СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

А. Е. ИНГАМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ОНТИ НКТП СССР

1936

ОПЕЧАТКИ

№ по пор.	Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
1	32	4-я св.	$\zeta'(s)$	$-\zeta'(s)$
2	69	6-я св.	$\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)$	$\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k$
3	87	3-я сн.	$O(x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\varepsilon})$	$O(x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\varepsilon})$
4	106	1-я сн.	$\sum\limits_{\rho} =$	$\sum\limits_{\rho} \operatorname{li} x^{\rho} +$
5	109	10-я сн.	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 x^{\Theta+1} 3x^{\Theta+1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 x^{\Theta+1} < 3x^{\Theta+1}$
6	109	7-я сн.	$\sum\limits_{0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{x}{h}} \frac{1}{\gamma}$	$\sum\limits_{0 < \gamma \leqslant \frac{x}{h}} \frac{1}{\gamma}$
7	130	5-я св.	$\Im G(\sigma + t''i) > -c \ln\ln t''$	$\Im G(\sigma + t''i) < -c \ln\ln t''$
8	141	3-я св.	$p\chi(p^2)$	$p, \chi(p^2)$
9	141	5-я св.	$O(x^{\frac{1}{3}}) \ln x)$	$O\left(x^{\frac{1}{3}} \ln x\right)$
10	155	2-я сн.	$\lim\limits_{y \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$

Зак. 955. Ингам, Распределение простых чисел.

АННОТАЦИЯ

Небольшая книга Ингама представляет собой монографию, посвященную одному из основных вопросов теории чисел. Она может служить хорошим введением в аналитическую теорию чисел, не предполагая у читателя предварительного знакомства с теорией чисел. Книгу могут читать студенты старших курсов университетов, аспиранты и научные работники.

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

КНИГА ШЕСТАЯ

А. Е. ИНГАМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР

А. Е. ИНГАМ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Д. А. РАЙКОВА

С ПРИЛОЖЕНИЕМ СТАТЬИ ПЕРЕВОДЧИКА

О МЕТОДЕ ЛАНДАУ-ИКЕАРА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ

МОСКВА — 1936 — ЛЕНИНГРАД

THE DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS

BY

A. E. INGHAM, M. A.

Fellow of King's College, Cambridge
Sometime Fellow of Trinity College, Cambridge

CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS 1932

Ред. *А. И. Маркушевича.* Оформление *С. Л. Дыман.*
Корректура *О. Н. Барашковой.* Выпускающий *Я. Я. Вигонт.*

Сдана в набор 10/VIII 1935 г. Подписана к печати 20/II 1936 г.
Формат 82×110 1/32. Изд. № 53. Бум. л. 2½. Тип. зн. в 1 бум. л. 174.500.
Уполн. Главлита № В—37061. Тираж 5.000. Авт. л. 10,9. Заказ № 955.

2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предметом настоящей монографии является теория распределения простых чисел в натуральном ряде. Глава, посвященная элементарной части теории, включена как в силу своего исторического интереса, так и вследствие самостоятельной ценности применяемых в ней методов. Однако в основном книга посвящена аналитической теории, основывающейся на дзета-функции Римана. Таким образом эта книга примыкает к 26-му выпуску настоящей серии[1]) (E. C. Titchmarsh, „The zeta-function of Riemann"), вышедшему в свет в 1930 г.; однако логическая последовательность обеих книг прямо противоположна хронологическому порядку их опубликования. Излагаемые здесь свойства дзета-функции можно отнести скорее к классической части теории; в своем большинстве они приведены Титчмаршем во введении без доказательства. В настоящей книге эти свойства обосновываются во всех деталях (за исключением нескольких изолированных ссылок на Титчмарша, не отражающихся на понимании остального текста), причем соответствующие ее части могут в свою очередь служить введением к более глубокому изучению дзета-функции в книге Титчмарша. Настоящая монография не обращается исключительно к специалистам, которые найдут исчерпывающее изложение предмета в известных книгах Ландау „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" и „Vorlesungen über Zahlentheorie"; ее цель — сделать предмет доступным более широкому кругу читателей.

Эта книга, равно как и книга Титчмарша, ведет свое начало от рукописи Бора-Литтльвуда, на которую ссылается Титчмарш в своем предисловии. Однако при подготовке к окончательному изданию пришлось ее заново пересмотреть с тем, чтобы привести в соответствие с положением проблемы на сегодняшний день и учесть все улучшения в технике доказательств, введенные со времени ее написания.

---

[1]) Книга Ингама является 30-м выпуском известной английской серии монографий „Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics". *Ред.*

В этой работе мне оказали большую помощь записки лекций, любезно предоставленные в мое распоряжение проф. Литтльвудом. Что касается влияния двух упомянутых книг Ландау, то оно слишком очевидно для всех, знакомых с ними, чтобы стоило отмечать его в каждом отдельном случае. Настоящая монография была читана в корректурах проф. Бором и проф. Литтльвудом, авторами первоначальной рукописи, а также проф. Харди, д-ром Зигмундом, Р. М. Габриелем и О'Д. Александером, которым и выражаю здесь свою благодарность за ряд исправлений и улучшений. Проф. Винеру я обязан некоторыми ценными замечаниями в заключительных параграфах гл. II.

А. Е. Ингам.

ВВЕДЕНИЕ.

1. Целые положительные числа, отличные от единицы, распадаются на два класса: составные числа (4, 6, 8, 9, ...), разлагающиеся на меньшие множители, и простые числа (2, 3, 5, 7, 11, ...), на меньшие множители уже не разлагающиеся. Простые числа приобретают особую важность в силу „фундаментальной теоремы арифметики", гласящей, что каждое составное число может быть представлено одним и только одним способом в виде произведения простых множителей. Уже на пороге развития математики как науки мы встречаемся с проблемой распределения простых чисел в натуральном ряде. Хотя последовательность простых чисел ведет себя чрезвычайно причудливо в деталях, тем не менее оказывается, что общее ее распределение в натуральном ряде подчинено некоторым простым закономерностям, которые могут быть точно формулированы и подвергнуты математическому исследованию.

Мы будем обозначать через $\pi(x)$ число простых чисел, не превышающих x; наша проблема сводится, таким образом, к исследованию функции $\pi(x)$. Уже первый взгляд на таблицу простых чисел показывает, что, как бы мы далеко ни отодвигали ее границу, простым числам не видно конца, хоть они и начинают встречаться в среднем все реже в более удаленных ее частях. Это наводит нас на две теоремы, которые могут служить отправным пунктом всего дальнейшего исследования. В терминах функции $\pi(x)$ эти теоремы гласят, что, при безграничном увеличении x, $\pi(x)$ стремится к бесконечности, а отношение $\frac{\pi(x)}{x}$ — к нулю.

2. Первая теорема, утверждающая существование бесконечного множества простых чисел, была доказана уже Евклидом („Начала", кн. 9, предложение 20). В основных чертах его доказательство таково: пусть P — произведение любого конечного числа простых чисел и пусть $Q = P + 1$. Числа P и Q не могут иметь общих множителей, ибо их общий множитель должен был бы делить разность $Q - P = 1$, что, очевидно, невозможно. Но Q как целое число, превышающее единицу, должно делиться на какое-либо простое число. Следовательно,

существует по крайней мере одно простое число, отличное от простых чисел, составляющих P. Если бы поэтому имелось только конечное число простых чисел, то мы могли бы взять за P их произведение, и противоречие было бы налицо. Это рассуждение дает даже несколько больше. Оно показывает, что $Q_n = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$, где p_n есть n-е простое число ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$), делится на некоторое p_m с индексом $m > n$, так что $p_{n+1} \leqslant p_m \leqslant Q_n$, а отсюда по индукции получаем оценку:

$$p_n < 2^{2^n}. \tag{1}$$

3. В 1737 г. Эйлер доказал существование бесконечного множества простых чисел новым методом, обнаруживающим, кроме того, что

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \text{ расходится.} \tag{2}$$

Эйлерово доказательство базируется на применении формального тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \ldots) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \tag{3}$$

где произведения распространены на все простые числа. Вклад Эйлера в теорию распределения простых чисел имел основоположное значение; открытое им тождество, которое можно рассматривать как аналитический эквивалент упомянутой выше фундаментальной теоремы арифметики, образует базис почти всей современной аналитической теории чисел.

Теоремы (1) и (2) сходятся между собою в том, что обе несколько уточняют (хотя и разными способами) теорему о бесконечности множества простых чисел.

