MOTION AND RELATIVITY

by

Leopold Infeld

and *Jerzy Plebański*

PERGAMON PRESS — NEW YORK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA

1960

Л. ИНФЕЛЬД • Е. ПЛЕБАНЬСКИЙ

Движение и релятивизм

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ

В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Д. В. БЕЛОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Д. ИВАНЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1962

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Введение 11

Система обозначений 13

А. Обозначения общей теории относительности 13

Б. δ-функции 15

В. Значения поля на мировых линиях 15

Г. Ковариантный характер δ-функций. Тензоры на мировых линиях 16

Глава I. **Гравитационное взаимодействие и общая теория движения** 19

§ 1. Общая постановка физической проблемы. Частицы и гравитационное поле 19

§ 2. Теория гравитацни Ньютона 26

§ 3. Взаимодействие в ОТО. Уравнения движения первого и второго рода 31

§ 4. Уравнения поля Эйнштейна 36

§ 5. Тождества Бианки 42

§ 6. Уравнения движения как следствие уравнений поля . . . 44

§ 7. Виды уравнений движения второго рода 47

§ 8. Уравнения движения в гравитационном и негравнтационном полях 54

§ 9. Уравнения движения в различных системах координат 56

§ 10. Метод решения уравнений поля с помощью дипольной процедуры 60

Глава II. **Метод приближений и уравнения движения** 64

§ 1. Общие замечания о методе приближений 64

§ 2. О разложении метрического поля 66

§ 3. О трех аспектах нашего рассмотрения 68

§ 4. Метод приближений и система координат 70

§ 5. Метод приближений и уравнения поля 72

§ 6. Две формы уравнений движения и условия интегрнруемости 82

Глава III. **Ньютоновское и пост-ньютоновское приближения** . . 88

§ 1. Ньютоновское приближение 88

§ 2. Гравитационное поле для пост-ньютоновских уравнений движения 90

§ 3. Уравнения движения в пост-ньютоновском приближении 94

§ 4. Законы сохранения для системы частиц 104

Глава IV. **Вариационный принцип и уравнения движения третьего рода** 107

§ 1. Постановка проблемы 107

§ 2. Лагранжиан вплоть до членов шестого порядка 112

§ 3. Обобщение 117

§ 4. Лагранжиан типа Фоккера для вращающихся тел 118

Глава V. **Проблемы одной и двух частиц** 123

§ 1. Проблема измерения 123

§ 2. О движении пробной частицы в поле тяжелой частицы 130

§ 3. Проблема двух тел 134

§ 4. Движение вращающихся тел 139

Глава VI. **Движение и излучение** 143

§ 1. Простой пример 143

§ 2. Уравнения движения в форме поверхностного интеграла 148

§ 3. Уравнеиия движения в форме объемного интеграла . . . 150

§ 4. Уравнения движения в форме объемного и поверхностного интегралов 152

§ 5. Следствия из различных форм уравнений движения . . . 153

§ 6. Три типа импульсов 155

§ 7. Уравнение для гравитационного излучения 157

§ 8. О свойствах инвариантности величины $P^{\alpha}_{\text{гр}}$. 161

§ 9. Гравитационное излучение и выбор системы координат 162

§ 10. Обобщение системы координат 168

§ 11. Излучение и метод приближений 172

Приложения 178

1. δ-функция 178

2. Поле на мировых линиях 187

3. Ковариантные свойства δ-функций. Тензоры на мировых линиях 191

Библиография 194

Дополнение. Работы Леопольда Инфельда 199

Л. Инфельд · Е. Плебаньский

ДВИЖЕНИЕ И РЕЛЯТИВИЗМ

Редактор *Л. В. ГЕССЕН* Художник *И. А. Литвишко*
Художественный редактор *Е. И. Подмарькова* Технический редактор *С. В. Приданцева*

Сдано в производство 5/III 1962 г. Подписано к печати 25/IV 1962 г.
Бумага $60\times90^1/_{16}$ = 6,4 бум. л. 12,8 печ. л. Уч.-изд. л. 11. Изд. № 2/1324. Цена 97 к.
Зак. 222.

* *

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

* *

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ

Леопольд Инфельд — крупный польский физик-теоретик, член президиума Польской Академии наук и почетный член ряда иностранных академий — хорошо известен советским ученым как автор вошедших в науку многих работ по общей теории относительности, а также по нелинейной электродинамике Борна — Инфельда, теории спиноров и другим[1]). Имя Леопольда Инфельда известно также в связи с его широкой прогрессивной деятельностью как последовательного борца за мир в рамках Всемирного Совета Мира, вице-председателем которого он является.

Советским читателям хорошо известны также его книга „Эволюция физики", написанная совместно с Эйнштейном, и книга о знаменитом французском математике Галуа. Несколько лет назад им была издана автобиография, в которой описаны студенческие годы в Кракове и знакомство с Эйнштейном, другом и сотрудником которого Инфельд сделался на долгие годы.

Л. Инфельд является одним из организаторов возрожденной послевоенной польской науки и создателем школы, в которой воспитан ряд талантливых молодых физиков, к числу которых принадлежит также соавтор Инфельда доцент Варшавского университета Ежи Плебаньский.

Предлагаемая советским читателям монография „Движение и релятивизм" посвящена одной из наиболее важных проблем эйнштейновской общей теории относительности (ОТО) — выводу уравнений движения тел, порождающих гравитационное поле и испытывающих его воздействие, из самих уравнений этого поля. Вопреки первоначальному постулату о движении массы по геодезической впоследствии оказалось возможным благодаря нелинейности уравнений поля вывести уравнение движения (т. е. механику) из теории поля. Инфельд подробно излагает физические основания данного вывода, проделанного впервые им совместно с Эйнштейном и Гоффманом в 1938 г., сравнивая нелинейную гравидинамику

[1]) В конце книги в виде дополнения мы помещаем список работ Л. Инфельда, любезно предоставленный автором для настоящего русского издания.

с линейной электродинамикой, где уравнения движения заряженных или намагниченных тел, порождающих поле, задаются независимо от максвелловских уравнений поля. Характерно приведение подробных выкладок и своеобразная „мягкая" настойчивость авторов, далеких от догматизма, повторно рассматривающих свои способы трактовки точечных тел и сравнивающих результаты с близкими, практически одновременными исследованиями В. А. Фока, с самого начала исходившего из протяженных тел и пришедшего по существу к тем же результатам, но вместе с тем получившего вместе с Н. М. Петровой и другими также уравнения вращения. Кроме того, для работ школы В. А. Фока существенно использование условий гармоничности де Дондера, выделяющих преимущественную систему координат, по мнению В. А. Фока наиболее близкую к инерциальной [1]).

Инфельд, являющийся в ряде отношений наиболее ортодоксальным последователем Эйнштейна в трактовке ОТО, считает какое-либо выделение преимущественных координатных систем противоречащим духу ОТО. Эти взгляды Инфельда сказываются и в его подчеркивании роли принципа эквивалентности, тогда как В. А. Фок, указывая на локальный характер этого принципа, предпочитает во главу угла ставить равенство инертной и гравитационной масс. Подобные умонастроения Инфельда приводят его к полной геометризации поля тяготения. Как и следовало ожидать, в дискуссии о гравитационных волнах Инфельд занимает крайнюю геометризованную точку зрения, отрицая существование подобных волн, несущих энергию (см. гл. VI). Как известно, вокруг этого вопроса еще больше, чем вокруг трактовки принципа эквивалентности или применения тех или иных дополнительных условий, главным образом и разгорелась в последнее время дискуссия, связанная вместе с тем с определением самого понятия энергии гравитационного поля, точнее говоря, с установлением наиболее разумного выражения псевдо- или квазитензора плотности энергии.

Настоящая монография занимает важное место в ряду новейших книг по теории пространства — времени — тяготения и их связи с обычным веществом (ОТО, гравидинамика, хроногеометрия, геометродинамика) [2]).

Не пытаясь обрисовать здесь современную ситуацию, мы хотим лишь напомнить, что развитие ОТО характеризуется в последние годы главным образом исследованием проблемы движения

[1]) В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, 2-е изд., М.—Л., 1961.

[2]) См., например, сборник „Новейшие проблемы гравитации", ИЛ, 1961; Дж. А. Уилер, Гравитация, нейтрино, Вселенная, ИЛ, 1962; Тезисы 1-й Советской гравитационной конференции, МГУ, 1961; А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, М.—Л., 1961.

(группы Инфельда и Фока), алгебраическим анализом решений (три класса А. З. Петрова), анализом сингулярностей шварцшильдовского решения, попытками отыскания „комплекса" энергии, интенсивным анализом волн и отысканием волновых решений. Возросшие экспериментальные возможности, полученные благодаря применению безотдачных γ-лучей (эффект Мёссбауэра), новейшим атомным стандартам частоты („часам") и другим средствам, позволили впервые опытным путем проверить один из эффектов ОТО (сдвиг частот в поле тяготения) в земных условиях (Паунд, Крэншоу, 1960) и приступить к реальному отысканию и генерации гравитационных волн и других эффектов, предсказываемых эйнштейновской ОТО или ее обобщениями (вращательные эффекты, анизотропия масс, экранировка тяготения, постоянство константы тяготения во времени и другие). Несомненно, замечательные запуски советских искусственных спутников Земли, а впоследствии американских спутников и взволновавшие мир полеты первых советских космонавтов, столь сильно содействовавшие оживлению интереса к данному кругу идей, со своей стороны открывают новые возможности экспериментального исследования сверхньютоновских гравитационных эффектов.

Следует сказать и о значительном прогрессе космологических исследований, ставших возможными благодаря новым радиоастрономическим и оптическим наблюдениям и расчетам моделей неоднородной анизотропной Вселенной (причем сторонники обычных фридмановских концепций расширяющейся Вселенной с уменьшающейся плотностью, по-видимому, явно берут верх над защитниками стационарной Вселенной). Сделаны также первые шаги в оценке роли нейтрино и гравитационных волн во Вселенной; проведенные интенсивные исследования квантования поля гравитации и процессов трансмутаций примыкают к новейшим попыткам построения единой теории элементарных частиц и гравитации, из которых наибольшее развитие получила, с одной стороны, геометродинамика (только гравитация плюс электромагнетизм) Уилера, делающая ударение на топологических возможностях, и, с другой стороны, нелинейная спинорная теория элементарных частиц (пока без гравитации), развиваемая в разных вариантах главным образом группой Гейзенберга, а также французскими и советскими авторами [1]). Недавно возникла интересная возможность сопоставить гравитационное поле как „компенсирующее" (при трактовке коэффициентов лоренцева преобразования не как постоянных, а функций координат подобно тому, как электромагнитное поле возникает в качестве „компенсирующего" при рассмотрении фазы калибро-

[1]) См. сборник „Нелинейная квантовая теория поля", ИЛ, 1959.

вочных преобразований как локальной переменной, а не постоянной величины)[1]).

До сих пор мы называли самые актуальные пункты нынешнего развития ОТО, связанные с уравнениями Эйнштейна (вообще говоря, с космологическим членом) и их квантованием. Однако был сделан ряд интересных попыток выхода за рамки стандартной теории (не только в виде той или иной ее интерпретации). Поднят вопрос о рассмотрении не только искривленного, риманова пространства, но закрученного пространства, в котором в частном случае реализуется абсолютный параллелизм. В противоположность старым работам 20-х годов по пространству с кручением Картана, Вейценбека и Эйнштейна новейшие исследования поведения в нем спиноров[2]) привели к интересным результатам, указывая, в частности, на естественное появление нелинейного добавка в уравнении Дирака, важнейшего в программе единой теории, и, с другой стороны, на возможность получения в закрученном пространстве наиболее разумного выражения энергии гравитационного поля[3]). Отметим, наконец, попытки обобщения теории, связанные с возможностью изменения гравитационной константы со временем.

Это краткое резюме актуальных проблем ОТО имеет целью не только ориентировать читателей, но и уточнить позицию Инфельда. Посвящая свое и Плебаньского исследование одному из актуальных вопросов ОТО, Инфельд вместе с тем не учитывает или еще не смог учесть ряд новых возможностей из числа только что упомянутых, в частности дальнейшей дискуссии о квазитензоре энергии, последовавшей за работами Мёллера — Мицкевича (1959 г.). Вопрос о гравитационных волнах рассматривается еще вне классификации решений Петрова, хотя имеются веские предположения, что волны наиболее соответствуют решениям 2-го класса (Пирани, Траутман и др.). В этой связи требуется дополнительный анализ выдвигаемого Инфельдом и др. требования галилеевости метрики на бесконечности, поскольку, согласно Петрову, решения 2-го и 3-го типов не имеют галилеевой (Минковского) асимптотики и возникает опасность априорного отбрасывания волновых решений. Наконец, анализ основ ОТО, несомненно, выигрывает, если мы наряду с „эйнштейнианской" геометризованной точкой зрения Инфельда и точкой зрения В. А. Фока учтем новейшую компенсационную трактовку. В самом деле, риман— эйнштейновская теория соответствует полной неоднородности 4-пространства (подчеркнутой Картаном и Фоком) и отсутствию

[1]) См. А. М. Бродский, Д. Иваненко, Г. А. Соколик, ЖЭТФ, **41**, 1307 (1961); Тезисы теоретической конференции, Ужгород, 1961.
[2]) См., например, В. И. Родичев, ЖЭТФ, 40, 1469 (1961).
[3]) Chr. Møller, Danske Videnskab., Preprint (1961).

симметрий. С другой стороны, рассмотрение параметров лоренцевой группы, как локально зависящих от 4-координат, и получение таким путем коэффициентов связности означает попытку отыскать какую-то симметрию и наличие групп в ОТО. Заметим, что на противоположном от Инфельда фланге находится наиболее „материализованная" концепция гравитации, сближающая ее в ряде отношений с обычной материей, поскольку поперечная часть поля, по-видимому, может излучаться в виде волн или их квантов — гравитонов, которые в свою очередь, согласно весьма правдоподобным расчетам, проведенным нами с А. А. Соколовым и А. М. Бродским, Ю. С. Владимировым, а также Дж. Уилером и Д. Бриллем, могут превращаться в пары электрон — позитрон, нейтрино — антинейтрино или фотоны, и, кроме того, имеется возможность построить гравитоны из фундаментального спинорного поля.

Таким образом, монография Инфельда и Плебаньского не только содержит ценные результаты, подводящие итоги многолетним исследованиям, но и дает толчок новым, бесспорно плодотворным дискуссиям.

Мы пользуемся случаем выразить благодарность авторам книги за присылку ряда поправок и дополнений к русскому изданию.

Рассчитанная на теоретиков, книга Л. Инфельда и Е. Плебаньского будет полезна для физиков, математиков и философов, интересующихся проблемой пространства — времени — тяготения.

Д. Иваненко

ВВЕДЕНИЕ

Проблема движения в теории гравитации была решена впервые в работе Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана в 1938 г. Вычисления оказались настолько трудоемкими, что мы вынуждены были оставить для справок всю рукопись с вычислениями в Высшем исследовательском институте в Принстоне. После этого Эйнштейн и я вместе достигли некоторого прогресса в этом вопросе. Двадцать два года прошло со времени опубликования первой статьи, и я снова работал над этой проблемой с моими сотрудниками в Варшаве в течение последних лет. В настоящей книге собраны окончательные результаты всей нашей работы. Параллельно, независимо от нас и немного позднее В. Фок со своими учениками в Ленинграде занялся проблемой движения в теории относительности и также решил ее. Эти результаты представлены в книге Фока „Теория пространства, времени и тяготения". Хотя наш подход отличается от метода Фока и более соответствует духу Эйнштейна, настоящая книга не предполагает быть полемической.

Я написал эту книгу с Ежи Плебаньским. Мы тщательно обсуждали содержание в течение всех четырех лет, которые понадобились, чтобы написать ее. К сожалению, мы закончили только первую главу и приложение, когда Плебаньский получил Рокфеллеровскую стипендию для поездки в Соединенные Штаты. Перед отъездом он подготовил черновик оставшейся части рукописи, за исключением последней главы, на польском языке. Этот вариант был впоследствии мной сильно изменен, за что я несу полную ответственность.

Эта книга предполагает знание только общих принципов общей теории относительности. Читателям, обладающим математическими наклонностями, я советую сначала прочесть приложение, не ограничиваясь кратким разделом „Система обозначений", суммирующим то, что изложено в приложении.

При написании книги большую помощь нам оказал А. Траутман, который сделал много критических замечаний, проверил формулы и подготовил библиографию. Мы выражаем благодарность также В. Тульчиевой, которая оказала большую помощь в подготовке последних параграфов гл. IV и V.

Леопольд Инфельд

Варшава, 1960 г.

Система обозначений

А. Обозначения общей теории относительности

Мы будем повсюду использовать тензорный анализ *общей теории относительности* (сокращенно ОТО).

Посредством

$$x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3 \tag{0.1}$$

будем обозначать время и пространственные координаты риманова многообразия. Если мы будем иметь дело со *специальной теорией относительности* и декартовой системой координат, то x^0 связано со временем t как

$$x^0 = ct,$$

где c — скорость света; x^k (или $\mathbf{x}$) для $k = 1,\ 2,\ 3$ означает пространственные координаты.

Все греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, а латинские — от 1 до 3. Повторение индексов подразумевает суммирование.

Геометрия риманова пространственно-временного континуума характеризуется симметричным метрическим тензором

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = g_{\beta\alpha}(x^\mu). \tag{0.2}$$

Чтобы различить время и пространство во всех возможных координатных системах, мы должны допустить, что метрический тензор всегда удовлетворяет условию

$$g_{00} > 0, \qquad \left(g_{ab} - \frac{g_{0a}g_{0b}}{g_{00}}\right) y^a y^b < 0 \tag{0.3}$$

для произвольного $y^a \neq 0$.

Вместо этого можно принять эквивалентные условия Гильберта, ограничивающие произвольность преобразований пространства — времени:

$$g_{00} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00}, & g_{01} \\ g_{10}, & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00}, & g_{01}, & g_{02} \\ g_{10}, & g_{11}, & g_{12} \\ g_{20}, & g_{21}, & g_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$g = \det \| g_{\alpha\beta} \| < 0. \tag{0.3a}$$

Метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ является обобщением метрического тензора Минковского $\eta_{\alpha\beta}$ специальной теории относительности, определяемого как

$$\eta_{00}=1, \quad \eta_{0a}=0, \quad -\eta_{ab}=\delta_{ab}=\begin{cases} 1 & \text{для} \quad a=b, \\ 0 & \text{для} \quad a\neq b. \end{cases} \tag{0.4}$$

Ковариантный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ здесь соответствует контравариантному метрическому тензору $g^{\alpha\beta}$, определяемому как

$$g^{\alpha\rho}g_{\rho\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}=\begin{cases} 1 & \text{для} \quad \alpha=\beta, \\ 0 & \text{для} \quad \alpha\neq\beta. \end{cases} \tag{0.5}$$

Мы будем обозначать детерминант $g_{\alpha\beta}$ буквой g, а все величины, которые преобразуются как

$$\sqrt{-g}\times \text{Тензор},$$

мы будем называть тензорными плотностями и будем обозначать их

$$\mathfrak{T}^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_m}=\sqrt{-g}\,T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\beta_1\ldots\beta_m}. \tag{0.6}$$

Обыкновенная производная будет обозначаться обычно вертикальной чертой

$$S_{|\alpha}=\frac{\partial S}{\partial x^{\alpha}}. \tag{0.7}$$

Символы Кристоффеля, не имеющие тензорного характера, имеют вид

$$[\alpha\beta,\gamma]=\frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma|\beta}+g_{\beta\gamma|\alpha}-g_{\alpha\beta|\gamma}), \tag{0.8}$$

$$\left\{ {\alpha \atop \beta\gamma} \right\}=g^{\alpha\rho}[\beta\gamma,\rho]. \tag{0.9}$$

Эти символы позволяют дифференцировать тензоры ковариантным образом. Такое ковариантное дифференцирование мы будем обозначать точкой с запятой

$$T^{\cdot\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot\cdot;\beta}=T^{\cdot\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot\cdot|\beta}+\ldots+\left\{ {\alpha \atop \beta\rho} \right\}T^{\cdot\rho\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot\cdot}+\ldots, \tag{0.10}$$

$$T^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\cdot;\beta}=T^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\cdot|\beta}+\ldots-\left\{ {\rho \atop \alpha\beta} \right\}T^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\rho\cdot}+\ldots. \tag{0.11}$$

Индексы, написанные после точки с запятой, имеют тензорный характер и могут быть подняты или опущены согласно обычным правилам.

Из символов Кристоффеля образуем полный тензор Римана

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}=\left\{ {\mu \atop \nu\sigma} \right\}_{|\rho}-\left\{ {\mu \atop \nu\rho} \right\}_{|\sigma}+\left\{ {\mu \atop \tau\rho} \right\}\left\{ {\tau \atop \nu\sigma} \right\}-\left\{ {\mu \atop \tau\sigma} \right\}\left\{ {\tau \atop \nu\rho} \right\}. \tag{0.12}$$

Из него, положив $\mu=\sigma$, образуем свернутый тензор Римана (тензор Риччи)

$$R_{\mu\nu}=R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}=\left\{ {\sigma \atop \mu\sigma} \right\}_{|\nu}-\left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\}_{|\sigma}+\left\{ {\sigma \atop \tau\nu} \right\}\left\{ {\tau \atop \mu\sigma} \right\}-\left\{ {\sigma \atop \tau\sigma} \right\}\left\{ {\tau \atop \mu\nu} \right\} \tag{0.13}$$

и скаляр кривизны

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{0.14}$$

Тензор Эйнштейна имеет вид

$$G_{\alpha\beta}=R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R. \tag{0.15}$$

Все величины $g_{\alpha\beta}$, $\left\{ {\nu \atop \alpha\beta} \right\}$, $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$ и т. д. имеют геометрический характер. По крайней мере некоторые из них имеют определенный физической смысл. В некотором смысле символы Кристоффеля представляют собой напряженность гравитационного поля, а метрический тензор — его потенциалы. Позднее мы сможем вернуться к этому вопросу подробнее.

Б. δ-функции

Введем „хорошую" δ-функцию, т. е. δ-функцию, которая, обладая свойствами обычной δ-функции Дирака, удовлетворяет также условию

$$\int \frac{\delta(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^{p}}\,d\mathbf{x}=0, \qquad p=1,2,\ldots,k. \tag{0.16}$$

Все вычисления, в которых будет появляться δ-функция без каких-либо дополнительных предположений, выполнены с „хорошими" δ-функциями. Более полная теория этих функций дана в приложении 1.

В. Значения поля на мировых линиях

Назовем $\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}(s_A)$ мировой линией A-й сингулярности. За параметр, от которого зависит мировая линия, мы обычно берем не „собственное время" s_A, а время $x^0=ct$. Тогда движение характеризуется $\overset{A}{\xi}{}^{m}(x^0)$ и $\xi^0=x^0$. Положим

$$f=f(x^0,\ x^a,\ \overset{A}{\xi}{}^{a}(x^0),\ \overset{A}{\xi}{}^{a}{}_{|0},\ \overset{A}{\xi}{}^{d}{}_{|00},\ \ldots).$$

Тогда процесс „препарирования“ (tweedling process), соответствующий A-й сингулярности и обозначенный $\overset{A}{\sim}$, написанным над „препарированным“ выражением, означает следующее: во-первых, мы пренебрегаем членом в f, дающим сингулярную часть при $x = \overset{A}{\xi}$; во-вторых, вводятся выражения $\overset{A}{\xi}{}^k$ вместо x^k в регулярную часть f. Или, используя нашу „хорошую“ δ-функцию, определим

$$\overset{A}{\tilde{f}} = \int d\mathbf{x}\, \delta(\mathbf{x} - \overset{A}{\boldsymbol{\xi}}(x^0))\, f(x^0, x^k, \overset{A}{\xi}{}^a). \tag{0.17}$$

Из этого определения следует (если мы опускаем индексы A):

$$\tilde{\varphi}_{|0} = \widetilde{\varphi_{|0}} + \widetilde{\varphi_{|s}}\,\xi^s{}_{|0} = \widetilde{\varphi_{|\alpha}}\,\xi^\alpha{}_{|0}, \tag{0.18}$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi^s} = \widetilde{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^s}} + \widetilde{\varphi_{|s}}.$$

Мы будем повсюду полагать, что функции, с которыми мы имеем дело, подчиняются правилу „препарирования“ для произведения, что означает:

$$\widetilde{\varphi\psi} = \tilde{\varphi}\,\tilde{\psi}. \tag{0.19}$$

Более подробно см. приложение 2.

Г. Ковариантный характер δ-функций. Тензоры на мировых линиях

Четырехмерная δ-функция Дирака является скалярной плотностью. Это следует из соотношения

$$\int \delta_{(4)}(x)\, dx = 1. \tag{0.20}$$

Под „тензорами на мировых линиях“ будем понимать тензоры, определенные только на мировых линиях ξ^α. К таким тензорам можно применять правила тензорной алгебры, но не тензорного анализа. Чтобы применить последний, необходимо иметь тензорные поля. Можно преобразовать тензор, определенный вдоль мировой линии, по крайней мере символически, в поле тензорной плотности следующим образом:

$$\mathfrak{T}^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_m}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \delta_{(4)}(x - \xi(\lambda))\, T^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\beta_1 \ldots \beta_m}(\lambda). \tag{0.21}$$

Свойства преобразования $\delta_{(3)}$ следуют из

$$\delta_{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(4)}\, d\xi^0, \tag{0.22}$$

что вместе с (0.20) дает

$$\int \delta_{(3)}\, d\mathbf{x} = 1. \tag{0.23}$$

Это значит, что $\delta_{(3)}\, d\mathbf{x}$ может рассматриваться как инвариант. Если $\delta_{(3)}$-функции есть наши „хорошие“ δ-функции, то можно принять (0.22) за определение „хорошей“ $\delta_{(4)}$-функции.

Более подробно см. приложение 3.

ГЛАВА I

Гравитационное взаимодействие и общая теория движения

§ 1. Общая постановка физической проблемы. Частицы и гравитационное поле

Сформулируем нашу проблему в общем виде как задачу о частицах и гравитационном взаимодействии между ними.

Частицы движутся в римановом континууме. Его геометрия зависит от расположения и движения этих частиц; она определяется распределением материи. Такова картина, которую мы имеем в ОТО. Правильна ли она? В этом параграфе мы попытаемся набросать ответ на этот вопрос.

Сначала несколько слов о понятии точечных частиц. Это понятие, очевидно, является изобретением человеческого ума. С его помощью мы описываем гораздо более сложную действительность. Его применение подразумевает, что в каком-либо данном случае можно пренебречь размерами тел и их структурой, если мы хотим описать только наиболее существенные характеристики движения. За это упрощение мы должны кое-чем заплатить. Картина материи будет проста, но картина поля становится сложной. Поле становится сингулярным на мировых линиях! Однако природа этого затруднения не носит физического характера, следовательно, простительно трактовать его как нефизическое, т. е. чисто формальным путем. Поступая таким образом, мы используем математический аппарат, развитый в приложении и кратко приведенный в разделе „Система обозначений".

В дальнейшем мы скажем больше о трудностях, связанных с сингулярностями поля. Они окажутся важными при нашем анализе с формальной точки зрения, поскольку мы поставили себе цель найти существенные характеристические особенности движения точечных частиц. Не следует, однако, переоценивать эти трудности с точки зрения физики. Они несущественны и не связаны с логической структурой ОТО.

Если мы примем любую координатную систему, относительно которой мы хотим описывать движение точечных частиц, то ее описание заключается в установлении:

1) мировых линий частиц $\overset{A}{\xi}{}^{\alpha} = \overset{A}{\xi}{}^{\alpha}(\lambda)$;

2) метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, который характеризует геометрические свойства континуума.

Таким образом, для нахождения мировых линий и метрического тензора необходимо знать законы, управляющие движением, и законы, управляющие метрическим полем, которое в свою очередь оказывается сформированным посредством движения.

Это трудная проблема, к решению которой мы будем подходить постепенно. Чтобы охарактеризовать механизм, связывающий поле и движение в ОТО, начнем с некоторых замечаний относительно поля вообще. В конце этого параграфа мы увидим, какие из этих понятий могут быть применены в ОТО.

В ньютоновской физике понятие поля сил и более специальное понятие гравитационного поля не имеет основного значения. Гравитационная теория Ньютона говорит главным образом о силе, действующей на частицы и зависящей только от их взаимного расстояния и от их масс. Такая сила однозначно определяется этими расстояниями и массами, и ньютоновские уравнения движения позволяют, по крайней мере в принципе, определить координаты точечных частиц как функции времени. Тот факт, что сила между частицами существенно зависит от их расположения, обычно понимается в следующем смысле: действие одной частицы на другую распространяется с бесконечной скоростью. Или, как это часто полагают, ньютоновская физика вводит действие на расстоянии (дальнодействие).

Согласно теории относительности, никакое действие не может распространяться со скоростью большей чем c — скорость света. Таким образом, поле, распространяющееся от одной точки к другой, в основном по теории относительности, становится физической реальностью, столь же реальным и материальным, что и корпускулярная материя. Сегодня во всех описаниях природы мы имеем две принципиальные концепции: поля и материи. Кроме корпускулярной материи, существует поле с его законами изменений в пространстве и во времени, которые носят детерминированный характер. Эти законы столь же важны, если не более, чем те, которые описывают корпускулярную материю.

Предположение о существовании таких полей с конечной скоростью распространения приводит к некоторым законам относительно их структуры. Поля должны описываться векторами или тензорами в четырехмерном многообразии как функциями от x^α, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям в частных производных гиперболического типа, так что может быть корректно поставлена задача Коши. Это является математическим выражением того физического положения, что поле управляется детерминированными законами. Мы требуем также от этих уравнений, чтобы они выражали тот физический факт, что поле обусловлено движущимися частицами. Таким образом, при нашем математическом описании в правых частях этих уравнений обычно по-

являются некоторые выражения, характеризующие источники поля. Очевидно, что δ-функция Дирака является удобным математическим инструментом для характеристики источников и их движения, если рассматриваются точечные частицы.

Это дуалистическая точка зрения, которую обычно принимают в физических теориях, например в теории Максвелла. Иначе говоря, мы принимаем существование как поля, так и его источников. Но что можно сказать о движении этих источников? Выдвинем утверждение: никакая линейная теория поля не может определить движение этих источников, за исключением тривиальных случаев. Это можно увидеть следующим образом. Допустим, что движение частицы A определяется уравнениями поля. Возьмем теперь другое решение, в котором уравнениями поля определяется движение другой частицы B. Затем, поскольку уравнения линейны, существует решение, согласно которому обе частицы A и B движутся точно так же, как и раньше, т. е. как и в случае решений, в которых движется только частица A или только частица B. Таким образом, мы приходим к абсурдному выводу: движение частицы A определяется уравнениями поля, но оно не меняется от присутствия или движения частицы B. Следовательно, в линейной теории можно найти движение только в тривиальном случае невзаимодействующих тел.

Итак, в каждой линейной теории взаимодействующих частиц нужно добавить к уравнениям поля уравнения движения источников поля. В случае точечных источников это будут обычные дифференциальные уравнения второго порядка, в которых ускорение частицы определяется значением поля в точке нахождения частицы.

Таким образом, мы говорим: законы распространения поля обычно описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа; движение источников поля, т. е. частиц или зарядов, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых ускорения определяются как функции поля в точке, где частица находится в данный момент. Такова ситуация, которую мы имеем в виду, когда говорим о близкодействии.

Может показаться, что все линейные и нелинейные релятивистские теории должны базироваться на близкодействии в указанном выше смысле. Однако это не совсем так. В частности, нам придется несколько изменить понятие близкодействия так, чтобы оно удовлетворяло эйнштейновской теории гравитации.

Гравитационные уравнения Эйнштейна являются гиперболическими дифференциальными уравнениями для метрического поля $g_{\alpha\beta}$. Компоненты метрического поля понимаются также как потенциалы гравитационного поля. Источники поля образуют тензор энергии; они появляются в правой части уравнений поля и характеризуют распределение и движение корпускулярной материи. Следовательно, такая ситуация представляется вполне типичной, целиком подходящей под описанную выше схему и очень похожей на случай уравнений Максвелла. Но здесь есть одно очень существенное отличие. В то время как в описанной выше ситуации уравнения движения должны быть добавлены к теории поля (например, уравнения движения Лоренца), для ОТО это несправедливо. Это нелинейная теория, в которой движение источников определяется уравнениями поля. Нашей целью в данном параграфе и является предварительное исследование этой особой ситуации.

Для большей ясности попытаемся сказать более точно, что мы понимаем под словами „уравнения движения“ в теории гравитации, а равным образом и в любой другой теории поля. Для этой цели удобнее разделить уравнения движения на три класса.

1. Уравнения движения первого рода являются уравнениями движения для пробной частицы; мы будем понимать под ними уравнения движения частицы, на которую действует данное внешнее поле, в то время как поле не зависит от движения самой частицы.

Следовательно, под пробной частицей мы подразумеваем частицу, которую можно не считать источником поля; это можно сделать в том случае, если взаимодействие частицы с полем бесконечно мало, так что изменением поля, вызванным присутствием частицы, можно пренебречь. В случае гравитационного поля под пробной частицей мы подразумеваем частицу с бесконечно малой массой.

Согласно принципу близкодействия, такое внешнее поле действует на пробную частицу; вторые производные ее координат по собственному времени определяются внешним гравитационным полем. Так как сама частица не участвует в формировании поля, то последнее регулярно вдоль мировой линии частицы. Достаточно ввести во внешнее поле координаты пробной частицы.

В первый период развития ОТО уравнения движения для пробной частицы были постулированы как уравнения геодезических, выведенные из вариационного принципа. Таким образом, в ОТО (в случае пробной частицы), как и в любой линейной дуалистической теории, мы имели две независимые системы уравнений: для поля и для движения этой пробной частицы. Как уравнения поля, так и уравнения движения могут быть вообще (в теории гравитации так же, как и в теории Лоренца) выведены из одного вариационного принципа

$$\delta(W_f + W_I) = 0, \tag{1.1}$$

где W_f зависит только от поля, а W_I—как от поля, так и от мировой линии частицы. Однако в случае пробной частицы это урав-

нение можно разделить на два независимых вариационных принципа:

$$\delta W_f + \delta W_I = 0, \quad \delta W_I = 0. \tag{1.1a}$$

В первом мы варьируем поле, во втором—мировую линию. В основном все, что было известно на ранней стадии существования ОТО, поскольку дело касалось движения, заключалось в уравнениях движения для пробной частицы, которые были приняты независимо.

Такая ситуация продолжалась до 1927 г., когда появилась работа Эйнштейна и Громмера. В этой работе утверждалось, что уравнения движения пробной частицы не обязательно добавлять к уравнениям поля, но что они являются следствием уравнений поля. Одной из причин того, что уравнения движения пробной частицы возможно вывести из уравнений поля, являлась нелинейность уравнений поля. Таким образом, в ОТО нет необходимости постулировать какие-либо уравнения движения для пробной частицы. Достаточно одних уравнений поля!

2. Под уравнениями движения второго рода мы будем подразумевать уравнения движения для конечных масс, чьи ускорения являются функциями поля на мировых линиях частиц. Таким образом, поле, действующее на частицу, может зависеть от массы самой частицы и от ее движения. Но в случае точечной частицы собственное поле бесконечно на мировой линии частицы. Следовательно, мы должны найти определенный смысл понятия поля в точке нахождения частицы. Именно здесь будет играть существенную роль процесс „препарирования“, описанный в разделе „Система обозначений“ и в приложении 2.

С другой стороны, мы знаем, что поле остается неопределенным, пока не определено движение. Следовательно, уравнения движения второго рода будут иметь только символическое значение, поскольку они будут содержать неизвестную величину—поле в точке нахождения частицы. Чтобы сделать определенными эти уравнения движения, нам, очевидно, нет необходимости знать везде все компоненты поля. Достаточно только знать комбинацию, в которой они появляются в уравнениях движения, и знать их только на мировой линии частицы.

Эти общие уравнения второго рода на практике могут быть найдены в любой теории поля из вариационного принципа

$$\delta W_I = 0, \tag{1.2}$$

где W_I — в сущности то же самое, что и раньше в (1.1a), с той только разницей, что поле в точках на мировой линии рассматривается не как данное, а как выведенное из уравнений поля.

Позже мы покажем, что в случае ОТО из уравнений поля можно получить те же уравнения движения, которые выводятся из вариационного принципа. Практическое значение этих уравнений, однако, невелико, пока поле, которое в них входит, остается неизвестным; оно должно быть выведено из уравнений поля.

3. Уравнения движения третьего рода находятся из уравнений движения второго рода введением в них действительных значений поля.

Как это должно быть сделано? Ответ на этот вопрос не прост. Мы попытаемся сейчас наметить его в общих чертах, а более подробно сделаем это позднее.

Вернемся к случаю линейной дуалистической теории поля. Допустим, что мы имеем уравнения поля для произвольного движения. Другими словами, мы предполагаем, что уравнения поля не определяют движения и что уравнения движения независимо добавляются к уравнениям поля. Именно в этом случае мы можем решить уравнения поля для произвольного движения. Тензоры поля—решения уравнения поля, символически обозначаемые как f, зависят от положения частицы и функционально — от мировых линий $\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}$. Таким образом, можно символически написать

$$f = f(x^{\alpha})[\overset{1}{\xi}{}^{\mu}, \overset{2}{\xi}{}^{\mu}, \ldots, \overset{N}{\xi}{}^{\mu}]. \tag{1.3}$$

Затем, полагая в f вместо x^{α}, скажем, $\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}(x^0)$, найдем поле, действующее на A-ю частицу. Вводя эти величины для поля в добавленные уравнения движения, мы получим систему дифференциально-функциональных уравнений, которые будем называть уравнениями движения третьего рода, для мировых линий N частиц. Таким образом, в этих уравнениях поле уже исчезает и остаются уравнения, образованные одними ξ. Их интегрирование даст движение N частиц.

Такова, вообще говоря, ситуация в любой линейной теории, в которой движение источников произвольно. Но мы особенно заинтересованы в уравнениях движения в ОТО. В теории гравитации Эйнштейна ситуация в некоторых отношениях более сложна, в других — она проще, чем описанная выше.

В каком отношении ситуация более сложна?

В ОТО нет уравнений поля с произвольным движением и, следовательно, дополнительно, уравнений движения. Та же самая система уравнений, которая определяет поле, определяет также и движение. Как же можно найти решения этих уравнений, решения, дающие одновременно поле и движение? Поле определяется движением, а движение — полем. Каков выход из этого затруднения? Мы увидим в дальнейшем, что имеются два подхода. Мы опишем здесь эти методы очень кратко и упростим их описание (пока) настолько, чтобы сделать их не вполне достоверными.

Первый заключается в следующем: изменим гравитационные уравнения Эйнштейна в некоторую искусственную систему дифференциальных уравнений, выбранную так, что она допускает произвольное движение. (Это делается посредством нефизического поля, которое мы будем называть дипольным полем.) Затем найдем поле, соответствующее этим неэйнштейновским уравнениям. Однако в конце мы хотим вернуться к эйнштейновским уравнениям. Это можно сделать, только удалив нефизическое поле и, таким образом, ограничив движение тем, которое предписывается уравнениями Эйнштейна. Таким образом, указанная процедура состоит в нахождении поля для неэйнштейновских уравнений и затем одновременно в ограничении как поля, так и движения таким образом, чтобы оба они удовлетворяли уравнениям ОТО.

Второй способ основан на методе приближений. Грубо говоря, он может быть описан следующим образом. Мы начинаем с ньютоновского поля, которое в первом приближении удовлетворяет уравнениям поля ОТО. Затем находим движение, принадлежащее данному полю и определяемое уравнениями поля, т. е. ньютоновское движение. Сделав это, можно найти поле в следующем приближении. Этому полю соответствует движение, вычисленное (с помощью этого поля) с точностью пост-ньютоновского приближения. На каждом этапе приближения существование уравнений движения образует условия, которые дают возможность продолжить процедуру приближения для поля дальше на один шаг. Таким образом, шаг за шагом можно определять поле и движение с возрастающей точностью.

В этом состоят идеи, которые мы будем применять при изучении проблемы движения в ОТО. Они делают случай гравитационного поля более сложным, чем, скажем, случай электромагнитного поля. Однако, как мы упоминали выше, в некотором отношении ситуация более проста, чем для электромагнитного или для какого-либо другого линейного поля.

В каком же отношении ситуация проще?

Мы говорили выше, что уравнения движения третьего рода должны быть (вообще говоря) дифференциально-функциональными уравнениями. Или, другими словами, дифференциальными уравнениями бесконечного порядка, так как для описания всех ξ в произвольный момент необходимо знать все производные от ξ в этот момент. Однако гравитационные уравнения движения, по крайней мере в пост-ньютоновском приближении, являются системой $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Следовательно, их структура гораздо проще той, которую мы могли предсказать в общем случае.

Как подобная ситуация в ОТО согласуется с нашей концепцией близкодействия? Эта концепция была создана для линейных теорий, в которых движение не определяется уравнениями поля. Ее математическим выражением являются гиперболические уравнения поля и дифференциально-функциональные уравнения движения третьего рода.

В ОТО мы имеем также гиперболические уравнения для поля, как и в линейных теориях. Однако после использования метода приближений уравнения движения, которые следуют из уравнений поля, превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка; следовательно, они имеют форму, сходную с ньютоновской теорией движения, т. е. со случаем дальнодействия. В этом отношении концепция близкодействия, созданная на основании линейных теорий поля, не согласуется с ОТО.

Могут ли эти уравнения третьего рода быть получены из вариационного принципа, в котором фигурируют только мировые линии, а не поля? Мы покажем, что это действительно может быть сделано для уравнений движения вплоть до пост-ньютоновского порядка приближения.

Мы будем называть такие вариационные принципы, ведущие к уравнениям движения третьего рода, принципами типа Фоккера.

Резюмируем коротко этот существенный пункт: именно поле имеет первостепенную важность в ОТО. Уравнения поля определяют не только само поле: они определяют также и движение.

§ 2. Теория гравитации Ньютона

Теория гравитации Ньютона есть теория, базирующаяся на концепции дальнодействия. Гравитационное поле в ней появляется только как вспомогательный математический инструмент. Благодаря своей простоте эта теория очень удобна в качестве примера, иллюстрирующего три рода уравнений движения и простые вариационные принципы, которые к ним приводят.

Положим, что $\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}(t)$ есть мировые линии N точечных частиц ($A=1, 2, \ldots, N$), $\overset{A}{m}$ — их массы, а $\varphi(\mathbf{x}, t)$ — ньютоновское гравитационное поле. В качестве основы теории Ньютона примем вариационный принцип

$$\delta W[\varphi, \overset{1}{\boldsymbol{\xi}}, \overset{2}{\boldsymbol{\xi}}, \ldots, \overset{N}{\boldsymbol{\xi}}]=0, \tag{2.1}$$

где действие W является функционалом поля $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и мировых линий $\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}(t)$. Вариация должна производиться как по φ, так и по ξ. Действие W состоит из двух частей: W_f, относящейся к полю,

и W_I, соответствующей и мировым линиям частиц и полю, т. е. взаимодействию поле — материя

$$W=W_f+W_I. \tag{2.2}$$

Мы определяем W_f и W_I:

$$W_f=-\frac{1}{4\pi k}\int d\mathbf{x}\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{1}{2}\varphi_{|a}\varphi_{|a} \tag{2.3}$$

(k — гравитационная постоянная),

$$W_I=\sum_{A=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{1}{2}\overset{A}{m}\dot{\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}}{}^2-\sum_{A=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} dt\int d\mathbf{x}\,\overset{A}{m}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}(t))\,\varphi(\mathbf{x}, t). \tag{2.4}$$

Начнем с уравнений поля. Они получаются варьированием $W=W_f+W_I$ по φ. Имеем

$$\delta W=-\sum_{A=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} dt\int d\mathbf{x}\,\overset{A}{m}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,\delta\varphi(\mathbf{x}, t)+ \\ +\frac{1}{4\pi k}\int_{t_1}^{t_2} dt\int d\mathbf{x}\,\varphi_{|aa}\,\delta\varphi; \tag{2.5}$$

отсюда

$$\varphi_{|aa}=4\pi k\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}). \tag{2.6}$$

Если допускать только решения, исчезающие на бесконечности, то решение верхнего уравнения однозначно

$$\varphi=-k\sum_{A=1}^{N}\frac{\overset{A}{m}}{|\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}|}. \tag{2.7}$$

Таким образом можно решить ньютоновские уравнения поля для произвольного движения, т. е. при произвольных $\boldsymbol{\xi}(t)$. Поле не зависит функционально от мировых линий. Поле φ есть просто функция пространственных координат частиц, взятых в один и тот же момент времени.

Теперь о ньютоновских уравнениях движения.

Уравнения движения первого рода, или уравнения движения для пробных частиц в данном гравитационном поле, получаются, если положить $\overset{1}{m}=\Delta m$ в W_I и $\overset{A}{m}=0$ для всех других частиц (т. е. для $A=2, 3, \ldots, N$). Допуская, что φ регулярна вдоль мировой линии $\boldsymbol{\xi}(t)$ пробной частицы, примем во внимание только следующую часть W_I:

$$W'_I=\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{1}{2}\Delta m\,\dot\xi^s\dot\xi^s-\Delta m\,\tilde\varphi(\boldsymbol\xi,\,t)\right). \tag{2.8}$$

Варьируя W'_I по ξ^s, имеем

$$\delta W'_I=-\int_{t_1}^{t_2} dt\,\Delta m\,\delta\xi^s\left(\ddot\xi^s+\tilde\varphi_{|s}\right),\qquad \left(\tilde\varphi_{|s}=\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\xi^s}\right), \tag{2.9}$$

откуда в качестве уравнений движения для пробной частицы в данном гравитационном поле φ получаем

$$\Delta m\,\ddot\xi^s=-\Delta m\,\tilde\varphi_{|s} \tag{2.10}$$

и, разделив на Δm, окончательно имеем

$$\ddot\xi^s=-\tilde\varphi_{|s}. \tag{2.11}$$

Уравнения движения второго рода мы получим, варьируя выражение (2.4) для W_I по $\overset{A}{\boldsymbol\xi}(t)$:

$$\delta W_I=-\sum_{A=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} dt\,\overset{A}{m}\,\delta\overset{A}{\xi}{}^s\left(\ddot{\overset{A}{\xi}}{}^s-\int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol\xi})_{|s}\,\varphi(\mathbf{x},\,t)\right). \tag{2.12}$$

Интегрируя под интегралом по частям и учитывая $\partial/\partial\mathbf{x}=-\partial/\partial\boldsymbol\xi$, получаем уравнения движения второго рода

$$\ddot{\overset{A}{\xi}}{}^s=-\overset{A}{\widetilde{\varphi_{|s}}}=-\int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol\xi})\,\varphi_{|s}. \tag{2.13}$$

В этих уравнениях появляются напряженности поля вдоль мировой линии. Но φ может быть сингулярно вдоль мировой линии. От этой сингулярности можно избавиться, используя нашу „хорошую" δ-функцию. В случае пробной частицы было безразлично, использовали ли мы нашу „хорошую" δ-функцию или δ-функцию Дирака, так как единственной ее целью было ввести $\boldsymbol\xi$ вместо $\mathbf{x}$. В случае пробной частицы было также безразлично, использовали ли мы $\tilde\varphi_{|s}$ или $\widetilde{\varphi_{|s}}$, так как здесь φ не зависит от ξ. Это уже не безразлично, когда мы варьируем (2.12). При переходе от (2.12) к (2.13) необходимо допустить, что φ, по крайней мере в своей регулярной части, не зависит явно от $\boldsymbol\xi$; если же она зависит от ξ, то мы варьируем по $\boldsymbol\xi$ только δ-функции, а не потенциалы φ.

Уравнения третьего рода получаются с помощью подстановки в в уравнения второго рода переменных поля как функций мировых

линий частиц; это означает, что мы должны ввести в уравнение (2.13) для φ значение (2.7). Имеем

$$\varphi_{|a}=k\sum_{B=1}^{N}\overset{B}{m}\,\frac{x^a-\overset{B}{\xi}{}^a(t)}{|\mathbf{x}-\overset{B}{\boldsymbol\xi}(t)|^3}, \tag{2.14}$$

так что

$$\overset{A}{\widetilde{\varphi_{|a}}}=k\int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol\xi})\sum_{B=1}^{N}\overset{B}{m}\,\frac{x^a-\overset{B}{\xi}{}^a}{|\mathbf{x}-\overset{B}{\boldsymbol\xi}|^3}=k\sum_{\substack{B=1\\ B\neq A}}^{N}\overset{B}{m}\,\frac{\overset{A}{\xi}{}^a-\overset{B}{\xi}{}^a}{|\overset{A}{\boldsymbol\xi}-\overset{B}{\boldsymbol\xi}|^3}. \tag{2.15}$$

Это уравнение правильно, так как $\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol\xi})$ заменяет $\mathbf{x}$ на $\overset{A}{\boldsymbol\xi}(t)$ в регулярной части функции. Можно заметить, между прочим, что эти уравнения будут справедливы при использовании не только нашей „хорошей" δ-функции, но и обычной δ-функции Дирака. Это будет действительно так, ибо интеграл от сингулярной части $\varphi_{|a}$ исчезнет по причине сферической симметрии обычных δ-функций. Следовательно, чтобы получить регулярное выражение для поля на мировых линиях в теории Ньютона, достаточно учесть сферическую симметрию обычной δ-функции и нет необходимости вводить нашу „хорошую" δ-функцию. Таким образом, вводя (2.15) в (2.13), получаем уравнения третьего рода

$$\ddot{\overset{A}{\xi}}{}^a=-k\sum_{\substack{B=1\\ B\neq A}}^{N}\overset{B}{m}\,\frac{\overset{A}{\xi}{}^a-\overset{B}{\xi}{}^a}{\left|\overset{A}{\boldsymbol\xi}-\overset{B}{\boldsymbol\xi}\right|^3}, \tag{2.16}$$

или, умножая на $\overset{A}{m}$, более обычную форму

$$\overset{A}{m}\,\ddot{\overset{A}{\xi}}{}^a=-k\sum_{\substack{B=1\\ B\neq A}}^{N}\overset{A}{m}\overset{B}{m}\,\frac{\overset{A}{\xi}{}^a-\overset{B}{\xi}{}^a}{\left|\overset{A}{\boldsymbol\xi}-\overset{B}{\boldsymbol\xi}\right|^3}. \tag{2.17}$$

Теперь можно легко ввести вариационный принцип Фоккера, приводящий к (2.17). Это вариационный принцип, хорошо известный из теоретической механики,

$$\delta W_F=\delta\left[\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\sum_{A=1}^{N}\frac{1}{2}\,\overset{A}{m}\,\dot{\overset{A}{\xi}}{}^s\dot{\overset{A}{\xi}}{}^s+\frac{1}{2}\sum_{\substack{A,\,B=1\\ A\neq B}}^{N}k\,\frac{\overset{A}{m}\overset{B}{m}}{\left|\overset{A}{\boldsymbol\xi}-\overset{B}{\boldsymbol\xi}\right|}\right)\right]=0, \tag{2.18}$$

где вариация должна производиться по мировым линиям.

Какова связь между этим вариационным принципом и вариационным принципом для уравнений второго рода? Ответ состоит в следующем. Если в $W = W_f + W_I$ ввести в качестве поля φ конкретное решение

$$\varphi = -k \sum_{A=1}^{N} \frac{\overset{A}{m}}{|\mathbf{x} - \overset{A}{\xi}|} \tag{2.19}$$

уравнений поля, то получим правильное выражение для W_F.

Чтобы доказать эту теорему, будем исходить из W_f. Мы имеем следующее равенство, которое вводится только для вариации по φ:

$$W_f = -\frac{1}{4\pi k}\int d\mathbf{x}\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{1}{2}\varphi_{|a}\varphi_{|a} = \frac{1}{8\pi k}\int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x}\,\varphi_{|aa}\varphi. \tag{2.20}$$

Заменяя φ из (2.19) и используя уравнения поля (2.6), имеем

$$W_f = -\frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N}\sum_{B=1}^{N} k\overset{A}{m}\overset{B}{m}\int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x} - \overset{A}{\xi})\left|\mathbf{x} - \overset{B}{\xi}\right|^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{A\neq B=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} dt\,k\frac{\overset{A}{m}\overset{B}{m}}{|\overset{A}{\xi} - \overset{B}{\xi}|} - \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} dt\,k\overset{A}{m}{}^2\int d\mathbf{x}\,\frac{\delta(\mathbf{x} - \overset{A}{\xi})}{|\mathbf{x} - \overset{A}{\xi}|}. \tag{2.21}$$

Последний интеграл исчезает, ибо наши δ-функции являются „хорошими“. Теперь, подставляя φ из (2.19) в W_I, имеем

$$W_I = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{A=1}^{N}\frac{1}{2}\overset{A}{m}\,\dot{\overset{A}{\xi}}{}^s\dot{\overset{A}{\xi}}{}^s + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{A,B=1}^{N} k\overset{A}{m}\int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x} - \overset{A}{\xi})\frac{\overset{B}{m}}{|\mathbf{x} - \overset{B}{\xi}|} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{A=1}^{N}\frac{1}{2}\overset{A}{m}\,\dot{\overset{A}{\xi}}{}^s\dot{\overset{A}{\xi}}{}^s + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{\substack{A,B=1\\ A\neq B}}^{N} k\frac{\overset{A}{m}\overset{B}{m}}{|\overset{A}{\xi} - \overset{B}{\xi}|} +$$

$$+ \sum_{A=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2} dt\,k\overset{A}{m}{}^2\int d\mathbf{x}\,\frac{\delta(\mathbf{x} - \overset{A}{\xi})}{|\mathbf{x} - \overset{A}{\xi}|}. \tag{2.22}$$

Последний интеграл снова исчезает по тем же причинам, что и раньше. Складывая два последних уравнения, находим

$$W_f + W_I = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\sum_{A=1}^{N}\frac{1}{2}\overset{A}{m}\,\dot{\overset{A}{\xi}}{}^s\dot{\overset{A}{\xi}}{}^s + \frac{1}{2}\sum_{\substack{A,B=1\\ A\neq B}}^{N} k\frac{\overset{A}{m}\overset{B}{m}}{|\overset{A}{\xi} - \overset{B}{\xi}|}\right), \tag{2.23}$$

что тождественно с W_F Фоккера, приведенной нами (2.18). Но полное согласие получено благодаря использованию нашей

„хорошей“ δ-функции. Используя обычную δ-функцию, мы имели бы дополнительное выражение в (2.23) вида

$$W_{\text{собств.}} = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{A=1}^{N} k\overset{A}{m}{}^2\int d\mathbf{x}\,\frac{\delta(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}, \tag{2.24}$$

которое равно нулю в случае нашей „хорошей“ δ-функции и бесконечно в случае δ-функции Дирака и вообще может принимать любое заранее заданное значение, так как можно найти тип δ-функции, для которой

$$\int d\mathbf{x}\,\frac{\delta(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} = \omega_{(1)},$$

где $\omega_{(1)}$ — произвольное заранее заданное число. В любом случае это дополнительное выражение будет постоянным и не даст никакого вклада при вариации. Таким образом, поскольку дело касается вариации W_F, наше утверждение не зависит от выбора δ-функции.

Теория гравитации Ньютона, резюме которой изложено в этом параграфе, использует идеализированную концепцию точечных частиц. С ее помощью мы представляем себе существенные характерные особенности движения планет, на которое размеры планет и их вращения оказывают малое влияние.

ОТО является по существу обобщением и расширением простой теории Ньютона. Здесь тоже введение точечных частиц и использование δ-функций позволит нам описать наиболее важные особенности их движения.

Теория Ньютона была развита в этом параграфе в таком виде, чтобы позволить нам позднее лучше выяснить различия, а также, конечно, и черты сходства между ней и ОТО. Наиболее существенная разница заключается в том, что в ОТО уравнения движения следуют из уравнений поля. Однако именно теория Ньютона послужит нам для подхода к ОТО. В самом деле, мы будем искать решения, которые при $c \to \infty$ переходят в решения теории Ньютона. Принцип соответствия столь же важен для выяснения соотношения между ОТО и теорией Ньютона, как и для соотношения между квантовой теорией и классической механикой.

§ 3. Взаимодействие в ОТО. Уравнения движения первого и второго рода

Мы имеем N точечных частиц и их мировые линии $\overset{A}{\xi}{}^a = \overset{A}{\xi}{}^a(\lambda)$. Обозначим их массы через $\overset{A}{m}_{(0)}$. Формально они могут рассматриваться как постоянные взаимодействия частиц с гравитационным полем.

Для взаимодействия W_I между частицами и гравитационным полем примем выражение

$$W_I = -\sum_{A=1}^{N} \overset{A}{m}_{(0)} c \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\, d\overset{A}{\xi^\alpha}\, d\overset{A}{\xi^\beta})^{1/2}. \qquad (3.1)$$

Мы будем интерпретировать $\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}$ согласно сказанному в разделе „Система обозначений“ или, более полно, в приложении 2, т. е. подставим $\overset{A}{\xi^k}$ вместо x^k, опуская сингулярную часть $g_{\alpha\beta}$. Мы можем написать ковариантное определение

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} = \int dx \delta_{(4)} (x - \overset{A}{\xi} (\overset{A}{\lambda})) g_{\alpha\beta}(x), \qquad (3.2)$$

где $\delta_{(4)}$ определяется выражением (0.22) с помощью наших „хороших“ δ-функций.

Если $g_{\alpha\beta}$ регулярно по x^0, что всегда имеет место, можно, снова используя (0.22), написать предыдущее уравнение в форме

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} = \int d\mathbf{x} \delta (\mathbf{x} - \overset{A}{\boldsymbol{\xi}}) g_{\alpha\beta}(\mathbf{x},\ \xi^0), \qquad (3.3)$$

где δ — наша „хорошая“ δ-функция. Следовательно, мы будем полагать, что все интегралы типа

$$\int d\mathbf{x} \frac{\delta(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^p}$$

для произвольно заданного p исчезают. Наконец, возвращаясь к обозначению (3.1), можно заметить, что σ_1 и σ_2 означают две произвольные пространственно-подобные гиперповерхности, т. е. такие, что нормали к ним n^α удовлетворяют условию $g_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta > 0$. Интегралы должны браться вдоль мировых линий между двумя поверхностями.

Определенное таким образом выражение W_I (если мы в настоящий момент оставим в стороне тонкости, возникающие из определения компонент поля вдоль мировых линий) является естественным обобщением соответствующего выражения специальной теории относительности. Действительно, в случае пространства — времени Минковского, т. е. в случае $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, согласно (0.4), наше уравнение (3.1) для W_I принимает вид

$$W_I = -\sum_{A=1}^{N} \overset{A}{m}_{(0)} c \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} ((d\overset{A}{\xi^0})^2 - d\overset{A}{\xi^a}\, d\overset{A}{\xi^a})^{1/2}, \qquad (3.4)$$

т. е. хорошо известного выражения для действия при движении по инерции в специальной теории относительности. Мы видим, что наше первоначальное выражение (3.1) для W_I является единственным разумным обобщением вышестоящего выражения для мира, обладающего кривизной.

Итак, имея W_I, легко можно получить дифференциальные уравнения движения первого и второго рода.

Начнем с уравнений движения первого рода, т. е. с уравнений движения для пробных частиц. Чтобы это сделать, следует проварьировать в (3.1) только выражение с массой m, для которой мы примем малое значение Δm. Примем также, что Δm не влияет на данное поле, которое остается регулярным вдоль мировой линии частицы. Таким образом, $\delta_{(4)}$ в (3.2) выполняет только одну роль — вводит мировую линию, т. е. ξ^α вместо x^α. Следовательно, W_I для пробной частицы, поскольку рассматривается его вариация, равно

$$W = -\Delta m c \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (g_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta)^{1/2}. \qquad (3.5)$$

Получаем уравнения движения обычным путем, варьируя W_I по ξ^α. Написав

$$ds = (g_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta)^{1/2},$$

имеем

$$\delta W_I = -\Delta m c g_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\beta}{ds} \delta\xi^\alpha \Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \\ + \Delta m c \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} ds\, \delta\xi^\alpha \left[\frac{d}{ds} g_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\beta}{ds} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu\,|\,\alpha} \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d\xi^\nu}{ds} \right]. \qquad (3.6)$$

Если $d\xi^\alpha$ исчезает на σ_1 и σ_2, то из условия $\delta W_I = 0$ получим уравнения для пробной частицы

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\beta}{ds}\right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu\,|\,\alpha} \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d\xi^\nu}{ds} = 0, \qquad (3.7)$$

где, конечно, $g_{\alpha\beta}$ и его производные должны быть взяты в точке ξ^α. Выполняя дифференцирование $(d/ds)\,[g_{\alpha\beta}(d\xi^\beta/ds)]$ в последнем уравнении и поднимая индекс α умножением этого уравнения на $g^{\alpha\rho}$, получаем

$$\frac{d^2\xi^\rho}{ds^2} + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \frac{d\xi^\mu}{ds} \frac{d\xi^\nu}{ds} = 0, \qquad (3.8)$$

где символ Кристоффеля должен быть взят в точке ξ^ν. Используя символ D для ковариантного дифференцирования, имеем

$$DT^\alpha = dT^\alpha + \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} T^\mu dx^\nu. \qquad (3.9)$$

Можно, следовательно, записать (3.8) просто в виде

$$\frac{D}{ds}\frac{d\xi^{\rho}}{ds}=0. \tag{3.10}$$

Это уравнение в той или иной форме вместе с определением линейного элемента ds целиком определяет мировую линию ξ^{α} как функцию s. Это уравнения геодезической.

Мы можем также интерпретировать W_I как функцию верхнего предела σ_2. Это значит, что мы интегрируем вдоль геодезической мировой линии от фиксированного нижнего предела до произвольного верхнего предела, который является пересечением мировой линии с произвольной пространственно-подобной гиперповерхностью. Тогда W_I становится тождественным функции, удовлетворяющей уравнению Гамильтона — Якоби. В этом случае имеем

$$\delta W_I=\frac{\partial W_I}{\partial\xi^{\alpha}}\delta\xi^{\alpha}=-\Delta m c g_{\alpha\beta}\frac{d\xi^{\beta}}{ds}\delta\xi^{\alpha}\Big|_{\sigma}, \tag{3.11}$$

так что

$$W_{I|\alpha}=\frac{\partial W_I}{\partial\xi^{\alpha}}=-\Delta m c g_{\alpha\beta}\frac{d\xi^{\beta}}{ds}. \tag{3.12}$$

Поскольку $g_{\alpha\beta}(d\xi^{\alpha}/ds)(d\xi^{\beta}/ds)=1$, то мы получаем уравнение Гамильтона — Якоби для пробной частицы

$$g^{\alpha\beta}(\xi)W_{I|\alpha}W_{I|\beta}=(c\,\Delta m)^2. \tag{3.13}$$

Иногда бывает удобно определять движение частицы, найдя общий интеграл этого уравнения. Дифференцируя его по параметрам, можно найти все интегралы уравнений движения. Таким способом можно избежать иногда трудоемких вычислений с символами Кристоффеля.

Теперь обсудим уравнения движения второго типа. Мы считаем поле $g_{\alpha\beta}(\xi)$ неизвестным; позже мы увидим, как найти его из уравнений поля. Вообще $g_{\alpha\beta}$ будет сингулярно на мировых линиях. Следовательно, нужно соблюдать осторожность в процедуре варьирования, чтобы избежать сингулярностей.

