В. Г. ИМШЕНЕЦКІЙ.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1-го и 2-го порядковъ.

ИЗДАНІЕ МОСКОВСКАГО МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПОДЪ РЕДАКЦІЕЮ

проф. К. А. АНДРЕЕВА.

МОСКВА.
Типографія Г. Лисснера и Д. Совко.
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. 9.
1916.

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Среди произведеній академика В. Г. Имшенецкаго совершенно особое мѣсто, и по значенію для науки и по характеру выполненія, принадлежитъ двумъ его диссертаціямъ, посвященнымъ изложенію методовъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и напечатаннымъ въ первый разъ въ «Ученыхъ Запискахъ Казанскаго университета» въ 1865 и 1869 годахъ. Вскорѣ по своемъ появленіи труды эти получили широкую извѣстность въ европейскомъ ученомъ мірѣ, чему не мало содѣйствовало изданіе перевода ихъ на французскій языкъ, сдѣланнаго Houel'емъ, профессоромъ физико-математическаго факультета въ Бордо. Переводъ этотъ между прочимъ помѣщенъ полностью въ извѣстномъ нѣмецкомъ журналѣ «Archiv der Mathematik und Physik», издававшемся Grunert'омъ, профессоромъ университета въ Грейфсвальдѣ. У насъ въ Россіи диссертаціи В. Г. Имшенецкаго получили также всеобщее признаніе, какъ крупный вкладъ въ сокровищницу математическихъ знаній, и сдѣлались полезнымъ руководствомъ для всѣхъ молодыхъ математиковъ, усвоившихъ обычный университетскій курсъ и приступающихъ къ самостоятельному изученію высшихъ отдѣловъ математическаго анализа. Послѣднее значеніе эти сочиненія сохраняютъ въ значительной мѣрѣ и до настоящаго времени, несмотря на полстолѣтіе, прошедшее съ ихъ появленія. Это можетъ быть объяснено слѣдующими ихъ особенностями:

1) Обѣ диссертаціи представляютъ довольно подробный и обстоятельный обзоръ тѣхъ научныхъ построеній, изъ которыхъ сложились основы теоріи разсматриваемыхъ въ нихъ уравненій въ трудахъ первостроителей этой теоріи отъ Лагранжа и Монжа до Якоби включительно. Въ этомъ отношеніи онѣ представляютъ интересный научно-историческій документъ.

2) Изложеніе обоихъ произведеній отличается систематичностью, ясностью и простотою, что дѣлаетъ чтеніе ихъ пріятнымъ для опытнаго математика и легкимъ для начинающаго.

3) Критическая оцѣнка авторомъ трудовъ основателей излагаемыхъ ученій, полная безпристрастія, глубокаго пониманія существа дѣла и уваженія къ авторитетамъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ

многочисленныя собственныя дополненія и указанія болѣе краткихъ путей, придаютъ произведенію характеръ научной оригинальности.

4) Разъясненія почти всѣхъ изложенныхъ пріемовъ на примѣрахъ, частію заимствованныхъ, частію самостоятельно подобранныхъ, доводятъ изложеніе до полной убѣдительности и даютъ каждому отдѣлу характеръ законченности.

Принимая во вниманіе, что диссертаціи В. Г. Имшенецкаго уже давно сдѣлались библіографической рѣдкостью, и желая сохранить отъ преждевременнаго забвенія научный трудъ, принесшій и еще продолжающій приносить развитію у насъ научной дѣятельности несомнѣнную пользу, Московское Математическое Общество постановило издать вновь эти диссертаціи и поручить редактированіе изданія профессору К. А. Андрееву.

Исполняя порученіе Общества, редакторъ счелъ своимъ долгомъ сохранить во всѣхъ подробностяхъ изложеніе автора, позволивъ себѣ лишь въ нѣкоторыхъ мѣстахъ самыя незначительныя исправленія устарѣлыхъ или не сохранившихся въ употребленіи оборотовъ рѣчи[1]). Всѣ примѣры и вычисленія тщательно провѣрены, и можно надѣяться, что число ошибокъ и типографскихъ погрѣшностей, пестрившихъ первое русское изданіе, въ значительной степени сокращено. Обѣ диссертаціи, какъ относящіяся къ одному и тому же предмету и представляющія лишь отдѣльныя части одной общей теоріи, соединены въ одну книгу, которой, сверхъ заглавій каждой части, придано еще общее заглавіе, не бывшее напечатаннымъ ранѣе. Въ виду большой точности языка автора и отсутствія вслѣдствіе этого какихъ-либо темныхъ мѣстъ, требующихъ разъясненій, а также въ виду обилія ссылокъ и указаній на литературные источники, въ особыхъ редакціонныхъ примѣчаніяхъ надобности не представилось.

Трудъ редактированія былъ значительно облегченъ участіемъ въ немъ господъ приватъ-доцентовъ университета С. С. Бюшгенса и В. В. Голубева. Означеннымъ лицамъ редакторъ приноситъ за оказанную помощь свою искреннюю благодарность.

К. Андреевъ.

---

[1]) Напр., *удовлетворять уравненіе* вмѣсто *уравненію*, или: *разсматривать постоянными* вмѣсто *какъ постоянныя.*

ОБЪ
ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЙ
СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ПЕРВАГО ПОРЯДКА.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Теорія интегрированія уравненій общаго вида съ частными производными перваго порядка, созданная трудами первоклассныхъ геометровъ новаго времени, составляетъ наиболѣе обработанную и совершенную часть интегральнаго вычисленія. Въ исторіи развитія ея особенно замѣчателенъ тотъ фактъ, что ближайшимъ послѣдователямъ Лагранжа, положившаго основанія этой теоріи (въ 1772 г.), казалось невозможнымъ продолжать проложенный имъ путь, между тѣмъ какъ окончательные успѣхи этой теоріи снова привели ее къ началамъ Лагранжа. Пфаффъ первый избралъ новую точку зрѣнія и, выходя изъ нея, достигъ (въ 1814 г.) полнаго рѣшенія задачи; но его способъ, точный теоретически, оказался мало примѣнимымъ вслѣдствіе излишнихъ затрудненій, представляемыхъ послѣдовательнымъ интегрированіемъ нѣсколькихъ системъ дифференціальныхъ уравненій. Дѣйствительно, Коши (въ 1819 г.) и Якоби (въ 1837 г.) показали различнымъ образомъ, и второй не зная объ открытіи перваго, что цѣль, къ которой вела теорія Пфаффа, достигается гораздо проще — полнымъ интегрированіемъ только первой изъ системъ дифференціальныхъ уравненій, встрѣчающихся въ способѣ Пфаффа. Такимъ образомъ, вопросъ казался исчерпаннымъ; однако Якоби, среди своей блестящей и плодовитой ученой дѣятельности, не оставлялъ этого вопроса, усовершенствованнаго его трудами и получившаго особенный интересъ, когда изслѣдованія Гамильтона показали связь его съ интегрированіемъ уравненій динамики. Пока Якоби приготовлялъ свое новое изслѣдованіе двухъ упомянутыхъ сейчасъ вопросовъ, успѣли появиться въ свѣтъ замѣчательныя произведенія другихъ математиковъ: Ліувилля, Бертрана, Донкина, Бура и пр., относящіяся къ тѣмъ же предметамъ, результаты которыхъ частію можетъ быть облегчили трудъ германскаго математика, но, вѣроятно, также иногда совпадали съ его собственными открытіями. Въ этомъ отношеніи должно остановиться только на однихъ догадкахъ, потому что изслѣдованіе Якоби издано уже послѣ смерти его, на основаніи оставленныхъ имъ бумагъ, подъ редакціею г. Клебша. Предыдущее обстоятельство объясняетъ притязанія на первенство, заявленныя въ печати нѣкоторыми авторами, то относительно основныхъ теоремъ «новаго способа Якоби», то относительно основной его мысли. Но, вѣроятно, имя великаго геометра навсегда будетъ соединено съ теоріею, созданною по его идеѣ и имъ же самимъ приведенною въ полный систематическій видъ, хотя бы отдѣльныя части ея и принадлежали другимъ, второстепеннымъ исполнителямъ.

Ограничиваясь здѣсь предыдущимъ краткимъ очеркомъ постепеннаго развитія вопроса, я предоставляю себѣ возвратиться къ бо̀льшимъ историческимъ подробностямъ въ надлежащихъ мѣстахъ самого текста разсужденія и перехожу теперь къ общему обзору его содержанія.

Въ I главѣ я разсматриваю различные виды интеграловъ уравненія съ частными производными 1-го порядка и вывожу изъ полнаго интеграла особенные и общіе способомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, основываясь на свойствѣ функціональныхъ опредѣлителей.

Во II главѣ разсмотрѣны тѣ частные виды общаго интеграла, которые приводятъ къ уравненіямъ линейнымъ въ отношеніи частныхъ производныхъ, и представленъ очеркъ теоріи интегрированія этихъ послѣднихъ, слѣдуя Лагранжу и Якоби.

Въ III главѣ изложена постановка общаго вопроса согласно взгляду, выраженному въ послѣднемъ произведеніи Якоби, и выведены условія интегрируемости Ліувилля и Донкина. Показавъ, что въ частномъ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ способъ Якоби совершенно одинаковъ со способомъ Лагранжа и Шарпи, я возвращаюсь къ общему вопросу и дѣлаю первое упрощеніе въ уравненіяхъ черезъ исключеніе входящей непосредственно неизвѣстной функціи. При этомъ указано на недостаточность употребленнаго для той же цѣли пріема Якоби.

Изъ содержанія предыдущихъ главъ видно, что главнымъ предметомъ изученія я избралъ «новый способъ» Якоби. Вскорѣ послѣ изданія его было высказано мнѣніе печатно г. Буромъ и устно г. Бертраномъ, въ одномъ изъ его курсовъ, что аналитическому построенію своей теоріи Якоби не далъ возможной простоты. Руководствуясь этими указаніями и согласнымъ съ ними собственнымъ убѣжденіемъ, я старался въ гл. IV вывести основныя теоремы способа Якоби изъ самыхъ простыхъ началъ.

Въ V главѣ подробно объясненъ ходъ интегрированій, требуемыхъ способомъ Якоби. Сначала, чтобы представить основные пріемы въ возможно простомъ видѣ, интегрируемыя уравненія не приводятся къ наименьшему числу перемѣнныхъ; при этомъ указаны могущія встрѣтиться затрудненія и разобраны случаи, гдѣ этотъ пріемъ прилагается весьма просто. Далѣе, черезъ постепенное исключеніе излишнихъ перемѣнныхъ, теоріи способа дана надлежащая полнота и приведенъ примѣръ поясняющій ходъ вычисленій.

VI глава посвящена совокупному интегрированію уравненій съ частными производными перваго порядка. Показавъ, что для рѣшенія этого болѣе общаго вопроса задача, изложенная въ предыдущихъ главахъ, представляетъ достаточныя средства для поясненія теоріи, я прилагаю ее къ вопросамъ опредѣленнымъ и неопредѣленнымъ съ частными производными 1-го порядка, приводящимъ къ совокупному интегрированію линейныхъ и не линейныхъ уравненій. Въ заключеніе разсмотрѣнъ съ новой точки зрѣнія общій вопросъ, не лишенный интереса самъ по себѣ, о выводѣ условій непосредственной интегрируемости обыкновеннаго дифференціальнаго выраженія какого угодно порядка.

Въ главѣ VII изложена теорія интегрированія обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій канонической формы; объяснена связь теоремы Пуассона относительно интеграловъ этихъ уравненій съ основною теоремою способа Якоби и показанъ пріемъ Бертрана интегрированія уравненій динамики помощію теоремы Паусеона. Обѣ теоріи приложены къ одному и тому же примѣру.

Наконецъ, въ главѣ VIII, для дополненія обзора способовъ интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка, я счелъ нелишнимъ изложить въ общемъ видѣ теорію Коши.

При изученіи предмета моего разсужденія я пользовался различными академическими изданіями, математическими журналами и отдѣльными сочиненіями, которые указаны въ надлежащихъ мѣстахъ текста. Я старался соединить въ моемъ изложеніи возможную общность съ математическою точностію и ясностію; но не могу скрыть опасенія, что строгій судъ ученой критики откроетъ многія несоблюденія этихъ трехъ условій и обнаружитъ еще другіе недостатки моей работы. Прошу въ такихъ случаяхъ принять въ оправданіе, что при первыхъ опытахъ предположенная цѣль достигается только приблизительно.

I.

§ 1. Дифференціальное уравненіе съ частными производными 1-го порядка представляетъ данное отношеніе между нѣсколькими независимыми перемѣнными, ихъ неизвѣстною функціей и ея частными производными перваго порядка.

Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ означаютъ n независимыхъ перемѣнныхъ; z—ихъ неизвѣстную функцію; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — ея частныя производныя 1-го порядка, такъ что $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$. При этихъ означеніяхъ общій типъ упомянутыхъ уравненій представится такимъ образомъ

$$F(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n,\ z,\ p_1,\ p_2, \ldots\ p_n) = 0, \tag{1}$$

разумѣя подъ знакомъ F данную функцію.

Задача интегрированія уравненія (1) состоитъ въ опредѣленіи самаго общаго выраженія функціи z, по вставкѣ котораго и его частныхъ производныхъ, уравненіе (1) приводится къ тождеству. Но прежде изложенія различныхъ способовъ интегрированія не безполезно разсмотрѣть различныя формы первообразной зависимости между перемѣнными $x_1, \ldots\ x_n,\ z$, изъ которыхъ путемъ дифференцированій и алгебраическихъ исключеній, возможно образовать одно и то же уравненіе вида (1).

Простѣйшая форма такой зависимости есть выраженіе z, какъ явной функціи независимыхъ перемѣнныхъ,

$$z = f\,(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n,\ a_1,\ a_2, \ldots\ a_n), \tag{2}$$

въ которое сверхъ того входятъ n произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_n$. Дифференцируя по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, получимъ отсюда n уравненій вида

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{3}$$

изъ которыхъ въ совокупности со (2) можно исключить n величинъ $a_1, \ldots a_n$. Если полученное такимъ образомъ уравненіе съ частными производными будетъ данное (1), тогда (2) представитъ его интегралъ. Такой интегралъ, заключающій въ своемъ выраженіи столько же произвольныхъ постоянныхъ, сколько данное уравненіе содержитъ независимыхъ перемѣнныхъ, Лагранжъ назвалъ *полнымъ*.

§ 2. Не трудно однако убѣдиться, что полный интегралъ (2) еще не представляетъ самаго общаго выраженія функціи z, могущей удовлетворить уравненіе (1). Дѣйствительно это послѣднее происходитъ изъ (2), при посредствѣ уравненій (3); и если уравненія (3) не измѣнятъ своего вида, уравненіе (2) всегда будетъ интеграломъ (1), какъ бы мы ни объобщили первоначальныя значенія $a_1, \ldots a_n$. Поэтому предположимъ, что $a_1, \ldots a_n$ означаютъ функціи перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ и посмотримъ какія условія должны выполнять эти функціи для того чтобы выраженія частныхъ производныхъ $p_1, \ldots p_n$ сохраняли свой первоначальный видъ (3).

Дифференцируя уравненіе (2) по каждому изъ перемѣнныхъ, сообразно новымъ предположеніямъ, получимъ n уравненій вида:

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\,\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\,\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\,\frac{\partial a_n}{\partial x_i},$$

которыя очевидно примутъ видъ (3), если функціи $a_1, \ldots a_n$ выполнятъ условіе

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\,\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\,\frac{\partial a_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\,\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = 0, \tag{4}$$

для всѣхъ значеній i отъ 1 до n. Эти n условій представляются подъ видомъ системы линейныхъ уравненій относительно частныхъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots \frac{\partial f}{\partial a_n}$, выключая которыя всѣ, кромѣ одной, находимъ уравненія вида

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} R = 0, \tag{5}$$

имѣющія мѣсто для всѣхъ значеній i отъ 1 до n.

Условія (5) можно удовлетворить двоякимъ образомъ: во-1-хъ полагая

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0 \tag{6}$$

для всѣхъ значеній i отъ 1 до n; мы получимъ такимъ образомъ n уравненій, достаточныхъ для опредѣленія значеній функцій $a_1, \ldots a_n$, по вставкѣ которыхъ во (2) функція z не будетъ заключать ничего произвольнаго въ своемъ выраженіи. Интегралъ, образуемый совокупностью уравненій (2) и (6), Лагранжъ назвалъ *особеннымъ*.

Во-2-хъ мы можемъ удовлетворить условія (5) болѣе общимъ образомъ, полагая

$$R = 0.$$

Но очевидно R есть опредѣлитель системы уравненій (4), составленный изъ n^2 элементовъ слѣдующей таблицы

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial a_n}{\partial x_1} \\
\frac{\partial a_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial a_n}{\partial x_2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial a_1}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_n}, \ldots \frac{\partial a_n}{\partial x_n}.
\end{array} \tag{A}$$

Опредѣлитель, составленный такимъ образомъ изъ частныхъ производныхъ n функцій, каждая по n независимыхъ перемѣнныхъ, Якоби назвалъ *функціональнымъ* и доказалъ, что если функціональный опредѣлитель тождественно равенъ нулю, то функціи его образующія не независимы между собою, но одна или нѣкоторыя изъ нихъ должны выразиться посредствомъ остальныхъ.

§ 3. По плану, принятому въ этомъ разсужденіи, должно будетъ нѣсколько разъ опереться на эту основную теорему; поэтому считаю умѣстнымъ привести здѣсь ея доказательство, которое при томъ весьма просто.

Представимъ систему уравненій $a_1=\varphi_1$, $a_2=\varphi_2,\ldots$ $a_n=\varphi_n$, выражающую a_1, $a_2,\ldots$ a_n въ функціяхъ x_1, $x_2,\ldots$ x_n. Помощію одного изъ нихъ, содержащаго x_1, положимъ 1-го, выразимъ это перемѣнное въ функціи a_1, $x_2,\ldots$ x_n; вставимъ это выраженіе въ одно изъ остальныхъ уравненій, содержащихъ x_1 и x_2, положимъ во 2-е, выразимъ a_2 въ функціи a_1, x_2, $x_3,\ldots$ x_n и отсюда x_2 выразится функціей a_1, a_2, $x_3,\ldots$ x_n; вставивъ выраженія x_1 и x_2 въ одно изъ остальныхъ уравненій, содержащее сверхъ того x_3, положимъ въ 3-е, выразимъ a_3 въ функціи a_1, a_2, $x_3,\ldots$ x_n и отсюда x_3 выразится функціей a_1, a_2, a_3, $x_4,\ldots$ x_n. Продолжая такимъ образомъ, первоначальныя выраженія a_1, $a_2,\ldots$ a_n преобразуемъ въ другія, такъ что вообще a_l представится какъ функція a_1, $a_2,\ldots$ a_{l-1}, x_l, $x_{l+1},\ldots$ x_n. Чтобы отличить частныя производныя первоначальныхъ выраженій a_l отъ частныхъ производныхъ преобразованныхъ выраженій, будемъ заключать послѣднія въ скобки. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\frac{\partial a_l}{\partial x_k}=\left(\frac{\partial a_l}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_k}\right)+\left(\frac{\partial a_l}{\partial a_2}\right)\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_k}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{\partial a_l}{\partial a_{l-1}}\right)\left(\frac{\partial a_{l-1}}{\partial x_k}\right)+\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_k}\right). \qquad \text{(M)}$$

На основаніи этой формулы заключаемъ, что опредѣлитель системы элементовъ (А) можно представить произведеніемъ опредѣлителей двухъ другихъ системъ

$$
\begin{matrix}
1, & 0, & 0,\ldots & 0 \\
\left(\frac{\partial a_2}{\partial a_1}\right), & 1, & 0,\ldots & 0 \\
\left(\frac{\partial a_3}{\partial a_1}\right), & \left(\frac{\partial a_3}{\partial a_2}\right), & 1,\ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\left(\frac{\partial a_n}{\partial a_1}\right), & \left(\frac{\partial a_n}{\partial a_2}\right), & \left(\frac{\partial a_n}{\partial a_3}\right),\ldots & 1
\end{matrix}
\qquad (B)
$$

и

$$
\begin{matrix}
\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right), & 0, & 0,\ldots & 0 \\
\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right), & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right), & 0,\ldots & 0 \\
\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right), & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right), & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right),\ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_n}\right), & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_n}\right), & \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_n}\right),\ldots & \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right).
\end{matrix}
\qquad (C)
$$

Дѣйствительно, формула (М) показываетъ, что сумма произведеній соотвѣтствующихъ элементовъ горизонтальнаго ряда l системы (В) и горизонтальнаго ряда k системы (С) образуетъ элементъ системы (А), находящійся въ ней на пересѣченіи вертикальнаго ряда l и горизонтальнаго k. Но въ системахъ (В) и (С) элементы по одну сторону главныхъ діагоналей равны нулю, поэтому опредѣлители этихъ системъ равны соотвѣтственно произведеніямъ элеметовъ главныхъ діагоналей. Слѣдовательно,

$$R=\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right)\cdots\left(\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\cdot\left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right). \qquad (7)$$

Если опредѣлитель R тождественно равенъ нулю, тогда одинъ изъ множителей произведенія во 2-й части равенства (7) долженъ быть равенъ нулю. Но первые n—1 множителей этого произведенія вообще различны отъ нуля, потому что предположено, что функція a_1 содержитъ x_1, a_2 содержитъ $x_2 \ldots$, a_{n-1} содержитъ x_{n-1}; поэтому послѣдній множитель $\left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right)$ долженъ быть равенъ тождественно нулю, т.-е. послѣ описанныхъ выше послѣдовательныхъ подстановокъ, функція a_n не должна болѣе содержать x_n явнымъ образомъ, но выражается посредствомъ одних $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$. Однако, можетъ случиться также, что, вслѣдствіе упомянутыхъ подстановокъ, ни одна изъ функцій $a_n, a_{n-1}, \ldots a_{n-k}$ не будетъ содержать явнымъ образомъ перемѣнныхъ $x_n, x_{n-1}, \ldots x_{n-k}$. Тогда, очевидно, будемъ имѣть тождественно

$$\left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right)=0, \quad \left(\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)=0, \ldots \quad \left(\frac{\partial a_{n-k}}{\partial x_{n-k}}\right)=0 \qquad \text{(q)}$$

и каждая изъ функцій $a_n, a_{n-1}, \ldots a_{n-k}$ выразится посредствомъ однихъ только $a_1, a_2, \ldots a_{n-k-1}$.

Обратная теорема очевидна. Если функціи $a_1, \ldots a_n$ не независимы отъ другихъ, но напротивъ одна a_n или нѣкоторыя изъ нихъ $a_n, a_{n-1}, \ldots a_{n-k}$ могутъ быть выражены только посредствомъ остальныхъ $a_1, a_2, \ldots a_{n-k-1}$, тогда 1-е изъ равенствъ (q), или всѣ они имѣютъ мѣсто и поэтому опредѣлитель R тождественно равенъ нулю.

§ 4. Итакъ, условіе $R=0$ можно удовлетворить самымъ общимъ образомъ, принявъ одну изъ функцій $a_1, a_2, \ldots a_n$ совершенно произвольною функціей всѣхъ остальныхъ, напримѣръ полагая

$$a_n=\pi(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-1}); \qquad (8)$$

или менѣе общимъ образомъ принявъ нѣкоторыя изъ нихъ функціями остальныхъ, напримѣръ

$$a_n=\pi_n(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-k-1}),\ a_{n-1}=\pi_{n-1}(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-k-1}), \ldots$$
$$a_{n-k}=\pi_{n-k}(a_1,\ a_2, \ldots a_{n-k-1}). \qquad (9)$$

Введя послѣднее предположеніе въ условія (4) и замѣчая при томъ, что для всякаго m, не большаго n и не меньшаго $n-k$, будетъ

$$\frac{\partial a_m}{\partial x_i}=\frac{\partial \pi_m}{\partial a_1}\;\frac{\partial a_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial \pi_m}{\partial a_{n-k-1}}\;\frac{\partial a_{n-k-1}}{\partial x_i},$$

приведемъ эти условія къ слѣдующему виду

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1}+\dfrac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\;\dfrac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_1}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \pi_n}\;\dfrac{\partial \pi_n}{\partial a_1}\right)\dfrac{\partial a_1}{\partial x_i}+\cdots\\ \cdots+\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{n-k-1}}+\dfrac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\;\dfrac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_{n-k-1}}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \pi_n}\;\dfrac{\partial \pi_n}{\partial a_{n-k-1}}\right)\dfrac{\partial a_{n-k-1}}{\partial x_i}\end{array}\right|=0.$$

Умноживъ это уравненіе на dx_i и, по умноженіи, взявъ сумму такихъ уравненій при всѣхъ значеніяхъ i отъ 1 до n, получимъ

$$\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1}+\dfrac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\;\dfrac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_1}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \pi_n}\;\dfrac{\partial \pi_n}{\partial a_1}\right)da_1+\cdots\\ \cdots+\left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{n-k-1}}+\dfrac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\;\dfrac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_{n-k-1}}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \pi_n}\;\dfrac{\partial \pi_n}{\partial a_{n-k-1}}\right)da_{n-k-1}=0.\end{array}$$

[Здѣсь кстати замѣчу, что я употребляю знакъ ∂ для выраженія частнаго и d—полнаго дифференцированія.]

Такъ какъ, по предположенію, функціи $a_1, a_2, \ldots a_{n-k-1}$ совершенно между собою независимы, то чтобы предыдущее уравненіе имѣло мѣсто при всѣхъ значеніяхъ $da_1, \ldots da_{n-k-1}$ необходимо положить

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}+\frac{\partial f}{\partial \pi_{n-k}}\cdot\frac{\partial \pi_{n-k}}{\partial a_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \pi_n}\cdot\frac{\partial \pi_n}{\partial a_i}=0 \qquad (10)$$

при всѣхъ значеніяхъ i отъ 1 до $n-k-1$.

При данномъ видѣ произвольныхъ функцій $\pi_{n-k}, \ldots \pi_n$ изъ уравненій (10) можно опредѣлить значенія функцій $a_1, \ldots a_{n-k-1}$, затѣмъ помощію уравненій (9)—значенія функцій $a_{n-k}, \ldots a_n$;

послѣ чего уравненіе (2) дастъ совершенно опредѣленное выраженіе функціи z въ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$. Такимъ образомъ система уравненій (2), (9) и (10) представляетъ интегралъ уравненія (1). Въ этомъ случаѣ выраженіе z (2) заключаетъ $k+1$ произвольныхъ функцій отъ $n-k-1$ данныхъ функцій и чѣмъ менѣе число k, тѣмъ общнѣе будетъ выраженіе z; при $k=0$ оно достигаетъ наибольшей общности. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ $k+1$ уравненій (9) замѣнятся однимъ (8) и уравненія (10) замѣнятся уравненіями

$$\frac{\partial f}{\partial a_i}+\frac{\partial f}{\partial \pi}\,\frac{\partial \pi}{\partial a_i}=0, \tag{11}$$

имѣющими мѣсто при всѣхъ значеніяхъ i отъ 1 до $n-1$.

Интегралъ, составляемый совокупностію уравненій (2), (8) и (11), Лагранжъ назвалъ *общимъ*.

§ 5. Въ дополненіе предыдущаго изслѣдованія формъ функцій, могущихъ быть интегралами уравненія съ частными производными перваго порядка, докажемъ, что всякая данная функція z перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, удовлетворяющая уравненію (1), заключается, какъ частный случай, въ системѣ его рѣшеній, состоящей изъ полнаго интеграла и произведенныхъ изъ него особеннаго и общаго.

Дѣйствительно, пусть

$$z=\varphi(x_1,\ x_2, \ldots\ x_n) \tag{12}$$

будетъ данная функція, удовлетворяющая уравненію

$$F(x_1, \ldots\ x_n,\ z,\ p_1, \ldots\ p_n)=0 \tag{1}$$

и

$$z=f(x_1, \ldots\ x_n,\ a_1, \ldots\ a_n), \tag{2}$$

представляетъ полный его интегралъ.

Написавъ систему n уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \tag{13}$$

можно вообще опредѣлить значенія n величинъ $a_1, \dots a_n$, постоянныя или перемѣнныя, повѣряющія эти уравненія; эти значенія необходимо удовлетворять также уравненію

$$f = \varphi. \tag{14}$$

Въ самомъ дѣлѣ, представивъ уравненіе (1) подъ видомъ

$$z = F(x_1, \dots x_n,\ p_1, \dots p_n),$$

по вставкѣ двухъ выраженій z (12) и (2), обратимъ его въ тождества

$$\varphi = F\left(x_1, \dots x_n\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \tag{15}$$

и

$$f = F\left(x_1, \dots x_n,\ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right). \tag{16}$$

Послѣднее изъ нихъ имѣетъ мѣсто при какихъ угодно значеніяхъ $a_1, \dots a_n$; слѣдовательно и при тѣхъ, которыя выведены изъ уравненій (13). Но, по вставкѣ этихъ послѣднихъ, 2-я часть (16) сдѣлается совершенно одинаковою со 2-й частью (15); поэтому и первыя части ихъ будутъ тождественно равны, т.-е. $f = \varphi$. Точно такъ же доказывается вообще, что если найдены значенія $a_1, \dots a_n$, повѣряющія какія-нибудь n уравненій изъ системы (13) и (14), то они удовлетворятъ также и $n+1$-му.

Дифференцируя равенство (14) по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, при чемъ $a_1, \dots a_n$, входящіе въ 1-ю его часть и опредѣленные уравненіями (13), должно разсматривать какъ функціи перемѣнныхъ, — находимъ n равенствъ вида

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

которыя на основ. (13) приведутся къ слѣдующимъ

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_i} = 0.$$

Но эти послѣднія имѣютъ видъ уравненій (4); поэтому значенія $a_1, \dots a_n$, выводимыя изъ уравненій (13) и приводящія полный интегралъ (2) къ виду (12), заключаются въ системѣ тѣхъ общихъ значеній $a_1, \dots a_n$, которыя обращаютъ полный интегралъ въ особенный или общій.

Если значенія $a_1, \dots a_n$, выведенныя изъ уравненій (13) и (14), будутъ всѣ постоянныя, тогда интегралъ (12) будетъ частнымъ случаемъ полнаго; если же значенія эти будутъ функціи перемѣнныхъ, удовлетворяющія одному или нѣсколькимъ необходимымъ отношеніямъ вида

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, \dots a_n)=0,$$

въ такомъ случаѣ интегралъ (12) будетъ частнымъ случаемъ общаго; наконецъ, если ни тотъ, ни другой случай не имѣютъ мѣста, то интегралъ (12) будетъ особеннымъ.

§ 6. Мы разсматривали полный интегралъ уравненія (1) подъ видомъ явной функціи z перемѣнныхъ $x_1, \dots x_n$; но если онъ полученъ въ видѣ неявной функціи, опредѣляемой уравненіемъ

$$\varphi(x_1, \dots x_n, z, a_1, \dots a_n)=0,$$

то способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ прилагается въ этомъ случаѣ совершенно такъ же, какъ и въ предыдущемъ. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая $a_1, \dots a_n$ какъ функціи перемѣнныхъ $x_1, \dots x_n, z$, мы можемъ опредѣлить ихъ, во-1-хъ, помощію уравненій

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}=0,$$

взятыхъ при всѣхъ значеніяхъ i отъ 1 до n. Такимъ образомъ получится особенный интегралъ.

Во-вторыхъ, предполагая $a_n, a_{n-1}, \dots a_{n-k}$ совершенно произвольными функціями $a_1, a_2 \dots a_{n-k-1}$, можно опредѣлить послѣднія какъ функціи перемѣнныхъ изъ уравненій

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-k}}\,\frac{\partial a_{n-k}}{\partial a_i}+\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\,\frac{\partial a_n}{\partial a_i}=0,$$

взятыхъ для $i=1,\ldots n-k-1$. Полученный такимъ образомъ интегралъ будетъ общимъ и достигаетъ наибольшей общности для $k=0$.

Дѣйствительно, не трудно удостовѣриться, что при каждомъ изъ трехъ предыдущихъ опредѣленій величинъ $a_1,\ldots a_n$, дифференцируя по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ уравненіе $\varphi=0$, мы получимъ n уравненій

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}p_i=0$$

всегда одного и того же вида. Слѣдовательно, исключеніе $a_1,\ldots a_n$ изъ этихъ уравненій и $\varphi=0$ во всѣхъ трехъ случаяхъ приведетъ къ одному и тому же уравненію съ частными производными, потому что результатъ исключенія не зависитъ отъ значеній, приписываемыхъ исключаемымъ величинамъ.

Замѣтимъ, что если уравненіе съ частными производными заключаетъ только двѣ независимыхъ перемѣнныхъ и функцію ихъ, то эти три перемѣнныя можно разсматривать какъ координаты точекъ пространства. Тогда полный интегралъ представитъ уравненіе поверхности, заключающее два произвольныхъ параметра. Способъ же нахожденія особеннаго и общаго интеграловъ, посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, будетъ въ этомъ случаѣ совершенно одинаковъ съ пріемомъ, употребляемымъ въ геометріи для опредѣленія обертывающихъ поверхностей (surfaces-enveloppes): въ 1-мъ случаѣ — при независимомъ измѣненіи обоихъ параметровъ, во 2-мъ — предполагая между параметрами произвольную зависимость.

II.

§ 7. Мы видѣли (§ 4, I), что самая общая форма явной функціи z, удовлетворяющей уравненію съ частными производными перваго порядка

$$F\left(x_1,\ldots x_n,\, z,\, \frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0,$$

есть слѣдующая

$$z=f[x_1,\dots x_n,\ a_1,\dots a_{n-1},\ \pi(a_1,\dots a_{n-1})].$$

Она заключаетъ въ своемъ выраженіи n независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n$, —n—1 независимыхъ между собою данныхъ функцій $a_1,\dots a_{n-1}$ тѣхъ же перемѣнныхъ и наконецъ произвольную функцію π этихъ функцій.

Разсмотримъ частный случай этой общей формы, когда въ f не входятъ непосредственно $x_1,\dots x_n$, и $a_1,\dots a_n$; тогда мы будемъ имѣть

$$z=f[\pi(a_1,\dots a_{n-1})] \quad \text{или} \quad z=\pi(a_1,\dots a_{n-1}), \qquad (1)$$

потому что π произвольная функція.

Уравненіе съ частными производными 1-го порядка, соотвѣтствующее этой формѣ интеграла, получится очень просто на основаніи теоремы (§ 3, I), вслѣдствіе которой функціональный опредѣлитель функцій $z, a_1,\dots a_{n-1}$, долженъ быть равенъ нулю, такъ какъ между ними существуетъ отношеніе (1). Поэтому имѣемъ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1}, & \frac{\partial z}{\partial x_2},\dots & \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_2},\dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_2},\dots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}=0, \qquad (2)$$

или, разлагая опредѣлитель n порядка 1-й части этого уравненія на опредѣлители n—1-го порядка, не заключающіе элементовъ 1-го горизонтальнаго ряда, получимъ уравненіе

$$R_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+R_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\dots+R_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0, \qquad (3)$$

котораго коэффиціенты $R_1, R_2,\dots R_n$ будутъ опредѣлители n—1-го порядка, составляемые изъ элементовъ предыдущаго постоянно опуская 1-й горизонтальный рядъ и послѣдовательно 1-й, 2-й,... вертикальные ряды, такъ что

$$R_i = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_{i+1}}, \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_{i-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{i+1}}, \dots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n}, & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1}, \dots & \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{i-1}} \end{vmatrix}.$$

Уравненіе (3) линейнаго вида относительно частныхъ производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}$; оно не имѣетъ члена, въ который бы частныя производныя вовсе не входили, и коэффиціенты его не содержатъ функціи z.

Возьмемъ теперь вторую формулу общаго интеграла (§ 6, I)

$$\varphi[x_1, \dots x_n, z, a_1, \dots a_{n-1}, \pi(a_1, \dots a_{n-1})] = 0,$$

посредствомъ которой неизвѣстная z опредѣляется какъ неявная функція независимыхъ перемѣнныхъ. Здѣсь φ означаетъ данную, π произвольную функцію и данныя функціи $a_1, \dots a_{n-}$ содержитъ, кромѣ независимыхъ перемѣнныхъ, самое функцію z.

Разсмотримъ частный случай, когда $a_1, \dots a_{n-1}$ не входятъ въ φ непосредственно; тогда предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\varphi[x_1, \dots x_n, z, \pi(a_1, \dots a_{n-1})] = 0.$$

Рѣшая это уравненіе относительно π, получимъ $\pi(a_1, \dots a_{n-1}) = \varphi(x_1, \dots x_n, z)$, гдѣ φ означаетъ извѣстную функцію. Полагая для однообразія $\varphi = a_n$ и пользуясь произвольностію функціи π, можемъ предыдущую зависимость замѣнить равнозначущей ей слѣдующей

$$\pi(a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a_n) = 0. \tag{4}$$

Посмотримъ, какой формы уравненіе въ частныхъ производныхъ функціи z соотвѣтствуетъ интегралу вида (4). Чтобы привести этотъ случай къ предыдущему, возьмемъ сначала уравненіе

$$\gamma=\pi(a_1,\dots a_n); \tag{5}$$

вслѣдствіе этого отношенія между функціями γ, $a_1,\dots a_n$ заключаемъ, что функціональный опредѣлитель ихъ равенъ нулю, т.-е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\gamma}{\partial x_1}, & \frac{\partial\gamma}{\partial x_2},\dots & \frac{\partial\gamma}{\partial z} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_2},\dots & \frac{\partial a_1}{\partial z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_n}{\partial x_2},\dots & \frac{\partial a_n}{\partial z} \end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

или,
$$R^{(1)}\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}+R^{(2)}\frac{\partial\gamma}{\partial x_2}+\dots+R^{(n+1)}\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0, \tag{7}$$

гдѣ $R^{(i)}$ опредѣлитель n-го порядка, составленный подобно тому, какъ въ предыдущемъ случаѣ R_i.

Но если между функціями $a_1,\dots a_n$ существуетъ отношеніе (4), то

$$\gamma=0$$

и z можетъ быть разсматриваемо какъ функція $x_1,\dots x_n$. Дифференцируя въ этомъ предположеніи послѣднее уравненіе по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, находимъ n уравненій

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}=0, \quad \text{для} \quad i=1,\ 2,\dots\ n,$$

посредствомъ которыхъ уравненіе (7) преобразуется въ слѣдующее

$$R^{(1)}\,\frac{\partial z}{\partial x_1}+R^{(2)}\,\frac{\partial z}{\partial x_2}+\dots+R^{(n)}\,\frac{\partial z}{\partial x_n}=R^{(n+1)}. \tag{8}$$

Это послѣднее также линейное въ отношеніи частныхъ производныхъ функціи z, но болѣе общаго вида чѣмъ (3), потому что имѣетъ членъ $R^{(n+1)}$, не заключающій частныхъ производныхъ z, и въ коэффиціентахъ его кромѣ независимыхъ перемѣнныхъ входитъ сама функція z.

Такимъ образомъ показаны самыя общія формы первообразной зависимости между независимыми перемѣнными и ихъ функціею, которыя приводятъ къ линейнымъ уравненіямъ относительно частныхъ производныхъ. Эти уравненія, слѣдовательно, могутъ быть одной изъ 2-хъ общихъ формъ (3) или (8); но предыдущій анализъ показываетъ, что отъ уравненія (8) можно возвратиться къ (7), которое того же самаго вида какъ (3), только содержитъ однимъ независимымъ перемѣннымъ болѣе. Уравненіе (6), одноэначущее съ (7), повѣряется тождественно, если вмѣсто функціи γ будутъ вставлены каждая изъ функцій $a_1, \ldots a_n$, потому что тогда первая часть его представляетъ опредѣлитель, заключающій по два одинаковыхъ горизонтальныхъ ряда. Слѣдовательно, $a_1, \ldots a_n$ будутъ n различныхъ частныхъ рѣшеній или интеграловъ уравненія (7) и самое общее значеніе функціи γ будетъ, какъ показываетъ формула (5), — произвольная функція этихъ частныхъ интеграловъ. Наконецъ эта произвольная функція, уравненная нулю (или произвольному постоянному, что нисколько не общѣе), будетъ, какъ показываетъ формула (4), общимъ интеграломъ уравненія (8).

Отсюда уже можно предвидѣть общій ходъ интегрированія линейнаго уравненія вида (8), когда въ немъ $R^{(i)}$ будутъ какія-нибудь данныя функціи $x_1, \ldots x_n$, z. Должно будетъ привести его къ виду (7), потомъ опредѣлить n независимыхъ функцій, повѣряющихъ это послѣднее; тогда произвольная функція этихъ функцій, уравненная нулю, будетъ самымъ общимъ интеграломъ разсматриваемаго уравненія.

Это предположеніе вполнѣ подтверждается теоріею, изложенною въ слѣдующихъ двухъ параграфахъ.

§ 8. Лагранжъ, предложившій первый теорію интегрированія линейныхъ уравненій, представилъ ее окончательно въ слѣдующемъ видѣ.

Возьмемъ уравненіе линейное въ отношеніи частныхъ производныхъ общаго вида

$$A_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+A_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=A, \tag{9}$$

въ которомъ $A, A_1,\ldots A_n$ означаютъ данныя функціи $x_1,\ldots x_n$ и z.

Представимъ интегралъ его уравненіемъ

$$\gamma(x_1,\ldots x_n,z)=0, \tag{10}$$

изъ котораго z можно опредѣлить какъ функцію $x_1,\ldots x_n$. Дифференцируя его въ этомъ предположеніи по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, получимъ n равенствъ

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_i}=-\frac{\partial\gamma}{\partial x_i},\quad \text{для}\quad i=1,\ 2,\ldots\ n.$$

Слѣдовательно, умноживъ данное уравненіе на $\frac{\partial\gamma}{\partial z}$ и перенеся потомъ всѣ члены его во 2-ю часть, получимъ равенство

$$0=A\frac{\partial\gamma}{\partial z}+A_1\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial\gamma}{\partial x_n}. \tag{11}$$

Съ другой стороны, разсматривая z какъ функцію, опредѣляемую уравненіемъ (10) и взявъ полный дифференціалъ γ въ этомъ предположеніи, будемъ имѣть тождество

$$d\gamma=0;$$

но
$$d\gamma=\frac{\partial\gamma}{\partial z}\,dz+\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}\,dx_1+\cdots+\frac{\partial\gamma}{\partial x_n}dx_n;$$

поэтому, вставивъ сюда значеніе одной изъ частныхъ производныхъ γ, напр. $\frac{\partial\gamma}{\partial z}$, выведенное изъ равенства (11), будемъ имѣть

$$d\gamma=\left(dx_1-\frac{A_1}{A}\,dz\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}+\cdots+\left(dx_n-\frac{A_n}{A}\,dz\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x_n}.$$

Это выраженіе показываетъ, что $d\gamma$ будетъ тождественно нулемъ, если между перемѣнными $x_1, \dots x_n$, z будутъ установлены отношенія, удовлетворяющія уравненіямъ

$$dx_1 - \frac{A_1}{A} dz = 0, \dots \; dx_n - \frac{A_n}{A} dz = 0. \qquad (12)$$

Но для n обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (12) 1-го порядка между $n+1$ перемѣнными, можно опредѣлить n различныхъ интеграловъ, заключающихъ n произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \dots a_n$. Положимъ эти интегралы, разрѣшенные въ отношеніи произвольныхъ постоянныхъ, будутъ

$$\varphi_1(x_1, \dots x_n, z) = a_1, \; \varphi_2(x_1, \dots x_n, z) = a_2, \dots \varphi_n(x_1, \dots x_n, z) = a_n. \quad (13)$$

Помощію n уравненій, представляемыхъ интегралами уравненій (12) можно также n изъ перемѣнныхъ $x_1, \dots x_n$, z выразить функціями остального и произвольныхъ постоянныхъ. При вставкѣ этихъ выраженій въ функцію $\gamma(x_1, \dots x_n, z)$ и остальное перемѣнное, функціями котораго выражены всѣ прочія, должно само собою исчезнуть, потому что $d\gamma$ должно быть нулемъ; слѣдовательно, послѣ вставки, γ будетъ содержать только произвольныя постоянныя $a_1, \dots a_n$.

Отсюда, очевидно, слѣдуетъ, что самый общій видъ, который можетъ имѣть функція γ, чтобы удовлетворить предыдущему требованію, есть слѣдующій

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n),$$

гдѣ π означаетъ совершенно произвольную функцію, и φ_1, $\varphi_2, \dots \varphi_n$ функціи, составляющія первыя части уравненій (13). Дѣйствительно, разрѣшивъ уравненія (13), относительно которыхъ-нибудь n изъ величинъ $x_1, \dots x_n$, z, и вставивъ обратно найденныя рѣшенія въ тѣ уравненія, изъ которыхъ онѣ выведены, мы должны привести эти послѣднія въ тождества; такимъ образомъ φ_1 обратится въ a_1, φ_2 въ a_2, и т. д. Слѣдовательно, общій интегралъ уравненія (9) будетъ

$$\pi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n) = 0.$$

Почти въ такомъ видѣ изложена теорія линейныхъ уравненій въ XX урокѣ «Sur le calcul des fonctions» (изданіе 1806 г.) Лагранжа, гдѣ, показавъ ея примѣненіе при 2 и 3 независимыхъ перемѣнныхъ, онъ говоритъ, «предыдущій анализъ проще и прямѣе даннаго мною въ теоріи функцій, что и побудило меня помѣстить его здѣсь, тѣмъ болѣе что онъ прилагается съ равною легкостію къ подобнымъ уравненіямъ и съ большимъ числомъ перемѣнныхъ. Въ берлинскихъ же мемуарахъ 1779 года я ограничился доказательствомъ a posteriori законности и общности этого метода».

§ 9. По теоріи Лагранжа интегрированіе линейнаго уравненія съ частными производными (9) приводится къ интегрированію системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (12). Но, какъ показалъ Якоби (J. v. Crelle B: II), рѣшеніе этихъ двухъ вопросовъ можно привести въ обратную зависимость. Доказательство этого предложенія дополняетъ и еще болѣе уясняетъ теорію Лагранжа и вмѣстѣ съ тѣмъ даетъ случай представить въ общемъ очеркѣ теорію интегрированія совокупныхъ уравненій вида (12).

Уравненія (12) можно написать въ видѣ отношеній

$$\frac{dz}{A}=\frac{dx_1}{A_1}=\cdots=\frac{dx_n}{A_n},$$

которыя выражаютъ задачу: установить между перемѣнными z, $x_1, \ldots x_n$ такія зависимости, чтобы дифференціалы этихъ перемѣнныхъ были пропорціональны даннымъ функціямъ A, $A_1, \ldots A_n$. Принявъ одно изъ перемѣнныхъ, напр. z, независимымъ, можемъ всѣ остальныя $x_1, \ldots x_n$ разсматривать функціями его, и предыдущія уравненія, написанныя такимъ образомъ

$$\frac{dx_1}{dz}=\frac{A_1}{A}, \ldots \quad \frac{dx_n}{dz}=\frac{A_n}{A},$$

дадутъ выраженія первыхъ производныхъ этихъ функцій посредствомъ z, $x_1, \ldots x_n$. Нетрудно вывести подобныя выраженія для производныхъ высшихъ порядковъ тѣхъ же функцій. Для этого, дифференцируя напр. уравненіе

$$\frac{dx_i}{dz}=\frac{A_i}{A}$$

послѣдовательно въ отношеніи z, какъ независимаго перемѣннаго, притомъ разсматривая, сообразно сдѣланному условію, $x_1, \ldots x_n$ функціями его и каждый разъ, когда встрѣтятся во 2-й части $\frac{dx_1}{dz}, \ldots \frac{dx_n}{dz}$, замѣняя ихъ соотвѣтственными значеніями $\frac{A_1}{A}, \ldots \frac{A_n}{A}$, — получимъ требуемыя выраженія, которыя пусть будутъ

$$\frac{dx_i}{dz}=\frac{A_i}{A}=\psi_1(z,\ x_1, \ldots x_n),\quad \frac{d^2x_i}{dz^2}=\psi_2(z,\ x_1, \ldots\ x_n), \ldots$$

$$\frac{d^nx_i}{dz^n}=\psi_n(z,\ x_1, \ldots\ x_n), \ldots \tag{14}$$

Подобнымъ образомъ найдутся выраженія высшихъ производныхъ всѣхъ функцій $x_1, \ldots x_n$.

Положивъ теперь, что данному частному значенію z^0 независимого перемѣннаго z соотвѣтствуютъ совершенно произвольно выбранныя значенія $x_1{}^0$ функціи x_1, $x_2{}^0$ функціи $x_2, \ldots$ $x_n{}^0$ функціи x_n, можемъ каждую изъ функцій $x_1, \ldots x_n$ по Тейлоровой формулѣ разложить въ безконечную строку. Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$x_i=x_i{}^0+\psi_1(z^0, x_1{}^0, \ldots x_n{}^0)\frac{z-z^0}{1}+\psi_2(z^0,\ x_1{}^0, \ldots x_n{}^0)\frac{(z-z^0)^2}{1\,.\,2}+\text{и т. д.}$$

Такимъ образомъ доказано существованіе искомыхъ n функцій, выполняющихъ требуемыя условія, и вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что въ ихъ выраженіяхъ заключаются однѣ и тѣ же произвольныя постоянныя $x_1{}^0, \ldots x_n{}^0$. Что касается величины z°, то она должна быть, разсматриваема, какъ данная постоянная, напр. какъ данное число. Замѣтимъ еще, что вмѣсто произвольныхъ постоянныхъ $x_1^0, \ldots x_n^0$ можно ввести другія, связанныя съ первыми произвольными отношеніями, лишь бы новыя произвольныя постоянныя можно было опредѣлить такъ, чтобы для какого-нибудь даннаго значенія z функціи $x_1, \ldots x_n$ принимали произвольно избранныя значенія.

Чтобы опредѣлить конечныя выраженія n искомыхъ функцій $x_1, \ldots x_n$, надобно вообще найти n уравненій, называемыхъ интегралами, между этими функціями, независимымъ перемѣннымъ z и n произвольными постоянными. Эта задача можетъ быть рѣшена, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, не возвышая дифференціальнаго порядка уравненій (12) и успѣхъ, конечно, будетъ зависѣть отъ вида данныхъ функцій $A, A_1, \ldots A_n$. Существуетъ еще другой пріемъ: исключенія $n-1$ неизвѣстныхъ функцій и приведенія вопроса къ интегрированію одного обыкновеннаго уравненія n-го порядка. Для этого возьмемъ, напримѣръ, первыя n уравненій (14) и исключимъ изъ нихъ $n-1$ величинъ $x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, x_n$; такимъ образомъ получимъ одно уравненіе между z, его функціею x_i и ея производными до n-го порядка, которое пусть будетъ

$$f\left(z,\ x_i,\ \frac{dx_i}{dz}, \ldots\ \frac{d^n x_i}{dz^n}\right)=0.$$

Уравненіе съ 2 перемѣнными n-го порядка имѣетъ, какъ извѣстно, n первыхъ интеграловъ, представляющихся въ видѣ дифференціальныхъ уравненій $n-1$-го порядка и заключающихъ каждое по одному произвольному постоянному; разрѣшивъ эти уравненія относительно произвольныхъ постоянныхъ $c_1, \ldots c_n$, будемъ имѣть n уравненій вида.

$$f_1\left(z,\ x_i,\ \frac{dx_i}{dz}, \ldots\ \frac{d^{n-1}x_i}{dz^{n-1}}\right)=c_1, \ldots\ f_n\left(z,\ x_i,\ \frac{dx_i}{dz}, \ldots\ \frac{d^{n-1}x_i}{dz^{n-1}}\right)=c_n. \quad (15)$$

Мы можемъ получить равнозначущую послѣдней систему уравненій, найдя полный интегралъ уравненія n-го порядка, содержащій n произ. пост., дифференцируя его $n-1$ разъ и выведя изъ полученныхъ n уравненій значенія постоянныхъ.

Вставивъ въ уравненія (15) значенія производныхъ функцій x_i (14), получимъ n искомыхъ отношеній между $z, x_1, \ldots x_n$, или интеграловъ уравненій (12), которые пусть будутъ

$$\varphi_1(z, x_1, \ldots x_n) = c_1, \ldots \quad \varphi_n(z, x_1, \ldots x_n) = c_n. \qquad (16)$$

Уравненія (16), будучи интегралами уравненій (12), должны имѣть такое свойство, что выведенныя помощію тѣхъ и другихъ отношенія между перемѣнными $z, x_1, \ldots x_n$, не заключающія произвольныхъ постоянныхъ, должны быть тождественныя; въ противномъ случаѣ мы не могли бы для даннаго значенія z назначить произвольно соотвѣтствующія значенія функцій $x_1, \ldots x_n$.

Замѣтимъ еще, что уравненія (16) представляютъ n функцій, остающихся постоянными при одновременномъ измѣненіи $z, x_1, \ldots x_n$; слѣд. дифференціалы ихъ равны нулю.

Поэтому

$$d\varphi_i = 0$$

или

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dz} + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dz} = 0.$$

Вставивъ сюда значенія производныхъ $\frac{dx_1}{dz}, \ldots \frac{dx_n}{dz}$ изъ уравненій (12) получимъ, по умноженію результата на A,

$$A\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} + A_1\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \cdots + A_n\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0,$$

уравненіе, представляющее отношеніе между перемѣнными $z, x_1, \ldots x_n$ и не заключающее произвольныхъ постоянныхъ, которое поэтому, и на основаніи предыдущаго замѣчанія, должно быть тождественное.

Слѣдовательно, функціи, составляющія 1-я части уравненій (16), удовлетворяютъ уравненію съ частными производными

$$A\frac{\partial \gamma}{\partial z} + A_1\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} + \cdots + A_n\frac{\partial \gamma}{\partial x_n} = 0, \qquad (11)$$

которое мы имѣли въ предыдущемъ §. Даже болѣе, произвольная функція одной, нѣкоторыхъ или всѣхъ этихъ функцій также удовлетворитъ предыдущему уравненію. Дѣйствительно, означивъ условно для краткости 1-ю часть предыдущаго уравненія такимъ образомъ $A(\gamma)$, мы будемъ имѣть тождественно

$$A(\varphi_1)=0\ldots\quad A(\varphi_n)=0.$$

Взявъ произвольную функцію π функцій $\varphi_1,\ldots\varphi_n$, находимъ

$$\frac{\partial\pi}{\partial z}=\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_1}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\cdots+\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_n}\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial z},$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial x_i}=\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_1}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_n}\,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}.$$

Умноживъ 2-е изъ этихъ равенствъ на A_i и приложивъ сумму подобныхъ для всѣхъ значеній $i=1, 2,\ldots n$ къ 1-му, получимъ

$$A(\pi)=\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_1}A(\varphi_1)+\cdots\ \frac{\partial\pi}{\partial\varphi_n}A(\varphi_n).$$

Но 2-я часть этого равенства тождественно равна нулю, слѣд. и 1-я также.

Наконецъ положеніе $\gamma=0$ позволитъ разсматривать z или одно изъ $x_1,\ldots x_n$, напр. x_i, функціею всѣхъ остальныхъ перемѣнныхъ; въ такомъ случаѣ уравненіе (11) приведется къ одному изъ слѣдующихъ

$$A_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+A_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=A,$$

$$A\frac{\partial x_i}{\partial z}+\cdots+A_{i-1}\frac{\partial x_i}{\partial x_{i-1}}+A_{i+1}\frac{\partial x_i}{\partial x_{i+1}}+\cdots+A_n\frac{\partial x_i}{\partial x_n}=A_i,$$

а
$$\pi(\varphi_1,\ldots\varphi_n)=0$$

будетъ полнымъ интеграломъ этихъ уравненій.

Эти заключенія вполнѣ согласуются съ теоріей Лагранжа и на основаніи ихъ можно разсматривать способъ интегрированія линейныхъ уравненій съ частными производными, какъ простое приложеніе доказанныхъ сейчасъ свойствъ интеграловъ совокупныхъ уравненій вида (12).

Въ дополненіе объясненія тѣсной внутренней связи и взаимной зависимости рѣшеній двухъ вопросовъ — интегрированія уравненія (11) и уравненій (12) — докажемъ еще слѣдующую теорему.

Всякая функція ψ перемѣнныхъ z, $x_1, \dots x_n$, удовлетворяющая линейному уравненію съ частными производными (11), сохранитъ постоянное значеніе при одновременномъ измѣненіи этихъ перемѣнныхъ, если будемъ разсматривать $x_1, \dots x_n$ какъ функціи z, опредѣленныя уравненіями (12); и поэтому, слѣдовательно,

$$\psi = \text{const}.$$

будетъ однимъ изъ интеграловъ системы совокупныхъ уравненій (12). Дѣйствительно, взявъ дифференціалъ ψ, разсматривая $x_1, \dots x_n$ функціями z, имѣемъ

$$d\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{dz} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\,\frac{dx_n}{dz}\right).dz,$$

но на основаніи уравненій (12) $\frac{dx_1}{dz} = \frac{A_1}{A}, \dots \frac{dx_n}{dz} = \frac{A_n}{A}$, поэтому

$$d\psi = A(\psi) \cdot \frac{dz}{A}.$$

По условіямъ теоремы $A(\psi)$ тождественно равно нулю, слѣд.

$$d\psi = 0, \quad \text{откуда} \quad \psi = \text{const.},$$

что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ, во-1-хъ, что, опредѣливъ какимъ-нибудь образомъ n различныхъ или независимыхъ между собою функцій $\varphi_1, \dots \varphi_n$, удовлетворяющихъ уравненію (11), мы будемъ имѣть полную систему интеграловъ уравненій (12), подъ видомъ

$$\varphi_1=\text{const.}=c_1, \quad \varphi_2=\text{const.}=c_2, \ldots \quad \varphi_n=\text{const.}=c_n.$$

Во-2-хъ, зная одну систему интеграловъ уравненій (12), положимъ предыдущую, можно образовать безчисленное множество другихъ системъ вида

$$\pi_1(\varphi_1, \ldots \varphi_n)=\text{const.}=c^{(1)}, \ \pi_2(\varphi_1, \ldots \varphi_n)=\text{const.}=c^{(2)}, \ldots$$
$$\pi_n(\varphi_1, \ldots \varphi_n)=\text{const.}=c^{(n)}.$$

Ясно, что этотъ переходъ отъ одной системы интеграловъ къ другимъ равнозначителенъ замѣненію первоначальныхъ произвольныхъ постоянныхъ новыми, посредствомъ произвольно выбранныхъ отношеній:

$$\pi_1(c_1, \ldots c_n)=c^{(n)}, \ldots \pi_n(c_1, \ldots c_n)=c^{(n)}.$$

Между различными системами интеграловъ уравненій (12) во многихъ случаяхъ заслуживаетъ предпочтенія та, въ которую входятъ, какъ произвольныя постоянныя, произвольно выбранныя значенія $x_1^0, \ldots x_n^0$ функцій $x_1, \ldots x_n$, соотвѣтствующія какому-нибудь частному значенію z^0 независимаго перемѣннаго z. Эту систему интеграловъ нетрудно получить изъ какой-нибудь данной, напримѣръ (16). Полагая, что $z=z^0$ соотвѣтствуютъ значенія $x_1=x_1^0, \ldots x_n=x_n^0$, получимъ между первоначальными и новыми произвольными постоянными отношенія

$$\varphi_1(z^0, \ x_1^0, \ldots x_n^0)=c_1, \ldots \varphi_n(z^0, \ x_1^0, \ldots x^0{}_n)=c_n$$

или, разрѣшая эти уравненія относительно $x_1^0, \ldots x_n^0$,

$$x_1^0=\psi_1(c_1, \ldots c_n), \ldots x_n^0=\psi_n(c_1, \ldots c_n).$$

Вставивъ сюда значенiе $c_1, \dots c_n$ изъ уравненiй (16), получимъ требуемую систему интеграловъ подъ видомъ

$$\varphi_1(z,\ x_1, \dots x_n) = \varphi_1(z^0,\ x_1^0, \dots x_n^0), \dots$$
$$\varphi_n(z,\ x_1, \dots x_n) = \varphi_n(z^0,\ x_1^0, \dots x_n^0),$$

или
$$\psi_1(\varphi_1, \dots \varphi_n) = x_1^0, \dots \quad \psi_n(\varphi_1, \dots \varphi_n) = x_n^0.$$

III.

§ 10. Теперь мы будемъ разсматривать вопросъ объ интегрированiи уравненiя съ частными производными перваго порядка въ общемъ видѣ, т.-е. не ограничивая ни числа независимыхъ перемѣнныхъ, ни формы уравненiя.

Удержавъ означенiя, принятыя въ § 1, снова представимъ общiй типъ такихъ уравненiй слѣдующимъ образомъ

$$F(x_1, \dots x_n,\ z,\ p_1, \dots p_n) = 0. \tag{1}$$

Непосредственно опредѣленiе общаго интеграла уравненiя (1) представило бы сложную задачу; поэтому обыкновенно находятъ сначала полный его интегралъ, заключающiй n произвольныхъ постоянныхъ, изъ котораго, какъ показано выше (§§ 2—6, I), выводятся посредствомъ измѣненiя произвольныхъ постоянныхъ, общiй и особенный интегралы. Второе упрощенiе задачи состоитъ въ томъ, что вмѣсто непосредственнаго опредѣленiя полнаго интеграла, представляющаго уравненiе между независимыми перемѣнными $x_1, \dots x_n$, ихъ функцiею z и n произвольными постоянными, отыскиваютъ сначала выраженiя частныхъ производныхъ $p_1, \dots p_n$ функцiи z; по вставкѣ ихъ въ уравненiе

$$dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \dots + p_n\, dx_n, \tag{2}$$

представляющее полный дифференцiалъ функцiи z, и по интегрированiи его получится искомый полный интегралъ. Представляя этотъ послѣднiй въ видѣ уравненiя, разрѣшеннаго въ отношенiи одного изъ произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \dots a_n$, имѣемъ

$$f(x_1, \dots x_n,\ z,\ a_1, \dots a_{n-1}) = a_n; \tag{3}$$

отсюда, дифференцируя по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, находимъ

$$p_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots \quad p_n = -\frac{\partial f}{\partial x_n} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Слѣдовательно $p_1, \ldots p_n$ должны быть функціями $x_1, \ldots x_n$, z и заключать въ ихъ выраженіяхъ $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_{n-1}$.

Сверхъ того, чтобы уравненіе (2) имѣло интегралъ (3), функціи $p_1, \ldots p_n$ необходимо должны выполнять условія интегрируемости слѣдующаго вида

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_i}{\partial z} p_k = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial p_k}{\partial z} p_i,$$

въ которыхъ i и k представляютъ различныя сочетанія по два изъ чиселъ $1, 2, \ldots n$. Слѣдовательно этихъ условій будетъ $\frac{n(n-1)}{2}$ и они напишутся всѣ безъ пропусковъ и повтореній, если указателю i дадимъ послѣдовательно значенія $1, 2, \ldots n-1$ и для каждаго значенія i будемъ давать указателю k послѣдовательно значенія больщія i до n включительно.

Введемъ для краткости слѣдующее означеніе: если какая-нибудь функція u будетъ кромѣ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ заключать также ихъ функцію z, то частную производную u въ отношеніи одного изъ независимыхъ перемѣнныхъ, напр. x_i, будемъ писать $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, вмѣсто $\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z} p_i$. При такомъ означеніи общій типъ условій интегрируемости приметъ видъ

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right). \tag{4}$$

§ 11. Чтобы опредѣлить n функцій $p_1, \ldots p_n$, приводящихъ посредствомъ интегрированія уравненія (2), къ полному интегралу (1), должно вообще найти n уравненій между ними, перемѣнными $x_1, \ldots x_n$, z и $n-1$ произвольными постоянными $a_1,\dots a_{n-1}$. Одно изъ этихъ уравненій — данное уравненіе съ частными производными (1), мы уже имѣемъ, остается опредѣлить $n-1$ другихъ. Предполагая эти послѣднія разрѣшенными относительно произвольныхъ постоянныхъ, представимъ разсматриваемую систему n уравненій слѣдующимъ образомъ

$$F=0,\quad F_1=a_1,\quad F_2=a_2,\dots\quad F_{n-1}=a_{n-1}, \tag{5}$$

гдѣ $F_1,\dots F_{n-1}$, подобно 1-й части F даннаго уравненія (1), означаютъ функціи $x_1,\dots x_n$, z, $p_1,\dots p_n$, не заключающія произвольныхъ постоянныхъ.

Такимъ образомъ, вмѣсто опредѣленія n функцій $p_1,\dots p_n$, заключающихъ, кромѣ $n+1$ перемѣнныхъ, $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ, задача приводится къ отысканію $n-1$ функцій $F_1,\dots F_{n-1}$ каждая $2n+1$ перемѣнныхъ, но не заключающихъ произвольныхъ постоянныхъ. Для опредѣленія функцій $p_1,\dots p_n$ даны условія (4); посмотримъ, какія условія должны выполнять функціи $F_1,\dots F_{n-1}$, предполагая, что выведенныя изъ уравненій (5) значенія $p_1,\dots p_n$ выполняютъ условія (4). Для этого возьмемъ которыя-нибудь два изъ уравненій (5), напр.

$$F_i=a_i \quad \text{и} \quad F_k=a_k,$$

и продифференцируемъ ихъ послѣдовательно относительно каждаго изъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n$. Находимъ, дифференцируя по x_1,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right)+\dots+\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right)=0,$$
$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right)+\dots+\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right)=0;$$

дифференцируя по x_2,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)+\dots+\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right)=0,$$
$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)+\dots+\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right)=0$$

и т. д., наконецъ дифференцированіе по x_n даетъ

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_n}\right)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{\partial F_i}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)=0,$$
$$\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_n}\right)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{\partial F_k}{\partial p_{n-1}}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)=0.$$

Исключивъ изъ 1-й пары предыдущихъ уравненій $\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right)$, изъ 2-й $\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\right)$ и т. д., наконецъ, изъ послѣдней $\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)$, получимъ слѣдующія n уравненій:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_1}-\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right)+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_1}-\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_2}\right]\left(\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_1}-\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\right]\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_1}\right)=0,$$
$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_2}-\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\right)+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_2}-\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\right]\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_2}-\frac{\partial F_i}{\partial p_2}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_n}\right]\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_2}\right)=0, \tag{6}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_n}-\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right)+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_n}-\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_1}\right]\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left[\frac{\partial F_i}{\partial p_{n-1}}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_n}-\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\,\frac{\partial F_k}{\partial p_{n-1}}\right]\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\right)=0.$$

Введемъ теперь условія интегрируемости (4) и замѣтимъ, что въ уравненіяхъ (6) коэффиціенты при $\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\right)$ и $\left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i}\right)$, равныхъ вслѣдствіе этихъ условій, также равны по величинѣ, но съ противными знаками; поэтому, если сложимъ всѣ уравненія предыдущей системы, то всѣ члены ихъ первыхъ частей, кромѣ первыхъ, взаимно уничтожатся, и мы находимъ уравненіе

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_1}-\frac{\partial F_i}{\partial p_1}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\right)+\cdots\\
&\cdots+\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)\frac{\partial F_k}{\partial p_n}-\frac{\partial F_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right)=0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

которому должны удовлетворять каждыя двѣ функціи, составляющія 1-я части уравненій (5).

Законъ составленія 1-й части уравненія (7) изъ частныхъ производныхъ функцій F_i и F_k очевиденъ; мы примемъ для обозначенія ея условный знакъ $(F_i;\ F_k)$, поэтому общій типъ условій, которымъ должны удовлетворить функціи F, F_1,... F_{n-1} будетъ

$$(F_i;\ F_k)=0. \tag{8}$$

Здѣсь i и k представляютъ всѣ различныя сочетанія по два изъ указателей 0, 1, 2,... $n-1$, полагая при томъ $F_0=F$. Слѣдовательно, условій (8) столько же, сколько (4), т.-е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Необходимо замѣтить также, что если въ уравненіи (7) одна изъ двухъ функцій F_i, F_k будетъ дана, то въ отношеніи частныхъ производныхъ другой, неизвѣстной функціи, оно будетъ линейнаго вида. Такъ напр., полагая въ уравненіи (7) $F_k=F$ и написавъ его слѣдующимъ образомъ

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial F_i}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial F_i}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial F_i}{\partial x_n}+\\
&+\left[p_1\frac{\partial F}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial F}{\partial p_2}+\cdots+p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}\right]\frac{\partial F_i}{\partial z}-\\
&-\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial z}\right]\frac{\partial F_i}{\partial p_1}-\left[\frac{\partial F}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial F}{\partial z}\right]\frac{\partial F_i}{\partial p_2}+\cdots\\
&\cdots-\left[\frac{\partial F}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F}{\partial z}\right]\frac{\partial F^i}{\partial p_n}=0,
\end{aligned}
$$

имѣемъ линейное уравненіе въ отношеніи частныхъ производныхъ F_i, интегрированіе котораго на основаніи (§§ 8, 9; II) приводится къ интегрированію слѣдующей системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}=\frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial F}{\partial p_2}+\cdots+p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}}=$$

$$=\frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial F}{\partial z}}=\cdots=\frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F}{\partial z}}. \qquad (10)$$

§ 12. Обративъ вниманіе на число и видъ уравненій (8), къ интегрированію которыхъ приведена теперь разсматриваемая нами задача, легко замѣтить, что случай двухъ независимыхъ перемѣнныхъ по простотѣ своей стоитъ отдѣльно отъ прочихъ. Дѣйствительно, когда $n=2$, тогда въ дополненіе къ данному уравненію

$$F(x_1,\ x_2,\ z,\ p_1,\ p_2)=0$$

нужно опредѣлить еще одно уравненіе

$$F_1(x_1,\ x_2,\ z,\ p_1,\ p_2)=a_1,$$

котораго первая часть F_1 должна повѣрять единственное условіе

$$(F;\ F_1)=0.$$

Оно выражается, какъ мы видѣли, линейнымъ уравненіемъ въ отношеніи частныхъ производныхъ функціи F_1, интегрированіе котораго приводится къ интегрированію системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (10), принимающей въ настоящемъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}}=\frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial F}{\partial p_2}}=\frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Притомъ, очевидно, достаточно опредѣлить только одинъ интегралъ $F_1=a_1$, этой системы, заключающій по крайней мѣрѣ одну изъ величинъ p_1, p_2 и произвольное постоянное a_1.

Помощію этого интеграла и даннаго уравненія опредѣлятся выраженія p_1 и p_2; затѣмъ интегрированіе уравненія

$$dz-p_1dx_1-p_2dx_2=0,$$

по вставкѣ этихъ выраженій, умноженнаго, если необходимо, на факторъ интегрируемости, доставитъ искомый полный интегралъ.

Для приложенія этого способа возьмемъ, напримѣръ, уравненіе

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2+1\right]+(a-z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=0,$$

или

$$p_1(p_2^2+1)+(a-z)p_2=0.$$

Предыдущая система совокупныхъ уравненій приметъ въ настоящемъ случаѣ слѣдующій видъ

$$\frac{dx_1}{p_2^2+1}=\frac{dx_2}{2p_1p_2+a-z}=\frac{dz}{3p_1p_2^2+(a-z)p_2+p_1}=\frac{dp_1}{p_1p_2}=\frac{dp_2}{p_2^2}.$$

Вэявъ уравненіе, составляемое первымъ и послѣднимъ отношеніями, и интегрируя его, получимъ

$$a_1+x_1=p_2-\frac{1}{p_2}.$$

Отсюда и помощію даннаго уравненія находимъ

$$p_1=\frac{z-a}{\pm 2\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}},\quad p_2=\frac{x_1+a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}.$$

Вставивъ значенія p_1 и p_2 въ уравненіе $dz-p_1dx_1-p_2dx_2=0$, имѣемъ

$$dz-\frac{z-a}{\pm 2\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}}dx_1-\left(\frac{x_1+a_1}{2}\pm\sqrt{\frac{(x_1+_1)^2}{4}+1}\right)dx_2=0.$$

Умноживъ послѣднее уравненіе на

$$\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}-\frac{x_1+a_1}{2},$$

приведемъ его къ слѣдующему виду

$$d\left\{(z-a)\left(\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}-\frac{x_1+a_1}{2}\right)-x_2\right\}=0.$$

Слѣдовательно, полный интегралъ даннаго уравненія будетъ

$$(z-a)\left[\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}-\frac{x_1+a_1}{2}\right]-x_2=a_2,$$

или

$$z-a=\left[\pm\sqrt{\frac{(x_1+a_1)^2}{4}+1}+\frac{x_1+a_1}{2}\right](x_2+a_2).$$

Если возьмемъ изъ системы совокупныхъ уравненіе, составляемое двумя послѣдними отношеніями, то, интегрируя его, получимъ

$$p_1=\alpha_1 p_2,$$

означивъ чрезъ α_1 новое произвольное постоянное. Помощію этого уравненія и даннаго находимъ

$$p_1=\alpha_1\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1}-1},\qquad p_2=\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1}-1};$$

поэтому

$$dz-p_1dx_1-p_2dx_2=dz-(\alpha_1\,dx_1+dx_2)\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1}-1}=0.$$

Раздѣливъ это уравненіе на $\sqrt{\frac{z-a}{\alpha_1}-1}$ и интегрируя, находимъ полный интегралъ даннаго уравненія еще въ другомъ видѣ

$$2\sqrt{\alpha_1}\sqrt{z-a-\alpha_1}-(\alpha_1 x_1+x_2)=\alpha_2,$$

или

$$z-a=\frac{(\alpha_1 x_1+x_2+\alpha_2)^2}{4\alpha_1}+\alpha_1,$$

гдѣ α_2 означаетъ второе произвольное постоянное.

Предыдущій способъ интегрированія уравненія съ частными производными при двухъ независимыхъ перемѣнныхъ указанъ Лагранжемъ еще въ 1772 году.

Линейное уравненіе, къ интегрированію котораго онъ приводитъ задачу, не имѣетъ симметрическаго вида $(F, F_1)=0$, но заключаетъ менѣе перемѣнныхъ. Изложимъ въ немногихъ словахъ пріемъ Лагранжа.

Частныя производныя p_1 и p_2 должно разсматривать какъ функціи x_1, x_2, z, при чемъ достаточно опредѣлить одну изъ нихъ, такъ какъ значеніе другой выведется изъ даннаго уравненія

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2)=0.$$

Если это значеніе вставимъ обратно въ то же уравненіе, оно обратится въ тождество; слѣдовательно, мы можемъ дифференцировать его не только въ отношеніи x_1, но и z, какъ независимыхъ перемѣнныхъ. Такимъ образомъ получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial z}=0.$$

Присоединивъ сюда еще условіе интегрируемости

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2}+\frac{\partial p_1}{\partial z}p_2=\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial p_2}{\partial z}p_1$$

и исключая изъ трехъ предыдущихъ уравненій частныя производныя функціи p_2, получимъ линейное уравненіе въ отношеніи частныхъ производныхъ функціи p_1:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}\ \frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\ \frac{\partial p_1}{\partial x_2}+\left[p_1\frac{\partial F}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial F}{\partial p_2}\right]\frac{\partial p_1}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

въ коэффиціентахъ котораго p_2 должно замѣнить его значеніемъ, выведеннымъ изъ даннаго уравненія $F=0$. Поэтому p_1 опредѣлится какъ функція x_1, x_2, z; затѣмъ значеніе функціи p_2 выведется изъ даннаго уравненія. Обѣ функціи выполнятъ условіе интегрируемости, которое принято въ основаніи при ихъ опредѣленіи; слѣдовательно, по вставкѣ ихъ значеній, уравненіе

$$dz-p_1dx_1-p_2dx_2=0$$

можетъ быть интегрируемо и интегралъ его будетъ рѣшеніемъ разсматриваемой задачи.

Должно замѣтить, что предыдущее линейное уравненіе приводитъ къ системѣ совокупныхъ

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}=\frac{dz}{p_1\dfrac{\partial F}{\partial p_1}+p_2\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}=\frac{-dp_1}{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

очевидно, той же самой, которую мы имѣли выше, если въ ней отбросить послѣднее отношеніе и замѣнить p_2 его значеніемъ, выведеннымъ изъ уравненія $F=0$. Поэтому оба пріема въ сущности совершенно одинаковы и приведутъ къ одному и тому же прерѣшенію, если ограничимся выводомъ одного интеграла предыдущей системы совокупныхъ уравненій, заключающаго p_1 и произвольное постоянное. Но Лагранжъ полагалъ сначала, что для выраженія p_1 должно опредѣлить общій интегралъ предыдущаго линейнаго уравненія, который долженъ быть вида

$$\varphi_3=\pi(\varphi_1,\ \varphi_2).$$

если интегралы соотвѣтствующей системы совокупныхъ уравненій разрѣшенные относительно произвольныхъ постоянныхъ означимъ

$$\varphi_1(x_1,\ x_2,\ z,\ p_1)=\mathrm{const}=\alpha,\quad \varphi_2(x_1,\ x_2,\ z,\ p_1)=\mathrm{const}=\beta,$$
$$\varphi_3(x_1,\ x_2,\ z,\ p_1)=\mathrm{const}=\gamma$$

и знакомъ π представимъ произвольную функцію.

Полагая, что изъ уравненія, представляющаго общій интегралъ, можно вывести значеніе p_1, не давая частнаго вида функціи π, мы будемъ имѣть ее также въ выраженіи p_2, а слѣдовательно и въ выраженіи общаго интеграла даннаго уравненія $F=0$. Между тѣмъ очевидно, что изъ первообразной зависимости между x_1, x_2 и z вида

$$f[x_1,\ x_2,\ z,\ \pi(\varphi_1,\ \varphi_2)]=0,$$

гдѣ f данная и π произвольная функціи, и двухъ уравненій, получаемыхъ дифференцированіемъ предыдущаго въ отношеніи x_1 и x_2, невозможно исключить трехъ функцій π, $\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_1}$, $\frac{\partial\pi}{\partial\varphi_2}$.

Въ Calcul des fonctions (p. 390) Лагранжъ предлагаетъ соображенія, разрѣшающія это противорѣчіе. Но должно замѣтить, что оно вовсе не встрѣтится, если, сообразно совершенно вѣрному замѣчанію Charpit*), вмѣсто общаго интеграла линейнаго уравненія возьмемъ частный, заключающій перемѣнное p_1. Послѣдній пріемъ приводитъ вмѣсто общаго къ полному интегралу даннаго уравненія $F=0$ и имѣетъ еще то преимущество, что не требуетъ полнаго интегрированія системы совокупныхъ уравненій. Лагранжъ въ заключеніе своего объясненія указываетъ и на этотъ пріемъ, не упоминая впрочемъ имени Шарпи, которому онъ принадлежитъ.

§ 13. Если число независимыхъ перемѣнныхъ въ уравненіи съ частными производными 1-го порядка болѣе двухъ, то задача интегрированія его получаетъ болѣе сложный характеръ.

---

*) Mémoire présenté à l'Acad. des Sciences par Charpit, le 30 juin, 1784.

Дѣйствительно, уже при трехъ независимыхъ перемѣнныхъ требуется (на осн. §§ 10 и 11) по данной функціи F перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$, составляющей 1-ю часть даннаго уравненія $F=0$, опредѣлить двѣ функціи F_1, F_2 тѣхъ же перемѣнныхъ, удовлетворяющія условіямъ

$$(F;\ F_1)=0 \quad \text{и} \quad \begin{cases} (F;\ F_2)=0 \\ (F_1;\ F_2)=0. \end{cases}$$

Слѣдовательно, функція F_1 можетъ быть опредѣлена, такъ же какъ въ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ,—какъ частный интегралъ 1-го линейнаго уравненія; но для опредѣленія F_2 должно найти частный интегралъ, удовлетворяющій совокупно двумъ остальнымъ линейнымъ уравненіямъ съ частными производными.

Если число независимыхъ перемѣнныхъ будетъ n, то по данной функціи F перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, z, $p_1, \ldots p_n$, составляющей 1-ю часть даннаго уравненія $F=0$, должно опредѣлить $n-1$ функцій $F_1, F_2, \ldots F_{n-1}$ тѣхъ же перемѣнныхъ, удовлетворяющихъ условіямъ

$$(F;\ F_1)=0; \quad \begin{cases} (F;\ F_2)=0 \\ (F_1;\ F_2)=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (F;\ F_3)=0 \\ (F_1;\ F_3)=0 \\ (F_2;\ F_3)=0 \end{cases}; \ldots$$

$$\begin{cases} (F;\ F_{n-1})=0 \\ (F_1;\ F_{n-1})=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ (F_{n-2};\ F_{n-1})=0. \end{cases}$$

Функція F_1 опредѣлится, какъ частный интегралъ 1-го изъ предыдущихъ уравненій; F_2—какъ частный интегралъ, удовлетрворяющій совокупно 2-му и 3-му уравненіямъ, и т. д.; наконецъ F_{n-1} должна быть частнымъ интеграломъ, удовлетворяющимъ совокупно $n-1$ послѣднимъ уравненіямъ, Такимъ образомъ представлена задача интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка въ сочиненіи Якоби «Nova methodus etc» (Jour. v. Crelle, B. LX). Хотя этотъ новый пріемъ рѣшенія по времени открытія представился позже другихъ, но по сущности онъ составляетъ прямое продолженіе первыхъ шаговъ, сдѣланныхъ въ теоріи разсматриваемаго нами вопроса Лагранжемъ и Шарпи. Поэтому я изложу его прежде другого способа рѣшенія, предложеннаго Пфаффомъ и усовершенствованнаго также Якоби и Коши.

§ 14. Якоби начинаетъ упрощеніемъ даннаго уравненія

$$F(x_1, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \tag{a}$$

преобразуя его въ другое, также съ частными производными 1-го порядка, но въ которомъ сама неизвѣстная функція не войдетъ непосредственно и независимыхъ перемѣнныхъ будетъ однимъ болѣе.

Но при этомъ преобразованіи вкрался недосмотръ, замѣченный г. Бертраномъ, состоящій въ томъ, что Якоби связываетъ новую неизвѣстную функцію съ прежнею частнаго вида зависимостію, вслѣдствіе чего переходъ отъ интеграла преобразованнаго уравненія къ интегралу даннаго становится въ большей части случаевъ невозможнымъ.

Дѣйствительно, вводя новое независимое перемѣнное t и означивъ новую неизвѣстную функцію γ, слѣдуя Якоби, положимъ

$$\gamma = zt.$$

Отсюда, дифференцируя по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, находимъ

$$z = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}, \ldots \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{1}{t}\frac{\partial \gamma}{\partial x_n}.$$

Вставивъ предыдущія значенія функціи z и ея частныхъ производныхъ въ данное уравненіе, преобразуемъ его въ слѣдующее:

$$F\left(x_1,\dots x_n, \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \ \frac{1}{t}\frac{\partial\gamma}{\partial x_1},\dots \frac{1}{t}\frac{\partial\gamma}{\partial x_n}\right)=0.$$

Въ этомъ уравненіи независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n$, t однимъ болѣе, чѣмъ въ данномъ, неизвѣстная же функція γ входитъ только посредствомъ ея частныхъ производныхъ 1-го порядка.

Но чтобъ изъ интеграла преобразованнаго такимъ образомъ уравненія возможно было получить интегралъ даннаго, необходимо, согласно предположенной между ними связи, чтобы въ первомъ независимое перемѣнное t входило только общимъ множителемъ, что, очевидно, можетъ быть только въ исключительныхъ случаяхъ. Слѣдовательно, предыдущее преобразованіе въ большей части случаевъ не достигаетъ предположенной цѣли. Поэтому лучше не предполагать произвольно вида зависимости между двумя интегралами, но употребить для преобразованія тотъ же общій пріемъ, которымъ мы пользовались при интегрированіи линейныхъ уравненій съ частными производными.

Дѣйствительно, представивъ интегралъ даннаго уравненія такимъ образомъ

$$\gamma(x_1,\dots x_n, z)=0$$

и дифференцируя его по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ, находимъ, для каждаго изъ значеній $i=1, 2,\dots n$,

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}p_i=0, \quad \text{откуда} \quad p_i=-\frac{\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}}{\frac{\partial\gamma}{\partial z}};$$

по вставкѣ этихъ значеній p_i данное уравненіе приметъ видъ

$$F\left(x_1,\dots x_n,\ z,\ -\frac{\frac{\partial\gamma}{\partial x_1}}{\frac{\partial\gamma}{\partial z}},\dots\ -\frac{\frac{\partial\gamma}{\partial x_n}}{\frac{\partial\gamma}{\partial z}}\right)=0. \tag{b}$$

Въ послѣднемъ уравненіи должно разсматривать назависимыми перемѣнными $x_1,\dots x_n,\ z$. Способъ Якоби, какъ мы сейчасъ увидимъ, доставляетъ полный интегралъ предыдущаго уравненія въ видѣ явной функціи γ:

$$\gamma=f(x_1,\dots\ x_n,\ a_1,\ a_2,\dots\ a_n)+a_{n+1}, \tag{c}$$

гдѣ $a_1,\dots\ a_n,\ a_{n+1}$ означаютъ произвольныя постоянныя. Слѣдовательно, отнявъ отъ второй части предыдущаго равенства просто приданное произвольное постоянное a_{n+1} и уравнявъ ее нулю, получимъ интегралъ даннаго уравненія въ видѣ неявной функціи z, опредѣляемой уравненіемъ

$$\gamma-a_{n+1}=0,\ \text{или}\ f(x_1,\dots\ x_n,\ z,\ a_1,\ a_2,\dots\ a_n)=0. \tag{d}$$

Дѣйствительно, такъ какъ уравненіе (c) представляетъ интегралъ уравненія (b), то, вставивъ въ послѣднее функцію f вмѣсто γ, получимъ тождество

$$F\left(x_1,\dots x_n,\ z,\ -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}},\dots\ -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)=0, \tag{f}$$

имѣющее мѣсто при всякихъ значеніяхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n,\ z$. Пусть теперь послѣднее изъ нихъ опредѣлится какъ функція всѣхъ остальныхъ посредствомъ уравненія (d), тогда оно будетъ интеграломъ уравненія (a), потому что изъ уравненія (d) находимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=p_1=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}},\dots\ \frac{\partial z}{\partial x_n}=p_n=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\frac{\partial f}{\partial z}};$$

и вставивъ эти значенія частныхъ производныхъ въ уравненіе (a), снова получимъ тождество (f), имѣющее мѣсто для всякаго значенія z; слѣдовательно, и для того, которое выведется изъ уравненія (d).

И такъ, доказано, что интегрированіе уравненія, въ которое неизвѣстная функція входитъ не только посредствомъ частныхъ производныхъ 1-го порядка, но и непосредственно, всегда можетъ быть приведено къ интегрированію другого, въ которомъ независимыхъ перемѣнныхъ будетъ однимъ болѣе и неизвѣстная функція войдетъ только посредствомъ ея частныхъ производныхъ перваго порядка.

§ 15. Если въ данное уравненіе неизвѣстная функція входитъ только посредствомъ частныхъ производныхъ 1-го порядка, то общій типъ его можно представить такимъ образомъ

$$H\left(x_1,\dots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1},\dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=a$$

или $H(x_1,\dots x_n, p_1,\dots p_n)=a$, полагая вообще $p_i=\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$.

Здѣсь H означаетъ данную функію, a — опредѣленное постоянное, которое можетъ быть также равно нулю.

Задача полнаго интегрированія предыдущаго уравненія можетъ быть приведена къ опредѣленію $n-1$ уравненій

$$H_1=a_1, \quad H_2=a_2,\dots \quad H_{n-1}=a_{n-1},$$

въ которыхъ $a_1, a_2,\dots a_{n-1}$ означаютъ произвольныя постоянныя, $H_1,\dots H_{n-1}$, — такъ же какъ H, — функціи перемѣнныхъ $x_1\dots, x_n$ и частныхъ производныхъ $p_1,\dots, p_n$, независимыя между собою въ отношеніи послѣднихъ*) и не содержащія произволь-

*) То-есть между функціями H, $H_1,\dots H_{n-1}$ не должно быть никакого необходимаго отношенія вида $\Phi(H, H_1,\dots H_{n-1}, x_1,\dots x_n)=0$, въ которое не входятъ явнымъ образомъ перемѣнныя $p_1,\dots p_n$. На основаніи § 3 это условіе будетъ выполнено, если функціональный опредѣлитель H, $H_1,\dots H_{n-1}$, разсматриваемыхъ какъ функціи $p_1, p_2,\dots p_n$, не будетъ равенъ нулю.

ныхъ постоянныхъ $a_1 \dots, a_{n-1}$. Если функціи $H_1, \dots H_{n-1}$ будутъ опредѣлены такимъ образомъ, что выведенныя изъ уравненій

$$H=a, \quad H_1=a_1, \dots \quad H_{n-1}=a_{n-1} \tag{1}$$

значенія $p_1, p_2, \dots p_n$ обратятъ 2-ю часть уравненія

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots+p_ndx_n \tag{2}$$

въ точный дифференціалъ, то искомый полный интегралъ получится посредствомъ интегрированія послѣдняго уравненія и будетъ вида

$$z=f(x_1, \dots x_n, a_1, \dots a_{n-1})+a_n.$$

По предположенію функціи $H, H_1, \dots H_{n-1}$ не содержатъ z; слѣдовательно, значенія $p_1, \dots p_n$, выведенныя изъ уравненій (1), выразятся посредствомъ однихъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \dots x_n$ и условія интегрируемости 2-й части уравненія (2) будутъ въ настоящемъ случаѣ вида

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Предположивъ, что значенія $p_1, \dots p_n$, выведенныя изъ уравненій (1), выполняютъ условія (3), можемъ вывести условія, которыя должны въ такомъ случаѣ выполнять функціи H_1, $H_2, \dots H_{n-1}$, точно такимъ же образомъ, какимъ найдены въ § 11 подобныя условія для функціи $F_1, \dots F_{n-1}$. Поэтому для избѣжанія повтореній ограничимся замѣчаніемъ, что вывыводы § 11 приложатся къ настоящему случаю, если въ нихъ замѣнимъ $F, F_1, \dots F_{n-1}$ соотвѣтственно на $H, H_1, \dots H_{n-1}$ и отбросимъ скобки, заключающія частныя производныя, въ которыхъ теперь нѣтъ надобности, потому что разсматриваемыя функціи не содержатъ болѣе z.

На основаніи предыдущаго заключаемъ, что каждыя двѣ изъ функцій H, H_1,... H_{n-1} должны удовлетворять условію

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_1}\frac{\partial H_k}{\partial p_1}-\frac{\partial H_i}{\partial p_1}\frac{\partial H_k}{\partial x_1}+\frac{\partial H_i}{\partial x_2}\frac{\partial H_k}{\partial p_2}-\frac{\partial H_i}{\partial p_2}\frac{\partial H_k}{\partial x_2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\partial H_i}{\partial x_n}\frac{\partial H_k}{\partial p_n}-\frac{\partial H_i}{\partial p_n}\frac{\partial H_k}{\partial x_n}=0, \tag{4}$$

которое условно представляютъ такимъ образомъ

$$(H_i,\ H_k)=0. \tag{5}$$

Полагая въ уравненіи (5) послѣдовательно $i=0, 1, 2,\dots n-2$ (при этомъ принимая $H_0=H$) и давая для каждаго значенія i, указателю k всѣ значенія большія до $n-1$ включительно, получимъ всѣ $\frac{n(n-1)}{2}$ условій, вытекающихъ изъ формулы (5), которыя можно расположить въ слѣдующемъ порядкѣ

$$(H,\ H_1)=0,\quad \left.\begin{matrix}(H,\ H_2)=0\\(H_1,\ H_2)=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}(H,\ H_3)=0\\(H_1,\ H_3)=0\\(H_2,\ H_3)=0\end{matrix}\right\},\dots$$

$$\left.\begin{matrix}(H, & H_{n-1})=0\\(H_1, & H_{n-1})=0\\(H_2, & H_{n-1})=0\\ \dots & \dots\\ \dots & \dots\\(H_{n-2}, & H_{n-1})=0\end{matrix}\right\} \tag{6}$$

Разсматривая эти условія какъ дифференціальныя уравненія, служащія для опредѣленія искомыхъ функцій, можемъ найти H_1 интегрированіемъ перваго уравненія; вставивъ значеніе H_1 въ уравненія 2-й строки, должно опредѣлить H_2 какъ интегралъ, удовлетворяющій двумъ совокупнымъ уравненіямъ второго столбца; вставивъ значеніе H_2 въ уравненія 3-й строки, должно опредѣлить функцію H_3 какъ интегралъ, удовлетворяющій совокупно тремъ уравненіямъ 3-го столбца, и т. д.

Но чтобы выполнить этотъ планъ рѣшенія, надобно найти способъ интегрированія двухъ совокупныхъ уравненій 2-го столбца, трехъ—3-го, наконецъ, n—1 уравненій n—1-го.

Кромѣ того, всѣ уравненія (6) однообразной формы и содержатъ каждое $2n$ независимыхъ перемѣнныхъ; но ясно, что можно воспользоваться даннымъ уравненіемъ $H=a$ и постепенно опредѣляемыми уравненіями $H_1=a_1$, $H_2=a_2,\ldots$ такъ, чтобы при переходѣ къ каждой новой группѣ совокупныхъ уравненій понижать въ нихъ болѣе и болѣе первоначальное число $2n$ независимыхъ перемѣнныхъ.

Наконецъ, замѣтимъ еще, что мы доказали, что если выведенныя изъ уравненій (1) значенія $p_1,\ldots p_n$ повѣряютъ условія (3), то функціи H_1, $H_2,\ldots H_{n-1}$ удовлетворятъ уравненіямъ (6). Но чтобы имѣть право принять эти послѣднія для опредѣленія функцій $H_1,\ldots H_{n-1}$, должно быть увѣреннымъ и въ обратномъ заключеніи, т.-е., нужно доказать, что если независимыя между собою (въ томъ смыслѣ, какъ объяснено выше) функціи H, $H_1,\ldots H_{n-1}$ повѣряютъ условія (6), то, уравнявъ ихъ произвольнымъ постояннымъ, получимъ уравненія, изъ которыхъ выведенныя значенія $p_1,\ldots p_n$ удовлетворятъ условіямъ (3).

Ближайшее изученіе свойствъ выраженія $(H_i,\ H_k)$, изложенное въ слѣдующихъ двухъ §§, дастъ средства достигнуть упомянутыхъ выше цѣлей и, кромѣ того, позволитъ вывести еще другія заключенія, полезныя въ примѣненіи къ интегрированію совокупныхъ уравненій какъ обыкновенныхъ, такъ и съ частными производными 1-го порядка.

IV.

16. Положимъ, что φ и ψ означаютъ какія-нибудь двѣ функціи перемѣнныхъ $x_1,\ldots x_n$, $p_1,\ldots p_n$. Возьмемъ частныя производныя этихъ двухъ функцій сначала по перемѣннымъ $x_1,\ldots x_n$,

потомъ по $p_1, \ldots p_n$ и напишемъ первыя подъ вторыми въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1},\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1},\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2},\ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \ldots\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},\ \frac{\partial \psi}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_1},\ \frac{\partial \psi}{\partial p_1},\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_2},\ \frac{\partial \psi}{\partial p_2}, \ldots\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_n},\ \frac{\partial \psi}{\partial p_n}.$$

Разбивъ два предыдущіе ряда членовъ на группы такъ, чтобы первую составляли два первые члена 1-го и 2-го ряда, вторую два слѣдующіе члена 1-го и 2-го ряда и т. д.—перемножимъ производныя каждой группы на крестъ, при чемъ произведенія по направленію однихъ діагоналей возьмемъ съ $+$, по направленію другихъ съ $-$. Такимъ образомъ, получимъ рядъ опредѣлителей 2-го порядка, которыхъ сумма составитъ выраженіе

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \end{vmatrix},$$

означаемое условно такимъ образомъ (φ, ψ).

Итакъ, по предыдущему опредѣленію имѣемъ

$$(\varphi,\ \psi) = \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, & \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \end{vmatrix} = \Sigma_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right), \tag{1}$$

распространяя сумму на всѣ значенія i отъ 1 до n.

Изслѣдуя измѣненія вида выраженія (φ, ψ), при различныхъ предположеніяхъ относительно φ и ψ, замѣтимъ сначала слѣдующіе очевидные выводы:

$$(\varphi,\varphi)=0, \quad (\varphi, \psi)=-(\psi, \varphi), \quad (-\varphi, \psi)=-(\varphi,\psi) \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} (x_i, \psi)=\dfrac{\partial\psi}{\partial p_i}, \quad (p_i, \psi)=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}, \quad (a=\text{const.}, \psi)=0. \\ (x_i, p_i)=-(p_i, x_i)=1, \quad (x_i, x_k)=(p_i, p_k)=(x_i, p_k)=0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Относительно вида зависимости функцій φ и ψ отъ перемѣнныхъ $x_1,\ldots x_n$, $p_1,\ldots p_n$ мы не сдѣлали никакого ограниченія, поэтому положимъ, что эти перемѣнныя входятъ въ разсматриваемыя функціи явнымъ и неявнымъ образомъ. Пусть, напримѣръ,

$$\varphi=F(x_1,\ldots x_n, p_1,\ldots p_n, a_1,\ldots a_r),$$

$$\psi=f(x_1,\ldots x_n, p_1,\ldots p_n, b_1,\ldots b_s),$$

гдѣ $a_1,\ldots a_r$ и $b_1,\ldots b_s$ означаютъ функціи $x_1,\ldots x_n$, $p_1,\ldots p_n$.
На основаніи опредѣленія имѣемъ

$$[F, f]=\Sigma_i \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right), & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial p_i}\right), & \left(\dfrac{\partial f}{\partial p_i}\right) \end{vmatrix} =$$

$$\Sigma_i \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_i}+\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial a_r}\dfrac{\partial a_r}{\partial x_i}, & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}+\dfrac{\partial f}{\partial b_1}\dfrac{\partial b_1}{\partial x_i}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial b_s}\dfrac{\partial b_s}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial F}{\partial p_i}+\dfrac{\partial F}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial p_i}+\cdots+\dfrac{\partial F}{\partial a_r}\dfrac{\partial a_r}{\partial p_i}, & \dfrac{\partial f}{\partial p_i}+\dfrac{\partial f}{\partial b_1}\dfrac{\partial b_1}{\partial p_i}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial b_s}\dfrac{\partial b_s}{\partial p_i} \end{vmatrix}.$$

Примѣняя послѣдовательно очевидныя формулы

$$\begin{vmatrix} A+a, A' \\ B+b, B' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A, A' \\ B, B' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, A' \\ b, B' \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} mA, nA' \\ mB, nB' \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} A, A' \\ B, B' \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

ыводимъ отсюда $$[F, f] = (F, f) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial b_1}(F, b_1)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial b_s}(F, b_s)+\frac{\partial F}{\partial a_1}(a, f)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial a_r}(a_r, f)+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial a_1}\,\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_1, b_1)+\frac{\partial F}{\partial a_1}\,\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_1, b_2)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial a_1}\,\frac{\partial f}{\partial b_s}(a_1, b_s)+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial a_2}\,\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_2, b_1)+\frac{\partial F}{\partial a_2}\,\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_2, b_2)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial a_2}\,\frac{\partial f}{\partial b_s}(a_2, b_s)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\partial F}{\partial a_r}\,\frac{\partial f}{\partial b_1}(a_r, b_1)+\frac{\partial F}{\partial a_r}\,\frac{\partial f}{\partial b_2}(a_r, b_2)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial a_r}\,\frac{\partial f}{\partial b_s}(a_r, b_s)$$

или $$[F, f]=(F, f)+\Sigma_k\frac{\partial f}{\partial b_k}(F, b_k)+\Sigma_i\frac{\partial F}{\partial a_i}(a_i, f)+$$

$$+\Sigma_i\Sigma_k\frac{\partial F}{\partial a_i}\,\frac{\partial f}{\partial b_k}(a_i, b_k). \tag{5}$$

Ясно, что здѣсь выраженія $[F, f]$ и (F, f) не имѣютъ одного и того же значенія; первое предполагаетъ полную измѣняемость функцій F и f, вслѣдствіе измѣненія перемѣнныхъ, входящихъ какъ явнымъ, такъ и неявнымъ образомъ; второе — только частную ихъ измѣняемость, вслѣдствіе измѣненія перемѣнныхъ, входящихъ явно.