4. Вопрос об убывании частоты простых чисел служил предметом многочисленных бесплодных попыток и спекуляций, прежде чем были получены сколько-нибудь определенные результаты. Проблема приобрела гораздо более точный вид с опубликованием Лежандром в 1808 г. (после менее определенной формулировки в 1798 г.) замечательной эмпирической формулы для приближенного представления функции $\pi(x)$. Лежандр выставил утверждение, что, для больших значений x, $\pi(x)$ приближенно равно

$$\frac{x}{\ln x - B}, \tag{4}$$

где B — некоторое постоянное число[1]), — теорема, названная Абелем (в одном письме, написанном в 1823 г.) „самой замечательной во всей математике". Сходная, хотя и не тождественная формула была предложена, независимо от Лежандра, Гауссом. Метод Гаусса, состоящий в подсчете числа простых чисел, падающих последовательно на каждую тысячу чисел натурального ряда, наводит на предположение, что средняя плотность распределения („число простых чисел на единицу интервала") для больших значений x приближенно выражается функцией $\frac{1}{\ln x}$, и, значит

$$\int\limits_2^x \frac{du}{\ln u} \tag{5}$$

дает приближенное выражение для $\pi(x)$. Свои соображения Гаусс сообщил Энке в 1849 г., впервые они были опубликованы в 1863 г. Однако по некоторым данным они восходят еще к 1791 г., когда Гауссу было всего четырнадцать лет[2]). В промежутке между этими датами пригодность интеграла (5) для приближенного выражения функции $\pi(x)$ была замечена независимо друг от друга различными авторами[3]).

В целях удобства обозначений этот интеграл обычно заменяют „интегральным логарифмом":

$$\operatorname{li} x = \lim_{\eta \to +0} \left(\int\limits_0^{1-\eta} + \int\limits_{1+\eta}^{x} \right) \frac{du}{\ln u},$$

от которого он отличается на постоянную $\operatorname{li} 2 = 1{,}04\ldots$

Ни Гаусс, ни Лежандр не формулировали достаточно явно требований к точности своих эмпирических формул за пределами таблиц, использованных для их построения, однако мы можем принять, что они, во всяком случае, стремились достичь „асимптотической эквивалентности" $\pi(x)$ и аппроксимирующей функции $f(x)$, т. е. чтобы при безграничном увеличении x отношение $\frac{\pi(x)}{f(x)}$ стремилось к единице. Нетрудно усмотреть, что две теоремы, получающиеся при этом соответственно двум

---

1) *Legendre, 1a,* 19; *1b,* 394; *2,* II, 65. Курсивом обозначены ссылки на библиографию, приложенную в конце книги.

2) *Gauss, 1,* II, 444—447; X_1, 11.

3) *Dirichlet,* Werke, I, 372, сноска **; *Tschebyscheff, 1, 2; Hargreave, 1, 2.*

приведенным выше формам функции $f(x)$, эквивалентны как между собой, так и более простому соотношению:

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \to 1 \text{ при } x \to \infty.$$

Однако различие между выражениями (4) и (5) и значение константы B в (4) становятся существенными, как только мы хотим более точно оценить порядок „ошибки“ $\pi(x) - f(x)$. Утверждение (6), известное под наименованием асимптотического закона распределения простых чисел, занимает центральное место во всей теории распределения простых чисел. Проблема доказательства этого закона или его опровержения привлекала внимание математиков в течение почти ста лет.

5. Первыми теоретическими результатами, устанавливающими связь функции $\pi(x)$ с отношением $\frac{x}{\ln x}$, мы обязаны Чебышеву. В 1848 г. он показал (в ряду других теорем), что если отношение в левой части формулы (6) вообще стремится к какому бы то ни было пределу, то этот предел должен быть равен единице. Далее, в 1850 г. им было показано, что отношение $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$ для всех достаточно больших значений x заключается между двумя положительными постоянными a и A, так что функция $\frac{x}{\ln x}$ во всяком случае дает истинный порядок роста $\pi(x)$. Эти результаты представляли собой достижение первоклассного значения, однако (как ясно понимал и сам Чебышев) их было недостаточно для установления самого главного, а именно существования $\lim \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$ при $x \to \infty$. И хотя численные границы (a, A), полученные Чебышевым, были последовательно сужены другими авторами (особенно Сильвестром), тем не менее вскоре было замечено, что методы, примененные этими авторами, вряд ли могли привести к окончательному решению проблемы.

6. Новые идеи, давшие ключ к решению, были введены Риманом в 1859 г. в мемуаре, ставшем знаменитым не только вследствие содержащегося в нем вклада в теорию простых чисел,

но и из-за влияния, оказанного им на развитие общей теории функций. Тождество Эйлера было применено самим Эйлером только для фиксированного значения s ($s=1$), а Чебышевым для всех вещественных s, больших единицы. Риман же первый стал рассматривать s как комплексное переменное и исследовать ряд в левой части тождества (3) с помощью методов теории аналитических функций. Этот ряд сходится только в некоторой части плоскости комплексного переменного (именно, в полуплоскости $\Re s > 1$), однако с помощью аналитического продолжения он определяет однозначную аналитическую функцию, регулярную во всех конечных точках, за исключением простого полюса в $s=1$ с вычетом 1. Эта функция называется „дзета-функцией Римана", в соответствии с обозначением $\zeta(s)$, присвоенным ей введшим ее автором.

Хотя Риман и не занимался непосредственно аппроксимированием функции $\pi(x)$, тем не менее весь его анализ ясно показал, что эта функция интимно связана со свойствами функции $\zeta(s)$ и прежде всего с распределением ее нулей в плоскости s. Риман выдвинул ряд важных утверждений относительно дзета-функции и, в частности, указал замечательное тождество, связывающее $\pi(x)$ с ее нулями; однако в большинстве случаев он дал лишь недостаточные наметки доказательств. Проблемы, поставленные мемуаром Римана, послужили толчком к фундаментальным исследованиям Адамара по теории целых функций, и результаты этих исследований устранили, наконец, ряд препятствий, преграждавших более чем тридцать лет путь к строгому доказательству теорем Римана. Доказательства, лишь намеченные Риманом, были завершены (в существенных чертах) частью самим Адамаром в 1893 г., частью фон-Мангольдтом в 1894 г.

7. Открытия Адамара расчистили путь для быстрого прогресса теории распределения простых чисел. Асимптотический закон распределения простых чисел был доказан в 1896 г. почти одновременно и независимо друг от друга самим Адамаром и де-ла-Валле-Пуссеном. Из этих двух доказательств первое (принадлежащее Адамару) проще, однако де-ла-Валле-Пуссен (в другой работе, опубликованной в 1899 г.) со всей подробностью исследовал вопрос о точности приближения. Его результаты с убедительностью показали, что (как это уже предвидел Чебышев) для всех достаточно больших значений x $\pi(x)$ аппроксимируется посредством $\operatorname{li} x$ более точно, чем посредством функции (4), какое бы значение ни было приписано константе B, а также что наилучшим значением для B в (4) является 1. Правда, это стоит в противоречии с предположением самого

Лежандра, что B приближенно равно 1,08366 (предположением, базирующимся на таблице простых чисел, простирающейся лишь до $x = 400\,000$), однако уже давно было ясно, что лежандрово значение для B имеет лишь исторический интерес.

С того времени вся эта теория была весьма упрощена, так что теоремы де-ла-Валле-Пуссена могут быть теперь доказаны, при желании, совершенно без помощи теории целых функций. Этим мы обязаны почти исключительно работам Ландау. Но сами результаты не претерпели существенного изменения вплоть до 1921 г., когда они были значительно усилены Литтльвудом; однако уточнения, полученные Литтльвудом, заложены чрезвычайно глубоко, и доказательства их потребовали применения очень тонких и сильных аналитических средств.

8. Решениям проблемы, о которых мы говорили выше, можно было бы поставить в упрек то, что они опираются на идеи, чрезвычайно далекие от первоначальной постановки вопроса. Представлялось бы естественным искать доказательство асимптотического закона распределения простых чисел, не зависящее от теории функций комплексного переменного. Однако до настоящего времени такого доказательства найдено не было. Мы можем пойти даже дальше и усомниться в том, чтобы такое доказательство вообще могло быть найдено, по крайней мере поскольку теория основывается на тождестве Эйлера. Действительно, все известные доныне доказательства асимптотического закона распределения простых чисел основываются на некоторых свойствах комплексных нулей функции $\zeta(s)$, и, обратно, эти свойства являются простыми следствиями самого асимптотического закона. Поэтому представляется очевидным, что указанные свойства должны применяться (явно или неявно) во всех доказательствах, основывающихся на функции $\zeta(s)$, и нелегко усмотреть, как бы это можно было выполнить, если ограничиться рассмотрением лишь вещественных значений s.

