преобразований. Инвариантность относительно преобразований (24.19), (24.20), (24.24) и (24.25) приводит к законам сохранения с векторами

$$C_1^k = i\tilde{\psi}\gamma^k\psi,$$
$$C_2^k = i\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^5\psi,$$
$$C_3^k = \frac{1}{2}(\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} - \psi^{\mathrm{T}}\gamma^4\gamma^2\gamma^k\psi),$$
$$C_4^k = \frac{i}{2}(\tilde{\psi}\gamma^k\gamma^4\gamma^2\tilde{\psi}^{\mathrm{T}} + \psi^{\mathrm{T}}\gamma^4\gamma^2\gamma^k\psi).$$

Дополнив равенства (24.4) и (24.7) коммутационными соотношениями между инфинитезимальными операторами преобразований (24.19), (24.20), (24.24) и (24.25), можно показать (см. Хамитова [1]), что при $m \neq 0$ базис законов сохранения определяют векторы M_{12}^k и C_1^k, а при $m = 0$ — векторы P_4^k, C_1^k и C_2^k.

§ 25. Группа Галилея

25.1. Свободное движение частицы. Взаимосвязь законов сохранения в классической механике определяется структурой группы Галилея. Рассмотрим сначала простейший пример — свободное движение материальной точки, т. е. уравнение

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = 0, \tag{25.1}$$

где m — масса частицы, $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$, точкой обозначается дифференцирование по t. Операторы

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad X_{\mu\nu} = x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$
$$X_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_\mu = t\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \tag{25.2}$$

образуют базис алгебры Ли L группы Галилея, допускаемой уравнением (25.1).

При переходе от группы Лоренца к группе Галилея (формально $c \to \infty$) равенства (24.3), (24.4) переходят в следующие:

$$(L^A)^l(X_i) = \{X_\mu\}, \quad (L^A)^l(Y_1) = \{X_\mu, Y_\mu\}, \tag{25.3}$$
$$(L^A)^l(X_{12}) = \{X_\mu, X_{\mu\nu}, Y_\mu\}, \qquad l \geqslant 2. \tag{25.4}$$

Следовательно, алгебру L порождают два элемента, одним из которых является X_4, а в качестве второго можно взять X_{12}. Поэтому фундаментальными интегралами движения частицы в классической механике являются энергия

$$E = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 \tag{25.5}$$

и момент импульса, причем достаточно взять одну компоненту

$$M^3 = m(x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1). \tag{25.6}$$

Равенство (25.4) показывает, что из M^3 последовательным действием присоединенной алгебры можно получить импульс

$$\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{25.7}$$

момент импульса

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{P} \tag{25.8}$$

и интеграл

$$\boldsymbol{Q} = m(\boldsymbol{x} - t\dot{\boldsymbol{x}}), \tag{25.9}$$

соответствующий операторам Y_μ; поскольку вектор $\boldsymbol{M}$ получается из M^3 очевидными вращениями, то достаточно рассмотреть $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Заметим, что в силу (25.3) импульс связан также с энергией и получается из нее действием $\operatorname{ad} Y_\mu$:

$$\operatorname{ad} Y_\mu(E) = \left(t\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}\right)\left(\frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2\right) = m\dot{x}^\mu = P^\mu.$$

К тому же результату приводит преобразование Галилея для Y_μ,

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{a} = (a^1, a^2, a^3). \tag{25.10}$$

Действительно, это преобразование переводит любое решение уравнения (25.1) снова в решение, поэтому интеграл (25.2) переходит в интеграл

$$E' = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}'|^2 = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}|^2 = E + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a} + \frac{m}{2}|\boldsymbol{a}|^2.$$

Отсюда в силу произвольности группового параметра $\boldsymbol{a}$ следует, что $\boldsymbol{P}$ является интегралом движения. Аналогично можно получить векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ из момента импульса. При переносах $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{M}$ переходит в интеграл $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{a}$, откуда, как и выше, следует, что $\boldsymbol{P}$ — интеграл движения. Вектор $\boldsymbol{Q}$ получается из $\boldsymbol{M}$ преобразованием (25.10):

$$\boldsymbol{M}' = m\boldsymbol{x}' \times \dot{\boldsymbol{x}}' = m(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a}) \times (\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{a}.$$

Этот простой пример выявляет следующее общее свойство механических систем, инвариантных относительно группы Галилея. В отличие от релятивистской механики, где момент импульса задает базис законов сохранения, в классической механике фундаментальными являются энергия и момент импульса *). Приве-

*) Интересно отметить, что еще в то время, когда устанавливались основные принципы механики, Даниил Бернулли высказывал мысль (в письме Эйлеру, февраль 1744; опубликовано в книге Fuss [1]) о возможной зависимости линейного и углового моментов: он предполагал, что сохранение момента импульса можно вывести из закона сохранения импульса. Эйлер, по-видимому, считал их независимыми законами сохранения (см. Truesdell [1] стр. 256).

денные вычисления показывают также, что лемма 22.4 и преобразование законов сохранения с помощью группы, допускаемой рассматриваемым дифференциальным уравнением, приводят к одним и тем же результатам. Однако для более сложных систем, рассматриваемых ниже, использование присоединенной алгебры проще и, кроме того, позволяет легко найти базис законов сохранения.

25.2. Идеальный газ. Рассмотрим уравнения движения идеального политропического газа:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\frac{1}{\rho}\nabla p=0, \\ \rho_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \\ p_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+\gamma p\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \quad \gamma=\mathrm{const}, \end{gathered} \tag{25.11}$$

где t и $\boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^n)$—независимые переменные, а дифференциальными переменными являются вектор скорости $\boldsymbol{v}=(v^1, \ldots, v^n)$, давление p и плотность ρ; n принимает значения 1, 2 или 3 соответственно для одномерного, плоского и пространственного течений. Система уравнений (25.11) инвариантна относительно векторного представления группы Галилея и 3-параметрической группы растяжений. Базис соответствующей алгебры Ли образуют операторы

$$\begin{gathered} X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{ij}=x^j\frac{\partial}{\partial x^i}-x^i\frac{\partial}{\partial x^j}+v^j\frac{\partial}{\partial v^i}-v^i\frac{\partial}{\partial v^j}, \\ X_{n+1}=\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_i=t\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial v^i}, \quad X_{n+2}=t\frac{\partial}{\partial t}+x^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \\ Z_1=2t\frac{\partial}{\partial t}+x^i\frac{\partial}{\partial x^i}-v^i\frac{\partial}{\partial v^i}+2\rho\frac{\partial}{\partial\rho}, \qquad i,\ j=1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{25.12}$$

и

$$X_{n+3}=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+p\frac{\partial}{\partial p}. \tag{25.13}$$

Эта группа является максимальной в случае произвольного показателя адиабаты γ, а при

$$\gamma=\frac{n+2}{n} \tag{25.14}$$

происходит расширение группы: к (25.12), (25.13) добавляется оператор (Овсянников [2])

$$Z_2=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}+(x^i-tv^i)\frac{\partial}{\partial v^i}-nt\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-(n+2)tp\frac{\partial}{\partial p}. \tag{25.15}$$

Оператор (25.13) перестановочен со всеми остальными операторами и не участвует в образовании законов сохранения, поэтому он исключается из дальнейших рассмотрений. Структуру алгебры определяют равенства (25.3), (25.4) и следующие коммутационные соотношения (остальные не используются):

$$\operatorname{ad}Z_2(X_{n+1})=-Z_1\ (\operatorname{mod}X_{n+3}), \quad \operatorname{ad}Z_2(Z_1)=-2Z_2. \tag{25.16}$$

Законы сохранения (22.6) в гидродинамике удобно записывать в виде

$$D_t(\tau)+\operatorname{div}(\tau\boldsymbol{v}+\xi)=0. \tag{25.17}$$

Пусть $\Omega(t)$ — произвольная n-мерная область, движущаяся вместе с жидкостью, $S(t)$ — граница $\Omega(t)$, $\boldsymbol{\nu}$ — единичная внешняя нормаль к $S(t)$. Стандартным способом (интегрированием по $n+1$-мерному цилиндру $\Omega\times[t_1, t_2]$ с использованием формулы Гаусса — Остроградского) дифференциальный закон сохранения (25.17) переписывается в эквивалентной интегральной форме

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\tau\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S(t)}\xi\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{25.18}$$

удобной для физической интерпретации. Классические законы сохранения массы, энергии, импульса и момента импульса для системы (25.11) имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\rho\,d\boldsymbol{x}=0,\\ \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+\frac{p}{\gamma-1}\right)d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S(t)}p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS,\\ \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\rho\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S(t)}p\boldsymbol{\nu}\,dS,\\ \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\rho(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S(t)}p(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nu})\,dS.\end{gathered} \tag{25.19}$$

Кроме того, имеется закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\rho(t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S(t)}tp\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{25.20}$$

который с учетом сохранения массы может быть записан в виде теоремы о движении центра инерции:

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}=\boldsymbol{V},$$

где

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{M}\int\limits_{\Omega(t)}\rho\boldsymbol{x}\,d\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{V}=\frac{1}{M}\int\limits_{\Omega(t)}\rho\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x},\quad M=\int\limits_{\Omega(t)}\rho\,d\boldsymbol{x}.$$

П аналогии с механикой материальной точки можно ожидать, что в силу соотношений (25.3), (25.4) энергия и момент импульса образуют базис законов сохранения, хотя в данном случае условия теоремы 22.4 не выполнены (уравнения (25.11) не имеют лагранжиана). В справедливости этого предположения легко убедиться непосредственно, причем достаточно преобразовывать плотность законов сохранения. Возьмем, например, оператор Y_i, который по формуле (16.17) переписывается в каноническом виде:

$$\overline{Y}_i = t\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial v^i} - tD_i.$$

Имеем

$$\overline{Y}_i\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{p}{\gamma-1}\right) = \rho v^i - D_i\left[t\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{p}{\gamma-1}\right)\right] \approx \rho v^i.$$

Следовательно, под действием $\operatorname{ad} Y_i$ энергия переходит в импульс. Аналогично осуществляются другие преобразования. В частности,

$$\overline{Y}_i(\rho v^j) = \rho\delta_i^j - D_i(t\rho v^j) \approx \rho\delta_i^j, \tag{25.21}$$

т. е. $\operatorname{ad} Y_i$ переводит импульс в массу, хотя $[Y_i, X_j] = 0$; это формальное несоответствие с диаграммой (22.21) устраняется ниже путем рассмотрения потенциальных течений газа, допускающих вариационную формулировку.