Вообще, не трудно замѣтить аналогію между дѣйствіемъ, выражаемымъ знакомъ $[F, f]$, и дифференцированіемъ сложныхъ функцій. Дѣйствительно, можно получить всѣ члены второй части формулы (5), принимая во вниманіе поочередно только по одному элементу измѣняемости двухъ функцій F и f.

Полагая $s=r$ и $a_1=b_1$, $a_2=b_2$,... $a_r=b_r$, изъ формулы (5) находимъ

$$[F, f]=(F, f)+\Sigma_i\left\{(F, a_i)\frac{\partial f}{\partial a_i}-(f, a_i)\frac{\partial F}{\partial a_i}\right\}+$$

$$+\Sigma_{i,k}\left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\,\frac{\partial f}{\partial a_k}-\frac{\partial F}{\partial a_k}\,\frac{\partial f}{\partial a_i}\right)(a_i, a_k); \tag{6}$$

въ послѣдней суммѣ 2-й части должно полагать послѣдовательно $i=1, 2, \ldots r-1$ и для каждаго значенія i брать для k всѣ значенія большія до r включительно.

Если функціи F и f не содержатъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$ явнымъ образомъ, то формула (6) приметъ слѣдующій видъ

$$[F, f] = \Sigma_{i,k}\left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\frac{\partial f}{\partial a_k} - \frac{\partial F}{\partial a_k}\frac{\partial f}{\partial a_i}\right)(a_i, a_k). \tag{7}$$

Если функція F содержитъ перемѣнныя $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$ только явнымъ образомъ, а функція f — только посредствомъ функцій $a_1, \ldots a_r$, то по формулѣ (6) получимъ

$$[F, f] = \Sigma_i (F, a_i)\frac{\partial f}{\partial a_i} = (F, a_1)\frac{\partial f}{\partial a_1} + (F, a_2)\frac{\partial f}{\partial a_2} + \cdots + (F, a_r)\frac{\partial f}{\partial a_r}. \tag{8}$$

Выраженія частныхъ производныхъ отъ (φ, ψ) получаются очень просто. Означивъ черезъ u одно изъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, находимъ

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\Sigma_i\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, & \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\end{vmatrix} = \Sigma_i\begin{vmatrix}\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\partial x_i}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\\ \frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\partial p_i}, & \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\end{vmatrix} + \Sigma_i\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, & \frac{\partial\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\partial x_i}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, & \frac{\partial\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\partial p_i}\end{vmatrix},$$

или

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial u} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial\psi}{\partial u}\right). \tag{9}$$

Хотя въ теоріи интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка мы не встрѣтимъ надобности въ производныхъ высшихъ порядковъ отъ (φ, ψ), однако замѣтимъ кстати весьма простой видъ ихъ выраженія, подобный тому, который Лейбницъ далъ для

$$\frac{d^n\varphi(x)\,\psi(x)}{dx^n}.$$

Дѣйствительно, по формулѣ (9) находимъ

$$\frac{\partial^2(\varphi, \psi)}{\partial u^2}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, \varphi\right)+2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\left(\varphi, \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right).$$

Отсюда обыкновеннымъ приложеніемъ доказательства по аналогіи заключаемъ

$$\frac{\partial^n(\varphi, \psi)}{\partial u^n}=\left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial u_n}, \psi\right)+n\left(\frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial u^{n-1}}, \frac{\partial\psi}{\partial u}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial u^{n-2}}, \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial u^{n-2}}\right)+n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial^{n-1}\psi}{\partial u^{n-1}}\right)+\left(\varphi, \frac{\partial^n\psi}{\partial u^n}\right).$$

§ 17. Какъ простыя примѣненія общихъ формулъ предыдущаго § мы выведемъ всѣ теоремы, на которыхъ основывается «новый способъ интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка» Якоби.

Теорема 1.

Возьмемъ три функціи A, B, C перемѣнныхъ $x_1,\ldots x_n$, $p_1,\ldots p_n$ и для краткости будемъ означать частныя производныя ихъ, приписывая къ функціи указателемъ то перемѣнное, въ отношеніи котораго произведено частное дифференцированіе. Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}=A_{x_i}, \frac{\partial B}{\partial x_i}=B_{x_i}, \frac{\partial C}{\partial x_i}=C_{x_i}, \frac{\partial A}{\partial p_i}=A_{p_i}, \frac{\partial B}{\partial p_i}=B_{p_i}, \frac{\partial C}{\partial p_i}=C_{p_i}.$$

Положивъ въ формулѣ (8)

$$F=A, f=(B, C)=Bx_1\,Cp_1-Bp_1\,Cx_1+\cdots+Bx_n\,Cp_n-Bp_n\,Cx_n,$$

находимъ

$$[A, (B, C)]=(A, Bx_1)Cp_1-(A, Bp_1)Cx_1+\cdots+(A, Bx_n)Cp_n-$$
$$-(A, Bp_n)Cx_n+(A, Cp_1)Bx_1-(A, Cx_1)Bp_1+\cdots+(A, Cp_n)Bx_n-$$
$$-(A, Cx_n)Bp_n,$$

или

$$[A, (B, C)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, Bx_i), & Cx_i \\ (A, Bp_i), & Cp_i \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, Cx_i), & Bx_i \\ (A, Cp_i), & Bp_i \end{vmatrix}. \quad \text{(a)}$$

Перемѣщеніемъ буквъ A, B, C въ круговомъ порядкѣ, находимъ

$$[B, (C, A)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, Cx_i) & Ax_i \\ (B, Cp_i) & Ap_i \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, Ax_i), & Cx_i \\ (B, Ap_i). & Cp_i \end{vmatrix}. \quad \text{(b)}$$

Такимъ же образомъ можно получить выраженіе $[C. (A, B)]$, но лучше употребимъ для этого другой пріемъ: на основаніи формулъ (1), (9) и (4) находимъ

$$[C, (A, B)] = \Sigma_i \begin{vmatrix} \frac{\partial C}{\partial x_i}, & \frac{\partial (A, B)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial C}{\partial p_i}, & \frac{\partial (A, B)}{\partial p_i} \end{vmatrix} = \Sigma_i \begin{vmatrix} Cx_i, & (Ax_i, B) \\ Cp_i, & (Ap_i, B) \end{vmatrix} +$$

$$+ \Sigma_i \begin{vmatrix} Cx_i, & (A, Bx_i) \\ Cp_i, & (A, Bp_i) \end{vmatrix}. \quad \text{(c)}$$

Складывая равенства (a), (b), (c), непосредственно замѣчаемъ, что въ суммѣ вторыхъ частей ихъ произойдутъ сокращенія:

1-й суммы 2-й части равенства (a) со 2-й суммою 2-й части равенства (c), и 2-й суммы 2-й части равенства (b) съ 1-ю суммою 2-й части равенства (c), послѣ которыхъ находимъ:

$$[A, (B, C)] + [B, (C, A)] + [C, (A, B)] =$$

$$= \Sigma_i \begin{vmatrix} (B, Cx_i), & Ax_i \\ (B, Cp_i), & Ap_i \end{vmatrix} - \Sigma_i \begin{vmatrix} (A, Cx_i), & Bx_i \\ (A, Cp_i), & Bp_i \end{vmatrix}. \quad \text{(a}'\text{)}$$

Отсюда круговыми перемѣщеніями буквъ A, B, C, получимъ

$$[B,(C,A)]+[C,(A,B)]+[A,(B,C)]=$$

$$=\Sigma_i\begin{vmatrix}(C,A_{x_i}), B_{x_i}\\(C,A_{p_i}), B_{p_i}\end{vmatrix}-\Sigma_i\begin{vmatrix}(B,A_{x_i}), C_{x_i}\\(B,A_{p_i}), C_{p_i}\end{vmatrix}, \qquad (\mathrm{b}')$$

$$[C,(A,B)]+[A,(B,C)]+[B,(C,A)]=$$

$$=\Sigma_i\begin{vmatrix}(A,B_{x_i}), C_{x_i}\\(A,B_{p_i}), C_{p_i}\end{vmatrix}-\Sigma_i\begin{vmatrix}(C,B_{x_i}), A_{x_i}\\(C,B_{p_i}), A_{p_i}\end{vmatrix}. \qquad (\mathrm{c}')$$

Сложимъ равенства (a′), (b′), (c′), замѣчая при этомъ, что первыя части ихъ одинаковы, во вторыхъ же, на основаніи формулы (4), по двѣ суммы соединятся въ одну и на основаніи формулъ (9) и (1), составятъ:

1-я сумма 2-й части равенства (a′) и 2-я сумма 2-й части равенства (c′) — выраженіе — $[A,(B,C)]$;

1-я сумма 2-й части равенства (b′) и 2-я сумма 2-й части равенства (a′) — выраженіе — $[B,(C,A)]$;

1-я сумма 2-й части равенства (c′) и 2-я сумма 2-й части равенства (b′) — выраженіе — $[C,(A,B)]$.

Поэтому $3\{[A,(B,C)]+[B,(C,A)]+[C,(A,B)]\}=-\{[A,(B,C)]+$
$$+[B,(C,A)]+[C,A,B)]\};$$

слѣдовательно,

$$[A,(B,C)]+[B,(C,A)]+[C,(A,B)]=0.$$

Отсюда мы видимъ, что теорема, выражаемая предыдущимъ тождествомъ и составляющая главнѣйшее основаніе въ «новомъ способѣ» Якоби, выводится непосредственно и весьма просто изъ элементарныхъ свойствъ выраженія (φ, ψ).

Переходимъ къ доказательству другихъ теоремъ.

Теорема 2.

Возьмемъ n уравненій

$$H=a,\ H_1=a_1,\dots\ H_{n-1}=a_{n-1}, \qquad (\mathrm{h})$$

въ которыхъ a, $a_1, \ldots a_{n-1}$ означаютъ произвольныя постоянныя, H, $H_1, \ldots H_{n-1}$ функціи перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, повѣряющія тождественно условіе

$$(H_i,\ H_k)=0,$$

въ которомъ i и k могутъ быть два какія угодно числа изъ ряда $0,\ 1,\ 2, \ldots\ n-1$.

Докажемъ, что выведенныя изъ предыдущей системы n уравненій значенія $p_1, \ldots p_n$ повѣрятъ тождественно условіе

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k}{\partial x_i}$$

при всѣхъ значеніяхъ i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots n$.

Положимъ изъ уравненій (h) найденныя значенія

$p_i=F(x_1, \ldots x_n,\ a,\ a_1, \ldots a_{n-1})$ и $p_k=f(x_1, \ldots x_n,\ a,\ a_1, \ldots a_{n-1})$.

Разсматривая $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ какъ функціи перемѣнныхъ $x_1 \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, опредѣленныя уравненіями (h), находимъ по формулѣ (6):

$$[F,\ f]=(F,\ f)+\Sigma_i\left\{(F,\ a_i)\ \frac{\partial f}{\partial a_i}-(f,\ a_i)\frac{\partial F}{\partial a_i}\right\}+$$

$$+\Sigma_{i,k}\left(\frac{\partial F}{\partial a_i}\ \frac{\partial f}{\partial a_k}-\frac{\partial F}{\partial a_k}\ \frac{\partial f}{\partial a_i}\right)(a_i,\ a_k).$$

Но по вставкѣ значеній $a=H, \ldots a_{n-1}=H_{n-1}$ функція F обратится въ p_i, f въ p_k и первая часть предыдущаго равенства приметъ видъ $[p_i,\ p_k]$, слѣдовательно, будетъ тождественно равна нулю. Первый членъ второй части будетъ также нулемъ, потому что выраженіе $(F,\ f)$ опредѣляется, разсматривая $a, \ldots a_{n-1}$ постоянными, и функціи F и f не содержатъ явнымъ образомъ перемѣнныхъ $p_1, \ldots p_n$. Третій членъ второй части будетъ нулемъ вслѣдствіе условія

$$(a_i,\ a_k)=(H_i,\ H_k)=0.$$

Слѣдовательно, второй членъ 2-й части долженъ быть нулемъ, т.-е. будемъ имѣть тождественно

$$\Sigma_i\left\{(F,\, a_i)\,\frac{\partial f}{\partial a_i}-(f,\, a_i)\frac{\partial F}{\partial a_i}\right\}=0.$$

Первую часть этого равенства можно представить въ болѣе простомъ видѣ, вставивъ значенія $(F,\, a_i)$ и $(f,\, a_i)$. Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$(F,\, a)=\frac{\partial F}{\partial x_1}\,\frac{\partial a}{\partial p_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\,\frac{\partial a}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_k}\,\frac{\partial a}{\partial p_k}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial a}{\partial p_n}$$

. . . .

$$(F,\, a_{n-1})=\frac{\partial F}{\partial x_1}\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_k}\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_k}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_k}.$$

Сложимъ эти равенства по умноженіи ихъ соотвѣтственно на $\frac{\partial f}{\partial a}\cdots\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}$, что доставитъ

$$\Sigma\,(F,\, a_i)\,\frac{\partial f}{\partial a_i}=\frac{\partial F}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\,\frac{\partial a}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_1}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\,\frac{\partial a}{\partial p_k}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial a_{n-1}}\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_k}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\,\frac{\partial a}{\partial p_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p_n}\right).$$

Но если мы будемъ въ уравненіи

$$p_k=f(x_1,\ldots\, x_n,\; a,\ldots\, a_{n-1})$$

разсматривать $a=H$, $a_1=H_1,\ldots\, a_{n-1}=H_{n-1}$, тогда оно будетъ тождественное. Дифференцируя его въ отношеніи p, которымъ означимъ одно изъ перемѣнныхъ $p_1,\ldots\, p_n$, получимъ

$$\frac{\partial p_k}{\partial p}=\frac{\partial f}{\partial a}\,\frac{\partial a}{\partial p}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}\,\frac{\partial a_{n-1}}{\partial p}$$

и отсюда ясно, что 2-я часть послѣдняго равенства обратится въ 1, если $p=p_k$, во всѣхъ же другихъ случаяхъ она равна нулю. Слѣдовательно,

$$\Sigma_i (F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

Точно такимъ же образомъ докажемъ, что

$$\Sigma_i (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Итакъ, имѣемъ тождественно

$$\Sigma_i \left[(F, a_i) \frac{\partial f}{\partial a_i} - (f, a_i) \frac{\partial F}{\partial a_i} \right] = \frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0,$$

что и требовалось доказать.

На основаніи доказаннаго въ §§ 11 и 15 и предыдущей теоремы должно разсматривать уравненія $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$ и $(H_i, H_k) = 0$ одни, какъ слѣдствія другихъ, и можно назвать вторыя, подобно первымъ, условіями интегрируемости дифференціальнаго выраженія

$$p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \cdots + p_n\, dx_n.$$

Якоби даетъ еще двѣ формулы условій интегрируемости, которыя мы выведемъ тѣмъ же путемъ, какъ и предыдущую.

Теорема 3.

Удержавъ предположенія предыдущей теоремы, представимъ, что помощію системы уравненій (h), каждая изъ n первыхъ величинъ ряда

$$p_1,\ p_2,\ p_3, \ldots\ p_n,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots\ x_n$$

выражена функціею всѣхъ слѣдующихъ за нею въ этомъ ряду перемѣнныхъ и необходимаго числа постоянныхъ $a, a_1, \dots a_{n-1}$. Такимъ образомъ, положимъ, будетъ найдено

$$p_i - F(p_{i+1}, \dots p_n, x_1, \dots x_n, a, a_1, \dots a_{i-1}) = 0,$$

$$p_k - f(p_{k+1}, \dots p_n, x_1, \dots x_n, a, a_1, \dots a_{k-1}) = 0, \text{ гдѣ } i < k.$$

Докажемъ, что первыя части этихъ уравненій повѣряютъ тождественно условіе

$$(p_i - F, p_k - f) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ i и k, заключающихся въ ряду чиселъ $1, 2, \dots n$.

Разсматривая $a, a_1, \dots a_{n-1}$ какъ функціи перемѣнныхъ, опредѣляемыя уравненіями (h), по формулѣ (5) находимъ

$$[F, f] = (F, f) + \sum_{m=0}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=0}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=i-1} \sum_{l=0}^{l=k-1} \frac{\partial F}{\partial a_m} \frac{\partial f}{\partial a_l} (a_m, a_l).$$

По вставкѣ значеній $a = H$, $a_1 = H_1$ и проч., функція F обратится въ p_i, функція f въ p_k, и 1-я часть предыдущаго равенства приметъ видъ $[p_i, p_k]$, слѣдовательно, будетъ тождественно равна нулю. Послѣдній членъ 2-й части будетъ нулемъ вслѣдствіе условія

$$(a_m, a_l) = (H_m, H_l) = 0;$$

слѣдовательно, имѣемъ тождественно

$$0 = (F, f) + \sum_{m=0}^{m=k-1} (F, a_m) \frac{\partial f}{\partial a_m} - \sum_{m=0}^{m=i-1} (f, a_m) \frac{\partial F}{\partial a_m}.$$

Двѣ суммы 2-й части этого равенства можно привести къ простѣйшему виду. Для этого возьмемъ равенства

$$(F,\ a)=\frac{\partial F}{\partial x_1}\ \frac{\partial a}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\ \frac{\partial a}{\partial p_n}-\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}\ \frac{\partial a}{\partial x_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial F}{\partial p_n}\ \frac{\partial a}{\partial x_n},$$

. . . .

$$(F,\ a_{k-1})=\frac{\partial F}{\partial x_1}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n}-\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{i+1}}-\cdots-\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n}.$$

Умноживъ ихъ соотвѣтственно на $\frac{\partial f}{\partial a},\cdots\ \frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}$ и потомъ складывая, находимъ

$$\sum_{m=0}^{m=k-1}(F,\ a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m}=\frac{\partial F}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial p_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n}\right)-$$
$$-\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial x_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{i+1}}\right)-\cdots$$
$$\cdots-\frac{\partial F}{\partial p_n}\left(\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n}\right).$$

Но если $a=H,\ a_1=H_1,\ldots$ то уравненіе $f=p_k$ обратится въ тождество; дифференцируя его, находимъ

$$\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_1}=0,\ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial p_{k-1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_{k-1}}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial p_k}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_k}=1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial p_{k+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_{k+1}}=-\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}},\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial p_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial p_n}=-\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial x_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_{i+1}}=-\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}},\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial a_{k-1}}\ \frac{\partial a_{k-1}}{\partial x_n}=-\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Поэтому предыдущему равенству можно дать слѣдующій видъ

$$\sum_{m=0}^{m=k-1}(F, a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m}=\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial p_n}+\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Замѣнивъ F на f, k на i и обратно, получимъ

$$\sum_{m=0}^{m=i-1}(f, a_m)\frac{\partial F}{\partial a_m}=\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}\frac{\partial F}{\partial p_{i+1}}-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}+\frac{\partial f}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial F}{\partial x_{k+1}}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial F}{\partial x_n};$$

вычитая, находимъ

$$\sum_{m=0}^{m=k-1}(F, a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m}-\sum_{m=0}^{m=i-1}(f, a_m)\frac{\partial F}{\partial a_m}=\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_i}-2(F, f);$$

слѣдовательно, будемъ имѣть тождественно

$$(F, f)+\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_i}-2(F, f)=0,$$

или $$\frac{\partial F}{\partial x_k}-\frac{\partial f}{\partial x_i}-(F, f)=-\left[(F, f)-\frac{\partial F}{\partial x_k}+\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]=0,$$

или $$(F-p_i, f-p_k)=0.$$

Совершенно подобнымъ образомъ мы можемъ доказать слѣдующую, также необходимую впослѣдствіи, теорему.

Теорема 4.

Удержавъ условія двухъ предыдущихъ теоремъ, представимъ, что изъ n уравненій (h) взяты которыя-нибудь m уравненій, положимъ первыя $H=a$, $H_1=a_1,\ldots H_{m-1}=a_{m-1}$, при чемъ, конечно, подразумѣвается $m<n$; помощію ихъ мы можемъ которыя-нибудь m изъ величинъ $p_1, p_2,\ldots p_n$ выразить функціями остальныхъ $n-m$, перемѣнныхъ $x_1,\ldots x_n$ и постоянныхъ $a, a_1,\ldots a_{m-1}$. Пусть такимъ образомъ опредѣлены $p_1, p_2,\ldots p_m$ и, означая чрезъ i и k два какія-нибудь числа не бо́льшія m, положимъ, что будетъ

$$p_i-\varphi(x_1,\ldots x_n, p_{m+1},\ldots p_n, a, a_1,\ldots a_{m-1})=0,$$

$$p_k-\psi(x_1,\ldots x_n, p_{m+1},\ldots p_n, a, a_1,\ldots a_{m-1})=0.$$

Докажемъ, что первыя части такихъ уравненій удовлетворятъ условію

$$(p_i-\varphi,\ p_k-\psi)=0.$$

Дѣйствительно, полагая $a=H$, $a_1=H_1,\ldots a_{m-1}=H_{m-1}$, по формулѣ (6) имѣемъ

$$[\varphi,\ \psi]=(\varphi,\psi)+\sum_{r=0}^{r=m-1}\left\{(\varphi,a_r)\frac{\partial\psi}{\partial a_r}-(\psi,a_r)\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}\right\}+$$

$$+\sum_{r,\,s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}\frac{\partial\psi}{\partial a_s}-\frac{\partial\varphi}{\partial a_s}\frac{\partial\psi}{\partial a_r}\right)(a_r,a_s).$$

Но по вставкѣ значеній $a_1,\ldots a_{m-1}$ первая часть и послѣдній членъ 2-й части предыдущаго равенства обратятся въ нуль; слѣдовательно,

$$(\varphi,\ \psi)+\sum_{r=0}^{r=m-1}\left\{(\varphi,a_r)\frac{\partial\psi}{\partial a_r}-(\psi,\ a_r)\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}\right\}=0.$$

Далѣе имѣемъ

$$(\varphi, a)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial a}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial a}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial a}{\partial p_n}-$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial a}{\partial x_{m+1}}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial a}{\partial x_{m+2}}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial a}{\partial x_n},\ldots$$

. . . .

$$(\varphi, a_{m-1})=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial p_n}-$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_{m+1}}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_{m+2}}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial a_{m-1}}{\partial x_n}.$$

Складывая эти равенства, по умноженіи ихъ соотвѣтственно на $\frac{\partial\psi}{\partial a},\ldots\frac{\partial\psi}{\partial a_{m-1}}$, и вынося во 2-й части общими множителями частныя производныя функціи φ, убѣждаемся, точно такъ же какъ при доказательствѣ предыдущей теоремы, что множители при $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\ldots\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}$ будутъ нули, исключая множителя при $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, который равенъ единицѣ; множители при $\frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+1}},\ldots\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+1}},\ldots\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}$ будутъ соотвѣтственно, $-\frac{\partial\psi}{\partial p_{m+1}},\ldots-\frac{\partial\psi}{\partial p_n},\frac{\partial\psi}{\partial x_{m+1}},\ldots\frac{\partial\psi}{\partial x_n}$; поэтому

$$\sum_{r=0}^{r=m-1}(\varphi, a_r)\frac{\partial\psi}{\partial a_r}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial\psi}{\partial p_{m+1}}-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial\psi}{\partial p_n}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial\psi}{\partial x_{m+1}}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial\psi}{\partial x_n}.$$

Замѣнивъ φ на ψ, k на i и обратно, получимъ

$$\sum_{r=0}^{r=m-1}(\psi, a_r)\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}=\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-\frac{\partial\psi}{\partial x_{m+1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{m+1}}-\cdots$$

$$\cdots-\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}+\frac{\partial\psi}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+1}}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}.$$

Вычитая одно равенство изъ другого, находимъ

$$\sum_{r=0}^{r=m-0}\left\{(\varphi, a_r)\frac{\partial\psi}{\partial a_r}-(\psi, a_r)\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}\right\}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-2(\varphi, \psi).$$

Вставивъ найденное значенiе суммы въ равенство, данное выше, будемъ имѣть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-(\varphi, \psi)=0,$$

или $$(p_i-\varphi,\ p_k-\psi)=0.$$

V.

§ 18. Предложенiя, доказанныя въ двухъ предыдущихъ §§, можно разсматривать какъ вспомогательныя леммы, доказавъ которыя предварительно, мы можемъ теперь, не дѣлая отступленiй, изложить способъ Якоби интегрированiя системы уравненiй (6) § 15, къ рѣшенiю которой была приведена разсматриваемая нами задача интегрированiя уравненiя съ частными производными 1-го порядка при какомъ угодно числѣ перемѣнныхъ независимыхъ.

Сначала мы изложимъ этотъ способъ, пользуясь только теоремами 1 и 2, потомъ, при помощи теоремъ 3 и 4, покажемъ, какимъ образомъ упрощается и совершенствуется теорiя рѣшенiя.

По данному уравненiю съ частными производными 1-го порядка

$$H(x_1,\dots x_n,\ p_1,\dots p_n)=a,$$

должно, во-первыхъ, опредѣлить уравненiе подобнаго же вида

$$H_1(x_1,\dots x_n,\ p_1,\dots p_n)=a_1,$$

въ которомъ a_1 означаетъ произвольное постоянное и H_1 неизвѣстную функцію. Послѣдняя должна быть опредѣлена такимъ образомъ, чтобы удовлетворялось линейное уравненіе

$$(H_1,\ H)=\frac{\partial H_1}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}-\frac{\partial H_1}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial x_n}\frac{\partial H}{\partial p_n}-\frac{\partial H_1}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial x_n}=0. \quad (1)$$

Поэтому, взявъ систему обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{-dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}}=\cdots=\frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}}=\frac{-dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}, \qquad (\alpha)$$

и опредѣливъ одинъ изъ ея интеграловъ

$$f_1\,(x_1,\ldots\ x_n,\ p_1,\ldots\ p_n)=\text{const.},$$

можемъ положить $H_1=f_1$ и, означая произвольное постоянное черезъ a_1, будемъ имѣть

$$H=a,\ \ H_1=f_1=a_1.$$

Далѣе должно опредѣлить уравненіе

$$H_2(x_1,\ldots\ x_n,\ p_1,\ldots\ p_n)=a_2,$$

гдѣ a_2 означаетъ произвольное постоянное и H_2 неизвѣстную функцію, которая должна быть опредѣлена такъ, чтобы удовлетворялись совокупно два линейныхъ уравненія:

$$(H_2,H)=0 \ \text{ и } \ (H_2,f_1)=0. \qquad (2)$$

Изъ нихъ одно есть то же самое уравненіе (1), а другое получится изъ (1) черезъ замѣну функціи H на f_1.

Основываясь на теоремѣ 1-й, Якоби показалъ, что, зная интегралъ одного изъ уравненій (2), можно найти ихъ общее рѣшеніе посредствомъ интегрированія вспомогательнаго линейнаго уравненія съ числомъ перемѣнныхъ меньшимъ $2n$.

И такъ, должно начать опредѣленіемъ интеграла одного изъ уравненій (2); если возьмемъ интегралъ перваго изъ нихъ, то онъ долженъ быть различенъ отъ двухъ уже извѣстныхъ $H=a$ и $f_1=a_1$. Положимъ этотъ 3-й интегралъ будетъ

$$\varphi(x_1,\ldots x_n,\ p_1,\ldots p_n)=\text{const}.$$

Дѣлая послѣдовательныя вставки во 2-е изъ уравненій (2), находимъ

$$(\varphi, f_1)=\varphi_1,\ (\varphi_1, f_1)=\varphi_2,\ (\varphi_2, f_1)=\varphi_3,\ldots\ (\varphi_{i-1}, f_1)=\varphi_i,\ldots \qquad (\beta)$$

Этотъ рядъ можетъ вообще продолжаться неопредѣленно; но если одинъ изъ результатовъ подстановки, положимъ φ_i, равенъ постоянному, тогда рядъ окончится на этомъ членѣ.

Докажемъ, что функціи φ_1, φ_2, $\varphi_3,\ldots$ удовлетворяютъ 1-му изъ уравненій (2). Для этого возьмемъ тождество теоремы 1-й,

$$[A, (B, C)]+[B, (C, A)]+[C, (A, B)]=0,$$

и положимъ $A=H$, $B=f_1$, тогда оно приметъ видъ

$$[H,\ (f_1, C)]+[f_1,\ (C, H)]=0.$$

Полагая теперь послѣдовательно $C=\varphi$, φ_1, φ_2, $\varphi_3,\ldots$, находимъ одно за другимъ тождества

$$[H, (f_1, \varphi)]=0, \quad \text{или} \quad (H, \varphi_1)=0,$$
$$[H, (f_1, \varphi_1)]=0, \quad \text{или} \quad (H, \varphi_2)=0,$$
$$[H, (f_1, \varphi_2)]=0, \quad \text{или} \quad (H, \varphi_3)=0,$$

и т. д.,

доказывающія теорему. Отсюда, какъ очевидное слѣдствіе, выводится весьма важное заключеніе относительно интеграловъ системы уравненій (α), извѣстное подъ названіемъ *теоремы Пуассона.*

Дѣйствительно, полагая $\varphi_1=\text{const.}$, $\varphi_2=\text{const}$, $\varphi_3=\text{const},\ldots$ мы получимъ (на основ. § 9) интегралы уравненій (α). Слѣдовательно, зная два интеграла этихъ уравненій $f_1 = \text{const.}$ и $\varphi = \text{const.}$, различные отъ $H = \text{const.}$, находимъ третій, полагая $(f_1, \varphi) = \text{const.}$, отсюда четвертый, полагая $[(f_1, (f_1, \varphi)] = \text{const.}$ и т. д.

Чтобы не отклоняться отъ главнаго предмета разсужденія, мы ограничимся здѣсь только этимъ замѣчаніемъ, предполагая впослѣдствіи еще разъ возратиться къ теоремѣ Пуассона.

Такъ какъ уравненія (α) имѣютъ только $2n-1$ различныхъ интеграловъ, то, продолжая неопредѣленно рядъ (β), мы не можемъ постоянно получать различныя функціи, но необходимо должны, наконецъ, встрѣтить такую, которая будетъ функціею раньше найденныхъ различныхъ интеграловъ. Пусть первая изъ такихъ функцій будетъ φ_i и положимъ

$$\varphi_i = F\,(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}),$$

гдѣ i должно быть $< 2n$.

Продолжать вычисленіе ряда (β) далѣе функціи φ_i безполезно, потому что такимъ образомъ не получимъ новыхъ интеграловъ. Дѣйствительно, по формулѣ (8) § 16 имѣемъ

$$\varphi_{i+1} = [F, f_1] = (H, f_1)\frac{\partial F}{\partial H} + (f_1, f_1)\frac{\partial F}{\partial f_1} + (\varphi, f_1)\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \cdots + (\varphi_{i-1}, f_1)\frac{\partial}{\partial \varphi_{i-1}} =$$

$$= 0 + 0 + \varphi_1\,\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \cdots + F(H, f_1, \varphi, \ldots \varphi_{i-1})\,\frac{\partial F}{\partial \varphi_{i-1}};$$

отсюда очевидно, что φ_{i+1} выразится посредствомъ однихъ перемѣнныхъ $H, f_1, \varphi, \ldots \varphi_{i-1}$.

Поэтому предложимъ себѣ отыскать, если возможно, такую функцію найденныхъ уже интеграловъ H, f_1, φ, $\varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}$, которая, будучи вставлена вмѣсто H_2, удовлетворитъ уравненіямъ (2). Означивъ искомую функцію черезъ f_2 и полагая

$$H_2 = f_2\,(H, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}),$$

находимъ, что на основанiи формулы (8) § 16 первыя части уравненiй (2) примутъ видъ

$$(f_2, H)=(H, H)\frac{\partial f_2}{\partial H}+(f_1, H)\frac{\partial f_2}{\partial f_1}+(\varphi, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}+$$

$$+(\varphi_1, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}+\cdots+(\varphi_{i-1}, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}},$$

$$(f_2, f_1)=(H, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial H}+(f_1, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial f_1}+(\varphi, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}+$$

$$+(\varphi_1, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}+\cdots+(\varphi_{i-1}, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}}.$$

И такъ какъ имѣемъ тождественно

$$(H, H)=0,\ (f_1, H)=0,\ (\varphi, H)=0,\ (\varphi_1, H)=0,\ldots\ (\varphi_{i-1}, H)=0,$$

$$(H, f_1)=(f_1, f_1)=0,\ (\varphi, f_1)=\varphi_1,\ (\varphi_1, f_1)=\varphi_2,\ldots\ (\varphi_{i-1}, f_1)=\varphi_i;$$

то уравненiе $(H_2, H)=0$ будетъ удовлетворено положенiемъ $H_2=f_2$, какова бы ни была функцiя f_2, чего и должно было ожидать; уравненiе же $(H_2, f_1)=0$ преобразуется, при этомъ положенiи, въ другое линейное:

$$\varphi_1\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}+\varphi_2\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}+\cdots+\varphi_{i-1}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-2}}+$$

$$+F(H, f_1, \varphi, \varphi_1,\ldots \varphi_{i-1})\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{i-1}}=0, \qquad (\gamma)$$

заключающее только одни новыя перемѣнныя H, f_1, φ, $\varphi_1,\ldots$ φ_{i-1}, между тѣмъ какъ старыя $x_1,\ldots x_n$, $p_1,\ldots p_n$ исключились.

Въ уравненiи (γ) H и f_1 можно разсматривать постоянными, потому что частныя производныя въ отношенiи этихъ перемѣнныхъ въ него не входятъ; поэтому въ функцiю F можно вмѣсто H и f_1 поставить соотвѣтственно a и a_1.

Намъ достаточно опредѣлить частный интегралъ уравненія (γ) или одинъ изъ интеграловъ системы обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій

$$\frac{d\varphi}{\varphi_1}=\frac{d\varphi_1}{\varphi_2}=\cdots=\frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}}=\frac{d\varphi_{i-1}}{F(a,\ a_1,\ \varphi,\ldots\ \varphi_{i-1})},$$

которую можно замѣнить однимъ обыкновеннымъ уравненіемъ порядка $i-1$. Если же введемъ новое вспомогательное перемѣнное τ, полагая каждое изъ предыдущихъ отношеній равнымъ $d\tau$, то эта система можетъ быть замѣнена однимъ обыкновеннымъ уравненіемъ порядка i, но сравнительно простѣйшаго вида.

Дѣйствительно, полагая

$$d\tau=\frac{d\varphi}{\varphi_1}=\frac{d\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{d\varphi_2}{\varphi_3}=\cdots=\frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}}=\frac{d\varphi_{i-1}}{F},$$

имѣемъ $$\frac{d\varphi}{d\tau}=\varphi_1,\quad \frac{d\varphi_1}{d\tau}=\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}=\varphi_2,\quad \frac{d\varphi_2}{d\tau}=\frac{d^3\varphi}{d\tau^3}=\varphi_3,\ldots$$

$$\frac{d\varphi_{i-2}}{d\tau}=\frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}=\varphi_{i-1},\quad \frac{d\varphi_{i-1}}{d\tau}=\frac{d^i\varphi}{d\tau^i}=F(a,\ a_1,\ \varphi,\ \varphi_1,\ldots\ \varphi_{i-1}).$$

Или вставивъ въ послѣднее уравненіе вмѣсто $\varphi_1,\ldots\ \varphi_{i-1}$ ихъ предыдущія значенія, получимъ упомянутое выше обыкновенное уравненіе порядка i

$$\frac{d^i\varphi}{d\tau^i}=F\left(a,\ a_1,\ \varphi,\ \frac{d\varphi}{d\tau},\ldots\ \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}\right).$$

Положимъ, что одинъ изъ первыхъ интеграловъ послѣдняго уравненія будетъ

$$\Phi\left(\varphi,\ \frac{d\varphi}{d\tau},\ldots\ \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}\right)=\text{const.};$$

вставивъ въ него вмѣсто $\frac{d\varphi}{d\tau},\ldots\ \frac{d^{i-1}\varphi}{d\tau^{i-1}}$ ихъ предыдущія значенія, получимъ

$$\Phi\,(\varphi,\ \varphi_1,\ldots\ \varphi_{i-1})=\text{const.}$$

и можемъ положить $f_2=\Phi$. Означая притомъ черезъ a_2 произвольное постоянное, будемъ теперь имѣть уже три уравненія съ частными производными 1-го порядка:

$$H=a,\ H_1=f_1=a_1,\ H_2=f_2=a_2,$$

удовлетворяющія требуемымъ условіямъ.

Примѣчаніе 1. Если въ ряду функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{i-1}, \varphi_i$ послѣдняя $\varphi_i=0$, то, очевидно, предпослѣдняя будетъ искомымъ общимъ интеграломъ уравненій (2). Если φ_i равна нѣкоторой постоянной K, то рѣшеніе упростится, потому что тогда имѣемъ

$$\frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}}=\frac{d\varphi_{i-1}}{K},$$

откуда по интегрированіи находимъ

$$2K\varphi_{i-2}-\varphi_{i-1}^2=\text{const.};\quad \text{слѣд.}\quad f_2=2K\varphi_{i-2}-\varphi_{i-1}^2=a_2.$$

Но въ этомъ случаѣ i должно быть болѣе 1, ибо въ противномъ случаѣ предыдущій методъ опредѣленія f_2 не можетъ быть примѣненъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $\varphi_1=K$, гдѣ K данное постоянное, или функція φ; тогда уравненіе (γ) приметъ видъ

$$K\,\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}=0,$$

показывающій, что никакая функція одного φ не можетъ быть общимъ интеграломъ двухъ совокупныхъ уравненій (2).

Въ такомъ случаѣ надобно начинать опредѣленіемъ интеграла второго изъ уравненій (2), $(H_2, f_1)=0$; или опредѣлить еще одинъ интегралъ 1-го изъ этихъ уравненій,

$$\theta(x_1, \ldots x_n,\ p_1, \ldots p_n)=\text{const.},$$

различный отъ $H=a$, $f_1=a_1$, $\varphi=\text{const.}$; или, наконецъ, слѣдовать методу, который будетъ показанъ ниже.

Если бы интегралъ $\theta=\mathrm{const}$. представилъ случай подобный интегралу $\varphi=\mathrm{const}$., т.-е. еслибъ мы получили тождества

$$(\varphi, f_1)=K \quad \text{и} \quad (\theta, f_1)=L,$$

гдѣ K и L постоянныя, или какія-нибудь функціи, соотвѣтственно φ и θ, то значеніе H_2 получилось бы очень просто. Дѣйствительно, полагая $H_2=f_2(\varphi, \theta)$, находимъ, что первыя части уравненій (2) примутъ видъ

$$[f_2, H]=(\varphi, H)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}+(\theta, H)\frac{\partial f_2}{\partial \theta}, \quad [f_2, f_1]=(\varphi, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}+(\theta, f_1)\frac{\partial f_2}{\partial \theta};$$

но такъ какъ имѣемъ тождества $(\varphi, H)=0$, $(\theta, H)=0$, $(\varphi, f_1)=K$, $(\theta, f_1)=L$, то 1-е изъ уравненій (2) будетъ удовлетворено при какомъ угодно видѣ функціи f_2; 2-е же изъ этихъ уравненій приметъ видъ

$$K\frac{\partial f_2}{\partial \varphi}+L\frac{\partial f_2}{\partial \theta}=0,$$

откуда находимъ $f_2=\pi\left(\int\frac{d\varphi}{K}-\int\frac{d\theta}{L}\right)$, гдѣ π означаетъ произвольную функцію.

Помощію трехъ уже извѣстныхъ уравненій

$$H=a, \quad H_1=f_1=a_1, \quad H_2=f_2=a_2,$$

должно опредѣлить четвертое $H_3=a_3$, въ которомъ a_3 означаетъ произвольное постоянное и функція H_3 должна быть опредѣлена такъ, чтобы удовлетворяла тремъ совокупнымъ линейнымъ уравненіямъ

$$(H_3, H)=0, \quad (H_3, f_1)=0, \quad (H_3, f_2)=0. \tag{3}$$

Слѣдуя методу, изложенному выше и найдя общій интегралъ двухъ изъ нихъ, положимъ 1-го и 2-го (для чего, очевидно, достаточно, напр., опредѣлить еще одинъ изъ первыхъ интеграловъ уравненія $\frac{d^i\varphi}{\partial\tau^i}=F$, различный съ $\Phi=\mathrm{const.}$), который пусть будетъ

$$H_3=\psi\ (x_1,\dots x_n,\ p_1,\dots p_n),$$

должно будетъ опредѣлить общій интегралъ всѣхъ трехъ уравненій (3). Для этого послѣдовательными вставками въ уравненіе $(H_3,\ f_3)=0$ находимъ

$$(\psi,f_2)=\psi_1,\quad (\psi_1,f_2)=\psi_2,\quad (\psi_2,f_2)=\psi_3,\dots\quad (\psi_{k-1},\ f_2)=\psi_k.$$

Въ ряду функцій $\psi_1,\dots\ \psi_k,\dots$ необходимо встрѣтится, наконецъ, такая, которая выразится посредствомъ предыдущихъ. Положимъ первая изъ такихъ функцій будетъ

$$\psi_k=f\ (\psi,\ \psi_1,\ \psi_2,\dots\ \psi_{k-1}).$$

Точно такъ же, какъ выше, убѣждаемся, что $\psi_1,\ \psi_2,\dots$ будутъ интегралами двухъ первыхъ уравненій (3). Дѣйствительно, полагая въ тождествѣ

$$[A,\ (B,\ C)]+[B,\ (C,\ A)]+[C,\ (A,\ B)]=0$$

сначала $A=H$, $B=f_2$, потомъ $A=f_1$, $B=f_2$, находимъ два другія тождества:

$$[H,\ (f_2,\ C)]+[f_2,\ (C,\ H)]=0 \quad \text{и} \quad [f_1,\ (f_2,\ C\ )]+[f_2,\ (C,\ f_1)]=0.$$

Дѣлая въ нихъ послѣдовательно $C=\psi,\ \psi_1,\ \psi_2,\dots\ \psi_{k-1}$, найдемъ одно за другимъ два ряда тождествъ

$$[H,\ (f_2,\ \psi)]=(\psi_1,\ H)=0,\quad [H,\ (f_2,\ \psi_1)]=(\psi_2,\ H)=0,\dots$$
$$[f_1,\ (f_2,\ \psi)]=(\psi_1,\ f_1)=0,\quad [f_1,\ (f_2,\ \psi_1)]=(\psi_2,\ f_1)=0,\dots$$

доказывающихъ теорему.

Далѣе должно отыскивать такую функцію f_3 перемѣнныхъ H, f_1, f_2, ψ, $\psi_1, \ldots \psi_{k-1}$, которая удовлетворяла бы всѣмъ тремъ уравненіямъ (3), будучи поставлена на мѣсто H_3.

Но, такъ же какъ и прежде, не трудно убѣдиться, что первыя два изъ этихъ уравненій будутъ удовлетворены функціею f_3 произвольнаго вида; что же касается третьяго изъ уравненій (3), то оно, по вставкѣ $H_3=f_3$, преобразуется въ слѣдующее линейное

$$\psi_1 \frac{\partial f_3}{\partial \psi} + \psi_2 \frac{\partial f_3}{\partial \psi_1} + \cdots + f(\psi, \psi_1, \ldots \psi_{k-1}) \frac{\partial f_3}{\partial \psi_{k-1}} = 0,$$

заключающее только перемѣнныя ψ, $\psi_1, \ldots \psi_{k-1}$. Если бы функція f содержала перемѣнныя H, f_1, f_2, то ихъ можно замѣнить соотвѣтственно постоянными a, a_1, a_2, потому что предыдущее уравненіе не содержитъ частныхъ производныхъ въ отношеніи H, f_1 и f_2.

Такимъ образомъ фунцкія f_3 должна быть опредѣлена какъ частный интегралъ предыдущаго линейнаго уравненія, или какъ одинъ изъ интеграловъ слѣдующей системы совокупныхъ уравненій

$$d\sigma = \frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \cdots = \frac{d\psi_{k-1}}{f},$$

гдѣ σ означаетъ вспомогательное перемѣнное, что, наконецъ, приводится къ опредѣленію одного изъ первыхъ интеграловъ уравненія съ 2 перемѣнными порядка k,

$$\frac{d^k\psi}{d\sigma^k} = f\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}, \ldots \frac{d^{k-1}\psi}{\partial\sigma^{k-1}}\right).$$

Если этотъ интегралъ будетъ

$$\Psi\left(\psi, \frac{d\psi}{d\sigma}, \ldots \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}}\right) = \text{const},$$

то, вставивъ значенія $\frac{d\psi}{d\sigma}=\psi_1,\ldots \frac{d^{k-1}\psi}{d\sigma^{k-1}}=\psi_{k-1}$, можемъ положить

$$f_3=\Psi(\psi, \psi_1,\ldots \psi_{k-1},)=\text{const}=a_3.$$

Такимъ образомъ будутъ теперь извѣстны уже 4 уравненія

$$H=a,\ H_1=f_1=a_1,\ H_2=f_2=a_2,\ H_3=f_3=a_3,$$

удовлетворяющія условіямъ (1), (2) и (3).

Примѣчаніе 2. Здѣсь необходимо замѣтить, что если результатъ первой подстановки (ψ, f_1), или ψ_1, будетъ функціею ψ, или какимъ-нибудь постояннымъ, неравнымъ нулю, то предыдущій способъ опредѣленія функціи f_3 обнаружитъ недостаточность, подобную той, о которой мы говорили при опредѣленіи функціи f_2 въ примѣчаніи 1-мъ.

Теперь уже достаточно объясненъ ходъ послѣдовательнаго опредѣленія функцій $H_1, H_2,\ldots H_{n-1}$ помощью данной H, выполняющихъ условія $(H_i, H_k)=0$. Когда эти функціи будутъ найдены, то нужно будетъ только алгебраически вывести значенія $p_1,\ldots p_n$ изъ уравненій

$$H=a,\ H_1=a_1,\ldots H_{n-1}=a_{n-1}.$$

Вставивъ эти значенія въ дифференціальное уравненіе

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots+p_ndx_n,$$

мы всегда можемъ интегрировать это послѣднее, такъ какъ функціи $p_1,\ldots p_n$ должны, на основаніи теоремы 2-й, выполнять условія интегрируемости, и получимъ полный интегралъ задачи въ слѣдующемъ видѣ

$$z=f(x_1,\ldots x_n,\ a,\ a_1,\ldots a_{n-1})+a_n.$$

Желая представить сущность способа Якоби въ возможно простомъ видѣ, мы изложили его, принявъ въ основаніе только теоремы 1-ю и 2-ю. Но при такомъ изложеніи въ немъ обнаруживается теоретическій недостатокъ, указанный въ примѣчаніяхъ 1-мъ и 2-мъ и кромѣ того уравненіямъ, посредствомъ интегрированія которыхъ выводятся искомыя функціи, еще не дано возможно простѣйшаго вида, черезъ исключеніе излишнихъ перемѣнныхъ. Далѣе мы покажемъ, что, пользуясь теоремами 3-й и 4-й, мы не встрѣтимъ упомянутаго недостатка въ теоріи способа и можемъ привести итегрируемыя уравненія къ наименьшему числу перемѣнныхъ. Но, прежде того, считаемъ небезполезнымъ примѣнить способъ Якоби въ томъ видѣ, какъ онъ изложенъ выше, къ нѣсколькимъ примѣрамъ легко интегрируемыхъ формъ уравненій съ частными производными 1-го порядка.

§ 19. Изъ предыдущаго видно, что сущность и главная трудность задачи интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$H(x_1,\dots x_n,\ p_1,\dots p_n)=a$$

заключается въ опредѣленіи $n-1$ различныхъ частныхъ интеграловъ

$$H_1=a_1,\ H_2,=a_2,\dots H_{n-1}=a_{n-1}$$

линейнаго уравненія $(H,\ \varphi)=0$, которые, взятые попарно, должны сверхъ того выполнять условіе

$$(H_i,\ H_k)=0$$

при всѣхъ значеніяхъ i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 0, 1,... $n-1$.

Поэтому болѣе или менѣе легко интегрируемыя формы уравненія $H=a$ будутъ тѣ, изъ которыхъ можно непосредственно, т.-е. безъ всякаго интегрированія, получить всю сполна или часть системы уравненій $H_1=a_1,\dots H_{n-1}=a_{n-1}$, дополняющихъ данное.

На основаніи общихъ соображеній, которыя сейчасъ будутъ изложены, легко убѣдиться, что къ легко интегрируемымъ формамъ уравненій съ частными производными 1-го порядка, подобно тому какъ и въ классѣ обыкновенныхъ уравненій, преимущественно принадлежатъ тѣ, въ которыхъ перемѣнныя могутъ быть *отдѣлены*. Но понятно, что выраженіе «отдѣленіе перемѣнныхъ» въ уравненіяхъ съ частными производными должно имѣть другое и болѣе обширное значеніе, чѣмъ въ уравненіяхъ съ однимъ независимымъ перемѣннымъ.

Положимъ, что данное уравненіе съ частными производными 1-го порядка будетъ вида

$$H(x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m) = a,$$

въ которомъ $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ означаютъ функціи перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, выполняющія условіе

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0 \qquad (\alpha)$$

для всѣхъ значеній r и s, взятыхъ въ ряду чиселъ 1, 2,... m.

Посмотримъ, какія условія, сверхъ этого, должны выполнить функціи $\varphi_1, \ldots \varphi_m$, для того чтобы при интегрированіи даннаго уравненія можно было ихъ разсматривать постоянными. Для этого представимъ, что, прилагая способъ Якоби, мы нашли часть системы уравненій, дополняющей данное

$$H_1 = a_1, \ H_2 = a_2, \ldots H_l = a_l,$$

гдѣ $l < n$, и функціи $H_1, \ldots H_l$, не заключающія произвольныхъ постоянныхъ $a_1, \ldots a_l$, но могущія содержать $\varphi_1, \ldots \varphi_m$, которыя принимались постоянными, выполнять, при этомъ предположеніи, условіе

$$(H_i, H_k) = 0,$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 0, 1, 2,... l.

Разсматривая теперь $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ снова функціями $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, находимъ, что первая часть уравненія, выражающаго предыдущее условіе, приметъ (на основаніи формулы (5) § 16, IV) видъ

$$[H_i, H_k]=(H_i, H_k)+\sum_{r=1}^{r=m}\left[(H_i, \varphi_r)\frac{\partial H_i}{\partial\varphi_r}-(H_k, \varphi_r)\frac{\partial H_k}{\partial\varphi_r}\right]+$$

$$+\sum_{r,s}\left(\frac{\partial H_i}{\partial\varphi_r}\frac{\partial H_k}{\partial\varphi_s}-\frac{\partial H_i}{\partial\varphi_s}\frac{\partial H_k}{\partial\varphi_r}\right)(\varphi_r, \varphi_s).$$

Первый и третій члены 2-й части этого равенства равны нулю, на основаніи предыдущихъ условій; чтобы и второй членъ ея также приводился къ нулю, очевидно, функціи $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ должны еще выполнять условіе

$$(H_i, \varphi_r)=0 \qquad (\beta)$$

для всѣхъ значеній $i=0, 1, 2, \ldots l$, и $r=1, 2, \ldots m$.

Замѣтимъ теперь, что если въ данномъ уравненіи открыто присутствіе функцій $\varphi_1, \ldots \varphi_m$, выполняющихъ условія ($\alpha$) и часть условій ($\beta$), соотвѣтствующую значенію указателя $i=0$, т.-е. $(H, \varphi_1)=0$, $(H, \varphi_2)=0, \ldots (H, \varphi_m)=0$; то, чтобы выполнить остальныя условія (β), достаточно принять

$$H_1=\psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m)=a_1, \ldots H_l=\psi_l(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m)=a_l,$$

гдѣ $\psi_1, \ldots \psi_l$ означаютъ функціи, ограниченныя только однимъ условіемъ, чтобы изъ предыдущей системы уравненій нельзя было вывести отношенія между одними $H_1, \ldots H_l$ или, что равнозначительно, между $a_1, \ldots a_l$. Но, очевидно, это было бы возможно, если $l<m$; слѣдовательно, опредѣляемое такимъ образомъ число уравненій, дополняющихъ данное, должно быть равно или менѣе m.

Если m не болѣе $n-1$ и всѣ функціи $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ дѣйствительно содержатъ перемѣнныя $p_1, \ldots p_n$, притомъ въ отношеніи ихъ различныя и независимыя, тогда всего проще полагать

$$H_1=\varphi_1=a_1, \ldots H_m=\varphi_m=a_m.$$

Что касается того, какимъ образомъ обнаружить въ данномъ уравненіи присутствіе функцій $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, выполняющихъ упомянутыя выше условія, то для этого, конечно, нельзя дать общаго правила; однако, есть одинъ случай, когда существованіе этихъ функцій становится очевидно и когда, поэтому, предыдущій пріемъ можетъ быть приложенъ безъ затрудненія.

Пусть данное уравненіе представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$H[x_1, \ldots x_{i-1}, p_1, \ldots p_{i-1}, \varphi_1, \ldots \varphi_m] = 0,$$

такъ что функція H содержитъ непосредственно только перемѣнныя $x_1, p_1, \ldots x_{i-1}, p_{i-1}$; функціи φ_1—перемѣнныя $x_i, p_i, \ldots$ $\ldots x_{i+k-1}, p_{i+k-1}, \ldots$ функція φ_m—перемѣнныя: $x_{i+k+\cdots l}, p_{i+k+\cdots l}$, $\ldots x_n, p_n$. Тогда можно сказать, что въ немъ перемѣнныя отдѣлены. Въ этомъ случаѣ, очевидно, условія:

$$(H, \varphi_r) = 0 \quad \text{и} \quad (\varphi_r, \varphi_s) = 0$$

будутъ удовлетворены для всѣхъ значеній $1, 2, \ldots m$ указателей r и s. Поэтому, на основаніи предыдущихъ заключеній, вмѣсто даннаго уравненія можно интегрировать отдѣльно каждое изъ уравненій съ частными производными 1-го порядка:

$$H(x_1, \ldots x_{i-1}, p_1, \ldots p_{i-1}, a_1, \ldots a_l) = a,$$
$$\varphi_1 = a_1, \ldots \varphi_m = a_m,$$

гдѣ $a_1, \ldots a_l$ означаютъ произвольныя постоянныя. Если полные интегралы этихъ уравненій будутъ соотвѣтственно

$$z_0 + \alpha_0, \quad z_1 + \alpha_1, \ldots \quad z_m + \alpha_m,$$

то полный интегралъ даннаго уравненія будетъ равенъ ихъ суммѣ

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_m + \alpha = z + \alpha,$$

гдѣ α означаетъ сумму просто приданныхъ произвольныхъ постоянныхъ $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_m$. Въ самомъ дѣлѣ, не трудно убѣдиться, что онъ удовлетворяетъ предложенному уравненію и заключаетъ n произвольныхъ постоянныхъ.

Замѣтимъ, что если одна изъ функцій $\varphi_1, \dots \varphi_m$ будетъ заключать только одну пару соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ, напримѣръ x_i и p_i, тогда, уравнявъ ее произвольному постоянному a_i, выведемъ изъ этого уравненія выраженіе p_i въ x_i и a_i, откуда соотвѣтственный интегралъ z_i получится посредствомъ квадратуры. Если въ данномъ уравненіи одно изъ перемѣнныхъ, положимъ x_k, вовсе не входитъ, тогда будемъ имѣть уравненіе $p_k = a_k$, которому соотвѣтствуетъ интегралъ $z_k = a_k x_k$. Поэтому полные интегралы уравненій

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = f\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right)$$

и $$\varphi_n\left(x_n, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = F\left[\varphi_1\left(x_1, \frac{\partial z}{\partial x_1}\right), \varphi_2\left(x_2, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right), \dots \varphi_{n-1}\left(x_{n-1}, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right)\right]$$

могутъ быть написаны, не специализируя вида функцій f и F, и, очевидно, будутъ соотвѣтственно

$$z + \alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + f(a_1, \dots a_{k-1}) x_n$$

и $$z + \beta = \int \psi_1(a_1, x_1)\, dx_1 + \int \psi_2(a_2, x_2)\, dx_2 + \dots$$
$$\dots + \int \psi_{n-1}(a_{n-1}, x_{n-1})\, dx_{n-1} + \int \psi_n[F(a_1, \dots a_n), x_n]\, dx,$$

гдѣ $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ представляютъ соотвѣтственно значенія $p_1, p_2, \dots p_n$, выведенныя изъ уравненій

$$\varphi_1 = a_1, \ \varphi_2 = a_2, \dots \varphi_n = F(a, \ a_{n-1}).$$

Возьмемъ уравненіе $z = F\left(\frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{\partial x_2}, \dots \frac{dz}{dx_n}\right)$.

Представляя интегралъ его подъ видомъ уравненія

$$\varphi(x_1,\dots x_n,\ z)=0$$

и выводя отсюда $\dfrac{dz}{dx_1}=-\dfrac{p_1}{p_{n+1}},\dots\ \dfrac{\partial z}{\partial x_n}=-\dfrac{p_n}{p_{n+1}}$,

гдѣ $$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=p_i \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=p_{n+1},$$

по вставкѣ этихъ значеній, дадимъ предложенному уравненію слѣдующій видъ

$$z=F\left(-\frac{p_1}{p_{n+1}},\ -\frac{p_2}{p_{n+1}},\dots -\frac{p_n}{p_{n+1}}\right),$$

въ которомъ теперь перемѣнныя отдѣлены. Поэтому интегралъ преобразованнаго уравненія представится суммою интеграловъ обыкновенныхъ уравненій

$$p_1=a_1,\ \ p_2=a_2,\dots\ p_n=a_n,\ \ z=F\left(-\frac{a_1}{p_{n+1}},\dots -\frac{a_n}{p_{n+1}}\right).$$

Послѣднее изъ нихъ рѣшается въ особенности просто, если функція F будетъ однородною степени μ въ отношеніи $\dfrac{\partial z}{\partial x_1},\dots\ \dfrac{\partial z}{\partial x_n}$; тогда оно принимаетъ видъ

$$z=\frac{(-1)^\mu}{p_{n+1}^\mu}F(a_1,\dots a_n),\quad \text{откуда}\quad p_{n+1}=-F^{\frac{1}{\mu}}(a_1,\dots a_n)\,.\,z^{-\frac{1}{\mu}}.$$

Поэтому полный интегралъ преобразованнаго уравненія будетъ

$$\varphi+a=a_1x_1+a_2x_2,\dots+a_nx_n-\frac{\mu}{\mu-1}F^{\frac{1}{\mu}}(a_1,\dots a_n)\,z^{\frac{\mu-1}{\mu}};$$

откуда, уравнявъ 2-ю часть нулю, выведемъ значеніе z, удовлетворяющее предложенному уравненію,

$$z=\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}\frac{(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{F^{\frac{1}{\mu-1}}(a_1,\ a_2,\dots\ a_n)}.$$

Представимъ случай болѣе общій; пусть будетъ

$$z=f\left(x_1,\dots\ x_n,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\dots\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right),$$

гдѣ f означаетъ функцію однородную степени μ относительно $\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots\ \frac{\partial z}{\partial x_n}$. Помощію предыдущаго преобразованія и при тѣхъ же означеніяхъ данное уравненіе приметъ видъ

$$zp^{\mu}_{n+1}=(-1)^{\mu}f(x_1,\dots\ x_n,\ p_1,\dots\ p_n).$$

Поэтому задача приводится къ интегрированію двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$zp^{\mu}_{n+1}=(-1)^{\mu}A \quad \text{и} \quad f(x_1,\dots\ x_n,\ p_1,\dots\ p_n)=A.$$

Интегралъ перваго изъ нихъ будетъ $v'+\alpha'=-\frac{\mu}{\mu-1}A^{\frac{1}{\mu}}z^{\frac{\mu-1}{\mu}}$; интегралъ второго означимъ $v''+\alpha''=F(x_1,\dots\ x_n,\ A,\ a_1,\dots\ a_{n-1})$; поэтому интегралъ преобразованнаго уравненія будетъ

$$V+\alpha=F(x_1,\dots\ x_n,\ A,\ a_1,\dots\ a_{n-1})-\frac{\mu}{\mu-1}A^{\frac{1}{\mu}}z^{\frac{\mu-1}{\mu}};$$

откуда наконецъ выводимъ интегралъ предложеннаго уравненія

$$z=\frac{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}}{A^{\frac{1}{\mu-1}}}\sqrt[\mu-1]{\{F(x_1,\dots\ x_n,\ A\ a_1,\dots\ a_n)\}^{\mu}}.$$

Для примѣра къ этому случаю возьмемъ уравненіе

$$z=\frac{1}{x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)+x_2^2x_3\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2,$$

которое по преобразованіи приметъ видъ

$$zp_4^2=\frac{p_1^2}{x_1}+x_2p_2\left(\frac{p_1}{x_1}+p_3\right)+x_2^2x_3p_2^2.$$

Здѣсь мы замѣчаемъ сначала, что соотвѣтственныя перемѣнныя z и p_4, x_2 и p_2 отдѣлены; поэтому задача приводится къ интегрированію слѣдующихъ уравненій

$$zp_4^2=a,\quad x_2p_2=b$$

и

$$\frac{p_1^2}{x_1}+\frac{b}{x_1}p_1+bp_3+b^2x_3=a;$$

но теперь очевидно, что въ послѣднемъ уравненіи перемѣнныя x_1, p_1 и x_3, p_3 также отдѣлены, поэтому мы имѣемъ интегрировать четыре слѣдующихъ обыкновенныхъ уравненія:

$$zp_4^2=a,\ x_2p_2=b,\ \frac{p_1^2}{x_1}+\frac{b}{x_1}p_1=c,\ bp_3+b^2x_3=a-c,$$

интегралы которыхъ будутъ соотвѣтственно:

$$V'+\alpha'=\pm2a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}},\quad V''+\alpha''=b\log x_2,$$

$$V'''+\alpha'''=-\frac{bx_1}{2}\pm\frac{2}{3c}\left(\frac{1}{4}b^2+cx_1\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$V''''+\alpha''''=\frac{(a-c)x_3}{b}-\frac{bx_3^2}{2}.$$

Слѣдовательно, полный интегралъ преобразованнаго уравненія будетъ

$$V+\alpha=-\frac{bx_1}{2}\pm\frac{2}{3c}\left(\frac{1}{4}b^2+cx_1\right)^{\frac{3}{2}}+b\log x_2+\frac{(a-c)x_3}{b}-\frac{bx_3^2}{2}\pm2a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}.$$

Наконецъ, уравнявъ нулю 2-ю часть этого равенства, получимъ полный интегралъ предложеннаго уравненія.

Въ предыдущихъ примѣрахъ полныя рѣшенія получились посредствомъ одного отдѣленія перемѣнныхъ; теперь не будетъ излишнимъ выбрать такой случай, гдѣ приложеніе этого пріема хотя упрощаетъ задачу и даетъ часть рѣшенія ея, однако полный интегралъ выводится только помощію общаго способа Якоби.

Пусть данное уравненіе будетъ

$$H=\left(x_2\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)x_3+\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}-\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\frac{\partial z}{\partial x_3}\left(\frac{\partial z}{\partial x_4}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}-\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_5}+x_4\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_5}+x_6\right)\frac{\partial z}{\partial x_3}\,\frac{\partial z}{\partial x_6}=a.$$

Оно заключаетъ шесть независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\ldots x_6$ и не содержитъ самой неизвѣстной функціи z, но только ея частныя производныя $\frac{\partial z}{\partial x_1},\ldots\frac{\partial z}{\partial x_6}$. Означая эти послѣднія соотвѣтственно черезъ $p_1,\ldots p_6$ и дѣлая небольшое измѣненіе формы предыдущаго уравненія, напишемъ его слѣдующимъ образомъ

$$(x_2p_1+x_1p_2)\,x_3+p_3\,(p_1-p_2)\left\{p_4^2+(p_5+x_4)(p_5+x_6)p_6\right\}=a.$$

Теперь очевидно, что перемѣнныя x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3 и x_4, p_4, x_5, p_5, x_6, p_6 отдѣлены. Поэтому уравнявъ произвольному постоянному α выраженіе въ скобкахъ, составляемое второю групою перемѣнныхъ, приводимъ задачу къ независимому интегрированію двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$p_4^2+(p_5+x_4)(p_5+x_6)p_6=\alpha, \quad (x_2p_1+x_1p_2)x_3+\alpha p_3(p_1-p_2)=a.$$

Первое изъ нихъ интегрируется весьма просто посредствомъ отдѣленія перемѣнныхъ. Дѣйствительно, сначала замѣчаемъ, что независимое перемѣнное x_5 въ него не входитъ; поэтому полагаемъ

$$p_5=\beta;$$

послѣ чего уравненіе приметъ видъ

$$p_4^2+(\beta+x_4)(\beta+x_6)p_6=\alpha.$$

Теперь очевидно, что остальныя двѣ пары перемѣнныхъ x_4, p_4 и x_6, p_6 отдѣлены; поэтому полагая

$$(\beta+x_6)p_6=\gamma, \quad \text{имѣемъ} \quad p_4^2+\gamma(\beta+x_4)=\alpha$$

и отсюда находимъ

$$p_6=\frac{\gamma}{\beta+x_6}, \quad p_4=\sqrt{\alpha-\gamma\beta-\gamma x_4};$$

слѣдовательно

$$p_4dx_4+p_5dx_5+p_6dx_6=\sqrt{\alpha-\gamma\beta-\gamma x_4}\,dx_4+\beta\,dx_5+\frac{\gamma dx_6}{\beta+x_6};$$

откуда, интегрируя, находимъ часть искомой функціи

$$z'+A'=\frac{2}{3\gamma}\sqrt{\{\alpha-\gamma\beta-\gamma x_4\}^3}+\beta x_5+\log(\beta+x_6)^\gamma.$$

Переходимъ къ интегрированію второго изъ предыдущихъ уравненій

$$H=(x_2p_1+x_1p_2)x_3+\alpha p_3(p_1-p_2)=a.$$

Здѣсь не видится возможности отдѣлить перемѣнныя, поэтому, слѣдуя общей теоріи Якоби, будемъ отыскивать двѣ функціи перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3.

Сначала функцію H_1, которая бы удовлетворяла линейному уравненію

$$(H, H_1) = \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial H_1}{\partial p_3} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\frac{\partial H_1}{\partial x_3} = 0;$$

потомъ функцію H_2, которая бы удовлетворяла совокупно двумъ линейнымъ уравненіямъ подобнаго же вида

$$(H, H_2) = 0 \quad \text{и} \quad (H_1, H_2) = 0. \tag{m}$$

Поэтому функція H_1 должна быть опредѣлена, какъ одинъ изъ интеграловъ системы совокупныхъ уравненій:

$$\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \frac{dp_2}{\frac{\partial H}{\partial x_2}} = \frac{dp_3}{\frac{\partial H}{\partial x_3}} = \frac{-dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{-dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{-dx_3}{\frac{\partial H}{\partial p_3}}, \tag{n}$$

которая, по вставкѣ даннаго значенія, приметъ видъ:

$$\frac{dp_1}{x_3 p_2} = \frac{dp_2}{x_3 p_1} = \frac{dp_3}{x_2 p_1 + x_1 p_2} = \frac{-dx_1}{x_2 x_3 + \alpha p_3} = \frac{-dx_2}{x_1 x_3 - \alpha p_3} = \frac{-dx_3}{\alpha(p_1 - p_2)}.$$

По извѣстному свойству равныхъ отношеній, первое и второе, четвертое и пятое предыдущей системы доставятъ уравненіе

$$\frac{d(p_1+p_2)}{p_1+p_2} = -\frac{d(x_1+x_2)}{x_1+x_2},$$

котораго интегралъ $(x_1+x_2)(p_1+p_1) = \text{const}$.

Слѣдовательно, можемъ положить $H_1 = (x_1+x_2)(p_1+p_2)$.

Далѣе надобно опредѣлить функцію H_2, удовлетворяющую совокупно двумъ уравненіямъ (m). При этомъ вычисленіи удобно пользоваться слѣдующей табличкой:

	H	H_1	φ	ψ	θ	θ'
$\frac{\partial .}{\partial x_1}$	$p_2 x_3$	p_1+p_2	0	0	0	0
$\frac{\partial .}{\partial p_1}$	$x_2 x_3+\alpha p_3$	x_1+x_2	p_1	α	1	$-x_3$
$\frac{\partial .}{\partial x_2}$	$p_1 x_3$	p_1+p_2	0	0	0	0
$\frac{\partial .}{\partial p_2}$	$x_1 x_3-\alpha p_3$	x_1+x_2	$-p_2$	$-\alpha$	-1	x_3
$\frac{\partial .}{\partial x_3}$	$x_2 p_1+x_1 p_2$	0	0	$-x_3$	0	p_2-p_1
$\frac{\partial .}{\partial p_3}$	$\alpha(p_1-p_2)$	0	0	0	0	0

$(H, H_1)=0$, $(H, \varphi)=0$, $(H_1, \varphi)=p_1^2-p_2^2$, $=2\varphi$.

$(H, \psi)=0$, $(H_1, \psi)=0$,

$(H_1, \theta)=0$, $(H, \theta)=(p_2-p_1)x_3$, $=-x_3\theta=\theta'$.

$(H_1, \theta')=0$, $(H, \theta')=\theta''=(p_1-p_2)x_3^2+\alpha(p_1-p_2)^2$ $=\frac{\theta'^2}{\theta}+\alpha\theta^2$.

въ ней вверху каждаго столбца написаны знаки функцій, входящихъ въ вычисленіе, а въ самыхъ столбцахъ — частныя производныя соотвѣтствующихъ функцій; знаки $\frac{\partial .}{\partial x_1}$, $\frac{\partial .}{\partial p_1}$ и проч., написанные слѣва таблицы, указываютъ перемѣнное, въ отношеніи котораго взяты производныя; наконецъ внизу каждаго столбца показаны значенія комбинацій вида (A, B) функціи столбца съ предыдущими. Собственно для вычисленія этого столбца въ умѣ этихъ комбинацій и удобна предыдущая таблица.

Слѣдуя теоріи, вычисленіе H_2 мы должны начать опредѣленіемъ интеграла 1-го или 2-го изъ уравненій (m). Если возьмемъ для этого 1-е уравненіе, то должно будетъ опредѣлить одинъ изъ интеграловъ ситемы (n), различный отъ H_1=const. Первое и второе отношенія этой системы доставятъ уравненіе

$$\frac{dp_1}{p_2}=\frac{dp_2}{p_1},\ \text{котораго интегралъ}\ \varphi=\frac{p_1^2}{2}-\frac{p_2^2}{2}=\text{const}.$$

Помощію 1-го, 2-го и послѣдняго отношеній системы (n) получимъ уравненіе $\frac{d(p_1-p_2)}{-x_3(p_1-p_2)}=\frac{-dx_3}{\alpha(p_1-p_2)}$, или $\alpha d(p_1-p_2)=$ $=x_3dx_3$, котораго интегралъ будетъ $\psi=\alpha(p_1-p_2)-\frac{x_3^2}{2}=\text{const}.$

Предыдущая таблица показываетъ, что интегралъ φ не можетъ представлять значенія H_2, потому что результатъ подстановки (H_1, φ) не равенъ нулю; и такъ какъ этотъ результатъ есть функція φ, то, на основаніи примѣчанія 1 къ § 18, функція φ не можетъ служить и для вычисленія значенія H_2, когда уже выбрано значеніе H_1.

Изъ той же таблицы видно, что интегралъ ψ удовлетворяетъ обоимъ совокупнымъ уравненіямъ (m); поэтому можно положить $H_2=\psi$.

Уравнявъ найденныя значенія H_1 и H_2 соотвѣтственно произвольнымъ постояннымъ b и c, будемъ имѣть вмѣстѣ съ даннымъ три уравненія

$$H=(x_2p_1+x_1p_2)x_3+\alpha p_3(p_1-p_2)=a,$$

$$H_1=(x_1+x_2)(p_1+p_2)=b.\quad H_2=\alpha(p_1-p_2)-\frac{x_3^2}{2}=c,$$

изъ которыхъ алгебраически выводимъ

$$p_1=\frac{b}{2(x_1+x_2)}+\frac{c}{2\alpha}+\frac{x_3^2}{4\alpha},$$
$$p_2=\frac{b}{2(x_1+x_2)}-\frac{c}{2\alpha}-\frac{x_3^2}{4\alpha},$$
$$p_3=\frac{2a-bx_3}{2c-x_3^2}+\frac{1}{2\alpha}(x_1-x_2)x_3;$$

слѣдовательно,

$$p_1dx_1+p_2dx_2+p_3dx_3=\frac{b}{2}\frac{d(x_1+x_2)}{x_1+x_2}+\frac{1}{2\alpha}(dx_1-dx_2)(c+\frac{x_3^2}{2})+$$
$$+\frac{1}{2\alpha}(x_1-x_2)x_3dx_3+\frac{2a-bx_3}{2c+x_3^2}dx_3.$$

Интегрируя это выраженіе, получимъ вторую часть искомаго интеграла

$$z''+A''=\frac{b}{2}\log(x_1+x_2)+\frac{1}{2\alpha}(x_1-x_2)(c+\frac{x_3^2}{2})+$$
$$+\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c}}\operatorname{arctg}\frac{x_3}{\sqrt{2c}}-\frac{b}{2}\log(2c+x_3^2).$$

Слѣдовательно, полный интегралъ задачи будетъ

$$z+A=z'+z''+(A'+A'')=\log\frac{(x_1+x_2)^{\frac{b}{2}}(\beta+x_6)^{\gamma}}{(2c+x_2^3)^{\frac{b}{2}}}+$$
$$+\frac{1}{2\alpha}(x_1-x_2)(c+\frac{x_3}{2})+\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{c}}\operatorname{arctg}\frac{x_3}{\sqrt{2c}}+$$
$$+\frac{2}{3\gamma}\sqrt{(\alpha-\gamma\beta-\gamma x_4)^3}+\beta x_5;$$

въ немъ $(A+A'+A'')$, b, c, α, β, γ означаютъ шесть различныхъ произвольныхъ постоянныхъ.

Посмотримъ, нельзя ли получить рѣшенія задачи, начиная вычисленія функціи H_2 опредѣленіемъ интеграла второго изъ уравненій (m).

Интегрированіе уравненія

$$(H_1, H_2)=(p_1+p_2)\frac{\partial H_2}{\partial p_1}-(x_1+x_2)\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+$$
$$+(p_1+p_2)\frac{\partial H_2}{\partial p_2}-(x_1+x_2)\frac{\partial H_2}{\partial x_2}=0$$

приводится къ системѣ уравненій

$$\frac{dp_1}{p_1+p_2}=\frac{dp_2}{p_1+p_2}=\frac{-dx_1}{x_1+x_2}=\frac{-dx_2}{x_1+x_2},$$

очевидные интегралы которыхъ суть:

$$p_1-p_2=\text{const.} \quad \text{и} \quad p_1-p_2+x_1-x_2=\text{const.}$$

Возьмемъ 1-й изъ нихъ, какъ простѣйшій, и положимъ

$$\theta=p_1-p_2.$$

Предыдущая таблица показываетъ, что результатъ подстановки θ вмѣсто H_2 въ первое изъ уравненій (m) будетъ $-x_3\theta$ и эта функція, которую означимъ черезъ θ', будетъ, согласно теоріи, новымъ интеграломъ 2-го изъ уравненій (m); результатъ подстановки θ' вмѣсто H_2 въ 1-е изъ уравненій (m) будетъ

$$\theta''=\frac{\theta'^2}{\theta}+\alpha\theta^2.$$

Функція θ'' будетъ, очевидно, также интеграломъ 2-го изъ уравненій (m), но онъ выражается функціею двухъ предыдущихъ θ и θ'; поэтому прекратимъ подстановки и будемъ искать такую функцію F двухъ различныхъ интеграловъ θ и θ', которая бы удовлетворяла обоимъ уравненіямъ (m). Для этого составимъ уравненія

$$[H_1 F(\theta, \theta')] = (H_1, \theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} + (H_1, \theta')\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0 \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} + 0 \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0$$

$$[H, F(\theta, \theta')] = (H, \theta)\frac{\partial F}{\partial \theta} + (H, \theta')\frac{\partial F}{\partial \theta'} = \theta' \frac{\partial F}{\partial \theta} + \left(\frac{\theta'^2}{\theta} + \alpha\theta^2\right)\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0.$$

Первое изъ нихъ удовлетворяется при всякомъ видѣ функціи F, второе же — если F будетъ опредѣлена, какъ интегралъ уравненія

$$\frac{d\theta}{\theta'} = \frac{d\theta'}{\frac{\theta'^2}{\theta} + \alpha\theta^2}.$$

При изложеніи теоріи мы вводили въ подобную систему уравненій еще новое перемѣнное τ, уравнивая предыдущія равныя отношенія дифференціалу $d\tau$; но въ настоящемъ случаѣ будетъ проще обойтись безъ вспомогательнаго перемѣннаго. Въ самомъ дѣлѣ, предыдущее уравненіе можно написать такимъ образомъ

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\theta'}{\theta} + \alpha\frac{\theta^2}{\theta'},$$

гдѣ полагая $\theta' = u.\theta$, откуда $\frac{d\theta'}{d\theta} = u + \theta\frac{du}{d\theta}$, имѣемъ

$$u + \theta\frac{du}{d\theta} = u + \alpha\frac{\theta}{u}, \quad \text{или} \quad u\,du = \alpha\,d\theta.$$

Интегрируя, находимъ $\alpha\theta = \text{const.} + \frac{u^2}{2}$; слѣдовательно,

$$F(\theta, \theta') = \alpha\theta - \frac{\theta'^2}{2\theta^2} = \alpha(p_1 - p_2) - \frac{x_3^2}{2}.$$

Этотъ интегралъ 1-го изъ уравненій (m) мы уже вывели раньше непосредственно изъ системы (n) и означали буквою ψ. Слѣдовательно, новая дорога приведетъ къ тому же полному интегралу, однако она хотя длиннѣе, но интереснѣе прежней въ томъ отношеніи, что представляетъ болѣе полное приложеніе теоріи способа Якоби.

§ 20. Теперь мы введемъ въ изложеніе способа Якоби тѣ упрощенія и дополненія, о которыхъ было упомянуто въ концѣ предпослѣдняго параграфа.

Представимъ снова данное уравненіе

$$H(x_1,\dots x_n,\ p_1,\dots p_n)=a,$$

въ которое неизвѣстная функція z независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n$ входитъ только посредствомъ ея частныхъ производныхъ $p_1\dots p_n$, и дополняющую его систему $n-1$ искомыхъ уравненій:

$$H_1=a_1,\ H_2=a_2,\dots H_{n-1}=a_{n-1},$$

гдѣ первыя части представляютъ функціи перемѣнныхъ $p_1,\dots p_n$, $x_1,\dots x_n$, не содержащія произвольныхъ постоянныхъ $a_1,\dots a_{n-1}$.

Эту систему n уравненій можно, очевидно, замѣнить другою равнозначущею. Напримѣръ первое изъ нихъ позволяетъ выразить p_1 функціею остальныхъ перемѣнныхъ и a; вставивъ это выраженіе p_1 во второе уравненіе, можемъ послѣ того выразить p_2 функціею всѣхъ остальныхъ перемѣнныхъ, кромѣ p_1, p_2, заключающею постоянныя a, a_1. Продолжая такимъ образомъ, очевидно, возможно вообще каждую изъ n первыхъ величинъ ряда

$$p_1,\ p_2,\dots p_n,\ x_1,\dots x_n,\ a,\ a_1,\dots a_{n-1}$$

выразить посредствомъ $2n$ величинъ, слѣдующихъ за нею въ этомъ ряду. Называя эти выраженія соотвѣтственно ω_1, $\omega_2,\dots \omega_n$, будемъ имѣть, вмѣсто предыдущей системы, слѣдующую ей равнозначущую, также состоящую изъ n уравненій:

$$p_1-\omega_1=0,\quad p_2-\omega_2=0,\dots\quad p_n-\omega_n=0.$$

Такъ какъ выше подразумѣвалось, что первыя части уравненій $H=0$, $H_1=0, \ldots$ тождественно повѣряютъ условіе

$$(H_i, H_k)=0 \tag{a}$$

для всѣхъ значеній указателей i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, \ldots n-1$, то, на основаніи теоремы 3, § 17, первыя части уравненій $p_1-\omega_1=0$, $p_2-\omega_2=0, \ldots$ должны тождественно повѣрять условіе

$$(p_{i+1}-\omega_{i+1},\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0 \tag{b}$$

для тѣхъ же значеній указателей i и k. И подобно тому, какъ уравненія (a) служили намъ для послѣдовательнаго опредѣленія функцій $H_1, \ldots H_{n-1}$ по данной H, такъ уравненія (b) могутъ служить для опредѣленія функцій $\omega_2, \ldots \omega_n$, по данной ω_1. Но не трудно убѣдиться, что уравненія (b) проще соотвѣтственныхъ уравненій (a). Дѣйствительно, послѣднія всѣ однообразной формы

$$(H_i, H_k)=\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_m}\frac{\partial H_k}{\partial p_m}-\frac{\partial H_i}{\partial p_m}\frac{\partial H_k}{\partial x_m}\right)=0;$$

и такъ какъ функціи H_i, H_k содержатъ всѣ $2n$ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, $p_1, \ldots p_n$, то эти уравненія имѣютъ по $2n$ членовъ. Соотвѣтствующее уравненіе системы (b) образовано по тому же закону, именно:

$$(p_{i+1}-\omega_{i+1},\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=$$
$$=\sum_{m=1}^{m=n}\left\{\frac{\partial(p_{i+1}-\omega_{i+1})}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial(p_{k+1}-\omega_{k+1})}{\partial p_m}-\frac{\partial(p_{i+1}-\omega_{i+1})}{\partial p_m}\cdot\frac{\partial(p_{k+1}-\omega_{k+1})}{\partial x_m}\right\}=0$$

но если примемъ во вниманіе, что функціи ω_{i+1}, ω_{k+1}, могущія заключать всѣ перемѣнныя $x_1, \ldots x_n$, должны содержать изъ перемѣнныхъ $p_1, \ldots p_n$ только тѣ, которыхъ указатели болѣе соотвѣтствующихъ указателей этихъ функцій, то легко убѣждаемся, что предыдущее уравненіе будетъ имѣть тѣмъ менѣе членовъ, чѣмъ болѣе числа $i+1$ и $k+1$. На основаніи этого замѣчанія и принимая $i<k$, можемъ разложить сумму, представляющую первую часть предыдущаго уравненія, слѣдующимъ образомъ:

$$
\overset{(m=1)}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_1}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_1} \\ 0, & 0 \end{vmatrix}}
+
\overset{(m=2)}{\begin{vmatrix} * & * \\ 0, & 0 \end{vmatrix}}
+\cdots+
\overset{(m=i)}{\begin{vmatrix} *, & * \\ 0, & 0 \end{vmatrix}}
+
\overset{(m=i+1)}{\begin{vmatrix} *, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}} \\ 1, & 0 \end{vmatrix}}
+
$$

$$
+\overset{(m=i+2)}{\begin{vmatrix} *, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+2}} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_{i+2}}, & 0 \end{vmatrix}}
+\cdots+
\overset{(m=k)}{\begin{vmatrix} *, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_k} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_k}, & 0 \end{vmatrix}}
+
\overset{(m=k+1)}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_{k+1}}, & 1 \end{vmatrix}}
+
$$

$$
+\overset{(m=k+2)}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+2}}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+2}} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_{k+2}}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_{k+2}} \end{vmatrix}}
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+
\overset{(m=n)}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_n}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_n}, & -\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix}}.
$$

Въ этомъ разложенiи на мѣстѣ тѣхъ элементовъ опредѣлителей, которые должны быть умножены на 0, поставленъ знакъ *. Отсюда очевидно, что предыдущее уравненіе можетъ быть написано слѣдующимъ образомъ:

$$(p_{i+1}-\omega_{i+1},\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}}-\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}}-\sum_{m=i+2}^{m=k+1}\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_m}\,\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}+$$

$$+\sum_{m=k+2}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_m}\,\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_m}\,\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0 \qquad \text{(c)}$$

и что число членовъ его равно $2n-k-i$. Поэтому, напримѣръ, въ первомъ уравненіи системы (b), для котораго $i=0$, $k=1$, имѣемъ $2n-1$ членовъ; въ послѣднемъ, гдѣ $i=n-2$, $k=n-1$, будетъ только три члена.

Итакъ, функція ω_2 перемѣнныхъ $p_3,\dots p_n$, $x_1,\dots x_n$ должна быть опредѣлена помощію данной ω_1 посредствомъ интегрированія линейнаго уравненія

$$(p_1-\omega_1,\ p_2-\omega_2)=-\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\,\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}+$$

$$+\sum_{m=3}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_m}\,\frac{\partial\omega_2}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_m}\,\frac{\partial\omega_2}{\partial x_m}\right)=0, \qquad (1)$$

въ которомъ искомая функція $p_2=\omega_2$ входитъ не только ея частными производными, но и въ коэффиціентахъ; число членовъ его $2n-1$ и одинъ изъ нихъ не содержитъ частныхъ производныхъ искомой функціи.

Функція ω_3 перемѣнныхъ $p_4,\dots p_n$, $x_1,\dots x_n$ должна быть опредѣлена помощію извѣстныхъ ω_1, ω_2 такъ, чтобы удовлетворяла совокупно двумъ слѣдующимъ линейнымъ уравненіямъ:

$$(p_1-\omega_1,\ p_3-\omega_3)=-\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\,\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_3}\,\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3}+$$

$$+\sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_m}\,\frac{\partial\omega_3}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_m}\,\frac{\partial\omega_3}{\partial x_m}\right)=0,$$

$$(p_2-\omega_2,\ p_3-\omega_3)=-\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}+\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_3}\,\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3}+$$

$$+\sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_m}\,\frac{\partial\omega_3}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_m}\,\frac{\partial\omega_3}{\partial x_m}\right)=0, \qquad (2)$$

которыхъ коэффиціенты также содержатъ искомую функцію $p_3=\omega_3$ и число членовъ 1-го равно $2n-2$, 2-го — $2n-3$.

Вообще, когда будутъ уже опредѣлены функціи $\omega_2, \omega_3,\dots \omega_k$, то помощію ихъ и данной ω_1 должно будетъ опредѣлить ω_{k+1} — функцію $p_{k+2},\dots p_n, x_1,\dots x_n$, которая должна совокупно удовлетворить системѣ k линейныхъ уравненій:

$$(p_1-\omega_1,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\quad (p_2-\omega_2,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\dots$$
$$(p_k-\omega_k,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0, \tag{k}$$

которыя будутъ вида уравненія (c) и получатся изъ него, полагая послѣдовательно $i=0, 1,\dots k-1$. О формѣ ихъ должно сказать то же, что было уже выше замѣчено объ уравненіяхъ предыдущихъ системъ и числа членовъ, въ нихъ заключающихся, будутъ соотвѣтственно:

$$2n-k,\ 2n-k-1,\ 2n-k-2,\dots 2n-2k+1. \tag{k'}$$

Слѣдовательно, такимъ образомъ могутъ быть написаны всѣ n системъ уравненій, служащихъ для послѣдовательнаго опредѣленія функцій $\omega_2, \omega_3,\dots \omega_n$. Но изъ предыдущаго видно, что въ различныхъ уравненіяхъ одной и той же системы числа перемѣнныхъ, такъ же какъ и членовъ, не одинаковы. Напримѣръ въ уравненіяхъ (k) первыя, очевидно, представятся слѣдующимъ рядомъ:

$$2n-1,\ 2n-2,\ 2n-3,\dots 2n-k;$$

вторыя же выражаются рядомъ (k′). Поэтому полученныя выше уравненія надобно преобразовать такъ, чтобы сдѣлать число перемѣнныхъ, такъ же какъ и членовъ, во всѣхъ уравненіяхъ одной и той же системы одинаковыми и равными соотвѣтственно числу перемѣнныхъ и членовъ послѣдняго уравненія системы. Такимъ образомъ, въ уравненіяхъ (k) должно привести число перемѣнныхъ къ $2n-k$ и число членовъ къ $2n-2k+1$.

Начнемъ это преобразованіе съ уравненій (2). Первое изъ нихъ можно составить непосредственно, такъ какъ функція ω_1 перемѣнныхъ $p_2,\dots p_n, x_1,\dots x_n$ выводится алгебраически изъ даннаго уравненія; но второе — не иначе какъ опредѣливъ интегралъ $p_2=\omega_2$ уравненія (1). Когда же этотъ послѣдній, въ которомъ ω_2 означаетъ функцію $p_3,\dots p_n$, $x_1,\dots x_n$, извѣстенъ, тогда, очевидно, значеніе p_2 можно вставить въ ω_1 и такимъ образомъ выразить эту функцію въ тѣхъ же перемѣнныхъ, какъ и ω_2, вслѣдствіе чего первое изъ уравненій (2) должно упроститься. Означая функцію ω_1 послѣ вставки черезъ ω'_1 и одно изъ перемѣнныхъ $p_3,\dots p_n$, $x_1,\dots x_n$ черезъ t, будемъ очевидно имѣть

$$\frac{\partial\omega_1'}{\partial t}=\frac{\partial\omega_1}{\partial t}+\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial t}.$$

Эта формула сама собою показываетъ, какимъ образомъ произвести требуемое преобразованіе. Для этого нужно, очевидно, придать къ первому изъ уравненій (2) второе, умноженное на $\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}$; такимъ образомъ получимъ

$$-\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}\right)-$$
$$-\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial p_3}+\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial p_3}\right)\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3}+$$
$$+\sum_{m=4}^{m=n}\left\{\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_m}+\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_m}\right)\frac{\partial\omega_3}{\partial p_m}-\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial p_m}+\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial p_m}\right)\frac{\partial\omega_3}{\partial x_m}\right\}=0,$$

или, замѣчая, что $\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}=0$ и принимая во вниманіе предыдущую формулу, будемъ имѣть

$$-\frac{\partial\omega_1'}{\partial x_3}+\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_1'}{\partial p_3}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3}+\sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_1'}{\partial x_m}\frac{\partial\omega_3}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega_1'}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_m}\right)=0.$$

Этимъ послѣднимъ уравненіемъ должно замѣнить первое изъ (2), послѣ чего оба они будутъ заключать одни и тѣ же перемѣнныя p_3, $p_4,\dots p_n$, $x_1,\dots x_n$ и одинаковое число членовъ $2n-3$, такъ что одно уравненіе перейдетъ въ другое черезъ замѣну ω'_1 на ω_2 и обратно.

Очевидно также, что эти два уравненія символически можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\left.\begin{array}{c}(p_1-\omega_1',\ p_3-\omega_3)=0 \quad \text{и} \quad (p_2-\omega_2,\ p_3-\omega_3)=0\\ \text{и къ нимъ присоединить еще третье тождественное}\\ (p_1-\omega_1',\ p_2-\omega_2)=0,\end{array}\right\}\quad (2')$$

которое должно имѣть мѣсто на основаніи теоремы 4 § 17-го.

Употребляя тотъ же пріемъ, можно произвести требуемыя преобразованія во всѣхъ слѣдующихъ системахъ уравненій, служащихъ для опредѣленія функцій ω_4, ω_5,...; поэтому, не останавливаясь на каждой изъ нихъ въ частности, покажемъ ходъ этого преобразованія для уравненій (k), которыя могутъ представлять каждую изъ разсматриваемыхъ системъ.

Мы можемъ составить уравненія (k) только тогда, когда уже получены значенія:

$$p_1=\omega_1(p_2,\dots p_n,\ x_1,\dots x_n),\quad p_2=\omega_2(p_3,\dots p_n,\ x_1,\dots x_n),\dots$$
$$p_{k-1}=\omega_{k-1}(p_k,\dots p_n,\ x_1,\dots x_n),\quad p_k=\omega_k(p_{k+1},\dots p_n,\ x_1,\dots x_n),$$

первое — алгебраически изъ даннаго уравненія, слѣдующія же соотвѣтственно посредствомъ интегрированій уравненій (1), (2′) и т. д.

Производя вставку значеній p_k, p_{k-1},... p_2, представляемыхъ послѣдующими уравненіями, въ предыдущія, мы выразимъ всѣ функціи ω_1, ω_2,... ω_{k-1}, подобно ω_k, въ перемѣнныхъ p_{k+1},... p_n, x_1,... x_n. Означая эти функціи послѣ вставки соотвѣтственно черезъ ω'_1, ω'_2,... ω'_{k-1} и одно изъ перемѣнныхъ, отъ которыхъ они будутъ зависѣть, черезъ t, находимъ:

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial t}=\dfrac{\partial\omega_{k-1}}{\partial t}+\dfrac{\partial\omega_{k-1}}{\partial p_k}\dfrac{\partial\omega_k}{\partial t},\\[2ex]
\dfrac{\partial\omega'_{k-2}}{\partial t}=\dfrac{\partial\omega_{k-2}}{\partial t}+\dfrac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}\dfrac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial t}+\dfrac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}\dfrac{\partial\omega_k}{\partial t},\\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\[2ex]
\dfrac{\partial\omega'_1}{\partial t}=\dfrac{\partial\omega_1}{\partial t}+\dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial\omega'_2}{\partial t}+\dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_3}\dfrac{\partial\omega'_3}{\partial t}+\dots\\[2ex]
\dots+\dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_{k-1}}\dfrac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial t}+\dfrac{\partial\omega_1}{\partial p_k}\dfrac{\partial\omega_k}{\partial t}.
\end{array}\right\}\quad (d)$$

Эти формулы сами собою показываютъ, какимъ образомъ должно произвести требуемое преобразованіе. Возьмемъ уравненія (k):

$$(p_1-\omega_1,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\quad (p_2-\omega_2,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\ldots$$
$$(p_k-\omega_k,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0$$

и будемъ ихъ называть соотвѣтственно: уравненіе $(k_1), (k_2), \ldots (k_k)$.

Чтобы привести ихъ къ виду послѣдняго изъ нихъ (k_k), должно начать преобразованіе съ уравненія (k_{k-1}) и для этого, какъ показываетъ 1-я изъ формулъ (d), слѣдуетъ къ уравненію (k_{k-1}) придать уравненіе (k_k), умноженное на $\frac{\partial\omega_{k-1}}{\partial p_k}$, что доставитъ уравненіе

$$(k_{k-1})+(k_k)\frac{\partial\omega_{k-1}}{\partial p_k}=0,$$

или, на основаніи упомянутой формулы, уравненіе

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k-1}}-\frac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}}+\\ +\sum_{m=k+2}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial x_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0,\end{aligned}\right\}\ (k'_{k-1})$$

которымъ должно замѣнить уравненіе (k_{k-1}) въ системѣ (k).

Чтобы преобразовать уравненіе (k_{k-2}), должно, слѣдуя 2-й изъ формулъ (d), къ уравненію (k_{k-2}) придать уравненіе (k'_{k-1}), умноженное на $\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}$ и уравненіе (k_k), умноженное на $\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}$, такимъ образомъ получимъ

$$(k_{k-2})+(k'_{k-1})\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_{k-1}}+(k_k)\frac{\partial\omega_{k-2}}{\partial p_k}=0,$$

или уравненіе

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial\omega'_{k-2}}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k-2}}-\frac{\partial\omega'_{k-1}}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}}+\\ +\sum_{m=k+2}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega'_{k-2}}{\partial x_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega'_{k-2}}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0\end{aligned}\right\}\ (k'_{k-2})$$

Положимъ, что, продолжая такимъ образомъ, мы преобразовали всѣ уравненія системы (k) кромѣ 1-го. Тогда, чтобы преобразовать и его, должно составить уравненіе

$$(k_1)+(k'_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}+(k'_3)\frac{\partial\omega_1}{\partial p_3}+\cdots+(k'_{k-1})\frac{\partial\omega_1}{\partial p_{k-1}}+(k_k)\frac{\partial\omega_1}{\partial p_k}=0,$$

которое на основаніи послѣдней изъ формулъ (d) приметъ видъ

$$-\frac{\partial\omega'_1}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega'_1}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}}+$$
$$+\sum_{m=k+2}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega'_1}{\partial x_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega'_1}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0. \qquad (\mathrm{k}'_1)$$

Этимъ уравненіемъ должно замѣнить уравненіе (k_1).