9. В одном важном отношении теория распределения простых чисел еще очень далека от завершенности. Риман предположил, без какого бы то ни было намека на доказательство, что комплексные нули функции $\zeta(s)$, которые, как Риманом было доказано, содержатся в бесконечной полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ плоскости s и симметрично расположены относительно ее центральной прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, все лежат на этой прямой. Это предположение — знаменитая ныне „гипотеза Римана" — не было с тех пор ни доказано, ни опровергнуто несмотря на то, что как теоретические соображения, так и эмпирические подсчеты

только укрепляли уверенность в ее истинности. Доказательство гипотезы Римана значительно улучшило бы теоремы де-ла-Валле-Пуссена и Литтльвуда о порядке ошибки $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$, и обратно: истинный порядок этой ошибки не может быть определен, раз только справедливость гипотезы Римана находится под сомнением.

10. Связь между $\pi(x)$ и $\mathrm{li}\, x$ иллюстрируется нижеследующей таблицей [1]):

x	$\pi(x)$	$\mathrm{li}\, x$	$\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}\, x}$
1 000	168	178	0,94...
10 000	1 229	1 246	0,98...
50 000	5 133	5 167	0,993...
100 000	9 592	9 630	0,996...
500 000	41 538	41 606	0,9983...
1 000 000	78 498	78 628	0,9983...
2 000 000	148 933	149 055	0,9991...
5 000 000	348 513	348 638	0,9996...
10 000 000	664 579	664 918	0,9994...
20 000 000	1 270 607	1 270 905	0,9997...
90 000 000	5 216 954	5 217 810	0,99983...
100 000 000	5 761 455	5 762 209	0,99986...
1 000 000 000	50 847 478	50 849 235	0,99996...

Уже первый взгляд на эту таблицу показывает, что для всех приведенных значений x $\pi(x) < \mathrm{li}\, x$. Вплоть до сравнительно недавнего времени существовала уверенность, что это неравенство справедливо для всех x, и к этому были не только эмпирические, но и теоретические основания, ибо из соотношения между $\pi(x)$ и $\zeta(s)$ получается для $\pi(x)$ выражение не прямо через $\mathrm{li}\, x$, а в виде довольно сложного образования,

---

[1]) Последние четыре строки выходят за пределы существующих таблиц простых чисел, простирающихся лишь несколько дальше 10 000 000. Но $\pi(x)$ было вычислено для указанных значений x без фактического подсчета простых чисел; метод, с помощью которого это было сделано, изложен в книге G. B. Mathews „Theory of numbers", Part 1 (Cambridge, Deighton, Bell and Co., 1892), 272—278. Значения $\mathrm{li}\, x$ округлены до ближайшего целого числа. См. *J. Glaisher, 1*, 28—38; *2*, 66—103; *Lehmer, 1*, XIII—XVI; *Phragmén 2*, 199—200 (сноска).

в котором главными членами являются $\mathrm{li}\, x - \frac{1}{2}\mathrm{li}\, x^{\frac{1}{2}}$. Однако Литтльвуд в 1914 г. доказал, что при достаточном расширении таблицы в конце концов встретится значение x, для которого $\pi(x) > \mathrm{li}\, x$, причем таких значений x будет бесконечное множество. Теорема Литтльвуда является лишь „теоремой существования“, и до сих пор еще не известно ни одного конкретного значения x, для которого выполнялось бы неравенство $\pi(x) > \mathrm{li}\, x$. Вероятно, первое такое значение лежит далеко за пределами существующих таблиц.

Аналогичное явление связано с распределением нечетных простых чисел между двумя арифметическими прогрессиями $4n+1$ и $4n+3$. Пусть $\pi^{(1)}(x)$ и $\pi^{(3)}(x)$ обозначают соответственно количества простых чисел указанного вида, не превышающих x; тогда отношение $\frac{\pi^{(1)}(x)}{\pi^{(3)}(x)}$ стремится к единице при безграничном увеличении x. (Эта теорема того же порядка трудности, что и асимптотический закон распределения простых чисел; ее доказательство опирается на теорию аналитических функций.) Таким образом в первом приближении нечетные простые числа одинаково распределены между обеими прогрессиями. Но таблицы показывают определенный численный перевес простых чисел вида $4n+3$, и вплоть до 1914 г. склонялись к заключению, что (за исключением небольшого промежутка вначале) $\pi^{(1)}(x) < \pi^{(3)}(x)$ для всех x [1]).

Однако метод Литтльвуда дает возможность показать, что неравенство $\pi^{(1)}(x) > \pi^{(3)}(x)$ выполняется для произвольно больших значений x, хотя и в этом случае мы не знаем ни одного его численного решения.

11. Настоящая монография посвящена систематическому изучению проблем асимптотического поведения функции $\pi(x)$, намеченных в предыдущих параграфах. Теория дзета-функции Римана развивается здесь лишь постольку, поскольку это необходимо для приложений к функции $\pi(x)$. Более развернутая теория функции $\zeta(s)$ составляет предмет упомянутой в предисловии монографии Титчмарша [2]).

Существует ряд других проблем, относящихся к распределению простых чисел, которые мы не могли включить в рамки настоящей

---

[1]) *J. W. L. Glaisher, 1.* Более ранняя таблица Шерка („Journal für Math“., 10, 1833, 208) очень неточна.

[2]) *T* в библиографии, приложенной в конце книги.

монографии либо вследствие ограниченности места, либо вследствие нерешенности этих проблем. К первой категории относится общая теория распределения простых чисел в различных арифметических прогрессиях с заданной разностью, связанная главным образом с именами Дирихле и де-ла-Валле-Пуссена [1]). Ко второй категории относятся почти все проблемы, связанные с более тонкой структурой последовательности простых чисел. Асимптотический закон показывает, что средний интервал $p_{n+1}-p_n$ между двумя последовательными (большими) простыми числами приближенно равен $\ln p_n$; однако наблюдаются значительные отклонения от этого среднего значения как в ту, так и в другую сторону. Имеются, с одной стороны, серьезные основания ожидать, что указанный интервал бесконечно часто приводится к значению 2, так что существует бесконечное множество пар простых чисел — „близнецов", отличающихся только на 2 (таких, как 17, 19 или 10 006 427, 10 006 429); однако это предположение до сих пор не доказано. Противоположная проблема, о ненормально больших значениях разности $p_{n+1}-p_n$, также не решена, и все существующие указания имеют отрицательный характер. Так, с помощью гипотезы Римана нетрудно вывести из результатов настоящей монографии, что для всякого фиксированного ϑ, большего $\frac{1}{2}$, указанная разность не может превзойти p_n^{ϑ}, за исключением, возможно, конечного множества чисел p_n, и было предположено, что аналогичное утверждение для $\vartheta=\frac{1}{2}$ также справедливо; однако самое большее, что до настоящего момента удалось доказать, это соответствующее утверждение для $\vartheta>1-(33\,000)^{-1}$ [2]).

---

[1]) Изложение этой теории (равно как и всего предмета в целом) читатель найдет в обеих известных книгах Ландау (*H* и *V* в библиографии).

[2]) По поводу последнего результата см. *Hoheisel, 1*. Обо всех указанных проблемах и ряде других, с ними связанных, см. *V, BC*, 805—810 и ссылки в этих книгах; *Hardy* and *Littlewood*, *4*, *5*; *Hardy* and *Littlewood*, „Proc. London Math. Soc.", (2), 28, 1928, 518 (сноска); *Schnirelmann, 1*; *Landau, 10*.

Глава I.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

1. В настоящей главе мы ограничиваемся теоремами, которые могут быть доказаны без помощи теории аналитических функций. Правда, все основные результаты этой главы покрываются результатами последующих глав, однако элементарные методы, которыми мы здесь оперируем, представляют самостоятельный интерес вследствие своей простоты и непосредственности.