В том случае, когда показатель адиабаты γ и размерность n связаны формулой (25.14), имеются два дополнительных закона сохранения. Первоначально они были получены (Ибрагимов [12]) с помощью теоремы Нётер как результат инвариантности относительно 2-параметрической группы с операторами Z_1, Z_2. Лемма 22.4 с учетом соотношений (25.16) дает простой способ вывода этих законов сохранения из энергии. Переписав Z_2 в канонической форме

$$\overline{Z}_2 = (t^2 v_t^i + t\boldsymbol{x}\cdot\nabla v^i + tv^i - x^i)\frac{\partial}{\partial v^i} +$$
$$+ t(t\rho_t + \boldsymbol{x}\cdot\nabla\rho + n\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} + t\,(tp_t + \boldsymbol{x}\cdot\nabla p + (n+2)p)\frac{\partial}{\partial p},$$

имеем

$$\overline{Z}_2\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{n}{2}p\right) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2[t^2\rho_t + \operatorname{div}(t\rho\boldsymbol{x})] +$$
$$+ \frac{n}{2}[t^2 p_t + 2tp + \operatorname{div}(tp\boldsymbol{x})] + \rho\boldsymbol{v}\cdot[t^2\boldsymbol{v}_t + t(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}] =$$
$$= t(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v} + \operatorname{div}\left[t\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \frac{n}{2}p\right)(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}) - t^2 p\boldsymbol{v}\right].$$

Отсюда видно, что закон сохранения энергии переходит в новый закон сохранения (25.18), плотность которого равна

$$\tau_1 = t(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{25.22}$$

а вектор ξ находится из равенства

$$\tau_1\boldsymbol{v} + \xi = \overline{Z}_2\left[\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{n}{2} + 1\right)p\right)\boldsymbol{v}\right] + D_t\left[\frac{t}{2}(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np)(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}) - t^2 p\boldsymbol{v}\right]$$

и оказывается равным

$$\xi_1 = p(2t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}).$$

Повторным действием оператора $\overline{Z}_2$ на полученные функции τ_1 и ξ_1 находится еще один закон сохранения с плотностью

$$\tau_2 = t^2(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}) \tag{25.23}$$

и вектором

$$\xi_2 = 2tp(t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}).$$

Таким образом, при $\gamma = (n+2)/n$ к (25.19), (25.20) добавляются следующие законы сохранения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} [t(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}]\,d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{S(t)} p(2t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{25.24}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} [t^2(\rho|\boldsymbol{v}|^2 + np) - \rho\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{S(t)} 2tp(t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{25.25}$$

Существование законов сохранения в газовой динамике можно связать с теоремой Нётер, рассматривая потенциальное изэнтропическое течение. Пусть $\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$, а энтропия $S = \mathrm{const}$, так что уравнение состояния $p = e^S\rho^\gamma$ принимает вид

$$p = c\rho^\gamma, \qquad c = \mathrm{const}, \tag{25.26}$$

можно считать, например, $c = 1$. При этом интеграл Лагранжа — Коши записывается в виде

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} = 0, \tag{25.27}$$

и вместо системы (25.11) получается следующее уравнение второго порядка для потенциала $\Phi(t, x)$:

$$\Phi_{tt} + 2\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi_t + \nabla\Phi\cdot(\nabla\Phi\cdot\nabla)\nabla\Phi + (\gamma-1)\left(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right)\Delta\Phi = 0. \tag{25.28}$$

Это уравнение имеет лагранжиан

$$\mathscr{L} = \left(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

и наследует групповые свойства исходной системы (25.11). Для произвольного γ базис допускаемой алгебры образуют операторы

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial\Phi}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{n+1} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_{ij} = x^j\frac{\partial}{\partial x^i} - x^i\frac{\partial}{\partial x^j},$$
$$Y_i = t\frac{\partial}{\partial x^i} + x^i\frac{\partial}{\partial\Phi}, \quad X_{n+2} = t\frac{\partial}{\partial t} + x^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \Phi\frac{\partial}{\partial\Phi}, \tag{25.29}$$
$$Z_1 = x^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{2\gamma + n(\gamma-1)}{\gamma+1}t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2 - n(\gamma-1)}{\gamma+1}\Phi\frac{\partial}{\partial\Phi},$$

а при $\gamma=(n+2)/n$ к ним добавляется оператор

$$Z_2=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2\frac{\partial}{\partial\Phi}. \tag{25.30}$$

Из них продолжением на первые производные Φ и с учетом интеграла Лагранжа—Коши можно получить операторы (25.12), (25.15). Все операторы (25.29) (за исключением X_{n+2}) и (25.30) удовлетворяют условиям теоремы Нётер, поэтому применима теорема 22.4. В частности, закон сохранения массы соответствует оператору X_0, а коммутационные соотношения $[X_i, Y_j]=\delta_i^j X_0$ объясняют равенства (25.21). Чтобы получить выписанные выше законы сохранения по теореме Нётер, можно построить их сначала для уравнения (25.28), затем исключить Φ с помощью равенств $\nabla\Phi=\boldsymbol{v}$ и (25.27), используя также (25.26). Это удается сделать для всех законов сохранения за исключением того, который соответствует оператору Z_1 и имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\left[\frac{2\gamma+n(\gamma-1)}{\gamma+1}t\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+\frac{p}{\gamma-1}\right)-\rho\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}-\right.$$
$$\left.-\frac{n(\gamma-1)-2}{\gamma+1}\rho\Phi\right]d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S(t)}p\left(\frac{2\gamma+n(\gamma-1)}{\gamma+1}t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{25.31}$$

Отсюда можно исключить потенциал только при условии (25.14); тогда равенство (25.31) переходит в (25.24). Это означает, что Z_1 приводит к дополнительному закону сохранения либо для произвольных течений газа с показателем адиабаты $\gamma=(n+2)/n$, либо для потенциальных течений произвольного политропического газа.

В связи с законами сохранения (25.24), (25.25) возникает вопрос, существует ли такое поле, в котором материальная точка имеет аналогичные интегралы движения. Так как при $n=3$ формула (25.14) дает для показателя адиабаты значение $\gamma=5/3$, т. е. характеризует одноатомный газ, то речь идет о поле, моделирующем одноатомный газ. Если взять кулоновское поле, в котором потенциальная энергия частицы равна

$$U=\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|},\qquad \alpha=\text{const}, \tag{25.32}$$

то интегралами движения являются (m—масса частицы) энергия $E=\frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2+\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|}$, момент импульса $\boldsymbol{M}=m(\boldsymbol{x}\times\dot{\boldsymbol{x}})$ и вектор

$$\boldsymbol{A}=\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{M}+\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|},$$

специфический для поля (25.32). Сравнение этих интегралов с формулами (25.22), (25.23) показывает, что кулоновское поле не подходит. Возьмем поэтому более общее центральное поле с произвольным степенным потенциалом

$$U=\alpha|\boldsymbol{x}|^k. \tag{25.33}$$

Можно показать, что группе растяжений (с некоторым оператором вида (5.1)) соответствует нетривиальный интеграл движения только при $k=-2$, т. е. в случае потенциала

$$U=\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2}, \qquad \alpha=\text{const}. \tag{25.34}$$

Для уравнения движения частицы в этом поле,

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}=2\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^4}, \tag{25.35}$$

группа Галилея представлена операторами X_4 и $X_{\mu\nu}$ из (25.2); отсутствие X_μ и Y_μ связано с выбором неподвижного центра — начала координат. Кроме того, уравнение (25.35) инвариантно относительно 2-параметрической группы, состоящей из растяжений с оператором

$$Z_1=2t\frac{\partial}{\partial t}+x^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{25.36}$$

и проективных преобразований с оператором

$$Z_2=t^2\frac{\partial}{\partial t}+tx^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{25.37}$$

Продолжение этих операторов на $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}$ совпадает с Z_1 и Z_2 из (25.12) и (25.15), если исключить переменные ρ и p. Согласно (25.16) для построения интегралов движения, соответствующих Z_1 и Z_2, достаточно преобразовать энергию

$$E=\frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2+\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2} \tag{25.38}$$

с помощью $\operatorname{ad} Z_2$. Имеем

$$\overline{Z}_2=(tx^\mu-t^2\dot{x}^\mu)\frac{\partial}{\partial x^\mu}+(x^\mu-t\dot{x}^\mu-t^2\ddot{x}^\mu)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}, \tag{25.37'}$$

поэтому

$$\overline{Z}_2(E)=m\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x}-t\left(m|\dot{\boldsymbol{x}}|^2+2\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}|^2}\right)-t^2\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\left(m\ddot{\boldsymbol{x}}-2\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^4}\right).$$

Это означает, что оператору Z_1 соответствует интеграл

$$I_1=2tE-m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}. \tag{25.39}$$

Действием оператора (25.37′) на функцию I_1 получается второй интеграл

$$I_2=2t^2E-m\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x}), \tag{25.40}$$

который соответствует оператору Z_2. Таким образом, уравнение (25.35) имеет 6 первых интегралов, определяемых формулами (25.38)—(25.40) и моментом импульса $\boldsymbol{M}=m(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})$. Интегралы (25.39), (25.40) совпадают с плотностями (25.22), (25.23), так что поле с потенциалом (25.34) обладает требуемыми свойствами. Потенциал (25.34) принадлежит классу так называемых интегрируемых степенных потенциалов. А именно, уравнение орбиты частицы, движущейся в центральном поле с потенциалом вида (25.33), интегрируется в элементарных (круговых) функциях в следующих трех случаях (см., например, Голдстейн [1], § 3.5):

$$k=2,\ -1,\ -2,$$

т. е. для гармонического осциллятора, кулоновского поля (или ньютоновского поля тяготения) и для (25.34). В последнем случае решения уравнения движения (25.35) находятся с помощью указанных выше шести первых интегралов без дополнительных квадратур.