Будем варьировать $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ по ξ^{α}. Имеем

$$\begin{aligned}\delta\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}&=\int dx\,\frac{\partial}{\partial\overset{A}{\xi}{}^{\rho}}\big(\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\big)\,g_{\alpha\beta}\,\delta\overset{A}{\xi}{}^{\rho}=\\&=-\int dx\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})_{|\rho}\,g_{\alpha\beta}\,\delta\overset{A}{\xi}{}^{\rho}=\\&=\int dx\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,g_{\alpha\beta|\rho}\,\delta\overset{A}{\xi}{}^{\rho}=\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta|\rho}}}\,\delta\overset{A}{\xi}{}^{\rho},\end{aligned} \tag{3.14}$$

где $g_{\alpha\beta}$ считаются заданными функциями, не варьируемыми по ξ. Введем

$$ds_A=(\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}\,d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}\,d\overset{A}{\xi}{}^{\beta})^{1/2}$$

(удобно писать ds_A вместо $d\overset{A}{s}$). Затем приступим к вариации W_I

$$\begin{aligned}\delta W_I=&-\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\,\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\,\delta\overset{A}{\xi}{}^{\beta}\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2}+\\&+\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}ds_A\,\delta\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}\left[\frac{d}{ds_A}\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}-\frac{1}{2}\overset{A}{\widetilde{g_{\mu\nu|\alpha}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\mu}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\nu}}{ds_A}\right].\end{aligned} \tag{3.15}$$

Из условия исчезновения $\delta\overset{A}{\xi}$ на σ_1 и σ_2 выводим уравнения движения второго рода

$$\frac{d}{ds_A}\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}-\frac{1}{2}\overset{A}{\widetilde{g_{\mu\nu|\alpha}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\mu}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\nu}}{ds_A}=0. \tag{3.16}$$

Форму этих уравнений можно изменить, помня, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds_A}\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}&=\frac{d}{ds_A}\int dx\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,g_{\alpha\beta}=\\&=-\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\rho}}{ds_A}\int dx\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})_{|\rho}\,g_{\alpha\beta}=\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\rho}}{ds_A}\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta|\rho}}}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Вводя это в (3.16), имеем

$$\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}\frac{d^2\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A^2}+\overset{A}{\widetilde{[\mu\nu,\,\alpha]}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\mu}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\nu}}{ds_A}=0. \tag{3.18}$$

Теперь сделаем допущение, которое практически всегда выполняется, т. е.

$$\begin{gathered}\widetilde{g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}}=\widetilde{g^{\alpha\beta}}\,\widetilde{g_{\beta\gamma}},\\\widetilde{g^{\alpha\beta}[\mu\nu,\,\beta]}=\widetilde{g^{\alpha\beta}}\,\widetilde{[\mu\nu,\,\beta]}=\widetilde{\left\{{\alpha\atop\mu\nu}\right\}}.\end{gathered} \tag{3.19}$$

Иначе говоря, примем закон „препарирования“ для произведения, упомянутый в разделе „Система обозначений“ для g и его производных. При этих условиях можно написать (3.16) в форме

$$\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}\equiv\frac{d^2\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A^2}+\overset{A}{\widetilde{\left\{{\alpha\atop\mu\nu}\right\}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\mu}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\nu}}{ds_A}=0. \tag{3.20}$$

Как и в (3.9), можно ввести ковариантное дифференцирование $\overset{A}{\tilde{D}}$ для тензоров на A-й мировой линии

$$\overset{A}{\tilde{D}}T^{\alpha}=dT^{\alpha}+\overset{A}{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}}T^{\mu}d\overset{A}{\xi^{\nu}}. \tag{3.21}$$

Используя это обозначение, имеем

$$\overset{A}{\mathfrak{Q}^{\alpha}}=\frac{\overset{A}{\tilde{D}}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi^{\alpha}}}{ds_A}=0. \tag{3.22}$$

Итак, мы получили уравнения в форме, очень похожей на уравнения геодезической линии. Но надо помнить, что последняя их форма была получена при допущении, что $\widetilde{\varphi\psi}=\tilde{\varphi}\tilde{\psi}$ справедливо для g и его производных.

§ 4. Уравнения поля Эйнштейна

Напомним здесь знаменитые уравнения Эйнштейна для гравитационного поля. Они могут быть выведены из вариационного принципа, который мы постулируем в форме $\delta W=0$, где $W=W_f+W_I$ и

$$W_f=\frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}dx\sqrt{-g}R. \tag{4.1}$$

Здесь k — гравитационная постоянная, которая стоит в ньютоновских уравнениях

$$k=6{,}67\cdot 10^{-8}\ см^3/г\cdot сек^2.$$

Интеграл должен браться между пространственно-подобными гиперповерхностями. Подынтегральная функция есть простейшая скалярная плотность, которая может быть образована из $g_{\alpha\beta}$. Таким образом, она является также простейшим лагранжианом, который может быть постулирован, если мы отбросим возможность члена, равного постоянной, умноженной на $\sqrt{-g}$. Этот член приводит к дополнительному „космологическому члену“, равному постоянной, умноженной на $g_{\alpha\beta}$ в уравнениях поля.

В самом деле, при некоторых естественных предположениях $\sqrt{-g}R$ является единственно возможным лагранжианом. Это следует из того факта, что лагранжиан должен быть скалярной плотностью и что мы хотим, чтобы уравнения гравитационного поля содержали производные только до второго порядка включительно. Мы предполагаем это, ибо ньютоновские уравнения для гравитационного поля являются уравнениями второго порядка.

Инвариантный лагранжиан может быть построен только из полного тензора кривизны Римана $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Следовательно, единственные скаляры, которые следует принимать во внимание, кроме $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, есть скаляры типа $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ и т. д. Функция Лагранжа должна быть скалярной функцией этих инвариантов, умноженной на скалярную плотность. Она может быть также и скалярной плотностью в виде $\det\|R_{\alpha\beta}\|$. Вообще все лагранжианы, за единственным исключением $\sqrt{-g}R$, приводят к уравнениям поля четвертого порядка. Постоянная перед интегралом в (4.1) выбрана так, чтобы получить переход к ньютоновским уравнениям при $c\to\infty$.

Если имеется материя, представленная точечными сингулярностями, то полное действие должно быть суммой W_f из (4.1) и W_I из (3.1):

$$W=W_f+W_I. \tag{4.2}$$

Постоянные $\overset{A}{m}_{(0)}$ в W_I играют роль констант взаимодействия между точечными частицами и метрическим полем.

Мы получим уравнения Эйнштейна для гравитационного поля, взаимодействующего с точечными частицами, варьируя W по $g_{\alpha\beta}(x)$ и полагая $\delta W=0$.

Вычислим вариацию W, начиная с W_f:

$$\delta W_f=\frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}dx\,\delta\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\right)=$$

$$=\frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}dx\left(\sqrt{-g}R_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}+R\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right)=$$

$$=\frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}dx\left[\sqrt{-g}\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)\delta g^{\alpha\beta}+\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right]. \tag{4.3}$$

В этом уравнении мы использовали тот факт, что

$$\delta g=gg^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}=-gg_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}. \tag{4.4}$$

Поскольку

$$\delta g^{\alpha\beta}=-g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta g_{\mu\nu}, \tag{4.5}$$

то

$$\delta W_f=-\frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}dx\sqrt{-g}\left(R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right)\delta g_{\alpha\beta}+\delta S, \tag{4.6}$$

где

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi k}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\,\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\,\delta R_{\alpha\beta}. \tag{4.7}$$

Чтобы найти δS, заметим, что, хотя $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ не является тензором, его вариация $\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ является тензором. Действительно, $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} A_\alpha\, dx^\mu$ является приращением вектора A_ν при параллельном переносе от x^ρ к $x^\rho + dx^\rho$. Следовательно, $\left(\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}\right) A_\alpha\, dx^\mu$ есть разность двух векторов в той же точке $x^\rho + dx^\rho$. Каждый из них получается параллельным переносом; один из них рассматривается в старом поле $g_{\alpha\beta}$, а другой — в варьированном поле $g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$. Разность двух векторов в одной и той же точке есть вектор. Поскольку A_ν и dx^μ — произвольные векторы, то $\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ — тензор.

Используя (0.13), имеем

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\delta\left(\left\{ {\rho \atop \beta\rho} \right\}_{|\alpha}\right) - g^{\alpha\beta}\delta\left(\left\{ {\rho \atop \beta\alpha} \right\}_{|\rho}\right) + g^{\alpha\beta}\left\{ {\sigma \atop \beta\rho} \right\}\delta\left\{ {\rho \atop \sigma\alpha} \right\} +$$
$$+ g^{\alpha\beta}\left\{ {\rho \atop \sigma\alpha} \right\}\delta\left\{ {\sigma \atop \beta\rho} \right\} - g^{\alpha\beta}\left\{ {\sigma \atop \alpha\beta} \right\}\delta\left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\} - g^{\alpha\beta}\left\{ {\rho \atop \sigma\rho} \right\}\delta\left\{ {\sigma \atop \alpha\beta} \right\}. \tag{4.8}$$

Используя локальную галилееву систему координат, т. е. такую, что в данной точке

$$g_{\mu\nu|\rho} = 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad \left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} = 0,$$

имеем вместо (4.8)

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \left(g^{\alpha\mu}\delta\left\{ {\nu \atop \mu\nu} \right\} - g^{\mu\nu}\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}\right)_{|\alpha}. \tag{4.9}$$

Так как $\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ имеет тензорный характер, то в любой координатной системе

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \delta Q^\alpha{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,\delta Q^\alpha\right)_{|\alpha}, \tag{4.10}$$

где

$$\delta Q^\alpha = g^{\alpha\mu}\delta\left\{ {\nu \atop \mu\nu} \right\} - g^{\mu\nu}\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} \tag{4.11}$$

является вектором. Следовательно, возвращаясь к (4.7), находим

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi k}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\left(\sqrt{-g}\,\delta Q^\alpha\right)_{|\alpha} =$$
$$= \frac{c^3}{16\pi k}\int_{\sigma} dx\,\sqrt{-g}\,\delta Q^\alpha n_\alpha\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2}. \tag{4.12}$$

Принимая, что δQ^α исчезает на пространственно-подобных поверхностях σ_1 и σ_2, имеем

$$\delta S = 0. \tag{4.12a}$$

Итак, используя определение (0.15) тензора Эйнштейна, можно написать (4.6) в виде

$$\delta W_f = -\frac{c^3}{16\pi k}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathfrak{G}^{\alpha\beta}\,\delta g_{\alpha\beta}\,dx. \tag{4.13}$$

Теперь проварьируем действие W_I по $g_{\alpha\beta}$

$$\delta W_I = \delta\left[-\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}\,d\overset{A}{\xi}{}^\alpha\,d\overset{A}{\xi}{}^\beta\right)^{1/2}\right] =$$
$$= -\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{1}{2}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\alpha}{ds_A}\,d\overset{A}{\xi}{}^\beta\,\delta\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}, \tag{4.14}$$

где

$$\delta\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta} = \int dx\,\delta_{(4)}(x - \overset{A}{\xi})\,\delta g_{\alpha\beta}. \tag{4.15}$$

Заменяя этот член в (4.14), находим

$$\delta W_I = -\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{1}{2}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\alpha}{ds_A}\,d\overset{A}{\xi}{}^\beta\int dx\,\delta_{(4)}(x - \overset{A}{\xi})\,\delta g_{\alpha\beta}(x) =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\,\delta g_{\alpha\beta}\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{(4)}(x - \overset{A}{\xi})\,\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\alpha}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\beta}{ds_A}\,ds_A. \tag{4.16}$$

Таким образом, выполнена вариация W. Мы требуем, чтобы δW исчезало, если $\delta g_{\alpha\beta}$ произвольно и подчинено только условию $\delta Q^\alpha = 0$ на σ_1 и σ_2 для любого выбора пространственно-подобных поверхностей σ_1 и σ_2. Следовательно, соединив результаты, представленные (4.13) и (4.16), получим уравнения Эйнштейна:

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi k}{c^2}\sum_{A=1}^{N} \overset{A}{m}_{(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\, \frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}\, ds_A,$$
$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = \mathfrak{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\mathfrak{R}. \tag{4.17}$$

Эти соотношения имеют вид уравнений поля, представляющих близкодействие. Их левые части содержат нелинейные дифференциальные операции над метрическим полем $g_{\alpha\beta}$. Их правые части содержат источники поля, образованные движущимися частицами. Массы $\overset{A}{m}_{(0)}$ имеют характер постоянных взаимодействия.

Вводя метрическую плотность тензора энергии для движущихся точечных частиц, имеем

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \sum_{A=1}^{N} \overset{A}{m}_{(0)} c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\, \frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}\, ds_A. \tag{4.18}$$

С ее помощью можно написать уравнения Эйнштейна в более простой и более общей форме

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi k}{c^4}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}. \tag{4.19}$$

Эта форма является более общей, так как предполагается, что она справедлива для любого тензора энергии.

Левая и правая части этих уравнений имеют совершенно отличный друг от друга характер. Левая часть есть эйнштейновский тензор гравитационного поля. Он имеет определенный геометрический характер, являясь в то же время некоторым метрическим тензором. Правая часть, однако, является чисто физическим тензором, представляющим распределение энергии и импульса в пространстве — времени.

Эйнштейн всегда рассматривал это смешение физики и геометрии как основной недостаток, как временную схему, которая должна быть заменена в будущем единой теорией поля, где все физические поля будут иметь геометрическое соответствие. Этой проблеме Эйнштейн посвятил около тридцати лет своей жизни; он искал уравнения поля, которые давали бы решения, описывающие материю без сингулярностей. Результаты этого труда, выполненного им и его многочисленными сотрудниками, кажутся большинству физиков разочаровывающими.

Следовательно, пока примем (4.19) и поэтому допустим дуалистическую точку зрения: мы примем существование материи, которая определяет геометрию риманова континуума. Или, наоборот, зная геометрию, найдем распределение импульса и энергии.

Вернемся к случаю точечных частиц и к определению (4.18) тензора энергии. Это определение означает, что вне мировой линии имеем

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = 0, \tag{4.20}$$

т. е. уравнения поля для пустого пространства. Поле становится сингулярным только на мировой линии. Это значит, что мы принимаем уравнения поля для пустого пространства и существование некоторых мировых линий, на которых уравнения поля для пустого пространства не выполняются.

Для дальнейшего рассмотрения удобнее использовать тензор энергии для точечных частиц в несколько иной форме. Можно переписать (4.18) с помощью (0.22) в виде

$$\frac{8\pi k}{c^4}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^2}\sum_{A=1}^{N} \overset{A}{m}_{(0)} \frac{ds_A}{d\overset{A}{\xi}{}^{0}}\,\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}(x^0)). \tag{4.21}$$

Положим x^0 параметром для всех мировых линий:

$$\overset{A}{\xi}{}^{k} = \overset{A}{\xi}{}^{k}(x^0), \qquad \overset{A}{\xi}{}^{0} = x^0.$$

Затем если введем

$$\overset{A}{\mu}(x^0) = \frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2}\,\frac{dx^0}{ds_A}, \tag{4.22}$$

то сможем написать (4.21) в простой форме

$$\frac{8\pi k}{c^4}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = 8\pi\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{\mu}(x^0)\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0}. \tag{4.23}$$

Следовательно, уравнения Эйнштейна (4.19) принимают вид

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = -8\pi\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{\mu}(x^0)\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0}. \tag{4.24}$$

Это есть вид уравнений, который будет особенно удобен для нахождения уравнений движения третьего рода.

Еще одно замечание: если положить $x^0 = ct$, то, как следует из (4.22), будем иметь

$$\overset{A}{\mu}(t) = \frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right). \tag{4.25}$$

Следовательно, разложение $\overset{A}{\mu}$ по степеням c^{-1} начинается с члена второго порядка, с постоянной, которая имеет определенное физическое значение, именно с $k\overset{A}{m}_{(0)}c^{-2}$.

§ 5. Тождества Бианки

Для каждого $g_{\alpha\beta}(x)$ полный тензор Римана удовлетворяет тождествам Бианки

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\,\tau} + R^{\mu}_{\nu\sigma\tau;\,\rho} + R^{\mu}_{\nu\tau\rho;\,\sigma} = 0. \tag{5.1}$$

Поскольку они имеют тензорный характер, то достаточно доказать их справедливость в специальной системе координат. Возьмем локальную галилееву систему координат, т. е. систему, для которой в данной точке $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta\,|\,\rho} = 0$ и $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} = 0$, иначе говоря, систему координат, для которой в данной точке символы Кристоффеля исчезают, а g принимают галилеевы значения. Следовательно, в пробной точке и в такой системе координат можно легко найти левую часть (5.1) из определения (0.12) полного тензора кривизны Римана. Допуская непрерывность производных g третьего порядка, находим, что в выбранной системе координат в данной точке x^{μ} левая часть последнего уравнения тождественно равна нулю. Поскольку это уравнение имеет тензорный характер и точка x^{μ} произвольна, то левая часть должна быть равна нулю всегда и везде.

Умножая (5.1) на $g^{\nu\rho}$ и полагая $\mu = \sigma$, получаем выражения, которые также называются тождествами Бианки

$$G^{\beta}_{\alpha;\,\beta} = \left(R^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}\,\delta^{\beta}_{\alpha} R\right)_{;\,\beta} \equiv 0. \tag{5.2}$$

При ссылках здесь или позднее на тождества Бианки мы будем иметь в виду уравнения (5.2); они играют важную роль в ОТО, и мы их докажем поэтому здесь независимо от (5.1). Эти соотношения являются тождествами, под чем подразумевается их выполнение для произвольных g, коль скоро последние имеют непрерывные третьи производные.

Можно задать вопрос: какова основа тождеств Бианки? Ответ гласит: они следуют из ковариантного характера эйнштейновского тензора $G^{\alpha\beta}$ и из существования вариационного принципа, приводящего к $G^{\alpha\beta}$.

Докажем тождества таким образом, чтобы представить явно причину их справедливости, которая заключается в ковариантности по отношению ко всем преобразованиям.

Напишем еще раз выражение для W_f

$$W_f = \frac{c^3}{16\pi k} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\, \sqrt{-g}\, R. \tag{5.3}$$

Очевидно, это скаляр; следовательно, если мы будем варьировать систему координат, то соответствующая вариация W_f должна исчезнуть.

Возьмем бесконечно малое изменение системы координат $x^{\alpha} \to x'^{\alpha}$, даваемое выражением

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} - \eta^{\alpha}, \tag{5.4}$$

где η^{α} — бесконечно малое векторное поле.

Общий закон преобразования для g имеет вид

$$g_{\alpha\beta}(x) = g'_{\mu\nu}(x')\, \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\, \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}. \tag{5.5}$$

Отсюда, пренебрегая порядками выше первого, имеем

$$g'_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) + \delta g_{\alpha\beta}(x), \tag{5.6}$$

где

$$\delta g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\nu}\eta^{\nu}_{|\,\beta} + g_{\beta\nu}\eta^{\nu}_{|\,\alpha} + g_{\alpha\beta\,|\,\nu}\eta^{\nu}, \tag{5.7}$$

или

$$\delta g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha;\,\beta} + \eta_{\beta;\,\alpha}. \tag{5.8}$$

Аналогично получаем

$$\delta g^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha;\,\beta} - \eta^{\beta;\,\alpha}. \tag{5.9}$$

Помня (4.6) и (4.12), можем написать δW_f в виде

$$\delta W_f = -\frac{c^3}{16\pi k} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\, \mathfrak{G}^{\alpha\beta}\, \delta g_{\alpha\beta} + \frac{c^3}{16\pi k} \int\limits_{\sigma} d\mathrm{x}\, \sqrt{-g}\, \delta Q^{\alpha} n_{\alpha} \Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2}, \tag{5.10}$$

где δQ^{α} дано выражением (4.11). Возьмем теперь поле η^{α}, исчезающее вместе с его первыми и вторыми производными на двух гиперповерхностях, σ_1 и σ_2. Поверхностный интеграл в (5.10) исчезает, и мы получаем

$$\delta W_f = -\frac{c^3}{16\pi k} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\, \mathfrak{G}^{\alpha\beta}\, \delta g_{\alpha\beta} = 0, \tag{5.11}$$

или

$$\delta W_f = -\frac{c^3}{8\pi k} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\, \mathfrak{G}^{\alpha\beta}\, \eta_{\alpha;\,\beta} = \frac{c^3}{8\pi k} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\, \mathfrak{G}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}\, \eta_{\alpha} = 0. \tag{5.12}$$

Поле η_{α} произвольно между σ_1 и σ_2, поэтому мы должны иметь

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta} = 0, \quad \text{или} \quad \mathfrak{G}_{\alpha;\,\beta}^{\ \beta} = 0. \tag{5.13}$$

Эти уравнения, как показывает наше доказательство, независимы от уравнений поля. Доказательство показывает также характер тождеств Бианки. Они являются следствием инвариантности гравитационного действия, т. е. являются следствием тензорного характера теории, которая ковариантна по отношению ко всем преобразованиям.

§ 6. Уравнения движения как следствие уравнений поля

Вернемся к нашей основной проблеме. Мы покажем здесь, что уравнения движения являются следствием уравнений поля. Это возможно только потому, что уравнения поля нелинейны (что не означает, конечно, что любая нелинейная теория дает уравнения движения). Действительно, в теории гравитации Ньютона, где уравнения поля линейны, так же как и в теории Максвелла, уравнения движения не зависят от уравнений поля. В теории Ньютона, как мы помним, можно найти поле для произвольного движения частиц, которые понимались как источники поля. Уравнения движения, которые мы получили (в случае Ньютона) из вариационного принципа, были независимы от уравнений поля; знание их было несущественно для решения уравнений поля.

Ситуация, однако, носит совершенно другой характер в ОТО. Здесь поле и движение неразрывно связаны друг с другом. Уравнения движения являются условиями интегрируемости для уравнений поля.

Дадим теперь математическое рассмотрение, подтверждающее эти соображения и замечания, приведенные в § 1.

Выпишем еще раз уравнения поля Эйнштейна (4.17) для системы точечных частиц

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi k}{c^2}\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\beta}}{ds_A}\,ds_A.$$

Образуем ковариантные производные $;\beta$ от левой части. Ввиду существования тождеств Бианки мы должны иметь в качестве необходимого условия их интегрируемости

$$0 = \left(\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\beta}}{ds_A}\,ds_A\right)_{;\beta}, \tag{6.1}$$

или, более кратко и в более общем виде,

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \equiv \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + \left\{{\alpha \atop \rho\beta}\right\}\mathfrak{T}^{\rho\beta} = 0, \tag{6.2}$$

где $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ — тензор энергии, образующий правую часть уравнений поля Эйнштейна. Здесь мы, однако, наиболее заинтересованы

в случае точечных частиц, в котором $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ определяется как (4.18):

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c^2\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\beta}}{ds_A}\,ds_A.$$

Таким образом, в этом случае из (6.1) и (6.2) имеем

$$\frac{1}{c^2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty}ds_A\left(\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})_{|\beta}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\beta}}{ds_A} + \right.$$
$$\left. + \delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\left\{{\alpha \atop \rho\sigma}\right\}\frac{d\overset{A}{\xi^\rho}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\sigma}}{ds_A}\right) = 0. \tag{6.3}$$

Это выражение может быть представлено в иной форме. Мы видим, что

$$\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})_{|\beta}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\beta}}{ds_A} = -\frac{\partial}{\partial\overset{A}{\xi^\beta}}\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\beta}}{ds_A} =$$
$$= -\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\,\frac{d}{ds_A}\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi}) = -\frac{d}{ds_A}\left(\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\right) +$$
$$+ \delta_4(x-\overset{A}{\xi})\,\frac{d^2\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A^2}. \tag{6.4}$$

Используя это, можно привести (6.3) к виду

$$\int f(x)\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,ds,$$

так как интеграл от $(d/ds_A)[(d\overset{A}{\xi^\alpha}/ds_A)\,\delta_{(4)}]$ равен нулю для любого конечного x. Более того, выражения типа $f\delta_{(4)}$ исчезают везде, кроме точки, где $\delta_{(4)}$ не исчезает. Таким образом, можно написать

$$f(x)\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi}) = \overset{A}{\tilde{f}}\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi}).$$

Следовательно, (6.3) можно записать в виде

$$\frac{1}{c^2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty}ds_A\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\times$$
$$\times\left[\frac{d^2\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A^2} + \overset{A}{\overline{\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}}}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\mu}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi^\nu}}{ds_A}\right] = 0, \tag{6.5}$$

или

$$\frac{1}{c^2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty}ds_A\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}(s_A)=0, \qquad (6.6)$$

где, как и в (3.20),

$$\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}\equiv\frac{d^2\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A^2}+\overset{A}{\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\mu}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\nu}}{ds_A}=0.$$

Мы видим, что условие интегрируемости выполняется, если

$$\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}=0. \qquad (6.7)$$

Но верна также и обратная теорема. Это означает: из обращения в нуль дивергенции тензора энергии можно получить уравнения движения. Действительно, допустим, что $\Delta\sigma_B$ есть конечный трехмерный участок пространственно-подобного типа (т. е. кусок пространственно-подобной гиперповерхности σ_B). Допустим далее, что этот кусок гиперповерхности пересекается линией $\overset{B}{\xi}{}^{\alpha}=\overset{B}{\xi}{}^{\alpha}(s_B)$ и никакой другой; пусть точка пересечения есть $s_B=\bar{s}_B$. Если $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=0$, то мы имеем также

$$\left.\frac{d\overset{B}{\xi}{}^{\rho}}{ds_B}\right|_{s_B=\bar{s}_B}\int_{\Delta\sigma_B}d\mathrm{x}n_\rho\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=0. \qquad (6.8)$$

Поскольку имеет место (6.6), то

$$\left.\frac{d\overset{B}{\xi}{}^{\rho}}{ds_B}\right|_{s_B=\bar{s}_B}\int_{\Delta\sigma_B}d\mathrm{x}n_\rho\overset{B}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty}ds_B\delta_{(4)}(x-\overset{B}{\xi})\overset{B}{\Omega}{}^{\alpha}(s_B)=0. \qquad (6.9)$$

Принимая во внимание свойства $\delta_{(4)}$-функции, написанное уравнение будет означать

$$\overset{B}{m}_{(0)}\overset{B}{\Omega}{}^{\alpha}(\bar{s}_B)=0. \qquad (6.10)$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для любого $\bar{s}_B$, то мы видим, что действительно исчезновение тензора энергии-импульса означает справедливость уравнений движения.

При доказательстве были использованы ковариантные обозначения. Используя их, мы упростили доказательство. Можно написать (6.6), используя δ вместо $\delta_{(4)}$,

$$\frac{1}{c^2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\delta(\mathrm{x}-\overset{A}{\xi})\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}\frac{ds_A}{d\overset{A}{\xi}{}^{0}}=0. \qquad (6.11)$$

Интегрируя по трехмерной области V вокруг точки $\overset{B}{\xi}$, мы немедленно видим

$$\frac{1}{c^2}\frac{d\overset{B}{\xi}{}^{0}}{ds_B}\int_V d\mathrm{x}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=\overset{B}{m}_{(0)}\overset{B}{\Omega}{}^{\alpha}(x^0)=0. \qquad (6.12)$$

Таким образом, мы снова получаем уравнения движения в качестве условий совместности для уравнений поля.

Мы получали уравнения движения двумя путями: во-первых, варьированием W_f+W_I (или, в действительности, только W_I) по мировой линии; во-вторых, нахождением условий интегрируемости для уравнений поля. То, что было сказано до сих пор, может быть резюмировано следующим образом (причем $\delta\ldots/\delta\ldots$ означает вариационные производные):

$$\frac{\delta}{\delta\overset{A}{\xi}}(W_f+W_I)=\frac{\delta W_I}{\delta\overset{A}{\xi}}=0\rightarrow\text{Уравнения движения,}$$
$$\uparrow$$
$$\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}(W_f+W_I)=0\rightarrow\text{Уравнения поля.} \qquad (6.13)$$

Таким образом, очевидна существенная разница между теориями гравитации Ньютона и Эйнштейна. Чтобы найти мировые линии в ОТО, необходимо знать поле. Но чтобы найти поле, нужно знать движение. Оно не может быть произвольным.

Как же преодолеть эту трудность? Мы увидим, что существуют два способа. Один из них, упомянутый в § 1, полезен скорее принципиально, чем практически. Он состоит в изменении уравнений движения Эйнштейна так, что движение становится произвольным. Затем, налагая на движение надлежащие ограничения, мы получаем решение уравнений. Другой способ, который мы также упоминали в § 1, состоит в выборе соответствующего метода приближений. Позднее мы остановимся на каждом из этих способов подробнее.

§ 7. Виды уравнений движения второго рода

Как мы видели в предыдущем параграфе, уравнения движения второго рода тесно связаны с тождествами Бианки. Эти тождества следуют из инвариантности гравитационного действия по отношению к бесконечно малым вариациям; мы доказали это при помощи формулы (5.13).

Теперь, используя уравнения поля в (5.11), получим

$$\int dx\mathfrak{T}^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}=0 \quad\text{или}\quad \int dx\mathfrak{T}_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}=0, \qquad (7.1)$$

где, согласно (5.8) и (5.9),

$$-\delta g^{\alpha\beta}=g^{\alpha\mu}\eta^{\beta}{}_{|\mu}+g^{\beta\mu}\eta^{\alpha}{}_{|\mu}-g^{\alpha\beta}{}_{|\mu}\eta^{\mu}, \tag{7.2а}$$

$$\delta g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\mu}\eta^{\mu}{}_{|\beta}+g_{\beta\mu}\eta^{\mu}{}_{|\alpha}+g_{\alpha\beta|\mu}\eta^{\mu}. \tag{7.2б}$$

Если ввести эти последние величины в (7.1), то, поскольку η произвольно, (7.1) эквивалентно

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0 \quad \text{или} \quad \mathfrak{T}^{\beta}_{\alpha;\beta}=0. \tag{7.3}$$

Таким образом, вместо (7.3) с равным успехом можно рассматривать уравнения (7.1) в качестве наших уравнений движения как раз по причине произвольности η.

Введем в первое уравнение (7.1) для $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$ выражение (4.23)

$$\frac{k}{c^4}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}=\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\delta}\,\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0}. \tag{7.4}$$

Тогда (7.1) переходит в

$$\sum_{A=1}^{N}\int_{x'0}^{x''0}dx^0\overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0}\,\delta\widetilde{g_{\alpha\beta}}=0. \tag{7.5}$$

Поскольку η являются непрерывными функциями только от x (не зависящими от ξ), то

$$\delta\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}=\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\mu}\overset{A}{\widetilde{\eta}}{}^{\mu}{}_{|\beta}+\overset{A}{\widetilde{g}}_{\beta\mu}\overset{A}{\widetilde{\eta}}{}^{\mu}{}_{|\alpha}+\overset{A}{\overline{g_{\alpha\beta|\mu}}}\overset{A}{\widetilde{\eta}}{}^{\mu}. \tag{7.6}$$

Так как

$$\overset{A}{\widetilde{\eta^{\rho}{}_{|\alpha}}}\,\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}=\frac{d\overset{A}{\widetilde{\eta}}{}^{\rho}}{dx^0}, \tag{7.7}$$

то благодаря произвольности $\overset{A}{\widetilde{\eta}}$, которые, как мы допустили, исчезают на концах временнóго интервала, получим

$$\frac{d}{dx^0}\left(\overset{A}{\mu}\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0}\right)-\frac{1}{2}\overset{A}{\mu}\overset{A}{\overline{g_{\mu\nu|\alpha}}}\overset{A}{\xi}{}^{\mu}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{\nu}{}_{|0}=0, \quad A=1, \ldots, N. \tag{7.8}$$

Покажем сначала, что эти уравнения совершенно эквивалентны уравнениям (3.16), полученным с помощью использования вариационного принципа

$$\frac{d}{ds_A}\left(\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}\right)-\frac{1}{2}\overset{A}{\overline{g_{\mu\nu|\alpha}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\mu}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\nu}}{ds_A}=0. \tag{7.9}$$

Прежде чем доказать эту эквивалентность, сделаем одно замечание. Эти уравнения типичны для двух типов формализма, которые используются повсюду в нашей работе: s-формализм, если s — независимый параметр, как в последнем уравнении, и t-формализм, если независимой переменной является t, как в (7.8). Первый тип формализма — s-формализм, связанный с использованием $\delta_{(4)}(x)$, имеет свойство немедленно обнаруживать ковариантный характер этих уравнений, второй тип — t-формализм, связанный с использованием $\delta(\mathbf{x})$, не обладает этим свойством. Однако он более удобен при реальных вычислениях.

Доказать эквивалентность последних двух уравнений достаточно просто. Действительно, вводя в (7.9) вместо ds_A

$$ds_A=\frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2}\,\frac{dx^0}{\overset{A}{\mu}(x^0)}, \tag{7.10}$$

что тождественно (4.22), легко найдем, что (7.9) переходит в (7.8).

Обратное утверждение также справедливо, но доказательство его более тонко. Может показаться, что, вводя в (7.8) новый параметр s_A, определенный с помощью последнего уравнения, мы действительно получили (7.9). Это верно, но такое замечание не делает доказательство полным. Возникает вопрос: является ли ds_A, введенное с помощью последнего уравнения, тождественным ds_A, введенным через

$$\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}=1? \tag{7.11}$$

Докажем, что это действительно так. Действительно, дифференцируя последнее уравнение по s_A, мы, согласно (0.18), получим

$$\frac{d}{ds_A}\left(\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}\right)=\overset{A}{\overline{g_{\alpha\beta|\rho}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\rho}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}+2\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}\frac{d^2\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A^2}=0. \tag{7.12}$$

Очевидно, как мы уже упоминали раньше, замена нового параметра ds_A, определяемого в (7.10), приводит уравнение (7.8) к виду (7.9). Но здесь ds_A является „собственным временем“, так как он удовлетворяет (7.12). Это можно усмотреть обычным способом, умножая (7.9) на $d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}/ds_A$. Таким образом, мы получаем уравнение, полностью эквивалентное последнему, из которого следует, что

$$\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}=\overset{A}{\text{const}} \tag{7.13}$$

является интегралом дифференциального уравнения для мировой линии.

В определении (7.10) для ds_A была использована постоянная $\overset{A}{m}_{(0)}$. Очевидно, она всегда может быть выбрана так, что постоянная в последнем уравнении будет равна единице. Этим завершается наше доказательство.

Оба эти уравнения движения, очевидно, могут быть выведены из лагранжиана: уравнение (7.8) — из вариационного принципа

$$\delta\int L\,dx^0=0,$$

$$L=\sum_A\int g_{\alpha\beta}\overset{AA}{\mu\xi^\alpha}_{|0}\overset{A}{\xi^\beta}_{|0}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,d\mathbf{x}, \tag{7.14}$$

а (7.9) — из

$$\delta\Big(-\sum_A\overset{A}{m}_{(0)}c\int ds_A\Big)=0,$$

$$ds_A^2=\int g_{\alpha\beta}\,d\overset{A}{\xi^\alpha}\,d\overset{A}{\xi^\beta}\,\overset{A}{\delta}_{(4)}\,dx. \tag{7.15}$$

В обоих случаях g не должны варьироваться по ξ.

В точности таким же образом, каким мы перешли от (3.16) к (3.20), т. е. поднятием индексов, можно снова, применяя правило для процесса „препарирования", получить из наших двух уравнений

$$(\overset{AA}{\mu\xi^\alpha}_{|0})_{|0}+\overset{A}{\mu}\overset{A}{\overline{\left\{{\alpha\atop \nu\mu}\right\}}}\overset{A}{\xi^\mu}_{|0}\overset{A}{\xi^\nu}_{|0}=0 \tag{7.16}$$

и, как и в (3.20), получаем

$$\frac{d^2\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A^2}+\overset{A}{\overline{\left\{{\alpha\atop \mu\nu}\right\}}}\frac{d\overset{A}{\xi^\mu}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi^\nu}}{ds_A}=0. \tag{7.17}$$

Заметим, что (7.8) могло быть также получено из

$$\mathfrak{T}^\beta_{\alpha;\,\beta}=0, \tag{7.18}$$

если подставить в него выражение, соответствующее выражению (7.4), и провести рассуждения, подобные тем, которые были сделаны в предыдущем параграфе, где применялось уравнение

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=0. \tag{7.19}$$

Но мы, очевидно, хотим получить те же уравнения движения независимо от того, использованы ли нижние или смешанные индексы

в уравнениях поля, из которых выводятся соответственно (7.18) или (7.19). Эти две формы уравнений эквивалентны только при условии, что

$$\overset{A}{\overline{g^{\alpha\rho}g_{\rho\beta}}}=\overset{A}{\widetilde{g^{\alpha\rho}}}\,\overset{A}{\widetilde{g_{\rho\beta}}}, \tag{7.20}$$

$$\overset{A}{\overline{g^{\alpha\rho}[\mu\nu,\,\rho]}}=\overset{A}{\widetilde{g^{\alpha\rho}}}\,\overset{A}{\overline{[\mu\nu,\,\rho]}}. \tag{7.21}$$

Таким образом, уравнения поля в ОТО являются самосогласованными, если только принимается закон „препарирования" для произведения.

Введем еще один вид уравнений движения, которые имеют некоторую практическую ценность: уравнения (7.16) содержат $4N$ неизвестных $\overset{A}{\xi^k}$ и $\overset{A}{\mu}$. Можно исключить из них μ и получить $3N$ уравнений для $3N$ неизвестных $\overset{A}{\xi^k}$.

Полагая $\alpha=0$ и $\alpha=a$ в (7.16), имеем

$$\overset{A}{\mu}_{|0}+\overset{A}{\mu}\overset{A}{\overline{\left\{{0\atop \mu\nu}\right\}}}\overset{A}{\xi^\mu}_{|0}\overset{A}{\xi^\nu}_{|0}=0, \tag{7.22}$$

$$\overset{A}{\mu}_{|0}\overset{A}{\xi^a}_{|0}+\overset{AA}{\mu\xi^a}_{|00}+\overset{A}{\mu}\overset{A}{\overline{\left\{{a\atop \mu\nu}\right\}}}\overset{A}{\xi^\mu}_{|0}\overset{A}{\xi^\nu}_{|0}=0. \tag{7.23}$$

Исключив $\overset{A}{\mu}_{|0}$ из второго уравнения с помощью первого, имеем три уравнения для A-й частицы

$$\overset{A}{\xi^a}_{|00}+\left(\overset{A}{\overline{\left\{{a\atop \mu\nu}\right\}}}\overset{A}{\xi^0}_{|0}-\overset{A}{\overline{\left\{{0\atop \mu\nu}\right\}}}\overset{A}{\xi^a}_{|0}\right)\overset{A}{\xi^\mu}_{|0}\overset{A}{\xi^\nu}_{|0}=0. \tag{7.24}$$

Это можно записать в более явном виде, хотя и менее симметрично,

$$\overset{A}{\xi^a}_{|00}+\overset{A}{\overline{\left\{{a\atop 00}\right\}}}-\overset{A}{\overline{\left\{{0\atop 00}\right\}}}\overset{A}{\xi^a}_{|0}+2\overset{A}{\overline{\left\{{a\atop 0n}\right\}}}\overset{A}{\xi^n}_{|0}-$$

$$-2\overset{A}{\overline{\left\{{0\atop 0n}\right\}}}\overset{A}{\xi^a}_{|0}\overset{A}{\xi^n}_{|0}+\overset{A}{\overline{\left\{{a\atop mn}\right\}}}\overset{A}{\xi^m}_{|0}\overset{A}{\xi^n}_{|0}-\overset{A}{\overline{\left\{{0\atop mn}\right\}}}\overset{A}{\xi^a}_{|0}\overset{A}{\xi^m}_{|0}\overset{A}{\xi^n}_{|0}=0. \tag{7.25}$$

Легко видеть, что возможна также еще иная форма уравнения геодезической. Мы можем написать (7.10) в виде

$$\overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\overline{g_{\alpha\beta}\xi^\alpha{}_{|0}\xi^\beta{}_{|0}}}=\frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2} \tag{7.26}$$

и рассматривать это соотношение как определение $\overset{A}{\mu}$. Назовем $\overset{A}{m}_{(0)}$ покоящейся массой, а $\overset{A}{\mu}$ — инертной массой. Тогда геодезическая линия будет даваться через

$$\left(\overset{A}{\mu}\xi^{b}{}_{|0}\right)_{|0}+\overset{A}{\mu}\begin{Bmatrix} b \\ \beta\gamma \end{Bmatrix}\xi^{\beta}{}_{|0}\xi^{\gamma}{}_{|0}=0. \tag{7.27}$$

Мы имеем здесь три уравнения для отыскания трех функций ξ^b (поскольку $\xi^0{}_{|0}=1$). Для световых лучей мы имеем те же уравнения, но с $m_{(0)}=0$. Величины μ преобразуются как dt/dS, т. е. подобно нулевой компоненте вектора; величины μ можно исключить при помощи (7.26).

Таким образом, масса $\overset{A}{\mu}(x^0)$ может быть устранена из уравнений, в которых x^0 используется как параметр. Этот факт требует некоторых пояснений более общего характера.

В теории Ньютона уравнения движения первого и второго рода имеют одну характерную особенность: было возможно устранить из обеих частей уравнений массу частицы, движение которой рассматривалось. Масса в левой части, появляющаяся как коэффициент при ускорении, была инертной, в то время как масса в правой части, которая всегда умножалась на массу другой частицы, была гравитационной. Этот факт являлся математическим выражением истины, известной еще со времен Галилея, — все тела в пустоте падают с одинаковым ускорением. Это было подтверждено вновь более точными экспериментами Роланда Этвеша, которые показали, что инертная и гравитационная массы численно равны друг другу.

В нашем изложении теории Ньютона эта физическая истина нашла свое выражение в § 6. При написании ньютоновского действия W_I мы использовали те же коэффициенты $\overset{A}{m}$ для постоянных инерции, что и для постоянных взаимодействия с гравитационным полем, т. е. в $\sum\limits_A {}^1/_2 \overset{A}{m} \dot{\xi}^a \dot{\xi}^a$ использованы постоянные инерции, а в $-\sum\limits_A \overset{A}{m}\int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,\varphi$ — гравитационные постоянные. Априори не существует причины рассматривать m тождественными в этих выражениях. Мы вынуждены делать это только из-за экспериментов Галилея и Этвеша. Но мы вполне можем представить себе мир, в котором гравитационная и инертная массы отличаются друг от друга.

Однако в ОТО эквивалентность гравитационной и инертной масс, естественно, лежит в самой основе теории. Действительно, в противоположность теории Ньютона мы имеем в ОТО

$$W_I=-\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}(\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}\,d\overset{A}{\xi^{a}}\,d\overset{A}{\xi^{\beta}})^{1/2},$$

и здесь нет места различию между инерциальной частью и той, которая представляет собой взаимодействие с полем. Таким образом, здесь нет места различию между инертной и гравитационной массами. Как мы увидим в гл. II, выражение W_I в ОТО в первом приближении по $1/c$ состоит из двух частей: одна из них представляет инерциальную часть, другая — взаимодействие. Но в обеих частях имеются действительно одинаковые массы не по причине специального допущения, а как следствие ОТО.

Один из результатов равенства инертной и гравитационной масс состоит в том, что в уравнениях движения второго рода масса $\overset{A}{m}_{(0)}$ не появляется вообще. Что это значит с физической точки зрения? Это значит, что ускорение в данной точке зависит только от поля в точке, где находится частица, но не от ее массы. Тот факт, что уравнения движения второго рода внешне независимы от $\overset{A}{m}_{(0)}$, является математическим выражением принципа эквивалентности в ОТО.

То же самое справедливо, конечно, для уравнений движения первого рода, т. е. для уравнений движения для пробных частиц. Тогда, конечно, выполняется закон „препарирования“ для произведения и вся процедура „препарирования“ переходит в тривиальную замену x на ξ.

Таким образом, наши уравнения движения второго рода, переходящие в уравнения движения первого рода, становятся точно уравнениями геодезической линии. Они совершенно независимы от массы частицы не только внешне; само поле свободно от любого вида зависимости от $\Delta\overset{A}{m}$, поскольку она достаточно мала, чтобы не возмущать внешнее поле.

В вопросе естественного объяснения равенства гравитационной и инертной масс ОТО имеет существенное преимущество перед другими теориями гравитации.

Разница между гравитационной и инертной массами появляется только тогда, когда мы рассматриваем уравнения движения третьего рода. К этому вопросу мы вернемся подробнее в последней главе.

§ 8. Уравнения движения в гравитационном и негравитационном полях

Вплоть до настоящего момента мы рассматривали гравитационные уравнения с тензором энергии-импульса

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta}=\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c^2\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\frac{d\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi^\beta}}{ds_A}ds_A. \tag{8.1}$$

Сейчас мы коротко рассмотрим более общий случай, в котором добавлены некоторые поля, скажем электромагнитное, или мезонное, или оба поля вместе. Допустим, только ради краткости, что добавлено одно векторное поле, обозначим его A^α. (Конечно, все, что здесь говорится, правильно также и для тензорных или спинорных полей.) Тогда гравитационные уравнения изменят свою форму. Кроме тензора энергии, принадлежащего частицам, появится также тензор, принадлежащий полю. Если мы назовем этот добавочный тензор $S^{\alpha\beta}$, а полный тензор $E^{\alpha\beta}$, то уравнения Эйнштейна примут вид

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta}=-\frac{8\pi k}{c^4}(\mathfrak{T}^{\alpha\beta}+\mathfrak{S}^{\alpha\beta})=-\frac{8\pi k}{c^4}\mathfrak{E}^{\alpha\beta}. \tag{8.2}$$

Нам нет необходимости заботиться о явном виде $S^{\alpha\beta}$. Достаточно знать, что $S^{\alpha\beta}$ есть тензор, образованный из A^α, и, может быть, из их ковариантных производных; он может также явно зависеть от метрического тензора и векторов скорости. Таким образом, можно символически написать

$$S^{\alpha\beta}=S^{\alpha\beta}(A,\ g,\ \xi'). \tag{8.3}$$

Метрический тензор и уравнения движения определяются в (8.2), если внешнее поле A^α известно. Что касается A, то они должны быть определены посредством других уравнений поля. Так как нас не интересует здесь их конкретный вид, то можно символически написать их следующим образом:

$$O_\alpha(A,\ g,\ \xi')=0, \tag{8.4}$$

где O_α — некоторые операции, которые необходимо произвести над A- и g-полями и над векторами скорости. Единственное наше предположение, касающееся операторов O_α, заключается в том, что уравнения (8.4) должны быть ковариантны относительно произвольных преобразований. Обычно уравнения (8.2) для гравитационного поля и (8.4) для негравитационного поля могут быть выведены из некоторого лагранжиана: первое — при помощи вариации метрического тензора, а второе — с помощью вариации внешнего поля A.

Очевидно, мы имеем из тождеств Бианки

$$\mathfrak{E}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}+\mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=0. \tag{8.5}$$

Теперь представляются две возможности:

$$1)\ \mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=0 \quad и \quad 2)\ \mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}\neq 0.$$

Первая возможность может быть результатом уравнений поля для A. Чтобы иметь перед глазами определенный пример, рассмотрим электромагнитный тензор без источников. Тогда $\mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=0$ вследствие уравнений Максвелла. В этом случае мы имеем для уравнений движения

$$\frac{1}{c^2}\frac{d\xi^0}{ds_A}\int_{\overset{A}{\Omega}}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}\,d\mathbf{x}=0,\quad A=1,\ 2,\ \ldots,\ N, \tag{8.6}$$

в точности так же как и раньше. В этом случае на уравнения движения влияет только изменение метрического поля — изменение, вызванное существованием поля A. Но по своей структуре уравнения остаются неизменными; они являются уравнениями „геодезической линии“, где $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\rho}$ заменены на $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$, $\widetilde{g}_{\alpha\beta,\rho}$.

Вторая возможность дает другие уравнения движения. Они принимают теперь вид

$$\mathfrak{E}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}+\mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=0. \tag{8.7}$$

Интересная ситуация возникает, когда векторная плотность $S^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}$ является линейной функцией от δ:

$$-\mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}=c^2\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{K^\alpha}\frac{ds_A}{d\xi^0}\overset{A}{\delta}_{(3)}. \tag{8.8}$$

Это имеет место, например, в случае электромагнитных полей, в которых частицы с массами $\overset{A}{m}_{(0)}$ обладают зарядом $\overset{A}{e}$. В этом случае, который наиболее общим образом характеризуется посредством (8.8), мы имеем для уравнений движения

$$\overset{A}{m}_{(0)}\frac{d^2\overset{A}{\xi^\alpha}}{ds_A^2}+\overset{A}{m}_{(0)}\overset{A}{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}}\frac{d\overset{A}{\xi^\mu}}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi^\nu}}{ds_A}=\overset{A}{K^\alpha},\quad A=1,\ \ldots,\ N. \tag{8.9}$$

Это будут общие уравнения движения, если выполняется (8.8). В частности, в случае электромагнитного поля мы имеем уравнения движения Лоренца.

Обычно (8.8) будет справедливо в случае точечных частиц как следствие уравнений поля (8.4). Таким образом, в этом случае мы можем сказать, что надлежащие уравнения движения являются следствием уравнений поля (для A) и гравитационных уравнений. Но, конечно, те же уравнения движения справедливы в произвольной координатной системе, даже если гравитационное поле исчезает, т. е. если гравитационная постоянная $k \to 0$ и $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}=0$. В этом случае обычно принимаются уравнения движения (8.9), потому что уравнения поля для A, как правило, становятся линейными, а, как мы знаем, линейная теория не может дать надлежащих уравнений движения и последние должны быть добавлены к уравнениям поля. Мы видим здесь преимущество введения гравитационного поля. Даже если оно стремится к нулю, его влияние остается в виде уравнений движения. При других обстоятельствах эти уравнения должны быть добавлены отдельно.

Можно легко показать, что вектор K^α в (8.8) должен быть пространственно-подобным вектором. Это можно увидеть, умножив последнее уравнение на

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\beta}}{ds_A}. \tag{8.10}$$

Левая часть результирующего уравнения должна исчезнуть. Это действительно так, согласно определению ds_A и согласно изложенному в § 7. Следовательно, правая часть должна также исчезать. Таким образом, имеем

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A}\overset{A}{K}{}^{\beta}=0, \tag{8.11}$$

что и доказывает наше утверждение, так как скорость есть времени-подобный вектор.

§ 9. Уравнения движения в различных системах координат

Ответим на следующий вопрос: что случится с уравнениями поля и уравнениями движения, если перейти от одной системы координат к другой? Как и в предыдущем параграфе, допустим существование гравитационного поля и некоторого физического поля, характеризуемого, как и прежде, для краткости только векторным полем A^α. Теперь перейдем от данной системы координат к системе координат, помеченной звездочкой, т. е. от

$$x^\alpha,\ g^{\alpha\beta}(x),\ A^\alpha(x),\ \xi^\alpha \tag{9.1}$$

к выражениям

$$x^{*\alpha},\ g^{*\alpha\beta}(x^*),\ A^{*\alpha}(x^*),\ \xi^{*\alpha}, \tag{9.2}$$

где

$$x^\alpha=x^\alpha(x^*),\quad x^{*\alpha}=x^{*\alpha}(x),$$

$$A^{*\alpha}=A^\sigma\frac{\partial x^{*\alpha}}{\partial x^\sigma},\quad g^{*\alpha\beta}=g^{\rho\sigma}\frac{\partial x^{*\alpha}}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^{*\beta}}{\partial x^\sigma}\quad \text{и т. д.} \tag{9.3}$$

Аналогично выражение

$$A^\alpha{}_{;\beta}=A^\alpha{}_{|\beta}+\left\{{\alpha \atop \beta\sigma}\right\}A^\sigma \tag{9.4}$$

переходит в

$$A^{*\alpha}{}_{\overset{*}{;}\beta}=A^{*\alpha}{}_{|\beta}+\left\{{\alpha \atop \beta\sigma}\right\}^*A^{*\sigma}, \tag{9.5}$$

где символы Кристоффеля со звездочкой имеют очевидный смысл.

Но уравнения поля в ОТО не могут зависеть от выбора системы координат. Это означает, что, в то время как в старой системе координат мы имеем уравнения поля, которые символически можно записать в виде

$$\begin{gathered}G^{\alpha\beta}[g(x)]=-\frac{8\pi k}{c^4}E^{\alpha\beta}[A(x),\ g(x),\ \xi'],\\ O_\alpha(x)[A(x),\ g(x),\ \xi']=0.\end{gathered} \tag{9.6}$$

в новой системе координат эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered}G^{\alpha\beta}[g^*(x^*)]=-\frac{8\pi k}{c^4}E^{\alpha\beta}[A^*(x^*),\ g^*(x^*)\,\xi^{*\prime}],\\ O_\alpha(x^*)[A^*(x^*),\ g^*(x^*),\ \xi^{*\prime}]=0.\end{gathered} \tag{9.7}$$

Все это почти тривиально, однако тот факт, что в новой системе координат $G^{\alpha\beta}$, $E^{\alpha\beta}$ и оператор O_α зависят от новых компонент поля и действуют точно так же, как они зависели и действовали прежде в старой системе координат на старые компоненты поля, не всегда достаточно хорошо понимается.

Из этого следует, что уравнения движения в новой системе координат записываются следующим образом:

$$E^{\alpha\beta}[A^*(x^*),\ g^*(x^*),\ \xi^{*\prime}]_{\overset{*}{;}\beta}=0, \tag{9.8}$$

где звездочка над точкой с запятой означает, как в (9.5), что символы Кристоффеля должны быть образованы из $g^*(x^*)$.

Снова результат почти тривиальный: уравнения движения ковариантны по отношению к любому изменению системы координат.

Поскольку уравнения поля и уравнения движения имеют одну и ту же форму во всех системах координат, возникает вопрос:

все ли эти системы координат допустимы? Но, чтобы описать движение в любом отдельном случае, необходимо каким-то образом выделить систему координат. Однако, действуя так, мы нарушаем дух ковариантности, столь важный для ОТО.

В принципе существуют три способа обойти эту трудность:

1) Система координат выделяется с помощью определенных дополнительных координатных условий. В самом деле, в общем случае к уравнениям поля можно присоединить четыре координатных условия, выделяющих систему координат. Они в свою очередь определяют четыре произвольные функции, входящие в решения уравнений поля.

2) Не добавляется никаких координатных условий. Общие решения содержат четыре произвольные функции. Если необходимо, можно их определить, но мы не ограничены в своем выборе какими-либо координатными условиями.

3) Все системы координат допустимы, если они удовлетворяют одному условию: на бесконечности пространство становится евклидовым, а система координат — декартовой.

Первый способ разработан Фоком и его школой. Координатные условия, которые добавляются к уравнениям поля, являются „гармоническими"

$$\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right)_{|\nu}=0. \tag{9.9}$$

Очевидно, если употреблять исключительно это условие, мы изменим дух ОТО, так как оно выделяет группу систем координат. Действительно, гармоническое координатное условие дает особенно простое решение в случае линеаризованных гравитационных уравнений в пустом пространстве. Однако такой случай решений линеаризованных уравнений кажется физически малоинтересным. Впрочем, гармоническая система координат употребляется редко. Например, она не используется в классическом решении Шварцшильда и, как будет показано в следующей главе, мало связана с проблемой движения. Следовательно, с практической точки зрения, ее преимущества очень малы, если они вообще существуют.

Тем не менее с теоретической точки зрения, если бы гармоническое координатное условие всегда сопутствовало уравнениям поля, это являлось бы, нам кажется, шагом назад по сравнению с идеями ОТО. Идеи ОТО если и не были выведены, то во всяком случае сделаны правдоподобными с помощью простого и очень наглядного мысленного эксперимента с падающим лифтом. Будучи достаточно правильным, он показывает эквивалентность двух систем, основанную на равенстве инертной и тяжелой масс, при этом только в ограниченном участке пространства — времени. Однако для развития ОТО важно, чтобы две системы, хотя они и не движутся равномерно по отношению друг к другу, были

эквивалентными в определенном смысле. Наблюдатель, находящийся вне лифта, может сказать, что лифт движется с ускорением в его гравитационном поле. Наблюдатель внутри лифта может заявить, что его система координат инерциальна, по отношению к которой Земля движется с ускорением. Все эти рассуждения теряют смысл, если мы допускаем только гармонические координатные системы.

Теперь о второй возможности. Мы не можем описать движение, не определяя системы координат. Необходимо иметь ее для того, чтобы сравнить результаты наших вычислений с опытом. Но введение какой-либо специальной системы координат является нарушением идей ОТО.

Следовательно, остается третья возможность: допустимы все системы координат, поскольку поле становится евклидовым на бесконечности, а координатная система — декартовой. Чтобы пояснить нашу точку зрения, рассмотрим простой случай движения планет вокруг очень большого Солнца. Выберем некоторую плоскость на бесконечности или так далеко от Солнца, что гравитационным полем можно пренебречь. Там на бесконечности имеет смысл говорить о плоскостях, идеальных часах и жестких стержнях. Каждое событие в мире отражается однозначно на плоскость посредством светового луча, испущенного в момент события и достигающего плоскости перпендикулярно к ней. Следовательно, каждому событию соответствуют четыре числа T, X^k в бесконечно удаленной плоскости. Таким образом, движение планеты имеет свое отображение на такой плоскости. Если движение периодическое, то изображение образует замкнутую линию. Можно поворачивать плоскость до тех пор, пока площадь, описываемая изображением движущейся планеты, не станет максимальной. Это отображенное движение в такого рода бесконечно удаленной плоскости является объективным в следующем смысле: для его описания не требуется дальнейшая спецификация координатной системы. (Мы можем рассматривать такое отображенное движение как объективное только в том случае, если первоначальное движение происходило также в „плоскости", т. е. если наблюдатель на бесконечности не обнаруживает эффекта Допплера.)

Таким образом, из нашего примера видно, что безотносительно к какой-либо системе координат можно, хотя бы в принципе, описать движение объективно. Если мы назовем координаты на „параллельной" бесконечной плоскости через T, X^k, то будем иметь

$$X^k=X^k(T), \tag{9.10}$$

как объективное описание движения. В произвольной системе координат имеем

$$\xi^k=\xi^k(t), \tag{9.11}$$

где хотя бы теоретически

$$T = t + \infty, \tag{9.12}$$

так как лучу требуется бесконечный отрезок времени, чтобы достичь бесконечно удаленной плоскости.

Теперь можно определить удобную систему координат, в которой мы описываем движение (9.11), отраженное на бесконечно удаленную плоскость. Она окажется такой, что движение в ней почти объективно, т. е. разница между ξ^k и X^k и между ΔT и Δt меньше ошибки эксперимента. Позже мы вернемся к этой проблеме, уточняя математически идеи, описанные здесь только в общем виде.

§ 10. Метод решения уравнений поля с помощью дипольной процедуры

Если нужно решить проблему движения точечных частиц и найти гравитационное поле, т. е. если мы хотим найти $\xi^\alpha(\lambda)$ и $g_{\alpha\beta}(x)$, то необходимо иметь дело со следующей системой уравнений:

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi k}{c^2}\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty} ds_A\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\alpha}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\beta}{ds_A}, \tag{10.1}$$

$$\overset{A}{\Omega}{}^\alpha(s_A) = \frac{d^2\overset{A}{\xi}{}^\alpha}{ds_A^2} + \overset{A}{\overline{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\mu}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\nu}{ds_A} = 0, \tag{10.2}$$

$$ds_A = (\overset{A}{\widetilde{g}}_{\alpha\beta}\,d\overset{A}{\xi}{}^\alpha d\overset{A}{\xi}{}^\beta)^{1/2}. \tag{10.3}$$

Уравнения (10.1) являются уравнениями поля; они определяют $g_{\alpha\beta}$ как функции от мировых точек.

Уравнения (10.2) являются уравнениями движения; они определяют $\overset{A}{\xi}{}^\alpha$ как функции от s_A или $\overset{A}{\xi}{}^k$ как функции от x^0, если ввести в них соответствующее изменение параметра.

Но мы знаем также, что две системы уравнений не независимы друг от друга. Из тождеств Бианки $\mathfrak{G}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$, как было показано ранее, мы имеем

$$\left(\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty} ds_A\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\alpha}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\beta}{ds_A}\right)_{;\beta} = \\ = \sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty} ds_A\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,\overset{A}{\Omega}{}^\alpha(s_A). \tag{10.4}$$

Поэтому мы повторяем: уравнения движения (10.2) являются следствием уравнений поля и представляют собой условие интегрируемости последних.

Таким образом, мы не можем решить уравнений поля для произвольного движения, т. е. мы не можем найти компоненты g как функционалы произвольного движения источников, появляющихся в правой части уравнений поля (10.1). Такое решение будет существовать только в том случае, если движение удовлетворяет уравнениям движения, т. е. (10.2).

Следовательно, обычный метод решения уравнений поля с допущениями произвольного движения, применяемый во всех линейных теориях поля, здесь не пригоден.

Как можно избежать этой трудности? Мы говорили ранее, что это можно сделать двумя способами: во-первых, применив дипольный метод, который представляет скорее принципиальную, чем практическую, ценность и который мы сейчас опишем; во-вторых, применив метод приближений, с которым мы будем иметь дело в гл. II и III.

Модифицируя уравнения Эйнштейна, мы допускаем, что, кроме движущихся точечных частиц, источники поля состоят из добавочного поля $\mathfrak{D}^\alpha$. Это поле должно быть выбрано таким образом, чтобы сделать движение частиц произвольным. Таким образом, нужно решить эти обобщенные неэйнштейновские уравнения, в которых появляется искусственное поле, лишенное какого-либо физического смысла, для произвольного движения. Но в том случае, когда движение является правильным релятивистским, добавочное поле $\mathfrak{D}^\gamma$ исчезает. Или наоборот: если добавочное поле $\mathfrak{D}^\alpha$ исчезает, уравнения становятся эйнштейновскими, а движение — правильным движением, удовлетворяющим уравнениям (10.2).

Назовем добавочное, искусственное поле $\mathfrak{D}^\alpha$ полем дипольных потенциалов.

Поэтому рассмотрим уравнения поля ОТО с некоторым добавочным тензором

$$\mathfrak{G}^{\alpha\beta} = -\frac{8\pi k}{c^4}(\mathfrak{T}^{\alpha\beta} + \mathfrak{S}^{\alpha\beta}) = -\frac{8\pi k}{c^4}\mathfrak{E}^{\alpha\beta}, \tag{10.5}$$

где мы допускаем, как в § 8,

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \sum_{A}\overset{A}{m}_{(0)}c^2\int_{-\infty}^{\infty} ds_A\,\delta_{(4)}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\alpha}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\beta}{ds_A}, \qquad \mathfrak{S}^{\alpha\beta} = \mathfrak{S}^{\alpha\beta}(D,\ g,\ \xi'). \tag{10.6}$$

Тогда уравнения движения имеют вид

$$\mathfrak{E}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + \mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \tag{10.7}$$

Спрашивается, возможно ли найти $\mathfrak{S}^{\alpha\beta}$ и уравнение поля для вектора D таким образом, чтобы уравнения движения выполнялись автоматически для любого произвольного движения? Действительно, это возможно только тогда, когда $\mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$ становится равным нулю вследствие уравнений поля для $\mathfrak{D}^{\alpha}$. Именно такой случай осуществляется, если уравнения поля для $\mathfrak{D}^{\alpha}$ имеют вид

$$\mathfrak{D}^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} - R^{\alpha\beta}\mathfrak{D}_{\beta} = -\sum_A \overset{A}{m}_{(0)} c^2 \int_{-\infty}^{\infty} ds_A \delta_{(4)}(x - \overset{A}{\xi}) \overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}(s_A),$$
$$\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}(s_A) = \frac{d^2\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}}{ds_A^2} + \overset{A}{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}} \frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\mu}}{ds_A} \frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\nu}}{ds_A} \tag{10.8}$$

и

$$\mathfrak{S}^{\alpha\beta} = \mathfrak{D}^{\alpha;\beta} + \mathfrak{D}^{\beta;\alpha} - g^{\alpha\beta}\mathfrak{D}^{\rho}{}_{;\rho}. \tag{10.9}$$

Действительно, согласно § 6, можно переписать уравнение (10.8) в форме

$$\mathfrak{D}^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} - R^{\alpha\beta}\mathfrak{D}_{\beta} = -\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}. \tag{10.10}$$

В соответствии с известными правилами тензорного анализа имеем

$$\mathfrak{S}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \mathfrak{D}^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} + \mathfrak{D}^{\beta;\alpha}{}_{;\beta} - \mathfrak{D}^{\rho;\alpha}{}_{;\rho} + \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} =$$
$$= \mathfrak{D}^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} - R^{\alpha\beta}\mathfrak{D}_{\beta} + \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \tag{10.11}$$

что тождественно уравнениям поля (10.10).