Простые числа обозначаются нами вообще буквой p, n-е простое число — через p_n; $\pi(x)$ обозначает число простых чисел, не превышающих x, где x — произвольное положительное число (не обязательно целое). Под

$$\sum_{n \leqslant x} f(n), \quad \sum_{p < x} f(p), \quad \prod_{p} f(p) \text{ и т. п.}$$

мы понимаем суммы или произведения по всем целым положительным n или всем простым числам p, подчиняющимся указанным условиям; в третьем примере, где для p не указано никаких ограничений, подразумевается, что входят все простые числа. Слагаемые или сомножители предполагаются расположенными в порядке возрастания n или p. В соответствии с общепринятым соглашением „пустой" сумме (т. е. сумме, не содержащей совсем слагаемых) мы приписываем значение 0, а „пустому" произведению — значение 1. Примерами могут служить (для $x > 0$)

$$[x] = \sum_{n \leqslant x} 1, \quad \pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1, \quad [x]! = \prod_{n \leqslant x} n,$$

где $[x]$ обозначает „целую часть" числа x (т. е. целое число m, удовлетворяющее неравенствам $m \leqslant x < m+1$) и x может быть любым вещественным числом. Иногда вместо $\sum\limits_{n=1}^{[x]}$ мы пишем просто $\sum\limits_{n=1}^{x}$.

Мы употребляем символы O, o и $\sim$ (символ „асимптотического равенства") в ныне ставшем классическим смысле. Так,

$$f(x) = O(x), \quad f(x) = o(x), \quad f(x) \sim x$$

(при $x \to \infty$) означают соответственно: „отношение $\frac{|f(x)|}{x}$ для всех достаточно больших x остается меньше некоторой константы K (т. е. числа, не зависящего от x)“, „$\frac{f(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$“ и „$\frac{f(x)}{x} \to 1$ при $x \to \infty$“.

$m|n$ означает: „m делит n“.

2. Теорема 1. *Ряд* $\sum_p \frac{1}{p}$ *и произведение* $\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$ *расходятся*[1]).

Пусть

$$S(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}, \quad P(x) = \prod_{p \leqslant x} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \qquad (x > 2).$$

Так как

$$\frac{1}{1-u} > \frac{1-u^{m+1}}{1-u} = 1+u+\ldots+u^m \quad (0 < u < 1),$$

то

$$P(x) > \prod_{p \leqslant x} \left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^m}\right),$$

где m — произвольное целое положительное число. Выполняя перемножение в произведении справа, получим сумму $\sum_n \frac{1}{n}$, распространенную по определенным целым значениям n, и если m выбрано так, что $2^{m+1} > x$, то в эту сумму войдут, в частности, слагаемые, соответствующие всем целым n от 1 до $[x]$. Поэтому

$$P(x) > \sum_{1}^{[x]} \frac{1}{n} > \int_{1}^{[x]+1} \frac{du}{u} > \ln x. \tag{1}$$

---

[1]) *Euler 1*, Theorema 19; *2*, § 279.

Далее, так как для $0 < u < 1$, как это нетрудно усмотреть из разложения $\ln(1-u)$ по возрастающим степеням u, имеет место неравенство: $-\ln(1-u) - u < \frac{1}{2}\frac{u^2}{1-u}$, то

$$\ln P(x) - S(x) < \sum_{p \leqslant x} \frac{p^{-2}}{2(1-p^{-1})} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда, принимая во внимание (1), имеем:

$$S(x) > \ln\ln x - \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Полученные нами неравенства (1) и (2), очевидно, устанавливают справедливость теоремы.

3. Теорема 1 обнаруживает помимо прочего, что множество простых чисел бесконечно или, иными словами, что $\pi(x)$ бесконечно возрастает вместе с x. Мы покажем теперь, что $\frac{\pi(x)}{x}$ стремится к нулю.

Теорема 2.

$$\pi(x) = o(x) \quad \textit{при} \quad x \to \infty.$$

Обозначим через $N_r(x, h)$ число целых положительных n, не превосходящих x, делящихся на h и не делящихся ни на какое из r первых простых чисел $p_1, \ldots, p_r$; под $N_0(x, h)$ мы будем понимать число тех $n \leqslant x$, которые делятся на h. Целые n, число которых есть $N_{r-1}(x, h)$, разбиваются на два класса: неделящиеся на p_r и делящиеся на p_r. (Мы предполагаем, что p_r не делит h.) Первых будет $N_r(x, h)$, вторых $N_{r-1}(x, p_r h)$, ибо n делится одновременно на h и на p_r тогда и только тогда, когда оно делится на $p_r h$. Сообразно этому

$$N_{r-1}(x, h) = N_r(x, h) + N_{r-1}(x, p_r h).$$

Выражая из этого соотношения N_r через N_{r-1}, затем аналогично N_{r-1} через N_{r-2} и т. д., мы получаем, что для h, не делящихся ни на одно из $p_1, \ldots, p_r$,

$$N_r(x, h) = N_0(x, h) - \sum_i N_0(x, p_i h) + \sum_{i,j} N_0(x, p_i p_j h) - \ldots$$

где суммы берутся по всем сочетаниям из $p_1, \ldots, p_r$ по одному, два и т. д. Беря, в частности, $h=1$ и замечая, что $N_0(x, m) = \left[\frac{x}{m}\right]$, находим:

$$N_r(x, 1) = [x] - \sum_i \left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{i,j} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right] - \ldots \tag{3}$$

Пусть теперь $2 < \xi < x$ и r — индекс наибольшего простого числа, не превосходящего ξ: $p_r \leqslant \xi < p_{r+1}$. Тогда

$$\pi(x) \leqslant r + N_r(x, 1),$$

так как каждое простое число либо равно одному из p_r, либо находится в числе положительных чисел, не делящихся ни на одно из этих p. Подставим вместо $N_r(x, 1)$ его выражение из формулы (3); если мы опустим в этом выражении все квадратные скобки, то это даст в каждом слагаемом ошибку, меньшую единицы, и, значит, общая ошибка будет меньше 2^r, числа всех членов. Поэтому

$$\pi(x) < r + 2^r + x - \sum_i \frac{x}{p_i} + \sum_{i,j} \frac{x}{p_i p_j} - \ldots < 2^{\xi+1} + x \prod_{p \leqslant \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

ибо $r < 2^r < 2^\xi$. Выбирая теперь за ξ такую функцию от x, что, при $x \to \infty$, $\xi \to \infty$ и $\frac{2^{\xi+1}}{x} \to 0$, и, принимая во внимание теорему 1, мы убеждаемся, что $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$. Беря, в частности, $\xi = c \ln x$, где $0 < c < \frac{1}{\ln 2}$, и применяя неравенство (1), получаем более точный результат:

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\ln \ln x}\right).$$

Еще Эйлер указал, что простые числа встречаются „бесконечно реже, чем целые“, однако его рассуждения не доказывают этого утверждения в полном смысле теоремы 2[1]).

В основе изложенного метода лежит принцип „эратосфенова решета“, сама формула (3) принадлежит Лежандру[2]). В недавнее время Бруну удалось значительно разработать и уточнить указанный метод, причем ошибка, получающаяся при опускании квадратных скобок,

---

[1]) *Euler, 1*, Theorema 7. Corollarium 3.

[2]) *Legendre, 1a*, 12—15; *1b*, 412—414; *2*, II, 86—89.

была значительно снижена [1]). С помощью этого уточненного метода можно получить соотношение $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$, которое будет доказано (и притом значительно более простым путем) в § 5. Достоинством метода Бруна является то, что хотя он и не претендует на окончательное разрешение крупных проблем, тем не менее он применим, в своих границах, к ряду проблем, недоступных в настоящее время аналитическим методам, вообще говоря, гораздо более мощным. Так, например, с его помощью можно доказать, что число простых чисел, падающих на любой интервал длины $x > 1$, будет меньше, чем $A\frac{x}{\ln x}$, где A — абсолютная константа [2]). Далее, можно указать на его применение в доказательстве теоремы Шнирельмана о том, что каждое целое положительное $n\,(> 1)$ может быть представлено в виде суммы не более, чем k простых чисел, где k — некоторая абсолютная константа, — теоремы, являющейся крупнейшим вкладом в не решенную до сих пор „проблему Гольдбаха" о возможности представления всякого четного числа в виде суммы двух простых чисел [3]).

4. *Чебышевские функции* ϑ *и* ψ. Введем вспомогательные чебышевские функции:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p, \qquad \psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \ln p \qquad (x > 0),$$

где вторая сумма распространена по всем комбинациям простых чисел p и положительных целых m, для которых $p^m \leqslant x$.