Итакъ, преобразованную систему составятъ уравненія

$$(k'_1),\ldots (k'_{k-2}),\ (k'_{k-1}),\ (k_k).$$

Въ каждое изъ нихъ входятъ одни и тѣ же перемѣнныя $p_{k+1},\ldots p_n,\ x_1,\ldots x_n$ и одинаковое число членовъ $2n-2k+1$.

При этомъ очевидно, что они переходятъ одно въ другое черезъ перестановки функцій $\omega'_1,\ \omega'_2,\ldots \omega'_{k-1},\ \omega_k$; поэтому всѣ они могутъ быть представлены одною общей формулой

$$-\frac{\partial\omega'_l}{\partial x_{k+1}}+\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_l}-\frac{\partial\omega'_l}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}}+$$
$$+\sum_{m=k+2}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega'_l}{\partial x_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega'_l}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0, \qquad (\mathrm{e})$$

если въ ней послѣдовательно полагать $l=1,\ 2,\ldots\ k$.

Эта же формула можетъ служить представительницею уравненій всѣхъ другихъ системъ, которыя всѣ получатся изъ нея, если давать указателю k по порядку значенія $1, 2,\ldots n-1$ и для каждаго изъ этихъ значеній приписывать указателю l всѣ значенія не большія k.

Наконецъ, возвращаясь къ преобразованной системѣ (k), должно еще замѣтить, что она, очевидно, символически напишется еще слѣдующимъ образомъ

$$(p_1-\omega'_1,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\quad (p_2-\omega'_2,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,\ldots$$
$$(p_k-\omega'_k,\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0,$$

при чемъ $\omega'_1, \omega'_2,\ldots \omega'_k$ будутъ означать функціи однихъ перемѣнныхъ $p_{k+1},\ldots p_n, x_1,\ldots x_n$. Къ этимъ уравненіямъ можно присоединить еще слѣдующія тождественныя

$$(p_l-\omega'_l,\ p_{l'}-\omega'_{l'})=0,$$

имѣющія мѣсто, на основаніи теоремы 4, § 17, при всѣхъ значеніяхъ l и l', взятыхъ въ ряду чиселъ 1, 2,... k.

§ 21. Прежде чѣмъ мы изложимъ интегрированіе системъ уравненій, выведенныхъ въ предыдущемъ §, сдѣлаемъ въ нихъ еще одно, уже послѣднее, преобразованіе, впрочемъ весьма простое и однообразное для всѣхъ, которое поэтому достаточно показать на уравненіи (e), представляющемъ ихъ общій типъ.

Въ уравненіи (e) $p_{k+1}=\omega_{k+1}$ представляетъ искомую функцію перемѣнныхъ $p_{k+2}, p_{k+3},\ldots p_n, x_1,\ldots x_n$; ω'_l—данную функцію, въ которую кромѣ этихъ перемѣнныхъ входитъ сама опредѣляемая функція $p_{k+1}=\omega_{k+1}$. Поэтому, слѣдуя обыкновенному пріему, должно его преобразовать въ другое также линейное уравненіе, въ которомъ къ прежнимъ независимымъ перемѣннымъ прибавится еще p_{k+1}, новая же искомая функція въ коэффиціенты уравненія не войдетъ.

Для этой цѣли положимъ, что

$$f_k(p_{k+1},\ p_{k+2},\cdots p_n,\ x_1,\ldots x_n)=\text{const.}=a_k$$

будетъ уравненіе, изъ котораго выведется значеніе

$$p_{k+1}=\omega_{k+1},$$

удовлетворяющее уравненію (e). Уравненіе $f_k=a_k$, по вставкѣ значенія $p_{k+1}=\omega_{k+1}$, обратится въ тождество, слѣдовательно, дифференцируя его въ отношеніи t, которымъ означимъ одно изъ перемѣнныхъ $p_{k+2},\ldots p_n$, $x_1,\ldots x_n$, будемъ имѣть также тождественно

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}+\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial t}=0,\quad \text{или}\quad -\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial t}=\frac{\partial f_k}{\partial t}.$$

Поэтому, умноживъ уравненіе (e) на $-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}$, получимъ

$$\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\;\frac{\partial \omega'_l}{\partial x_{k+1}}-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\;\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_l}-\frac{\partial \omega'_l}{\partial p_{k+1}}\left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\;\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_{k+1}}\right)+$$
$$+\sum_{m=k+2}^{m=n}\left[\frac{\partial \omega'_l}{\partial x_m}\left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\;\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial p_m}\right)-\frac{\partial \omega'_l}{\partial p_m}\left(-\frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\;\frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)\right]=0,$$

или, на основаніи предыдущаго равенства,

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial x_l}+\sum_{m=k+1}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega'_l}{\partial x_m}\,\frac{\partial f_k}{\partial p_m}-\frac{\partial \omega'_l}{\partial p_m}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_m}\right)=0.\right. \tag{g}$$

Наконецъ это уравненіе можно представить еще въ символической формѣ слѣдующимъ образомъ

$$(p_l-\omega'_l,\ f_k)=0,$$

гдѣ ω'_l и f_k представляютъ функціи однихъ и тѣхъ же перемѣнныхъ p_{k+1}, $p_{k+2},\ldots p_n$, $x_1,\ldots x_n$.

Приведя окончательно всѣ уравненія къ надлежащему виду, мы можемъ теперь изложить ходъ ихъ интегрированія. Общій планъ и существенные пріемы, обусловливающіе его успѣхъ, въ настоящемъ случаѣ сходны съ тѣми, которые изложены въ § 18 при интегрированіи соотвѣтственныхъ уравненій еще не упрощеннаго вида; различіе подробностей происходитъ въ настоящемъ случаѣ главнымъ образомъ отъ постояннаго исключенія излишнихъ перемѣнныхъ изъ интегрируемыхъ уравненій при послѣдовательномъ опредѣленіи $n-1$ неизвѣстныхъ функцій. Такимъ образомъ, теперь мы должны интегрировать также $n-1$ системъ, состоящихъ изъ прежняго числа уравненій; но при опредѣленіи каждой новой функціи число перемѣнныхъ будетъ уменьшено двумя, вслѣдствіе исключенія помощію функціи передъ нею опредѣленной. Съ происходящимъ такимъ образомъ упрощеніемъ теоріи соединяется ея усовершенствованіе еще въ другомъ отношеніи: уравненія одной и той же системы и теперь содержатъ равное число перемѣнныхъ, но не всѣ они между собою одинаковы, а это обстоятельство ведетъ, какъ мы вскорѣ увидимъ, къ тому, что тоерія освобождается отъ недостатка, указаннаго въ примѣчаніи 1 къ § 18, уменьшавшаго вѣроятность ея примѣнимости.

Послѣдовательное опредѣленіе $n-1$ неизвѣстныхъ функцій, необходимыхъ для рѣшенія разсматриваемой нами задачи, можетъ быть представлено въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ.

Изъ даннаго уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$H(x_1,\dots x_n,\ p_1,\dots p_n)=a$$

должно вывести алгебраически значеніе p_1, одной изъ частныхъ производныхъ, въ функціи остальныхъ и перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n$; положимъ оно будетъ

$$p_1=\omega_1(p_2,\dots p_n,\ x_1,\dots x_n,\ a).$$

Чтобы опредѣлить уравненіе

$$f_1(p_2,\dots p_n,\ x_1,\dots x_n,\ a)=\text{const.}=a_1,$$

изъ котораго выведется выраженіе p_2 въ функціи $p_3,\dots p_n$, $x_1,\dots x_n$, a, a_1, должно взять линейное уравненіе

$$(p_1-\omega_1,\ f_1)=0,$$

которое на основаніи формулы (g) имѣетъ видъ

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\sum_{m=2}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_m}\frac{\partial f_1}{\partial p_m}-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_m}\frac{\partial f_1}{\partial x_m}\right)=0,$$

и опредѣлить одинъ изъ его частныхъ интеграловъ, заключающій p_2, что приводится къ опредѣленію одного изъ интеграловъ системы $2n-2$ обыкновенныхъ уравненій съ $2n-1$ перемѣнными

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_2}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_1}{\partial p_n}}=\frac{dp_2}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}}=\cdots=\frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_1}{\partial x_n}}.$$

Если этотъ интегралъ будетъ

$$\varphi(p_2,\dots p_n,\ x_1,\dots\ x_n,\ a)=\text{const.},$$

то можемъ положить $f_1=\varphi$ и изъ уравненія $f_1=a_1$ вывести требуемое выраженіе p_2, которое пусть будетъ

$$p_2=\omega_2(p_3,\dots\ p_n,\ x_1,\dots\ x_n,\ a,\ a_1).$$

Вставивъ найденное выраженіе p_2 въ функцію ω_1 и означая ее послѣ подстановки черезъ ω'_1, будемъ имѣть

$$p_1=\omega'_1$$

значеніе p_1, выраженное въ тѣхъ же перемѣнныхъ, какъ и p_2.

Далѣе, чтобы опредѣлить уравненіе

$$f_2(p_3,\dots\ p_n,\ x_1,\dots\ x_n,\ a,\ a_1)=\text{const.}=a_1,$$

изъ котораго выведется выраженіе p_3 въ функціи $p_4,\dots\ p_n$, $x_1,\dots\ x_n$, a, a_1, a_2, должно взять два совокупныхъ линейныхъ уравненія

$$(p_1-\omega'_1,\ f_2)=0 \quad \text{и} \quad (p_2-\omega_2,\ f_2)=0,$$

имѣющія, на основаніи формулы (g), видъ

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\sum_{m=3}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega'_1}{\partial x_m}\frac{\partial f_2}{\partial p_m}-\frac{\partial \omega'_1}{\partial p_m}\frac{\partial f_2}{\partial x_m}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\sum_{m=3}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_m}\frac{\partial f_2}{\partial p_m}-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_m}\frac{\partial f_2}{\partial x_m}\right)=0, \qquad (\alpha)$$

и опредѣлить ихъ общее рѣшеніе. Къ нимъ можно присоединить еще тождество

$$(p_1-\omega'_1,\ p_2-\omega_2)=0, \qquad (\alpha')$$

имѣющее мѣсто на основаніи теоремы 4, § 17.

Опредѣленіе функціи f_2, удовлетворяющей совокупнымъ линейнымъ съ частными производными уравненіямъ (α), дѣлается на основаніи теоремы 1 § 17 при помощи тождества (α').

Сначала должно опредѣлить частный интегралъ одного изъ уравненій (α), заключающій p_3, что приводится къ отысканію одного изъ интеграловъ системы $2n-4$ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій съ $2n-3$ перемѣнными:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_3}{-\frac{\partial \omega'_1}{\partial p_3}}=\cdots=\frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega'_1}{\partial p_n}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial \omega'_1}{\partial x_3}}=\cdots=\frac{dp_n}{\frac{\partial \omega'_1}{\partial x_n}}, \qquad (\beta)$$

если хотимъ опредѣлить интегралъ 1-го изъ уравненій (α), или

$$\frac{dx_2}{1}=\frac{\partial x_3}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_3}}=\cdots=\frac{dx_n}{-\frac{\partial \omega_2}{\partial p_n}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}}=\cdots=\frac{dp_n}{\frac{\partial \omega_2}{\partial x_n}},$$

если хотимъ имѣть интегралъ 2-го изъ уравненій (α).

Положимъ напр. мы опредѣлили интегралъ 1-й изъ этихъ системъ

$$\psi\,(p_3,\dots p_n,\ x_1,\ x_2,\dots x_n,\ a,\ a_1)=\text{const.},$$

въ который можетъ входить и x_2 какъ постоянное.

Функцію ψ, представляющую частный интегралъ 1-го изъ уравненій (α) вставимъ во 2-е изъ нихъ вмѣсто f_2; результатъ этой подстановки ψ_1 вставимъ въ то же уравненіе вмѣсто f_2 и т. д.; такимъ образомъ произойдетъ слѣдующій рядъ функцій:

$$(p_2 - \omega_2,\ \psi) = \psi_1,\ (p_2 - \omega_2;\ \psi_1) = \psi_2, \dots$$
$$(p_2 - \omega_2,\ \psi_{i-1}) = \psi_i, \dots$$

Легко доказать помощію теоремы 1 § 17, что функціи $\psi_1, \psi_2, \dots$ будутъ интегралами 1-го уравненія (α). Дѣйствительно, взявъ выражающее эту теорему тождество

$$[A,\ (B,\ C)] + [B,\ (C,\ A)] + [C,\ (A,\ B)] = 0,$$

полагая въ немъ $A = p_1 - \omega'_1$, $B = p_2 - \omega_2$ и принимая во вниманіе тождество (α'), находимъ

$$[p_1 - \omega'_1,\ (p_2 - \omega_2,\ C)] + [p_2 - \omega_2,\ (C,\ p_1 - \omega'_1)] = 0,$$

тождество, имѣющее мѣсто для всякой функціи C перемѣнныхъ $x_1, \dots x_n,\ p_1, \dots p_n$.

Полагая теперь послѣдовательно $C = \psi,\ \psi_1, \dots \psi_i, \dots$, выводимъ одно за другимъ слѣдующія тождества:

$$[p_1 - \omega'_1,\ (p_2 - \omega_2,\ \psi)] = 0, \quad \text{или} \quad (p_1 - \omega'_1,\ \psi_1) = 0,$$
$$[p_1 - \omega'_1,\ (p_2 - \omega_2,\ \psi_1)] = 0, \quad \text{или} \quad (p_1 - \omega'_1,\ \psi_2) = 0, \text{ и т. д.},$$

доказывающія теорему.

Такъ какъ $\psi,\ \psi_1,\ \psi_2, \dots$ представляютъ интегралы 1-го изъ уравненій (α), то, слѣдовательно, $\psi = \text{const.}$, $\psi_1 = \text{const.}$, $\psi_2 = \text{const}, \dots$ будутъ интегралами системы $2n-4$ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій (β); но эта система можетъ имѣть только $2n-4$ независимыхъ между собою или различныхъ интеграловъ, которыхъ всѣ прочіе будутъ функціями; поэтому, если при вычисленіи ряда $\psi,\ \psi_1,\ \psi_2, \dots \psi_i, \dots$ мы не встрѣтимъ члена тождественно приводящагося къ какому-нибудь постоянному или нулю, то необходимо должны встрѣтить членъ ψ_i, выражающійся функціею предыдущихъ, въ которую сверхъ того можетъ войти x_2, какъ постоянное. Итакъ, пусть будетъ

$$\psi_i = F(x_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{i-1}),$$

гдѣ, очевидно, указатель i долженъ быть не болѣе $2n-4$.

Продолжать вычисленіе предыдущаго ряда безполезно, потому что новые члены его, конечно, будутъ интегралами 1-го изъ уравненій (α), но всѣ они выразятся функціями уже найденныхъ интеграловъ, а намъ извѣстно a priori, что произвольная функція нѣсколькихъ интеграловъ линейнаго уравненія съ частными производными есть также интегралъ этого уравненія. Пользуясь возможностью произвольнаго назначенія вида функціи перемѣнныхъ x_2, ψ, $\psi_1, \ldots \psi_{i-1}$, удовлетворяющей 1-му изъ уравненій (α), можемъ опредѣлить этотъ видъ такъ, чтобы она удовлетворяла вмѣстѣ съ тѣмъ и 2-му изъ уравненій (α).

Означивъ искомую функцію черезъ $\theta(x_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{i-1})$ и вставивъ ее вмѣсто f_2 во 2-е изъ уравненій (α), находимъ, что на основаніи формулы (8) § 16 оно приметъ видъ

$$(p_2-\omega_2, \theta) = (p_2-\omega_2, x_2)\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + (p_2-\omega_2, \psi)\frac{\partial\theta}{\partial\psi} +$$

$$+ (p_2-\omega_2, \psi_1)\frac{\partial\theta}{\partial\psi_1} + \cdots + (p_2-\omega_2, \psi_{i-1})\frac{\partial\theta}{\partial\psi_{i-1}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2} + \psi_1\frac{\partial\theta}{\partial\psi} + \psi_2\frac{\partial\theta}{\partial\psi_1} + \cdots + F(x_2, \psi, \ldots \psi_{i-1})\frac{\partial\theta}{\partial\psi_{i-1}} = 0.$$

Интегрированіе этого линейнаго уравненія приводится къ системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx_2}{1} = \frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \cdots = \frac{d\psi_{i-1}}{F(x_2, \psi, \ldots \psi_{i-1})},$$

которая весьма просто преобразуется въ обыкновенное уравненіе порядка i съ двумя перемѣнными x_2 и ψ

$$\frac{d^i\psi}{dx_2^i}=F\left(x_2,\ \psi,\ \frac{d\psi}{dx_2},\dots\ \frac{d^{i-1}\psi}{\partial x_2^{i-1}}\right).$$

Опредѣливъ одинъ изъ первыхъ интеграловъ этого послѣдняго

$$\chi\left(x_2,\ \psi,\ \frac{d\psi}{dx_2},\dots\ \frac{d^{i-1}\psi}{dx_2^{i-1}}\right)=\text{const.},$$

и вставивъ въ него значенія $\frac{d\psi}{dx_2}=\psi_1,\ \frac{d^2\psi}{dx_2^2}=\psi_2,\dots$, получимъ интегралъ предыдущей системы совокупныхъ уравненій

$$\chi\,(x_2,\ \psi,\ \psi_1,\dots\ \psi_{i-1})=\text{const.}$$

Слѣдовательно, $f_2=\theta=\chi$ будетъ общимъ интеграломъ уравненій (α). Полагая же

$$f_2 \text{ или } \chi=\text{const.}=a_2,$$

выведемъ отсюда требуемое выраженіе p_3 въ функціи $p_4,\dots\ p_n,\ x_1,\dots\ x_n,\ a,\ a_1,\ a_2$, которое пусть будетъ

$$p_3=\omega_3\,(p_4,\dots\ p_n,\ x_1,\dots\ x_n,\ a,\ a_1,\ a_2).$$

Если при вычисленіи ряда $\psi_1,\ \psi_2,\dots$ встрѣтится членъ, приводящійся къ постоянному, тогда опредѣленіе общаго интеграла уравненій (α) становится весьма просто. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $\psi_i=k$, гдѣ k постоянное, будемъ имѣть

$$\frac{d^i\psi}{dx_2^i}=k,$$

откуда интегрируя находимъ $\frac{d^{i-1}\psi}{dx_2^{i-1}}-kx_2=\text{const.}$; слѣдовательно, $f_2=\psi_{i-1}-kx_2$. Если $k=0$, то $f_2=\psi_{i-1}$.

Изложенный выше способъ опредѣленія общаго интеграла уравненій (α) не представляетъ недостаточности и въ обстоятельствахъ подобныхъ тѣмъ, о которыхъ было говорено въ примѣчаніи 1 къ § 18. Это зависитъ отъ того, что во 2-мъ изъ уравненій (α) находится перемѣнное x_2, входящее въ 1-е изъ нихъ какъ постоянное. Еслибъ мы перемѣнили роли двухъ уравненій (α), тогда бы подобное же слѣдствіе произошло отъ того, что въ 1-мъ находится перемѣнное x_1, входящее во 2-е какъ постоянное. Дѣйствительно, если ψ_1 будетъ функціею x_2 и ψ, которую означимъ $F(x_2, \psi)$, то общимъ интеграломъ уравненій (α) будетъ частный интегралъ уравненія

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+F(x_2, \psi)\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=0,$$

или интегралъ обыкновеннаго уравненія 1-го порядка

$$\frac{d\psi}{dx_2}=F(x_2, \psi).$$

Отсутствіе одного или обоихъ перемѣнныхъ x_2, ψ въ F, очевидно, только упроститъ интегрированіе предыдущаго уравненія.

Вставивъ найденное выше значеніе $p_3=\omega_3$ въ функціи ω'_1 и ω_2, которыя послѣ этой подстановки будемъ означать соотвѣтственно ω''_1 и ω'_2, получимъ $p_1=\omega''_1$, $p_2=\omega'_2$ — значенія p_1 и p_2, выраженныя въ тѣхъ же перемѣнныхъ, какъ и p_3. Затѣмъ, чтобы опредѣлить уравненіе

$$f_3(p_4,\ldots p_n, x_1,\ldots x_n, a, a_1, a_2)=\text{const.}=a_3,$$

изъ котораго выведется значеніе p_4 въ функціи $p_5,\ldots p_n, x_1,\ldots x_n, a, a_1, a_2, a_3$, должно взять три совокупныя линейныя уравненія съ частными производными:

$$(p_1-\omega''_1, f_3)=0,\quad (p_2-\omega'_2, f_3)=0,\quad (p_3-\omega_3, f_3)=0, \qquad (\gamma)$$

которыя по формулѣ (g) имѣютъ видъ

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+\sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega''_1}{\partial x_m}\frac{\partial f_3}{\partial p_m}-\frac{\partial \omega''_1}{\partial p_m}\frac{\partial f_3}{\partial x_m}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2}+\sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega'_2}{\partial x_m}\frac{\partial f_3}{\partial p_m}-\frac{\partial \omega'_2}{\partial p_m}\frac{\partial f_3}{\partial x_m}\right)=0, \qquad (\gamma)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3}+\sum_{m=4}^{m=n}\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_m}\frac{\partial f_3}{\partial p_m}-\frac{\partial \omega_3}{\partial p_m}\frac{\partial f_3}{\partial x_m}\right)=0,$$

и опредѣлить ихъ общій интегралъ f_3.

Къ нимъ должно присоединить еще тождества:

$$(p_1-\omega''_1,\ p_2-\omega'_2)=0,\quad (p_2-\omega'_2,\ p_3-\omega_3)=0,$$
$$(p_3-\omega_3,\ p_1-\omega''_1)=0, \qquad (\gamma')$$

имѣющія мѣсто на основаніи теоремы 4, § 17.

Уравненія (γ) той же формы, какъ, и (α), только заключаютъ менѣе перемѣнныхъ; слѣдовательно, по способу сейчасъ объясненному мы можемъ опредѣлить общій интегралъ которыхъ-нибудь двухъ изъ нихъ. Положимъ, что такимъ образомъ опредѣлена функція

$$\Phi(p_4,\dots p_n,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\dots x_n),$$

которая, будучи вставлена вмѣсто f_3, удовлетворитъ напримѣръ 1-му и 2-му изъ уравненій (γ). Хотя количество x_3 не входитъ какъ перемѣнное въ эти уравненія, но оно заключается въ ихъ коэффиціентахъ; поэтому можно допустить его присутствіе и въ Φ.

Вставимъ Φ вмѣсто f_3 въ 3-е изъ уравненій (γ); результатъ этой подстановки вставимъ опять вмѣсто f_3 въ то же уравненіе и т. д. Такимъ образомъ получится рядъ функцій

$$(p_3-\omega_3,\ \Phi)=\Phi_1,\ (p_3-\omega_3,\ \Phi_1)=\Phi_2,\dots (p_3-\omega_3,\ \Phi_{k-1})=\Phi_k,\dots$$

которыя будутъ интегралами 1-го и 2-го уравненій (γ).

Дѣйствительно, по теоремѣ 1 § 17, полагая сначала, $A=p_1-\omega''_1$, $B=p_3-\omega_3$, потомъ $A=p_2-\omega'_2$, $B=p_3-\omega_3$, и принимая во вниманіе 2-е и 3-е изъ тождествъ (γ'), находимъ

$$[p_1-\omega''_1,\ (p_3-\omega_3,\ C)]+[p_3-\omega_3,\ (C,\ p_1-\omega''_1)]=0,$$
$$[p_2-\omega'_2,\ (p_3-\omega_3,\ C)]+[p_3-\omega_3,\ (C\ p_2-\omega'_2)]=0,$$

тождества, имѣющія мѣсто для всякой функціи C перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n$, $p_1,\dots p_n$. Полагая въ нихъ послѣдовательно

$$C=\Phi,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\dots$$

и помня при томъ, что Φ представляетъ общій интегралъ 1-го и 2-го изъ уравненій (γ), находимъ двойной рядъ тождествъ:

$$\left.\begin{array}{lll}[p_1-\omega''_1,\ (p_3-\omega_3,\ \Phi)]=0, & \text{или} & (p_1-\omega''_1,\ \Phi_1)=0\\ [p_2-\omega'_2,\ (p_3-\omega_3,\ \Phi)]=0, & \text{или} & (p_2-\omega'_2,\ \Phi_1)=0\end{array}\right\},$$
$$\left.\begin{array}{lll}[p_1-\omega''_1,(p_3-\omega_3,\ \Phi_1)]=0, & \text{или} & (p_1-\omega''_1,\ \Phi_2)=0\\ [p_2-\omega'_2,\ (p_3-\omega_3,\ \Phi_1)]=0, & \text{или} & (p_2-\omega'_2,\ \Phi_2)=0\end{array}\right\}\ \text{и т. д.},$$

доказывающихъ предложеніе.

Если рядъ Φ, Φ_1, $\Phi_2,\dots$ не оканчивается членомъ равнымъ постоянному или нулю, то необходимо долженъ получиться членъ, выражающійся функціею предыдущихъ, потому что какъ 1-е, такъ и 2-е изъ уравненій (γ) можетъ допустить только $2n-6$ различныхъ частныхъ интеграловъ. Пусть такой членъ будетъ Φ_k; въ выраженіе его кромѣ Φ, $\Phi_1,\dots \Phi_{k-1}$ можетъ входить также x_3; поэтому положимъ

$$\Phi_k=F(x_3,\ \Phi,\ \Phi_1,\dots \Phi_{k-1}),$$

гдѣ k не болѣе $2n-6$.

Такъ какъ произвольная функція перемѣнныхъ x_3, Φ, $\Phi_1,\dots \Phi_{k-1}$ удовлетворяетъ 1-му и 2-му изъ уравненій (γ), то достаточно опредѣлить видъ ея такъ, чтобы она удовлетворяла 3-му изъ уравненій (γ); тогда она удовлетворитъ и двумъ первымъ.

Означая искомую функцію черезъ π, находимъ для опредѣленія ея линейное уравненіе

$$(p_3-\omega_3,\ \pi)=\frac{\partial\pi}{\partial x_3}+\Phi_1\frac{\partial\pi}{\partial\Phi}+\Phi_2\frac{\partial\pi}{\partial\Phi_1}+\cdots+F\frac{\partial\pi}{\partial\Phi_{k-1}}=0,$$

интегрированіе котораго приводится къ системѣ совокупныхъ

$$\frac{dx_3}{1}=\frac{d\Phi}{\Phi_1}=\frac{d\Phi_1}{\Phi_2}=\cdots=\frac{d\Phi_{k-1}}{F},$$

или къ уравненію съ 2-мя перемѣнными порядка k

$$\frac{d^k\Phi}{dx_3^k}=F\left(x_2,\ \Phi,\frac{d\Phi}{dx_3},\ldots\ \frac{d_{k-1}\Phi}{dx_3^{k-1}}\right).$$

Опредѣливъ одинъ изъ первыхъ интеграловъ его

$$\xi\left(x_3,\Phi,\frac{d\Phi}{dx_3},\ldots\ \frac{d_{k-1}\Phi}{dx_3^{k-1}}\right)=\text{const},$$

и вставивъ въ него значенія $\dfrac{d\Phi}{dx_3}=\Phi_1,\ \dfrac{d^2\Phi}{dx_3{}^2}=\Phi_2,\ldots$ получимъ искомое значеніе

$$f_3=\pi=\xi(x_3,\ \Phi,\ \Phi_1,\ldots\ \Phi_{i-1})$$

функціи f_3, удовлетворяющей совокупнымъ уравненіямъ (γ).

Если въ равенствѣ $\Phi_k=F$ указатель $k=1$, то функція F будетъ имѣть одну иэъ слѣдующихъ формъ $F(x_3,\ \Phi)$, $F(\Phi)$, $F(x_3)$, $F=$ постоянному, $F=0$. Во всѣхъ этихъ случаяхъ, какъ уже объяснено выше, предыдущій способъ опредѣленія общаго интеграла уравненій (γ) не только не оказывается недостаточнымъ, но, напротивъ, приложеніе его упрощается.

Полагая $f_3=\xi=\text{const.}=a_3$, выведемъ изъ этого уравненія выраженіе p_4 въ функціи $p_5,\ldots p_n$, $x_1,\ldots x_n$, a, a_1, a_2, a_3, которое пусть будетъ

$$p_4=\omega_4.$$

Вставляя это значеніе p_4 въ функціи $\omega''_1, \omega'_2, \omega_3$ и означая ихъ соотвѣтственно ω'''_1, ω''_2, ω'_3, послѣ подстановки, получимъ

$$p_1 = \omega'''_1, \ p_2 = \omega''_2, \ p_3 = \omega'_3;$$

выраженія p_1, p_2, p_3 въ тѣхъ же перемѣнныхъ, какъ и p_4.

Теперь для опредѣленія уравненія $f_4 = \text{const.} = a_4$, изъ котораго выведемъ выраженіе p_5 въ функціи $p_6, \dots p_n$, $x_1, \dots x_n$, нужно интегрировать систему четырехъ линейныхъ совокупныхъ уравненій съ частными производными

$$(p_1 - \omega'''_1, f_4) = 0, \quad (p_2 - \omega''_2, f_4) = 0, \quad (p_3 - \omega'_3, f_4) = 0,$$
$$(p_4 - \omega_4, f_4) = 0.$$

Но сущность способа уже достаточно уяснилась въ изложеніи общаго хода интегрированія двухъ предыдущихъ системъ (α) и (γ), такъ что теперь весьма легко представить дальнѣйшее приложеніе его къ системѣ 4 уравненій выше написанныхъ и къ уравненіямъ слѣдующихъ системъ. Положимъ, что такимъ образомъ проинтегрированы уже $n-2$ системы и остается интегрировать только послѣднюю ($n-1$)-ую. Данное уравненіе и интегралы $n-2$ проинтегрированныхъ системъ будутъ

$$H(p_1, \dots p_n, x_1, \dots x_n) = a, \quad f_1(p_2, \dots p_n, x_1, \dots x_n, a) = a_1,$$
$$f_2(p_3, \dots p_n, x_1, \dots x_n, a, a_1) = a_2, \dots$$
$$f_{n-2}(p_{n-1}, \dots p_n, x_1, \dots x_n, a, a_1, \dots a_{n-3}) = a_{n-2}.$$

По ходу предыдущаго интегрированія требуется, чтобы изъ этихъ уравненій были выведены выраженія каждой изъ $n-1$ первыхъ величинъ ряда p_1, $p_2, \dots p_{n-1}$, p_n, $x_1, \dots x_n$, a, $a_1, \dots a_{n-2}$ посредствомъ $2n$ величинъ слѣдующихъ за ними. Удерживая прежнія означенія, представимъ эти выраженія такимъ образомъ

$$p_1 = \omega_1, \ p_2 = \omega_2, \dots p_{n-1} = \omega_{n-1}.$$

Затѣмъ должно значенія $p_{n-1}, p_{n-2},\dots p_2$, доставляемыя соотвѣтственно послѣднимъ, предпослѣднимъ и т. д. уравненіями предыдущей системы, вставить во всѣ уравненія, предшествующія каждому изъ нихъ. Придерживаясь прежняго способа означеній, выразимъ число такихъ подстановокъ въ каждой изъ функцій $\omega_1, \omega_2,\dots$ числомъ единицъ указателей, написанныхъ надъ ними вверху. Такимъ образомъ получимъ

$$p_1=\omega_1^{(n-2)},\quad p_2=\omega_2^{(n-3)},\dots\quad p_{n-2}=\omega'_{n-2},\quad p_{n-1}=\omega_{n-1},$$

выраженія $p_1,\dots p_{n-1}$ посредствомъ $p_n, x_1,\dots x_n, a_1,\dots a_{n-2}$.

Теперь можемъ приступить къ опредѣленію уравненія

$$f_{n-1}(p_n, x_1,\dots x_n, a,\dots a_{n-2})=\text{const.}=a_{n-1},$$

изъ котораго p_n выразится функціею $x_1,\dots x_n, a, a_1,\dots a_{n-1}$. Для этого возьмемъ систему $n-1$ совокупныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными:

$$(p_1-\omega_1^{(n-2)}, f_{n-1})=0,\quad (p_2-\omega_2^{(n-3)}, f_{n-1})=0,\dots$$
$$(p_{n-1}-\omega_{n-1}, f_{n-1})=0,$$

которыя на основаніи формулы (g) имѣютъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_1^{(n-2)}}{\partial x_n}\cdot\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n}-\dfrac{\partial\omega_1^{(n-2)}}{\partial p_n}\cdot\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\omega_2^{(n-3)}}{\partial x_n}\cdot\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n}-\dfrac{\partial\omega_2^{(n-3)}}{\partial p_n}\cdot\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}=0\\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\[2ex]
\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}+\dfrac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_n}\cdot\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial p_n}-\dfrac{\partial\omega_{n-1}}{\partial p_n}\cdot\dfrac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}=0
\end{array}\right\},\qquad (\delta)$$

и опредѣлимъ ихъ общій интегралъ f_n. Основанія пріемовъ интегрированія подобной системы уравненій подробно объяснены выше; поэтому въ настоящемъ случаѣ ограничимся болѣе сжатымъ изложеніемъ.

Должно начать опредѣленіемъ частнаго интеграла одного изъ уравненій (δ); если возьмемъ для этого первое изъ нихъ, то должно будетъ найти одинъ изъ двухъ интеграловъ системы обыкновенныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_n}{-\frac{\partial\omega_1^{(n-2)}}{\partial p_n}}=\frac{dp_n}{\frac{\partial\omega_1^{(n-2)}}{\partial x_n}}.$$

Пусть этотъ интегралъ будетъ $\eta=\text{const.}$, гдѣ η есть функція перемѣнныхъ p_n, x_1, x_n и можетъ содержать $x_2,\dots x_{n-1}$, какъ постоянныя. Вставимъ эту функцію на мѣсто f_{n-1} въ одно изъ остальныхъ уравненій (δ), напримѣръ во 2-е; результатъ подстановки опять вставимъ вмѣсто f_n въ то-же уравненіе. Такимъ образомъ получимъ

$$(p_2-\omega_2^{(n-3)},\quad \eta)=\eta',\quad (p_2-\omega_2^{(n-3)},\quad \eta')=\eta''.$$

Если η' выражается функціею $\eta, x_2, x_3,\dots x_n$, то общій интегралъ двухъ первыхъ уравненій (δ) опредѣлится какъ интегралъ обыкновеннаго уравненія 1-го порядка

$$\frac{d\eta}{dx_2}=\eta'$$

съ 2 перемѣнными η и x_2, ибо количества $x_3,\dots x_n$ можно разсматривать постоянными. Въ противномъ случаѣ η'' необходимо выразится какъ функція η, η' и $x_2, x_3,\dots x_n$; тогда искомый общій интегралъ двухъ первыхъ уравненій (δ) будетъ одинъ изъ двухъ первыхъ интеграловъ уравненія 2-го порядка

$$\frac{d^2\eta}{dx_2^2}=\eta''$$

съ 2 перемѣнными η и x_2, потому что и здѣсь $x_2,\dots x_n$ должно разсматривать постоянными. Притомъ во 2-ю часть предыдущаго уравненія должно вмѣсто η' поставить $\frac{d\eta}{dx_2}$.

Пусть интегралъ того или другого изъ двухъ предыдущихъ уравненій и, слѣдовательно, общій интегралъ двухъ первыхъ уравненій (δ) будетъ

$$\eta_1 = \text{const}.$$

Если онъ выведенъ изъ уравненія 1-го порядка, тогда η_1 будетъ функціею η, x_2, x_3,... x_n; если же изъ уравненія 2-го порядка, то въ η_1 войдетъ сверхъ того производная $\frac{d\eta}{dx_2}$, которую должно замѣнить функціей η'.

Далѣе, чтобы опредѣлить общій интегралъ трехъ первыхъ уравненій (δ), составимъ функціи

$$(p_3 - \omega_3^{(n-4)},\ \eta_1) = \eta',\quad (p_3 - \omega_3^{(n-4)},\ \eta'_1) = \eta''_1.$$

Здѣсь или η'_1 выразится какъ функція η_1, x_3,... x_n, или, если этого не случится, то необходимо η''_1 выразится посредствомъ η_1, η'_1, x_3,... x_n. Въ первомъ случаѣ должно опредѣлить интегралъ уравненія 1-го порядка между перемѣнными η_1 и x_3:

$$\frac{d\eta_1}{dx_3} = \eta'_1;$$

во 2-мъ — одинъ изъ первыхъ интеграловъ уравненія 2-го порядка между тѣми же перемѣнными:

$$\frac{d^2\eta_1}{dx_3^2} = \eta''_1,$$

при чемъ во 2-ю часть послѣдняго уравненія должно вставить $\frac{d\eta_1}{dx_3}$ вмѣсто η'_1. Пусть интегралъ того или другого изъ двухъ предыдущихъ уравненій и, слѣдовательно, общій интегралъ 3 первыхъ уравненій (δ) будетъ

$$\eta_2 = \text{const}.$$

Если онъ выведенъ изъ уравненія 2-го порядка, то въ функцію η_2 нужно еще вставить η'_1 вмѣсто $\frac{d\eta_1}{dx_3}$.

Такимъ же образомъ помощію η_2 опредѣлимъ η_3 — интегралъ общій 4 первымъ уравненіямъ (δ); помощію этого послѣдняго найдется η_4 — интегралъ общій 5 первымъ уравненіямъ (δ), и т. д. Положимъ, продолжая это вычисленіе, мы уже опредѣлили интегралъ η_{n-3} общій $n-2$ первымъ уравненіямъ (δ); чтобы опредѣлить, наконецъ, интегралъ общій всѣмъ уравненіямъ этой системы, вычислимъ функціи

$$(p_{n-1}-\omega_{n-1},\eta_{n-3})=\eta'_{n-3},\quad (p_{n-1}-\omega_{n-1},\eta'_{n-3})=\eta''_{n-3}.$$

Искомый общій интегралъ системы уравненій (δ) найдется посредствомъ интегрированія уравненія 1-го порядка

$$\frac{d\eta_{n-3}}{dx_{n-3}}=\eta'_{n-3},$$

если η'_{n-3} есть функція η_{n-3}, x_{n-1}, x_n; въ противномъ же случаѣ, какъ одинъ изъ двухъ первыхъ интеграловъ уравненія 2-го порядка

$$\frac{d^2\eta_{n-3}}{dx^2_{n-3}}=\eta''_{n-3},$$

гдѣ η''_{n-3} должно быть необходимо функціею η_{n-3}, η'_{n-3}, x_{n-1}, x_n, въ которую должно вмѣсто η'_{n-3} вставить $\frac{d\eta_{n-3}}{dx_{n-1}}$. Притомъ ясно, что x_n должно разсматривать постояннымъ въ обоихъ уравненіяхъ. Итакъ, пусть интегралъ того или другого изъ двухъ предыдущихъ уравненій, а слѣдовательно и общій интегралъ уравненій (δ), будетъ

$$f_{n-1}=\text{const.}=a_{n-1}.$$

Если онъ выведенъ изъ уравненія 2-го порядка, то въ него должно вмѣсто $\frac{d\eta_{n-3}}{dx_{n-3}}$ обратно вставить η'_{n-3}.

По опредѣленіи уравненія $f_{n-1}=a_{n-1}$ разсматриваемая задача приводится къ окончанію слѣдующимъ образомъ. Изъ этого уравненія выведемъ выраженіе p_n въ функціи $x_1,\dots x_n$, a, $a_1,\dots a_{n-1}$, которое пусть будетъ

$$p_n=\omega_n;$$

вставивъ его въ функціи $\omega_1^{(n-2)},\dots \omega_{n-1}$, которыя послѣ подстановки означимъ соотвѣтственно чрезъ $\omega_1^{(n-1)},\dots \omega'_{n-1}$, будемъ имѣть

$$p_1=\omega_1^{(n-1)},\quad p_2=\omega_2^{(n-2)},\dots\ p_{n-1}=\omega'_{n-1},\ p_n=\omega_n, \tag{p}$$

выраженія частныхъ производныхъ искомой функціи z посредствомъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n$ и $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ $a_1,\dots a_{n-1}$. Эти выраженія по самому способу ихъ опредѣленія таковы, что должны выполнять условія интегрируемости вида

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=\frac{\partial p_k}{\partial x_i} \tag{q}$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2,\dots n$. Поэтому, вставивъ ихъ въ общую формулу дифференціала искомой функціи

$$dz=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\cdots+p_n\,dx_n,$$

будемъ имѣть $dz=\omega_1^{(n-1)}\,dx_1+\omega_2^{(n-2)}\,dx_2+\cdots+\omega_n\,dx_n$.

Интегрируя это послѣднее равенство, получимъ

$$z=\int(\omega_1^{(n-1)}dx_1+\cdots+\omega_n dx_n)+a_n,$$

искомое выраженіе функціи z независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots$ x^n, заключающее n произвольныхъ постоянныхъ $a_1,\dots a_n$, то-есть полный интегралъ задачи, изъ котораго способомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ можетъ быть образованъ самый общій интегралъ.

Сейчасъ было сказано, что выраженія (p) частныхъ производныхъ $p_1, \dots p_n$ по самому способу ихъ опредѣленія таковы, что должны повѣрять условія интегрируемости (q).

Докажемъ это предложеніе. Выраженія (p) выведены изъ системы уравненій:

$$H(x_1, \dots x_n,\ p_1, \dots p_n) = a,\ \ f_1(x_1, \dots x_n,\ p_2, \dots p_n,\ a) = a_1,$$
$$f_2(x_1, \dots x_n,\ p_3, \dots p_n,\ a,\ a_1) = a_2, \dots$$
$$f_{n-1}(x_1, \dots x_n,\ p_n,\ a,\ a_1, \dots a_{n-2}) = a_{n-1}. \tag{f}$$

Вставивъ значеніе a, опредѣляемое 1-мъ изъ этихъ уравненій, во всѣ остальныя, потомъ — значеніе a_1, опредѣляемое 2-мъ, во всѣ слѣдующія и такимъ же образомъ исключая постоянныя $a_2, \dots a_{n-2}$, мы сдѣлаемъ первыя части $f_1, \dots f_{n-1}$ предыдущихъ уравненій функціями однихъ только перемѣнныхъ $x_1, \dots x_n$, $p_1, \dots p_n$, означая которыя соотвѣтственно черезъ $H_1, \dots H_{n-1}$, получимъ вмѣсто предыдущей слѣдующую систему, ей равнозначущую

$$H = a,\ H_1 = a_1,\ H_2 = a_2, \dots H_{n-1} = a_{n-1}. \tag{h}$$

Очевидно, изъ системы (h) выведутся тѣ же самыя значенія $p_1, \dots p_n$, какъ и изъ системы (f); поэтому на основаніи теоремы 2-й § 17 достаточно доказать, что первыя части уравненій (h) повѣрятъ тождественно условіе

$$(H_i,\ H_k) = 0 \tag{a}$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 0, 1,... $n-1$, тогда будетъ доказано предыдущее предложеніе.

Докажемъ сначала, что первыя части уравненій (f) повѣряютъ тождественно условіе

$$(f_i,\ f_k) = 0 \tag{b}$$

для тѣхъ же значеній i и k и принимая притомъ $f_0 = H$.

Дѣйствительно, $n-1$ системъ совокупныхъ уравненій, интегрированія которыхъ доставили уравненія (f), составляютъ, какъ мы видѣли, непосредственныя слѣдствія другихъ $n-1$ системъ совокупныхъ уравненій, данныхъ въ § 20 и которыхъ общій типъ есть

$$(p_{i+1}-\omega_{i+1},\ p_{k+1}-\omega_{k+1})=0 \qquad \text{(c)}$$

или, полагая $i<k$,

$$\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_{i+1}}-\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_{k+1}}-\sum_{m=i+2}^{m=k+1}\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}+$$

$$+\sum_{m=k+2}^{m=n}\left(\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial x_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial p_m}-\frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial p_m}\frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial x_m}\right)=0. \qquad \text{(c)}$$

Слѣдовательно, интегралы двухъ упомянутыхъ системъ доставляются одними и тѣми же уравненіями (f). Поэтому, взявъ между этими послѣдними два уравненія

$$f_i(x_1,\ldots x_n,\ p_{i+1},\ldots p_n,\ a,\ldots a_{i+1})=a_i,$$
$$f_k(x_1,\ldots x_n,\ p_{k+1},\ldots p_n,\ a_1,\ldots a_{k+1})=a_k,$$

выведя изъ перваго значенія p_{i+1} въ функціи $p_{i+2},\ldots p_n, x_1,\ldots x_n$, изъ втораго значенія p_{k+1} въ функціи $p_{k+2},\ldots p_n, x_1,\ldots x_n$ и означая ихъ соотвѣтственно черезъ $p_{i+1}=\omega_{i+1}$, $p_{k+1}=\omega_{k+1}$, мы приведемъ уравненіе (c) вставкою этихъ значеній функцій ω_{i+1} и ω_{k+1} къ тождеству. Но не трудно убѣдиться, что это послѣднее есть не что иное, какъ условіе (b), написанное въ другой формѣ. Дѣйствительно, вставляя въ уравненіе $f_i=a_i$ значеніе $p_{i+1}=\omega_{i+1}$ и въ уравненіе $f_k=a_k$ значеніе $p_{k+1}=\omega_{k+1}$, мы обратимъ ихъ въ тождества. Поэтому, означая черезъ t одно изъ перемѣнныхъ входящихъ въ ω_{i+1} и ω_{k+1} и дифференцируя въ отношеніи его упомянутыя тождества, находимъ

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}}\ \frac{\partial\omega_{i+1}}{\partial t}=-\frac{\partial f_i}{\partial t},\quad \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}\ \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial t}=-\frac{\partial f_k}{\partial t}.$$

Поэтому, умноживъ равенство (c) на $\frac{\partial f_i}{\partial p_{i+1}} \frac{\partial f_k}{\partial p_{k+1}}$, получимъ

$$-\sum_{m=i+1}^{m=k} \frac{\partial f_i}{\partial p_m}\frac{\partial f_k}{\partial x_m} + \sum_{m=k+1}^{m=n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_m}\frac{\partial f_k}{\partial p_m} - \frac{\partial f_i}{\partial p_m}\frac{\partial f_k}{\partial x_m}\right)=0;$$

но это послѣднее равенство есть не что иное, какъ развитіе символически представленнаго условія (b).

Наконецъ, чтобы показать, что условія (a) будутъ удовлетворены, какъ скоро выполнены условія (b), достаточно замѣтить, что первыя выражаются посредствомъ вторыхъ линейнымъ образомъ. Дѣйствительно, по объясненному выше переходу отъ уравненій (f) къ уравненіямъ (h), имѣемъ

$$H_i = f_i(x_1, \dots x_n, p_{i+1}, \dots p_n, H, H_1, \dots H_{i-1}),$$
$$H_k = f_k(x_1, \dots x_n, p_{k+1}, \dots p_n, H, H_1, \dots H_{k-1}).$$

Замѣтивъ это, покажемъ сначала, что выраженія вида

$$(f_i, H_k)$$

представятся линейнымъ образомъ посредствомъ выраженій, составляющихъ первыя части равенствъ (b). Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи формулы 8 § 16 имѣемъ

$$[f_i, H_k] = (f_i, f_k) + \sum_{k'=0}^{k'=k-1} (f_i, H_{k'}) \frac{\partial f_k}{\partial H_{k'}},$$

гдѣ, очевидно, $k' < k$.

Примѣняя ту же формулу къ разложенію выраженій $(f_i, H_{k'})$, представимъ ихъ посредствомъ $(f_i, f_{k'})$ и $(f_i, H_{k''})$, гдѣ $k'' < k'$. Продолжая такимъ образомъ, выразимъ окончательно (f_i, H_k) линейнымъ образомъ посредствомъ (f_i, f_k), $(f_i, f_{k'})$ $(f_i, f_{k''})$,... $(f_i, f_0) = (f_i, H)$, и такъ какъ эти послѣднія на основаніи (b) тождественно равны нулю, то

$$(f_i, H_k) = 0 \tag{d}$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 0, 1, 2,... $n-1$.

Далѣе, на основаніи формулы (5) § 16, имѣемъ:

$$(H_i,\ H_k)=(f_i,\ f_k)+\sum_{k'=0}^{k'=k-1}(f_i, H_{k'})\frac{\partial f_k}{\partial H_{k'}}+\sum_{i'=0}^{i'=i-1}(H_{i'}, f_k)\frac{\partial f_i}{\partial H_{i'}}+$$
$$+\sum_{i'=0}^{i'=i-1}\sum_{k'=0}^{k'=k-1}(H_{i'}, H_{k'})\frac{\partial f_i}{\partial H_{i'}}\frac{\partial f_k}{\partial H_{k'}}.$$

Но на основаніи равенствъ (b) и (d) первый, второй и третій члены 2-й части послѣдняго равенства приводятся къ нулю; слѣдовательно, $(H_i,\ H_k)$ представится линейнымъ образомъ посредствомъ выраженій $(H_{i'},\ H_{k'})$, въ которыхъ $i'<i$, $k'<k$. Примѣняя къ этимъ послѣднимъ ту же формулу, найдемъ, что они выразятся линейно посредствомъ $(H_{i''},\ H_{k''})$, гдѣ $i''<i'$, $k''<k'$. Продолжая такимъ образомъ, представимъ окончательно $(H_i,\ H_k)$ линейно посредствомъ выраженій, составляющихъ первыя части равенствъ (b) и (d), которыя тождественно приводятся къ нулю. Слѣдовательно,

$$(H_i,\ H_k)=0$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 0, 1, 2,... $n-1$.

Точно такъ же, какъ предыдущую теорему, можно доказать, что если каждыя двѣ функціи, составляющія первыя части уравненій (f), повѣряютъ тождество

$$(f_i,\ f_k)=0,$$

то оно будетъ существовать и тогда, когда въ одну или обѣ функціи f_i, f_k, прежде вычисленія частныхъ производныхъ, будутъ вставлены вмѣсто одной или нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ, въ нихъ входящихъ, функціи имъ равнозначущія на основаніи уравненій (f); или, говоря короче, предыдущее тождество будетъ существовать, какому бы преобразованію ни были подвергнуты функціи f_i, f_k посредствомъ уравненій (f).

§ 22. При оцѣнкѣ теоретическаго достоинства изложеннаго выше способа интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка, нельзя не обратить вниманія на слѣдующій вопросъ: сколько требуется всѣхъ интегрированій для полученія полнаго интеграла въ случаѣ n независимыхъ перемѣнныхъ, которыхъ неизвѣстная функція входитъ въ данное уравненіе только въ видѣ ея частныхъ производныхъ 1-го порядка?

Способъ Якоби послѣдовательно приводитъ къ различнымъ системамъ совокупныхъ уравненій вида

$$\frac{dx}{F(x\,,y,\ldots u)}=\frac{dy}{f(x,\ y,\ldots u)}=\cdots=\frac{du}{\varphi(x,y,\ldots u)} \qquad (\alpha)$$

съ постепенно понижающимся числомъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots u$, и требуетъ не полнаго ихъ интегрированія, а опредѣленія только одного интеграла каждой системы. Вообще, трудность выполненія подобнаго требованія зависитъ отъ *порядка* интегрируемаго уравненія, который опредѣляется числомъ произвольныхъ постоянныхъ, получаемыхъ при полномъ интегрированіи системы вида (α) и, слѣдовательно, равенъ числу перемѣнныхъ x, $y, \ldots u$, уменьшенному единицею. Системы вида (α), встрѣчающіяся въ способѣ Якоби, онъ раздѣляетъ на *главныя* и *вспомогательныя*. Первыя совершенно опредѣленнаго порядка, который не можетъ быть пониженъ, между тѣмъ какъ для вторыхъ можно назначать только высшій предѣлъ, котораго можетъ достигать ихъ порядокъ. Для поясненія различія главныхъ и вспомогательныхъ системъ достаточно указать по одному представителю того и другого класса. Въ предыдущемъ § мы видѣли, что при опредѣленіи, напр., функціи f_2, которая должна совокупно удовлетворять двумъ уравненіямъ

$$(p_1-\omega'_1,\ f_2)=0 \quad \text{и} \quad (p_2-\omega_2,\ f_2)=0, \qquad \text{(a)}$$

требуется отыскать одинъ изъ интеграловъ одной изъ двухъ системъ уравненій:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_3}{-\frac{\partial\omega'_1}{\partial p_3}}=\cdots=\frac{dx_n}{-\frac{\partial\omega'_1}{\partial p_n}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial\omega'_1}{\partial x_3}}=\cdots=\frac{dp_n}{\frac{\partial\omega'_1}{\partial x_n}}, \tag{b}$$

$$\frac{dx_2}{1}=\frac{dx_3}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_3}}=\cdots=\frac{dx_n}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_n}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}}=\cdots=\frac{dp_n}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_n}}$$

порядка $2n-4$, который не можетъ быть пониженъ. Подобныя системы называются главными.

Когда интегралъ $\varphi=\text{const.}$ одного изъ уравненій (b), положимъ 1-го, найденъ, тогда послѣдовательными подстановками во 2-е изъ уравненій (a) найдемъ рядъ интеграловъ 1-го изъ уравненій (b):

$$\varphi=\text{const.},\ \varphi_1=\text{const},\ldots\ \varphi_i=\text{const},\ldots$$

Но такъ какъ число различныхъ интеграловъ этого уравненія равно его порядку $2n-4$, то въ ряду функцій $\varphi, \varphi_1,\ldots$ необходимо встрѣтится такая, которая первая выразится функціею предыдущихъ. Положимъ, такою будетъ φ_i; указатель ея i долженъ быть не болѣе $2n-4$. Теперь мы можемъ написать непосредственно систему уравненій

$$\frac{dx_2}{1}=\frac{d\varphi}{\varphi_1}=\cdots=\frac{d\varphi_{i-1}}{\varphi_i} \tag{c}$$

порядка i, одинъ изъ интеграловъ которой будетъ искомымъ значеніемъ f_2.

Система (c) называется вспомогательною; о ней извѣстно только, что порядокъ ея i не можетъ быть выше порядка $2n-4$ соотвѣтственныхъ главныхъ уравненій (b). Но, очевидно, порядокъ ея можетъ быть менѣе этого предѣла и вообще долженъ измѣняться, если вмѣсто интеграла $\varphi=\text{const}$ возьмемъ другой интегралъ 1-го изъ уравненій (b), или — интегралъ 2-го изъ уравненій (b).

Принявъ объясненныя сейчасъ названія, мы можемъ теперь отвѣтить на поставленный выше вопросъ, предполагая при этомъ самый невыгодный случай, именно, когда всѣ вспомогательныя системы доходятъ до самаго высшаго порядка, который для нихъ возможенъ.

Въ такомъ случаѣ по изложенному въ предыдущемъ § способу Якоби требуется опредѣлить по одному интегралу каждаго изъ $\frac{n(n-1)}{2}$ уравненій, изъ которыхъ

одно	порядка	$2n-2$	служитъ	для	опредѣленія	функціи	f_1,
два	»	$2n-4$	»	»	»	»	f_2,
три	»	$2n-6$	»	»	»	»	f_3.
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
i	»	$2n-2i$	»	»	»	»	f_i,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$n-1$	»	2	»	»	»	»	f_{n-1}.

Должно замѣтить впрочемъ, что самый невыгодный случай, предположенный въ предыдущемъ разсчетѣ, обыкновенно въ приложеніяхъ не встрѣчается и порядокъ вспомогательныхъ уравненій по большей части ниже высшаго предѣла. Что касается числа всѣхъ требуемыхъ интеграловъ $\frac{n(n-1)}{2}$, которое, какъ число треугольное, возрастаетъ довольно быстро съ увеличеніемъ числа независимыхъ перемѣнныхъ n, то относительно его можно замѣтить слѣдующее Разсматриваемая задача по сущности своей неопредѣленная и теорія Якоби на каждой ступени развитія рѣшенія ея представляетъ значительный просторъ въ выборѣ уравненія, котораго должно опредѣлить одинъ интегралъ, чтобы подвинуть рѣшеніе задачи впередъ. Поэтому во многихъ случаяхъ можно выбирать такія уравненія, которыхъ интегралы очевидны; такимъ образомъ общій итогъ всѣхъ интегрированій $\frac{n(n-1)}{2}$ приведется къ гораздо меньшему числу интегрированій, дѣйствительно производимыхъ.

Чтобы показать приложеніе способа Якоби въ томъ видѣ, какъ онъ изложенъ въ предыдущемъ §, и вмѣстѣ съ тѣмъ привести образчикъ сейчасъ упомянутыхъ упрощеній, рѣшимъ еще одинъ частный примѣръ.

Возьмемъ уравненіе перваго порядка

$$t\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\left\{\left[u+t\left(\frac{\partial z}{\partial w}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial t}+\right.$$
$$\left.+(4w+5v)\frac{\partial z}{\partial v}+(3w+2v)\frac{\partial z}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial y}\right\}=0$$

съ частными производными функціи z независимыхъ перемѣнныхъ t, u, v, w, y.

Принявъ означенія: $y=x_1$, $w=x_2$, $v=x_3$, $u=x_4$, $t=x_5$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=p_1,\quad \frac{\partial z}{\partial w}=p_2,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=p_3,\quad \frac{\partial z}{\partial u}=p_4,\quad \frac{\partial z}{\partial t}=p_5,$$

и выведя изъ предыдущаго уравненія выраженіе $\frac{\partial z}{\partial y}$ или p_1, которое для краткости означимъ ω_1, будемъ имѣть

$$p_1=-(3x_2+2x_3)p_2-(4x_2+5x_3)p_3-$$
$$-[x_4+x_5(p_2-p_3)]p_5-\frac{x_5p_5^2}{p_4}=\omega_1.$$

Чтобы найти четыре уравненія
$f_1(p_2, p_3, p_4, p_5, x_1,\ldots x_5)=a_1$, $f_2(p_3, p_4, p_5, x_1,\ldots x_5, a_1)=a_2$, $f_3(p_4, p_5, x_1,\ldots x_5, a_1, a_2)=a_3$, $f_4(p_5, x_1,\ldots x_5, a_1, a_2, a_3)=a_4$, (гдѣ $a_1,\ldots a_4$ означаютъ произвольныя постоянныя), которыя въ совокупности съ даннымъ доставили бы значенія $p_1,\ldots p_5$, дѣлающія выраженіе $p_1dx_1+\cdots+p_5\,dx_5$ точнымъ дифференціаломъ, должно, согласно изложенной выше теоріи, поступать слѣдующимъ образомъ.

Функцію f_1 нужно опредѣлить какъ частный интегралъ линейнаго уравненія

$$(p_1-\omega_1, f_1)=0,$$

т.-е. какъ интегралъ системы обыкновенныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_2}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}}=\frac{dx_3}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_3}}=\frac{dx_4}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_4}}=\frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_5}}=\frac{dp_2}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}}=\frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_4}}=\frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_5}},$$

помощію которыхъ находимъ

$$dx_1=\frac{d(p_2-p_3)}{\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}}=\frac{d(p_2-p_3)}{-(p_2-p_3)};$$

откуда, по интегрированіи, легко получить

$$f_1=(p_2-p_3)e^{x'}=a_1.$$

Выведя отсюда выраженіе p_2, которое означимъ ω_2, и вставивъ его въ ω_1, которую послѣ подстановки означимъ ω'_1, будемъ имѣть

$$p_2=p_3+a_1e^{-x_1}=\omega_2,$$
$$p_1=\omega'_1.$$

Функцію f_2 должно опредѣлить какъ частный интегралъ совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_2-\omega_2, f_2)=0,$$
$$(p_1-\omega'_1, f_2)=0.$$

Интегралъ перваго изъ нихъ получится изъ системы уравненій

$$\frac{dx_2}{1}=\frac{dx_3}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_3}}=\frac{dx_4}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_4}}=\frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_5}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}}=\frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_4}}=\frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_5}}.$$

Уравненіе $\frac{dp_3}{dx_2}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}=0$ доставитъ интегралъ

$$\varphi=p_3=\text{const}.$$

Вставивъ его вмѣсто f_2 во второе изъ предыдущихъ линейныхъ уравненій, находимъ

$$(p_1-\omega'_1, \varphi)=\varphi_1=\frac{\partial\omega'_1}{\partial x_3}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\omega_1}{\partial p_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}, \text{ но } \frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}=0,$$

слѣд.

$$\varphi_1=-2p_2-5p_3=-7\varphi-2a_1e^{-x_1}.$$

Поэтому на основаніи предыдущаго § искомое значеніе f_2 получится какъ интегралъ уравненія

$$\frac{d\varphi}{dx_1}+7\varphi+2a_1e^{-x_1}=0$$

и будетъ

$$f_2=\left(\varphi+\frac{1}{3}a_1e^{-x_1}\right)e^{7x_1}=a_2.$$

Выводя отсюда выраженіе $p_3=\omega_3$ и вставивъ его въ ω'_1, которую послѣ подстановки означимъ ω''_1, будемъ имѣть

$$p_3=a_2e^{-7x_1}-\frac{1}{3}a_1e^{-x_1}=\omega_3,$$
$$p_2=\omega_2,$$
$$p_1=\omega''_1,$$

Функція f_3, должна быть опредѣлена какъ частный интегралъ совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_3-\omega_3, f_3)=0,\ (p_2-\omega_2, f_3)=0,\ (p_1-\omega''_1, f_3)=0.$$

Интегралъ перваго изъ нихъ получится изъ системы уравненій

$$\frac{dx_3}{1}=\frac{dx_4}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_4}}=\frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_5}}=\frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_3}{\partial x_4}}=\frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_3}{\partial x_5}}.$$

Уравненіе $\frac{dp_4}{dx_3}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_4}=0$ даетъ интегралъ $\psi=p_4=\text{const.}$; вставивъ его во второе изъ предыдущихъ линейныхъ уравненій, находимъ

$$(p_2-\omega_2,\psi)=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_4}\ \text{тождественно}=0.$$

Вставивъ ψ вмѣсто f_3 въ третье изъ предыдущихъ линейныхъ уравненій, получимъ

$$(p_1-\omega''_1,\psi)=\psi_1=\frac{\partial\omega'''_1}{\partial x_4}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_4},$$

потому что

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial x_4}=0,\quad \frac{\partial\omega_3}{\partial x_4}=0;\quad \text{слѣд.}\ \psi_1=-p_5.$$

Вставивъ ψ_1 вмѣсто f_3 опять въ то же уравненіе, находимъ

$$(p_1-\omega''_1,\psi_1)=\psi_2=-\frac{\partial\omega'''_1}{\partial x_5}=-\frac{\partial\omega_1}{\partial x_5}=$$
$$=(p_2-p_3)p_5+\frac{p_5^2}{p_4}=-a_1e^{-x_1}\psi_1+\frac{\psi_1^2}{\psi}.$$

Слѣдовательно, искомое значеніе f_3 получится какъ первый интегралъ уравненія второго порядка

$$\frac{d\psi^2}{\partial x_1^2}+a_1e^{-x_1}\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)-\frac{1}{\psi}\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)^2=0.$$

Умноживъ первую часть предыдущаго уравненія на $\frac{dx_1}{\frac{d\psi}{dx_1}}$, сдѣлаемъ ее точнымъ дифференціаломъ, по интегрированіи котораго находимъ первый интегралъ предыдущаго уравненія и, слѣдовательно, значеніе

$$f_3=\log\frac{\frac{d\psi}{dx_1}}{\psi}-a_1e^{-x_1}=\text{const.}$$

Вставивъ сюда ψ_1 вмѣсто $\frac{d\psi}{dx_1}$, имѣемъ

$$f_3=\log\frac{\psi_1}{\psi}-a_1e^{-x_1}=\log\left(-\frac{p_5}{p_4}\right)-a_1e^{-x_1}=\text{const}.$$

Отсюда, выведемъ выраженіе $p_4=\omega_4$ и вставивъ его въ ω''_1, которую послѣ подстановки означимъ ω'''_1, получимъ

$$p_4=-e^{-\text{const}-a_1e^{-x_1}}\cdot p_5=a_3e^{-a_1e^{-x_1}}\cdot p_5=\omega_4,$$
$$p_3=\omega_3,\ p_2=\omega_2,\ p_1=\omega'''_1.$$

Функцію f_4 должно опредѣлить какъ частный интегралъ совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_4-\omega_4, f_4)=0,\ (p^3-\omega_3, f_4)=0,\ (p_2-\omega_2, f_4)=0,\ (p_1-\omega'''_1, f_4)=0;$$

интегрированіе перваго изъ нихъ приводитъ къ системѣ

$$\frac{dx_4}{1}=\frac{dx_5}{-\frac{\partial\omega_4}{\partial p_5}}=\frac{dp_5}{\frac{\partial\omega_4}{\partial x_5}},$$

одно изъ уравненій которой

$$\frac{dp_5}{dx_4}=\frac{\partial\omega_4}{\partial x_5}=0$$

имѣетъ интегралъ

$$\theta=p_5=\text{const}.$$

Вставляя его въ остальныя линейныя уравненія, вмѣсто f_4, находимъ, что второе и третье приводятся тождественно къ нулю, четвертое же доставитъ

$$(p_1-\omega'''_1, \theta)=\frac{\partial\omega'''_1}{\partial x_5}=-(p_2-p_3)p_5-\frac{p_5^2}{p_4}=$$
$$=-a_1e^{-x_1}\theta-\frac{1}{a_3}e^{a_1e^{-x_1}}\cdot\theta=\theta_1.$$

Поэтому значеніе f_4 опредѣлится какъ интегралъ уравненія

$$\frac{d\theta}{dx_1}+\left(a_1e^{-x_1}+\frac{e}{a_3}^{a_1e^{-x_1}}\right)\theta=0$$

и будетъ

$$f_4=\log\theta-a_1e^{-x_1}+\frac{1}{a_3}\int e^{a_1e^{-x_1}}dx_1=\text{const}.$$

Отсюда находимъ

$$p_5=a_4\left(e^{a_1e^{-x_1}}-\frac{\int e^{a_1e^{-x_1}}dx_1}{a_3}\right);$$

слѣдовательно

$$p_4=a_3a_4e^{-\frac{1}{a_3}\int e^{a_1e^{-x_1}}dx_1};$$

сверхъ того имѣемъ

$$p_3=a_2e^{-7x_1}-\frac{1}{3}a_1e^{-x_1},$$

$$p_2=a_2e^{-7x_1}+\frac{2}{3}a_1e^{-x_1}$$

и наконецъ

$$p_1=-7(x_2+x_3)a_2e^{-7x_1}-\frac{a_1}{3}(2x_2-x_3)e^{-x_1}-$$

$$-a_4\left[x_4+\left(a_1e^{-x_1}+\frac{e^{a_1e^{-x_1}}}{a_3}\right)x_5\right]e^{\left(a_1e^{-x_1}-\frac{1}{a_3}\int e^{a_1e^{-x_1}}dx\right)}.$$

Вставивъ предыдущія значенія p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 въ выраженіе

$$p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\cdots+p_5\,dx_5,$$

должно получить точный дифференціалъ; и дѣйствительно, интегрируя его, находимъ полный интегралъ задачи въ слѣдующемъ видѣ:

$$z=\frac{a_1}{3}(2x_2-x_3)e^{-x_1}+a_2(x_2+x_3)e^{-7x_1}+$$

$$+a_4\left[a_3x_4+x_5e^{a_1e^{-x_1}}\right]e^{-\frac{1}{a_3}\int e^{a_1e^{-x_1}}dx_1}+\text{const}.$$

Ограничимся здѣсь этимъ простымъ примѣромъ, такъ какъ вслѣдъ за нимъ мы разсмотримъ примѣненіе началъ, заключающихся въ теоріи Якоби, къ вопросамъ болѣе общимъ, въ частныхъ приложеніяхъ которыхъ приведется употреблять тѣ же самые пріемы интегрированія.

VI.

Совокупное интегрированіе уравненій съ частными производными 1-го порядка.

§ 22. Изложенный выше способъ приводитъ задачу интегрированія какого угодно уравненія съ частными производными 1-го порядка къ совокупному интегрированію нѣсколькихъ системъ особеннаго вида совмѣстныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными 1-го порярка. Якоби не остановился на общемъ вопросѣ совокупнаго интегрированія нѣсколькихъ уравненій съ частными производными 1-го порядка и какого угодно вида, но ограничился представившимся ему частнымъ случаемъ, въ которомъ, по его замѣчанію (Nova Meth. § 18), для интегрированія можно употребить искусственный пріемъ, основанный главнымъ образомъ на теоремѣ 1-й § 17. Между тѣмъ до общаго рѣшенія вопроса оставалось сдѣлать небольшой шагъ. Дѣйствительно, г. Буръ (Bour) въ 39-й тетради «Journ. de l'Ec. Polyt.» въ статьѣ «Sur l'intégration des équations différentielles partielles du 1-er et du 2-d ordre» показалъ, что совокупное интегрированіе уравненій съ частными производными 1-го порядка какого угодно вида приводится весьма просто къ совокупному интегрированію уравненій того вида, которымъ Якоби ограничилъ свое изслѣдованіе.

Чтобы подвести подъ одну общую точку зрѣнія вопросы интегрированія одного и нѣсколькихъ уравненій съ частными производными 1-го порядка, мы возвратимся въ немногихъ словахъ къ первоначальной постановкѣ первой изъ этихъ задачъ, которая по содержанію составляетъ частный случай второй, между тѣмъ какъ по способу рѣшенія вторая заключается, какъ простѣйшій случай, въ первой.

Неизвѣстная функція z независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ можетъ быть опредѣлена, если даны выраженія всѣхъ ея частныхъ производныхъ 1-го порядка: $\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$, въ функціяхъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$. Для этого должно только увѣриться, принадлежатъ ли дѣйствительно данныя выраженія $p_1, \ldots p_n$ частнымъ производнымъ одной и той же функціи, т.-е. удовлетворяютъ ли они условіямъ

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \tag{1}$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, \ldots n$.

Въ случаѣ, когда эти условія выполнены, функція z найдется посредствомъ интегрированія ея дифференціальнаго выраженія

$$p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \cdots + p_n\,dx_n. \tag{2}$$

Если вмѣсто явныхъ выраженій $p_1, \ldots p_n$ въ функціяхъ независимыхъ перемѣнныхъ дано n уравненій:

$$H = 0,\ H_1 = 0, \ldots\ H_{n-1} = 0, \tag{3}$$

которыхъ первыя части суть функціи $x_1, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n$; то существуютъ общіе аналитическіе признаки, по которымъ можно судить, возможно ли алгебраически разрѣшить эти уравненія въ отношеніи n неизвѣстныхъ $p_1, \ldots p_n$ и будутъ ли выраженія этихъ величинъ повѣрять условія (1). Если одна или нѣкоторыя изъ функцій $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ выражаются посредствомъ остальныхъ изъ этихъ функцій и перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$, то предыдущія уравненія будутъ или недостаточны для опредѣленія неизвѣстныхъ $p_1, \ldots p_n$, или противорѣчивы. Въ самомъ дѣлѣ положимъ

$$H_i = \varphi(x_1, \ldots x_n,\ H,\ H_1, \ldots),$$

въ силу данныхъ уравненій будемъ имѣть

$$H_i = \varphi(x_1, \ldots x_n,\ 0,\ 0, \ldots) = 0.$$

Если это отношеніе тождественное, то оно должно быть откинуто изъ числа данныхъ уравненій и эти послѣднія становятся недостаточными для опредѣленія n неизвѣстныхъ $p_1, \ldots p_n$; если же отношеніе $\varphi = 0$ не тождественное, то оно противорѣчитъ условію независимости перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$. Выше, въ § 3, выведенъ аналитическій признакъ, указанный Якоби, по которому всегда можно судить, находятся ли между функціями $H, \ldots H_{n-1}$ такія, какою мы сейчасъ предполагали H_i. Для этого, разсматривая $H, \ldots H_{n-1}$, какъ функцію однихъ только перемѣнныхъ $p_1, \ldots p_n$, должно составить функціональный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \ldots & \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{\partial H_{n-1}}{\partial p_1}, & \ldots & \dfrac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n} \end{vmatrix} = \triangle. \tag{4}$$

Если $\triangle$ приводится тождественно къ нулю, тогда одно или нѣсколько изъ уравненій $H=0, \ldots H_{n-1}=0$ противорѣчивы съ остальными, или тождественны.

Но положимъ, что $\triangle$ не равна нулю; теперь представляется второй вопросъ, будутъ ли выраженія $p_1, \ldots p_n$, выведенныя изъ уравненій (3), удовлетворять условіямъ (1)? Представимъ, что выраженія $p_1, \ldots p_n$, выведенныя изъ уравненій (3), удовлетворяютъ условіямъ (1). Вставивъ ихъ обратно вмѣсто $p_1, \ldots p_n$ въ уравненія (3), мы обратимъ эти послѣднія въ тождества. Взявъ два изъ полученныхъ такимъ образомъ тождествъ

$$H_i = 0 \quad \text{и} \quad H = 0,$$

и поступая съ ними точно такъ же, какъ въ § 11 поступали съ тождествами

$$F_i = a_i, \quad F_k = a_k,$$

подобнымъ же образомъ прійдемъ къ заключенію, что функціи H_i, H_k должны удовлетворять условію

$$(H_i,\ H_k)=0 \tag{5}$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, \ldots\ n-1$.

Обратно, если условія (5) удовлетворены, тогда на основаніи теоремы 2-й § 17 заключимъ, что выраженія $p_1, \ldots\ p_n$, выведенныя изъ уравненій (3), удовлетворятъ условію (1); слѣдовательно, должно будетъ только вставить ихъ въ выраженіе (2), по интегрированіи котораго получится функція z [1]).

Замѣтимъ, что условія (5) могутъ быть удовлетворены тождественно или въ силу нѣкоторыхъ изъ уравненій (3). Въ 1-мъ случаѣ, очевидно, вмѣсто данныхъ уравненій (3) можно бы было взять болѣе общія уравненія, написавъ во 2-хъ частяхъ (3) произвольныя постоянныя вмѣсто нулей; во 2-мъ можно такимъ образомъ обобщить только тѣ изъ уравненій (3), которыя не были приняты въ соображеніе при выполненіи условій (5).

Предыдущій вопросъ, совершенно опредѣленный, сдѣлается неопредѣленнымъ, если вмѣсто полной системы n уравненій (3) мы имѣемъ неполную систему m уравненій между частными производными 1-го порядка, предполагая конечно $m>n$. Случай, когда $m=1$ составляетъ задачу интегрированія одного уравненія съ частными производными 1-го порядка. Мы выше видѣли, что рѣшеніе этой задачи, по крайней мѣрѣ теоретически, всегда возможно, т.-е. по данному уравненію

$$H=0,$$

---

[1]) Г. Буръ въ упомянутой выше статьѣ своей повсюду называетъ условіе (5) теоремою Ліувилля и даже прибавляетъ, что она была доказана послѣднимъ въ курсѣ, читанномъ въ Collège de France въ 1853 году, между тѣмъ въ статьѣ г. Donkin, On a class of differentiel equations, etc., помѣщенной въ Philosophical Transactions, 1854 г. Part. 1., находимъ эту самую теорему (Theorem 12, p. 83), упоминаемую (p. 71) въ числѣ новыхъ результатовъ имъ полученныхъ.

между перемѣнными $x_1, \dots x_n$, $p_1, \dots p_n$, всегда можно опредѣлить еще $n-1$ уравненій, между тѣми же перемѣнными

$$H_1 = \text{const.} = a_1, \dots H_{n-1} = \text{const.} = a_{n-1},$$

первыя части которыхъ выполняютъ условіе

$$(H_i, H_k) = 0$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $0, 1, \dots n-1$.

Если мы предположимъ теперь число данныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, m, болѣе единицы, то такимъ образомъ прійдемъ къ вопросу совокупнаго интегрированія нѣсколькихъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Не трудно убѣдиться, что, при одинаковомъ числѣ независимыхъ перемѣнныхъ, эта новая задача не только не сложнѣе предыдущей, но, напротивъ, проще ея, и что изъ теоріи рѣшенія послѣдней естественнымъ образомъ вытекаетъ способъ рѣшенія первой.

Существенное различіе двухъ вопросовъ заключается въ томъ, что для одного уравненія съ частными производными 1-го порядка, всегда возможенъ интегралъ и общая теорія, предлагая способъ его опредѣленія, не ограничиваетъ ни чѣмъ выбора даннаго уравненія. Между тѣмъ для нѣсколькихъ данныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка тогда только возможенъ общій интегралъ, когда они выполнятъ нѣкоторыя условія. Дѣйствительно, если мы произвольно выберемъ m уравненій

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0, \dots H_m = 0 \tag{6}$$

между перемѣнными $x_1, \dots x_n$, $p_1, \dots p_n$, то можемъ встрѣтить случаи двоякаго рода ихъ несовмѣстности: алгебраической и интегральной. Первая будетъ имѣть мѣсто, если одна или нѣкоторыя изъ функцій $H_1, \dots H_m$ выражаются функціями остальныхъ и перемѣнныхъ $x_1, \dots x_n$. Въ такомъ случаѣ одно или нѣсколько изъ уравненій (6) будутъ или тождественны, или противорѣчивы съ остальными. Если данныя уравненія свободны отъ разсмотрѣннаго сейчасъ недостатка, то должно еще убѣдиться, могутъ ли они принадлежать системѣ n уравненій, изъ которыхъ выведенныя значенія $p_1 \dots\ p_n$ повѣрятъ условія (1); т.-е. — возможенъ ли интегралъ совокупно удовлетворяющій даннымъ уравненіямъ. Для этого должно только разсмотрѣть могутъ ли быть удовлетворены и какимъ образомъ условія

$$(H_i,\ H_k)=0 \tag{7}$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1, 2, \dots m$.

Если условія (7) будутъ удовлетворены тождественно, или въ силу данныхъ уравненій (6), тогда интегралъ, удовлетворяющій каждому изъ этихъ послѣднихъ и заключающій въ своемъ выраженіи, кромѣ независимыхъ перемѣнныхъ, $n-m+1$ произвольныхъ постоянныхъ, найдется помощію пріемовъ, изложенныхъ при интегрированіи одного уравненія съ частными производными 1-го порядка. Дѣйствительно, для рѣшенія задачи такимъ образомъ должно только дополнить данную систему $n-m$ уравненіями

$$H_{m+1}=\text{const.}=a_1,\quad H_{m+2}=\text{const.}=a_2,\dots \\ H_n=\text{const.}=a_{n-m}, \tag{8}$$

которыхъ первыя части, представляющія неизвѣстныя функціи $x_1,\dots\ x_n,\ p_1,\dots\ p_n$, должны быть опредѣлены такъ, чтобы удовлетворяли условію

$$(H_i,\ H_k)=0$$

при всѣхъ значеніяхъ $i=1,\ 2,\dots\ n$ и $k=m+1,\ m+2\ \dots\ n$.

Поэтому функція H_{m+1} можетъ быть опредѣлена по способу, изложенному въ § 18, какъ общій интегралъ системы m линейныхъ уравненій

$$(H_1,\ H_{m+1})=0,\ (H_2,\ H_{m+1})=0,\dots\ (H_m,\ H_{m+1})=0.$$

Подобнымъ же образомъ опредѣлятся первыя части остальныхъ уравненій (8), которыя въ совокупности съ данными дадутъ выраженія $p_1, \ldots p_n$, заключающія $n-m$ произвольныхъ постоянныхъ; слѣдовательно, искомый интегралъ z будетъ содержать $n-m+1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Если предыдущій способъ оказывается непримѣнимымъ (въ обстоятельствахъ, указанныхъ въ примѣчаніяхъ къ § 18), или если и по другимъ причинамъ мы хотимъ привести интегрируемыя уравненія къ наименьшему числу перемѣнныхъ, тогда должно помощію уравненій (6) выразить $p_1, \ldots p_m$ функціями $p_{m+1}, \ldots p_n, x_1, \ldots x_n$; пусть эти выраженія будутъ

$$p_1 = \omega_1,\ p_2 = \omega_2, \ldots p_m = \omega_m.$$

Замѣтимъ, что на основаніи теоремы 3-й § 17 должны имѣть мѣсто тождества

$$(p_i - \omega_i,\ p_k - \omega_k) = 0 \tag{9}$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 1, 2,... m.

Далѣе, чтобы опредѣлить уравненіе

$$f_1(p_{m+1}, \ldots p_n,\ x_1, \ldots x_n) = \text{const.} = a_1,$$

изъ котораго будетъ выведено значеніе $p_{m+1} = \omega_{m+1}$, гдѣ ω_{m+1} представляетъ функцію $p_{m+2}, \ldots p_n,\ x_1, \ldots x_n, \ldots a_1$, — составимъ систему m совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_1 - \omega_1,\ f_1) = 0,\ (p_2 - \omega_2,\ f_1) = 0, \ldots (p_m - \omega_m,\ f_1) = 0$$

съ числомъ перемѣнныхъ $2(n-m)+1$. Общій ихъ интегралъ можетъ быть найденъ при помощи тождествъ (9) по способу, изложенному въ § 21.

Опредѣливъ значеніе $p_{m+1} = \omega_{m+1}$, вставивъ его въ функціи $\omega_1, \ldots \omega_m$; означивъ послѣднія послѣ подстановки черезъ $\omega'_1, \omega'_2, \ldots \omega'_m$, составимъ систему $m+1$ совокупныхъ линейныхъ уравненій

$$(p_1 - \omega'_1,\ f_2) = 0,\ \ (p_2 - \omega'_2,\ f_2) = 0, \ldots$$
$$\ldots (p_m - \omega'_m,\ f_2) = 0,\ \ (p_{m+1} - \omega_{m+1},\ f_2) = 0$$

съ $2(n-m)-1$ перемѣнными. Общій ихъ интегралъ f_2 доставитъ уравненіе

$$f_2(p_{m+2},\dots p_n, x_1,\dots x_n, a_1)=\text{const.}=a_2,$$

изъ котораго найдется значеніе p_{m+2}, и т. д.

Такимъ образомъ, при послѣдовательномъ опредѣленіи $n-m$ требуемыхъ интеграловъ

$$f_1=a_1,\ f_2=a_2,\dots f_{n+m}=a_{n+m},$$

число совокупныхъ линейныхъ уравненій увеличивается однимъ, число же входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ уменьшается двумя. Ясно, что такимъ путемъ полученный общій интегралъ уравненій (6) будетъ заключать въ своемъ выраженіи число произвольныхъ постоянныхъ, равное числу независимыхъ перемѣнныхъ безъ числа данныхъ уравненій, уменьшеннаго единицею, т.-е. $n-m+1$.

Такое выраженіе общаго интеграла уравненій (6) можно назвать полнымъ; изъ него можно образовать самое общее, заключающее произвольную функцію отъ $n-m$ перемѣнныхъ количествъ, посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ (§§ 2—4).

Изъ предыдущаго видно, что интегрированіе m совокупныхъ уравненій (6), удовлетворяющихъ условіямъ (7), производится точно такъ, какъ бы должно было оканчивать интегрированіе одного уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$H_1=0,$$

когда помощію его уже найдены $m-1$ уравненій

$$H_2=0,\ \ H_3=0,\dots\ H_m=0,$$

удовлетворяющихъ условіямъ (7), и требовалось бы опредѣлить еще остальныя $n-m$ уравненій

$$H_{m+1}=a_1,\dots\ H_n=a_{n-m}.$$

Съ этой точки зрѣнія очевидно, что задача совокупнаго интегрированія нѣсколькихъ уравненій проще задачи интегрированія одного уравненія съ частными производными 1-го порядка, при одинаковомъ числѣ независимыхъ перемѣнныхъ; потому что 1-я требуетъ выполненія только части тѣхъ вычисленій, которыя необходимы для рѣшенія 2-й.

Теперь разсмотримъ, въ какихъ случаяхъ данныя уравненія (6) будутъ несовмѣстны интегрально, т.-е. не допускаютъ общаго интеграла; въ какихъ обстоятельствахъ можетъ оставаться сомнѣніе относительно ихъ совмѣстности и какъ тогда должно поступать, чтобы опредѣлить самое полное рѣшеніе (т.-е. заключающее наибольшее число произвольныхъ постоянныхъ), если оно возможно.

Уравненія (6) будутъ несовмѣстны, если условія (7) не могутъ быть удовлетворены ни тождественно, ни въ силу данныхъ уравненій, ни въ силу тѣхъ $n-m$ уравненій, которыя еще неизвѣстны и должны бы были дополнить данную систему (6). Такой случай, очевидно, будетъ имѣть мѣсто, когда одно или нѣкоторыя изъ выраженій

$$(H_i,\ H_k),$$

входящихъ въ условія (7), приводятся къ какому-нибудь опредѣленному постоянному неравному нулю, или представятся какъ функціи $x_1,\dots x_n$, $H_1,\dots H_m$, не уничтожающіяся въ силу данныхъ уравненій.

Но если нѣкоторыя изъ выраженій, входящихъ въ условія (7), будутъ вида

$$(H_i,\ H_k)=H_{m+1},\dots (H_i,\ H_{k'})=H_{m+l},$$

гдѣ $H_{m+1},\dots H_{m+l}$ означаютъ функціи не только $x_1,\dots x_n, H_1,\dots H_m$, но и $p_1,\dots p_n$, не уничтожающіяся въ силу данныхъ уравненій (6), тогда мы не имѣемъ еще основанія утверждать, что данныя уравненія несовмѣстны; потому что функціи $H_{m+1},\dots H_{m+l}$ могутъ быть равны нулю въ силу нѣкоторыхъ изъ $n-m$ уравненій, которыя еще неизвѣстны и должны дополнить данную систему (6). Чтобы это обстоятельство дѣйствительно имѣло мѣсто, должно только принять, что уравненія

$$H_{m+1}=0,\dots\ H_{m+l}=0$$

будутъ изъ числа $n-m$ неизвѣстныхъ уравненій. Но, прибавивъ такимъ образомъ къ данной системѣ (6) новыя l уравненій, должно подвергнуть эти послѣднія такому же испытанію, какое было необходимо для 1-хъ, т.-е. изслѣдовать, какимъ образомъ можно удовлетворить условіямъ

$$(H_i,\ H_k)=0$$

для значеній $i=1,\ 2,\dots\ m+l$ и $k=m+1,\dots\ m+l$.

Вычисленіе выраженій, входящихъ въ эти условія, составляетъ утомительную часть разсматриваемаго пріема, поэтому не безполезно замѣтить, что теорема 1-я § 17 можетъ избавить отъ значительной части этого счета. Напримѣръ, означая чрезъ j одинъ изъ указателей 1, 2,... m, на основаніи этой теоремы имѣемъ

$$(H_j,\ H_{m+1})=[H_j,(H_i,H_k)]=-[H_i,(H_k,H_j)]-[H_k,(H_j,H_i)];$$

слѣдовательно, если при повѣркѣ условій (7) мы уже нашли, что

$$(H_k,\ H_j)=0,\ (H_j,\ H_i)=0,$$

то безъ новаго счета ясно, что и

$$(H_j,\ H_{m+1})=0$$

Прилагая изложенный сейчасъ пріемъ однажды или нѣсколько разъ послѣдовательно, мы увеличимъ данную систему (6), положимъ, r уравненіями. При этомъ необходимо встрѣтится одинъ изъ трехъ слѣдующихъ случаевъ.

1. Число $m+r$ будетъ равно n и условія $(H_i, H_k)=0$ не будутъ еще удовлетворены для всѣхъ значеній 1, 2,... $m+r$ указателей i и k; тогда данныя уравненія (6) не могутъ имѣть общаго интеграла.

2. Число $m+r$ менѣе n, но одно или нѣкоторыя изъ выраженій, входящихъ въ предыдущія условія, приводятся къ постоянному или функціямъ $x_1,\dots x_n$, $H_1,\dots H_{m+r}$ не равнымъ нулю; тогда разсматриваемыя уравненія также несовмѣстны.

3. Число $m+r$ не болѣе n и всѣ предыдущія условія удовлетворены; тогда вышеобъясненнымъ способомъ можно опредѣлить общій интегралъ уравненій (6), заключающій $n-m-r+1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Въ предыдущемъ очеркѣ заключается общая теорія рѣшенія вопросовъ опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ съ частными производными 1-го порядка; остается дополнить ее однимъ замѣчаніемъ и пояснить примѣрами. Мы разсматривали уравненія съ частными производными 1-го порядка съ однимъ ограниченіемъ ихъ вида, предполагая, что въ нихъ не входитъ сама неизвѣстная функція z, но только ея частныя производныя $p_1,\dots p_n$. Если и сама функція z входитъ въ данныя уравненія, то этотъ случай можетъ быть приведенъ къ предыдущему, помощію того преобразованія, которое показано въ § 14. Именно, представляя интегралъ z подъ видомъ неявной функціи

$$Y(x_1,\dots x_n, z)=0 \tag{a}$$

и дифференцируя это уравненіе, находимъ

$$p_m=-\frac{\partial Y}{\partial x_m}:\frac{\partial Y}{\partial z}=-\frac{q_m}{q_{n+1}},\quad \text{гдѣ}\quad q_m=\frac{\partial Y}{\partial x_m},\quad q_{n+1}=\frac{\partial Y}{\partial z}\cdot \tag{b}$$

Вставивъ значенія p_m для $m=1, 2,\dots n$ въ данныя уравненія, мы приведемъ ихъ къ виду, къ которомъ онѣ будутъ заключать $n+1$ независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots x_n$, z и частныя производныя $q_1,\dots q_n$, q_{n+1} функціи Y, которая сама въ нихъ не войдетъ. Получивъ интегралъ преобразованныхъ уравненій, отбросивъ просто приданное произвольное постоянное и уравнявъ его нулю, получимъ уравненіе, изъ котораго выведемъ значеніе z, удовлетворяющее даннымъ уравненіямъ до преобразованія, доказательство чего уже было дано въ концѣ § 14.

Чтобы показать примѣненіе теоремы Ліувилля или Донкина къ опредѣленнымъ вопросамъ съ частными производными 1-го порядка, возьмемъ слѣдующую геометрическую задачу.

Представимъ линію, которой уравненіе въ полярныхъ координатахъ пусть будетъ

$$r=F(\sin\theta,\ \cos\theta), \tag{1}$$

гдѣ θ полярный уголъ и r радіусъ векторъ, и изъ каждой точки ея проведемъ перпендикуляръ къ соотвѣтствующему радіусу вектору. Требуется опредѣлить ортогональную траэкторію этихъ перпендикуляровъ, т.-е. кривую, къ которой разсматриваемые перпендикуляры будутъ нормалами.

Уравненіе одного изъ перпендикуляровъ въ прямоугольныхъ координатахъ x, y, которыхъ начало въ полюсѣ и ось x совпадаетъ съ полярною осью,—будетъ

$$x\cos\theta+y\sin\theta=F(\sin\theta,\ \cos\theta). \tag{2}$$

Уравненіе искомой траэкторіи дастъ y въ функціи x, или обратно. Тангенсы угловъ, составляемыхъ съ осью x нормаломъ къ искомой кривой и прямою (2) выразятся соотвѣтственно такимъ образомъ

$$-\frac{dx}{dy} \text{ и } -\frac{\cos\theta}{\sin\theta};$$

такъ какъ по условію они равны, то дифференціальное уравненіе задачи будетъ

$$\sin\theta\,.\,dx-\cos\theta\,.\,dy=0. \tag{3}$$

Теперь остается только выразить $\sin\theta$ и $\cos\theta$ въ x и y, помощію уравненія (2), и интегрировать уравненіе съ двумя перемѣнными (3). Но не трудно убѣдиться, что, какова бы ни была функція F, $\sin\theta$ и $-\cos\theta$ должны выразиться такимъ образомъ въ x и y, что условіе

$$\frac{\partial \sin\theta}{\partial y}+\frac{\partial \cos\theta}{\partial x}=0$$

будетъ выполнено; слѣдовательно, первая часть уравненія (3) представитъ точный дифференціалъ. Дѣйствительно, полагая для краткости $\sin\theta=p$, $-\cos\theta=q$, напишемъ уравненіе (2) такимъ образомъ

$$-qx+py-F(p,\,-q)=0$$

и къ нему можемъ присоединить еще слѣдующее

$$p^2+q^2-1=0.$$

Означивъ первыя части этихъ двухъ уравненій соотвѣтственно черезъ φ и ψ, легко повѣрить, что условіе

$$(\varphi,\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

будетъ удовлетворено тождественно. Слѣдовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Возьмемъ частный случай, когда вмѣсто функціи F будемъ имѣть постоянное a; тогда уравненіе данной кривой

$$r=a$$

представляетъ окружность; система перпендикуляровъ образуетъ касательныя къ этой окружности и ихъ ортогональная траэкторія составляетъ развертку (la développante) окружности.

Уравненія для опредѣленія p и q будутъ

$$-qx+py-a=0 \quad \text{и} \quad p^2+q^2-1=0;$$

рѣшая ихъ, находимъ

$$p=\frac{ay\pm x\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{x^2+y^2},$$

$$q=\frac{-ax\pm y\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{x^2+y^2}.$$

Слѣдовательно, уравненіе (3) приметъ видъ

$$\frac{ay\pm x\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{x^2+y^2}\,dx+\frac{-ax\pm y\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{x^2+y^2}\,dy=0$$

и первая часть его должна быть точнымъ дифференціаломъ. Дѣйствительно, оно можетъ быть написано такимъ образомъ

$$a\,\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}\pm\frac{(x\,dx+y\,dy)\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{x^2+y^2}=$$

$$=ad\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\pm\frac{1}{3}\,\frac{d(x^2+y^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}=0,$$

или, полагая

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}=v,\quad x^2+y^2-a^2=u^2,\quad adv\pm\frac{u^2\,du}{u^2+a^2}=0;$$

но
$$\int\frac{u^2\,du}{u^2+a^2}=u-a\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a};$$

слѣдовательно, интегралъ предыдущаго уравненія будетъ

$$av\pm u\mp a\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}=\text{const.},$$

или $$a\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\pm\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}\mp a\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}}{a}=\text{const.}$$

Возьмемъ теперь неопредѣленную задачу съ частными производными 1-го порядка. Пусть требуется опредѣлить общій интегралъ двухъ уравненій

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_3}=x_2x_4 \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_4}=x_1x_3.$$

Полагая

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=p_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=p_2,\ \frac{\partial z}{\partial x_3}=p_3,\ \frac{\partial z}{\partial x_4}=p_4,$$

напишемъ ихъ слѣдующимъ образомъ

$$H_1=p_1p_3-x_2x_4=0 \quad \text{и} \quad H_2=p_2p_4-x_1x_3=0.$$

Чтобы испытать ихъ совмѣстность, составимъ выраженіе

$$(H_1,\ H_2)=\begin{vmatrix} 0, & -x_3 \\ p_3, & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x_4, & 0 \\ 0, & p_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0, & -x_1 \\ p_1, & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x_2, & 0 \\ 0, & p_2 \end{vmatrix}=$$
$$=x_3p_3-x_4p_4+x_1p_1-x_2p_2;$$

оно не приводится къ нулю въ силу данныхъ уравненій, но можетъ уничтожаться вслѣдствіе уравненій еще неизвѣстныхъ. Чтобы это обстоятельство дѣйствительно имѣло мѣсто, положимъ, что одно изъ двухъ неизвѣстныхъ уравненій будетъ

$$H_3=x_1p_1-x_2p_2+x_3p_3-x_4p_4=0.$$

Теперь условіе $(H_1,\ H_2)=0$ удовлетворено и остается посмотрѣть, могутъ ли быть приведены къ нулю выраженія

$$(H_1,\ H_3)=\begin{vmatrix} 0, & p_1 \\ p_3, & x_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x_4, & -p_2 \\ 0, & -x_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0, & p_3 \\ p_1, & x_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x_2, & -p_4 \\ 0, & -x_4 \end{vmatrix}=$$
$$=-p_1p_3+x_2x_4-p_1p_3+x_2x_4=-2H_1,$$

$$(H_2,\ H_3)=\begin{vmatrix} -x_3, & p_1 \\ 0, & x_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0, & -p_2 \\ p_4, & -x_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -x_1, & p_3 \\ 0, & x_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0, & -p_4 \\ p_2, & -x_4 \end{vmatrix}=$$
$$=-x_1x_3+p_2p_4-x_1x_3+p_2p_4=2H_2.$$

Но, очевидно, они уничтожаются въ силу данныхъ уравненій; слѣдовательно, уравненія

$$H_1=0, \quad H_2=0, \quad H_3=0$$

совмѣстны и допускаютъ общій интегралъ, въ самое полное выраженіе котораго войдетъ $4-3+1=2$ произвольныхъ постоянныхъ. Займемся опредѣленіемъ его.