Замечание. Построение алгебры Ли—Беклунда для лагранжевых уравнений движения частицы сводится (§ 17.1) к решению определяющего уравнения (17.3) для оператора $X=$ $=\eta^i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\frac{\partial}{\partial x^i}+\ldots$, где $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{x}}=D_t(\boldsymbol{x})$. Рассмотрим, например, движение в кулоновском поле (25.32). В этом случае определяющее уравнение имеет вид

$$m\left(\frac{d}{dt}\right)^2\eta^i=\frac{\alpha}{r^3}\left(\eta^i-3\,\frac{x^i}{r^2}\sum_{k=1}^{3}x^k\eta^k\right),$$

где

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\alpha}{mr^3}\,x^i\,\frac{\partial}{\partial v^i},\quad r=|\boldsymbol{x}|.$$

Инфинитезимальным операторам группы точечных преобразований соответствует линейное по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{v}$ решение этого уравнения:

$$\eta^i=(3at+b)\,v^i+(c_k^i-2a\delta_k^i)\,x^k,$$

$a,\ b,\ c_k^i=\text{const}$, $c_k^i+c_i^k=0$. Подстановкой в определяющее уравнение функций η^i более общего вида

$$\eta^i=a_{jk}^i(t)\,x^jv^k+b_k^i(t)\,v^k+c_k^i(t)\,x^k$$

находятся еще три оператора Ли—Беклунда

$$X_k=(2x^kv^i-x^iv^k-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\,\delta_k^i)\frac{\partial}{\partial x^i}+\ldots,\quad k=1,\ 2,\ 3,$$

допускаемые уравнением

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}=\alpha\,\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}.$$

Для операторов X_k и лагранжиана $\mathscr{L}=\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2-\frac{\alpha}{r}$ имеем

$$X_k(\mathscr{L})=m[2(\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})x^k-(\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})v^k-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\dot{v}^k]-D_t\left(\alpha\frac{x^k}{r}\right).$$

Так как эти равенства на траекториях движения частицы принимают вид $X_k(\mathscr{L})=D_t\left(-2\alpha\frac{x^k}{r}\right)$, то теорема 22.3 и замечание 22.2 дают интегралы $A_k=m(|\boldsymbol{v}|^2x^k-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})v^k)+\alpha\frac{x^k}{r}$, образующие вектор Рунге—Ленца $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}+\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{r}$. По теореме 22.4 вектор $\boldsymbol{A}$ можно получить также действием операторов X_k на $\boldsymbol{M}$.

В гамильтоновой механике с каждым первым интегралом $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ уравнений движения связывается однопараметрическая группа канонических преобразований с инфинитезимальным оператором

$$Y=\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i},$$

сохраняющая гамильтониан (см. Голдстейн [1], § 8.6). По этой формуле вектору Рунге—Ленца соответствуют операторы $\left(v^i=\frac{p_i}{m}\right)$

$$Y_k=(2x^kv^i-x^iv^k-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\,\delta^i_k)\frac{\partial}{\partial x^i}+$$
$$+\left(v^iv^k+\frac{\alpha}{mr^3}x^ix^k-\left(|\boldsymbol{v}|^2+\frac{\alpha}{mr}\right)\delta^i_k\right)\frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Уравнение Ли для однопараметрической группы канонических преобразований с оператором Y_k (т. е. гамильтонова система с гамильтонианом A_k) имеет три попарно коммутирующих интеграла A_k, E, M_{ij} $(i,j\neq k)$, и поэтому интегрируется в квадратурах. С точки зрения лагранжевой механики Y_k не являются операторами Ли—Беклунда, так как не сохраняют равенство $\boldsymbol{v}=D_t(\boldsymbol{x})$. Но ввиду того, что на траекториях движения частицы $Y_k=X_k$, канонические преобразования с инфинитезимальными операторами Y_k определены на траекториях движения и образуют группу преобразований Беклунда, сохраняющих уравнение $m\ddot{\boldsymbol{x}}=\alpha\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}$.

25.3. Несжимаемая жидкость. Для течений несжимаемой жидкости принцип относительности Галилея заменяется более общим свойством инвариантности относительно перехода в любую систему координат, движущуюся поступательно. Для уравнений

$$\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla p=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\tag{25.41}$$

описывающих течение идеальной несжимаемой жидкости (ее плотность считается равной единице), этот обобщенный принцип относительности характеризуется оператором

$$X_f = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f'^i \frac{\partial}{\partial v^i} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}'') \frac{\partial}{\partial p}, \tag{25.42}$$

обобщающим операторы X_i и Y_i из (25.12); здесь $\boldsymbol{f} = (f^1(t), \ldots \ldots, f^n(t))$ — произвольная вектор-функция от t, $\boldsymbol{f}' = \frac{d\boldsymbol{f}}{dt}$. Очевидно, что система (25.41) допускает также оператор $X_g = g(t)\frac{\partial}{\partial p}$ с произвольной функцией $g(t)$. Операторы X_f, X_g вместе с X_{ij}, X_{n+1}, X_{n+2} и $Z_1 - 2X_{n+3}$ из (25.12), (25.13) порождают максимальную группу, допускаемую уравнениями (25.41).

Обобщенный принцип относительности приводит к закону сохранения

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega(t)} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = - \int\limits_{S(t)} [p\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}')\gamma] \cdot \boldsymbol{\nu}\, dS, \tag{25.43}$$

объединяющему закон сохранения импульса и теорему о движении центра инерции. Из равенства $[X_{n+1}, X_f] = X_{f'}$ видно, что он может быть получен из сохранения энергии,

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega(t)} |\boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x} = - \int\limits_{S(t)} 2p\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dS, \tag{25.44}$$

преобразованием $\mathrm{ad}\, X_f$. Действительно,

$$\overline{X}_f(|\boldsymbol{v}|^2) = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{f} \cdot \nabla |\boldsymbol{v}|^2 = \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{v} - \mathrm{div}\,(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{v}|^2) \approx \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{v}.$$

Так как $\boldsymbol{f}(t)$ — произвольная функция, то это означает, что (25.44) переходит в (25.43). Справедливость равенства (25.43) легко проверяется непосредственно. При этом удобно пользоваться формулой

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{S} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{x}\, dS, \tag{25.45}$$

которая выполняется для любого соленоидального векторного поля $\boldsymbol{v}$. Действительно, из условия $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0$ вытекают равенства

$$\mathrm{div}\,(x^i \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla x^i = v^i.$$

Отсюда по формуле Гаусса — Остроградского имеем

$$\int\limits_{\Omega} v^i\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\,(x^i \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{S} x^i \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dS.$$

Равенства (25.43), (25.44) вместе с законом сохранения момента импульса исчерпывают все законы сохранения в случае произвольных течений.

Для потенциальных течений жидкости имеются дополнительные законы сохранения. Сначала отметим следующее свойство безвихревых соленоидальных векторных полей.

Предложение. *Пусть* $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0$ *и* $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$. *Тогда*

$$(r-2)\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x}=\int_S [\,|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{25.46}$$

Доказательство. При указанных условиях справедливы равенства

$$\operatorname{div}[|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v}]=$$
$$=n|\boldsymbol{v}|^2+2\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}-2|\boldsymbol{v}|^2-2\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}=(n-2)\,|\boldsymbol{v}|^2$$

С помощью формулы (25.46) проверяется, что для потенциальных течений несжимаемой жидкости (пусть $n=3$) выполняется обобщенный закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega h(t)\,|\boldsymbol{v}|^2 d\boldsymbol{x}=-\int_S [2h(t)\,p\boldsymbol{v}+h'(t)\,(2\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v}-|\boldsymbol{v}|^2\boldsymbol{x})]\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{25.47}$$

где $h(t)$ — произвольная функция. Кроме того имеются законы сохранения, явно зависящие от потенциала Φ, где $\nabla\Phi=\boldsymbol{v}$. Их можно получить по теореме Нётер, переписав систему (25.41) в виде уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi=0 \tag{25.48}$$

и интеграла Бернулли (постоянную интегрирования можно положить равной нулю)

$$\Phi_t+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+p=0.$$

В качестве лагранжиана для (25.48) возьмем

$$\mathscr{L}=\Phi_t+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2. \tag{25.49}$$

Если теорему Нётер применить к операторам

$$T_0=x^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{n-2}{2}\Phi\frac{\partial}{\partial\Phi},\quad T_i=(2x^ix^j-|\boldsymbol{x}|^2\delta^{ij})\frac{\partial}{\partial x^j}-(n-2)\,\Phi x^i\frac{\partial}{\partial\Phi}$$

группы конформных преобразований для уравнения Лапласа, и в полученных выражениях заменить $\nabla\Phi$ на $\boldsymbol{v}$, а Φ_t исключить с помощью интеграла Бернулли, то мы придем к следующим законам сохранения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}+n\Phi)\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S}\left(p\boldsymbol{x}-\frac{n+2}{2}\Phi\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}[|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{v}-2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}+n\Phi)\boldsymbol{x}]\,d\boldsymbol{x}=$$

$$=-\int\limits_{S}\left[\left(p|\boldsymbol{x}|^2+\frac{n-2}{2}\Phi^2\right)\boldsymbol{\nu}+2\left(\frac{n+2}{2}\Phi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}-p\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nu}\right)\boldsymbol{x}\right]dS.$$

Замечание 1. Можно также воспользоваться тем, что для уравнения (25.48) лагранжиан определен не однозначно, и для операторов X, допускаемых этим уравнением, искать лагранжиан, удовлетворяющий условию инвариантности (22.11). Например, для рассмотренного выше оператора растяжения T_0 таким путем находится

$$\mathscr{L}=|\boldsymbol{x}|^{-\frac{n+2}{2}}\Phi_t+|\nabla\Phi|^2. \tag{25.49'}$$

Операторы Нётер переводят этот лагранжиан в закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{x}|^{-\frac{n+2}{2}}\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{n-2}{2}\Phi\right)d\boldsymbol{x}=$$

$$=-\int\limits_{S}|\boldsymbol{x}|^{-\frac{n+2}{2}}\left[\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+p\right)\boldsymbol{x}-\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}+\frac{n-2}{2}\Phi\right)\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS.$$

Замечание 2. В случае лагранжиана (25.49) операторы T_0 и T_i не удовлетворяют условию (22.11), но выполняется (22.13).

Замечание 3. Закон сохранения (25.47) получается на основе инвариантности уравнения (25.48) относительно растяжения переменных x^i $(x^i\mapsto ax^i)$ и произвольных преобразований t. Соответствующий инфинитезимальный оператор равен

$$X=x^i\frac{\partial}{\partial x^i}+g(t)\frac{\partial}{\partial t},$$

и для него находится следующий инвариантный лагранжиан:

$$\mathscr{L}=-h'(t)|\nabla\Phi|^2, \tag{25.49''}$$

где $h(t)=e^{-\int\frac{dt}{g(t)}}$. Отсюда по теореме Нётер получается (25.47).