Каковы характерные особенности подобной теории?

Во-первых, в этой теории движение частиц произвольно. Действительно, используя тождества Бианки в (10.5), получаем уравнения поля для добавочного поля $\mathfrak{D}^{\alpha}$, которые во всяком случае выполняются.

Таким образом, система уравнений (10.5)—(10.8) имеет решение для произвольного движения, и из нее можно найти

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)[\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{N}{\xi}], \tag{10.12}$$

$$\mathfrak{D}^{\alpha} = \mathfrak{D}^{\alpha}(x)[\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{N}{\xi}]. \tag{10.13}$$

Здесь квадратные скобки, как обычно, означают функциональную зависимость.

Во-вторых, положим в уравнениях (10.5)—(10.8) $\mathfrak{D}^{\alpha} = 0$, тогда эти обобщенные уравнения поля становятся уравнениями Эйнштейна и уравнения движения (10.2) должны быть удовлетворены. Таким образом, в конце нашей процедуры можно вернуться к уравнениям поля Эйнштейна, находя движение из условия, что добавочное дипольное поле исчезает.

В-третьих, пусть уравнения поля $\Omega^{\alpha} = 0$ удовлетворены; это означает, что мы выбрали движение, которое произвольно в обобщенных уравнениях, так что оно является правильным движением, согласно ОТО. Следует ли из такого выбора движения, что поле $\mathfrak{D}^{\alpha}$ исчезает? Это не обязательно, потому что уравнения поля для $\mathfrak{D}^{\alpha}$ принимают тогда вид (10.8)

$$\mathfrak{D}^{\alpha;\beta}{}_{;\beta} - R^{\alpha\beta}\mathfrak{D}_{\beta} = 0.$$

Эти однородные уравнения могут иметь решения, отличные от нуля. Только если мы допустим также, что в качестве решения $\mathfrak{D}^{\alpha}$ для случая $\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha} = 0$ мы берем решение $\mathfrak{D}^{\alpha} \equiv 0$, то действительно будем иметь

$$\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha} = 0 \rightleftarrows \mathfrak{D}_{\alpha}(x)[\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{N}{\xi}] \equiv 0. \tag{10.14}$$

Допустим, что мы решили обобщенную систему уравнений для $g_{\alpha\beta}(x)$. Подставим эти значения в $\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}(s_A)$. Поскольку движение произвольно, можно взять уравнения движения в виде

$$\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha} = 0. \tag{10.15}$$

В этом случае мы условились допустить, только решение $\mathfrak{D}^{\alpha} = 0$, поэтому уравнения поля становятся уравнениями Эйнштейна.

Таким образом, мы сформулировали общую теорию, в соответствии с которой можно найти уравнения движения третьего рода. К этой проблеме мы вернемся более подробно в следующих главах.

Почему мы называем это добавочное поле полем дипольного потенциала? Ответ прост. Взглянув на уравнения поля (10.8) для $\mathfrak{D}^{\alpha}$, мы видим, что их решение будет иметь вид

$$\mathfrak{D}^{\alpha} \sim \sum_A \frac{\overset{A}{\Omega}{}^{\alpha}}{\left|\mathbf{x} - \overset{A}{\xi}\right|}. \tag{10.16}$$

Поэтому в дополнительном поле, появляющемся в (10.5) для $g_{\alpha\beta}$, мы имеем производные от $\mathfrak{D}^{\alpha}$ — выражения, которые ведут себя так, как если бы они представляли собой „гравитационные диполи“. Но гравитационные диполи реально не существуют. Освобождаясь от этого искусственного поля, мы возвращаемся к уравнениям Эйнштейна и правильным уравнениям движения.

ГЛАВА II

Метод приближений и уравнения движения

§ 1. Общие замечания о методе приближений

В гл. I была развита строгая теория уравнений движения в ОТО и обсуждена их связь с уравнениями гравитационного поля. Но все, что мы говорили по этому вопросу, носило довольно формальный характер. Мы не рассматривали какой-либо физической проблемы, которую можно было бы хотя бы в принципе сравнить с наблюдением.

Вследствие нелинейности уравнений нельзя, например, дать точного решения проблемы двух тел, которая в теории Ньютона столь же проста, как и проблема одного тела. Мы не можем найти поле; следовательно, не можем найти и движение. Все, что можно сделать, это использовать метод приближений, который позволит нам найти поле и движение приближенно. Такой метод более чем достаточен с практической точки зрения. Это приведет нас к новым эффектам, которые, однако, вряд ли могут быть подтверждены даже наиболее точными наблюдениями.

В том случае, когда используются нелинейные уравнения, единственным методом приближений является метод малого параметра. Грубо говоря, метод состоит в разложении всех величин, которые появляются в этих уравнениях, по степеням подобного малого параметра и затем в последовательном решении уравнений, образованных коэффициентами при этих степенях.

Какую величину нужно выбрать в качестве малого параметра в ОТО? Казалось бы, что хорошим выбором является гравитационная постоянная k, которая играет роль постоянной, связывающей геометрию, описываемую тензором Эйнштейна $G^{\mu\nu}$, и физику, описываемую тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$. Однако это не так.

Мы требуем, чтобы наш параметр давал в первом приближении ньютоновское движение и затем пост-ньютоновское движение. Однако, используя k в качестве параметра, мы получим в первом приближении равномерное движение, а затем — ньютоновское движение плюс силы, зависящие от скорости света. Такой метод определенно не подходит для описания движения планет, где скорости гораздо меньше скорости света.

Таким образом, приходится прибегать к другой возможности, которая заключается в том, чтобы принять в качестве малого

параметра

$$\lambda = \frac{1}{c}, \tag{1.1}$$

где c — скорость света. Этот метод оказывается очень эффективным при исследовании проблем движения в ОТО.

Вплоть до настоящего времени теория Ньютона, в которой скорость света вовсе не появляется, составляет основу астрономии. По сравнению с этой теорией ОТО гораздо более сложна с технической точки зрения. Однако с принципиальной точки зрения она проще. Она не требует странных предположений о действии на расстоянии или инерциальной системе координат, и равенство инертной и гравитационной масс не входит в нее в качестве искусственного допущения. Тем не менее, чтобы ОТО была практически полезна, должны быть выполнены следующие два условия:

1) теория Ньютона следует из ОТО как частный предельный случай;

2) ОТО может без введения каких-либо произвольных постоянных предсказывать новые эффекты, не согласующиеся с теорией Ньютона.

Из какого предельного случая может быть получена теория Ньютона?

Ответ очевиден. Теория Ньютона, которая не является теорией поля и в которой постоянная c не появляется, может следовать из ОТО только в предельном случае $c \to \infty$, или, другими словами, „действие на расстоянии" означает распространение сигналов с бесконечной скоростью.

Таким образом, мы ожидаем, что для

$$\lambda = \frac{1}{c} \to 0 \tag{1.2}$$

уравнения ОТО становятся уравнениями теории Ньютона. Практически можно рассматривать c как бесконечно большую величину, если v/c (где v — характерная скорость тела) много меньше единицы. С другой стороны, если не пренебрегать v/c, то можно прийти к новым явлениям, выходящим за рамки теории Ньютона. Мы надеемся, что эти замечания оправдывают выбор $\lambda = 1/c$ в качестве параметра для нашего метода приближения. Итак, допустим, что все величины аналитичны по λ. Это значит, что если f — такая величина, то мы запишем

$$f = \underset{0}{f} + \underset{1}{f} + \underset{2}{f} + \underset{3}{f} + \ldots, \tag{1.3}$$

Значком снизу обозначен порядок каждой из этих величин, т. е.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \underset{n}{f}, \quad \underset{n}{f} = \lambda^n \underset{n}{f}. \tag{1.4}$$

Кроме очевидных правил (произведение $\underset{k}{\varphi}\underset{l}{\psi}$ будет величиной порядка $k+l$), имеется одно, которое менее очевидно, но существенно для дальнейшего доказательства. Оно связано с дифференцированием f по времени, где

$$t = \frac{x^0}{c} = \lambda x^0. \tag{1.5}$$

Допустим, что t имеет нулевой порядок по λ. Поэтому

$$\underset{0}{f}{}_{|0} = \frac{\partial f}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1.6}$$

должно быть первого порядка по λ. Или вообще можем написать

$$\underset{l}{f}\,\underset{1}{{}_{|0}} = \underset{l+1}{f_{|0}}. \tag{1.7}$$

Иначе говоря, дифференцирование f по x^0 повышает порядок f на единицу; опуская значок 1 под нулем, обозначающим дифференцирование по x^0, будем писать просто

$$\frac{\partial \underset{l}{f}}{\partial x^0} = \underset{l+1}{f_{|0}}.$$

Дифференцирование по x^k не меняет порядок f. Это значит, что предполагается медленное изменение всех величин по x^0.

§ 2. О разложении метрического поля

Здесь мы будем иметь дело только с изолированными материальными системами. Вдали от всякой материи будем иметь исчезающую кривизну пространственно-временного континуума. Следовательно, на бесконечности можно допустить плоское пространство—время, в котором можно еще произвольным образом фиксировать систему координат. Однако для простоты будем считать, что система координат — декартова. Итак, что касается измерений, то на бесконечности имеются те же условия, что и в инерциальной системе координат, а для метрики имеем $(r^2 = x^s x^s)$

$$\lim_{r\to\infty} g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{\alpha\beta}, \quad (\eta_{00} = 1, \quad \eta_{0k} = 0, \quad \eta_{ik} = -\delta_{ik}). \tag{2.1}$$

Переход от римановой метрики $g_{\alpha\beta}$ к галилеевой $\eta_{\alpha\beta}$ на бесконечности играет существенную роль в теории измерения, как было пояснено в гл. I, § 9. К этому вопросу мы вернемся в гл. V, § 1. Запишем теперь риманову метрику в виде

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \tag{2.2}$$

где $h_{\alpha\beta}$ стремится к нулю при $r = (x^s x^s)^{1/2}$, стремящемся к бесконечности. Теперь разложим $h_{\alpha\beta}$ в ряд по степеням λ. Так как для $c \to \infty$ имеем $h_{\alpha\beta} \to 0$, то мы должны начать ряд $h_{\alpha\beta}$ по крайней мере с члена первого порядка, т. е.

$$h_{\alpha\beta} = \underset{1}{h}_{\alpha\beta} + \underset{2}{h}_{\alpha\beta} + \underset{3}{h}_{\alpha\beta} + \ldots. \tag{2.3}$$

Но, исследуя более глубоко структуру уравнений поля ОТО, можно сказать еще больше. Покажем, что

$$\underset{1}{h}_{00} = 0, \quad \underset{2}{h}_{0m} = 0 \tag{2.4}$$

(позже мы узнаем о дальнейших ограничениях на $h_{\alpha\beta}$).

В самом деле, можно показать справедливость последнего уравнения, сравнивая уравнения движения пробной частицы в теории Ньютона с соответствующими уравнениями в ОТО. В теории Ньютона для пробной частицы массы Δm, находящейся в гравитационном поле φ, имеем

$$\delta(-\Delta m)\int_{t_1}^{t_2} dt\left(c^2 - \frac{1}{2}\dot{\xi}^s\dot{\xi}^s + \varphi\right) = 0, \quad \dot{\xi}^s = \frac{d\xi^s}{dt}. \tag{2.5а}$$

Уравнение движения для пробной частицы в ОТО имеет вид

$$(-\Delta m)\,\delta\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt}\,dt = 0, \quad ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta. \tag{2.5б}$$

Разлагая квадратный корень по степеням λ, получаем из последнего уравнения

$$(-\Delta m)\,\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\left(c^2 - \frac{1}{2}\dot{\xi}^s\dot{\xi}^s + \frac{1}{2}c^2 h_{00} + c h_{0n}\dot{\xi}^n + \frac{1}{2}h_{mn}\dot{\xi}^m\dot{\xi}^n\right) = 0. \tag{2.6}$$

Следовательно,

$\frac{1}{2}c^2 h_{00} \to \varphi$, или порядка λ^0,

$c h_{0n}\dot{\xi}^n \to$ по крайней мере как $1/c$, т. е. как λ,

$h_{mn}\dot{\xi}^m\dot{\xi}^n \to$ по крайней мере как $1/c$, т. е. как λ.

Эти соотношения доказывают справедливость (2.4). Итак, имеем

$$\begin{aligned} h_{00} &= \underset{2}{h_{00}} + \underset{3}{h_{00}} + \underset{4}{h_{00}} + \ldots, \\ h_{0n} &= \underset{2}{h_{0n}} + \underset{3}{h_{0n}} + \underset{4}{h_{0n}} + \ldots, \\ h_{mn} &= \underset{1}{h_{mn}} + \underset{2}{h_{mn}} + \underset{3}{h_{mn}} + \ldots \end{aligned} \tag{2.7}$$

как условие совместности теории Ньютона и ОТО.

§ 3. О трех аспектах нашего рассмотрения

В принципе мы изображаем материальные тела, движение которых мы хотим описать, в виде сингулярностей гравитационного поля. Это ведет к использованию аппарата δ-функций, который помогает нам избежать перенормировки. Если мы имеем дело с такими точечными частицами, то будем говорить об этом аспекте теории как об аспекте сингулярностей поля.

Чтобы углубить метод δ-функций, нам придется перейти к случаю непрерывного распределения, т. е. допустить, что материя непрерывна и текуча. Эта проблема представляет некоторый интерес сама по себе. Путем предельного процесса можно перейти от этого аспекта теории к аспекту сингулярностей поля, что мы и будем делать.

Наконец, мы часто будем использовать еще более общий аспект теории, а именно случай произвольного тензора энергии-импульса, особенно при обсуждении тех случаев, когда его конкретный вид не важен.

Таким образом, в аспекте сингулярностей поля мы имеем

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = -8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2}\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\int_{-\infty}^{\infty} ds_A\,\delta_{(4)}(x-\overset{A}{\xi})\,\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\mu}}{ds_A}\,\frac{d\overset{A}{\xi}{}^{\nu}}{ds_A}. \tag{3.1}$$

Напомним, что $\overset{A}{\xi}{}^{\nu}(s_A)$ есть мировая линия A-й сингулярности, а $\overset{A}{m}_{(0)}$ — ее масса покоя; вследствие использования „хороших" δ-функций ds_A есть регуляризованный пространственно-временной интервал A-й частицы.

В аспекте непрерывного распределения имеем

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = -8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2}\sqrt{-g}\left[\left(\rho+\frac{\rho}{c^2}\int_0^p\frac{dp}{\rho}\right)u^{\mu}u^{\nu}-\frac{p}{c^2}g^{\mu\nu}\right]. \tag{3.2}$$

Здесь плотность ρ — функция давления p, а $u^{\alpha}(x)$ — эйлерово поле вектора скоростей. Эти величины удовлетворяют условиям,

выражающим закон сохранения материи:

$$g_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} = 1, \quad (\rho u^{\alpha})_{;\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

(если принять первое из написанных уравнений, то второе может быть выведено из закона сохранения $\mathcal{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ путем свертывания его с u_{μ}).

В аспекте произвольного тензора энергии-импульса имеем

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^4}\mathfrak{T}^{\mu\nu} = -8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu}(A^{\alpha}, g_{\rho\sigma}). \tag{3.4}$$

Здесь A^{α} представляют динамические величины, описывающие физическое поле, подобно ξ^{α} в первом аспекте и ρ, p, u^{α} — во втором. Будем считать, как и в первых двух аспектах, что $\mathcal{T}^{\mu\nu}(A, g)$ исчезает вне достаточно большого объема.

Спрашивается, с каких порядков должны мы начать разложение тензора $\mathcal{T}^{\mu\nu}$? Ответим на этот вопрос сначала в аспекте сингулярностей поля. Там мы имеем (см. гл. I, § 4)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu} &= \sum_{A=1}^{N}\overset{A}{\mu}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,\overset{A}{\xi}{}^{\mu}{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^{\nu}{}_{|0}, \quad \xi^0 = x^0, \quad \xi^0{}_{|0} = 1, \\ \overset{A}{\mu} &= \frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2}\,\frac{dx^0}{ds_A}. \end{aligned} \tag{3.5а}$$

Допустим, что разложение ξ^k начинается с нулевого порядка

$$\xi^k = \underset{0}{\xi^k} + \underset{1}{\xi^k} + \underset{2}{\xi^k} + \ldots. \tag{3.5б}$$

Функция $\overset{A}{\mu}$ начинается со второго порядка. Это видно из (3.5а). Это также следует из ньютоновских уравнений движения. Там мы имеем (в случае проблемы двух тел)

$$\overset{A}{\mu}\underset{2}{\overset{A}{\xi}{}^{k}}{}_{|00} = \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\frac{\partial}{\partial\overset{A}{\xi}{}^{k}}\left|\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}-\overset{B}{\boldsymbol{\xi}}\right|^{-1}. \tag{3.6}$$

Поскольку самый низкий порядок в обеих частях уравнения должен быть одинаков, заключаем

$$\mu = \underset{2}{\mu} + \underset{3}{\mu} + \underset{4}{\mu} + \ldots. \tag{3.7}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{00} &= \underset{2}{\mathcal{T}^{00}} + \underset{3}{\mathcal{T}^{00}} + \underset{4}{\mathcal{T}^{00}} + \ldots, \\ \mathcal{T}^{0n} &= \underset{3}{\mathcal{T}^{0n}} + \underset{4}{\mathcal{T}^{0n}} + \ldots, \\ \mathcal{T}^{mn} &= \underset{4}{\mathcal{T}^{mn}} + \ldots. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Аналогично получаем тот же результат в случае непрерывного распределения и допускаем, что в случае произвольного тензора энергии-импульса мы имеем точно так же, как в (3.8):

$$\mathcal{T}^{00} = O(\lambda^2), \quad \mathcal{T}^{0n} = O(\lambda^3), \quad \mathcal{T}^{mn} = O(\lambda^4). \tag{3.9}$$

Поскольку $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ является функцией от A^α и $g_{\rho\sigma}$, последнее уравнение определяет самый низкий порядок A^α по λ.

§ 4. Метод приближений и система координат

Каково соотношение между преобразованием координат и методом приближений? Точнее, каким условиям должны удовлетворять преобразования координат, чтобы не нарушать свойств метрического поля ни на бесконечности, ни в отношении порядка, с которого начинается его разложение? Запишем преобразование к системе координат со звездочкой

$$x^{*\alpha} = x^\alpha + a^\alpha(x, \lambda) \tag{4.1}$$

и потребуем, чтобы это преобразование переходило в тождественное преобразование при $r \to \infty$, т. е.

$$\lim_{r \to \infty} a^\alpha(x, \lambda) = 0. \tag{4.2}$$

Тогда из формулы

$$g_{\alpha\beta} = g^*_{\mu\nu}\, x^{*\mu}{}_{|\alpha}\, x^{*\nu}{}_{|\beta}, \tag{4.3}$$

пренебрегая произведениями ah и aa, выводим

$$\begin{aligned} h_{00} &= h^*_{00} + 2a^0{}_{|0}, \\ h_{0n} &= h^*_{0n} + a^0{}_{|n} - a^n{}_{|0}, \\ h_{mn} &= h^*_{mn} - a^n{}_{|m} - a^m{}_{|n}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Последнее уравнение немедленно дает ответ на наш вопрос. Так как в соответствии с (2.7) разложение величин h начинается соответственно с $\underset{2}{h}_{00}$, $\underset{2}{h}_{0n}$, $\underset{1}{h}_{mn}$, то легко видеть, что, если мы хотим, чтобы h^* начинались с того же порядка, мы должны иметь

$$\begin{aligned} a^0 &= \underset{2}{a^0} + \underset{3}{a^0} + \underset{4}{a^0} + \ldots, \\ a^n &= \underset{1}{a^n} + \underset{2}{a^n} + \underset{3}{a^n} + \ldots. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Можно легко обобщить этот результат. Возьмем в (4.1)

$$x^{*0} = x^0 + \underset{l+1}{a^0}, \quad x^{*k} = x^k + \underset{l}{a^k}, \tag{4.6}$$

тогда первые $h_{\alpha\beta}$, на которые повлияет такое преобразование, будут

$$\underset{l}{h}_{mn}, \quad \underset{l+1}{h}_{0n}, \quad \underset{l+2}{h}_{00}. \tag{4.7}$$

Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} \underset{l}{h}_{mn} &= \underset{l}{h}^*{}_{mn} - \underset{l}{a}^m{}_{|n} - \underset{l}{a}^n{}_{|m}, \\ \underset{l+1}{h}_{0n} &= \underset{l+1}{h}^*{}_{0n} + \underset{l+1}{a}^0{}_{|n} - \underset{l+1}{a}^n{}_{|0}, \\ \underset{l+2}{h}_{00} &= \underset{l+2}{h}^*{}_{00} + 2\underset{l+2}{a}^0{}_{|0}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Напомним одну из наиболее важных теорем римановой геометрии, которая касается необходимых и достаточных условий для того, чтобы пространство было псевдоевклидовым. Вопрос стоит так: в каком случае преобразование координат может превратить метрическую форму

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad \text{в} \quad \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta? \tag{4.9}$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы это было возможным, является, как известно, следующее условие:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \tag{4.10}$$

т. е. исчезновение главного тензора Римана.

Доказательство необходимости тривиально и исчерпывается замечанием, что $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ уничтожает главный тензор Римана. Доказательство достаточности гораздо более трудоемко, и в книгах можно найти много различных способов доказательств. По крайней мере один из них базируется на том факте, что (4.10) представляет собой условие интегрируемости, обеспечивающее существование четырех функций преобразования, с помощью которых $g_{\alpha\beta}$ превращается в $\eta_{\alpha\beta}$.

Подобный вопрос можно задать теперь в связи с нашим методом приближений: каковы необходимые и достаточные условия для существования преобразования $\underset{l+1}{a^0}$, $\underset{l}{a^k}$, которое обращает десять функций

$$\underset{l}{h}_{mn}, \quad \underset{l+1}{h}_{0n}, \quad \underset{l+2}{h}_{00} \tag{4.11}$$

в нуль?

Введем линеаризованный тензор кривизны

$$S_{\mu\alpha,\,\nu\beta}=\frac{1}{2}(h_{\alpha\beta\,|\,\mu\nu}+h_{\mu\nu\,|\,\alpha\beta}-h_{\mu\beta\,|\,\nu\alpha}-h_{\alpha\nu\,|\,\mu\beta}). \tag{4.12}$$

Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы преобразование координат уничтожало $\underset{l}{h}_{mn}$, $\underset{l+1}{h}_{0n}$, $\underset{l+2}{h}_{00}$, является

$$\underset{l}{S}_{ma,\,nb}=0,\quad \underset{l+1}{S}_{m0,\,nb}=0,\quad \underset{l+2}{S}_{m0,\,0b}=0. \tag{4.13}$$

Доказательство того, что (4.13) необходимо, тривиально. Доказательство того, что это условие достаточно, более сложно, поскольку оно подобно более общему случаю, когда метод приближений не применяется. Здесь мы его опускаем.

Имея $h_{\alpha\beta}$, можно определить $h^{\alpha\beta}$ с помощью уравнения

$$g^{\alpha\beta}=\eta^{\alpha\beta}+h^{\alpha\beta},\quad h^{\alpha\beta}=\sum_{l=1}^{\infty}\underset{l}{h}^{\alpha\beta}. \tag{4.14}$$

По величинам $\underset{k}{h}_{\alpha\beta}$ $(k\leqslant l)$ можно найти последовательно величины $\underset{l}{h}^{\alpha\beta}$, так как

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}=\delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Таким образом мы обнаружим, что $h^{\alpha\beta}$ начинается с

$$\underset{2}{h}^{00}=-\underset{2}{h}_{00},\quad \underset{2}{h}^{0m}=\underset{2}{h}_{0m},\quad \underset{1}{h}^{mn}=-\underset{1}{h}_{mn},\quad \underset{3}{h}^{00}=-\underset{3}{h}_{00},$$
$$\underset{4}{h}^{00}=(\underset{2}{h}_{00})^2-\underset{4}{h}_{00}. \tag{4.15}$$

Написанных выше формул достаточно для всех наших практических вычислений. Исключительно ради полноты мы приводим общую формулу

$$\underset{l}{h}^{\alpha\beta}=\sum(-1)^p\eta^{\alpha\rho_1}\underset{k_1}{h}_{\rho_1\rho_2}\eta^{\rho_2\rho_3}\underset{k_2}{h}_{\rho_3\rho_4}\dots\underset{k_p}{h}_{\rho_{2p-1}\rho_{2p}}\eta^{\rho_{2p}\beta}, \tag{4.16}$$

где суммирование следует распространить на все комбинации положительных целых чисел, удовлетворяющие условию $k_1+k_2+\dots$ $\dots+k_p=l$.

§ 5. Метод приближений и уравнения поля

Введем теперь общую схему применения метода приближений к уравнениям ОТО. Будет несколько более удобным, по крайней мере в общей схеме, рассматривать в качестве основных не величины h, а величины γ. Поэтому начнем с определения γ. Напишем

$$\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}=\mathfrak{g}^{\alpha\beta}=\eta^{\alpha\beta}+\gamma^{\alpha\beta}, \tag{5.1}$$

что является определением $\gamma^{\alpha\beta}$. Эти величины будут рассматриваться как наши основные выражения, характеризующие метрическое поле; из них могут быть выведены все другие:

$$g=|g_{\alpha\beta}|=|g^{\alpha\beta}|^{-1}=|\eta^{\alpha\beta}+\gamma^{\alpha\beta}|^{-1}g^2, \tag{5.2}$$

откуда следует

$$g=|\eta^{\mu\nu}+\gamma^{\mu\nu}|, \tag{5.3}$$

поэтому

$$\sqrt{-g}=1+\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}+\text{Нелинейные выражения.} \tag{5.4}$$

Из последнего уравнения и определения $h^{\alpha\beta}$ следует

$$h^{\alpha\beta}=\gamma^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\rho\sigma}\gamma^{\rho\sigma}+\text{Нелинейные выражения.} \tag{5.5}$$

Мы видим, учитывая (4.15), что

$$\gamma^{00}=\underset{1}{\gamma}^{00}+\underset{2}{\gamma}^{00}+\underset{3}{\gamma}^{00}+\dots, \tag{5.6а}$$

$$\gamma^{0m}=\underset{2}{\gamma}^{0m}+\underset{3}{\gamma}^{0m}+\dots, \tag{5.6б}$$

$$\gamma^{mn}=\underset{1}{\gamma}^{mn}+\underset{2}{\gamma}^{mn}+\underset{3}{\gamma}^{mn}+\dots. \tag{5.6в}$$

Теперь рассмотрим основные уравнения ОТО

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu}+8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu}=0. \tag{5.7}$$

Начнем с вычисления в явном виде линейной части $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$, т. е. той части, которая содержит только вторые производные от γ и причем только линейно. Плотность тензора Эйнштейна может быть представлена в виде

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu}=\frac{1}{2\sqrt{-g}}(\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\mathfrak{g}^{\nu\beta}-\mathfrak{g}^{\mu\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\beta})_{|\alpha\beta}+\mathfrak{G}^{*\mu\nu}, \tag{5.8}$$

где $\mathfrak{G}^{*\mu\nu}$ — квадратичная функция первых производных.

Следовательно, линейная часть $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$ может быть записана в виде

$$L(\mathfrak{G}^{\mu\nu})=K^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{|\alpha\beta}, \tag{5.9}$$

где

$$K^{\mu\alpha\nu\beta}=K^{\mu\alpha,\,\nu\beta}=\frac{1}{2}(\eta^{\nu\alpha}\gamma^{\mu\beta}+\eta^{\mu\beta}\gamma^{\nu\alpha}-\eta^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}-\eta^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu}). \tag{5.10}$$

Интересно отметить свойства симметрии выражения $K^{\mu\alpha,\,\nu\beta}$. Мы видим, что $K^{\mu\alpha,\,\nu\beta}$ антисимметрично по индексам μ, α и антисимметрично по индексам ν, β, что $K^{\mu\alpha,\,\nu\beta}$ симметрично по отношению к одновременной перестановке μ с ν и α с β и, наконец, что $K^{\mu\alpha,\,\nu\beta}$

удовлетворяет соотношению

$$K^{\mu\alpha\nu\beta}+K^{\mu\nu\beta\alpha}+K^{\mu\beta\alpha\nu}=0. \tag{5.11}$$

Таким образом, очевидно, что выражение $K^{\mu\alpha,\,\nu\beta}$ обладает всеми свойствами симметрии главного тензора кривизны Римана.

Запишем основные уравнения ОТО в форме

$$K^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{|\alpha\beta}+N(\mathfrak{G}^{\mu\nu})+8\pi\mathcal{J}^{\mu\nu}=0, \tag{5.12}$$

где символ $N(S)$ означает все нелинейные члены в S.

Обсудим теперь коротко свойства преобразований $\gamma^{\mu\nu}$. Поскольку $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ есть плотность тензора, то

$$\mathfrak{g}^{*\mu\nu}=\mathfrak{g}^{\alpha\beta}x^{*\mu}{}_{|\alpha}x^{*\nu}{}_{|\beta}\det\frac{\partial x}{\partial x^*}.$$

Введем в это уравнение

$$x^{*\mu}{}_{|\alpha}=\delta^{\mu}_{\alpha}+a^{\mu}{}_{|\alpha}, \tag{5.13}$$

$$\det\frac{\partial x}{\partial x^*}=1-a^{\alpha}{}_{|\alpha}. \tag{5.14}$$

Пренебрегая произведениями aa и $a\gamma$, получаем

$$\gamma^{*\mu\nu}=\gamma^{\mu\nu}+\eta^{\alpha\mu}a^{\nu}{}_{|\alpha}+\eta^{\alpha\nu}a^{\mu}{}_{|\alpha}-\eta^{\mu\nu}a^{\alpha}{}_{|\alpha}, \tag{5.15}$$

или в явном виде

$$\gamma^{*00}=\gamma^{00}+a^{0}{}_{|0}-a^{s}{}_{|s}, \tag{5.16а}$$

$$\gamma^{*0n}=\gamma^{0n}-a^{0}{}_{|n}+a^{n}{}_{|0}, \tag{5.16б}$$

$$\gamma^{*mn}=\gamma^{mn}-a^{m}{}_{|n}-a^{n}{}_{|m}+\delta^{mn}a^{s}{}_{|s}+\delta^{mn}a^{0}{}_{|0}. \tag{5.16в}$$

Мы не нарушим порядка, с которого начинаются γ, если разложим a таким же образом, как и прежде, т. е.

$$a^0=\underset{2}{a^0}+\underset{3}{a^0}+\ \ldots, \tag{5.17а}$$

$$a^m=\underset{1}{a^m}+\underset{2}{a^m}+\ \ldots\ . \tag{5.17б}$$

После этих вводных замечаний перейдем к главной проблеме настоящего параграфа, которая заключается в том, чтобы применить метод приближений к уравнениям поля ОТО.

Перепишем (5.12) в виде

$$K^{0a,\,0b}{}_{|ab}+N(\mathfrak{G}^{00})+8\pi\mathcal{J}^{00}=0, \tag{5.18а}$$

$$K^{0a,\,nb}{}_{|ab}+K^{0a,\,n0}{}_{|a0}+N(\mathfrak{G}^{0n})+8\pi\mathcal{J}^{0n}=0, \tag{5.18б}$$

$$K^{ma,\,nb}{}_{|ab}+K^{m0,\,nb}{}_{|0b}+K^{ma,\,n0}{}_{|a0}+K^{m0,\,n0}{}_{|00}+\\+N(\mathfrak{G}^{mn})+8\pi\mathcal{J}^{mn}=0. \tag{5.18в}$$

Записывая (5.10) более подробно, имеем

$$K^{ma,\,nb}=\frac{1}{2}(-\delta^{na}\gamma^{mb}-\delta^{mb}\gamma^{na}+\delta^{mn}\gamma^{ab}+\delta^{ab}\gamma^{mn}), \tag{5.19а}$$

$$K^{0a,\,nb}=\frac{1}{2}(-\delta^{na}\gamma^{0b}+\delta^{ab}\gamma^{0n}), \tag{5.19б}$$

$$K^{0a,\,0b}=\frac{1}{2}(-\gamma^{ab}+\delta^{ab}\gamma^{00}). \tag{5.19в}$$

Таким образом, $K^{ma,\,nb}$ и $K^{0a,\,0b}$ начинаются с первого порядка, а $K^{0a,\,nb}$ — со второго. Но, поскольку $\mathcal{J}^{mn}$ начинается с четвертого порядка, $\mathcal{J}^{0n}$ — с третьего, а $\mathcal{J}^{00}$ — со второго, то, начиная на этот раз снизу, для самого низшего порядка будем иметь

$$\underset{1}{K}{}^{ma,\,nb}{}_{|ab}=0,\quad \underset{1}{K}{}^{0a,\,0b}{}_{|ab}=0,\quad \underset{2}{K}{}^{0a,\,nb}{}_{|ab}=0. \tag{5.20}$$

Общее решение первого из этих уравнений дает

$$\underset{1}{\gamma}{}^{mn}=\underset{1}{b}{}^{m}{}_{|n}+\underset{1}{b}{}^{n}{}_{|m}-\delta^{mn}\underset{1}{b}{}^{s}{}_{|s}, \tag{5.21}$$

где b — произвольные функции. Сравнивая это с (5.16в), мы видим, что $\underset{1}{\gamma}{}^{mn}$ может быть уничтожено соответствующим выбором системы координат. Допустим, что это сделано, откуда следует, что $\underset{1}{\gamma}{}^{mn}=0$ и $K^{ma,\,nb}$ начинается по крайней мере со второго порядка. Учитывая этот результат, получаем (поскольку $\mathcal{J}^{00}$ второго порядка)

$$\underset{1}{K}{}^{0a,\,0b}{}_{|ab}=\frac{1}{2}\underset{1}{\gamma}{}^{00}{}_{|ss}=0. \tag{5.22}$$

Точно так же третье из уравнений (5.20) дает

$$\underset{2}{\gamma}{}^{0n}=\underset{2}{b}{}^{0}{}_{|n}. \tag{5.23}$$

Это также показывает, что $\underset{2}{\gamma}{}^{0n}$ может быть уничтожено соответствующим преобразованием времени. Итак, мы пришли к следующему результату: путем простого ограничения нашей системы координат всегда можно выбрать

$$\underset{1}{\gamma}{}^{mn}=\underset{1}{\gamma}{}^{00}=\underset{2}{\gamma}{}^{0n}=0. \tag{5.24}$$

Продвинемся на шаг вперед, снова начиная снизу в (5.18). Теперь найдем

$$\underset{2}{K}{}^{ma,\,nb}{}_{|ab}=0,\quad \underset{2}{K}{}^{0a,\,0b}{}_{|ab}+8\pi\underset{2}{\mathcal{J}}{}^{00}=0. \tag{5.25}$$

Таким образом, как и прежде, получаем

$$\underset{2}{\gamma}{}^{mn}=0. \tag{5.26}$$

Однако для $\underset{2}{\gamma}^{00}$ это уже не имеет места. Эта величина должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2}\underset{2}{\gamma}^{00}{}_{|ss}+8\pi\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}=0. \tag{5.27}$$

Следовательно, $\underset{2}{\gamma}^{00}\neq 0$. Перейдем теперь к $\underset{3}{\gamma}^{0n}$. Так как нелинейные члены должны быть по крайней мере четвертого порядка, то ими можно пренебречь. Тогда

$$\underset{3}{K}^{0a,\,nb}{}_{|ab}+\underset{2}{K}^{0a,\,n0}{}_{|\underset{1}{0a}}+8\pi\underset{3}{\mathcal{T}}^{0n}=0, \tag{5.28}$$

что также дает нам величину $\underset{3}{\gamma}^{0n}$, которая отлична от нуля. Возвращаясь еще раз к (5.18в), мы видим, что первая γ^{mn}, которая может быть отличной от нуля, есть $\underset{4}{\gamma}^{mn}$, так как $K^{m0,\,nb}{}_{|b0}$, $K^{m0,\,n0}{}_{|00}$, $N(\mathfrak{G}^{mn})$ и $\mathcal{T}^{mn}$ начинаются с четвертого порядка. Таким образом, при соответствующем выборе системы координат можно положить:

$$\gamma^{00}=\underset{2}{\gamma}^{00}+\underset{3}{\gamma}^{00}+\underset{4}{\gamma}^{00}+\ldots, \tag{5.29а}$$

$$\gamma^{0n}=\underset{3}{\gamma}^{0n}+\underset{4}{\gamma}^{0n}+\ldots, \tag{5.29б}$$

$$\gamma^{mn}=\underset{4}{\gamma}^{mn}+\ldots. \tag{5.29в}$$

Учитывая (5.5), это вызывает следующее разложение h:

$$h^{00}=\underset{2}{h}^{00}+\underset{3}{h}^{00}+\underset{4}{h}^{00}+\ldots, \tag{5.30а}$$

$$h^{0n}=\underset{3}{h}^{0n}+\underset{4}{h}^{0n}+\ldots, \tag{5.30б}$$

$$h^{mn}=\underset{2}{h}^{mn}+\underset{3}{h}^{mn}+\underset{4}{h}^{mn}+\ldots, \tag{5.30в}$$

где

$$\underset{2}{h}^{00}=-\underset{2}{h}_{00}=\frac{1}{2}\underset{2}{\gamma}^{00},\quad \underset{2}{h}^{mn}=-\underset{2}{h}_{mn}=\frac{1}{2}\delta^{mn}\underset{2}{\gamma}^{00},\quad \underset{3}{h}^{0n}=\underset{3}{h}_{0n}=\underset{3}{\gamma}^{0n}. \tag{5.31}$$

Следовательно, мы знаем, как начать нашу процедуру приближений. Следующий вопрос заключается в том, как продолжить ее. Допустим, что

$$\underset{2}{\gamma}^{00},\ \underset{3}{\gamma}^{00},\ \ldots,\ \underset{l-1}{\gamma}^{00};\quad \underset{4}{\gamma}^{mn},\ \underset{5}{\gamma}^{mn},\ \ldots,\ \underset{l-1}{\gamma}^{mn};\quad \underset{3}{\gamma}^{0n},\ \underset{4}{\gamma}^{0n},\ \ldots,\ \underset{l}{\gamma}^{0n} \tag{5.32}$$

известны. Вопрос заключается в том, как найти $\underset{l}{\gamma}^{mn}$, $\underset{l}{\gamma}^{00}$, $\underset{l+1}{\gamma}^{0n}$. Будем искать γ в том порядке, как они были только что выписаны.

Напишем уравнения поля ОТО в l-м порядке, начиная с уравнения, соответствующего (5.18в):

$$\underset{l}{K}^{ma,\,nb}{}_{|ab}+\underset{l-1}{K}^{m0,\,nb}{}_{|\underset{1}{0b}}+\underset{l-1}{K}^{ma,\,n0}{}_{|\underset{1}{a0}}+\underset{l-2}{K}^{m0,\,n0}{}_{|\underset{2}{00}}+N(\mathfrak{G}^{mn})+8\pi\underset{l}{\mathcal{T}}^{mn}=0; \tag{5.33}$$

величины $\underset{l}{\gamma}^{mn}$ присутствуют только в первом выражении. Все другие известны. Действительно, $N(\mathfrak{G}^{mn})$ может содержать γ главным образом до l—2 порядка. А теперь несколько слов о $\underset{l}{\mathcal{T}}^{mn}$. В случае точечных частиц в соответствии с (3.5) имеем

$$\mathcal{T}^{mn}=\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{\mu}\overset{A}{\delta}_{(3)}\overset{A}{\xi}{}^{m}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{n}{}_{|0},\qquad \overset{A}{\mu}=\frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2}\frac{dx^0}{\partial s_A}. \tag{5.34}$$

Теперь [см. (3.7)]

$$\mu=\underset{2}{\mu}+\underset{3}{\mu}+\underset{4}{\mu}+\ldots.$$

Однако если мы начинаем разложение h в соответствии с (5.30), то видим, что $\underset{3}{\mu}=0$. Следовательно, в $\underset{l}{\mathcal{T}}^{mn}$ могут появиться только выражения до $l-4$ порядка по γ. Аналогично в $\underset{l}{\mathcal{T}}^{0n}$ появятся только выражения до $l-3$ порядка и, наконец, в $\underset{l}{\mathcal{T}}^{00}$ — только выражения до $l-2$ порядка. Кроме того, поскольку $\underset{3}{\mu}=0$, то разложение $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$, если мы раскладываем в нем только μ, будет иметь вид

$$\mathcal{T}^{00}=\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}+\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}+\ldots, \tag{5.35а}$$

$$\mathcal{T}^{0n}=\underset{3}{\mathcal{T}}^{0n}+\underset{5}{\mathcal{T}}^{0n}+\ldots, \tag{5.35б}$$

$$\mathcal{T}^{mn}=\underset{4}{\mathcal{T}}^{mn}+\underset{6}{\mathcal{T}}^{mn}+\ldots. \tag{5.35в}$$

Допустим, что то же самое справедливо в случае произвольного тензора энергии-импульса. Иными словами, мы предполагаем, что $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ зависит от γ таким образом, что в нем появляются только известные γ. Кроме того, допустим, что $\underset{3}{\mathcal{T}}^{00}=\underset{4}{\mathcal{T}}^{0n}=\underset{5}{\mathcal{T}}^{mn}=0$. Следовательно, дифференциальное уравнение для $\underset{l}{\gamma}^{mn}$ можно переписать в виде

$$\underset{l}{K}^{ma,\,nb}{}_{|ab}=\underset{l}{\Omega}^{mn}, \tag{5.36}$$

где $\underset{l}{\Omega}^{mn}$ — известная функция от известных γ. Учитывая свойства симметрии $K^{ma,\,nb}$, имеем

$$\underset{l}{K}^{ma,\,nb}{}_{|abn} \equiv 0. \tag{5.37}$$

Поэтому

$$\underset{l}{\Omega}^{mn}{}_{|n} = 0 \tag{5.38}$$

есть необходимое условие для того, чтобы уравнения (5.36) были разрешимы. Обсудим это условие в следующем параграфе. Мы увидим, что оно связано с уравнениями движения. Однако в настоящий момент мы просто примем, что (5.38) выполняется.

Из (5.21) мы знаем общее решение однородного уравнения (5.36). Обозначая через γ^{*mn} любое частное решение (5.36), получаем общее решение в виде

$$\underset{l}{\gamma}^{mn} = \underset{l}{\gamma}^{*mn} + \underset{l}{b}^{m}{}_{|n} + \underset{l}{b}^{n}{}_{|m} - \delta^{mn}\underset{l}{b}^{s}{}_{|s}. \tag{5.39}$$

Это уравнение можно рассматривать двояко: либо мы считаем, что b — произвольные функции, добавленные к γ^{*mn} так, чтобы получить общее решение, либо мы рассматриваем их как преобразование от системы координат со звездочкой к системе координат без звездочки. Действительно, сравнение последнего уравнения с (5.16) делает эту точку зрения очевидной.

Поскольку γ^{*mn} есть любое частное решение, то удобно предположить, что

$$\underset{l}{\gamma}^{*mn}{}_{|n} = 0. \tag{5.40}$$

Действительно, если (5.40) не выполняется, можно найти новое решение

$$\underset{l}{\gamma}^{**mn} = \underset{l}{\gamma}^{*mn} + \underset{l}{b}^{*m}{}_{|n} + \underset{l}{b}^{*n}{}_{|m} - \delta^{mn} b^{*s}{}_{|s} \tag{5.41}$$

такое, что

$$\underset{l}{\gamma}^{**mn}{}_{|n} = 0. \tag{5.42}$$

Для этого достаточно решить уравнение Пуассона

$$\underset{l}{b}^{*m}{}_{|nn} = -\underset{l}{\gamma}^{*mn}{}_{|n}. \tag{5.43}$$

Таким образом, мы всегда можем положить, что (5.40) выполнено. Тогда дифференциальное уравнение (5.36) переходит в уравнение Пуассона

$$\underset{l}{\gamma}^{*mn}{}_{|ss} = 2\underset{l}{\Omega}^{mn}, \tag{5.44}$$

и мы находим общее решение, добавляя решение однородного уравнения $\underset{l}{K}^{ma,\,nb}{}_{|ab} = 0$.

Разделавшись таким образом с γ^{mn}, вернемся к γ^{00}. Соответствующее уравнение для них, согласно (5.18а), есть

$$\underset{l}{K}^{0a,\,0b}{}_{|ab} = \underset{l}{\Omega}^{00} = -N(\underset{l}{\mathfrak{G}}^{00}) - 8\pi\underset{l}{\mathcal{T}}^{00}, \tag{5.45}$$

где $\underset{l}{\Omega}^{00}$ — функция от уже известных γ. Согласно (5.19в), имеем

$$\underset{l}{K}^{0a,\,0b}{}_{|ab} = \frac{1}{2}\underset{l}{\gamma}^{00}{}_{|ss} - \frac{1}{2}\underset{l}{\gamma}^{ab}{}_{|ab}. \tag{5.46}$$

Но $\underset{l}{\gamma}^{ab}$ уже известны из предыдущего этапа. Они были найдены как общее решение уравнения (5.36)

$$\underset{l}{\gamma}^{ab} = \underset{l}{\gamma}^{*ab} + \underset{l}{b}^{a}{}_{|b} + \underset{l}{b}^{b}{}_{|a} - \delta^{ab}\underset{l}{b}^{s}{}_{|s}, \tag{5.47а}$$

$$\underset{l}{\gamma}^{*ab}{}_{|b} = 0, \quad \underset{l}{\gamma}^{*ab}{}_{|ss} = 2\underset{l}{\Omega}^{ab}. \tag{5.47б}$$

Подставляя это в (5.46), имеем

$$\frac{1}{2}\underset{l}{\gamma}^{00}{}_{|ss} = \frac{1}{2}\underset{l}{b}^{s}{}_{|srr} + \underset{l}{\Omega}^{00}. \tag{5.48}$$

Если же обозначить через $\underset{l}{\gamma}^{*00}$ решение уравнения

$$\underset{l}{\gamma}^{*00}{}_{|ss} = 2\underset{l}{\Omega}^{00}, \tag{5.49}$$

то найдем

$$\underset{l}{\gamma}^{00} = \underset{l}{\gamma}^{*00} + \underset{l}{b}^{s}{}_{|s}, \tag{5.50}$$

что в соответствии с (5.16а) снова может быть интерпретировано как изменение в системе координат.

Наконец, мы должны рассмотреть уравнение порядка $l+1$ для $\underset{l+1}{\gamma}^{0n}$, т. е.

$$\underset{l+1}{K}^{0a,\,nb}{}_{|ab} + \underset{l+1}{K}^{0a,\,n0}{}_{|a0} + N(\underset{l+1}{\mathfrak{G}}^{0n}) + 8\pi\underset{l+1}{\mathcal{T}}^{0n} = 0. \tag{5.51}$$

Снова, согласно (5.19б), только $\underset{l+1}{K}^{0a,\,nb}$ содержит неизвестные величины $\underset{l+1}{\gamma}^{0n}$. С другой стороны, в соответствии с (5.19в) $\underset{l+1}{K}^{0a,\,n0}{}_{|a0}$ содержит только что вычисленные величины $\underset{l}{\gamma}^{mn}$ и $\underset{l}{\gamma}^{00}$. Обозначим

$$\underset{l+1}{\Omega}^{0n} = -N(\underset{l+1}{\mathfrak{G}}^{0n}) - 8\pi\underset{l+1}{\mathcal{T}}^{0n}. \tag{5.52}$$

Тогда, вводя уже вычисленные значения для $\underset{l}{\gamma}^{mn}$ и $\underset{l}{\gamma}^{00}$, т. е. (5.47) и (5.50), и учитывая (5.19) и (5.18б), имеем

$$\frac{1}{2}\left(\underset{l+1}{\gamma}^{0n}+\underset{l+1}{b}^{n}{}_{|0}\right)_{|ss}-\frac{1}{2}\left(\underset{l+1}{\gamma}^{0a}+\underset{l+1}{b}^{a}{}_{|0}\right)_{|an}=\underset{l+1}{\Omega}^{0n}+\frac{1}{2}\underset{l}{\gamma}^{*00}{}_{|\underset{1}{0}n}. \tag{5.53}$$

Здесь необходимым условием для того, чтобы уравнения имели решение, является исчезновение дивергенции от правой стороны, которая включает уже известные функции. Иначе говоря,

$$\underset{l+1}{\Omega}^{0n}{}_{|n}+\underset{l+1}{\Omega}^{00}{}_{|0}=0. \tag{5.54}$$

Позже мы обсудим это условие, а сейчас просто будем считать, что оно выполнено.

Обозначим теперь через $\underset{l+1}{\gamma}^{*0n}$ любое частное решение уравнения

$$\frac{1}{2}\underset{l+1}{\gamma}^{*0n}{}_{|ss}-\frac{1}{2}\underset{l+1}{\gamma}^{*0s}{}_{|sn}=\underset{l+1}{\Omega}^{0n}+\frac{1}{2}\underset{l}{\gamma}^{*00}{}_{|\underset{1}{0}n}. \tag{5.55}$$

Тогда

$$\underset{l+1}{\gamma}^{0n}+\underset{l+1}{b}^{n}{}_{|0}=\underset{l+1}{\gamma}^{*0n}+\underset{l+1}{b}^{0}{}_{|n} \tag{5.56}$$

(где $\underset{l+1}{b}^{0}$ — произвольная функция) есть снова общее решение (5.53). К последнему уравнению можно легко добавить условие

$$\underset{l+1}{\gamma}^{*0\alpha}{}_{|\alpha}=\underset{l+1}{\gamma}^{*0n}{}_{|n}+\underset{l}{\gamma}^{*00}{}_{|\underset{1}{0}}=0. \tag{5.57}$$

Если оно не выполнено, можно найти другое частное решение

$$\underset{l+1}{\gamma}^{**0n}=\underset{l+1}{\gamma}^{*0n}+\underset{l+1}{b}^{*0}{}_{|n}, \tag{5.58}$$

удовлетворяющее этому условию. Необходимо только выбрать $\underset{l+1}{b}^{*0}$ так, чтобы оно являлось решением уравнения Пуассона

$$\underset{l+1}{b}^{*0}{}_{|nn}=-\underset{l+1}{\gamma}^{*0n}{}_{|n}-\underset{l+1}{\gamma}^{*00}{}_{|0}.$$

Для $\gamma^{*0\alpha}$, удовлетворяющих (5.57), уравнение (5.56) снова превращается в чистое уравнение Пуассона

$$\underset{l+1}{\gamma}^{*0m}{}_{|ss}=2\underset{l+1}{\Omega}^{0m}. \tag{5.59}$$

Как и прежде, можно интерпретировать (5.56) как некоторое преобразование координат.

Подытожим кратко содержание этого параграфа. Прежде всего мы показали, что, выбирая простую систему координат, можно начать разложение с $\underset{2}{\gamma}^{00}$, $\underset{3}{\gamma}^{0n}$, $\underset{4}{\gamma}^{mn}$. В таком случае можно продолжать разложение неограниченно, предполагая, что условия интегрируемости, определяемые уравнениями (5.38) и (5.54), выполнены. Можно находить постепенно частные решения, решая только уравнения Пуассона. Затем можно найти общие решения, добавляя соответствующие произвольные функции. Это добавление может быть интерпретировано как переход от специально выбранной к произвольной системе координат. Конечно, мы не знаем, сходится ли такой метод приближений, а также не знаем, хорошо ли он ведет себя на бесконечности.

Мы показали, что всегда можно найти такую систему координат, что разложение начинается в соответствии с (5.29). Но можно показать и больше; можно показать, что при выборе соответствующей системы координат будем иметь

$$\gamma^{00}=\underset{2}{\gamma}^{00}+\underset{4}{\gamma}^{00}+\underset{5}{\gamma}^{00}+\ldots, \tag{5.60а}$$

$$\gamma^{0n}=\underset{3}{\gamma}^{0n}+\underset{5}{\gamma}^{0n}+\underset{6}{\gamma}^{0n}+\ldots, \tag{5.60б}$$

$$\gamma^{mn}=\underset{4}{\gamma}^{mn}+\underset{6}{\gamma}^{mn}+\underset{7}{\gamma}^{mn}+\ldots. \tag{5.60в}$$

Это легко показать в аспекте сингулярностей поля. В самом деле, поскольку $\underset{3}{\mu}=0$, соответствующие $\underset{3}{\mathcal{T}}^{00}$, $\underset{4}{\mathcal{T}}^{0n}$, $\underset{5}{\mathcal{T}}^{mn}$ исчезают. Кроме того, исчезает $N(\underset{3}{\mathfrak{G}}^{00})$, так как эта величина — по крайней мере четвертого порядка. Величина $N(\underset{4}{\mathfrak{G}}^{0n})$ также обращается в нуль, так как единственный вклад в это выражение могли бы внести выражения типа $\underset{3}{\gamma}^{00}{}_{|0}\underset{2}{\gamma}^{00}{}_{|n}$, являющиеся выражениями пятого порядка. Величина $N(\underset{5}{\mathfrak{G}}^{mn})$ также исчезает, потому что единственный вклад в это выражение могли бы дать величины типа $\underset{4}{\gamma}^{0m}{}_{|0}\underset{2}{\gamma}^{00}{}_{|n}$, которые имеют по крайней мере шестой порядок. Если мы хотим получить пост-ньютоновские уравнения движения, то для практических рассмотрений представляет некоторый интерес только исчезновение $\underset{3}{\gamma}^{00}$.

§ 6. Две формы уравнений движения и условия интегрируемости

Теперь вернемся к общей теории. Напоминаем, что снова в аспекте сингулярностей поля уравнения движения A-й частицы имели вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{dx^0}{ds_A}\int\limits_{\overset{A}{\Omega}} \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\, d\mathbf{x} = 0, \tag{6.1}$$

где $\overset{A}{\Omega}$ — малая окрестность, окружающая A-ю сингулярность. Эта форма непосредственно выводится из символического уравнения

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \tag{6.2}$$

представляющего собой следствие уравнений поля и тождеств Бианки. Будем рассматривать последнее уравнение как уравнение движения в случае непрерывного распределения материй и произвольного тензора энергии-импульса.

Теперь введем другую форму уравнений движения, исторически предшествовавшую первой; фактически именно из этой формы (которую мы введем теперь и к которой вернемся в последней главе) берет начало разработка уравнений движения в ОТО.

Напишем уравнения поля ОТО, согласно (5.18), в форме

$$\mathfrak{G}^{\mu n} + 8\pi\mathcal{T}^{\mu n} = K^{\mu a,\, nb}{}_{|ab} + K^{\mu 0,\, nb}{}_{|0b} + K^{\mu a,\, n0}{}_{|a0} + {}$$
$$+ K^{\mu 0,\, n0}{}_{|00} + N\left(\mathfrak{G}^{\mu n}\right) + 8\pi\mathcal{T}^{\mu n} = 0. \tag{6.3}$$

Теперь продифференцируем последнее уравнение по x^n. Вследствие структуры первых двух членов в правой части их производные исчезают и остается

$$8\pi\mathcal{T}^{\mu n}{}_{|n} + K^{\mu a,\, n0}{}_{|an0} + K^{\mu 0,\, n0}{}_{|n00} + N\left(\mathfrak{G}^{\mu n}\right)_{|n} = 0. \tag{6.4}$$

Эти четыре уравнения получены из уравнений поля, которые, как мы предположили, выполняются. Своей формой они обязаны структуре уравнений поля.

Также вследствие структуры уравнений поля, выражающейся тождествами Бианки, в случае выполнения уравнений поля мы получаем уравнения движения

$$\mathfrak{T}^{\mu n}{}_{|n} + \mathfrak{T}^{\mu 0}{}_{|0} + \left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\}\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = 0. \tag{6.5}$$

Эти два уравнения тождественны по своему физическому содержанию. Оба они представляют условия, которые должны быть выполнены; оба они являются различными выражениями уравнений движения.

Разобьем (6.4), выписывая отдельно уравнение для $\mu = m$ и для $\mu = 0$

$$8\pi\mathcal{T}^{mn}{}_{|n} + K^{ma,\, n0}{}_{|an0} + K^{m0,\, na}{}_{|an0} + K^{m0,\, n0}{}_{|n00} + N\left(\mathfrak{G}^{mn}\right)_{|n} = 0, \tag{6.6а}$$

$$8\pi\mathcal{T}^{0n}{}_{|n} + K^{0a,\, n0}{}_{|an0} + N\left(\mathfrak{G}^{0n}\right)_{|n} = 0. \tag{6.6б}$$

Если бы под первым уравнением было написано l, а под вторым $l+1$, то это были бы в точности условия интегрируемости, которые упоминались в предыдущем параграфе в (5.38) и (5.54). Таким образом, существует очень тесная связь между уравнениями движения и условием интегрируемости. Но имеется еще один вопрос, на который осталось ответить: каким образом можно разбить уравнение (6.6) или (6.5) на части, соответствующие различным приближениям? Этот вопрос был существенным камнем преткновения в работе Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана. Казалось, что разбиение уравнений движения дало бы бесконечное число противоречивых уравнений. Чтобы ответить на этот вопрос, или, скорее, найти один из возможных ответов, мы должны углубить наш процесс приближения.

Поскольку нам более привычна форма (6.5), чем (6.6), будет лучше объяснить этот процесс для уравнения $\mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$. Чтобы по возможности упростить ход идей, остановимся на случае сингулярностей поля. Мы знаем, что, интегрируя по малому объему вокруг A-й сингулярности, можно получить уравнения в виде

$$\frac{d}{dx^0}\left(\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^{k}{}_{|0}\right) + \overset{A}{\mu}\overset{A}{\widetilde{\left\{{k \atop \alpha\beta}\right\}}}\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0} = 0, \tag{6.7а}$$

$$\frac{d}{dx^0}\overset{A}{\mu} + \overset{A}{\mu}\overset{A}{\widetilde{\left\{{0 \atop \alpha\beta}\right\}}}\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0} = 0. \tag{6.7б}$$

Теперь выделим в (6.7а) все выражения порядка l. В $(d/dx^0)\left(\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^{k}{}_{|0}\right)$ они имеют вид

$$\underset{3}{\overset{A}{\mu}}{}_{|0}\underset{l-3}{\overset{A}{\xi}}{}^{k}{}_{|0} + \underset{2}{\overset{A}{\mu}}\underset{l-2}{\overset{A}{\xi}}{}^{k}{}_{|00} + \underset{5}{\overset{A}{\mu}}{}_{|0}\underset{l-5}{\overset{A}{\xi}}{}^{k}{}_{|0} + \underset{4}{\overset{A}{\mu}}\underset{l-4}{\overset{A}{\xi}}{}^{k}{}_{|00} + \ldots + \underset{l-1}{\overset{A}{\mu}}\underset{1}{\overset{A}{\xi}}{}^{k}{}_{|0}. \tag{6.8}$$

Во втором выражении мы будем иметь в самом низшем порядке:

$$\underset{2}{\overset{A}{\mu}}\underset{2}{\widetilde{\gamma}}{}^{00}{}_{|k} \quad \text{с} \quad \underset{2}{\widetilde{\gamma}}{}^{00}\left(x^\alpha,\ \overset{A}{\xi}{}^{\alpha}\right).$$

Так как $\underset{2}{\gamma}{}^{00}$ зависит от $\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}$, она также будет содержать вклады вплоть до порядка l. Они появятся из разложения $\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}$ в $\underset{2}{\gamma}{}^{00}$. Так как $\underset{2}{\mu}\underset{2}{\gamma}{}^{00}{}_{|k}$

является величиной четвертого порядка, то нужно разложить $\overset{A}{\xi}{}^\alpha$ до порядка $l-4$. В других выражениях в (6.7а) необходимо разложить $\overset{A}{\xi}{}^\alpha$ до порядка, меньшего $l-4$.

Следовательно, выражение наивысшего порядка, появляющееся в $\overset{A}{\xi}{}^k$, имеет порядок $l-4$. Поэтому можно теперь рассмотреть уравнение

$$\underbrace{\frac{d}{dx^0}\left(\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^k{}_{|0}\right)}_{l}+\underbrace{\overset{A}{\mu}\overbrace{\left\{{k \atop \alpha\beta}\right\}}^{A}\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0}}_{l}=0, \tag{6.9}$$

как определяющее $\underset{l-4}{\overset{A}{\xi}}{}^k$. Это значит, что уравнения движения можно подразделить по различным порядкам, каждое из которых позволяет вычислять движение с возрастающей точностью. Уравнения движения порядка l позволяют вычислить движение с точностью до порядка $l-4$. Таким образом, если положить $l=4$, то имеем уравнение для $\underset{0}{\xi}{}^k$, которое является ньютоновским движением. Полагая $l=6$, имеем $\underset{2}{\xi}{}^k$, т. е. пост-ньютоновское движение.

Что можно сказать теперь об уравнении порядка $l+1$

$$\underset{l+1}{\mu}{}_{|0}+\underbrace{\mu\left\{{0 \atop \alpha\beta}\right\}\xi^\alpha{}_{|0}\xi^\beta{}_{|0}}_{l+1}=0\,? \tag{6.10}$$

Это уравнение просто дает $\underset{l}{\mu}$! Если мы возьмем порядок $l+1=3$, то получим просто $\underset{2}{\mu}=\text{const}$, а для $l+1=5$ получим первое дополнительное, неньютоновское выражение.

Таким образом, мы видим, что можно расчленить уравнения движения и получить движение с возрастающей точностью. Необходимо допустить, что та же самая ситуация справедлива в случае произвольного тензора энергии-импульса. Здесь имеется динамическая характеристика A^α, играющая такую же роль, какую ξ^α играет в аспекте сингулярностей поля. Она может быть также найдена с возрастающей точностью с помощью процесса приближения.

Все, что было сказано в отношении уравнений движения, непосредственно применимо к условиям интегрируемости. Они определяют $\underset{l-4}{\xi}{}^k$ и $\underset{l}{\mu}$. Это можно видеть из (6.6а), если мы напишем l внизу

$$8\pi\underset{l}{\mathcal{J}}{}^{mn}{}_{|n}+\underset{l}{K}{}^{ma,\,n0}{}_{|an0}+K^{m0,\,na}{}_{|an0}+\underset{l}{K}{}^{m0,\,n0}{}_{|n00}+N\big(\underset{l}{\mathfrak{G}}{}^{mn}\big)_{|n}=0. \tag{6.11}$$

В $\underset{l}{\mathcal{J}}{}^{mn}$ самый высокий порядок ξ^k есть $l-4$:

$$\underset{l}{\mathcal{J}}{}^{mn}=\sum_{A=1}^{N}\underset{2}{\overset{A}{\mu}}\underset{0}{\overset{A}{\xi}}{}^m\underset{1}{{}_{|0}}\;\underset{l-4}{\overset{A}{\xi}}{}^n{}_{|0}\underset{1}{\overset{A}{\delta}}+\dots . \tag{6.12}$$

Подобным же образом в $\underset{4}{\dot{\gamma}}$, появляющихся в K и $\mathfrak{G}$, ξ^m должно быть разложено вплоть до порядка $l-4$. Следовательно, мы имеем точно такую же ситуацию, как и прежде.

