Новое
в жизни,

МАТЕМАТИКА

[redacted]

ББК 22.161
И 15

[redacted]

стимулировали большое число исследований (см. книги [7], [9] и обзор [10]).

[redacted]

§ 1. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

[redacted]

кретному значению параметра a, то значение параметра, отвечающее обратному [redacted] тельно придумать примеры однопараметрических семейств преобразований, не [redacted]

В абстрактной теории групп эти три свойства кладутся в основу определения [redacted] но) удовлетворяет групповому свойству (1.5).

[redacted]

● Пример 1.3. Зададим на вещественной прямой векторное поле $\xi(x)=x$ и ре-

[redacted]

Эта система легко решается и дает [redacted]

не при всех значениях a, $b \in \Delta$, а только для a, b из некоторого подынтервала [redacted] *параметром*) получилось уравнение Ли (1.8). Поэтому из теоремы 1.1 следует, [redacted]

Это дает требуемое равенство (1.13). Теорема доказана.

[redacted]

оператор группы, то преобразования этой группы находятся путем решения [redacted]

(VI) Неоднородное растяжение: $x' = xe^a$, $y' = ye^{ka}$; [redacted] или

[redacted]

○ ***Упражнение 1.6.*** Вычислите все члены ряда (1.20) в одномерном случае ($z=x$) [redacted]

Здесь оператор (1.22) равен $X=$

[redacted]

$$F_1(z)=0,\ \ldots,\ F_s(z)=0,\quad s\leqslant N. \quad (1.25)$$

[redacted]

Тогда условие (1.26) упрощается и принимает вид

[redacted]

инвариантом — не выполнено условие (1.14′). Но тот же параболоид можно

[redacted]

и индуцированная группа $\tilde{G}$ действует в $(N-s)$-мерном пространстве перемен-

[redacted]

выберем функции

[redacted]

§ 2. ГРУППЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ

$$u'_{t'}=(u_t+a^2u-2au_x)\,e^{-(ax+a^2t)},$$

$$u'_{x'}=(u_x-au)\,e^{-(ax+a^2t)},$$

[redacted]

как найти остальные и доказать, что найдены все преобразования, допускае- [redacted]

здесь X дается формулой (2.6), а значок «2» указывает, что оператор (2.7) по- [redacted] переменных. Будем считать эти функции аналитическими.

[redacted]

честве своих составных элементов дифференциальное многообразие и определе-

[redacted]

водных при точечных преобразованиях (2.13), (2.14) определяется формулой

[redacted]

где $\zeta^{\alpha}_{ij} = \left.\frac{\partial u'^{\alpha}_{ij}}{\partial a}\right|_{a=0}$. Покажите, что

[redacted]

цируя (2.18) с помощью (2.17). Если преобразования (2.13), (2.14) образовывали [redacted]

дифференциальных уравнений относительно ξ^i, η^α будет переопределенной, что [redacted] чтобы коэффициент при u_{xy} был равен нулю:

[redacted]

остальные — равными нулю. В результате, записывая вместо получаемых зна-

[redacted]

$$\eta_t - u\eta_x = 0. \qquad (2.36)$$

[redacted]

уравнение (2.34) линеаризуется и принимает вид

[redacted]

Выберем любые два оператора из (2.33), скажем, X_3 и X_4, построим [redacted]

$$T_{a_6} T_{a_4}: \; y' = y e^{a_6}, \;\; u' = u e^{-2a_6} + y a_4 e^{-2a_6}$$

[redacted]

их можно включить в трехпараметрическое семейство преобразований, по- [redacted]

которое легко выводится из (2.39) и которое можно взять за определение ком- [redacted] ных операторов принадлежат L_r, т. е. когда

$$X_\nu = \xi^i_\nu(z)\frac{\partial}{\partial z^i}, \quad \nu = 1, \dots, r, \quad (2.44)$$

данной системой дифференциальных уравнений. Имея это в виду, мы будем [redacted]

крытие, что все эти приемы, которые казались искусственными и лишенными [redacted]

Так как выражение $dF/\Phi(F)$ является полным дифференциалом, а приве-

[redacted]

$$\frac{xdy+(xy^2-2/x)dx}{x^2y^2-xy-2}=\frac{xdy+ydx}{x^2y^2-xy-2}+\frac{dx}{x}=$$

[redacted]

Первое из этих решений содержится в однопараметрическом семействе ре-

[redacted]

После разрешения относительно y получаем общее решение исходного уравне-

[redacted]

$$y_0(x)\frac{dz}{dx}=Q(x).$$

Это и есть общий вид обыкновенного дифференциального уравнения пермера 3.2 с заменой $(x, \dot{y})$ на $(y, \dot{y})$; имеем [redacted]

имеем $n=1/2$, $A=-2/x$, $B=x$. Поэтому формула (3.16) дает интеграл [redacted]

(IV) $\quad \dot{y}=\frac{y}{x}+xF\left(\frac{y}{x}\right), \quad X=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y};$	$X=\xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y},$

тельно преобразований группы с оператором X. Но указанная совокупность

[redacted]

второго порядка в виде уравнения первого порядка

[redacted]

но и проинтегрировать его. Уравнение (3.21′) в данном случае имеет вид

[redacted]

постоянной C, а затем при $C=1$ с последующим растяжением. ○

[redacted]

вой классификации, осуществляется на основе определяющего уравнения (2.25). [redacted]

○ ***Упражнение 3.13.*** Проверьте, что в соответствии с теоремой 3.1 [redacted] чаются уравнения второго порядка, допускающие оператор вида

[redacted]

Указание: вычисления достаточно провести для первого оператора; ре-

[redacted]

(IX) $p(x)\ddot{y} - p''(x)y = F(x, p(x)\dot{y} - p'(x)y),$

[redacted]

уравнений выражается через конечное число m произвольно выбранных част-

[redacted]

● Пример 4.2. Для неоднородного линейного уравнения

[redacted]

Поэтому здесь операторами (4.5) являются

[redacted]

(x_1,y_1), (x_2,y_2) и (x,y) рассматриваемой системы связаны двумя соотношениями

[redacted]

постоянстве ангармонического отношения любых четырех решений уравнения

[redacted]

алгебра Ли L_r, которая является либо трехмерной алгеброй с базисом операто- [redacted]

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим сначала, что любая замена x сохраняет [redacted]

Поэтому операторами (4.5′) здесь являются

[redacted]

● Пример 4.8. Уравнение $\frac{dx}{dt}=t+x^2$

[redacted]

обладает одним из следующих четырех свойств, то оно обладает и тремя дру-
[redacted]

из которых являются так называемые инвариантные решения. Здесь иллюстриру-
[redacted]

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве. Та- [redacted]

относительно вращений и растяжений, т. е. относительно группы с инфинитези- [redacted]

Этой алгебре соответствует группа G_4, которая состоит из переносов t, x,

$$z = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}\,. \qquad (5.11)$$

[redacted]

известно начальное распределение, не решая дифференциальное уравнение. [redacted]

Выясните, используя формулу (5.5), допускает ли группу проективных преобразований уравнение [redacted]

$-(x^3+x^2+x+1)$ в соответствии с уравнением (6.1). Кроме того, эта замена

[redacted]

$$x_1=\varepsilon,\quad x_2=\varepsilon^2,\quad x_3=\varepsilon^3,\quad x_4=\varepsilon^4\quad (\varepsilon=e^{2\pi i/5}) \tag{6.6}$$

[redacted]