25.4. Течение мелкой воды. Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+g\nabla H=0,\\&H_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla H+H\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\end{aligned} \tag{25.50}$$

моделирующее течение мелкой воды над ровным дном. Здесь H — глубина воды, $\boldsymbol{v}$ — двумерный вектор скорости, g — ускорение свободного падения. (25.50) совпадает с системой уравнений двумерного изэнтропического течения газа с показателем адиабаты $\gamma=2$, если в условии изэнтропичности (25.26) положить $c=1/2$ и заменить ρ на gH. Так как значения $\gamma=2$ и $n=2$ удовлетворяют условию (25.14), уравнения (25.50) обладают дополнительной симметрией, приводящей к законам сохранения (25.24), (25.25). Эти дополнительные законы сохранения после указанных преобразований принимают вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} H[t(|\boldsymbol{v}|^2+gH)-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v}]\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S}\frac{1}{2}gH^2(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS,$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} H[t^2(|\boldsymbol{v}|^2+gH)-\boldsymbol{x}\cdot(2t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x}=-\int\limits_{S} gtH^2(t\boldsymbol{v}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS.$$

25.5. Базис законов сохранения для уравнения КдФ. Алгебру Ли—Беклунда, допускаемую уравнением Кортевега—де Фриза

$$u_t=u_3+uu_1, \tag{25.51}$$

порождает оператор Галилея (обозначения из (18.27))

$$X_3=t\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}.$$

Это следует из леммы 18.2 и формулы (18.30) для коммутатора X_3 с операторами Ли—Беклунда. Поэтому закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{u^2}{2}+xu\right)+D\left[t\left(\frac{u_1^2}{2}-uu_2-\frac{u^3}{3}\right)+u_1-xu_2-x\frac{u^2}{2}\right]=0, \tag{25.52}$$

соответствующий оператору X_3, является фундаментальным для уравнения Кортевега—де Фриза: из него преобразованием (22.18) выводится вся бесконечная серия законов сохранения. Например, равенство $X_1=[X_2, X_3]$ говорит о том, что закон сохранения, соответствующий оператору $X_1=\frac{\partial}{\partial x}$, получается из (25.52) действием оператора *) $X_2=\frac{\partial}{\partial t}$; это дает

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)+D\left(\frac{u_1^2}{2}-uu_2-\frac{u^3}{3}\right)=0.$$

Таким образом, равенство (25.52) и оператор рекурренции (18.32) решают задачу построения всех законов сохранения. В частности, плотность закона сохранения произвольного порядка согласно (22.28), (25.52) равна

$$h=(tu+x)f, \tag{25.53}$$

*) В лемме 22.4 вместо канонического оператора $\overline{X}$ можно брать операторы Ли—Беклунда (16.14) с $\xi^i=\mathrm{const}$, так как они тоже коммутируют с D_i (см. (16.15)).

где f дается рекурренцией (18.35) (из получаемых функций h исключаются слагаемые вида $D\psi$, $\psi \in \mathcal{A}$).

Для применения теоремы Нётер и, следовательно, теоремы 22.4 достаточно сделать замену $u = w_1$ и переписать (25.51) в виде

$$w_{1t} = w_4 + w_1 w_2. \tag{25.51'}$$

Лагранжианом для этого уравнения является функция

$$\mathscr{L} = \frac{1}{6} w_1^3 - \frac{1}{2} w_2^2 - \frac{1}{2} w_1 w_t. \tag{25.54}$$

На самом деле рассматривается эволюционное уравнение

$$w_t = w_3 + \frac{1}{2} w_1^2, \tag{25.55}$$

дифференциальным следствием которого является (25.51'). Поэтому $\mathscr{L}$ — слабый лагранжиан для уравнения (25.55), и в данном случае используется модификация теоремы Нётер, сформулированная в замечании 22.3. Оператор Галилея для уравнения (25.55) имеет вид

$$X_3' = t \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial w}.$$

Продолжив этот оператор на производные w_t, w_1 и w_2, легко проверить выполнение условия (22.13) (здесь $D_i(\xi^i) = 0$):

$$X_3' \mathscr{L} = D_t \left(-\frac{x}{2} w_1 \right) + D_x \left(\frac{x}{2} w_t \right).$$

Отсюда в соответствии с замечанием 22.2 получается закон сохранения, который переводится в (25.52) заменой $w_1 = u$.

ДОБАВЛЕНИЕ

(В этом добавлении приводятся результаты групповой классификации эволюционных уравнений, полученные к концу 1982 г.)

А. Задача групповой классификации эволюционных уравнений второго и третьего порядков, решенная в § 20 для полулинейных уравнений второго порядка (20.10) и для уравнений третьего порядка с постоянной сепарантой, имеющих вид (20.24), в последнее время была исследована в более общих случаях.

Для общих эволюционных уравнений второго порядка (20.1) Свинолупов С. И. и Соколов В. В. (Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями.— РЖ Мат., 1982, 11Б477 ДЕП.— Рукопись депонирована в ВИНИТИ 21 июля 1982 г., № 3927—82 Деп., 17 с.) уточнили формулы (20.8), (20.9) и (20.9′) путем анализа еще трех необходимых условий разрешимости уравнения (19.23). В результате выделились функции F, равные

$$\frac{u_2}{u_1^2}-\frac{a''}{a'}+bu_1,\quad \frac{u_2}{u_1^2}+\frac{1}{u_1}+bu_1+c,$$

$$\frac{u_2}{(u_1+1)^2}-\frac{b'-k^2}{b+k}\,\frac{1}{u_1+1}+\frac{b^2-b'}{b+k}\,(u_1+1)+2\,\frac{b'+kb}{b+k},$$

$$\frac{u_2}{(u_1+1)^2}+\frac{a''}{a'}\,\frac{1}{u_1+1}+\left(\frac{a''}{a'}+ka\right)u_1-\frac{a''}{a'},$$

$$\frac{u_2+a'u_1}{(u_1+1)^2}+\frac{a''a}{a'\,(u_1+a)}-\left(\frac{a''}{a'}-\frac{a'}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)u_1,$$

которые исчерпывают случай (20.9), (20.9′); здесь $k=\mathrm{const}$, a, b, c — произвольные функции от u, причем $a(u)$ является плотностью закона сохранения соответствующего уравнения. В случае (20.8) требуется дополнительный анализ.

Из условия (19.37) легко следует, что уравнение третьего порядка с постоянной сепарантой, обладающее нетривиальной алгеброй Ли — Беклунда, должно иметь вид

$$u_t=u_3+a(u,\ u_1)u_2^2+b(u,\ u_1)\,u_2+c(u,\ u_1). \tag{1}$$

Кроме уравнений с $a=b=0$, рассмотрениых в § 20.2, и уравнений, приводящихся к этому случаю простыми преобразованиями, были известны следующие два интегрируемых уравнения вида (1)

$$u_t=u_3-\frac{3}{2}\,\frac{u_1}{u_1^2+\alpha}\,u_2^2-\frac{3}{2}\,\frac{\alpha' u_1}{u_1^2+\alpha}\,u_2-\frac{3}{8}\,\alpha'^2\,\frac{u_1}{u_1^2+\alpha}+\frac{1}{2}\,\alpha'' u_1, \tag{2}$$

где $\alpha=\sum_{i=1}^{4}k_i\,(u+k)^i$ — произвольный полином четвертой степени от u с вещественными коэффициентами (Calogero, Degasperis [1]) и

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{u_1} - \frac{3}{2}\wp(u)\, u_1^3 + \frac{k}{u_1}, \qquad k \neq 0, \tag{3}$$

где $k = \mathrm{const}$, $\wp(u)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса,

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \equiv 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3),$$
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

(Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.— УМН, 1980, т. 35, вып. 6, с. 47—68, уравнение (54)).

После того как были перечислены (Свинолупов С. И., Соколов В. В. О законах сохранения для уравнений, обладающих нетривиальной алгеброй Ли — Беклунда.— В сб.: Интегрируемые системы.— Уфа: БФ АН СССР, 1982) все возможные уравнения (1) с нетривиальной алгеброй (в предположении, что элементы алгебры не зависят от t, x), стало ясно, что среди них исключительными являются уравнения (2) и (3), а остальные приводятся к уравнению КдФ или к линейному уравнению довольно простыми преобразованиями. Недавно Хабиров С. В. (см. п. Б) и независимо Свинолупов С. И., Соколов В. В. (см. п. В) нашли преобразования вида

$$v = \Phi(u, u_1, \ldots, u_n), \tag{4}$$

связывающие (2) с уравнением КдФ, и доказали, что для уравнения (3) таких преобразований не существует, за исключением вырожденных случаев. Таким образом, результатом классификации уравнений третьего порядка с постоянной сепарантой, имеющих нетривиальную алгебру, являются линейное уравнение, уравнение КдФ и (3). Этим решается также задача классификации полулинейных уравнений $u_t = a(u)\, u_3 + \varphi(u, u_1, u_2)$; действительно, при $a' \neq 0$ можно считать $a(u) = u^3$ (подстановка $a(u) = v^3$), а такие уравнения с нетривиальной алгеброй приводятся к случаю постоянной сепаранты заменой (20.44).

Для уравнения вида (3) с $k = 0$ (в этом случае вместо $\wp(u)$ можно взять произвольную функцию от u) легко находится оператор рекурренции, так как точечной заменой $y = x$, $w = \Phi(u)$ оно сводится к уравнению (20.43), для которого оператор рекурренции

$$L = D^2 - 2\frac{w_2}{w_1} D + w_1 D^{-1} \cdot \left(\frac{w_3}{w_1^2} - \frac{w_2^2}{w_1^3} \right) D$$

получается по формулам (19.46), (19.50′) и (20.42).

Б. (Хабиров С. В.) Изучаются преобразования эквивалентности вида (4) для уравнений

$$u_t = u_3 + f(u, u_1, u_2), \tag{5}$$
$$v_t = v_3 + h(v, v_1, v_2). \tag{6}$$

При этом не требуется, чтобы (5) и (6) допускали нетривиальную алгебру. Все уравнения рассматриваются с точностью до точечных замен, так что речь идет о преобразованиях (4) с $n \geqslant 1$.