Чтобы привести интегрируемыя уравненія къ наименьшему числу перемѣнныхъ, разрѣшимъ предыдущія уравненія относительно p_1, p_2, p_3. Изъ уравненій $H_1=0$ и $H_2=0$ находимъ

$$p_1=\frac{x_2x_4}{p_3}, \quad p_2=\frac{x_1x_3}{p_4}.$$

Вставивъ эти значенія въ уравненіе $H_3=0$, получимъ для опредѣленія p_3 уравненіе 2-й степени нѣсколько сложное. Поэтому лучше опредѣлимъ одинъ изъ корней его, котораго намъ и достаточно, слѣдующимъ образомъ. Умноживъ одно на другое данныя уравненія:

$$p_1p_3=x_2x_4 \quad \text{и} \quad x_1x_3=p_2p_4,$$

находимъ

$$p_1x_1\cdot p_3x_3=p_2x_2\cdot p_4x_4,$$

откуда имѣемъ

$$\frac{p_1x_1}{p_2x_2}=\frac{p_4x_4}{p_3x_3}=\frac{p_1x_1-p_4x_4}{p_2x_2-p_3x_3}.$$

Но по уравненію $H_3=0$, $p_2x_2-p_3x_3=p_1x_1-p_4x_4$; слѣдовательно

$$p_3=\frac{p_4x_4}{x_3}=\omega_3.$$

Вставивъ это значеніе въ выраженіе p_1, получимъ

$$p_1=\frac{x_2x_3}{p_4}=\omega_1;$$

сверхъ того имѣемъ

$$p_2=\frac{x_1x_3}{p_4}=\omega_2.$$

Далѣе, чтобы опредѣлить уравненіе $f(p_4, x_1, x_2, x_3, x_4)=$ $=$const., изъ котораго выведется выраженіе p_4 въ независимыхъ перемѣнныхъ, должно совокупно интегрировать три линейныхъ уравненія

$$(p_1-\omega_1, f)=0, \quad (p_2-\omega_2, f)=0, \quad (p_3-\omega_3, f)=0.$$

Системы обыкновенныхъ уравненій, соотвѣтствующія 1-му и 2-му изъ предыдущихъ линейныхъ, будутъ

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_4}{\frac{x_2x_3}{p_4^2}}=\frac{dp_4}{0} \quad \text{и} \quad \frac{dx_2}{1}=\frac{dx_4}{\frac{x_1x_3}{p_4^2}}=\frac{dp_4}{0}.$$

Слѣдовательно, интегралъ $\varphi=p_4=$const. будетъ общимъ для 1-го и 2-го линейнаго уравненія; вставляя его въ 3-е вмѣсто f, находимъ

$$(p_3-\omega_3, \varphi)=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_4}=\frac{p_4}{x_3}=\frac{\varphi}{x_3}=\varphi_1.$$

Поэтому общій интегралъ трехъ линейныхъ уравненій получится посредствомъ интегрированія уравненія

$$\frac{d\varphi}{dx_3}-\frac{1}{x_3}\varphi=0 \quad \text{и будетъ} \quad l\varphi-lx_3=\text{const.},$$

или

$$\frac{p_4}{x_3}=\text{const.}=\alpha.$$

Слѣдовательно,

$$p_4=\alpha x_3, \quad p_1=\frac{x_2}{\alpha}, \quad p_2=\frac{x_1}{\alpha}, \quad p_3=\alpha x_4.$$

Поэтому

$$p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+p_3\,dx_3+p_4\,dx_4=\frac{x_1\,dx_2+x_2\,dx_1}{a}+a(x_4\,dx_3+x_3\,dx_4).$$

Откуда интегрированіемъ получаемъ искомый общій интегралъ данныхъ уравненій

$$z=\frac{x_1x_2}{a}+a\,x_3x_4+\text{const}.$$

§ 23. Разсмотримъ совокупное интегрированіе въ примѣненіи къ уравненіямъ линейнымъ въ отношеніи частныхъ производныхъ перваго порядка. Положимъ, что данныя уравненія будутъ

$$\begin{gathered}
\overset{(1)}{a}_1\,p_1+\overset{(1)}{a}_2\,p_2+\cdots+\overset{(1)}{a}_{n-1}p_{n-1}+\overset{(1)}{a}_n\,p_n=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\overset{(m)}{a}_1\,p_1+\overset{(m)}{a}_2\,p_2+\cdots+\overset{(m)}{a}_{n-1}p_{n-1}+\overset{(m)}{a}_n\,p_n=0,
\end{gathered}$$

гдѣ $\qquad p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots\ p_n=\frac{\partial z}{\partial x_n}$ и $\overset{(1)}{a}_1,\ \overset{(1)}{a}_2,\dots\ \overset{(m)}{a}_{n-1},\ \overset{(m)}{a}_n$

означаютъ данныя mn функцій независимыхъ перемѣнныхъ $x_1,\dots\ x_n$.

Мы будемъ означать первыя части предыдущихъ уравненій двоякимъ образомъ: или соотвѣтственно буквами $H_1,\dots\ H_m$, или еще $A_1(z),\dots\ A_m(z)$. При второй системѣ означеній результатъ вставки какой-нибудь функціи φ вмѣсто z, напримѣръ въ 1-е уравненіе, выразится такимъ образомъ $A_1(\varphi)$, результатъ той же вставки въ послѣднее уравненіе будетъ $A_m(\varphi)$.

Предполагая данныя уравненія алгебраически совмѣстными, должно изслѣдовать, могутъ ли быть приведены къ нулю выраженія

$$(H_i,\ H_k)$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ $1,\ 2,\dots\ m$.

Эти выраженія будутъ, очевидно, функціями линейными относительно $p_1, \dots p_n$, которыхъ общій видъ легко находится слѣдующимъ образомъ. По опредѣленію, данному въ началѣ § 16, имѣемъ

$$(H_i,\ H_k) = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1^{(i)}}{\partial x_1} p_1 + \dots + \frac{\partial a_{n-1}^{(i)}}{\partial x_1} p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(i)}}{\partial x_1} p_n, & a_1^{(i)} \\ \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_1} p_1 + \dots + \frac{\partial a_{n-1}^{(k)}}{\partial x_1} p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial x_1} p_n, & a_1^{(k)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1^{(i)}}{\partial x_n} p_1 + \dots + \frac{\partial a_{n-1}^{(i)}}{\partial x_n} p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(i)}}{\partial x_n} p_n, & a_n^{(i)} \\ \frac{\partial a_1^{(k)}}{\partial x_n} p_1 + \dots + \frac{\partial a_{n-1}^{(k)}}{\partial x_n} p_{n-1} + \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial x_n} p_n, & a_n^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Соединяя во 2-й части этого равенства члены, заключающіе общими множителями $p_1, \dots p_n$, и примѣняя принятые выше знаки, находимъ

$$(H_i,\ H_k) = \Big[A_k(a_1^{(i)}) - A_i(a_1^{(k)})\Big] p_1 + \dots$$

$$\dots + \Big[A_k(a_{n-1}^{(i)}) - A_i(a_{n-1}^{(k)})\Big] p_{n-1} + \Big[A_k(a_n^{(i)}) - A_i(a_n^{(k)})\Big] p_n.$$

Отсюда видно, что выраженія (H_i, H_k) приведутся къ нулю: 1) въ силу данныхъ уравненій, если представятся линейными однородными функціями нѣкоторыхъ изъ величинъ $H_1, \dots H_m$; 2)—тождественно, если коэфиціенты ихъ при $p_1, \dots p_n$ порознь равны нулю. Если же они не уничтожаются ни тѣмъ, ни другимъ образомъ, то, полагая ихъ равными нулю, мы прибавимъ къ даннымъ линейнымъ уравненіямъ уравненія также линейныя.

Прилагая этотъ пріемъ и ко вновь образуемымъ линейнымъ уравненіямъ, положимъ, что такимъ образомъ будетъ прибавлено къ даннымъ всего r уравненій

$$H_{m+1} = 0, \quad H_{m+2} = 0, \dots \quad H_{m+r} = 0,$$

гдѣ $m+r$ не бóлѣе n и условія $(H_i, H_k)=0$ удовлетворены для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 1, 2,... $m+r$. Въ такомъ случаѣ можетъ быть найденъ интегралъ, удовлетворяющій совокупно даннымъ уравненіямъ, въ полномъ выраженіи котораго должны заключаться $n-m-r+1$ произвольныхъ постоянныхъ (включая сюда просто приданное), а изъ него выведется весьма просто выраженіе самаго общаго интеграла, заключающее произвольную функцію отъ $n-m-r$ данныхъ функцій.

Ходъ вычисленій для вывода полнаго интеграла показанъ выше въ болѣе общемъ случаѣ — совокупныхъ нелинейныхъ уравненій и остается здѣсь безъ измѣненія; поэтому, чтобы только показать приложеніе новой формы условій интегрируемости, возьмемъ частный примѣръ: найдемъ, если возможно, интегралъ, удовлетворяющій совокупно двумъ линейнымъ уравненіямъ:

$$H_1=\frac{\partial z}{\partial x}+(t+xy+xu)\frac{\partial z}{\partial u}+(y+u-3x)\frac{\partial z}{\partial t}=0,$$

$$H_2=\frac{\partial z}{\partial y}+(xut+y-yx)\frac{\partial z}{\partial u}+(ut-y)\frac{\partial z}{\partial t}=0.$$

Представивъ первыя части этихъ уравненій соотвѣтственно знаками $A(z)$ и $B(z)$, чтобы увѣриться въ ихъ совмѣстности, составимъ выраженіе

$$(H_2,\ H_1)=[A(0)-B(1)]\frac{\partial z}{\partial x}+[A(1)-B(0)]\frac{\partial z}{\partial y}+$$

$$+[A(xut+y-xy)-B(t+xy+xu)]\frac{\partial z}{\partial u}+$$

$$+[A(ut-y)-B(y+u-3x)]\frac{\partial z}{\partial t};$$

первые два члена его равны нулю; для вычисленія остальныхъ находимъ

$$A(xut+y-xy)=ut-y+(t+xy+xu)xt+(y+u-3x)xu,$$
$$B(t+xy+xu)=x+(xut+y-xy)x+ut-y,$$
$$A(ut-y)=(t+xy+xu)t+(y+u-3x)u,$$
$$B(y+u-3x)=1+(xut+y-xy).$$

Вставивъ эти значенія въ коэфиціенты предыдущаго выраженія, приведемъ его къ слѣдующему виду

$$(xyt+t^2+u^2+yu-3xy+xy-y-1)\left(x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}\right).$$

Отсюда ясно, что условіе $(H_2, H_1)=0$ будетъ удовлетворено, если положимъ

$$H_3=x\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial t}=0.$$

Представляя первую часть послѣдняго уравненія знакомъ $C(z)$, находимъ

$$(H_3,\ H_1)=[A(0)-C(1)]\frac{\partial z}{\partial x}+[A(0)-C(0)]\frac{\partial z}{\partial y}+$$

$$+[A(x)-C(t+xy+xu)]\frac{\partial z}{\partial u}+[A(1)-C(y+u-3x)]\frac{\partial z}{\partial t};$$

$$(H_3,\ H_2)=[B(0)-C(0)]\frac{\partial z}{\partial x}+[B(0)-C(1)]\frac{\partial z}{\partial y}+$$

$$+[B(x)-C(xut+y-xy)]\frac{\partial z}{\partial u}+[B(1)-C(ut-y)]\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Но $\quad A(x)=1,\ C(t+xy+xu)=x^2+1,\ C(y+u-3x)=x,$
$B(x)=0,\ C(xut+y-xy)=x^2t-xu,\ C(ut-y)=xt+u;$

слѣдовательно,

$$(H_3,\ H_1)=-x^2\frac{\partial z}{\partial u}-x\frac{\partial z}{\partial t}=-xH_3,$$

$$(H_3,\ H_2)=-(x^2t+xu)\frac{\partial z}{\partial u}-(xt+u)\frac{\partial z}{\partial t}=-(xt+u)H_3.$$

Поэтому условія $(H_3, H_1)=0$, $(H_3, H_2)=0$ удовлетворяются въ силу уравненія $H_3=0$.

Итакъ, три линейныя уравненія

$$H_1=0,\quad H_2=0\quad \text{и}\quad H_3=0$$

выполняютъ всѣ условія интегрируемости; слѣдовательно, сообразно заключеніямъ теоріи способа, интегралъ, принадлежащій этимъ тремъ уравненіямъ совокупно, долженъ имѣть въ самомъ полномъ своемъ выраженіи два произвольныхъ, постоянныхъ (изъ которыхъ одно просто приданное); изъ него же получится самый общій интегралъ, выражающійся произвольной функціей отъ нѣкоторой данной функціи.

Выведемъ сначала полный интегралъ. Полагая для краткости

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p_1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=p_2,\ \frac{\partial z}{\partial t}=p_3,\ \frac{\partial z}{\partial u}=p_4,$$

опредѣлимъ, помощію предыдущихъ уравненій, выраженія трехъ первыхъ изъ этихъ величинъ посредствомъ четвертой и независимыхъ перемѣнныхъ. Означая для краткости эти выраженія соотвѣтственно чрезъ ω_1, ω_2, ω_3, будемъ имѣть

$$p_1=-(3x^2+t)p_4=\omega_1,\quad p_2=-yp_4=\omega_2,\quad p_3=-xp_4=\omega_3.$$

Затѣмъ для опредѣленія уравненія $f(p_4,\ x,\ y,\ t,\ u)=\text{const.}$, изъ котораго найдется выраженіе p_4, опредѣлимъ общій интегралъ трехъ линейныхъ уравненій:

$$(p_1-\omega_1,\ f)=0,\quad (p_2-\omega_2,\ f)=0,\quad (p_3-\omega_3,\ f)=0.$$

Принадлежащія имъ системы обыкновенныхъ уравненій будутъ соотвѣтственно

$$\frac{dx}{1}=\frac{du}{-\frac{\partial\omega_1}{\partial p_4}}=\frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_1}{\partial u}},\quad \frac{\partial y}{1}=\frac{du}{-\frac{\partial\omega_2}{\partial p_4}}=\frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_2}{\partial u}},\quad \frac{dt}{1}=\frac{\partial u}{-\frac{\partial\omega_3}{\partial p_4}}=\frac{dp_4}{\frac{\partial\omega_3}{\partial u}};$$

но такъ какъ

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial u}=\frac{\partial\omega_2}{\partial u}=\frac{\partial\omega_3}{\partial u}=0,$$

то интегралъ

$$f=p_4=\text{const.}=\alpha$$

принадлежитъ каждой изъ трехъ системъ обыкновенныхъ и каждому изъ трехъ предыдущихъ линейныхъ уравненій. Слѣдовательно, выраженія частныхъ производныхъ искомой функціи z будутъ

$$p_1 = -(3x^2+t)\alpha, \quad p_2 = -y\alpha, \quad p_3 = -x\alpha, \quad p_4 = \alpha.$$

Поэтому

$$dz = -\alpha[(3x^2+t)\,dx + y\,dy + x dt - d\,u].$$

Отсюда посредствомъ интегрированія находимъ выраженіе полнаго интеграла

$$z = \alpha(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}) + \text{const}.$$

Наконецъ выраженіе самаго общаго интеграла можетъ быть дано въ двухъ видахъ: или посредствомъ двухъ уравненій

$$\left\{\begin{aligned} z &= \alpha\left(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}\right) + \pi(\alpha), \\ 0 &= u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2} + \frac{\partial\pi(\alpha)}{\partial\alpha}, \end{aligned}\right.$$

или посредствомъ одного

$$z = \pi\left(u - x^3 - xt - \frac{y^2}{2}\right),$$

означая черезъ π въ обоихъ случаяхъ совершенно произвольную функцію. Очевидно, оба выраженія общаго интеграла равнозначущи.

§ 24. Въ предыдущей задачѣ мы пользовались особенной формой, которую принимаютъ условія интегрируемости линейныхъ совокупныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Здѣсь будетъ кстати показать еще другую форму этихъ условій, помощію которой Якоби вывелъ основную теорему 1 § 17.

Возьмемъ два линейныя выраженія относительно частныхъ производныхъ функціи z:

$$a_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial z}{\partial x_n} \quad \text{и} \quad b_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+b_n\frac{\partial z}{\partial x_n},$$

въ которыхъ $a_1, a_2, \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_n$ представляютъ функціи $x_1, \ldots x_n$, и означимъ первое черезъ $A(z)$, второе черезъ $B(z)$.

A и B можно разсматривать какъ знаки совершенно опредѣленныхъ дѣйствій и называть 1-е дѣйствіемъ A, 2-е дѣйствіемъ B. Подвергнувъ какую-нибудь функцію z перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n$ дѣйствію A, мы получимъ въ результатѣ снова функцію тѣхъ же перемѣнныхъ, надъ которою можемъ произвести дѣйствіе B. Результатъ этихъ двухъ дѣйствій символически выразится такимъ образомъ

$$B[A(z)];$$

производя же ихъ въ обратномъ порядкѣ можемъ представить результатъ слѣдующимъ образомъ

$$A[B(z)].$$

Посмотримъ какова вообще будетъ разность этихъ двухъ результатовъ. Для этого находимъ

$$\begin{aligned}
B[A(z)]&=b_1\frac{\partial A(z)}{\partial x_1}+b_2\frac{\partial A(z)}{\partial x_2}+\cdots+b_n\frac{\partial A(z)}{\partial x_n}=\\
&=b_1\left\{\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial a_n}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_n}+\right.\\
&\left.+a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n}\right\}+\\
&+b_2\left\{\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial a_n}{\partial x_2}\frac{\partial z}{\partial x_n}+\right.\\
&\left.+a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\cdots+a_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_n}\right\}+\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+b_n\left\{\frac{\partial a_1}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial x_n}+\right.\\
&\left.+a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n}+a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2\partial x_n}+\cdots+a_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}\right\},
\end{aligned}$$

или

$$B[A(z)]=B(a_1)\frac{\partial z}{\partial x_1}+B(a_2)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+B(a_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}+$$
$$+b_1a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+b_2a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\cdots+b_na_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}+$$
$$+(b_1a_2+b_2a_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\cdots+(b_1a_n+b_na_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n}+\cdots$$
$$\cdots+(b_{n-1}a_n+b_na_{n-1})\frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\partial x_n}.$$

Точно такъ же находимъ

$$A[B(z)]=A(b_1)\frac{\partial z}{\partial x_1}+A(b_2)\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+A(b_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}+$$
$$+a_1b_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+a_2b_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\cdots+a_nb_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}+$$
$$+(a_1b_2+a_2b_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}+\cdots+(a_1b_n+a_nb_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_n}+\cdots$$
$$\cdots+(a_{n-1}b_n+a_nb_{n-1})\frac{\partial^2 z}{\partial x_{n-1}\partial x_n}.$$

Сравнивая два предыдущія выраженія, замѣчаемъ, что въ нихъ члены, содержащіе одинаковые частныя производныя 2-го порядка функціи z, одинаковы; поэтому при вычитаніи одного выраженія изъ другого эти члены уничтожаются и разность выразится слѣдующею линейною функціей частныхъ производныхъ 1-го порядка функціи z

$$B[A(z)]-A[B(z)]=[B(a_1)-A(b_1)]\frac{\partial z}{\partial x}+$$
$$+[B(a_2)-A(b_2)]\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+[B(a_n)-A(b_n)]\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Означивъ теперь $\frac{\partial z}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial z}{\partial x_n}$ соотвѣтственно черезъ $p_1,\ldots p_n$, положимъ

$$a_1p_1+\cdots+a_np_n=A(z)=H,$$
$$b_1p_1+\cdots+b_np_n=B(z)=G.$$

По доказанному въ § 23 будемъ имѣть

$$(H,\ G)=[B(a_1)-A(b_1)]p_1+\cdots+[B(a_n)-A(b_n)]p_n.$$

Сравнивая этотъ выводъ съ предыдущимъ, находимъ, что

$$(H,\ G)=B[A(z)]-A[B(z)].$$

Отсюда же слѣдуетъ, что линейныя уравненія $A(z)=0$ и $B(z)=0$ будутъ совмѣстны интегрально, если удовлетворено условіе

$$B[A(z)]=A[B(z)],$$

и, очевидно, эта новая форма условій интегрируемости совокупныхъ линейныхъ уравненій однозначительна съ прежнею.

Слѣдствіе. Положимъ теперь, что φ, ψ и z представляютъ какія-нибудь функціи $2n$ перемѣнныхъ x_1, x_2,... x_n, p_1, p_2,... p_n, и возьмемъ два выраженія линейныя относительно частныхъ производныхъ перваго порядка функціи z слѣдующаго вида

$$A(z)=(\varphi,z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial p_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial p_n}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial z}{\partial x_n},$$

$$B(z)=(\psi,z)=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial p_1}-\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\frac{\partial z}{\partial p_n}-\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

На основаніи выведенной выше формулы имѣемъ

$$B[A(z)]-A[B(z)]=$$

$$=\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\left[B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial p_i}-\left[B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)-A\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)\right]\frac{\partial z}{\partial x_i}\right\}\cdot\ (\alpha)$$

Но $A(z)=(\varphi,\ z)$, $B(z)=(\psi,\ z)$;

слѣдовательно,

$$B[A(z)]=[\psi,\ (\varphi,\ z)],\quad A[B(z)]=[\varphi,\ (\psi,\ z)]$$

и

$$B[A(z)]-A[B(z)]=[\psi,\ (\varphi,\ z)]-[\varphi,\ (\psi,\ z)]=$$

$$=[\psi,\ (\varphi,\ z)]+[\varphi,(z,\ \psi)];$$

далѣе

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=\left(\psi,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right),\quad -A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i},\ \varphi\right),$$
$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)=\left(\psi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right),\quad -A\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i},\ \varphi\right).$$

Поэтому

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)-A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)=\left(\psi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i},\varphi\right)=\frac{\partial(\psi,\varphi)}{\partial x_i},$$

на основанiи формулы 9 § 16, также

$$B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)-A\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)=\frac{\partial(\psi,\ \varphi)}{\partial p_i}.$$

Слѣдовательно, равенство (α) приметъ видъ

$$[\psi,\ (\varphi,\ z)]+[\varphi,\ (z,\ \psi)]=$$
$$=\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial(\psi,\varphi)}{\partial x_i}\,\frac{\partial z}{\partial p_i}-\frac{\partial(\psi,\varphi)}{\partial p_i}\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\right\}=-[z,\ (\psi,\ \varphi)]$$

или, перенося всѣ члены его въ 1-ю часть,

$$[\psi,\ (\varphi,\ z)]+[\varphi,\ (z,\ \psi)]+[z,\ (\psi,\ \varphi)]=0.$$

Таково въ сущности доказательство, данное этому предложенiю Якоби («Nova Methodus» §§ 23—26); но такъ какъ оно тѣсно связано съ теорiею интегрированiя совокупныхъ линейныхъ уравненiй съ частными производными 1-го порядка, то я счелъ за лучшее представить его вмѣстѣ съ изложенiемъ этой части предмета и выше (въ § 17) далъ другое доказательство, какъ мнѣ кажется, также не сложное и выведенное непосредственно изъ основныхъ свойствъ выраженiй вида (φ, ψ). Должно замѣтить, что эта теорема была извѣстна еще прежде изданiя «Nova Methodus» Якоби; такъ, въ упомянутомъ выше (§ 22) сочиненіи Donkin'a «On a Class of diff. Equations etc.» находимъ ее на страницѣ 92 (Section 11, § 21) и на страницѣ 71, въ сноскѣ, она упоминается въ числѣ результатовъ вновь найденныхъ или новымъ образомъ доказанныхъ авторомъ.

Доказательство Донкина скорѣе можно назвать повѣркою разсматриваемой теоремы; впрочемъ по кратости оно можетъ быть удобно при сжатомъ изложеніи теоріи Якоби, поэтому считаю не лишнимъ привести его.

Теорема. Если p, q, r будутъ какія-нибудь функціи $2n$ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n$, то

$$[(p,\ q),\ r]+[(q,\ r),\ p]+[(r,\ p),\ q]=0. \qquad (\alpha)$$

Если развернуть предыдущее выраженіе, то, очевидно, каждый членъ его будетъ состоять изъ производной 2-го порядка одной изъ функцій p, q, r, умноженной на производныя 1-го порядка каждой изъ остальныхъ двухъ функцій.

Разсмотримъ члены съ производными 2-го порядка p; они будутъ вида

$$\frac{d^2p}{dx_i dy_j}\cdot\frac{dq}{dx_j}\cdot\frac{dr}{dy_i},\quad \frac{d^2p}{dx_i dx_j}\cdot\frac{dq}{dy_i}\cdot\frac{dr}{dy_j}$$

и

$$\frac{d^2p}{dy_i dy_j}\cdot\frac{dq}{dx_i}\cdot\frac{dr}{dx_j}$$

и каждый изъ нихъ получится изъ перваго или третьяго члена уравненія (α). (Должно замѣтить, что i можетъ быть $=j$.)

Теперь, изслѣдуя каждую изъ этихъ формъ, легко видѣть, что для каждаго члена, происходящаго изъ перваго члена уравненія (α), находится подобный членъ *съ противнымъ знакомъ*, происходящій изъ третьяго члена этого уравненія; и такъ какъ то же самое будетъ справедливо въ отношеніи членовъ, въ которые входятъ вторыя производныя q, r, то все выраженіе первой части уравненія (α) тождественно уничтожится. Слѣдовательно, теорема доказана.

§ 25. Разсмотримъ еще примѣненіе способа интегрированія совокупныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка къ выводу условій непосредственной интегрируемости дифференціальнаго выраженія, содержащаго независимое перемѣнное, его функціи и ихъ производныя до какого угодно порядка.

Этотъ вопросъ, рѣшенный первоначально, какъ извѣстно, Эйлеромъ и Кондорсе и бывшій предметомъ изслѣдованій Лекселля, Лагранжа, Пуассона, Сарюса, Бертрана, Бине и многихъ другихъ, представляетъ не сложную и интересную задачу для приложенія разсматриваемой нами теоріи. Новый пріемъ рѣшенія по элементарности можно сравнить съ тѣмъ, который далъ Кондорсе[1]) и дополнилъ Сарюсъ[2]) и точно такъ же, доставляя выраженія частныхъ производныхъ 1-го порядка искомой функціи по всѣмъ входящимъ въ нее перемѣннымъ, приводитъ ея опредѣленіе къ интегрированію полнаго дифференціала. Но вмѣстѣ съ этимъ получаются одно за другимъ всѣ необходимыя условія, которыя должна выполнить данная функція, для того чтобы быть точною производною другой функціи. Если въ данномъ случаѣ существованіе послѣдней функціи оказывается невозможнымъ, то это вообще обнаруживается прежде, чѣмъ мы придемъ къ извѣстному Эйлерову условію, которое въ разсматриваемомъ способѣ рѣшенія является самымъ послѣднимъ. Кстати замѣтимъ, что это условіе дается здѣсь въ новой символической формѣ, довольно замѣчательной. Для полноты рѣшенія по этому способу должно бы было только найти простой путь къ доказательству, что всѣ необходимыя условія будутъ выполнены, какъ скоро удовлетворено одно Эйлерово; за недостаткомъ же такого доказательства должно пока дать преимущество при рѣшеніи разсматриваемой задачи менѣе прямымъ и простымъ пріемамъ варіаціоннаго вычисленія. Упоминаемый

---

[1]) Въ его интегральномъ вычисленіи. См. также Lacroix «Traité du calc. diff. et du calc. integral», T. 2, p. 238—249.

[2]) Gergonne «Annales de Mathématiques». T. XIV, также Todhunter's «History of the Progress of the Calculus of Variations», p. 523—529.

выше пріемъ рѣшенія указалъ г. Буль (Bool)[1]), приведя эту задачу какъ примѣръ для приложенія предлагаемаго имъ способа интегрированія обыкновенныхъ совокупныхъ уравненій перваго порядка, въ которыхъ число перемѣнныхъ превышаетъ болѣе чѣмъ единицею число уравненій. Но изъ его изслѣдованія видно, что этотъ общій вопросъ тѣсно связанъ съ задачею интегрированія совокупныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Авторъ, разсматривая послѣднюю задачу не съ такой общей точки зрѣнія, которую указалъ г. Буръ (въ упомянутой выше на стран. 132 статьѣ, которая, какъ изданная одновременно, вѣроятно, была еще неизвѣстна г. Булю), примѣняетъ условія совмѣстности двухъ линейныхъ уравненій

$$H=A(z)=0 \quad \text{и} \quad G=B(z)=0$$

исключительно подъ видомъ

$$B[A(z)]=A[B(z)],$$

или, какъ онъ пишетъ,

$$(AB-BA)z=0;$$

вслѣдствіе этого въ примѣненіи къ разсматриваемой задачѣ онъ вводитъ цѣлый рядъ символовъ, которые, хотя и позволяютъ выразить рѣшеніе въ очень сжатой формѣ, однако лишаютъ его необходимой ясности и простоты. Поэтому я воспользуюсь указаніемъ г. Бертрана, который (на одной изъ лекцій, читанныхъ въ 1863 г. въ Collége de France) замѣтилъ, что въ примѣненіи къ настоящей задачѣ лучше пользоваться условіемъ совмѣстности линейныхъ уравненій подъ видомъ

$$(H,\ G)=0,$$

1) Въ статьѣ «On simultaneous differential equat. of the 1-st order etc.» Philosoph. Transactions, 1862, Part I, p. 453.

и показалъ, какимъ образомъ выведется Эйлерово условіе въ частномъ случаѣ, когда данное дифференціальное выраженіе содержитъ независимое перемѣнное, его функцію и ея производныя до 2-го порядка. Я изложу, впрочемъ, рѣшеніе вопроса въ общемъ видѣ, потому что въ частномъ случаѣ не обнаруживаются нѣкоторыя стороны рѣшенія, нелишенныя интереса.

Представимъ данное выраженіе, содержащее независимое перемѣнное x, его неизвѣстную функцію y и ея производныя до n-го порядка

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{d^2y}{dx^2}=y'',\ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)},$$

слѣдующимъ образомъ

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots\ y^{(n)})$$

и предложимъ себѣ задачу: опредѣлить, если возможно, такую функцію V перемѣнныхъ $x,\ y,\ y',\ldots\ y^{(n)}$, которая, будучи дифференцирована въ отношеніи x, не только входящаго явнымъ образомъ, но и посредствомъ функцій $y, y',\ldots y^n$, доставила бы выраженіе F. Употребляя означеніе $\frac{d}{dx}\cdot V$ для такого полнаго дифференцированія, будемъ имѣть

$$\frac{d}{dx}V=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}y'+\frac{\partial V}{\partial y'}y''+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}+\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}y^{(n+1)}$$

и основное уравненіе задачи будетъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}+\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}y^{(n+1)}=F(x,\ y,\ y',\ldots y^{(n)}). \quad (1)$$

Далѣе замѣчаемъ: 1) что еслибъ функція V была уже извѣстна, то уравненіе (1) было бы тождественнымъ, когда функція y остается совершенно неопредѣленною; но F не содержитъ $y^{(n+1)}$, поэтому членъ $\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)}$, не имѣя себѣ подобнаго ни во 2-й, ни въ 1-й части уравненія (1), долженъ уничтожаться самъ собою, слѣдовательно, необходимо должно быть

$$\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} = 0. \tag{2}$$

2) Очевидно, если данная функція F произошла дѣйствительно черезъ полное дифференцированіе въ отношеніи x другой функціи V, то первая должна быть линейнаго вида относительно $y^{(n)}$, потому что такой видъ имѣетъ первая часть уравненія (1). Слѣдовательно, необходимо должна быть

$$F = A + By^{(n)}, \tag{a}$$

гдѣ A и B нѣкоторыя функціи x, y, y',... $y^{(n-1)}$ и, чтобы уравненіе (1) повѣрялось тождественно при всякомъ значеніи y, должно еще прибавить условіе

$$\frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} = B,$$

гдѣ B легко выразить помощію F. Дѣйствительно, взявъ частныя производныя въ отношеніи $y^{(n)}$ обѣихъ частей равенства (a), находимъ

$$B = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}.$$

Слѣдовательно, три уравненія задачи, выраженныя въ частныхъ производныхъ искомой функціи V, будутъ:

$$\left\{\begin{array}{lr} H = V_x + V_y \,.\, y' + V_{y'} \,.\, y'' + \cdots & \\ \cdots + V_{y^{(n-1)}} \,.\, y^{(n)} + V_{y^{(n)}} \,.\, y^{(n-1)} - F = 0, & (1) \\ \qquad G = V_{y^{(n)}} = 0, & (2) \\ \quad H_1 = V_{y^{(n-1)}} - F_{y^{(n)}} = 0, & (3) \end{array}\right.$$

гдѣ для краткости частныя производныя данной функціи F и искомой V означены тѣми же буквами приписывая къ нимъ внизу указателемъ перемѣнное, въ отношеніи котораго произведено частное дифференцированіе, поэтому напр. $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ и $F_{y^{(n)}} = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$; первыя же части предыдущихъ уравненій представляются соотвѣтственно черезъ H, G, H_1.

Имѣя, такимъ образомъ, три совокупныя уравненія съ частными производными перваго порядка, для интегрированія ихъ нужно только примѣнить способъ изложенный въ предыдущихъ §§. Для этого, разсматривая H, G, H_1 какъ функціи $2(n+2)$ перемѣнныхъ x, V_x, y, V_y, y', $V_{y'}, \ldots y^{(n)}$, $V_{y^{(n)}}$, составимъ выраженія:

$$(H,\ G) = V_{y^{(n-1)}} - F_{y^{(n)}},\quad (G, H_1) = \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n)}}$$

и

$$(H,\ H_1) = V_{y^{(n-2)}} + \left[\frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y} y' + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)}\right] - F_{y^{(n-1)}}.$$

Первое изъ этихъ выраженій приводится къ нулю въ силу уравненія $H_1 = 0$; второе равно нулю тождественно, потому что $F_{y^{(n)}} = B$ и B не содержитъ $y^{(n)}$, слѣдовательно, $\frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial B}{\partial y^{(n)}} = 0$; третье выраженіе не уничтожается ни тождественно, ни въ силу данныхъ уравненій, но оно содержитъ частную производную $V_{y^{(n-2)}}$ искомой функціи, поэтому, полагая его равнымъ нулю, мы прибавимъ къ даннымъ еще 4-е уравненіе

$$(H,\ H_1) = H_2 = 0.$$

Замѣчая, что въ этомъ уравненіи

$$\frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}},$$

мы можемъ написать его слѣдующимъ образомъ

$$H_2 = V_{y^{(n-2)}} + \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} - F_{y^{(n-1)}} = 0,$$

или

$$H_2 = V_{y^{(n-2)}} - \omega_{n-2} = 0,$$

гдѣ для краткости положено

$$\omega_{n-2} = F_{y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}}.$$

Далѣе находимъ

$$(G,\ H_2) = \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial \left(F_{y^{(n-1)}} - \frac{d}{dx} F_{y^{(n)}} \right)}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H_1,\ H_2) = \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n-2)}}$$

и $(H,\ H_2) = V_{y^{(n-3)}} + \left[\frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y^{(n)}} y^{(n+1)} \right] - F_{y^{(n-2)}}.$

Первое изъ этихъ выраженій тождественно равно нулю, что можно доказать, принявъ въ основаніе равенство (а), или другимъ пріемомъ, который лучше, потому что съ равною легкостію прилагается и впослѣдствіи въ подобныхъ случаяхъ, когда примѣненіе перваго становится затруднительно. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы 1 § 17 имѣемъ

$$(G,\ H_2) = [G,\ (H,\ H_1)] = -[H,\ (H_1,\ G)] - [H_1,\ (G,\ H)];$$

но $(G,\ H_1) = 0$, $(H,\ G) = H_1$; слѣд. $(G,\ H_2) = (H_1,\ H_1) = 0$.

Далѣе, полученное выше значеніе $(H_1,\ H_2)$ выражается функціею однихъ перемѣнныхъ $x,\ y, \ldots\ y^{(n)}$; слѣдовательно, она должна приводиться къ нулю тождественно, иначе рѣшеніе задачи невозможно. Итакъ, положимъ, что данная функція F выполняетъ условіе

$$(H_1,\ H_2) = 0,$$

необходимость котораго еще яснѣе обнаружится, если замѣтимъ, что оно приводитъ къ равенству

$$\frac{\partial V_{y^{(n-2)}}}{\partial y^{(n-1)}}=\frac{\partial V_{y^{(n-1)}}}{\partial y^{(n-2)}}.$$

Наконецъ значеніе (H, H_2) можно положить равнымъ нулю, потому что въ него входитъ частная производная $V_{y^{(n-3)}}$. Такимъ образомъ къ четыремъ предыдущимъ уравненіямъ прибавляемъ 5-е

$$H_3=(H, H_2)=V_{y^{(n-3)}}+\frac{d}{dx}\omega_{n-2}-F_{y^{(n-2)}}=$$

$$=V_{y^{(n-3)}}-\frac{d^2}{dx^2}F_{y^{(n)}}+\frac{d}{dx}F_{y^{(n-1)}}-F_{y^{(n-2)}}=0,$$

или

$$H_3=V_{y^{(n-3)}}-\omega_{n-3}=0,$$

гдѣ полагаемъ

$$\omega_{n-3}=F_{y^{(n-2)}}-\frac{d}{dx}F_{y^{(n-1)}}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y^{(n)}}.$$

Затѣмъ нетрудно получить выраженія:

$$(G, H_3)=\frac{\partial\omega_{n-3}}{\partial y^{(n)}}=\frac{\partial\left(F_{y^{(n-2)}}-\frac{d}{dx}F_{y^{(n-1)}}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y^{(n)}}\right)}{\partial y^{(n)}},$$

$$(H_1, H_3)=\frac{\partial\omega_{n-3}}{\partial y^{(n-1)}}-\frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y^{(n-3)}},\quad (H_2, H_3)=\frac{\partial\omega_{n-3}}{\partial y^{(n-2)}}-\frac{\partial\omega_{n-2}}{\partial y^{(n-3)}}.$$

и

$$(H, H_3)=V_{y^{(n-4)}}+\frac{d}{dx}\omega_{n-3}-F_{y^{(n-3)}}.$$

Первое изъ этихъ выраженій равно нулю въ силу сдѣланныхъ выше условій. Дѣйствительно, помощію теоремы 1 § 17 находимъ

$$(G, H_3)=[G, (H, H_2)]=-[H, (H_2, G)]-[H_2, (G, H)],$$

но $(G, H_2)=0$ и $(G, H)=-H_1$; слѣд. $(G, H_3)=(H_2, H_1)=0$.

Далѣе значенія (H_1, H_3) и (H_2, H_3), выражающіяся въ однихъ перемѣнныхъ $x, y, \ldots y^{(n)}$, должны приводиться тождественно къ нулю, если существуетъ искомая функція V; и дѣйствительно, условія $(H_1, H_3)=0$ и $(H_2, H_3)=0$ выражаютъ не что иное, какъ требованіе, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\frac{\partial V_{y^{(n-3)}}}{\partial y^{(n-1)}}=\frac{\partial V_{y^{(n-1)}}}{\partial y^{(n-3)}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V_{y^{(n-3)}}}{\partial y^{(n-2)}}=\frac{\partial V_{y^{(n-2)}}}{\partial y^{(n-3)}}.$$

Наконецъ, полагая равнымъ нулю выраженіе (H, H_3), получаемъ новое уравненіе, которое, по замѣнѣ ω_{n-3} его значеніемъ, приметъ слѣдующій видъ

$$H_4=(H, H_3)=V_{y^{(n-4)}}-F_{y^{(n-3)}}+ \\ +\frac{d}{dx}F_{y^{(n-2)}}-\frac{d^2}{dx^2}F_{y^{(n-1)}}+\frac{d^3}{dx^3}F_{y^{(n)}}=0.$$

Теперь уже видѣнъ весь дальнѣйшій ходъ рѣшенія разсматриваемой задачи. Если функція F выполнитъ всѣ необходимыя условія, которыя окончательно приводятся къ тому, чтобы постепенно опредѣляемыя значенія частныхъ производныхъ удовлетворяли условіямъ

$$\frac{\partial V_{y^{(n-i)}}}{\partial y^{(n-k)}}=\frac{\partial V_{y^{(n-k)}}}{\partial y^{(n-i)}},$$

то мы получимъ сверхъ предыдущихъ еще слѣдующія уравненія:

$$H_5=0, \ldots H_i=0, \ldots H_n=0,$$

которыхъ общій видъ будетъ

$$H_i=V_{y^{(n-i)}}-F_{y^{(n-i+1)}}+\frac{d}{dx}F_{y^{(n-i+2)}}-\cdots-\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}}F_{y^{(n)}}=0,$$

и слѣдовательно, для $i=n$,

$$H_n=V_y-F_{y'}+\frac{d}{dx}F_{y''}-\cdots\pm\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n)}}=0.$$

Чтобы испытать возможность разсматривать послѣднее уравненіе совокупно съ предыдущими, положимъ

$$\omega_0 = F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''} + \cdots \pm \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} F_{y^{(n)}},$$

и составимъ выраженія:

$$(G,\ H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n)}}, \quad (H_1,\ H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial F_{y^{(n)}}}{\partial y},$$

$$(H_2,\ H_n) = \frac{\partial \omega_0}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial \omega_{n-2}}{\partial y}, \ldots$$

$$(H,\ H_n) = -F_y + \frac{d}{dx}\omega_0 = -F_y + \frac{d}{dx} F_{y'} - \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \cdots \mp \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}.$$

Всѣ эти выраженія представляются какъ функціи однѣхъ перемѣнныхъ $x,\ y,\ y', \ldots\ y^{(n)}$ и, слѣдовательно, должны тождественно приводиться къ нулю. Но выраженіе $(G,\ H_n)$ приводится къ нулю уже вслѣдствіе условій, необходимость которыхъ обнаружена ранѣе. Дѣйствительно, по теоремѣ 1 § 17 имѣемъ

$$(G,\ H_n) = [G,\ (H,\ H_{n-1})] = -[H,\ (H_{n-1},\ G)] - [H_{n-1},\ (G,\ H)] =$$
$$= [H_1,\ (G,\ H_{n-1})] + (H_1,\ H_{n-1});$$

слѣдовательно, $(G,\ H_n)$ будетъ равно нулю вслѣдствіе того, что

$$(G,\ H_{n-1}) = 0 \quad \text{и} \quad (H_1,\ H_{n-1}) = 0.$$

Далѣе, условія

$$(H_1,\ H_n) = 0, \quad (H_2,\ H_n) = 0, \ldots \quad (H_{n-1},\ H_n) = 0$$

необходимы для того, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\frac{\partial V_y}{\partial y^{(n-1)}} = \frac{\partial V_{y^{(n-1)}}}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial V_{y^{(n-2)}}}{\partial y}, \ldots \quad \frac{\partial V_y}{\partial y'} = \frac{\partial V_{y'}}{\partial y}.$$

Предыдущій рядъ всѣхъ необходимыхъ условій, которыя должна выполнять данная дифференціальная функція F, заключается слѣдующимъ

$$E=(H,\ H_n)=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots\pm\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0,$$

найденнымъ, какъ извѣстно, помощію варіаціоннаго вычисленія, Эйлеромъ, показавшимъ не только необходимость, но и достаточность этого условія [1]).

На основаніи предыдущаго имѣемъ

$$H_n=(H,\ H_{n-1}),\quad H_{n-1}=(H,\ H_{n-2}),\ldots\quad H_1=(H,\ G).$$

Поэтому, дѣлая весьма простыя послѣдовательныя подстановки, можемъ написать Эйлерово условіе слѣдующимъ образомъ

$$[H,\ (H,\ (\ldots\ (H,\ G)))]=0,$$

гдѣ H и G имѣютъ данныя выше значенія.

Предполагая, что функція F выполняетъ всѣ необходимыя условія, можно весьма просто опредѣлить интегралъ ея V.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія

$$G=0,\quad H_1=0,\ldots\quad H_n=0$$

доставляютъ значенія всѣхъ частныхъ производныхъ искомой функціи, кромѣ одной, именно:

$$V_{y^{(n)}}=0,\quad V_{y^{(n-1)}}=F_{y^{(n)}},\quad V_{y^{(n-2)}}=\omega_{n-2},\ldots\quad V_y=\omega_0.$$

Вставляя ихъ въ уравненіе $H=0$, находимъ

$$V_x=F-\omega_0 y'-\cdots-\omega_{n-2}\,y^{(n-1)}-F_{y^{(n)}}.y^{(n)}.$$

---

[1]) Г. Бертранъ указалъ ошибку Лагранжа, Пуассона и др., утверждавшихъ, что Эйлеръ не доказалъ *достаточности* своего условія (Journ. de l'Ec. Polyt. XXVIII Cahier, p. 250—251).

Слѣдовательно, функція V опредѣлится посредствомъ интегрированія точнаго дифференціала

$$dV=[F-\omega_0 y'-\cdots-\omega_{n-2)}\,y^{(n-1}-F_{y^{(n)}}.y^{(n)}]\,dx+$$
$$+\omega_0 dy+\cdots+\omega_{n-2}\,dy^{(n-2)}+F_{y^{(n)}}\,dy^{(n-1)}.$$

Въ примѣненіяхъ къ частнымъ случаямъ всего удобнѣе располагать вычисленіе такъ, какъ показываетъ слѣдующая таблица

$$\begin{array}{cccc}
F_{y^{(n)}}, & F_{y^{(n-1)}},\ldots & F_{y'}, & F_y \\
 & -\dfrac{d}{dx}F_{y^{(n)}},\cdots & -\dfrac{d}{dx}F_{y''}, & -\dfrac{d}{dx}F_{y'}, \\
 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
 & & \pm\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n)}}, & \pm\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}F_{y^{(n-1)}} \\
 & & & \mp\dfrac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} \\
\hline
F_{y^n}, & \omega_{n-2},\ldots & \omega_0, & E
\end{array} \qquad (A)$$

гдѣ можно вычислять одинъ за другимъ горизонтальные ряды или вертикальные отъ лѣвой руки къ правой. Сумма членовъ крайняго столбца справа даетъ значеніе выраженія E; если оно равно нулю, то суммы членовъ слѣдующихъ за нимъ столбцовъ представятъ соотвѣтственно значенія частныхъ производныхъ V_y, $V_{y'}$,... $V_{y^{(n-2)}}$, $V_{y^{(n-1)}}$.

Примѣръ. $\qquad F=\varphi(x)+y^2+(2xy-1)y'+xy''+x^2y'''.$

Составляя табличку по образцу (A), находимъ

$$\begin{array}{cccc}
x^2, & x, & 2xy-1, & 2y+2xy' \\
 & -2x, & -1, & -2y-2xy' \\
 & & +2, & 0 \\
 & & & 0 \\
\hline
V_{y''}=x^2, & V_{y'}=-x, & V_y=2xy, & E=0.
\end{array}$$

Слѣдовательно,

$$V_x = F - x^3 y''' + xy'' - 2xyy' = 2xy'' - y' + y^2 + \varphi(x).$$

Поэтому

$$dV = [2xy'' - y' + y^2 + \varphi(x)]\, dx + x^2\, dy'' - x dy' + 2xy\, dy,$$

откуда по интегрированіи находимъ

$$V = x^2 y'' - xy' + y^2 x + \int \varphi(x)\, dx + \text{const}.$$

Хотя достаточно составить одно выраженіе E, входящее въ Эйлерово условіе, чтобы заключить о непосредственной интегрируемости данной дифференціальной функціи F; однако оно сложнѣе всѣхъ другихъ необходимыхъ условій, поэтому, вообще, удобнѣе пользоваться этими послѣдними. Поясним сказанное примѣромъ. Положимъ,

$$F = xy''' y^{\mathrm{IV}} + (x + yy'') y''' + \sqrt{xy' + y}.$$

Здѣсь первое необходимое условіе, по которому F должно быть линейною функціею высшей производной, выполнено; посмотримъ, удовлетворится ли необходимое условіе непосредственно слѣдующее; для этого составляя два первые столбца таблицы (A), находимъ

$$\begin{array}{l}
\phantom{F_{y^{\mathrm{IV}}}=}xy''',\quad xy^{\mathrm{IV}} + yy'' + x \\
\phantom{F_{y^{\mathrm{IV}}}=xy''',\quad} -y''' - xy^{\mathrm{IV}} \\
\hline
F_{y^{\mathrm{IV}}} = xy''',\quad \omega_2 = -y''' + yy'' + x
\end{array}$$

Необходимое условіе $\dfrac{\partial \omega_2}{\partial y'''} - \dfrac{\partial F_{y^{\mathrm{IV}}}}{\partial y''} = 0$ здѣсь, очевидно, не удовлетворено. Такимъ образомъ очень просто убѣждаемся, что данная функція F не можетъ быть непосредственно интегрируема, между тѣмъ какъ составленіе выраженія E потребовало бы довольно сложнаго счета.

Замѣтимъ въ заключеніе, что предыдущій пріемъ для вывода условій непосредственной интегрируемости очень просто распространяется на случай, когда данная дифференціальная функція содержитъ нѣсколько неопредѣленныхъ функцій y, z, u,... независимаго перемѣннаго x и ихъ производныя различныхъ порядковъ; но это обобщеніе такъ просто, что я считаю излишнимъ на немъ останавливаться.

VII.

Объ интегрированіи канонической системы обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій 1-го порядка.

§ 26. Общій видъ системы обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій 1-го порядка между $2n$ неизвѣстными функціями $x_1,\ldots x_n$, $y_1,\ldots y_n$ независимаго перемѣннаго t можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\frac{dx_1}{dt}=A_1,\quad \frac{dx_2}{dt}=A_2,\ldots \frac{dx_n}{dt}=A_n,$$
$$\frac{dy_1}{dt}=B_1,\quad \frac{dy_2}{dt}=B_2,\ldots \frac{dy_n}{dt}=B_n,$$

означая черезъ A_1, $B_1,\ldots$ A_n, B_n данныя функціи независимаго перемѣннаго t и зависимыхъ x_1, $y_1,\ldots$ x_n, y_n.

Частный случай предыдущей общей формы называется *канонической системою*, если коэфиціенты A_1, $B_1,\ldots$ A_n, B_n образованы помощію одной и той же данной функціи,

$$H=F(t,\ x_1,\ldots x_n,\ y_1,\ldots y_n),$$

посредствомъ частныхъ дифференцированій ея въ отношеніи зависимыхъ перемѣнныхъ, именно такъ, что вообще

$$A_i=\frac{\partial H}{\partial y_i}\quad \text{и}\quad B_i=-\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

гдѣ i означаетъ каждый изъ указателей $1, 2,\ldots n$.

Поэтому каноническая система совмѣстныхъ уравненій представится слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_2},\ldots\quad \frac{dx_n}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_n},\\ \frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1},\quad \frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2},\ldots\quad \frac{dy_n}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_n}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Въ частномъ случаѣ, когда данная функція H будетъ вида

$$H=f(x_1,\ldots x_n,\ y_1,\ldots y_n),$$

т.-е. не содержитъ явно независимаго перемѣннаго t, уравненія (1) называются гамильтоновою формою.

Послѣднее названіе происходитъ отъ имени извѣстнаго англійскаго математика (W. R. Hamilton), который привелъ къ описанному сейчасъ виду общія уравненія движенія системы матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію только силъ взаимнаго притяженія или отталкиванія [1]). Другими словами, гамильтонова система представляетъ въ самомъ простомъ видѣ уравненія всякой задачи динамики, въ которой имѣетъ приложеніе *начало живыхъ силъ*; поэтому два вопроса этого класса отличаются одинъ отъ другого только числомъ перемѣнныхъ и формою функціи $H=f$. Обративъ вниманіе на предыдущее замѣчаніе, нетрудно понять всю важность задачи: найти общіе пріемы интегрированія системы совокупныхъ уравненій вида (1). Рядъ открытій на пути направленномъ къ этой цѣли, началъ Гамильтонъ, показавшій, въ упомянутомъ выше изслѣдованіи, что $2n$ различныхъ интеграловъ уравненій (1), въ которыхъ $H=f$, выражаются посредствомъ частныхъ производныхъ одной и той же функціи, названной имъ *главною*; опредѣленіе же главной функціи онъ привелъ къ интегрированію двухъ уравненій съ частными производ-

[1]) См. «Philosophical Transactions», 1835. P. I, «Second Essay on a General Method in Dynamics», By W. R. Hamilton (p. 96—98).

ными 1-го порядка. Открытіе Гамильтона, въ то время когда оно было сдѣлано, не подвигало еще само собою рѣшенія вопроса впередъ, потому что, по извѣстнымъ тогда способамъ, интегрированіе уравненія съ частными производными 1-го порядка обратно приводилось къ полному интегрированію системы совокупныхъ уравненій вида (1). Оно, однако, обнаружило еще болѣе тѣсную связь между двумя вопросами и побудило заняться ими Якоби, который показалъ, во-1-хъ, что для опредѣленія главной функціи достаточно найти полный интегралъ одного уравненія съ частными производными 1-го порядка и что теорема Гамильтона распространяется на уравненія вида (1), въ которыхъ $H=F$, т.-е. содержитъ явно независимое перемѣнное t; во-2-хъ, не зная еще въ то время о пріемѣ Коши [1]) и принимая способъ Пфаффа за единственно извѣстный общій методъ интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка для числа независимыхъ перемѣнныхъ большаго двухъ, Якоби сдѣлалъ въ послѣднемъ важное упрощеніе, которое въ сущности одинаково съ пріемомъ Коши, указанномъ еще въ 1819 г. [2]). Но какъ уже замѣчено выше, способъ Коши, или способъ Пфаффа, исправленный Якоби, требовали для интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка, къ которому приводилось интегрированіе уравненій (1), обратно, полнаго интегрированія этихъ послѣднихъ, т.-е., какъ выразился г. Буръ, «on etait seulement parvenu à ramener les difficultés les unes aux autres, sans sortir du cercle vicieux». Поэтому Якоби, уже начиная съ эпохи упомянутаго выше его изслѣдованія, былъ занятъ изысканіемъ способа интегрированія уравненія съ частными производными 1-го порядка при какомъ угодно числѣ независимыхъ перемѣнныхъ, который былъ бы продолженіемъ пути, указаннаго Лагранжемъ при рѣшеніи этой задачи въ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, пути,

---

[1]) См. «Exercices d'Analyse», par Cauchy. T. 2 (p. 239).

[2]) «Journal v. Crelle», 1837, XVII Band, «Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen» v. Jacobi.

на которомъ Шарпи встрѣтилъ неодолимыя затрудненія и оставленномъ по той же причинѣ Пфаффомъ. Для обобщенія способа Лагранжа, Якоби долженъ былъ искать пособія въ свойствахъ интеграловъ уравненій динамики вида (1); главнѣйшее изъ нихъ онъ открылъ въ одной теоремѣ Пуассона, доказанной послѣднимъ въ первомъ мемуарѣ «Sur la variation de oonstantes arbitraires» (Jour. de l'Ec. Polyt., XV cahier), чѣмъ и объясняется энтузіазмъ, съ которымъ Якоби отозвался объ этой теоремѣ въ письмѣ къ Парижской академіи наукъ вскорѣ послѣ смерти Пуассона (Comptes rendus 1840, p. 529).— Открытія Гамильтона и Якоби послужили основаніемъ изслѣдованій многихъ другихъ математиковъ и трудами гг. Ліувилля, Бертрана, Донкина и Бура значительно развита теорія интегрированія уравненій канонической формы и расширенъ кругъ ея приложеній. Полный трактатъ Якоби объ этомъ предметѣ, изданіе котораго было имъ обѣщано еще въ 1840 г, появился уже послѣ смерти автора только въ 1861 г.[1]. Въ немъ изложенъ новый способъ интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка и, какъ приложеніе его, теорія интегрированія уравненій вида (1) съ важнѣйшими ея примѣненіями. Это сочиненіе заключаетъ систематическое изложеніе какъ собственныхъ открытій Якоби въ этой части анализа, такъ и результаты, полученные другими математиками, труды которыхъ наиболѣе способствовали ея совершенствованію. Совокупность всѣхъ упомянутыхъ выше изслѣдованій составляетъ самое важное изъ прибавленій къ общей теоріи дифференціальныхъ уравненій, сдѣланныхъ въ новѣйшее время.

Изложивъ въ началѣ моего разсужденія способъ Якоби интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка, я представлю въ заключеніе важнѣйшія теоремы, на которыхъ основана теорія интегрированія уравненій канонической формы.

---

[1]) «Journ. v. Crelle» (1861–62 г.), LX B. 1-tes u. 2-tes Hefte: «Nova methodus aequat. different. partiales primi ordinis etc.», C. G. I. Jacobi.

Возьмемъ каноническую систему уравненій:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_2},\dots\quad \frac{dx_n}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_n}, \\ \frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1},\quad \frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2},\dots\quad \frac{dy_n}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_n}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

гдѣ, полагая

$$H=F(t,\ x_1,\dots\ x_n,\ y_1,\dots\ y_n),$$

означаемъ черезъ F данную функцію $x_1,\dots\ x_n,\ y_1,\dots\ y_n$ и t.

Интеграломъ дифференціальныхъ уравненій (1) называется уравненіе

$$U=\alpha,$$

гдѣ α произвольное постоянное и U функція $t,\ x_1,\dots\ x_n,\ y_1,\dots\ y_n$, не заключающая α и притомъ такая, которой полная производная въ отношеніи t приведется тождественно къ нулю, по исключеніи изъ нея производныхъ въ отношеніи того же перемѣннаго функцій $x_1,\dots\ x_n,\ y_1,\dots\ y_n$, данныхъ уравненіями (1).

Полная производная функціи U въ отношеніи t выразится слѣдующимъ образомъ

$$\frac{d}{dt}U=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x_1}\ \frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_1}\ \frac{dy_1}{dt}+\dots+\frac{\partial U}{\partial x_n}\ \frac{dx_n}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dt};$$

вставляя сюда значенія $\frac{dx_1}{dt},\dots\ \frac{dy_n}{dt}$ изъ уравненій (1), мы должны получить тождество

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x_1}\ \frac{\partial H}{\partial y_1}-\frac{\partial U}{\partial y_1}\ \frac{\partial H}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial U}{\partial x_n}\ \frac{\partial H}{\partial y_n}-\frac{\partial U}{\partial y_n}\ \frac{\partial H}{\partial x_n}=0,$$

которое, помощію означенія Пуассона, напишется еще слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+(U,\ H)=0. \qquad (2)$$

Поэтому уравненіе (2) представляетъ критеріумъ, по которому можно судить будетъ или нѣтъ данная функція U, уравненная произвольному постоянному, представлять интегралъ уравненій (1). Вставивъ, напр., H вмѣсто U въ уравненіе (2), находимъ, что 2-й членъ 1-й части приметъ видъ (H, H) и, слѣдовательно, приводится къ нулю; затѣмъ остается членъ $\frac{\partial H}{\partial t}$, который также равенъ нулю, если H не содержитъ явно t. Это обстоятельство, дѣйствительно, встрѣчается въ уравненіяхъ динамики гамильтоновой формы, когда прилагается начало живыхъ силъ; тогда

$$H = \text{const}.$$

будетъ однимъ изъ интеграловъ уравненій (1) и называется интеграломъ живыхъ силъ; но оно не имѣетъ болѣе мѣста въ общемъ случаѣ, который мы теперь разсматриваемъ, предполагая H содержащимъ явно t.

Полное рѣшеніе уравненій (1) составляютъ $2n$ различныхъ интеграловъ, заключающихъ $2n$ произвольныхъ постоянныхъ; разрѣшая интегральныя уравненія въ отношеніи произвольныхъ постоянныхъ, можно привести ихъ къ слѣдующему виду

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \ldots \quad \varphi_n = a_n, \\
&\psi_1 = b, \quad \psi_2 = b_2, \ldots \quad \psi_n = b_n,
\end{aligned}$$

гдѣ a_1, $b_1, \ldots a_n$, b_n означаютъ произвольныя постоянныя и φ_1, $\psi_1, \ldots \varphi_n$, ψ_n функціи t, $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n$, не заключающія этихъ постоянныхъ и удовлетворяющія условію (2).

Докажемъ теперь предложеніе, служащее основаніемъ теоріи интегрированія уравненій (1).

Теорема 1. Если извѣстны n интеграловъ уравненій (1), положимъ

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \ldots \quad \varphi_n = a_n, \tag{3}$$

такихъ, что условіе

$$(\varphi_i,\ \varphi_k)=\sum_{m=1}^{m=n}\left\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_m}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_m}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_m}\right\}=0 \tag{4}$$

будетъ удовлетворено для всѣхъ значеній 1, 2,... n указателей i и k, то остальные n интеграловъ, составляющихъ съ данными (3) полную систему рѣшеній уравненій (1), получатся:

1) интегрируя точный дифференціалъ

$$y_1dx_1+\cdots+y_ndx_n-F(t,\ x_1,\ldots x_n,\ y_1,\ldots y_n)\,dt,$$

въ которомъ $y_1,\ldots y_n$ должно замѣнить ихъ значеніями, выведенными изъ уравненій (3); и

2) уравнивая новымъ произвольнымъ постояннымъ $b_1,\ldots b_n$ частныя производныя интеграла предыдущаго дифференціала, взятыя въ отношеніи $a_1,\ldots a_n$.

Данныя условія (4) показываютъ, что значенія $y_1,\ldots y_n$, выведенныя изъ уравненій (3), на основаніи теоремы 2 § 17, удовлетворятъ условіямъ

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \tag{5}$$

для всѣхъ значеній 1, 2,... n указателей i и k; слѣдовательно, выраженіе

$$y_1dx_1+\cdots+y_ndx_n$$

будетъ точный дифференціалъ. Далѣе, означивъ результатъ подстановки значеній $y_1,\ldots y_n$ въ функцію $F(t,\ x_1,\ldots x_n,\ y_1,\ldots y_n)=H$ черезъ (H), докажемъ, что выраженіе

$$y_1dx_1+\cdots+y_ndx_n-(H)\,dt \tag{6}$$

будетъ также точный дифференціалъ. Для этого достаточно убѣдиться, что условія

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_i}=-\frac{\partial y_i}{\partial t}$$

будутъ удовлетворены для всѣхъ значеній $i=1, 2,\ldots n$.

Но мы имѣемъ

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_i}=\frac{\partial H}{\partial x_i}+\frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i},$$

или, на основаніи равенствъ (5) и данныхъ уравненій (1),

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_i}=-\frac{dy_i}{dt}+\frac{dx_1}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial x_1}+\cdots+\frac{dx_n}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial x_n}.$$

Сверхъ того, мы предполагаемъ, что помощію уравненій (3) y_i выражено функціею $t, x_1,\ldots x_n$; слѣдовательно,

$$\frac{dy_i}{dt}=\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Вставивъ это значеніе $\frac{dy_i}{dt}$ въ предыдущее равенство, по приведеніи, очевидно, получимъ

$$\frac{\partial(H)}{\partial x_i}=-\frac{\partial y_i}{\partial t},$$

и подобное равенство найдется для всѣхъ значеній $i=1, 2,\ldots n$, что пока и нужно было доказать.

Интегрируя извѣстнымъ образомъ точный дифференціалъ (6), опредѣлимъ его интегралъ V, функцію перемѣнныхъ $t, x_1,\ldots x_n$, заключающую постоянныя $a_1,\ldots a_n$, къ которой можетъ быть придано еще одно произвольное постоянное. Слѣдовательно, мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=y_1,\ \frac{\partial V}{\partial x_2}=y_2,\ldots\ \frac{\partial V}{\partial x_n}=y_n, \tag{7}$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-(H). \tag{a}$$

Первыя n изъ этихъ уравненій представляютъ, очевидно, уравненія (3), разрѣшенныя въ отношеніи $y_1,\ldots\ y_n$; послѣднее же есть тождественное равенство.

Теперь обратимся къ послѣдней части теоремы, то-есть докажемъ, что уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}=b_1,\ \frac{\partial V}{\partial a_2}=b_2,\ldots\ \frac{\partial V}{\partial a_n}=b_n \tag{8}$$

будутъ интегралами уравненій (1). Для этого, на основаніи даннаго выше опредѣленія, должно только убѣдиться, что полныя производныя въ отношеніи t первыхъ частей уравненій (8) приводятся къ нулю, по исключеніи производныхъ $\frac{dx_1}{dt},\ldots\ \frac{dx_n}{dt}$ помощію уравненій (1). Дѣйствительно,

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt}=\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial t}+\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial x_1}\ \frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\partial x_n}\ \frac{dx_n}{dt},$$

или, измѣняя порядокъ частныхъ дифференцированій функціи V,

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt}=\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial t}}{\partial a_i}+\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\partial a_i}\ \frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\partial a_i}\ \frac{dx_n}{dt}.$$

Далѣе, пользуясь уравненіями (7) и (a) и исключая помощію (1) производныя $\frac{dx_1}{dt}, \ldots \frac{dx_n}{dt}$, будемъ имѣть

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = -\frac{\partial (H)}{\partial a_i} + \frac{\partial y_1}{\partial a_i}\frac{\partial H}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial a_i}\frac{\partial H}{\partial y_n}.$$

Но на основаніи объясненнаго выше происхожденія выраженія (H) изъ H имѣемъ

$$\frac{\partial (H)}{\partial a_i} = \frac{\partial H}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a_i} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial a_i};$$

слѣдовательно, вторая, а потому и первая части предыдущаго равенства тождественно приводятся къ нулю, т.-е.

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a_i}}{dt} = 0$$

тождественно для всѣхъ значеній $i = 1, 2, \ldots n$. Такимъ образомъ, теорема доказана.

Предыдущее доказательство приводитъ къ слѣдующимъ важнымъ заключеніямъ: 1) задача интегрированія уравненій (1) будетъ рѣшена, какъ скоро будетъ извѣстна функція V, потому что тогда уравненія (7) и (8) доставятъ полную систему $2n$ интеграловъ данныхъ уравненій; 2) функція V можетъ быть опредѣлена непосредственно на слѣдующемъ основаніи. Уравненіе

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (H) = 0, \tag{a}$$

какъ уже замѣчено, должно быть тождественно. Но 2-й его членъ (H) представляетъ результатъ подстановки въ функцію $F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)$ значеній $y_1, \ldots y_n$, выведенныхъ изъ уравненій (3), а эти послѣднія суть тѣ же самыя, которыя представляютъ уравненія (7); слѣдовательно, функція V должна удовлетворять уравненію

$$\frac{\partial V}{\partial t}+F\left(t,\ x_1,\ldots\ x_n,\ \frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots\ \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=0. \tag{9}$$

Такъ какъ функція V кромѣ перемѣнныхъ $t, x_1,\ldots x_n$ должна содержать n произвольныхъ постоянныхъ $a_1,\ldots a_n$ (не считая просто приданнаго), то она должна быть опредѣлена, какъ одинъ изъ *полныхъ* интеграловъ уравненія съ частными производными 1-го порядка (9).

Предыдущія заключенія, выведенныя какъ слѣдствія теоремы 1, такъ важны для теоріи интегрированія уравненій (1), что не будетъ излишнимъ дать имъ прямое доказательство или, лучше сказать, повѣрку.

Теорема 2. Если V представляетъ одинъ изъ полныхъ интеграловъ уравненія (9) [т.-е. интегралъ, заключающій, кромѣ постояннаго просто приданнаго, n произвольныхъ постоянныхъ $a_1,\ldots a_n$ такимъ образомъ, что эти послѣднія не могутъ быть исключены *всѣ* иначе, какъ пользуясь *всѣми* $n+1$ уравненіями, выражающими значенія частныхъ произвольныхъ функціи V въ отношеніи $x_1,\ldots x_n$, и t], то этотъ полный интегралъ обладаетъ свойствами гамильтоновой главной функціи, т.-е. даетъ полную систему $2n$ интеграловъ уравненій (1) въ видѣ уравненій (7) и (8); потому что прямымъ слѣдствіемъ такихъ интегральныхъ уравненій будутъ дифференціальныя уравненія (1).

Взявъ одно изъ уравненій (8), напр.

$$\frac{\partial V}{\partial a_i}=b_i,$$

и дифференцируя его въ отношеніи t, находимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_1}\ \frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_n}\ \frac{dx_n}{dt}=0. \tag{b}$$

Затѣмъ, дифференцируя уравненія (9) въ отношеніи a_i и принимая при этомъ во вниманіе уравненія (7), получимъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial a_i}+\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_i}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_i}=0. \qquad \text{(c}$$

Каждое изъ уравненій (b) и (c) служитъ представителемъ системы n уравненій, получаемыхъ для всѣхъ значеній $i=1$, $2,\ldots n$; сравнивая ихъ, нетрудно видѣть, что значенія, выведенныя изъ 1-й для $\frac{dx_1}{dt},\ldots\frac{dx_n}{dt}$, будутъ тождественно равны соотвѣтствующимъ значеніямъ $\frac{\partial F}{\partial y_1},\ldots\frac{\partial F}{\partial y_n}$, выведеннымъ изъ 2-й. Слѣдовательно, n изъ уравненій (1) вида:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i}$$

составляютъ необходимое слѣдствіе интегральныхъ уравненій (7) и (8), т.-е. удовлетворяются этими послѣдними.

Можно дать предыдущему заключенію болѣе строгости и вмѣстѣ съ тѣмъ яснѣе показать необходимость условія, по которому V должна представлять полный интегралъ уравненія (9).

Вычитая уравненіе (c) изъ (b), получимъ n уравненій вида

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_1}\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)+\cdots+\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_n}\left(\frac{dx_n}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y_n}\right)=0 \qquad \text{(d)}$$

для всѣхъ значеній $i=1, 2,\ldots n$. Разсматривая въ этихъ уравненіяхъ величины $\frac{dx_1}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y_1},\ldots\frac{dx_n}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y_n}$ какъ неизвѣстныя, мы имѣемъ право сдѣлать одно изъ двухъ заключеній:

1) или каждая изъ неизвѣстныхъ равна нулю,

2) или опредѣлитель, составленный изъ коэфиціентовъ уравненій (d), равенъ нулю.

Но этотъ опредѣлитель можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\triangle=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\partial a_1},\dots & \dfrac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\partial a_1} \\ \dots,\dots & \\ \dots\dots & \\ \dfrac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\partial a_n},\dots & \dfrac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

и предположеніе $\triangle=0$ влекло бы за собою слѣдствіе, что можно исключить всѣ постоянныя $a_1,\dots a_n$, пользуясь только n первыми изъ уравненій

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=\omega_1(t,\ x_1,\dots x_n,\ a_1,\dots a_n),\dots$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_n}=\omega_n(t,\ x_1,\dots x_n,\ a_1,\dots a_n),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-F(t,\ x_1,\dots x_n,\ \omega_1,\dots \omega_n),$$

которыя представляютъ значенія частныхъ производныхъ функціи V въ отношеніи $x_1,\dots x_n$, t, что противорѣчитъ условію, по которому V должна представлять полный интегралъ уравненій (9). Слѣдовательно, и проч.

Подобныя соображенія удостовѣряютъ также, что значенія

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_1}=\frac{\triangle_1}{\triangle},\dots\ \frac{dx_n}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_n}=\frac{\triangle_n}{\triangle},$$

выведенныя изъ уравненій (b) и (c), будутъ совершенно опредѣленными, потому что $\triangle_1,\dots\ \triangle_n$ не могутъ уничтожаться на томъ же основаніи какъ $\triangle$.

Теперь покажемъ, что и вторая половина дифференціальныхъ уравненій (1) удовлетворяется интегральными уравненіями (7) и (8). Дифференцируя уравненіе (9) въ отношеніи x_i, примѣняя притомъ условія $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ и имѣя въ виду уравненія (7), находимъ

$$\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_i}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial y_i}{\partial x_n}=0.$$

Затѣмъ, дифференцируя въ отношеніи t уравненіе $y_i=\frac{\partial V}{\partial x_i}$, получимъ

$$\frac{dy_i}{dt}=\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Складывая это уравненіе съ предыдущимъ, въ которомъ сначала всѣ члены кромѣ $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ перенесемъ во 2-ю часть, находимъ

$$\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)+\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\left(\frac{dx_n}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y_n}\right);$$

но, какъ доказано,

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_1},\ldots\ \frac{dx_n}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_n};$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

и подобныя равенства будутъ имѣть мѣсто для всѣхъ значеній $i=1, 2,\ldots n$. Такимъ образомъ теорема доказана.

Доказательство предыдущаго предложенія можно представить еще въ слѣдующемъ видѣ.

Прилагая способъ Якоби къ интегрированію уравненія съ частными производными перваго порядка

$$f=y+F(t,\ x_1,\ldots\ x_n,\ y_1,\ldots\ y_n)=0, \tag{9}$$

гдѣ для краткости положено $\frac{\partial V}{\partial t}=y$ и вообще $\frac{\partial V}{\partial x_i}=y_i$, найдемъ n уравненій:

$$\begin{gathered} f_1(t,\ x_1,\dots x_n,\ y_1,\dots y_n)=a_1, \\ f_2(t,\ x_1,\dots x_n,\ y_2,\dots y_n,\ a_1)=a_2,\dots \\ \dots f_n(t,\ x_1,\dots x_n,\ y_n,\ a_1,\dots a_{n-1})=a_n, \end{gathered} \tag{10}$$

гдѣ $a_1,\dots a_n$ произвольныя постоянныя и функціи $f_1,\dots f_n$ опредѣлены такъ, что удовлетворятъ условіямъ

$$(f,\ f_i)=0 \quad \text{и} \quad (f_i,\ f_k)=0$$

для всѣхъ значеній $1,\dots n$ указателей i и k.

Исключая постоянныя $a_1,\dots a_n$ изъ первыхъ частей уравненій (10) при помощи тѣхъ же самыхъ уравненій, приведемъ эти послѣднія къ виду

$$H_1=a_1,\quad H_2=a_2,\dots \quad H_n=a_n, \tag{11}$$

гдѣ $H_1,\dots H_n$ функціи $t,\ x_1,\dots x_n,\ y_1,\dots y_n$, не содержащія перемѣннаго y и вообще

$$H_i=f_i(t,\ x_1,\dots x_n,\ y_i,\dots y_n,\ f_1,\ H_2,\dots H_{i-1}).$$

На основаніи доказаннаго въ § 21 первыя части уравненій (11) должны удовлетворять условіямъ

$$(f,\ H_i)=0 \quad \text{и} \quad (H_i,\ H_k)=0$$

для всѣхъ значеній $1,\dots n$ указателей i и k.

Первый рядъ этихъ условій показываетъ, что уравненія (11) будутъ интегралами уравненій (1). Дѣйствительно,

$$(f,\ H_i)-\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial t}, & \frac{\partial H_i}{\partial t} \\ 1, & 0 \end{vmatrix}+\sum_{m=1}^{m=n}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_m}, & \frac{\partial H_i}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F}{\partial y_m}, & \frac{\partial H_i}{\partial y_m} \end{vmatrix}=$$

$$=-\left\{\frac{\partial H_i}{\partial t}+(H_i,\ F)\right\}=0,$$

что на основаніи условія (2) показываетъ, что уравненіе $H_i=a_i$ будетъ интеграломъ уравненій (1).

Условія же

$$(H_i,\ H_k)=0$$

суть тѣ же самыя, которыя въ теоремѣ 1-й должны были выполнять функціи $\varphi_1,\dots\ \varphi_n$. Слѣдовательно, интегралу выраженія

$$y_1dx_1+\cdots+y_ndx_n-F(t,\ x_1,\dots\ x_n,\ y_1,\dots\ y_n)dt,$$

въ которомъ $y_1,\dots\ y_n$ должно замѣнить ихъ значеніями, выведенными изъ уравненій (10), принадлежатъ тѣ же свойства какъ и функціи V теоремы 1.

Примѣчаніе. При доказательствѣ теоремы 1-й мы видѣли, что выраженіе (6) должно быть точнымъ дифференціаломъ; подобнымъ образомъ можно доказать, что выраженіе

$$x_1dy_1+\cdots+x_ndy_n-F(t,\ x_1,\dots\ x_n,\ y_1,\dots\ y_n)dt$$

должно быть точнымъ дифференціаломъ, если $x_1,\dots\ x_n$ будутъ замѣнены ихъ значеніями, выведенными изъ уравненій (3). Затѣмъ не трудно видѣть, что, означая черезъ W интегралъ предыдущаго дифференціала или полный интегралъ уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$\frac{\partial W}{\partial t}-F\left(t,\ \frac{\partial W}{\partial y_1},\dots\ \frac{\partial W}{\partial y_n},\ y_1,\dots\ y_n\right)=0, \tag{12}$$

можно представить полную систему $2n$ интеграловъ уравненій (1) слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial W}{\partial y_1}=x_1,\quad \frac{\partial W}{\partial y_2}=x_2,\dots\quad \frac{\partial W}{\partial y_n}=x_n,$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}=b'_1,\quad \frac{\partial W}{\partial a_2}=b'_2,\dots\quad \frac{\partial W}{\partial a_n}=b'_n.$$

§ 27. Предыдущее примѣчаніе показываетъ примѣръ, какимъ образомъ одна и та же задача полнаго рѣшенія уравненій (1) можетъ быть приведена къ интегрированію уравненія съ частными производными вида (9) или (12), смотря по выбору независимыхъ перемѣнныхъ. Это даетъ намъ поводъ изложить весьма общій способъ, указанный Якоби (Nova Meth., p. 122, § 57) для измѣненія перемѣнныхъ, какъ въ уравненіи съ частными производными 1-го порядка, такъ и въ соотвѣтствующей ему системѣ каноническихъ уравненій, — способъ, доставляющій преобразованныя уравненія того же общаго типа, который имѣютъ преобразуемыя.

Общій видъ уравненія съ частными производными 1-го порядка можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\frac{\partial V}{\partial t}+F\left(t, x_1,\dots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1},\dots\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)=0, \tag{A}$$

или, полагая вообще $y_i=\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$,

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-F(t, x_1,\dots x_n, y_1,\dots y_n).$$

Соотвѣтствующая система каноническая, полное интегрированіе которой зависитъ отъ опредѣленія полнаго интеграла уравненія (A), будетъ состоять изъ $2n$ уравненій

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}, \tag{B}$$

гдѣ i можетъ означать каждое изъ чиселъ 1, 2,… n.

Уравненіе (A) даетъ выраженіе одной изъ частныхъ производныхъ, $\dfrac{\partial V}{\partial t}$, функціею остальныхъ частныхъ производныхъ $y_1,\dots y_n$ и независимыхъ перемѣнныхъ $t, x_1,\dots x_n$; поэтому оно однозначительно со слѣдующимъ уравненіемъ

$$dV=-F(t, x_1,\dots x_n, y_1,\dots y_n)dt+y_1dx_1+\dots+y_ndx_n, \tag{C}$$

и если мы выразимъ въ новыхъ перемѣнныхъ уравненіе (С), то вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ преобразовано уравненіе (А), а слѣдовательно и уравненія (В).

Оставимъ перемѣнное t безъ измѣненія и введемъ вмѣсто $x_1, \ldots x_n$ новыя перемѣнныя $q_1, \ldots q_n$. Для этого между старыми и новыми перемѣнными должно быть дано n уравненій; но пока, не спеціализируя ихъ вида, однако предполагая ихъ существованіе, возьмемъ совершенно произвольную функцію U старыхъ перемѣнныхъ t, $x_1, \ldots x_n$ и новыхъ $q_1, \ldots q_n$. Представляя безконечно малыя измѣненія въ одной системѣ перемѣнныхъ, получимъ соотвѣтствующія безконечно малыя измѣненія въ другой, и полный дифференціалъ функціи U выразится слѣдующимъ образомъ:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_n}\partial q_n.$$

Вычитая же отсюда уравненіе (С), получимъ

$$d(U-V) = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + F(t,\ x_1, \ldots\ x_n,\ y_1, \ldots\ y_n)\right)dt +$$

$$+\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} - y_1\right)\partial x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial U}{\partial x_n} - y_n\right)dx_n + \frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_n}dq_n.$$

Такъ какъ зависимость между старыми и новыми перемѣнными еще не установлена, то предположимъ ее такою, чтобы было

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = y_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots \quad \frac{\partial U}{\partial x_n} = y_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}. \tag{D}$$

Означая сверхъ того разность двухъ функцій U и V черезъ W, дадимъ предыдущему уравненію слѣдующій видъ

$$dW = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + F(t,\ x_1, \ldots\ x_n,\ y_1, \ldots\ y_n)\right]dt + \frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_n}dq_n.$$

Во 2-й части послѣдняго уравненія коэфиціентъ при dt, очевидно, представляетъ частную производную въ отношеніи t

функціи $W=U-V$; посмотримъ, какимъ образомъ выразятся частныя производныя этой функціи въ отношеніи $q_1, \ldots q_n$.

Для этого, дифференцируя W въ отношеніи q_i и разсматривая $x_1, \ldots x_n$ какъ функціи этого перемѣннаго, находимъ

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\partial(U-V)}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_i}+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_i}-\cdots-\frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_i}=$$
$$=\frac{\partial U}{\partial q_i}+\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}-\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial q_i}+\cdots+\left(\frac{\partial U}{\partial x_n}-\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_n}{\partial q_i},$$

или, на основаніи уравненій (D),

$$\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{E}$$

Подобныя уравненія будутъ имѣть мѣсто для всѣхъ значеній $i=1, 2, \ldots n$. Слѣдовательно,

$$dW=\left(\frac{\partial U}{\partial t}+F(t, x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n)\right)dt+\frac{\partial W}{\partial q_1}dq_1+\cdots+\frac{\partial W}{\partial q_n}dq_n.$$

Теперь остается только выразить коэффиціентъ при dt посредствомъ частныхъ производныхъ функціи W и перемѣнныхъ $q_1, \ldots q_n$; для этого, пользуясь уравненіями (D), приводимъ его къ виду

$$\frac{\partial U}{\partial t}+F\left(t, x_1, \ldots x_n, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_n}\right),$$

въ которомъ онъ содержитъ только перемѣнныя t, $x_1, \ldots x_n$ и $q_1, \ldots q_n$. Далѣе, при помощи уравненій (E), выражая $x_1, \ldots x_n$ функціями t, $q_1, \ldots q_n$, $\frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}$, мы приведемъ разсматриваемый коэффиціентъ къ требуемому виду, который пусть будетъ

$$-\varphi\left(t, q_1, \ldots q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_n}\right),$$

и слѣдовательно,

$$dW = -\varphi\left(t,\ q_1,\dots\ q_n,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\dots\ \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)dt + \frac{\partial W}{\partial q_1}dq_1 + \dots + \frac{\partial W}{\partial q_n}dq_n.$$

Такимъ образомъ уравненіе (C) уже выражено въ новыхъ перемѣнныхъ, и такъ какъ теперь оно равнозначуще со слѣдующимъ

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \varphi\left(t,\ q_1,\dots\ q_n,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\dots\ \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = 0, \qquad (A')$$

то это послѣднее представляетъ преобразованное уравненіе (A). Наконецъ, полагая вообще $\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$, мы можемъ написать непосредственно каноническую систему, соотвѣтствующую уравненію (A′), состоящую изъ $2n$ уравненій для $i=1,\ 2,\dots\ n$:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \qquad (B')$$

которая представляетъ въ новыхъ перемѣнныхъ систему (B).

Какъ скоро полный интегралъ одного изъ уравненій (A) или (A′) будетъ извѣстенъ, то интегралъ другого можно опредѣлить посредствомъ соотношенія

$$W + V = U.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что извѣстенъ полный интегралъ уравненія (A′):

$$W = \chi(t,\ q_1,\dots\ q_n,\ \alpha_1,\dots\ \alpha_n) + \text{const.},$$

гдѣ $\alpha_1,\dots\ \alpha_n$ произвольныя постоянныя. Помощію предыдущаго соотношенія имѣемъ

$$V = U - \chi - \text{const}.$$

и перемѣнныя $q_1,\dots\ q_n$, входящія въ функціи U и χ могутъ быть выражены въ $t,\ x_1,\dots\ x_n$ посредствомъ n уравненій (E).

Если, наоборотъ, полный интегралъ уравненія (A) извѣстенъ и будетъ

$$V=\psi(t,\ x_1,\dots\ x_n,\ a_1,\dots\ a_n)+\text{const.},$$

тогда

$$W=U-\psi-\text{const}.$$

и въ выраженіи W перемѣнныя $x_1,\dots\ x_n$ могутъ быть исключены посредствомъ n уравненій (D).

Въ частномъ случаѣ, полагая

$$U=x_1q_1+\dots+x_nq_n,$$

находимъ, что уравненія (D) и (E) примутъ видъ

$$q_i=y_i=\frac{\partial V}{\partial x_1},\quad p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}=x_i.$$

Слѣдовательно, уравненія (C), (A) и (B) преобразуются въ слѣдующія:

$$dW=F\left(t,\frac{\partial W}{\partial q_1},\dots\ \frac{\partial W}{\partial q_n},\ q_1,\dots\ q_n\right)dt+\frac{\partial W}{\partial q_1}dq_1+\dots+\frac{\partial W}{\partial q_n}dq_n, \tag{C$_1$}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}-F\left(t,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\dots\ \frac{\partial W}{\partial q_n},\ q_1,\dots\ q_n\right)=0, \tag{A$_1$}$$

$$\frac{dq_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial q_i}, \tag{B$_1$}$$

гдѣ $i=1,\ 2,\dots\ n$.

Очевидно, уравненія (A) и (A$_1$) находятся въ такомъ же соотношеніи, въ какомъ были (9) и (12) въ предыдущемъ §; слѣдовательно, зависимость между интегралами двухъ первыхъ или двухъ послѣднихъ уравненій выразится слѣдующимъ образомъ:

$$W+V=x_1q_1+\dots+x_nq_n=x_1y_1+\dots+x_ny_n.$$

§ 28. Общія заключенія относительно теоріи интегрированія каноническихъ уравненій общаго вида (1) прилагаются конечно и къ частному случаю (который представляютъ уравненія движенія въ такихъ вопросахъ, гдѣ имѣетъ мѣсто начало живыхъ силъ), когда данная функція H не содержитъ явнымъ образомъ t, т.-е. будетъ вида

$$H=f(x_1,\dots x_n,\ y_1,\dots y_n).$$

Дифференціальныя уравненія сохранятъ свой первоначальный типъ:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\tag{1}$$

гдѣ должно послѣдовательно полагать $i=1, 2,\dots n$; но теперь перемѣнное t входитъ въ нихъ явнымъ образомъ только въ видѣ дифференціала dt, исключивъ который имѣемъ $2n—1$ уравненій:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}}=\dots=\frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial y_n}}=\frac{dy_1}{-\frac{\partial H}{\partial x_1}}=\dots=\frac{dy_n}{-\frac{\partial H}{\partial x_n}}$$

между одними перемѣнными $x_1, y_1,\dots x_n, y_n$. Полное интегрированіе предыдущей системы можетъ доставить выраженія всѣхъ перемѣнныхъ въ функціи одного изъ нихъ, положимъ x_1, и $2n—1$ произвольныхъ постоянныхъ $\alpha_1,\dots\ \alpha_{2n-1}$. Вставивъ эти выраженія въ уравненіе

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_1},$$

можемъ получить послѣдній интегралъ системы (1), единственный, заключающій явно t, посредствомъ квадратуры

$$t+\alpha_{2n}=\int\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}}.$$

Это показываетъ, что полная система интеграловъ уравненій (1), разрѣшенная въ отношеніи произвольныхъ постоянныхъ, можетъ быть представлена $2n—1$ уравненіями вида

$$\alpha_i=\varphi_i$$

и еще однимъ вида

$$\alpha_{2n}=\varphi_{2n}-t,$$

гдѣ φ_i и φ_{2n} означаютъ функціи, несодержащія явно t. Общій способъ § 26 доставитъ интегралы уравненій (1) именно въ такомъ видѣ, но болѣе простымъ путемъ.

На основаніи замѣчанія, сдѣланнаго въ началѣ § 26, полагая

$$H=\text{const.}=h, \tag{2}$$

мы имѣемъ непосредственно одинъ изъ интеграловъ, несодержащихъ явно t, уравненій (1). Пусть сверхъ того извѣстны еще n—1 интеграловъ этихъ уравненій:

$$\varphi_1=a_1, \quad \varphi_2=a_2,\ldots \quad \varphi_{n-1}=a_{n-1}, \tag{3}$$

гдѣ $a_1,\ldots a_{n-1}$ произвольныя постоянныя, $\varphi_1,\ldots \varphi_{n-1}$ функціи $x_1, y_1,\ldots x_n, y_n$, несодержащія явно t и удовлетворяющія условіямъ

$$(\varphi_i, \varphi_k)=0 \tag{4}$$

для всѣхъ значеній i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 1, 2,... n—1.

При этихъ условіяхъ легко опредѣлить, на основаніи теоремы 1-й § 26, остальные интегралы уравненій (1). Самое доказательство этой теоремы теперь упрощается. Дѣйствительно, выраженіе

$$y_1dx_1+\cdots+y_ndx_n-f(x_1,\ldots x_n, y_1,\ldots y_n)dt$$

по вставкѣ значеній $y_1,\ldots y_n$, выведенныхъ изъ уравненій (2) и (3), будетъ точнымъ дифференціаломъ, потому что равенства

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

будутъ имѣть мѣсто для всѣхъ значеній 1, 2,... n указателей i и k, вслѣдствіе условій (4) и предположенія, что уравненія (3) представляютъ интегралы, несодержащіе явно t, уравненій (1). Далѣе, равенства

$$\frac{\partial y_i}{\partial t}=-\frac{\partial (H)}{\partial x_i},$$

гдѣ (H) представляетъ выраженіе f по вставкѣ значеній $y_1,\ldots y_n$, — удовлетворены для всѣхъ значеній $i=1, 2,\ldots n$, потому что y_i не содержитъ явно t; и такъ какъ уравненіе (2) было въ числѣ тѣхъ, помощію которыхъ опредѣлены значенія $y_1,\ldots y_n$, то, по вставкѣ этихъ значеній, 1-я часть его тождественно приведется къ постоянному h.

Интегралъ предыдущаго точнаго дифференціала выразится слѣдующимъ образомъ

$$U=V-ht,$$

гдѣ V означаетъ интегралъ точнаго дифференціала

$$y_1dx_1+\cdots+y_ndx_n.$$

На основаніи теоремы 1-й § 26 искомые n интеграловъ уравненій (1) находятся, полагая

$$\frac{\partial U}{\partial a_1}=\frac{\partial V}{\partial a_1}=b_1,\ldots\ \frac{\partial U}{\partial a_{n-1}}=\frac{\partial V}{\partial a_{n-1}}=b_{n-1},\ \frac{\partial U}{\partial h}=\frac{\partial V}{\partial h}-t=g, \quad (5)$$

гдѣ $b_1,\ldots b_{n-1}$, g означаютъ новыя произвольныя постоянныя. Дѣйствительно, означая черезъ a одно изъ произвольныхъ постоянныхъ $a_1,\ldots a_{n-1}$, h, имѣемъ

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a}}{dt}=\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial a}}{\partial x_1}\ \frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial a}}{\partial x_n}\ \frac{dx_n}{dt}=-\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\partial a}\ \frac{\partial H}{\partial y_1}+\cdots+\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\partial a}\ \frac{\partial H}{\partial y_n}=$$

$$=\frac{\partial H}{\partial y_1}\ \frac{\partial y_1}{\partial a}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial y_n}\ \frac{\partial y_n}{\partial a},$$

или

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a}}{dt}=\frac{\partial (H)}{\partial a}.$$

Но выраженіе (H) тождественно равно h; поэтому для $a=a_1,\ldots a_{n-1}$

$$\frac{d\frac{\partial V}{\partial a}}{dt}=0, \quad \text{и для } a=h, \quad \frac{d\frac{\partial V}{\partial h}}{dt}=1.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{d\frac{\partial U}{\partial a}}{dt}=0$$

тождественно при всѣхъ значеніяхъ $a=a_1,\ldots a_{n-1}, h$.

Замѣтимъ, что равенство $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ не нарушается, если возьмемъ частныя производныя обѣихъ его частей въ отношеніи a; слѣдовательно, будемъ имѣть для всѣхъ значеній 1, 2,... n указателей i и k:

$$\frac{\partial\frac{\partial y_i}{\partial a}}{\partial x_k}=\frac{\partial\frac{\partial y_k}{\partial a}}{\partial x_i}.$$

Поэтому система интеграловъ (5) можетъ быть получена, не опредѣляя функціи V, но интегрируя рядъ точныхъ дифференціаловъ, и представится въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ

$$\int\left[\frac{\partial y_1}{\partial a_i}dx_1+\cdots+\frac{\partial y_n}{\partial a_i}dx_n\right]=b_i$$

$$\int\left[\frac{\partial y_1}{\partial h}dx_1+\cdots+\frac{\partial y_n}{\partial h}dx_n\right]=g+t,$$

гдѣ должно полагать послѣдовательно $i=1, 2,\ldots n-1$.

Что касается непосредственнаго опредѣленія функціи V, то ясно, что значенія $y_1=\frac{\partial V}{\partial x_1},\cdots y_n=\frac{\partial V}{\partial x_n}$ должны быть однозначущи съ тѣми, которыя выводятся изъ уравненій (2) и (3); слѣдовательно, функція V должна необходимо приводить къ тождеству слѣдующее уравненіе

$$f\left(x_1,\ldots x_n, \frac{\partial V}{\partial y_1},\cdots \frac{\partial V}{\partial y_n}\right)=h,$$

и достаточно, если она будетъ опредѣлена какъ полный интегралъ его.

Изложенный выше способъ прилагается, конечно, не съ одинаковымъ удобствомъ къ рѣшенію различныхъ вопросовъ динамики, по сущности своей болѣе или менѣе сложныхъ. Имѣя въ виду только пояснить на частномъ примѣрѣ изложенную выше теорію интегрированія уравненій канонической формы, я разсмотрю одинъ изъ простѣйшихъ вопросовъ, къ рѣшенію котораго она прилагается безъ всякаго затрудненія.

Разсмотримъ задачу о движеніи матеріальной точки, притягиваемой къ постоянному центру силою, выражающеюся функціей разстоянія.

Принимая плоскость, въ которой должно происходить движеніе, за плоскость прямоугольныхъ координатъ xy, которыхъ начало въ центрѣ притяженія, означимъ черезъ r радіусъ-векторъ движущейся точки и черезъ $\varphi(r)$ ускорительную силу, дѣйствующую на точку въ направленіи къ притягивающему центру. Разсматривая координаты x и y движущейся точки какъ функціи времени t, имѣемъ общія выраженія составляющихъ ускорительной силы параллельныхъ осямъ координатъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Съ другой стороны, тѣ же величины въ настоящемъ случаѣ выразятся соотвѣтственно черезъ

$$\frac{-x}{r}\varphi(r) \quad \text{и} \quad \frac{-y}{r}\varphi(r).$$

Слѣдовательно, уравненія движенія будутъ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{x}{r}\varphi(r) \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{y}{r}\varphi(r), \text{ гдѣ } r^2=x^2+y^2. \qquad (1)$$

Чтобы получить интегралъ живой силы, сложимъ предыдущія уравненія, умноживъ предварительно 1-е на $2dx$ и 2-е на $2dy$, что даетъ

$$\frac{2dxd^2x+2dyd^2y}{dt^2}=-2\varphi(r)\frac{xdx+ydy}{r},$$

или

$$\frac{1}{2}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=-\varphi(r)\,dr,$$

откуда, интегрируя, находимъ

$$H=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)+\int\varphi(r)dr=\text{const.}=h, \tag{2}$$

гдѣ x' и y' означаютъ составляющія скорости движущейся точки, параллельныя осямъ x и y, т.-е.

$$\frac{dx}{dt}=x' \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt}=y'. \tag{3}$$

Замѣтивъ теперь, что

$$\frac{\partial H}{\partial x'}=x', \quad \frac{\partial H}{\partial y'}=y', \quad \frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial\int\varphi(r)dr}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x}=\varphi(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial\int\varphi(r)dr}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y}=\varphi(r)\frac{y}{r},$$

можемъ привести уравненія движенія (3) и (1) къ обыкновенному каноническому виду:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{dx'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dy'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Такъ какъ въ эти уравненія входятъ только четыре неизвѣстныя функціи перемѣннаго t, то достаточно знать, для полнаго рѣшенія задачи, кромѣ интеграла (2), еще одинъ интегралъ, несодержащій явно времени. Начало площадей доставитъ требуемый интегралъ. Именно, исключая изъ уравненій (1) члены, заключающіе r, находимъ

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0,$$

откуда, по интегрированіи, находимъ

$$\varphi = xy' - yx' = \text{const.} = a. \tag{4}$$

Условіе $(H, \varphi) = 0$, очевидно, должно быть выполнено, въ чемъ впрочемъ легко убѣдиться прямой повѣркой, потому что

$$(H,\ \varphi) = -\varphi(r)\frac{x}{r}\cdot y - x'\cdot y' + \varphi(r)\frac{y}{r}\cdot x + y'\cdot x'.$$

Затѣмъ нужно вывести изъ уравненій (2) и (4) значенія x' и y', которыя обратятъ выраженіе $x'dx + y'dy$ въ точный дифференціалъ. Для этого, исключая y' изъ (2) помощію (4), имѣемъ уравненіе 2-й степени относительно x':

$$(x^2+y^2)x'^2 + 2ay\,.\,x' = 2\left(h - \int\varphi(r)dr\right)x^2 - a^2,$$

откуда

$$x' = \frac{-2ay \pm \sqrt{4a^2y^2 + 4(x^2+y^2)\left\{2\left(h - \int\varphi(r)dr\right)x^2 - a^2\right\}}}{2(x^2+y^2)},$$

или

$$x' = \frac{-ay \pm x\sqrt{2\left(h - \int\varphi(r)dr\right)r^2 - a^2}}{r^2}.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$y' = \frac{ax \pm y\sqrt{2\left(h - \int\varphi(r)dr\right)r^2 - a^2}}{r^2}.$$

Слѣдовательно,

$$dV = a\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \pm \frac{xdx + ydy}{r^2}\sqrt{2\left(h - \int\varphi(r)dr\right)r^2 - a^2} =$$

$$= ad \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \pm \frac{dr}{r}\sqrt{2\left(h - \int\varphi(r)dr\right)r^2 - a^2}.$$

Отсюда, интегрируя, получимъ

$$V = a \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \pm \int\frac{dr}{r}\sqrt{2\left(h - \int\varphi(r)dr\right)r^2 - a^2}.$$

Теперь два остальные интеграла задачи выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial V}{\partial a}=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\pm a\int\frac{dr}{r\sqrt{2(h-\int\varphi(r)dr)r^2-a^2}}=b=\text{const.},$$

$$\frac{\partial V}{\partial h}-t=\pm\int\frac{rdr}{\sqrt{2(h-\int\varphi(r)dr)r^2-a^2}}-t=g=\text{const.}$$

Первый изъ этихъ интеграловъ дастъ уравненіе траэкторіи движущейся точки, второй — время въ функціи радіуса вектора; входящія въ нихъ квадратуры, вообще, могутъ быть опредѣлены, когда будетъ данъ видъ функціи $\varphi(r)$. Полагая напримѣръ $\varphi(r)=\frac{\mu}{r^2}$, гдѣ μ постоянное, получимъ результаты, согласные съ тѣми, каторые въ трактатахъ механики выводятся обыкновенно другимъ путемъ. Замѣтимъ еще, что функція V представляетъ полный интегралъ уравненія съ частными производными 1-го порядка

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=2(h-\int\varphi(r)dr),$$

которое получится изъ уравненія (2), замѣнивъ въ немъ x' и y' ихъ соотвѣтственными значеніями $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial y}$.