Итак, условия интегрируемости есть уравнения движения, разбитые подобно уравнениям поля. Они позволяют нам определить движение с возрастающей точностью.

Процедура, описанная здесь, вообще говоря, не необходима, если мы не идем дальше пост-ньютоновского движения. Эта процедура несколько „грязновата“, так как она смешивает разложение γ с разложением ξ или в общем случае с разложением A.

В первоначальной работе Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана была использована другая процедура. Авторы настоящей книги позже усовершенствовали ее и назвали дипольной процедурой. С практической точки зрения она мало полезна, но теория, построенная с ее помощью, более изящна, чем данная сначала, так как она избегает разложения самого движения. Мы вкратце опишем использование дипольной теории, не приводя детальных расчетов.

Дипольный метод был описан в последнем параграфе гл. I. Напомним, что идея этого метода состоит во введении искусственного векторного поля D^α. Оно было введено таким образом, чтобы тождества Бианки тождественно выполнялись. Это значит, что уравнения движения выполнялись тождественно для произвольного движения. Таким образом, вводя искусственное поле D^α, отказавшись от эйнштейновских уравнений, мы разорвали связь между полем и движением. Мы смогли бы найти поле для этих неэйнштейновских уравнений, а движение оставалось бы произвольным. Итак, ничто не стоит на пути расчленения уравнений по порядкам и постепенного нахождения поля и величин D. Следовательно, мы смогли бы шаг за шагом найти $\underset{l}{\gamma}{}^{mn}$, $\underset{l}{\gamma}{}^{00}$, $\underset{l+1}{\gamma}{}^{0n}$, $\underset{l}{D}{}^k$, $\underset{l+1}{D}{}^0$. Допустим, что мы здесь остановились. Тогда можно превратить решение неэйнштейновских уравнений в решение эйнштейновских уравнений, полагая

$$\underset{4}{D}{}^k+\underset{5}{D}{}^k+\dots+\underset{l}{D}{}^k=0, \tag{6.13а}$$

$$\underset{3}{D}{}^0+\underset{4}{D}{}^0+\dots+\underset{l+1}{D}{}^0=0. \tag{6.13б}$$

Это значит, что только в конце нашей процедуры приближений мы находим уравнения движения, которые до тех пор были произвольны. Действительно, из последних уравнений, согласно (10.11), следует

$$\underset{4}{\mathcal{T}}^{k\mu}{}_{;\mu}+\underset{5}{\mathcal{T}}^{k\mu}{}_{;\mu}+\ldots+\underset{l}{\mathcal{T}}^{k\mu}{}_{;\mu}=0, \tag{6.14а}$$

$$\underset{3}{\mathcal{T}}^{0\mu}{}_{;\mu}+\underset{4}{\mathcal{T}}^{0\mu}{}_{;\mu}+\ldots+\underset{l+1}{\mathcal{T}}^{0\mu}{}_{;\mu}=0. \tag{6.14б}$$

Таким образом, этим методом получаем уравнения движения сразу же по окончании вычисления поля.

Следовательно, в принципе возможны два метода. Первый состоит в разложении масс и движения в ряды

$$\begin{gathered}\mu=\underset{2}{\mu}+\underset{4}{\mu}+\ldots,\\ \xi^k=\underset{0}{\xi}{}^k+\underset{2}{\xi}{}^k+\ldots.\end{gathered} \tag{6.15}$$

Разбивая уравнение движения на части, можно найти последовательно

$$\underset{2}{\mu},\ \underset{4}{\mu},\ \underset{5}{\mu},\ \ldots;\quad \underset{0}{\xi}{}^k,\ \underset{2}{\xi}{}^k,\ \underset{3}{\xi}{}^k,\ \ldots. \tag{6.16}$$

Мы будем говорить, что такие методы состоят в использовании метода приближений определенного порядка.

В другом методе, разобранном для дипольной процедуры, мы не разбиваем уравнения движения. Мы рассматриваем

$$\mu,\ \xi^k \tag{6.17}$$

как произвольные, которые в конце наших вычислений находятся сразу с точностью до определенного порядка, т. е.

$$\underset{\to n+2}{\mu},\quad \underset{\to n}{\xi}{}^k. \tag{6.18}$$

Стрелочки означают, что μ и ξ являются величинами не некоторого определенного порядка, а вплоть до определенного порядка.

Поскольку наши вычисления касаются ньютоновского и пост-ньютоновского движений, разница между этими двумя методами невелика. Будем поступать следующим образом: начнем с ньютоновских уравнений движения

$$\underset{3}{\mathcal{T}}^{0\nu}{}_{;\nu}=0;\quad \underset{4}{\mathcal{T}}^{m\nu}{}_{;\nu}=0. \tag{6.19}$$

Затем перейдем к пост-ньютоновским уравнениям движения

$$\begin{gathered}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0\nu}{}_{;\nu}+\underset{5}{\mathcal{T}}^{0\nu}{}_{;\nu}=0,\\ \underset{4}{\mathcal{T}}^{m\nu}{}_{;\nu}+\underset{6}{\mathcal{T}}^{m\nu}{}_{;\nu}=0.\end{gathered} \tag{6.20}$$

Однако в $\underset{5}{\mathcal{T}}$ и $\underset{6}{\mathcal{T}}$ введем ньютоновское решение, уже известное из предыдущих ступеней приближения.

Эти замечания заканчивают нашу общую теорию метода приближений и теперь можно перейти к конкретным вычислениям.

ГЛАВА III

Ньютоновское и пост-ньютоновское приближения

§ 1. Ньютоновское приближение

В этой главе мы получим уравнения движения в явном виде, используя описанный выше метод приближений. Начнем, конечно, с ньютоновского приближения и получим ньютоновское и пост-ньютоновское приближения в трех аспектах, как об этом упоминалось в предыдущей главе, начиная со случая тензора энергии-импульса общего вида и переходя затем к непрерывному и, наконец, дискретному распределению масс. Итак, ньютоновские уравнения движения, т. е. уравнения движения наинизшего приближения, имеют вид

$$\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}{}_{|\underset{1}{0}} + \underset{3}{\mathcal{T}}^{0a}{}_{|a} = 0, \tag{1.1а}$$

$$\underset{3}{\mathcal{T}}^{0m}{}_{|\underset{1}{0}} + \underset{4}{\mathcal{T}}^{mn}{}_{|n} + \frac{1}{2} h_{00|m}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00} = 0. \tag{1.1б}$$

Следовательно, чтобы полностью выписать эти уравнения движения, достаточно знать $\underset{2}{h}_{00}$. В силу уравнений (5.31) и (5.27) гл. II имеем

$$\underset{2}{h}_{00} = -\frac{1}{2}\underset{2}{\gamma}^{00}, \quad \underset{2}{\gamma}^{00}{}_{|ss} = -16\pi\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}. \tag{1.2}$$

Если принять допущение, что величина $\underset{2}{h}_{00}$ обращается в нуль на бесконечности, то отсюда будет следовать

$$\underset{2}{h}_{00} = -2\int_{\Omega} d\mathbf{x}'\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}. \tag{1.3}$$

Штрих у величины $\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}$ означает, что ее аргументами являются x'^k и x^0; произвольная аддитивная гармоническая функция равна нулю; Ω означает все пространство. Следовательно, ньютоновские уравнения движения будут иметь вид

$$\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}{}_{|0} + \underset{3}{\mathcal{T}}^{0a}{}_{|a} = 0, \tag{1.4а}$$

$$\underset{3}{\mathcal{T}}^{0m}{}_{|\underset{1}{0}} + \underset{4}{\mathcal{T}}^{mn}{}_{|n} - \int_{\Omega} d\mathbf{x}'\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|m} = 0. \tag{1.4б}$$

Перейдем теперь к случаю идеальной жидкости, которая описывается следующим тензором энергии-импульса:

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \frac{k}{c^2}\sqrt{-g}\left[\left(\rho + \frac{\rho}{c^2}\int_0^p \frac{dp}{\rho}\right)u^\alpha u^\beta - \frac{p}{c^2}g^{\alpha\beta}\right], \tag{1.5}$$

причем предположим заданной зависимость

$$p = p(\rho) \quad \text{или} \quad \rho = \rho(p). \tag{1.6}$$

Следуя нашей общей схеме, нужно теперь установить порядок первого члена в разложении по λ. Так как u^k начинается с члена первого порядка, а u^0 и $\sqrt{-g}$ — с членов нулевого порядка, то из вида формулы (1.5) следует, что разложение ρ начинается с члена второго порядка (как ранее это имело место для μ), а разложение p — с члена четвертого порядка. Таким образом,

$$\underset{2}{\mathcal{T}}^{00} = \underset{2}{\sigma}, \quad \underset{3}{\mathcal{T}}^{0n} = \underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^n, \quad \underset{4}{\mathcal{T}}^{mn} = \underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^m\underset{1}{v}^n + \underset{4}{\pi}\delta^{mn}, \tag{1.7}$$

где

$$\underset{2}{\sigma} = \frac{k}{c^2}\sqrt{-g}\,\rho, \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dx^0}, \quad \underset{4}{\pi} = \frac{kp}{c^4}, \quad \underset{2}{h}_{00} = -2\int_{\Omega} d\mathbf{x}'\underset{2}{\sigma}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}.$$

Следовательно, ньютоновские уравнения движения имеют вид

$$\underset{2}{\sigma}_{|\underset{1}{0}} + (\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^n)_{|n} = 0, \tag{1.8а}$$

$$(\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^m)_{|\underset{1}{0}} + (\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^m\underset{1}{v}^n)_{|n} + \underset{4}{\pi}_{|m} - \int_{\Omega} d\mathbf{x}'\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|m} = 0. \tag{1.8б}$$

Если умножить первое из этих уравнений на c^3, то оно станет в точности уравнением неразрывности; второе уравнение, будучи умноженным на c^4, оказывается в точности ньютоновским уравнением для идеальной жидкости.

Перейдем теперь к случаю точечных частиц. Мы можем сделать это двумя путями: либо подставляя непосредственно в уравнения движения

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \sum_A \overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\delta}\,\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0}, \tag{1.9}$$

либо рассматривая предельный случай уравнений (1.8), полагая

$$\sigma = \sum_A \overset{A}{\mu}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}). \tag{1.10}$$

Мы избираем второй путь, хотя он несколько более сложен. В этом случае, интегрируя уравнение (1.8а) по $\overset{A}{\Omega}$, получаем

$$\underset{2}{\mu}_{|0} = 0, \quad \underset{2}{\mu} = \mathrm{const}, \tag{1.11}$$

так как интеграл от дивергенции может быть преобразован в поверхностный интеграл, подынтегральное выражение которого обращается в нуль на этой поверхности. Аналогичным образом, интегрируя второе уравнение, найдем

$$\overset{AA}{\mu\xi}{}^{m}{}_{|00} = \int\limits_{\overset{A}{\Omega}} d\mathbf{x} \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}' \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|m} \sum_{A} \overset{A}{\mu}\delta(\mathbf{x}' - \overset{A}{\boldsymbol{\xi}}) \sum_{B} \overset{B}{\mu}\delta(\mathbf{x} - \overset{B}{\boldsymbol{\xi}}) =$$

$$= \sum_{B\neq A} \overset{AB}{\mu\mu} \frac{\partial}{\partial \overset{A}{\xi}{}^{m}} \frac{1}{\left|\overset{A}{\boldsymbol{\xi}} - \overset{B}{\boldsymbol{\xi}}\right|} = \sum_{B}{}' \overset{AB}{\mu\mu} \left(\frac{1}{\left|\overset{A}{\boldsymbol{\xi}} - \overset{B}{\boldsymbol{\xi}}\right|}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^{m}}. \tag{1.12}$$

Это снова ньютоновские уравнения движения точечных частиц под действием ньютоновского гравитационного поля. Здесь штрих у $\sum$ означает, что суммирование следует производить по всем B, не равным A. Этот результат не зависит от того, используем ли мы нашу „хорошую" δ-функцию, так как вклад от члена с $B = A$ всегда равен нулю. В этом легко убедиться, если поменять местами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ для $A = B$ в формуле (1.12).

§ 2. Гравитационное поле для пост-ньютоновских уравнений движения

Чтобы найти уравнения движения в следующем, пост-ньютоновском приближении, нужно знать величины

$$\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}, \quad \underset{5}{\mathcal{T}}^{0n}, \quad \underset{6}{\mathcal{T}}^{mn}, \tag{2.1}$$

так как в силу принятых нами в гл. II уравнений (5.35)

$$\underset{3}{\mathcal{T}}^{00} = \underset{4}{\mathcal{T}}^{0n} = \underset{5}{\mathcal{T}}^{mn} = 0. \tag{2.2}$$

Что касается гравитационного поля, то мы должны знать разложение величин

$$\left\{ {0 \atop \mu\nu} \right\} \mathcal{T}^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \left\{ {m \atop \mu\nu} \right\} \mathcal{T}^{\mu\nu} \tag{2.3}$$

вплоть до членов пятого и шестого порядка. Для этого должны быть известны

$$\underset{2}{h}_{mn}, \quad \underset{3}{h}_{0n}, \quad \underset{4}{h}_{00}. \tag{2.4}$$

Вычислим поочередно эти величины.

Из формул (5.31) гл. II следует, что

$$\underset{2}{h}_{mn} = -\frac{1}{2}\delta^{mn}\underset{2}{\gamma}^{00} = \delta^{mn}\underset{2}{h}_{00} = -2\delta^{mn}\int d\mathbf{x}'\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}. \tag{2.5}$$

Так как

$$\underset{3}{h}^{0n} = \underset{3}{\gamma}^{0n} = \underset{3}{h}_{0n}, \tag{2.6}$$

и в силу уравнений (5.14) и (5.28) гл. II мы имеем для величин $\underset{3}{h}^{0n}$ уравнение

$$\frac{1}{2}\underset{3}{h}_{0n|ss} - \frac{1}{2}\underset{3}{h}_{0s|sn} = -8\pi\underset{3}{\mathcal{T}}^{0n} + \frac{1}{2}\underset{2}{\gamma}^{00}{}_{|n\underset{1}{0}}. \tag{2.7}$$

Как легко видеть из уравнения (1.1а), условие интегрируемости этого уравнения имеет вид

$$\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}{}_{|\underset{1}{0}} + \underset{3}{\mathcal{T}}^{0s}{}_{|s} = 0. \tag{2.8}$$

Это ньютоновское уравнение движения с индексом нуль. Предполагая теперь, что

$$\gamma^{*0\alpha}{}_{|\alpha} = 0, \tag{2.9}$$

получаем из (2.7)

$$\frac{1}{2}\underset{3}{\gamma}^{*}_{0n|ss} = -8\pi\underset{3}{\mathcal{T}}^{0n}. \tag{2.10}$$

Согласно изложенному в гл. II, общее решение имеет вид

$$\underset{3}{\gamma}_{0n} = 4\int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}' \frac{\underset{3}{\mathcal{T}}'^{0n}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \underset{3}{a}_{0|n}, \tag{2.11}$$

где a_0 — произвольная функция, удовлетворяющая в случае необходимости некоторым условиям непрерывности и обращающаяся в нуль на бесконечности.

Расчет величины $\underset{4}{h}_{00}$ оказывается более сложным. Эту величину проще вычислять не через γ, т. е. не через плотность $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$ тензора Эйнштейна, а с помощью плотности тензора Риччи $\mathfrak{R}^{00}$. Выпишем еще раз основные уравнения ОТО:

$$\mathfrak{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\mathfrak{R} = -8\pi\mathcal{T}^{\alpha\beta}. \tag{2.12}$$

Из них находим

$$\mathfrak{R} = g^{\alpha\beta}\mathfrak{R}_{\alpha\beta} = 8\pi\mathcal{T}, \quad \mathcal{T} = g_{\alpha\beta}\mathcal{T}^{\alpha\beta}. \tag{2.13}$$

Следовательно, вместо (2.12) можно написать

$$\mathfrak{R}^{\alpha\beta} = -8\pi\left(\mathcal{T}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\mathcal{T}\right). \tag{2.14}$$

Запишем еще раз явный вид $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu}=\left\{{\rho \atop \mu\rho}\right\}_{|\nu}-\left\{{\rho\atop \mu\nu}\right\}_{|\rho}+\left\{{\rho\atop\mu\sigma}\right\}\left\{{\sigma\atop\rho\nu}\right\}-\left\{{\rho\atop\mu\nu}\right\}\left\{{\sigma\atop\rho\sigma}\right\}. \qquad (2.15)$$

Введем для краткости следующее обозначение:

$$\underset{2}{h}_{00}=\varphi=-2\int_{\Omega} d\mathbf{x}'\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}. \qquad (2.16)$$

Следовательно, принимая во внимание (2.5), мы имеем вплоть до величин второго порядка

$$\sqrt{-g}=1+\frac{1}{2}(h_{00}-h_{ss})=1-\varphi. \qquad (2.17)$$

Поскольку

$$\mathfrak{R}^{00}=\mathfrak{R}_{\mu\nu}g^{\mu0}g^{\nu0}, \qquad (2.18)$$

то для $\mathfrak{R}^{00}$ четвертого порядка имеем

$$\underset{4}{\mathfrak{R}}^{00}=-3\varphi\underset{2}{R}_{00}+\underset{4}{R}_{00}. \qquad (2.19)$$

Тем самым проблема нахождения $\underset{4}{\mathfrak{R}}^{00}$ сводится к отысканию величины R_{00} вплоть до членов четвертого порядка. Непосредственное вычисление дает

$$\underset{2}{R}_{00}+\underset{4}{R}_{00}=-\frac{1}{2}\varphi_{|ss}-\frac{1}{2}\underset{4}{h}_{00|ss}+\underset{3}{h}_{0s|\underset{1}{0}s}-\frac{3}{2}\varphi_{|00}+ \\ +\frac{1}{2}\varphi_{|s}\varphi_{|s}-\frac{1}{2}\varphi\varphi_{|ss}. \qquad (2.20)$$

Так как в соответствии с (2.11) и (1.1a)

$$\underset{4}{h}_{0s|0s}=2\varphi_{|00}+a_{0|0ss}, \qquad (2.21)$$

то можно записать $\underset{4}{\mathfrak{R}}^{00}$ в виде

$$\underset{4}{\mathfrak{R}}^{00}=-\frac{1}{2}\left(\underset{4}{h}_{00}-2a_{0|0}-\frac{1}{2}\varphi^2\right)_{|ss}+\frac{1}{2}\varphi_{|00}+\frac{1}{2}\varphi\varphi_{|ss}. \qquad (2.22)$$

Далее, в правой части (2.14) имеем

$$\underset{4}{\mathfrak{R}}^{00}=-8\pi\left(\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}-\frac{1}{2}\underbrace{g^{00}\mathcal{T}}_{4}\right)=-4\pi(\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}+\underset{4}{\mathcal{T}}^{ss}). \qquad (2.23)$$

Таким образом, наше дифференциальное уравнение принимает вид

$$\left(\underset{4}{h}_{00}-2a_{0|0}-\frac{1}{2}\varphi^2\right)_{|ss}=\varphi_{|00}+\varphi\varphi_{|ss}+8\pi(\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}+\underset{4}{\mathcal{T}}^{ss}). \qquad (2.24)$$

Поскольку φ имеет вид (2.16), то мы получаем решение последнего уравнения в виде

$$\underset{4}{h}_{00}=-2\int d\mathbf{x}'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}(\underset{4}{\mathcal{T}}'^{00}+\underset{4}{\mathcal{T}}'^{ss})-\int d\mathbf{x}'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}{}_{|\underset{2}{00}}+ \\ +2\int d\mathbf{x}'\int d\mathbf{x}''[\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'']\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}\underset{2}{\mathcal{T}}''^{00}+2\underset{4}{a}_{0|0}, \qquad (2.25)$$

где

$$[\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'']=\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'||\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|}+ \\ +\frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''||\mathbf{x}''-\mathbf{x}|}+\frac{1}{|\mathbf{x}''-\mathbf{x}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}.$$

Формула (2.25) выявляет структуру величины $\underset{4}{h}_{00}$ и все релятивистские поправки в ней. Она состоит из четырех выражений. Первый член представляет собой обычный вклад, который обусловливается распределением материи в неньютоновском приближении. Второй член имел бы место также в линейной теории. Его появление обусловлено тем, что мы начинаем процедуру приближений с уравнений Лапласа, а не Даламбера. Третий член вызван нелинейностью уравнений поля ОТО. Смысл четвертого члена очевиден.

Хотелось бы теперь выяснить, как ведет себя $\underset{4}{h}_{00}$ на (пространственной) бесконечности (при условии, что $a_{0|0}$ здесь стремится к нулю). Если предположить, что вся материя заключена внутри некоторой сферы конечного радиуса, то все выражения, за исключением второго, очевидно, стремятся к нулю. Таким образом, лишь выражение

$$-\int d\mathbf{x}'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}{}_{|00} \qquad (2.26)$$

нуждается в более подробном исследовании. В связи с этим напомним условие интегрируемости для $\underset{3}{\gamma}^{0n}$, которое, согласно нашему предположению, должно выполняться

$$-\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}{}_{|\underset{1}{0}}=\underset{3}{\mathcal{T}}^{0s}{}_{|s}. \qquad (2.27)$$

Следовательно, (2.26) можно записать в виде

$$|\mathbf{x}|\int d\mathbf{x}'\mathcal{T}'^{0s}{}_{|s0}-\frac{x^k}{|\mathbf{x}|}\int x'^k\mathcal{T}'^{0s}{}_{|s0}d\mathbf{x}'+\frac{1}{2|\mathbf{x}|}\int d\mathbf{x}'x'^kx'^k\mathcal{T}'^{0s}{}_{|s0}- \\ -\frac{1}{2}\frac{x^kx^l}{|\mathbf{x}|^3}\int d\mathbf{x}'x'^kx'^l\mathcal{T}'^{0s}{}_{|0s}+\ldots . \qquad (2.28)$$

Первый член обращается в нуль, так как $\mathcal{T}'^{0s}$ равны нулю вне сферы конечного радиуса; третий и четвертый члены стремятся к нулю как $1/|\mathbf{x}|$. Второй член можно записать в виде

$$-\frac{x^k}{|\mathbf{x}|}\int\left(\mathcal{T}'^{0s}x'^k\right)_{|s0}d\mathbf{x}'+\frac{x^k}{|\mathbf{x}|}\int\mathcal{T}'^{0k}{}_{|0}\,d\mathbf{x}'. \tag{2.29}$$

В этой сумме снова первый член равен нулю, и нам остается рассмотреть только выражение

$$\int\mathcal{T}'^{0k}{}_{|0}\,d\mathbf{x}'. \tag{2.30}$$

Потребуем теперь, чтобы, кроме условия интегрируемости (2.27), выполнялись также ньютоновские уравнения (1.4). В этом случае, используя снова то обстоятельство, что $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ обращается в нуль вне конечной области, будем иметь

$$\int\mathcal{T}'^{0k}{}_{|0}\,d\mathbf{x}'=\int d\mathbf{x}'\int d\mathbf{x}''\mathcal{T}'^{00}\mathcal{T}''^{00}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|}\right)_{|k'}=0. \tag{2.31}$$

Мы видим, что величина $\underset{4}{h}_{00}$ на бесконечности обращается в нуль, но только в том случае, если выполняются ньютоновские уравнения.

§ 3. Уравнения движения в пост-ньютоновском приближении

Мы предполагаем, что ньютоновские уравнения выполняются. В самом деле, уравнение с индексом нуль должно выполняться, потому что оно представляет собой необходимое условие интегрируемости. Другие уравнения также должны удовлетворяться, если мы хотим, чтобы величина $\underset{4}{h}_{00}$ обращалась в нуль на бесконечности. Поэтому пост-ньютоновские уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\underset{5}{\mathcal{T}}^{0\beta}{}_{;\beta}=0,\quad \underset{6}{\mathcal{T}}^{m\beta}{}_{;\beta}=0. \tag{3.1}$$

В соответствии со сказанным в предыдущей главе эти уравнения следует рассматривать как уравнения пятого и шестого порядка для динамических переменных в пост-ньютоновском приближении, от которых зависит $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$. Кроме того, $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ может также зависеть от метрического тензора.

Выпишем сначала первое из этих уравнений:

$$\begin{aligned}\underset{5}{\mathcal{T}}^{00}{}_{|0}+\underset{5}{\mathcal{T}}^{0s}{}_{|s}+\underset{3}{\begin{Bmatrix}0\\00\end{Bmatrix}}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}+2\underset{2}{\begin{Bmatrix}0\\0s\end{Bmatrix}}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0s}&=\\ =\underset{5}{\mathcal{T}}^{00}{}_{|0}+\underset{5}{\mathcal{T}}^{0s}{}_{|s}+\frac{1}{2}\varphi_{|0}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}+\varphi_{|s}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0s}&=\\ =\left(\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}+\frac{1}{2}\varphi\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}\right)_{\underset{1}{|0}}+\left(\underset{5}{\mathcal{T}}^{0s}+\frac{1}{2}\varphi\mathcal{T}^{0s}\right)_{|s}+\frac{1}{2}\varphi_{|s}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0s}&=0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Так как

$$\varphi=-2\int d\mathbf{x}'\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}, \tag{3.3}$$

то оно принимает вид

$$\begin{aligned}\left(\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}-\int d\mathbf{x}'\frac{\mathcal{T}'^{00}\mathcal{T}^{00}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|0}+\left(\underset{5}{\mathcal{T}}^{0s}-\int d\mathbf{x}'\frac{\mathcal{T}'^{00}\mathcal{T}^{0s}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|s}&-\\ -\int d\mathbf{x}'\mathcal{T}'^{00}\mathcal{T}^{0s}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|s}&=0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Обратимся теперь ко второму уравнению (3.1):

$$\underset{5}{\mathcal{T}}^{m0}{}_{\underset{1}{|0}}+\underset{6}{\mathcal{T}}^{ms}{}_{|s}+\underset{2}{\begin{Bmatrix}m\\00\end{Bmatrix}}\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}+\underset{4}{\begin{Bmatrix}m\\00\end{Bmatrix}}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}+2\underset{3}{\begin{Bmatrix}m\\0s\end{Bmatrix}}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0s}+\underset{2}{\begin{Bmatrix}m\\rs\end{Bmatrix}}\underset{4}{\mathcal{T}}^{rs}=0. \tag{3.5}$$

Входящие сюда символы Кристоффеля имеют вид

$$\begin{aligned}&\underset{2}{\begin{Bmatrix}m\\00\end{Bmatrix}}=\frac{1}{2}\varphi_{|m},\quad \underset{4}{\begin{Bmatrix}m\\00\end{Bmatrix}}=\frac{1}{2}\underset{4}{h}_{00|m}-\underset{3}{h}_{0m\underset{1}{|0}}+\frac{1}{2}\varphi\varphi_{|m},\\ &2\underset{3}{\begin{Bmatrix}m\\0s\end{Bmatrix}}=\underset{3}{h}_{0s|m}-\underset{3}{h}_{0m|s}-\delta_{ms}\varphi_{|0},\\ &\underset{2}{\begin{Bmatrix}a\\mn\end{Bmatrix}}=\frac{1}{2}\left(\delta_{mn}\varphi_{|a}-\delta_{na}\varphi_{|m}-\delta_{ma}\varphi_{|n}\right).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подставляя вместо величин h их выражения (2.11) и (2.25), используя затем ньютоновские уравнения движения и имея в виду, что φ представляет собой интеграл (2.16), получаем

$$\begin{aligned}\underset{6}{\mathcal{T}}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=&\left(\underset{5}{\mathcal{T}}^{a0}-\varphi\underset{3}{\mathcal{T}}^{a0}-4\int d\mathbf{x}'\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}\underset{3}{\mathcal{T}}'^{a0}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\right)_{|0}+\\ &+\left(\underset{6}{\mathcal{T}}^{ab}-\varphi\underset{4}{\mathcal{T}}^{ab}-4\int d\mathbf{x}'\underset{3}{\mathcal{T}}^{b0}\underset{3}{\mathcal{T}}'^{a0}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\right)_{|b}+\\ &+\frac{1}{2}\varphi_{|a}\left(\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}+\underset{4}{\mathcal{T}}^{ss}\right)-\int d\mathbf{x}'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|a}\left[\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}\left(\underset{4}{\mathcal{T}}'^{00}+\underset{4}{\mathcal{T}}'^{ss}\right)-\right.\\ &\left.-4\underset{3}{\mathcal{T}}'^{0s}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0s}\right]+\int d\mathbf{x}'\int d\mathbf{x}''[\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'']_{|a}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}\underset{2}{\mathcal{T}}''^{00}-\\ &-\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|a}\underset{4}{\mathcal{T}}'^{00}{}_{|00}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00},\end{aligned} \tag{3.7}$$

где снова

$$[\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ \mathbf{x}''] = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\,|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|} + \frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|\,|\mathbf{x}''-\mathbf{x}|} + \frac{1}{|\mathbf{x}''-\mathbf{x}|\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \qquad (3.8)$$

Так как относительно конкретной формы $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ не было сделано никаких предположений, то эти уравнения являются общими уравнениями пост-ньютоновского движения. Отметим одно интересное обстоятельство: величина $\underset{3}{a}_0$ в них вообще не появляется! Это объясняется тем, что $\underset{3}{a}_0$ входит в $\underset{3}{h}_{0n}$ и $\underset{4}{h}_{00}$, но не содержится в комбинациях $\frac{1}{2}\underset{4}{h}_{00|m} - \underset{3}{h}_{0m|0}$ и $\underset{3}{h}_{0n|m} - \underset{3}{h}_{0m|n}$, которые только и фигурируют в наших уравнениях.

Прежде чем перейти к двум другим аспектам, приведем уравнение (3.7) к несколько более удобной форме. Мы видим, что под знаком интеграла у нас выступают только сами величины $\mathcal{T}^{\mu\nu}$, за исключением последнего выражения, в котором появляется производная $\mathcal{T}'^{00}{}_{|00}$. Однако мы можем преобразовать это выражение следующим образом:

$$\mathcal{T}'^{00}{}_{|00}\mathcal{T}^{00} = (\mathcal{T}'^{00}{}_{|0}\mathcal{T}^{00})_{|0} - \mathcal{T}'^{00}{}_{|0}\mathcal{T}^{00}{}_{|0} = -(\mathcal{T}'^{0s}{}_{|s'}\mathcal{T}^{00})_{|0} - \mathcal{T}'^{0s}{}_{|s'}\mathcal{T}^{0r}{}_{|r}. \qquad (3.9)$$

Индекс дифференцирования s' может быть перенесен (с изменением знака) на функцию $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|a}$, стоящую под знаком интеграла. Процедура подобного рода, правда несколько более сложная, может быть проделана и с индексом дифференцирования r. В результате получим

$$-\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|a}\mathcal{T}'^{00}{}_{|00}\mathcal{T}^{00} = -\frac{1}{2}\left(\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|as'}\mathcal{T}'^{0s}\mathcal{T}^{00}\right)_{|0} - \frac{1}{2}\left(\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|as'}\mathcal{T}'^{0s}\mathcal{T}^{0r}\right)_{|r} + \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|as'r}\mathcal{T}'^{0s}\mathcal{T}^{0r}. \qquad (3.10)$$

Итак, мы можем написать окончательно наше общее уравнение (3.7) в несколько измененной форме, более удобной для

практического использования:

$$\begin{aligned}
&\Big(\underset{5}{\mathcal{T}}^{a0} - 4\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\underset{3}{\mathcal{T}}'^{0a}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00} + 2\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0a} - \\
&\qquad - \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|ab'}\underset{3}{\mathcal{T}}'^{0b}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}\Big)_{|0} + \\
&\qquad + \Big(\underset{6}{\mathcal{T}}^{ab} - 4\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\underset{3}{\mathcal{T}}'^{0a}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0b} + \\
&+ 2\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}\underset{4}{\mathcal{T}}^{ab} - \frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|ac'}\underset{3}{\mathcal{T}}'^{0c}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0b}\Big)_{|b} - \\
&\qquad - \int d\mathbf{x}'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|a}\Big[\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}(\underset{4}{\mathcal{T}}^{00} + \underset{4}{\mathcal{T}}^{ss}) + \\
&\qquad + (\underset{4}{\mathcal{T}}'^{00} + \underset{4}{\mathcal{T}}'^{ss})\underset{2}{\mathcal{T}}^{00} - 4\underset{3}{\mathcal{T}}'^{0s}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0s}\Big] + \\
&\qquad + \int d\mathbf{x}'\int d\mathbf{x}''\,[\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ \mathbf{x}'']_{|a}\underset{2}{\mathcal{T}}^{00}\underset{2}{\mathcal{T}}'^{00}\underset{2}{\mathcal{T}}''^{00} + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\,d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|ab'c}\underset{3}{\mathcal{T}}'^{0b}\underset{3}{\mathcal{T}}^{0c} = 0. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Перейдем теперь от уравнений общего вида к случаям непрерывного и дискретного распределения масс. Начнем со случая непрерывного распределения. Согласно (1.5), тензор энергии-импульса в этом случае имеет вид

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \frac{k}{c^2}\sqrt{-g}\left[\left(\rho + \frac{\rho}{c^2}\int_0^p \frac{dp}{\rho}\right)u^\alpha u^\beta - \frac{p}{c^2}g^{\alpha\beta}\right]. \qquad (3.12)$$

Запишем это в виде

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \sigma v^\alpha v^\beta - (\eta^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta})\pi, \qquad (3.13)$$

где

$$v^\alpha = \frac{u^\alpha}{u^0} = \frac{dx^\alpha}{dx^0}, \qquad \sigma = \frac{k}{c^2}\left(\rho + \frac{\rho}{c^2}\int_0^p \frac{dp}{\rho}\right)\sqrt{-g}\,(u^0)^2, \qquad \pi = \frac{kp}{c^4}. \qquad (3.14)$$

Разлагая (3.13) в степенной ряд

$$\sigma = \underset{2}{\sigma} + \underset{4}{\sigma} + \ \ldots, \qquad (3.15\text{а})$$

$$v = \underset{1}{v} + \underset{3}{v} + \ \ldots, \qquad (3.15\text{б})$$

$$\pi = \underset{4}{\pi} + \underset{6}{\pi} + \ \ldots, \qquad (3.15\text{в})$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\underset{4}{\mathcal{T}}^{00} = \underset{4}{\sigma} - \underset{4}{\pi}, \qquad \underset{5}{\mathcal{T}}^{0n} = \underset{4}{\sigma}\underset{1}{v}^n + \underset{2}{\sigma}\underset{3}{v}^n, \\
&\underset{6}{\mathcal{T}}^{mn} = \underset{4}{\sigma}\underset{1}{v}^m\underset{1}{v}^n + \underset{2}{\sigma}\underset{3}{v}^m\underset{1}{v}^n + \underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^m\underset{3}{v}^n + \underset{6}{\pi}\delta^{mn}. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Согласно (3.4), уравнение движения с индексом нуль дает

$$\left(\underset{4}{\sigma}-\underset{4}{\pi}-\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}\right)_{|0}+\left(\underset{4}{\sigma}\underset{1}{v}^{n}+\underset{2}{\sigma}\underset{3}{v}^{n}-\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^{n}\right)_{|n}-\int d\mathbf{x}'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|n}\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^{n}=0. \tag{3.17}$$

Подставляя теперь выражения (3.16) в (3.11), получим

$$\begin{aligned}&\left(\underset{4}{\sigma}\underset{1}{v}^{a}+\underset{2}{\sigma}\underset{3}{v}^{a}+2\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\underset{2}{\sigma}\underset{2}{\sigma}'\left(\underset{1}{v}^{a}-2\underset{1}{v}'^{a}\right)-\right.\\&\left.-\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|ab'}\underset{2}{\sigma}\underset{2}{\sigma}'\underset{1}{v}'^{b}\right)_{|0}+\left(\underset{4}{\sigma}\underset{1}{v}^{a}\underset{1}{v}^{b}+\underset{2}{\sigma}\underset{3}{v}^{a}\underset{1}{v}^{b}+\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^{a}\underset{3}{v}^{b}+\underset{6}{\pi}\delta^{ab}+\right.\\&\left.+2\int d\mathbf{x}'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}^{b}\left(\underset{1}{v}^{a}-2\underset{1}{v}'^{a}\right)-\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|ac'}\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}'^{c}\underset{1}{v}^{b}\right)_{|b}-\\&-\int d\mathbf{x}'\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)_{|a}\left[\underset{2}{\sigma}'\underset{4}{\sigma}+\underset{2}{\sigma}\underset{4}{\sigma}'-\underset{2}{\sigma}'\underset{4}{\pi}-\underset{2}{\sigma}\underset{4}{\pi}'+\right.\\&\left.+\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}\left(\underset{1}{v}^{s}\underset{1}{v}^{s}+\underset{1}{v}'^{s}\underset{1}{v}'^{s}-4\underset{1}{v}'^{s}\underset{1}{v}^{s}\right)\right]+\int d\mathbf{x}'\int d\mathbf{x}''\,[\mathbf{x},\mathbf{x}',\mathbf{x}'']_{|a}\underset{2}{\sigma}\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}''+\\&+\frac{1}{2}\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|_{|ab'c}\underset{2}{\sigma}'\underset{2}{\sigma}\underset{1}{v}'^{b}\underset{1}{v}^{c}=0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Эти уравнения определяют $\underset{4}{\sigma}$ и $\underset{3}{v}^{s}$, если π задано как функция σ и v. Они могут служить для перехода к более важной проблеме дискретных частиц. Однако и сама по себе проблема непрерывного распределения может представлять некоторый интерес. Вероятно, она применима в теории огромных туманностей, где нельзя считать внутренние скорости малыми по сравнению со скоростью света, или в каких-либо других проблемах космологии.

Перейдем теперь к более важной проблеме — к приложению общих уравнений (3.4) и (3.11) для случая точечных частиц. Здесь мы имеем

$$\mathcal{T}^{00}=\sum_{A}\overset{A}{\mu}\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\xi}). \tag{3.19}$$

Разлагая μ и ξ^{k} в степенной ряд, получаем

$$\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}=-\sum_{A}\underset{2}{\overset{A}{\mu}}\overset{A}{\delta}_{|s}\underset{2}{\overset{A}{\xi}}{}^{s}+\sum_{A}\underset{4}{\overset{A}{\mu}}\overset{A}{\delta},\qquad \overset{A}{\delta}=\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\xi}). \tag{3.20}$$

Здесь и в дальнейшем мы будем опускать индекс, стоящий под величиной, если он является наинизшим в разложении данной величины. Так, под μ следует понимать величину $\underset{2}{\mu}$ или, допуская

погрешность в четвертом порядке, величину $\underset{2}{\mu}+\underset{4}{\mu}$. Имеем

$$\underset{4}{\mathcal{T}}^{00}=\sum_{C}\left(\underset{4}{\overset{C}{\mu}}\overset{C}{\delta}-\overset{C}{\mu}\overset{C}{\delta}_{|s}\underset{2}{\overset{C}{\xi}}{}^{s}\right), \tag{3.21а}$$

$$\underset{5}{\mathcal{T}}^{0n}=\sum_{C}\left(\underset{4}{\overset{C}{\mu}}\overset{C}{\delta}\overset{C}{\xi}{}^{n}{}_{|0}-\overset{C}{\mu}\overset{C}{\delta}_{|s}\underset{2}{\overset{C}{\xi}}{}^{s}\overset{C}{\xi}{}^{n}{}_{|0}+\overset{C}{\mu}\overset{C}{\delta}\underset{3}{\overset{C}{\xi}}{}^{n}{}_{|0}\right), \tag{3.21б}$$

$$\underset{6}{\mathcal{T}}^{mn}=\sum_{C}\left(\underset{4}{\overset{C}{\mu}}\overset{C}{\delta}\overset{C}{\xi}{}^{m}{}_{|0}\overset{C}{\xi}{}^{n}{}_{|0}+\overset{C}{\mu}\overset{C}{\delta}\underset{3}{\overset{C}{\xi}}{}^{m}{}_{|0}\xi^{n}{}_{|0}+\overset{C}{\mu}\overset{C}{\delta}\overset{C}{\xi}{}^{m}{}_{|0}\underset{3}{\overset{C}{\xi}}{}^{n}{}_{|0}-\overset{C}{\mu}\overset{C}{\delta}_{|s}\underset{2}{\overset{C}{\xi}}{}^{s}\overset{C}{\xi}{}^{m}{}_{|0}\overset{C}{\xi}{}^{n}{}_{|0}\right). \tag{3.21в}$$

Подставляя эти выражения в (3.2) и (3.7), мы хотим найти интегралы

$$\int_{\overset{A}{\Omega}}\underset{5}{\mathcal{T}}^{0\alpha}{}_{;\alpha}\,d\mathbf{x}\quad\text{и}\quad\int_{\overset{A}{\Omega}}\underset{6}{\mathcal{T}}^{m\alpha}{}_{;\alpha}\,d\mathbf{x}, \tag{3.22}$$

где $\overset{A}{\Omega}$ — малая область, окружающая A-ю частицу. Следовательно, нам придется иметь дело с интегралами типа

$$\int_{\overset{A}{\Omega}}d\mathbf{x}\int_{\Omega}d\mathbf{x}'\,f(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,\delta(\mathbf{x}-\overset{B}{\xi})\,\delta(\mathbf{x}'-\overset{C}{\xi}). \tag{3.23}$$

Так как Ω обозначает все пространство, то интегрирование дает следующий результат:

$$f(\overset{B}{\xi},\overset{C}{\xi})\,\delta_{AB}. \tag{3.24}$$

Итак, имеется простое общее правило для расчета интегралов типа (2.23). Однако случаю $B=C$ следует уделить особое внимание. А именно, если f — сингулярная функция, например

$$f=|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}, \tag{3.25}$$

то имеем

$$|\overset{A}{\xi}-\overset{B}{\xi}|^{-1}=r_{AB}^{-1}=\infty\quad\text{для}\quad A=B. \tag{3.26}$$

Но именно в такой ситуации вступают в силу соображения, которыми мы руководствовались при выборе „хорошей“ δ-функции. Наши δ-функции устраняют вклады такого типа. Если же $f(\overset{A}{\xi},\overset{B}{\xi})$ имеет конечное значение при $A=B$, то ее вклад, разумеется, необходимо учитывать. Это имеет место, в частности, для выражений типа

$$\sum_{B,\,C}\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{C}{\mu}}{r_{AB}r_{AC}}. \tag{3.27}$$

Здесь мы видим, например, что нельзя пренебрегать выражениями с $B=C$, так что получим

$$\sum_{B,C}\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{C}{\mu}}{r_{AB}r_{AC}}=\sum_{B,C}{}'\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{C}{\mu}}{r_{AB}r_{AC}}+\sum_{B}{}'\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}{}^2}{r_{AB}^2}, \tag{3.28}$$

где $\sum'$ означает, что суммирование не распространяется на случаи $B=C$, $A=B$ и $A=C$.

После этих замечаний расчет не представляет труда. Начнем с вычисления $\overset{A}{\underset{4}{\mu}}$ из уравнения (3.2). Интегрируя это уравнение по $\overset{A}{\Omega}$, используя ньютоновские уравнения движения и то обстоятельство, что выражения, имеющие вид дивергенции, не дают никакого вклада, получаем

$$\overset{A}{\underset{4}{\mu}}=\sum_{B}{}'\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}}{r_{AB}}+\frac{1}{2}\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}. \tag{3.29}$$

Это выражение нужно подставить в (3.21). (Произвольную аддитивную постоянную можно считать включенной в $\underset{2}{\mu}$.) Остается непосредственный расчет, который в конце концов приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}
&\Bigg[\overset{A}{\mu}\overset{A}{\underset{3}{\xi}}{}^a{}_{|0}+\left(\frac{1}{2}\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+3\sum_{B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB}^{-1}\right)\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}-\\
&\qquad-\sum_{B}{}'4\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB}^{-1}\overset{B}{\xi}{}^a{}_{|0}-\frac{1}{2}\sum_{B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^s}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}\Bigg]_{|0}-\\
&\qquad-\sum_{B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\left[\overset{A}{\underset{2}{\xi}}{}^s\left(r_{AB}^{-1}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{A}{\xi}{}^s}+\overset{B}{\underset{2}{\xi}}{}^s\left(r_{AB}^{-1}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^s}\right]-\\
&\qquad-\sum_{B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\left(\frac{3}{2}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+\frac{3}{2}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}-4\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}\right)\left(r_{AB}^{-1}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^a}+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^r{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^s\overset{A}{\xi}{}^r}+\frac{1}{2}\sum_{B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}(\overset{A}{\mu}+\overset{B}{\mu})\left(r_{AB}^{-2}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^a}+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{B,C}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{C}{\mu}\left(\frac{1}{r_{AB}}\frac{1}{r_{BC}}+\frac{1}{r_{BC}}\frac{1}{r_{CA}}+\frac{1}{r_{CA}}\frac{1}{r_{AB}}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^a}=0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Это — окончательная форма уравнений движения для N частиц в пост-ньютоновском приближении.

Очевидно, что в выражениях шестого порядка, которые не содержат $\underset{2}{\xi}$, не имеет существенного значения, будем ли мы брать $\overset{A}{\xi}{}^s$ или $\overset{A}{\xi}{}^s+\overset{A}{\underset{2}{\xi}}{}^s$. Величина $\overset{A}{\underset{2}{\xi}}{}^s$ появляется только в выражениях

$$\overset{A}{\mu}\overset{A}{\underset{4}{\xi}}{}^a{}_{|00}-\sum_{B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\left[\overset{A}{\underset{2}{\xi}}{}^s\left(r_{AB}^{-1}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^s\overset{A}{\xi}{}^a}+\overset{B}{\underset{2}{\xi}}{}^s\left(r_{AB}^{-1}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^s}\right]. \tag{3.31}$$

Все другие выражения уже известны из ньютоновского приближения. Следовательно, мы имеем $3N$ дифференциальных уравнений, которые определяют $3N$ неизвестных $\underset{2}{\xi}$.

Раньше мы упоминали о различии между уравнениями движения некоторого определенного порядка приближения и уравнениями движения вплоть до этого порядка включительно. Здесь мы следовали теории и методу использования уравнений движения для каждого определенного порядка приближения. Теория, которая имеет дело с уравнениями, записанными с точностью до членов соответствующих порядков включительно, требует использования дипольных полей. Однако, как было упомянуто ранее, дело обстоит значительно проще, если мы не пойдем дальше пост-ньютоновского приближения. В этом случае имеется только одно условие интегрируемости

$$\underset{5}{\mathcal{T}}^{0\beta}{}_{;\beta}=0, \tag{3.32}$$

которое определяет $\underset{4}{\mu}$. При надлежащем выборе $\underset{4}{\mu}$ это условие интегрируемости будет выполняться. Следовательно, игнорируя ньютоновские уравнения движения, можно записать уравнения движения вплоть до членов пост-ньютоновского порядка приближения. Эти уравнения имеют вид

$$\underset{4}{\mathcal{T}}^{m\beta}{}_{;\beta}+\underset{6}{\mathcal{T}}^{m\beta}{}_{;\beta}=0. \tag{3.33}$$

Неизвестными функциями здесь являются величины

$$\overset{A}{\xi}{}^s=\overset{A}{\underset{0}{\xi}}{}^s+\overset{A}{\underset{2}{\xi}}{}^s, \tag{3.34}$$

так что, интегрируя уравнения (3.33), сразу получаем закон движения вплоть до членов пост-ньютоновского порядка. Так как несущественно, возьмем ли мы $\overset{A}{\xi}{}^s$ или $\underset{0}{\overset{A}{\xi}}{}^s$ в $\underset{6}{\mathcal{T}}{}^{m\beta}{}_{;\beta}$, то это выражение можно считать известным, если мы знаем решение ньютоновских уравнений. Таким образом, вводя

$$\underset{2}{\mathcal{T}}{}^{00}+\underset{4}{\mathcal{T}}{}^{00}=\sum_A \underset{2}{\overset{A}{\mu}}\overset{A}{\delta}+\sum_A \underset{4}{\overset{A}{\mu}}\overset{A}{\delta}, \qquad \overset{A}{\delta}=\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}}),$$

можно записать уравнения движения вплоть до членов шестого порядка в виде

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big(\overset{A}{\mu}+\frac{1}{2}\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+3\sum_B{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB}^{-1}\Big)\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}-\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_B{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^s}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}-4\sum_B{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB}^{-1}\overset{B}{\xi}{}^a{}_{|0}\Big]_{|0}-\\
&\quad-\sum_B{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\Big(1+\frac{3}{2}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+\frac{3}{2}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}-4\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}\Big)\left(r_{AB}^{-1}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^a}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_B{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^r{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^s\overset{A}{\xi}{}^r}+\frac{1}{2}\sum_B{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}(\overset{A}{\mu}+\overset{B}{\mu})\left(r_{AB}^{-2}\right)_{|\overset{A}{\xi}{}^a}+\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{B,C}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{C}{\mu}\Big(\frac{1}{r_{AB}}\frac{1}{r_{BC}}+\frac{1}{r_{BC}}\frac{1}{r_{CA}}+\frac{1}{r_{CA}}\frac{1}{r_{AB}}\Big)_{|\overset{A}{\xi}{}^a}=0. \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть получены из лагранжиана. В самом деле, их можно записать в виде

$$\left(L_{|\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}}\right)_{|0}-L_{|\overset{A}{\xi}{}^a}=0, \qquad (3.36)$$

где $L=\underset{4}{L}+\underset{6}{L}$ и

$$\begin{aligned}
L=&\frac{1}{2}\sum_A\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+\frac{1}{8}\sum_A\overset{A}{\mu}\left(\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\right)^2+\\
&+\frac{3}{4}\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB}^{-1}\left(\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}\right)-2\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB}^{-1}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}-\\
&-\frac{1}{4}\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^c\overset{B}{\xi}{}^b}\overset{B}{\xi}{}^b{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^c{}_{|0}+\frac{1}{2}\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}r_{AB}^{-1}-\frac{1}{4}\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}(\overset{A}{\mu}+\overset{B}{\mu})r_{AB}^{-2}-\\
&-\frac{1}{6}\sum_{A,B,C}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{C}{\mu}\left(r_{AB}^{-1}r_{BC}^{-1}+r_{BC}^{-1}r_{CA}^{-1}+r_{CA}^{-1}r_{AB}^{-1}\right). \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Это, конечно, не является каким-либо удовлетворительным способом получения лагранжиана, так как существование последнего представляется случайным и не обосновано теоретически. К этому вопросу мы вернемся в следующей главе.

Имеется еще один вопрос, который нам хотелось бы коротко обсудить, не прибегая к детальным расчетам. При нахождении уравнений движения мы использовали наши „хорошие“ δ-функции и поэтому не имели вкладов от членов самодействия. Это происходило по той причине, что в соответствии с нашими правилами мы полагали

$$\omega_{AA}=\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}d\mathbf{x}\int d\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,\delta(\mathbf{x}'-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})=0. \qquad (3.38)$$

Возникает вопрос: изменится ли результат, если мы не будем считать величины ω_{AA} равными нулю? Чтобы дать точный ответ на этот вопрос, нужно было бы подробно исследовать переход от непрерывного к дискретному распределению. Мы не будем приводить здесь эту довольно сложную и длинную процедуру. Ее результат почти очевиден. Предположим, что мы начинаем с капель, имеющих размер l. Тогда пост-ньютоновские уравнения движения центра масс каждой капли тождественны с точностью до $O(l)$ полученным здесь уравнениям (3.35) и (3.33). При $l\to 0$ будут иметь место также дополнительные сингулярные выражения порядка $O(l^{-1})$. Однако они дают только вклад в массу порядка μ^2/l. Так как μ представляет собой гравитационный радиус капли, то получим поправку к массе порядка

$$\mu\left(1+\frac{\text{Гравитационный радиус}}{\text{Размеры}}\right). \qquad (3.39)$$

Эта величина не наблюдаема, так как она появляется только в качестве аддитивной постоянной.

Вернемся к вопросу о том, что произойдет, если величины ω_{AA} не равны нулю, иными словами, если мы будем пользоваться не нашими „хорошими“, а иными δ-функциями. Ответ таков: в этом случае следовало бы применить перенормировочную процедуру подобно тому, как это делается в квантовой электродинамике. Можно показать, что теория является перенормируемой. Таким образом, используя наши „хорошие“ δ-функции, мы тем самым избегаем процесса перенормировки.

§ 4. Законы сохранения для системы частиц

Вследствие существования лагранжиана

$$L = \underset{4}{L} + \underset{6}{L} \tag{4.1}$$

и в силу его инвариантности по отношению к некоторым преобразованиям можно вывести ряд законов сохранения. Из инвариантности лагранжиана L по отношению к преобразованию

$$x'^0 = x^0 + a^0, \qquad a^0 = \mathrm{const} \tag{4.2}$$

вытекает закон сохранения гравитационной энергии E. В качестве определения этой постоянной величины E получаем формулу

$$\sum_A \overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0} L_{|\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}} - L = E.$$

Подставляя сюда лагранжиан L, определяемый формулой (3.37), получаем

$$\frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0} - \frac{1}{2}{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu} r_{AB}^{-1} + \frac{3}{8}\sum_A \overset{A}{\mu}(\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0})^2 +$$
$$+ \frac{3}{4}{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}(\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0} + \overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0})\, r_{AB}^{-1} - 2{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0} r_{AB}^{-1} -$$
$$- \frac{1}{4}{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu} r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^s\overset{B}{\xi}{}^r}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^r{}_{|0} + \frac{1}{4}{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}(\overset{A}{\mu} + \overset{B}{\mu})\, r_{AB}^{-2} +$$
$$+ \frac{1}{6}{\sum_{A,B,C}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{C}{\mu}(r_{AB}^{-1}r_{BC}^{-1} + r_{BC}^{-1}r_{CA}^{-1} + r_{CA}^{-1}r_{AB}^{-1}) = \underset{\to 6}{E}. \tag{4.3}$$

Вплоть до членов четвертого порядка найдем ньютоновский закон сохранения

$$\sum_A \overset{A}{\mu} + \frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0} - \frac{1}{2}{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu} r_{AB}^{-1} = \underset{\to 4}{E}, \tag{4.4}$$

причем мы добавили величину $\sum_A \overset{A}{\mu} = \underset{2}{E}$ в качестве постоянной интегрирования.

Из инвариантности по отношению к преобразованию

$$\overset{A}{\xi}{}^a \to \overset{A}{\xi}{}^a + a^a, \quad a^a = \mathrm{const} \tag{4.5}$$

вытекает закон сохранения импульса.

В качестве определения постоянной величины P^k получаем

$$\sum_A L_{|\overset{A}{\xi}{}^k{}_{|0}} = P^k.$$

Подставляя сюда наш лагранжиан, получаем

$$\sum_A \Big(1 + \frac{1}{2}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0} - \frac{1}{2}{\sum_B}' \overset{B}{\mu} r_{AB}^{-1}\Big)\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0} -$$
$$- \frac{1}{2}{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}(\overset{A}{\xi}{}^a - \overset{B}{\xi}{}^a)(\overset{A}{\xi}{}^b - \overset{B}{\xi}{}^b)\overset{B}{\xi}{}^b{}_{|0} r_{AB}^{-3} = \underset{\to 5}{P}{}^a. \tag{4.6}$$

Из инвариантности лагранжиана L по отношению к преобразованию

$$\xi^a \to M^a_b \xi^b$$

(где M^a_b — некоторая постоянная ортогональная матрица преобразования) вытекает закон сохранения гравитационного момента количества движения $J^{[ab]}$. В качестве определения постоянной величины $J^{[ab]}$ получим выражение

$$\sum_A \Big(L_{|\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}}\overset{A}{\xi}{}^b - L_{|\overset{A}{\xi}{}^b{}_{|0}}\overset{A}{\xi}{}^a\Big) = \underset{\to 5}{J}{}^{[ab]}. \tag{4.7}$$

Подставляя сюда лагранжиан, получаем

$$\sum_A \overset{A}{\mu}\Big(1 + 3{\sum_B}' \overset{B}{\mu} r_{AB}^{-1} + \frac{1}{2}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\Big)(\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^b - \overset{A}{\xi}{}^b{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a) -$$
$$- 4{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}(\overset{B}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^b - \overset{B}{\xi}{}^b{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a)\, r_{BA}^{-1} +$$
$$+ \frac{1}{2}{\sum_{A,B}}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{B}{\xi}{}^c{}_{|0}\Big(r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^c}\overset{A}{\xi}{}^b - r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^b\overset{B}{\xi}{}^c}\overset{A}{\xi}{}^a\Big) = \underset{\to 5}{J}{}^{[ab]}. \tag{4.8}$$

Закон сохранения гравитационного центра масс мы получим несколько иным путем, так как лагранжиан L не инвариантен по отношению к преобразованию Галилея. Из формулы (4.6) в силу ньютоновских уравнений движения имеем

$$\frac{d}{dx^0}\Big(\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^a\Big(1 + \frac{1}{2}\overset{A}{\xi}{}^b{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^b{}_{|0} - \frac{1}{2}{\sum_B}' \overset{B}{\mu} r_{AB}^{-1}\Big)\Big) = \underset{\to 5}{P}{}^a, \tag{4.9}$$

откуда следует

$$\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^a\left(1+\frac{1}{2}\overset{A}{\xi}{}^b{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^b{}_{|0}-\frac{1}{2}{\sum_B}'\overset{B}{\mu}r_{AB}^{-1}\right)=\underset{\to 5}{P^a}x^0+Q^a, \quad (4.10)$$

где Q^a — постоянная величина.

Из этих уравнений можно вывести ряд интересных физических следствий. Мы видим, что полная гравитационная масса, определяемая законами сохранения, отлична от полной инертной массы, определенной раньше. Действительно, назовем $\sum_A(\underset{2}{\overset{A}{\mu}}+\underset{4}{\overset{A}{\mu}})$ полной инертной массой вплоть до членов четвертого порядка, а $\underset{4}{E}$ — полной гравитационной массой вплоть до членов четвертого порядка. Тогда, как легко видеть из уравнений (3.29) и (4.3), имеем

$$\sum_A \underset{4}{\overset{A}{\mu}}=\frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+\sum_{A,B}\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}}{r_{AB}}=\underset{4}{\mu}_{(IN)},$$

$$\frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}-\frac{1}{2}{\sum_{A,B}}'\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}}{r_{AB}}=\underset{4}{\mu}_{(G)}=\underset{4}{E}. \quad (4.11)$$

Итак, именно полная гравитационная масса, а не полная инертная масса является сохраняющейся величиной. Равномерно движется именно центр тяжести этой гравитационной, а не инертной массы.

Мы вернемся к этой проблеме в последней главе. Там обсуждается также другая, более общая проблема: можно ли независимо от лагранжиана и от метода приближений сформулировать на языке теории поля законы сохранения для произвольного тензора энергии-импульса. Наши рассмотрения выявили тесную связь между этими законами сохранения и уравнениями движения. Однако уравнения движения могут быть выражены на языке теории поля. То же самое должно быть возможно и для законов сохранения. Именно к этой проблеме мы и обратимся в последней главе.

ГЛАВА IV

Вариационный принцип и уравнения движения третьего рода

§ 1. Постановка проблемы

В гл. 1, § 3 мы обсудили уравнения движения первого и второго рода, исходя из вариационного принципа. Напомним вкратце, как были формулированы уравнения движения второго рода.

Мы ввели

$$ds_A=(\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\,d\overset{A}{\xi}{}^\alpha\,d\overset{A}{\xi}{}^\beta)^{1/2}, \quad (1.1)$$

где

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}=\int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,g_{\alpha\beta}, \quad (1.2)$$

и затем варьировали интеграл

$$W'=-\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}(\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\,d\overset{A}{\xi}{}^\alpha\,d\overset{A}{\xi}{}^\beta)^{1/2} \quad (1.3)$$

по ξ^α при условии, что $\delta\xi^\alpha$ обращаются в нуль на концах интервала. В результате варьирования мы получили выражение

$$\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\delta\overset{A}{\xi}{}^\alpha\left(\frac{d}{ds_A}\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\beta}{ds_A}-\frac{1}{2}\overset{A}{\widetilde{g_{\mu\nu|\alpha}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\mu}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\nu}{ds_A}\right), \quad (1.4)$$

из которого легко выводятся уравнения движения.

Все это уже было проделано. Здесь мы хотели бы обратить внимание на одно существенное допущение, которое было сделано в ходе наших рассмотрений. Оно состояло в том, что величины $g_{\alpha\beta}$ считались заданными функциями, не подлежащими варьированию по ξ. Это означает, что, используя определение (1.2) и варьируя величины $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ по ξ, мы учитывали их зависимость от ξ^a только через δ-функции. Однако мы знаем, что в действительности $g_{\alpha\beta}$ зависят от ξ и их производных по времени

$$g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^0,\ x^k,\ \overset{1}{\xi}{}^k,\ \overset{1}{\xi}{}^k{}_{|0},\ \ldots,\ \overset{N}{\xi}{}^k,\ \overset{N}{\xi}{}^k{}_{|0}), \quad (1.5)$$

причем здесь предполагается, что в $g_{\alpha\beta}$ входят только первые производные по времени величин ξ^k.

откуда следует

$$\sum_A \overset{AA}{\mu\xi^a}\left(1+\frac{1}{2}\overset{A}{\xi}{}^b{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^b{}_{|0}-\frac{1}{2}\sum_B{}' \overset{B}{\mu} r_{AB}^{-1}\right)=\underset{\to 5}{P^a}x^0+Q^a, \tag{4.10}$$

где Q^a — постоянная величина.

Из этих уравнений можно вывести ряд интересных физических следствий. Мы видим, что полная гравитационная масса, определяемая законами сохранения, отлична от полной инертной массы, определенной раньше. Действительно, назовем $\sum\limits_A(\underset{2}{\overset{A}{\mu}}+\underset{4}{\overset{A}{\mu}})$ полной инертной массой вплоть до членов четвертого порядка, а $\underset{4}{E}$ — полной гравитационной массой вплоть до членов четвертого порядка. Тогда, как легко видеть из уравнений (3.29) и (4.3), имеем

$$\sum_A \underset{4}{\overset{A}{\mu}}=\frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+\sum_{A,B}\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}}{r_{AB}}=\underset{4}{\mu}_{(IN)},$$

$$\frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}-\frac{1}{2}\sum_{A,B}{}'\frac{\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}}{r_{AB}}=\underset{4}{\mu}_{(G)}=\underset{4}{E}. \tag{4.11}$$

Итак, именно полная гравитационная масса, а не полная инертная масса является сохраняющейся величиной. Равномерно движется именно центр тяжести этой гравитационной, а не инертной массы.

Мы вернемся к этой проблеме в последней главе. Там обсуждается также другая, более общая проблема: можно ли независимо от лагранжиана и от метода приближений сформулировать на языке теории поля законы сохранения для произвольного тензора энергии-импульса. Наши рассмотрения выявили тесную связь между этими законами сохранения и уравнениями движения. Однако уравнения движения могут быть выражены на языке теории поля. То же самое должно быть возможно и для законов сохранения. Именно к этой проблеме мы и обратимся в последней главе.

ГЛАВА IV

Вариационный принцип и уравнения движения третьего рода

§ 1. Постановка проблемы

В гл. 1, § 3 мы обсудили уравнения движения первого и второго рода, исходя из вариационного принципа. Напомним вкратце, как были формулированы уравнения движения второго рода.