Если мы сгруппируем в $\psi(x)$ вместе все члены с общим значением m, то получим:

$$\psi(x) = \vartheta(x) + \vartheta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \vartheta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots, \tag{4}$$

где ряд справа обрывается на конечном числе членов, так как $\vartheta(y) = 0$ при $y < 2$. Группируя, с другой стороны, вместе все члены с одним и тем же p (не превышающим x), будем иметь:

$$\psi(x) = \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p, \tag{5}$$

ибо число значений m, соответствующих данному p, равно числу целых положительных решений неравенства $m \ln p \leqslant \ln x$, т. е. равно $\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]$.

---

[1]) *Brun, 1*; *Rademacher, 1.*

[2]) *Hardy* and *Littlewood, 4*, 69 (3).

[3]) *Schnirelmann, 1, 2*; *Landau, 10.*

Нижеследующая теорема показывает, что асимптотическое поведение любой из функций π, ϑ, ψ определяет асимптотическое поведение двух других.

Теорема 3. *Три отношения:*

$$\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}}, \quad \frac{\vartheta(x)}{x}, \quad \frac{\psi(x)}{x} \tag{6}$$

имеют общие нижние и верхние пределы при $x \to \infty$.

Пусть верхние и нижние пределы будут соответственно Λ_1, Λ_2, Λ_3 и λ_1, λ_2, λ_3. В силу формул (4) и (5)

$$\vartheta(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \pi(x) \ln x.$$

Поэтому $\Lambda_2 \leqslant \Lambda_3 \leqslant \Lambda_1$. Но, с другой стороны, для $0 < \alpha < 1$, $x > 1$,

$$\vartheta(x) \geqslant \sum_{x^\alpha < p \leqslant x} \ln p \geqslant \{\pi(x) - \pi(x^\alpha)\} \ln(x^\alpha);$$

так как $\pi(x^\alpha) < x^\alpha$, то

$$\frac{\vartheta(x)}{x} > \alpha\left(\frac{\pi(x)\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x^{1-\alpha}}\right).$$

Фиксируем α и пусть $x \to \infty$; так как $\dfrac{\ln x}{x^{1-\alpha}} \to 0$, то мы получим, что $\Lambda_2 \geqslant \alpha\Lambda_1$, откуда $\Lambda_2 \geqslant \Lambda_1$, ибо α может быть взято сколь угодно близким к единице. В соединении с предыдущими неравенствами это дает $\Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_1$. Аналогично рассуждаем и для нижних пределов λ.

Из теоремы 3, в частности, вытекает, что если одно из выражений (6) при $x \to \infty$ стремится к определенному пределу, то то же имеет место и для двух других, причем все три предела между собою равны. Таким образом три соотношения:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad \vartheta(x) \sim x, \quad \psi(x) \sim x,$$

из коих первое представляет асимптотический закон распределения простых чисел, эквивалентны друг другу.

Из трех функций π, ϑ, ψ функция ψ — на первый взгляд наиболее удаленная от первоначальной проблемы — является самой естественной с аналитической точки зрения (как это станет ясным в § 7). По этой причине обычно сначала оперируют с этой функцией ψ и уже затем с помощью теоремы 3 (или более точных соотношений, соответственно рассматриваемой степени приближения) выводят результаты относительно π. Это усложнение, повидимому, коренится в самом существе дела, и читатель должен с самого начала освоиться с функцией ψ, которую можно рассматривать как фундаментальную.

Отметим кстати, что $\psi(x)$ имеет простой арифметический смысл: она представляет собой логарифм общего наименьшего кратного всех целых чисел, не превосходящих x.

5. *Порядок роста* $\pi(x)$. Мы докажем теперь, что $\pi(x)$ будет в точности порядка $\frac{x}{\ln x}$ при возрастании x.

Теорема 4. *Существуют две такие положительные константы a и A, что для всех достаточно больших x*

$$a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < A\frac{x}{\ln x}. \tag{7}$$

Пусть Λ будет общий верхний, а λ — общий нижний предел трех выражений (6) при $x \to \infty$.

Рассмотрим число

$$N = \frac{(n+1)(n+2)\,\ldots\,2n}{n!},$$

где n — целое положительное. Это число является целым, как член в биномиальном разложении $(1+1)^{2n}$, и удовлетворяет неравенству

$$N < 2^{2n} < (2n+1)N, \tag{8}$$

ибо указанное разложение содержит $2n+1$ членов, среди которых N является наибольшим. N делится на все простые числа p в интервале $n < p \leqslant 2n$ и, следовательно, на их произведение, ибо эти простые числа входят множителями в числитель, но не могут входить в знаменатель. Значит,

$$N \geqslant \prod_{n<p\leqslant 2n} p.$$

В соединении с первым из неравенств (8) это дает:

$$2n\ln 2 > \ln N \geqslant \sum_{n<p\leqslant 2n} \ln p = \vartheta(2n) - \vartheta(n).$$

Полагая $n = 2^{r-1}$ и суммируя от $r=1$ до $r=m$, находим:

$$\vartheta(2^m) < \sum_{r=1}^{m} 2^r \ln 2 < 2^{m+1}\ln 2.$$

Пусть теперь $x > 1$ и m — целое число, определяемое неравенствами $2^{m-1} \leqslant x < 2^m$; тогда

$$\vartheta(x) \leqslant \vartheta(2^m) < 2^{m+1} \ln 2 \leqslant 4x \ln 2.$$

Следовательно, $\Lambda \leqslant 4 \ln 2$.

Для получения нижней границы для λ воспользуемся известной теоремой, что простое число p входит в $m!$ в точности в степени

$$\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \ldots$$ [1].

Применяя эту теорему к $N = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, получаем, что

$$N = \prod_{p \leqslant 2n} p^{\nu_p},$$

где

$$\nu_p = \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \ldots - 2\left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots\right).$$

Каждая из этих сумм обрывается на M_p-м члене, где

$$M_p = \left[\frac{\ln 2n}{\ln p}\right],$$

так как $[y] = 0$, если $0 < y < 1$. Поэтому

$$\nu_p = \sum_{r=1}^{M_p} \left(\left[\frac{2n}{p^r}\right] - 2\left[\frac{n}{p^r}\right]\right) \leqslant M_p,$$

ибо $[2y] - 2[y]$ равно либо нулю, либо единице. Но, согласно формуле (5),

$$e^{\psi(2n)} = \prod_{p \leqslant 2n} p^{M_p}.$$

Следовательно, $N \mid e^{\psi(2n)}$, откуда, в силу второго из неравенств (8),

$$2n \ln 2 - \ln(2n+1) < \ln N \leqslant \psi(2n).$$

---

[1] r-е слагаемое этой суммы, $m_r = \left[\frac{m}{p^r}\right]$, представляет собой число сомножителей в произведении $1 \cdot 2 \ldots m$, делящихся на p^r, и сомножителю, содержащему p точно в r-й степени, соответствует в сумме $m_1 + m_2 + \ldots$ ровно r единиц, а именно, по одной в каждом из слагаемых $m_1, m_2, \ldots, m_r$.

Беря здесь

$$n = \left[\frac{1}{2}x\right], \qquad x > 2,$$

получаем:

$$\psi(x) \geqslant \psi(2n) > (x-2)\ln 2 - \ln(x+1).$$

Следовательно, $\lambda \geqslant \ln 2$.

Неравенства $\ln 2 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant 4\ln 2$, очевидно, и доказывают утверждение теоремы.

Путем небольшого изменения проведенных рассуждений можно уменьшить верхнюю оценку вдвое, т. е. показать, что

$$\ln 2 \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant 2\ln 2.$$

Но Чебышев [1]), которому мы обязаны теоремой 4, имел в виду определенное применение — доказательство так называемого „постулата Бертрана", состоящего в том, что для всякого $n > 6$ существует по крайней мере одно простое число p, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{2}n < p \leqslant n-2,$$

а для этого ему было необходимо неравенство $\Lambda < 2\lambda$. Это неравенство Чебышев получил как следствие из более сильных неравенств:

$$h \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant H,$$

где

$$h = \ln \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0,921\ldots, \quad H = \frac{6}{5}h = 1,105\ldots$$

Последующими авторами [2]) были найдены еще более тесные границы, однако все попытки доказать этими методами асимптотический закон оказались бесплодными [3]).