§ 29. Въ заключеніе предыдущаго очерка теоріи интегрированія обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій канонической формы разсмотримъ весьма замѣчательное свойство ихъ интеграловъ, выражаемое *теоремой Пуассона*, уже выведенной выше, косвеннымъ образомъ, въ § 18 и указанной въ началѣ этого отдѣла, какъ оказавшей большое пособіе въ теоріи интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка. Дѣйствительно, прямое и самое простое доказательство этой теоремы, которое сейчасъ будетъ изложено, показываетъ, что она есть прямое слѣдствіе трехчленнаго тождества, составляющаго теорему 1 § 17; отсюда нетрудно видѣть, что о существованіи этого тождества могли заключать только на основаніи теоремы Пуассона.

Возьмемъ снова каноническую систему $2n$ уравненій вида

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad \text{и} \quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \text{гдѣ} \quad H=F(t,\ x_1,\ y_1, \ldots\ x_n,\ y_n) \quad (1)$$

и указатель i принимаетъ всѣ значенія отъ 1 до n.

Представимъ два интеграла этой системы въ видѣ

$$\varphi(t,\ x_1,\ y_1, \ldots\ x_n,\ y_n)=\text{const.} \quad \text{и} \quad \psi(t,\ x_1,\ y_1, \ldots\ x_n,\ y_n)=\text{const.}, \quad (2)$$

гдѣ φ и ψ данныя функціи.

Теорема Пуассона состоитъ въ томъ, что выраженіе

$$\sum_{m=1}^{m=n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\frac{\partial\psi}{\partial y_m}-\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}\frac{\partial\psi}{\partial x_m}\right\}, \quad \text{или} \quad (\varphi,\ \psi),$$

уравненное произвольному постоянному, будетъ также интеграломъ уравненій (1).

Такъ какъ уравненія (2) представляютъ интегралы системы (1), то функціи φ и ψ, на основаніи доказаннаго въ § 26, должны тождественно повѣрять условія

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\varphi,\ H)=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}+(\psi,\ H)=0.$$

Если уравненіе

$$(\varphi,\ \psi)=\text{const.}$$

будетъ также интеграломъ уравненій (1), то функція $(\varphi,\ \psi)$ должна тождественно повѣрить условіе

$$\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial t}+[(\varphi,\ \psi),\ H]=0.$$

Но на основаніи формулы (9) § 16 имѣемъ

$$\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial t}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \psi\right)+\left(\varphi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$

и вставивъ сюда значенія

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=(H,\ \varphi),\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}=(H,\ \psi),$$

получимъ

$$\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial t}=[(H,\ \varphi),\ \psi]+[\varphi,\ (H,\ \psi)].$$

Поэтому предыдущее условіе для функціи $(\varphi,\ \psi)$ приметъ видъ уравненія

$$[(H,\ \varphi),\ \psi]+[\varphi\ (H,\ \psi)]+[(\varphi,\ \psi),\ H]=0,$$

или
$$[(H,\ \varphi),\ \psi]+[(\varphi,\ \psi),\ H]+[(\psi,\ H),\ \varphi]=0,$$

первая часть котораго на основаніи теоремы 1-й § 17 тождественно равна нулю, каковы бы ни были функціи H, φ, ψ. Такимъ образомъ теорема доказана.

Сложное доказательство, которое Пуассонъ далъ своей теоремѣ, разсматривалось какъ образецъ аналитическаго искусства. Гамильтонъ, приведя уравненія динамики къ простѣйшему виду, упростилъ также и доказательство Пуассона. Предыдущее доказательство, прилагающееся къ каноническимъ уравненіямъ общаго вида, далъ Донкинъ.

Якоби первый обратилъ вниманіе на значеніе теоремы Пуассона. Косвенныя примѣненія, данныя ей впослѣдствіи въ общихъ вопросахъ интегрированія уравненій съ частными производными 1-го порядка и уравненій динамики, вполнѣ обнаружили теоретическую важность теоремы Пуассона. Что же касается прямого, практическаго примѣненія ея, то-есть возможности помощію двухъ данныхъ интеграловъ системы каноническихъ уравненій вычислять, посредствомъ однихъ дифференцированій, третій интегралъ, потомъ четвертый и т. д., то подробное изслѣдованіе этого вопроса г. Бертраномъ[1]) показало, что методъ интегрированія, основанный такимъ образомъ на теоремѣ Пуассона, далеко не имѣетъ той важ-

[1]) Mémoire sur l'integration des equat. diff. de la Mec. par. J. Bertrand («Journ. de Math. de Liouville», 1852. T. XVII.).

ности, которую ему приписывали сначала. На самомъ дѣлѣ случаи, въ которыхъ эта теорема дѣйствительно приводитъ къ новымъ интеграламъ, встрѣчаются гораздо рѣже такихъ, гдѣ она не достигаетъ этой цѣли. Иногда всѣ интегралы, составляющіе полное рѣшеніе, комбинированные посредствомъ теоремы Пуассона, не даютъ новыхъ интеграловъ; въ другихъ случаяхъ большая часть изъ нихъ имѣетъ это свойство. Г. Бертранъ воспользовался этимъ обстоятельствомъ, которое, повидимому, исключаетъ возможность примѣненій теоремы Пуассона къ разсматриваемой цѣли, и основалъ на немъ особый пріемъ интегрированія уравненій динамики гамильтоновой формы. Теоретическое основаніе этого пріема весьма просто, поэтому я изложу его въ сжатомъ видѣ и поясню примѣненіемъ къ тому же примѣру, который рѣшенъ въ предыдущемъ §, чтобы было удобнѣе сравнить результаты.

Сначала замѣтимъ случаи, въ которыхъ два данные интеграла $\varphi=\text{const.}$ и $\psi=\text{const.}$ не приводятъ къ новому интегралу. Это обстоятельство встрѣтится: 1) если выраженіе (φ, ψ) тождественно приводится къ какому-нибудь опредѣленному постоянному; 2) если это выраженіе представляется функціею φ и ψ, такъ что уравненіе $(\varphi, \psi)=\text{const.}$ не даетъ новаго интеграла, но алгебраическую комбинацію уже извѣстныхъ.

Напримѣръ, предполагая въ уравненіяхъ (1) функцію H несодержащею явно t, имѣемъ интегралъ

$$H=\text{const.}$$

Комбинируя его съ другимъ какимъ-нибудь интеграломъ

$$\varphi=\text{const.},$$

гдѣ φ не содержитъ явно t, находимъ тождество

$$(\varphi, H)=0;$$

если же возьмемъ интегралъ $\psi-t=\text{const.}$, гдѣ ψ не содержитъ явно t, то получимъ тождество

$$(\psi, H)=1.$$

Вообще можно доказать, что если $\varphi=\text{const.}$ и $\psi=\text{const.}$ будутъ два интеграла уравненій (1), то существуютъ одинъ или нѣсколько интеграловъ вида $\omega=\text{const.}$, для которыхъ выраженіе $(\varphi,\ \omega)$ приведется тождественно къ нулю или къ единицѣ. — Дѣйствительно, произведемъ послѣдовательныя подстановки, выражаемыя рядомъ

$$(\varphi,\ \psi)=\psi_1,\ (\varphi,\ \psi_1)=\psi_2,\dots\ (\varphi,\ \psi_{m-1})=\psi_m,\dots$$

Продолженный неопредѣленно, онъ не можетъ давать различныхъ функцій $\psi,\ \psi_1,\ \psi_2\cdots$, потому что уравненія (1) имѣютъ только $2n$ различныхъ интеграловъ; поэтому положимъ, что ψ_m будетъ первый членъ, который равенъ опредѣленному постоянному или выражается функціею предыдущихъ членовъ, такъ что

$$\psi_m=F(\psi,\ \psi_1,\dots\ \psi_{m-1}).$$

Взявъ произвольную функцію ω перемѣнныхъ $\psi,\ \psi_1,\dots\ \psi_{m-1}$, будемъ имѣть

$$(\varphi,\ \omega)=\psi_1\frac{\partial\omega}{\partial\psi}+\psi_2\frac{\partial\omega}{\partial\psi_1}+\dots+F(\psi,\ \psi_1,\dots\ \psi_{m-1})\frac{\partial\omega}{\partial\psi_{m-1}}.$$

Слѣдовательно, если хотимъ опредѣлить ω такъ, чтобы $(\varphi,\ \omega)$ было тождественно равно 1 или 0, то должно интегрировать линейное уравненіе

$$\psi_1\frac{\partial\omega}{\partial\psi}+\psi_2\frac{\partial\omega}{\partial\psi_1}+\dots+F(\psi,\ \psi_1,\dots\ \psi_{m-1})\frac{\partial\omega}{\partial\psi_{m-1}}=0 \text{ или } 1.$$

Поэтому интегралы системы совокупныхъ уравненій

$$\frac{d\psi}{\psi_1}=\frac{d\psi_1}{\psi_2}=\dots=\frac{d\psi_{m-1}}{F}=\frac{d\omega}{1\,(\text{или } 0)}$$

дадутъ частныя значенія функціи ω, помощію которыхъ образуется самое общее ея выраженіе, составляющее общій интегралъ предыдущаго линейнаго уравненія.

Пріемъ Бертрана интегрированія уравненій динамики гамильтоновой формы (1), гдѣ $H=f(x_1, y_1, \ldots x_n, y_n)$, состоитъ въ слѣдующемъ. Должно опредѣлить интегралъ уравненій (1)

$$\varphi(x_1, y_1, \ldots x_n, y_n)=\text{const.},$$

различный отъ интеграла живыхъ силъ, и отыскивать другіе интегралы вида

$$\psi(x_1, y_1, \ldots x_n, y_n)=\text{const.},$$

по условію, чтобы функція ψ давала тождественно

$$(\varphi, \psi)=1 \text{ или } 0.$$

Для приложенія возьмемъ задачу о движеніи матеріальной точки, притягиваемой къ постоянному центру силою, выражающеюся функціей разстоянія.

При тѣхъ же условіяхъ, какъ въ предыдущемъ §, уравненія движенія будутъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}=x', \quad & \frac{dy}{dt}=y' \\ \frac{dx'}{\partial t}=-\frac{x}{r}\varphi(r), \quad & \frac{dy'}{dt}=-\frac{y}{r}\varphi(r). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Начало площадей доставляетъ интегралъ

$$f=xy'-yx'=\text{const.} \tag{2}$$

Пусть

$$\psi(x, y, x', y')=\text{const.} \tag{3}$$

будетъ 2-й интегралъ.

Выражая условіе, что этотъ послѣдній, комбинированный съ первымъ, даетъ тождественно (ψ, f) равно нулю или единицѣ, получимъ два линейныя уравненія

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}y-\frac{\partial\psi}{\partial x'}y'+\frac{\partial\psi}{\partial y}x+\frac{\partial\psi}{\partial y'}x'=0 \text{ или } 1. \tag{4}$$

Интегрированіе перваго изъ нихъ приводитъ къ системѣ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dx'}{-y'}=\frac{dy}{x}=\frac{dy'}{x'}=\frac{d\psi}{0},$$

одинъ изъ интеграловъ которой есть

$$\psi=c_1,$$

и легко найти три остальные

$$x^2+y^2=c_2,\quad x'^2+y'^2=c_3,\quad xx'+yy'=c_4,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, c_4 означаютъ произвольныя постоянныя.

Слѣдовательно, полагая для краткости

$$u=x^2+y^2,\quad v=x'^2+y'^2,\quad w=xx'+yy',$$

будемъ имѣть самое общее выраженіе функціи ψ, удовлетворяющей первому изъ условій (4):

$$\psi=\pi(u,\ v,\ w),\tag{a}$$

гдѣ π означаетъ произвольную функцію. Если же въ интегралѣ (3) должно входить явно t, тогда можно положить

$$\psi=t+\pi(u,\ v,\ w).\tag{a'}$$

Принимая для опредѣленія функціи ψ второе изъ линейныхъ уравненій (4), должно интегрировать систему уравненій

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dx'}{-y'}=\frac{dy}{x}=\frac{dy'}{x'}=\frac{d\psi}{1},$$

или

$$\frac{dx}{d\psi}=-y,\quad \frac{dy}{d\psi}=x,\quad \frac{dx'}{d\psi}=-y',\quad \frac{dy'}{d\psi}=x',$$

интегралами которой будутъ уравненія:

$$x = A\cos(\psi+\alpha), \quad y = A\sin(\psi+\alpha),$$
$$x' = B\cos(\psi+\beta), \quad y' = B\sin(\psi+\beta),$$

гдѣ α, β, A, B означаютъ произвольныя постоянныя.

Изъ предыдущихъ уравненій не трудно вывести слѣдующія:

$$x^2+y^2=C', \quad x'^2+y'^2=C'',$$
$$xx'+yy'=C''', \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\psi=C^{IV},$$

гдѣ C', C'', C''', C^{IV} произвольныя постоянныя. Поэтому общее выраженіе функціи ψ, удовлетворяющей второму изъ условій (4), будетъ

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\omega(u,\ v,\ w), \tag{b}$$

гдѣ ω совершенно произвольная функція.

Теперь надобно дополнить опредѣленіе найденныхъ выраженій (a), (a′), (b) функціи ψ условіемъ, что каждое изъ нихъ, будучи уравнено произвольному постоянному, будетъ представлять интегралъ уравненій (1). Для этого надобно выразить, что полныя производныя этихъ функцій въ отношеніи t приводятся тождественно къ нулю, по исключеніи производныхъ въ отношеніи t функцій x, y, x', y'. Начиная выраженіемъ (a), находимъ

$$\frac{d}{dt}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial x'}\,\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\,\frac{dy'}{dt};$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\pi}{\partial u}2x+\frac{\partial\pi}{\partial w}x', \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\pi}{\partial u}2y+\frac{\partial\pi}{\partial w}y',$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x'}=\frac{\partial\pi}{\partial v}2x'+\frac{\partial\pi}{\partial w}x, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y'}=\frac{\partial\pi}{\partial v}2y'+\frac{\partial\pi}{\partial w}y;$$

и, полагая для краткости $-\frac{\varphi(r)}{r}=\Phi(u)$, имѣемъ, на основаніи уравненій (1),

$$\frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dy}{dt}=y', \quad \frac{dx'}{dt}=x\Phi(u), \quad \frac{dy'}{dt}=y\Phi(u).$$

Слѣдовательно, условіе

$$\frac{d}{dt}\psi=0$$

выразится слѣдующимъ образомъ

$$2\frac{\partial\pi}{\partial u}(xx'+yy')+2\frac{\partial\pi}{\partial v}(xx'+yy')\Phi(u)+\frac{\partial\pi}{\partial w}[x'^2+y'^2+(x^2+y^2)\Phi(u)]=0,$$

или

$$2\frac{\partial\pi}{\partial u}w+2\frac{\partial\pi}{\partial v}w\Phi(u)+\frac{\partial\pi}{\partial w}[v+u\Phi(u)]=0.$$

Предыдущее уравненіе, линейное въ отношеніи частныхъ производныхъ π, позволяетъ опредѣлить видъ этой функціи, требуемымъ образомъ, посредствомъ интегрированія уравненій

$$\frac{du}{2w}=\frac{dv}{2w\Phi(u)}=\frac{dw}{v+u\Phi(u)}=\frac{d\pi}{0}.$$

Одинъ изъ интеграловъ этихъ уравненій будетъ $\pi=c_1$; другой получится изъ уравненія

$$du=\frac{dv}{\Phi(u)} \text{ и будетъ } v-\int\Phi(u)du=c_2.$$

Наконецъ, написавъ данныя уравненія слѣдующимъ образомъ

$$\frac{vdu}{v}=\frac{udv}{u\Phi(u)}=\frac{2wdw}{v+u\Phi(u)}=\frac{vdu+udv}{v+u\Phi(u)},$$

получимъ уравненіе

$$2wdw=vdu+udv,$$

откуда находимъ третій интегралъ

$$w^2-uv=c_3.$$

Слѣдовательно, выраженіе функціи π должно быть

$$\pi=\pi_1(v-\int\Phi(u)du,\ uv-w^2),$$

гдѣ π_1 означаетъ произвольную функцію, или, замѣняя u, v, w и $\Phi(u)$ ихъ значеніями и замѣчая, что $du=2rdr$,

а $$uv-w^2=(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)-(xx'+yy'^2)=(xy'-yx')^2,$$

находимъ

$$\psi=\pi=\pi_1(x'^2+y'^2+2\int\varphi(r)dr,\ (xy'-yx')^2),$$

т.-е. полученный такимъ образомъ интегралъ уравненій (1)

$$\psi=\text{const}.$$

будетъ представлять произвольную алгебраическую комбинацію уравненій живыхъ силъ и площадей, которая не можетъ образовать новаго интеграла.

Принявъ теперь форму (a') для представленія функціи ψ и выражая условіе, что $\psi=\text{const}.$ должно быть интеграломъ уравненій (1), будемъ имѣть

$$\frac{d}{dt}\psi=1+\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial x'}\,\frac{dx'}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\,\frac{dy'}{dt}=0$$

или, вставляя данныя выше значенія производныхъ ψ и x, x', y, y',

$$2w\frac{\partial\pi}{\partial u}+2w\Phi(u)\frac{\partial\pi}{\partial v}+[v-u\Phi(u)]\frac{\partial\pi}{\partial w}=-1.$$

Для опредѣленія функціи π должно интегрировать уравненія

$$\frac{du}{2w}=\frac{dv}{2w\Phi(u)}=\frac{dw}{v-u\Phi(u)}=-d\pi,$$

которыхъ два интеграла будутъ тѣ же самыя какъ и въ предыдущемъ случаѣ:

$$v-\int\Phi(u)du=c_1,\quad w^2-uv=c_2.$$

Помощію двухъ предыдущихъ уравненій находимъ

$$w=\sqrt{c_2+uv}=\sqrt{c_2+u(c_1+\int\Phi(u)du)};$$

слѣдовательно,

$$d\pi = -\frac{du}{2w} = -\frac{du}{2\sqrt{c_2 + u(c_1 + \int \Phi(u)du)}};$$

откуда находимъ третій интегралъ

$$\pi + \int \frac{du}{\left\{2\sqrt{c_2 + u(c_1 + \int \Phi(u)du)}\right\}} = c_3.$$

Поэтому общее выраженіе ψ будетъ

$$\psi = t - \int \frac{du}{\left\{2\sqrt{c_2 + u(c_1 + \int \Phi(u)du)}\right\}} + \pi'(v - \int \Phi(u)du,\ uv - w^2),$$

гдѣ π' означаетъ произвольную функцію; дѣлая ее равною нулю и полагая

$$\psi = \text{const.}, \tag{5}$$

получимъ новый интегралъ задачи, выражающій время въ функціи радіуса-вектора и того же самаго вида, который мы получили по другому способу въ предыдущемъ §.

Чтобы дополнить рѣшеніе задачи, посмотримъ еще, допускаютъ ли уравненія (1) интегралы вида

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \omega(u,\ v,\ w) = \text{const.}$$

Для этого имѣемъ условіе

$$\frac{d}{dt}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} = 0,$$

въ которое должно вставить:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{y}{u} + \frac{\partial\omega}{\partial u}2x + \frac{\partial\omega}{\partial w}x', \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{x}{u} + \frac{\partial\omega}{du}2y + \frac{\partial\omega}{\partial w}y',$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x'} = \frac{\partial\omega}{\partial v}2x' + \frac{\partial\omega}{\partial w}x, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y'} = \frac{\partial\omega}{\partial v}2y' + \frac{\partial\omega}{\partial w}y,$$

и замѣнить производныя x, y, x', y' данными выше ихъ значеніями, послѣ чего разсматриваемое условіе приметъ видъ линейнаго уравненія

$$2w\frac{\partial\omega}{\partial u}+2w\Phi(u)\frac{\partial\omega}{\partial v}+[v+u\Phi(u)]\frac{\partial\omega}{\partial w}+\frac{xy'-yx'}{u}=0,$$

или, такъ какъ

$$xy'-yx'=\sqrt{uv-w^2},$$

$$2w\frac{\partial\omega}{\partial u}+2w\Phi(u)\frac{\partial\omega}{\partial v}+[v+u\Phi(u)\frac{\partial\omega}{\partial w}=-\frac{\sqrt{uv-w^2}}{u}.$$

Для опредѣленія функціи ω должно интегрировать уравненія

$$\frac{du}{2w}=\frac{dv}{2w\Phi(u)}=\frac{dw}{v+u\Phi(u)}=-\frac{ud\omega}{\sqrt{uv-w^2}},$$

которыхъ два интеграла будутъ тѣ же, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ:

$$v-\int\Phi(u)du=c_1,\quad uv-w^2=c_2.$$

Помощію ихъ находимъ

$$w=\sqrt{[c_1+\int\Phi(u)du]u-c_2};$$

слѣдовательно,

$$d\omega=-\frac{du\,.\sqrt{uv-w^2}}{2uw}=-\frac{\sqrt{c_2}\,.\,du}{2u\sqrt{[c_1+\int\Phi(u)du]u-c_2}},$$

откуда находимъ третій интегралъ

$$\omega+\int\frac{\sqrt{c_2}du}{2u\sqrt{[c_1+\int\Phi(u)du]u-c_2}}=c_3.$$

Слѣдовательно,

$$\omega=-\int\frac{\sqrt{c_2}du}{2u\sqrt{[c_1+\int\Phi(u)du]u-c_2}}+\omega_1[v-\int\Phi(u)du,\ uv-w^2].$$

Вставляя это выраженіе ω въ формулу (b), находимъ самое общее выраженіе ψ:

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \int\frac{\sqrt{c_2}\,du}{2u\sqrt{[c_1+\int\Phi(u)du]u - c_2}} + \omega_1[v - \int\Phi(u)du, uv - w^2].$$

Здѣсь функція ω_1 совершенно произвольна, поэтому, дѣлая ее равною нулю и полагая

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} - \int\frac{\sqrt{c_2}\,du}{2u\sqrt{[c_1+\int\Phi(u)du]u - c_2}} = \text{const.}, \tag{6}$$

находимъ еще одинъ новый интегралъ задачи, доставляющій уравненіе траэкторіи движущейся точки, совершенно одинаковое съ тѣмъ, которое мы нашли въ предыдущемъ §.

Если къ интеграламъ (2), (5) и (6) присоединимъ интегралъ живыхъ силъ

$$H = (x'^2 + y'^2) - \int\varphi(r)dr = \text{const.},$$

то мы, такимъ образомъ, будемъ имѣть полное рѣшеніе задачи.

Просматривая ходъ рѣшенія предыдущей задачи, видимъ, что онъ состоялъ въ слѣдующемъ. Опредѣливъ интегралъ, различный отъ интеграла живыхъ силъ, мы нашли другой, заключающій время, по условію, чтобы въ комбинаціи съ первымъ онъ приводилъ Пуассонову скобку къ нулю. Третій интегралъ, дающій траэкторію, полученъ по условію, чтобы въ комбинаціи съ 1-мъ онъ приводилъ Пуассонову скобку къ единицѣ. Интегралъ живыхъ силъ дополнилъ рѣшеніе. Г. Бертранъ показалъ, что этотъ ходъ рѣшенія не случайный и долженъ быть таковъ во всѣхъ задачахъ, разсматривающихъ движеніе въ плоскости или когда, вообще, координаты точекъ системы могутъ выражаться функціями двухъ независимыхъ перемѣнныхъ. Доказательство этого предложенія весьма просто, но, изложивъ сущность пріема, я считаю излишнимъ входить въ дальнѣйшія подробности.

VIII.

Способъ Коши интегрированія общаго уравненія съ частными производными 1-го порядка.

§ 30. Способъ интегрированія одного или нѣсколькихъ совмѣстныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка и, какъ слѣдствіе его, теорія интегрированія уравненій каноническаго вида составили главный предметъ предыдущихъ главъ этого разсужденія. Но, прежде чѣмъ этотъ способъ получилъ полное развитіе въ произведеніяхъ Якоби и другихъ математиковъ, задача интегрированія общаго уравненія съ частными производными 1-го порядка была уже вполнѣ разрѣшена Пфаффомъ, Коши и Якоби. Способы, предложенные этими математиками, различные по основаніямъ и формѣ, имѣютъ, однако, одну общую цѣль: привести задачу къ *полному* интегрированію системы обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій вида (10) § 11. Новый способъ Якоби, изложенный выше, отличается отъ прежнихъ способовъ тѣмъ, что ограничивается опредѣленіемъ половины полнаго числа интеграловъ, удовлетворяющихъ извѣстнымъ условіямъ, упомянутой системы совмѣстныхъ уравненій. Отысканіе же этихъ интеграловъ приводитъ ко многимъ системамъ обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій, полнаго интегрированія которыхъ никогда не требуется, но всегда достаточно бываетъ опредѣлить какой-нибудь одинъ изъ интеграловъ каждой системы. Пфаффъ нашелъ теоретическое рѣшеніе вопроса интегрированія общаго уравненія съ частными производными 1-го порядка, какъ частный случай другой рѣшенной имъ задачи [1]): интегрированія уравненія вида

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0,$$

въ которомъ $X_1, \ldots X_{2n}$ представляютъ четное число данныхъ функцій $x_1, \ldots x_{2n}$, не удовлетворяющихъ извѣстнымъ условіямъ Фонтеня или Эйлера. Способъ Пфаффа приводитъ къ полному

---

[1]) Abhandlungen der Berliner Akademie, 1814—1815.

интегрированію нѣсколькихъ системъ обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій, изъ которыхъ только первая получается непосредственно изъ данныхъ задачи, каждая же изъ слѣдующихъ можетъ быть написана только послѣ полнаго интегрированія предшествующей системы. Коши, избравъ другой пріемъ рѣшенія, и Якоби, занимаясь упрощеніемъ способа Пфаффа, показали, что для полученія полнаго интеграла уравненія съ частными производными 1-го порядка, достаточно вполнѣ интегрировать первую изъ системъ совмѣстныхъ уравненій способа Пфаффа. Имѣя въ виду совершенное сходство окончательныхъ заключеній способовъ Коши и Якоби, я ограничусь изложеніемъ въ самомъ общемъ видѣ только перваго изъ нихъ.

Пусть $x_1,\dots x_n$ представляютъ n независимыхъ перемѣнныхъ, а z — ихъ неизвѣстную функцію, для частныхъ производныхъ которой примемъ означеніе

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=p_i,$$

при всѣхъ значеніяхъ $i=1, 2,\dots n$.

Общій видъ уравненія съ частными производными 1-го порядка представится слѣдующимъ образомъ

$$F(x_1,\dots x_n,\ z,\ p_1,\dots p_n)=0. \qquad (1)$$

Опредѣленіе функціи z, удовлетворяющей уравненію (1), составляетъ задачу по сущности своей неопредѣленную; и дѣйствительно, самое общее выраженіе z должно заключать произвольную функцію. Но Коши дѣлаетъ вопросъ совершенно опредѣленнымъ, присоединяя дополнительное условіе: чтобы для даннаго частнаго значенія одного изъ независимыхъ перемѣнныхъ, положимъ

$$x_n=a,$$

функція z и ея частныя производныя $p_1,\dots p_n$ принимали соотвѣтственно значенія ζ, $\omega_1,\dots \omega_n$. Здѣсь ζ означаетъ произвольно данную функцію $x_1,\dots x_{n-1}$, положимъ

$$f(x_1,\dots x_{n-1}),$$

и $\omega_1, \ldots \omega_{n-1}$ — частныя производныя этой функціи, такъ что вообще

$$\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

при всѣхъ значеніяхъ $i=1, 2, \ldots n-1$; наконецъ, ω_n представляетъ значеніе, выведенное изъ уравненія

$$F(x_1, \ldots x_n, a, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n) = 0.$$

Для опредѣленія функціи z, удовлетворяющей всѣмъ предыдущимъ требованіямъ, Коши употребляетъ способъ измѣненія независимыхъ перемѣнныхъ, примѣненный въ первый разъ Амперомъ для рѣшенія разсматриваемой задачи въ частномъ случаѣ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Представимъ $n-1$ перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_{n-1}$ выраженными такимъ же числомъ различныхъ функцій $n-1$ новыхъ перемѣнныхъ $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ и стараго x_n. Вслѣдствіе этого z и p_i будутъ функціями x_n и ξ_i; дифференцируя въ этомъ предположеніи, находимъ уравненія:

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \cdots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} + p_n, \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_i} = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \cdots + p_{n-1} \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}. \tag{3}$$

На основаніи равенства

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial \xi_i} = 0$$

изъ предыдущихъ уравненій получатся слѣдующія:

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right) + \cdots = \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_n} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial x_n}\right). \tag{4}$$

Далѣе, выраженія $x_1, \ldots x_{n-1}, z, p_1, \ldots p_n$ въ перемѣнныхъ $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}, x_n$ предполагаются такими, что, по вставкѣ ихъ, уравненіе (1) приведется къ тождеству; поэтому дифференцируя его въ отношеніи каждаго изъ перемѣнныхъ x_n и ξ_i, получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial x_n}=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}+$$

$$+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi_i}+\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}=0. \tag{5'}$$

Воспользуемся сначала послѣднимъ изъ двухъ предыдущихъ уравненій, которое должно имѣть мѣсто для $i=1,\dots n-1$; вставивъ въ него значенія $\frac{\partial z}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ изъ (3) и (4), находимъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}+p_{n-1}\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}+ \tag{6}$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}+\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial p_{n-1}}-\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}=0.$$

Функціи $\xi_1,\dots \xi_{n-1}$, x_n, представляющія значенія $x_1,\dots x_{n-1}$, остаются до сихъ поръ неопредѣленными; мы можемъ воспользоваться этимъ обстоятельствомъ и выбрать для нихъ такія выраженія, которыя удовлетворятъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}=0,\dots\qquad \frac{\partial F}{\partial p_{n-1}}-\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial F}{\partial p_n}=0 \tag{7}$$

и, чтобы дополнить опредѣленіе $n-1$ разсматриваемыхъ функцій, присоединимъ условіе, чтобы для частнаго значенія $x_n=a$

функціи $x_1, \ldots x_{n-1}$ принимали соотвѣтственно значенія $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$. При этихъ условіяхъ уравненіе (6) приметъ видъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}+p_{n-1}\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}=0;$$

и при различныхъ значеніяхъ $i=1, 2, \ldots n-1$, мы будемъ имѣть $n-1$ подобныхъ уравненій. Функціональный опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \ldots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_{n-1}}, \ldots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} \end{vmatrix}$$

не долженъ быть равенъ нулю, потому что иначе (на основаніи теоремы § 3) между перемѣнными $x, \ldots x_n$ существовало бы одно или нѣсколько уравненій; поэтому необходимымъ слѣдствіемъ предыдущихъ уравненій будутъ уравненія вида

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_i}{\partial x_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_n}=0, \tag{8}$$

имѣющія мѣсто при всѣхъ значеніяхъ $i=1, 2, \ldots n-1$.

Теперь мы имѣемъ всѣ уравненія, необходимыя для рѣшенія вопроса. Соображая всѣ постепенно введенныя условія, находимъ, что задача состоитъ въ слѣдующемъ: требуется опредѣлить $2n$ неизвѣстныхъ функціи $x_1, \ldots x_{n-1}, z, p_1, \ldots p_n$ перемѣнныхъ $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}, x_n$, такимъ образомъ, чтобы 1) для частнаго значенія $x_n=a$ онѣ принимали соотвѣтственно значенія $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n$, гдѣ $\zeta=f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})$ и вообще $\omega_i=$ $=\dfrac{\partial f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})}{\partial \xi_i}$ при $i=1, 2, \ldots n-1$, наконецъ значеніе ω_n выводится изъ уравненія

$$F(\xi_1, \ldots \xi_{n-i}, a, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n)=0;$$

и чтобы 2) эти функціи удовлетворяли $3n-1$ уравненіямъ: (1), (2), (3), (7) и (8).

Мы не беремъ въ расчетъ уравненій (4), которыя суть слѣдствія уравненій (2) и (3), и уравненія (5), равнозначительнаго съ (1).

Но для опредѣленія $2n$ неизвѣстныхъ функцій достаточно вообще $2n$ уравненій; слѣдовательно, въ предыдущей системѣ $3n-1$ уравненій $n-1$ уравненій оказываются излишними. И дѣйствительно, можно доказать: 1) что система $2n$ уравненій, состоящая изъ (1), (2), (7) и (8), достаточна для опредѣленія требуемыхъ значеній $2n$ искомыхъ функцій, и 2) что эти значенія приведутъ къ тождествамъ $n-1$ остальныхъ уравненій (3).

Займемся сначала первою частью доказательства. Уравненія (2), (7) и (8) можно написать слѣдующимъ образомъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_n}=\frac{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1}+\cdots+p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_n}=\frac{\frac{\partial F}{\partial p_i}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \quad -\frac{\partial p_i}{\partial x_n}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}; \tag{9}$$

два послѣднія изъ этихъ уравненій имѣютъ мѣсто при всѣхъ значеніяхъ $i=1, 2,\ldots n-1$.

Къ уравненіямъ (9) должно присоединить еще (1); но это послѣднее, можно замѣнить равнозначущимъ ему уравненіемъ (5), которое по вставкѣ значеній $\frac{\partial x_i}{\partial x_n}$, $\frac{\partial z}{\partial x_n}$, $\frac{\partial p_i}{\partial x_n}$ изъ уравненій (9) легко приводится къ виду

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_n}=0,$$

или

$$-\frac{\partial p_n}{\partial x_n}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}+p_n\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}, \tag{10}$$

симметричному съ послѣднимъ изъ уравненій (9).

Система $2n$ уравненій (9) и (10) заключаетъ, собственно говоря, частныя производныя $2n$ искомыхъ функцій; но такъ какъ частныя дифференцированія повсюду въ нихъ обозначены въ отношеніи одного только x_n, между тѣмъ какъ остальныя независимыя перемѣнныя $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}$ не входятъ даже явнымъ образомъ въ разсматриваемыя уравненія, то эти послѣдніи можно разсматривать, какъ систему обыкновенныхъ уравненій 1-го порядка. На этомъ основаніи уравненія (9) и (10) можно представить слѣдующимъ образомъ

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dz}{p_1\frac{\partial F}{\partial p_1} + \cdots + p_n\frac{\partial F}{\partial p_n}} =$$
$$= \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial F}{\partial z}} = \cdots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial F}{\partial z}}. \qquad (11)$$

Посредствомъ интегрированія системы уравненій (11) можно вообще, какъ извѣстно, найти конечныя и опредѣленныя выраженія функцій $x_1, \ldots x_{n-1}, z, p_1, \ldots p_n$ перемѣннаго x_n, которыя для частнаго значенія $x_n = a$ примутъ соотвѣтственно значенія $\xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n$. Положимъ эти выраженія будутъ

$$\left.\begin{array}{l}
z = \varphi(x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n), \\
x_1 = \varphi_1(x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n), \\
p_1 = \psi_1(x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_n = \psi_n(x_n, \xi_1, \ldots \xi_{n-1}, \zeta, \omega_1, \ldots \omega_n).
\end{array}\right\} \qquad (12)$$

Вставивъ въ первыя n уравненій (12) значенія

$$\zeta = f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1}), \ \omega_1 = \frac{\partial f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})}{\partial \xi_1}, \ldots$$
$$\omega_{n-1} = \frac{\partial f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})}{\partial \xi_{n-1}}$$

и выраженіе ω_n, выведенное изъ уравненія

$$F(\xi_1,\dots\ \xi_{n-1},\ a,\ \zeta,\ \omega_1,\dots\ \omega_n)=0,$$

получимъ n уравненій между первоначальными перемѣнными $z,\ x_1,\dots\ x_n$ и вспомогательными $\xi_1,\dots\ \xi_{n-1}$; слѣдовательно, если видъ функціи f будетъ данъ, то вспомогательныя перемѣнныя могутъ быть исключены, и такимъ образомъ получится уравненіе, изъ котораго выведется значеніе z въ функціи $x_1,\dots x_n$, выполняющее всѣ предположенныя условія, то-есть искомый интегралъ задачи. Если же видъ функціи f остается неопредѣленнымъ, то исключеніе величинъ $\xi_1,\dots\ \xi_{n-1}$ становится вообще невозможнымъ; однако, систему первыхъ n уравненій (12) можно разсматривать какъ равнозначущую общему интегралу уравненія (1). При неопредѣленномъ видѣ функціи f исключеніе $\xi_1,\dots\ \xi_{n-1}$ будетъ возможно только въ одномъ частномъ случаѣ, когда первыя n уравненій (12) не будутъ содержать величинъ $\omega_1,\dots\ \omega_n$; тогда, разрѣшая ихъ относительно $\zeta,\ \xi_1,\dots\ \xi_{n-1}$, найдемъ значенія вида

$$\zeta=\pi(x_1,\dots\ x_n,\ z),\ \xi_1=\pi_1(x_1,\dots\ x_n,\ z),\dots\ \xi_{n-1}=\pi_{n-1}(x_1,\dots\ x_n,\ z),$$

вставляя которыя въ уравненіе

$$\zeta=f(\xi_1,\dots\ \xi_{n-1}),$$

получимъ общій интегралъ въ видѣ уравненія

$$\pi=f(\pi_1,\dots\ \pi_{n-1}).$$

По такому виду общаго интеграла нетрудно заключить, что данное уравненіе (1) должно быть линейнымъ относительно $p_1,\dots\ p_n$; а при этомъ условіи для вывода первыхъ n интеграловъ системы (12), очевидно, достаточно пользоваться первыми n уравненіями (11), т.-е.

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}}=\dots=\frac{dx_n}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}}=\frac{dz}{p_1\dfrac{\partial F}{\partial p_1}+\dots+p_1\dfrac{\partial F}{\partial p_n}}.$$

Такимъ образомъ, теорія Коши обнимаетъ въ общемъ пріемѣ рѣшеніе линейныхъ и нелинейныхъ уравненій.

Остается доказать, что выраженія (12) функцій z, $x_1, \dots$ x_{n-1}, $p_1, \dots$ p_n, по вставкѣ ихъ въ уравненія (3), обратятъ эти послѣднія въ тождества. Допустимъ, что результаты упомянутой подстановки въ 1-ю и 2-ю части уравненій (3) не будутъ одинаковы, и представимъ разность ихъ черезъ $J^{(i)}$, означая такимъ образомъ неизвѣстную функцію $\xi_1, \dots$ ξ_{n-1}, x^n, т.-е. положимъ

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_1}=p_1\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}+\dots+p_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}+J^{(i)}.$$

Присоединяя къ этому равенству уравненіе (2), которое, по вставкѣ въ него значеній (12), будетъ тождественное, и комбинируя его съ предыдущимъ точно такъ, какъ для вывода уравненія (4), находимъ

$$\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}=\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\,\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}-\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}\,\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\dots$$
$$\dots+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\,\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}\,\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}+\frac{\partial J^{(i)}}{\partial x_n}.$$

Вставляя предыдущія выраженія $\frac{\partial z}{\partial \xi_i}$ и $\frac{\partial p_n}{\partial \xi_i}$ въ уравненіе (5′), будемъ имѣть:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_1}{\partial x_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}+\dots$$
$$\dots+\left(\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}}+p_{n-1}\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial x_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \xi_i}+$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}-\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_1}{\partial \xi_i}+\dots+\left(\frac{\partial F}{\partial p_{n-1}}-\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\frac{\partial p_{n-1}}{\partial \xi_i}+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial p_n}\,\frac{\partial J^{(i)}}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}J^{(i)}=0.$$

Но въ силу уравненій (7) и (8), которыя удовлетворяются значеніями (12), всѣ члены предыдущаго уравненія, исключая двухъ послѣднихъ, тождественно равны нулю; поэтому для опредѣленія $J^{(i)}$ получимъ уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial p_n}\,\frac{\partial J^{(i)}}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}J^{(i)}=0,$$

или

$$\frac{\partial \log J^{(i)}}{\partial x_n} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}}.$$

По умноженіи обѣихъ частей послѣдняго уравненія на dx_n и интегрированія отъ a до x_n, получимъ

$$\log \frac{J^{(i)}}{J_a^{(i)}} = -\int_a^{x_n} \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_n}} dx_n,$$

откуда

$$J^{(i)} = J_a^{(i)} e^{-\int_a^{x_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} dx_n}.$$

Здѣсь $J_a^{(i)}$ представляетъ значеніе $J^{(i)}$ при $x_n = a$ и нетрудно убѣдиться, что оно равно нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $x_n = a$, вспомнимъ, что въ то же время функціи $z, x_1, \dots x_{n-1}, p_1, \dots p_{n-1}$ должны принять соотвѣтственно значенія $\zeta, \xi_1, \dots \xi_{n-1}, \omega_1, \dots \omega_{n-1}$; слѣдовательно, уравненіе (3) приметъ видъ

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi_i} = \omega_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_i} + \dots + \omega_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_i} + \dots + \omega_{n-1} \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial \xi_i} + J_a^{(i)},$$

откуда

$$J_a^{(i)} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_i} - \omega_i = 0.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что вообще и $J^{(i)} = 0$; т.-е. уравненія (3) будутъ удовлетворены интегралами (12), которые, выполняя, такимъ образомъ, всѣ требуемыя условія, доставятъ самое общее рѣшеніе задачи.

Противъ предыдущаго заключенія было сдѣлано возраженіе г. Бертраномъ (Comptes rendus, T. XLV, p. 617), состоящее въ томъ, что это заключеніе вѣрно только при условіи, если интегралъ

$$-\int_a^{x_n} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} dx_n \qquad (14)$$

не принимаетъ ни неопредѣленнаго, ни безконечнаго значенія, и что, съ другой стороны, для произвольной функціи $\zeta = f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})$ можно всегда выбрать такой видъ, что тотъ или другой случай будетъ имѣть мѣсто.

По поводу предыдущаго замѣчанія г. Серре предпринялъ изслѣдованіе этихъ исключительныхъ случаевъ и доказалъ (Comptes rendus, T. LIII, Séances des 7 et 28 octobre 1861), что если интегралъ (14) не имѣетъ конечнаго и опредѣленнаго значенія для опредѣленнаго вида функціи $f(\xi_1, \ldots \xi_{n-1})$, то вмѣстѣ съ тѣмъ уравненія (12) неспособны доставить общее рѣшеніе задачи. Оно, въ такомъ случаѣ, получится помощію полнаго интеграла, т.-е. интеграла, заключающаго столько же произвольныхъ постоянныхъ, сколько въ данномъ уравненіи независимыхъ перемѣнныхъ. Я считаю, впрочемъ, излишнимъ приводить подробности изслѣдованія г. Серре, тѣмъ болѣе, что оно изъ упомянутаго выше академическаго сборника перепечатано имъ со многими поясненіями и примѣрами въ послѣднемъ изданіи руководства Лакроа (Traité élémentaire de calc. diff. et de calc. integr. par. S. F. Lacroix, 6-ème ed. augmentée de notes par M. M. Hermite et Serret. Note II).

ИЗСЛѢДОВАНІЕ

способовъ интегрированія уравненій съ частными производными второго порядка функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ стройной и строго логичной послѣдовательности общихъ вопросовъ, составляющихъ теорію дифференціальныхъ уравненій, легко замѣтить такую соподчиненность ихъ, вслѣдствіе которой возможность рѣшенія каждой новой общей задачи обусловливается полнотою и общностію рѣшенія предшествующихъ задачъ, низшихъ категорій. Эта тѣсная связь между всѣми частями теоріи представляетъ неудобство въ томъ случаѣ, когда въ извѣстномъ отдѣлѣ вопросовъ встрѣчаются затрудненія, долго неподчиняющіяся усиліямъ математическаго анализа; потому что застой въ развитіи отдѣльной части долженъ, болѣе или менѣе, отзываться на цѣломъ, органически съ нею связанномъ. Но упомянутое неудобство обращается въ выгоду при первомъ значительномъ успѣхѣ въ какомъ-либо отдѣлѣ теоріи, такъ какъ частная побѣда надъ однимъ важнымъ затрудненіемъ устраняетъ иногда многія другія и способствуетъ общему развитію всей теоріи. Такъ, недавнія усовершенствованія въ общихъ пріемахъ интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка способствовали, съ одной стороны, образованію и полному развитію теоріи совмѣстныхъ уравненій каноническаго вида, и съ другой — внесли немаловажное дополненіе въ теорію уравненій съ частными производными второго порядка.

Послѣ окончательнаго развитія теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка, уравненія съ частными производными высшихъ порядковъ естественно стали очереднымъ вопросомъ, на рѣшеніе котораго должны быть направлены усилія изслѣдователей. Вслѣдствіе органической связи между всѣми отдѣлами теоріи дифференціальныхъ уравненій, и между частями каждаго отдѣла, обнаруживается замѣчательная аналогія и единство въ пріемахъ рѣшенія вопросовъ, которыми она занимается, не смотря на разнообразіе ихъ содержанія. Поэтому изслѣдователь, находя данный вопросъ до извѣстной степени рѣшеннымъ, но остановившимся въ нѣкоторой точкѣ на пути его развитія, обязанъ прежде всего изучить этотъ путь, въ особенности если онъ проложенъ математиками, имена которыхъ *Даламбертъ*, *Эйлеръ*, *Лапласъ*, *Лагранжъ*, *Лежандръ*, *Монжъ*, *Амперъ*.

Дѣйствительно, тщательное изученіе сдѣланнаго раньше можетъ иногда показать, что дальнѣйшіе успѣхи зависѣли не отъ изобрѣтенія новыхъ пріемовъ, но отъ болѣе полнаго и общаго приложенія прежнихъ способовъ.

Теорія интегрированія уравненій съ частными производными высшихъ порядковъ распадается на два отдѣла: въ первомъ разсматриваются уравненія сложныхъ формъ и имѣются въ виду или опредѣленіе ихъ общихъ интеграловъ въ конечномъ видѣ, или приведеніе интегрируемыхъ уравненій къ наипростѣйшимъ формамъ, интегралы которыхъ не выражаются въ конечномъ видѣ; во второмъ отдѣлѣ разсматриваются эти простѣйшія формы уравненій и способы ихъ интегрированія при помощи безконечныхъ строкъ или опредѣленныхъ интеграловъ.

Въ предлагаемомъ сочиненіи я занимаюсь вопросами перваго изъ двухъ упомянутыхъ отдѣловъ въ отношеніи къ уравненіямъ съ частными производными второго порядка функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ. Представивъ сжатый, но по возможности полный очеркъ главнѣйшихъ способовъ рѣшенія вопросовъ этого рода, я надѣялся пополнить пробѣлъ, существующій въ систематическихъ сочиненіяхъ по интегральному вычисленію. Дѣйствительно, большая часть ихъ ограничивается изложеніемъ способа Монжа, иногда въ болѣе полныхъ трактатахъ сообщаются также способы Эйлера и Лапласа; но я не припомню сочиненія, которое давало бы понятіе объ изслѣдованіяхъ Ампера по этому предмету, помѣщенныхъ въ XVII и XVIII тетрадяхъ журнала Политехнической школы. Изслѣдованіе Ампера, обнимая и теорію интеграловъ и способы интегрированія даже въ тѣхъ случаяхъ, для которыхъ недостаточенъ способъ Монжа, должно бы занимать почетное мѣсто во всякомъ серьезномъ курсѣ интегральнаго вычисленія, между тѣмъ обыкновенно предлагается, какъ уже замѣчено, способъ Монжа или этотъ способъ видоизмѣненный и не всегда къ лучшему. Вѣроятно такому забвенію почтеннаго труда Ампера способствовала редакція двухъ его обширныхъ мемуаровъ, не легко поддающаяся сжатому изложенію; но я старался и въ этомъ отношеніи сдѣлать, что было возможно. Систематическое изложеніе позволило мнѣ помѣстить мои собственныя изслѣдованія и выводы тамъ, гдѣ они должны являться въ естественномъ развитіи разсматриваемыхъ мною вопросовъ.

Изъ этихъ выводовъ я позволю себѣ указать только на опытъ обобщенія способа Лапласа (§ 9 гл. II) и на тотъ новый видъ, который я далъ приложенію способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ (гл. IV). Я полагаю, что читатель, знакомый съ предметомъ, легко замѣтитъ другія, менѣе важныя мѣста моего изслѣдованія, гдѣ я отступаю отъ моихъ источниковъ, всегда точно цитированныхъ въ сноскахъ.

ГЛАВА I.

Теорія интеграловъ уравненій съ частными производными.

§ 1.

Пріемы интегрированія каждаго класса дифференціальныхъ уравненій основываются на томъ представленіи, которое мы имѣемъ какъ о формѣ и составѣ ихъ интеграловъ, такъ о способѣ и различныхъ характеристическихъ обстоятельствахъ образованія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій изъ ихъ интеграловъ. Дѣйствительно, процессъ интегрированія дифференціальнаго уравненія и долженъ состоять вообще въ томъ, что мы проходимъ снова путь, приведшій къ нему по нашему предположенію отъ интеграла, но только въ обратномъ порядкѣ; поэтому, хотя этотъ обратный путь, вообще, гораздо труднѣе прямого, однако онъ облегчается знаніемъ особенностей послѣдняго и его исходной точки. Руководствуясь этимъ соображеніемъ, мы предпошлемъ изложенію способовъ интегрированія уравненій съ частными производными второго порядка теорію ихъ интеграловъ.

Не смотря на желаніе избѣгать введенія знаковъ, неосвященныхъ общимъ употребленіемъ, мы будемъ принуждены иногда нарушать это правило и теперь же сдѣлаемъ одно, впрочемъ весьма незатруднительное, условіе. Представляя напр. буквою u явную или неявную функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, мы будемъ означать черезъ $u_k^{(i)}$ частную производную ея, полученную дифференцированіемъ въ какой угодно послѣдовательности i разъ въ отношеніи x и k разъ въ отношеніи y, такъ что указатели чиселъ дифференцированія въ отношеніи x и y будутъ всегда написаны при u справа, 1-й вверху, 2-й внизу. Если намъ приведется ввести, посредствомъ какой-нибудь зависимости между x, y и α, вмѣсто первоначальныхъ независимыхъ перемѣнныхъ, новыя x и α; или еще, посредствомъ двухъ различныхъ зависимостей между x, y, α и β мы введемъ независимыя перемѣнныя α и β, вмѣсто x и y; то въ этихъ случаяхъ для частныхъ производныхъ функціи u мы будемъ употреблять обыкновенныя означенія $\frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial \alpha^k}$, $\frac{\partial^{i+k} u}{\partial \alpha^i \partial \beta^k}$. Едвали нужно дѣлать оговорку, что при этихъ различныхъ предположеніяхъ относительно независимыхъ перемѣнныхъ не должно принимать равными такія частныя производныя, какъ

$$u^{(i)} \text{ и } \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \; \frac{\partial^k u^{(i)}}{\partial \alpha^k} \text{ и } \frac{\partial^{i+k} u}{\partial x^i \partial \alpha^k} \text{ и т. п.}$$

Принявъ предыдущее условіе и означая черезъ z функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, а черезъ F выраженіе, составленное извѣстнымъ образомъ изъ входящихъ подъ этимъ знакомъ количествъ, мы можемъ представить общій видъ уравненій съ частными производными второго порядка слѣдующимъ образомъ:

$$F(x, y, z, z', z_{,}, z'', z'_{,}, z_{,,}) = 0, \tag{1}$$

и вообще уравненіе съ частными производными порядка m представится такъ:

$$F(x, y, z, z', z_{,}, z'', z'_{,}, z_{,,}, \ldots z^{(m)}, z^{(m-1)}, \ldots z'_{m-1}, z_m) = 0. \tag{2}$$

Чтобы обнаружить возможно общія черты въ теоріи интеграловъ разсматриваемаго класса уравненій, независящія отъ ихъ порядка, мы будемъ имѣть въ виду интегралы уравненія (2) порядка m.

Уравненіе (2) можно разсматривать какъ условіе, данное для опредѣленія неизвѣстной функціи z, и такъ какъ кромѣ его мы не имѣемъ еще другихъ добавочныхъ условій, то функція z будетъ опредѣлена, по этому условію, самымъ общимъ образомъ, если она удовлетворитъ ему и всѣмъ непосредственно проистекающимъ изъ него слѣдствіямъ. Слѣдствія же уравненія (2) безчисленны и получаются посредствомъ произвольнаго числа дифференцированій его въ отношеніи x и y. Притомъ перемѣнная величина z должна быть опредѣлена какъ функція x и y; слѣдовательно, искомое рѣшеніе или интегралъ долженъ представляться подъ видомъ уравненія между x, y, z, или системы уравненій между этими и другими величинами, приводимой окончательно къ одному уравненію между перемѣнными x, y и z. На основаніи предыдущихъ соображеній мы можемъ слѣдующимъ образомъ опредѣлить самое общее рѣшеніе или интегралъ уравненія (2).

Общимъ интеграломъ уравненія (2) съ частными производными порядка m называется уравненіе, или система уравненій между перемѣнными величинами вопроса x, y, z, которой принадлежитъ слѣдующее свойство: если съ одной стороны возьмемъ уравненія интеграла и всѣ ихъ производныя по x и y до порядка n включительно, гдѣ n произвольное число не меньшее m, а съ другой — данное уравненіе (2) и всѣ его производныя по x и y до порядка $n-m$ включительно, то первая система уравненій должна доставлять между перемѣнными x, y, ихъ функціею z и ея производными до порядка n только тѣ же самыя отношенія, которыя выражаются второю системою уравненій.

Если, выполняя упомянутое сейчасъ условіе, первая система уравненій дастъ кромѣ того между перемѣнными x, y, z и производными послѣдней отношенія, незаключающіяся во 2-й системѣ уравненій, тогда интегралъ будетъ называться *частнымъ*, или *особеннымъ*. Первый изъ нихъ получается какъ частный случай общаго интеграла и черезъ надлежащее обобщеніе можетъ произвести общій интегралъ; особенному же интегралу не принадлежитъ этихъ свойствъ.

Упомянутые интегралы по предположенію не заключаютъ производныхъ отъ функціи z, поэтому они могутъ быть названы *первообразными*. Если въ интегралъ войдутъ производныя отъ z, то всегда можно узнать, будетъ ли онъ общимъ, посредствомъ надлежащаго видоизмѣненія предыдущаго опредѣленія. Будетъ, или нѣтъ, такой интегралъ общимъ, во всякомъ случаѣ онъ можетъ быть названъ *посредствующимъ*, потому что можетъ быть разсматриваемъ какъ дифференціальное уравненіе, помощію интегрированія котораго можно получить интегралъ первообразный.

§ 2.

Пояснимъ простыми примѣрами изложенныя выше опредѣленія и свойства интеграловъ уравненія съ частными производными. Возьмемъ для этого уравненіе второго порядка

$$z_{''}-mz''=0, \tag{3}$$

въ которомъ m означаетъ данную постоянную величину. Общій интегралъ его можетъ быть представленъ системою уравненій:

$$z=\varphi(\alpha)+\psi(\beta),\quad \alpha=x+y\sqrt{m},\quad \beta=x-y\sqrt{m}, \tag{4}$$

или, по исключеніи α и β, однимъ уравненіемъ

$$z=\varphi(x+y\sqrt{m})+\psi(x-y\sqrt{m}), \tag{5}$$

гдѣ φ и ψ представляютъ совершенно произвольныя функціи.

Дѣйствительно, предыдущее значеніе z удовлетворяетъ данному уравненію и всѣмъ уравненіямъ вида

$$z_{k+2}^{(i)}-mz_k^{(i+2)}=0, \tag{6}$$

получаемымъ дифференцированіемъ даннаго i разъ въ отношеніи x и k разъ въ отношеніи y, при чемъ i, k могутъ быть всякія цѣлыя числа, начиная съ нуля. И такъ какъ уравненіе (5) не даетъ никакихъ другихъ соотношеній между производными z, кромѣ тѣхъ, которыя выражаются уравненіями (6), то оно представляетъ общій интегралъ уравненія (3).

Возьмемъ теперь другое выраженіе

$$z=a+bx+cy+hx^2+gxy+mhy^2, \tag{7}$$

въ которомъ a, b, c, h, g означаютъ произвольныя постоянныя величины. Нетрудно убѣдиться, что оно также удовлетворитъ данному уравненію (3) и всѣмъ слѣдствіямъ его (6); но сверхъ того выраженіе (7) даетъ еще другія отношенія между производными отъ z, а именно всѣ онѣ, начиная съ 3-го порядка, равны между собою, потому что приводятся къ нулю. Слѣдовательно, уравненіе (7) представляетъ только частный интегралъ уравненія (3). Этотъ частный интегралъ замѣчателенъ тѣмъ, что содержитъ столько же произвольныхъ постоянныхъ, сколько имѣемъ различныхъ частныхъ производныхъ отъ z, начиная съ перваго порядка и кончая порядкомъ даннаго уравненія, т.-е. пять. Слѣдовательно, если возьмемъ уравненіе интеграла и всѣ его производныя до 2-го порядка включительно, то будемъ имѣть именно столько уравненій, сколько необходимо для исключенія всѣхъ постоянныхъ. По этому свойству такіе частные интегралы названы Лагранжемъ *полными*. Очевидно, полный интегралъ уравненія m-го порядка долженъ содержать $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)-1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Частный интегралъ, какъ показываетъ его названіе, долженъ получаться какъ частный случай изъ общаго интеграла. Для поясненія на разсматриваемомъ примѣрѣ, введемъ α и β вмѣсто x и y въ уравненіе (7) посредствомъ двухъ послѣднихъ уравненій системы (4). Получимъ:

$$z=a+\frac{b}{2}(\alpha+\beta)+\frac{c}{2\sqrt{m}}(\alpha-\beta)+\frac{h}{4}(\alpha+\beta)^2+\frac{g}{4\sqrt{m}}(\alpha^2-\beta^2)+\frac{h}{4}(\alpha-\beta)^2,$$

а это уравненіе получится изъ (5), если произвольнымъ функціямъ дадимъ напр. слѣдующія частныя значенія:

$$\varphi(\alpha)=a+\frac{1}{2}\left(b+\frac{c}{\sqrt{m}}\right)\alpha+\frac{1}{2}\left(h+\frac{g}{2\sqrt{m}}\right)\alpha^2,$$

$$\psi(\beta)=\frac{1}{2}\left(b-\frac{c}{\sqrt{m}}\right)\beta+\frac{1}{2}\left(h-\frac{g}{2\sqrt{m}}\right)\beta^2.$$

Но еще важнѣе обратное отношеніе интеграловъ (4) и (7), на основаніи котораго возможно изъ частнаго интеграла, называемаго полнымъ, посредствомъ надлежащаго обобщенія, вывести общій интегралъ. *Лагранжъ* [1]) основалъ способъ такого преобразованія на измѣненіи произвольныхъ постоянныхъ. Этотъ способъ объясняется въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ.

Пусть полный интегралъ уравненія (1) будетъ

$$V=0,$$

гдѣ V содержитъ x, y, z и пять произвольныхъ постоянныхъ a, b, c, g, h. Выведемъ отсюда выраженія:

$$z'=P \text{ и } z_{,}=Q.$$

Затѣмъ, чтобы перейти къ общему интегралу, предположимъ, что a, b, c, g, h представляютъ функціи x, y, z, которыя должно опредѣлить такъ, чтобы полные дифференціалы выраженій V, P и Q сохранили тотъ же самый видъ, который они имѣли, когда a, b, c, g, h представляли постоянныя величины. Для этого должно только положить равными нулю дифференціалы V, P, Q, получаемые по измѣняемости a, b, c, g, h, что доставитъ три уравненія линейныхъ и однородныхъ относительно da, db, dc, dg, dh. Изъ этихъ уравненій, исключивъ которые-нибудь два изъ пяти дифференціаловъ и въ результатѣ исключенія положивъ равными нулю коэффиціенты при остальныхъ трехъ дифференціалахъ, будемъ имѣть три уравненія для опредѣленія пяти величинъ a, b, c, g, h. Поэтому двѣ изъ пяти разсматриваемыхъ величинъ остаются неопредѣленными и мы можемъ представить ихъ произвольными функціями остальныхъ трехъ. Однако, при этомъ должно поступать такъ, чтобы окончательно значенія всѣхъ пяти величинъ a, b, c, g, h выразились въ функціяхъ x, y, z. Затѣмъ нужно только присоединить найденныя выраженія къ уравненію $V=0$, и мы будемъ имѣть общій интегралъ.

---

[1]) «Sur les intégrales particulières des équations différentielles». Nouveaux Mémoires de l'Ac. de Berlin. 1774, p. 226.

Для приложенія этого способа къ разсматриваемому примѣру, замѣтимъ, что въ немъ

$$V = -z + a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2,$$
$$z' = P = b + 2hx + gy, \quad z_{,} = Q = c + gx + 2mhy.$$

Слѣдовательно, уравнявъ нулю дифференціалы V, P, Q, по измѣняемости a, b, c, g, h, получимъ для опредѣленія этихъ послѣднихъ величинъ три слѣдующія уравненія:

$$da + xdb + ydc + x^2dh + xydg + my^2dh = 0,$$
$$db + 2xdh + ydg = 0, \quad dc + xdg + 2my\,dh = 0.$$

Два послѣднія уравненія можно замѣнить двумя другими, равнозначущими имъ; для этого, умноживъ первое на неопредѣленный множитель μ и складывая со вторымъ, получимъ

$$\mu db + dc + x(2\mu dh + dg) + \mu y\left(2\frac{m}{\mu}dh + dg\right) = 0.$$

Мы можемъ опредѣлить μ такъ, чтобы было $\mu = \frac{m}{\mu}$, а отсюда получимъ два значенія $\mu = \pm\sqrt{m}$. Поэтому вмѣсто двухъ послѣднихъ уравненій предыдущей системы можемъ взять два слѣдующія:

$$dc + \sqrt{m}\,.\,db + (x + \sqrt{m}\,.\,y)(dg + 2\sqrt{m}\,.\,dh) = 0,$$
$$dc - \sqrt{m}\,.\,db + (x - \sqrt{m}\,.\,y)(dg - 2\sqrt{m}\,.\,dh) = 0.$$

Въ первомъ изъ этихъ уравненій входятъ дифференціалы только перемѣнныхъ

$$c + \sqrt{m}\,.\,b \text{ и } g + 2\sqrt{m}\,.\,h,$$

а во второмъ — перемѣнныхъ

$$c - \sqrt{m}\,.\,b \text{ и } g - 2\sqrt{m}\,.\,h,$$

и ничто не препятствуетъ принять первое изъ этихъ перемѣнныхъ произвольною функціею второго и третье произвольною функціею четвертаго. Поэтому, означая ω и π произвольныя функціи и черезъ ω' и π' производныя ихъ въ отношеніи соотвѣтственныхъ аргументовъ, будемъ имѣть:

$$c+\sqrt{m}\,.\,b=\omega(g+2\sqrt{m}\,.\,h),\ \ c-\sqrt{m}\,.\,b=\pi(g-2\sqrt{m}\,.\,h),$$

откуда

$$dc+\sqrt{m}\,.\,db=\omega'(g+2\sqrt{m}\,.h)\,.\,(dg+2\sqrt{m}\,dh),$$
$$dc-\sqrt{m}\,.\,db=\pi'(g-2\sqrt{m}\,.\,h).(dg-2\sqrt{m}\,dh).$$

Слѣдовательно, предыдущія уравненія примутъ такой видъ:

$$\omega'(g+2\sqrt{m}\,.\,h)+(x+\sqrt{m}\,.\,y)=0,$$
$$\pi'(g-2\sqrt{m}\,.\,h)+(x-\sqrt{m}\,.\,y)=0.$$

Такъ какъ ω' и π' функціи произвольныя, то, означая черезъ Ω и Π двѣ другія произвольныя функціи, изъ предыдущихъ уравненій будемъ имѣть:

$$g+2\sqrt{m}\,.\,h=\Omega(x+\sqrt{m}\,.\,y),$$
$$g-2\sqrt{m}\,.\,h=\Pi(x-\sqrt{m}\,.\,y),$$

или, полагая $x+\sqrt{m}\,.\,y=\alpha$ и $x-\sqrt{m}\,.\,y=\beta$,

$$g+2\sqrt{m}\,.\,h=\Omega(\alpha),\ \ g-2\sqrt{m}\,.\,h=\Pi(\beta)$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ предыдущія дифференціальныя уравненія примутъ видъ:

$$dc+\sqrt{m}\,.\,db=-\alpha d\Omega(\alpha),\quad dc-\sqrt{m}\,.\,db=-\beta d\Pi(\beta).$$

Помощію четырехъ послѣднихъ уравненій находимъ слѣдующія значенія для четырехъ изъ искомыхъ величинъ:

$$g=\frac{\Omega(\alpha)+\Pi(\beta)}{2},\quad h=\frac{\Omega(\alpha)-\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}},$$

$$c=-\frac{\int\alpha d\Omega(\alpha)+\int\beta d\Pi(\beta)}{2},\quad b=-\frac{\int\alpha d\Omega(\alpha)-\int\beta d\Pi(\beta)}{2\sqrt{m}}.$$

Вставивъ эти значенія и выраженія

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad y=\frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{m}}$$

въ первое изъ условныхъ уравненій, по приведеніи, получимъ

$$da=\frac{\alpha^2 d\Omega(\alpha)-\beta^2 d\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}}$$

и, послѣ интегрированія, найдемъ значеніе послѣдней искомой величины

$$a=\frac{\int\alpha^2 d\Omega(\alpha)-\int\beta^2 d\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}}.$$

Совокупность уравненій (7) и тѣхъ, которыя представляютъ значенія a, b, c, g, h, x, y образуетъ уже общій интегралъ, но если хотимъ представить его однимъ уравненіемъ, то должно въ уравненіе (7) вставить значенія a, b, c, g, h, x, y. Такимъ образомъ по приведеніи получимъ

$$z=\frac{\int\alpha^2 d\Omega(\alpha)-2\alpha\int\alpha d\Omega(\alpha)+\alpha^2\Omega(\alpha)}{4\sqrt{m}}-$$

$$-\frac{\int\beta^2 d\Pi(\beta)-2\beta\int\beta d\Pi(\beta)+\beta^2\Pi(\beta)}{4\sqrt{m}}.$$

Но это выраженіе z еще упрощается посредствомъ интегрированія по частямъ и принимаетъ слѣдующій видъ

$$z = \frac{\int d\alpha \int \Omega(\alpha) d\alpha - \int d\beta \int \Pi(\beta) d\beta}{2\sqrt{m}}.$$

Наконецъ можно, если угодно, пользуясь произвольностью функцій Ω и Π, положить

$$\Omega(\alpha) = 2\sqrt{m}\,\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}, \quad \Pi(\beta) = -2\sqrt{m}\,\frac{d^2\psi(\beta)}{d\beta^2},$$

означая черезъ φ и ψ произвольныя функціи; вслѣдствіе чего общій интегралъ принимаетъ видъ

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad \alpha = x + \sqrt{m} \,.\, y, \; \beta = x - \sqrt{m} \,.\, y,$$

въ которомъ онъ былъ данъ выше.

Способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ для разсматриваемаго класса уравненій имѣетъ не менѣе важное значеніе, чѣмъ въ другихъ случаяхъ, гдѣ онъ способствовалъ открытію общихъ пріемовъ интегрированія. Но изобрѣтатель его, Лагранжъ, не открывъ самой удобной формы для приложенія этого способа въ разсматриваемомъ случаѣ, не оцѣнилъ по достоинству его значенія [1]. Гораздо болѣе счастливое примѣненіе этому способу далъ *Амперъ*, какъ будетъ показано въ концѣ этого сочиненія, гдѣ мы предлагаемъ еще дальнѣйшее обобщеніе этихъ пріемовъ и даемъ формулы, на основаніи которыхъ способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ становится наиболѣе общимъ пріемомъ для интегрированія разсматриваемаго класса уравненій.

---

[1] Au reste on voit par cet exemple, qui est d'ailleurs un des plus simples, que la méthode dont il s'agit, quoique directe et générale est en quelque façon plus curieuse q'utile à cause des difficultés qui peuvent se rencontrer dans l'intégration des équations de condition. Lagrange. Цит. выше Мемуаръ, 269 стр.

Посмотримъ теперь, какимъ образомъ способъ Лагранжа прилагается къ посредствующимъ интеграламъ уравненій съ частными производными. Пусть уравненіе

$$V=0$$

представляетъ интегралъ уравненія съ частными производными m-го порядка

$$F=0.$$

Если онъ содержитъ производныя отъ z порядка $k<m$, то мы будемъ называть его посредствующимъ интеграломъ порядка k. Уравненіе $V=0$ со всѣми своими производными по x и y до порядка $m-k$ образуетъ систему уравненій, которыхъ число равно $\frac{1}{2}(m-k+2)(m-k+1)$. Слѣдовательно, если интегралъ $V=0$ будетъ частнымъ, то наибольшее число произвольныхъ постоянныхъ, могущихъ въ немъ содержаться, такъ чтобы черезъ исключеніе ихъ изъ предыдущей системы уравненій получалось данное уравненіе $F=0$, будетъ $\frac{1}{2}(m-k+2)(m-k+1)-1$. При этомъ условіи посредствующій интегралъ называется полнымъ.

Поэтому посредствующіе интегралы уравненія съ частными производными 2-го порядка могутъ быть только 1-го порядка и полный интегралъ $W=0$ такого уравненія долженъ заключать двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины, положимъ a и b. Чтобы перейти отъ него къ общему интегралу 1-го порядка, должно разсматривать a и b какъ функціи $x, y, z, z', z_{\prime}$, опредѣленныя такъ, чтобы полный дифференціалъ W и при этомъ предположеніи сохранилъ тотъ же самый видъ, какой принадлежалъ ему когда a и b были постоянными. Уравнявъ нулю дифференціалъ W, полученный по измѣняемости a и b, будемъ имѣть единственное условное уравненіе

$$\frac{dW}{da}da+\frac{dW}{db}db=0,$$

служащее для опредѣленія функцій a и b. А такъ какъ въ него входятъ дифференціалы только двухъ перемѣнныхъ величинъ a и b, то вторую изъ нихъ можемъ принять произвольною функціею первой, полагая $b=\varphi(a)$. Послѣ этого предыдущее условное уравненіе приметъ видъ

$$\frac{dW}{da}+\frac{dW}{db}\varphi'(a)=0$$

и вмѣстѣ съ уравненіями:

$$b=\varphi(a) \text{ и } W=0$$

будетъ представлять полный интегралъ даннаго уравненія. Такъ напримѣръ, полный интегралъ 1-го порядка для уравненія (3) будетъ

$$z_{,}+\sqrt{m}\,.\,z'=a+b(x+\sqrt{m}\,.\,y).$$

Обобщая его, должно положить

$$da+(x+\sqrt{m}\,.\,y)db=0 \quad \text{и} \quad b=\varphi(a),$$

откуда $1+(x+\sqrt{m}\,.\,y)\varphi'(a)=0$, или $\varphi'(a)=-\dfrac{1}{x+\sqrt{m}\,.\,y}$.

Слѣдовательно, a есть произвольная функція отъ $x+\sqrt{m}\,y$, но b есть произвольная функція отъ a, слѣдовательно и отъ $x+\sqrt{m}\,y$; поэтому $a+b(x+\sqrt{m}\,.\,y)$ есть также произвольная функція отъ $x+\sqrt{m}\,.\,y$. Итакъ, общій интегралъ 1-го порядка уравненія (3) будетъ

$$z_{,}+\sqrt{m}\,.\,z'=\omega(x+\sqrt{m}\,.\,y),$$

означая черезъ ω произвольную функцію. Помощію его уже нетрудно получить общій первообразный интегралъ. Отсюда видно, что приложеніе способа Лагранжа къ посредствующимъ полнымъ интеграламъ уравненій 2-го порядка весьма упрощается тѣмъ обстоятельствомъ, что для опредѣленія функцій a и b дается только одно условное уравненіе. Поэтому можетъ казаться, что вмѣсто непосредственнаго приложенія этого способа къ полному первообразному интегралу, было бы гораздо проще вывести изъ него полный интегралъ 1-го порядка и затѣмъ приложить къ этому послѣднему способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ. Однако и на этомъ пути встрѣчается слѣдующее препятствіе: полный первообразный интегралъ заключаетъ *пять* произвольныхъ постоянныхъ и вмѣстѣ съ двумя производными 1-го порядка даетъ всего *три* уравненія, изъ которыхъ невозможно *вообще* исключить трехъ постоянныхъ, чтобы получить полный интегралъ 1-го порядка, который долженъ содержать только двѣ постоянныхъ величины. — Итакъ, изъ этого слѣдуетъ, что полный интегралъ уравненія съ частными производными не влечетъ за собою, подобно полному интегралу обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія, какъ необходимое алгебраическое слѣдствіе, существованіе полныхъ интеграловъ посредствующихъ. Еще бо́льшаго вниманія заслуживаетъ то обстоятельство, что между уравненіями съ частными производными находятся и такія, которыя вовсе не допускаютъ посредствующихъ интеграловъ. Для подтвержденія этого замѣчанія достаточно будетъ привести простѣйшій примѣръ. Пусть данное уравненіе будетъ

$$z_{,}' = z.$$

Предположимъ, что ему принадлежитъ интегралъ перваго порядка, который, не нарушая общности, можемъ представить такимъ образомъ

$$z' = f(x,\ y,\ z,\ z_{,}).$$

Поэтому данное уравненіе можетъ быть разсматриваемо какъ алгебраическое слѣдствіе предыдущаго и двухъ его производныхъ уравненій:

$$(b) \qquad z_{,}' = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} z_{,} + \frac{\partial f}{\partial z_{,}} z_{,,}\,,\quad z'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} z' + \frac{\partial f}{\partial z_{,}} z_{,}' \qquad (c)$$

и, слѣдовательно, въ предыдущей системѣ можно замѣнить уравненіе (b) или (c) даннымъ. Но еслибъ мы вывели изъ уравненій (b) и (c) значенія двухъ изъ величинъ z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ и снова вставили въ нихъ эти значенія, то, очевидно, получили бы тождества. Слѣдовательно, точно также получится тождество и въ результатѣ подстановки этихъ значеній въ данное уравненіе.— Вставляя значеніе $z_{,}'$, изъ уравненія (b) въ данное получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}z_{,}+\frac{\partial f}{\partial z_{,}}z_{,,}=z. \qquad (\partial)$$

На основаніи предыдущаго это уравненіе должно быть тождественнымъ, если только данное допускаетъ интегралъ перваго порядка. Въ предпологаемомъ тождествѣ членъ съ $z_{,,}$ не можетъ сократиться съ другими, поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial z_{,}}=0,$$

т.-е. f не заключаетъ $z_{,}$; а въ такомъ случаѣ и членъ съ $z_{,}$ не имѣетъ себѣ подобныхъ и должно быть

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Поэтому f можетъ заключать только x и y; но тогда равенство между $\frac{\partial f}{\partial y}$ и z, къ которому окончательно привелось условіе (∂), не можетъ быть осуществлено. Слѣдовательно, разсматриваемое уравненіе не способно имѣть интегралъ 1-го порядка [1]).

Предыдущій пріемъ, хотя и объясненный на частномъ примѣрѣ, имѣетъ достаточную общность. Примѣняя его въ однихъ случаяхъ, также какъ и въ предыдущемъ, убѣдимся въ невозможности существованія посредствующаго интеграла, въ другихъ—будемъ приведены къ нѣсколькимъ, не противорѣчащимъ одно другому, совмѣстнымъ уравненіямъ съ частными производ-

[1]) *Raabe.* Differential- und Integralrechnung. III. § 704.

водными функціи f. Иногда въ самомъ дѣлѣ этимъ путемъ приводятъ интегрированіе уравненія съ частными производными 2-го порядка къ интегрированію системы совмѣстныхъ уравненій съ частными производными 1-го порядка. Но здѣсь мы ограничимся этимъ указаніемъ, имѣя въ виду перейти теперь къ изученію главнѣйшихъ свойствъ общихъ интеграловъ, служащихъ основаніемъ другихъ болѣе общихъ пріемовъ интегрированія разсматриваемаго класса уравненій.

§ 3.

Основныя свойства общаго интеграла уравненія съ частными производными вытекаютъ изъ опредѣленія его, даннаго выше § 1. Мы видѣли, что общій интегралъ можно представлять системою нѣсколькихъ уравненій, приводимыхъ окончательно къ одному между перемѣнными вопроса x, y, z. Поэтому пусть

$$V=0$$

будетъ уравненіе между x, y, z и нѣкоторыми произвольными количествами, число и природа которыхъ пока неизвѣстны, представляющее общій интегралъ уравненія (2) съ частными производными порядка m. Мы займемся теперь опредѣленіемъ главнаго характера этихъ произвольныхъ количествъ, ихъ числа и изслѣдованіемъ различныхъ обстоятельствъ, встрѣчающихся при переходѣ отъ общаго интеграла къ соотвѣтствующему дифференціальному уравненію.

Означивъ черезъ n число не меньшее m и взявъ уравненіе общаго интеграла вмѣстѣ со всѣми его производными по x и y до порядка n включительно, образуемъ систему уравненій, которую, на основаніи принятаго означенія, можемъ представить слѣдующимъ образомъ

$$(A)\quad \begin{cases} V=0, \quad V'=0, \quad V_{\prime}=0, \quad V''=0, \quad V'_{\prime}=0, \quad V_{\prime\prime}=0,\ldots \\ V^{(n)}=0, \quad V_{\prime}^{(n-1)}=0, \ldots\ldots\ldots V'_{n-1}=0, \quad V_n=0. \end{cases}$$

Подобнымъ образомъ изъ уравненія (2) и всѣхъ его производныхъ до порядка $n-m$ составимъ систему уравненій

$$(B)\quad \begin{cases} F=0, \quad F'=0, \quad F_{\prime}=0, \quad F''=0, \quad F'_{\prime}=0, \quad F_{\prime\prime}=0, \ldots \\ F^{(n-m)}=0, \; F_{\prime}^{(n-m-1)}=0, \ldots F'_{(n-m-1)}=0, \; F_{(n-m)}=0. \end{cases}$$

Уравненія (A), по опредѣленію общаго интеграла, должны доставлять только тѣ же самыя отношенія между

$$x, \; y, \; z, \; z', \; z_{\prime}, \ldots z^{(n)}, \ldots z_{(n)},$$

которыя выводятся изъ уравненій (B). Но въ системѣ (A) имѣемъ $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ уравненій, между тѣмъ какъ въ системѣ (B) ихъ находится только $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$; поэтому первая изъ этихъ системъ можетъ и даже должна заключать количества произвольныя, не входящія во вторую систему, и которыхъ число должно быть не менѣе разности чиселъ $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ и $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$, равной

$$(n+1)m-\frac{m(m-1)}{2}. \qquad (c)$$

Въ такомъ только случаѣ возможно, исключеніемъ произвольныхъ количествъ, сдѣлать уравненія (A) и (B) совершенно однозначущими. Обративъ же вниманіе на число (c), назначающее наименьшій предѣлъ числа произвольныхъ количествъ въ уравненіяхъ (A), замѣчаемъ, что оно не постоянно, но, напротивъ, возрастаетъ вмѣстѣ съ n. Слѣдовательно, относительно природы произвольныхъ количествъ, входящихъ въ общій интегралъ, мы въ правѣ сдѣлать такое заключеніе: *конечный интегралъ уравненія съ частными производными, чтобы быть общимъ, долженъ заключать въ себѣ такія произвольныя количества, которыхъ число возрастаетъ при дифференцированіи интеграла.*

Математическій анализъ доставляетъ только два вида выраженій произвольныхъ количествъ, удовлетворяющихъ предыдущему требованію.

Къ первому виду принадлежатъ произвольныя функціи отъ аргументовъ, выражающихся опредѣленными функціями главныхъ перемѣнныхъ, въ отношеніи которыхъ производится дифференцированіе. Такъ, напримѣръ, для уравненія

$$z_{\prime\prime} - mz'' = 0$$

мы имѣли общій интегралъ

$$z = \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad \alpha = x + y\sqrt{m}, \; \beta = x - y\sqrt{m},$$

гдѣ φ и ψ произвольныя функціи соотвѣтственныхъ аргументовъ α и β, данныхъ какъ *явныя* функціи x и y. Но аргументы, входящіе подъ знаками произвольныхъ функцій въ общемъ интегралѣ, выражаются иногда и *неявными* функціями главныхъ перемѣнныхъ и притомъ такъ, что эти выраженія измѣняются вмѣстѣ съ формою произвольныхъ функцій. Для поясненія можетъ служить уравненіе

$$(z'' - z'z_{\prime\prime})^2 = z_{\prime}^2 z'' z_{\prime\prime},$$

котораго общій интегралъ, какъ убѣждаемся повѣркою, будетъ

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{x\alpha^4 - 2\alpha^2 y + 4\alpha^3\varphi(\alpha)}{3} - 4\int \alpha^2\varphi(\alpha)\,d\alpha + \psi(\beta). \\ y &= \alpha^2\left(x + \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right), \quad \beta = \frac{y}{\alpha} + \alpha x + \varphi(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

Въ него входятъ произвольныя функціи φ и ψ, которыхъ соотвѣтственные аргументы α и β даны какъ *неявныя* функціи x и y, опредѣляемыя посредствомъ двухъ послѣднихъ уравненій интеграла такъ, что ихъ выраженія измѣняются вмѣстѣ съ формою функціи φ.

Возможенъ еще другой видъ аналитическихъ выраженій для произвольныхъ количествъ общаго интеграла, удовлетворяющихъ также приведенному выше общему требованію. Чтобы получить понятіе объ этомъ видѣ, представимъ интегралъ, опредѣленный или неопредѣленный, отъ выраженія, заключающаго въ себѣ произвольную функцію, соединенную съ нѣсколькими перемѣнными количествами, изъ которыхъ только одно то, котораго дифференціалъ умножаетъ это выраженіе, разсматривается какъ перемѣнное интегрированія, между тѣмъ какъ прочія принимаются при этомъ дѣйствіи постоянными. Дѣйствіе такого интегрированія можно, слѣдуя Амперу, по аналогіи съ частнымъ дифференцированіемъ, назвать *частнымъ интегрированіемъ*, а результатъ его удобнѣе означить названіемъ *частной суммы*, потому что, употребивъ для этого названіе частный интегралъ, мы имѣли бы терминъ съ двоякимъ значеніемъ.

Такъ какъ въ частной суммѣ кромѣ перемѣннаго интегрированія всѣ другія разсматриваются постоянными, то дифференцированіемъ ея въ отношеніи этихъ послѣднихъ получаются другія частныя суммы, вообще различныя отъ первоначальной, которыя поэтому, находясь въ уравненіяхъ (A), должны быть и исключаемы порознь. Для большей отчетливости понятія о выраженіяхъ этого вида приведемъ частные примѣры. Общій интегралъ уравненія

$$z''=z,$$

можно представить слѣдующимъ образомъ

$$z=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+2u\sqrt{-u})\,e^{-u^2}du.$$

Въ немъ входитъ частная *опредѣленная* сумма отъ выраженія, въ которомъ φ означаетъ произвольную функцію, u перемѣнное интегрированія, между тѣмъ какъ x и y, независимыя перемѣнныя даннаго уравненія, являются въ этой суммѣ какъ произвольные параметры. Уравненіе

$$z''-z_{\prime\prime}+\frac{4}{x+y}z'=0$$

имѣетъ общій интегралъ

$$z=2e^{-\frac{2x}{\alpha}}\left\{\int\frac{e^{\frac{2x}{\alpha}}}{\alpha}\varphi(\alpha-2x)dx+\psi(\alpha)\right\},\quad \alpha=x+y,$$

гдѣ e основаніе Неперовыхъ логариѳмовъ, φ и ψ знаки произвольныхъ функцій; x перемѣнное интегрированія частной *неопредѣленной* суммы, количество же $\alpha=x+y$ во время интегрированія разсматривается постояннымъ параметромъ.

Общіе интегралы уравненій съ частными производными, содержащіе произвольныя функціи, но не заключающіе въ своемъ составѣ частныхъ суммъ, образуютъ классъ сравнительно простѣйшій и представляющій болѣе опредѣленныя характеристическія черты. Сравнительная простота ихъ состоитъ въ томъ, что при дифференцированіи въ отношеніи перемѣнныхъ, различныхъ отъ аргументовъ α, β,... произвольныхъ функцій, они не доставляютъ иныхъ произвольныхъ количествъ кромѣ тѣхъ, которыя уже заключаются въ уравненіяхъ интеграла, что, какъ замѣчено выше, можетъ и не случиться относительно частныхъ суммъ. Постоянная характеристическая черта ихъ, какъ будетъ доказано ниже, заключается въ томъ, что число независимыхъ произвольныхъ функцій, содержащихся въ нихъ, всегда равно порядку дифференціальныхъ уравненій, которымъ эти интегралы принадлежатъ.

Изъ этихъ интеграловъ Амперъ образовалъ особый классъ, названный имъ первымъ. Названіе едва ли удобное, потому что заставляетъ ожидать вслѣдъ за первымъ классомъ еще другихъ; между тѣмъ какъ классификація не проводится далѣе. Поэтому кажется лучше принять для нихъ названіе *общихъ интеграловъ безъ частныхъ суммъ.*

Общій типъ интеграла этого класса, соотвѣтствующаго дифференціальному уравненію m-го порядка, мы будемъ представлять подъ видомъ системы пока неопредѣленнаго числа, $k+1$ уравненій, заключающихъ: 1) кромѣ главныхъ перемѣнныхъ x, y, z, —k перемѣнныхъ количествъ: α, β, γ и проч., 2) пока неопредѣленное число g независимыхъ между собою произвольныхъ функцій: $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$, $\omega(\gamma)$ и проч., 3) производныя этихъ функцій до опредѣленныхъ порядковъ,

$$\varphi'(\alpha),\ \varphi''(\beta),\ldots\ \psi'(\beta),\ \psi''(\beta),\ldots\ \omega'(\gamma),\ \omega''(\gamma)\ldots \text{ и пр.},$$

полученныя путемъ дифференцированія въ отношеніи соотвѣтственныхъ аргументовъ α, β, γ и проч., 4) количества, получаемыя путемъ интегрированія въ отношеніи α какихъ-либо данныхъ выраженій изъ α, $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$ и проч., или интегрированія въ отношеніи β какихъ-либо данныхъ выраженій изъ β, $\psi(\beta)$, $\psi'(\beta)$ и проч. и т. д.

§ 4.

Общій интегралъ безъ частныхъ суммъ, описаннаго выше типа, заключаетъ произвольныя количества, которыхъ число возрастаетъ при дифференцированіи уравненій интеграла. Мы прослѣдимъ теперь, какимъ образомъ произвольныя количества, незаключающіяся въ уравненіяхъ интеграла, постепенно появляются въ выраженіяхъ частныхъ производныхъ функціи z. Для этого посмотримъ сначала, какъ могутъ быть выведены выраженія всѣхъ производныхъ отъ z изъ уравненій интеграла.

Дифференцируя послѣдовательно по x и y $k+1$ уравненій интеграла, получимъ $2(k+1)$ уравненій 1-го порядка, изъ которыхъ возможно вывести выраженія $2(k+1)$ производныхъ 1-го порядка:

$$z',\ z_{,},\ \alpha',\ \alpha_{,},\ \beta',\ \beta_{,},\ \gamma',\ \gamma_{,}\ldots$$

Переходя посредствомъ новыхъ дифференцированій по x и y къ уравненіямъ 2-го порядка, которыхъ число будетъ $3(k+1)$, и вставивъ въ нихъ предыдущія выраженія z', $z_{,}$, α', $\alpha_{,}$, β', $\beta_{,}$ и проч., можемъ вывести выраженія $3(k+1)$ производныхъ 2-го порядка:

$$z'',\ z'_{,},\ z_{,,},\ \alpha'',\ \alpha'_{,},\ \alpha_{,,},\ \beta'',\ \beta'_{,},\ \beta_{,,},\ldots$$

Продолжая такимъ образомъ, пока дойдемъ до производныхъ какого-нибудь порядка n, можемъ послѣдовательно вывести выраженія всѣхъ производныхъ:

$$z',\ z_{,},\ z'',\ z'_{,},\ z'',\ldots\ z^{(n)},\ldots\ z_{(n)},$$

въ которыя войдутъ количества, содержащіяся въ интегралѣ съ прибавленіемъ новыхъ произвольныхъ количествъ, получаемыхъ дифференцированіемъ произвольныхъ количествъ интеграла въ отношеніи ихъ соотвѣтственныхъ аргументовъ.

Для рѣшенія различныхъ вопросовъ относительно появленія этихъ новыхъ произвольныхъ количествъ въ выраженіяхъ производныхъ отъ z, измѣнимъ первоначальную систему независимыхъ перемѣнныхъ. Предположивъ, что всѣ аргументы α, β, γ и проч. произвольныхъ функцій зависятъ отъ обѣихъ перемѣнныхъ x и y, введемъ, какъ новую систему независимыхъ перемѣнныхъ, какой-нибудь изъ этихъ аргументовъ, положимъ α, и одно изъ прежнихъ независимыхъ перемѣнныхъ, положимъ x.

Пусть въ самомъ дѣлѣ будетъ

$$\alpha = f(x, y);$$

на основаніи этого уравненія y будетъ функціею x и α, и всѣ перемѣнныя количества, зависимыя отъ x и y, могутъ теперь быть разсматриваемы функціями x и α. Къ этому прибавимъ еще замѣчаніе, которымъ вскорѣ воспользуемся, именно:

Производныя $\frac{\partial y}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ *не могутъ имѣть значеній 0 и* ∞. Въ самомъ дѣлѣ, принимая въ предыдущемъ уравненіи независимыми перемѣнными x и α и дифференцируя его по x, слѣдовательно, разсматривая α постояннымъ, имѣемъ

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Поэтому $\frac{\partial y}{\partial x}$ обратится въ 0 или ∞, когда соотвѣтственно будетъ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ или $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; но ни то, ни другое невозможно, ибо f представляетъ значеніе α, которое по предложенію зависитъ отъ x и y.

Далѣе, y по уравненію $\alpha=f(x, y)$ есть очевидная функція α, слѣдовательно, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ не можетъ приводиться къ нулю; дифференцируя же это уравненіе въ отношеніи α, слѣдовательно, разсматривая x постояннымъ, получимъ

$$1=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \text{откуда } \frac{\partial y}{\partial \alpha}=\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Поэтому $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ будетъ $=\infty$, если $\frac{\partial f}{\partial y}=0$; но это невозможно, ибо функція f, представляющая значеніе α, содержитъ y.

Итакъ, въ $k+1$ уравненіяхъ интеграла мы будемъ разсматривать x и α независимыми перемѣнными; прочія перемѣнныя, числомъ $k+1$, y, z, β, γ и проч. будутъ функціями x и α.

Для означенія частныхъ производныхъ въ отношеніи новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ x и α должно вспомнить условіе, сдѣланное выше въ § 1.

Теперь относительно появленія въ выраженіяхъ производныхъ отъ z, выводимыхъ изъ уравненій интеграла, произвольныхъ количествъ, не заключавшихся въ этихъ уравненіяхъ, мы можемъ доказать слѣдующее предложеніе:

Если новое произвольное количество (нѣкоторая произвольная функція отъ α, не заключавшаяся въ уравненіяхъ интеграла) появляется въ первый разъ въ выраженіи частной производной $z_k^{(i)}$ порядка $n=i+k$, *то оно необходимо должно появиться также и во всѣхъ частныхъ производныхъ отъ* z n*-го порядка:*

$$z^{(n)},\ z_{\prime}^{(n-1)},\ldots\ z_{k-1}^{(i+1)},\ z_k^{(i)},\ z_{k+1}^{(i-1)},\ldots\ z'_{(n-1)},\ z_{(n)}. \qquad (n)$$

Достаточно доказать это предложеніе для производныхъ $z_{k-1}^{(i+1)}$ и $z_{k+1}^{(i-1)}$ сосѣднихъ съ $z_k^{(i)}$ въ ряду (n), потому что, примѣняя то же доказательство къ производнымъ, стоящимъ вправо отъ $z_{k+1}^{(i-1)}$ и влѣво отъ $z_{k-1}^{(i+1)}$, мы распространимъ его на весь рядъ (n).

Для этого возьмемъ частныя производныя $n-1$ порядка $z_k^{(i-1)}$ и $z_{k-1}^{(i)}$, изъ которыхъ происходитъ $z_k^{(i)}$, при независимыхъ перемѣнныхъ x и y, дифференцированіемъ первой по x и второй по y.

Принимая теперь независимыми перемѣнными x и α и дифференцируя эти двѣ функціи въ отношеніи x, получимъ

$$\frac{\partial z_k^{(i-1)}}{\partial x}=z_k^{(i)}+z_{k+1}^{(i-1)}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x}=z_{k-1}^{(i+1)}+z_k^{(i)}\frac{\partial y}{\partial x},$$

и отсюда выводимъ

$$z_{k-1}^{(i+1)}=\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x}-z_k^{(i)}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad z_{k+1}^{(i-1)}=\frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}\left(\frac{\partial z_k^{(i-1)}}{\partial x}-z_k^{(i)}\right).$$

Но по предложенію новое произвольное количество, появившееся въ $z_k^{(i)}$, не входитъ ни въ уравненія интеграла, ни въ выраженія производныхъ отъ z до порядка $n-1$ включительно; слѣдовательно, оно не можетъ также входить ни въ выраженіе y, выводимое изъ уравненій интеграла, ни въ выраженія $\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x}$, $\frac{\partial z_k^{(i-1)}}{\partial x}$, получаемыя дифференцированіемъ по x производныхъ $n-1$-го порядка $z_{k-1}^{(i)}$, $z_k^{(i-1)}$, при чемъ α разсматривается постояннымъ. Сверхъ того, по доказанному выше, $\frac{\partial y}{\partial x}$ не можетъ быть ни 0, ни ∞. Итакъ, разсматриваемая произвольная функція отъ α заключается во вторыхъ частяхъ послѣднихъ равенствъ только во множителѣ $z_k^{(i)}$ вторыхъ членовъ, и притомъ эти члены не могутъ уничтожаться; поэтому необходимо первыя части этихъ равенствъ, т.-е. выраженія $z_{k-1}^{(i+1)}$ и $z_{k+1}^{(i-1)}$, должны заключать ту же произвольную функцію отъ α, которая появилась въ $z_k^{(i)}$. Что и требовалось доказать.

Предложеніе обратное предыдущему также имѣетъ мѣсто, именно: *если выраженіе производной $z_k^{(i)}$ порядка $n=i+k$ содержитъ только тѣ же произвольныя функціи отъ α, которыя входятъ въ производныя z низшихъ порядковъ, то и всѣмъ производнымъ порядка n должно принадлежать это свойство.*

Чтобы видѣть, при какомъ условіи появляется въ выраженіяхъ производныхъ n-го порядка новая произвольная функція отъ α, которой не находилось въ выраженіяхъ производныхъ порядка $n-1$, возьмемъ одну изъ этихъ послѣднихъ $z^{i}_{(k-1}$ и дифференцируемъ ее частнымъ образомъ по α. Получимъ равенство

$$\frac{\partial z^{(i)}_{k-1}}{\partial \alpha} = z^{(i)}_{k} \frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

гдѣ $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ не можетъ быть ни 0, ни ∞; поэтому

$$z^{(i)}_{k} = \frac{\frac{\partial z^{(i)}_{k-1}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Въ числителѣ и знаменателѣ дроби второй части должна появиться новая произвольная функція отъ α, которой не было въ выраженіяхъ $z^{(i)}_{k-1}$ и y; эта произвольная функція, если только она не входитъ исключительно въ общемъ дѣлителѣ числителя и знаменателя, будетъ находиться также въ выраженіи производной n-го порядка $z^{(i)}_{k}$. Это замѣчаніе вмѣстѣ съ предыдущимъ предложеніемъ приводитъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) Выраженія производныхъ n-го порядка: $z^{(n)}, \ldots z_{(n)}$ будутъ заключать произвольную функцію, не содержащуюся въ выраженіяхъ производныхъ $n-1$-го порядка: $z^{(n-1)}, \ldots z_{n-1}$, если только она не войдетъ исключительно въ общемъ дѣлителѣ $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ и каждаго изъ выраженій $\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial \alpha}, \ldots \frac{\partial z_{(n-1)}}{\partial \alpha}$; эти послѣднія выраженія необходимо всѣ безъ исключенія должны имѣть, или не имѣть, упомянутаго общаго дѣлителя съ $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$.

2) Такъ какъ въ дроби, представляющей значеніе $z^{(i)}_{k}$, при измѣненіи числа $n=i+k$ знаменатель остается одинъ и тотъ же, а числитель постоянно измѣняется; то появляющіяся въ немъ

новыя произвольныя функціи отъ α не могутъ быть постоянно однѣ и тѣ же, а будучи различными и отдѣляясь даже всегда въ особый множитель, не могутъ постоянно сокращаться съ подобными множителями знаменателя; ибо въ такомъ случаѣ этотъ послѣдній долженъ состоять изъ произведенія неопредѣленнаго числа различныхъ множителей. Слѣдовательно, всегда существуетъ такой порядокъ производныхъ, въ которыхъ появится произвольная функція отъ α, не заключающаяся въ уравненіяхъ интеграла и выраженіяхъ низшихъ производныхъ.

3) какъ скоро это случится для нѣкотораго порядка n производныхъ, то въ каждомъ изъ слѣдующихъ порядковъ: $n+1$, $n+2$ и проч. будутъ появляться новыя произвольныя функціи отъ α. Достаточно въ этомъ убѣдиться для производныхъ порядка $n+1$. Дифференцируя $z_k^{(i)}$ частнымъ образомъ по α, получимъ

$$\frac{\partial z_k^{(i)}}{\partial \alpha} = z_{k+1}^{(i)} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \text{откуда} \quad z_{k+1}^{(i)} = \frac{\dfrac{\partial z_k^{(i)}}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Числитель второй части послѣдняго равенства содержитъ функцію отъ α, производную отъ той, которая вновь появилась въ $z_k^{(i)}$ и эта функція не можетъ входить въ $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, потому что соотвѣтствующей ей первообразной не было въ y.

Слѣдуя Амперу, мы будемъ называть выраженія производныхъ отъ z *однородными съ интеграломъ* относительно α, если они содержатъ только тѣ же произвольныя функціи отъ α, которыя входятъ въ уравненія интеграла.