Мы ввели

$$ds_A=(\overset{A}{\tilde g}_{\alpha\beta}\,d\overset{A}{\xi}{}^\alpha\,d\overset{A}{\xi}{}^\beta)^{1/2}, \tag{1.1}$$

где

$$\overset{A}{\tilde g}_{\alpha\beta}=\int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\boldsymbol{\xi}})\,g_{\alpha\beta}, \tag{1.2}$$

и затем варьировали интеграл

$$W'=-\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\,c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}(\overset{A}{\tilde g}_{\alpha\beta}\,d\overset{A}{\xi}{}^\alpha\,d\overset{A}{\xi}{}^\beta)^{1/2} \tag{1.3}$$

по ξ^α при условии, что $\delta\xi^\alpha$ обращаются в нуль на концах интервала. В результате варьирования мы получили выражение

$$\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{m}_{(0)}\,c\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\delta\overset{A}{\xi}{}^\alpha\left(\frac{d}{ds_A}\overset{A}{\tilde g}_{\alpha\beta}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\beta}{ds_A}-\frac{1}{2}\overset{A}{\widetilde{g_{\mu\nu|\alpha}}}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\mu}{ds_A}\frac{d\overset{A}{\xi}{}^\nu}{ds_A}\right), \tag{1.4}$$

из которого легко выводятся уравнения движения.

Все это уже было проделано. Здесь мы хотели бы обратить внимание на одно существенное допущение, которое было сделано в ходе наших рассмотрений. Оно состояло в том, что величины $g_{\alpha\beta}$ считались заданными функциями, не подлежащими варьированию по ξ. Это означает, что, используя определение (1.2) и варьируя величины $\tilde g_{\alpha\beta}$ по ξ, мы учитывали их зависимость от ξ^α только через δ-функции. Однако мы знаем, что в действительности $g_{\alpha\beta}$ зависят от ξ и их производных по времени

$$g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(x^0,\ x^k,\ \overset{1}{\xi}{}^k,\ \overset{1}{\xi}{}^k{}_{|0},\ \ldots,\ \overset{N}{\xi}{}^k,\ \overset{N}{\xi}{}^k{}_{|0}), \tag{1.5}$$

причем здесь предполагается, что в $g_{\alpha\beta}$ входят только первые производные по времени величин ξ^k.

Напомним также, что процесс „препарирования“ подразумевает замену x на ξ и отбрасывание сингулярностей, так что

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^0, \overset{A}{\xi}{}^k, \overset{1}{\xi}{}^k, \overset{1}{\xi}{}^k{}_{|0}, \ldots, \overset{N}{\xi}{}^k, \overset{N}{\xi}{}^k{}_{|0}). \qquad (1.6)$$

Напомним также, что, согласно формуле (0.18) раздела „Система обозначений“ или сказанному в приложении 2,

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta|0} = \overbrace{g_{\alpha\beta|0}}^{A} + \overbrace{g_{\alpha\beta|s}}^{A} \overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0} = \overbrace{g_{\alpha\beta|\nu}}^{A} \overset{A}{\xi}{}^\nu{}_{|0}, \qquad (1.7)$$

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s} = \overbrace{g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s}}^{A} + \overbrace{g_{\alpha\beta|s}}^{A} \delta_{AB}. \qquad (1.8)$$

Сформулируем теперь нашу проблему. Мы ищем лагранжиан

$$L = L(x^0, \overset{1}{\xi}{}^k, \overset{1}{\xi}{}^k{}_{|0}, \ldots, \overset{N}{\xi}{}^k, \overset{N}{\xi}{}^k{}_{|0}) \qquad (1.9)$$

такой, чтобы вариация действия по ξ, исчезающая на пределах интегрирования, давала бы правильные уравнения движения третьего рода, т. е. чтобы из требования

$$\delta \int\limits_{x'^0}^{x''^0} L\, dx^0 = 0 \qquad (1.10)$$

вытекали уравнения движения всех частиц.

Такой вариационный принцип, если он существует, мы будем называть вариационным принципом Фоккера, так как именно он впервые ввел его в электродинамику.

Представляется целесообразным следовать вначале тому пути, при помощи которого мы получили правильные уравнения движения второго рода. Поэтому попытаемся взять в качестве исходного лагранжиана L' выражение

$$L' = L'(x^0, \xi^k, \xi^k{}_{|0}) = -\sum_A \overset{A}{m}_{(0)} c\, (\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} \overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0} \overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0})^{1/2}. \qquad (1.11)$$

Здесь величины $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ должны рассматриваться как функции ξ, $\xi_{|0}$ и x^0.

Запишем уравнения движения для этого лагранжиана

$$L'_{|\overset{B}{\xi}{}^k} - \left(L'_{|\overset{B}{\xi}{}^k{}_{|0}}\right)_{|0} = 0. \qquad (1.12)$$

Если, как и прежде, положим

$$\overset{A}{\mu} = \frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2} \frac{dx^0}{d\overset{}{s}_A} = \frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2} (\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} \overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0} \overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0})^{-1/2}, \qquad (1.13)$$

то, учитывая (1.8), придем к уравнению

$$(\overset{B}{\mu} \overset{B}{\tilde{g}}_{s\beta} \overset{B}{\xi}{}^\beta{}_{|0})_{|0} - \frac{1}{2} \overset{B}{\mu} \overbrace{g_{\alpha\beta|s}}^{B} \overset{B}{\xi}{}^\alpha{}_{|0} \overset{B}{\xi}{}^\beta{}_{|0} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_A \overset{A}{\mu} \overbrace{g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s}}^{A} \overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0} \overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0} + \frac{1}{2} \left(\sum_A \overset{A}{\mu} \overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}} \overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0} \overset{B}{\xi}{}^\beta{}_{|0} \right)_{|0} = 0. \qquad (1.14)$$

Выражения в верхней и нижней строке играют для нас различную роль. Если бы присутствовали только выражения верхней строки, то проблема была бы решена. В этом случае формула (1.14) давала бы три уравнения движения (7.8) гл. I, а четвертым уравнением служило бы определение величины $\overset{A}{\mu}$ согласно (1.13). Однако этому препятствует наличие двух выражений нижней строки. Следовательно, L' не пригоден в качестве лагранжиана типа Фоккера. Вообще говоря, мы не знаем даже, существует ли лагранжиан такого типа. Известно, например, что в электродинамике для запаздывающего и опережающего действий не существует такого лагранжиана. Поэтому наша цель заключается в том, чтобы выяснить, можно ли избавиться от выражений, стоящих в нижней строке формулы (1.14), и если можно, то при каких условиях.

Если потребовать, чтобы лагранжиан Фоккера был инвариантен, или, точнее, чтобы была инвариантна вариация $\delta(L\,dx^0)$, а также чтобы он зависел только от x^0, ξ и $\xi_{|0}$, то возможности выбора выражения для него становятся крайне жесткими. Предположим, как это делалось ранее, что

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^0, x^k, \xi^\alpha, \xi^\alpha{}_{|0}). \qquad (1.15)$$

Поскольку мы хотим, чтобы в уравнениях движения появлялись только вторые производные величин $\xi^k(x^0)$, то нужно по возможности избегать высших производных от $g_{\alpha\beta}$. Эти требования по существу ограничивают наш выбор выражением

$$L'' = \int\limits_{\Omega_{(3)}} \sqrt{-g}\, G\, d\mathbf{x}, \qquad (1.16)$$

где

$$G = g^{\mu\nu} \left(\left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} \left\{ {\sigma \atop \mu\rho} \right\} - \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\sigma \atop \rho\sigma} \right\} \right) \qquad (1.17)$$

и интеграл распространяется на все трехмерное пространство. Если записать вариационный принцип

$$\delta \int\limits_{x'^0}^{x''^0} dx^0 \int\limits_{\Omega_{(3)}} \sqrt{-g}\, G\, d\mathbf{x} = 0, \qquad (1.18)$$

то легко видеть, что левая часть этого уравнения является инвариантом, так как $\sqrt{-g}\,G$ отличается от $\sqrt{-g}\,R$ только слагаемым, которое может быть представлено в виде четырехмерной дивергенции.

Сначала мы варьируем $\sqrt{-g}\,G$ по $g_{\alpha\beta}$. Это дает

$$\int\limits_{x'^0}^{x''^0} dx^0 \int\limits_{\Omega_{(3)}} \left[\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\alpha\beta|\gamma}}\right)_{|\gamma}\right]\delta g_{\alpha\beta}\,d\mathbf{x} +$$

$$+\int\limits_{x'^0}^{x''^0} dx^0 \int\limits_{\Sigma_{(2)}} \frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\alpha\beta|s}}\, n_s\,\delta g_{\alpha\beta}\,d\Sigma + \int\limits_{\Omega_{(3)}} \frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\alpha\beta|0}}\,\delta g_{\alpha\beta}\,d\mathbf{x}\Bigg|_{x'^0}^{x''^0}. \quad (1.19)$$

Здесь $\Sigma_{(2)}$ — бесконечная двумерная поверхность, охватывающая все трехмерное пространство. Далее, вариации величин $g_{\alpha\beta}$ обусловлены варьированием входящих в них величин ξ и $\xi_{|0}$. Мы получим

$$\delta g_{\alpha\beta} = \sum_B g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s}\,\delta\overset{B}{\xi}{}^s + \sum_B g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}}\,\delta\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}. \quad (1.20)$$

В силу нашего предположения об обращении в нуль на концах временного интервала величин $\delta\xi$ и их производных по времени последний интеграл в (1.19) равен нулю. Однако с поверхностным интегралом дело обстоит иначе. Попробуем сделать допущение, что этот поверхностный интеграл просто равен нулю, т. е. потребуем выполнения условия

$$\int\limits_{\Sigma_{(2)}} \frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\alpha\beta|s}}\, n_s\,\delta g_{\alpha\beta}\,d\Sigma = 0, \quad (1.21)$$

где $\delta g_{\alpha\beta}$ определяются формулой (1.20). Из изложенного в гл. I, § 4 следует известная формула

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\alpha\beta|\gamma}}\right)_{|\gamma} = -\left(\mathfrak{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\mathfrak{R}\right) =$$

$$= 8\pi\mathcal{T}^{\alpha\beta} = 8\pi\sum_A \overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0}\,\overset{A}{\delta}. \quad (1.22)$$

Таким образом, учитывая выражение (1.20) для $\delta g_{\alpha\beta}$, получаем

$$\delta\int\limits_{x'^0}^{x''^0} L''\,dx^0 = \sum_{A,B} 8\pi\Big\{\overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\overline{g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s}}}\,\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0} -$$

$$-\Big(\overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}}}}\,\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0}\Big)_{|0}\Big\}\,\delta\overset{B}{\xi}{}^s + \sum_{A,B}\overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}}}}\,\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0}\,\delta\overset{B}{\xi}{}^s\Bigg|_{x'^0}^{x''^0}. \quad (1.23)$$

Последний член здесь снова равен нулю вследствие произвольности $\delta\overset{B}{\xi}$. Таким образом, мы снова пришли к неверным уравнениям движения, а именно:

$$\sum_A \overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\overline{g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s}}}\,\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0} - \sum_A\Big(\overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta|\overset{B}{\xi}{}^s{}_{|0}}}}\,\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0}\Big)_{|0} = 0. \quad (1.24)$$

Наше длинное доказательство почти завершено. Мы замечаем, что с точностью до множителя $-1/2$ это в точности те выражения, которые привели к трудности в уравнении (1.14). Итак, взяв линейную комбинацию этих двух лагранжианов и потребовав выполнения условия (1.21), получим правильные уравнения движения.

Подведем итог изложенному. Можно получить уравнения движения третьего рода из лагранжиана

$$L = -\sum_A \overset{A}{m}_{(0)}c\left(\overset{A}{\widetilde{g_{\alpha\beta}}}\,\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\,\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0}\right)^{1/2} + \frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{\Omega_{(3)}}\sqrt{-g}\,G\,d\mathbf{x}, \quad (1.25)$$

где

$$G = g^{\mu\nu}\left(\left\{{\rho \atop \nu\sigma}\right\}\left\{{\sigma \atop \mu\rho}\right\} - \left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\}\left\{{\sigma \atop \rho\sigma}\right\}\right). \quad (1.26)$$

Для того чтобы из принципа действия

$$\delta\int\limits_{x'^0}^{x''^0} L\,dx^0 = 0 \quad (1.27)$$

получались правильные уравнения движения, необходимо, чтобы вариации величин ξ^k и $\xi^k{}_{|0}$ обращались в нуль на концах временного интервала, а также чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{\Sigma_{(2)}} d\Sigma\,\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\alpha\beta|s}}\,n_s\,\delta g_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.28)$$

Мы получим дифференциальные уравнения второго порядка для $3N$ величин $\overset{A}{\xi}{}^k(x^0)$.

Величины μ вводятся формулой

$$\overset{A}{\mu}=\frac{k\overset{A}{m}_{(0)}}{c^2}\left(\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0}\right)^{-1/2}, \tag{1.29}$$

которую мы рассматриваем как определение инертной массы, фигурирующей в определении $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$,

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta}=\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^{\alpha}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{\beta}{}_{|0}\overset{A}{\delta}. \tag{1.30}$$

Таким образом, если только выполняется условие (1.28), можно, используя определение (1.25), найти лагранжиан, который применялся в предыдущей главе без указания способа получения; при этом, конечно, необходимо проверить, выполняется ли условие (1.28). К этой задаче вычисления лагранжиана мы и переходим.

§ 2. Лагранжиан вплоть до членов шестого порядка

Вычисление лагранжиана вплоть до членов шестого порядка не встречает никаких затруднений. Однако при этом возникает одно удивительное обстоятельство — оказывается, что для вычисления такого лагранжиана нам нет необходимости знать величину $\underset{4}{h}_{00}$. Достаточно знать только величины $\underset{2}{h}_{00}$ и $\underset{3}{h}_{0m}$, расчет которых, как мы знаем, не представляет труда. Фактически единственное затруднение при выводе уравнений движения шестого порядка или уравнений движения вплоть до членов шестого порядка из факта равенства нулю выражения $\mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}$ состоит в нахождении $\underset{4}{h}_{00}$. Теперь нам не нужно уже этого делать. Единственное, что необходимо знать о величине $\underset{4}{h}_{00}$, это то, что она убывает на бесконечности как $1/r$. Но в этом можно убедиться и без вычисления $\underset{4}{h}_{00}$ в явной форме (хотя этот результат нам уже известен из гл. III, § 2). Действительно, $\underset{4}{h}_{00|ss}$ может зависеть только от величин

$$\underset{2}{h}_{00|\underset{11}{00}}=\varphi_{|00},\quad \varphi_{|s}\varphi_{|s},\quad \varphi_{|ss}\varphi. \tag{2.1}$$

Но величины $\varphi_{|s}\varphi_{|s}$ и $\varphi_{|ss}\varphi$ при $r\to\infty$ имеют по крайней мере порядок -4 по r и, следовательно, их вклад в $\underset{4}{h}_{00}$ по крайней

мере порядка -2 по r. Рассмотрим теперь вклад, даваемый величиной $\varphi_{|00}$. При $r\to\infty$ мы имеем для φ

$$\varphi\sim\sum_A\frac{\overset{A}{m}}{r}-\sum_A\overset{A}{m}\overset{A}{\xi}{}^s\left(\frac{1}{r}\right)_{|s}+\ldots \tag{2.2}$$

Вследствие ньютоновских уравнений движения $\varphi_{|00}$ является величиной по крайней мере порядка -3, и поэтому вклады, обусловленные этим выражением, по крайней мере порядка -1 по r. Как будет видно из дальнейшего рассмотрения, это обстоятельство обеспечивает обращение в нуль поверхностного интеграла (1.28), что являлось условием существования такого лагранжиана. Заметим, между прочим, что $\underset{2}{h}_{00}$ и $\underset{3}{h}_{0m}$ также являются величинами порядка -1, а все их производные в силу ньютоновских уравнений движения имеют порядок по крайней мере -2 по r.

Начнем с вычисления величины $\sqrt{-g}\,G$ с точностью до членов шестого порядка включительно. Непосредственный расчет, правда, довольно длинный, приводит к следующему результату:

$$\underbrace{\sqrt{-g}\,G}_{4}+\underbrace{\sqrt{-g}\,G}_{6}=-\frac{1}{2}\varphi_{|m}\varphi_{|m}+\varphi\varphi_{|m}\varphi_{|m}-\frac{3}{2}\varphi_{|0}\varphi_{|0}+$$
$$+2\varphi_{|m}\underset{3}{h}_{0m|\underset{1}{0}}-\frac{1}{2}\underset{3}{h}_{0l|m}\underset{3}{h}_{0m|l}+\frac{1}{2}\underset{3}{h}_{0m|l}\underset{3}{h}_{0m|l}-\varphi_{|m}\underset{4}{h}_{00|m}. \tag{2.3}$$

Легко видеть, что это выражение инвариантно по отношению к замене

$$\underset{3}{h}_{0m}\to\underset{3}{h}_{0m}+a_{0|m},\qquad \underset{4}{h}_{00}\to\underset{4}{h}_{00}+2a_{0|0}, \tag{2.4}$$

что не должно вызывать удивления ввиду того обстоятельства, что a_0, как мы знаем, не появляется в уравнениях движения. Следовательно, можно потребовать, чтобы величина $\underset{3}{h}_{0m}$ удовлетворяла координатному условию

$$\underset{3}{\gamma}^{0s}{}_{|s}=\underset{3}{h}_{0s|s}=-\underset{2}{\gamma}^{00}{}_{|0}=2\underset{2}{h}_{00|0}. \tag{2.5}$$

Формулу (2.3) можно переписать в виде

$$\underbrace{\sqrt{-g}\,G}_{4}+\underbrace{\sqrt{-g}\,G}_{6}=\frac{1}{2}\varphi\varphi_{|ss}-\frac{1}{2}\varphi^2\varphi_{|ss}+\frac{1}{8}\underset{3}{h}_{0l|l}\underset{3}{h}_{0m|m}-$$
$$-\frac{1}{2}h_{0a|ss}\underset{3}{h}_{0a}+\varphi_{|ss}\underset{4}{h}_{00}+W^0{}_{|0}+W^m{}_{|m}, \tag{2.6}$$

где W^0 и W^m имеют вид

$$\left.\begin{aligned} W^0 &= 2\varphi_{|m}\underset{3}{h}_{0m}, \\ W^m &= -\frac{1}{2}\left(\varphi-\varphi^2+2\underset{4}{h}_{00}\right)\varphi_{|m}-\frac{1}{2}\left(\underset{3}{h}_{0l}\underset{3}{h}_{0m}\right)_{|l}+\frac{1}{2}\underset{3}{h}_{0l|m}\underset{3}{h}_{0l}. \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

Напомним, что условием существования лагранжиана является обращение в нуль интеграла (1.28). Из формулы (2.3) и из того обстоятельства, что величины $\delta g_{\alpha\beta}$ имеют по крайней мере порядок -1 по r, следует, что подынтегральное выражение в (1.28) по крайней мере порядка -3 по r. Следовательно, интеграл равен нулю, и тем самым доказано существование лагранжиана с точностью до членов шестого порядка включительно.

Далее, из двух последних уравнений следует, что при взятии интеграла от $\sqrt{-g}\,G$ можно опустить два последних выражения в (2.6). Что касается W^0, то это можно сделать в силу обращения в нуль на концах временнóго интервала вариаций величин ξ^k и $\xi^k{}_{|0}$. Для W^m причина заключается в том, что эта величина имеет по крайней мере порядок -3 по r и, следовательно, поверхностный интеграл от нее обращается в нуль. Итак, полагая

$$\varphi_{|ss}=8\pi\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\delta}, \quad \underset{3}{h}_{0a|ss}=-16\pi\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\delta}, \quad (2.8)$$

можно написать

$$\underset{4}{L''}+\underset{6}{L''}=\frac{c^3}{16\pi k}\int\Big(\underbrace{\sqrt{-g}\,G}_{4}+\underbrace{\sqrt{-g}\,G}_{6}\Big)\,d\mathbf{x}=$$

$$=\frac{c^3}{k}\left\{\sum_A \overset{A}{\mu}\left[\frac{1}{4}\overset{A}{\tilde{\varphi}}-\frac{1}{4}\overset{A}{\tilde{\varphi}}{}^2+\frac{1}{2}\overset{A}{\tilde{h}}_{0a}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}+\frac{1}{2}\underset{4}{\overset{A}{\tilde{h}}_{00}}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8\cdot 16\pi}\int_{\underset{(3)}{2}} h_{0l|l}h_{0m|m}\,d\mathbf{x}\right\}. \quad (2.9)$$

Особого внимания требует последнее выражение в этом уравнении. Имеем

$$h_{0a}=4\int d\mathbf{x}'\,\frac{\mathcal{J}'^{0a}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \quad (2.10)$$

Следовательно, можно написать

$$\int h_{0l|l}h_{0m|m}\,d\mathbf{x}=16\int d\mathbf{x}'\,d\mathbf{x}''\,d\mathbf{x}\,\mathcal{J}'^{0l}\mathcal{J}''^{0m}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|}\right)_{|l'm''}. \quad (2.11)$$

Возьмем сначала интеграл

$$C=\int\frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\,|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|}. \quad (2.12)$$

Отсюда следует

$$C_{|s's'}=-4\pi\int d\mathbf{x}\,\frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|}=-\frac{4\pi}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|} \quad (2.13)$$

и поэтому

$$C=-2\pi|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|. \quad (2.14)$$

Подставляя это в (2.11), можно без труда произвести интегрирование по остальным переменным, как это было описано в § 3 предыдущей главы, причем мы придем к следующему результату:

$$\int h_{0l|l}h_{0m|m}\,d\mathbf{x}=-32\pi\sideset{}{'}\sum_{A,B}^{AB}\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\left(r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^l\overset{B}{\xi}{}^m}\right)\overset{A}{\xi}{}^l{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^m{}_{|0}. \quad (2.15)$$

Итак,

$$\underset{4}{L''}+\underset{6}{L''}=\frac{c^3}{k}\left\{\sum_A \overset{A}{\mu}\left[\frac{1}{4}\overset{A}{\tilde{\varphi}}-\frac{1}{4}\overset{A}{\tilde{\varphi}}{}^2+\frac{1}{2}\overset{A}{\tilde{h}}_{0a}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}+\frac{1}{2}\underset{4}{\overset{A}{\tilde{h}}_{00}}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\sideset{}{'}\sum_{A,B}^{AB}\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\,r_{AB|\overset{A}{\xi}{}^l\overset{B}{\xi}{}^m}\overset{A}{\xi}{}^l{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^m{}_{|0}\right\}. \quad (2.16)$$

Покончив с этой частью расчетов, перейдем к вычислению L':

$$\underset{4}{L'}+\underset{6}{L'}=-\sum_A \overset{A}{m}_{(0)}c\left(\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0}\right)^{1/2}, \quad (2.17)$$

где, согласно (1.13), $m_{(0)}$ связана с μ соотношением

$$\overset{A}{m}_{(0)}=\frac{\overset{A}{\mu}c^2}{k}\left(\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}\overset{A}{\xi}{}^\alpha{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^\beta{}_{|0}\right)^{1/2}, \quad (2.18)$$

или

$$\overset{A}{m}_{(0)}=\frac{c^2}{k}\underset{2}{\overset{A}{\mu}}=\text{const}. \quad (2.19)$$

Следовательно,

$$\underset{4}{L'}+\underset{6}{L'}=-\frac{c^3}{k}\left\{\sum_A \overset{A}{\mu}\left(1-\frac{1}{2}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+\frac{1}{2}\overset{A}{\tilde{\varphi}}-\frac{1}{8}\overset{A}{\tilde{\varphi}}{}^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{8}\left(\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\right)^2+\frac{3}{4}\overset{A}{\tilde{\varphi}}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}+\overset{A}{\tilde{h}}_{0a}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}+\frac{1}{2}\underset{4}{\overset{A}{\tilde{h}}_{00}}\right)\right\}. \quad (2.20)$$

Как видно из (2.9), члены с $\underset{4}{h}_{00}$ из L' и L'' взаимно уничтожаются, так что отпадает необходимость рассчитывать эту величину в явном виде. Из (2.20) следует также, что при замене

$$\underset{3}{h}_{0s} \text{ на } \underset{3}{h}_{0s}+a_{01s} \text{ и } \underset{4}{h}_{00} \text{ на } \underset{4}{h}_{00}+2a_{0|0} \tag{2.21}$$

лагранжиан изменится на величину

$$\Delta L = -\frac{c^3}{k}\sum_A\left(\overset{A}{\widetilde{a_{0|s}}}\,\overset{A}{\xi}{}^s{}_{|0}+\overset{A}{\widetilde{a_{0|0}}}\right) = -\frac{c^3}{k}\left(\sum_A \overset{A}{\widetilde{a_0}}\right)_{|0}, \tag{2.22}$$

что не отражается на вариации L и, следовательно, на уравнениях движения.

Опуская постоянный множитель c^3/k, получаем из (2.20) и (2.16)

$$L = -\sum_A \overset{A}{\mu}+\sum_A\left(\frac{1}{2}\overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}+\frac{1}{8}\overset{A}{\mu}\left(\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\right)^2\right)-\frac{1}{4}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\tilde{\varphi}}-$$
$$-\frac{1}{8}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\tilde{\varphi}}{}^2-\frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\widetilde{h_{0a}}}\,\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}-\frac{3}{4}\sum_A \overset{A}{\mu}\overset{A}{\tilde{\varphi}}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{AB}{}' \overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\, r_{AB\,|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^b}\,\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^b{}_{|0}. \tag{2.23}$$

Подставляя сюда вместо $\overset{A}{\tilde{\varphi}}$ и $\underset{3}{\overset{A}{\widetilde{h}}}_{0a}$ их выражения

$$\overset{A}{\tilde{\varphi}} = -2\sum_B \overset{B}{\mu}\, r_{AB}^{-1}, \quad \underset{3}{\overset{A}{\widetilde{h}}}_{0a} = 4\sum_B \overset{B}{\mu}\, r_{AB}^{-1}\,\overset{B}{\xi}{}^a{}_{|0}, \tag{2.24}$$

получаем окончательно

$$L = -\sum_A \overset{A}{\mu}+\frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{\mu}\,\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}+\frac{1}{2}\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\, r_{AB}^{-1}+\frac{1}{8}\sum_A \overset{A}{\mu}\left(\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\left(\overset{A}{\mu}+\overset{B}{\mu}\right)r_{AB}^{-2}-\frac{1}{6}\sum_{A,B,C}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\overset{C}{\mu}\left(r_{AB}^{-1}r_{BC}^{-1}+r_{BC}^{-1}r_{CA}^{-1}+\right.$$
$$\left.+r_{CA}^{-1}r_{AB}^{-1}\right)-2\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\, r_{AB}^{-1}\,\overset{B}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}+\frac{3}{4}\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\left(\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}+\overset{B}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^a{}_{|0}\right)r_{AB}^{-1}-$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{A,B}{}'\overset{A}{\mu}\overset{B}{\mu}\, r_{AB\,|\overset{A}{\xi}{}^a\overset{B}{\xi}{}^b}\,\overset{A}{\xi}{}^a{}_{|0}\overset{B}{\xi}{}^b{}_{|0}. \tag{2.25}$$

Этот лагранжиан совпадает (с точностью до тривиальной постоянной) с лагранжианом, который мы предположили в предыдущей главе.

Таким образом, мы не только нашли лагранжиан типа Фоккера, приводящий к правильным пост-ньютоновским уравнениям движения, но и сформулировали общие условия существования такого лагранжиана. Мы выяснили, что для получения этого лагранжиана не нужно знать явного вида величины $\underset{4}{h}_{00}$. Достаточно знать, что эта величина убывает как $1/r$ при $r\to\infty$.

Сделаем еще одно замечание, связанное с историей развития проблемы. Когда уравнения движения были получены впервые в 1938 г. с помощью некоторых поверхностных интегралов, то для этого требовалось знание величин

$$\underset{2}{h}_{00},\quad \underset{2}{h}_{mn},\quad \underset{3}{h}_{0n},\quad \underset{4}{h}_{00},\quad \underset{4}{h}_{mn},\quad \underset{5}{h}_{0n}, \tag{2.26}$$

причем первые три величины были нужны для ньютоновского, а три последние, значительно более сложные величины, — для пост-ньютоновского приближения. Позже было выяснено, что если использовать равенство $\mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$, то необходимо знать лишь

$$\underset{2}{h}_{00},\quad \underset{2}{h}_{mn},\quad \underset{3}{h}_{0n},\quad \underset{4}{h}_{00}. \tag{2.27}$$

Как мы установили теперь, для формулировки пост-ньютоновских уравнений движения нам нужны такие же сведения о метрическом поле, какие в 1938 г. требовались для вывода ньютоновских уравнений движения; соответственно для пост-пост-ньютоновских уравнений движения нам необходима теперь такая информация о метрическом поле, которая прежде требовалась для пост-ньютоновских уравнений движения. При теперешнем состоянии теории мы смогли бы без особых затруднений найти пост-пост-ньютоновские уравнения движения, если бы это имело какой-либо физический смысл.

§ 3. Обобщение

До сих пор мы рассматривали движение сферически-симметричных невращающихся тел, которые представлялись сингулярностями типа единичного полюса. В этом параграфе мы покажем, как можно обобщить принцип действия, чтобы включить в рассмотрение случай вращающихся тел, которые мы будем представлять в виде сингулярностей типа полюс — диполь в гравитационном поле.

Мы видели из формулы (1.22), что варьирование по $g_{\alpha\beta}$ при выполнении некоторых условий на границе приводит к уравнению

$$\delta\int\sqrt{-g}\,G\,d\mathbf{x} = -\int\left(\mathfrak{R}^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\mathfrak{R}\right)\delta g_{\alpha\beta}\,d\mathbf{x}. \tag{3.1}$$

Следовательно, вариационный принцип

$$\delta\int\left(\frac{1}{2}\sqrt{-g}\;G-4\pi g_{\alpha\beta}\mathcal{T}^{\alpha\beta}\right)d\mathbf{x}=0 \tag{3.2}$$

(где $c=1$ и гравитационная постоянная $k=1$) даст уравнение гравитационного поля при условии, что $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ не зависит от $g_{\mu\nu}$.

Используем теперь (3.2) как определение уравнений Лагранжа и будем варьировать лагранжиан по ξ^k. Рассмотрев в качестве примера случай простых сингулярностей, т. е. положив

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta}=\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{\mu}\,\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\alpha}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\beta}\overset{A}{\delta},\qquad \dot{\xi}^{\alpha}=\xi^{\alpha}{}_{|0}, \tag{3.3}$$

мы в самом деле получим правильные уравнения движения, совпадающие с уравнениями (7.8) гл. I, если будем рассматривать μ как некоторую известную функцию времени. Следовательно, можно и в общем случае считать, что вариация (3.2) дает нам правильные уравнения движения, конечно, при условии, что $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ не зависит от $g_{\mu\nu}$ и что μ является функцией времени, которая определяется дополнительным уравнением $\mathcal{T}^{0\beta}{}_{;\beta}=0$. Можно ожидать, что таким способом нам удастся получить также правильные уравнения движения в случае сингулярностей типа полюс — диполь, которые представляют вращающиеся тела и описываются выражением

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta}=\sum_{A=1}^{N}(\overset{A}{t}{}^{\alpha\beta}\overset{A}{\delta}-\overset{A}{t}{}^{r\alpha\beta}\overset{A}{\delta}_{|r}). \tag{3.4}$$

§ 4. Лагранжиан типа Фоккера для вращающихся тел

Нашей целью является получение лагранжиана типа Фоккера, который приводил бы к пост-ньютоновским уравнениям движения вращающихся тел. Тела характеризуются теперь набором параметров $\overset{A}{t}{}^{\alpha\beta}$ и $\overset{A}{t}{}^{r\alpha\beta}$. В согласии с общими рассмотрениями в гл. III разложение этих параметров в ряд должно начинаться для $(\alpha,\beta)=(0,0)$, $(\alpha,\beta)=(0,r)$ и $(\alpha,\beta)=(r,s)$ с величин порядка 2, 3 и 4 соответственно. Однако $\underset{2}{\overset{A}{t}}{}^{r00}$ дало бы вклад в ньютоновские уравнения движения через посредство $\underset{2}{h}_{00}$. Чтобы избежать этого усложнения, будем начинать разложение $\overset{A}{t}{}^{r00}$ с члена третьего порядка.

Плотность тензора энергии-импульса (3.4) не приведет непосредственно к точному лагранжиану. Предварительно нужно выразить коэффициенты $\overset{A}{t}{}^{\alpha\beta}$ и $\overset{A}{t}{}^{r\alpha\beta}$ через ξ^{α} и $\xi^{\alpha}{}_{|0}$. Это можно сделать, используя уравнения

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}&=\mathfrak{T}^{\alpha0}{}_{|0}+\mathfrak{T}^{\alpha r}{}_{|r}+\mathfrak{T}^{00}\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,0\end{Bmatrix}+2\mathfrak{T}^{0r}\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,r\end{Bmatrix}+\mathfrak{T}^{rs}\begin{Bmatrix}\alpha\\r\,s\end{Bmatrix}=\\&=\sum_{A=1}^{N}\Bigg[\left(\overset{A}{t}{}^{\alpha0}{}_{|0}+\overset{A}{t}{}^{00}\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,0\end{Bmatrix}+2\overset{A}{t}{}^{0r}\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,r\end{Bmatrix}+\overset{A}{t}{}^{rs}\begin{Bmatrix}\alpha\\r\,s\end{Bmatrix}\right)\overset{A}{\delta}-\\&-\left(\overset{A}{t}{}^{r\alpha0}{}_{|0}+\overset{A}{t}{}^{\alpha0}\overset{A}{\xi}{}^{r}{}_{|0}-\overset{A}{t}{}^{\alpha r}+\overset{A}{t}{}^{r00}\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,0\end{Bmatrix}+2\overset{A}{t}{}^{rs0}\begin{Bmatrix}\alpha\\s\,0\end{Bmatrix}+\right.\\&\left.+\overset{A}{t}{}^{rst}\begin{Bmatrix}\alpha\\s\,t\end{Bmatrix}\right)\overset{A}{\delta}_{|r}+(\overset{A}{t}{}^{r\alpha0}\overset{A}{\xi}{}^{s}{}_{|0}-\overset{A}{t}{}^{r\alpha s})\overset{A}{\delta}_{|rs}\Bigg],\end{aligned} \tag{4.1}$$

интегрируя которые по трехмерным окрестностям сингулярностей, получим

$$\begin{aligned}\int_{\overset{A}{\Omega}}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\,d\mathbf{x}=\overset{A}{t}{}^{\alpha0}{}_{|0}+\overset{A}{t}{}^{00}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,0\end{Bmatrix}}^{A}+2\overset{A}{t}{}^{0r}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,r\end{Bmatrix}}^{A}+\overset{A}{t}{}^{rs}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\r\,s\end{Bmatrix}}^{A}+\\+\overset{A}{t}{}^{r00}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,0\end{Bmatrix}}^{A}_{|r}+2\overset{A}{t}{}^{rs0}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\s\,0\end{Bmatrix}}^{A}_{|r}+\overset{A}{t}{}^{rst}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\s\,t\end{Bmatrix}}^{A}_{|r}=0,\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\int_{\overset{A}{\Omega}}(x^{r}-\overset{A}{\xi}{}^{r})\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\,d\mathbf{x}=\overset{A}{t}{}^{r\alpha0}{}_{|0}+\overset{A}{t}{}^{\alpha0}\overset{A}{\xi}{}^{r}{}_{|0}-\overset{A}{t}{}^{\alpha r}+\overset{A}{t}{}^{r00}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\0\,0\end{Bmatrix}}^{A}+\\+2\overset{A}{t}{}^{rs0}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\s\,0\end{Bmatrix}}^{A}+\overset{A}{t}{}^{rst}\overline{\begin{Bmatrix}\alpha\\s\,t\end{Bmatrix}}^{A}=0,\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\int_{\overset{A}{\Omega}}(x^{r}-\overset{A}{\xi}{}^{r})(x^{s}-\overset{A}{\xi}{}^{s})\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\,d\mathbf{x}=\\=\overset{A}{t}{}^{r\alpha0}\overset{A}{\xi}{}^{s}{}_{|0}+\overset{A}{t}{}^{s\alpha0}\overset{A}{\xi}{}^{r}{}_{|0}-\overset{A}{t}{}^{r\alpha s}-\overset{A}{t}{}^{s\alpha r}=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Уравнения (4.2) с $\alpha=0$ дают в третьем порядке

$$\underset{3}{\overset{A}{t}}{}^{00}{}_{|0}=\underset{3}{\overset{A}{\mu}}{}_{|0}=0. \tag{4.5}$$

Аналогичным образом (4.3) дает

$$\underset{3}{\overset{A}{t}}{}^{0r}=\overset{A}{\mu}\,\underset{2}{\overset{A}{\xi}}{}^{r}{}_{|0}, \tag{4.6}$$

а (4.4) дает

$$\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{r0s}+\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{s0r}=0. \tag{4.7}$$

Вводя обозначение

$$\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{r0s}-\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{s0r}=\overset{A}{\underset{3}{S}}{}^{rs}, \tag{4.8}$$

получаем из (4.7)

$$\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{r0s}=-\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{s0r}=\frac{1}{2}\overset{A}{\underset{3}{S}}{}^{rs}. \tag{4.9}$$

Здесь $\overset{A}{\underset{3}{S}}{}^{rs}$ следует интерпретировать как ньютоновский собственный угловой момент A-го тела, поскольку эта величина равна выражению

$$\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}[(x^r-\overset{A}{\xi}{}^r)\underset{3}{\mathfrak{T}}{}^{0s}-(x^s-\overset{A}{\xi}{}^s)\underset{3}{\mathfrak{T}}{}^{0r}]\,d\mathbf{x}. \tag{4.10}$$

При $\alpha=m$ уравнения (4.2) в четвертом порядке дают ньютоновские уравнения движения. Уравнения (4.3) и (4.4) при $\alpha=m$ дают в четвертом порядке

$$\overset{A}{\underset{4}{t}}{}^{mr}=\overset{A}{\underset{2}{\mu}}\overset{A}{\xi}{}^{m}{}_{|0}\overset{A}{\xi}{}^{r}{}_{|0}, \tag{4.11}$$

$$\overset{A}{\underset{3}{S}}{}^{mr}{}_{\underset{1}{|0}}=0 \tag{4.12}$$

и

$$\overset{A}{\underset{4}{t}}{}^{rst}=\frac{1}{2}(\overset{A}{\underset{3}{S}}{}^{rs}\overset{A}{\xi}{}^{t}{}_{|0}+\overset{A}{\underset{3}{S}}{}^{rt}\overset{A}{\xi}{}^{s}{}_{|0}). \tag{4.13}$$

Уравнения (4.12) показывают, что, как и следовало ожидать, ньютоновские собственные моменты сохраняются. Подытожим полученные результаты: в рассматриваемом приближении вращение не оказывает влияния на величины $\overset{A}{t}{}^{\alpha\beta}$, так что их значения остаются теми же, как и в случае невращающихся тел; величины $\overset{A}{t}{}^{r0s}$ и $\overset{A}{t}{}^{rst}$ выражаются через постоянные параметры $\overset{A}{S}{}^{rs}$, представляющие вращение.

Перейдем к следующему приближению. Уравнения (4.2) в пятом и шестом порядках определяют величину

$$\underbrace{(\overset{A}{t}{}^{00}\overset{A}{\xi}{}^{m}{}_{|0})_{|0}}_{5}{}_{1}-\overset{A}{\underset{5}{t}}{}^{0m}{}_{\underset{1}{|0}}=\underbrace{(\overset{A}{\mu}\overset{A}{\xi}{}^{m}{}_{|0})_{|0}}_{6}-\underbrace{\overset{A}{t}{}^{0m}{}_{|0}}_{6} \tag{4.14}$$

через выражения порядков 2, 3 и 4. Однако эта величина в точности равна нулю только в ньютоновском случае, в котором

$t^{0m}=t^{00}\xi^{m}{}_{|0}=\mu\xi^{m}{}_{|0}$. В случае же вращающихся тел она равна некоторой малой величине

$$\overset{A}{\underset{6}{q}}{}^{0m}=\underbrace{(\overset{A}{t}{}^{00}\overset{A}{\xi}{}^{m}{}_{|0})_{|0}}_{6}-\underbrace{\overset{A}{t}{}^{0m}{}_{|0}}_{6}, \tag{4.15}$$

которую можно вычислить в явном виде из (4.2), хотя это потребовало бы довольно трудоемких выкладок. Далее, дифференцируя по времени уравнение (4.3) с $\alpha=0$, получаем

$$\underbrace{\overset{A}{t}{}^{r00}{}_{|00}}_{6}+\overset{A}{\underset{6}{q}}{}^{0r}+2\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{rs0}\overbrace{\left\{\begin{matrix}0\\ \underset{2}{s0}\end{matrix}\right\}}^{A}{}_{\underset{1}{|0}}=0, \tag{4.16}$$

откуда

$$\overset{A}{\underset{4}{t}}{}^{r00}=\overset{A}{\underset{3}{S}}{}^{rs}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{s}+\int\limits_{t_0}^{t}\Big(\overset{A}{\underset{5}{t}}{}^{0r}-\underbrace{\overset{A}{t}{}^{00}\overset{A}{\xi}{}^{r}{}_{|0}}_{5}\Big)\,dt. \tag{4.17}$$

Таким образом, $\underset{4}{t}{}^{r00}$ определяется из уравнений (4.2) и (4.3) с $\alpha=0$. Затем можно использовать уравнения (4.3) с $\alpha=m$ для определения $\underset{6}{t}{}^{mr}$, если $\underset{5}{t}{}^{rm0}$ произвольно. Уравнение (4.4) определит $\underset{6}{t}{}^{rms}$ и т. д. Мы видим также, что условие (1.21) выполняется, так как добавочные члены в гравитационном поле имеют порядок r^{-2}. Добавочный член в $\underset{3}{h}_{0r}$ имеет вид

$$\underset{3}{h}{}'_{0r}=-2\sum_{A=1}^{N}\overset{A}{S}{}^{sr}(\overset{A}{r}{}^{-1})_{|s}. \tag{4.18}$$

Таким образом, пост-ньютоновский лагранжиан для вращающихся тел существует и имеет вид

$$\int\Big(-\frac{1}{2}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}+\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,G\Big)\,d\mathbf{x}. \tag{4.19}$$

Выделим в этом лагранжиане новые члены, которые связаны с вращением

$$-\sum_{A=1}^{N}\Big(\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{0r}\overbrace{\widetilde{\underset{3}{h}{}'_{0r}}}^{A}+\frac{1}{2}\overset{A}{\underset{4}{t}}{}^{r00}\overbrace{\underset{2}{h}_{00|r}}^{A}+\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{r0s}\overbrace{\underset{3}{h}_{0s|r}}^{A}+\frac{1}{2}\overset{A}{\underset{4}{t}}{}^{rst}\overbrace{\underset{2}{h}_{st|r}}^{A}\Big)-$$

$$-\frac{1}{32\pi}\int\underset{3}{h}_{0r|ss}\underset{3}{h}_{0r}\,d\mathbf{x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N}\Big(\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{0r}\overbrace{\widetilde{\underset{3}{h}{}'_{0r}}}^{A}+\overset{A}{\underset{4}{t}}{}^{r00}\overbrace{\underset{2}{h}_{00|r}}^{A}+\overset{A}{\underset{3}{t}}{}^{r0s}\overbrace{\underset{3}{h}_{0s|r}}^{A}+\overset{A}{\underset{4}{t}}{}^{rst}\overbrace{\underset{2}{h}_{st|r}}^{A}\Big). \tag{4.20}$$

Пренебрегая членами, пропорциональными квадратам моментов, получаем окончательное выражение для системы двух вращающихся тел

$$\begin{aligned}
&2\overset{1}{\mu}\overset{2}{S}{}^{sr}\overset{1}{\xi}{}^{r}{}_{|0}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{s}}-2\overset{1}{\mu}\overset{2}{S}{}^{sr}\overset{2}{\xi}{}^{r}{}_{|0}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{s}}-2\overset{2}{\mu}\overset{1}{S}{}^{sr}\overset{2}{\xi}{}^{r}{}_{|0}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{s}}+\\
&\quad+2\overset{2}{\mu}\overset{1}{S}{}^{sr}\overset{1}{\xi}{}^{r}{}_{|0}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{s}}-\overset{1}{\mu}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{r}}\int_{t_0}^{t}\Big(\underset{5}{\overset{2}{t}}{}^{0r}-\underbrace{\overset{2}{t}{}^{00}\overset{2}{\xi}{}^{r}{}_{|0}}_{5}\Big)\,dt+\\
&\qquad+\overset{2}{\mu}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{r}}\int_{t_0}^{t}\Big(\underset{5}{\overset{1}{t}}{}^{0r}-\underbrace{\overset{1}{t}{}^{00}\overset{1}{\xi}{}^{r}{}_{|0}}_{5}\Big)\,dt. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Этим вопросом мы займемся в следующей главе.

ГЛАВА V

Проблемы одной и двух частиц

§ 1. Проблема измерения

Мы рассмотрим наш лагранжиан в двух частных случаях: сначала для одной частицы, затем для двух частиц и найдем движение в выбранной системе координат, которая определяется методом приближений. Но прежде чем приступить к этой задаче, нужно выяснить, какой физический смысл будут иметь наши вычисления. Хорошо известно, что задача одного тела, т. е., скажем, задача о движении малой планеты вокруг Солнца, может быть строго решена без особых затруднений. Согласно этому решению, планета движется по эллипсу, как в теории Ньютона, а сам эллипс очень медленно вращается. Но что означают эти утверждения? Поскольку они относятся к некоторой конкретной системе координат, то, естественно, они потеряют физический смысл, если не будет охарактеризована система координат, в которой эти утверждения имеют силу. Однако, встав на ту точку зрения, что необходимо характеризовать конкретную систему координат, мы тем самым пойдем в разрез с духом общей теории относительности, согласно которому ее утверждения должны быть справедливы в любой (или почти в любой) системе координат. Некоторые авторы считают, что единственный путь решения этой дилеммы состоит во введении некоторых определенных систем координат. Как мы уже упомянули в гл. I, такая точка зрения представляется нам шагом назад от идей, провозглашенных ОТО.

Имеется, однако, простой способ избежать этих трудностей. Мы должны лишь ограничиться использованием систем координат, которые галилеевы на бесконечности, т. е. в которых при $r\to\infty$ метрика имеет вид

$$ds^2=\eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta. \qquad (1.1)$$

В этой области можно говорить об идеальных жестких стержнях и об идеальных часах. Однако физические явления происходят не здесь, а в римановом пространстве с произвольными системами координат, удовлетворяющими единственному условию, что они переходят на бесконечности в галилеевы системы координат. Галилеева система является инерциальной, и, конечно, существует множество таких систем, связанных друг с другом преобразованиями Лоренца. Мы, однако, будем иметь в виду только одну

Пренебрегая членами, пропорциональными квадратам моментов, получаем окончательное выражение для системы двух вращающихся тел

$$2\overset{1}{\mu}\overset{2}{S}{}^{sr}\overset{1}{\xi}{}^{r}{}_{|0}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{s}}-2\overset{1}{\mu}\overset{2}{S}{}^{sr}\overset{2}{\xi}{}^{r}{}_{|0}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{s}}-2\overset{2}{\mu}\overset{1}{S}{}^{sr}\overset{2}{\xi}{}^{r}{}_{|0}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{s}}+$$

$$+2\overset{2}{\mu}\overset{1}{S}{}^{sr}\overset{1}{\xi}{}^{r}{}_{|0}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{s}}-\overset{1}{\mu}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{r}}\int_{t_0}^{t}\Big(\underset{5}{\overset{2}{t}}{}^{0r}-\underbrace{\overset{2}{t}{}^{00}\overset{2}{\xi}{}^{r}{}_{|0}}_{5}\Big)\,dt+$$

$$+\overset{2}{\mu}\left(\frac{1}{r}\right)_{|\overset{1}{\xi}{}^{r}}\int_{t_0}^{t}\Big(\underset{5}{\overset{1}{t}}{}^{0r}-\underbrace{\overset{1}{t}{}^{00}\overset{1}{\xi}{}^{r}{}_{|0}}_{5}\Big)\,dt. \qquad (4.21)$$

Этим вопросом мы займемся в следующей главе.

ГЛАВА V

Проблемы одной и двух частиц

§ 1. Проблема измерения

Мы рассмотрим наш лагранжиан в двух частных случаях: сначала для одной частицы, затем для двух частиц и найдем движение в выбранной системе координат, которая определяется методом приближений. Но прежде чем приступить к этой задаче, нужно выяснить, какой физический смысл будут иметь наши вычисления. Хорошо известно, что задача одного тела, т. е., скажем, задача о движении малой планеты вокруг Солнца, может быть строго решена без особых затруднений. Согласно этому решению, планета движется по эллипсу, как в теории Ньютона, а сам эллипс очень медленно вращается. Но что означают эти утверждения? Поскольку они относятся к некоторой конкретной системе координат, то, естественно, они потеряют физический смысл, если не будет охарактеризована система координат, в которой эти утверждения имеют силу. Однако, встав на ту точку зрения, что необходимо характеризовать конкретную систему координат, мы тем самым пойдем в разрез с духом общей теории относительности, согласно которому ее утверждения должны быть справедливы в любой (или почти в любой) системе координат. Некоторые авторы считают, что единственный путь решения этой дилеммы состоит во введении некоторых определенных систем координат. Как мы уже упомянули в гл. I, такая точка зрения представляется нам шагом назад от идей, провозглашенных ОТО.

Имеется, однако, простой способ избежать этих трудностей. Мы должны лишь ограничиться использованием систем координат, которые галилеевы на бесконечности, т. е. в которых при $r \to \infty$ метрика имеет вид

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \qquad (1.1)$$

В этой области можно говорить об идеальных жестких стержнях и об идеальных часах. Однако физические явления происходят не здесь, а в римановом пространстве с произвольными системами координат, удовлетворяющими единственному условию, что они переходят на бесконечности в галилеевы системы координат. Галилеева система является инерциальной, и, конечно, существует множество таких систем, связанных друг с другом преобразованиями Лоренца. Мы, однако, будем иметь в виду только одну из этих систем. В случае Солнца это будет галилеева система координат, в которой Солнце покоится; в случае системы двух тел это будет система координат, в которой покоится либо центр тяжести, определяемый формулой (3.4) гл. III, либо одно из двух тел.

Каким образом можно сопоставлять событиям, происходящим в нашей произвольной системе координат, некоторое событие в галилеевой системе координат? Обозначим через τ и ξ^k время и пространственные координаты некоторого события. Наблюдатель в галилеевой системе координат узнает о событии по световому лучу, посылаемому к нему и достигающему его в точке Ξ^k в момент времени T. Таким образом, каждое событие в римановом пространстве проектируется на галилееву систему координат на очень большом расстоянии от этого события, где влиянием гравитационного поля можно пренебречь. Представим себе несколько событий, которые происходят в окрестности Солнца и при этом лежат в одной плоскости. (В данный момент мы игнорируем трудность, связанную со способом определения событий, лежащих в одной плоскости.) Пусть это будет плоскость (x, y). Каждому событию сопутствует испускание светового сигнала, который достигает плоскости (X, Y) галилеевой системы координат. Эти световые лучи посылаются таким образом, что они падают перпендикулярно к плоскости (X, Y), которая расположена параллельно плоскости (x, y). (Мы снова игнорируем трудность, связанную с определением параллельных плоскостей.) Описание событий (τ, ξ_1, ξ_2) на плоскости (x, y) зависит от выбора системы координат. Метки же T, Ξ^1, Ξ^2, оставляемые соответствующими сигналами на галилеевой плоскости (X, Y), дают возможность объективно описать события, так как нам известна структура стержней и часов, при помощи которых можно устанавливать положения и моменты времени этих событий. Итак, наша задача состоит в том, чтобы найти соответствие между событиями τ, ξ^k и T, Ξ^k, что даст нам возможность перейти от субъективного к объективному описанию событий. Если изменить системы координат во внутренней области, сохраняя галилеев характер на бесконечности, то координаты τ, ξ^k изменятся, а T, Ξ^k останутся теми же. Чтобы сделать это более наглядным, рассмотрим такую механическую модель: представим себе жесткую плоскость, из которой исходят проволоки, оканчивающиеся на другой, резиновой плоскости. Можно менять и деформировать резиновую пленку, жестко закрепив первую плоскость и концы проволок на ней. Аналогия с нашим примером очевидна: жесткая плоскость играет роль галилеевой системы координат, резина — роль системы координат в римановом многообразии, проволоки — роль световых лучей.

Итак, наш математический анализ мы начинаем с нахождения связи между событием τ, ξ^k и соответствующим событием T, Ξ^k. Так как все пробные частицы независимо от их массы движутся по геодезической, то это также имеет место для светового луча. По сути дела, это является некоторым допущением, но оно достаточно обосновано. А именно световой луч движется вдоль нулевой геодезической. Так как $ds=0$ и нельзя говорить о массе, то лучше всего использовать такую форму уравнений движения, в которой ds не фигурирует; в такой форме параметром является время t. Положим для краткости

$$c=1, \quad k=1, \quad x^0=t, \quad \dot{x}^k=\frac{dx^k}{dt}=x^k{}_{|0}.$$

Уравнения геодезической линии с t в качестве параметра имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\lambda\dot{x}^k)+\lambda\left\{ {k \atop \alpha\beta} \right\}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta=0. \tag{1.2}$$

Из этих трех уравнений можно найти три величины x^k; четвертое уравнение, определяющее величину λ,

$$g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta=0, \tag{1.3}$$

констатирует, что геодезическая линия является нулевой линией.

Начнем со случая, когда гравитационное поле отсутствует. Здесь мы имеем

$$\ddot{x}^k+\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\dot{x}^k=0; \quad \dot{x}^k\dot{x}^k=1, \tag{1.4}$$

откуда следуют соотношения

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}=0, \quad x^k=\xi^k+n^k(t-\tau), \quad n^kn^k=1. \tag{1.5}$$

Это — мировая линия светового луча, испущенного из точки ξ^k в момент τ в направлении n^k, в евклидовом пространстве и в галилеевой системе координат. В самом деле,

$$\dot{x}^k=n^k, \quad \ddot{x}^k=0, \quad x^k=\xi^k \quad \text{при} \quad t=\tau. \tag{1.6}$$

Теперь мы хотим учесть гравитационное поле. Очевидно, что наша процедура приближений, опирающаяся на малость скорости движущихся тел по сравнению со скоростью света, может быть успешно использована лишь в том случае, если эта скорость на самом деле мала по сравнению со скоростью света. Для светового луча этот метод, разумеется, не может быть использован. Поэтому для нашего следующего приближения будем считать, что координаты x^k точки, лежащей на мировой линии, не меняют порядка величины при дифференцировании их по времени. Следовательно, для мировой линии светового луча имеем

$$\begin{aligned} x^k &= \underset{0}{x}{}^k + \underset{1}{x}{}^k + \underset{2}{x}{}^k + \ldots, \\ \dot{x}^k &= \underset{0}{\dot{x}}{}^k + \underset{1}{\dot{x}}{}^k + \underset{2}{\dot{x}}{}^k + \ldots, \\ \ddot{x}^k &= \underset{0}{\ddot{x}}{}^k + \underset{1}{\ddot{x}}{}^k + \underset{2}{\ddot{x}}{}^k + \ldots . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Все другие наши допущения остаются в силе. Это означает, в частности, что дифференцирование по времени всех других величин увеличивает их порядок на единицу. Таким образом, принимая во внимание, что

$$\underset{2}{h}_{00} = g_{00} - 1 = \varphi, \quad \underset{2}{h}_{mn} = g_{mn} + \delta_{mn} = \delta_{mn}\varphi, \tag{1.8}$$

получаем из (1.2) и (1.3) в следующем приближении:

$$\underset{2}{\ddot{x}}{}^k + \underset{2}{(\log\lambda)}_{|0}\, \underset{0}{\dot{x}}{}^k = \varphi_{|m}\, \underset{0}{\dot{x}}{}^m\, \underset{0}{\dot{x}}{}^k - \varphi_{|k}, \tag{1.9а}$$

$$\underset{2}{\dot{x}}{}^k\, \underset{0}{\dot{x}}{}^k = \varphi. \tag{1.9б}$$

Отсюда видим, что $\underset{1}{x}{}^k = 0$, и уравнения (1.9) дают нам возможность найти мировую линию светового луча в следующем приближении.

Почти не теряя общности, будем рассматривать только задачу одного тела; в этом случае

$$\varphi = -\frac{2\mu}{r}, \quad r^2 = x^k x^k. \tag{1.10}$$

Распространение вычислений на случай проблемы многих тел привело бы лишь к незначительным изменениям, так как в этом приближении теория является линейной и движение тел оказало бы влияние на луч света только в следующем приближении, которое нас не интересует.

В качестве нулевого приближения рассмотрим случай отсутствия гравитационного поля, т. е. приближение (1.5).

Умножая (1.9а) на $\underset{0}{\dot{x}}{}^k$, получаем

$$(\log\lambda)_{|0} = -\dot{\varphi} = -\varphi_{|s}\underset{0}{\dot{x}}{}^s, \tag{1.11}$$

и в силу (1.9а) уравнение для $\underset{2}{x}{}^k$ примет вид

$$\underset{2}{\ddot{x}}{}^k = 2\varphi_{|m}\underset{0}{n}{}^m\underset{0}{n}{}^k - \varphi_{|k}. \tag{1.12}$$

Конкретизируем теперь вектор $\underset{0}{n}{}^k$, полагая

$$\xi^s \underset{0}{n}{}^s = 0. \tag{1.13}$$

Это означает, что в нулевом приближении световой луч посылается перпендикулярно к вектору, проведенному от Солнца к точке, из которой испускается этот световой луч. Мы делаем такое допущение по двум причинам: во-первых, с точки зрения наблюдений, это — единственный случай, представляющий действительный интерес; во-вторых, хотя можно было бы без особых затруднений решить задачу и в общем случае, когда не ставится условие (1.13), однако формулы в этом случае оказываются значительно более громоздкими.

Итак, перед нами стоит простая задача — решить уравнения (1.12) при условии (1.13). Вследствие (1.10) уравнения (1.12) принимают вид

$$\underset{2}{\ddot{x}}{}^k = \frac{4\mu}{r^3}\, x^s \underset{0}{n}{}^s \underset{0}{n}{}^k - \frac{2\mu}{r^3}\, x^k. \tag{1.14}$$

Так как μ — величина второго порядка, то можно ввести в это уравнение вместо x^k выражения (1.5), т. е. решения в случае галилеевой метрики. В силу (1.13) можно написать теперь

$$r^2 = a^2 + (t-\tau)^2, \quad \xi^s\xi^s = a^2, \tag{1.15}$$

и уравнение (1.14) примет вид

$$\underset{2}{\ddot{x}}{}^k = \frac{2\mu}{(a^2+(t-\tau)^2)^{3/2}}\left(\underset{0}{n}{}^k(t-\tau) - \underset{0}{\xi}{}^k\right). \tag{1.16}$$

Интегрируя это простое дифференциальное уравнение, получаем

$$\underset{2}{\dot{x}}{}^k = \underset{2}{n}{}^k = -\frac{2\mu}{(a^2+(t-\tau)^2)^{1/2}}\left(\underset{0}{n}{}^k + \frac{\xi^k(t-\tau)}{a^2}\right) + \underset{2}{b}_k, \tag{1.17}$$

где $\underset{2}{b}_k$ — произвольная постоянная, которая определяется из некоторых добавочных условий. В качестве такого условия потребуем, чтобы

$$\underset{2}{n}{}^k = 0 \quad \text{при} \quad t = \infty. \tag{1.18}$$

Это условие означает, что вдали от гравитационного поля световой луч имеет заданное направление, перпендикулярное к ξ^k. В этом случае при $t=\infty$ имеем

$$\underset{2}{\dot{x}}{}^k\big|_{t=\infty} = -\frac{2\mu\xi^k}{a^2} + \underset{2}{b}_k = 0 \tag{1.19}$$

и, следовательно,

$$\underset{2}{n}^k = \underset{2}{\dot{x}}^k = -\frac{2\mu}{(a^2+(t-\tau)^2)^{1/2}}\left(\underset{0}{n}^k + \frac{\xi^k(t-\tau)}{a^2}\right) + \frac{2\mu\xi^k}{a^2}. \quad (1.20)$$

При $t=\tau$ имеем

$$\underset{2}{n}^k\big|_{t=\tau} = \frac{2\mu}{a^2}(\xi^k - \underset{0}{n}^k a). \quad (1.21)$$

Следовательно, чтобы вектор $\underset{0}{n}^k + \underset{2}{n}^k$ был при $t=\infty$ перпендикулярен к направлению ξ^k, необходимо, чтобы в момент времени $t=\tau$ он имел небольшую составляющую в направлении ξ^k. Это известная формула для отклонения светового луча. Как видно из (1.20), при $t=-\infty$ компонента в направлении ξ^k была бы равна

$$\xi^k \underset{2}{n}^k\big|_{t=-\infty} = 4\mu. \quad (1.22)$$

Проинтегрируем теперь (1.17) при условии

$$\underset{2}{x}^k\big|_{t=\tau} = 0, \quad (1.23)$$

так как при $t=\tau$ положение светового луча в точности определяется координатами ξ^k. Мы получим

$$\begin{gathered} \underset{2}{x}^k = -2\mu\underset{0}{n}^k \log\frac{r+t-\tau}{a} - \frac{2\mu r\xi^k}{a^2} + \frac{2\mu\xi^k}{a}\left(1+\frac{t-\tau}{a}\right), \\ r^2 = \xi^s\xi^s + (t-\tau)^2 = a^2 + (t-\tau)^2. \end{gathered} \quad (1.24а)$$

Легко видеть, что этот интеграл уравнения (1.20) действительно удовлетворяет условиям (1.23). При $t\to\infty$ имеем теперь

$$\underset{2}{x}^k(t) \approx \frac{2\mu\xi^k}{a} - 2\mu\underset{0}{n}^k \log\frac{2(t-\tau)}{a}. \quad (1.24б)$$

В правой части этой формулы мы опустили все выражения, которые стремятся к нулю при $t\to\infty$. Нас, по существу, интересуют проекции событий ξ^k, τ на удаленную галилееву систему, что реализуется при $t\to\infty$. Обозначим теперь, как и в предварительных замечаниях к этому параграфу,

$$\Xi^k = \underset{0}{x}^k + \underset{2}{x}^k \quad \text{при} \quad t\to\infty. \quad (1.25)$$

Тогда в силу (1.24б) и (1.5) мы будем иметь

$$\Xi^k = \xi^k\left(1+\frac{2\mu}{a}\right) + \underset{0}{n}^k(t-\tau) - 2\mu\underset{0}{n}^k \log\frac{2(t-\tau)}{a} \quad (1.26)$$

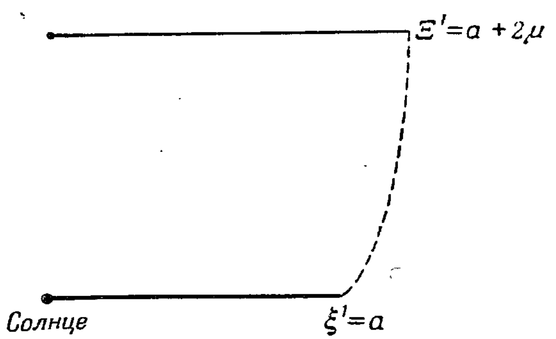
и

$$\dot{\Xi}^k = \underset{0}{n}^k. \quad (1.27)$$

Формулы (1.26) и (1.27) справедливы с той же степенью точности, что и (1.24б). Это и есть окончательные формулы, связывающие события в нашей (ньютоновской) системе координат, определяемой нашей процедурой приближений, с событиями в удаленной галилеевой системе координат. Однако необходимо помнить, что эти формулы получены только при условии, что вектор $\underset{0}{n}^k$ перпендикулярен к ξ^k. Именно этими формулами нужно пользоваться, если мы хотим дать объективное описание движения частицы. Вообще говоря, легко видеть, что в силу малости μ/a можно с успехом пользоваться приближенной формулой

$$\Xi^k = \xi^k + \underset{0}{n}^k(t-\tau). \quad (1.28)$$

Иначе говоря, можно с большой степенью точности интерпретировать события в нашей римановой системе координат, рассматривая



Фиг. 1. Связь между субъективным и объективным изображением события.