Теорема 2, конечно, содержится в теореме 4. Но и теорема 1 также является простым следствием этой последней. Действительно, неравенство $\pi(x) > a\dfrac{x}{\ln x}$ показывает прежде всего, что число простых чисел бесконечно, а затем, что для достаточно больших n

$$n = \pi(p_n) > a\frac{p_n}{\ln p_n} > p_n^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$ap_n < n\ln p_n < 2n\ln n \quad (n > n_0),$$

---

1) *Tschebyscheff, 3.*

2) *Sylwester, 1, 2, 3*; *H*, I, 87—95; см. также *Schur, 1, 2*; *Breusch, 1.*

3) См. *H*, II 597—604.

и, значит, ряд $\sum \frac{1}{p_n}$ расходится, как это явствует из сравнения его с рядом $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

6. *Тождество Эйлера.* Мы установим теперь фундаментальное тождество теории простых чисел. Оно получается как частный случай из следующей теоремы [1]).

Теорема 5. *Пусть $f(n)$ „мультипликативная" функция целого положительного переменного n, т. е. не равна тождественно нулю и удовлетворяет уравнению*

$$f(m) f(n) = f(mn) \tag{9}$$

для всех взаимно простых m и n.

Если ряд $\sum_1^\infty f(n)$ абсолютно сходится, то

$$\sum_1^\infty f(n) = \prod_p \{1 + f(p) + f(p^2) + \ldots\}, \tag{10}$$

причем произведение также абсолютно сходится.

Если, кроме того, $f(n)$ „вполне мультипликативна", т. е. если уравнение (9) *имеет место для всех m и n, взаимно простых или нет, то можно написать:*

$$\sum_1^\infty f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)}. \tag{11}$$

Заметим прежде всего, что $f(1) = 1$; действительно, в силу условия (9) $f(n) f(1) = f(n)$ и n может быть выбрано так, чтобы $f(n) \neq 0$. Рассмотрим теперь произведение

$$P(x) = \prod_{p \leqslant x} \{1 + f(p) + f(p^2) + \ldots\} \quad (x > 2).$$

Число его сомножителей конечно, и каждый из этих сомножителей представляет собой абсолютно сходящийся ряд, ибо $\sum |f(n)|$ сходится по условию. В силу теоремы об умножении рядов мы можем выполнить перемножение и расположить члены полученного формального произведения в любом порядке в виде простого ряда, причем этот ряд будет абсолютно сходящимся. Вследствие мультипликативности функции $f(n)$ и фундаменталь-

[1]) Примененной (формально) в ряде частных случаев уже самим Эйлером (*1*, Theorema 8; *2*, ,Caput 15).

ной теоремы арифметики, по которой каждое n единственным образом представляется в виде произведения простых множителей, мы получаем:

$$P(x)=\sum f(n'),$$

где сумма распространена по всем целым положительным n', не имеющим простых множителей, бо́льших x. Обозначая через S сумму ряда, стоящего в левой части формулы (10), имеем поэтому:

$$P(x)-S=-\sum f(n''),$$

где n'' пробегает все целые положительные числа, содержащие по крайней мере один простой множитель, превосходящий x. Так как каждое n'' должно быть больше, чем x, то мы получаем, что

$$|P(x)-S|\leqslant\sum|f(n'')|\leqslant\sum_{n>x}|f(n)|.$$

При $x\to\infty$ выражение в левой части стремится к нулю вследствие сходимости ряда $\sum|f(n)|$. Следовательно, $P(x)\to S$. Это доказывает справедливость формулы (10). Абсолютная сходимость произведения явствует из того, что

$$\sum_{p\leqslant x}|f(p)+f(p^2)+\ldots|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{p\leqslant x}\{|f(p)|+|f(p^2)|+\ldots\}\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}|f(n)|.$$

Если уравнение (9) выполняется для всех m и n, то тогда

$$1+f(p)+f(p^2)+\ldots=1+f(p)+[f(p)]^2+\ldots=\frac{1}{1-f(p)}$$

(попрежнему в предположении, что ряд $\sum|f(n)|$ сходится); это дает формулу (11).

7. *Фундаментальные формулы.* Положим в теореме 5 $f(n)=n^{-s}$, где $s>1$. Условия справедливости формулы (11) удовлетворяются, и мы получаем:

$$\sum_{1}^{\infty}n^{-s}=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}\qquad(s>1).\qquad(12)$$

Мы будем во всем последующем предполагать, что $s>1$. Введем обозначение

$$\zeta(s)=\sum_{1}^{\infty}n^{-s}.$$

Логарифмируя обе части формулы (12) и разлагая логарифмы в правой части в степенные ряды, мы получим:

$$\ln \zeta(s) = -\sum_{p} \ln(1 - p^{-s}) = \sum_{p,\, m} \frac{1}{mp^{ms}}, \tag{13}$$

где p пробегает все простые числа и m — все целые положительные значения. Диференцирование дает:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p} \frac{p^{-s} \ln p}{1 - p^{-s}} = \sum_{p,\, m} \frac{\ln p}{p^{ms}},$$

что может быть записано так:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \tag{14}$$

где $\Lambda(n)$ равно $\ln p$, если n есть целая (положительная) степень простого числа p, и равно нулю в противном случае. Эти преобразования законны для $s > 1$, ибо члены двойного ряда положительны, а простой ряд равномерно сходится для $s \geqslant 1 + \delta$ при любом фиксированном положительном δ.

Чебышевская функция $\psi(x)$, определенная в § 4, связана с коэфициентами $\Lambda(n)$ ряда (14) простым соотношением:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \ln p = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n). \tag{15}$$

Таким образом $\psi(x)$ естественно появляется как сумма первых $[x]$ коэфициентов c_n в разложении $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ в „ряд Дирихле": $\sum c_n n^{-s}$; $\psi(x)$ есть „сумматорная функция" коэфициентов „производящей функции" (14). Аналогично сумматорной функцией для $\ln \zeta(s)$ служит:

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \frac{1}{m} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots \tag{16}$$

Из формул (14) и (15) вытекает, что

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_{1}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\, dx \qquad (s > 1), \tag{17}$$

а из (13) и (16), — что

$$\ln \zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\Pi(x)}{x^{s+1}}\, dx \qquad (s > 1). \tag{18}$$

Доказательства опираются на теорему, имеющую в дальнейшем многочисленные применения и представляющую в сущности лишь удобную для нас форму тождества Абеля (формулы „частного суммирования“).

Теорема A [1]). *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — неубывающая последовательность вещественных чисел, стремящаяся к бесконечности, и пусть*

$$C(x) = \sum_{\lambda_n \leqslant x} c_n,$$

где c_n вещественны или комплексны и суммирование производится по множеству (конечному) целых положительных индексов n, для которых $\lambda_n \leqslant x$; тогда, если $X \geqslant \lambda_1$ и $\Phi(x)$ обладает непрерывной производной, имеем:

$$\sum_{\lambda_n \leqslant X} c_n \Phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{X} C(x)\, \Phi'(x)\, dx + C(X)\, \Phi(X). \tag{19}$$

Если, кроме того, $C(X)\,\Phi(X) \to 0$ при $X \to \infty$, то

$$\sum_1^\infty c_n \Phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{\infty} C(x)\, \Phi'(x)\, dx,$$

в предположении, что хотя бы одна часть этого равенства сходится.

Обозначая левую часть формулы (19) через S, имеем:

$$C(X)\,\Phi(X) - S = \sum_{\lambda_n \leqslant X} c_n \{\Phi(X) - \Phi(\lambda_n)\} =$$

$$= \sum_{\lambda_n \leqslant X} \int_{\lambda_n}^{X} c_n \Phi'(x)\, dx = \int_{\lambda_1}^{X} \sum_{\lambda_n \leqslant x} c_n \Phi'(x)\, dx =$$

$$= \int_{\lambda_1}^{X} C(x)\, \Phi'(x)\, dx,$$

[1]) Теоремы, не относящиеся непосредственно к простым числам, или к специальным функциям, связанным с ними, мы будем нумеровать не числами, а буквами.

что и представляет требуемый результат. Перемена порядка суммирования и интегрирования вполне законна, ибо и то и другое производятся в конечных пределах. Что же касается изменения пределов суммирования и интегрирования, то достаточно указать, что мы фактически в тождестве

$$\sum_{\lambda_n \leqslant X} \int_{\lambda_1}^{X} f_n(x)\, dx = \int_{\lambda_1}^{X} \sum_{\lambda_n \leqslant X} f_n(x)\, dx$$

полагаем $f_n(x)$ равным нулю для $x < \lambda_n$ и равным $c_n \Phi'(x)$ для $x \geqslant \lambda_n$. Это доказывает формулу (19); вторая же формула получается путем предельного перехода по $X \to \infty$.