Изъ этого опредѣленія не слѣдуетъ, что однородныя съ интеграломъ производныя должны непремѣнно содержать *всѣ* произвольныя функціи отъ α, входящія въ интегралъ; достаточно, если онѣ не содержатъ такихъ, которыхъ нѣтъ въ интегралѣ.

Производныя отъ z будутъ называться *разнородными съ интеграломъ* относительно α, если онѣ содержатъ такія произвольныя функціи отъ α, которыхъ нѣтъ въ уравненіяхъ интеграла.

Пользуясь предыдущими названіями, можно выразить результаты, полученные въ этомъ §, слѣдующимъ образомъ:

1) если производная z', а потому и $z_{,}$, будутъ разнородны съ интеграломъ, то всѣ прочія производныя будутъ съ нимъ разнородны.

2) если производная $z_k^{(i)}$ порядка $n = i + k$ однородна съ интеграломъ, то всѣ производныя того же порядка и порядковъ низшихъ будутъ съ нимъ однородны;

3) всегда существуетъ производная отъ z, въ которой появится произвольная функція отъ α, не находящаяся въ уравненіяхъ интеграла; эта функція появится также и во всѣхъ производныхъ того же порядка и

4) тогда въ каждомъ слѣдующемъ порядкѣ производныхъ будутъ появляться новыя произвольныя функціи отъ α, не находящіяся ни въ уравненіяхъ интеграла, ни въ производныхъ предыдущихъ порядковъ.

Примѣчаніе. Мы выше предположили, что уравненія общаго интеграла безъ частныхъ суммъ содержатъ только такія произвольныя функціи, которыхъ аргументы α, β, γ и проч. суть функціи обоихъ перемѣнныхъ x и y. При такомъ предположеніи было доказано, что выраженія производныхъ отъ z какого-нибудь одного порядка, выведенныя изъ уравненій интеграла, должны быть всѣ безъ исключенія или однородны, или разнородны съ интеграломъ. Это свойство производныхъ не имѣетъ болѣе мѣста, если интегралъ содержитъ произвольныя функціи, которыхъ аргументы зависятъ отъ одного только x, или одного только y.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть интегралъ содержитъ произвольную функцію отъ α, и α будетъ функціею одного y; слѣдовательно, обратно y будетъ функціею одного α, которую означимъ такимъ образомъ: $y = f(\alpha)$. Поэтому будемъ имѣть $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = f'(\alpha)$ и вмѣсто доказаннаго выше уравненія

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x} = z_{k-1}^{(i+1)} + z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial x},$$

будемъ имѣть слѣдующее

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial x} = z_{k-1}^{(i+1)},$$

которое показываетъ, что въ производной $z_{k-1}^{(i+1)}$ порядка n не можетъ появиться такой произвольной функціи отъ α, которой не было въ производной $z_{k-1}^{(i)}$, порядка $n-1$, ибо дифференцированіе по x предполагаетъ α постояннымъ. Съ другой стороны, имѣемъ

$$\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial \alpha} = z_k^{(i)} \frac{\partial y}{\partial \alpha} = z_k^{(i)} f'(\alpha), \quad \text{откуда} \quad z_k^{(i)} = \frac{\frac{\partial z_{k-1}^{(i)}}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)}.$$

Во второй части послѣдняго равенства въ числителѣ, вслѣдствіе дифференцированія $z_{k-1}^{(i)}$ по α, необходимо произойдетъ произвольная функція отъ α, которой раньше не было въ $z_{k-1}^{(i)}$, и эта функція не можетъ уничтожиться черезъ сокращеніе со знаменателемъ, потому что этотъ послѣдній выражается опредѣленною функціею отъ α, $f'(\alpha)$. Слѣдовательно, выраженіе $z_k^{(i)}$ необходимо должно содержать произвольную функцію, которой нѣтъ въ выраженіи $z_{k-1}^{(i)}$.

Такимъ образомъ изъ двухъ прозводныхъ $z_{k-1}^{(i+1)}$ и $z_k^{(i)}$ n-го порядка первая однородна, вторая разнородна относительно α съ производною $z_{k-1}^{(i)}$ $n-1$-го порядка. Слѣдовательно, эти производныя n-го порядка между собою неоднородны, что мы и хотѣли показать.

Далѣе, не трудно заключить изъ сейчасъ доказаннаго, что производныя:

$$z', \ z'', \ z''', \dots \ z^{(n)}, \dots,$$

полученныя дифференцированіемъ z въ отношеніи одного x, будутъ содержать только тѣ же произвольныя функціи отъ α, которыя входятъ въ выраженіе z.

Напротивъ производныя

$$z_{,} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)}, \quad z_{,}' = \frac{\frac{\partial z'}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)}, \dots \quad z^{(n-1)} = \frac{\frac{\partial z^{(n-1)}}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)}, \dots.$$

для образованія которыхъ требуется различное число дифференцированій по x, но одно дифференцированіе по y, будутъ содержать одну и ту же произвольную функцію отъ α, различную отъ входящихъ въ z.

Подобнымъ образомъ производныя

$$z_{,,}=\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)},\quad z'_{,,}=\frac{\frac{\partial z_{,}'}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)},\ldots\quad z_{,,}^{(n-1)}=\frac{\frac{\partial z_{,}^{(n-2)}}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)},\ldots$$

будутъ содержать по двѣ одинаковыхъ произвольныхъ функцій отъ α, во различныхъ отъ входящихъ въ z и т. д.

Слѣдовательно, выраженія производныхъ, происходящихъ вслѣдствіе однихъ только дифференцированій по x, будутъ однородны съ интеграломъ; прочія производныя разнородны съ нимъ. Но тѣ производныя, для образованія которыхъ требуется одно и то же число дифференцированій по x, будутъ однородны между собою. Всюду однородность или разнородность подразумѣвается въ отношеніи α, аргумента зависящаго только отъ y.

Понятно, что, замѣнивъ въ предыдущемъ букву y буквою x, получимъ аналогичныя заключенія.

§ 5.

Теперь мы можемъ относительно конечныхъ общихъ интеграловъ безъ частныхъ суммъ рѣшить весьма важный вопросъ о числѣ независимыхъ между собою произвольныхъ функцій, заключающихся въ такомъ интегралѣ, когда онъ принадлежитъ уравненію съ частными производными порядка m.

Въ основаніе этого изслѣдованія должно принять опредѣленіе общаго интеграла (§ 1) и повторить сужденія начала § 3, приведшія насъ къ системамъ уравненій (A) и (B). Но тамъ мы представляли общій интегралъ подъ видомъ одного уравненія, между тѣмъ какъ здѣсь будемъ представлять его, сообразно общему типу данному въ концѣ § 3, въ видѣ системы

$k+1$ уравненій. Поэтому взявъ уравненія интеграла и всѣ ихъ производныя по x и y до порядка n включительно, получимъ теперь

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}(k+1)$$

уравненій. Данное же дифференціальное уравненіе съ частными производными m-го порядка,

$$F=0,$$

со всѣми своими производными по x и y до порядка $n-m$ включительно доставитъ по прежнему

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-m(n+1)+\frac{m(m-1)}{2}$$

уравненій. — По опредѣленію общаго интеграла, первая изъ этихъ двухъ системъ уравненій, по исключеніи изъ нея количествъ, не находящихся въ данномъ дифференціальномъ уравненіи, должна быть совершенно одинакова со второю. Возможность исполненія этого требованія обезпечивается уже тѣмъ, что первая система содержитъ болѣе уравненій, чѣмъ вторая, именно разность чиселъ находящихся въ нихъ уравненій равна

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}k+m(n+1)-\frac{m(m-1)}{2}. \qquad (D)$$

И, слѣдовательно, необходимо только, чтобы число исключаемыхъ количествъ изъ первой системы было не менѣе этой разности. Оно должно быть равно (D), если каждое изъ упомянутыхъ количествъ исключается порознь; оно, напротивъ, можетъ быть болѣе (D), если нѣкоторыя изъ этихъ количествъ исключаются группами вмѣстѣ.

Постараемся теперь найти выраженіе числа всѣхъ количествъ подлежащихъ исключенію. Они могутъ быть подраздѣлены на двѣ категоріи:

1) k аргументовъ α, β, γ и проч. со всѣми ихъ производными до порядка n включительно:

$$\alpha', \ \alpha_{,}, \ \alpha'', \ \alpha_{,}', \ \alpha_{,,}, \ldots \ \alpha^{(n)}, \ldots \ \alpha_n$$

$$\beta', \ \beta_{,}, \ \beta'', \ \beta_{,}', \ \beta_{,,}, \ldots \ \beta^{(n)}, \ldots \ \beta_n$$

и проч.

Число этихъ количествъ, очевидно, будетъ равно

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\,k;$$

2) произвольныя функціи и ихъ производныя по соотвѣтственнымъ аргументамъ.

Чтобы выразить самымъ общимъ образомъ число исключаемыхъ количествъ этой послѣдней категоріи, примемъ слѣдующія означенія:

g будетъ число входящихъ въ уравненія интеграла произвольныхъ и независимыхъ между собою функцій, такихъ какъ $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ и проч. Если всѣ аргументы α, β и проч. между собою различны, то, очевидно, $g=k$; въ противномъ же случаѣ должно быть $g>k$.

g' будетъ число произвольныхъ функцій, образуемыхъ изъ предыдущихъ путемъ дифференцированія или интегрированія (или обоими путями вмѣстѣ) въ отношеніи одного и того же аргумента. Въ это число будемъ включать функціи, дѣйствительно находящіяся въ уравненіяхъ интеграла, или даже не находящіяся въ нихъ, но встрѣчающіяся по порядку образованія между двумя функціями, входящими въ уравненія интеграла. Такъ, напримѣръ, $\varphi'(\alpha)$ будетъ заключаться въ числѣ g', если въ уравненія интеграла входятъ $\varphi(\alpha)$ и $\varphi''(\alpha)$; подобнымъ образомъ $\int F[\alpha, \varphi(\alpha)]d\alpha$, гдѣ F данная функція, будетъ заключаться въ числѣ g', если въ уравненія интеграла входятъ $\int d\alpha \int F[\alpha, \varphi(\alpha)]d\alpha$ и $\varphi(\alpha)$.

Наконецъ, пусть $l+1$, $l'+1$, $l''+1$ и т. д. означаютъ порядки уравненій, производныхъ отъ уравненій интеграла и начинающихъ быть разнородными съ нимъ соотвѣтственно въ отношеніи α, β, γ и проч. Числа l, l', l'',... должны имѣть конечныя опредѣленныя значенія и могутъ также приводиться къ нулю. Напримѣръ $l=0$, если уже результатъ перваго дифференцированія уравненій интеграла будетъ разнороденъ съ нимъ въ отношеніи α.

Но въ предыдущемъ § показано, что когда въ производныхъ уравненіяхъ отъ уравненій интеграла какого-либо порядка появится произвольная функція, напр. нѣкоторая производная отъ $\varphi(\alpha)$, тогда при переходѣ къ слѣдующимъ порядкамъ производныхъ уравненій каждый разъ будутъ являться еще новыя произвольныя функціи, также происходящія отъ $\varphi(\alpha)$. Поэтому, когда мы дойдемъ до порядка n, при дифференцированіи уравненій интеграла, то введемъ не заключавшіяся въ нихъ произвольныя функціи, въ числѣ которыхъ будутъ $n-l$ происходящихъ отъ $\varphi(\alpha)$, $n-l'$ происходящихъ отъ $\psi(\beta)$ и т. д. Слѣдовательно, полное число введенныхъ такимъ образомъ произвольныхъ количествъ будетъ $ng-l-l'-$ $-l''-\cdots$; присоединивъ же къ нему опредѣленныя выше числа g, g' и $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)k$, получимъ общее выраженіе числа всѣхъ подлежащихъ исключенію количествъ слѣдующаго вида:

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)k+g(n+1)+g'-l-l'-l''-\cdots$$

Это число, какъ объяснено выше, должно быть во всякомъ случаѣ не менѣе числа (D); поэтому необходимо получимъ

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)k+g(n+1)+g'-l-l'-l''-\cdots$$

$$\geqq\frac{1}{2}(n+1)(n+2)k+m(n+1)-\frac{1}{2}m(m-1),$$

или

$$(m-g)(n+1)\leqq\frac{1}{2}m(m-1)+g'-l-l'-l''-\cdots$$

Но вторая часть предыдущаго равенства или неравенства составляетъ опредѣленное конечное число, между тѣмъ какъ въ первой части входитъ общимъ множителемъ число $n+1$, которое мы можемъ сдѣлать произвольно великимъ; слѣдовательно, чтобы это равенство или неравенство имѣло мѣсто при всякомъ n, необходимо должно быть

$$g=m,$$

т.-е. *конечный общій интегралъ безъ частныхъ суммъ долженъ содержать число произвольныхъ и независимыхъ между собою функцій равное порядку уравненія съ частными производными, которому этотъ интегралъ принадлежитъ.*

§ 6.

Изложенныя выше общія свойства интеграловъ уравненій съ частными производными, при двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, доставляютъ руководящія указанія для опредѣленія интеграловъ, соотвѣтствующихъ даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ этого класса.

Прежде всего мы остановимся на вопросѣ: какимъ образомъ можно судить по виду даннаго уравненія о свойствѣ аргументовъ произвольныхъ функцій конечнаго общаго интеграла безъ частныхъ суммъ, если онъ возможенъ?

Мы видѣли (§ 5), что въ выраженіе такого интеграла необходимо должны входить произвольныя, совершенно независимыя между собою функціи $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$,... которыхъ число равно дифференціальному порядку интегрируемаго уравненія, и которыхъ аргументы α, β,... вообще представляютъ опредѣленныя и различныя между собою функціи независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Но интегралъ не перестаетъ быть общимъ, если нѣкоторыя или всѣ функціи α, β,... будутъ между собою одинаковы, или будутъ зависѣть отъ одного только x, или одного только y. А такъ какъ эти обстоятельства не должны остаться безъ вліянія на самый ходъ интегрированія, то весьма важно имѣть возможность изслѣдовать предварительно, судя только по виду даннаго уравненія, свойства аргументовъ произвольныхъ функцій конечнаго общаго интеграла безъ частныхъ суммъ, предполагая такой интегралъ возможнымъ.

Для этой цѣли положимъ, что уравненіе

$$\alpha = f(x, y)$$

опредѣляетъ одинъ изъ аргументовъ произвольныхъ функцій предполагаемаго интеграла. Помощію этого уравненія мы можемъ ввести въ данное уравненіе, вмѣсто первоначальныхъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y, новыя x и α, или y и α. Принимая послѣдовательно эти два предположенія и дифференцируя предыдущее уравненіе частнымъ образомъ сначала въ отношеніи x, потомъ въ отношеніи y, при чемъ въ обоихъ случаяхъ второе независимое перемѣнное α разсматривается постояннымъ, получимъ

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{\alpha'}{\alpha_{,}}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{\alpha_{,}}{\alpha'},$$

и вмѣстѣ съ этимъ будемъ имѣть

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} = 1.$$

Слѣдовательно, если возможно будетъ опредѣлить различныя функціи m, n, ... перемѣнныхъ x, y, представляющія значенія $\frac{\partial y}{\partial x}$, то вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ имѣть значенія $\frac{\partial x}{\partial y}$ подъ видомъ $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, ..., а соотвѣтствующія значенія аргументовъ α, β, ... произвольныхъ функцій получатся посредствомъ интегрированія линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка и вида:

$$\alpha'+m\alpha_{,}=0,\ \beta'+n\beta_{,}=0, \ldots$$

Такимъ образомъ, изслѣдованіе аргументовъ произвольныхъ функцій сводится на изслѣдованіе различныхъ значеній $\frac{\partial y}{\partial x}$, соотвѣтствующихъ этимъ аргументамъ, — значеній, которыя должно постараться получить только помощію даннаго уравненія съ частными производными.

Положимъ, что данное уравненіе будетъ второго порядка и общаго вида

$$F[x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,},\ z'',\ z_{,}',\ z_{,,}]=0.$$

Принимая независимыми перемѣнными x и α, получимъ изъ уравненій общаго интеграла выраженія въ этихъ перемѣнныхъ, функцій y, z, z', $z_{,}$, z'' и проч., по вставкѣ которыхъ удовлетворимъ не только данному уравненію, но и всѣмъ его производнымъ въ отношеніи x и y до какого угодно порядка. Дифференцируя данное уравненіе $n-2$ раза въ отношеніи y, получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}z_{n}+\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}z'_{n-1}+\frac{\partial F}{\partial z''}z''_{n-2}+R=0.$$

Здѣсь производныя порядка n входятъ только линейнымъ образомъ, коэффиціенты при нихъ составлены только изъ количествъ, входящихъ въ данное уравненіе, членъ же R кромѣ того содержитъ производныя отъ z порядка ниже n.

Въ § 4 мы видѣли, что, начиная съ нѣкотораго порядка выраженія частныхъ производныхъ отъ z, выводимыя изъ уравненій интеграла, необходимо должны быть съ нимъ разнородны въ отношеніи α. А такъ какъ число n произвольное, то ничто не препятствуетъ принять производныя порядка n разнородными съ интеграломъ въ отношеніи α. Сдѣлавъ это предположеніе, посмотримъ, какимъ образомъ возможно удовлетворить предыдущему уравненію.

Сначала выразимъ z'_{n-1} и z''_{n-2} посредствомъ z_n. Для этого имѣемъ уравненія:

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}=z'_{n-1}+z_n\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x}=z''_{n-2}+z'_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x},$$

помощію которыхъ находимъ

$$z'_{n-1}=\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}z_n,$$

$$z''_{n-2}=\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 z_n.$$

Вставивъ эти значенія z'_{n-1} и z''_{n-2} въ разсматриваемое уравненіе, получимъ

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\dfrac{\partial F}{\partial z_{,,}}-\dfrac{\partial F}{\partial z_{,}'}\dfrac{\partial y}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z''}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}z_n+\\ +R+\dfrac{\partial F}{\partial z_{,}'}\dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z''}\left(\dfrac{\partial z'_{n-2}}{\partial x}-\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right)\end{array}\right\}=0.$$

Наконецъ, вставивъ сюда еще выраженія, выведенныя изъ уравненій интеграла для функцій y, z, z', $z_{,}$ и пр. и ихъ частныхъ производныхъ въ отношеніи x, должно получить тождество. Но выраженіе z_n, получаемое по формулѣ

$$z_n=\frac{\dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}},$$

по предположенію, разнородно съ интеграломъ, т.-е. содержитъ такую произвольную функцію отъ α, которой не находится ни въ уравненіяхъ интеграла, ни въ выраженіяхъ производныхъ отъ z, порядка ниже n, а слѣдовательно, не находится также и въ частныхъ производныхъ отъ этихъ послѣднихъ и y по x, ибо дифференцированіе по x предполагаетъ α постояннымъ.

Поэтому въ предыдущемъ уравненіи членъ, заключающій множителемъ z_n, не можетъ сократиться съ другими членами и оно не иначе обратится въ тождество, какъ при условіи

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}-\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0.$$

И такъ, вотъ то уравненіе, которому должно удовлетворять $\frac{\partial y}{\partial x}$, соотвѣтствующее аргументу α; но такъ какъ α не входитъ въ него явнымъ образомъ, то отыскивая условіе, которому удовлетворяло бы значеніе $\frac{\partial y}{\partial x}$, соотвѣтствующее аргументу β, мы должны получить снова предыдущее уравненіе. Слѣдовательно, корни этого уравненія, которыя означимъ m и n, дадутъ два значенія $\frac{\partial y}{\partial x}$, соотвѣтствующія аргументамъ α и β двухъ произвольныхъ функцій конечнаго общаго интеграла безъ частныхъ суммъ даннаго уравненія съ частными производными второго порядка, если такой интегралъ для него возможенъ.

Предыдущій выводъ даетъ возможность сдѣлать слѣдующія заключенія относительно аргументовъ α и β, судя по виду даннаго уравненія.

1) α и β должны быть, вообще, опредѣленными функціями x и y, ибо соотвѣтствующія значенія $\frac{\partial y}{xy}$, представляемыя корнями m и n предыдущаго уравненія, выражаются опредѣленнымъ образомъ посредствомъ x, y и функцій z, z', $z_{,}$, z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$, зависящихъ отъ x и y.

2) Если $\frac{\partial F}{\partial z''}$, $\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}$, $\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}$ непосредственно, или по отдѣленіи общаго множителя, выражаются явными функціями x и y, то такими же функціями будутъ m и n; слѣдовательно, α и β могутъ быть опредѣлены посредствомъ интегрированій уравненій:

$$\alpha'+m\alpha_{,}=0 \quad \text{и} \quad \beta'+n\beta_{,}=0.$$

3) Если $m=n$, т.-е. $\left(\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\right)^2 = 4\frac{\partial F}{\partial z''}\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}$, то $\alpha=\beta$; слѣдовательно, искомый общій интегралъ долженъ содержать двѣ различныхъ произвольныхъ функціи отъ одинаковыхъ аргументовъ.

4) Если $m=0$, т.-е. $\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}=0$, то уравненіе, опредѣляющее α, приметъ видъ $\alpha'=0$, поэтому $\alpha=$произвол. функ. отъ y; слѣдовательно, когда интегрируемое уравненіе не содержитъ $z_{,,}$, тогда въ искомомъ интегралѣ одна изъ произвольныхъ функцій должна зависѣть отъ одного только y.

5) Если $m=\infty$, т.-е. $\frac{\partial F}{\partial z''}=0$, то уравненіе, опредѣляющее α, приметъ видъ $\alpha_{,}=0$, поэтому $\alpha=$ произвол. функ. отъ x; слѣдовательно, когда интигрируемое уравненіе не содержитъ z'', тогда въ искомомъ интегралѣ одна изъ произвольныхъ функцій должна зависѣть отъ одного x.

6) Если $m=0$, $n=\infty$, т.-е. $\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}=0$ и $\frac{\partial F}{\partial z''}=0$, то уравненія, опредѣляющія α и β, примутъ видъ $\alpha'=0$ и $\beta_{,}=0$, поэтому $\alpha=$произвол. функ. отъ y, $\beta=$произвол. функ. отъ x; слѣдовательно, когда въ интегрируемое уравненіе входитъ только одна производная второго порядка $z_{,}'$, тогда въ искомомъ интегралѣ одна изъ произвольныхъ функцій должна зависѣть отъ одного x, другая отъ одного y.

7) Если $m=0$, $n=0$, т.-е. $\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}=0$ и $\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}=0$, то уравненія, опредѣляющія α и β, примутъ видъ $\alpha'=0$ и $\beta'=0$, поэтому α и β будутъ произвольными функціями одного y; слѣдовательно, когда въ интегрируемое уравненіе входитъ только одна произвольная второго порядка z'', тогда въ искомомъ интегралѣ обѣ произвольныя функціи должны зависѣть отъ одного только y.

8) Если $m=\infty$, $n=\infty$, т.-е. $\frac{\partial F}{\partial z''}=0$ и $\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}=0$, то уравненія, опредѣляющія α и β, примутъ видъ $\alpha_{,}=0$, $\beta_{,}=0$, поэтому α и β будутъ произвольными функціями отъ x; слѣдо-

вательно, когда въ интегрируемое уравненіе входитъ только одна производная втораго порядка $z_{,,}$, тогда въ искомомъ интегралѣ обѣ произвольныя функціи должны зависѣть отъ одного только x.

Примѣчаніе. Должно еще замѣтить, что конечный общій интегралъ безъ частныхъ суммъ возможенъ въ двухъ послѣднихъ случаяхъ (7 и 8) только при слѣдующемъ условіи: если данное уравненіе, содержащее изъ вторыхъ производныхъ только z'', не содержитъ производной перваго порядка $z_{,}$, а содержащее только $z_{,,}$ не содержитъ z'. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія, не удовлетворяющія этому условію, можно представить, не уменьшая ихъ общности, подъ видомъ

$$z_{,}=F(x,\ y,\ z,\ z',\ z''),$$
$$z'=F(x,\ y,\ z,\ z_{,},\ z_{,,}),$$

предполагая разрѣшенными первое относительно $z_{,}$, второе относительно z'.

Посмотримъ теперь, возможно ли допустить, что напр. первое изъ нихъ имѣетъ конечный общій интегралъ безъ частныхъ суммъ. Обѣ произвольныя функціи такого интеграла должны бы были, на основаніи предыдущаго, зависѣть отъ одного только y. Поэтому α должна быть функціею y и обратно $y=f(\alpha)$. Введя помощію послѣдней зависимости перемѣнное α вмѣсто y, найдемъ на основаніи примѣчанія къ § 4, что выведенныя изъ уравненій интеграла выраженія z' и z'' должны быть однородны съ интеграломъ въ отношеніи α, между тѣмъ какъ выраженіе

$$z_{,}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}}{f'(\alpha)}$$

необходимо будетъ съ нимъ разнородно въ отношеніи α. Слѣдовательно, подстановкою этихъ выраженій въ разсматриваемое уравненіе невозможно обратить его въ тождество, ибо первая часть его должна бы была заключать такую произвольную функцію отъ α, которой не можетъ находиться во второй части.

Измѣнивъ назначеніе буквъ y и x, точно такъ же можно доказать подобное предложеніе и для уравненія

$$z' = F(x,\ y,\ z,\ z,\ z_{,,}).$$

Изложенный выше способъ изслѣдованія аргументовъ произвольныхъ функцій интеграла безъ затрудненія прилагается къ уравненіямъ съ частными производными какого угодно порядка. Имѣя въ виду однообразіе употребляемыхъ при этомъ пріемовъ, достаточно кратко показать это обобщеніе на уравненія третьяго порядка.

Пусть данное уравненіе будетъ

$$F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,},\ z'',\ z_{,}',\ z_{,,},\ z''',\ z''_{,},\ z'_{,,},\ z_{,,,}) = 0.$$

Дифференцируя его $n-3$ раза въ отношеніи y, получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,,}} z_n + \frac{\partial F}{\partial z'_{,,}} z'_{n-1} + \frac{\partial F}{\partial z''_{,}} z''_{n-2} + \frac{\partial F}{\partial z'''} z'''_{n-3} + R = 0.$$

Здѣсь производныя порядка n входятъ только линейнымъ образомъ, коэффиціенты при нихъ составлены изъ количествъ, входящихъ въ данное уравненіе, членъ R, кромѣ того, содержитъ производныя отъ z порядка ниже n.

Положимъ теперь, что одинъ изъ аргументовъ произвольныхъ функцій предполагаемаго интеграла будетъ $\alpha = f(x,\ y)$ и введемъ независимыя перемѣнныя x и α вмѣсто x и y; такимъ образомъ, получимъ уравненія

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} = z'_{n-1} + z_n \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} = z''_{n-2} + z'_{n-1} \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z''_{n-3}}{\partial x} = z'''_{n-3} + z''_{n-2} \frac{\partial y}{\partial x},$$

помощію которыхъ получимъ:

$$z'_{n-1} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} z_n,$$

$$z''_{n-2} = \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 z_n,$$

$$z'''_{n-3} = \frac{\partial z''_{n-3}}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 z_n.$$

По вставкѣ этихъ выраженій z'_{n-1}, z''_{n-2}, z'''_{n-3}, предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\frac{\partial F}{\partial z_{,,,}}-\frac{\partial F}{\partial z'_{,,}}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_{,}''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial F}{\partial z'''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3\right\}z_n+\\ +R+\frac{\partial F}{\partial z'_{,,}}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_{,}''}\left(\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right)+\\ +\frac{\partial F}{\partial z'''}\left(\frac{\partial z''_{n-1}}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z'_{n-2}}{\partial x}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right)\end{array}\right\}=0.$$

Такъ какъ число n произвольное, то мы всегда можемъ предполагать его такимъ, чтобы выраженія производныхъ отъ z порядка n были разнородны съ интеграломъ въ отношеніи α. Въ такомъ случаѣ вставкою въ предыдущее уравненіе выраженій, выведенныхъ изъ уравненій интеграла функцій y, z и частныхъ производныхъ послѣдней, мы можемъ удовлетворить ему только при существованіи уравненія 3-й степени относительно $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,,}}-\frac{\partial F}{\partial z'_{,,}}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z_{,}''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z'''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3=0,$$

корни котораго m, n, p связаны съ аргументами α, β, γ произвольныхъ функцій интеграла посредствомъ уравненій

$$\alpha'+m\alpha_{,}=0,\quad \beta'+n\beta_{,}=0,\quad \gamma'+p\gamma_{,}=0.$$

Слѣдовательно, всѣ вопросы относительно вида аргументовъ могутъ быть рѣшены такъ же, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

ГЛАВА II.

Интегрированіе простѣйшихъ видовъ уравненій съ частными производными второго порядка функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

§ 7.

Формы разсматриваемаго класса дифференціальныхъ уравненій обусловливаются главнымъ образомъ видомъ аргументовъ α и β произвольныхъ функцій, заключающихся въ принадлежащихъ имъ общихъ интегралахъ. Поэтому, желая разсмотрѣть сначала простѣйшія формы уравненій, къ которымъ впослѣдствіи будутъ приведены уравненія болѣе сложнаго вида, мы должны начать съ самыхъ простыхъ предположеній относительно вида аргументовъ α и β. Очевидно, что случай, когда оба аргумента равны и выражаются однимъ изъ независимыхъ перемѣнныхъ x или y, соотвѣтствуетъ самому простому предположенію.

Если, напр., $\alpha=\beta=y$, то соотвѣтствующему дифференціальному уравненію можетъ принадлежать общій интегралъ конечнаго вида (§ 6 гл. I) только въ томъ случаѣ, когда изъ производныхъ второго порядка оно содержитъ только z'' и изъ производныхъ перваго порядка—только z', т.-е. будетъ общаго вида

$$F(x,\ y,\ z,\ z',\ z'')=0.$$

Въ этомъ, впрочемъ, легко убѣдиться непосредственно, представляя переходъ отъ общаго интеграла, заключающаго двѣ произвольныхъ функціи отъ y, къ соотвѣтствующему дифференціальному уравненію съ частными производными второго порядка, посредствомъ исключенія произвольныхъ функцій.

Такъ какъ при образованіи производныхъ z' и z'' количество y разсматривается постояннымъ, то можно удержать эту точку зрѣнія и при интегрированіи предыдущаго уравненія. Такимъ образомъ, будемъ имѣть обыкновенное дифференціальное уравненіе съ двумя перемѣнными x и z, интегрируя которое можемъ получить полный его интегралъ съ двумя различными произвольными постоянными. Но эти послѣднія должны быть постоянными только въ отношеніи x; слѣдовательно, могутъ быть разсматриваемы какъ двѣ различныя произвольныя функціи отъ y, а потому мы будемъ имѣть общій интегралъ даннаго уравненія.

Для обыкновеннаго диффренціальнаго уравненія второго порядка всегда имѣютъ мѣсто два посредствующихъ интеграла перваго порядка съ однимъ произвольнымъ постояннымъ каждый; слѣдовательно, замѣнивъ эти послѣднія произвольными функціями отъ y, всегда будемъ имѣть посредствующіе общіе интегралы перваго порядка для даннаго уравненія.

Вообще уравненія, допускающія общій интегралъ, въ которомъ $\alpha=\beta$, посредствомъ надлежащаго преобразованія должны приводиться къ тому простѣйшему виду, который мы сейчасъ разсмотрѣли. Для этого необходимо только ввести въ разсматриваемое уравненіе независимыя перемѣнныя α и x или α и y вмѣсто x и y. Далѣе (гл. IV) мы изложимъ общіе пріемы такого преобразованія въ томъ случаѣ, когда помощію даннаго уравненія можно получить выраженіе α посредствомъ x, y, z, z', $z_{,}$; теперь же ограничимся менѣе общимъ случаемъ, когда помощію даннаго уравненія можно вывести выраженіе аргумента α посредствомъ x и y.

Пусть данное уравненіе будетъ общаго вида

$$F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,},\ \zeta)=0,$$

гдѣ

$$\zeta=Rz''+2Sz_{,}'+Tz_{,,}$$

и R, S, T означаютъ данныя функціи отъ x и y.

На основаніи вышедоказаннаго (гл. I, § 6) аргументы α и β общаго интеграла даннаго уравненія могутъ быть равны, только при условіи

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\right)^2 = 4\frac{\partial F}{\partial z''}\frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = 0.$$

Но мы имѣемъ:

$$\frac{\partial F}{\partial z''} = R\frac{\partial F}{\partial \zeta},\quad \frac{\partial F}{\partial z_{,}'} = 2S\frac{\partial F}{\partial \zeta},\quad \frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = T\frac{\partial F}{\partial \zeta},$$

слѣдовательно, предыдущее условіе приметъ видъ

$$4\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2 (S^2 - RT) = 0,$$

а такъ какъ множитель $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ не равенъ нулю, то должно быть

$$S^2 - RT = 0.$$

Предположивъ послѣднее условіе выполненнымъ, будемъ имѣть

$$\zeta = R(z'' + 2mz_{,}' + m^2 z_{,,}),$$

гдѣ для краткости полагаемъ

$$m = \frac{S}{R}.$$

Для опредѣленія аргумента α имѣемъ (гл. I § 6) уравненіе

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + m\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

съ частными производными перваго порядка, откуда, означивъ черезъ μ множитель интегрируемости, получимъ

$$\alpha = \int \mu(dy - mdx) = f(x, y).$$

Помощію зависимости между x; y, α, выражаемой послѣднимъ уравненіемъ, можно теперь ввести независимыя перемѣнныя α и x вмѣсто x и y. Разсматривая, такимъ образомъ, двѣ системы независимыхъ перемѣнныхъ, мы должны припомнить сдѣланное выше условіе (гл. I § 1), по которому частныя производныя всякой функціи въ отношеніи x и y означаются удареніями, поставленными справа функціи вверху и внизу; для означенія же частныхъ производныхъ въ отношеніи x и α будутъ приняты обыкновенные знаки.

Поэтому имѣемъ

$$z'=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x},\quad z_{,}=\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

слѣдовательно,

$$z'+mz_{,}=\frac{\partial z}{\partial x}.$$

подобнымъ же образомъ получимъ

$$(z'+mz_{,})'+m(z'+mz_{,})_{,}=\frac{\partial(z'+mz_{,})}{\partial x},$$

или

$$z''+2mz'_{,}+m^2z_{,,}+(m'+mm_{,})z_{,}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Изъ предыдущихъ уравненій выводимъ:

$$\zeta=R(z''+2mz'_{,}+m^2z_{,,})=R\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(m'+mm_{,})z_{,}\right]$$

и

$$z'=\frac{\partial z}{\partial x}-mz_{,}.$$

Слѣдовательно, если данное уравненіе допускаетъ общій интегралъ конечнаго вида съ двумя произвольными функціями аргумента $\alpha=f(x, y)$, то подстановкою въ него предыдущихъ значеній ζ и z' должно исключиться само собою, вслѣдствіе сокращеній, также и $z_{,}$. Но въ такомъ случаѣ, разсматривая вмѣсто ζ и z' ихъ предыдущія выраженія и дифференцируя первую часть даннаго уравненія частнымъ образомъ въ отношеніи $z_{,}$, мы должны получить результатъ тождественно равный нулю. Поэтому два равенства

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta}R(m'+mm_{,})+\frac{\partial F}{\partial z'}m-\frac{\partial F}{\partial z_{,}}=0$$

и

$$S^2-RT=0$$

будутъ необходимыми и достаточными условіями, при выполненіи которыхъ интегрированіе разсматриваемаго уравненія съ частными производными приводится къ интегрированію обыкновеннаго уравненія второго порядка.

Понятно, что, перемѣнивъ роли x и y и положивъ для краткости

$$n=\frac{S}{T},$$

мы получимъ два аналогичныя предыдущимъ условія:

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} T\,(n_{,}+nn')+\frac{\partial F}{\partial z_{,}} n-\frac{\partial F}{\partial z'}=0$$

и

$$S^2-RT=0.$$

Поянимъ предыдущее простымъ примѣромъ. Возьмемъ уравненіе

$$f[\zeta+(1+x+y)z_{,}]+x\zeta+(x^2+xy-y)z_{,}-z'=0,$$

гдѣ

$$\zeta=z''+2(x+y)z'_{,}+(x+y)^2 z_{,,}$$

и f означаетъ какую-нибудь данную функцію. Мы имѣемъ здѣсь

$$m=x+y \quad \text{и} \quad \alpha=\int e^{-x}\,(dy-(x+y)dx)=\frac{1+x+y}{e^x}.$$

Вводя независимыя перемѣнныя x и α вмѣсто x и y, получимъ

$$z'=\frac{\partial z}{\partial x}-(x+y)z_{,} \quad \text{и} \quad \zeta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+x+y)z_{,}.$$

Подстановкою предыдущихъ значеній z' и ζ въ данное уравненіе исключаемъ изъ него также и $z_{,}$ и проводимъ къ виду

$$f\!\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

обыкновеннаго уравненія второго порядка, интегрируемаго по правилу *Клеро*. Написавъ въ полномъ интегралѣ этого уравненія двѣ различныхъ произвольныхъ функціи отъ α вмѣсто произвольныхъ постоянныхъ, получимъ общій интегралъ даннаго уравненія слѣдующаго вида:

$$z=\frac{x^2}{2}\varphi\left(\frac{1+x+y}{e^x}\right)+x f\left[\varphi\left(\frac{1+x+y}{e^x}\right)\right]+\psi\left(\frac{1+x+y}{e^x}\right).$$

Легко провѣрить, что въ этомъ примѣрѣ удовлетворимъ первой изъ двухъ формъ условій интегрируемости.

Если разсматриваемое уравненіе имѣетъ частный видъ

$$Rz''+2Sz_,'+Tz_{,,}+U=0,$$

гдѣ U представляетъ данную функцію отъ x, y, z, z', $z_,$, то условія интегрируемости, по предыдущему способу, будутъ:

$$S^2-RT=0 \quad \text{и} \quad R(m'+mm_,)+\frac{\partial U}{\partial z'}m-\frac{\partial U}{\partial z_,}=0,$$

или

$$S^2-RT=0 \quad \text{и} \quad T(n_,+nn')+\frac{\partial U}{\partial z_,}n-\frac{\partial U}{\partial z'}=0.$$

Если въ предыдущемъ уравненіи положимъ

$$U=Qz_,+Pz'+Nz-M,$$

гдѣ черезъ M, N, P, Q означимъ данныя функціи отъ x и y, то оно обращается въ линейное

$$Rz''+2Sz_,'+Tz_{,,}+Qz_,+Pz'+Nz=M$$

и условіями интегрируемости его, по предыдущему способу, будутъ равенства:

$$S^2-RT=0 \quad \text{и} \quad R(m'+mm_,)+Pm-Q=0,$$

или

$$S^2-RT=0 \quad \text{и} \quad T(n_,+nn')+Qn-P=0.$$

Замѣтимъ еще, что если мы для краткости примемъ символическія означенія ∇ и ∇_1, опредѣленныя слѣдующимъ образомъ:

$$\nabla v=v'+mv_,,\quad \nabla^2 v=\nabla\nabla v=(v'+mv_,)'+m(v'+mv_,)_,,$$

$$\nabla_1 v=v_,+nv',\quad \nabla_1{}^2 v=\nabla_1\nabla_1 v=(v_,+nv')_,+n(v_,+nv')',$$

то будемъ имѣть:

$$\nabla z=\frac{\partial z}{\partial x},\ \ \nabla^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$\nabla_1 z=\frac{\partial z}{\partial y},\ \ \nabla_1{}^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Слѣдовательно, уравненія съ частными производными второго порядка общаго вида:

$$F(x,\ y,\ z,\ \nabla z,\ \nabla^2 z)=0 \quad \text{или} \quad F(x,\ y,\ z,\ \nabla_1 z,\ \nabla_1{}^2 z)=0$$

интегрируются по предыдущему способу; и обратно, уравненія интегрируемыя по этому способу (т.-е. удовлетворяющія даннымъ выше условіямъ интегрируемости) приводятся къ одной изъ двухъ предыдущихъ символическихъ формъ.

§ 8.

Послѣ уравненій, разсмотрѣнныхъ въ предыдущемъ §, самый простой видъ имѣютъ тѣ, которыя соотвѣтствуютъ предположенію, что одинъ изъ аргументовъ произвольныхъ функцій ихъ общаго интеграла равенъ x, а другой y. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно (гл. I § 6), дифференціальное уравненіе можетъ содержать изъ производныхъ второго порядка только $z_{,}'$, и поэтому должно быть общаго вида

$$F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,},\ z_{,}')=0.$$

Теорія интегрированія уравненій этого вида представляетъ особенную важность, потому что всѣ уравненія разсматриваемаго класса должны, очевидно, приводиться къ нему, какъ скоро въ нихъ будутъ введены независимыми перемѣнными аргументы произвольныхъ функцій принадлежащихъ имъ общихъ интеграловъ.

Амперъ слѣдующимъ образомъ показалъ необходимыя и достаточныя условія, при которыхъ предыдущему уравненію можетъ принадлежать общій интегралъ перваго порядка съ одною произвольной функціей отъ y, или отъ x.

Положимъ, что уравненіе

$$f[x,\ y,\ z,\ \varphi(x),\ \psi(y)]=0,$$

гдѣ φ и ψ означаютъ произвольныя функціи, представляетъ общій интегралъ. Дифференцируя его въ отношеніи y и изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія и предыдущаго исключивъ $\varphi(x)$, будемъ имѣть результатъ вида

$$f_1[x,\ y,\ z,\ z_{,},\ \psi,(y),\ \psi'(y)]=0.$$

Это послѣднее уравненіе можетъ представлять общій интегралъ перваго порядка, очевидно, только тогда, когда возможно исключить всѣ произвольныя функціи изъ него и того уравненія, которое получимъ, дифференцируя его въ отношеніи x.

Для этого необходимо, чтобы въ предыдущемъ уравненіи $\psi(y)$ и $\psi'(y)$ входили отдѣльною группою вида

$$\Psi[y,\ \psi(y),\ \psi'(y)];$$

тогда произвольная функція отъ y, представляемая этой группою, безъ измѣненія повторится въ уравненіи, полученномъ посредствомъ дифференцированія предыдущаго въ отношеніи x, и, слѣдовательно, можетъ быть исключена изъ этихъ двухъ уравненій. Такъ какъ результатъ такого исключенія всегда можно представить линейнымъ уравненіемъ относительно $z'_{,}$ и z' общаго вида

$$Gz_{,}'+Hz'+K=0,$$

гдѣ G, H, K могутъ, вообще, содержать x, y, z и $z_{,}$, то этотъ видъ дифференціальнаго уравненія и будетъ однимъ изъ условій возможности для него общаго интеграла перваго порядка съ одной произвольной функціей отъ y.

Выведенное условіе хотя необходимо, но недостаточно. Дѣйствительно, замѣчая, что

$$z_{,}'=\frac{\partial z_{,}}{\partial x} \quad \text{и} \quad z'=\frac{\partial z}{\partial x},$$

и умноживъ предыдущее уравненіе на ∂x, получимъ

$$G\partial z_{,}+H\partial z+K\partial x=0.$$

Въ этомъ линейномъ уравненіи относительно дифференціаловъ трехъ перемѣнныхъ $z_,$, z, x можно разсматривать y постояннымъ. Оно допускаетъ, какъ извѣстно, интегралъ съ однимъ произвольнымъ постояннымъ (которое можно замѣнить произвольною функціей отъ y) только въ такомъ случаѣ, когда будетъ выполнено *Эйлерово* условіе:

$$(\mathrm{E}) \qquad G\left(\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial K}{\partial z}\right)+H\left(\frac{\partial K}{\partial z_,}-\frac{\partial G}{\partial x}\right)+K\left(\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z_,}\right)=0.$$

Итакъ, существованіе этого послѣдняго равенства, при линейной формѣ относительно $z_,'$ и $z_,$ даннаго уравнененія, и будутъ необходимыми и достаточными условіями, для того чтобы это послѣднее имѣло общій интегралъ перваго порядка съ произвольной функціей отъ y.

Такимъ образомъ, напр., нетрудно показать, что уравненіе

$$(x+yz)z_,'-yz_,z'+\frac{y(z-1)}{x+y}z_,=0$$

изъ интеграловъ перваго порядка съ произвольными функціями отъ x и отъ y не можетъ имѣть перваго, но должно имѣть второй. Для вывода этого послѣдняго, умноживъ два первые члена первой части даннаго уравненія на ∂x, получимъ

$$(x+yz)\partial z_,-yz_,\partial z.$$

Разсматривая въ этомъ двучленномъ дифференціальномъ выраженіи перемѣнными только $z_,$ и z, умноживъ его на $-\frac{1}{z_,^2}$ и интегрируя, находимъ

$$\int\frac{yz_,\partial z-(x+yz)\partial z_,}{z_,^2}=\frac{x+yz}{z_,}.$$

Введемъ теперь вмѣсто первоначальнаго зависимаго перемѣннаго z новое u, посредствомъ положенія

$$u=\frac{x+yz}{z_,}.$$

Отсюда, дифференцируя въ отношеніи x, находимъ

$$u'=\frac{z_{,}(1+yz')-(x+yz)z_{,}'}{z_{,}^2}.$$

Сложивъ послѣднее уравненіе съ даннымъ, умноженнымъ на $\frac{1}{z_{,}^2}$, будемъ имѣть

$$u'=\frac{x+yz}{(x+y)z_{,}},$$

или

$$u'-\frac{u}{x+y}=0.$$

Мы получили уравненіе перваго порядка; и такъ какъ въ него не входитъ производная въ отношеніи y, то, интегрируя его какъ обыкновенное съ двумя перемѣнными x и u, замѣнивъ притомъ произвольное постоянное интеграла произвольною функціею отъ y, получимъ

$$\frac{u}{x+y}=\psi(y).$$

Подстановкою значенія u въ предыдущее уравненіе получимъ интегралъ перваго порядка даннаго уравненія подъ видомъ

$$z_{,}=\frac{y}{(x+y)\psi(y)}z+\frac{x}{(x+y)\psi(y)}.$$

Въ этомъ послѣднемъ уравненіи перваго порядка не входитъ производная въ отношеніи x; поэтому, интегрируя его какъ обыкновенное съ двумя перемѣнными y и z, замѣнивъ притомъ произвольное постоянное интеграла произвольною функціей отъ x, получимъ общій первообразный интегралъ даннаго уравненія:

$$z=e^{\int\frac{y}{x+y}\cdot\frac{dy}{\psi(y)}}\left[\varphi(x)+x\int e^{-\int\frac{y}{x+y}\frac{dy}{\psi(y)}}\frac{dy}{x+y\psi(y)}\right].$$

Если $G=1$, $H=P$, $K=Qz_{,}+Nz-M$ и M, N, P, Q означаютъ данныя функціи отъ x и y, то разсматриваемое уравненіе будетъ линейнымъ относительно z, z', $z_{,}$ и $z'_{,}$ вида

$$z'_{,}+Qz_{,}+Pz'+Nz=M,$$

а условія, при которыхъ оно можетъ имѣть общіе интегралы перваго порядка съ произвольными функціями отъ x и отъ y, выразятся соотвѣтственно слѣдующимъ образомъ

$$\frac{\partial P}{\partial x}-N+PQ=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}-N+PQ=0.$$

Эти условія показаны еще *Эйлеромъ* (Inst. Calc. integr. T. III). Дѣйствительно, данное уравненіе можно написать въ слѣдующихъ двухъ видахъ:

$$\frac{\partial(z_{,}+Pz)}{\partial x}+Q(z_{,}+Pz)+\left(N-PQ-\frac{\partial P}{\partial x}\right)z=0,$$

$$\frac{\partial(z'+Qz)}{\partial y}+P(z'+Qz)+\left(N-PQ-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)z=0,$$

и если предыдущія условія будутъ выполнены, то, вводя вмѣсто первоначальнаго зависимаго перемѣннаго z въ первомъ случаѣ

$$u=z_{,}+Pz,$$

и во второмъ

$$v=z'+Qz,$$

приведемъ данное уравненіе къ двумъ слѣдующимъ:

$$u'+Qu=M \quad \text{и} \quad v_{,}+Pv=M,$$

которыя доставятъ общіе интегралы перваго порядка, первое — съ произвольной функціей отъ y, второе — съ произвольной функціей отъ x.

§ 9.

Слѣдующія слова *Ампера* и въ настоящее время совершенно вѣрно характеризуютъ значеніе и степень развитія теоріи интегрированія тѣхъ уравненій, которыя мы начали разсматривать въ предыдущемъ параграфѣ: «Уравненія съ частными производными второго порядка, содержащія изъ производныхъ этого порядка только $z'_{,}$, должно тѣмъ тщательнѣе изслѣдовать, что часто только посредствомъ приведенія къ этому виду удается интегрировать другія уравненія съ частными производными второго порядка. Общее интегрированіе уравненій, заключающихся въ формулѣ

$$F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,},\ z_{,}')=0$$

можно разсматривать какъ первый вопросъ, который должно рѣшить, чтобы достичь рѣшенія всѣхъ уравненій второго порядка. Но эта задача, повидимому, еще долго должна ускользать отъ способовъ настоящаго анализа, ибо эти уравненія мы умѣемъ интегрировать только въ случаѣ, о которомъ мы сейчасъ говорили (при условіи (E) § 8), когда они имѣютъ посредствующій интегралъ, и еще въ случаѣ уравненій линейныхъ, интегрированныхъ *Лапласомъ*» [1]).

Судя поэтому, каждый успѣхъ въ развитіи и обобщеніи пріемовъ интегрированія уравненій разсматриваемаго вида долженъ имѣть значеніе для всей теоріи уравненій съ частными производными второго порядка. Упоминаемый Амперомъ способъ Лапласа состоитъ въ томъ, что интегрированіе линейнаго уравненія

$$z_{,}'+Qz_{,}+Pz'+Nz=M,$$

не удовлетворяющаго ни одному изъ условій интегрируемости

$$\frac{\partial P}{\partial x}-N+PQ=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}-N+PQ=0,$$

приводится, посредствомъ надлежащаго выбора зависимаго перемѣннаго, къ интегрированію уравненія того же общаго вида.

Если преобразованное уравненіе также не удовлетворитъ условіямъ интегрируемости, то и къ нему можно прилагать тотъ же пріемъ преобразованія. Продолжая такимъ образомъ, или приходимъ къ линейному уравненію, удовлетворяющему условіямъ интегрируемости и посредствомъ его интеграла выражаемъ интегралъ даннаго, или убѣждаемся въ невозможности интегрировать въ конечномъ видѣ предложенное уравненіе.

[1]) Jour. de l'Ec. Pol. XVIII Cahier, p. 43.

Слѣдовательно, этотъ способъ основанъ на возможности выражать интегралъ даннаго уравненія посредствомъ интеграла другого уравненія того же общаго вида, но удовлетворяющаго извѣстнымъ условіямъ, которымъ данное не удовлетворяетъ. Но можно доказать, что эта мысль примѣнима не только къ линейнымъ уравненіямъ, которыми ограничился Лапласъ, но и къ уравненіямъ болѣе общаго вида

$$(a)\qquad Gz_{,}'+Hz'+K=0,$$

гдѣ G, H, K выражаются посредствомъ x, y, z, $z_{,}$. Если мы докажемъ это обобщеніе, то получимъ изъ него способъ Лапласа, какъ частный случай.

Приступимъ къ интегрированію предыдущаго уравненія такъ же, какъ уже было описано выше. Умноживъ два первые члена первой части его на ∂x, получимъ дифференціальное выраженіе

$$G\partial z_{,}+H\partial z;$$

разсматривая въ немъ перемѣнными только $z_{,}$ и z, опредѣливъ множитель интегрируемостм μ и затѣмъ интегрируя, находимъ равенство

$$\int\mu(G\partial z_{,}+H\partial z)=F(x,\ y,\ z,\ z_{,}),$$

гдѣ вторая часть представляетъ значеніе интеграла первой части. Введемъ теперь вмѣсто z новое зависимое перемѣнное u посредствомъ положенія

$$u=F(x,\ y,\ z,\ z_{,}).$$

Дифференцируя это уравненіе въ отношеніи x, получимъ

$$u'=\frac{\partial F}{\partial z_{,}}z_{,}'+\frac{\partial F}{\partial z}z'+\frac{\partial F}{\partial x}=\mu(Gz_{,}'+Hz')+\frac{\partial F}{\partial x}\cdot$$

Слѣдовательно, умноживъ данное уравненіе на μ и вычитая его изъ предыдущаго, будемъ имѣть

$$u'=\frac{\partial F}{\partial x}-\mu K.$$

Вторая часть послѣдняго уравненія выражается опредѣленнымъ образомъ посредствомъ x, y, z, $z_{,}$; поэтому для простоты можемъ положить

$$u'=F_1(x,\ y,\ z,\ z_{,}).$$

Если функціи F и F_1 не будутъ *различныя* между собою въ отношеніи z и $z_{,}$, т.-е. если, исключая изъ уравненій

$$u=F(x,\ y,\ z,\ z_{,})\quad \text{и}\quad u'=F_1(x,\ y,\ z,\ z_{,})$$

одну изъ величинъ z и $z_{,}$, мы вмѣстѣ съ тѣмъ исключимъ и другую, тогда мы получимъ уравненіе между x, y, u и u', изъ котораго выведемъ, какъ было объяснено выше (§ 8), общій интегралъ перваго порядка съ произвольной функціей отъ y. Но въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно, должно имѣть мѣсто слѣдующее тождество

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial F_1}{\partial z_{,}}-\frac{\partial F}{\partial z_{,}}\frac{\partial F_1}{\partial z}=0,$$

которое поэтому будетъ условіемъ для существованія упомянутаго интеграла перваго порядка и должно быть равнозначущимъ съ условіемъ, даннымъ выше:

$$G\left(\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial K}{\partial z}\right)+H\left(\frac{\partial K}{\partial z_{,}}-\frac{\partial G}{\partial x}\right)+K\left(\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z_{,}}\right)=0.$$

И дѣйствительно, нетрудно убѣдиться, что послѣднее условіе вытекаетъ изъ перваго [1]).

Теперь мы приблизились къ вопросу, составляющему цѣль этого изслѣдованія: *какимъ образомъ должно поступить, когда предыдущія условія не выполнены?*

Замѣтимъ, что уравненія.

$$u=F(x,\ y,\ z,\ z_{,})\quad \text{и}\quad u'=F_1(x,\ y,\ z,\ z_{,})$$

можно разсматривать какъ равнозначущія данному. Дѣйствительно, вставляя значеніе u изъ перваго во второе, мы по-

[1]) *См.* напр. *Bool.* Treat. on Diff. Equat., p. 271.

лучимъ данное уравненіе. Разрѣшивъ предыдущія уравненія алгебраически относительно z и $z_{,}$, мы получимъ два другія уравненія вида

$$z=f(x,\ y,\ u,\ u') \quad \text{и} \quad z_{,}=f_1(x,\ y,\ u,\ u'),$$

равнозначущія тѣмъ, изъ которыхъ они выведены, и, слѣдовательно, данному. Поэтому, вставивъ въ данное уравненіе предыдущія значенія z и $z_{,}$ и значенія z' и $z_{,}'$, полученныя дифференцированіемъ предыдущихъ уравненій въ отношеніи x, мы необходимо получимъ тождество при всякомъ значеніи u. Но функція u должна быть опредѣлена такъ, чтобы въ значеніяхъ $z=f$ и $z_{,}=f_1$ не было противорѣчія, для чего необходимо, чтобъ производная отъ f въ отношеніи y равнялась f_1.

Выражая это условіе, получимъ уравненіе

$$(a_{,}) \qquad \frac{\partial f}{\partial u'}u_{,}'+\frac{\partial f}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial f}{\partial y}-f_1(x,\ y,\ u,\ u')=0,$$

опредѣливъ интегралъ котораго и вставивъ его значеніе во вторую часть уравненія

$$z=f(x,\ y,\ u,\ u'),$$

получимъ интегралъ предложеннаго уравненія.

Но нетрудно показать, что уравненіе $(a_{,})$, разсматриваемое какъ линейное относительно $u_{,}'$ и $u_{,}$, не должно имѣть интеграла перваго порядка съ произвольной функціей отъ x. Дѣйствительно, умноживъ два первые члена первой части его на ∂y и интегрируя, найдемъ

$$\int\left(\frac{\partial f}{\partial u'}\partial u'+\frac{\partial f}{\partial u}\partial u\right)=f(x,\ y,\ u,\ u')=v.$$

Дифференцируя значеніе v въ отношеніи y, получимъ

$$v_{,}=\frac{\partial f}{\partial u'}u_{,}'+\frac{\partial f}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

и вычитая отсюда уравненіе $(a_{,})$, будемъ имѣть

$$v_{,}=f_1(x,\ y,\ u,\ u').$$

Здѣсь функціи f и f_1, очевидно, будутъ тѣ же самыя, которыя мы имѣли раньше.

Уравненіе $(a_{,})$ можетъ имѣть интегралъ перваго порядка съ произвольной функціей отъ x, если выраженіе

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial u'}-\frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial f_1}{\partial u}$$

тождественно равно нулю. Но на основаніи извѣстной теоремы о функціональныхъ опредѣлителяхъ обратныхъ функцій имѣемъ

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial u'}-\frac{\partial f}{\partial u'}\frac{\partial f_1}{\partial u}=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial v_{,}}-\frac{\partial F}{\partial v_{,}}\frac{\partial F_1}{\partial v}}.$$

Опредѣлитель, входящій во вторую часть послѣдняго равенства, по предположенію различенъ отъ нуля; слѣд., опредѣлитель первой части не можетъ быть ни 0, ни ∞.

Итакъ, уравненіе $(a_{,})$, разсматриваемое какъ линейное относительно $u_{,}'$ и $u_{,}$, не приведетъ къ желаемой цѣли. Однако, остается еще возможность рѣшить вопросъ предположеннымъ образомъ, *если уравненіе* $(a_{,})$ *будетъ также линейнымъ относительно* $u_{,}'$ *и* u', для чего необходимо только, чтобъ функціи f и f_1 были первой степени въ отношеніи u'. Введемъ это условіе, положивъ

$$z=f(x,\ y,\ u,\ u')=Mu'+N,$$

$$z_{,}=f_1(x,\ y,\ u,\ u')=mu'+n,$$

при чемъ M, N, m, n означаютъ функціи отъ x, y и u.

Теперь уравненіе $(a_{,})$ приметъ слѣдующій видъ

$$Mu_{,}'+\left(\frac{\partial M}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial M}{\partial y}-m\right)u'+\frac{\partial N}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial N}{\partial y}-n=0,$$

или, полагая для краткости

$$M=g,\quad \frac{\partial M}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial M}{\partial y}-m=h,\quad \frac{\partial N}{\partial u}u_{,}+\frac{\partial N}{\partial y}-n=k,$$

$$(a')\qquad gu_{,}'+hu'+k=0.$$

Если уравненіе (a') удовлетворитъ условію интегрируемости

$$g\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial k}{\partial u}\right)+h\left(\frac{\partial k}{\partial u_{,}}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial h}{\partial u_{,}}\right)=0,$$

которое, вслѣдствіе равенства

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial h}{\partial u_{,}}=\frac{\partial M}{\partial u},$$

приметъ видъ

$$g\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial k}{\partial u}\right)+h\left(\frac{\partial k}{\partial u_{,}}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)=0,$$

то оно будетъ имѣть интегралъ перваго порядка съ произвольною функціей отъ y, при помощи котораго можно получить общій первообразный интегралъ уравненія (a'). Затѣмъ интегралъ уравненія (a) будемъ имѣть по формулѣ

$$z=f(x,\ y,\ u,\ u').$$

Если-же уравненіе (a') не удовлетворитъ условію интегрируемости, то и къ нему можно приложить тотъ пріемъ преобразованія, который мы примѣнили къ уравненію (a). Продолжая такимъ образомъ, или приходимъ къ уравненію, удовлетворяющему условію интегрируемости, и, слѣдовательно, доставляющему общій интегралъ даннаго уравненія, или убѣждаемся въ непримѣнимости этого способа рѣшенія.

Пояснимъ предыдущую теорію весьма простымъ примѣромъ. Возьмемъ уравненіе

$$z_{,}'-zz'=0.$$

Сравнивъ его съ общимъ уравненіемъ

$$Gz_{,}'+Hz'+K=0,$$

находимъ, что условіе интегрируемости (E) выполнено. И дѣйствительно, умноживъ данное уравненіе на ∂x, получимъ

$$\partial z_{,}-z\partial z=0,$$

откуда, интегрируя, находимъ общій интегралъ перваго порядка

$$z_{,}-\frac{1}{2}z^2=\Psi(y)$$

съ произвольною функціей Ψ отъ y. Но, не умѣя интегрировать уравненій съ двумя перемѣнными z и y такого общаго вида, какъ предыдущее, мы не можемъ воспользоваться имъ для вывода общаго первообразнаго интеграла задачи. Поэтому, сравнивъ данное уравненіе съ другою общею формою

$$Gz_{\prime}'+Hz_{\prime}+K=0,$$

находимъ

$$G=1,\quad H=0 \quad \text{и} \quad K=-zz',$$

и повѣряя условіе интегрируемости

$$G\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial K}{\partial z}\right)+H\left(\frac{\partial K}{\partial z'}-\frac{\partial G}{\partial y}\right)+K\left(\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial z'}\right)=0,$$

получимъ въ первой части его не 0, но z'; слѣдовательно данное уравненіе не можетъ имѣть интеграла перваго порядка съ произвольною функціей отъ x. Поэтому намъ остается только искать пособія въ изложенномъ выше общемъ способѣ, слѣдуя которому находимъ сначала

$$\int(G\partial z'+H\partial z)=\int\partial z'=z'$$

и потомъ вмѣсто z вводимъ новое зависимое перемѣнное v посредствомъ положенія

$$v=z'.$$

Дифференцируя это уравненіе въ отношеніи y и складывая съ даннымъ, получимъ

$$v_{\prime}=zz'.$$

Изъ двухъ предыдущихъ уравненій имѣемъ

$$z=\frac{v_{\prime}}{v} \quad \text{и} \quad z'=v.$$

Вставляя въ данное уравненіе полученныя выраженія z, z' и значеніе $z_{\prime}'$, которое найдемъ, дифференцируя въ отношеніи y второе изъ предыдущихъ уравненій, будемъ имѣть тождество $v_{\prime}=v_{\prime}$. Но, чтобы между значеніями z и z' не было противорѣчія, должно удовлетворить условію

$$\left(\frac{v_{\prime}}{v}\right)'=v,$$

которое можно написать еще слѣдующимъ образомъ

$$\frac{\partial^2 \log v}{\partial x\, \partial y} = v$$

Ліувилль[1]) нашелъ слѣдующій общій интегралъ для послѣдняго уравненія

$$v = \frac{2\varphi'(x)\psi'(y)e^{\varphi(x)+\psi(y)}}{\left[1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}\right]^2}.$$

Отсюда находимъ

$$\log v = \log 2 + \log\varphi'(x) + \log\psi'(y) + \varphi(x) + \psi(y) -$$
$$-2\log\left[1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}\right].$$

Наконецъ, дифференцируя послѣднее уравненіе въ отношеніи y, получимъ общій интегралъ даннаго

$$z = \frac{v_{,}}{v} = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y) + 2\frac{e^{\varphi(x)+\psi(y)}\psi'(y)}{1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}},$$

въ чемъ нетрудно убѣдиться повѣркою. Но этотъ интегралъ долженъ удовлетворять также уравненію

$$z_{,} - \frac{1}{2}z^2 = \Psi(y);$$

чтобы убѣдиться въ этомъ, находимъ:

$$z_{,} = \frac{d^2 l\psi'}{dy^2} + \psi'' + 2\psi'' \frac{e^{\varphi+\psi}}{1-e^{\varphi+\psi}} +$$
$$+2\psi'^2 \frac{e^{\varphi+\psi}}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2 \frac{e^{2\varphi+2\psi}}{\left[1-e^{\varphi+\psi}\right]^2},$$

$$\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{d\log\psi'}{dy} + \psi'\right]^2 +$$
$$+2\left[\frac{d\log\psi'}{dy} + \psi'\right]\frac{e^{\varphi+\psi}\psi'}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2\frac{e^{2\varphi+2\psi}}{\left[1-e^{\varphi+\psi}\right]^2}.$$

---

1) *Monge*. Applic. de l'analyse á la Géom. 5-*ème* ed. corrigée par *Liouville*, *Note* IV, p. 597.

и вычитая изъ перваго равенстра второе, получимъ

$$z_{,}=\frac{1}{2}z^2-\frac{d^2\log\psi'(y)}{dy^2}+\psi''(y)-\frac{1}{2}\left[\frac{d\log\psi'(y)}{dy}+\psi'(y)\right]^2,$$

въ которомъ вторую часть можно принять равною функціи $\Psi(y)$, вслѣдствіе совершенно произвольнаго вида этой послѣдней и функціи $\psi(y)$.

Примѣчаніе. Такимъ образомъ, между прочимъ, мы получимъ интегралъ предыдущаго уравненія довольно сложнаго вида съ двумя перемѣнными y и z; этотъ интегралъ находимъ изъ даннаго выше значенія для z, въ которомъ вмѣсто $\varphi(x)$ должно только поставить произвольное постоянное.

§ 10.

Посмотримъ теперь, какимъ образомъ изъ предыдущаго обобщенія получится способъ Лапласа[1]) для интегрированія линейнаго уравненія

$$z_{,}'+Pz'+Qz_{,}+Nz=M,$$

въ томъ случаѣ, когда выраженія

$$N-PQ-P'=A \quad \text{и} \quad N-PQ-Q_{,}=a$$

не равны нулю.

Слѣдуя общему способу, умноживъ два первые члена первой части даннаго уравненія на ∂x, разсматривая въ произведеніи перемѣнными только $z_{,}$ и z и интегрируя, находимъ

$$\int(\partial z_{,}+P\partial z)=z_{,}+Pz.$$

Затѣмъ вмѣсто z введемъ новое зависимое перемѣнное u посредствомъ положенія

$$z_{,}+Pz=u,$$

---

[1]) Hist. de l'Ac. des Sc. 1773.

дифференцируя которое въ отношеніи x и вычитая изъ даннаго уравненія, будемъ имѣть

$$Qz_{,}+(N-P')z=M-u'.$$

Разрѣшивъ два предыдущія уравненія относительно z и $z_{,}$, находимъ

$$z=\frac{1}{A}(M-Qu-u') \quad \text{и} \quad z_{,}=\frac{1}{A}[(N-P')u+Pu'-MP].$$

Очевидно, мы удовлетворимъ данному уравненію подстановкою значенія z, доставляемаго первымъ изъ двухъ предыдущихъ уравненій, если только выведенное изъ него значеніе $z_{,}$ будетъ равно тому, которое даетъ второе изъ предыдущихъ уравненій. Слѣдовательно, функція u должна быть опредѣлена по условію

$$\left(\frac{M-Qu-u'}{A}\right)_{,}=\frac{(N-P')u+Pu'-MP}{A},$$

развивая которое и расположивъ результатъ въ нисходящемъ порядкѣ производныхъ отъ u, получимъ линейное уравненіе

$$u_{,}'+pu'+qu_{,}+nu=m,$$

гдѣ

$$p=P-\frac{A_{,}}{A},\quad q=Q,$$

$$n=N-P'+Q_{,}-Q\frac{A_{,}}{A},\quad m=M_{,}-M\frac{A_{,}}{A}+MP.$$

Мы уже знаемъ изъ предыдущаго §, что преобразованное уравненіе не можетъ имѣть интеграла перваго порядка съ произвольною функціей отъ x; и дѣйствительно, составляя выраженіе, обращающееся въ нуль при существованіи этого интеграла, находимъ

$$b=n-pq-q_{,}=N-PQ-P'=A,$$

количество, по условію, различное отъ нуля.

Составляя затѣмъ выраженіе, обращающееся въ нуль, если преобразованное уравненіе имѣетъ интегралъ перваго порядка съ произвольной функціей отъ y, получимъ

$$B=n-pq-p'=N-PQ-P'+(Q_{,}-P')+\left(\frac{A_{,}}{A}\right)'$$

или, на основаніи равенствъ

$$A=N-PQ-P' \quad \text{и} \quad a=N-PQ-Q_{,}$$

и ихъ слѣдствія

$$A-a=Q_{,}-P',$$

$$B=\left(\frac{A_{,}}{A}\right)'+2A-a=\frac{\partial^2 \log A}{\partial x\, \partial y}+2A-a.$$

Отсюда видно, что B можетъ быть равно нулю, хотя A и a не равны нулю. Если же B не равно нулю, то къ преобразованному уравненію можно приложить тотъ же самый пріемъ преобразованія, который мы примѣнили къ данному уравненію. Но еще проще, вмѣсто составленія преобразованныхъ уравненій, продолжать рядъ количествъ аналогичныхъ B и b, отъ значенія которыхъ зависитъ интегрируемость соотвѣтствующихъ имъ уравненій. Этотъ рядъ напишется слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} A=N-PQ-\frac{\partial P}{\partial x}, \quad & a=N-PQ-\frac{\partial Q}{\partial y}, \\ B=\frac{\partial^2 \log A}{\partial x\, \partial y}+2A-a, \quad & b=A, \\ C=\frac{\partial^2 \log B}{\partial x\, \partial y}+2B-b, \quad & c=B, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

. . . .

Если, продолжая рядъ A, B, C,..., мы встрѣтимъ членъ равный нулю, то способъ Лапласа примѣнимъ и порядокъ уничтожающагося члена покажетъ, послѣ сколькихъ преобразованій мы получимъ искомый интегралъ.

Въ предыдущемъ изслѣдованіи можно было дать перемѣнному y ту роль, которую имѣло x и обратно. Такимъ образомъ, получимъ другой рядъ, подобный предыдущему:

$$\left.\begin{array}{l} a=N-PQ-\dfrac{\partial Q}{\partial y}, \quad A=N-PQ-\dfrac{\partial P}{\partial x} \\ b=\dfrac{\partial^2 \log a}{\partial x\, \partial y}+2a-A, \quad B=a \\ c=\dfrac{\partial^2 \log b}{\partial x\, \partial y}+2b-B, \quad C=b \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

. . . .

Понятно, что B, $C\ldots$, b, $c\ldots$ въ формулахъ (I) и (II) имѣютъ различныя значенія.

Прилагая этотъ способъ къ уравненію

$$z_,'+xyz'-2yz=0,$$

гдѣ $P=xy$, $Q=0$, $N=-2y$, $M=0$, находимъ по формуламъ (I):

$$\begin{cases} A=-3y, \quad B=-4y, \quad C=-5y,\ldots \\ a=-2y, \quad b=-3y, \quad c=-4y,\ldots \end{cases}$$

Слѣдовательно, рядъ количествъ A, B, $C\ldots$ не можетъ оканчиваться нулемъ.

Но прилагая формулы (II), получимъ:

$$\begin{cases} a=-2y, \quad b=-y, \quad c=0 \\ A=-3y, \quad B=-2y, \end{cases}$$

слѣдовательно, этимъ путемъ послѣ трехъ преобразованій получимъ интегралъ даннаго уравненія. Дѣйствительно, полагая

$$z'=u,$$

дифференцируя это уравненіе въ отношеніи y и вычитая изъ даннаго, находимъ

$$xyz'-2yz=-u_,,$$

и изъ двухъ предыдущихъ уравненій получимъ

$$z=\frac{1}{2}xu+\frac{u_{,}}{2y}.$$

Слѣдовательно, должно быть

$$\left(\frac{1}{2}xu+\frac{u_{,}}{2y}\right)'=u,$$

или

$$u_{,}'+xyu'-yu=0.$$

Полагая

$$u'=v,$$

дифференцируя въ отношеніи y и вычитая изъ предыдущаго, получимъ

$$xyu'-yu=-v_{,}.$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій выводимъ

$$u=xv+\frac{v_{,}}{y};$$

поэтому должно быть

$$\left(xv+\frac{v_{,}}{y}\right)'=v,$$

или

$$v_{,}'+xyv'=0.$$

Отсюда получимъ:

$$v=\psi(y)+\int e^{-\frac{xy^2}{2}}\varphi(x)dx$$

и

$$v_{,}=\psi'(y)-y\int e^{-\frac{xy^2}{2}}x\varphi(x)dx;$$

слѣдовательно,

$$u=x\psi(y)+\frac{\psi'(y)}{y}-x\int e^{-\frac{xy^2}{2}}\varphi(x)dx-\int e^{-\frac{xy^2}{2}}x\varphi(x)dy.$$

Наконецъ, опредѣливъ производную отъ u въ отношеніи y и вставивъ значенія u и $u_{,}$ въ формулу

$$2z=xu+\frac{u_{,}}{y},$$

мы получимъ общій интегралъ задачи:

$$2z=x^2\psi(y)+\frac{2xy-1}{y^3}\psi'(y)+\frac{\psi''(y)}{y^2}$$

$$+x^2\int e^{-\frac{xy^2}{2}}\varphi(x)dx+\frac{1-2xy^2}{y^2}\int e^{-\frac{xy^2}{2}}x\varphi(x)dx$$

$$+\frac{1}{y^2}\int e^{-\frac{xy^2}{2}}(xy^2-1)x\varphi(x)dx.$$

§ 11.

Линейное уравненіе общаго вида

$$z''+sz_{,}'+tz_{,,}+qz_{,}+pz'+Nz=M,$$

въ которое входятъ всѣ три частныя производныя второго порядка и коэффиціенты M, N, p, q, s, t означаютъ данныя функціи отъ x и y, приводится къ тому упрощенному виду, который мы разсматривали въ предыдущемъ §, на основаніи общихъ началъ изложенныхъ выше (гл. I, § 6). Для этого должно только вмѣсто x и y ввести въ него независимыми перемѣнными α и β— аргументы произвольныхъ функцій общаго его интеграла. Для опредѣленія же аргументовъ α и β должно, какъ извѣстно, интегрировать два уравненія съ частными производными перваго порядка и вида

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+m\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\beta}{\partial x}+n\frac{\partial\beta}{\partial y}=0,$$

гдѣ m и n означаютъ корни квадратнаго уравненія

$$\xi^2-s\xi+t=0,$$

получаемаго изъ общей формулы

$$\frac{\partial F}{\partial z''}\xi^2-\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\xi+\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}=0,$$

если въ ней вмѣсто F возьмемъ первую часть даннаго уравненія.

Такимъ образомъ, мы не можемъ изслѣдовать, интегрируется ли предыдущее уравненіе по способу Лапласа, прежде введенія въ него новыхъ независимыхъ перемѣнныхъ, требующаго предварительнаго интегрированія двухъ уравненій:

$$dy = m dx \quad \text{и} \quad dy = n dx,$$

съ двумя перемѣнными x и y.

Но *Лежандръ* показалъ пріемы подобнаго изслѣдованія, прилагаемаго непосредственно къ данному уравненію безъ измѣненія въ немъ независимыхъ перемѣнныхъ. Онъ говоритъ о полученныхъ имъ выводахъ, что «они плодъ вычисленія довольно труднаго, подробности котораго, по причинѣ ихъ длинноты, я не считаю нужнымъ приводить»[1]).

Но можно представить это изслѣдованіе въ довольно простомъ видѣ и севершенно сходно съ подобнымъ изслѣдованіемъ, изложеннымъ въ предыдущемъ §.

Для этого мы введемъ знакоположенія D и ∇, опредѣливъ ихъ слѣдующимъ образомъ:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{и} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + n\frac{\partial}{\partial y},$$

гдѣ m и n означаютъ какія, нибудь двѣ данныя функціи x и y.

Обозначая черезъ u и v двѣ функціи x и y и прилагая одно изъ дѣйствій D или ∇ къ сложнымъ функціямъ $u \pm v$, $u.v$ и $\frac{u}{v}$, весьма легко получимъ слѣдующіе выводы:

$$D(u+v) = Du + Dv, \quad D(u.v) = uDv + vDu, \quad D\frac{u}{v} = \frac{vDu - uDv}{v^2}.$$

Сверхъ того, по опредѣленію, имѣемъ:

$$Du = u' + mu, \quad \text{и} \quad \nabla u = u' + nu,$$

и отсюда находимъ

$$u_{,} = \frac{Du - \nabla u}{m - n}. \quad u' = \frac{m\nabla u - nDu}{m - n}.$$

[1]) Hist. de l'Ac. des Sc. 1778, p. 319.

Прилагая теперь къ u дѣйствія D и ∇ одно вслѣдъ за другимъ, но въ различной послѣдовательности, получимъ различные выводы:

$$\nabla Du=u''+(m+n)u_{,}'+mnu_{,,}+(\nabla m)u_{,},$$
$$D\nabla u=u''+(m+n)u_{,}'+mnu_{,,}+(Dn)u_{,},$$

откуда

$$\nabla Du-D\nabla u=\frac{\nabla m-Dn}{m-n}(Du-\nabla u)$$

или, полагая для краткости

$$\mu=\frac{\nabla m-Dn}{m-n},$$
$$\nabla Du-D\nabla u=\mu(Du-\nabla u).$$

Возьмемъ теперь уравненіе съ частными производными второго порядка слѣдующаго вида

$$D\nabla z+PDz+Q\nabla z+Nz=M,$$

гдѣ M, N, P, Q означаютъ данныя функціи отъ x и y.

Написавъ его слѣдующимъ образомъ

$$D(\nabla z+Pz)+Q(\nabla z+Pz)+(N-PQ-DP)z=M,$$

замѣчаемъ, что если

$$N-PQ-DP=0,$$

то оно интегрируется слѣдующимъ образомъ.

Полагая

$$\nabla z+Pz=u,$$

будемъ имѣть уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$Du+Qu=M,$$

интегралъ котораго получится по выше изложенному способу (§ 7) и будетъ заключать въ своемъ выраженіи одну произвольную функцію отъ x и y. Вставивъ его значеніе въ предыдущее уравненіе, получимъ другое уравненіе съ частными производными 1-го порядка; проинтегрированное точно такъ же, какъ первое, оно доставитъ общій интегралъ задачи съ двумя произвольными функціями отъ x и y.

Есть еще другой путь для интегрированія разсматриваемаго уравненія. Посредствомъ даннаго выше равенства

$$D\nabla z = \nabla Dz + \mu(\nabla z - Dz)$$

мы можемъ ввести ∇Dz вмѣсто $D\nabla z$, вслѣдствіе чего данное уравненіе приметъ видъ

$$\nabla Dz + (Q+\mu)\nabla z + (P-\mu)Dz + Nz = M$$

и можетъ быть написано еще слѣдующимъ образомъ

$$\nabla[Dz+(Q+\mu)z] + (P-\mu)[Dz+(Q+\mu)z] + \\ +[N-(P-\mu)(Q+\mu)-\nabla(Q+\mu)]z = M.$$

Поэтому, если будетъ имѣть мѣсто равенство

$$N-(P-\mu)(Q+\mu)-\nabla(Q+\mu)=0,$$

то данное уравненіе интегрируется точно такъ же, какъ въ предыдущемъ случаѣ.

Если выраженія:

$$N-PQ-DP=A \quad \text{и} \quad N-(P-\mu)(Q+\mu)-\nabla(Q+\mu)=a,$$

различны отъ нуля, то введемъ вмѣсто z новое зависимое перемѣнное u посредствомъ положенія

$$\nabla z + Pz = u.$$

Приложивъ къ обѣимъ частямъ этого уравненія дѣйствіе D и вычитая результатъ изъ даннаго уравненія, получимъ

$$Q\nabla z + (N-DP)z = M - Du$$

и изъ двухъ послѣднихъ уравненій находимъ:

$$z=\frac{M-Qu-Du}{A},\quad \nabla z=\frac{(N-DP)u+PDu-MP}{A}.$$

Если въ данное уравненіе вставимъ предыдущія значенія z и ∇z и значенія Dz, $D\nabla z$, получаемыя изъ предыдущихъ уравненій, прилагая къ каждому изъ нихъ дѣйствіе D, то не трудно убѣдиться повѣркою, что такимъ образомъ мы удовлетворимъ данному уравненію. Но для того, чтобы значенія ∇z и $D\nabla z$, доставляемыя вторымъ изъ предыдущихъ уравненій, были равны тѣмъ, которыя можно также получить изъ перваго,—необходимо должно удовлетворить слѣдующему условію

$$\nabla\left(\frac{M-Qu-Du}{A}\right)=\frac{(N-DP)u+PDu-MP}{A}.$$

Исполнивъ въ 1-й части его дѣйствіе ∇, результатъ можно представить слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\nabla Du+\left(P-\frac{\nabla A}{A}\right)Du+Q\nabla u$$
$$+\left[N-DP+\nabla Q-Q\frac{\nabla A}{A}\right]u=\nabla M-M\frac{\nabla A}{A}+MP.$$

Но чтобы привести его къ совершенно одинаковому общему виду съ даннымъ уравненіемъ, введемъ $D\nabla u$ вмѣсто ∇Du, послѣ чего предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$D\nabla u+pDu+q\nabla u+nu=l,$$

гдѣ

$$p=P+\mu-\frac{\nabla A}{A},\quad q=Q-\mu,$$
$$n=N-DP+\nabla Q-Q\frac{\nabla A}{A},\quad l=\nabla M-M\frac{\nabla A}{A}+MP.$$

Чтобы испытать возможность интегрированія преобразованнаго уравненія по объясненному выше способу, составляемъ выраженія:

$$n-pq-Dp=B\quad \text{и}\quad n-(p-\mu)(q+\mu)-\nabla(q+\mu)=b.$$

Вставивъ значенія n, p, q, не трудно видѣть, что

$$B = D\frac{\nabla A}{A} + 2A - a - \mu\frac{\nabla A}{A} + \lambda \quad \text{и} \quad b = A,$$

гдѣ для краткости полагаемъ

$$\lambda = 2\mu^2 - (D\mu + \nabla\mu).$$

Поэтому b различно отъ нуля, но B можетъ быть нулемъ, хотя A и a не равны нулю. Если и B не равно нулю, то къ преобразованному уравненію можно приложить тотъ же самый пріемъ преобразованія, который мы примѣнили къ данному уравненію. Но еще проще, вмѣсто составленія преобразованныхъ уравненій, продолжать рядъ количествъ аналогичныхъ B и b, отъ значенія которыхъ зависитъ интегрируемость соотвѣтствующихъ имъ уравненій. Этотъ рядъ напишется слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l} A = N - PQ - DP, \quad a = N - (P-\mu)(Q+\mu) - \nabla(Q+\mu) \\ B = D\dfrac{\nabla A}{A} + 2A - a - \mu\dfrac{\nabla A}{A} + \lambda, \quad b = A, \\ C = D\dfrac{\nabla B}{B} + 2B - b - \mu\dfrac{\nabla B}{B} + \lambda, \quad c = B \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

и т. д.

Возможность примѣненія этого способа интегрированія обусловливается требованіемъ, чтобы рядъ A, B, C,... оканчивался нуленъ; порядокъ уничтожающагося члена покажетъ, послѣ сколькихъ преобразованій можно получить искомый интегралъ.

Можно представить предыдущее изслѣдованіе въ другомъ видѣ, приложивъ его къ данному уравненію, написанному такимъ образомъ

$$\nabla Dz + (Q+\mu)\nabla z + (P-\mu)Dz + Nz = M;$$

но въ этомъ случаѣ привелось бы повторить все предыдущее вычисленіе, замѣнивъ повсюду знаки

$$P,\ Q,\ A,\ a,\ D,\ \nabla$$

соотвѣтственно слѣдующими:

$$Q+\mu,\quad P-\mu,\ a,\ A,\ \nabla,\ D.$$

Чтобы показать, какимъ образомъ предыдущіе выводы прилагаются къ уравненію

$$z''+sz_,'+tz_{,,}+qz_,+pz'+Nz=M,$$

должно только m и n принять корнями уравненія

$$\zeta^2-s\zeta+t=0;$$

вслѣдствіе чего, на основаніи данныхъ выше формулъ, будемъ имѣть равенство

$$D\nabla z-[z''+sz_,'+tz_{,,}+(Dn)z]=0,$$

приложивъ которое къ предыдущему уравненію, получимъ

$$D\nabla z+(q-Dn)z_,+pz'+Nz=M,$$

и вставивъ сюда значенія

$$z'=\frac{m\nabla z-nDz}{m-n},\quad z_,=\frac{Dz-\nabla z}{m-n},$$

приведемъ предыдущее уравненіе къ виду

$$D\nabla z+\frac{q-Dn-pn}{m-n}Dz+\frac{pm-q+Dn}{m-n}\nabla z+Nz=M,$$

къ которому примѣняется изложенный выше способъ интегрированія.

Для поясненія этого способа приложимъ его къ уравненію

$$z''-a^2z_{,,}+\frac{b}{x^2}z=0,$$

условіе интегрируемости котораго, въ конечномъ видѣ, вывелъ еще *Эйлеръ* [1]).

---

[1]) Miscellanea Taurinensia. T. III, p. 60.

Полагая
$$Dz=z'+az, \quad \text{и} \quad \nabla z=z'-az,$$
имѣемъ
$$D\nabla z=\nabla Dz=z''-a^2z,,$$

поэтому данное уравненіе приметъ слѣдующій видъ
$$D\nabla z+\frac{b}{x^2}z=0.$$
Здѣсь имѣемъ:
$$P=0, \quad Q=0, \quad N=\frac{b}{x^2}, \quad M=0, \quad DP=0, \quad \nabla Q=0, \quad \mu=0,$$
$$A=\frac{b}{x^2}, \quad a=\frac{b}{x^2}.$$
Слѣдовательно,
$$\nabla A=-\frac{2b}{x^3}, \quad \frac{\nabla A}{A}=-\frac{2}{x}, \quad D\frac{\nabla A}{A}=\frac{2}{x^2}.$$

Поэтому получимъ слѣдующіе ряды:
$$a=\frac{b}{x^2}, \quad A=\frac{b}{x^2},$$
$$b=\frac{b}{x^2}, \quad B=\frac{k_1}{x^2}, \quad k_1=b+2,$$
$$c=\frac{k_1}{x^2}, \quad C=\frac{k_2}{x^2}, \quad k_2=2(k_1+1)-b,$$
$$d=\frac{k_2}{x^2}, \quad D=\frac{k_3}{x^2}, \quad k_3=2(k_2+1)-k_1;$$

продолжая такимъ образомъ и доходя до $n+2$-го члена, получимъ:
$$r=\frac{k_n}{x^2}, \quad R=\frac{k_{n+1}}{x^2}, \quad \text{гдѣ} \quad k_{n+1}=2(k_n+1)-k_{n-1}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ уравненіе въ конечныхъ разностяхъ для коэффиціентовъ k:
$$k_{n+1}-2k_n+k_{n-1}=2,$$

которое, введя знакъ конечныхъ приращеній $\triangle$, можно написать еще такимъ образомъ:
$$\triangle^2 k_{n-1}=2;$$

интегрируя его, получимъ

$$k_{n-1}=n(n-1)+Cn+C' \quad \text{и} \quad k_n=n(n+1)+C(n+1)+C'.$$

Для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ C и C', полагая $n=1$ и $n=2$, находимъ: $b=2C+C'$ и $b=3C+C'$; откуда $C=0$, $C'=b$; слѣдовательно,

$$k_n=n(n+1)+b.$$

Отсюда выводимъ условіе Эйлера: при данной величинѣ b разсматриваемое уравненіе интегрируемо въ конечномъ видѣ, если возможно удовлетворить уравненію

$$n(n+1)+b=0$$

какимъ-нибудь цѣлымъ положительнымъ значеніемъ n. Разсматривая же b неопредѣленнымъ постояннымъ и полагая $b=-n(n+1)$, получаемъ форму уравненій

$$z''-a^2z_{\prime\prime}-\frac{n(n+1)}{x^2}z=0,$$

интегрируемыхъ въ конечномъ видѣ. Полагая послѣдовательно $z=x^{n+1}u$ и $z=x^{-n}v$, приводимъ предыдущее уравненіе къ двумъ слѣдующимъ:

$$u''-a^2u_{\prime\prime}+\frac{2(n+1)}{x}u'=0 \quad \text{и} \quad v''-a^2v_{\prime\prime}-\frac{2n}{x}v'=0;$$

поэтому уравненіе

$$z''-a^2z_{\prime\prime}+\frac{b}{x}z'=0$$

интегрируется въ конечнимъ видѣ при всякомъ четномъ числѣ b, положительномъ или отрицательномъ.

Примѣчаніе. Извѣстно, что способъ Лапласа прилагается также къ нѣкоторымъ уравненіямъ, содержащимъ въ одно время частныя конечныя приращенія и производныя. Мы могли бы показать, что основная идея этого способа примѣнима также къ интегрированію многихъ обыкновенныхъ линейныхъ уравненій второго порядка и вида

$$F(x)\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+\varphi(x)y=\psi(x);$$

но не считаемъ умѣстнымъ входить здѣсь въ эти подробности.

ГЛАВА III.

Интегрированіе сложныхъ видовъ уравненій съ частными производными второго порядка функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

§ 12.

Уравненіе

$$Hz''+2Kz_{,}'+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})=0, \qquad (1)$$

въ которомъ коэффиціенты H, K, L, M, N предполагаются какими-либо данными функціями отъ x, y, z, z', $z_{,}$, представляетъ наиболѣе общій видъ уравненій разсматриваемаго нами класса, для котораго существуютъ совершенно общіе пріемы или теорія интегрированія.

Монжъ[1]) первый показалъ способъ для интегрированія уравненій этого вида[2]); но предложенная имъ теорія не исчерпываетъ всѣхъ возможныхъ случаевъ, могущихъ встрѣтиться при интегрированіи тѣхъ уравненій, къ которымъ приводится разматриваемый вопросъ. Самое полное развитіе теоріи этого вопроса далъ *Амперъ*[3]). Изъ новѣйшихъ изслѣдователей занимались тѣмъ же общимъ вопросомъ, сколько мнѣ извѣстно, еще только два англійскихъ математика *Буль*[4])

---

[1]) Mém. sur le calc. integr. des équat. aux différences partielles. Hist. de l'Ac. des Sc. 1784.

[2]) Онъ собственно разсматривалъ случай N=0, но это ограниченіе не необходимо.

[3]) Mém. contenant l'application de la théorie exposée dans le XVII cahier de Journ. de l'Ec. Pol.—Journ. de l'Ec. Pol. T. XI (1820).

[4]) a) Ueber die partielle Differentialgleichung 2-ter Ordnung Rr+Ss+Tt+U(s²—rt)=V. Crelle Jour. für die Math. 61 B. 1863; b) Treatise on

и *де Морганъ*[1]). Пріемы, предложенные ими, много уступающіе въ общности и полнотѣ анализа изслѣдованію Ампера, замѣчательны, однако, новою постановкою вопроса, приводящей интегрированіе разсматриваемаго уравненія съ частными производными второго порядка къ интегрированію двухъ совмѣстныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка. Помощію этого приведенія, которое, впрочемъ, можно сдѣлать, какъ показалъ *Буръ*[2]), и не отступая отъ основныхъ пріемовъ *Ампера*, выводятся весьма просто различныя условія между коэффиціентами H, K..., N, при выполненіи или невыполненіи которыхъ являются всѣ возможные случаи, теорія интегрированія которыхъ разработана Амперомъ.

Уравненія, къ интегрированію которыхъ приводится разсматриваемый вопросъ, получаются по способу Ампера слѣдующимъ образомъ. Вмѣсто первоначальныхъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y введемъ новыя x и α, предполагая существованіе нѣкоторой зависимости между x, y и α. Такимъ образомъ, удержавъ принятыя нами означенія для частныхъ производныхъ при этихъ двухъ системахъ независимыхъ перемѣнныхъ, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = z'' + z_{,}' \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_{,}}{\partial x} = z_{,}' + z_{,,} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha} = z_{,,} \frac{\partial y}{\partial \alpha}. \qquad (2)$$

---

diff. eduat. supplementary Volume. 1865. Ch. XXVIII; c) въ статьѣ «Considérations sur la recherche des intégrales premières des éduat. diff. partielles du 2-me ordre, par *Boldt*, помѣщенной въ Bullet. de l'Ac. des Sc. de S-t. Pétersbourg, T. 4. 1862; по мнѣнію Todhunter'а въ имени автора есть опечатка и статья эта должна была принадлежать Булю (Bool).

[1]) Изслѣдованіе этого автора, помѣщенное въ Cambridge Philosophical Transactions Vol. IX P. 4. извѣстно мнѣ только по ссылкѣ на него, дѣлаемой Булемъ, который вмѣстѣ съ тѣмъ указываетъ на сходство употребленныхъ ими пріемовъ.

[2]) Journ. de l'Ec. Pol. T. XXII. Sur l'integration des équations différentielles partielles du 1-er et du 2-me ordre.

Изъ послѣдняго уравненія получимъ

$$z_{,,}=\frac{\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}};$$

затѣмъ предпослѣднее доставитъ

$$z_,'=\frac{\partial z_,}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}} \tag{3}$$

и, наконецъ, изъ перваго будемъ имѣть

$$z''=\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_,}{\partial x}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Для подстановки этихъ значеній въ ур. (1) замѣтимъ сначала, что

$$z''z_{,,}=\left(\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_,}{\partial x}\right)\frac{\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left\{\frac{\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}\right\}^2$$

и

$$z_,'^2=\left(\frac{\partial z_,}{\partial x}\right)^2-2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_,}{\partial x}\frac{\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left\{\frac{\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}\right\}^2.$$

Слѣдовательно, при вычитаніи второго равенства изъ перваго, члены со второю степенью отношенія $\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}:\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ уничтожатся и мы будемъ имѣть

$$z''z_{,,}-z_,'^2=-\left(\frac{\partial z_,}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_,}{\partial x}\right)\frac{\frac{\partial z_,}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}.$$

Поэтому результатъ подстановки приметъ слѣдующій видъ:

$$P+Q\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}=0, \tag{4}$$

гдѣ

$$P=H\left(\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)+2K\frac{\partial z_{,}}{\partial x}+M-N\left(\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^{2},$$

и

$$Q=H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{2}-2K\frac{\partial y}{\partial x}+L+N\left(\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right).$$

Значенія функціи z и частныхъ производныхъ ея, выведенныя изъ общаго интеграла, принадлежащаго уравненію (1), должны удовлетворять этому послѣднему. Подобнымъ образомъ, выразивъ функцію z и ея частныя производныя въ перемѣнныхъ x и α, мы удовлетворимъ этими выраженіями результату такого же преобразованія уравненія (1), т.-е. уравненію (4). До сихъ поръ выборъ зависимости между перемѣнными x, y и α оставался произвольнымъ; но если предположимъ теперь, что α представляетъ одинъ изъ аргументовъ двухъ произвольныхъ функцій общаго интеграла, тогда станетъ возможнымъ изъ предыдущаго заключенія вывести весьма важныя слѣдствія. При такомъ выборѣ новыхъ перемѣнныхъ, на основаніи доказаннаго выше (§ 4, гл. I), выраженія частныхъ производныхъ функціи z могутъ быть однородны или разнородны съ интеграломъ относительно α; и въ послѣднемъ случаѣ въ выраженіяхъ каждаго порядка частныхъ производныхъ отъ z будутъ содержаться такія произвольныя функціи отъ α, которыхъ не находится ни въ интегралѣ, ни въ выраженіяхъ производныхъ предыдущихъ порядковъ. Слѣдовательно, въ предположеніи разнородности производныхъ второго порядка z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ съ интеграломъ относительно α, мы должны допустить въ выраженіи

$$\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}=z_{,,}$$

присутствіе такой произвольной функціи отъ α, которой не находится ни въ общемъ интегралѣ, ни въ выраженіяхъ y, z', $z_{,}$, ни въ ихъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial z'}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{,}}{\partial x}$, ибо при дифференцированіи по x, α предполагается количествомъ постояннымъ. Поэтому упомянутая произвольная функція отъ α не можетъ войти ни въ P, ни въ Q, и первая часть уравненія (4) иначе не можетъ приводиться къ нулю, какъ при совмѣстномъ существованіи равенствъ:

$$P=0 \quad \text{и} \quad Q=0. \tag{5}$$

Обратно, чтобы испытать, будутъ ли производныя второго порядка z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ въ уравненіи (1) разнородны съ интеграломъ относительно α, должно только взять уравненія (5) и, присоединивъ къ нимъ первыя два изъ уравненій (2), исключить изъ этихъ четырехъ уравненій три производныя $\frac{\partial z'}{\partial x}$, $\frac{\partial z_{,}}{\partial x}$ и $\frac{\partial y}{\partial x}$. Если результатъ исключенія будетъ тождественный съ даннымъ уравненіемъ (1), то уравненія (5) будутъ ему равнозначущія и предположеніе разнородности производныхъ z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ съ интеграломъ относительно α—справедливо; напротивъ это предположеніе оказалось бы неправильнымъ, еслибъ результатомъ исключенія получилось уравненіе между x, y, z, z', $z_{,}$, z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ различное отъ (1).