Оказалось, что существование преобразований эквивалентности накладывает сильные ограничения на функции f и h. Например, если в качестве (6) берется уравнение КдФ ($h = vv_1$), то выясняется, что (5) должно быть вида (1), а преобразование (4) в этом случае имеет порядок $n \leqslant 3$; затем удается перечислить уравнения (1), приводимые к уравнению КдФ преобразованиями первого, второго и третьего порядков, и найти сами преобразования. В частности, (2) связано с уравнением

$$v_t = v_3 + vv_1 \tag{7}$$

следующим преобразованием третьего порядка:

$$v = pu_3 + qu_2^2 + ru_2 + s,$$

где

$$p = 3\frac{z}{u_1}, \quad q = -\frac{3}{2\alpha}(1-z^2)(1+2z),$$

$$r = \frac{6(1-z)}{u+k} + \alpha' q,$$

$$s = \frac{\alpha''}{2} + 6\frac{\alpha}{(u+k)^2} + 3z\left(\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha}{u+k}\right) + \frac{\alpha'^2}{4}q,$$

$$z = \pm\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+\alpha}}.$$

Следующие уравнения связаны с (7) преобразованиями второго порядка (после уравнения указано соответствующее преобразование):

$$u_t = u_3 - \frac{3}{4}\frac{u_2^2}{u_1} - \frac{1}{3}u_1^2 - \frac{2}{3}ku_1^{3/2}, \qquad v = \frac{u_2}{\sqrt{u_1}} - \frac{2}{3}u_1 + k\sqrt{u_1};$$

$$u_t = u_3 - \frac{1}{18}u_1^3 + \frac{1}{2}ku_1^2, \qquad v = u_2 - \frac{1}{6}u_1^2 + ku_1;$$

$$u_t = u_3 + 3\frac{a'}{a}u_1u_2 + \left(\frac{a''}{a} - \frac{a^2}{18}\right)u_1^3, \qquad v = au_2 + \left(a' - \frac{a^2}{6}\right)u_1^2;$$

здесь $k = \mathrm{const}$, $a = a(u)$ — произвольная функция.

Уравнение (3) в общем случае не связано неточечными преобразованиями вида (4) ни с каким уравнением (6). Имеются исключительные случаи, когда оно приводится к уравнению КдФ. А именно, уравнение (3) (которое запишем здесь с $k=6$) связано с (7) преобразованием

$$v = 3\left(\frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2} + 4\varepsilon\frac{u_2}{u_1^2} - \frac{3}{2}\wp u_1^2 - \frac{2}{u_1^2}\right), \qquad \varepsilon = \pm 1, \tag{8}$$

если $\wp = \mathrm{const}$, и преобразованием

$$v = -3\left(\frac{u_3}{u_1} - \frac{1}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2} + \varepsilon(u)u_2 + \varepsilon'(u)u_1^2 + \frac{3}{2}\wp(u)u_1^2 + \frac{2}{u_1^2}\right), \tag{9}$$

если

$$\wp = \frac{1}{u^2}, \qquad \text{тогда } \varepsilon = \frac{2}{u}, \tag{9a}$$

$$\text{или } \wp = \frac{\alpha^2}{4}\left(-\frac{2}{3} + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha u}{2}\right), \qquad \text{тогда } \varepsilon = \alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha u}{2}, \tag{9b}$$

$$\text{или } \wp = \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{2}{3} + \mathrm{th}^2\frac{\alpha u}{2}\right), \qquad \text{тогда } \varepsilon = \alpha\,\mathrm{th}\frac{\alpha u}{2}, \tag{9c}$$

где $\alpha = \mathrm{const}$.

Алгебра Ли — Беклунда для уравнения (3) с произвольной функцией Вейерштрасса нетривиальна и содержит следующий элемент пятого порядка:

$$u_5 - 5\frac{u_2u_4}{u_1} - \frac{5}{2}\frac{u_3^2}{u_1} + \left(\frac{25}{2}\frac{u_2^2}{u_1^2} - \frac{5}{2}\frac{k}{u_1^2} - \frac{15}{2}\wp u_1^2\right)u_3 - \frac{45}{8}\frac{u_2^4}{u_1^3} + \frac{25}{4}k\frac{u_2^2}{u_1^3} +$$

$$+\frac{15}{4}\wp u_1u_2^2 - \frac{15}{2}\wp' u_1^3u_2 - \frac{3}{2}\wp'' u_1^5 + \frac{27}{8}\wp^2u_1^5 - \frac{5}{8}\frac{k^2}{u_1^3} + \frac{5}{4}k\wp u_1.$$

В. (Свинолупов С. И., Соколов В. В.) Уравнение (2) можно связать с (20.32) преобразованием (4) первого порядка. Для этого сначала (2) приводится к виду

$$u_t=u_3-\frac{3}{2}\frac{u_1}{u_1^2+1}u_2^2-\frac{3}{2}\wp(u)(u_1^3+u_1) \tag{2'}$$

точечной заменой, а затем делается преобразование

$$v=2\ln\left(u_1+\sqrt{u_1^2+1}\right)+\ln\psi(u)$$

с функцией $\psi(u)$, определяемой из уравнения

$$A\psi^2+\left(\frac{3}{2}\wp(u)+C\right)\psi+B=0.$$

Если коэффициенты A, B, C выражаются через иррациональные инварианты функции $\wp(u)$ формулами

$$AB=\frac{9}{64}(e_1^2-4e_2e_3),\qquad C=\frac{3}{4}e_1,$$

то указанное преобразование переводит (2′) в

$$v_t=v_3-\frac{1}{8}v_1^3+(Ae^v+Be^{-v}+C)v_1.$$

Теперь по лемме 20.2.2 можно построить преобразование третьего порядка, связывающее (2′) с (7).

Для уравнения (3) предлагается следующая цепочка преобразований, позволяющая изучить его с разных точек зрения. После подстановки $v=\wp\left(\frac{u}{2}\right)$ (3) принимает вид

$$v_t=v_3-\frac{3}{2}\frac{v_2^2}{v_1}+\frac{av^3+bv+c}{v_1} \tag{3'}$$

с постоянными a, b, c. Это уравнение эквивалентно (7), когда полином третьей степени av^3+bv+c имеет кратные нули. В общем случае преобразованием

$$w=-3\frac{v_3}{v_1}+\frac{3}{2}\frac{v_2^2}{v_1^2}-\frac{av^3+bv+c}{v_1^2}$$

оно приводится к системе

$$v_t=-2v_3-wv_1,\quad w_t=w_3+ww_1-12av_1$$

с известной (L, A)-парой (Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Новые эволюционные уравнения, обладающие (L, A)-парой.— Дифференциальные уравнения с частными производными/Труды семинара С. Л. Соболева, № 2.— Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1981, с. 5—9).

Г. Вместо преобразований (4), разрешенных относительно v, рассмотрим более общее преобразование между дифференциальными переменными u, v, задаваемое дифференциальным уравнением

$$\Phi(u,\ u_1,\ \ldots,\ u_n;\ v,\ v_1,\ \ldots,\ v_n)=0. \tag{10}$$

Пусть $[\Phi]$ — дифференциальное многообразие в пространстве переменных $(u,\ v;\ u_1,\ v_1;\ \ldots)$, заданное уравнением (10). Эволюционные уравнения

$$u_t=F(u,\ u_1,\ \ldots,\ u_m), \tag{11}$$
$$v_t=H(v,\ v_1,\ \ldots,\ v_m) \tag{12}$$

будем рассматривать как уравнения Ли—Беклунда (см. замечание 17.1.1), определяющие группу G с каноническим оператором $X = F\frac{\partial}{\partial u} + H\frac{\partial}{\partial v} + \ldots$ Уравнения (11) и (12) эквивалентны, если существует многообразие $[\Phi]$, инвариантное относительно группы G; при этом само преобразование эквивалентности между уравнениями (11) и (12) задается дифференциальным уравнением (10). Таким образом, вопрос об эквивалентности эволюционных уравнений сводится к исследованию критерия инвариантности $X\Phi|_{[\Phi]} = 0$. Путем аналогичного обобщения преобразования (19.44), включающего замену переменной x, получается общее преобразование Беклунда для эволюционных уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

На стр. 213 при анализе уравнения $v_t = v^2(v_2 + h(v)v_1 + k)$ пропущен случай $h \equiv 0$, $k \neq 0$. Поэтому в лемме 20.1.2 и теореме 20.1 уравнение (20.19) нужно заменить на

$$v_t = v^2(v_2 + k), \quad k = \text{const}. \qquad \textbf{(20.19bis)}$$

Как заметили В. А. Дородницын и С. Р. Свирщевский, преобразование (20.20″), линеаризующее уравнение (20.19), связывает (20.19bis) с уравнением Бюргерса $u_t = u_2 + kuu_1$, $u = u(t, x)$.

ЛИТЕРАТУРА

Abellanas L., Galindo A. J.
[1] Conserved densities for nonlinear evolution equations. I. Even order case. — J. Math. Phys., 1979, v. 20, n°6, p. 1239—1243.
Алексеев Г. А., Белинский В. А.
[1] Статические гравитационные солитоны. — ЖЭТФ, 1980, т. 78, в. 4, с. 1297—1313.
Ames W. F.
[1] Nonlinear partial differential equations in engineering, v. I, II. — New York: Academic Press, 1965, 1972.
Anderson R. L., Ibragimov N. H.
[1] Bianchi—Lie, Bäcklund, and Lie—Bäcklund transformations. — В кн.: Proceedings [2], p. 34—45.
[2] Lie—Bäcklund Transformations in Applications. — Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1979.
Åsgeirsson L.
[1] Some Hints on Huygens' Principle and Hadamard's Conjecture. — Comm. Pure and Appl. Math., 1956, v. 9, n° 3, p. 307—327.
Atiyah M. F., Bott R., Gårding L.
[1] Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients— Acta Math., 1970, v. 124, p. 109—189; 1973, v. 131, p. 145—206.
Bach R.
[1] Zur Weylschen Relativitätstheorie. — Math. Zs., 1921, Bd. 9, S. 110—135.
Bäcklund A. V.
[1] Einiges über Curven — und Flächentransformationen. — Lunds Universitets Års—skrift 10, För Ar 1873, II. Afdelingen for Mathematik och Naturvetenskap, 1873—74, S. 1—12.
[2] Ueber Flächentransformationen. — Math. Ann., 1876, Bd. 9, S. 297—320.
[3] Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. — Math. Ann., 1880, Bd. 17, S. 285—328.
[4] Zur Theorie der Flächentransformationen. — Math. Ann., 1882, Bd. 19, S. 387—422.
[5] Om ytor med konstant negativ krökning. — Lunds Universitets Års—skrift, 1883, Bd. 19.
Baker B. B., Copson E. T.
[1] The Mathematical Theory of Huygens' Principle. — 2nd ed. — Oxford: Oxforb Univ. Press, 1953.
Белинский В. А., Захаров В. Е.
[1] Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных солитонных решений. — ЖЭТФ, 1978, т. 75, в. 6, с. 1953—1971.
Beltrami E.
[1] Sul principio di Huygens. — Rend. Reale Istituto Lombardo, Ser. 2, 1889, v. 22, p. 428—438.
[2] Sull'espressione analitica del principio di Huygens. — Rend. Reale. Accad. Lincei, 1892, v. 1, 1°Sem., p. 99—108.
Bessel-Hagen E.
[1] Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik. — Math. Ann., 1921, Bd. 84, S. 258—276.