ее как галилееву систему, если только эти события происходят не слишком близко от Солнца. Так, если рассмотреть только Землю и Солнце с массой M, то для события на Земле имеем

$$a \approx 1{,}5\cdot 10^8\ \text{км}, \qquad \mu = \frac{kM}{c^2} \approx 1{,}5\ \text{км} \quad (1.29)$$

и, следовательно,

$$\frac{2\mu}{a} \approx 2\cdot 10^{-8}. \quad (1.30)$$

Зак. № 222

Рассмотрим в качестве примера событие, для которого

$$\tau=0,\quad \xi^1=a,\quad \xi^2=\xi^3=0; \tag{1.31}$$

отсюда, поскольку $\xi^s \underset{0}{n}{}^s=0$, то

$$\underset{0}{n}{}^1=\underset{0}{n}{}^2=0,\quad \underset{0}{n}{}^3=1. \tag{1.32}$$

В этом случае имеем (фиг. 1)

$$\Xi^1=a+2\mu,\quad \Xi^2=0,\quad \Xi^3=t\left(1-\frac{2\mu}{t}\log\frac{t}{a}\right), \tag{1.33}$$

или для достаточно больших значений t

$$\Xi^1=a+2\mu,\quad \Xi^2=0,\quad \Xi^3=t. \tag{1.34}$$

Изложенное в этом параграфе понадобится нам, чтобы объективным образом интерпретировать движение частиц.

§ 2. О движении пробной частицы в поле тяжелой частицы

Известно, что задача о пробной частице, движущейся в поле Солнца, может быть строго решена. Тем не менее мы найдем движение в пост-ньютоновском приближении на основе наших основных формул, не используя ни явного вида метрической формы, ни уравнения геодезической линии.

Начнем с конкретизации лагранжиана. Положим

$$\overset{1}{\xi}{}^k\equiv 0,\quad \overset{2}{\xi}{}^k=\xi^k,\quad \overset{1}{\mu}=\mu,\quad \overset{2}{\mu}=\Delta\mu. \tag{2.1}$$

Будем всюду пренебрегать всеми степенями величины $\Delta\mu$ выше первой. Тогда, поделив лагранжиан на $\Delta\mu$, получим новый лагранжиан

$$\underset{2}{L}+\underset{4}{L}=\frac{1}{2}\xi^a{}_{|0}\xi^a{}_{|0}+\frac{\mu}{r}+\frac{1}{8}(\xi^a{}_{|0}\xi^a{}_{|0})^2+\frac{3}{2}\frac{\mu}{r}\xi^a{}_{|0}\xi^a{}_{|0}-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{r^2}. \tag{2.2}$$

Здесь удобно ввести вместо x^0 новую переменную согласно формуле

$$dx^0=\left(1+\frac{4\mu}{r}\right)dx'^0, \tag{2.3}$$

так что

$$L\,dx^0=L'\,dx'^0. \tag{2.4}$$

Обозначая производные по x'^0 значком $0'$, запишем лагранжиан в виде

$$\underset{2}{L'}+\underset{4}{L'}=\frac{1}{2}\xi^a{}_{|0'}\xi^a{}_{|0'}+\frac{\mu}{r}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\xi^a{}_{|0'}\xi^a{}_{|0'}-\frac{\mu}{r}\right)^2+\frac{3\mu^2}{r^2}. \tag{2.5}$$

В силу ньютоновских уравнений движения выражение в скобках есть постоянная величина. Отбрасывая ее, получаем

$$\underset{2}{L'}+\underset{4}{L'}=\frac{1}{2}\xi^a{}_{|0'}\xi^a{}_{|0'}+\frac{\mu}{r}+\frac{3\mu^2}{r^2}. \tag{2.6}$$

Этот лагранжиан соответствует лагранжиану классической механики в случае потенциала вида

$$V=-\frac{\mu}{r}-\frac{3\mu^2}{r^2}. \tag{2.7}$$

В качестве интегралов этой задачи мы имеем закон сохранения импульса, который в системе полярных координат (φ, r) принимает вид

$$r^2\varphi_{|0'}=\underset{1}{J}+\underset{3}{J}, \tag{2.8}$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}\left[(r_{|0'})^2+r^2(\varphi_{|0'})^2\right]-\frac{\mu}{r}-\frac{3\mu^2}{r^2}=\underset{2}{E}+\underset{4}{E}. \tag{2.9}$$

Таким образом, наша задача сводится к хорошо известной проблеме в классической механике. Ее решение, записанное в параметрической форме, дается формулами

$$r=a(1-\varepsilon\cos u), \tag{2.10а}$$

$$\varphi=\left(1+\frac{3\mu}{(1-\varepsilon^2)a}\right)2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}, \tag{2.10б}$$

$$x'^0=\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left(1+\frac{\mu}{2a}\right)(u-\varepsilon\sin u). \tag{2.10в}$$

Постоянные a и ε определяются постоянными величинами E и J. Однако удобнее рассматривать в качестве заранее задаваемых параметров величины a и ε, а не E и J. Простой подстановкой можно убедиться в том, что (2.10) действительно является решением уравнений (2.8) и (2.9). В случае $\varepsilon>1$ нужно заменить

$$a \text{ на } -a \quad\text{и}\quad u \text{ на } -iu. \tag{2.11}$$

Получив таким образом решение нашей задачи, можно теперь перейти к первоначальной временной координате x^0

$$\begin{aligned} dx^0&=\left(1+\frac{4\mu}{r}\right)dx'^0=\\ &=dx'^0+\frac{4\mu}{a(1-\varepsilon\cos u)}\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left(1+\frac{\mu}{2a}\right)(1-\varepsilon\cos u)\,du=\\ &=d\left(x'^0+\frac{4\mu}{a}\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\,u\right).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Интегрируя и подставляя вместо x'^0 его выражение согласно (2.10), получаем

$$x^0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\left[\left(1+\frac{9\mu}{2a}\right)u - \varepsilon\left(1+\frac{\mu}{2a}\right)\sin u\right]. \quad (2.13)$$

Эту формулу можно использовать вместо (2.10в).

В ньютоновском приближении уравнения имеют вид

$$r = a(1-\varepsilon\cos u), \quad (2.14\text{а})$$

$$\varphi = 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}, \quad (2.14\text{б})$$

$$x^0 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u-\varepsilon\sin u). \quad (2.14\text{в})$$

Вопрос о траектории такой частицы рассматривается почти во всех книгах по ОТО. Эту траекторию и движение перигелия можно легко вывести из наших более общих формул. Введем вспомогательный угол ψ

$$\psi = 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}. \quad (2.15)$$

Можно легко показать, что

$$1-\varepsilon\cos u = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\psi}. \quad (2.16)$$

Таким образом, из (2.10) находим

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\left(1-\frac{3\mu}{a(1-\varepsilon^2)}\right)\varphi}. \quad (2.17)$$

За один оборот перигелий сдвигается на угол σ, определяемый соотношением

$$\left(1-\frac{3\mu}{a(1-\varepsilon^2)}\right)(2\pi+\sigma) = 2\pi, \quad (2.18)$$

из которого следует знаменитая формула движения перигелия

$$\sigma = \frac{6\pi\mu}{a(1-\varepsilon^2)}. \quad (2.19)$$

Если нас интересует только соотношение (2.17), а не отыскание r и φ как функций x^0, то мы можем получить окончательно результат, касающийся сдвига перигелия, весьма просто и быстро. Из (2.9) и (2.8) после повторного дифференцирования по φ мы получаем

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\left(1-\frac{6\mu^2}{J^2}\right) - \frac{\mu}{J^2} = 0, \quad J = \underset{1}{J} + \underset{3}{J}.$$

Это уравнение стандартного вида и имеет решение

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{J^2}\left(1+\varepsilon\cos\left[\left(1-\frac{3\mu^2}{J^2}\right)\varphi\right]\right).$$

Отсюда, полагая

$$\frac{\mu}{J^2} = [a(1-\varepsilon^2)]^{-1},$$

найдем (2.17).

Возникает вопрос: каков физический смысл всех этих результатов? Другими словами, насколько иными будут выглядеть эти результаты с точки зрения галилеевой системы координат?

Предположим, что на бесконечности в плоскости, параллельной плоскости движения, находятся наблюдатели, которые получают световые сигналы. Координата $Z = x^3$ этой плоскости очень велика, но имеет постоянное значение. Плоскость, в которой происходит движение, мы будем обозначать символом (x, y), а бесконечно удаленную плоскость, параллельную плоскости (x, y), — символом (X, Y).

Если световой луч падает перпендикулярно к плоскости (X, Y), то, подставляя T вместо t и введя обозначение

$$\rho^2 = \xi^s\xi^s, \quad (2.20)$$

получаем из (1.26) связь между величинами ξ^k и Ξ^k

$$\Xi^1 = \xi^1\left(1+\frac{2\mu}{\rho}\right), \quad \Xi^2 = \xi^2\left(1+\frac{2\mu}{\rho}\right), \quad (2.21\text{а})$$

$$\Xi^3 = T - \tau - 2\mu\log\frac{2(T-\tau)}{\rho}. \quad (2.21\text{б})$$

Здесь $\xi^k(\tau)$ $(k=1, 2)$ описывает движение в плоскости (x, y). Это движение наблюдается с плоскости $\Xi^3 = \text{const}$. Выясним, как связаны между собой T и τ, или, точнее, промежутки

$$\Delta T = T_2 - T_1 \quad \text{и} \quad \Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 \quad (2.22)$$

между двумя событиями. Тем самым мы найдем связь между объективным ритмом событий, обозначенным через T, и субъективным ритмом, связанным с выбором системы координат. Поскольку $\Xi^3 = \text{const}$, то из (2.21б) следует

$$\Delta T - \Delta\tau - \frac{2\mu(\Delta T - \Delta\tau)}{T-\tau} + \frac{2\mu}{\rho}\frac{d\rho}{d\tau}\Delta\tau = 0. \quad (2.23)$$

Так как $T-\tau\to\infty$, то получаем

$$\Delta T = \Delta\tau\left(1-\frac{2\mu}{\rho}\frac{d\rho}{d\tau}\right). \quad (2.24)$$

Для нашей солнечной системы величина $2\mu/\rho$ порядка 10^{-8} и скорость $d\rho/d\tau$ крайне мала по сравнению со скоростью света (напомним, что $c=1$). Следовательно, пренебрегая выражениями третьего порядка, можно написать

$$\Delta T = \Delta\tau. \tag{2.25}$$

Таким образом, мы видим, что для всех практических целей можно считать, что ритм времени на объективной плоскости (X, Y) такой же, как и на плоскости (x, y), на которой происходят события.

Рассмотрим теперь координаты r, φ. Мы имеем

$$\Xi^1 = \xi^1\left(1+\frac{2\mu}{\rho}\right), \quad \Xi^2 = \xi^2\left(1+\frac{2\mu}{\rho}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\Xi^2}{\Xi} = \operatorname{tg}\Phi = \frac{\xi^2}{\xi^1} = \operatorname{tg}\varphi. \tag{2.26}$$

Итак, из трех параметров r, φ, x^0, описывающих движение, два параметра одинаковы для плоскостей (x, y) и (X, Y). Что касается r, то, обозначая проекцию r на плоскость (X, Y) через R, будем иметь

$$R = r\left(1+\frac{2\mu}{r}\right) = r + 2\mu. \tag{2.27}$$

Таким образом, изменение в r тривиально и состоит в прибавлении к r постоянной величины 2μ.

Итак, мы убедились в больших преимуществах используемой нами системы координат в римановом пространстве. Прибавляя лишь малую постоянную величину к r и большую постоянную величину к x^0, можно интерпретировать наши результаты объективным образом, а именно как результаты измерений наблюдателей, которые находятся в галилеевой системе координат на некоторой удаленной плоскости, параллельной той, в которой происходят события, и получающих сигналы от событий в виде световых лучей, падающих перпендикулярно на эту удаленную плоскость.

§ 3. Проблема двух тел

Известно, что в ньютоновской механике решение проблемы двух тел по своей сложности равносильно решению проблемы одного тела. В ОТО также оказывается возможным свести задачу двух тел к задаче одного тела, хотя это сделать труднее, чем в случае ньютоновской динамики. Это утверждение относится только к процессу нахождения решения. Что касается проблемы построения лагранжиана, то здесь имеется существенное различие между случаем задачи одного тела и задачи многих тел.

Как и в случае проблемы одного тела, мы будем исходить из нашего общего лагранжиана, который применим теперь к случаю двух частиц. Полагая

$$r^2 = (\overset{1}{\xi}{}^s - \overset{2}{\xi}{}^s)(\overset{1}{\xi}{}^s - \overset{2}{\xi}{}^s), \tag{3.1}$$

получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \underset{4}{L} + \underset{6}{L} = {} & \frac{1}{2}\overset{1}{\mu}\overset{1}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{1}{\xi}{}^s{}_{|0} + \frac{1}{2}\overset{2}{\mu}\overset{2}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{2}{\xi}{}^s{}_{|0} + \frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}}{r} + \frac{3}{2}\frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}}{r}\left(\overset{1}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{1}{\xi}{}^s{}_{|0} + \overset{2}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{2}{\xi}{}^s{}_{|0}\right) - \\ & - 4\frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}}{r}\overset{1}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{2}{\xi}{}^s{}_{|0} + \frac{1}{8}\overset{1}{\mu}\left(\overset{1}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{1}{\xi}{}^s{}_{|0}\right)^2 + \frac{1}{8}\overset{2}{\mu}\left(\overset{2}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{2}{\xi}{}^s{}_{|0}\right) - \\ & - \frac{1}{2}\frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}(\overset{1}{\mu}+\overset{2}{\mu})}{r^2} - \frac{1}{2}\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}r_{|\overset{1}{\xi}{}^s\overset{2}{\xi}{}^r}\overset{1}{\xi}{}^s{}_{|0}\overset{2}{\xi}{}^r{}_{|0}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для решения нашей задачи выберем систему координат, в которой ньютоновский центр массы покоится. Такой выбор системы существенно упрощает рассмотрение. В соответствии с этим потребуем, чтобы

$$(\underset{2}{\overset{1}{\mu}} + \underset{2}{\overset{2}{\mu}})X^k = \overset{1}{\mu}\underset{20}{\overset{1}{\xi}{}^k} + \overset{2}{\mu}\underset{20}{\overset{2}{\xi}{}^k} = 0(\lambda^4). \tag{3.3}$$

Иначе говоря, разложение в ряд величин X^k должно начинаться по крайней мере с члена второго порядка. Поэтому произведение величины $X^k{}_{|0}X^k{}_{|0}$ на массу будет по крайней мере восьмого порядка и им можно будет пренебречь.

Введем теперь новые переменные и новые постоянные

$$\overset{1}{\xi}{}^s - \overset{2}{\xi}{}^s = \eta^s, \quad \mu_0 = \overset{1}{\mu} + \overset{2}{\mu}, \quad \mu = \frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}}{\mu_0}. \tag{3.4}$$

Отсюда, а также из (3.3) получим

$$\overset{1}{\xi}{}^k = \frac{\mu}{\overset{1}{\mu}}\eta^k, \quad \overset{2}{\xi}{}^k = -\frac{\mu}{\overset{2}{\mu}}\eta^k. \tag{3.5}$$

Теперь можно выразить L как функцию от η^k и их первых производных по времени. Принимая во внимание, что

$$r^2 = \eta^s\eta^s = (\overset{1}{\xi}{}^s - \overset{2}{\xi}{}^s)(\overset{1}{\xi}{}^s - \overset{2}{\xi}{}^s), \tag{3.6}$$

и опуская множитель L/μ, получаем

$$\begin{aligned} \underset{2}{L} + \underset{4}{L} = {} & \frac{1}{2}\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \frac{1}{8}\left(1 - \frac{3\mu}{\mu_0}\right)(\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s)^2 + \frac{1}{2}(3\mu_0 + \mu)\frac{1}{r}\dot{\eta}^s\dot{\eta}^s + \\ & + \frac{1}{2}\frac{\mu}{r^3}(\eta^s\dot{\eta}^s)^2 + \frac{\mu_0}{r} - \frac{1}{2}\frac{\mu_0^2}{r^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Лагранжиан в такой форме представляется значительно более сложным, чем в случае одного тела. Однако путем соответствующего преобразования временно́й и пространственных переменных его можно привести к тому виду, какой он имеет в случае одной частицы. Рассмотрим следующее преобразование:

$$dx^0 = dx'^0 \left(1 + \frac{p\mu_0}{r'}\right)\beta, \tag{3.8а}$$

$$\eta^k = \eta^{k'} \left(1 + \frac{s\mu}{r'}\right)\alpha, \tag{3.8б}$$

где s, p, α, β — постоянные, которые выбираются такими, чтобы лагранжиан (3.7) принял форму лагранжиана для одной частицы. В этой формуле

$$r'^2 = \eta^{s'}\eta^{s'}, \tag{3.9}$$

а дифференцирование по $x^{0'}$ мы будем обозначать символом $0'$. Подставляя (3.8) в лагранжиан и принимая во внимание, что

$$L'\,dx^{0'} = L\,dx^0, \tag{3.10}$$

а также учитывая возможность умножения лагранжиана на произвольную постоянную величину, мы получаем окончательно

$$\underset{2}{L'} + \underset{4}{L'} = \frac{1}{2}\eta^{s'}{}_{|0'}\eta^{s'}{}_{|0'} + \frac{\mu_0}{r'} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\eta^{s'}{}_{|0'}\eta^{s'}{}_{|0'} - \frac{\mu_0}{r'}\right]^2 + \frac{3\mu_0^2}{\left(1 - \frac{3\mu}{\mu_0}\right)r'^2}. \tag{3.11}$$

Эта форма лагранжиана получается при условии, что постоянные α, β, s, p определяются соотношениями

$$\alpha = 1 - \frac{3\mu}{\mu_0}, \qquad \beta = \left(1 - \frac{3\mu}{\mu_0}\right)^{3/2},$$

$$s = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3\mu}{\mu_0}\right)^{-1}, \qquad p = \frac{3 + 2\frac{\mu}{\mu_0}}{1 - \frac{3\mu}{\mu_0}} + 1. \tag{3.12}$$

Выражение в (3.11), стоящее в квадратных скобках, является постоянной величиной, так как удовлетворяются уравнения движения в предыдущем приближении. Поэтому лагранжиан можно записать в виде

$$\underset{2}{L'} + \underset{4}{L'} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^{s'}\quad\dot{\eta}^{s'} + \frac{\mu_0}{r'} + \frac{3\mu_0^2}{\left(1 - 3\frac{\mu}{\mu_0}\right)r'^2}. \tag{3.13}$$

Таким образом, проблема стала эквивалентной задаче одного тела, находящегося под действием поля с потенциалом вида

$$V = -\frac{\mu_0}{r'} - \frac{3\mu_0^2}{\left(1 - \frac{3\mu}{\mu_0}\right)r'^2}. \tag{3.14}$$

В силу этого дальнейшее рассмотрение почти в точности такое же, как в предыдущем параграфе. Для траектории мы находим

$$r' = \frac{a'(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\left[\left(1 - \frac{3\mu_0}{\left(1 - \frac{3\mu}{\mu_0}\right)a'(1-\varepsilon^2)}\right)\varphi\right]}. \tag{3.15}$$

Но из (3.8б) находим

$$r = \alpha r' + \alpha s\mu = \left(1 - \frac{3\mu}{\mu_0}\right)r' + \frac{1}{2}\mu. \tag{3.16}$$

Следовательно, вводя обозначение

$$a'\left(1 - \frac{3\mu}{\mu_0}\right) = a, \tag{3.17}$$

будем иметь

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\left[\left(1 - \frac{3\mu_0}{a(1-\varepsilon^2)}\right)\varphi\right]} + \frac{\mu}{2}. \tag{3.18}$$

Отбрасывая аддитивную постоянную $\mu/2$, мы видим, что при $\varepsilon < 1$ движение происходит по эллипсу, причем за один период оборота перигелий смещается на угол

$$\sigma = \frac{6\pi\mu_0}{a(1-\varepsilon^2)}. \tag{3.19}$$

Таким образом, мы пришли к тому же результату, что и в случае проблемы одного тела, с той лишь разницей, что теперь вместо μ стоит величина μ_0, представляющая собой сумму масс.

Каков физический смысл этих результатов? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно вернуться к рассуждениям § 1 этой главы. Из точки $\overset{1}{\xi}{}^s$ в момент времени τ испускается световой луч. Но теперь движутся две частицы. Правда, вкладом, обусловленным их движением, можно пренебречь, так как он имеет порядок выше второго. Другая трудность заключается в том, что теперь масса излучающего тела имеет конечную величину. Однако вследствие сферической симметрии излучающей частицы это обстоятельство тоже не повлияет на распространение светового луча. Мы должны игнорировать также факт обращения в бесконечность потенциала в точке $\overset{1}{\xi}{}^s$, так как наше допущение о существовании и характере сингулярностей носит чисто математический характер. Именно для того и был разработан нами процесс „препарирования“, чтобы устранить такого рода трудности из аналитического рассмотрения.

Следовательно, можно рассматривать проблему распространения светового луча, испущенного в точке $\overset{1}{\xi}{}^s$ в момент времени τ, точно таким же образом, как мы это делали в аналогичной ситуации в § 1 и 2.

Обобщим несколько преобразование (3.4) от $\overset{1}{\xi}{}^k$, $\overset{2}{\xi}{}^k$ к X^s, η^s, предполагая, что центр тяжести движется, причем так, что в нашей системе координат в любой момент времени $\overset{2}{\xi}{}^s = 0$. Такое обобщенное преобразование имеет вид

$$\overset{1}{\xi}{}^s = X^s + \frac{\mu}{\overset{1}{\mu}}\eta^s, \qquad \overset{2}{\xi}{}^s = X^s - \frac{\mu}{\overset{2}{\mu}}\eta^s, \tag{3.20}$$

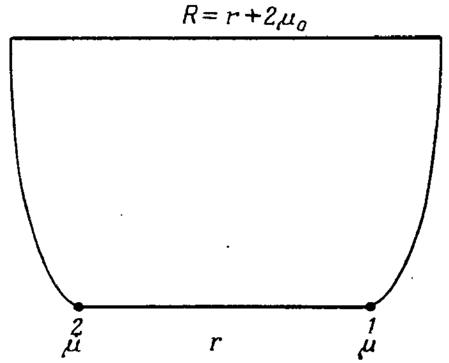
и условие

$$\overset{2}{\xi}{}^s = 0 \quad \text{дает} \quad X^s = \frac{\mu}{\overset{2}{\mu}}\eta^s. \tag{3.21}$$

Следовательно,

$$\overset{1}{\xi}{}^s = \left(\frac{\mu}{\overset{1}{\mu}} + \frac{\mu}{\overset{2}{\mu}}\right)\eta^s = \eta^s. \tag{3.22}$$

Отсюда выясняется физический смысл величины η^s: она представляет собой координаты $\overset{1}{\xi}{}^s$ в системе, в которой второе тело



Фиг. 2. Расстояние R, определяемое наблюдателем в галилеевой системе координат.

покоится. Итак, движение первого тела по отношению ко второму или наоборот описывается уравнением (3.18). Световые лучи, посылаемые от двух тел, несколько искривляются и достигают некоторой плоскости, параллельной той, в которой происходит движение. Ход этих лучей изображен на фиг. 2, причем искривление луча, идущего от первой массы, обусловлено наличием второй массы и наоборот. Таким образом, если мы обозначим через R объективное расстояние, измеряемое в бесконечно удаленной системе, то получим

$$R = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\left[\left(1-\frac{3\mu_0}{a(1-\varepsilon^2)}\right)\varphi\right]} + \frac{\mu}{2} + 2\mu_0. \tag{3.23}$$

Таковы тривиальные изменения в формуле (3.18), причем аддитивную постоянную $\mu/2$ также можно опустить. Как следует из рассуждений в конце предыдущего параграфа, ритм времени в галилеевой системе координат тоже будет почти таким же, как и в нашей римановой системе координат. Тем самым мы еще раз убедились в преимуществах выбранной нами системы координат. Она дает почти объективную картину движения.

§ 4. Движение вращающихся тел

В последнем параграфе гл. IV мы нашли лагранжиан для системы двух вращающихся тел. Этот лагранжиан содержал новые члены, связанные с вращением. Нам уже известны поправки к движению сферически-симметричных невращающихся тел, возникающие в пост-ньютоновском приближении. В этом параграфе будут найдены поправки, обусловленные вращением. Лагранжиан, которым мы будем пользоваться, имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\overset{1}{\mu}\dot{\overset{1}{\xi}}{}^s\dot{\overset{1}{\xi}}{}^s + \frac{1}{2}\overset{2}{\mu}\dot{\overset{2}{\xi}}{}^s\dot{\overset{2}{\xi}}{}^s + \frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}}{r} - \frac{2\overset{1}{\mu}}{r^3}\overset{2}{S}{}^{rs}(\dot{\overset{1}{\xi}}{}^s - \dot{\overset{2}{\xi}}{}^s)(\overset{1}{\xi}{}^r - \overset{2}{\xi}{}^r) + $$
$$+ 2\frac{\overset{2}{\mu}}{r^3}\overset{1}{S}{}^{rs}(\dot{\overset{2}{\xi}}{}^s - \dot{\overset{1}{\xi}}{}^s)(\overset{1}{\xi}{}^r - \overset{2}{\xi}{}^r), \tag{4.1}$$

причем мы пренебрегли величинами q^{0n}, входящими в формулу (4.21) гл. IV. В этом лагранжиане ответственны за вращение только члены пост-ньютоновского порядка. Вводя обозначения

$$\eta^r = \overset{1}{\xi}{}^r - \overset{2}{\xi}{}^r; \qquad \mu_0 X^r = \overset{1}{\mu}\overset{1}{\xi}{}^r + \overset{2}{\mu}\overset{2}{\xi}{}^r; \qquad \mu_0 = \overset{1}{\mu} + \overset{2}{\mu};$$
$$\mu = \frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}}{\overset{1}{\mu} + \overset{2}{\mu}}; \qquad \mu S^{rs} = \overset{1}{\mu}\overset{2}{S}{}^{rs} + \overset{2}{\mu}\overset{1}{S}{}^{rs}, \tag{4.2}$$

можно переписать лагранжиан (4.1) в виде

$$L = \frac{1}{2}\mu_0\dot{X}^r\dot{X}^r + \mu\left(\frac{1}{2}\dot{\eta}^r\dot{\eta}^r + \frac{\mu_0}{r} - \frac{2}{r^3}S^{rs}\dot{\eta}^s\eta^r\right). \tag{4.3}$$

Поскольку движение рассматривается в системе, связанной с ньютоновским центром массы, то, опуская постоянный множитель, получим следующий лагранжиан относительного движения:

$$L' = \frac{1}{2}\dot\eta^r\dot\eta^r + \frac{\mu_0}{r} - \frac{2}{r^3}S^{rs}\dot\eta^s\eta^r. \tag{4.4}$$

Этот лагранжиан инвариантен по отношению к преобразованию сдвига времени (4.2) гл. III и по отношению к вращению

$$\begin{aligned} \eta'^r &= \eta^r + M^{rs}\eta^s, \\ S'^{rs} &= S^{rs} + M^{rt}S^{ts} - M^{st}S^{tr}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где M^{rs} — некоторый постоянный бивектор. Из теоремы Нетера следует

$$\frac{1}{2}\dot\eta^r\dot\eta^r - \frac{\mu_0}{r} = E = \text{const} \tag{4.6}$$

и

$$\dot J^{rs} = \frac{2}{r^3}(S^{rt}J^{ts} - S^{st}J^{tr}), \tag{4.7}$$

где

$$J^{rs} = \dot\eta^r\eta^s - \dot\eta^s\eta^r + \frac{2}{r^3}(S^{tr}\eta^t\eta^s - S^{ts}\eta^t\eta^r). \tag{4.8}$$

Рассмотрим теперь два типичных частных случая.

В первом случае мы предполагаем, что движение ограничивается некоторой областью и происходит в плоскости, перпендикулярной к бивектору S^{rs}. Записанные в векторной форме уравнения (4.7) и (4.8) имеют вид

$$\dot{\mathbf{J}} = \frac{2}{r^3}[\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}], \tag{4.9}$$

$$\mathbf{J} = [\dot{\boldsymbol\eta}\cdot\boldsymbol\eta] - \frac{2}{r^3}[[\mathbf{S}\cdot\boldsymbol\eta]\cdot\boldsymbol\eta] \tag{4.10}$$

и в рассматриваемом случае дают

$$J^{rs} = \dot\eta^r\eta^s - \dot\eta^s\eta^r + \frac{2}{r}S^{rs} = \text{const}, \tag{4.11}$$

или

$$\mathbf{J} = [\dot{\boldsymbol\eta}\cdot\boldsymbol\eta] + \frac{2}{r}\mathbf{S} = \text{const}. \tag{4.12}$$

Вводя в плоскости, где происходит движение, полярные координаты r, φ, получаем

$$J = r^2\dot\varphi \pm \frac{2\mu_0 S}{r}, \tag{4.13}$$

где J и S — величины векторов $\mathbf{J}$ и $\mathbf{S}$; знак плюс соответствует случаю, когда $\mathbf{J}$ и $\mathbf{S}$ имеют одинаковое направление, а знак минус — случаю взаимно противоположного направления этих векторов. Правую часть тождества

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \dot\eta^r\dot\eta^r(r^2\dot\varphi)^{-2}, \quad u = \frac{1}{r} \tag{4.14}$$

можно представить в виде полинома относительно переменной u

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = J^{-2}\left[2E + \left(2\mu_0 + 8\frac{S}{J}E\right)u + 8\frac{S}{J}\mu_0 u^2\right]. \tag{4.15}$$

Решение последнего уравнения в ньютоновском приближении дает кеплеровский эллипс

$$u = p^{-1}[1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)], \quad p = \frac{J^2}{\mu_0}, \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EJ^2}{\mu_0^2}\right)^{1/2}. \tag{4.16}$$

Следующее приближение дает некоторое вращение эллипса с очень малым смещением периастрона на величину

$$\pm 8\pi\frac{\mu_0 S}{pJ} = \pm 8\pi\frac{\mu_0 S}{J^3} \tag{4.17}$$

за каждый период ньютоновского движения.

Второй случай, который мы рассмотрим, это случай ньютоновского движения по круговой орбите $r = a$. Из уравнения (4.7) теперь имеем

$$\dot{\mathbf{J}} = \frac{2}{a^3}[\mathbf{S}\cdot\mathbf{J}]. \tag{4.18}$$

Таким образом, вектор $\mathbf{J}$, перпендикулярный к плоскости движения, прецессирует вокруг постоянного вектора $\mathbf{S}$ с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{2}{a^3}S, \tag{4.19}$$

в чем легко убедиться, если расположить вектор $\mathbf{S}$, например, в направлении оси x^3 и заставить вектор $\mathbf{J}$ прецессировать вокруг него.

Все рассмотрение, связанное с вопросом измерения, остается справедливым также в случае вращающихся тел, так как траектория светового луча зависит только от величин $\underset{2}{h}_{00}$ и $\underset{2}{h}_{sr}$, на которые вращение не оказывает влияния.

В заключение сделаем несколько замечаний, связанных с вопросом о корректности пренебрежения величинами q^{0m}, определяемыми формулой (4.15) гл. IV. Конечно, они имеют тот же порядок, что и ряд других выражений в лагранжиане, и поэтому, вообще говоря, ими не следовало бы пренебрегать. Вспомним, однако, положение дел. Мы имеем уравнения

$$\int \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}\, d\mathbf{x} = 0, \tag{4.20}$$

которые при

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \sum_{A=1}^{N} (\overset{A}{t}{}^{\alpha\beta} \overset{A}{\delta} - \overset{A}{t}{}^{r\alpha\beta} \overset{A}{\delta}{}_{|r}) \tag{4.21}$$

определяют некоторым сложным образом величины $\underset{6}{q}{}^{0m}$ и $\underset{4}{t}{}^{r00}$. Однако движение пока еще произвольно и определяется нашим уравнением

$$\delta \int L\, dt = 0, \tag{4.22}$$

варьирование в котором следует производить по ξ^k. Но чтобы определить L, нужно знать q^{0m}, а это требует решения интегро-дифференциального уравнения. Тем не менее можно найти частное решение уравнений (4.20) и (4.22). Оно имеет вид

$$\overset{A}{t}{}^{r00} = \frac{1}{2} \overset{A}{S}{}^{rs} \dot{\overset{A}{\xi}}{}^{s},$$

$$\int_{t_0}^{t} \Big(\underset{5}{\overset{A}{t}{}^{0r}} - \underbrace{\overset{A}{t}{}^{00} \dot{\overset{A}{\xi}}{}^{r}{}_{|0}}_{5} \Big)\, dt = -\frac{1}{2} \overset{A}{S}{}^{rs} \dot{\overset{A}{\xi}}{}^{s}.$$

В этом частном случае изложенные выше рассуждения остаются почти неизмененными. Изменится только определение величины S^{rs} в последнем уравнении (4.2). Это значит, что в системе координат, в которой центр тяжести покоится, характер движения будет соответствовать анализу настоящего параграфа.

ГЛАВА VI

Движение и излучение

§ 1. Простой пример

В этой главе мы покажем тесную связь между уравнениями движения и гравитационным излучением. Приступая к этой проблеме, начнем с простого, почти наивного, но поучительного примера. Представим себе (что и делалось в эпоху, предшествующую появлению ОТО), что мы ищем уравнение для гравитационного поля, согласующееся со специальной теорией относительности. Простейшим вариантом представлялось бы постулировать в качестве такового скалярное уравнение Даламбера, т. е. уравнение вида

$$\eta^{\alpha\beta}\varphi_{,\,\alpha\beta} = -4\pi \sum_{A=1}^{N} \overset{A}{m}\overset{A}{\delta}. \tag{1.1}$$

Мы предполагаем здесь, что масса является функцией времени, причем

$$\overset{A}{m} = \underset{2}{\overset{A}{m}} + \underset{4}{\overset{A}{m}} + \ \ldots, \tag{1.2}$$

где $\underset{2}{\overset{A}{m}}$ — постоянная величина; скорость света на протяжении всей главы принимается равной единице. Чтобы определить излучение, посылаемое источниками поля, которые движутся произвольным образом, необходимо прежде всего найти запаздывающее решение. Известно, что такое решение имеет вид

$$\varphi_{\text{зап.}}(\mathbf{x},\ t) = -\sum_{A} \int d\mathbf{x}' \, \frac{\overset{A}{m}(t - R')\, \delta(\mathbf{x} - \overset{A}{\xi}(t - R'))}{R'}. \tag{1.3}$$

Решение для опережающего потенциала определяется формулой

$$\varphi_{\text{оп.}}(\mathbf{x},\ t) = -\sum_{A} \int d\mathbf{x}' \, \frac{\overset{A}{m}(t + R')\, \delta(\mathbf{x}' - \overset{A}{\xi}(t + R'))}{R'}. \tag{1.4}$$

обще говоря, ими не следовало бы пренебрегать. Вспомним, однако, положение дел. Мы имеем уравнения

$$\int \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta}\, d\mathbf{x} = 0, \tag{4.20}$$

которые при

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \sum_{A=1}^{N} (\overset{A}{t}{}^{\alpha\beta}\overset{A}{\delta} - \overset{A}{t}{}^{r\alpha\beta}\overset{A}{\delta}_{|r}) \tag{4.21}$$

определяют некоторым сложным образом величины $\underset{6}{q}{}^{0m}$ и $\underset{4}{t}{}^{r00}$. Однако движение пока еще произвольно и определяется нашим уравнением

$$\delta \int L\, dt = 0, \tag{4.22}$$

варьирование в котором следует производить по ξ^k. Но чтобы определить L, нужно знать q^{0m}, а это требует решения интегро-дифференциального уравнения. Тем не менее можно найти частное решение уравнений (4.20) и (4.22). Оно имеет вид

$$\overset{A}{t}{}^{r00} = \frac{1}{2}\overset{A}{S}{}^{rs}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{s},$$

$$\int_{t_0}^{t} \Big(\underset{5}{\overset{A}{t}}{}^{0r} - \underbrace{\overset{A}{t}{}^{00}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{r}{}_{|0}}_{5}\Big)\, dt = -\frac{1}{2}\overset{A}{S}{}^{rs}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{s}.$$

В этом частном случае изложенные выше рассуждения остаются почти неизмененными. Изменится только определение величины S^{rs} в последнем уравнении (4.2). Это значит, что в системе координат, в которой центр тяжести покоится, характер движения будет соответствовать анализу настоящего параграфа.

ГЛАВА VI

Движение и излучение

§ 1. Простой пример

В этой главе мы покажем тесную связь между уравнениями движения и гравитационным излучением. Приступая к этой проблеме, начнем с простого, почти наивного, но поучительного примера. Представим себе (что и делалось в эпоху, предшествующую появлению ОТО), что мы ищем уравнение для гравитационного поля, согласующееся со специальной теорией относительности. Простейшим вариантом представлялось бы постулировать в качестве такового скалярное уравнение Даламбера, т. е. уравнение вида

$$\eta^{\alpha\beta}\varphi_{,\,\alpha\beta} = -4\pi \sum_{A=1}^{N} \overset{A}{m}\overset{A}{\delta}. \tag{1.1}$$

Мы предполагаем здесь, что масса является функцией времени, причем

$$\overset{A}{m} = \underset{2}{\overset{A}{m}} + \underset{4}{\overset{A}{m}} + \ldots, \tag{1.2}$$

где $\underset{2}{\overset{A}{m}}$ — постоянная величина; скорость света на протяжении всей главы принимается равной единице. Чтобы определить излучение, посылаемое источниками поля, которые движутся произвольным образом, необходимо прежде всего найти запаздывающее решение. Известно, что такое решение имеет вид

$$\varphi_{\text{зап.}}(\mathbf{x},\ t) = -\sum_{A} \int d\mathbf{x}' \frac{\overset{A}{m}(t-R')\,\delta(\mathbf{x}-\overset{A}{\xi}(t-R'))}{R'}. \tag{1.3}$$

Решение для опережающего потенциала определяется формулой

$$\varphi_{\text{оп.}}(\mathbf{x},\ t) = -\sum_{A} \int d\mathbf{x}' \frac{\overset{A}{m}(t+R')\,\delta(\mathbf{x}'-\overset{A}{\xi}(t+R'))}{R'}. \tag{1.4}$$

В двух последних уравнениях принято обозначение

$$R'^2 = (x'^s - x^s)(x'^s - x^s).$$

Наконец, имеется решение в виде стоячей волны

$$\varphi_{\text{ст.}} = \frac{1}{2}(\varphi_{\text{зап.}} + \varphi_{\text{оп.}}). \tag{1.5}$$

Очевидно, что излучение связано с решением в виде запаздывающего потенциала, которому мы поэтому уделим особое внимание.

Разложим величины m и δ в степенные ряды:

$$m(t - R') = m(t) - \dot{m}(t) R' + \frac{1}{2}\ddot{m}(t) R'^2 + \ \ldots, \tag{1.6а}$$

$$\delta(\mathbf{x}' - \overset{A}{\boldsymbol{\xi}}(t - R')) = \delta(\mathbf{x}' - \overset{A}{\boldsymbol{\xi}}(t)) - \overset{A}{\delta}_{|0} R' + \\ + \frac{1}{2}\overset{A}{\delta}_{|00} R'^2 - \frac{1}{6}\overset{A}{\delta}_{|000} R'^3 + \ \ldots . \tag{1.6б}$$

С учетом членов пятого порядка это дает для $\varphi_{\text{зап.}}$ выражение

$$\varphi_{\text{зап.}} = -\sum_{A=1}^{N}\left[\underset{2}{\overset{A}{m}}\left(\overset{A}{R}{}^{-1} + \frac{1}{2}\overset{A}{R}_{|00} - \frac{1}{6}\overset{A}{R}{}^2{}_{|000}\right) - \underset{5}{\dot{m}}\right], \tag{1.7}$$

где

$$\overset{A}{R}{}^2 = (x^s - \overset{A}{\xi}{}^s)(x^s - \overset{A}{\xi}{}^s). \tag{1.8}$$

Это обычный подход к уравнениям поля (1.1) через запаздывающий потенциал (1.3). Однако представляется более поучительным подойти к проблеме с точки зрения нашего метода приближений.

Чтобы несколько упростить задачу, допустим на время, что $\underset{2}{m} = m(t)$. Иными словами, мы не будем разлагать m в степенной ряд. Тогда в соответствии с нашим методом приближений будем иметь

$$\underset{2}{\varphi}_{|ss} = 4\pi \sum_A \overset{A}{m}\overset{A}{\delta}. \tag{1.9}$$

Следовательно,

$$\underset{2}{\varphi} = -\sum_A \frac{\overset{A}{m}}{\overset{A}{R}}. \tag{1.10}$$

Отсюда находим

$$\underset{4}{\varphi}_{|ss} = -\sum_A (\overset{A}{m}\overset{A}{R}{}^{-1})_{|00} \tag{1.11а}$$

и

$$\underset{4}{\varphi} = -\frac{1}{2}\sum_A (\overset{A}{m}\overset{A}{R})_{|00}. \tag{1.11б}$$

Если и дальше порядок φ повышается скачками на две единицы, то получим

$$\varphi_{\text{ст.}} = -\sum_A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!}\frac{d^{2l}}{dt^{2l}}(\overset{A}{m}\overset{A}{R}{}^{2l-1}). \tag{1.12}$$

Мы видим, что это решение представляет собой стоячую волну, так как оно не чувствительно к преобразованию $t' = -t$. Итак, простейшее решение, даваемое нашим методом приближений, соответствует стоячей волне. Чтобы получить решение в виде запаздывающего потенциала, нужно начинать с $\underset{3}{\varphi}$ и затем опять повышать порядок скачками на две единицы. Начальная функция должна быть гармонической, причем уравнение (1.7) указывает нам, какова эта гармоническая функция. Мы должны положить

$$\underset{3}{\varphi} = \underset{3}{\dot{m}}. \tag{1.13}$$

Тогда, снова продвигаясь постепенно, найдем радиационную часть φ:

$$\varphi_{\text{рад.}} = \sum_A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!}\frac{d^{2l+1}}{dt^{2l+1}}(\overset{A}{m}\overset{A}{R}{}^{2l}). \tag{1.14}$$

Таким образом, метод приближений естественным образом подразделяет решение на решение в виде стоячей волны и решение, представляющее излучение. Отсюда имеем

$$\varphi_{\text{зап.}} = \varphi_{\text{ст.}} + \varphi_{\text{рад.}}, \tag{1.15}$$

$$\varphi_{\text{оп.}} = \varphi_{\text{ст.}} - \varphi_{\text{рад.}}. \tag{1.16}$$

Обратимся теперь к нашей задаче, т. е. найдем излучение с помощью запаздывающих потенциалов, которые определяются вплоть до членов пятого порядка выражением (1.7).

Тензор энергии-импульса для такого поля будет иметь вид

$$4\pi T_\alpha^\beta = \varphi_{|\alpha}\varphi^{|\beta} - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta \varphi_{|\rho}\varphi^{|\rho}. \tag{1.17}$$

В самом деле, мы имеем для такого тензора

$$4\pi T_{\alpha|\beta}^{\beta} = \varphi_{|\beta}{}^{\beta}\varphi_{|\alpha} + \varphi^{|\beta}\varphi_{|\alpha\beta} - \varphi^{|\rho}\varphi_{|\rho\alpha} = -4\pi\sum_A \overset{A}{m}\overset{A}{\delta}\,\varphi_{|\alpha} \tag{1.18}$$

и, следовательно, вне сингулярностей всегда выполняется соотношение

$$T_{\alpha|\beta}^{\beta} = 0. \tag{1.19}$$

Как обычно, определим поток излучения величиной

$$\int_{\Sigma} T^s_{\alpha} n_s \, dS = \dot P_{\alpha}, \tag{1.20}$$

где Σ — сфера очень большого радиуса, охватывающая все сингулярности. Найдем поток энергии-импульса в случае наших уравнений поля вплоть до членов восьмого порядка.

Обратимся к формуле (1.7). Нас интересует это выражение только при очень больших значениях R. Будем обозначать через r расстояние от некоторой неподвижной точки, которую мы выберем в качестве начала системы координат,

$$r^2 = x^s x^s. \tag{1.21}$$

Тогда

$$f(\overset{A}{R}) = f(r) - \frac{df}{dr} r_{|s}\overset{A}{\xi^s} + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dr^2} r_{|sp}\overset{A}{\xi^s}\overset{A}{\xi^p} - \\ - \frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dr^3} r_{|spq}\overset{A}{\xi^s}\overset{A}{\xi^p}\overset{A}{\xi^q} + \ldots . \tag{1.22}$$

Поскольку r не зависит от времени, то из (1.7) и (1.22) получим

$$\varphi = -\frac{M}{r} + MX^s\left(\frac{1}{r}\right)_{|s} - \frac{1}{2}D^{sp}\left(\frac{1}{r}\right)_{|sp} + \frac{1}{2} r_{|s} M\ddot X^s - \\ - \frac{1}{4}\ddot D^{sp} r_{|sp} - \frac{1}{3} M\dddot X^s x^s + \frac{1}{6}\dddot D^{ss} + \underset{5}{\dot M}, \tag{1.23}$$

где

$$M = \sum_A \overset{A}{m}, \quad MX^s = \sum_A \overset{A}{m}\overset{A}{\xi^s}, \quad D^{sp} = \sum_A \overset{A}{m}\overset{A}{\xi^s}\overset{A}{\xi^p}. \tag{1.24}$$

Для $\varphi_{|m}$, ограничиваясь порядком r^{-3}, находим

$$\varphi_{|m} = -M\left(\frac{1}{r}\right)_{|m} + MX^s\left(\frac{1}{r}\right)_{|sm} + \frac{1}{2} M\ddot X^s r_{|sm} - \\ - \frac{1}{4}\ddot D^{sp} r_{|spm} - \frac{1}{3} M\dddot X^m. \tag{1.25}$$

Вычислим теперь величину

$$4\pi T_0^m = \varphi_{|0}\varphi^{|m} = -\varphi_{|0}\varphi_{|m}. \tag{1.26}$$

При этом нас будут интересовать только те выражения, которые дают вклад в поверхностный интеграл, т. е. выражения, имеющие порядок $1/r^2$, и поверхностный интеграл от которых, взятый

по бесконечной сфере, отличен от нуля. В наинизшем нетривиальном приближении получим

$$\dot P_0 = \int_{\Sigma} T_0^m n_m \, dS = \\ = \frac{2}{9} M^2 X^s \frac{d^4 X^s}{dt^4} - \frac{1}{9} M^2 \dot X^s \dddot X^s - \frac{1}{6} M \frac{d^4 D^{ss}}{dt^4} - M\underset{6}{\ddot M}, \tag{1.27а}$$

$$\dot P_m = \int T^s_m n_s \, dS = \frac{1}{3} M^2 \dddot X^m, \qquad (M = \underset{2}{M}). \tag{1.27б}$$

Последние уравнения показывают, как тесно излучение связано с движением. Если бы мы имели дело с потенциалом стоячей волны, то излучение отсутствовало бы вовсе. Но даже в случае запаздывающего потенциала можно по нашему усмотрению устанавливать излучение, выбирая надлежащим образом движение центра тяжести и величину $\underset{4}{M}$. Положим, например,

$$\dddot X^m = 0. \tag{1.28}$$

Это условие даже менее жесткое, чем требование равномерного движения центра тяжести. В таком случае имеем

$$\dot P_0 = -\left(\underset{6}{\ddot M} + \frac{1}{6}\frac{d^4 D^{ss}}{dt^4}\right) M, \\ \dot P_k = 0. \tag{1.29}$$

Если

$$\underset{4}{M} = -\frac{1}{6}\dddot D^{ss} + \alpha t + \beta, \qquad (\alpha,\ \beta = \mathrm{const}), \tag{1.30}$$

то все компоненты вектора P_α будут равны нулю. Но

$$\ddot D^{ss} = \left(\sum_A \overset{A}{m}\overset{A}{\xi^s}\overset{A}{\xi^s}\right)_{|00} = 4T + 2\sum_A \overset{A}{m}\overset{A}{\xi^s}\overset{A}{\ddot\xi^s}, \tag{1.31}$$

где

$$T = \frac{1}{2}\sum_A \overset{A}{m}\overset{A}{\dot\xi^s}\overset{A}{\dot\xi^s}. \tag{1.32}$$

Что касается второго слагаемого в (1.31), то, например, в случае ньютоновской силы мы получим

$$\sum_A \overset{A}{m}\overset{A}{\xi^s}\overset{A}{\ddot\xi^s} = \sum_{A,B} \frac{\overset{A}{m}\overset{B}{m}\overset{A}{\xi^s}(\overset{B}{\xi^s} - \overset{A}{\xi^s})}{r^3_{AB}} = \frac{1}{2}\sum_{A,B}{}' \frac{\overset{A}{m}\overset{B}{m}\overset{A}{\xi^s}(\overset{B}{\xi^s} - \overset{A}{\xi^s})}{r^3_{AB}} - \\ - \frac{1}{2}\sum_{A,B}{}' \frac{\overset{A}{m}\overset{B}{m}\overset{B}{\xi^s}(\overset{B}{\xi^s} - \overset{A}{\xi^s})}{r^3_{AB}} = -\frac{1}{2}\sum_{A,B}{}' \frac{\overset{A}{m}\overset{B}{m}}{r_{AB}} = V = \text{Потенциальная энергия}. \tag{1.33}$$

Таким образом,

$$\ddot{D}^{ss} = 4T + 2V = 2T + 2E, \tag{1.34}$$

где E — энергия, которая является постоянной величиной.

Следовательно, в случае ньютоновской силы, $\dot{P}_0$ обращается в нуль, если

$$\underset{4}{M} = -\frac{1}{3}T. \tag{1.35}$$

Мы ограничивались в разложении величин T^n_m и $T_0^{\prime n}$ членами соответственно седьмого и восьмого порядка. Однако общая идея ясна: мы можем устранить излучение надлежащим выбором законов движения. В случае ОТО ситуация более сложная. Здесь уравнения движения определяются уравнениями поля. Тем не менее и тут основная цель нашего исследования остается той же самой — установить связь между уравнениями движения и уравнениями, определяющими излучение. Нет особого смысла рассматривать излучение без источников; движение же этих источников, а следовательно, и гравитационное излучение, определяются уравнениями поля. Они определяются также выбором системы координат, граничных условий и выбором решения. Мы покажем, что при определенных координатных и граничных условиях, которые представляются нам достаточно простыми, излучение отсутствует.

§ 2. Уравнения движения в форме поверхностного интеграла

В этом параграфе мы напомним, как уравнения движения в ОТО были первоначально сформулированы в 1938 г., или, точнее, одиннадцать лет спустя, в 1949 г. Хотя в последней работе формализм значительно упрощен и мы интересуемся лишь общей формой этих уравнений, однако идея остается той же — выразить уравнения движения при помощи интегралов по поверхностям, охватывающим источники.

Запишем уравнения поля Эйнштейна в форме, которая им придана в (5.12) гл. II,

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} + 8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu} = K^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{|\alpha\beta} + N(\mathfrak{G}^{\mu\nu}) + 8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.1}$$

В этой формуле

$$K^{\mu\alpha\nu\beta} = K^{\mu\alpha,\,\nu\beta} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\nu}\gamma^{\mu\beta} + \eta^{\mu\beta}\gamma^{\alpha\nu} - \eta^{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta}\gamma^{\mu\nu}) \tag{2.2}$$

представляет собой линейную часть $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$; она антисимметрична по индексам μ, α и ν, β и симметрична по отношению к взаимной перестановке $\mu\alpha$ и $\nu\beta$. Выражение $N(\mathfrak{G}^{\mu\nu})$, которое мы будем

обозначать через $\Lambda^{\mu\nu}$, является нелинейной частью $\mathfrak{G}^{\mu\nu}$, и, наконец, $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ представляет собой плотность тензора энергии-импульса. Связь между γ и g исчерпывающе представлена в гл. II. Перепишем (2.1) в виде

$$K^{\mu\alpha,\,\nu\beta}{}_{|\alpha\beta} + \Lambda^{\mu\nu} + 8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.3}$$

Докажем теперь лемму, которую неоднократно будем применять в дальнейшем.

ЛЕММА. Пусть имеется некоторая функция $\mathcal{F}^{(\dots)ks}$, антисимметричная по индексам k, s и обладающая, кроме них, другими произвольными греческими или латинскими индексами, которые мы условно обозначили точками в скобках. Тогда

$$\int\limits_{\Sigma} \mathcal{F}^{(\dots)ks}{}_{|s} n_k\, dS = 0, \tag{2.4}$$

если Σ — произвольная замкнутая двумерная поверхность, не проходящая через сингулярности поля. Под величиной n_k мы понимаем

$$n_k = \cos(x^k, \mathbf{n}), \tag{2.5}$$

т. е. компоненты „единичного нормального“ вектора к поверхности Σ. Слова „нормальный“ и „единичный“ употреблены здесь в условном смысле, указывая на соответствующие функции координат, которые подразумеваются под этими терминами в евклидовой геометрии.

Доказательство этой леммы довольно простое. Прежде всего мы видим, что интеграл (2.4) наверняка не зависит от формы поверхности, поскольку не изменяется число сингулярностей, заключенных внутри такой поверхности. Это следует из того, что

$$\mathcal{F}^{(\dots)ks}{}_{|ks} = 0, \tag{2.6}$$

и из теоремы Грина. Представим теперь $\mathcal{F}^{(\dots)ks}$ в виде

$$\mathcal{F}^{(\dots)ks} = \varepsilon^{ksr}\mathcal{A}_r^{(\dots)}, \tag{2.7}$$

или в явной форме

$$\mathcal{F}^{(\dots)23} = \mathcal{A}_1^{(\dots)}, \quad \mathcal{F}^{(\dots)31} = \mathcal{A}_2^{(\dots)}, \quad \mathcal{F}^{(\dots)12} = \mathcal{A}_3^{(\dots)}. \tag{2.8}$$

Тогда интеграл (2.4) можно записать в форме

$$\int\limits_{\Sigma} \mathcal{F}^{(\dots)ks}{}_{|s} n_k\, dS = \int\limits_{\Sigma} \varepsilon^{ksr}\mathcal{A}_{r|s} n_k\, dS = \int\limits_{\Sigma} \mathrm{rot}_n \vec{\mathcal{A}}\, dS. \tag{2.9}$$

Этот интеграл может быть преобразован по теореме Стокса в линейный интеграл по контуру, ограничивающему поверхность. Но мы условились, что поверхность замкнутая и, следовательно, длина ограничивающего ее контура равна нулю. Таким образом, лемма доказана.

Вернемся к уравнениям поля. Перепишем (2.1), полагая $\mu = m$,

$$\mathfrak{G}^{m\nu} = K^{mn,\nu\beta}{}_{|n\beta} + \dot{K}^{m0,\nu\beta}{}_{|\beta} + \Lambda^{m\nu}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим произвольную замкнутую двумерную поверхность, окружающую A-ю сингулярность. Мы будем обозначать такую поверхность через $\overset{A}{\Sigma}$. Так как тензор Эйнштейна вне сингулярности равен нулю, то в силу нашей леммы мы будем иметь

$$\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}} \dot{K}^{m0,\nu\beta}{}_{|\beta} n_m \, dS + \int\limits_{\overset{A}{\Sigma}} \Lambda^{m\nu} n_m \, dS = 0, \qquad A = 1, \ldots, N. \tag{2.11}$$

Эти $4N$ уравнений справедливы (опять-таки вследствие нашей леммы) для произвольных поверхностей, каждая из которых охватывает только одну сингулярность. Из-за произвольности формы поверхности эти уравнения не могут дать никаких соотношений между пространственными координатами поля. Они могут дать только соотношения между координатами сингулярностей и их производными по времени. Поэтому мы, по определению, считаем эти уравнения уравнениями движения N частиц. Из них могут быть получены ньютоновские и пост-ньютоновские уравнения движения. Это можно сделать с помощью „нового“ метода приближений, однако применять этот метод гораздо сложнее, чем тот, которым мы пользуемся в настоящей книге.

В самом деле, чтобы рассчитать при помощи этого метода пост-ньютоновские уравнения движения, нужно было бы вычислить $\underset{2}{\gamma}^{00}$, $\underset{3}{\gamma}^{0m}$, $\underset{4}{\gamma}^{mn}$ и $\underset{5}{\gamma}^{0m}$, а затем еще ряд поверхностных интегралов!

Во всяком случае, как уже было сказано, мы будем, по определению, рассматривать (2.11) как точные уравнения движения для N частиц.

§ 3. Уравнения движения в форме объемного интеграла

Напомним теперь $4N$ уравнений движения для N сингулярностей, уже известные нам из гл. I,

$$\int\limits_{\overset{A}{\Omega}} \mathfrak{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} \, dx = 0, \qquad A = 1, \ldots, N. \tag{3.1}$$

Мы помним, что они приводят к уравнениям

$$\frac{d}{dt}(\overset{A}{\mu}\overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\mu}) + \overset{A}{\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\}} \overset{A}{\mu}\overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\alpha}\overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\beta} = 0, \qquad A = 1, \ldots, N. \tag{3.2}$$

Переход от уравнения (3.1) к уравнению (3.2) тесно связан с выражением $\mathfrak{T}^{\alpha\beta}$, которое берем в виде

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sum_{A=1}^{N} \overset{A}{t}{}^{\mu\nu}\overset{A}{\delta}, \tag{3.3}$$

причем

$$\overset{A}{t}{}^{\mu\nu} = \overset{A}{\mu}\overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\mu}\overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\nu}. \tag{3.4}$$

Можно показать, что достаточно предположить (3.3), ибо тогда конкретный вид $\overset{A}{t}{}^{\mu\nu}$, определяемый формулой (3.4), вытекает как следствие из уравнений поля. Иными словами, для полной конкретизации вида тензора энергии-импульса оказывается достаточным предположить, что он линейно зависит от δ-функций.

Для доказательства будем исходить из соотношения

$$\int\limits_{\overset{A}{\Omega}} \Theta \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} \, d\mathbf{x} = 0, \tag{3.5}$$

которое следует из тождеств Бианки. В этой формуле Θ — произвольная функция, непрерывная на мировой линии $\overset{A}{\xi}$. В силу (3.3) соотношение (3.5) можно записать в виде

$$\int\limits_{\overset{A}{\Omega}} \Theta \left(t^{\alpha\beta}\overset{A}{\delta}\right)_{;\beta} d\mathbf{x} = 0. \tag{3.6}$$

Отсюда вытекает равенство

$$\widetilde{A^{\alpha}}\widetilde{\Theta} + \widetilde{A^{\alpha\beta}}\,\widetilde{\Theta_{|\beta}} = 0. \tag{3.7}$$

Рассчитаем величину $\widetilde{A^{\alpha\beta}}$. Так как

$$\overset{A}{\delta}_{|0} = -\overset{A}{\delta}_{|s}\overset{A}{\dot{\xi}}{}^{s}, \tag{3.8}$$

то мы получим

$$\widetilde{A^{\alpha\beta}}\,\widetilde{\Theta_{|\beta}} = \left(-t^{\alpha s} + t^{\alpha 0}\dot{\xi}^{s}\right)\widetilde{\Theta}_{|s} = 0; \tag{3.9}$$

поскольку $\dot{\xi}^{0} = 1$, последнее уравнение можно записать в виде

$$\widetilde{A^{\alpha\beta}}\,\widetilde{\Theta_{|\beta}} = \left(-t^{\alpha\beta} + t^{\alpha 0}\dot{\xi}^{\beta}\right)\widetilde{\Theta}_{|\beta} = 0. \tag{3.10}$$

Вследствие произвольности $\widetilde{\Theta_{|\beta}}$ отсюда следует

$$\widetilde{A^{\alpha\beta}} = \left(-t^{\alpha\beta} + t^{\alpha 0}\dot{\xi}^{\beta}\right) = 0. \tag{3.11}$$

Полагая $\alpha=0$, имеем

$$t^{0\beta}=t^{00}\xi^{\beta}. \tag{3.12}$$

Из последних двух уравнений находим

$$t^{\alpha\beta}=t^{00}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}=\mu\dot{\xi}^{\alpha}\dot{\xi}^{\beta}, \tag{3.13}$$

что и требовалось доказать. Очевидно, $\widetilde{A^{\alpha}}=0$ дает уравнения движения, а именно уравнения (3.2).

§ 4. Уравнения движения в форме объемного и поверхностного интегралов

В этом параграфе будет дано третье и последнее определение уравнений движения.

Напомним, что первое определение основывалось на интегралах, взятых по двумерным поверхностям, окружающим одну сингулярность. В основе второго определения лежали объемные интегралы, взятые по окрестности одной из сингулярностей. В формулировке, которую мы дадим сейчас, будут фигурировать как поверхностный, так и объемный интегралы.

Снова будем исходить из уравнения

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu}+8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu}=0, \tag{4.1}$$

где

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu}=K^{\mu\alpha,\nu\beta}{}_{|\alpha\beta}+\Lambda^{\mu\nu}. \tag{4.2}$$

Вследствие антисимметрии величины $K^{\mu\alpha,\nu\beta}$ по индексам ν, β имеем

$$(\mathfrak{G}^{\mu\nu}+8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu})_{|\nu}=(\Lambda^{\mu\nu}+8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu})_{|\nu}=0. \tag{4.3}$$

В этой формуле величина $\Lambda^{\mu\nu}$, которая содержит только нелинейные по γ выражения, очевидно, не является тензором. Обычно такое уравнение рассматривают как выражение закона сохранения, включая плотность $\Lambda^{\mu\nu}$ псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. Однако в настоящий момент мы пренебрежем возможностью такой интерпретации и используем последнее уравнение, чтобы с его помощью сформулировать уравнения движения.

Для этой цели мы проинтегрируем его по $\overset{A}{\Omega}$. Преобразуя интеграл от пространственной дивергенции в поверхностный интеграл по $\overset{A}{\Sigma}$, получаем

$$\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}\Lambda^{\alpha m}n_m\,dS=-\frac{d}{dt}\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}(\Lambda^{0\alpha}+8\pi\mathcal{T}^{0\alpha})\,d\mathbf{x}. \tag{4.4}$$

Мы снова имеем $4N$ дифференциальных уравнения, которые определим как уравнения движения N частиц. Отсутствие в левой части этих уравнений тензора энергии-импульса объясняется тем, что он обращается в нуль на поверхности $\overset{A}{\Sigma}$.

§ 5. Следствия из различных форм уравнений движения

Мы представили уравнения движения в трех различных формах.