Но нетрудно убѣдиться, что для уравненія (1) всегда будетъ имѣть мѣсто первый случай. Дѣйствительно, вставивъ въ уравненія (5) вмѣсто $\frac{\partial z'}{\partial x}$ и $\frac{\partial z_{,}}{\partial x}$ ихъ соотвѣтственныя значенія $z''+z_{,}'\frac{\partial y}{\partial x}$ и $z_{,}'+z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x}$, получимъ

$$P=H\left[z''-z_{,,}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]+2K\left(z_{,}'+z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x}\right)+M-N\left(z_{,}'+z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0,$$

$$Q=H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2K\frac{\partial y}{\partial x}+L+N\left[z''+2z_{,}'\frac{\partial y}{\partial x}+z_{,,}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]=0,$$

или

$$Hz''+2Kz_{,}'+M-Nz_{,}'^{2}+2(K-Nz_{,}')z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x}-(H+Nz_{,,})z_{,,}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{2}=0,$$

$$L+Nz''-2(K-Nz_{,}')\frac{\partial y}{\partial x}+(H+Nz_{,,})\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{2}=0$$

и очевидно, что для исключенія $\frac{\partial y}{\partial x}$ нужно только первое изъ двухъ предыдущихъ уравненій сложить со вторымъ умноженнымъ на $z_{,,}$, что приведетъ къ данному уравненію

$$Hz''+2Kz_{,}'+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})=0.$$

Уравненія (5), къ которымъ, такимъ образомъ, привелось интегрированіе даннаго,—перваго порядка, но не первой степени, и въ этомъ послѣднемъ отношеніи подлежатъ дальнѣйшему упрощенію. Для этого разрѣшивъ относительно $\frac{\partial y}{\partial x}$ уравненіе $Q=0$, или равнозначущее ему уравненіе

$$(H+Nz_{,,})\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{2}-2(K-Nz_{,}')\frac{\partial y}{\partial x}+L+Nz''=0,$$

получимъ

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{K-Nz_{,}'\pm\sqrt{(K-Nz_{,}')^{2}-(H+Nz_{,,})(L+Nz'')}}{H+Nz_{,,}}$$

$$=\frac{K-Nz_{,}'\pm\sqrt{\{K^{2}-HL-N[Hz''+2Kz_{,}'+Lz_{,,}+N(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})]\}}}{H+Nz_{,,}}$$

или, на основаніи уравненія (1),

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{K-Nz_{,}'\pm\sqrt{(K^{2}-HL+MN)}}{H+Nz_{,,}}.$$

Такимъ образомъ для $\frac{\partial y}{\partial x}$ получились два значенія, что и должно быть, потому что независимое перемѣнное α, которое мы употребляемъ вмѣстѣ съ x, представляетъ одинъ изъ *двухъ* аргументовъ произвольныхъ функцій общаго интеграла. И если мы означимъ эти аргументы черезъ α и β, то два различныя значенія $\frac{\partial y}{\partial x}$ должны соотвѣтствовать двумъ различнымъ системамъ независимыхъ перемѣнныхъ: x, α и x, β. Дѣйствительно, выше (§ 6, гл. I) было показано, что различныя значенія $\frac{\partial y}{\partial x}$, соотвѣтствующія аргументамъ α и β, получаются, какъ корни уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}-\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0.$$

Означивъ же черезъ F первую часть уравненія (1), находимъ

$$\frac{\partial F}{\partial z''}=H+Nz_{,,},\quad \frac{\partial F}{\partial z_{,}'}=2(K-Nz_{,}'),\quad \frac{\partial F}{\partial z_{,,}}=L+Nz''.$$

Слѣдовательно, оба квадратныя уравненія относительно $\frac{\partial y}{\partial x}$ совершенно одинаковы.

Положивъ для краткости

$$K^2-HL+MN=G, \tag{6}$$

вмѣсто уравненія $Q=0$ будемъ имѣть

$$(H+Nz_{,,})\frac{\partial y}{\partial x}-K+Nz_{,}'\mp\sqrt{G}=0,$$

или, на основаніи второго изъ уравненій (2),

$$H\frac{\partial y}{\partial x}+N\frac{\partial z_{,}}{\partial x}-K\mp\sqrt{G}=0.$$

Далѣе, уравненіе $P=0$ можно написать такимъ образомъ:

$$H\frac{\partial z'}{\partial x}+\left(2K-H\frac{\partial y}{\partial x}-N\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)\frac{\partial z_{,}}{\partial x}+M=0$$

и вслѣдствіе предыдущаго уравненія оно приметъ видъ

$$H\frac{\partial z'}{\partial x}+(K\mp\sqrt{G})\frac{\partial z_{,}}{\partial x}+M=0.$$

Различные знаки передъ $\sqrt{G}$ соотвѣтствуютъ различнымъ системамъ независимыхъ перемѣнныхъ: x, α и x, β. Присутствіе второго независимаго перемѣннаго α или β незамѣтно, вслѣдствіе того, что уравненія содержатъ частныя производныя функціи y, z', $z_{,}$ только въ отношеніи одного x, между тѣмъ какъ α или β не входятъ явнымъ образомъ даже въ коэффиціенты. Чтобы показать, которое изъ двухъ количествъ α или β мы разсматриваемъ вмѣстѣ съ x независимымъ перемѣннымъ, Амперъ въ этомъ и вообще въ аналогичныхъ случаяхъ употребляетъ слѣдующее означеніе для частныхъ производныхъ:

$$\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}, \quad \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}, \quad \frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial x(\beta}, \quad \frac{\partial z'}{\partial x(\beta}, \quad \frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}.$$

Поэтому, удержавъ предъ $\sqrt{G}$ верхній знакъ при перемѣнныхъ независимыхъ x, α и нижній при x, β, мы можемъ написать уравненія, къ которымъ окончательно привелось интегрированіе (1), слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} H\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}+N\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}-K-\sqrt{G}=0 \\ H\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}+M=0 \end{aligned}\right\}, \qquad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} H\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+N\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}-K+\sqrt{G}=0 \\ H\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}+M=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (B)$$

Къ каждой изъ этихъ двухъ системъ можно еще присоединить уравненіе

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'+z_{,}\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad (C)$$

въ которомъ вмѣстѣ съ x вторымъ независимымъ перемѣннымъ будетъ α или β, смотря потому, присоединится ли (C) къ уравненіямъ (A) или (B).

Здѣсь кстати будетъ показать и другіе пріемы, о которыхъ было упомянуто въ началѣ этой главы, для приведенія интегрированія уравненія (1) къ другимъ уравненіямъ, аналогичнымъ Амперовымъ (A), (B) и (C). Монжъ разсматривалъ общій видъ уравненія, линейныхъ относительно только z'', $z_{\prime}'$, $z_{\prime\prime}$, но его пріемъ легко распространяется и на уравненія, линейныя также въ отношеніи $z''z_{\prime\prime}-z_{\prime}'^2$, т.-е. на общее уравненіе

$$Hz''+2Kz_{\prime}'+Lz_{\prime\prime}+M+N(z''z_{\prime\prime}-z_{\prime}'^2)=0.$$

Онъ начинаетъ замѣчаніемъ, что данное уравненіе, представляя простое (единственное) отношеніе между тремя количествами z'', $z_{\prime}'$, $z_{\prime\prime}$, не можетъ быть достаточно для опредѣленія значеній каждаго изъ нихъ посредствомъ x, y, z, z', $z_{\prime}$. Поэтому, если мы присоединимъ къ нему уравненія:

$$dz'=z''dx+z_{\prime}'dy, \quad dz_{\prime}=z_{\prime}'dx+z_{\prime\prime}dy,$$

которыя, выражая только опредѣленія частныхъ производныхъ z'', $z_{\prime}'$, $z_{\prime\prime}$ не даютъ новыхъ отношеній между ними (ne disent rien de nouveau), и помощію ихъ будемъ исключать изъ даннаго по двѣ изъ производныхъ z'', $z_{\prime}'$, $z_{\prime\prime}$, то получаемыя такимъ образомъ уравненія вида:

$$P+Qz_{\prime\prime}=0, \quad R+Sz''=0, \quad T+Uz_{\prime}'=0,$$

не должны опредѣлять значеній $z_{\prime\prime}$, z'', $z_{\prime}'$. Слѣдовательно, предыдущія уравненія, имѣя мѣсто независимо отъ значеній количествъ $z_{\prime\prime}$, z'', $z_{\prime}'$, должны приводиться соотвѣтственно къ слѣдующимъ:

$$P=0, \quad Q=0; \quad R=0, \quad S=0; \quad T=0, \quad U=0.$$

Но не трудно убѣдиться, что изъ этихъ шести уравненій только два необходимыя, напримѣръ, $P=0$ и $Q=0$, остальныя же будутъ съ ними или одинаковыя, или однозначущія.

Въ самомъ дѣлѣ, исполняя упомянутыя исключенія, находимъ:

$$P=H(dxdz'-dydz_,)+2Kdxdz_,+Mdx^2-Ndz_,^2=0,$$
$$R=L(dydz_,-dxdz')+2Kdydz'+Mdy^2-Ndz'^2=0,$$
$$T=Hdydz'+Ldxdz_,+Mdxdy+Ndz'dz_,=0,$$

и

$$Q=S=-U=Hdy^2-2Kdxdy+Ldx^2+N(dxdz'+dydz_,)=0.$$

А такъ какъ

$$dxdz'+dydz_,=z''dx^2+2z_,'dxdy+z_{,,}dy^2,$$

то послѣднее уравненіе приметъ видъ

$$(H+Nz_{,,})dy^2-2(K-Nz_,')dxdy+(L+Nz'')dx^2=0;$$

разрѣшая его послѣдовательно относительно $\frac{dy}{\partial x}$ и $\frac{dx}{dy}$, при помощи даннаго уравненія получимъ:

$$dy=\frac{K-Nz_,'\pm\sqrt{G}}{H+Nz_{,,}}dx,\quad dx=\frac{K-Nz_,'\pm\sqrt{G}}{L+Nz''}dy,$$

гдѣ

$$G=K^2-HL+MN.$$

Уничтоживъ знаменателей, перенеся члены въ одну часть и пользуясь равенствами:

$$dz'=z''dx+z_,'dy,\quad dz_,=z_,'dx+z_{,,}dy,$$

можемъ написать предыдущія уравненія слѣдующимъ образомъ:

$$Hdy+Ndz_,-(K\pm\sqrt{G})dx=0, \tag{a}$$
$$Ldx+Ndz'-(K\pm\sqrt{G})dy=0. \tag{a'}$$

Далѣе, уравненіе $P=0$, написанное такимъ образомъ

$$Hdxdz'+(2Kdx-Hdy-Ndz_,)dz_,+Mdx^2=0,$$

на основаніи уравненія (a) приметъ видъ

$$Hdz'+(K\mp\sqrt{G})dz_,+Mdx=0. \tag{b}$$

Такимъ образомъ $P=0$ и $Q=0$ замѣняются уравненіями (a) и (b)

Затѣмъ уравненіе $R=0$, написанное такимъ образомъ

$$Ldydz_{,}+(2Kdy-Ldx-Ndz')dz'+Mdy^2=0,$$

на основаніи уравненія (a') приметъ видъ

$$Ldz_{,}+(K\mp\sqrt{G})dz'+Mdy=0. \qquad (b')$$

Слѣдовательно, $S=0$ и $R=0$ можно замѣнить уравненіями (a') и (b'), но (a') уравненіе однозначущее съ (a), а (b') получается посредствомъ исключенія dx изъ (a) и (b).

Наконецъ, уравненіе $T=0$, написанное такимъ образомъ

$$dz_{,}(Ldx+Ndz)+(Hdz'+Mdx)dy=0,$$

на основаніи уравненія (a') приметъ видъ

$$Hdz'+Mdx+(K\mp\sqrt{G})dz_{,}=0; \qquad (b)$$

слѣдовательно, уравненія $T=0$, $U=0$ и $P=0$, $R=0$ приводятся къ однимъ и тѣмъ же уравненіямъ (a) и (b).

Итакъ, по способу Монжа интегрированіе уравненія (1) приводится къ интегрированію системы уравненій:

$$\begin{gathered} Hdy+Ndz_{,}-(K\pm\sqrt{G})dx=0, \\ Hdz'+(K\mp\sqrt{G})dz_{,}+Mdx=0, \end{gathered}$$

къ которымъ можно присоединить еще слѣдующее

$$dz=z'dx+z_{,}dy.$$

Уравненія Ампера (A), (B), (C), по умноженіи на dx, становятся одинаковыми по виду съ предыдущими; но эти двѣ системы уравненій существенно отличаются тѣмъ, что одна содержитъ дифференціалы обоихъ независимыхъ и полные дифференціалы зависимыхъ перемѣнныхъ, между тѣмъ какъ въ другую входятъ дифференціалъ только одного изъ независимыхъ и частные дифференціалы (въ отношеніи этого послѣдняго) зависимыхъ перемѣнныхъ.

Разсмотримъ еще способъ *Буля*. Онъ основанъ на предположеніи существованія интеграла посредствующаго или перваго порядка для уравненія (1). Эту основную мысль авторъ способа прилагаетъ въ двухъ видахъ, для достиженія одной и той же цѣли. Но, принявъ во вниманіе отсутствіе общности въ основаніи этого пріема, достаточно будетъ разсмотрѣть одинъ изъ его видовъ.

Пусть предполагаемый интегралъ перваго порядка уравненія (1) будетъ

$$F=0.$$

Въ составъ его кромѣ перемѣнныхъ x, y, z войдутъ также z' и $z_,$; поэтому, дифференцируя его послѣдовательно въ отношеніи x и y, получимъ:

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}z'\right)=\frac{\partial F}{\partial z'}z''+\frac{\partial F}{\partial z_,}z_,',$$
$$-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}z_,\right)=\frac{\partial F}{\partial z'}z_,'+\frac{\partial F}{\partial z_,}z_{,,}.$$

Эти два уравненія могутъ служить для той самой цѣли, для которой въ способѣ *Монжа* употребляются уравненія

$$dz'=z''dx+z_,'dy,$$
$$dz_,=z_,'dx+z_{,,}dy.$$

Но такимъ образомъ привелось бы повторить все уже сказанное при изложеніи способа *Монжа*, только употребляя всюду вмѣсто

$$dx,\quad dy,\quad dz',\quad dz_,$$

соотвѣтственно

$$\frac{\partial F}{\partial z'},\quad \frac{\partial F}{\partial z_,},\quad -\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}z'\right),\quad -\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}z_,\right).$$

Поэтиму мы можемъ прямо написать уравненія, къ которымъ приведется интегрированіе (1):

$$\left.\begin{aligned} H\frac{\partial F}{\partial z_,}-N\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}z_,\right)-(K\pm\sqrt{G})\frac{\partial F}{\partial z'}=0,\\ H\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}z'\right)+(K\mp\sqrt{G})\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}z_,\right)-M\frac{\partial F}{\partial z'}=0.\end{aligned}\right\}$$

Такимъ образомъ изъ двухъ интеграловъ перваго порядка, возможныхъ вообще для уравненія съ частными производными второго порядка, одинъ долженъ удовлетворять предыдущимъ совмѣстнымъ линейнымъ уравненіямъ съ частными производными перваго порядка, взятымъ съ верхнимъ знакомъ при $\sqrt{G}$, а другой — тѣмъ же уравненіямъ, взятымъ съ нижнимъ знакомъ при $\sqrt{G}$.

Сравнивая три предыдущіе способа, нельзя не отдать преимущества тому, который предложилъ *Амперъ*. Во-1-хъ, по общности пріема, который основанъ только на предположеніи существованія общаго конечнаго интеграла для уравненія (1), въ чемъ онъ имѣетъ преимущество предъ способомъ *Буля*, предполагающимъ существованіе общаго интеграла перваго порядка, между тѣмъ какъ послѣдній не всегда возможенъ, даже при существованіи перваго. Во-2-хъ, по большей ясности причины, въ сравненіи съ аналогичною въ способѣ *Монжа*, по которой преобразованное уравненіе (1) разбивается на два. И въ-3-хъ, по формѣ уравненій, къ которымъ приводится интегрированіе (1). Въ интегралы *Амперовыхъ* уравненій естественнымъ путемъ войдутъ произвольныя функціи аргументовъ α или β, необходимыя для ихъ общности, ибо они содержатъ частныя производныя или дифференціалы только въ отношеніи одного изъ независимыхъ перемѣнныхъ x.

Относительно второго изъ трехъ предыдущихъ обстоятельствъ должно замѣтить еще, что *Амперъ*, опредѣленно указавъ причину, по которой преобразованное уравненіе (1) можетъ быть разбито на два, вмѣстѣ съ тѣмъ объяснилъ, чѣмъ обусловливается возможность или невозможность приложенія того же пріема преобразованія къ другимъ уравненіямъ, различнымъ съ (1).

Возьмемъ для этого уравненіе съ частными производными второго порядка

$$F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,},\ z'',\ z_{,}',\ z_{,,})=0,$$

предполагая его цѣлымъ раціональнымъ по крайней мѣрѣ относительно z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ и вида различнаго отъ (1).

Допустивъ для него существованіе общаго конечнаго интеграла и принявъ одинъ изъ аргументовъ α двухъ произвольныхъ функцій интеграла вмѣстѣ съ x независимыми перемѣнными, получимъ для z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ выраженія (3). Вставивъ ихъ въ данное уравненіе и расположивъ результатъ по восходящимъ степенямъ отношенія $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}:\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, будемъ имѣть преобразованное уравненіе вида

$$P+Q\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}+R\left(\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}\right)^2+\cdots=0.$$

Подобно тому, какъ данному уравненію удовлетворяютъ значенія z, z', $z_{,}$, z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$, выведенныя изъ интеграла, предполагая независимыми перемѣнными x и y, также преобразованному уравненію должны удовлетворять значенія y, z, z', $z_{,}$, выведенныя, въ предположеніи x и α назависимыми перемѣнными, изъ тѣхъ же уравненій интеграла. Но преобразованное уравненіе можетъ обратиться въ тождество двоякимъ образомъ, смотря по тому, будутъ ли производныя второго порядка z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ разнородны, или однородны съ интеграломъ относительно α. Въ первомъ случаѣ отношеніе $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}:\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ будетъ содержать такую произвольную функцію отъ α, которая не войдетъ въ коэффиціенты P, Q, R,... и эти послѣдніе сами собою приведутся къ нулю; во второмъ — одинаковыя произвольныя функціи войдутъ, какъ въ отношеніе $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}:\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, такъ и въ коэффиціенты; слѣд., преобразованное уравненіе можетъ приводиться къ нулю, не разбиваясь на отдѣльныя тождества $P=0$, $Q=0$ и пр. Чтобы испытать возможность перваго случая, должно полагать уравненія:

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=0,\quad \text{и пр.}$$

затѣмъ вставить въ нихъ вмѣсто $\frac{\partial z'}{\partial x}$ и $\frac{\partial z_{,}}{\partial x}$ ихъ соотвѣтственныя значенія $z''+z_{,}'\frac{\partial y}{\partial x}$ и $z_{,}'+z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x}$, послѣ чего они будутъ содержать только x, y, z', $z_{,}$, z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ и $\frac{\partial y}{\partial x}$. Если разультатами исключенія $\frac{\partial y}{\partial x}$ получатся уравненія однозначущія между собою и съ даннымъ уравненіемъ $F=0$, то предположеніе о разнородности z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ съ интеграломъ относительно α (который бы изъ двухъ аргументовъ α ни представляло) будетъ справедливо; въ противномъ же случаѣ оно несправедливо. При этомъ исключеніи можно, вообще, помощію каждаго изъ уравненій

$$P=0, \quad Q=0, \quad R=0, \ldots$$

выводить значенія $\frac{\partial y}{\partial x}$ и вставлять ихъ въ остальныя; но, чтобы ограничиться разсмотрѣніемъ только тѣхъ изъ нихъ, которыя дѣйствительно соотвѣтствуютъ двумъ аргументамъ α и β произвольныхъ функцій интеграла, принимаемымъ послѣдовательно независимыми перемѣнными вмѣстѣ съ x, должно сравнивать ихъ съ значеніями $\frac{\partial y}{\partial x}$, получаемыми какъ рѣшеніями квадратнаго уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}-\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0;$$

или можно, если въ данномъ случаѣ будетъ проще, брать два корня этого уравненія для подстановки въ

$$P=0, \quad Q=0, \quad R=0 \quad \text{и проч.}$$

Для поясненія предыдущаго разсмотримъ примѣръ:

$$z_{,}'z_{,,}+x(z''z_{,,}-z_{,}'^2)^2=0.$$

Вставивъ сюда значенія (3) для z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$, получимъ

$$\left.\begin{array}{l} x\left(\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^4+\left[\frac{\partial z_{,}}{\partial x}-2x\left(\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)\right]\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}+ \\ \qquad +\left[x\left(\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial y}{\partial x}\right]\left(\frac{\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}}{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}\right)^2 \end{array}\right\}=0.$$

Полагая равными нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ отношенія $\frac{\partial z_{,}}{\partial \alpha}:\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, будемъ имѣть уравненія:

$$P=\frac{\partial z_{,}}{\partial x}=0,$$

$$Q=\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\left[1-2x\left(\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)\right]=0,$$

$$R=x\left(\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z_{,}}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial y}{\partial x}=0.$$

Но вслѣдствіе перваго изъ нихъ удовлетворено и второе, а третье упрощается, такъ что достаточно разсматривать два уравненія:

$$\frac{\partial z_{,}}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad x\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

которыя, по вставкѣ значеній

$$\frac{\partial z'}{\partial x}=z''+z_{,}'\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_{,}}{\partial x}=z_{,}'+z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x},$$

примутъ видъ

$$z_{,}'+z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x}=0, \quad x\left(z''+z_{,}'\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial y}{\partial x}=0.$$

Но второе изъ этихъ уравненій, по подстановкѣ значенія

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{z_{,}'}{z_{,,}},$$

выведеннаго изъ перваго, принимаетъ видъ

$$x\left(z''-\frac{z_{,}'^{2}}{z_{,,}}\right)^{2}+\frac{z_{,}'}{z_{,,}}=0,$$

однозначущій съ даннымъ уравненіемъ; слѣдовательно, значеніе

$$\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=-\frac{z_{,}'}{z_{,,}}$$

можетъ соотвѣтствовать, въ предполагаемомъ конечномъ общемъ интегралѣ, произвольной функціи отъ аргумента a, въ отношеніи котораго вторыя производныя z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ будутъ разнородными съ интеграломъ.

Впрочемъ, должно еще убѣдиться, что это значеніе будетъ корнемъ квадратнаго уравненія

$$\frac{\partial F}{\partial z_{,,}}-\frac{\partial F}{\partial z_{,}'}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z''}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{2}=0,$$

которое въ настоящемъ случаѣ имѣетъ видъ

$$\left.\begin{array}{r}2xz_{,,}(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^{2}+[4xz_{,}'(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})-z_{,,}]\dfrac{\partial y}{\partial x}+\\ +z_{,}'+2xz''(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})=0.\end{array}\right\}$$

Раздѣливъ для этого первую часть его на $\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{z_{,}'}{z_{,,}}$, получимъ въ частномъ

$$2xz_{,,}(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})\frac{\partial y}{\partial x}+2xz_{,}'(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})-z_{,,}$$

и въ остаткѣ

$$\frac{2}{z_{,,}}\left\{x(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})^{2}+z_{,}'z_{,,}\right\}.$$

Послѣдній равенъ нулю въ силу даннаго уравненія; слѣдовательно, значеніе $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{z_{,}'}{z_{,,}}$ дѣйствительно будетъ корнемъ предыдущаго квадратнаго уравненія. Другой его корень находимъ, уравнявъ нулю частное и рѣшая полученное уравненіе относительно $\frac{\partial y}{\partial x}$. Такимъ образомъ получимъ

$$\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=\frac{1}{2x(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}-\frac{z_{,}'}{z_{,,}}.$$

Это значеніе, очевидно, соотвѣтствуетъ аргументу β, входящему подъ знакомъ произвольной функціи въ предполагаемомъ конечномъ общемъ интегралѣ такимъ образомъ, что всѣ производныя z', $z_{,}$, z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ будутъ однородны съ нимъ въ отношеніи β.

§ 13.

Въ предыдущемъ § мы видѣли, что задача интегрированія уравненія

$$Hz''+2Kz_{,}'+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z_{,}'^2)=0 \tag{1}$$

приводится къ интегрированію системы нѣсколькихъ уравненій, которыя для краткости можемъ написать такимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} Hdy+Ndz_{,}-(K\pm\sqrt{G})dx=0,\\ Hdz'+(K\mp\sqrt{G})dz_{,}+Mdx=0,\\ dz-z'dx-z_{,}dy=0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Относительно этой системы изслѣдуемъ сначала вопросъ: при какихъ условіяхъ и сколько возможно интеграловъ вида $u=const.$ для уравненій (2), предполагая u функціею x, y, z, z', $z_{,}$?

Въ уравненіяхъ (2) должно удерживать или верхній, или нижній знакъ предъ $\sqrt{G}$; поэтому мы имѣемъ двѣ системы совмѣстныхъ уравненій неполныхъ, такъ какъ число перемѣнныхъ x, y, z, z', $z_{,}$, входящихъ въ каждую изъ нихъ, двумя болѣе числа уравненій. Интеграломъ этихъ системъ дифференціальныхъ уравненій можно назвать всякую функцію u перемѣнныхъ x, y, z, z', $z_{,}$, дифференціалъ которой тождественно равенъ нулю вслѣдствіе уравненій (2). Но разрѣшивъ уравненія (2) относительно dz, dz', $dz_,$, находимъ:

$$dz = z'dx + z_,dy,$$

$$dz' = -\frac{L}{N}dx + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}dy,$$

$$dz_, = \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}dx - \frac{H}{N}dy,$$

и вставивъ эти значенія dz, dz', $dz_,$, въ выраженіе du, получимъ

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + z'\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,}\right)dx + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + z_,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,}\right)dy.$$

Слѣдовательно, du приведется къ нулю и $u = const.$ будетъ интеграломъ уравненій (2), если функція u удовлетворитъ линейнымъ и однороднымъ, относительно ея частныхъ производныхъ перваго порядка, уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + z'\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,} = 0 \\ \text{и} \quad &\frac{\partial u}{\partial y} + z_,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{H}{N}\frac{\partial u}{\partial z_,} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Теорія интегрированія совмѣстныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка разъяснена только въ новѣйшее время, благодаря трудамъ *Якоби*, *Бура* и *Буля*[1]), и занимающій насъ теперь вопросъ представляетъ случай для приложенія ея.

Для этого представимъ, для сокращенія письма, двѣ слѣдующія системы дѣйствій:

$$\frac{\partial}{\partial x} + z'\frac{\partial}{\partial z} - \frac{L}{N}\frac{\partial}{\partial z'} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}\frac{\partial}{\partial z_,} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y} + z_,\frac{\partial}{\partial z} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N}\frac{\partial}{\partial z'} - \frac{}{N\partial z_,}$$

---

[1]) Очеркъ этой теоріи изложенъ въ моей диссертаціи «Объ интегрированіи уравненій съ частными призводными перваго поряда», 1865 г. (см. 1-ю часть наст. изданія §§ 22—25, стр. 132—172).

соотвѣтственно знаками ∇_1, и ∇_2, при помощи которыхъ уравненія (3) примутъ видъ:

$$\nabla_1 u=0 \quad \text{и} \quad \nabla_2 u=0.$$

Необходимое условіе для того, чтобы двумъ предыдущимъ уравненіямъ могъ принадлежать общій интегралъ, какъ извѣстно, заключается въ томъ, что результатъ дѣйствія ∇_1, приложеннаго къ функціи $\nabla_2 u$, долженъ быть равенъ результату дѣйствія ∇_2, приложеннаго къ функціи $\nabla_1 u$, т.-е. должно быть

$$\nabla_1\nabla_2 u=\nabla_2\nabla_1 u.$$

Но исполнивъ означенныя здѣсь дѣйствія, найдемъ

$$\nabla_1\nabla_2 u-\nabla_2\nabla_1 u=\left(\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}-\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+$$
$$+\left(\nabla_1\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}\right)\frac{\partial u}{\partial z'}-\left(\nabla_1\frac{H}{N}+\nabla_2\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}\right)\frac{\partial u}{\partial z_{,}}.$$

Поэтому ясно, что упомянутое необходимое условіе можетъ быть выполнено двоякимъ образомъ: 1) или вслѣдствіе того, что въ предыдущемъ выраженіи коэффиціенты при $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{,}}$ приведутся къ нулю; 2) или, когда эти коэффиціенты различны отъ нуля, если мы къ двумъ даннымъ уравненіямъ $\nabla_1 u=0$ и $\nabla_2 u=0$ присоединимъ третье $\nabla_1\nabla_2 u-\nabla_2\nabla_1 u=0$, которое, очевидно, алгебраически различно отъ двухъ первыхъ, ибо не содержитъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Каждый изъ этихъ двухъ случаевъ долженъ быть разобранъ особо и мы займемся сначала первымъ, когда по предположенію будутъ имѣть мѣсто равенства:

$$\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}-\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}=0, \quad \nabla_1\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}=0,$$
$$\nabla_1\frac{H}{N}+\nabla_2\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}=0,$$

или

$$G=0, \quad \nabla_1\frac{K}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}=0 \quad \nabla_1\frac{H}{N}+\nabla_2\frac{K}{N}=0 \text{ [1]},$$

и разсматриваемыя совмѣстныя уравненія принимаютъ видъ

$$\nabla_1 u=\frac{\partial u}{\partial x}+z'\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{L}{N}\frac{\partial u}{\partial z'}+\frac{K}{N}\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$
$$\nabla_2 u=\frac{\partial u}{\partial y}+z_{,}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{K}{N}\frac{\partial u}{\partial z'}-\frac{H}{N}\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0.$$

Нетрудно убѣдиться, что въ настоящемъ случаѣ уравненія $\nabla_1 u=0$ $\nabla_2 u=0$ имѣютъ три общихъ интеграла вида

$$u_1=\text{const}, \quad u_2=\text{const}, \quad u_3=\text{const},$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ показать, какимъ образомъ эти послѣдніе находятся.

Пусть для этого различные интегралы уравненія $\nabla_1 u=0$, которыхъ числомъ должно быть три, будутъ v, v_1, v_2.

Далѣе, опредѣлимъ такую функцію $F(y, v, v_1, v_2)$ этихъ трехъ интеграловъ и перемѣннаго y, которая удовлетворяла бы второму изъ разсматриваемыхъ уравненій $\nabla_2 F=0$. Но, развивая его, получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial y}\nabla_2 y+\frac{\partial F}{\partial v}\nabla_2 v+\frac{\partial F}{\partial v_1}\nabla_2 v_1+\frac{\partial F}{\partial v_2}\nabla_2 v_2=0.$$

Здѣсь, очевидно, $\nabla_2 y=1$ и легко убѣдиться, что количества $\nabla_2 v$, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ выразятся только посредствомъ v, v_1, v_2. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ тождество

$$\nabla_1\nabla_2 u=\nabla_2\nabla_1 u$$

для какой угодно функціи u; поэтому, полагая послѣдовательно $u=v$, v_1, v_2, получимъ тождества:

$$\nabla_1(\nabla_2 v)=\nabla_2(\nabla_1 v)=\nabla_2 0=0, \quad \nabla_1(\nabla_2 v_1)=\nabla_2(\nabla_1 v_1)=\nabla_2 0=0,$$
$$\nabla_1(\nabla_2 v_2)=\nabla_2(\nabla_2 v_2)=\nabla_2 0=0,$$

---

[1] Эти условія вывелъ *Буль*. См. Philosophical Transactions 1862. Т. 152. Part. I. стр. 452.

показывающія, что $\nabla_2 v$, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ будутъ интегралами уравненія $\nabla_1 u=0$. Но v, v_1, v_2 представляютъ всѣ различные интегралы уравненія $\nabla_1 u=0$; слѣд., $\nabla_2 v$, $\nabla_2 v_1$, $\nabla_2 v_2$ должны выражаться посредствомъ v, v_1, v_2, и если эти выраженія будутъ

$$\nabla_2 v=f(v,\ v_1,\ v_2),\ \nabla_2 v_1=f_1(v,\ v_1,\ v_2),\ \nabla_2 v_2=f_2(v,\ v_1,\ v_2),$$

то мы получимъ уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}f+\frac{\partial F}{\partial v_1}f_1+\frac{\partial F}{\partial v_2}f_2=0;$$

для него по извѣстнымъ способамъ найдемъ три различныхъ интеграла вида

$$u_1=F_1(y,\ v,\ v_1,\ v_2)=\text{const},\ u_2=F_2(y,\ v,\ v_1,\ v_2)=\text{const},$$
$$u_3=F_3(y,\ v,\ v_1,\ v_2)=\text{const},$$

которые, очевидно, и должны быть общими интегралами для уравненій

$$\nabla_1 u=0 \quad \text{и} \quad \nabla_2 u=0.$$

Въ предыдущемъ изложеніи способа совмѣстнаго интегрированія уравненій $\nabla_1 u=0$ и $\nabla_2 u=0$ можно, конечно, взаимно перемѣнить роли этихъ двухъ уравненій; но во всякомъ случаѣ должно начинать опредѣленіемъ трехъ различныхъ интеграловъ одного изъ нихъ. При этомъ, вмѣстѣ съ обыкновенными способами, представляется возможность пользоваться еще тѣмъ пріемомъ, который Пуассонъ открылъ для уравненій динамики; ибо, на основаніи тождества $\nabla_1(\nabla_2 u)=\nabla_2(\nabla_1 u)$, подстановка всякаго интеграла одного изъ уравненій $\nabla_1 u=0$, $\nabla_2 u=0$ въ первую часть другого должна давать интегралъ перваго. Успѣхъ этого пріема, конечно, обусловливается тѣмъ, чтобъ упомянутыя подстановки давали интегралы различные отъ подставляемыхъ.

Покажемъ теперь, какимъ образомъ изъ полученныхъ выше трехъ интеграловъ

$$u_1=a,\quad u_2=b,\quad u_3=c, \tag{4}$$

гдѣ a, b, c означаютъ произвольныя постоянныя, можно вывести сначала частный и потомъ общій интегралъ уравненія (1).

Изъ уравненій (4) мы получимъ для z, z', $z_{,}$ выраженія вида

$$z=\omega(x, y, a, b, c), \quad z'=\omega_1(x, y, a, b, c), \quad z_{,}=\omega_2(x, y, a, b, c). \quad (5)$$

Изъ самаго способа вычисленія интеграловъ (4) для уравненій (3) можно уже заключить, что выраженія z, z', $z_{,}$ (5) должны удовлетворять уравненіямъ (2), разрѣшивъ которыя относительно dz, dz', $dz_{,}$ и введя условіе $G=0$, приводимъ ихъ къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{aligned} dz&=z'dx+z_{,}dy,\\ dz'&=-\frac{L}{N}dx+\frac{K}{N}dy,\\ dz_{,}&=\frac{K}{N}dx-\frac{H}{N}dy. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Но это заключеніе такъ важно, что мы постараемся дать ему прямое доказательство. Для этого замѣтимъ, что совершенно произвольная функція отъ u_1, u_2, u_3, которую означимъ $\Phi(u_1, u_2, u_3)$, должна удовлетворять уравненіямъ (3), будучи подставлена вмѣсто u, потому что

$$\begin{aligned} \nabla_1\Phi&=\frac{\partial\Phi}{dx}+z'\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{L}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'}+\frac{K}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{,}}=\\ &=\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\nabla_1 u_1+\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\nabla_1 u_2+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\nabla_1 u_3,\\ \nabla_2\Phi&=\frac{\partial\Phi}{\partial y}+z_{,}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{K}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'}-\frac{H}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{,}}=\\ &=\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\nabla_2 u_1+\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\nabla_2 u_2+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\nabla_2 u_3, \end{aligned}$$

и количества

$$\begin{matrix} \nabla_1 u_1, & \nabla_1 u_2, & \nabla_1 u_3,\\ \nabla_2 u_1, & \nabla_2 u_2, & \nabla_2 u_3 \end{matrix}$$

равны нулю. Взявъ же дифференціалъ функціи Φ и вставивъ въ выраженіе его значенія $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ изъ равенствъ $\nabla_1\Phi=0$ и $\nabla_2\Phi=0$, будемъ имѣть равенство

$$\left.\begin{aligned} d\Phi(u_1,u_2,u_3,)=\frac{\partial\Phi}{\partial z}(dz-z'dx-z_{,}dy)+\\ +\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\left(dz'+\frac{L}{N}dx-\frac{K}{N}dy\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\left(dz_{,}-\frac{K}{N}dx+\frac{H}{N}dy\right),\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

въ которомъ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial z},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z'}=\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z'}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z'}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z_{,}}=\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial z_{,}}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial z_{,}}+\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial z_{,}}.$$

Если теперь вставимъ вмѣсто z, z', $z_{,}$, ихъ значенія (5), то первая часть равенства (7) приведется къ нулю, потому что u_1, u_2, u_3, $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ обратятся соотвѣтственно въ a, b, c, $\Phi(a, b, c)$; слѣдовательно, и вторая часть равенства (7) должна быть равна нулю. Но легко замѣтить, что производныя $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z'}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z_{,}}$ не могутъ быть тождественно равны нулю, и это достаточно подробнѣе объяснить для одной изъ нихъ, положимъ для $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$.

Дѣйствительно, всѣ три производныя $\frac{\partial u_1}{\partial z}$, $\frac{\partial u_2}{\partial z}$, $\frac{\partial u_3}{\partial z}$ не могутъ быть нулями, потому что въ такомъ случаѣ невозможно изъ уравненій (4) получить (5); множители же при нихъ $\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$, вслѣдствіе подстановки значеній z, z', $z_{,}$ (5) обратятся въ произвольныя постоянныя количества. Итакъ, вторая часть равенства (7) должна приводиться къ нулю только вслѣдствіе того, что уравненія (6) подстановкою значеній z, z', $z_{,}$ обратятся въ тождества.

На этомъ основаніи имѣемъ равенство

$$d\omega=\omega_1dx+\omega_2dy,$$

въ силу котораго уравненія (5) можемъ замѣнить слѣдующими:

$$z=\omega(x,\ y,\ a,\ b,\ c),\quad z'=\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad z_{,}=\frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

Вставивъ эти значенія z, z', $z_{,}$ въ два послѣднія изъ уравненій (6), получимъ равенства:

$$d\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{L}{N}dx+\frac{K}{N}dy,\qquad d\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{K}{N}dx-\frac{H}{N}dy,$$

которыя приводятъ еще къ тремъ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\left.\begin{aligned} N\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+L=0,\\ N\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}-K=0,\\ N\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+H=0.\end{aligned}\right\}\qquad (8)$$

Теперь легко показать, что интегралъ $z=\omega(x,\ y,\ a,\ b,\ c)$, удовлетворяющій тремъ предыдущимъ уравненіямъ, необходимо долженъ удовлетворить и уравненію (1).

Для этого стоитъ только замѣтить, что на основаніи условія $G=K^2-HL+MN=0$ уравненіе (1) можно написать такимъ образомъ

$$\left(N\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+L\right)\left(N\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+H\right)=\left(N\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}-K\right)^2.$$

Итакъ, мы уже имѣемъ частный интегралъ уравненія (1), заключающій три произвольныхъ постоянныхъ a, b, c; постараемся получить изъ него общій интегралъ того же уравненія, заключающій двѣ произвольныя функціи.

Для этого предварительно замѣтимъ, что аргументы α и β двухъ произвольныхъ функцій искомаго общаго интеграла должны быть равны, потому что, вообще, для уравненія (1) имѣемъ:

$$-\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}}=\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=\frac{K-Nz_{,}'+\sqrt{G}}{H+Nz_{,,}},\qquad -\frac{\dfrac{\partial\beta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\beta}{\partial y}}=\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=\frac{K-Nz_{,}'-\sqrt{G}}{H+Nz_{,,}};$$

но въ настоящемъ случаѣ $G=0$, слѣдовательно,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \alpha=\beta.$$

Теперь докажемъ слѣдующее предложеніе. Пусть ψ и φ означаютъ произвольныя функціи; поставимъ α, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ на мѣсто a, b, c въ интегралъ $z=\omega(x, y, a, b, c)$ и опредѣлимъ функцію α по такому условію, чтобъ производная отъ функціи ω въ отношеніи α равнялась нулю.

Два полученныя такимъ образомъ уравненія:

$$z=\omega[(x, y, \alpha, \varphi(\alpha), \psi(\alpha)] \quad \text{и} \quad \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=0 \tag{9}$$

представятъ общій интегралъ уравненія (1).

Дѣйствительно, дифференцируя по x и y уравненія (9), получимъ:

$$z'=\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad z_{,}=\frac{\partial\omega}{\partial y},\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial x}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x},\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial y}=-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}.$$

Дифференцируя еще разъ по x и y первые два изъ предыдущихъ уравненій, будемъ имѣть:

$$z''=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2,$$

$$z_{,}'=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

$$z_{,,}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости предыдущей теоремы, должно только показать, что подстановкою предыдущихъ значеній z, z', $z_{,}$, z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ мы удовлетворимъ уравненію (1). Для краткости положимъ:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\omega'',\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}=\omega_{,}',\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\omega_{,,},\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}=-q,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial x}=h,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=l$$

и означимъ первую часть уравненія (1) черезъ $F(z'', z_{,}', z_{,,})$.

Упомянутый результатъ подстановки по Тейлоровой теоремѣ представится слѣдующимъ образомъ.

$$F(\omega''+qh^2,\quad \omega_{,}'+qhl,\quad \omega_{,,}+ql^2)=F(\omega'',\ \omega_{,}',\ \omega_{,,})+$$
$$+\left[\frac{\partial F}{\partial\omega''}h^2+\frac{\partial F}{\partial\omega_{,}'}hl+\frac{\partial F}{\partial\omega_{,,}}l^2\right]q+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\omega''^2}h^4+2\frac{\partial^2 F}{\partial\omega''\partial\omega_{,}'}h^3l+\frac{\partial^2 F}{\partial\omega_{,}'^2}h^2l^2+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 F}{\partial\omega''\,\partial\omega_{,,}}h^2l^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial\omega_{,}'\,\partial\omega_{,,}}hl^3+\frac{\partial^2 F}{\partial\omega_{,,}^2}l^4\right]q^2.$$

Но

$$F(\omega'',\ \omega'_{,},\ \omega_{,,})=(N\omega''+L)(N\omega_{,,}+H)-(N\omega_{,}'-K)^2,$$
$$\frac{\partial F}{\partial\omega''}=H+N\omega_{,,},\quad \frac{\partial F}{\partial\omega'_{,}}=2(K-N\omega_{,}'),\ \frac{\partial F}{\partial\omega_{,,}}=L+N\omega'';$$

слѣдовательно, первый и второй члены предыдущаго разложенія приводятся къ нулю на основаніи равенствъ (8), которыя должны имѣть мѣсто независимо отъ значеній a, b, c.

Множитель при q^2 также уничтожается, потому что всѣ производныя второго порядка отъ F равны нулю, за исключеніемъ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\omega_{,}'^2}=-2N \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial\omega''\,\partial\omega_{,,}}=N,$$

которыя даютъ два члена равныхъ, но съ противоположными знаками.

Доказавъ, такимъ образомъ, предыдущую теорему, мы имѣемъ теперь вполнѣ законченный способъ для интегрированія уравненія (1) при условіяхъ:

$$G=0,\quad \nabla_1\frac{K}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}=0,\quad \nabla_1\frac{H}{N}+\nabla_2\frac{K}{N}=0. \tag{10}$$

Остается пояснить теоретическое изложеніе частнымъ примѣромъ. Возьмемъ для этого уравненіе

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(1+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(1-\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2,$$

или, при другихъ означеніяхъ,

$$(z'+z_,+z'')(1+z_{,,})=(1-z_,')^2.$$

Здѣсь, очевидно, условія (10) выполнены. Составимъ два совмѣстныя уравненія:

$$\nabla_1 u=\frac{\partial u}{\partial x}+z'\frac{\partial u}{\partial z}-(z'+z_,)\frac{\partial u}{\partial z'}+\frac{\partial u}{\partial z_,}=0,$$
$$\nabla_2 u=\frac{\partial u}{\partial y}+z_,\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z'}-\frac{\partial u}{\partial z_,}=0$$

и найдемъ всѣ различные интегралы второго изъ нихъ. Взявъ для этого систему уравненій

$$dy=\frac{dz}{z_,}=dz'=-dz_,,$$

находимъ три различныхъ интеграла ея:

$$v=z'+z_,,\quad v_1=y-z',\quad v_2=z+\frac{z_,^2}{2}.$$

Теперь будемъ искать функціи $F(x, v, v_1, v_2)$, которыя удовлетворяли бы уравненію $\nabla_1 F=0$. Развивая это послѣднее, получимъ

$$\frac{\partial F}{\partial x}\nabla_1 x+\frac{\partial F}{\partial v}\nabla_1 v+\frac{\partial F}{\partial v_1}\nabla_1 v_1+\frac{\partial F}{\partial v_2}\nabla_1 v_2=0.$$

Но $\nabla_1 x=1$, $\nabla_1 v=1-v$, $\nabla_1 v_1=v$, $\nabla_1 v_2=v$; поэтому предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}(1-v)+\left(\frac{\partial F}{\partial v_1}+\frac{\partial F}{\partial v_2}\right)v=0.$$

Три различныхъ интеграла его получатся интегрированіемъ уравненій

$$dx=\frac{dv}{1-v}=\frac{dv_1}{v}=\frac{dv_2}{v}$$

и будутъ слѣдующаго вида:

$$(1-v)e^x=a, \quad v_1-v_2=b, \quad v+v_1-x=c,$$

гдѣ a, b, c означаютъ произвольныя постоянныя. Вставивъ значенія v, v_1, v_2, получимъ

$$(1-z'-z_{,})e^x=a, \quad y-z-z'-\frac{z_{,}^2}{2}=b, \quad y-x+z_{,}=c,$$

и отсюда находимъ

$$z_{,}=c+x-y, \quad z'=1-ae^{-x}-x+y-c,$$
$$z=b+ae^{-x}+x+c-\frac{(c+x-y)^2}{2}.$$

Послѣднее уравненіе представляетъ частный интегралъ даннаго. Дѣйствительно, дифференцируя его, находимъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1-ae^{-x}-x+y-c, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=c+x-y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=ae^{-x}-1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1.$$

Отсюда видимъ, во-первыхъ, что найденныя значенія для z' и $\frac{\partial z}{\partial x}$, а также для $z_{,}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ одинаковы; во-вторыхъ, что подстановкою значеній производныхъ 1-го и 2-го порядка отъ z приводимъ къ нулю выраженія:

$$z'+z_{,}+z'', \quad 1+z_{,,}, \quad 1-z_{,}'$$

и потому удовлетворяемъ данному уравненію. Изъ этого слѣдуетъ, на основаніи вышедоказаннаго, что если въ предыдущемъ частномъ интегралѣ два изъ количествъ a, b, c будемъ разсматривать какъ произвольныя функціи третьяго и уравняемъ нулю частную производную отъ z въ отношеніи этого послѣдняго количества, то полученныя такимъ образомъ два уравненія образуютъ общій интегралъ даннаго уравненія. Положивъ, напримѣръ, $c=\alpha$, $b=\varphi(\alpha)$, $a=\psi(\alpha)$, представимъ общій интегралъ въ видѣ двухъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} z&=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha)e^{-x}+x+\alpha-\frac{(\alpha+x-y)^2}{2}\\ 0&=\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha)e^{-x}-\alpha-x+y+1. \end{aligned}\right\}$$

Впрочемъ, легко повѣрить предыдущій результать, показавъ, что данное уравненіе получится черезъ исключеніе α, $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ изъ двухъ предыдущихъ. Изъ второго уравненія интеграла находимъ:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{1+\psi'(\alpha)e^{-x}}{\varphi''(\alpha)+\psi''(\alpha)e^{-x}-1},\quad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=-\frac{1}{\varphi''(\alpha)+\psi''(\alpha)e^{-x}-1},$$

откуда

$$\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}}=-(1+\psi'(\alpha)e^{-x}).$$

Дифференцируя первое уравненіе интеграла, получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1-\psi(\alpha)e^{-x}-x+y-\alpha,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-y+\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\psi(\alpha)e^{-x}-1-(1+\psi'(\alpha)e^{-x})\frac{\partial\alpha}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1+\frac{\partial\alpha}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1+\frac{\partial\alpha}{\partial y};$$

отсюда выводимъ, что

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-1,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+1,\quad -(1+\psi'(\alpha)e^{-x})=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-1}.$$

Поэтому третье изъ предыдущихъ уравненій приметъ видъ

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-1}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+1}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-1}.$$

или

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-1\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+1\right),$$

а это послѣднее уравненіе одинаково съ даннымъ.

Примѣчаніе 1. Условія $\nabla_1\frac{K}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}=0$ и $\nabla_2\frac{K}{N}+\nabla_1\frac{H}{N}=0$, которыми, вмѣстѣ съ условіемъ $G=0$, обезпечивается успѣхъ интегрированія уравненія (1) по предыдущему способу, можно выразить гораздо проще. Для этого замѣтимъ, что, при $G=0$, примѣнимость предыдущаго способа обусловливается также возможностію одного и того же частнаго интеграла для трехъ уравненій:

$$z''+\frac{L}{N}=0,\quad z_,'-\frac{K}{N}=0,\quad z_{,,}+\frac{H}{N}=0,$$

что для коэффиціентовъ H, K, L, N потребуетъ двухъ условій, которыя необходимо должны быть однозначущими съ предыдущими. Дѣйствительно, эти уравненія даютъ:

$$z_,''=\frac{\partial\cdot\left(-\frac{L}{N}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\cdot\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x},\quad z_{,,}'=\frac{\partial\cdot\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\cdot\left(-\frac{H}{N}\right)}{\partial x}.$$

Здѣсь точка (.) послѣ знака ∂ показываетъ, что нужно дифференцировать въ отношеніи x или y, входящихъ не только явно, но и посредствомъ z, z', $z_,$. Производя эти дѣйствія и замѣнивъ z'', $z_,'$, $z_{,,}$ ихъ значеніями, получимъ

$$\frac{\partial\cdot\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z}z'-\frac{L}{N}\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z'}+\frac{K}{N}\frac{\partial\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial z_,}=\nabla_1\frac{K}{N},$$

подобнымъ же образомъ находимъ

$$\frac{\partial\cdot\left(\frac{L}{N}\right)}{\partial y}=\nabla_2\frac{L}{N},\quad \frac{\partial\cdot\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y}=\nabla_2\frac{K}{N},\quad \frac{\partial\cdot\left(\frac{H}{N}\right)}{\partial x}=\nabla_1\frac{H}{N}.$$

Слѣдовательно, условія (10) можно проще представить такимъ образомъ:

$$G=0,\quad \frac{\partial\cdot\frac{K}{N}}{\partial x}+\frac{\partial\cdot\frac{L}{N}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\cdot\frac{K}{N}}{\partial y}+\frac{\partial\cdot\frac{H}{N}}{\partial x}=0.$$

Примѣчаніе 2. Выше было доказано, что уравненіе (1) при условіяхъ (10) имѣетъ общій интегралъ вида:

$$z=\omega[x,\ y,\ \alpha,\ \varphi(\alpha),\ \psi(\alpha)],\quad \frac{\partial\,.\,\omega}{\partial\alpha}=0.$$

Обратное предложеніе также справедливо, именно всякому интегралу предыдущаго вида соотвѣтствуетъ дифференціальное уравненіе вида (1), выполняющее условія (10). Дѣйствительно, дифференцируя первое изъ предыдущихъ уравненій и принимая во вниманіе второе, получимъ

$$z'=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\,.\,\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad z_{,}=\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\,.\,\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

$$z''=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x},\quad z_{,,}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

$$z_{,}'=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Здѣсь кстати будетъ привести преобразованіе предыдущихъ выраженій z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$, которое мы уже примѣнили выше, но безъ объясненія. Принявъ во вниманіе значеніе точки послѣ знака ∂, мы имѣемъ:

$$\frac{\partial\,.\,\omega}{\partial\alpha}=\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\varphi'(\alpha)+\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\psi'(\alpha),$$

$$\frac{\partial\frac{\partial\,.\,\omega}{\partial\alpha}}{\partial x}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial\alpha}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial\varphi}\varphi'(\alpha)+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial\psi}\psi'(\alpha),$$

$$\frac{\partial\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial x}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi\,\partial x}\varphi'(\alpha)+\frac{\partial^2\omega}{\partial\psi\,\partial x}\psi'(\alpha),$$

и дифференцируя въ отношеніи x второе уравненіе интеграла, получимъ

$$\frac{\partial \frac{\partial . \omega}{\partial \alpha}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x};$$

слѣдовательно,

$$\frac{\partial . \frac{\partial \omega}{\partial x}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \frac{\partial . \omega}{\partial \alpha}}{\partial x} = -\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ

$$\frac{\partial . \frac{\partial \omega}{\partial y}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \frac{\partial . \omega}{\partial \alpha}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 . \omega}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Поэтому будемъ имѣть:

$$z'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2, \quad z_{,,} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2,$$

$$z_,' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Исключивъ отсюда $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ и $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, находимъ уравненіе

$$\left(z'' - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)\left(z_{,,} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) = \left(z_,' - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y}\right)^2.$$

Наконецъ, при помощи уравненій

$$z = \omega, \quad z' = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad z_, = \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

мы можемъ α, $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ выразить посредствомъ x, y, z, z', $z_,$ и вставить эти значенія въ функціи $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y}$, послѣ чего эти послѣднія, положимъ, примутъ видъ

$$-\frac{L}{N}, \quad -\frac{H}{N}, \quad +\frac{K}{N},$$

а предыдущее уравненіе напишется такимъ образомъ

$$\left(z''+\frac{L}{N}\right)\left(z_{,,}+\frac{H}{N}\right)=\left(z_{,}'-\frac{K}{N}\right)^2,$$

т.-е. будетъ имѣть видъ уравненія (1). Что оно выполняетъ условія (10), видно изъ того, что на основаніи происхожденія коэффиціентовъ $-\frac{L}{N}$, $-\frac{H}{N}$, $+\frac{K}{N}$, они должны удовлетворять равенствамъ

$$\frac{\partial\cdot\left(-\frac{L}{N}\right)}{\partial y}=\frac{\partial\cdot\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial x},\quad \frac{\partial\cdot\left(-\frac{H}{N}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\cdot\left(\frac{K}{N}\right)}{\partial y},$$

которыя, какъ доказано выше, приводятся къ слѣдующимъ

$$\nabla_1\frac{K}{N}+\nabla_2\frac{L}{N}=0,\quad \nabla_2\frac{K}{N}+\nabla_1\frac{H}{N}=0.$$

Равенство $G=0$ слѣдуетъ изъ самой формы уравненія.

Съ геометрической точки зрѣнія, когда x, y, z будутъ координатами точекъ пространства, два уравненія общаго интеграла

$$z=\omega[x,\ y,\ \alpha,\ \varphi(\alpha),\ \psi(\alpha)] \quad \text{и} \quad \frac{\partial\ .\ \omega}{\partial\alpha}=0$$

представятъ поверхность, обертывающую рядъ поверхностей, доставляемыхъ уравненіемъ частнаго интеграла

$$z=\omega(x,\ y,\ a,\ b,\ c),$$

если будемъ измѣнять непрерывнымъ образомъ три параметра a, b, c, связавъ ихъ двумя произвольными зависимостями:

$$b=\varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad c=\psi(\alpha).$$

Слѣдовательно, уравненіе (1), при условіяхъ (10), представляетъ общее дифференціальное уравненіе для такихъ обертывающихъ поверхностей.

§ 14.

Показавъ, какимъ образомъ интегрируется уравненіе (1) предыдущаго §, когда три количества:

$$\nabla_1\frac{H}{N}+\nabla_2\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}=P,\quad \nabla_2\frac{L}{N}+\nabla_1\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}=Q,\quad \pm\frac{2\sqrt{G}}{N}=R$$

приводятся къ нулю, перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію другихъ могущихъ представиться случаевъ.

Если P, Q, R различны отъ нуля, то двумъ уравненіямъ

$$\nabla_1 u=\frac{\partial u}{\partial x}+z'\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{L}{N}\frac{\partial u}{\partial z'}+\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

$$\nabla_2 u=\frac{\partial u}{\partial y}+z_{,}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}\frac{\partial u}{\partial z'}-\frac{H}{N}\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

могутъ принадлежать общіе интегралы только въ томъ случаѣ, когда въ одно время съ ними имѣетъ мѣсто третье уравненіе

$$\nabla_1\nabla_2 u-\nabla_2\nabla_1 u=\nabla_3 u=R\frac{\partial u}{\partial z}+Q\frac{\partial u}{\partial z'}-P\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0.$$

Допустивъ существованіе этого послѣдняго, посмотримъ, при какихъ условіяхъ и сколько возможно интеграловъ, удовлетворяющихъ всѣмъ тремъ предыдущимъ уравненіямъ. Для рѣшенія этихъ двухъ вопросовъ съ возможною простотою приведемъ къ наименьшимъ числа частныхъ производныхъ въ каждомъ уравненіи. Для этого въ первомъ и второмъ изъ нихъ должно исключить одну изъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{,}}$ помощію третьяго. Предполагая R не равнымъ нулю и исключивъ такимъ образомъ $\frac{\partial u}{\partial z}$, приведемъ три разсматриваемыя уравненія къ слѣдущему виду:

$$\nabla' u=\frac{\partial u}{\partial x}+A\frac{\partial u}{\partial z'}+B\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

$$\nabla'' u=\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z'}+D\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

$$\nabla''' u=\frac{\partial u}{\partial z}+E\frac{\partial u}{\partial z'}+F\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

гдѣ вновь введенные символы ∇', ∇'', ∇''' опредѣляются помощію прежнихъ такимъ образомъ:

$$\nabla'=\nabla_1-\frac{z'}{R}\nabla_3,\quad \nabla''=\nabla_2-\frac{z_{,}}{R}\nabla_3,\quad \nabla'''=\frac{1}{R}\nabla_3,$$

а выраженія коэффиціентовъ A, B,... F, помощію коэффиціентовъ предыдущихъ уравненій, нетрудно получить. Условія, необходимыя для того, чтобы тремъ уравненіямъ $\nabla' u=0$, $\nabla'' u=0$, $\nabla''' u=0$ принадлежали общіе интегралы, состоятъ въ томъ, что результаты дѣйствій

$$\nabla'\nabla'' u,\quad \nabla'\nabla''' u,\quad \nabla''\nabla''' u$$

должны быть соотвѣтственно равны слѣдующимъ:

$$\nabla''\nabla' u,\quad \nabla'''\nabla' u,\quad \nabla'''\nabla'' u.$$

Но каждое изъ выраженій

$$\nabla'\nabla'' u-\nabla''\nabla' u,\quad \nabla'\nabla''' u-\nabla'''\nabla' u,\quad \nabla''\nabla''' u-\nabla'''\nabla'' u$$

имѣетъ видъ

$$S\frac{\partial u}{\partial z'}+T\frac{\partial u}{\partial z_{,}},$$

т.-е. будетъ линейнымъ и однороднымъ относительно только двухъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial z'}$ и $\frac{\partial u}{\partial z_{,}}$. Слѣдовательно, эти выраженія могутъ быть равны нулю двоякимъ образомъ:

1) или вслѣдствіе того, что въ нихъ коэффиціенты при $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{,}}$ во всѣхъ трехъ выраженіяхъ равны нулю; 2) или, — если коэффиціенты при $\frac{\partial u}{\partial z'}$ и $\frac{\partial u}{\partial z_{,}}$ не во всѣхъ трехъ выраженіяхъ равны нулю,—вслѣдствіе того, что мы уравняемъ нулю не уничтожающіяся сами собою выраженія и, такимъ образомъ, къ тремъ даннымъ уравненіямъ присоединимъ новыя,

алгебраически различныя отъ данныхъ, какъ не содержащія производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Каждый изъ этихъ двухъ случаевъ разсмотримъ отдѣльно и займемся сначала первымъ изъ нихъ, когда, по предположенію, будутъ имѣть мѣсто тождественныя равенства:

$$\nabla'\nabla''u=\nabla''\nabla'u,\quad \nabla'\nabla'''u=\nabla'''\nabla'u,\quad \nabla''\nabla'''u=\nabla'''\nabla''u.$$

Нетрудно доказать, что въ этомъ случаѣ тремъ совмѣстнымъ уразненіямъ

$$\nabla'u=0,\quad \nabla''u=0,\quad \nabla'''u=0$$

должны принадлежать *два* общихъ интеграла.

Для этого, интегрируя вполнѣ одно изъ нихъ, напр. первое

$$\nabla'u=\frac{\partial u}{\partial x}+A\frac{\partial u}{\partial z'}+B\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

мы найдемъ только два различныхъ интеграла его:

$$v=\text{const} \quad \text{и} \quad v_1=\text{const}.$$

Затѣмъ отысканіе интеграла $F(y,\ v,\ v_1)=\text{const}$, удовлетворяющаго первому и второму уравненіямъ, приводитъ къ уравненію

$$\nabla''F=\frac{\partial F}{\partial y}\nabla''y+\frac{\partial F}{\partial v}\nabla''v+\frac{\partial F}{\partial v_1}\nabla''v_1=0,$$

гдѣ $\nabla''y=1$ и количества $\nabla''v$, $\nabla''v_1$ выразятся посредствомъ однихъ перемѣнныхъ v и v_1, потому что, на основаніи тождествъ

$$\nabla'\nabla''v=\nabla''\nabla'v=\nabla''0=0,\quad \nabla'\nabla''v_1=\nabla''\nabla'v_1=\nabla''0=0,$$

$\nabla''v$ и $\nabla''v_1$ будутъ интегралами уравненія $\nabla'u=0$. Положивъ поэтому $\nabla''v=f(v,\ v_1)$, $\nabla''v_1=f_1(v,\ v_1)$, будемъ имѣть для опредѣленія функціи F уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}f(v,\ v_1)+\frac{\partial F}{\partial v_1}f_1(v,\ v_1)=0,$$

полное интегрированіе котораго доставитъ два различныхъ интеграла его:

$$w=F(y,\ v,\ v_1)=\text{const},\ w_1=F_1(y,\ v,\ v_1)=\text{const}.$$

Наконецъ, отысканіе интеграла $\Phi(z,\ w,\ w_1)=\text{const}$, удовлетворяющаго всѣмъ тремъ даннымъ уравненіямъ, приведетъ къ уравненію

$$\nabla'''\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\nabla'''z+\frac{\partial\Phi}{\partial w}\nabla'''w+\frac{\partial\Phi}{\partial w_1}\nabla'''w_1=0,$$

въ которомъ $\nabla'''z=1$ и количества $\nabla'''w$, $\nabla'''w_1$ выразятся посредствомъ w и w_1, потому что, на основаніи тождествъ

$$\nabla''\nabla'''w=\nabla'''\nabla''w=\nabla'''0=0,\qquad \nabla''\nabla'''w_1=\nabla'''\nabla''w_1=\\=\nabla'''0=0,$$

$\nabla'''w$ и $\nabla'''w_1$ будутъ интегралами уравненія $\nabla''u=0$. Поэтому, положивъ $\nabla'''w=\varphi(w,\ w_1)$, $\nabla'''w_1=\varphi_1(w,\ w_1)$, будемъ имѣть для опредѣленія функцій Φ уравненіе

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Phi}{\partial w}\varphi(w,\ w_1)+\frac{\partial\Phi}{\partial w_1}\varphi_1(w,\ w_1)=0,$$

полное интегрированіе котораго доставитъ два различныхъ интеграла

$$u_1=\Phi_1(z,\ w,\ w_1)=\text{const},\ u_2=\Phi_2(z,\ w,\ w_1)=\text{const},$$

удовлетворяющихъ тремъ совмѣстнымъ уравненіямъ

$$\nabla'u=0,\quad \nabla''u=0,\quad \nabla'''u=0.$$

Нетрудно видѣть, что эти два интеграла удовлетворятъ также и тремъ уравненіямъ

$$\nabla_1 u=0,\quad \nabla_2 u=0,\quad \nabla_3 u=0,$$

потому что

$$\nabla_3 u=R\nabla'''u,\quad \nabla_2 u=\nabla''u+z_{,}\nabla'''u,\quad \nabla_1 u=\nabla'u+z'\nabla'''u.$$

и вторыя части послѣднихъ равенствъ будутъ равны нулю по вставкѣ u_1 и u_2 вмѣсто u.

Такимъ образомъ, для опредѣленія двухъ интеграловъ, удовлетворяющихъ тремъ совмѣстнымъ уравненіямъ $\nabla' u=0$, $\nabla'' u=0$, $\nabla''' u=0$, должно начинать полнымъ интегрированіемъ одного изъ нихъ, т.-е. опредѣленіемъ двухъ различныхъ интеграловъ его. Но иногда можно ограничиться опредѣленіемъ одного изъ этихъ двухъ интеграловъ, ибо подстановка интеграла одного изъ трехъ уравненій $\nabla' u=0$, $\nabla'' u=0$, $\nabla''' u=0$ въ первыя части двухъ остальныхъ должна давать интегралы перваго уравненія. Дѣйствительно, если $v=\text{const}$ будетъ интеграломъ уравненія $\nabla' u=0$, то тождества

$$\nabla'\nabla'' v=\nabla''\nabla' v=0, \quad \nabla'\nabla''' v=\nabla'''\nabla' v=0$$

показываютъ, что $\nabla'' v=\text{const}$ и $\nabla''' v=\text{const}$ будутъ также интегралами уравненія $\nabla' u=0$, и необходимо только, чтобъ одинъ изъ нихъ былъ различенъ отъ интеграла $v=\text{const}$, тогда этотъ пріемъ можетъ упростить рѣшеніе вопроса совмѣстнаго интегрированія уравненій $\nabla' u=0$, $\nabla'' u=0$, $\nabla''' u=0$.

Повидимому, для возможности опредѣленія, по предыдущему способу, двухъ интеграловъ, удовлетворяющихъ тремъ совмѣстнымъ уравненіямъ

$$\nabla' u=0, \quad \nabla'' u=0, \quad \nabla''' u=0,$$

необходимы три условія, выражаемыя равенствами

$$\nabla'\nabla'' u-\nabla''\nabla' u=0, \quad \nabla'\nabla''' u-\nabla'''\nabla' u=0,$$
$$\nabla''\nabla''' u-\nabla'''\nabla'' u=0,$$

которыя должны имѣть мѣсто для всякой функціи u; но нетрудно убѣдиться, что *достаточно* двухъ изъ этихъ условій, — третье же будетъ ихъ слѣдствіемъ, въ силу весьма простого отношенія, существующаго между первыми частями трехъ предыдущихъ условныхъ уравненій. Это отношеніе выражается слѣдующимъ равенствомъ

$$(\nabla'\nabla''u-\nabla''\nabla'u)+z_{,}(\nabla'\nabla'''u-\nabla'''\nabla'u)-$$
$$-z'(\nabla''\nabla'''u-\nabla'''\nabla''u)=0,$$

имѣющимъ мѣсто для всякой функціи u.

Такъ какъ это равенство зависитъ только отъ свойства символовъ ∇', ∇'', ∇''' и совершенно независимо отъ значенія функціи, представляемой буквой u, то эту послѣднюю можно отбросить, и тогда теорема, которую должно доказать, выразится символически слѣдующимъ образомъ:

$$(\nabla'\nabla''-\nabla''\nabla')+z_{,}(\nabla'\nabla'''-\nabla'''\nabla')-$$
$$-z'(\nabla''\nabla'''-\nabla'''\nabla'')=0.$$

Для доказательства ея должно вспомнить, что ∇', ∇'', ∇''' выражаются помощію ∇_1, ∇_2, ∇_3 слѣдующимъ образомъ:

$$\nabla'=\nabla_1-\frac{z'}{R}\nabla_3,\quad \nabla''=\nabla_2-\frac{z_{,}}{R}\nabla_3,\quad \nabla'''=\frac{1}{R}\nabla_3$$

и сверхъ того

$$\nabla_3=\nabla_1\nabla_2-\nabla_2\nabla_3.$$

На основаніи этихъ опредѣленій не трудно получить слѣдующія символическія равенства (которыя, впрочемъ, легко сдѣлать обыкновенными, если подъ знаками дѣйствій напишемъ функцію u, опущенную для краткости):

$$\nabla'\nabla''-\nabla''\nabla'=\left[1-\left(\nabla_1\frac{z_{,}}{R}\right)+\left(\nabla_2\frac{z'}{R}\right)+\frac{z'}{R}\left(\nabla_3\frac{z_{,}}{R}\right)-\frac{z_{,}}{R}\left(\nabla_3\frac{z'}{R}\right)\right]\nabla_3$$
$$-\frac{z_{,}}{R}(\nabla_1\nabla_3-\nabla_3\nabla_1)+\frac{z'}{R}(\nabla_2\nabla_3-\nabla_3\nabla_2),$$

$$\nabla'\nabla'''-\nabla'''\nabla'=\frac{1}{R}(\nabla_1\nabla_3-\nabla_3\nabla_1)+$$
$$+\left[\left(\nabla_1\frac{1}{R}\right)-\frac{z'}{R}\left(\nabla_3\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{R}\left(\nabla_3\frac{z'}{R}\right)\right]\nabla_3,$$

$$\nabla''\nabla'''-\nabla'''\nabla''=\frac{1}{R}(\nabla_2\nabla_3-\nabla_3\nabla_2)+$$
$$+\left[\left(\nabla_2\frac{1}{R}\right)-\frac{z_{,}}{R}\left(\nabla_3\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{R}\left(\nabla_3\frac{z_{,}}{R}\right)\right]\nabla_3.$$

Сложивъ эти три равенства, по умноженіи второго на $z_{,}$, третьяго на $-z'$ и исполнивъ очевидныя приведенія, получимъ

$$(\nabla'\nabla''-\nabla''\nabla')+z_{,}(\nabla'\nabla'''-\nabla'''\nabla')-z'(\nabla''\nabla'''-\nabla'''\nabla'')=$$
$$=\frac{R-\nabla_1 z_{,}+\nabla_2 z'}{R};$$

но

$$R=\frac{\pm 2\sqrt{G}}{N},\quad \nabla_1 z_{,}=\frac{K\pm\sqrt{G}}{N},\quad \nabla_2 z'=\frac{K\mp\sqrt{G}}{N};$$

поэтому

$$R-\nabla_1 z_{,}+\nabla_2 z'=0;$$

слѣдовательно,

$$(\nabla'\nabla''-\nabla''\nabla')+z_{,}(\nabla'\nabla'''-\nabla'''\nabla')-z'(\nabla''\nabla'''-\nabla'''\nabla'')=0,$$

что и требовалось доказать.

Перейдемъ теперь къ другимъ случаямъ, могущимъ представиться при интегрированіи уравненій:

$$\nabla' u=0,\quad \nabla'' u=0,\quad \nabla''' u=0.$$

Такихъ случаевъ возможно еще два:

a) когда ни одно изъ выраженій $\nabla'\nabla''u-\nabla''\nabla'u$, $\nabla'\nabla'''u-\nabla'''\nabla'u$, $\nabla''\nabla'''u-\nabla'''\nabla''u$ не приведется тождественно къ нулю.

b) когда одно изъ нихъ приведется тождественно къ нулю.

Такъ какъ во всякомъ случаѣ эти три выраженія должны быть равны нулю, для того чтобы былъ возможенъ общій интегралъ для трехъ уравненій $\nabla' u=0$, $\nabla'' u=0$, $\nabla''' u=0$, то *въ случаѣ* (*a*), на основаніи доказанной теоремы, достаточно будетъ уравнять нулю два изъ нихъ. Такимъ образомъ къ тремъ даннымъ уравненіямъ присоединимъ еще два:

$$S\frac{\partial u}{\partial z'}+T\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0 \quad \text{и} \quad S_1\frac{\partial u}{\partial z'}+T_1\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0.$$

Если эти послѣднія будутъ алгебраически различныя, то мы будемъ имѣть вмѣстѣ съ данными пять уравненій, линейныхъ и однородныхъ относительно пяти производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{,}}$.

Изъ нихъ можно вывести только одно заключеніе, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z'}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

которое показываетъ, что тремъ даннымъ, а слѣдовательно и уравненіямъ $\nabla_1 u=0$, $\nabla_2 u=0$, $\nabla_3 u=0$, можно удовлетворить только подстановкою постояннаго количества вмѣсто u.

Если уравненія

$$S\frac{\partial u}{\partial z'}+T\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0 \quad \text{и} \quad S_1\frac{\partial u}{\partial z'}+T_1\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0$$

не будутъ алгебраически различныя, то достаточно къ даннымъ уравненіямъ присоединить одно изъ нихъ; дальнѣйшій анализъ будетъ одинаковъ съ тѣмъ, который мы теперь изложимъ для случая (b).

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, по предположенію, одно изъ трехъ выраженій

$$\nabla'\nabla''u-\nabla''\nabla'u,\quad \nabla'\nabla'''u-\nabla'''\nabla'u,\quad \nabla''\nabla'''u-\nabla'''\nabla''u$$

приводится тождественно къ нулю.

Слѣдовательно, на основаніи доказанной теоремы, достаточно одно изъ двухъ не уничтожающихся выраженій уравнять нулю. Такимъ образомъ получимъ систему уравненій вида

$$\nabla'u=\frac{\partial u}{\partial x}+A\frac{\partial u}{\partial z'}+B\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

$$\nabla''u=\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z'}+D\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

$$\nabla'''u=\frac{\partial u}{\partial z}+E\frac{\partial u}{\partial z'}+F\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

$$\nabla''''u=S\frac{\partial u}{\partial z'}+T\frac{\partial u}{\partial z_{,}}=0,$$

которая, по исключеніи одной изъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}}$ изъ трехъ первыхъ помощію четвертаго, преобразуется въ слѣдующую:

$$\triangle_1 u=\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}}=0,$$

$$\triangle_2 u=\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}}=0,$$

$$\triangle_3 u=\frac{\partial u}{\partial z}+c\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}}=0,$$

$$\triangle_4 u=\frac{\partial u}{\partial z'}+d\frac{\partial u}{\partial z_{\prime}}=0,$$

гдѣ

$$\triangle_1=\nabla'-\frac{A}{S}\nabla'''', \quad \triangle_2=\nabla''-\frac{C}{S}\nabla'''', \quad \triangle_3=\nabla'''-\frac{E}{S}\nabla'''',$$

$$\triangle_4=\frac{1}{S}\nabla'''',$$

и a, b, c, d выражаются извѣстнымъ образомъ помощію коэффиціентовъ предыдущихъ уравненій.

Послѣдняя система уравненій допускаетъ общій интегралъ только въ одномъ случаѣ, когда получаются тождественныя равенства

$$\triangle_i\triangle_k u=\triangle_k\triangle_i u$$

для всякой функціи u и при всѣхъ различныхъ значеніяхъ i и k, взятыхъ въ ряду чиселъ 1, 2, 3, 4.

Въ противномъ случаѣ, очевидно, не возможно удовлетворить совокупно ни 4-мъ разсматриваемымъ уравненіямъ, ни тѣмъ уравненіямъ, изъ которыхъ они произошли. Но общимъ источникомъ всѣхъ этихъ уравненій служили два первоначальныя $\nabla_1 u=0$ и $\nabla_2 u=0$; слѣдовательно, и они, въ этомъ случаѣ, не допускаютъ общаго интеграла.

Если же условія $\triangle_i\triangle_k u=\triangle_k\triangle_i u$ выполнены такъ, какъ требовалось выше, то способъ для опредѣленія единственнаго интеграла, принадлежащаго всѣмъ четыремъ уравненіямъ:

$$\triangle_1 u=0, \quad \triangle_2 u=0, \quad \triangle_3 u=0, \quad \triangle_4 u=0,$$

уже подробно объясненный при интегрированіи предыдущихъ системъ совмѣстныхъ уравненій, остается тотъ же самый; поэтому достаточно будетъ кратко обозначить его приложеніе.

Начинаемъ опредѣленіемъ интеграла одного изъ предыдущихъ уравненій, положимъ перваго; онъ получится изъ уравненія съ 2 перемѣнными x и $z,$

$$adx - dz, = 0$$

и, положимъ, будетъ $v = \text{const}$. — Отыскивая интегралъ $w = F(y, v) = \text{const}$, удовлетворяющій 1-му и 2-му уравненіямъ, придемъ къ уравненію вида

$$\triangle_2 w = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} f(v) = 0$$

съ извѣстною функціей $f(v)$. Слѣдовательно, искомый интегралъ получится посредствомъ квадратуры:

$$w = y - \int \frac{dv}{f(v)} = \text{const}.$$

Отыскивая интегралъ $t = \Phi(z, w) = \text{const}$, удовлетворяющій 1-му, 2-му и 3-му уравненіямъ, придемъ къ уравненію вида

$$\triangle_3 t = \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial w} \varphi(w) = 0,$$

съ извѣстною функціею $\varphi(w)$, и искомый интегралъ выразится посредствомъ квадратуры:

$$t = z - \int \frac{dw}{\varphi(w)} = \text{const}.$$

Наконецъ, опредѣленіе интеграла $u_1 = \Psi(z', t) = \text{const}$, удовлетворяющаго всѣмъ четыремъ уравнеріямъ, приведетъ къ уравненію

$$\triangle_4 u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z'} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \psi(t) = 0,$$

съ извѣстною функціею $\psi(t)$, и искомый интегралъ также выразится помощію квадратуры

$$u_1 = z' - \int \frac{dt}{\psi(t)} = \text{const}.$$

Этотъ послѣдній интегралъ удовлетворитъ также двумъ совмѣстнымъ уравненіямъ:

$$\nabla_1 u = 0 \quad \text{и} \quad \nabla_2 u = 0,$$

потому что

$$\nabla_1 u = \nabla' u + z' \nabla''' u, \quad \nabla_2 u = \nabla'' u + z_{,} \nabla''' u$$

и

$$\nabla' u = \triangle_1 u + A \triangle_4 u, \quad \nabla'' u = \triangle_2 u + C \triangle_4 u, \quad \nabla''' u = \triangle_3 u + E \triangle_4 u.$$

Значенія же $\triangle_1 u$, $\triangle_2 u$, $\triangle_3 u$, $\triangle_4 u$ должны приводиться къ нулю подстановкою u_1 вмѣсто u.

§ 15.

Въ двухъ предыдущихъ §§ изложенъ способъ опредѣленія всѣхъ интеграловъ, возможныхъ для двухъ неполныхъ системъ уравненій:

$$Hdy + Ndz_{,} - (K \pm \sqrt{G})dx = 0,$$
$$Hdz' + (K \mp \sqrt{G})dz_{,} + Mdx = 0,$$
$$dz - z'dx - z_{,}dy = 0,$$

изъ которыхъ одной соотвѣтствуетъ верхній и другой нижній знакъ предъ $\sqrt{G}$.

При изложеніи этого способа имѣлись въ виду не столько общія формулы, сколько общіе пріемы подобнаго изслѣдованія. Поэтому и не были оговорены такіе частные случаи, когда, напримѣръ, коэффиціенты N, R и пр., введенные дѣлителями въ наши уравненія, обращаются въ нуль; въ самомъ дѣлѣ, перемѣннымъ x, y, z, z', $z_{,}$, въ этихъ уравненіяхъ принадлежатъ одинаковыя роли и всегда вмѣсто одного можно взять другое, чтобы избѣжать упомянутаго сейчасъ затрудненія.

Убѣдившись, такимъ образомъ, что число интеграловъ каждой изъ двухъ предыдущихъ системъ уравненій можетъ измѣняться отъ трехъ до нуля включительно, мы должны далѣе предполагать различныя комбинаціи этихъ чиселъ интеграловъ возможными въ одно время для той и другой системы уравненій и изслѣдовать, какимъ образомъ въ каждомъ случаѣ можно получить общій конечный интегралъ уравненія

$$Hz''+2Kz_{,}'+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z'_{,}{}^{2})=0. \qquad (1)$$

Простѣйшій изъ этихъ случаевъ, когда обѣ системы уравненій имѣютъ по три интеграла и когда вслѣдствіе условія $G=0$ исчезаетъ ихъ различіе, былъ уже вполнѣ изслѣдованъ въ предпослѣднемъ §; къ излѣдованію прочихъ случаевъ мы вскорѣ перейдемъ. Но теперь кстати будетъ дополнить сдѣланное выше замѣчаніе, что въ двухъ разсматриваемыхъ системахъ уравненій перемѣннымъ x, y, z, z', $z_{,}$ принадлежатъ одинаковыя роли. Для этого покажемъ, что въ самомъ уравненіи (1) можно вмѣсто независимыхъ перемѣнныхъ x и y, послѣдовательно вводить z' и $z_{,}$, x и $z_{,}$, y и z', и выбирать каждый разъ зависимое перемѣнное такимъ образомъ, что общій типъ преобразуемаго уравненія не будетъ измѣняться. Первое изъ такихъ преобразованій, указанное *Лежандромъ* [1]), можно представить слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что выраженія z, z', $z_{,}$, какъ функцій x и y будутъ

$$z=f(x,\ y),\quad z'=\varphi(x,\ y),\quad z_{,}=\psi(x,\ y);$$

вторыя части этихъ уравненій должны удовлетворять условіямъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\varphi,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\psi.$$

Посредствомъ уравненій $z'=\varphi$ и $z_{,}=\psi$ можно ввести независимыя перемѣнныя z' и $z_{,}$ вмѣсто x и y; сверхъ того

---

1) Hist. de l'Ac. des Sciences. 1787. Mem. sur l'intégr. de quelques équat. aux differ. partielles. par le Gendre p. 314.

вмѣсто зависимаго перемѣннаго z введемъ w, опредѣленное уравненіемъ

$$w = xz' + yz_, - z.$$

Дифференцируя w послѣдовательно въ отношеніи независимыхъ перемѣнныхъ z' и $z_,$, получимъ:

$$\frac{\partial w}{\partial z'} = x + \left(z' - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial z'} + \left(z_, - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial z'},$$
$$\frac{\partial w}{\partial z_,} = y + \left(z' - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial z_,} + \left(z_, - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial z_,}.$$

Но вслѣдствіе условій $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = \psi$ коэффиціенты при $\frac{\partial x}{\partial z'}$, $\frac{\partial x}{\partial z_,}$, $\frac{\partial y}{\partial z'}$, $\frac{\partial y}{\partial z_,}$ во вторыхъ частяхъ предыдущихъ уравненій уничтожатся и мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial w}{\partial z'} = x, \quad \frac{\partial w}{\partial z_,} = y.$$

Далѣе, дифференцируя въ отношеніи z' и $z_,$ уравненія $z' = \varphi$ и $z_, = \psi$, получимъ

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'}, \quad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'},$$
$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z_,} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_,}, \quad 1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z_,} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_,}.$$

Но, принявъ во вниманіе, что

$$x = \frac{\partial w}{\partial z'}, \quad y = \frac{\partial w}{\partial z_,}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = z'', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = z_,', \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = z_{,,},$$

можемъ написать предыдущія уравненія слѣдующимъ образомъ:

$$1 = z''\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} + z_,'\frac{\partial^2 w}{\partial z'\,\partial z_,}, \quad 0 = z_,'\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2} + z_{,,}\frac{\partial^2 w}{\partial z'\,\partial z_,},$$
$$0 = z''\frac{\partial^2 w}{\partial z'\,\partial z_,} + z_,'\frac{\partial^2 w}{\partial z_,^2}, \quad 1 = z_,'\frac{\partial^2 w}{\partial z'\,\partial z_,} + z_{,,}\frac{\partial^2 w}{\partial z_,^2}.$$

Отсюда получимъ:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}=\frac{z_{,,}}{z''z_{,,}-z_{,}'^2},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial z'\,\partial z_{,}}=\frac{-z_{,}'}{\partial''z_{,,}-z_{,}'^2},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2}=\frac{z''}{z''z_{,,}-z_{,}'^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z'\,\partial z_{,}}\right)^2=\frac{1}{z''z_{,,}-z_{,}'^2}.$$

Слѣдовательно, если въ коэффиціентахъ уравненія (1)

$$x,\quad y,\quad z$$

замѣнимъ соотвѣтственно на

$$\frac{\partial w}{\partial z'},\quad \frac{\partial w}{\partial z_{,}},\quad z'\frac{\partial w}{\partial z'}+z_{,}\frac{\partial w}{\partial z_{,}}=w$$

и раздѣлимъ его на $z''z_{,,}-z_{,}'^2$, то, на основаніи предыдущихъ равенствъ, оно приметъ видъ

$$L\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}-2K\frac{\partial^2 w}{\partial z'\,\partial z_{,}}+H\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}+N+M\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}\frac{\partial^2 w}{\partial z_{,}^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z'\,\partial z_{,}}\right)^2\right]=0.$$

Получивъ интегрированіемъ этого уравненія значеніе w, какъ функціи z' и $z_{,}$, изъ уравненій

$$\frac{\partial w}{\partial z'}=x,\quad \frac{\partial w}{\partial z_{,}}=y\quad \text{и}\quad z=xz'+yz_{,}-w$$

можно z', $z_{,}$ и z выразить въ перемѣнныхъ x и y.

Амперъ [1]) показалъ возможность еще двухъ преобразованій, аналогичныхъ Лежандрову. Для перваго преобразованія можно предположить, что помощію послѣдняго изъ трехъ уравненій

$$z=f(x,\ y),\quad z'=\varphi(x,\ y),\quad z_{,}=\psi(x,\ y),$$

y выражается функціею x и $z_{,}$; сверхъ того введемъ вмѣсто z зависимое перемѣнное v, опредѣленное уравненіемъ

$$v=z-z_{,}y.$$

---

[1]) Jour. de l'Ec. Polyt. XVIII Cahier p. 90.

Дифференцируя v послѣдовательно въ отношеніи независимыхъ перемѣнныхъ x и $z_,$, получимъ

$$\frac{\partial v}{\partial x}=z'+\left(\frac{\partial z}{\partial y}-z_,\right)\frac{\partial y}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial z_,}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-z_,\right)\frac{\partial y}{\partial z_,}-y.$$

Но вслѣдствіе условія $\frac{\partial f}{\partial y}=\psi$ коэффиціенты при $\frac{\partial y}{\partial x}$ и $\frac{\partial y}{\partial z_,}$ во вторыхъ частяхъ предыдущихъ уравненій уничтожаются и мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial v}{\partial x}=z',\quad \frac{\partial v}{\partial z_,}=-y.$$

Далѣе, дифференцируя въ отношеніи x и $z_,$ уравненія: $z'=\varphi$ и $z_,=\psi$, получимъ

$$\frac{\partial z'}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},\quad 0=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},\quad 1=\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_,},$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=z''-z_,'\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z_,},\quad 0=z_,'-z_{,,}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z_,},\quad 1=-z_{,,}\frac{\partial^2 v}{\partial z_,^2}.$$

Отсюда находимъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_,^2}=-\frac{1}{z_{,,}},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z_,}=\frac{z_,'}{z_{,,}},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{z''z_{,,}-z_,'^2}{z_{,,}}$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial z_,^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z_,}\right)^2=-\frac{z''}{z_{,,}};$$

слѣдовательно, если въ коэффиціентахъ уравненія (1)

$$y,\quad z,\quad z'$$

замѣнимъ соотвѣтственно на

$$-\frac{\partial v}{\partial z_,},\quad v-z_,\frac{\partial v}{\partial z_,},\quad \frac{\partial v}{\partial x}$$

и раздѣлимъ его на $z_{,,}$, то, на основаніи предыдущихъ равенствъ, оно приметъ видъ:

$$N\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2K\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z_{,}}-M\frac{\partial^2 v}{\partial z_{,}^2}+L-H\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial z_{,}^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z_{,}}\right)^2\right]=0.$$

Получивъ интегрированіемъ этого уравненія значеніе v, какъ функціи x и $z_{,}$, изъ уравненій

$$\frac{\partial v}{\partial z_{,}}=-y \quad \text{и} \quad z=v+z_{,}y$$

можно $z_{,}$ и z выразить въ перемѣнныхъ x и y.

Наконецъ третье преобразованіе совершенно сходно съ предыдущимъ. Помощію второго изъ уравненій $z=f$, $z'=\varphi$ и $z_{,}=\psi$ можно x выразить функціею y и z'. Если сверхъ того введемъ вмѣсто z зависимое перемѣнное $u=z-z'x$, то, такъ же какъ въ предыдущемъ преобразованіи, получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z_{,},\quad \frac{\partial u}{\partial z'}=-x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z''z_{,,}-z_{,}'^2}{z''},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}=-\frac{1}{z''},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z'}=\frac{z_{,}'}{z''},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z'}\right)^2=-\frac{z_{,,}}{z''};$$

слѣдовательно, если въ коэффиціентахъ уравненія (1) замѣнимъ x, z, $z_{,}$ соотвѣтственно на $-\frac{\partial u}{\partial z'}$, $u-z'\frac{\partial u}{\partial z'}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и раздѣлимъ его на z'', то, на основаніи предыдущихъ равенствъ, оно приметъ видъ:

$$N\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2K\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z'}-M\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}+H-L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z'}\right)^2\right]=0.$$

Получивъ интегрированіемъ этого уравненія значеніе u какъ функціи y и z', изъ уравненій

$$\frac{\partial u}{\partial z'}=-x \quad \text{и} \quad z=u+z'x$$

можно z' и z выразить въ перемѣнныхъ x и y.

Не трудно убѣдиться, что выраженія, составленныя изъ коэффиціентовъ преобразованныхъ уравненій по тому же закону, по которому составляется выраженіе $G=K^2-HL+MN$ для уравненія (1), будутъ имѣть одинаковыя значенія съ этимъ послѣднимъ.

Лежандръ и Амперъ, открывъ возможность предыдущихъ общихъ преобразованій уравненія (1), показали вмѣстѣ съ тѣмъ весьма удачныя примѣненія ихъ. Хорошій примѣръ для Лежандрова преобразованія находимъ также въ изслѣдованіи г. Фукса относительно интегрированія уравненія

$$(1+z_{,}^{2})z''=(1+z'^{2})z_{,,},$$

рѣшеніе котораго дополнилъ и упростилъ г. Гоппе[1]). Но мы не будемъ останавливаться на этихъ частныхъ примѣрахъ, такъ какъ въ концѣ этого сочиненія (гл. IV) будетъ доказана возможность неограниченнаго числа способовъ производить преобразованія уравненія (1), не только аналогичныя Лежандрову или Амперову, послѣ которыхъ преобразованное уравненіе удерживаетъ первоначальный типъ, но и такихъ, вслѣдствіе которыхъ вмѣсто уравненія (1) получается преобразованное болѣе простого, а именно *линейнаго вида* относительно частныхъ производныхъ второго порядка. Вмѣстѣ съ тѣмъ будутъ приведены и примѣненія подобныхъ преобразованій.

§ 16.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію способовъ интегрированія уравненія

$$Hz''+2Kz_{,}'+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})=0 \tag{1}$$

въ тѣхъ случаяхъ, когда каждая изъ системъ

$$\left.\begin{aligned} Hdy+N\partial z_{,}-(K+\sqrt{G})dx=0\\ Hdz'+(K-\sqrt{G})dz_{,}+Mdx=0\\ dz-z'dx-z_{,}dy=0 \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

и

$$\left.\begin{aligned} Hdy+Ndz_{,}-(K-\sqrt{G})dx=0\\ Hdz'+(K+\sqrt{G})dz_{,}+Mdx=0\\ dz-z'dx-z_{,}dy=0 \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

---

1) Crelle. Jour. für die Math. 1861. 58 B. стр. 80 и 369.

допускаетъ менѣе трехъ различныхъ интеграловъ. Положимъ, что намъ извѣстны два различныхъ интеграла

$$u_1=\text{const}, \quad \text{и} \quad u_2=\text{const}.$$

системы (A). На основанiи вышедоказаннаго функцiи u_1 и u_2, по вставкѣ вмѣсто u, удовлетворятъ уравненiямъ

$$\nabla_1 u=0 \quad \text{и} \quad \nabla_2 u=0,$$

въ которыхъ должно взять верхнiй знакъ предъ $\sqrt{G}$. Произвольная функцiя отъ u_1 и u_2, $\Phi(u_1, u_2)$, также удовлетворитъ имъ; поэтому уравненiе

$$\Phi(u_1, u_2)=0 \tag{2}$$

будетъ интеграломъ системы (A) и, слѣдовательно, должно быть интеграломъ даннаго уравненiя (1). Этотъ интегралъ, заключающiй производныя перваго порядка и одну произвольную функцiю, будетъ общимъ интеграломъ перваго порядка.

Подобнымъ образомъ, зная два интеграла системы (B)

$$v_1=\text{const}. \quad \text{и} \quad v_2=\text{const}.,$$

получимъ другой общiй интегралъ 1-го порядка

$$\Psi(v_1, v_2)=0. \tag{3}$$

Способъ, предложенный *Монжемъ*, для вывода преобразованнаго общаго интеграла уравненiя (1), основывается на предварительномъ опредѣленiи общаго интеграла перваго порядка этого уравненiя, зная который остается только, слѣдуя этому способу, интегрировать его какъ уравненiе съ частными производными перваго порядка. Если получимъ интегралъ *общiй*, то въ выраженiе его войдетъ произвольная функцiя, различная отъ заключавшейся въ интегруемомъ уравненiи; слѣдовательно, этотъ интегралъ, заключающiй двѣ произвольныхъ функцiй, долженъ быть общимъ первообразнымъ для уровненiя (1). Если получимъ интегралъ *полный*, то въ выраженіе его войдутъ два произвольныхъ постоянныхъ. Предположивъ одно изъ нихъ произвольной функціей другого и присоединивъ къ уравненію интеграла производное отъ него, полученное дифференцированіемъ въ отношеніи оставшагося произвольнаго постояннаго, будемъ имѣть общій первообразный интегралъ уравненія (1) и условіе для опредѣленія аргумента одной изъ двухъ входящихъ въ него произвольныхъ функцій.

Если можемъ располагать двумя общими интегралами перваго порядка (2) и (3), то, исключивъ изъ нихъ одну изъ производныхъ перваго порядка z' и $z_,$, получимъ уравненіе, которое можемъ интегрировать какъ обыкновенно съ 2-мя перемѣнными z и x или z и y. Интегралъ необходимо долженъ содержать обѣ произвольныя функціи, заключающіяся въ интегрируемомъ уравненіи. Если возможно разрѣшить уравненія (2) и (3) относительно z' и $z_,$, то, по вставкѣ ихъ значеній, можемъ интегрировать уравненіе

$$dz-z'dx-z_,dy=0,$$

ибо условіе интегрируемости

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial z'}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}z'\right)-\frac{\partial\Psi}{\partial z'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z'\right)\\+&\frac{\partial\Phi}{\partial z_,}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}z_,\right)-\frac{\partial\Psi}{\partial z_,}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z_,\right)\end{aligned}\right\}=0$$

будетъ выполнено, въ чемъ легко удостовѣриться, пользуясь равенствами:

$$\nabla_1\Phi=0,\quad \nabla_2\Phi=0,\quad \nabla_1\Psi=0,\quad \nabla_2\Psi=0.$$

Но изъ мемуара, въ которомъ *Монжъ* изложилъ свой способъ [1]), видно, что относительно его общности было уже сдѣлано важное возраженіе, состоящее въ томъ, что бываютъ уравненія вида (1), допускающія конечный первообразный

---

[1]) Hist. de l'Ac. des S. 1773.

интегралъ, но не имѣющія общаго интеграла перваго порядка. Таково, напр., уравненіе

$$z''-z_{,,}-\frac{2z'}{x}=0,$$

котораго конечный общій интегралъ

$$z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)-x[\varphi'(x+y)+\psi(x-y)]$$

найденъ еще *Эйлеромъ* (см. § 11).

Не желая допустить подобнаго факта, *Монжъ* пытался представить общіе интегралы перваго порядка предыдущаго уравненія подъ видомъ:

$$z'+z_{,}=\varphi'(x+y)-2x\varphi''(x+y)+\int\left[\frac{z'}{x}+\varphi''(x+y)\right](dx-dy),$$

$$z'-z_{,}=\psi'(x-y)-2x\psi''(x-y)+\int\left[\frac{z'}{x}+\psi''(x-y)\right](dx+dy),$$

прибавивъ для опредѣленія излишнихъ функцій условія:

$$\psi''(x-y)=\frac{z'}{x}+\varphi''(x+y),$$

$$\varphi''(x+y)=\frac{z'}{x}+\psi''(x-y).$$

Но въ этихъ выраженіяхъ справедливо замѣчено незаконное употребленіе знака $\int$ [1]). Сверхъ того можно прибавить еще, что, допустивъ существованіе одного изъ интеграловъ въ этой формѣ, не будетъ причины отвергнуть другой; а въ такомъ случаѣ предыдущія условія для опредѣленія излишнихъ произвольныхъ функцій, существуя вмѣстѣ, дадутъ $z'=0$, т.-е. обратятъ z въ функцію одного y.

Итакъ, принимая для интеграловъ перваго порядка только видъ (2) или (3), мы всегда можемъ изслѣдовать, допускаетъ ли такіе интегралы данное уравненіе (1); потому что этотъ вопросъ приводится къ другому: могутъ ли уравненія (A) и

---

[1]) «On a reproché que ces expressions étaient abusives» тамъ же ст. 317.

(*B*) имѣть по два различныхъ интеграла, и рѣшеніе этого послѣдняго подробно изложено въ одномъ изъ предыдущихъ §§.

Амперъ, указавъ также на необходимость ограничить приложенія способа *Монжа* только тѣми случаями, когда интегрируемое уравненіе допускаетъ общій интегралъ перваго порядка, обратилъ сверхъ того вниманіе на затруднительность приложенія обыкновенныхъ пріемовъ интегрированія къ общему интегралу перваго порядка, вслѣдствіе присутствія въ немъ произвольной функціи. Но и способъ *Ампера*, основанный также на предварительномъ опредѣленіи общаго интеграла перваго порядка, не устраняетъ замѣченнаго имъ затрупненія, для избѣжанія котораго необходимо, очевидно, вмѣсто *общихъ* пользоваться *частными* интегралами уравненія (1), какъ будетъ показано впослѣдствіи. Способъ *Ампера* мы разсмотримъ далѣе, теперь же обратимъ вниманіе на другое его замѣчаніе, состоящее въ томъ, что вспомогательная система обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій, къ которымъ приводится интегрированіе уравненія (2), доставляетъ уравненія (*B*) и обратно — система уравненій, къ которымъ приводится интегрированіе уравненія (3), даетъ уравненія (*A*). Можно слѣдующимъ образомъ убѣдиться въ справедливости этого замѣчанія.

Интегрированіе уравненія съ частными производными перваго порядка

$$\Phi(u_1,\ u_2)=0$$

приводитъ, какъ извѣстно, къ системѣ совмѣстныхъ уравненій

$$\frac{dx}{\dfrac{d\Phi}{\partial z'}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,}}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z'}z'+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,}}z_{,}}=\frac{-dz'}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}z'}=\frac{-dz_{,}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}z_{,}}. \tag{4}$$

Но на основаніи равенства $\nabla_2\Phi=0$, или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z_{,}=\frac{H}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z_{,}}-\frac{K-\sqrt{G}}{N}\frac{\partial\Phi}{\partial z'},$$

уравненія, составляемыя 1-мъ, 2-мъ и послѣднимъ отношеніями, можно написать слѣдующимъ образомъ

$$\frac{dx}{\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}=\frac{\partial y}{\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}}=\frac{-dz_{,}}{\frac{H}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}-\frac{K-\sqrt{G}}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}.$$

По умноженіи обоихъ членовъ 1-го изъ этихъ отношеній на $-(K-\sqrt{G})$, 2-го на H и 3-го на N, сравнивъ 3-е отношеніе съ отношеніемъ суммы предыдущихъ членовъ 1-го и 2-го отношеній къ суммѣ ихъ послѣдующихъ, находимъ

$$\frac{Hdy-(K-\sqrt{G})dx}{H\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}-(K-\sqrt{G})\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}=\frac{-Ndz_{,}}{H\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}-(K-\sqrt{G})\frac{\partial \Phi}{\partial z'}},$$

отбросивъ же равные вторые члены отношеній, получимъ отсюда первое изъ уравненій (B).