Bianchi L.
[1] Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi.—Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1879, v. 2, p. 285.
[2] Lezioni di Geometria Differenziale, v. I.—Pisa: Spoerri, 1922.
Билялов Р. Ф.
[1] Конформные группы преобразований в полях тяготения.—ДАН СССР, 1963, т. 152, № 3, с. 570—572.
Birkhoff G.
[1] Hydrodynamics.—2nd ed.—Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1960. (Русск. перевод: Биркгоф Г. Гидродинамика.—М.: ИЛ, 1954.)
Bluman G. W., Gole J. D.
[1] Similarity methods for differential equations.—New York: Springer—Verlag, 1974.
Bluman G., Kumei S.
[1] On the remarkable nonlinear diffusion equation $\frac{\partial}{\partial x}\left[a(u+b)^{-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial u}{\partial t}=0$.—J. Math. Phys., 1980, v. 21, n° 5, p. 1019—1023.
Богоявленский О. И.
[1] Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.—М.: Наука, 1980.
Богоявленский О. И., Новиков С. П.
[1] Особенности космологической модели Бьянки IX с точки зрения качественной теории дифференциальных уравнений.—ЖЭТФ, 1973, т. 64, в. 5, с. 1475—1494.
[2] О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач.—Функц. анализ и его прилож., 1976, т. 10, в. 1, с. 9—13.
du Bois-Reymond P.
[1] Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variablen.—Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1864.
Bourbaki N.
[1] Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie, Chapitres I—III.—Paris: Hermann, 1971, 1972. (Русск. перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли.—М.; Мир, 1976.)
Бухштабер В. М., Мищенко А. С., Новиков С. П.
[1] Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии.—УМН, 1971, т. 26, в. 2, с. 131—154.
Cahen M., Kerbrat Y.
[1] Champs de vecteurs conformes et transformations des espaces lorentziens symmétriques.—J. Math. pures et appl., 1978, v. 57, p. 99—132.
Calogero F., Degasperis A.
[1] Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform.—Preprint n° 151, Roma: Istituto di Fisica, Univ. di Roma, 1979.
Candotti E., Palmieri C., Vitale B.
[1] On the inversion of Noether's theorem in the Lagrangian formalism.—Nuovo Cimento, 1970, v. 70 A, p. 233—246.
Cartan E.
[1] Sur les transformations de Bäcklund.—Bull. Soc. Math. de France, 1914, v. 43, p. 6—24.
Caudrey P. J., Dodd R. K., Gibbon J. D.
[1] A new hierarchy of Korteweg—de Vries equations.—Proc. R. Soc. London, 1976, v. A351, p. 407—422.
Chevalley C.
[1] Theory of Lie Groups, v. 1.—Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1946. (Русск. перевод: Шевалле К. Теория групп Ли, т. 1.—М.: ИЛ, 1948.)

Choquet-Bruhat Y., Christodoulou D., Francaviglia M.
[1] Cauchy data on a manifold.—Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. A, 1978, v. 29, n° 3, p. 241—255.

Clairin J.
[1] Sur les transformations de Baecklund.—Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), supplément, 1902, p. 1—63.

Cole J. D.
[1] On a quasilinear parabolic equation used in aerodynamics.—Quart. Appl. Math., 1951, v. 9, p. 225—236.

Cosgrove Ch. M.
[1] Relationships between the group—theoretic and soliton-theoretic techniques for generating stationary axisymmetric gravitational solutions. — J. Math. Phys., 1980, v. 21, n°9, p. 2417—2447.

Cotton E.
[1] Sur les invariants différentiels de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre.— Ann. Sci. École Norm. Sup., 1900, v. 17, p. 211—244.

Courant R.
[1] Partial differential equations.—New York: Interscience, 1962. (Русск. перевод: Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир. 1964.)

Darboux G.
[1] Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III.— Paris: Gauthier — Villars et Fils, 1894.

Degasperis A.
[1] Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations.—Preprint n°175, Roma: Istituto di Fisica, Univ. di Roma, 1979. Published in: Lecture Notes in Physics, 120/Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems, ed. M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani.—Berlin: Springer-Verlag, 1980.

Diaz J., Weinberger H. F.
[1] A solution of the singular initial value problem for the Euler—Poisson—Darboux equation.—Proc. Amer. Math. Soc., 1953, v. 4, p. 703—715.

Dirac P.A.M.
[1] Wave equations in conformal space.— Ann. Math., 1936, v. 37, n°2, p. 429—442.

Dodd R. K., Gibbon J. D.
[1] The prolongation structure of a higher order Korteweg-de Vries equation.—Proc. R. Soc. London, 1977, v. A358, p. 287—296.

Douglis A.
[1] A criterion for the validity of Huygens' principle.—Comm. Pure and Appl. Math., 1956, v. 9, n°3, p. 391—402.

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.
[1] Современная геометрия.—М.: Наука, 1979.

Duff G. F. D.
[1] Harmonic p-tensors on normal hyperbolic Riemannian spaces.—Canad. J. Math., 1953, v. 5, p. 57—80.
[2] Mixed problem for linear system of first order equations.—Canad. J. Math., 1958, v. 10, p. 127—160.

Eddington A. S.
[1] The Mathematical Theory of Relativity.—2nd ed.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1924. (Русск. перевод: Эддингтон А. С. Теория относительности.—М.: Гостехиздат, 1934.)

Eisenhart L. P.
[1] Continuous Groups of Transformations.—Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1933. (Русск. перевод: Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований.—М.: ИЛ, 1947.)

[2] Riemannian Geometry.—Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1926. (Русск. перевод: Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия.—М.: ИЛ, 1948.)

Faà de Bruno

[1] Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel.—Quarterly J. of Pure and Appl. Math., 1857, v. 1, p. 359—360.

Fokas A. S.

[1] A symmetry approach to exactly solvable evolution equations.—J. Math. Phys., 1980, v. 21, n°6, p. 1318—1325.

Fordy A. P., Gibbons J.

[1] Some remarkable nonlinear transformations.—Phys. Letters, 1980, v. 75A, n°5, p. 325.

Forsyth A. R.

[1] Theory of Differential Equations, v.6.—New York: Dover, 1959.

Fourés-Bruhat Y.

[1] Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux derivées partielles non linéaires.—Acta Math., 1952. v. 88, p. 141—224.

Fox D. N.

[1] The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem.—J. Math. Mech., 1959, v. 8, p. 197—219.

Friedlander F. G.

[1] The wave equation on a curved space-time.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975.

Fubini G.

[1] Sulla teoria degli spazii che ammettono un gruppo conforme.—Atti Accad. Sci. Torino, 1903, v. 38, p. 404—418.

Fuss P. H.

[1] Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle.—St. Petersbourg, 1843.

Gårding L.

[1] Sharp fronts and lacunas—Some problems and results.—В кн.: Proceedings [2], p. 130—144.

Gardner C. S.

[1] Korteweg—de Vries Equation and Generalizations, IV. The Korteweg—de Vries Equation as a Hamiltonian System.—J. Math. Phys., 1971, v. 12, n°8, p. 1548—1551.

Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.

[1] Korteweg—de Vries Equation and Generalizations. VI. Methods for Exact Solution.—Comm. Pure and Appl. Math., 1974, v. 27, p. 97—133.

Гельфанд И. М., Дикий Л. А.

[1] Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега—де Фриза.—УМН, 1975, т. 30, в. 5, с. 67—100.

[2] Структура алгебры Ли в формальном вариационном исчислении.—Функц. анализ и его прилож., 1976, т. 10, в. 1, с. 18—25.

[3] Дробные степени операторов и гамильтоновы системы.—Функц. анализ и его прилож., 1976, т. 10, в. 4, с. 13—29.

Goldstein H.

[1] Classical Mechanics. — Cambridge, Mass.: Addisson-Wesley Press, 1950. (Русск. перевод: Голдстейн Г. Классическая механика.—М.: Наука, 1975.)

Goursat E.

[1] Le problème de Bäcklund.—Memorial des sciences mathématiques, Fasc. VI, Paris: Gauthier—Villars, 1925.

[2] Cours d'analyse mathématique, t. 1.—ed. 5.—Paris: Gauthier-Villars, 1956. (Русск. перевод: Гурса Э. Курс математического анализа, т. I.—М.-Л.: ОНТИ, 1933.)

Günther P.
[1] Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typus.— Berichte über Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.— Naturwiss. Kl., 1952, Bd. 100, Heft 2.
[2] Über die Darbouxsche Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten.—Math. Nachr., 1960, Bd. 22, S. 285—321.
[3] Ein Beispiel einer nichttrivialen Huygensschen Differentialgleichung mit vier unabhängigen variablen.— Arch. Rational Mech. Anal., 1965, Bd. 18, n° 2, S. 103—106.
[4] Einige Sätze über Huygenssche Differentialgleichungen.— Wiss. Zeitschrift der Karl—Marx—Univ. Leipzig, Math.— Naturwiss. Reihe, 1965, Bd. 14, Heft 3, S. 497—507.

Günther P., Wünsch V.
[1] Maxwellsche Gleichungen und Huygenssches Prinzip I.— Math. Nachr., 1974, Bd. 63, S. 97—121.

Hadamard J.
[1] Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations.— New Haven: Yale Univ. Press, 1923. (Русск. перевод: Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.— М.: Наука, 1978.)
[2] Le principe de Huygens.— Bull. Soc. Math. de France, 1924, v. 52, p. 610—640.
[3] Principe de Huygens et la prolongement analytique.— Bull. Soc. Math. de France. 1924, v. 52, p. 241—278.
[4] Le principe de Huygens dans le cas de quatre variables indépendantes.— Acta Math., 1926, v. 49, p. 203—244.
[5] Об одном простом случае диффузии волн.—Матем. сб., 1934, т. 41, в. 3, с. 404—407.
[6] The problem of diffusion of waves.— Ann. Math., 2 Ser., 1942, v. 43, p. 510—522.

Harish-Chandra
[1] On the radical of a Lie algebra.— Proc. Amer. Math. Soc., 1950, v. 1, p. 14—17.

Harrison B. K.
[1] Bäcklund transformation for the Ernst equation of General Relativity.— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, n° 18, p. 1197—1200.

Hawking S. W., Ellis G. F. R.
[1] The large scale structure of space—time.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973. (Русск. перевод: Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени.— М.: Мир. 1977.)

Hopf E.
[1] The partial differential equation $u_t+uu_x=\mu u_{xx}$.— Comm. Pure and Appl. Math., 1950, v. 3, p. 201—230.