Замечание. Для простоты мы предположили, что индексы при λ_n и c_n изменяются от единицы; однако иногда оказывается более удобным избрать другой начальный индекс (например, 0 или 2). Очевидно, выведенные формулы, с соответствующими изменениями, сохраняют при этом силу.

Теорема А может быть выведена также непосредственно из тождества Абеля. Другое доказательство получается путем интегрирования по частям интеграла Стилтьеса; рассмотрение теоремы А с точки зрения процесса интегрирования Стилтьеса является, пожалуй, наиболее естественным.

Формула (17) получается из теоремы А, если положить

$$\lambda_n = n, \quad c_n = \Lambda(n), \quad \Phi(x) = x^{-s}$$

и заметить, что при фиксированном $s > 1$

$$C(X)\Phi(X) = \psi(X) X^{-s} = O(X^{1-s} \ln X) = o(1)$$

при $X \to \infty$.

Совершенно так же получается формула (18), ибо

$$\Pi(X) = O\left(\frac{X}{\ln X}\right)$$

[ряд для $\Pi(X)$ обрывается, как только $X^{\frac{1}{N}}$ становится меньше двух].

Полученные формулы имеют фундаментальное значение для всего дальнейшего. Обозначения $\zeta(s)$, $\Lambda(n)$, $\Pi(x)$, введенные в настоящем параграфе, сохраняются на протяжении всей книги.

Теорема 1, очевидно, покоится на том же принципе, что и тождество Эйлера, и мы можем провести ее доказательство, опираясь непосредственно на это тождество, беря в нем $s \to 1 + 0$. Можно также прямо положить в (10) $f(n) = \frac{1}{n}$, ибо, как нетрудно усмотреть, при условии $f(n) \geqslant 0$ из сходимости произведения вытекает и сходимость ряда. Менее очевидным является то обстоятельство, что и формулы § 5 также связаны с тождеством Эйлера. Действительно, теорему о делимости факториалов, которую мы применили во второй половине доказательства теоремы 4 (и могли применить и в первой), можно записать в форме:

$$m! = \prod_{p \leqslant m} p^{\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \cdots} \tag{20}$$

или (беря логарифмы) в форме:

$$\sum_{n=1}^{m} \ln n = \sum_{p^r \leqslant m} \left[\frac{m}{p^r}\right] \ln p = \sum_{n_1 \leqslant m} \left[\frac{m}{n_1}\right] \Lambda(n_1) = \sum_{n_1 n_2 \leqslant m} \Lambda(n_1),$$

а это подтверждает совпадение сумм первых m коэфициентов в левой и правой частях тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s} = -\zeta'(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \zeta(s) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n_1)}{n_1^{s}} \cdot \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^s},$$

где произведение справа должно быть выражено в виде ряда Дирихле $\sum c_n n^{-s}$. Так как перемножение законно при $s > 1$ и „приравнивание коэфициентов“ для рядов Дирихле, имеющих одинаковые суммы, так же обосновано, как и для степенных рядов [1]), то мы можем, обратно, вывести (20) из (14), т. е., следовательно, из тождества Эйлера.

8. Мы можем теперь доказать, что *если* $\dfrac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$ *вообще стремится к какому-либо пределу при* $x \to \infty$, *то этот предел должен быть равен единице*. Это положение, очевидно, вытекает из следующей теоремы:

Теорема 6. *При* $x \to \infty$

$$\varliminf \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \leqslant 1 \leqslant \varlimsup \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \text{ [2]).}$$

Введем обозначение

$$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

[1]) *HR*, теоремы 53 и 6.

[2]) *Tschebyscheff*, *1*, *2*, теорема II ($n = 1$) (см. *H*, I, 16).

Пусть

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\psi(x)}{x}=\begin{cases}\Lambda\\ \lambda\end{cases}, \qquad \overline{\lim_{s\to 1+0}}(s-1)f(s)=\begin{cases}\Lambda'\\ \lambda'\end{cases}.$$

Если Λ не есть $+\infty$ [1]), то выбираем произвольно $B>\Lambda$. Тогда мы будем иметь $\frac{\psi(x)}{x}<B$ для всех $x\geqslant x_0=x_0(B)$, причем x_0 можно взять больше единицы. Из формулы (17) выводим, что для $s>1$

$$f(s)=s\int_1^\infty\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx<s\int_1^{x_0}\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx+s\int_{x_0}^\infty\frac{B}{x^s}dx=$$

$$=s\int_1^{x_0}\frac{\psi(x)-Bx}{x^{s+1}}dx+\frac{sB}{s-1}\leqslant s\int_1^{x_0}\frac{|\psi(x)-Bx|}{x^2}dx+\frac{sB}{s-1},$$

откуда

$$(s-1)f(s)\leqslant s(s-1)K+sB,$$

где $K=K(B,x_0)=K(B)$ [2]). Беря $s\to 1+0$, видим, что $\Lambda'\leqslant B$, и так как это имеет место для всех $B>\Lambda$, то, следовательно, $\Lambda'\leqslant\Lambda$. (Если $\Lambda=+\infty$, то это неравенство тривиально.) Аналогично доказываем, что $\lambda'\geqslant\lambda$. Таким образом

$$\lambda\leqslant\lambda'\leqslant\Lambda'\leqslant\Lambda. \tag{21}$$

Теперь остается вычислить пределы λ' и Λ'. Так как x^{-s} есть убывающая функция от x (s фиксировано и больше единицы), то

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^s}<\sum_1^\infty\frac{1}{n^s}<1+\int_1^\infty\frac{dx}{x^s},$$

т. е.

$$\frac{1}{s-1}<\zeta(s)<\frac{s}{s-1}.$$

---

[1]) Мы знаем из теоремы 4, что Λ конечно, однако нам нет нужды опираться на это.

[2]) То-есть, K есть число, зависящее от B и x_0 и, значит, только от B, поскольку x_0 зависит только от B; K — „константа" в том смысле, что она не зависит от главных переменных x и s.

Следовательно, при $s \to 1+0$ будем иметь $(s-1)\zeta(s) \to 1$. Далее, так как $\frac{\ln x}{x^s}$ для $x \geqslant e$ (при $s > 1$) тоже есть убывающая функция от x, то аналогично убеждаемся, что при $s \to 1+0$

$$\zeta'(s) = \sum_1^\infty \frac{\ln n}{n^s} = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^s}\,dx + O(1) =$$

$$= \frac{1}{(s-1)^2}\int_0^\infty ye^{-y}\,dy + O(1) = \frac{1}{(s-1)^2} + O(1)$$

(подстановка $x^{s-1} = e^y$). Поэтому при $s \to 1+0$

$$(s-1)f(s) = \frac{-(s-1)^2\zeta'(s)}{(s-1)\zeta(s)} \to 1$$

и $\lambda' = \Lambda' = 1$. В соединении с (21) это дает $\lambda \leqslant 1 \leqslant \Lambda$, что, в силу теоремы 3, эквивалентно утверждению нашей теоремы.

Чебышев пошел в этом направлении значительно дальше. Его результаты показывают, что наиболее подходящим значением для B в лежандровой формуле $\frac{x}{\ln x - B}$ является единица и что функция $\operatorname{li} x$ (введенная им независимо от Гаусса) в качестве приближения для $\pi(x)$ предпочтительнее любой рациональной функции от x и $\ln x$. В точной формулировке его теорема относительно значения B гласит, что если функция $B(x)$, определенная уравнением

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - B(x)},$$

вообще стремится к пределу при $x \to \infty$, то этот предел должен быть равен единице [1]). Эти теоремы были уже в новейшее время дополнены доказательством существования соответствующих пределов и представляют собой простые следствия результатов главы III, § 12, стр. 85—87.

9. Мы закончим настоящую главу рядом интересных асимптотических формул Мертенса для некоторых сумм и произведений, распространенных по простым числам [2]). Доказательства опираются на теорему Чебышева $\psi(x) = O(x)$ (эквивалентную второму из неравенств теоремы 4) и на тот установленный в процессе доказательства теоремы 6 факт, что $(s-1)\zeta(s) \to 1$ при $s \to 1+0$.

---

[1]) *Tschebyscheff, 1, 2,* теорема III; *H,* I, 140—150.