Далѣе, на основаніи равенствъ $\nabla_1\Phi=0$ и $\nabla_2\Phi=0$, изъ которыхъ первое даетъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}z'=\frac{L}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z'}-\frac{K+\sqrt{G}}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}},$$

уравненія, составляемыя 1-мъ, 4-мъ и 5-мъ изъ отношеній (4), можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dx}{\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}=\frac{-dz'}{\frac{L}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z'}-\frac{K+\sqrt{G}}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}}=\frac{-dz_{,}}{\frac{H}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z_{,}}-\frac{K-\sqrt{G}}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}.$$

По умноженіи обоихъ членовъ 1-го отношенія на M, 2-го на H, 3-го на $(K+\sqrt{G})$, сравнивъ 1-е отношеніе съ отношеніемъ суммы предыдущихъ членовъ 2-го и 3-го отношеній къ суммѣ ихъ послѣдующихъ, находимъ

$$\frac{Mdx}{M\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}=\frac{-Hdz'-(K+\sqrt{G})dz_{,}}{\frac{HL-K^2+G}{N}\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}.$$

Но $\quad G=K^2-HL+MN$ и слѣд. $\dfrac{HL-K^2+G}{N}=M$.

Поэтому, отбросивъ равные вторые члены въ двухъ предыдущихъ отношеніяхъ, получимъ 2-е изъ уравненій (B).

Наконецъ, по умноженіи обоихъ членовъ 1-го изъ отношеній (4) на z', 2-го на $z_,$, сравнивъ третье отношеніе съ отношеніемъ суммы предыдущихъ 1-го и 2-го къ суммѣ ихъ послѣдующихъ, находимъ

$$\frac{z'dx+z_,dy}{z'\frac{\partial \Phi}{\partial z'}+z_,\frac{\partial \Phi}{\partial z_,}}=\frac{dz}{z'\frac{\partial \Phi}{\partial x'}+z_,\frac{\partial \Phi}{\partial z_,}},$$

откуда получается третье изъ уравненіій (B).

Точно такъ же повѣряется вторая половина замѣчанія *Ампера*.

Несмотря на упомянутыя выше несовершенства, способъ *Монжа* заслуживаетъ полнаго вниманія, какъ первый довольно общій пріемъ интегрированія уравненій разсматриваемаго вида, тѣмъ болѣе, что авторъ способа показалъ прекрасныя его примѣненія въ извѣстномъ своемъ сочиненіи «Application de l'Analyse à la Géométrie». Мы заимствуемъ изъ него, въ краткомъ извлеченіи, одинъ примѣръ, чтобъ дать болѣе полное понятіе о различныхъ вспомогательныхъ пріемахъ, которыми можетъ воспользоваться искусный математикъ въ развитіи и приложеніи основной простой мысли этого способа.

Должно интегрирвать уравненіе

$$\alpha(\beta+z_,)z''+[\beta(\beta+z_,)-\alpha(\alpha+z')]z_,'-\beta(\alpha+z')z_{,,}=0,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$\frac{y+zz_,}{xz_,-yz'}=-\alpha \quad \text{и} \quad \frac{x+zz'}{xz_,-yz'}=\beta.$$

По сравненіи съ уравненіемъ (1) здѣсь имѣемъ:

$$H=\alpha(\beta+z_,),\quad K=\tfrac{1}{2}[\beta(\beta+z_,)-\alpha(\alpha+z')],\quad L=-\beta(\alpha+z'),$$
$$M=N=0,\quad G=\tfrac{1}{4}[\beta(\beta+z_,)+\alpha(\alpha+z')]^2.$$

Поэтому системы (A) и (B) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}(\beta+z_{,})dy+(\alpha+z')dx=0\\ \alpha dz'+\beta dz_{,}=0\\ dz-z'dx-z_{,}dy=0\end{aligned}\right\}, \qquad (A)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha dy-\beta dx=0\\ (\beta+z_{,})dz'-(\alpha+z')dz_{,}=0\\ dz-z'dx-z_{,}dy=0\end{aligned}\right\}. \qquad (B)$$

Сложивъ 1-е и 3-е уравненія системы (A), находимъ

$$\alpha dx+\beta dy+dz=0.$$

Послѣднее уравненіе, разсматриваемое совмѣстно съ

$$\alpha dz'+\beta dz_{,}=0,$$

можно замѣнить двумя другими. Для этого достаточно замѣтить, что данныя выше значенія α и β получаются какъ алгебраическія рѣшенія двухъ слѣдующихъ уравненій:

$$\alpha x+\beta y+z=0,$$
$$\alpha z'+\beta z_{,}-1=0,$$

Поэтому, представивъ, что сюда вмѣсто α и β вставлены ихъ значенія, и дифференцируя полученныя такимъ образомъ тождества, находимъ тождественныя равенства:

$$\alpha dx+\beta dy+dz+xd\alpha+yd\beta=0,$$
$$\alpha dz'+\beta dz_{,}+z'd\alpha+z_{,}d\beta=0,$$

на основаніи которыхъ два интегрируемыя уравненія приводятся къ слѣдующему виду:

$$xd\alpha+yd\beta=0, \quad z'd\alpha+z_{,}d\beta=0,$$

или

$$d\alpha=0, \quad d\beta=0.$$

Слѣдовательно, два различныхъ интеграла системы (A будутъ

$$\alpha=a \quad \text{и} \quad \beta=b,$$

или

$$-\frac{y+zz_{,}}{xz_{,}-yz'}=a, \quad \frac{x+zz'}{xz_{,}-yz'}=b,$$

гдѣ a и b означаютъ произвольныя постоянныя.

Общій же интегралъ перваго порядка даннаго уравненія получится по исключеніи a изъ двухъ уравненій

$$-\frac{y+zz_{,}}{xz_{,}-yz'}=a, \quad \frac{x+zz'}{xz_{,}-yz'}=\varphi(a),$$

гдѣ φ означаетъ произвольную функцію. Но, на основаніи сдѣланнаго выше замѣчанія, вмѣсто этихъ уравненій можно взять два слѣдующія:

$$ax+y\varphi(a)+z=0,$$
$$az'+z_{,}\varphi(a)-1=0.$$

Чтобы исключить отсюда a, мы можемъ представить, что значеніе этой величины выводится изъ перваго уравненія и вставляется во второе. Но, какова бы ни была функція φ, это значеніе должно выражаться только въ x, y, z. Поэтому второе уравненіе, послѣ подстановки представляющее общій интегралъ перваго порядка, будетъ линейнымъ относительно z' и $z_{,}$. Слѣдовательно, для вывода общаго первообразнаго интеграла даннаго уравненія должно только интегрировать систему совмѣстныхъ уравненій

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{\varphi(a)}=dz, \qquad (\gamma)$$

разсматривая a какъ функцію x, y, z, удовлетворяющую уравненію

$$ax+y\varphi(a)+z=0.$$

Опредѣливъ два различныхъ интеграла этой системы съ произвольными постоянными c и c' и установивъ между послѣдними произвольную зависимость $c'=\psi(c)$, должно будетъ только изъ полученныхъ такимъ образомъ трехъ уравненій исключить c и c'; результатомъ исключенія получится общій первообразный интегралъ даннаго уравненія.

Одинъ изъ интеграловъ разсматриваемой системы получится весьма просто. Дѣйствительно, на основаніи ея имѣемъ

$$\frac{xdx+ydy}{ax+\varphi(a)y}=dz,$$

или вслѣдствіе уравненія

$$ax+\varphi(a)y+z=0,$$
$$xdx+ydy+zdz=0;$$

откуда, по интегрированіи,

$$x^2+y^2+z^2=c^2,$$

гдѣ c произвольное постоянное. Этотъ интегралъ нетрудно также получить, на основаніи замѣчанія Ампера, изъ системы уравненій (B). Въ самомъ дѣлѣ, вставивъ значенія α и β въ первое изъ нихъ и, по уничтоженіи знаменателя, сложивъ съ третьимъ, получаемъ

$$xdx+ydy+zdz=0.$$

Переходя къ вычисленію другого интеграла системы (γ), замѣчаемъ, что

$$\frac{dx}{dz}=a \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dz}=\varphi(a),$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dz}=\varphi\left(\frac{dx}{dz}\right).$$

Но изъ уравненій

$$xdx+ydy+zdz=0$$

и

$$x^2+y^2+z^2=c^2$$

имѣемъ

$$dz=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{c^2-x^2-y^2}};$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy\sqrt{c^2-x^2-y^2}}{xdx+ydy}=\varphi\left(\frac{dx\sqrt{c^2-x^2-y^2}}{xdx+ydy}\right).$$

Интегрированіе этого послѣдняго уравненія съ двумя перемѣнными x и y производится слѣдующимъ образомъ. Означивъ черезъ ω количество подъ знакомъ φ, вмѣсто предыдущаго будемъ имѣть два слѣдующія уравненія:

$$\omega x+y\varphi(\omega)=\sqrt{c^2-x^2-y^2},\quad \omega dy-\varphi(\omega)dx=0 \tag{a}$$

Еслибъ ω было количествомъ постояннымъ, то интегралъ послѣдняго уравненія имѣлъ бы видъ

$$\omega y-\varphi(\omega)x=\text{const};$$

но такъ какъ ω количество перемѣнное, то const. второй части должно замѣнить функціей отъ ω, положивъ

$$\omega y-\varphi(\omega)x-f(\omega)=0, \tag{b}$$

гдѣ функцію $f(\omega)$ должно опредѣлить такъ, чтобъ производная первой части послѣдняго уравненія, взятая только въ отношеніи ω, была равна нулю, т.-е. должно полагать

$$y-\varphi'(\omega)x-f'(\omega)=0. \tag{c}$$

Исключеніемъ x и y изъ уравненій (a), (b) и (c) получится обыкновенное дифференціальное уравненіе между ω, $\varphi(\omega)$ и $f(\omega)$, которое можетъ служить для опредѣленія формы функціи f. Дѣйствительно, изъ уравненій (b) и (c) находимъ

$$x=\frac{f-\omega f'}{\omega\varphi'-\varphi},\quad y=\frac{\varphi' f-\varphi f'}{\omega\varphi'-\varphi}.$$

Вставивъ эти значенія x и y въ первое изъ уравненій (a), получимъ

$$(\omega+\varphi\varphi')f-(\omega^2+\varphi^2)f'=$$
$$=\sqrt{c^2(\omega\varphi'-\varphi)^2-(1+\varphi'^2)f^2+2(\omega+\varphi\varphi')ff'-(\omega^2+\varphi^2)f'^2}.$$

Но положивъ

$$v=\frac{f}{\sqrt{\omega^2+\varphi^2}},$$

получимъ

$$\frac{dv}{d\omega}=\frac{(\omega^2+\varphi^2)f'-(\omega+\varphi\varphi')f}{(\omega^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

поэтому предыдущее уравненіе напишется такимъ образомъ

$$\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2=\frac{c^2(\omega\varphi'-\varphi)^2-(1+\varphi'^2)f^2+2(\omega+\varphi\varphi')ff'-(\omega^2+\varphi^2)f'^2}{(\omega^2+\varphi^2)^3};$$

сложивъ послѣднее уравненіе, умноженное на $\omega^2+\varphi^2$, съ квадратомъ предпослѣдняго, получимъ

$$(1+\omega^2+\varphi^2)\left(\frac{dv}{d\omega}\right)^2=\frac{(\omega\varphi'-\varphi)^2}{(\omega^2+\varphi^2)^2}\left[c^2-\frac{f^2}{\omega^2+\varphi^2}\right],$$

откуда

$$\frac{dv}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{(\omega\varphi'-\varphi)d\omega}{(\omega^2+\varphi^2)\sqrt{1+\omega^2+\varphi^2}}.$$

Перемѣнныя v и ω отдѣлены; интегрируя, получимъ

$$\frac{v}{c}=\frac{f}{c\sqrt{\omega^2+\varphi^2}}=\sin\left[c'+\int\frac{(\omega\varphi'-\varphi)d\omega}{(\omega^2+\varphi^2)\sqrt{1+\omega^2+\varphi^2}}\right].$$

Вставивъ значеніе f въ уравненіе (b) и положивъ

$$c'=\psi(c),\quad c=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

получимъ общій первообразный интегралъ задачи подъ видомъ

$$V=\omega y-x\varphi(\omega)-\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(\omega^2+\varphi^2)}.$$
$$.\sin\left[\psi(x^2+y^2+z^2)+\int\frac{(\omega\varphi'-\varphi)d\omega}{(\omega^2+\varphi^2)\sqrt{1+\omega^2+\varphi^2}}\right]=0.$$

Условіемъ для опредѣленія ω будетъ уравненіе (c) или

$$\frac{\partial V}{\partial\omega}=0.$$

Подобнымъ образомъ, начавъ интегрированіемъ системы (B), можно также получить общее рѣшеніе предыдущей задачи, пріобрѣтающей особенный интересъ при объясненіи геометрическихъ значеній даннаго уравненія и всѣхъ послѣдующихъ результатовъ вычисленія; но мы должны оставить въ сторонѣ эти подробности.

§ 17.

Способъ Ампера, для интегрированія уравненія

$$Hz''+2Kz_,'+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z_,'^2)=0 \tag{1}$$

въ томъ случаѣ, когда оно допускаетъ общій интегралъ перваго порядка, составляетъ видоизмѣненіе и дополненіе способа *Монжа*.

Представимъ двѣ системы уравненій, къ которымъ приводится интегрированіе (1) въ видѣ данномъ имъ *Амперомъ* (§ 12):

$$\left.\begin{aligned} H\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}+N\frac{\partial z_,}{\partial x(\alpha}-(K+\sqrt{G})=0\\ H\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{\partial z_,}{\partial x(\alpha}+M=0\\ \frac{\partial z}{\partial x(\alpha}-z'-z_,\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=0 \end{aligned}\right\}, \tag{A}$$

$$\left.\begin{aligned} H\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+N\frac{\partial z_,}{\partial x(\beta}-(K-\sqrt{G})=0\\ H\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{\partial z_,}{\partial x(\beta}+M=0\\ \frac{\partial z}{\partial x(\beta}-z'-z_,\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=0 \end{aligned}\right\}. \tag{B}$$

Въ уравненіяхъ (A) и (B) независимыми перемѣнными предполагаются соотвѣтственно x, α и x, β, при чемъ x можетъ представлять каждое изъ двухъ первоначальныхъ независимыхъ перемѣнныхъ уравненія (1); α и β означаютъ аргументы двухъ произвольныхъ функцій первобразнаго общаго конечнаго интеграла этого уравненія. Понятно, что въ уравненіяхъ (A) и (B) можно знакъ предъ $\sqrt{G}$ перемѣнить въ противоположный.

Если уравненіе (1) допускаетъ общій интегралъ перваго порядка, то можно предположить существованіе двухъ такихъ комбинацій уравненій (A), которыя интегрируются такъ, какъ бы вмѣсто частныхъ производныхъ онѣ содержали обыкновенныя производныя функцій одного перемѣннаго x.

Для отысканія этихъ двухъ интегрируемыхъ комбинацій, если онѣ не представляются сами собою, можетъ служить пріемъ, изложенный въ § 14. Получивъ ихъ интегралы, въ которые войдутъ два произвольныхъ постоянныхъ количества, мы въ правѣ замѣнить послѣднія одно на α, другое произвольной функціей α, $\varphi(\alpha)$, ибо въ уравненіяхъ (A) вмѣстѣ съ x вторымъ независимымъ перемѣннымъ подразумѣвается α. Итакъ, положимъ, что два различные интеграла уравненій (A) будутъ:

$$f(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\alpha \quad \text{и} \quad F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\varphi(\alpha). \tag{2}$$

Разсматривая теперь независимыми перемѣннымъ x и β и дифференцируя въ этомъ предположеніи по x, получимъ изъ предыдущихъ два слѣдующихъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x(\beta}+\frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+\frac{\partial f}{\partial z_{,}}\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}&=\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta},\\ \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x(\beta}+\frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+\frac{\partial F}{\partial z_{,}}\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}&=\varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Исключивъ изъ семи уравненій (2), (3) и (B) четыре количества z', $z_{,}$, $\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}$, $\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}$, получимъ три уравненія, въ которыя войдутъ только производныя по x отъ y, z и α. Поэтому мы можемъ интегрировать ихъ какъ опредѣленную систему обыкновенныхъ совмѣстныхъ уравненій и такимъ образомъ получимъ выраженія функцій y, z и α посредствомъ x и трехъ произвольныхъ постоянныхъ C, C', C''. Но такъ какъ вмѣстѣ съ x вторымъ независимымъ перемѣннымъ подразумѣвается β, то произвольныя постоянныя C, C', C'' можно соотвѣтственно замѣнить на β, $\psi(\beta)$, $\chi(\beta)$, означивъ черезъ ψ и χ произвольныя функціи.

Но совокупность этихъ трехъ уравненій, заключающая *три* произвольныхъ функціи φ, ψ и χ, еще не представляетъ общаго интеграла уравненія (1), такъ какъ онъ долженъ содержать только *двѣ* произвольныхъ функціи. Появленіе излишней произвольной функціи объясняется тѣмъ, что мы воспольн зовались только частью условій опредѣляющихъ функцію z, а именно уравненіями, въ которыя входятъ только частныя производныя по x, между тѣмъ какъ необходимо также принять во вниманіе еще другія уравненія, въ которыя входятъ также частныя производныя въ отношеніи β.

Дѣйствительно, выражая уравненіе

$$dz = z'dx + z_{,}dy$$

въ независимыхъ перемѣнныхъ x и β, будемъ имѣть

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial \beta}d\beta = z'dx + z_{,}\left(\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial \beta}d\beta\right),$$

откуда получатся два уравненія

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z' + z_{,}\frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = z_{,}\frac{\partial y}{\partial \beta}$$

и мы еще не приняли въ соображеніе второго изъ нихъ; поэтому, вставивъ въ него найденныя значенія функцій y, z, $z_{,}$, мы получимъ условіе для опредѣленія и исключенія излишней произвольной функціи. Для той же цѣли можетъ служить другое уравненіе, равнозначущее предыдущему, которое получаемъ на томъ основаніи, что

$$\frac{\partial\left(z' + z_{,}\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial \beta} = \frac{\partial\left(z_{,}\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)}{\partial x}.$$

или

$$\frac{\partial z'}{\partial \beta} + \frac{\partial z_{,}}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial x} + z_{,}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \beta} = \frac{\partial z_{,}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \beta} + z_{,}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \beta},$$

откуда

$$\frac{\partial z'}{\partial \beta} = \frac{\partial z_{,}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial z_{,}}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Приложимъ этотъ способъ интегрированія къ слѣдующему частному примѣру:

$$(z_{,} + yz_{,,})(z'' + 1) = (yz_{,}' - z' - x)z_{,}'.$$

Первыя два уравненія системы (A), въ которой перемѣнимъ знакъ предъ $\sqrt{G}$ въ противоположный, примутъ видъ

$$z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}+y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}=0,\quad z_{,}\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+(z'+x)\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}+z_{,}=0.$$

Интегрируя первое изъ этихъ уравненій, получимъ

$$z_{,}y=\alpha;$$

исключивъ изъ нихъ $\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}$, получимъ интегрируемую комбинацію

$$y\left(\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+1\right)-(z'+x)\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=0,$$

откуда

$$\frac{z'+x}{y}=\varphi(\alpha).$$

Принявъ независимыми перемѣнными x и β и дифференцируя въ этомъ предположеніи уравненія:

(1) $$z_{,}y=\alpha \quad \text{и} \quad z'+x=y\varphi(\alpha),$$ (2)

получимъ:

(3) $$z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}=\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta},\qquad \frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+1=\varphi(\alpha)\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+y\varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta}.$$ (4)

Къ этимъ четыремъ уравненіямъ должно еще присоединить систему (B), которая, по измѣненіи знака предъ $\sqrt{G}$ въ противоположный, будетъ

$$z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}-(z'+x)=0,$$ (5)

(6) $$\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+1=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x(\beta}=z'+z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.$$ (7)

Уравненіе (4) вслѣдствіе (6) приметъ видъ

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}+\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta}=0,\quad \text{откуда}\quad y\varphi(\alpha)=\beta.$$ (8)

Уравненіе (5) вслѣдствіе (3), (2) и (8) приметъ видъ

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x(\beta}=y\varphi(\alpha)=\beta,\quad \text{откуда}\quad \alpha=\beta x+\psi(\beta).$$

Уравненіе (7) вслѣдствіе (2), (8) и (1) напишется такъ

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta}=\beta-x+\frac{\alpha}{\beta}\varphi(\alpha)\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.$$

Но изъ (8) имѣемъ

$$\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=-\frac{\beta\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x(\beta};$$

слѣдовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta}=\beta-x-\alpha\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\frac{\partial\alpha}{\partial x(\beta}.$$

Поэтому, интегрируя и означивъ черезъ l неперовъ логариемъ при основаніи e, получимъ

$$z=\left(\beta-\frac{x}{2}\right)x-\alpha l\varphi(\alpha)+\int l\varphi(\alpha)d\alpha+\chi(\beta).$$

Положивъ же $l\varphi(\alpha)=\Phi'(\alpha)$, можемъ три уравненія, доставленныя интегрированіемъ, написать слѣдующимъ образомъ.

$$z=\left(\beta-\frac{x}{2}\right)x+\Phi(\alpha)-\alpha\Phi'(\alpha)+\chi(\beta),$$

$$y=\beta e^{-\Phi'(\alpha)},\quad \alpha=\beta x+\psi(\beta).$$

Для исключенія излишней произвольной функціи должно удовлетворить уравненію

$$\frac{\partial z}{\partial\beta(x}=z_{,}\frac{\partial y}{\partial\beta(x}.$$

Для этого находимъ:

$$\frac{\partial z}{\partial\beta(x}=x-\alpha\Phi''(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial\beta(x}+\chi'(\beta),\quad z_{,}=\frac{\alpha}{y}=\frac{\alpha}{\beta}e^{\Phi'(\alpha)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial\beta(x}=e^{-\Phi'(\alpha)}\left[1-\beta\Phi''(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial\beta(x}\right],\quad x=\frac{\alpha-\psi(\beta)}{\beta}.$$

Вставивъ эти значенія въ предыдущее уравененіе, получимъ слѣдующую зависимость между функціями ψ и χ:

$$\psi(\beta)=\beta\chi'(\beta).$$

Слѣдовательно, общій первообразный интегралъ даннаго уравненія, по исключеніи α, можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$z=\left(\beta-\frac{x}{2}\right)x+\Phi[\beta(x+\chi'(\beta))]-$$
$$-[\beta(x+\chi'(\beta))]\Phi'[\beta(x+\chi'(\beta))]+\chi(\beta),\ \ y=\beta e^{-\Phi'[\beta(x+\chi,(\beta))]}.$$

Общій первообразный интегралъ можно получить въ болѣе простомъ видѣ, представивъ интегралы системы (A) такимъ образомъ:

$$(1') \qquad yz_{,}=\varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad z'+x=y\alpha. \qquad (2')$$

Считая независимыми перемѣнными x и β и дифференцируя предыдущія уравненія по x, получимъ:

$$(3')\quad y\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}+z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=\varphi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta},\quad \frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+1=y\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta}+\alpha\frac{\partial y}{\partial x(\beta}\quad (4')$$

Изъ уравненій (4') (6) находимъ $\alpha y=\beta$ (8'). Уравненіе (5) вслѣдствіе (3'), (2') и (8') напишется $\varphi'(\alpha)\dfrac{\partial \alpha}{\partial x(\beta}=\beta$ и по интегрированіи дастъ $\varphi(\alpha)=\beta x+\psi(\beta)$.

Наконецъ (7), вслѣдствіе (2'), (8') и (1'), приметъ видъ

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta}=\beta-x+\frac{\alpha}{\beta}\varphi(\alpha)\frac{\partial y}{\partial x(\beta}.$$

Но изъ (8'):

$$\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=-\frac{\beta}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta},$$

поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x(\beta}=\beta-x-\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x(\beta};$$

слѣдовательно, положивъ $\varphi(\alpha)=\alpha\Phi'(\alpha)$, будемъ имѣть

$$z=\left(\beta-\frac{x}{2}\right)x-\Phi(\alpha)+\chi(\beta),\quad y=\frac{\beta}{\alpha},$$
$$\alpha\Phi'(\alpha)=\beta x+\psi(\beta),\quad z_{,}=\frac{\alpha^2\Phi'(\alpha)}{\beta}.$$

Нетрудно повѣрить, что предыдущими значеніями y, z, $z_{\prime}$ удовлетворимъ также уравненію

$$\frac{\partial z}{\partial \beta(x} = z_{\prime} \frac{\partial y}{\partial \beta(x},$$

если, подобно тому какъ въ предыдущемъ случаѣ, положимъ

$$\psi(\beta) = \beta\chi'(\beta)$$

Слѣдовательно, по исключеніи α, общій первообразный интегралъ представится двумѣ слѣдующими уравненіями:

$$z = \left(\beta - \frac{x}{2}\right)x - \Phi\left(\frac{\beta}{y}\right) + \chi(\beta),$$

$$0 = x - \frac{1}{y}\Phi'\left(\frac{\beta}{y}\right) + \chi'(\beta),$$

изъ которыхъ второе получается частнымъ дифференцированіемъ перваго въ отношеніи β.

Нетрудно убѣдиться, что въ этомъ послѣднемъ видѣ общій интегралъ получится также весьма просто и по способу Монжа.

Изъ предыдущаго очерка видно, что способъ Ампера, дѣйствительно, составляетъ только видоизмѣненіе способа Монжа. Въ первомъ, точно такъ же какъ и во второмъ, начинаемъ опредѣленіемъ, напримѣръ помощію системы (A), общаго интеграла перваго порядка уравненія (1); но вмѣсто того чтобы, слѣдуя Монжу, разсматривать этотъ интегралъ какъ уравненіе съ частными производными перваго порядка и для интегрированія его составлять вспомагательную систему совмѣстныхъ уравненій Лангранжа, Амперъ пользуется прямо уравненіями (B), которыя, какъ доказано, должны заключаться въ Лангранжевой системѣ. Именно въ этомъ пріемѣ заключается преимущество способа Ампера. Но такимъ образомъ мы не освобождаемся отъ произвольной функціи общаго интеграла перваго порядка, неизбѣжно появляющейся въ трехъ совмѣстныхъ обыкновенныхъ диференціальныхъ уравненіяхъ, къ интегрированію которыхъ окончательно приводится вопросъ. Кромѣ того въ интегралахъ этихъ уравненій являются *три* произвольныхъ функцій, изъ которыхъ одна должна быть исключена помощію одного изъ уравненій:

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = z_{\prime} \frac{\partial y}{\partial \beta} \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial z_{\prime}}{\partial \beta} \frac{\partial y}{\partial x},$$

что составляетъ усложненіе задачи, не встрѣчающееся въ способѣ Монжа.

Въ слѣдующей главѣ мы изложимъ способъ, устраняющій присутствіе произвольныхъ функцій въ интегрируемыхъ уравненіяхъ первоначальной задачи; ибо, даже въ тѣхъ случаяхъ, когда уравненіе (1) не допускаетъ общихъ интеграловъ перваго порядка, слѣдуя этому способу, можно вмѣсто нихъ пользоваться частными интегралами, въ которые произвольныя функціи не входятъ.

ГЛАВА IV.

Способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

§ 18.

Если уравненіе

$$Hz''+2Kz_{,}'+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z_{,}'^{2})=0 \tag{1}$$

не имѣетъ общихъ интеграловъ перваго порядка, то способы интегрированія его, основанные, подобно способу *Монжа*, на предположеніи ихъ существованія, оказываются непримѣнимыми. *Лагранжъ* пытался основать теорію интегрированія уравненій, заключающихся въ общемъ видѣ (1), на опредѣленіи ихъ частныхъ интеграловъ *полныхъ*, т.-е. содержащихъ пять произвольныхъ постоянныхъ, и примѣненіи къ нимъ изобрѣтеннаго имъ способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ; но такимъ образомъ получаются условія, выполненіе которыхъ вообще такъ трудно, что онъ самъ призналъ этотъ пріёмъ болѣе любопытнымъ, чѣмъ полезнымъ. *Амперъ*[1]) гораздо удачнѣе приложилъ способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ къ частнымъ интеграламъ перваго порядка, получаемымъ изъ системъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} H\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}+N\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}-K-\sqrt{G}&=0\\ H\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+(K-\sqrt{G})\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}+M&=0\\ \frac{\partial z}{\partial x(\alpha}-z'-z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

$$\left.\begin{aligned} H\frac{\partial y}{\partial y(\beta}+N\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}-K+\sqrt{G}&=0\\ H\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+(K+\sqrt{G})\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}+M&=0\\ \frac{\partial z}{\partial x(\beta}-z_{,}-z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

---

[1]) Jour. de l'Ec. Pol. XVIII Cahier § IV.

когда каждая, или по крайней мѣрѣ одна изъ нихъ, допускаетъ только одну интегрируемую комбинацію и когда, слѣдовательно, невозможно получить общаго интеграла перваго порядка для уравненія (1). Пока *Амперъ* не обратилъ вниманія на упомянутые частные интегралы, ими вовсе не умѣли пользоваться для вывода общаго первообразнаго интеграла уравненія (1).

Однако, нельзя не замѣтить, что теорія, основанная *Амперомъ* на этой оригинальной и прекрасной мысли, не отличается простотою и что даже тотъ путь, который онъ избралъ, могъ бы быть во многихъ отношеніяхъ упрощенъ и прямѣе вести къ цѣли. Кромѣ того, «случаи», какъ справедливо замѣтилъ *Буръ*, «когда уравненія характеристикъ (т.-е. уравненія (A) и (B)) не допускаютъ интегрируемыхъ комбинацій ускользали отъ всякаго опыта общей теоріи» [1]). Судя по нѣкоторымъ мѣстамъ статьи *Бура*, изъ которой приведено предыдущее замѣчаніе и гдѣ онъ изложилъ нѣсколько отрывочныхъ соображеній объ интегрированіи уравненій съ частными производными второго порядка, можно заключить, что онъ считалъ возможнымъ возвратиться къ пріему *Лагранжа*, не смотря на представляемыя имъ затрудненія. «Я имѣлъ счастіе доказать», говоритъ онъ въ заключеніе своей статьи, «что эти затрудненія не всегда непреодолимы и что прекрасный способъ *Лагранжа*, такъ хорошо освѣтившій всѣ вопросы, относящіеся къ уравненіямъ перваго порядка, не сказалъ еще своего послѣдняго слова въ теоріи, гораздо болѣе трудной, уравненій съ частными производными второго порядка» [2]).

Внимательное изученіе способовъ *Лагранжа* и *Ампера* привело меня къ убѣжденію о возможности примѣнить теорію измѣненія произвольныхъ постоянныхъ къ частнымъ интеграламъ уравненія (1) въ видѣ болѣе простомъ и общемъ, чѣмъ тотъ, въ которомъ представилъ свой способъ *Амперъ*.

---

[1]) Jour. de l'Ec. Pol. 39 Cahier. p. 189.

[2]) Тамъ же, стр. 191.

Основываясь только на предположеніи существованія частныхъ первообразныхъ интеграловъ уравненія (1) съ тремя произвольными постоянными, я получилъ общія формулы для вывода общаго интеграла уравненія (1) посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ частнаго интеграла. Общность основного предположенія позволяетъ примѣнять эти формулы не только въ случаѣ, упомянутомъ выше, которымъ исключительно занимался Амперъ, но и тогда, когда уравненія (A) и (B) вовсе не допускаютъ интегрируемыхъ комбинацій, или когда, напротивъ, эти двѣ системы уравненій допускаютъ болѣе одной интегрируемой комбинаціи. Такимъ образомъ мы имѣемъ способъ, обнимающій всѣ случаи интегрированія уравненія (1), различающіеся числомъ интеграловъ возможныхъ для уравненій (A) и (B), которое можетъ измѣняться отъ трехъ до нуля включительно. Наши общія формулы, разсматриваемыя съ другой точки зрѣнія, даютъ неограниченное число способовъ для такихъ преобразованій уравненія (1), вслѣдствіе которыхъ оно или сохранитъ свой первоначальный типъ, или значительно упрощается, обращаясь въ линейное относительно частныхъ производныхъ второго порядка.

Приступая теперь къ изложенію способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, мы прежде всего займемся рѣшеніемъ слѣдующаго важнаго вопроса: *какимъ образомъ возможно получить общій первообразный интегралъ уравненія (1), зная какой-либо частный интегралъ его, заключающій три произвольныхъ постоянныхъ?*

Понятно, что въ удачномъ рѣшеніи этого вопроса должна заключаться вся теорія разсматриваемаго способа интегрированія.

Пусть частный первообразный интегралъ уравненія (1), съ тремя произвольными постоянными α, γ, η, будетъ

$$z=\omega(x,\ y,\ \alpha,\ \gamma,\ \eta); \tag{2}$$

дифференцируя его въ отношеніи x и y, получимъ выраженія пяти частныхъ производныхъ перваго и второго порядка отъ функціи z, которыя можемъ представить такимъ образомъ:

$$z'=\omega',\quad z_{,}=\omega_{,},\quad z''=\omega'',\quad z_{,}'=\omega_{,}',\quad z_{,,}=\omega_{,,};$$

подстановкою этихъ выраженій и даннаго значенія z первая часть уравненія (1) должна, по условію, тождественно приводиться къ нулю, при какихъ бы ни было значеніяхъ количествъ α, γ, η.

Положимъ теперь, что одно изъ нихъ, напр. η, представляетъ пока неопредѣленную функцію отъ α и γ и пусть α и γ опредѣляются, какъ функціи отъ x и y, посредствомъ уравненій:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial\gamma}+\frac{\partial\omega}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}=0,$$

которыя получимъ, уравнявъ порознь нулю частныя производныя отъ ω въ отношеніи α и γ. Мы можемъ написать предыдущія уравненія короче такимъ образомъ:

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial.\omega}{\partial\gamma}=0, \tag{3}$$

условившись, что точка послѣ знака ∂ требуетъ дифференцированія въ отношеніи α и γ не только входящихъ явно, но и посредствомъ другихъ количествъ, какъ въ настоящемъ случаѣ η.

Изслѣдуемъ, при какихъ условіяхъ три уравненія (2) и (3) могутъ представлять интегралъ (1). Для этого найдемъ снова выраженія частныхъ производныхъ отъ z, принявъ во вниманіе сдѣланныя предположенія относительно α, γ и η.

На основаніи уравненій (3) выраженія производныхъ перваго порядка сохранятъ прежній видъ:

$$z'=\omega',\quad z_{,}=\omega_{,};$$

выраженія же производныхъ второго порядка измѣнятся и будутъ слѣдующія:

$$z''=\omega''+\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x},\quad z_{,,}=\omega_{,,}+\frac{\partial\,.\,\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\,.\,\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y},$$

$$z_{,}'=\omega_{,}'+\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\omega_{,}'+\frac{\partial\,.\,\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\,.\,\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x},$$

или

$$z''=\omega''+h,\quad z_{,}'=\omega_{,}'+k=\omega_{,}'+k',\quad z_{,,}=\omega_{,,}+l,$$

если для краткости положимъ:

$$h=\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x},\quad k=\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y},$$

$$k'=\frac{\partial\,.\,\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\,.\,\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x},\quad l=\frac{\partial\,.\,\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\,.\,\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y}.$$

Предыдущимъ выраженіямъ h, k, k', l можно дать другой видъ, опредѣливъ значенія $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial x}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial y}$, при чемъ самособою обнаружится равенство $k=k'$.

Для этого дифференцируя въ отношеніи x первое изъ уравненій (3), находимъ

$$\frac{\partial\frac{\partial\,.\,\omega}{\partial\alpha}}{\partial x}+\frac{\partial\,.\,\frac{\partial\,.\,\omega}{\partial\alpha}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\,.\,\frac{\partial\,.\,\omega}{\partial\alpha}}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0;$$

но въ первомъ членѣ первой части этого уравненія дифференцированія въ отношеніи x и α производятся такъ же, какъ въ отношеніи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, поэтому

$$\frac{\partial\frac{\partial\,.\omega}{\partial\alpha}}{\partial x}=\frac{\partial\,.\,\frac{\partial\omega}{\partial x}}{\partial\alpha}=\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}$$

и, слѣдовательно, предыдущее уравненіе приметъ видъ

$$\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0.$$

Подобнымъ образомъ, дифференцируя въ отношенiи x второе изъ уравненiй (3), будемъ имѣть

$$\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0.$$

А дифференцируя оба уравненiя (3) въ отношенiи y, получимъ:

$$\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\gamma}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{\partial\gamma}{\partial y}=0.$$

Изъ четырехъ предыдущихъ уравненiй выводимъ

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{1}{D}\left[\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}-\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}\right],$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{1}{D}\left[\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}-\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\right],$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{1}{D}\left[\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\gamma}-\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\right],$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{1}{D}\left[\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\gamma}\right],$$

гдѣ

$$D=\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\gamma^2}-\left(\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\right)^2,$$

и подстановкою этихъ значенiй частныхъ производныхъ отъ α и γ въ выраженiя h, k, k', l дадимъ этимъ послѣднимъ слѣдующiй видъ:

$$h=\frac{-1}{D}\left[\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\right)^2-2\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\gamma^2}\left(\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}\right)^2\right],$$

$$k=k'=\frac{-1}{D}\left[\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\gamma}-\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\left(\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\gamma}+\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{\partial\,.\,\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\right],$$

$$l=\frac{-1}{D}\left[\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\gamma}\right)^2-2\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\gamma}+\frac{\partial\,.^2\omega}{\partial\gamma^2}\left(\frac{\partial\,.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\right)^2\right].$$

Сверхъ того, простымъ алгебраическимъ вычисленiемъ легко повѣрить, что, вычитая квадратъ второго изъ предыдущихъ равенствъ изъ произведенія перваго и третьяго, получимъ слѣдующій простой выводъ:

$$hl-k^2=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma}-\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2.$$

Теперь нетрудно будетъ найти условіе, при которомъ уравненія (2) и (3) представляютъ интегралъ (1). Означивъ для краткости первую часть уравненія (1) такимъ образомъ

$$F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,},\ z'',\ z_{,}',\ z_{,,}),$$

мы вставимъ въ нее значенія:

$$z=\omega,\quad z'=\omega',\quad z_{,}=\omega_{,},\quad z''=\omega''+h,\quad z_{,}'=\omega_{,}'+k,\quad z_{,,}=\omega_{,,}+l,$$

выведенныя изъ уравненій (2) и (3). Затѣмъ, уравнявъ нулю сумму несокращающихся членовъ, мы получимъ искомое условіе.

Результатъ подстановки по формлѣ Тейлора можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$F(x,\ y,\ \omega,\ \omega',\ \omega_{,},\ \omega''+h,\ \omega_{,}'+k,\ \omega_{,,}+l)=F(x,\ y,\ \omega,\ \omega',\ \omega_{,},\ \omega'',\ \omega_{,}',\ \omega_{,,})$$
$$+\frac{\partial F}{\partial\omega''}h+\frac{\partial F}{\partial\omega_{,}'}k+\frac{\partial F}{\partial\omega_{,,}}l+\frac{1}{2}\frac{\partial^2F}{\partial\omega_{,}'^2}k^2+\frac{\partial^2F}{\partial\omega''\partial\omega_{,,}}hl.$$

Первый членъ второй части послѣдняго равенства приводится къ нулю въ силу условія, что подстановка значеній:

$$z=\omega,\quad z'=\omega',\quad z_{,}=\omega_{,},\quad z''=\omega'',\quad z_{,}'=\omega_{,}',\quad z_{,,}=\omega_{,,}$$

должна удовлетворять уравненію (1) при какихъ бы ни было значеніяхъ α, γ и η. Далѣе находимъ

$$\frac{\partial F}{\partial\omega''}=H+N\omega_{,,},\quad \frac{\partial F}{\partial\omega_{,}'}=2(K-N\omega_{,}'),\quad \frac{\partial F}{\partial\omega_{,,}}=L+N\omega'',$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2F}{\partial\omega_{,}'^2}=\frac{\partial^2F}{\partial\omega''\partial\omega_{,,}}=N;$$

поэтому $F(x,\ y,\ \omega,\ \omega',\ \omega_{,},\ \omega''+h,\ \omega_{,}'+k,\ \omega_{,,}+l)=$

$$=(H+N\omega_{,,})\,h+2(K-N\omega_{,}')\,k+(L+N\omega'')\,l+N(hl-k^2).$$

Отсюда заключаемъ, что уравненія (2) и (3) могутъ представлять интегралъ (1)-го только въ такомъ случаѣ, когда функція η перемѣнныхъ α и γ будетъ опредѣлена такъ, что приведетъ къ нулю вторую часть предыдущаго равенства. Вставивъ въ нее данныя выше значенія h, k, l и $hl-k^2$, уравнявъ нулю результатъ подстановки и отбросивъ общій дѣлитель D, мы получимъ уравненіе вида

$$R\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}+2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}+T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}+U=0, \tag{4}$$

гдѣ для краткости полагаемъ:

$$\left.\begin{aligned}
-R=(H+N\omega_{,,})\left(\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\right)^2+\\
+2(K-N\omega_,')\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial.\omega_,}{\partial\gamma}+(L+N\omega'')\left(\frac{\partial.\omega_,}{\partial\gamma}\right)^2,\\
S=(H+N\omega_{,,})\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}+\\
+(K-N\omega_,')\left(\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial.\omega_,}{\partial\gamma}+\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial.\omega_,}{\partial\alpha}\right)+(L+N\omega'')\frac{\partial.\omega_,}{\partial\alpha}\frac{\partial.\omega_,}{\partial\gamma},\\
-T=(H+N\omega_{,,})\left(\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\right)^2+\\
+2(K-N\omega_,')\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial.\omega_,}{\partial\alpha}+(L+N\omega'')\left(\frac{\partial.\omega_,}{\partial\alpha}\right)^2,\\
U=N\left(\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial.\omega_,}{\partial\gamma}-\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}\right)^2.
\end{aligned}\right\} \quad (5$$

Обративъ вниманіе на составъ уравненія (4), нетрудно убѣдиться, что оно будетъ *линейнымъ* относительно частныхъ производныхъ второго порядка

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma},\ \frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}$$

функціи η и что въ коэффиціенты его окончательно войдутъ только

$$\alpha,\ \gamma,\ \eta,\ \frac{\partial\eta}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\eta}{\partial\gamma}.$$

Дѣйствительно, производныя $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}$ должны исключительно входить: первая только въ $\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}$, вторая только въ $\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}$ и третья только въ $\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}$, и притомъ не иначе, какъ въ первыхъ степеняхъ. Кромѣ того, въ составъ уравненія (4) войдутъ только перемѣнныя количества: α, γ, η, $\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}$, x и y; изъ нихъ два послѣднія можно исключить помощію уравненій (2) и (3).

Такимъ образомъ, способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ даетъ возможность преобразовывать уравненіе (1) *не линейное*, вслѣдствіе присутствія въ немъ количества $z''z_{,,}-z_{,}'^2$, въ *линейное* (4) относительно производныхъ второго порядка искомой функціи; между тѣмъ какъ этой цѣли не достигаютъ преобразованія Лежандра и Ампера, которыя мы привели выше (§ 15 гл. III). Такихъ же преобразованій, какъ эти послѣднія, — т.-е. сохраняющихъ для уравненія (1) послѣ его преобразованія его первоначальный типъ — можно указать безчисленное множество. Для этого стоитъ только предположить въ предыдущемъ доказательствѣ, что значеніе

$$z=\omega(x,\ y,\ \alpha,\ \gamma,\ \eta) \qquad (2)$$

выбрано совершенно произвольно и не представляетъ болѣе частнаго интеграла уравненія (1). Тогда всѣ заключенія предыдущаго вычисленія не измѣнятся, исключая того, что

$$F(x,\ y,\ \omega,\ \omega',\ \omega_{,},\ \omega'',\ \omega_{,}',\ \omega_{,,})=W$$

не будетъ равно нулю. Поэтому, умноживъ окончательное уравненіе на

$$D=\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}-\left(\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2,$$

мы получимъ въ немъ лишній членъ $W.D$ и вмѣсто уравненія (4) будемъ имѣть слѣдующее

$$R\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}+2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}+T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}+W\left[\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}-\left(\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2\right]+U=0.$$

На основаніи сдѣланнаго выше замѣчанія о томъ, какимъ образомъ производныя $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}$ входятъ въ $\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}$, $\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}$, ясно, что D будетъ вида

$$D=a\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial^2\gamma}-\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2\right]+b\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}+c\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}+e\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}+f,$$

гдѣ a, $b,\ldots$ f выражаются посредствомъ α, γ, η, $\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}$. Слѣдовательно, преобразованное уравненіе дѣйствительно сохранитъ общій типъ (1)-го.

§ 19.

Способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ приводитъ задачу интегрированія уравненія (1) къ интегрированію уравненія (4). Значенія коэффиціентовъ этого послѣдняго зависятъ отъ вида частнаго интеграла $z=\omega$ перваго. Слѣдовательно, вся трудность въ примѣненіи разсматриваемаго способа сводится къ выбору между частными интегралами уравненія (1) такого, при которомъ (4) получаетъ одну изъ интегрируемыхъ формъ. Далѣе мы изложимъ общія соображенія, которыми можно руководствоваться при этомъ выборѣ въ извѣстныхъ случаяхъ; теперь же для поясненія общихъ формулъ приложимъ ихъ къ частному примѣру:

$$\frac{ax^2}{y^2}z''+\frac{by^2}{x^2}z_{,,}+(lx+my+nxy)\,.$$
$$.\left[z''z_{,,}-z_,'^2-2\left(\frac{z}{xy}-\frac{z'}{y}-\frac{z_,}{x}\right)z_,'-\left(\frac{z}{xy}-\frac{z'}{y}-\frac{z_,}{x}\right)^2\right]=0,$$

гдѣ a, b, l, m, n означаютъ данныя постоянныя количества.

Испытывая возможность удовлетворить данному уравненію значеніями общаго вида

$$z=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F,$$

безъ затрудненія находимъ частный интегралъ его

$$z=\alpha x+\gamma y-\eta xy=\omega,$$

съ тремя произвольными постоянными α, γ, η. Слѣдовательно, разсматривая η какъ функцію отъ α и γ и присоединивъ къ предъидущему уравненію два слѣдующія:

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}=x(1-y\frac{\partial\eta}{\partial\alpha})=0,$$

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\gamma}=y(1-x\frac{\partial\eta}{\partial\gamma})=0,$$

получимъ общій интегралъ даннаго уравненія, если опредѣлимъ функцію η по условію

$$R\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}+2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}+T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}+U=0.$$

Чтобы получить значенія коэффиціентовъ этого уравненія, вычисляемъ

$$\omega'=\alpha-\eta y,\ \omega_{,}=\gamma-\eta x,\ \omega''=0,\ \omega_{,}'=-\eta,\ \omega_{,,}=0,$$

посредствомъ дифференцированія функціи ω въ отношеніи x и y, какъ перемѣнныхъ, независимыхъ отъ α и γ. Диффенцируя затѣмъ ω' и $\omega_{,}$, въ отношеніи α и γ какъ перемѣнныхъ, независимыхъ отъ x и y, получимъ:

$$\frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}=-y\frac{\partial\eta}{\partial\gamma},\quad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}=-x\frac{\partial\eta}{\partial\alpha},$$

$$\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}=1-y\frac{\partial\eta}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma}=1-x\frac{\partial\eta}{\partial\gamma};$$

вторыя части двухъ послѣднихъ уравненій приводятся къ нулю на основаніи второго и третьяго уравненій общаго интеграла.

Теперь помощію общихъ формулъ (5) предыдущаго § находимъ

$$-R=H\left(\frac{\partial.\,\omega'}{\partial\gamma}\right)^2=ax^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}\right)^2,$$

или, на основаніи третьяго уравненія общаго интеграла,

$$-R=a.$$

Далѣе получимъ

$$S=(K+N\eta)\frac{\partial.\,\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}=0,$$

потому что множитель $K+N\eta$, послѣ исключенія η помощію уравненій интеграла и подстановки значеній коэффиціентовъ K и N изъ даннаго уравненія, обращается въ нуль. Затѣмъ

$$-T=L\left(\frac{\partial.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\right)^2=by^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)^2,$$

или, на основаніи второго уравненія общаго интеграла,

$$-T=b.$$

Наконецъ,

$$U=N\left(\frac{\partial.\,\omega'}{\partial\gamma}\right)^2\left(\frac{\partial.\,\omega_{\prime}}{\partial\alpha}\right)^2=(lx+my+nxy)\,x^2y^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}\right)^2,$$

или, на основаніи второго и третьяго уравненій общаго интеграла,

$$U=(lx+my+nxy).$$

Поэтому уравненіе (4) приведется къ слѣдующему виду

$$a\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}+b\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}-(lx+my+nxy)=0.$$

Теперь, дифференцируя функцію ω дважды въ отношеніи каждаго изъ перемѣнныхъ α и γ, которыя при этомъ должно считать независимыми между собою и отъ перемѣнныхъ x и y, находимъ:

$$\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}=-xy\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2},\quad \frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=-xy\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}.$$

Вставивъ эти значенія въ предыдущее уравненіе и раздѣливъ его на xy, будемъ имѣть

$$a\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}+b\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}+\frac{l}{y}+\frac{m}{x}+n=0.$$

Но изъ второго и третьяго уравненій общаго интеграла имѣемъ

$$\frac{1}{x}=\frac{\partial\eta}{\partial\gamma},\quad \frac{1}{y}=\frac{\partial\eta}{\partial\alpha};$$

слѣдовательно, для опредѣленія функціи η окончательно получимъ линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами:

$$a\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}+b\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}+l\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}+m\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}+n=0,$$

общій интегралъ котораго всегда можно получить или въ конечномъ видѣ, или посредствомъ опредѣленныхъ интеграловъ, по способу *Лапласа*[1]). Предполагая поэтому функцію η извѣстною, мы можемъ выразить посредствомъ ея и ея частныхъ производныхъ общій интегралъ предложеннаго уравненія слѣдующимъ образомъ:

$$z=\frac{\alpha}{\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}}+\frac{\gamma}{\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}}-\frac{\eta}{\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}},\quad y=\frac{1}{\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}},\quad x=\frac{1}{\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}}.$$

§ 20.

Какъ уже замѣчено выше, *Амперъ* сдѣлалъ важное усовершенствованіе въ теоріи интегрированія уравненія (1), открывъ возможность приложить способъ измѣненія произвольныхъ

[1]) Hist. de l'Ac. des Sc. année 1779. Mémoire sur les suites. Par M. de la Place.

постоянныхъ къ частнымъ интеграламъ его, получаемымъ помощію уравненій (A) и (B), когда каждая изъ этихъ двухъ системъ допускаетъ только по одной интегрируемой комбинаціи. Но, построивъ свою теорію на этой вѣрной, но не довольно общей идеѣ, онъ не замѣтилъ, *во-первыхъ*, что тотъ же способъ можетъ примѣняться къ частнымъ интеграламъ уравненія (1), полученнымъ помощію системъ (A) и (B), когда каждая изъ нихъ допускаетъ *болѣе* одной интегрируемой комбинаціи, и вообще — ко всякому частному интегралу уравненія (1) съ тремя произвольными постоянными, какимъ бы путемъ онъ ни былъ полученъ. *Во-вторыхъ*, общія формулы *Ампера* имѣютъ тотъ важный недостатокъ, что не позволяютъ въ одно время пользоваться интегралами системъ (A) и (B) наивыгоднѣйшимъ образомъ. *Въ-третьихъ*, даже примѣненіе формулъ *Ампера* могло бы быть упрощено употребленіемъ извѣстнаго способа *Лагранжа* и *Шарпи* для интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка, встрѣчающихся въ этой теоріи, вмѣсто способа, предложеннаго самимъ *Амперомъ*.

Предыдущія положенія мы постараемся доказать въ этомъ и слѣдующихъ §§; но предварительно изслѣдуемъ, какую особенную выгоду представляетъ приложеніе способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ къ частнымъ интеграламъ, получаемымъ помощію системъ уравненій (A) и (B).

Положимъ, что уравненія (A) допускаютъ интегрируемую комбинацію, которой интегралъ представимъ такимъ образомъ

$$f(x,\ y,\ z,\ z',\ z_,)=\alpha;$$

въ отношеніи уравненія (1) онъ будетъ *частнымъ интеграломъ перваго порядка*. Но разсматривая его какъ уравненіе съ частными производными перваго порядка, мы можемъ опредѣлить, по способу *Лагранжа* и *Шарпи*, полный интегралъ этого уравненія,

$$z=\varpi(x,\ y,\ \alpha,\ \gamma,\ \eta),$$

заключающій кромѣ α еще два произвольныхъ постоянныхъ γ, η и который въ отношеніи уравненія (1) будетъ *частнымъ перво-*

образнымъ интеграломъ. Прилагая къ нему способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, мы должны разсматривать η какъ функцію α и γ и для опредѣленія ея получимъ уравненіе съ частными производными второго порядка:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}.$$

Количество α представляетъ, какъ извѣстно, одинъ изъ аргументовъ двухъ произвольныхъ функцій общаго интеграла уравненія (1), а этотъ послѣдній долженъ выражаться посредствомъ функціи η и заключающихся въ ней произвольныхъ функцій. Слѣдовательно, *одна изъ произвольныхъ функцій, входящихъ въ общій интегралъ, представляющій значеніе η, должна также имѣть аргументомъ α.* Но въ такомъ случаѣ уравненіе, опредѣляющее функцію η, не должно содержать производной $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$, какъ было доказано въ теоріи интеграловъ уравненій съ частными производными второго порядка (гл. I. § 6). Производная же $\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2}$ исключительно и необходимо должна входить въ уравненіе (4) посредствомъ выраженія $\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}$; слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ необходимо будетъ $R=0$.

Если мы воспользуемся интеграломъ

$$F(x, y, z, z', z_{,})=\beta,$$

выведеннымъ посредствомъ интегрируемой комбинаціи уравненій (B), и, получивъ полный интегралъ этого уравненія

$$z=\omega(x, y, \beta, \gamma, \eta),$$

приложимъ къ нему способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ; то, принимая η за функцію β и γ, для опредѣленія ея получимъ уравненіе по формулѣ (4), гдѣ должно только писать β вмѣсто γ и γ вмѣсто α. На томъ же основаніи, какъ

25*

въ предыдущемъ случаѣ, заключаемъ, что теперь необходимо должно быть $T=0$.

Если мы можемъ располагать интегрируемыми комбинаціями уравненій (A) и (B), интегралы которыхъ пусть будутъ соотвѣтственно

$$f(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\alpha \quad \text{и} \quad F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\beta,$$

то первыя части этихъ уравненій, удовлетворяя, какъ извѣстно (гл. III § 16), условію интегрируемости

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)z'\,\dfrac{\partial F}{\partial z'}-\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)z'\,\dfrac{\partial f}{\partial z'} \\ +\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)z_{,}\,\dfrac{\partial F}{\partial z_{,}}-\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)z_{,}\,\dfrac{\partial f}{\partial z_{,}} \end{array}\right\}=0,$$

доставятъ значенія z' и $z_{,}$, по вставкѣ которыхъ получимъ уравненіе

$$dz=z'dx+z_{,}dy,$$

интегрируемое непосредственно, или по умноженіи на множителя интегрируемости. Результатомъ этого интегрированія будетъ значеніе

$$z=\omega(x,\ y,\ \alpha,\ \beta,\ \eta),$$

представляющее частный интегралъ уравненія (1). Разсматривая η какъ функцію отъ α и β и прилагая способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ къ предыдущему интегралу, получимъ для опредѣленія функціи η уравненіе по формулѣ (4), въ которой должно писать β вмѣсто γ. Общій интегралъ, представляющій значеніе z, выразится посредствомъ общаго интеграла, представляющаго значеніе η и заключающихся въ послѣднемъ двухъ произвольныхъ функцій. Но аргументами произвольныхъ функцій перваго интеграла должны быть α и β; слѣдовательно, α и β будутъ также аргументами произвольныхъ функцій второго интеграла. Поэтому въ уравненія (4) въ настоящемъ случаѣ не могутъ заключаться (гл. I § 6) частныя производныя второго порядка

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2} \text{ и } \frac{\partial^2\eta}{\partial\beta^2},$$

откуда необходимо слѣдуетъ, что $R=0$ и $T=0$.

Наконецъ, если въ уравненіи (1) имѣемъ

$$G=K^2-HL+MN=0,$$

то, какъ извѣстно, системы уравненій (A) и (B) потеряютъ различіе и аргументы α и β будутъ равны. Имѣя въ этомъ случаѣ интегрируемую комбинацію уравненій (A), которой интегралъ, положимъ, будетъ

$$f(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{\prime})=\alpha,$$

и интегрируя это уравненіе съ частными производными перваго порядка, получимъ полный его интегралъ

$$z=\omega(x,\ y,\ \alpha,\ \gamma,\ \eta),$$

который въ отношеніи уравненія (1) будетъ частнымъ первообразнымъ интеграломъ. Разсматривая η какъ функцію α и γ и приложивъ къ предыдущему интегралу способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, получимъ для опредѣленія η уравненіе по общей формулѣ (4). Общій интегралъ, представляющій значеніе z, долженъ выразиться посредствомъ общаго интеграла, представляющаго значеніе η и произвольныхъ функцій, заключающихся въ послѣднемъ. Но аргументы произвольныхъ функцій перваго интеграла должны быть равны α; слѣдовательно, α должно быть общимъ аргументомъ произвольныхъ функцій второго интеграла. Поэтому (гл. I, § 6) уравненіе (4) въ настоящемъ случаѣ не можетъ содержать производныхъ второго порядка

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha^2} \text{ и } \frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma},$$

а отсюда необходимо слѣдуетъ, что $R=0$ и $S=0$.

Итакъ, выгода примѣненія способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ къ частнымъ интеграламъ уравненія (1), получаемымъ помощію уравненій (A) и (B), заключается въ томъ, что общее уравненіе

$$R\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha^2}+2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}+U=0,$$

къ которому окончательно приводится задача интегрированія уравненія (1), принимаетъ въ четырехъ выше разсмотрѣнныхъ случаяхъ соотвѣтственно слѣдующія упрощенныя формы:

$$2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}+U=0,$$

$$2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\beta\,\partial\gamma}+R\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}+U=0,$$

$$2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}+U=0,$$

$$T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}+U=0.$$

Если въ уравненіи (1) $N=0$, — случай, которымъ *Амперъ* ограничилъ свою теорію[1]), то, на основаніи послѣдней изъ фор-

[1]) Приведемъ то мѣсто изъ мемуара Ампера, гдѣ говорится объ упомянутомъ ограниченіи: «Я приложу употребляемый мною способъ къ уравненію

$$Hr+2Ks+Lt+M=0;$$

этотъ способъ можетъ также быть примѣненъ, съ нѣкоторыми измѣненіями, къ уравненію

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0$$

и служить для приведенія его къ одной изъ двухъ формъ:

$$t=f(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \quad \text{и} \quad s=f(x,\ y,\ z,\ p,\ q),$$

смотря по тому, будетъ ли количество $K^2-HL+MN$ нулемъ или нѣтъ; но чтобы упростить изложеніе этого способа и относящихся къ нему доказательствъ, я счелъ нужнымъ ограничиться формулой

$$Hr+2Ks+Lt+M=0,$$

гдѣ производныя второго порядка находятся только въ первыхъ степеняхъ (Journ. de l'Ec. Pol. XVIII Cahier p. 106).

мулъ (5) предыдущаго §, будетъ $U=0$, и окончательныя уравненія примутъ еще болѣе простой видъ:

$$2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=0,$$

$$2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\beta\,\partial\gamma}+R\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=0,$$

$$S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,$$

$$T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=0.$$

Два послѣднія уравненія представляютъ наипростѣйшія изъ формъ, возможныхъ для уравненія (4). *Амперъ* посредствомъ своего способа легко получаетъ форму, представляемую послѣднимъ уравненіемъ для случая, когда имѣетъ мѣсто равенство $G=0$. Но гораздо труднѣе получить по этому способу форму, представляемую предпослѣднимъ уравненіемъ въ общемъ случаѣ, когда G не равно нулю и системы (A) и (B) доставляютъ каждая интегрируемыя комбинаціи, которыхъ интегралы мы выше представляли такимъ образомъ:

$$f(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\alpha \quad \text{и} \quad F(x,\ y,\ z,\ z',\ z_{,})=\beta.$$

Затрудненіе происходитъ отъ того, что *Амперъ*, прилагая свой способъ только къ первому изъ двухъ предыдущихъ интеграловъ, приводитъ такимъ образомъ задачу къ интегрированію уравненія вида

$$2S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=0;$$

потомъ съ этимъ уравненіемъ должно поступить такъ же, какъ съ даннымъ (1), и доказывать, что новое преобразованное уравненіе будетъ вида

$$S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0.$$

Между тѣмъ, употребляя предложенный выше пріемъ, мы сразу приводимъ задачу къ интегрированію уравненія вида предыдущаго.

Замѣтимъ еще, что первыя части каждаго изъ уравненій

$$S\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0 \quad \text{и} \quad T\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=0$$

состоятъ изъ двухъ множителей, изъ которыхъ вообще каждый можетъ быть отдѣльно приведенъ къ нулю. Но общій интегралъ, представляющій значеніе η, можно получить только изъ вторыхъ множителей, потому что только въ нихъ заключаются производныя второго порядка этой функціи. Первые же множители S и T могутъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ, доставить развѣ только частные интегралы съ одною произвольной функціей, потому что въ нихъ входятъ только производныя перваго порядка отъ η. Вообще же эти множители можно отбрасывать.

Итакъ, если $G=0$ и изъ уравненій (A) и (B) получимъ частный интегралъ уравненія (1) вида

$$z=\omega(x,\ y,\ \alpha,\ \gamma,\ \eta),$$

то будемъ имѣть общій его интегралъ, присоединивъ къ предъидущему три слѣдующія уравненія:

$$\frac{\partial.\,\omega}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial.\,\omega}{\partial\gamma}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=0,$$

изъ которыхъ послѣднее послужитъ для опредѣленія η какъ функціи отъ α и γ.

Если G не равно нулю и помощію уравненій (A) и (B) мы получимъ частный интегралъ (1)

$$z=\omega(x,\ y,\ \alpha,\ \beta,\ \eta),$$

то найдемъ общій его интегралъ, присоединивъ къ предыдущему три слѣдующія уравненія:

$$\frac{\partial.\,\omega}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial.\,\omega}{\partial\beta}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0;$$

послѣднее должно служить для опредѣленія функціи η отъ α и β.

§ 21.

Для примѣненія полученныхъ выше теоретическихъ выводовъ мы возьмемъ сначала тѣ примѣры, которые привелъ Амперъ для приложенія своего способа. Такимъ образомъ мы увидимъ, что во всѣхъ случаяхъ приложенія способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ можно пользоваться одними и тѣми же формулами (5), которыя при томъ доставятъ выводы Ампера болѣе прямымъ путемъ. Но предварительно приведемъ эти общія формулы къ виду болѣе удобному для примѣненій. Для этого замѣтимъ, что выраженія R и T можно разложить на множителей, такъ какъ каждое изъ нихъ представляетъ однородную функцію второй степени. Съ этой цѣлью, разрѣшая квадратное уравненіе:

$$m^2+\frac{2(K-N\omega_,')}{H+N\omega_{,,}}m+\frac{L+N\omega''}{H+N\omega_{,,}}=0,$$

находимъ

$$m+\frac{-K+N\omega_,'\pm\sqrt{(K-N\omega_,')^2-(H+N\omega_{,,})(L+N\omega'')}}{H+N\omega_{,,}}.$$

Но означивъ количество, входящее подъ знакомъ корня, черезъ P, имѣемъ

$$P=K^2-HL-N[H\omega''+2K\omega_,'+L\omega_{,,}+N(\omega''\omega_{,,}-\omega_,'^2)]$$

и приложивъ къ нему тождественное равенство

$$0=N[H\omega''+2K\omega_,'+L\omega_{,,}+M+N(\omega''\omega_{,,}-\omega_,'^2)],$$

имѣющее мѣсто въ силу предположенія, что функція ω удовлетворяетъ уравненію (1), получимъ

$$P=K^2-HL+MN=G.$$

Слѣдовательно,

$$m=\frac{-K+N\omega_,'\pm\sqrt{G}}{H+N\omega_{,,}}.$$

Посредствомъ двухъ значенiй m, данныхъ выше, выраженiя R, S, T можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned}
&-R=(H+N\omega_{,,})\left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\right)^2\times\\
&\times\left(\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}}+\frac{K-N\omega_{,}'+\sqrt{G}}{H+N\omega_{,,}}\right)\left(\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}}+\frac{K-N\omega_{,}'-\sqrt{G}}{H+N\omega_{,,}}\right),\\
&S=(H+N\omega_{,,})\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\times\\
&\times\left[\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}\cdot\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}}+\frac{K-N\omega_{,}'}{H+N\omega_{,,}}\left(\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}+\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}}\right)+\frac{L+N\omega''}{H+N\omega_{,,}}\right],\\
&-T=(H+N\omega_{,,})\left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2\times\\
&\times\left(\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}+\frac{K-N\omega_{,}'+\sqrt{G}}{H+N\omega_{,,}}\right)\left(\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}+\frac{K-N\omega_{,}'-\sqrt{G}}{H+N\omega_{,,}}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Займемся теперь примѣрами Ампера.

1) $$x^4z_{,,}-4x^2z_{,}z_{,}'+4z_{,}^2z_{,,}+2z'x^3=0.$$

Здѣсь имѣемъ:

$$H=x^4,\quad K=-2x^2z_{,},\quad L=4z_{,}^2,\quad M=2z'x^3,\quad N=0;$$

слѣдовательно,

$$G=K^2-HL+MN=0;$$

поэтому обѣ системы уравненiй (A) и (B) сливаются въ одну слѣдующую:

$$x^2\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}+2z_{,}=0,$$

$$x^2\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}-2z_{,}\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}+2z'x=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x(\alpha}-z'-z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=0.$$

Второе изъ этихъ уравненій, удовлетворяя условіямъ интегрируемости, доставитъ интегралъ

$$x^2z'-z_{,}^2=2\alpha.$$

Для интегрированія этого уравненія съ частными производными перваго порядка по способу *Лагранжа* и *Шарпи* составляемъ систему совмѣстныхъ уравненій:

$$\frac{\partial x}{x^2}=\frac{\partial y}{-2z_{,}}=\frac{-dz'}{2xz'}=\frac{-dz_{,}}{0},$$

для которой находимъ одинъ интегралъ $z_{,}=const.$ Слѣдовательно, имѣемъ

$$z'=\frac{2\alpha+\gamma^2}{x^2},\quad z_{,}=\gamma,$$

и

$$dz=\frac{2\alpha+\gamma^2}{x^2}dx+\gamma dy.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, получимъ частный интегралъ

$$z=\gamma y-\frac{2\alpha+\gamma^2}{x}+\eta=\omega$$

предложеннаго уравненія, въ чемъ легко убѣдиться повѣркою.

Разсматривая η какъ функцію α и γ и присоединивъ къ предъидущему три слѣдующія уравненія:

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}=-\frac{2}{x}+\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}=0,$$
$$\frac{\partial.\omega}{\partial\gamma}=-\frac{2\gamma}{x}+y+\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}=0,$$
$$\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=-\frac{2}{x}+\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}=0,$$

будемъ имѣть общій интегралъ, если функцію η опредѣлимъ помощію послѣдняго уравненія. Но вычитая изъ него второе уравненіе общаго интеграла, получимъ уравненіе

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}=\frac{\partial\eta}{\partial\alpha},$$

общій интегралъ котораго далъ Лапласъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha})\, du,$$

гдѣ φ означаетъ произвольную функцію. Частныя производныя въ отношеніи α и γ предыдущаго значенія η будутъ:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha})\, du,\quad \frac{\partial\eta}{\partial\gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha})\, du;$$

значеніе первой, посредствомъ интегрированія по частямъ, приводится еще къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha})\, du.$$

Подставивъ эти значенія, получимъ общій интегралъ задачи, данный Амперомъ, въ видѣ трехъ уравненій:

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi(\gamma + 2u\sqrt{\alpha})\, du,$$

$$y - \frac{2\gamma}{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi'(\gamma + 2u\sqrt{\alpha})\, du = 0,$$

$$\frac{2}{x} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \varphi''(\gamma + 2u\sqrt{\alpha})\, du = 0.$$

Чтобы повѣрить заключенія теоріи относительно значеній R, S, T, дифференцируемъ функцію ω въ отношеніи x и y, разсматривая α и γ какъ постоянныя, получимъ

$$\omega' = \frac{2\alpha + \gamma^2}{x^2},\quad \omega_{,} = \gamma.$$

Далѣе, дифференцируя функціи ω' и $\omega_{,}$ въ отношеніи α и γ, разсматривая x и y какъ постоянныя, находимъ:

$$\frac{\partial.\omega'}{\partial\alpha}=\frac{2}{x^2},\quad \frac{\partial.\omega'}{\partial\gamma}=\frac{2\gamma}{x^2},\quad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial.\omega_{,}}{\partial\gamma}=1.$$

Вставивъ эти значенія въ общія формулы (5), гдѣ должно положить $N=0$, находимъ согласно теоріи

$$R=0,\quad S=0,\quad T=-1.$$

Точно такъ же интегрируются и два другіе примѣра:

$$z''+2(z_{,}-x)z_{,}'+(z'-x)^2z_{,,}-z_{,}=0$$

и

$$(x+z_{,})^2z''+2(x+z_{,})(y+z')z_{,}'+(y+z')^2z_{,,}+2(x+z_{,})(y+z')=0,$$

которые оба въ родѣ предыдущаго, вслѣдствіе условія $G=0$, имѣющаго также и для нихъ мѣсто.

Разсмотримъ теперь такіе примѣры, гдѣ это условіе не имѣетъ мѣста.

2) $$x^2z''+2x^2z_{,}'+(x^2-\frac{b^2}{x^2z_{,}^2})z_{,,}-2z=0.$$

Здѣсь имѣемъ:

$$H=x^2,\quad K=x^2,\quad L=x^2-\frac{b^2}{x^2z_{,}^2},\quad M=-2z,\quad N=0,\quad \sqrt{G}=\frac{b}{z_{,}};$$

поэтому уравненія (A) и (B) примутъ соотвѣтственно видъ:

$$x^2\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}-x^2-\frac{b}{z_{,}}=0,\qquad\qquad x^2\frac{\partial y}{\partial x(\beta}-x^2+\frac{b}{z_{,}}=0,$$

$$x^2\frac{\partial z'}{\partial x(\alpha}+(x^2-\frac{b}{z_{,}})\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\alpha}-2z=0,\qquad x^2\frac{\partial z'}{\partial x(\beta}+(x^2+\frac{b}{z_{,}})\frac{\partial z_{,}}{\partial x(\beta}-2z=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x(\alpha}-z'-z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\alpha}=0.\qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial x(\beta}-z'-z_{,}\frac{\partial y}{\partial x(\beta}=0.$$

Каждое изъ этихъ уравненій порознь не удовлетворяетъ условіямъ интегрируемости, но Амперъ указалъ интегрируемыя комбинаціи ихъ, которыя получимъ умноживъ въ обѣихъ системахъ первыя уравненія на $-\frac{2z_{,}}{x}$, вторыя на 1, третьи на

$-2x$ и затѣмъ сложивъ порознь уравненія каждой системы; ихъ суммы можно представить слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l} x^2\partial z' + 2xz'\partial x + x^2\partial z_{,} + 2xz_{,}\partial x \\ -2z\partial x - 2x\partial z \mp \dfrac{b\partial z_{,}}{z_{,}} \pm \dfrac{2b\,\partial x}{x} \end{array}\right\}=0,$$

условившись, что уравненіе съ верхними знаками получается изъ системы (A) и съ нижними — изъ системы (B). Оба предыдущія уравненія заключаютъ частные дифференціалы въ отношеніи x, но вторымъ независимымъ перемѣннымъ въ одномъ подразумѣвается α, въ другомъ β; поэтому интегралами ихъ будутъ уравненія:

$$x^2z' + x^2z_{,} - 2zx - b\log z_{,} + 2b\log x = \alpha,$$
$$x^2z' + x^2z_{,} - 2zx + b\log z_{,} - 2b\log x = \beta,$$

складывая и вычитая которыя, находимъ:

$$2x^2(z' + z_{,}) - 4zx = \alpha + \beta,$$
$$2b\log\frac{z'}{x^2} = \beta - \alpha.$$

Изъ второго уравненія получимъ

$$z_{,} = x^2 e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}$$

и вставивъ это значеніе $z_{,}$ въ первое, будемъ имѣть

$$z' = \frac{\alpha+\beta}{2x^2} + \frac{2z}{x} - x^2 e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}.$$

Слѣдовательно,

$$dz = \left(\frac{\alpha+\beta}{2x^2} + \frac{2z}{x} - x^2 e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}\right)dx + e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}x^2dy.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, по умноженіи на $\frac{1}{x^2}$, получимъ частный интегралъ

$$z = -\frac{\alpha+\beta}{6x} + e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2 - x^2\eta = \omega$$

даннаго уравненія, въ чемъ легко убѣдиться повѣркою. Разсматривая теперь η какъ функцію α и β и присоединивъ къ предыдущему уравненію два слѣдующія:

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}=-\frac{1}{6x}-\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2-x^2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}=0,$$

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\beta}=-\frac{1}{6x}+\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2-x^2\frac{\partial\eta}{\partial\beta}=0,$$

получимъ общій интегралъ даннаго уравненія, если опредѣлимъ функцію η помощію уравненія

$$\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}=-\frac{1}{4b^2}e^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}}(y-x)x^2-x^2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0.$$

Но, вычитая второе уравненіе общаго интеграла изъ третьяго, находимъ

$$\frac{1}{b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(y-x)x^2+x^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)=0.$$

Сложивъ же послѣднее уравненіе, умноженное $\frac{1}{4b}$, съ предпослѣднимъ и раздѣливъ ихъ сумму на x^2, получимъ уравненіе

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{1}{4b}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\right)=0$$

для опредѣленія функціи η. Легко замѣтить, что оно интегрируется въ конечномъ видѣ; но общій интегралъ его, по способу Лапласа, выражается въ опредѣленныхъ интегралахъ.

Для повѣрки значеній R, S и T дифференцируя функцію ω въ отношеніи x и y и разсматривая α и β какъ постоянныя, находимъ:

$$\omega'=\frac{\alpha+\beta}{6x^2}+e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(2xy-3x^2)-2x\eta,\quad \omega_{,}=e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}x^2.$$

Дифференцируя ω' и $\omega_{,}$ въ отношеніи α и β и считая x и y постоянными, получимъ:

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}=\frac{1}{6x^2}-\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(2xy-3x^2)-2x\frac{\partial\eta}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}=-\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}x^2,$$

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}=\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}(2xy-3x^2)-2x\frac{\partial\eta}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}=\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}x^2.$$

Въ первомъ и третьемъ изъ предыдущихъ уравненій можно исключить $\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial\eta}{\partial\beta}$ приложивъ второе и третье уравненія общаго интеграла, умноженныя на $-\frac{2}{x}$. Такимъ образомъ получимъ:

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}x^2,\quad \frac{\partial\omega'}{\partial\beta}=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2b}e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}x^2;$$

но пользуясь уравненіемъ

$$\omega_{,}=e^{\frac{\beta-\alpha}{2b}}x^2,$$

можно предыдущія написать еще такимъ образомъ:

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}=\frac{1}{2x^2}+\frac{\omega_{,}}{2b},\quad \frac{\partial\omega'}{\partial\beta}=\frac{1}{2x^2}-\frac{\omega_{,}}{2b},$$

$$\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}=-\frac{\omega_{,}}{2b},\quad \frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}=\frac{\omega_{,}}{2b}.$$

Эти значенія должно ввести въ общія формулы (6), гдѣ слѣдуетъ положить $\gamma=\beta$ и $N=0$. Для этой цѣли, раздѣляя первое и второе изъ предыдущихъ уравненій соотвѣтственно на третье и четвертое, находимъ:

$$\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}=-\frac{b}{x^2\omega_{,}}-1,\quad \frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}}=\frac{b}{x^2\omega_{,}}-1.$$

Съ другой стороны имѣемъ:

$$\frac{K+\sqrt{G}}{H}=1+\frac{b}{x^2\omega_{,}} \quad \text{и} \quad \frac{K-\sqrt{G}}{H}=1-\frac{b}{x^2\omega_{,}}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}=-\frac{K+\sqrt{G}}{H} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}}=-\frac{K-\sqrt{G}}{H};$$

поэтому $R=0$ и $T=0$.

Умножая и складывая предыдущія уравненія, находимъ:

$$\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}\cdot\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}}=\frac{K^2-G}{H^2}=\frac{L}{H}, \quad \frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}+\frac{\frac{\partial\omega'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}}=-\frac{2K}{H};$$

слѣдовательно, вторая изъ формулъ (6) даетъ

$$S=-2\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}\frac{K^2-HL}{H}=-2\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}\frac{G}{H}.$$

Но мы имѣемъ:

$$\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\beta}=-\frac{\omega_{,}^2}{4b^2}, \quad G=\frac{b^2}{\omega_{,}^2}, \quad H=x^2.$$

Слѣдовательно,

$$S=\frac{1}{2x^2}.$$

Воспользуемся этимъ примѣромъ, чтобы яснѣе показать различіе нашего способа рѣшенія и того, котораго держался Амперъ. Какъ уже замѣчено выше, вмѣсто того чтобы основывать рѣшеніе разомъ на двухъ интегралахъ, доставляемыхъ системами (A) и (B), Амперъ сначала пользуется только однимъ изъ нихъ:

$$x^2z'+x^2z_{,}-2xz-b\log z_{,}+2b\log x=\alpha.$$

Изъ этого уравненія съ частными производными перваго порядка должно вывести сначала полный его интегралъ съ тремя произвольными постоянными, $\alpha\, \gamma, \eta$, который обозначимъ черезъ

$$V=0,$$

затѣмъ—общій, который получимъ разсматривая η какъ функцію α и γ и присоединивъ къ предыдущему уравненію слѣдующее

$$\frac{\partial . V}{\partial \gamma}=0.$$

Но вмѣсто того, чтобы пользоваться для этой цѣли способомъ Лагранжа и Шарпи, доставляющимъ общій интегралъ именно въ требуемомъ видѣ, Амперъ примѣняетъ свой собственный способъ интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка, который, вообще, не даетъ общаго интеграла подъ видомъ уравненій

$$V=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial . V}{\partial \gamma}=0,$$

такъ что для приведенія его къ этому виду требуется еще особенное преобразованіе. Отдавая полную справедливость остроумной мысли, на которой оно основано[1]), нельзя не замѣтить однако, что примѣненіе такого пріема въ настоящемъ случаѣ совершенно безполезно усложняетъ вычисленіе. Въ самомъ дѣлѣ, составивъ Лагранжеву систему совмѣстныхъ уравненій, соотвѣтствующую данному уравненію съ частными производными перваго порядка, имѣемъ

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{x^2-\frac{b}{z_{,}}}=\frac{dz}{z'x^2+z_{,}x^2-b}=\frac{-dz'}{2xz_{,}+\frac{2b}{x}}=\frac{dz_{,}}{2xz_{,}},$$

и сравнивъ первое отношеніе съ послѣднимъ, получимъ

$$2\frac{dx}{x}=\frac{dz_{,}}{z_{,}}, \quad \text{откуда } z_{,}=x^2\gamma.$$

---

[1]) См. стр. 20 и слѣд. мемуара Ампера.

Помощію послѣдняго уравненія выводимъ изъ даннаго

$$z'=\frac{2z}{x}+\frac{\alpha+b\log\gamma}{x^2}-x^2\gamma.$$

Наконецъ, интегрируя уравненіе

$$dz=z'dx+z_{,}dy,$$

по вставкѣ предыдущихъ значеній z' и $z_{,}$, получимъ тотъ самый частный интегралъ

$$z=\gamma x^2y-\gamma x^3-\frac{\alpha+b\log\gamma}{3x}+x^2\eta=\omega,$$

для вывода котораго по способу Ампера требуется болѣе сложное вычисленіе [1]).

Далѣе Амперъ прилагаетъ способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ къ предыдущему частному интегралу. Мы получимъ его выводы, придерживаясь объясненныхъ выше пріемовъ. Разсматривая η какъ функцію α и γ и присоединивъ къ предыдущему два слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial.\omega}{\partial\alpha}=-\frac{1}{3x}+x^2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}=0,$$
$$\frac{\partial.\omega}{\partial\gamma}=x^2y-x^3-\frac{b}{3\gamma x}+x^2\frac{\partial\eta}{\partial\gamma}=0,$$

будемъ имѣть общій интегралъ даннаго уравненія, если опредѣлимъ функцію η посредствомъ уравненія (4).

Но дифференцируя ω въ отношеніи x и y и считая α и γ постоянными, находимъ

$$\omega'=2\gamma xy-3\gamma x^2+\frac{\alpha+b\log\gamma}{3x^2}+2x\eta,\quad \omega_{,}=\gamma x^2.$$

---

[1]) См. стр. 145—148 его сочиненія.

Дифференцируя теперь ω' и $\omega_{\prime}$ въ отношеніи α и γ и считая x и y постоянными, получимъ:

$$\frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\omega_{\prime}}{\partial\gamma}=x^2,$$

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}=2xy-3x^2+\frac{b}{3\gamma x^2}+2x\frac{\partial\eta}{\partial\gamma},\quad \frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}=\frac{1}{3x^2}+2x\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}.$$

Два послѣднія уравненія, на основаніи второго и третьяго уравненій общаго интеграла, примутъ видъ:

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}=-x^2+\frac{b}{\gamma x^2},\quad \frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}=\frac{1}{x^2}.$$

Примѣняя теперь общія формулы (5) или (6), весьма просто получимъ:

$$R=0,\quad S=\frac{b}{\gamma x^2},\quad T=-\frac{1}{x^2};$$

слѣдовательно, уравненіе для опредѣленія функціи η приметъ такой видъ

$$\frac{2b}{\gamma}\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}-\frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=0,$$

какого и слѣдовало ожидать по теоріи. Далѣе находимъ

$$\frac{\partial.^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\gamma}=x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\,\partial\gamma},\quad \frac{\partial.^2\omega}{\partial\gamma^2}=\frac{b}{3\gamma^2x}+x^2\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2},$$

и сверхъ того второе уравненіе общаго интеграла даетъ

$$\frac{1}{3x^3}=\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія η окончательно получимъ уравненіе

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\gamma^2}-\frac{2b}{\gamma}\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\gamma}+\frac{b}{\gamma^2}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}=0$$

того самого вида, въ которомъ далъ его Амперъ.

Должно подвергнуть это уравненіе еще двумъ преобразованіямъ, чтобы привести его къ тому простѣйшему виду, который мы выше получили непосредственно.

Для перваго преобразованія вводимъ посредствомъ положенія

$$\log\gamma = \varepsilon$$

независимое перемѣнное ε вмѣсто γ и получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial^2\varepsilon} - 2b\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\,\partial\varepsilon} + b\frac{\partial\eta}{\alpha\partial} - \frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon} = 0$$

съ постоянными коэффиціентами. Для второго преобразованія вводимъ посредствомъ положенія

$$\beta = \alpha + 2b\varepsilon$$

независимое перемѣнное β вмѣсто ε и, наконецъ, приводимъ уравненіе къ требуемому виду

$$4b\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\eta}{\partial\beta} = 0.$$

Эти послѣднія преобразованія исполняются довольно просто въ разсматриваемомъ примѣрѣ, потому что преобразуемое уравненіе получилось линейнаго вида не только въ отношеніи вторыхъ, но и первыхъ производныхъ функціи η.

Но трудность такихъ преобразованій возрастаетъ, когда преобразуемое уравненіе будетъ линейнымъ только въ отношеніи вторыхъ производныхъ отъ η. Въ этомъ легко убѣдиться на слѣдующихъ примѣрахъ:

$$z'' + 2z_{,}z_{,}' + (z_{,}^2 - x^2)\,z_{,,} - z_{,} = 0,$$
$$x^4z'' - 4x^2z_{,}z_{,}' + 3z_{,}z_{,,} + 2x^3z' = 0,$$
$$z'' + 2z_{,}z_{,}' + (z_{,}^2 - b^2)\,z_{,,} = 0,$$

для которыхъ окончательные выводы *Ампера* можно получить, напротивъ, по нашему способу какъ нельзя болѣе просто.

§ 22.

Мы выше предполагали, что для приложенія способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ къ интегрированію уравненія (1) дается частный первообразный интегралъ его съ *тремя* произвольными постоянными; но встрѣчаются частные случаи, когда бываетъ достаточно имѣть частный интегралъ съ *двумя* произвольными постоянными. Подобный случай представляютъ уравненія линейныя относительно производныхъ второго порядка, въ которыя входятъ только z'' и $z_{,}'$, или $z_{,}'$ и $z_{,,}$. Должно замѣтить, что въ теоріи *Ампера* этотъ видъ уравненій представляетъ особенную важность, потому что, какъ замѣчено выше, къ нему всегда приводятся полныя уравненія, линейныя относительно z'', $z_{,}'$ и $z_{,,}$. При нашемъ изложеніи разсматриваемаго способа интегрированія можно разсматривать упомянутый видъ какъ частный случай; поэтому мы ограничимся приведеніемъ одного изъ частныхъ примѣровъ, данныхъ *Амперомъ*, чтобы дать понятіе объ употребляемомъ имъ пріемѣ интегрированія. Возьмемъ слѣдующее уравненіе

$$z z_{,}' + \frac{z}{z_{,}^2} z_{,,} + z' z_{,} = 0.$$

Судя по виду его, заключаемъ (гл. I § 6), что одинъ изъ аргументовъ двухъ произвольныхъ функцій общаго интеграла равенъ x. Положивъ $\alpha = x$, другой аргументъ β должно разсматривать какъ нѣкоторую функцію x и y. Положивъ поэтому

$$\beta = f(x, y),$$

можемъ, на основаніи этого уравненія, ввести независимыя перемѣнныя x и β вмѣсто x и y.

Дифференцируя въ этомъ предположеніи зависимость между β, x, y частнымъ образомъ въ отношеніи x, при чемъ количество β разсматривается постояннымъ, получимъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x\,(\beta} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x\,(\beta} = 0.$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$\frac{\partial z_,}{\partial x\,(\beta}=z_,'+z_{,,}\frac{\partial y}{\partial x\,(\beta}\quad \text{и}\quad \frac{\partial z_,}{\partial \beta\,(x}=z_{,,}\frac{\partial y}{\partial \beta\,(x}.$$

Вставляя значенія $z_,'$ и $z_{,,}$ изъ двухъ послѣднихъ уравненій въ данное, получимъ

$$z\frac{\partial z_,}{\partial x\,(\beta}+z'z_,+z\left(\frac{1}{z_,^2}-\frac{\partial y}{\partial x\,(\beta}\right)\cdot\frac{\dfrac{\partial z_,}{\partial \beta\,(x}}{\dfrac{\partial y}{\partial \beta\,(x}}=0.$$

Это послѣднее уравненіе должно разбить (гл. III § 12) на два слѣдующія:

$$z\frac{\partial z_,}{\partial x\,(\beta}+z'z_,=0\quad \text{и}\quad \frac{\partial y}{\partial x\,(\beta}-\frac{1}{z'^2}=0,$$

къ которымъ можно присоединить еще третье:

$$\frac{\partial z}{\partial x\,(\beta}-z'-z_,\frac{\partial y}{\partial x\,(\beta}=0.$$

Такъ какъ три предыдущія уравненія не содержатъ производной отъ z', то изъ нихъ нельзя составить интегрируемой комбинаціи иначе какъ черезъ исключеніе z'. Для этой цѣли, исключивъ z' изъ перваго и третьяго, получимъ

$$z\frac{\partial z_,}{\partial x\,(\beta}+z_,\frac{\partial z}{\partial x\,(\beta}-z_,^2\frac{\partial y}{\partial x\,(\beta}=0$$

или, на основаніи второго изъ трехъ упомянутыхъ уравненій,

$$z\frac{\partial z_,}{\partial x\,(\beta}+z_,\frac{\partial z}{\partial x\,(\beta}-1=0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, находимъ

$$z\,z_,-x=\beta.$$

Если здѣсь β будемъ считать количествомъ постояннымъ и примемъ снова за независимыя перемѣнныя x и y, то предыдущее уравненіе будетъ представлять частный интегралъ перваго порядка въ отношеніи даннаго уравненія. Дѣйствительно, дифференцируя его въ отношеніи x и y, получимъ

$$z z_{,}' + z' z_{,} - 1 = 0, \quad z z_{,,} + z_{,}^2 = 0;$$

складывая первое изъ этихъ уравненій со вторымъ, умноженнымъ на $\frac{1}{z_{,}^2}$, находимъ данное уравненіе.

Изъ частнаго интеграла перваго порядка, интегрируя его какъ обыкновенное уравненіе (ибо частныхъ производныхъ въ отношеніи x въ него не входитъ), получимъ частный первообразный интегралъ

$$\omega = \frac{z^2}{2} - (x+\beta)y + \eta = 0,$$

гдѣ η означаетъ совершенно произвольную функцію отъ x. Но если мы будемъ разсматривать η какъ функцію x и β, то послѣднее уравненіе продолжаетъ быть интеграломъ того, изъ котораго оно выведено, если присоединимъ условіе

$$\frac{\partial . \omega}{\partial \beta} = -y + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = 0.$$

Остается вывести условіе, которое должно имѣть мѣсто для того, чтобы уравненіе

$$z z_{,} - x = \beta$$

продолжало быть интеграломъ даннаго. Для этого дифференцируя послѣднее уравненіе въ отношеніи x и y, находимъ:

$$z z_{,}' + z' z_{,} - 1 = \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad \text{и} \quad z z_{,,} + z_{,}^2 = \frac{\partial \beta}{\partial y};$$

складывая первое изъ этихъ уравненій со вторымъ, умноженнымъ на $\frac{1}{z_,^2}$, получимъ

$$zz_,'+\frac{z}{z_,^2}z_{,,}+z'z_,=\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{1}{z_,^2}\frac{\partial\beta}{\partial y}.$$

Слѣдовательно, искомое условіе выразится уравненіемъ

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{1}{z_,^2}\frac{\partial\beta}{\partial y}=0.$$

мы имѣли

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x\,(\beta}=0;$$

слѣдовательно, условное уравненіе приметъ видъ

$$\frac{\partial y}{\partial x\,(\beta}-\frac{1}{z_,^2}=0.$$

По вставкѣ въ него значеній:

$$y=\frac{\partial\eta}{\partial\beta},\quad \text{откуда}\quad \frac{\partial y}{\partial x\,(\beta}=\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial\beta},$$

и

$$z_,^2=\left(\frac{x+\beta}{z}\right)^2=\frac{(x+\beta)^2}{2(x+\beta)\,y-2\eta}=\frac{(x+\beta)^2}{2(x+\beta)\,\frac{\partial\eta}{\partial\beta}-2\eta},$$

получимъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія функціи η

$$(x+\beta)^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial\beta}-2(x+\beta)\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+2\eta=0,$$

интегрируемое по способу Лапласа.

§ 23.

Способъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, въ томъ видѣ, который ему данъ выше, представляетъ самый общій изъ всѣхъ извѣстныхъ пріемовъ, предложенныхъ для интегрированія уравненія

$$Hz''+2Kz_,'+Lz_{,,}+M+N(z''z_{,,}-z_,'^2)=0;$$

такъ какъ онъ одинъ обнимаетъ всѣ случаи, различающіеся по числу интеграловъ, возможныхъ для уравненій (A) и (B).

Дѣйствительно, въ этой главѣ мы разсмотрѣли примѣненіе его въ тѣхъ случаяхъ, когда намъ неизвѣстно ни одного интеграла уравненій (A) и (B), и когда эти двѣ системы допускаютъ не болѣе одного интеграла каждая. Выше (гл. III § 13) мы показали приложеніе этого способа въ другомъ крайнемъ случаѣ, когда обѣ системы (A) и (B) допускаютъ по три интеграла и, вслѣдствіе условія $G=0$, сливаются въ одну. Но такъ какъ мы основали этотъ способъ на предварительномъ опредѣленіи какого-либо частнаго первообразнаго интеграла уравненія (1) съ тремя произвольными постоянными, то само собою понятно, что если каждая изъ системъ (A) и (B), или одна изъ нихъ, допускаетъ два интеграла, то мы будемъ имѣть даже нѣсколько путей для вывода требуемаго частнаго интеграла уравненія (1). Самые же выгодные изъ нихъ, очевидно, будутъ тѣ, посредствомъ которыхъ въ уравненіе (4) будутъ введены независимыми перемѣнными α и β.

Для поясненія этого пріема возьмемъ примѣръ

$$z_, z_{,,} + (z' + x)\, z_,' + y z_{,,} + y\,(z'' z_{,,} - z_,'^2) + z_, = 0,$$

который раньше (гл. III § 17) мы уже интегрировали по способу *Ампера*, основанному, такъ же какъ способъ *Монжа*, на предварительномъ опредѣленіи общаго интеграла перваго порядка.

Здѣсь имѣемъ:

$$H = M = z_{,,}, \quad L = N = y, \quad K = \sqrt{G} = \frac{z' + x}{2},$$

поэтому системы (A) и (B) примутъ соотвѣтственно видъ:

$$\left.\begin{aligned} & z_, \frac{\partial y}{\partial x(\alpha} + y \frac{\partial z_,}{\partial x(\alpha} - z' - x = 0, \\ & \frac{\partial z'}{\partial x(\alpha} + 1 = 0, \\ & \frac{\partial z}{\partial x(\alpha} - z' - z_, \frac{\partial y}{\partial x(\alpha} = 0. \end{aligned}\right\| \quad \begin{aligned} & z_, \frac{\partial y}{\partial x(\beta} + y \frac{\partial z_,}{\partial x(\beta} = 0, \\ & z_, \frac{\partial z'}{\partial x(\beta} + (x + z') \frac{\partial z_,}{\partial x(\beta} + z_, = 0, \\ & \frac{\partial z}{\partial x(\beta} - z' - z_, \frac{\partial y}{\partial x(\beta} = 0. \end{aligned}$$

Первая изъ нихъ доставитъ интегралъ

$$z' + x = const. \qquad (a)$$

Изъ второй получаемъ два интеграла:

$$(b) \qquad yz_{,} = const. \quad \text{и} \quad z_{,}(z' + x) = const. \qquad (c)$$

Изъ уравненій (a) и (c), въ которыхъ вмѣсто произвольныхъ постоянныхъ можемъ поставить соотвѣтственно α и β, выводимъ

$$z' = \alpha - x, \quad z_{,} = \frac{\beta}{\alpha}$$

и

$$z = \alpha x - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta}{\alpha} y + \eta = \omega.$$

Разсматривая η какъ функцію α и β и присоединивъ къ предыдущему два слѣдующихъ уравненія

$$\frac{\partial . \omega}{\partial \alpha} = x - \frac{\beta y}{\alpha^2} + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial . \omega}{\partial \beta} = \frac{y}{\alpha} + \frac{\partial \eta}{\partial \beta} = 0,$$

получимъ общій интегралъ даннаго, если опредѣлимъ η посредствомъ уравненія

$$2S \frac{\partial .^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} + U = 0.$$

Но мы имѣемъ

$$\omega' = \alpha - x, \quad \omega_{,} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \omega'' = -1, \quad \omega_{,}' = 0, \quad \omega_{,,} = 0,$$

$$\frac{\partial . \omega'}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial . \omega'}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \alpha} = -\frac{\beta}{\alpha^2}, \quad \frac{\partial . \omega_{,}}{\partial \beta} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\partial .^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{y}{\alpha^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta};$$

поэтому общія формулы (6) дадутъ

$$S = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad U = \frac{y}{\alpha^2}.$$

Слѣдовательно, для опредѣленія функціи η получимъ уравненіе:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

откуда

$$\eta = \varphi(\alpha) + \psi(\beta).$$

Поэтому общій интегралъ даннаго уравненія выразится тремя уравненіями:

$$z = \left(\alpha - \frac{x}{2}\right) x + \frac{\beta y}{x} + \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad y = -\alpha \psi'(\beta), \quad x = \frac{\beta y}{\alpha^2} - \varphi'(\alpha).$$

Подобнымъ образомъ, пользуясь интеграломъ (a) системы (A) и интеграломъ (b) системы (B), выразимъ общій интегралъ даннаго уравненія еще слѣдующими тремя уравненіями:

$$z = \left(\alpha - \frac{x}{2}\right) x + \beta \log y + \beta \log \left(\log \frac{1}{\alpha}\right) - \varphi(\alpha) - \psi(\beta),$$

$$x = \varphi'(\alpha) + \frac{\beta}{\alpha \log \alpha}, \quad y = \psi'(\beta) - \log \left(\log \frac{1}{\alpha}\right).$$

Показавъ приложенія способа измѣненія произвольныхъ постоянныхъ во всѣхъ случаяхъ на основаніи однихъ и тѣхъ же общихъ формулъ, мы имѣемъ, кажется, достаточное основаніе назвать его *общимъ* и въ значительной степени *новымъ* способомъ интегрированія уравненій съ частными производными второго порядка, по крайней мѣрѣ не восходящихъ далѣе той общей формы ихъ, которою мы ограничили наше изслѣдованіе.