Hornich H.
[1] Huygenssche Differentialgleichungen im R_2.— Monatshefte für Math., 1963, Bd. 67, Heft 5, S. 433—435.

Huygens Ch.
[1] Traité de la lumière.— Hague: Pierre vander Aa, 1690; reprinted in: Oeuvres complètes, v. 19.— Hague: Martinus Nijhoff, 1937, p. 451—548. (Русск. перевод: Гюйгенс Х. Трактат о свете.— М.: ОНТИ, 1935.)

Жибер А. В.
[1] Уравнения n-волн и система нелинейных уравнений Шредингера.— Теор. и матем. физика, 1982, т. 52, № 3, с. 405—413.

Жибер А. В., Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.
[1] Алгебры Ли—Беклунда нелинейных дифференциальных уравнений.— УМН, 1979, т. 34, в. 4, с. 148—149.
[2] Уравнения типа Лиувилля.— ДАН СССР. 1979, т. 249, № 1, с. 26—29.

Ж и б е р А. В., Ш а б а т А. Б.
[1] Уравнения Клейна — Гордона с нетривиальной группой.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 5, с. 1103—1107.
З а х а р о в В. Е., М а н а к о в С. В.
[1] К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, в. 5, с. 1651—1673.
И б р а г и м о в Н. Х.
[1] Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1967.
[2] Классификация инвариантных решений уравнений двумерного нестационарного движения газа.— Ж. прикл. мех. и техн. физики, 1968, № 4, с. 19—22.
[3] Преобразования, сохраняющие гармонические координаты.— ДАН СССР, 1968, 181, № 5, с. 1050—1053.
[4] К групповой классификации дифференциальных уравнений второго порядка.— ДАН СССР, 1968, т. 183, № 2, с. 174—177.
[5] Об инвариантности уравнений Дирака.— ДАН СССР, 1969, т. 185, № 6, с. 1225—1228.
[6] Волновое уравнение в римановом пространстве.— В сб.: Динамика сплошной среды, в. 1.— Новосибирск, 1969, с. 36—47.
[7] Группы обобщенных движений.— ДАН СССР, 1969, т. 187, № 1.
[8] Инвариантные вариационные задачи и законы сохранения.— Теор. и матем. физика, 1969, т. 1, № 3, с. 350—359.
[9] Конформная инвариантность и принцип Гюйгенса.— ДАН СССР, 1970, т. 194, № 1, с. 24—27.
[10] Принцип Гюйгенса.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики.— Л.: Наука, 1970, с. 159—170.
[11] Группы Ли в некоторых вопросах математической физики.— Новосибирск: НГУ, 1972.
[12] Законы сохранения в гидродинамике.— ДАН СССР, 1973, т. 210, № 6, с. 1307—1309.
[13] Группы Ли — Беклунда и законы сохранения.— ДАН СССР, 1976, т. 230, № 1, с. 26—29.
[14] Group theoretical nature of conservation theorems.— Letters in Math. Phys., 1977, v. 1, p. 423—428.
[15] Тождество Нётер.— В сб.: Динамика сплошной среды, в. 38.— Новосибирск, 1979, с. 26—32.
[16] К теории групп преобразований Ли — Беклунда.— Матем. сб., 1979, т. 109, № 2, с. 229—253.
[17] Group — theoretic approach to nonlinear evolution equations.— Lecture at Study Group on Solitons, Partial Differential Equations and Spectral Methods.— Trieste, 16—27 July 1979.
[18] Sur l'équivalence des équations d'évolution, qui admettent une algèbre de Lie — Bäcklund infinie.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1981, Sér. I, v. 293, p. 657—660.
I b r a g i m o v N. H., A n d e r s o n R. L.
[1] Lie — Bäcklund tangent transformations.— J. Math. Anal. and Appl., 1977, v. 59, n° 1, p. 145—162.
И б р а г и м о в Н. Х., М а м о н т о в Е. В.
[1] Sur le problème de J. Hadamard relatif à la diffusion des ondes.— C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1970, t. 270, p. 456—458.
[2] О задаче Коши для уравнения $u_{tt} - u_{xx} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x-t)\, u_{y_i y_j} = 0$.— Матем. сб., 1977, т. 102, № 3, с. 391—409.
И б р а г и м о в Н. Х., Ш а б а т А. Б.
[1] Уравнение Кортевега — де Фриза с групповой точки зрения.— ДАН СССР, 1979, т. 244, № 1, с. 57—61.

[2] Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли—Беклунда.— Функц. анализ и его прилож., 1980, т. 14, в. 1, с. 25—36.
[3] О бесконечных алгебрах Ли — Беклунда.— Функц. анализ и его прилож., 1980, т. 14, в. 4, с. 79—80.
[4] L—A pairs and infinity of L—B groups and integrals for nonlinear evolution equations.— Lecture at Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems.— Chania—Crete, 9—23 July 1980.

Jacobi C. G. J.
[1] Vorlesungen über Dynamik.—2nd. ed.— Berlin: Reimer, 1884. (Русск. перевод: Якоби К. Лекции по динамике.— М.— Л.: ОНТИ, 1936.)

Капцов О. В.
[1] Определяющие уравнения законов сохранения для эволюционных уравнений.— В сб.: Динамика сплошной среды, в. 46.— Новосибирск, 1980, с. 46—57.

Killing W.
[1] Ueber die Grundlagen der Geometrie.— J. für die reine und angew. Math. (Grelle), 1892, Bd. 109, S. 121—186.

Kirchhoff G. R.
[1] Zur Theorie der Lichtstrahlen.— Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1882, S. 641—669. Перепечатано в Ann. Phys. und Chem. Wiedeman, Leipzig, 1883, Bd. 18, S. 663—695.

Klein F.
[1] Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie.— Kgl. Ges. Wiss., Nachr., Göttingen, Math.— Phys. Kl, 1918, S. 171—189.
[2] Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. 1.— Berlin, 1921, s. 585.
[3] Vorlesungen über höhere Geometrie.— 3. Auf.— Berlin: Springer-Verlag, 1926. (Русск. перевод: Клейн Ф. Высшая геометрия.— М.: Гостехиздат, 1939.)

Kruskal M. D.
[1] Nonlinear wave equations.— Lecture Notes in Physics, 38/ Dynamical Systems, Theory and Applications, ed. J. Moser.— Berlin: Springer-Verlag, 1975, p. 310—354.

Künzle H. P.
[1] Maxwell fields satisfying Huygens' principle.— Proc. Camb. Philos. Soc., 1968, 64, Part 3, p. 779—785.

Lagnese J. E.
[1] A solution of Hadamard's problem for a restricted class of operators.— Proc. Amer. Math. Soc., 1968, v. 19, p. 981—988.
[2] The structure of a class of Huygens' operators.— J. Math. Mech., 1969, v. 18, n° 12, p. 1195—1201.

Lagnese J. E., Stellmacher K. L.
[1] A method of generating classes of Huygens' operators.— J. Math. Mech., 1967, v. 17, n° 5, p. 461—472.

Lamb G. L.
[1] Bäcklund transformations for certain nonlinear evolution equations.— J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 2157—2165.

Lanczos K.
[1] Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen.— Phys. Z., 1922, Bd. 23, n° 24, S. 537—539.

Лапко Б. В.
[1] Об эквивалентности линейных уравнений второго порядка.— В сб.: Динамика сплошной среды, в. 18.— Новосибирск, 1974, с. 3—16.

Lax P. D.
[1] Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.— Comm. Pure and Appl. Math., 1968, v. 21, p. 467—490. (Перевод в сб. Математика, 1969, т. 13, № 5, с. 128—150.)

Lax P. D., Phillips R. S.
[1] An example of Huygens' principle.— Comm. Pure and Appl. Math., 1978, v. 31, p. 415—421.
Лезнов А. Н., Савельев М. В.
[1] Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations $x_{\alpha, z\bar{z}} = \exp(Kx)_\alpha$ and its integrability.— Letters in Math. Phys., 1979, v. 3, p. 489—494.
Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б.
[1] Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем.— Препринт 81—11, Серпухов: ИФВЭ, 1981.
Levi E. E.
[1] Sulla struttura dei gruppi finiti e continui.— Atti Accad. Torino, 1905, v. 40, p. 551—565.
Lichnerowicz A.
[1] Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme.— Paris: Masson & C^{ie}, 1955.
[2] Géométrie des groupes de transformations.— Paris: Dunod, 1958.
[3] Propagateurs et commutateurs en relativité générale.— Publ. Math. I. H. E. S., Paris, 1961, 10.
[4] Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale.— Bull. Soc. Math. de France, 1964, v. 92, p. 11—100.
Lie S.
[1] Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen.— Math. Ann., 1874, Bd. 8, Heft 2, S. 215—288; 1875, Bd. 8, Heft 3, S. 289—303.— Ges. Abhandl., Bd. 4, S. 1—96.
[2] Zur Theorie der Flächen konstanter Krümnung, III, IV.— Arch. Math. og Naturvidenskab, 1880, Bd. 5, Heft 3, S. 282--306, 328—358.— Ges. Abhandl., Bd. 3, S. 398—446.
[3] Diskussion der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dx\,dy} = F(z)$.— Arch. for Math., Kristiania, 1881, Bd. 6, Heft 1, S. 112—124.— Ges. Abhandl., Bd. 3, S. 469—478.
[4] Vorlesungen über continuerliche Gruppen.— Leipzig: Teubner, 1893. (Bearbeitet und herausgegeben von Dr. G. Scheffers.)
[5] Zur allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.— Leipz. Ber., 1895, Bd. 1, S. 53—128.— Ges. Abhandl., Bd. 4, S. 320—384.
[6] Gesammelte Abhandlungen.— Leipzig: B. G. Teubner — Oslo: H. Aschehoug & Co. Bd. 1, 1934; Bd. 2 (Teil 1), 1935; Bd. 2 (Teil 2), 1937; Bd. 3, 1922; Bd. 4, 1929; Bd. 5, 1924; Bd. 6, 1927.
Lie S., Engel F.
[1] Theorie der Transformationsgruppen.— Leipzig: Teubner, Bd. 1, 1888; Bd. 2, 1890; Bd. 3, 1893.
Lie S., Scheffers G.
[1] Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig: Teubner, 1896.
Магадеев Б. А., Соколов В. В.
[1] О полной алгебре Ли — Беклунда уравнения Кортевега — де Фриза.— В сб.: Динамика сплошной среды, в. 52.— Новосибирск, 1981, с. 48—55.
Maison D.
[1] Are the stationary, axially symmetric Einstein equations completely integrable? — Phys. Rev. Letters, 1978, v. 41, n° 8, p. 521—522.
[2] On the complete integrability of the stationary, axially symmetric Einstein equations.— J. Math. Phys., 1979, v. 20, n° 5, p. 871—877.
Мальцев А. И.
[1] О разложении алгебры в прямую сумму радикала и полупростой подалгебры.— ДАН СССР, 1942, т. 36, № 2, с. 46—50.
[2] О полупростых подгруппах групп Ли.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1944, т. 8, № 4, с. 143—174.