1) в (Σ)-форме, согласно (2.11),

$$-\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}\dot{K}^{m0,\nu\beta}{}_{|\beta}n_m\,dS=\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}\Lambda^{m\nu}n_m\,dS; \tag{5.1}$$

2) в (Ω)-форме, согласно (3.1) и (3.2),

$$\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\,d\mathbf{x}=0, \tag{5.2а}$$

$$\frac{d}{dt}(\overset{A}{\mu}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\alpha})+\overset{A}{\mu}\overset{A}{\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\mu}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\nu}=0; \tag{5.2б}$$

3) в ($\Sigma\Omega$)-форме, согласно (4.4),

$$\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}\Lambda^{\alpha m}n_m\,dS=-\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}(\dot{\Lambda}^{0\alpha}+8\pi\dot{\mathcal{T}}^{0\alpha})\,d\mathbf{x}. \tag{5.3}$$

Можно легко показать, что эти три формы эквивалентны при условии, что выполняются уравнения поля

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu}+8\pi\mathcal{T}^{\mu\nu}=0 \tag{5.4}$$

и $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ имеет вид

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}=\mathfrak{T}^{\mu\nu}=\sum_A\overset{A}{\mu}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\mu}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\nu}\overset{A}{\delta}. \tag{5.5}$$

Сначала исследуем связь между (Ω)- и ($\Sigma\Omega$)-формами. Уравнения движения в Ω-форме были получены из символического уравнения

$$\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=\mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}+\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}\mathfrak{T}^{\mu\nu}=0, \tag{5.6}$$

а уравнения движения в ($\Sigma\Omega$)-форме — из символического уравнения

$$8\pi\mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}+\Lambda^{\alpha\beta}{}_{|\beta}=0. \tag{5.7}$$

Из двух последних уравнений вытекает соотношение

$$\frac{1}{8\pi}\Lambda^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = \mathcal{T}^{\mu\nu}\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}, \tag{5.8}$$

являясь тем самым следствием уравнений поля и тождеств Бианки.

Подставим теперь в уравнения движения в ($\Sigma\Omega$)-форме вместо компонент $\mathcal{T}^{0\alpha}$ их явные выражения. Тогда будем иметь

$$\frac{d}{dt}(\overset{A}{\mu}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\alpha}) = -\frac{1}{8\pi}\left[\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}\Lambda^{\alpha m}n_m\,dS + \int\limits_{\overset{A}{\Omega}}\dot{\Lambda}^{0\alpha}d\mathbf{x}\right], \tag{5.9}$$

или, принимая во внимание уравнения в (Ω)-форме,

$$\overset{A}{\mu}\overset{A}{\overbrace{\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}}}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\mu}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\nu} = +\frac{1}{8\pi}\left[\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}\Lambda^{\alpha m}n_m\,dS + \int\limits_{\overset{A}{\Omega}}\dot{\Lambda}^{0\alpha}d\mathbf{x}\right]. \tag{5.10}$$

В этих уравнениях мы видим связь между величинами, характеризующими „материю" (в левой части), и величинами, характеризующими „поле" (в правой части); обе эти категории и их взаимоотношение хорошо известны со времени формулировки классической электродинамики.

Перейдем к более важной проблеме — выясним ряд следствий, вытекающих из эквивалентности (Σ)- и ($\Sigma\Omega$)-форм уравнений движения. Запишем обе эти формы в виде одного уравнения

$$\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}\Lambda^{\alpha m}n_m\,dS = -\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}(\dot{\Lambda}^{0\alpha}+8\pi\dot{\mathcal{T}}^{0\alpha})\,d\mathbf{x} = -\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}\dot{K}^{m0,\,\alpha\beta}{}_{|\beta}n_m\,dS, \tag{5.11}$$

которое будет играть важную роль для дальнейшего рассмотрения.

Из последнего уравнения следует

$$\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}(\Lambda^{0\alpha}+8\pi\mathcal{T}^{0\alpha})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}K^{m0,\,\alpha\beta}{}_{|\beta}n_m\,dS + C^{\alpha}, \tag{5.12}$$

где C^{α} — постоянные интегрирования. Можно, однако, показать, что вследствие уравнений поля эти постоянные должны обращаться в нуль. Действительно, уравнения поля (2.1) и (2.3) с $\mu = 0$ дают

$$\Lambda^{0\nu} + 8\pi\mathcal{T}^{0\nu} = -K^{0\alpha,\,\nu\beta}{}_{|\alpha\beta} = -K^{0m,\,\nu\beta}{}_{|\beta m} = K^{m0,\,\nu\beta}{}_{|\beta m}. \tag{5.13}$$

Интегрируя последнее уравнение по $\overset{A}{\Omega}$, получаем

$$\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}(\Lambda^{0\nu}+8\pi\mathcal{T}^{0\nu})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}K^{m0,\,\nu\beta}{}_{|\beta}n_m\,dS. \tag{5.14}$$

Напомним, что величины $K^{m0,\,\nu\beta}$ содержат только линейные по γ выражения и определяются в явном виде формулой (2.2), так что мы имеем

$$K^{m0,\,0\beta}{}_{|\beta} = \frac{1}{2}(-\gamma^{00}{}_{|m} + \gamma^{ms}{}_{|s}), \tag{5.15}$$

$$K^{m0,\,k\beta}{}_{|\beta} = \frac{1}{2}\left[\delta^{mk}(\gamma^{00}{}_{|0} + \gamma^{0s}{}_{|s}) - \gamma^{0k}{}_{|m} - \gamma^{mk}{}_{|0}\right]. \tag{5.16}$$

§ 6. Три типа импульсов

Учитывая явный вид $\mathcal{T}^{0\alpha}$, уравнение (5.14) можно записать в форме

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}\Lambda^{0\alpha}d\mathbf{x} + \overset{A}{\mu}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\alpha} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}K^{m0,\,\alpha\beta}{}_{|\beta}n_m\,dS. \tag{6.1}$$

Назовем „вектор"

$$\overset{A}{\mu}\dot{\overset{A}{\xi}}{}^{\alpha} = \overset{A}{P}{}^{\alpha}_{\text{ин.}} \tag{6.2}$$

инерциальным импульсом A-й частицы. Этот импульс зависит от самой частицы, ее скорости и от поля в точке, которую проходит частица в данный момент. Последнее обстоятельство объясняется тем, что μ зависит от „препарированного" поля.

Назовем „вектор"

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\overset{A}{\Omega}}\Lambda^{0\alpha}d\mathbf{x} = \overset{A}{P}{}^{\alpha}_{\text{пол.}} \tag{6.3}$$

импульсом *поля* в окрестности A-й частицы. Он зависит от области интегрирования.

Назовем „вектор"

$$\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\overset{A}{\Sigma}}K^{m0,\,\alpha\beta}{}_{|\beta}n_m\,dS = \overset{A}{P}{}^{\alpha}_{\text{гр.}} \tag{6.4}$$

гравитационным импульсом A-й частицы и ее окрестности. Теперь уравнение (6.1) можно записать в простой форме

$$\overset{A}{P}{}^{\alpha}_{\text{гр.}} = \overset{A}{P}{}^{\alpha}_{\text{ин.}} + \overset{A}{P}{}^{\alpha}_{\text{пол.}}. \tag{6.5}$$

Однако следует помнить, что $\overset{A}{P}{}^{\alpha}_{\text{гр.}}$ определяется только поверхностными интегралами от выражений, которые линейны относительно первых производных величин γ, тогда как $\overset{A}{P}{}^{\alpha}_{\text{пол.}}$ определяется объемным интегралом от нелинейной по γ функции.

Желательно выяснить физический смысл этих трех импульсов хотя бы в некоторых частных случаях. Для этого нам придется сослаться на некоторые результаты, полученные ранее с помощью метода приближений.

Ограничимся случаем задачи двух тел, причем будем интересоваться лишь нулевой компонентой последнего уравнения. Обозначим через $\overset{1}{\mu}_{\text{ин.}}$, $\overset{1}{\mu}_{\text{пол.}}$, $\overset{1}{\mu}_{\text{гр.}}$ инертную, полевую и гравитационную массы первой частицы, которые, очевидно, соответствуют $P^0_{\text{ин.}}$, $P^0_{\text{пол.}}$ и $P^0_{\text{гр.}}$, так как $\xi^0 = 1$. Аналогичным образом введем соответствующие массы для второй частицы, над которыми будем писать индекс 2. Теперь для каждой из этих масс запишем

$$\mu = \underset{2}{\mu} + \underset{4}{\mu}, \tag{6.6}$$

где $\underset{2}{\mu}$ и $\underset{4}{\mu}$ — массы соответственно в ньютоновском и пост-ньютоновском приближениях. Что касается $\underset{2}{\mu}$, то в этом приближении дело обстоит просто: инертная и гравитационная массы постоянны и равны между собой, в то время как полевая масса равна нулю. Перейдем теперь к расчету $\underset{4}{\mu}$. Согласно формуле (3.29) гл. III, имеем

$$\underset{4}{\overset{1}{\mu}}_{\text{ин.}} = \frac{1}{2}\,\underset{2}{\overset{1}{\mu}}\,\dot{\overset{1}{\xi}}{}^s\dot{\overset{1}{\xi}}{}^s + \underset{2}{\overset{1}{\mu}}\,\underset{2}{\overset{2}{\mu}}\,r_{12}^{-1}. \tag{6.7}$$

Здесь через r_{12} обозначено расстояние между двумя телами. Что касается $\underset{4}{\overset{1}{\mu}}_{\text{пол.}}$, то непосредственный расчет, который мы здесь опускаем, приводит к следующему результату:

$$\underset{4}{\Lambda}{}^{00} = -\frac{3}{4}\,\varphi_{|s}\varphi_{|s}, \qquad \varphi = -\sum_{A=1}^{N}\frac{2\overset{A}{\mu}}{\overset{A}{r}}. \tag{6.8}$$

Таким образом, в случае двух частиц имеем

$$8\pi\underset{4}{\overset{1}{\mu}}_{\text{пол.}} = \frac{3}{4}\int_{\overset{1}{\Omega}}\varphi_{|ss}\varphi\,d\mathbf{x} - \frac{3}{4}\int_{\overset{1}{\Sigma}}\varphi_{|s}\varphi n_s\,dS = -12\pi\,\frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}}{r_{12}} - \frac{3}{4}\int_{\overset{1}{\Sigma}}\varphi_{|s}\varphi n_s\,dS. \tag{6.9}$$

Отсюда и из (6.5) находим величину $\mu_{\text{гр.}}$

$$\overset{1}{\mu}_{\text{гр.}} = \underset{2}{\overset{1}{\mu}} + \frac{1}{2}\,\underset{2}{\overset{1}{\mu}}\,\dot{\overset{1}{\xi}}{}^s\dot{\overset{1}{\xi}}{}^s - \frac{1}{2}\,\frac{\overset{1}{\mu}\overset{2}{\mu}}{r_{12}} - \frac{3}{32\pi}\int_{\overset{1}{\Sigma}}\varphi_{|s}\varphi n_s\,dS. \tag{6.10}$$

Мы видим, что и гравитационная, и полевая массы зависят от той конечной области, по которой проводится интегрирование. Равенство инертной и гравитационной масс имеет место только в ньютоновском приближении.

§ 7. Уравнение для гравитационного излучения

В § 4 были получены уравнения движения, исходя из закона сохранения в дифференциальной форме

$$\left(\mathcal{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\Lambda^{\mu\nu}\right)_{|\nu} = 0. \tag{7.1}$$

Используем теперь это же уравнение, из которого были получены уравнения движения в $(\Sigma\Omega)$-форме, для определения гравитационного излучения. Единственное отличие от постановки проблемы в § 4 состоит здесь в том, что теперь мы должны интегрировать не по окрестности A-й сингулярности, а по всему пространству, которое мы обозначим через Ω. Бесконечную сферическую поверхность, окружающую пространство Ω, будем обозначать через Σ. Внутри этой поверхности находятся частицы, движущиеся согласно законам движения, которые выводятся из уравнений поля и сформулированы нами в трех последних параграфах. Мы предполагаем, что частицы никогда не достигают поверхности Σ. Итак, интегрируя (7.1) по всему пространству, получаем

$$\int_{\Sigma}\Lambda^{\mu m}n_m\,dS = -\int_{\Omega}\left(\dot{\Lambda}^{\mu 0} + 8\pi\dot{\mathcal{T}}^{\mu 0}\right)d\mathbf{x}. \tag{7.2}$$

Левую часть этого уравнения

$$\int_{\Sigma}\Lambda^{\mu m}n_m\,dS \tag{7.3}$$

будем рассматривать, по определению, как поток гравитационного излучения. Таким образом, уравнение (7.2), при помощи которого мы определили гравитационное излучение, тесно связано с уравнениями движения. Единственное различие между (7.2) и уравнениями движения состоит в области интегрирования: Σ и Ω вместо $\overset{A}{\Sigma}$ и $\overset{A}{\Omega}$. Уравнение (7.2) является $(\Sigma\Omega)$-формой закона сохранения соответственно тому, как ранее (5.3) было $(\Sigma\Omega)$-формой уравнений движения.

Подобно тому, как это делалось ранее для уравнений движения, можно записать законы сохранения в (Σ)-форме

$$\int_{\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m \, dS = -\int_{\Sigma} \dot{K}^{m0,\,\mu\beta}{}_{|\beta} n_m \, dS. \tag{7.4}$$

Объединяя (7.2) и (7.4), имеем

$$\int_{\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m \, dS = -\int_{\Omega} (\dot{\Lambda}^{0\mu} + 8\pi \dot{\mathcal{T}}^{0\mu}) \, d\mathbf{x} = -\int_{\Sigma} \dot{K}^{m0,\,\mu\beta}{}_{|\beta} n_m \, dS, \tag{7.5}$$

откуда, как и в гл. VI, § 5, следует

$$\int_{\Omega} (\Lambda^{0\mu} + 8\pi \mathcal{T}^{0\mu}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} K^{m0,\,\mu\beta}{}_{|\beta} n_m \, dS. \tag{7.6}$$

Наконец, закон сохранения можно также записать в (Ω)-форме

$$\int_{\Omega} \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta} \, d\mathbf{x} = \sum_{A=1}^{N} \int_{\overset{A}{\Omega}} \mathfrak{T}^{\alpha\beta}{}_{;\,\beta} \, d\mathbf{x} = \sum_{A=1}^{N} \left[\frac{d}{dt} (\overset{A}{\mu} \overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\alpha}) + \overset{A}{\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}} \overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\mu} \overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\nu} \overset{A}{\mu} \right] = 0. \tag{7.7}$$

Все эти уравнения являются следствием уравнений движения, которые в свою очередь вытекают из уравнений поля.

Мы знаем, что законы сохранения в (Σ)-форме (7.4) не зависят от формы поверхности, если эта поверхность не проходит через сингулярности. Поэтому можно построить такую двумерную поверхность Σ, которая заключает в себе все сингулярности, причем каждую сингулярность окружает малая сфера, а эти сферы соединены друг с другом очень тонкими трубками. Так как поток через тонкие трубки равен нулю, то (7.4) запишется в виде

$$\int_{\Sigma} (\Lambda^{\mu m} + \dot{K}^{m0,\,\mu\beta}{}_{|\beta}) \, n_m \, dS = \sum_{A=1}^{N} \int_{\overset{A}{\Sigma}} (\Lambda^{\mu m} + \dot{K}^{m0,\,\mu\beta}{}_{|\beta}) \, n_m \, dS = 0. \tag{7.8}$$

Аналогично, используя $(\Sigma\Omega)$-форму, можно написать

$$\sum_{A=1}^{N} \int_{\overset{A}{\Sigma}} \Lambda^{\mu m} n_m \, dS = -\sum_{A=1}^{N} \int_{\overset{A}{\Omega}} (\dot{\Lambda}^{\mu 0} + 8\pi \dot{\mathcal{T}}^{\mu 0}) \, d\mathbf{x}. \tag{7.9}$$

Однако, вообще говоря,

$$\sum_{A=1}^{N} \int_{\overset{A}{\Sigma}} \Lambda^{\mu m} n_m \, dS \neq \int_{\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m \, dS. \tag{7.10}$$

В качестве определения гравитационного излучения мы рассматриваем именно правую, а не левую часть этого неравенства. Это определение не совпадает в точности с обычным, так как $\Lambda^{\mu m}$ содержит также производные второго порядка. Однако нам представляется более последовательным использовать именно такое определение гравитационного излучения, тесно связанное с уравнениями движения.

Как и прежде, определим:

полный инерциальный импульс

$$P^{\alpha}_{\text{ин.}} = \int_{\Omega} \mathfrak{T}^{0\alpha} \, d\mathbf{x} = \sum_{A=1}^{N} \overset{A}{\mu} \overset{A}{\dot{\xi}}{}^{\alpha}, \tag{7.11}$$

полный импульс поля

$$P^{\alpha}_{\text{пол.}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \Lambda^{0\alpha} \, d\mathbf{x} \tag{7.12}$$

и полный гравитационный импульс

$$P^{\alpha}_{\text{гр.}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} K^{m0,\,\alpha\beta}{}_{|\beta} n_m \, dS. \tag{7.13}$$

Как и прежде, соотношение (7.6) можно записать в виде

$$P^{\alpha}_{\text{гр.}} = P^{\alpha}_{\text{ин.}} + P^{\alpha}_{\text{пол.}}. \tag{7.14}$$

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, с которой постоянно приходится иметь дело в электродинамике. Величины, относящиеся к мировой линии, как в случае $P^{\alpha}_{\text{ин.}}$, оказываются связанными с величинами, характеризующими поле, которыми являются $P^{\alpha}_{\text{пол.}}$ и $P^{\alpha}_{\text{гр.}}$.

Полезно сопоставить представленную здесь ситуацию для гравитационного поля с аналогичной ситуацией для электромагнитного поля в специальной теории относительности, где мы имеем дело с тензором энергии-импульса электромагнитного поля $E^{\alpha\beta}$, удовлетворяющим закону сохранения $E^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0$. Интегрируя это уравнение по всему пространству, получаем

$$\int_{\Sigma} E^{\alpha m} n_m \, dS = -\int_{\Omega} \dot{E}^{\alpha 0} \, d\mathbf{x}. \tag{7.15}$$

Правую часть этого равенства обычно рассматривают как (взятую со знаком минус) производную по времени полного импульса поля. В случае электромагнитного поля—это единственный импульс, который фигурирует в законе сохранения. Если левая часть, которая представляет поток электромагнитного излучения, равна нулю, то мы заключаем, что импульс поля является постоянным вектором.

В случае гравитационного поля дело обстоит иначе. Поток гравитационного излучения равен производной по времени (взятой со знаком минус) от суммы двух импульсов: импульса гравитационного поля и импульса инертной материи. В том случае, когда поток гравитационного излучения равен нулю, остается постоянной именно сумма этих двух импульсов. Эту сумму мы называем гравитационным импульсом; она равна поверхностному интегралу от выражения, представляющего собой линейную комбинацию производных величин γ.

Чтобы проиллюстрировать различие между этими полными импульсами трех типов, снова обратимся к примеру, приведенному в конце предыдущего параграфа, а именно к задаче о двух частицах и их полных массах, вычисленных в ньютоновском и пост-ньютоновском приближениях. Как и прежде, в ньютоновском приближении будем иметь

$$\underset{2}{P}^0_{\text{ин.}} = \underset{2}{P}^0_{\text{гр.}} = \text{const}, \qquad \underset{2}{P}^0_{\text{пол.}} = 0. \tag{7.16}$$

Затем в пост-ньютоновском приближении в силу обращения в нуль интеграла (6.10) по бесконечно большой поверхности получим

$\underset{4}{P}^0_{\text{ин.}}$ = Полная кинетическая энергия — 2 (потенциальная энергия);

$\underset{4}{P}^0_{\text{гр.}}$ = Полная кинетическая энергия + Потенциальная энергия = const;

$\underset{4}{P}^0_{\text{пол.}}$ = 3 (Потенциальная энергия).

Из выражения для $\underset{4}{P}^0_{\text{гр.}}$ мы видим, что в этом приближении поверхностный интеграл от „нормальной компоненты вектора Пойнтинга“ для гравитационного излучения в рассматриваемом случае равен нулю. Действительно, это так, поскольку

$$\underset{2}{\dot P}^0_{\text{гр.}} + \underset{4}{\dot P}^0_{\text{гр.}} = -\frac{1}{8\pi}\int \Lambda^{0m} n_m\, dS = 0; \tag{7.17}$$

это значит, что вследствие ньютоновских уравнений движения сумма кинетической и потенциальной энергий является постоянной величиной.

Несколько длинное, но простое вычисление даст нам для $\underset{6}{P}^0$ в точности выражение (4.3) гл. III, а для $\underset{5}{P}^m$ — выражение (4.4) гл. III.

§ 8. О свойствах инвариантности величины $P^{\alpha}_{\text{гр.}}$

Выясним вопрос о трансформационных свойствах $P^{\alpha}_{\text{гр.}}$ при малых преобразованиях вида

$$x^{*\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}(x). \tag{8.1}$$

Мы будем всюду пренебрегать как произведениями величин a друг на друга, так и произведениями γ на a. Напомним, что, согласно (7.13), (5.15) и (5.16),

$$P^0_{\text{гр.}} = \frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma} K^{m0,0\beta}{}_{|\beta} n_m\, dS = \frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma}\left(-\gamma^{00}{}_{|m} + \gamma^{ms}{}_{|s}\right) n_m\, dS, \tag{8.2а}$$

$$P^k_{\text{гр.}} = \frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma} K^{m0,k\beta}{}_{|\beta} n_m\, dS = \frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma}\left(\delta^{mk}\gamma^{0\alpha}{}_{|\alpha} - \gamma^{k0}{}_{|m} - \gamma^{mk}{}_{|0}\right) n_m\, dS. \tag{8.2б}$$

Сначала исследуем, какие изменения вызывает преобразование (8.1) в компоненте $P^0_{\text{гр.}}$. Для этого необходимо использовать формулу

$$\mathfrak{g}^{*\mu\nu} = \mathfrak{g}^{\alpha\beta} x^{*\mu}{}_{|\alpha} x^{*\nu}{}_{|\beta} \det\frac{\partial x}{\partial x^*}, \tag{8.3}$$

в которую нужно подставить

$$x^{*\mu}{}_{|\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha} + a^{\mu}{}_{|\alpha}, \tag{8.4а}$$

$$\det\frac{\partial x}{\partial x^*} = 1 - a^{\alpha}{}_{|\alpha}. \tag{8.4б}$$

Из трех последних уравнений находим (так как $\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}$)

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00} + a^0{}_{|0} - a^s{}_{|s}, \tag{8.5а}$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m} - a^0{}_{|m} + a^m{}_{|0}, \tag{8.5б}$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} - a^m{}_{|n} - a^n{}_{|m} + \delta^{mn} a^s{}_{|s} + \delta^{mn} a^0{}_{|0}. \tag{8.5в}$$

Подставляя эти выражения в (5.15) и (5.16), получаем

$$K^{*m0,0\beta}{}_{|\beta} = K^{m0,0\beta}{}_{|\beta} + \left(a^s{}_{|m} - a^m{}_{|s}\right)_{|s}, \tag{8.6а}$$

$$K^{*m0,k\beta}{}_{|\beta} = K^{m0,k\beta}{}_{|\beta} + \left(\delta^{ks} a^0{}_{|m} - \delta^{mk} a^0{}_{|s}\right)_{|s} + \left(\delta^{ks} a^m{}_{|0} - \delta^{mk} a^s{}_{|0}\right)_{|s}. \tag{8.6б}$$

Выражения в скобках в правой части (8.6) антисимметричны по индексам m и s; поэтому, согласно лемме, доказанной в § 2, имеем

$$\int_{\Sigma} K^{*m0,\nu\beta} n_m\, dS = \int_{\Sigma} K^{m0,\nu\beta} n_m\, dS, \tag{8.7}$$

или

$$P^{*\alpha}_{\text{гр.}} = P^{\alpha}_{\text{гр.}}.$$

Таким образом, компоненты гравитационного импульса инвариантны при малых преобразованиях системы координат. Этого бы не было, если бы мы учитывали произведения величин γ на a. В этом особенно легко убедиться в частном случае, когда гравитационный поток отсутствует. В таком случае при преобразовании Лоренца величины $\Lambda^{0\alpha}$ и $T^{0\alpha}$ ведут себя как компоненты тензора и, следовательно, $P^{\alpha}_{\text{гр.}}$ преобразуется как постоянный вектор. Таким образом, компоненты $P^{\alpha}_{\text{гр.}}$ не инвариантны по отношению к преобразованию Лоренца.

§ 9. Гравитационое излучение и выбор системы координат

Теперь мы подходим к основному вопросу: можно ли найти такую разумную систему координат, в которой гравитационное излучение отсутствует? Иными словами, представляет ли собой гравитационное излучение, как оно здесь определено, нечто такое, от чего можно избавиться, выбирая надлежащим образом систему координат, или же оно имеет абсолютный смысл? Иначе говоря, можем ли мы найти систему координат, в которой $\dot{P}^{\alpha}_{\text{гр.}}=0$ и $P^{\alpha}_{\text{гр.}}=\text{const}$, т. е. в которой выполняется закон сохранения суммы двух импульсов — инертного и полевого?

Прежде чем ответить на этот вопрос, напомним еще раз определение $\dot{P}^{\alpha}_{\text{гр.}}$. Оно дается формулой (7.13)

$$\dot{P}^{\alpha}_{\text{гр.}}=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\Sigma}\dot{K}^{m0,\,\alpha\beta}{}_{|\beta}n_m\,dS. \tag{9.1}$$

Но вследствие (7.8) можно также записать

$$\dot{P}^{\alpha}_{\text{гр.}}=-\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\Sigma}\Lambda^{\alpha m}n_m\,dS. \tag{9.2}$$

Следовательно, можно вычислить изменение импульса двумя путями: во-первых, через выражения, линейные относительно γ, т. е. используя формулу (9.1), и, во-вторых, через выражения, нелинейные относительно γ, т. е. по формуле (9.2).

Перейдем теперь к выбору системы координат. Все допущения будут касаться лишь поведения нашей системы координат и величин γ при $r\to\infty$, где r — „расстояние“ от некоторой фиксированной точки, так что $r^2=x^kx^k$ для очень больших r. Мы предполагаем, что при $r\to\infty$ наша метрика стремится к галилеевой по крайней мере как $\log r/r^{\sigma}$, где $\sigma>0$, т. е.

$$|\gamma^{\alpha\beta}|\leqslant\left|A^{\alpha\beta}(t)\,\frac{\log r}{r^{\sigma}}\right|. \tag{9.3}$$

Кроме того, принимаем при $r\to\infty$ следующие координатные условия:

$$\gamma^{0\alpha}{}_{|\alpha}=O\left(\frac{1}{r^{2+\sigma}}\right),\quad(\sigma>0), \tag{9.4а}$$

$$\gamma^{mn}{}_{|n}=O\left(\frac{1}{r^{2+\sigma}}\right). \tag{9.4б}$$

Нам хотелось бы обратить внимание на условие (9.4б), которое отличается от условия де-Дондера $\gamma^{m\alpha}{}_{|\alpha}=0$, столь широко используемого Фоком. Результаты, которые мы здесь получим, в значительной мере обязаны выбору координатного условия (9.4б), опирающегося на идеи, лежащие в основе „нового метода приближений“, а именно что пространство и время должны рассматриваться различным образом; это различие и проявляется в выборе наших координатных условий. В самом деле, именно это координатное условие использовалось в ранних работах Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана. Основное различие между настоящей работой и работами других авторов, особенно Траутмана, также состоит в том, что мы использовали иное координатное условие.

При выбранном нами координатном условии выражения для $K^{m0,\,\nu\beta}{}_{|\beta}$ принимают очень простой вид

$$K^{m0,\,0\beta}{}_{|\beta}=-\frac{1}{2}\gamma^{00}{}_{|m}, \tag{9.5а}$$

$$K^{m0,\,k\beta}{}_{|\beta}=-\frac{1}{2}\left(\gamma^{k0}{}_{|m}+\gamma^{mk}{}_{|0}\right), \tag{9.5б}$$

как это следует из (8.2). Уравнения поля в этой системе координат также принимают более простой вид. В данный момент нас интересуют только (0, 0)- и (0, k)-уравнения, и притом только при $r\to\infty$, где тензор энергии-импульса равен нулю

$$K^{0a,\,0b}{}_{|ab}+\Lambda^{00}=0, \tag{9.6а}$$

$$K^{0a,\,k\beta}{}_{|a\beta}+\Lambda^{0k}=0, \tag{9.6б}$$

или вследствие (9.5)

$$\frac{1}{2}\gamma^{00}{}_{|ss}=-\Lambda^{00}, \tag{9.7а}$$

$$\frac{1}{2}\gamma^{0k}{}_{|ss}=-\Lambda^{0k}, \tag{9.7б}$$

Эти уравнения справедливы в нашей системе координат при $r\to\infty$. Остановимся пока на втором из этих уравнений. Мы знаем, что Λ^{0k} представляет собой сумму произведений величин $\gamma^{\mu\nu}$ и их производных. Если величины $\gamma^{\mu\nu}$ имеют порядок $1/r$, то их производные будут порядка $1/r^2$ или еще более высокого порядка по $1/r$.

Следовательно, Λ^{0k} должны быть по крайней мере второго порядка по $1/r$. Поэтому может показаться, что величины Λ^{0m} способны дать вклад в поверхностный интеграл (9.2), так что $P^0_{\text{гр.}}$ в этой системе координат будет зависеть от времени. Однако этого не случается.

Разложим существенные выражения в Λ^{0m}, т. е. те, которые могут дать вклад в поверхностный интеграл (9.2), в степенной ряд по x^s/r, предполагая, конечно, что такое разложение возможно,

$$\Lambda^{0m} = \frac{a^{0m}}{r^2} + \frac{a_s^{0m} x^s}{r^3} + \frac{a_{sp}^{0m} x^s x^p}{r^4} + \ldots . \tag{9.8}$$

Здесь коэффициенты a^{0m} и т. д. являются функциями только от времени. Так как, с другой стороны, левая часть (9.7б) является чистым лапласианом, то отсюда следует, что γ^{0m} должны иметь вид

$$\gamma^{0m} = A^{0m} \log r + A_s^{0m} \frac{x^s}{r} + \ldots . \tag{9.9}$$

Здесь A^{0m} и т. д. являются функциями времени, причем такими, чтобы удовлетворялись уравнения (9.7б). Но такой вид γ^{0m} противоречит нашему допущению, согласно которому γ^{0m}, как и все другие γ, должны принимать на бесконечности галилеевы значения. Итак, Λ^{0m} не могут содержать выражений порядка r^{-2}, так что их разложение должно начинаться с членов более высокого порядка по $1/r$. Поэтому $\dot{P}^0_{\text{гр.}}$ равно нулю и, следовательно, $P^0_{\text{гр.}}$ должно быть постоянной величиной!

Этот результат самым определенным образом связан с выбором нашей системы координат. Такой выбор приводит к появлению лапласиана вместо даламбертиана в левой части (9.7б). В случае же даламбертиана мы могли бы взять в качестве γ^{0m} выражения порядка a/r и a/r^2, что не противоречило бы величинам Λ^{0m} порядка r^{-2}.

Обращаясь к определению $P^0_{\text{гр.}}$ через поверхностный интеграл от выражений, линейных относительно γ, мы видим, что

$$\dot{P}^0_{\text{гр.}} = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\Sigma} \dot{K}^{m0,\,0\beta}{}_{|\beta} n_m \, dS = -\frac{1}{16\pi} \int\limits_{\Sigma} \gamma^{00}{}_{|m0} n_m \, dS = 0. \tag{9.10}$$

Предположим, что

$$\gamma^{00} = \frac{4M}{r} + \text{Члены более высокого порядка по } \frac{1}{r}. \tag{9.11}$$

Тогда, вычисляя поверхностный интеграл, получаем

$$P^0_{\text{гр.}} = -\frac{1}{16\pi} \int \left(\frac{4M}{r}\right)_{|m} n_m \, dS = M. \tag{9.12}$$

Следовательно, M представляет собой полную гравитационную массу и является постоянной величиной.

Перейдем теперь к компонентам $P^k_{\text{гр.}}$. Покажем, что можно еще более специализировать нашу систему координат на бесконечности таким образом, что эти компоненты будут тоже постоянными. При этом имеется в виду, что преобразование координат, которое мы теперь осуществим, не должно изменять существенных черт предыдущей системы координат, а именно γ^* должны убывать на бесконечности как $\log r/r^\alpha$ $(\alpha>0)$, а $\gamma^{*0\alpha}{}_{|\alpha}$ и $\gamma^{*mn}{}_{|n}$ как $1/r^{2+\alpha}$ $(\alpha>0)$.

Для простоты сделаем еще одно предположение. Потребуем, чтобы при $r\to\infty$ компоненты $\gamma^{0\alpha}$ стремились к нулю как $1/r$. Можно было бы не выдвигать этого требования, а продолжать придерживаться нашего допущения, согласно которому $\gamma^{0\alpha}$ убывают как $\log r/r^\alpha$ $(\alpha > 0)$ при $r\to\infty$, однако в этом случае рассмотрение было бы несколько более сложным.

Произведем преобразование координат

$$x^{*k} = x^k + \frac{C^k}{r}, \tag{9.13}$$

где C^k — функции только от t. На этот раз мы выпишем в преобразовании γ все выражения, как линейные, так и нелинейные, с точностью до членов порядка $1/r^{2+\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Из (8.3) и (9.13) находим

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00} - C^s \left(\frac{1}{r}\right)_{|s} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{9.14а}$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m} + \dot{C}^m \frac{1}{r} + \dot{C}^m \frac{\gamma^{00}}{r} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{9.14б}$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} - C^m \left(\frac{1}{r}\right)_{|n} - C^n \left(\frac{1}{r}\right)_{|m} + \delta^{mn} C^s \left(\frac{1}{r}\right)_{|s} + \\ + \dot{C}^m \frac{\gamma^{0n}}{r} + \dot{C}^n \frac{\gamma^{0m}}{r} + \dot{C}^m \dot{C}^n \frac{1}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right). \tag{9.14в}$$

Так как в (9.14б) величина $\gamma^{00}{}_{|m}/r$ по крайней мере порядка $1/r^{2+\alpha}$ $(\alpha > 0)$, то видим, что при $r\to\infty$

$$\gamma^{*00}{}_{|0} + \gamma^{*0m}{}_{|m} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \qquad \alpha > 0 \tag{9.15}$$

и аналогично

$$\gamma^{*mn}{}_{|n} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{9.16}$$

так как γ^{0m} имеют порядок $1/r$, а их пространственные производные — порядок $1/r^2$. Мы знаем, что линейные выражения в (9.14) не влияют на $P^k_{\text{гр.}}$, как было подробно показано в предыдущем параграфе. Кроме того, члены порядка $1/r^{2+\alpha}$ также не дают вклада в поверхностный интеграл. Наконец, поскольку в (9.5б) величины γ^{*0k} дифференцируются по пространственным координатам, то в выражениях для γ^{*0k} достаточно учесть только члены порядка $1/r$. Мы видим также, что выражение $\dot{C}^m\dot{C}^n/r^2$ в (9.14в) тоже не даст вклада в поверхностный интеграл, так как оно умножается на $n_m = x^m/r$ и поверхностный интеграл обращается в нуль в силу асимметрии. Таким образом, при вычислении $P^{*k}_{\text{гр.}}$ можно положить

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00}, \tag{9.17а}$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m}, \tag{9.17б}$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} + \dot{C}^m \frac{\gamma^{0n}}{r} + \dot{C}^n \frac{\gamma^{0m}}{r}. \tag{9.17в}$$

Введем теперь следующие функции времени:

$$A^n_m = \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma \frac{\gamma^{0n}}{r} n_m\, dS. \tag{9.18}$$

Тогда вследствие (9.1) и (9.5б) будем иметь

$$\dot{P}^{*k}_{\text{гр.}} = \dot{P}^k_{\text{гр.}} - \left(A^k_m \dot{C}^m + A^s_s \dot{C}^k\right)_{|00}. \tag{9.19}$$

Отсюда видно, что, вообще говоря, можно обратить в нуль величины $\dot{P}^{*k}_{\text{гр.}}$, не нарушая наших исходных условий. Для этого нужно решить дифференциальное уравнение

$$\dot{P}^k_{\text{гр.}} = \left(A^k_m \dot{C}^m + A^s_s \dot{C}^k\right)_{|00}. \tag{9.20}$$

В этом уравнении $P^k_{\text{гр.}}$ и A^k_m — известные функции времени. По ним мы определим величины C^k и с помощью последних осуществим преобразование координат (9.13). В новой системе координат со звездочкой будем иметь

$$\dot{P}^{*\alpha}_{\text{гр.}} = 0, \quad P^{*\alpha}_{\text{гр.}} = \text{const}. \tag{9.21}$$

Следовательно, в такой системе координат сумма инерциального и полевого импульсов остается постоянной!

[Если бы мы предполагали, что $\gamma^{0m} = A^{0m}(t)(\log r/r^\alpha)$ при $r \to \infty$, то вместо (9.13) следовало бы написать: $x^{*k} = x^k + C^k \frac{r^{\alpha-2}}{\log r}$.]

Нам представляется, что против этого рассуждения можно было бы выдвинуть лишь один аргумент: что будет, если величины A^k_m равны нулю?

Этот вопрос легко разрешить, если обобщить только что представленное доказательство.

Действительно, произведем вместо преобразования

$$x^{*k} = x^k + \frac{C^k}{r} \tag{9.22}$$

несколько более общее преобразование

$$x^{*k} = x^k + a^k, \tag{9.23}$$

где a^k имеют вид

$$a^k = \frac{b^k}{r} + \frac{b^k_s x^s}{r^2} + \ldots, \tag{9.24}$$

а величины b в (9.24) являются функциями только от времени. Иными словами, мы требуем, чтобы a^k были порядка r^{-1}, причем не изменяли бы своего порядка при дифференцировании по времени и понижали его при дифференцировании по пространственным координатам. В этом случае имеем

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00} - a^s{}_{|s} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{9.25а}$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m} + a^m{}_{|0} + a^m{}_{|0}\gamma^{00} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{9.25б}$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} - a^m{}_{|n} - a^n{}_{|m} + \delta^{mn} a^s{}_{|s} + a^m{}_{|0}\gamma^{0n} + a^n{}_{|0}\gamma^{0m} + a^n{}_{|0} a^m{}_{|0} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right). \tag{9.25в}$$

Так как вклад в $P^k_{\text{гр.}}$ могут давать лишь произведения типа $\gamma \cdot a$ и $a \cdot a$ при условии, что они имеют надлежащий порядок, то для вычисления $P^k_{\text{гр.}}$ можно положить подобно тому, как это делалось в (9.17),

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00}, \tag{9.26а}$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m}, \tag{9.26б}$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} + a^m{}_{|0}\gamma^{0n} + a^n{}_{|0}\gamma^{0m} + a^m{}_{|0} a^n{}_{|0}. \tag{9.26в}$$

Отсюда и из (8.2б) следует

$$P^{*k}_{\text{гр.}} = P^k_{\text{гр.}} - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma \left(a^k{}_{|0}\gamma^{0m} + a^m{}_{|0}\gamma^{0k} + a^k{}_{|0} a^m{}_{|0}\right)_{|0} n_m\, dS. \tag{9.27}$$

Поэтому можно обратить в нуль $P^{*k}_{\text{гр.}}$ при помощи любого преобразования, удовлетворяющего условию

$$P^k_{\text{гр.}} = \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma \left(a^k{}_{|0}\gamma^{0m} + a^m{}_{|0}\gamma^{0k} + a^k{}_{|0} a^m{}_{|0}\right)_{|0} n_m\, dS. \tag{9.28}$$

Даже если γ^{0m} имеют порядок r^{-2}, такие a^k всегда будут существовать. В этом частном случае мы имеем

$$P^k_{\text{гр.}} = \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma \left(a^m{}_{|0} a^k{}_{|0}\right)_{|0} n_m \, dS. \tag{9.29}$$

Достаточно взять a^k вида

$$a^k = \frac{\alpha^k}{r} + \frac{\beta x^k}{r^2}. \tag{9.30}$$

Тогда получим уравнение для α^k и β

$$P^k_{\text{гр.}} = \frac{1}{3} (\dot{\alpha}^k \dot{\beta})_{|0}.$$

Как легко видеть из (9.25), это преобразование оставляет координатные условия существенно инвариантными:

$$\gamma^{*0\alpha}{}_{|\alpha} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{9.31а}$$

$$\gamma^{*mn}{}_{|n} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right). \tag{9.31б}$$

§ 10. Обобщение системы координат

До сих пор мы предполагали выполнение для метрического поля следующих условий на бесконечности:

1) $$\left|\gamma^{\alpha\beta}\right| \leqslant \left| M^{\alpha\beta}(t) \frac{\log r}{r^\sigma} \right|, \qquad \sigma > 0; \tag{10.1}$$

2) $$\gamma^{0\alpha}{}_{|\alpha} = O\left(\frac{1}{r^{2+\sigma}}\right), \quad \gamma^{mn}{}_{|n} = O\left(\frac{1}{r^{2+\sigma}}\right); \tag{10.2}$$

3) та часть Λ^{0m}, которая дает вклад в поверхностный интеграл, может быть разложена при $r \to \infty$ в степенной ряд по x^s/r с коэффициентами, зависящими от времени.

Мы показали, что при этих условиях:

А. Величина $P^0_{\text{гр.}}$ — постоянная. Фактически для доказательства этого утверждения условие „1“ не обязательно. Достаточно потребовать, чтобы

$$\left|\gamma^{0m}\right| \leqslant \left| M^{0m}(t) \frac{\log r}{r^\alpha} \right| \qquad \text{с} \quad \alpha > 0.$$

Б. Все компоненты величины $P^\alpha_{\text{гр.}}$ инвариантны при преобразовании

$$x^{*\alpha} = x^\alpha + a^\alpha, \tag{10.3}$$

если при $r \to \infty$ мы пренебрегаем всеми произведениями типа $\gamma \cdot a$ и $a \cdot a$.

Будем называть преобразование (10.3)

$$x^{*\alpha} = x^\alpha + a^\alpha$$

собственным преобразованием, если при $r \to \infty$ выполняются следующие условия: a^α имеют порядок $1/r$; дифференцирование по пространственным координатам понижает порядок на единицу, в то время как дифференцирование по времени не изменяет порядка; другими словами, a^α можно разложить в степенной ряд по x^s/r с коэффициентами, зависящими только от времени. Кроме того, мы требуем, чтобы при собственных преобразованиях выражения $K^{*m0,\alpha\beta}{}_{|\beta}$ вычислялись с точностью до членов порядка $1/r^{2+\sigma}$ $(\sigma > 0)$; это значит, что там, где это необходимо, в преобразовании $\gamma^{\alpha\beta}$ должны учитываться нелинейные выражения.

При определенном таким образом собственном преобразовании мы доказали следующие утверждения:

В. Величина $P^0_{\text{гр.}}$ и координатные условия (10.2) инвариантны по отношению к собственному пространственному преобразованию

$$x^{*0} = x^0, \tag{10.4а}$$

$$x^{*k} = x^k + a^k. \tag{10.4б}$$

Г. Величины a^k в собственном преобразовании (10.4) всегда можно выбрать таким образом, чтобы

$$P^k_{\text{гр.}} = 0. \tag{10.5}$$

Возникает вопрос: что произойдет с $P^0_{\text{гр.}}$, если мы осуществим не чисто пространственное собственное преобразование (10.4), а полное собственное преобразование (10.3)? Для выяснения этого вопроса достаточно рассмотреть только собственное преобразование времени

$$x^{*0} = x^0 + a^0. \tag{10.6}$$

Мы будем иметь:

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00} + a^0{}_{|0} + a^0{}_{|0}\gamma^{00} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \qquad \alpha > 0, \tag{10.7}$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m} - a^0{}_{|m} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{10.8}$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} + \delta^{mn} a^0{}_{|0} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right). \tag{10.9}$$

Но линейные члены не дают вклада в $P^0_{\text{гр.}}$. Нелинейные члены имеют порядок $1/r^{1+\alpha}$ и, будучи продифференцированы еще раз по пространственным координатам, также не дадут вклада в поверхностный интеграл. Следовательно:

Д. Величина $P^0_{\text{гр.}}$ инвариантна по отношению к собственному пространственно-временно́му преобразованию. Однако легко видеть, что такое преобразование не оставляет инвариантными координатные условия. В самом деле, мы имеем

$$\gamma^{*0\alpha}{}_{|\alpha} = a^0{}_{|00} + a^0{}_{|00}a^0{}_{|0} + \left(a^0{}_{|0}\gamma^{00}\right)_{|0} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{10.10а}$$

$$\gamma^{*mn}{}_{|n} = a^0{}_{|0m} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right). \tag{10.10б}$$

Здесь величины a^0 произвольны, насколько это позволяет определение собственного преобразования. Из этих уравнений следует

$$\gamma^{*mn}{}_{|n0} - \gamma^{*0\alpha}{}_{|\alpha m} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right). \tag{10.11}$$

Это значит, что можно доказать постоянство величины $P^0_{\text{гр.}}$ при несколько менее жестких условиях, чем те, которые были сформулированы в начале этого параграфа. Вместо четырех координатных условий (10.2) можно потребовать выполнения лишь трех условий (10.11). Если бы явно сформулировать эти условия (10.11) при постановке проблемы, то они показались бы довольно искусственными. Здесь же мы подошли к ним естественным путем, исследуя трансформационные свойства величины $P^0_{\text{гр.}}$. Тем не менее можно дать простое и более непосредственное доказательство следующей теоремы:

Е. Пусть при $r \to \infty$

1) $$|\gamma^{0m}| \leqslant \left| M^{0m}(t)\,\frac{\log r}{r^\alpha}\right|; \tag{10.12}$$

2) $$\gamma^{mn}{}_{|n0} - \gamma^{0\alpha}{}_{|\alpha m} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \qquad \alpha > 0; \tag{10.13}$$

3) выражения в Λ^{0m}, дающие вклад в поверхностный интеграл, можно разложить в степенной ряд по x^s/r.

При этих условиях имеем

$$P^0_{\text{гр.}} = \text{const.}$$

Ход доказательства такой же, как и в § 9, и мы дадим его здесь лишь в общих чертах. Согласно (7.13) и (7.5),

$$\dot P^0_{\text{гр.}} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_\Sigma \dot K^{m0,\,0\beta}{}_{|\beta} n_m\,dS = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_\Sigma \Lambda^{0m} n_m\,dS =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\dot{\mathcal{J}}^{00} + \frac{1}{8\pi}\dot\Lambda^{00}\right)dx. \tag{10.14}$$

В силу (9.6б) и (5.16) (0, k)-уравнение поля можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^{0k}{}_{|ss} + \gamma^{0\alpha}{}_{|\alpha k} + \gamma^{sk}{}_{|s0}\right) + \Lambda^{0k} = 0. \tag{10.15}$$

Отсюда вследствие координатного условия (10.13) имеем

$$\frac{1}{2}\gamma^{k0}{}_{|ss} = -\Lambda^{0k} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{10.16}$$

что тождественно уравнению (9.7б).

Начиная с этого пункта, доказательство в точности совпадает с тем, которое основывалось на уравнении (9.7б), и приводит к заключению, что $\dot P^0_{\text{гр.}} = 0$, т. е. что $P^0_{\text{гр.}}$ должно быть постоянной величиной. Кстати, в этом можно убедиться и значительно более простым, почти тривиальным способом. Поскольку γ^{0k} как решения уравнения (10.16) могут быть разложены в степенной ряд по x^s/r, мы приходим к заключению, что

$$\gamma^{0m}{}_{|mk} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \qquad \alpha > 0, \tag{10.17}$$

и, следовательно, наше условие (10.13) можно записать в виде

$$\gamma^{mn}{}_{|n0} - \gamma^{00}{}_{|0m} = O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right). \tag{10.18}$$

Однако, как следует из (8.2а),

$$\gamma^{mn}{}_{|n0} - \gamma^{00}{}_{|0m} = -2\dot K^{m0,\,0\beta}{}_{|\beta}, \tag{10.19}$$

откуда очевидно, что $\dot P^0_{\text{гр.}}$ равно нулю.

Координатные условия (10.13), как и величина $P^0_{\text{гр.}}$, инвариантны при произвольном собственном пространственно-временно́м преобразовании. Мы видим также из уравнения (10.14), что $P^0_{\text{гр.}}$ можно представить в виде поверхностного интеграла. Он, очевидно, не зависит от системы координат внутри области, ограниченной бесконечной сферой, если только эта система реализуется путем преобразования координат, которое является собственным на сфере. Он также инвариантен по отношению к чисто пространственному преобразованию, которое при $r \to \infty$ имеет вид $x^{*k} = x^k + a^k(\mathbf{x})$, где a^k — величины нулевого порядка по r, поскольку при дифференцировании их порядок понижается на единицу. Таким образом, величина $P^0_{\text{гр.}}$, определяемая формулой (8.2а) и равная полной гравитационной массе, должна рассматриваться как энергия системы.

Однако можно показать, что $P^0_{\text{гр.}}$ не будет постоянной во всех системах координат. В самом деле, рассмотрим (в качестве примера) простое преобразование, которое при $r \to \infty$ имеет вид

$$x'^0 = x^0 + \varepsilon \log \frac{r}{R}. \tag{10.20}$$

Здесь ε — постоянная, а R — очень большой постоянный радиус сферы, по которой мы интегрируем. Непосредственное применение формулы (8.3) дает

$$\gamma'^{00} = \gamma^{00} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} + \varepsilon \frac{2x^s}{r^2} \gamma^{0s}, \tag{10.21а}$$

$$\gamma'^{0m} = \gamma^{0m} + \varepsilon \frac{x^m}{r^2} + \varepsilon \gamma^{ms} \frac{x^s}{r^2}, \tag{10.21б}$$

$$\gamma'^{mn} = \gamma^{mn}. \tag{10.21в}$$

Применяя теперь эти выражения к нашему координатному условию, нужно иметь в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} - \varepsilon a^{\alpha}{}_{|\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}. \tag{10.22}$$

Тогда получим

$$\gamma'^{00}{}_{|0m} = \gamma^{00}{}_{|0m} - \varepsilon \gamma^{00}{}_{|00} \frac{x^m}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right), \tag{10.23а}$$

$$\gamma'^{mn}{}_{|0n} = \gamma^{mn}{}_{|0n} - \varepsilon \gamma^{mn}{}_{|00} \frac{x^n}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^{2+\alpha}}\right). \tag{10.23б}$$

Добавочные выражения имеют порядок $1/r^{1+\alpha}$, и поэтому они могут изменить поверхностный интеграл при $\alpha = 1$. Таким образом, „гравитационное излучение“, или, точнее говоря, поток энергии гравитационного излучения, может быть порождено или уничтожено путем выбора системы координат. Тем не менее, как было показано, существуют разумные системы координат, в которых „гравитационное излучение“ всегда отсутствует.

§ 11. Излучение и метод приближений

Итак, мы показали, что путем выбора системы координат излучение можно уничтожить. Но можно также показать, что излучение может быть порождено как путем надлежащего выбора системы координат, так и путем выбора решения уравнений поля.

Метод, которым мы пользовались в этой главе, за исключением § 1, почти совсем не был связан с методом приближений. Теперь вернемся к идеям, изложенным в § 1, применяя их к ОТО. В § 1 была выяснена зависимость излучения от уравнений движения. Сейчас покажем, как оно зависит от выбора частного решения.

Как и прежде, мы будем фиксировать нашу систему координат, требуя выполнения на бесконечности четырех добавочных условий. Очевидно, эти условия не будут типа

$$\gamma^{0\alpha}{}_{|\alpha} = 0, \quad \gamma^{mn}{}_{|n} = 0, \tag{11.1}$$

поскольку последние приводят как раз к отсутствию излучения. Вместо этого мы будем использовать условие де-Дондера

$$\gamma^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0 \tag{11.2}$$

и исследуем его влияние на излучение. Как изменит это координатное условие уравнения поля? Применяя его к (2.3) и (2.2), получаем уравнения поля очень простого вида

$$-\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \gamma^{\mu\nu}{}_{|\alpha\beta} + \Lambda^{\mu\nu} + 8\pi \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0. \tag{11.3}$$

В линейном случае это условие непосредственно ведет к волновым уравнениям

$$\Box \gamma^{\mu\nu} = 0. \tag{11.4}$$

В этом также заключается одна из причин популярности координатного условия де-Дондера.

Попытаемся теперь решить уравнения поля на бесконечности с помощью нашего метода приближений. Придерживаясь этого метода, начнем с решения уравнения

$$\Delta \underset{2}{\gamma}^{00} = 0 \tag{11.5}$$

при больших значениях r. В соответствии с изложенным в гл. II

$$\underset{2}{\gamma}^{00} = 4 \sum_{A=1}^{N} \frac{\overset{A}{\mu}}{\overset{A}{r}}. \tag{11.6}$$

При $r \to \infty$ это выражение можно разложить в ряд подобно тому, как это делалось в § 1:

$$\underset{2}{\gamma}^{00} = \frac{4M}{r} - 4MX^s \left(\frac{1}{r}\right)_{|s} + 2D^{sp} \left(\frac{1}{r}\right)_{|sp} + \ldots. \tag{11.7}$$

Здесь

$$M = \sum_A \underset{2}{\overset{A}{\mu}}, \quad X^s = M^{-1} \sum_A \overset{A}{\mu} \overset{A}{\xi}{}^s, \tag{11.8}$$

$$D^{sp} = \sum_A \overset{A}{\mu} \left(\overset{A}{\xi}{}^s \overset{A}{\xi}{}^p - \frac{1}{3} \delta^{sp} \overset{A}{\xi}{}^r \overset{A}{\xi}{}^r\right). \tag{11.9}$$

Происхождение последнего выражения объясняется просто: оно возникает из равенства

$$D^{sp}\left(\frac{1}{r}\right)_{|sp} = (D^{sp}+\beta\delta^{sp})\left(\frac{1}{r}\right)_{|sp}, \tag{11.10}$$

где β — произвольная функция времени. Поэтому ее всегда можно выбрать таким образом, чтобы

$$D^{ss}=0. \tag{11.11}$$

Перейдем к уравнениям поля для $\underset{3}{\gamma}^{0m}$. Мы имеем

$$\underset{3}{\gamma}^{0m}{}_{|ss}=0. \tag{11.12}$$

Вследствие наших координатных условий решение будет иметь вид

$$\underset{3}{\gamma}^{0m} = 4M\dot{X}^m\frac{1}{r} - 2\dot{D}^{ms}\left(\frac{1}{r}\right)_{|s} + \beta\left(\frac{1}{r}\right)_{|m} + f^{sm}\left(\frac{1}{r}\right)_{|s}. \tag{11.13}$$

Здесь β и f^{sm} — произвольные функции от времени, причем f^{sm} антисимметрична по своим индексам. Если мы хотим, чтобы γ^{0m} на бесконечности обращались в нуль, то вследствие координатного условия $\gamma^{0\alpha}{}_{|\alpha}=0$ необходимо потребовать $M=\text{const}$.

Теперь можно вычислить γ^{mn}. Требуя снова, чтобы $\underset{4}{\gamma}^{mn}$ при $r\to\infty$ стремились к своим галилеевым значениям, получим опять же в силу координатного условия

$$\ddot{X}^k=0, \quad \dot{f}^{sm}=0 \tag{11.14}$$

и

$$\underset{4}{\gamma}^{mn} = (2\ddot{D}^{mn}+\underset{4}{\dot\beta}\delta^{mn})\frac{1}{r}+\dots. \tag{11.15}$$

Если мы теперь хотим учесть излучение, то необходимо надлежащим образом выбрать величины

$$\underset{3}{\gamma}^{00},\ \underset{4}{\gamma}^{0n},\ \underset{5}{\gamma}^{mn}. \tag{11.16}$$

Как было показано в § 1, продвигаясь в нашем методе приближений скачками через один порядок, мы смогли бы получить лишь „стоячие волны". Следовательно, таким способом мы не получили бы того единственного решения, соответствующего запаздывающему потенциалу, которое, как можно надеяться, учтет гравитационное излучение в рамках нашей процедуры приближений. Таким образом, нужно начинать приближение соответственно с

$$\underset{3}{\gamma}^{00}=-4\dot{M}, \quad \underset{4}{\gamma}^{0m}=4M\ddot{X}^m, \quad \underset{5}{\gamma}^{mn}=-(2\ddot{D}^{mn}+\delta^{mn}\ddot\beta). \tag{11.17}$$

Из этих выражений отличен от нуля только „радиационный член" в $\underset{5}{\gamma}^{mn}$. Предположим, что этот член существует, и посмотрим, приведет ли он к конечной энергии излучения. Полагая, согласно (11.4),

$$X^k=0, \quad f^{mn}=0, \tag{11.18}$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
\gamma^{00} &= \frac{4M}{r}+2D^{sp}\left(\frac{1}{r}\right)_{|sp}+\dots,\\
\gamma^{0m} &= -2\dot{D}^{ms}\left(\frac{1}{r}\right)_{|s}+\beta\left(\frac{1}{r}\right)_{|m}+\dots,\\
\gamma^{mn} &= (2\ddot{D}^{mn}+\delta^{mn}\ddot\beta)\frac{1}{r}-2\ddot{D}^{mn}-\delta^{mn}\ddot\beta.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

Для нахождения энергии излучения используем формулу (7.13)

$$8\pi\dot{P}^0_{\text{гр.}} = \int\limits_{\Sigma}\dot{K}^{m0,0\beta}{}_{|\beta}\,n_m\,dS = -\int\limits_{\Sigma}\Lambda^{0m}n_m\,dS, \tag{11.20}$$

которая в нашей системе координат в силу (5.15) имеет вид

$$-8\pi\dot{P}^0_{\text{гр.}} = \int\limits_{\Sigma}\left(\gamma^{00}{}_{|0m}+n^{0m}{}_{|00}\right)n_m\,dS = \int\limits_{\Sigma}\Lambda^{0m}n_m\,dS. \tag{11.21}$$

Можно ожидать от выражений четного порядка в разложении Λ^{0m} отличных от нуля радиационных членов. Первый по счету порядок, в котором это может иметь место, соответствует $\underset{8}{\Lambda}^{0m}$. Не вдаваясь в детали, отметим, что такого рода вклад может проистекать от выражения в Λ^{0m} вида

$$\sim \underset{5}{\gamma}^{mn}{}_{|\underset{1}{0}}\,\underset{2}{\gamma}^{00}{}_{|n}. \tag{11.22}$$

Это выражение будет пропорционально величине

$$\underset{6}{\dddot\beta}\,\underset{2}{M}, \tag{11.23}$$

так как $D^{ss}=0$. Следовательно, вообще говоря, возможно получить излучение восьмого порядка, но только при условии, что при $r\to\infty$ имеем решения вида (11.19) с $\underset{6}{\dddot\beta}\neq 0$. С другой стороны, в случае $\beta=0$ мы не получим никакого излучения в восьмом порядке. Таким образом, излучение может быть уничтожено или порождено надлежащим выбором решений. Простейшее решение с $\beta=0$ приводит к отсутствию излучения. Если же взять $\beta\neq 0$, то излучение будет место! Из равенства (11.21) следует, что его левая часть, т. е. линейная часть поверхностного интеграла, должна равняться правой части, которая уже вычислена. Это приводит к тому, что мы должны положить

$$\underset{6}{\gamma}^{0m} = C(t)\left(\frac{1}{r}\right)_{|m}, \tag{11.24}$$

чтобы интеграл в левой части был в точности равен вкладу, даваемому выражением (11.23). Конечно, если $\beta = 0$, то и $C = 0$.

Предположим, что мы выбрали $\beta = 0$ в выражении (11.19). В таком случае, чтобы найти излучение, нужно перейти к следующему этапу приближений, т. е. вычислить Λ^{0m} десятого порядка. В этом приближении будут, например, выражения типа

$$\underset{7}{\gamma}^{mn}{}_{|s}\,\underset{3}{\gamma}^{0n}{}_{|s}. \tag{11.25}$$

Далее,

$$\underset{7}{\gamma}^{mn} \sim r^2 \frac{d^5}{dt^5} D^{mn}. \tag{11.26}$$

Выражение такого типа в $\underset{7}{\gamma}^{mn}$ вызывается наличием выражения $\underset{5}{\dddot{D}}{}^{sp}$ в предыдущем этапе приближений. С другой стороны, $\underset{3}{\gamma}^{0n}$ содержит выражение типа

$$\dot{D}^{ms}\left(\frac{1}{r}\right)_{|s}.$$

Следовательно, произведение (11.25) будет иметь порядок $1/r^2$ и даст вклад в поверхностный интеграл. Этот вклад будет иметь вид

$$\dot{D}^{mn}\frac{d^5}{dt^5}D^{mn}. \tag{11.27}$$

Вообще говоря, мы будем иметь много выражений подобного вида; это можно записать в форме

$$\underset{10}{\Lambda}^{0m} \sim \underset{10}{f}(D^2). \tag{11.28}$$

Таким образом, может создаться впечатление, что в десятом порядке излучение должно появляться. Однако это не так. Дело в том, что на каждом этапе приближения можно прибавлять произвольную функцию времени. Пусть, например, произвольная функция времени, которую можно прибавить в седьмом порядке к γ^{mn}, имеет вид

$$\underset{7}{\beta}(t)\,\delta^{mn}. \tag{11.29}$$

Как было показано ранее, такое добавочное выражение даст вклад вида

$$\underset{8}{\dot{\beta}}M. \tag{11.30}$$

Следовательно, снова путем надлежащего выбора аддитивной гармонической функции седьмого порядка можно скомпенсировать излучение, порождаемое аддитивной гармонической функцией пятого порядка! Следует добавить, что такая гармоническая функция не нарушает принятых нами координатных условий.

Какие выводы можно сделать из изложенного в этой главе? Полученные результаты довольно скромны и носят в основном характер отрицания. Они говорят о том, что вряд ли можно приписать какой-либо физический смысл потоку тензора энергии-импульса, определяемому с помощью псевдотензора энергии-импульса. В самом деле, излучение может быть уничтожено надлежащим выбором системы координат. С другой стороны, даже если мы будем использовать систему координат, в которой поток энергии может существовать, то и в этом случае ему можно придать любое значение, если мы этого пожелаем, путем добавления соответствующих гармонических функций времени, начиная с величины $\underset{5}{\gamma}^{mn}$.

В линейной теории мы сталкиваемся с выбором между запаздывающим и опережающим потенциалами. В теории гравитации выбор не столь прост. Используя метод приближений, мы оказываемся перед выбором: либо учитывать в разложении члены один за другим, либо продвигаться, перескакивая через один порядок. Только в первом случае можно говорить об излучении. Однако и здесь сам факт существования излучения, так же как и его величина, будет зависеть от выбора произвольных гармонических функций.

Полное уравнение (5.1) еще имеет определенный смысл, если не рассматривать каждую его сторону в отдельности в качестве определения потока энергии-импульса. Это уравнение имеет смысл, поскольку оно является следствием уравнений движения. Действительно, поверхностные интегралы, если они берутся по поверхностям, каждая из которых окружает одну сингулярность, дают уравнения движения. Будучи же взятыми по поверхности, окружающей все сингулярности, эти интегралы дадут нам законы сохранения, которые являются следствием уравнений движения.

Эйнштейн часто говорил: „У нас нет удовлетворительной классической теории излучения. Риц понимал это. Он был умным человеком...“ Это замечание кажется особенно справедливым по отношению к гравитационному излучению.

1. δ-ФУНКЦИЯ

В настоящей работе мы использовали в основном δ-функции Дирака особого вида. Рассмотрим здесь подробно структуру этих δ-функций.

Обычные δ-функции можно ввести в теорию различными путями, из которых упомянем три:

1) аксиоматический метод,

2) метод, опирающийся на фурье-образы,

3) реалистический метод, рассматривающий δ-функции как предельный случай протяженного источника.

