

Новое
в жизни,

МАТЕМАТИКА

стимулировали большое число исследований (см. книги [7], [9] и обзор [10]).

тельно придумать примеры однопараметрических семейств преобразований, не В абстрактной теории групп эти три свойства кладутся в основу определения

но) удовлетворяет групповому свойству (1.5).

● Пример 1.3. Зададим на вещественной прямой векторное поле $\xi(x)=x$ и ре-

Эта система легко решается и дает не при всех значениях $a, b \in \Delta$, а только для a, b из некоторого подынтервала

$$x' = -\frac{1}{a}, \quad y' = -\frac{C_2}{b}.$$

Из начального

параметром) получилось уравнение Ли Это дает требуемое равенство (1.13).
(1.8). Поэтому из теоремы 1.1 следует, Теорема доказана. (1.14)

оператор группы, то преобразования этой группы находятся путем решения

(VI) Неоднородное растяжение: $x' = xe^a, y' = ye^{ka};$

или

$$F(x) = (1 + \chi)^{-1} (a\chi)^2 \dots F(x)$$

○ **Упражнение 1.6.** Вычислите все члены ряда (1.20) в одномерном случае ($z=x$)

Здесь оператор (1.22) равен $X = \frac{\partial}{\partial x} F_1(z) = 0, \dots, F_s(z) = 0, s \leq N. (1.25)$
Согласно теореме 1.3 в кн. Существование этого решения по порядку

Тогда условие (1.26) упрощается и принимает вид инвариантом — не выполнено условие (1.14'). Но тот же параболоид можно

и индуцированная группа \tilde{G} действует
в $(N-s)$ -мерном пространстве перемен-

выберем функции

$$I(\sigma) = (\sigma^2)^2 / \sigma^1 \quad I_{(s)}(\sigma) = (\sigma^N)^2 / \sigma^1 \quad (1.38)$$

**§ 2. ГРУППЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ**

$$u'_t = (u_t + a^2 u - 2au_x) e^{-(ax+a^2t)},$$

$$u'_x = (u_x - au) e^{-(ax+a^2t)},$$

как найти остальные и доказать, что здесь X дается формулой (2.6), а значок найдены все преобразования, допускае- «2» указывает, что оператор (2.7) по-

переменных. Будем считать эти функции аналитическими.

честве своих составных элементов дифференциальное многообразие и определе-

водных при точечных преобразованиях (2.13), (2.14) определяется формулой

где $\xi_{ij}^\alpha = \left. \frac{\partial u_{ij}^\alpha}{\partial a} \right|_{a=0}$. Покажите, что

цируя (2.18) с помощью (2.17). Если преобразования (2.13), (2.14) образывали дифференциальных уравнений относительно ξ^i, η^α будет переопределенной, что

чтобы коэффициент при u_{xy} был равен нулю: остальные — равными нулю. В результате, записывая вместо получаемых зна-

$$\eta_t - u\eta_x = 0.$$

(2.36) уравнение (2.34) линеаризуется и принимает вид

Они представляются собой линейные

Выберем любые два оператора из (2.33), скажем, X_3 и X_4 , построим $T_{a_6}T_{a_4}$: $y' = ye^{a_6}$, $u' = ue^{-2a_6} + ya_4e^{-2a_6}$ представляет собой двухпараметриче

их можно включить в трехпараметрическое семейство преобразований, по-

которое легко выводится из (2.39) и которое можно взять за определение ком-

ных операторов принадлежат L_r , т. е.
когда

$$X_v = \xi_v^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad v = 1, \dots, r, \quad (2.44)$$

данной системой дифференциальных уравнений. Имея это в виду, мы будем

крытие, что все эти приемы, которые казались искусственными и лишними

Так как выражение $dF/\Phi(F)$ является полным дифференциалом, а приве-

$$\frac{xdy + (xy^2 - 2/x)dx}{x^2y^2 - xy - 2} = \frac{xdy + ydx}{x^2y^2 - xy - 2} + \frac{dx}{x} =$$

Первое из этих решений содержится в однопараметрическом семействе решений (6.7). После разрешения относительно y получаем общее решение исходного уравнения (6.8).

$$y_0(x) \frac{dz}{dx} = Q(x).$$

Это и есть общий вид обыкновенного дифференциального уравнения пер-

мера 3.2 с заменой (x, \dot{y}) на (y, \dot{y}) ; имеем имеем $n=1/2$, $A=-2/x$, $B=x$. По-
этому формула (3.16) дает интеграл

$$(IV) \quad \dot{y} = \frac{y}{x} + xF\left(\frac{y}{x}\right), \quad X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial}{\partial y};$$

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

тельно преобразований группы с оператором X . Но указанная совокупность второго порядка в виде уравнения первого порядка

но и проинтегрировать его. Уравнение (3.21') в данном случае имеет вид

постоянной C , а затем при $C=1$ с последующим растяжением. ○

вой классификации, осуществляется на основе определяющего уравнения (2.25).

○ **Упражнение 3.13.** Проверьте, что в соответствии с теоремой 3.1

чаются уравнения второго порядка, допускающие оператор вида

Указание: вычисления достаточно провести для первого оператора; ре-

$$(IX) \quad p(x)\ddot{y} - p''(x)y = F(x, p(x)\dot{y} - p'(x)y),$$

уравнений выражается через конечное число m произвольно выбранных част-

● Пример 4.2. Для неоднородного линейного уравнения Поэтому здесь операторами (4.5) являются

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x, y) рассматриваемой системы связаны двумя соотношениями

постоянстве агармонического отношения любых четырех решений уравнения

алгебра Ли L_r , которая является либо
трехмерной алгеброй с базисом операторов

Доказательство. Заметим сначала, что любая замена x сохраняет

Поэтому операторами (4.5') здесь являются

● Пример 4.8. Уравнение $\frac{dx}{dt} = t + x^2$ имеет двучленный вид (4.4') с коэф-

обладает одним из следующих четырех свойств, то оно обладает и тремя дру- из которых являются так называемые ин- вариантные решения. Здесь иллюстриру-

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы в n -мерном пространстве. Та-

относительно вращений и растяжений, т. е. относительно группы с инфинитези-

(5.9) (5.9)

Этой алгебре соответствует группа G_4 , которая состоит из переносов t, x ,

$$z = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.11)$$

известно начальное распределение, не решая дифференциальное уравнение.

Выясните, используя формулу (5.5), допускает ли группу проективных преобразований уравнение (5.13) ($c = n-1$). Выясните аналогичный вопрос

— (x^3+x^2+x+1) в соответствии с уравнением (6.1). Кроме того, эта замена

$$x_1 = \varepsilon, \quad x_2 = \varepsilon^2, \quad x_3 = \varepsilon^3, \quad x_4 = \varepsilon^4 \quad (\varepsilon = e^{2\pi i/5}) \quad (6.6)$$