Манаков С. В.
[1] О точном решении системы нелинейных уравнений Шредингера.— Препринт 26—73, Новосибирск: ИЯФ, 1973.
Манин Ю. И.
[1] Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений.— Итоги науки и техники/Серия «Современные проблемы математики», т. 11.— М.: ВИНИТИ, 1978, с. 5—152.
Mathisson M.
[1] Le problème de M. Hadamard relatif à la diffusion des ondes.— Acta Math., 1939, v. 71, p. 249—282.
McLenaghan R. G.
[1] An explicit determination of the empty space—times on which the wave equation satisfies Huygens' principle.— Proc. Camb. Philos. Soc., 1969. v. 65, p. 139—155.
[2] On the validity of Huygens: principle for second order partial differential equations with four independet variables. Part I: derivation of necessary conditions.— Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. A, 1974, v. 20, n° 2, p. 153—188.
Miura R. M.
[1] Korteweg—de Vries Equation and Generalizations. I. A remarcable explicit nonlinear transformation.— J. Math. Phys., 1968, v. 9, n° 8, p. 1202—1203.
Mumford D.
[1] An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg—de Vries equation and related nonlinear equations.— Proc. of Kyoto conference, January, 1978.
Neugebauer G.
[1] Bäcklund transformations of axially symmetric stationary gravitational fields.— J. of Physics A: Mathematical and General, 1979, v. 12, n° 4, p. L67—L70.
Neugebauer G., Kramer D.
[1] Generation of the Kerr—NUT—solution from flat space—time by Bäcklund transformations.— Experimentalle Technik der Physik. 1980, v. 28, n° 1, p. 3—8.
Noether E.
[1] Invariante Variationsprobleme.— Kgl. Ges. Wiss., Nachr., Göttingen, Math.—Phys. Kl., 1918, 235—257. (Перевод в кн.: Вариационные принципы механики.— М.: Физматгиз, 1959, с. 611—630.)
Овсянников Л. В.
[1] Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений.— ДАН СССР, 1958, т. 118, № 3, с. 439—442.
[2] Групповые свойства дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Изд. СОАН СССР, 1962.
[3] Частичная инвариантность.— ДАН СССР, 1969, 186, № 1, 22—25.
[4] Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
Овсянников Л. В., Ибрагимов Н. Х.
[1] Групповой анализ дифференциальных уравнений механики.— Итоги науки и техники/Серия «Общая механика», т. 2.— М.: ВИНИТИ, 1975, с. 5—52.
Olver P. J.
[1] Evolution equations possessing infinitely many symmetries.— J. Math. Phys., 1977, v. 18, n° 6, p. 1212—1215.
Pauli W.
[1] Über die Invarianz der Dirac'schen Wellengleichungen gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des Linienelements im Fall verschwindener Ruhmasse.—Helvetica Physica Acta, 1940, Bd. 13. S. 204—208.
[2] On the conservation of the lepton charge.— Nuovo Cimento, 1957, v. 6, n° 1, p. 204—215.

Penrose R.
[2] Conformal treatment of infinity.— В кн.: Relativité, Groupes et Topologie/Les Houches Lectures, 1963 Summer School of Theor. Phys., Univ. Grenoble.— New York: Gordon & Breach, 1964, p. 565—584. (Перевод в кн.: Гравитация и топология.— М.: Мир, 1966, с. 152—181.)
[2] The geometry of impulsive gravitational waves.— В кн.: General Relativity/Papers in honour of J. L. Synge.— Oxford: Clarendon Press, 1972, p. 101—115.

Петров А. З.
[1] Новые методы в общей теории относительности.— М.: Наука, 1966.

Петровский И. Г.
[1] On the diffusion of waves and lacunas for hyperbolic equations.— Матем. сб., 1945, т. 17, с. 289—370.

Pham Mau Quan
[1] Sur les transformations qui laissent invariantes les équations d'Einstein.— C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 1977, t. 285, p. 1081—1084.

Понтрягин Л. С.
[1] Непрерывные группы.— М.: Гостехиздат, 1954.

Proceedings
[1] Symposium «Symmetry, Similarity and Group Theoretic Methods in Mechanics», 19—21 August, 1974, ed. P. G. Glockner, M. C. Singh.— Calgary: Univ. of Calgary, 1974.
[2] Международный симпозиум «Теоретико-групповые методы в механике», 25—29 августа 1978, ред. Н. Х. Ибрагимов, Л. В. Овсянников.— Новосибирск: Институт гидродинамики и Вычислительный центр СОАН СССР, 1978.

Riesz M.
[1] L'intégrale de Riemann—Liouville et le problème de Cauchy.— Acta Math., 1949, v. 81, p. 1—223.

Ritt J. F.
[1] Differential algebra.— New Vork: Dover, 1966.

Rosen G.
[1] Nonlinear heat conduction in solid H_2.— Phys. Rev. B, 1979, v. 19, n° 4, p. 2398—2399.

Sawada K., Kotera T.
[1] A method for finding N—soliton solutions of the K. d. V. equation and K. d. V.— like equation.— Progress of Theor. Phys., 1974, v. 51, n° 5 p. 1355—1367.

Schimming R.
[1] Das Huygenssche Prinzip bei linearen hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für allgemeine Felder.— Beiträge zur Analysis, 1978, Bd. 11, S. 45—90.
[2] A review of Huygens' principle for linear hyperbolic differential operators.— В кн.: Proceedings [2], p. 214—225.

Schwartz L.
[1] Théorie des distributions, t. I, II.— Paris: Hermann, 1950, 1951.

Седов Л. И.
[1] Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1967.

Семёнов-Тян-Шанский М. А.
[1] Гармонический анализ на римановых симметрических пространствах отрицательной кривизны и теория рассеяния.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, т. 40, № 3, с. 562—592.

Соколов В. В., Шабат А. Б.
[1] (L, A)—пары и замена типа Рикатти.— Функц. анализ и его прилож., 1980, т. 14, в. 2, с. 79—80.

Solomon J. M.
[1] Huygens' principle for a class of singular Cauchy problems.— J. Diff. Equations, 1971, v. 10, n° 2, p. 219—239.

Stellmacher K. L.
[1] Ein Beispiel einer Huygensschen Differentialgleichung.— Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math.— Phys. Kl. IIa, 1953. Bd. 10, S. 133—138.
[2] Eine Klasse Huygensscher Differentialgleichungen und ihre Integration.— Math. Ann., 1955, Bd. 130, n° 3, S. 219—233.
Suguri T., Ueno S.
[1] Some notes on infinitesimal conformal transformations.— Tensor N. S., 1972, v. 24, p. 253.
Taub A. H.
[1] A characterization of conformally flat spaces.— Bull. Amer. Math. Soc., 1949, v. 55, n° 2, p. 85—89.
Tedone O.
[1] Sull'integrazione dell'equazione $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}=0$.— Ann. di Mat. Pura Appl., Ser. IIIa, 1898, v. 1, p. 1—23.
Тешуков В. М.
[1] Центрированные волны в пространственных течениях газа.— В сб.: Динамика сплошной среды, в. 39.— Новосибирск, 1979, с. 102—118
Tresse A.
[1] Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations.— Acta Math., 1894, v. 18, p. 1—88.
Truesdell C.
[1] Essays in the History of Mechanics.— New York: Springer-Verlag, 1968.
Фок В. А.
[1] Теория пространства, времени и тяготения.— М.: Физматгиз, 1961.
[2] Zur Theorie des Wasserstoffatoms.— Z. Phys., 1935, Bd. 98, S. 145—154.
Vessiot E.
[1] Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations.— Acta Math., 1904, v. 28, p. 307—349.
Volterra V.
[1] Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.— Acta Math., 1894, v. 18, p. 161—232.
Wahlquist H. D., Estabrook F. B;
[1] Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg—de Vries equation.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1386—1390.
Watson G. N.
[1] A treatise on the theory of Bessel functions.—2nd ed.— Cambridge: Cambridge Univ. Press; New York: Macmillan, 1944. (Русск. перевод: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. 1.— М.: ИЛ, 1949.)
Weinstein A.
[1] Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson et l'équation des ondes.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1952, t. 234, p. 2584—2585.
Whitehead J. H. C.
[1] On the decomposition of an infinitesimal group.— Proc. Camb. Philos. Soc., 1936, v. 32, p. 229—237.
Wilson G.
[1] Commuting flows and conservation laws for Lax equations.— Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 1979, v. 86, Part 1, p. 131—143.
Wünsch V.
[1] Maxwellsche Gleichungen und Huygenssches Prinzip II.— Math. Nachr., 1976, Bd. 73, S. 19—36.
[2] Cauchy—Problem und Huygenssches Prinzip bei einigen Klassen spinorieller Feldgleichungen.— Beiträge zur Analysis, 1978, Bd. 12, S. 47—76; 1979, Bd. 13, S. 147—177.
Хабиров С. В.
[1] Одно инвариантное решение уравнений мелкой воды.— В сб.: Динамика сплошной среды, в. 3.— Новосибирск, 1969, с. 82—90.

[2] Вычисление алгебры Ли — Беклунда для уравнений второго порядка.— Матем. заметки, 1982, т. 34, № 2,

Хамитова Р. С.

[1] Структура группы и базис законов сохранения.— Теор. и матем. физика, 1982, т. 52, № 2, с. 244—251.

Чупахин А. П.

[1] Нетривиальные конформные группы в римановых пространствах.— ДАН СССР, 1979, т. 246, № 5, с. 1056—1058.

[2] О группе Ли — Беклунда для уравнения развертывающихся поверхностей.— В сб.: Динамика сплошной среды, в. 43.— Новосибирск, 1979, с. 141—156.

Шабат А. Б.

[1] Об уравнении Кортевега — де Фриза.— ДАН СССР, 1973, т. 211, № 6, с. 1310—1313.

Шабат А. Б., Ямилов Р. И.

[1] Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана.— Препринт, Уфа: Башкирский филиал АН СССР, 1981.

Yano K.

[1] The theory of Lie derivatives and its applications.— Amsterdam: North — Holland, 1957.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