Начнем с рассмотрения одномерной δ-функции. Обобщение на случай δ-функции большого числа измерений почти тривиально.

1) В аксиоматическом методе мы требуем, чтобы $\delta(x)$ обладала следующими свойствами:

1а) формально $\delta(x)$ можно дифференцировать бесконечное число раз;

1б) при $x \neq 0$ имеем $\delta(x) = 0$, а при $x = 0$ имеем $\delta(0) = \infty$;

1в) для произвольной окрестности $V(x_0)$ точки x_0 и для произвольной функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0, выполняется соотношение

$$\int\limits_{V(x_0)} dx\delta(x - x_0) f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x - x_0) f(x) = f(x_0). \tag{1.1}$$

2) В методе, связанном с фурье-образами, символ $\delta(x' - x'')$ определяется уравнением

$$\delta(x' - x'') = \sum_\lambda \psi_\lambda^*(x')\psi_\lambda(x''). \tag{1.2}$$

Здесь $\psi_\lambda(x)$ — собственные функции эрмитова оператора Λ, соответствующие собственным значениям λ.

Мы предполагаем, что дифференцирование и интегрирование коммутативны с суммированием по спектру. Отсюда, а также из свойств полного набора собственных функций можно „доказать", что условия 1а — 1в выполняются. Наиболее важный случай представляет определение $\delta(x)$ при помощи собственных функций оператора $(i\,d/dx)$, которые имеют вид $(2\pi)^{-1/2}e^{-ikx}$, так что, согласно (1.2),

$$\delta(x' - x'') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x'-x'')}. \tag{1.3}$$

Такое „обычное" фурье-представление δ-функции играет особенно важную роль при вычислениях, связанных с функциями Грина.

3) Обсудим третий, реалистический метод. Здесь $\delta(x)$ рассматривается как предел при $\varepsilon \to 0$ некоторых обычных функций $\delta(\varepsilon, x)$, обладающих следующими свойствами:

3а) $\delta(\varepsilon, x)$ имеет производные всех порядков по x и ε;

3б) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon, x) = 0$ при $x \neq 0$;

3в) для произвольной окрестности $V(x_0)$ точки x_0 и для произвольной функции $f(x)$, непрерывной в $V(x_0)$, имеет место соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{V(x_0)} dx\delta(\varepsilon, x - x_0) f(x) = f(x_0). \tag{1.4}$$

Действительно, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и меняя порядок процесса перехода к пределу и интегрирования в 3в, мы удовлетворяем требуемым свойствам 1а — 1в.

[Иногда мы должны будем усиливать наши требования, ставя условием достаточно быстрое убывание $\delta(\varepsilon, x)$ при возрастании x.]

Реалистический метод сводится к следующей процедуре: все расчеты проводятся с $\delta(\varepsilon, x)$, а не с $\delta(x)$; предельный же переход при $\varepsilon \to 0$ следует произвести уже в окончательном результате. Только в том случае, если этот результат не зависит от конкретного вида $\delta(\varepsilon, x)$, а определяется условиями 3а — 3в, можно надеяться получить тот же результат, что и в случае, когда мы оперируем не с $\delta(\varepsilon, x)$, а с $\delta(x)$, удовлетворяющей условиям 1а—1в. Иными словами, реалистический метод может рассматриваться (по крайней мере физиками) как некоторое оправдание аксиоматического метода. Это оправдание заключается главным образом в том, что класс функций $\delta(\varepsilon, x)$, удовлетворяющих условиям 3а — 3в, не является пустым.

Одной из возможных функций, принадлежащих этому классу (и, по-видимому, простейшей), является следующая:

$$\delta(\varepsilon, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon} e^{-x^2/2\varepsilon^2}. \tag{1.5}$$

С математической точки зрения ни один из этих методов не может считаться удовлетворительным. Тем не менее, эти методы, вообще говоря, достаточны для приложений δ-функций в теоретической физике. Однако это утверждение справедливо не всегда. Оно верно лишь в том случае, если во всех конкретных вычислениях фигурируют произведения δ-функций только с непрерывными функциями. В общем же случае, и в частности здесь — в проблеме движения в ОТО, мы как раз имеем дело с произведениями δ-функций на функции, сингулярные именно в той точке, где δ-функции обращаются в бесконечность. Тем самым мы сталкиваемся с проблемой, как интерпретировать выражение типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta(x)}{|x|^p}, \quad p > 0. \tag{1.6}$$

Такой интеграл принято считать расходящимся. В этом заключается причина возникновения многих трудностей.

Какие имеются логические основания для утверждения, что последнее выражение является расходящимся при $p > 0$? Обычно апеллируют к свойству условия 1в. Согласно этому свойству, нужно в $1/|x|^p$ заменить аргумент x на 0. Поэтому мы заключаем, что интеграл (1.6) должен быть бесконечным.

Это утверждение, однако, будет выглядеть менее обоснованным, если мы будем считать, что условие 1в должно выполняться только для функций, непрерывных по крайней мере при $x = x_0$. В таком случае последнее выражение не будет ни расходящимся, ни сходящимся, оно будет просто не определено.

Можно показать, что имеется возможность непротиворечиво сформулировать такие модифицированные δ-функции Дирака, которые мы будем обозначать через $\hat{\delta}$ и $\hat{\hat{\delta}}$, так что при любом выбранном $p > 0$ будем иметь либо

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\hat{\delta}(x)}{|x|^p} = 0, \tag{1.7}$$

либо

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\hat{\hat{\delta}}(x)}{|x|^p} = \omega_p,$$

где ω_p — произвольно задаваемые величины. Как $\hat{\delta}$, так и $\hat{\hat{\delta}}$ будут, очевидно, зависеть от выбранного значения p.

Таким образом, определим $\hat{\hat{\delta}}$ при помощи следующего ряда аксиом:

1г) $\hat{\hat{\delta}}$ имеет все производные при $x \neq 0$;

1д) $\hat{\hat{\delta}}(x) = 0$, если $x \neq 0$; $\hat{\hat{\delta}}(0)$ не определено; $\hat{\hat{\delta}}(x)$ под знаком интеграла должна рассматриваться как обычная функция;

1е) для всякой непрерывной функции $f(x)$ и для произвольной окрестности $V(x_0)$ точки x_0 мы имеем

$$\int_{V(x_0)} dx \hat{\hat{\delta}}(x - x_0) f(x) = f(x_0); \tag{1.8}$$

1ж) для некоторого определенного p имеем

$$\int_{V(0)} dx \frac{\hat{\hat{\delta}}(x)}{|x|^p} = \omega_p, \tag{1.9}$$

где ω_p — заранее задаваемая величина.

Начнем с реалистического введения $\hat{\delta}$ и $\hat{\hat{\delta}}$, которое, как было сказано ранее, можно рассматривать как некоторое оправдание для их аксиоматического введения. Мы исходим из реалистического представления обычных функций $\delta(\varepsilon, x)$ Дирака, т. е. таких, которые удовлетворяют условиям 3а — 3в. Определим теперь $\hat{\delta}(\varepsilon, x)$ и $\hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, x)$ следующим простым способом:

$$\hat{\delta}(\varepsilon, x) = \alpha(\varepsilon)|x|^p \frac{d}{dx}(x\delta(\varepsilon, x)), \tag{1.10}$$

$$\hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, x) = \hat{\delta}(\varepsilon, x)(1 + \omega_p|x|^p). \tag{1.11}$$

Прежде всего покажем, что $\hat{\delta}(\varepsilon, x)$ удовлетворяет аксиомам 1г — 1ж в пределе при $\varepsilon \to 0$. Для 1г и 1д это тривиально. Чтобы удовлетворялось условие 1е, величину α в (1.10) нужно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(\varepsilon, x)\, dx = 1. \tag{1.12}$$

Это всегда можно сделать, причем оказывается, что $\alpha \sim \varepsilon^{-p}$. (Например, в случае $\delta(\varepsilon, x) = (2\pi\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-x^2/2\varepsilon^2}$ найдем, что $\alpha = \varepsilon^{-p}\sqrt{\pi}\,\{2^{(p-1)/2}\Gamma[(p+1)/2]\}^{-1}$). Легко также видеть, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(\varepsilon, x)|x|^n dx = 0 \quad \text{для } n > 0. \tag{1.13}$$

Из двух последних уравнений и из факта достаточно быстрого убывания $\delta(\varepsilon, x)$ при $x \neq 0$ следует, что для нашей $\hat{\delta}$ условие 1е выполняется точно так же, как и для обычных функций Дирака.

Далее, мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\delta}(\varepsilon, x)}{|x|^p} dx = \alpha(\varepsilon)\delta(\varepsilon, x)x\,\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \tag{1.14}$$

так что условие 1ж также выполняется. Итак, аксиомы 1г — 1ж удовлетворены. Аналогичным образом для $\hat{\hat{\delta}}(x)$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, x)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, x)}{|x|^p}\,dx = \omega_p. \tag{1.15}$$

Однако можно пойти дальше. Оставив в стороне какое бы то ни было реалистическое представление, можно формально записать следующие символические уравнения:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(x) &= \alpha\,|x|^p \frac{d}{dx}(x\delta(x)),\\ \hat{\hat{\delta}}(x) &= \hat{\delta}(x)(1+\omega_p\,|x|^p), \end{aligned} \tag{1.16}$$

где $\delta(x)$ — обычные функции Дирака, а α — бесконечные постоянные, выбранные таким образом, что

$$\int_{V(0)} \hat{\delta}\,dx = 1 = \int_{V(0)} \hat{\hat{\delta}}\,dx.$$

Обобщение на случай большего числа измерений не представляет труда. Пусть мы имеем двумерное многообразие (x, y) и функцию $f(x, y)$ такую, что $f(x, y) \to 0$, когда $x, y \to 0$. Мы хотим найти такую функцию $\hat{\delta}(x, y)$, чтобы

$$\int_{V(0)} \hat{\delta}(x, y)\,dx\,dy = 1 \tag{1.17}$$

и

$$\int_{V(0)} \hat{\delta}(x, y)\,|f|^{-1}\,dx\,dy = 0. \tag{1.18}$$

Искомая функция, записанная в символической форме, имеет вид

$$\hat{\delta}(x, y) = \alpha\,|f(x, y)|\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[xy\,\delta(x, y)], \tag{1.19}$$

причем, конечно, предполагается, что величина $|f|$ такова, что интеграл (1.17) не становится тождественно равным нулю при произвольном α.

С точки зрения наших приложений наибольший интерес представляет трехмерный случай, притом, когда δ, f, а следовательно, и $\hat{\delta}$ и $\hat{\hat{\delta}}$ зависят только от r, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Этот случай с центральной симметрией можно свести к одномерному случаю.

Для обычной трехмерной функции Дирака $\delta(\mathbf{x})$ имеем

$$\int d\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}) = 1.$$

Это уравнение, так же как и другие условия для $\delta(\mathbf{x})$-функции, могут быть удовлетворены, если положить

$$\delta(\mathbf{x}) \to \frac{1}{2\pi r^2}\,\delta(r), \qquad \int_0^{\infty} \delta(r)\,dr = \frac{1}{2}. \tag{1.20}$$

Однако что касается $\hat{\delta}(r)$ и $\hat{\hat{\delta}}(r)$, то для них мы хотим, чтобы, кроме тех же нормировочных условий (1.20), выполнялись также уравнения

$$\int_0^{\infty} \frac{\hat{\delta}(r)}{r^p}\,dr = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \frac{\hat{\hat{\delta}}(r)}{r^p}\,dr = \frac{1}{2}\,\omega_p. \tag{1.21}$$

Поэтому если мы определим

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) \to \frac{1}{2\pi r^2}\,\hat{\delta}(r), \quad \hat{\hat{\delta}}(\mathbf{x}) \to \frac{1}{2\pi r^2}\,\hat{\hat{\delta}}(r), \tag{1.22}$$

то, как легко видеть,

$$\int d\mathbf{x}\,\frac{\hat{\delta}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^p} = 0, \qquad \int d\mathbf{x}\,\frac{\hat{\hat{\delta}}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^p} = \omega_p. \tag{1.23}$$

Эти $\hat{\delta}$- или $\hat{\hat{\delta}}$-функции как ядра интегрального оператора ведут себя по отношению к непрерывным функциям точно так же, как обычные δ-функции Дирака. Кроме того, они позволяют придать определенные значения интегралам от произведений этих $\hat{\delta}$- или $\hat{\hat{\delta}}$-функций с такими функциями, которые при $\mathbf{x} \to 0$ обращаются в бесконечность. С нашей точки зрения, это наиболее важно для $\hat{\delta}$-функций. Мы будем предполагать, что они выбираются таким образом, что в каждом конкретном случае интегралы от этих $\hat{\delta}$-функций, умноженных на функции, обращающиеся в бесконечность при $\mathbf{x} = 0$, равны нулю. Выбираемые таким образом $\hat{\delta}$-функции мы будем называть „хорошими“ δ-функциями. Применение этих функций эквивалентно процедуре регуляризации, которая, таким образом, уже содержится в используемом нами математическом аппарате.

Иногда нам требуются „хорошие“ трехмерные δ-функции, которые удовлетворяли бы нашему условию (1.23) не только для некоторого одного значения p, а для целой конечной серии значений p, например для $p = 1, 2, 3, \ldots, k$. Покажем, что для такой функции также можно построить реалистическую модель.

Будем исходить из некоторой модели обычной δ-функции Дирака, удовлетворяющей условию

$$\delta(\varepsilon, \mathbf{x}) = \varepsilon^{-3}\Delta\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right), \tag{1.24}$$

где $\Delta(z)$ такова, что

$$D_p = 4\pi\int_0^\infty dz z^{2-p}\Delta(z) \equiv \int_\infty dz\,\Delta(|\mathbf{z}|)\,|\mathbf{z}|^{-p}, \tag{1.25a}$$

причем

$$D_0 = 1, \quad D_p \neq 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.25б}$$

Кроме того, потребуем, чтобы $\Delta(z)$, определенная на интервале $(0, \infty)$, имела все производные и чтобы последние убывали при $z \to \infty$ по крайней мере экспоненциально.

Практически для любой модели обычной δ-функции Дирака можно найти соответствующую модель Δ-функции, удовлетворяющей условию (1.25). Если выбранная $\Delta(z)$ не обладает таким свойством, то этого можно достичь, умножая ее на z^{k-2} и ренормируя. Пусть, например,

$$\delta(\varepsilon, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2}\varepsilon^{-3}e^{-\frac{1}{2|\mathbf{x}|^2\varepsilon^{-2}}};$$

тогда

$$\Delta(z) = (2\pi)^{-3/2}e^{-1/2z^2}$$

не обладает свойством (1.25), но функция

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi\cdot 2^{(k+1)/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}z^{k-2}e^{-1/2z^2}$$

уже будет обладать этим свойством. В рассматриваемом случае величины D_p имеют вид

$$D_p = 2^{-p/2}\frac{\Gamma\left(\frac{k-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

Теперь, когда мы имеем $\Delta(z)$, удовлетворяющую (1.25), и, следовательно, модель обычной δ-функции Дирака, можно построить простую модель „хорошей“ функции $\hat{\delta}(\varepsilon, \mathbf{x})$. Она имеет вид

$$\hat{\delta}(\varepsilon, \mathbf{x}) = \hat{T}_\varepsilon\delta(\varepsilon, \mathbf{x}), \tag{1.26}$$

где $\hat{T}_\varepsilon$ — оператор вида

$$\hat{T}_\varepsilon = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^k\varepsilon^k. \tag{1.27}$$

Действительно, в этом случае мы имеем

$$\int_\infty \hat{\delta}(\varepsilon, \mathbf{x})\,|\mathbf{x}|^{-p}\,d\mathbf{x} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^k\varepsilon^{k-p}\int_0^\infty\Delta(z)\,z^{2-p}\,dz =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^k\varepsilon^{k-p}D_p = \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0, \\ 0 & \text{при } p = 1, 2, \ldots, k. \end{cases} \tag{1.28}$$

Несколько более сложно определить функцию $\hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, \mathbf{x})$. Как и в предыдущем случае, вводим сначала δ-функцию, которая удовлетворяет (1.25). После этого определяем $\hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, \mathbf{x})$

$$\hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, \mathbf{x}) = \hat{\hat{T}}_\varepsilon\delta(\varepsilon, \mathbf{x}), \tag{1.29}$$

$$\hat{\hat{T}}_\varepsilon = \frac{1}{k!}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\frac{\omega_s}{D_s}\binom{k}{s}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^{k-s}\varepsilon^{k-s}\left(\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^s. \tag{1.30}$$

Легко видеть, что $\hat{\hat{T}}_\varepsilon$ является обобщением $\hat{T}_\varepsilon$ и переходит в него при $\omega_p = 0$, $p = 1, 2, \ldots, k$.

Вычислим теперь интеграл

$$\int_\infty d\mathbf{x}\hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, \mathbf{x})|\mathbf{x}|^{-p} = \hat{\hat{T}}_\varepsilon\varepsilon^{-p}4\pi\int_0^\infty dz\,z^{2-p}\Delta(z) = D_p\hat{\hat{T}}_\varepsilon\varepsilon^{-p}. \tag{1.31}$$

Мы знаем, что

$$(-1)^s\left(\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^s\varepsilon^{-p} = \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon^{-1}}\right)^s(\varepsilon^{-1})^p = \begin{cases} 0 & \text{при } s > p, \\ s!\binom{p}{s}\varepsilon^{s-p} & \text{при } s \leqslant p. \end{cases} \tag{1.32}$$

Следовательно,

$$\hat{\hat{T}}_\varepsilon\varepsilon^{-p} = \frac{1}{k!}\sum_{s=0}^{p}\frac{\omega_s}{D_s}s!\binom{k}{s}\binom{p}{s}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^{k-s}\varepsilon^{k-p}. \tag{1.33}$$

Мы знаем также, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^{k-s}\varepsilon^{k-p} = \begin{cases} 0 & \text{при } s < p, \\ (k-p)! & \text{при } s = p. \end{cases} \tag{1.34}$$

Таким образом, имеем окончательно

$$\int_\infty d\mathbf{x}\,\hat{\hat{\delta}}(\varepsilon, \mathbf{x})|\mathbf{x}|^{-p} = D_p\hat{\hat{T}}_\varepsilon\varepsilon^{-p} = D_p\frac{\omega_p}{D_p}\binom{k}{p}\binom{p}{p}\frac{p!\,(k-p)!}{k!} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{для } p = 0, \\ \omega_p & \text{для } p = 1, 2, \ldots, k. \end{cases} \tag{1.35}$$

Имеется еще одна формальная проблема, связанная с использованием $\hat{\delta}$- или $\hat{\hat{\delta}}$-функций, которую мы должны обсудить здесь. Начнем наше обсуждение с некоторого примера. Предположим, что при вычислениях, проводимых с использованием (одномерных) $\hat{\delta}$-функций, мы сталкиваемся с выражением

$$\int\limits_{\infty} \frac{\hat{\delta}(x')\,\hat{\delta}(x'')}{|x'-x''|}\,dx'\,dx''. \tag{1.36}$$

Выясним, чему равно такое выражение. Запишем вместо него

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\infty} \frac{\hat{\delta}(x')\,\hat{\delta}(\varepsilon, x'')}{|x'-x''|}\,dx'\,dx''. \tag{1.37}$$

Но это выражение имеет вполне определенный смысл и, согласно аксиоме 1е, оно равно

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\delta}(\varepsilon, x'')}{|x''|}\,dx'' = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\delta}(x'')}{|x''|}\,dx''. \tag{1.38}$$

Но это выражение равно нулю при надлежащим образом выбранной $\hat{\delta}$. Мы видим также, что этот результат не зависит от того, какую из δ-функций в (1.36), $\hat{\delta}(x')$ или $\hat{\delta}(x'')$, представим в виде протяженной функции. Это объясняется тем, что в функцию $|x'-x''|^{-1}$ переменные x' и x'' входят симметрично.

Эту теорему можно, очевидно, обобщить на случай интеграла от произведения произвольного числа одномерных $\hat{\delta}$-функций. Интеграл будет вполне определенным, если одну из $\hat{\delta}$ оставить в виде $\hat{\delta}$-функции, а остальные представить в виде протяженных $\hat{\delta}(\varepsilon, x)$-функций с одним и тем же ε. Таким образом, имеет место следующая теорема:

$$\int\limits_{\infty} f(x_1, \dots, x_n)\,\hat{\delta}(x_1)\dots\hat{\delta}(x_n)\,dx_1\dots dx_n = f(0, \dots, 0), \tag{1.39}$$

если $f(0, \dots, 0)$ конечна, и этот интеграл равен нулю, если $f(0, \dots, 0) = \infty$ и если $\hat{\delta}$ могут быть выбраны и действительно выбраны так, что $\int\limits_{\infty} \hat{\delta}(x_k)\,f(0, \dots, x_k, \dots, 0)\,dx_k$ равен нулю при всех k. Дальнейшее обобщение этой процедуры, например на случай 2×3-мерного пространства, является тривиальным. Сформулированное здесь правило позволит нам избежать всех бесконечных выражений, появляющихся в наших вычислениях.

Понятия „точечных масс“, „точечных зарядов“ — это, конечно, фиктивные понятия, которые вводятся в теорию, чтобы простым образом описать сложную физическую реальность. Именно эти понятия адекватно описываются δ-функцией Дирака.

С другой стороны, если мы имеем дело с непрерывным распределением плотности, сконцентрированной, скажем, в окрестности точки x_0, то в этом случае объемные интегралы от произведений ρ на $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{-p}$, вообще говоря, будут существовать и иметь определенные значения. Это во всяком случае очевидно, если $\rho(\mathbf{x}_0)\neq 0$ и $p<3$. Значения таких интегралов, соответствующие нашим величинам ω_p, характеризуют в известной мере непрерывную структуру функции плотности.

Наши же $\hat{\hat{\delta}}$ стягивают такое непрерывное распределение в точку таким образом, что в наших расчетах остаются в форме величин ω_p основные черты внутренней структуры „точечных масс“ или „точечных зарядов“. Однако их всегда можно устранить при помощи процесса ренормировки. Таким образом, всегда удобнее использовать не δ и не $\hat{\hat{\delta}}$, а наши $\hat{\delta}$, так как тем самым мы избегаем и бесконечностей и ренормировочной процедуры.

Итак, в этой книге мы проводим удобный метод рассмотрения, т. е. используем $\hat{\delta}$-функции, соответствующие выбору $\omega_p = 0$. Все δ-функции, встречающиеся в тексте, являются „хорошими“ $\hat{\delta}$-функциями, обозначенными в этом параграфе через $\hat{\delta}$, если не оговорено противное.

2. ПОЛЕ НА МИРОВЫХ ЛИНИЯХ

Решения уравнений поля, с которыми мы встречаемся в настоящей книге, являются функциями мировых точек $x^\alpha = (x^0, x^k)$, но, кроме того, они находятся в функциональной зависимости от координат сингулярностей.

Предположим, что имеется N сингулярностей, движение которых задано в параметрической форме при помощи уравнений $\overset{A}{\xi}{}^{\alpha} = \overset{A}{\xi}{}^{\alpha}(\overset{A}{\lambda})$. Здесь индекс A означает номер сингулярности (так что $A = 1, 2, \dots, N$). Суммирование по A следует производить лишь при наличии символа суммирования. Через $\overset{A}{\lambda}$ обозначен инвариантный параметр A-й мировой линии. Таким образом, если обозначить через f какую-либо компоненту поля, то

$$f = f(x^\alpha)[\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \dots, \overset{N}{\xi}]. \tag{2.1}$$

где квадратная скобка использована для обозначения функциональной зависимости.

Рассмотрим теперь уравнение

$$x^0 = \overset{A}{\xi}{}^0 (\overset{A}{\lambda})$$

и предположим, что оно однозначно определяет $\overset{A}{\lambda}$ как функцию x^0: $\overset{A}{\lambda} = \overset{A}{\lambda}(x^0)$. Тогда уравнения A-й мировой линии, используя в качестве параметра x^0, можно записать в виде

$$\overset{A}{\xi}{}^a = \overset{A}{\xi}{}^a (x^0), \quad a = 1, 2, 3, \quad A = 1, 2, \ldots, N.$$

Эти функции, если они аналитичны по x^0, полностью определяются своими значениями и значениями всех своих производных в некоторой произвольной точке. Следовательно, функциональная зависимость может быть заменена обычной зависимостью от бесконечного числа аргументов, а именно от всех производных в некоторый момент времени $\overset{A}{x}{}^0$. Это $\overset{A}{x}{}^0$ можно выбрать так, чтобы оно было одинаковым для всех частиц и совпадало с x^0, фигурирующим в $f(x^0, x^k)$. Таким образом, f из (2.1) можно записать в виде

$$f = f(x^0, x^a, \overset{A}{\xi}{}^a (x^0), \overset{A}{\xi}{}^a (x^0)_{|0}, \overset{A}{\xi}{}^a (x^0)_{|00}, \ldots). \tag{2.2}$$

Вследствие используемого метода приближений в практических приложениях в выражениях такого типа будут фигурировать производные по времени только первого и второго порядка.

Функция f может (и, как правило, будет) иметь сингулярность на A-й мировой линии. Однако, несмотря на это обстоятельство, значению f на A-й мировой линии можно придать определенный смысл. Для этого мы используем наши „хорошие“ δ-функции. Определим f вдоль мировой линии A, обозначая эту величину через $\overset{A}{\tilde{f}}$, при помощи уравнения

$$\overset{A}{\tilde{f}} = \int d\mathbf{x}\, \delta(\mathbf{x} - \overset{A}{\boldsymbol{\xi}}(x^0))\, f(x^0, \mathbf{x}) [\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{N}{\xi}]. \tag{2.3}$$

Почти не теряя общности, ограничимся случаем, когда имеется только одна мировая линия, и не будем писать „1“ над знаком „$\sim$“.

Выясним, в чем заключается процесс определения f вдоль мировой линии, который будем называть для краткости процессом „препарирования“.

Начнем с рассмотрения простого примера:

$$f = \frac{a_{-1}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} + a_0 + a_s (x^s - \xi^s) + \frac{1}{2} a_{sr} (x^s - \xi^s)(x^r - \xi^r) + \ldots, \tag{2.4}$$

где a — функции только x^0. Тогда, используя определение (2.3), будем иметь

$$\tilde{f} = a_0, \quad \widetilde{f_{|s}} = a_s, \quad \widetilde{f_{|sr}} = a_{sr}. \tag{2.5}$$

Таким образом, процесс „препарирования“ состоит из двух операций: во-первых, в отбрасывании сингулярной части f и, во-вторых, в замене x^k на $\xi^k(x^0)$ в регулярной части f. Тем самым „препарированное“ выражение становится функцией только x^0.

Предположим теперь, что f представляет собой сумму выражений следующего типа:

$$\varphi = \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^n} \frac{(x^1 - \xi^1)^p (x^2 - \xi^2)^q (x^3 - \xi^3)^s}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{p+q+s}}. \tag{2.6}$$

В этом случае мы видим, что:

1) $\tilde{\varphi} = 0$ при $n > 0$;

2) $\tilde{\varphi} = 0$, если хотя бы одно из p, q, s — нечетное. Это справедливо при любом n, а следовательно, и при $n = 0$, так как $\delta(\mathbf{x})$ является сферически-симметричной функцией по $\mathbf{x}$;

3) когда $n = 0$ и p, q, s — четные числа, можно легко вычислить $\tilde{\varphi}$, используя сферическую систему координат.

Применяя операцию „препарирования“, следует быть осторожным и четко различать выражения

$$\widetilde{\varphi_{|s}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi^s} = \tilde{\varphi}_{|\xi^s}, \tag{2.7}$$

последнее из которых мы иногда будем обозначать через $\tilde{\varphi}_{|s}$.

Эти величины определяются формулами

$$\widetilde{\varphi_{|s}} = \int \varphi_{|s} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\, d\mathbf{x}, \tag{2.8}$$

$$\tilde{\varphi}_{|s} = \frac{\partial}{\partial \xi^s} \int \varphi \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\, d\mathbf{x} = \frac{\widetilde{\partial \varphi}}{\partial \xi^s} + \widetilde{\varphi_{|s}}. \tag{2.9}$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi_{|s}}$ и $\tilde{\varphi}_{|s}$ равны только в том случае, если

$$\frac{\widetilde{\partial \varphi}}{\partial \xi^s} = \widetilde{\varphi_{|\xi^s}} = 0, \tag{2.10}$$

т. е. если φ не зависит явно от ξ^s. В противном случае имеем

$$\tilde{\varphi}_{|s} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi^s} = \frac{\widetilde{\partial \varphi}}{\partial \xi^s} + \widetilde{\varphi_{|s}}. \tag{2.11}$$

Отметим еще одну формулу, вытекающую из определения (2.3), которая в дальнейшем будет играть важную роль,

$$\tilde{\varphi}_{|0} = \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x^0} = \frac{d}{dx^0}\int \varphi\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,d\mathbf{x} = \widetilde{\varphi_{|0}} + \widetilde{\varphi_{|s}\xi^s_{|0}}. \qquad (2.12)$$

Так как $\xi^0_{|0} = x^0_{|0} = 1$, то эту формулу можно записать также в виде

$$\tilde{\varphi}_{|0} = \widetilde{\varphi_{|\alpha}\xi^\alpha_{|0}} = \widetilde{\varphi_{|0}} + \widetilde{\varphi_{|s}\xi^s_{|0}}. \qquad (2.13)$$

Предположим теперь, что имеются две переменные поля ψ и φ, обе сингулярные на мировой линии ξ. Спрашивается, будет ли выполняться равенство

$$\widetilde{\varphi\psi} = \tilde{\varphi}\,\tilde{\psi}. \qquad (2.14)$$

Оно заведомо выполняется, если оба поля не сингулярны. Однако если хотя бы одно из них сингулярно, то этого утверждать нельзя. В самом деле, сингулярная часть, скажем ψ, будучи умноженной на регулярную часть φ, может дать вклад в $\widetilde{\psi\varphi}$, не представленный в произведении $\tilde{\psi}\,\tilde{\varphi}$, поскольку в последнем выступают только регулярные части обеих функций. Однако существует частный случай, особенно важный для дальнейших приложений, когда равенство (2.14) выполняется. Это случай, когда сингулярные части ψ и φ содержат только нечетные степени $|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$, т. е.

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{a_{-(2s+1)}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^{2s+1}} + \ldots + \frac{a_{-3}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} + \frac{a_{-1}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} + \\ &\qquad + \text{Регулярная часть}, \\ \varphi &= \frac{b_{-(2p+1)}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^{2p+1}} + \ldots + \frac{b_{-3}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^3} + \frac{b_{-1}}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} + \\ &\qquad + \text{Регулярная часть}.\end{aligned} \qquad (2.15)$$

Здесь мы видим, что единственно возможные вклады, проистекающие от произведений сингулярного и регулярного выражений, имеют вид

$$\frac{(x^1-\xi^1)^s(x^2-\xi^2)^p(x^3-\xi^3)^q}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|^{2n+1}}, \quad \text{где} \quad s+p+q = 2n+1,$$

так как регулярные части ψ и φ содержат лишь члены, имеющие вид числителя последнего выражения.

Но интеграл от такого выражения, умноженного на $\delta(\mathbf{x})$, равен нулю, так как s, p, q не могут одновременно являться четными числами, а $\delta(\mathbf{x})$ — сферически-симметрична.

Как мы увидим, все выражения, с которыми нам придется иметь дело при расчетах, будут такого типа. Для них

$$\widetilde{\psi\varphi} = \tilde{\psi}\,\tilde{\varphi}. \qquad (2.16)$$

Это равенство, которое мы для краткости назовем „препарированием" произведения, предполагается справедливым на протяжении всей книги. Позже на конкретных расчетах мы убедимся, что оно в самом деле выполняется.

3. КОВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА δ-ФУНКЦИЙ. ТЕНЗОРЫ НА МИРОВЫХ ЛИНИЯХ

Возникает вопрос: каковы трансформационные свойства обычных δ-функций Дирака в четырех измерениях? Эти δ-функции мы определяем, обобщая аксиомы 1а — 1в (стр. 178) на случай четырех измерений. Ответ на поставленный вопрос довольно прост. Очевидно, должно выполняться равенство

$$\int dx\ \delta_{(4)}(x) = 1. \qquad (3.1)$$

Это равенство должно иметь ковариантный характер. Так как интеграл будет инвариантом, только если подынтегральное выражение представляет собой скалярную плотность, то мы заключаем, что $\delta_{(4)}$ является скалярной плотностью и, следовательно, $\delta_{(4)}(-g)^{-1/2}$ есть скаляр. (Было бы более последовательным использовать δ-функции иного типа. Мы, однако, не будем делать этого и будем рассматривать $\delta_{(4)}$ как скалярную плотность.)

Пусть $\xi^\alpha(\lambda)$ — некоторая мировая линия, причем такая, что уравнение $\xi^0 = x^0 = \xi^0(\lambda)$ дает возможность выразить параметр λ как функцию от x^0. Рассмотрим теперь некоторый тензор $T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}(\lambda)$, определенный только на такой мировой линии. Это означает, что при произвольном преобразовании координат $x^\alpha = x^\alpha(x')$ такой тензор преобразуется по формуле

$$T'^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}(\lambda) = \left(\frac{\partial x'^{\alpha_1}}{\partial x^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\alpha_p}}{\partial x^{\nu_p}}\,\frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu_q}}{\partial x'^{\beta_q}}\right)\Bigg|_{x=\xi(\lambda)} T^{\nu_1\ldots\nu_p}_{\mu_1\ldots\mu_q}(\lambda). \qquad (3.2)$$

К таким тензорам, определенным вдоль мировой линии, применимы правила тензорной алгебры, однако к ним не применим тензорный анализ. Последний имеет силу лишь по отношению к тензорным полям. Мы можем, по крайней мере символически, превратить тензор, определенный вдоль мировой линии, в тензорное поле, или, точнее, в поле тензорной плотности. Это можно сделать следующим путем:

$$\mathfrak{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \delta_{(4)}(x - \xi(\lambda)) T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(\lambda). \tag{3.3}$$

Конечно, такая тензорная плотность обращается в нуль вне мировой линии и сингулярна на этой линии. Однако формально ее можно рассматривать как поле тензорной плотности. Легко проверить, что эта величина преобразуется, как поле тензорной плотности. Это следует из (3.2), из того факта, что $\delta_{(4)}$ есть скалярная плотность и, наконец, из условия (для непрерывных функций)

$$\delta_{(4)}(x - \xi) f(x) = \delta_{(4)}(x - \xi) f(\xi).$$

Как конкретное приложение этой идеи, рассмотрим в качестве $T^{\dots}_{\dots}(\lambda)$ некоторый вектор, определенный только вдоль кривой, а именно $d\xi^\alpha/d\lambda$. Этот вектор можно символически превратить в поле векторной плотности

$$\mathfrak{u}^0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda \delta_{(4)}(x - \xi) \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda}. \tag{3.4}$$

Нас будет особенно интересовать нулевая компонента этого поля

$$\mathfrak{u}^0(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi^0 \delta_{(4)}(x - \xi) = \delta_{(3)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(x^0)) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}). \tag{3.5}$$

Поскольку дело касается трансформационных свойств, это уравнение можно рассматривать как определение $\delta_{(3)}$; а именно она является нулевой компонентой поля векторной плотности.

Функция $\delta_{(4)}$, которая сама будет крайне редко встречаться в практических приложениях, была введена нами исключительно для того, чтобы выяснить трансформационные свойства $\delta_{(3)}$. Так как мы хотим, чтобы $\delta_{(3)}$ была одной из наших „хороших“ δ-функций, то необходимо переопределить $\delta_{(4)}$ таким образом, чтобы в (3.5) появилась „хорошая“ δ-функция. Сделать это не представляет труда. Для этого нужно потребовать, чтобы $\delta_{(4)}$ удовлетворяла аксиомам 1а — 1в (стр. 178) для четырехмерного многообразия и, кроме того, удовлетворяла (3.5), где δ является „хорошей“ δ-функцией. Тем самым (3.5) определяет как трансформационные свойства $\delta_{(3)}$, так и структуру $\delta_{(4)}$.

Нас не должно беспокоить то обстоятельство, что $\delta_{(3)}$ обладает довольно сложными трансформационными свойствами, так как она

появляется (в вычислениях) всегда вместе с $d\mathbf{x}$. В самом деле, функция $f(x^0, x^k)$ умножается на δ и интегрируется по окрестности $V(\boldsymbol{\xi})$ точки $\boldsymbol{\xi}$ на мировой линии, соответствующей определенному моменту времени x^0, в результате чего, учитывая (3.5), находим

$$\int\limits_{V(\xi)} f\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{V(\xi)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\, d\xi^0 \delta_{(4)}(x - \xi)\, d\mathbf{x} = f(\xi^0, \xi^n). \tag{3.6}$$

Полагая $f = 1$, имеем

$$\int \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\, d\mathbf{x} = 1, \tag{3.7}$$

откуда следует, что величину $\delta\, d\mathbf{x}$ можно рассматривать как инвариант.

Наличие связи (3.5) между $\delta_{(4)}$ и δ позволяет записать уравнения (3.3) иным способом:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi^0 \frac{d\lambda}{d\xi^0} \delta_{(4)}(x - \xi) T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(\lambda(\xi^0)) = \\ &= \frac{d\lambda}{d\xi^0} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(\lambda(\xi^0))\Big|_{\xi^0 = x^0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi^0 \delta_{(4)}(x - \xi(\xi^0)) = \\ &= \frac{d\lambda}{d\xi^0} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(\lambda(x^0))\, \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}(x_0)).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Последнее уравнение показывает, что сингулярность символического поля тензорной плотности $\mathfrak{T}$ имеет характер δ-функции вдоль мировой линии. Из него можно вывести обратную формулу, выражающую тензор вдоль мировой линии через поле тензорной плотности,

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(\lambda) = \frac{d\xi^\rho}{d\lambda} \int\limits_{\sigma} d\sigma\, n_\rho \mathfrak{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x), \tag{3.9}$$

где σ — некоторая гиперповерхность, на которой лежит точка $x^\alpha = \xi^\alpha(\lambda)$.

Эти символические поля, определяемые формулой (3.3), будут играть важную роль в наших исследованиях. Такие поля формально обладают теми же свойствами по отношению к параллельному переносу и ковариантному дифференцированию, что и обычные тензорные плотности.

БИБЛИОГРАФИЯ[1])

Bażański S., Acta Phys. Polon., **15**, 363 (1956) (I).
Уравнения движения заряженных частиц в общей теории относительности.

Bażański S., Acta Phys. Polon., **16**, 423 (1957) (IV).
Функция Лагранжа для движеиия заряженных частиц в общей теории относительности.

Bergmann P. G., Introduction to the Theory of Relativity, New York, 1948 (см. перевод 1-го изд.: Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947).

Bergmann P. G., Phys. Rev., **75**, 680 (1949) (I, VI).
Нелинейные теории поля.

Bertotti B., Nuovo Cimento, **12**, 226 (1954) (II, III).
О задаче двух тел в общей теории относительности.

Bertotti B., Nuovo Cimento, **3**, 655 (1956) (IV).
Движение в гравитационном поле и принцип Гамильтона.

Bonnor W. B., Phil. Trans. (London) **A251**, 233 (1959) (VI).
Сферические гравитационные волны.

Chase D. M., Phys. Rev., **95**, 243 (1954) (I).
Уравнения движения заряженных пробных частиц в общей теории относительности.

Eddington A., Clark G., Proc. Roy. Soc., **A166**, 465 (1938) (II, III).
Задача n тел в общей теории относительности.

Einstein A., Phys. Zs., **10**, 185 (1909) (VI).
Современное состояние проблемы излучения.

Einstein A., Ritz W., Rhys. Zs., 10, 323 (1909) (VI).
Современиое состояние проблемы излучения.

Einstein A, Grommer J., Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., **1**, 2 (1927) (I).
Общая теория относительности и закон движения.

Einstein A., Infeld L., Hoffmann B., Ann. Math., 39, 65 (1938) (II, III, VI).
Уравнения тяготения и проблема движения.

Einstein A., Infeld L., Ann. Math., **41**, 455 (1940) (II, III)
Уравнеиия тяготения и проблема движения.

Einstein A., Infeld L., Canad. Journ. Math., **1**, 209 (1949) (II, III, VI).
О движении частиц в общей теории относительности.

Фихтенгольц И. Г., ДАН СССР, **64**, 325 (1949) (V).
Об интегралах движения центра инерции системы конечных масс в общей теории относительности.

Фихтенгольц И. Г., ЖЭТФ, **20**, 233 (1950) (IV).
Лагранжева форма уравнений движения во втором приближении теории тяготения Эйнштейна.

[1]) Римские цифры в скобках указывают номер главы настоящей книги, к которым относится работа.

Фихтенгольц И. Г., ЖЭТФ, **20**, 824 (1950) (III, V).
Задача двух конечных тел во втором приближении теории тяготения Эйнштейна.

Фихтенгольц И. Г., ЖЭТФ, **21**, 648 (1951) (IV, V).
Об антисимметричном тензоре момента количества движения.

Фок А. В., Journ. of Phys. (СССР), **1**, 81 (1939) (I—III).
О движении конечых масс в общей теории относительности.

Фок В. А., ЖЭТФ, **9**, 375 (1939) (I — III).
О движении конечных масс в общей теории относительности.

Фок В. А., ДАН СССР, **32**, 25 (1941) (V).
Об интегралах движения центра инерции двух конечных масс в общей теории относительности.

Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2-е изд., М. — Л., 1961.

Фок В. А., Helv. Phys. Acta, Suppl. IV, 171 (1956) (I).
О привилегированных системах координат в теории тяготения Эйнштейна. К 50-летию теории относительности.

Фок В. А., Rev. Mod. Phys., **29**, 325 (1957) (I, VI).
Три лекции по теории относительности.

Fokker A. D., Zs. f. Phys., **58**, 386 (1929) (IV).
Инвариантный вариационный принцип для движения нескольких электрически заряженных материальных частиц.

Goldberg J., Phys. Rev., **89**, 263 (1953) (VI).
Сильные законы сохранения и уравнения движения в ковариантных теориях поля.

Goldberg J., Phys. Rev., **99**, 1873 (1955) (VI).
Гравитационное излучение.

Havas P., Phys. Rev., **108**, 1351 (1957) (VI).
Радиационное торможение в общей теории относительности.

Haywood J. H., Proc. Phys. Soc. (London), **A65**, 170 (1952) (I, II).
Уравнения движения и координатное условие в общей теории относительности.

Haywood J. H., Proc. Phys. Soc. (London), **A69**, 2 (1956) (IV, V).
Уравнения движения вращающихся тел в общей теории относительности.

Hennequin F., Étude mathématique des approximations en relativité générale et en théorie unitaire de Jordan — Thiry, Paris, 1958.
Математическое изучение приближений в общей теории относительности и единой теории Йордана — Тири.

Hoang Phan Tan, Compt. Rend., **243**, 1292 (1956) (I).
Применение изотермических координат для определения уравнений движения в общей теории относительности.

Hu N., Proc. Roy. Irish Acad., **A51**, 87 (1947) (VI).
Радиационное торможение в общей теории отиосительности.

Infeld L., Phys. Rev., **53**, 836 (1938) (VI).
Электромагнитное и гравнтационное излучение.

Infeld L., Wallace P. R., Phys. Rev., **57**, 797 (1940) (I).
Уравнения движения в электродинамике.

Infeld L., Schild A., Rev. Mod. Phys., **21**, 408 (1949) (I).
О движении пробных частиц в общей теории относительности.

Infeld L., Scheidegger A. E., Canad. Journ. Math., **3**, 195 (1951) (VI).
Излучение и гравитационные уравнения движения.

Infeld L., Canad. Journ. Math., **5**, 17 (1953) (I, V).
Координатные условия и уравнения движения.

Infeld L., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 3, 213 (1955) (I).
Уравнения движения в линейных теориях поля.
Infeld L., Acta Phys. Polon., 13, 187 (1954) (II, III).
О движении тел в общей теории относительности.
Infeld L., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 2, 163 (1954) (I).
Уравнения движения и негармонические координатные условия.
Infeld L., Plebański J., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 689 (1956) (Приложение 1).
Модифицированные δ-функции Дирака.
Infeld L., Plebański J., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 757 (1956) (I).
О ковариантной формулировке уравнения движения.
Infeld L., Plebański J., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, 51 (1957) (Приложение 1).
Дальнейшая модификация δ-функций Дирака.
Infeld L., Rev. Mod. Phys., 29, 398 (1957) (IV).
Уравнения движения в общей теории относительности и принцип действия (см. перевод в сб. „Новейшие проблемы гравитации", ИЛ, 1961).
Infeld L., Ann. of Phys., 6, 341 (1959) (VI).
Уравнения движения и гравитационное излучение (см. перевод в сб. „Новейшие проблемы гравитации", ИЛ, 1961).
Иваненко Д., Бродский А. М., ДАН СССР, 75, 519 (1950) (VI).
Гравитационное лучистое трение.
Кашкаров В. П., ЖЭТФ, 27, 563 (1954) (III, IV).
Об уравнениях движения системы конечных масс в теории тяготения Эйнштейна.
Kerr R. P., Nuovo Cimento, 13, 469, 492 (1959) (I, IV).
Лоренц-ковариантный метод приближений в общей теории относительности.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 2-е изд., М., 1960.
Levi-Civita T., Amer. Journ. Math., 59, 9, 225 (1937) (II, III).
Релятивистская задача нескольких тел.
Levi-Civita T., Mem. Sci. Math., 116, 111, Paris, 1950 (III).
Задача n тел в общей теории относительности.
Lichnerowicz A., Journ. Math. Pures et Appl., 23, 37 (1944).
Интегрирование уравнений тяготения и задача n тел.
Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'electromagnétism, Paris, 1955.
Релятивистские теории гравитации и электромагнетизма.
Lubański J., Acta Phys. Polon., 6, 356 (1937) (IV).
Новые уравнения движения материальных систем в мире Минковского.
Mathisson M., Zs. f. Phys., 67, 270 (1931) (I, III).
Законы инерции в общей теории относительности.
Mathisson M., Zs. f. Phys., 67, 826 (1931) (I).
Механика материальных частиц в общей теории относительности.
Mathisson M., Zs. f. Phys., 69, 389 (1931) (I).
Проблема движения в теории поля и константы электрона.
Mathisson M., Acta Phys. Polon., 6, 163 (1937) (I).
Новая механика материальной системы.
Meister H. J., Papapetrou A., Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 3, 163 (1955) (I).
Уравнения движения в общей теории относительности и координатное условие.

Michalska R., Bull. Acad. Polon. Sci. (в печати) (IV, V).
Принцип действия для движения вращающихся тел в общей теории относительности.
Michalska R., Bull. Acad. Polon. Sci. (в печати) (IV, V).
Уравнения движения вращающихся сплющенных тел в общей теории относительности.
Møller C., Commun. Dublin Inst. Advanced Stud., 5, 42 (1949) (V).
Об определении центра тяжести произвольной замкнутой системы в общей теории относительности.
Møller C., Ann. Inst. H. Poincaré, 11, 251 (1949) (IV).
О динамике систем с внутренним моментом количества движения.
Møller C., Max-Planck-Festschrift 1958, Berlin, 1958 (VI).
Энергия незамкнутых систем в общей теории относительности (см. перевод в сб. „Новейшие проблемы гравитации", ИЛ, 1961).
Narlikar V. V., Rao B. R., Proc. Nat. Inst. Sci. India, A21, 416 (1955) (II, III).
Проблема движения в общей теории относительности.
Noether E., Nachr. Ges. Göttingen, math.-phys. Kl., 235 (1918) (I, III, V).
Инвариантные вариационные задачи (см. перевод в сб. „Вариационные принципы механики", М., 1959).
Papapetrou A., Proc. Phys. Soc. (London), A64, 57 (1951) (II, III).
Уравнения движения в общей теории относительности.
Papapetrou A., Proc. Phys. Soc. (London), A64, 302 (1951) (I).
Уравнения движения в общей теории относительности, II. Координатное условие.
Papapetrou A., Proc. Roy. Soc. (London), A209, 248, 259 (1951) (IV, V).
Вращающиеся пробные частицы в общей теории относительности, I и II.
Penfield R. H., Zatzkis H., Acta Phys. Austr., 10, 87 (1956) (II, III).
Определение уравнений движения из общей, ковариантной, нелинейной теории поля при помощи метода приближений Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана.
Peres A., Nuovo Cimento, 11, 617, 644 (1959); 13, 437 (1959) (VI).
Движение в гравитационном поле и излучение, I, II и III.
Петрова Н. М., ЖЭТФ, 19, 989 (1949) (II, III).
Об уравнении движения и тензоре материи для системы конечных масс в общей теории относительности.
Plebański J., Bażański S., Acta Phys. Polon., 18, 307 (1959) (IV).
Общий принцип действия Фоккера и его применение в общей теории относительности.
Ritz W., Ann. Chim. et Phys. (8), 13, 145 (1908) (VI).
Критические исследования по общей электродинамике.
Ritz W., Phys. Zs., 9, 903 (1908) (VI).
Основы электродинамики и теория черного излучения.
Robertson H. P., Ann. Math., 39, 101 (1938) (V).
Замечание к предыдущей статье[1]: задача двух тел в общей теории относительности.
Рябушко А. П., ЖЭТФ, 33, 1387 (1957) (IV).
Об уравнениях движения вращающихся масс в общей теории относительности.
Scheidegger A. E., Helv. Phys. Acta, 23, 740 (1950) (I).
О связи между уравнениями поля и уравнениями движения.

[1]) Имеется в виду работа 1938 г. Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана.

Scheidegger A. E., Phys. Rev., **82**, 883 (1951) (VI).
Гравитационные поперечно-поперечные волны.
Scheidegger A. E., Rev. Mod. Phys., **25**, 451 (1953) (VI).
Движение в гравитационном поле.
Scheidegger A. E., Phys. Rev., **99**, 1883 (1955) (VI).
Гравитационное излучение.
Широков М. Ф., ЖЭТФ, **27**, 251 (1954) (V).
О центре инерции в общей теории относительности.
Teisseyre R., Acta Phys. Polon., **13**, 45 (1954) (I, II).
Замечаиие по поводу координатных условий и уравнеиий движеиия в общей теории относительности.
Trautman A., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 721 (1957) (I).
Законы сохранения и системы координат в общей теории относительности.
Trautman A., Bull. Acad. Polon. Sci., série sci. math., astr. et phys., **6**, 403 (1958) (VI).
Граничные условия на бесконечности в физических теориях.
Trautman A., Bull. Acad. Polon. Sci., série sci. math., astr. et „phys., **6**, 407 (1958) (VI).
Излучение и граничные условия в теории гравитации.
Trautman A., Lectures on general relativity, King's College, London, 1958 (мимеографированы) (VI).
Лекции по общей теории относительности, читанные в Королевском Колледже (Лондон).
Trautman A., Bull. Acad. Polon. Sci., série sci. math., astr. et. phys., **6**, 627 (1958) (II, VI).
Гравитационное радиационное торможение.
Tulczyjew W., Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 279 (1957) (VI).
О плотности тензора энергии-импульса для частиц типа простого полюса.
Tulczyjew W., Acta Phys. Polon., **18**, 393 (1959) (IV).
Движение частиц — мультиполей в общей теории относительности.
Tulczyjew W., Acta Phys. Polon., **18**, 37 (1959) (IV, V).
Уравнения движения вращающихся тел в общей теории относительности.
Weyssenhoff J., Raabe A., Acta Phys. Polon., **9**. 7, 19, 26, 34 (1947).
Релятивистская динамика спин-жидкости и спин-частиц.

ДОПОЛНЕНИЕ

РАБОТЫ ЛЕОПОЛЬДА ИНФЕЛЬДА

1. Fale świetlne w teorii względności, Prace Matemat.-Fiz., **32**, 33 (1921).
2. Sur la mesure du temps et la mesure de l'espace dans la physique classique et dans la théorie de la relativité, I, Sprawozdanie i Prace Polskiego Towarzystwa Fizycznego, I, 5 (1927).
3. Sur la mesure du temps et de l'espace dans la physique classique et dans la théorie de la relativité, II, Sprawozdania i Prace Polskiego Towarzystwa Fizycznego, II, 1 (1927).
4. Zur Feldtheorie von Elektrizität und Gravitation, Phys. Zs. **29**, 145 (1928).
5. Les equations de Maxwell dans la théorie comune à la gravitation et à l'electricité, Compt. Rend. 1280 (1928).
6. Zum Problem einer einheitlichen Feldtheorie von Elektrizität und Gravitation, Zs. f. Phys., **50**, 137 (1928).
7. Bemerkungen zu der Arbeit von Herrn K. Hattori, Phys. Zs., **29**, 810 (1928).
8. Kausalgesetz und Quantenmechanik, I, Zs. f. Phys., **57**, 411 (1929).
9. Kausalgesetz und Quantenmechanik, II, Zs. f. Phys., **61**, 703 (1930).
10. O tzw. relacjach niedokładności w mechanice kwantowej i o ich związku z zagadnieniem pomiarów i przyczynowości, Habilitationosschrift, 1, Lwów (1930).
11. Eine Bemerkung zu der Arbeit von Herrn G. Wataghin, Zs. f. Phys., **66**, 708 (1930).
12. Über eine Interpretation der neuen Einsteinschen Weltgeometrie auf dem Boden der klassischen Mechanik, Phys. Zs., **32**, 110 (1931).
13. Über die Struktur der Elektronenwelle, Bull. de l'Acad. Polon. Sci et des Lettres, 201 (1931).
14. Zur nichtholonomen Geometrie, Prace Matem.-Fiz., **39**, 1 (1931).
15. The Influence of a Cloud of Electrons on the Structure of de Broglie Waves, Bull. de l'Acad. Polon. Sci. et des Lettres, 482 (1931) (совместно с S. Szczeniowski).
16. The Influence of Space Charge on the Structure of de Broglie Waves, Bull. de l'Acad. Polon. Sci. et des Lettres, 37 (1931) (совместно с S. Szczeniowski).
17. Remarques sur le problème de la théorie unitaire des champs, Rendiconti della R. Accad. Naz., Lincei, **15**, 157 (1932-X).
18. Die verallgemainerte Spinorenrechnung und die Diracschen Gleichungen, Phys. Zs., **33**, 475 (1932).
19. Die Wellengleichungen des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie, Preuss. Akad. der Wiss., 3 (1933) (совместно с L. van der Waerden).
20. Electromagnetic Mass, Nature, December **23**, 970 (1933) (совместно с M. Born).
21. Foundations of the New Field Theory, Nature, December 30, 1004 (1933) (совместно с M. Born).

22. Foundations of the New Field Theory, Proc. Roy. Soc., **144**, 425 (1934).
23. Dirac's Equation in the General Relativity Theory, Acta Phys. Polon., **3**, 1 (1934).
24. On the Quantization of the New Field Equations, I, Proc. Roy. Soc., **147**, 522 (1934) (совместно с M. Born).
25. On the Quantization of the New Field Theory, II, Proc. Roy. Soc., **A150**, 141 (1935) (совместно с M. Born).
26. Principes de la nouvelle electrodynamique quantique, Compt. Rend., **199**, 2 (1934) (совместно с M. Born).
27. Déduction de l'équation d'ondes de Dirac a partir de l'électrodynamique quantique, Compt. Rend., **199**, 1 (1934) (совместно с M. Born).
28. The New Action Function and the Unitary Field Theory, Proc. Cambr. Phil. Soc., **32**, 127 (1936).
29. The New Electrodynamics and the Fine Structure Constant, Nature, **137**, 658 (1936).
30. A New Group of Action Functions in the Unitary Field Theory, II, Proc. Cambr. Phil. Soc., **33**, 70 (1937).
31. The Lorentz Transformations in the New Quantum Electrodynamics, Proc. Roy. Soc., **A158**, 368 (1937).
32. On the Choice of the Action Function in the New Field Theory, Phys. Rev., **51**, 765 (1937) (совместно с B. Hoffmann).
33. The Gravitational Equations and the Problem of Motion, Annals of Math., **39**, 65 (1938) (совместно с A. Einstein и B. Hoffmann).
34. Electromagnetic and Gravitational Radiation, Phys. Rev., **53**, 836 (1938).
35. The Equations of Motion in Electromagnetics, Phys. Rev., **57**, 797 (1940).
36. The Gravitational Equations and the Problem of Motion, II, Ann. of Math., **41**, 455 (1940) (совместно с A. Einstein и B. Hoffmann).
37. On the Theory of Brownian Motion, Univ. of Toronto Studies, Applied Math. Series, **4**, 1 (1940).
38. On a New Treatment of Some Eigenvalue Problems, Phys. Rev., **59**, 737 (1941).
39. A Generalization of the Factorization Method for Solving Eigenvalue Problems, Trans. of the Roy. Soc. of Canada, 36, 3 Ser., sect. III, 7 (1942).
40. Clocks, Rigid Rods and Relativity Theory, Amer. Journ. Phys., **11**, 219 (1943).
41. A Note on the Kepler Problem in a Space of Constant Negative Curvature, Phys. Rev., **67**, 121 (1945) (совместно с A. Schild).
42. A New Approach to Relativistic Cosmology, Nature, 156 (1945).
43. A New Approach to Kinematic Cosmology, Phys. Rev., **68**, 250 (1945) (совместно с A. Schild).
44. A New Approach to Kinematic Cosmology (B), Phys. Rev., **70**, 410 (1946) (совместно с A. Schild).
45. On Some Series of Bessel Functions, Journ. Math. and Phys., **26**, 22 (1947) (совместно с V. C. Smith и W. Z. Chien).
46. The Influence of the Width of the Gap upon the Theory of Antennas, Quarterly of Applied Math., **5**, 113 (1947).
47. Recurrence Formulas for Coulomb Wave Function, Phys. Rev., **72**, 1125 (1947).
48. The Factorization Method, Hydrogen Intensities and Related Problems, Phys. Rev., **74**, 905 (1948) (совместно с T. E. Hull).
49. Contributions to the Theory of Wave Guides (совместно с W. Z. Chien, J. R. Pounder, A. F. Stevenson, J. L. Synge), Canad. Journ. Res., **A27**, 69 (1949).
50. On the Motion of Particles in General Relativity Theory (совместно с A. Einstein), Canad. Journ. Math., **1**, 209 (1949).

51. On the Motion of Test Particles in General Relativity (совместно с A. Schild), Rev. Mod. Phys., **21**, 408 (1949).
52. General Relativity and the Structure of our Universe, The Library of Living Philosophers, **7**, 477 (1949). (A. Einstein, Philos. Sci.).
53. The Factorization Method and Its Application to Differential Equations in Theoretical Physics, Proc. of Symposia in Applied Math., **28**, 58 (1949).
54. The New Einstein Theory and the Equations of Motion, Acta Phys. Polon., **10**, 284 (1950).
55. The New Einstein Theory and the Equations of Motion, Nature, No. 4234 (1950).
56. On Einstein's New Theory, Smithsonian Institution, Rep. for 1951, 189 (publ. 4065).
57. Radiation and Gravitational Equations of Motion (совместно с A. Scheidegger), Canad. Journ. Math., **3**, No. 2, 195 (1951).
58. The Factorization Method, Rev. Mod. Phys., **23**, 21 (1951) (совместно с T. E. Hull).
59. Is there an Aether?, Nature, **169**, 702 (1952).
60. The Coordinate Conditions and the Equations of Motion, Canad. Journ. Math., **5**, 17 (1953).
61. On the Use of an Approximation Method in Dirac's Electrodynamics, Bull. de l'Acad. Polon. Sci., Cl. III, **1**, 18 (1953).
62. An Electronic Cloud in a Homogeneous Electric and Magnetic Field According to Dirac's Theory, Bull. de l'Acad. Polon Sci., Cl. III, **1**, No. 3—4, 18 (1953).
63. Electrodynamics without Potentials, Acta Phys. Polon., **12**, 123 (1953) (совместно с J. Plebański).
64. Über die jüngste Entwicklung der klassischen Elektrodynamik, Fortschritte **1**, Heft 2, 88 (1953).
65. Die Bedeutung der Modernen Physik für die Entwiklung der Mathematik, Die Hauptreferate des 8 Polnischen Mathematikerkongresse vom 6 bis 12.IX.1953 in Warschau, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 95 (1953) (совместно с R. Ingarden, M. Krzyżański, J. Rayski, W. Rubinowicz, Wrona).
66. Electrodynamics without Potentials, Proc. Roy. Soc., **222**, 224 (1954) (совместно с J. Plebański).
67. Equations of Motion and Non-Harmonic Coordinate Conditions, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **2**, 163 (1954).
68. On the Motion of Bodies in General Relativity Theory, Acta Phys. Polon., **12**, 187 (1954).
69. Einige Bemerkungen über die Relativitätstheorie, Ann. d. Phys., **16**, Heft 5—8, 229 (1955).
70. On a Certain Class of Unitary Transformations, Acta Phys. Polon., 14, 41 (1955) (совместно с J. Plebański).
71. Unitary Transformations and Spinor Calculus, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 3, 95 (1955) (совместно с J. Plebański).
72. Equations of Motion for Linear Field-Theories, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 3, 213 (1955).
73. Gap Problem in Antenna Theory, Journ. Appl. Phys., **27**, No. 3, 310 (1956) (совместно с J. Synge).
74. On an Operational Method of Solving the Klein-Gordon Equation, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4**, 215 (1956) (совместно с J. Plebański).
75. Expansion of Singular Functions Associated with the Klein-Gordon Function, Acta Phys. Polon., **15**, 207 (1956) (совместно с J. Plebański).
76. A Simple Derivation of the Equations of Motion in Classical Electrodynamics, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4, 347 (1956) (совместно с J. Plebański).

77. On Modified Dirac-Functions, Bull. Acad. Polon Sci., Cl. III, **4**, 687 (1956) (совместно с J. Plebański).
78. On a Covariant Formulation on the Equations of Motion, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4**, 757 (1956) (совместно с J. Plebański).
79. On the „Dipole Procedure" in General Relativity Theory, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4**, 763 (1956) (совместно с J. Plebański).
80. On Equations of Motion in General Relativity Theory, Helv. Phys. Acta, 206 (1956).
81. On the Equations of Motion (Vortrag der Vormittagssitzung am Freitag, dem 15.10.1954), Schriftenreihe des Instituts für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 1, S. 202, 1957.
82. On a Further Modification of Dirac's δ-Functions, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 51 (1957) (совместно с J. Plebański).
83. On the Lagrangian in Special Relativity Theory, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 491 (1957).
84. The Equations of Motion in General Relativity Theory and the Action Principle, Acta Phys. Polon., **16**, 177 (1957).
85. Equations of Motion in General Relativity Theory and the Action Principle, Rev. Mod. Phys., **29**, No. 3, 398 (1957).
86. The Lagrangian as a Function only of Co-ordinates and the Mechanical Spin of a Particle, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 985 (1957).
87. The Lagrangian with Higher Order Derivatives and the Mechanical Spin of a Particle, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **5**, 979 (1957).
88. On Variational Principles in Relativistic Dynamics, Max-Planck-Festschrift, 115 (1958).
89. Equations of Motion and Gravitational Radiation, Ann. of Phys., **6**, 341 (1959).
90. A New Form of the Equation of the Geodesic Line, Bull. Acad. Polon. Sci., **8**, 559 (1960).
91. The EIH and *K*-Approximation Method, Bull. Acad. Polon. Sci., **9**, 2, 93 (1961).
92. On the Most Cartesian-like Co-ordinate System, Bull. Acad. Polon. Sci., **9**, 299 (1961).
93. Is Planck's Constant a Constant in a Gravitational Field, Bull. Acad. Polon. Sci., **8**, 617 (1961).