[2]) *Mertens, 1*; см. также *Hardy, 2.*

Теорема 7. *При* $x \to \infty$

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1), \tag{22}$$

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + B + O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{23}$$

$$\prod_{p \leqslant x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\ln x}, \tag{24}$$

где B — *некоторое постоянное число и* C — *эйлерова постоянная.*

Логарифмируя обе части формулы (20), получаем:

$$\ln m! = \sum_{p^r \leqslant m} \left[\frac{m}{p^r}\right] \ln p = \sum_{n \leqslant m} \left[\frac{m}{n}\right] \Lambda(n). \tag{25}$$

По формуле Стирлинга $\ln m! = m \ln m + O(m)$ при $m \to \infty$. С другой стороны, опущение квадратных скобок в правой части формулы (25) вызывает ошибку, не превышающую $\psi(m) = O(m)$. Беря эти приближения и деля обе части на m, получаем:

$$\sum_{n \leqslant m} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln m + O(1),$$

где m может быть теперь заменено непрерывной переменной x. Этот результат эквивалентен формуле (22), так как

$$\left|\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p}\right| \leqslant \sum_{p \leqslant x}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots\right)\ln p < \sum_{p} \frac{\ln p}{p(p-1)},$$

и последний ряд сходится.

Далее, полагая

$$A(x) = \sum_{p_n \leqslant x} \frac{\ln p_n}{p_n} = \sum_{p_n \leqslant x} a_n, \quad B(x) = \sum_{p_n \leqslant x} \frac{1}{p_n} = \sum_{p_n \leqslant x} b_n,$$

имеем по теореме A:

$$B(x) = \sum_{p_n \leqslant x} \frac{a_n}{\ln p_n} = \int_2^x \frac{A(u)}{u(\ln u)^2}\,du + \frac{A(x)}{\ln x}$$

$(x \geqslant 2)$. Согласно формуле (22), $A(x) = \ln x + r(x)$, где $|r(x)|$ меньше некоторой константы K для всех $x \geqslant 2$. Следовательно,

$$B(x) = \int_2^x \frac{du}{u \ln u} + \int_2^x \frac{r(u)\,du}{u(\ln u)^2} + 1 + \frac{r(x)}{\ln x} =$$

$$= \ln\ln x + B + R(x), \tag{26}$$

где B — некоторое постоянное число, и

$$|R(x)| = \left| -\int_x^\infty \frac{r(u)\,du}{u(\ln u)^2} + \frac{r(x)}{\ln x} \right| < \int_x^\infty \frac{K\,du}{u(\ln u)^2} + \frac{K}{\ln x} = \frac{2K}{\ln x}$$

$(x \geqslant 2)$. Это доказывает формулу (23).

Постоянная B может быть теперь определена путем исследования, двумя различными способами, поведения функции $g(s) = \sum p^{-s}$ при $s \to 1+0$.

С одной стороны, для $s > 1$, по теореме A,

$$g(s) = \sum_1^\infty b_n p_n^{1-s} = (s-1)\int_2^\infty B(x)\,x^{-s}\,dx,$$

ибо $B(X)\,X^{1-s} \to 0$ при $X \to \infty$. Подставляя сюда значение для $B(x)$ из формулы (26), получаем:

$$g(s) = (s-1)\int_2^\infty \frac{\ln\ln x}{x^s}\,dx + (s-1)\int_2^\infty \frac{B}{x^s}\,dx + $$
$$+ (s-1)\int_2^\infty \frac{R(x)}{x^s}\,dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как

$$R(x) = O\left(\frac{1}{\ln x}\right) = o(1)$$

то $|R(x)| < \varepsilon$ для всех $x > x_0 = x_0(\varepsilon)$ (> 2). Следовательно,

$$|I_3| < (s-1)\int_2^{x_0} |R(x)|\,dx + \varepsilon < 2\varepsilon$$

для всех s, достаточно близких к единице: $1 < s < s_0 = s_0(\varepsilon, x_0) = s_0(\varepsilon)$, и, значит, $I_3 \to 0$ при $s \to 1+0$. В I_1 и I_2 заменяем нижний предел интегрирования через единицу, что вызывает ошибку $o(1)$, при $s \to 1$. Выполняя в I_1 подстановку $x^{s-1} = e^y$, получаем, таким, образом:

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-y} \ln\frac{y}{s-1}\,dy + B + o(1) = -C - \ln(s-1) + B + o(1), \quad (27)$$

где C — эйлерова постоянная [1]). С другой стороны, по формуле (13)

$$\ln(s-1) + g(s) = \ln\{(s-1)\zeta(s)\} +$$
$$+ \sum_p \left\{ \left(\ln 1 - \frac{1}{p^s}\right) + \frac{1}{p^s} \right\} \to \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right\} \quad (28)$$

[1]) Формула $\int_0^\infty e^{-y} \ln y\,dy = -C$ получается, если эйлеров интеграл для $\Gamma(z)$ диференцировать по z (под знаком интеграла) и положить $z = 1$

при $s \to 1+0$, ибо $(s-1)\zeta(s) \to 1$, и ряд справа равномерно сходится для $s \geqslant 1$ $\left(\text{ср. с } \sum \frac{1}{p^2}\right)$. Сравнивая (27) и (28), получаем:

$$B = C + \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right\}.$$

Подстановка найденного для B значения в (23) дает:

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} - \sum_p \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right\} = \ln \ln x + C + O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Во второй сумме слева мы можем ограничиться конечным числом слагаемых, для $p \leqslant x$, с ошибкой:

$$O\left(\sum_{p > x} \frac{1}{p^2}\right) = O\left(\sum_{n > x} \frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Мы получаем тогда:

$$-\sum_{p \leqslant x} \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \ln \ln x + C + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

или

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-C}}{\ln x} e^{O\left(\frac{1}{\ln x}\right)} = \frac{e^{-C}}{\ln x} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right\},$$

откуда и вытекает, в частности, формула (24).

Эта последняя формула важна в том отношении, что показывает, как предпринимающиеся время от времени различные скороспелые попытки „вероятностных" доказательств приводят к заведомо неправильным результатам [1]).

---

[1]) *Hardy* and *Littlewood*, *4*, 32—37

Глава II.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ.

1. *Риманова дзета-функция.* Целью настоящей главы является доказательство асимптотического закона распределения простых чисел; для этого нам придется исследовать риманову функцию

$$\zeta(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}} \tag{1}$$

как функцию комплексного переменного s. Мы ограничимся пока лишь теми свойствами этой функции, которые нужны для непосредственного применения, откладывая изложение систематической теории ее до следующей главы.

Мы пишем:

$$s=\sigma+ti$$

и определяем x^{s} для $x>0$ как $\exp(s\ln x)=e^{s\ln x}$, где $\ln x$ имеет вещественное значение. Тогда $|n^{s}|=n^{\sigma}$, и ряд (1) (по признаку Вейерштрасса) равномерно сходится для $\sigma>1+\delta$ при любом фиксированном положительном δ. Следовательно, $\zeta(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma>1$ и все ее производные могут быть получены почленным диференцированием [1]). Формулы

---

[1]) В силу классической теоремы Вейерштрасса о равномерно сходящихся последовательностях $f_n(s)$ регулярных функций. Мы еще будем иметь случай применить аналогичную теорему для $f_X(s)$, где X изменяется непрерывно. Так, например, в следующем параграфе мы будем иметь дело с функцией

$$f(s)=\int_{1}^{\infty}\frac{(x)}{x^{s+1}}\,dx=\lim_{X\to\infty} f_X(s),$$

где

$$f_X(s)=\int_{1}^{X}\frac{(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

гл. I, § 7 (стр. 26—28) сохраняют силу во всей полуплоскости $\sigma > 1$. Действительно, формальные преобразования, очевидно, не затрагиваются продолжением переменной s в комплексную область, что же касается вопросов сходимости, то достаточно заметить, что все встречающиеся там ряды мажорируются рядами, получающимися из них при замене s на σ. В формулах (13) и (18) берется ветвь $\ln \zeta(s)$, вещественная на вещественной оси. Функция $\zeta(s)$ не обращается в нуль при $\sigma > 1$, ибо эйлерово произведение $\zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ при $\sigma > 1$ сходится и ни один из его сомножителей не равен нулю; таким образом $\ln \zeta(s)$ не имеет особенностей при $\sigma > 1$.

2. *Аналитическое продолжение.* До сих пор $\zeta(s)$ была определена только в полуплоскости $\sigma > 1$, и мы должны теперь заняться вопросом об ее аналитическом продолжении. Для ближайших целей мы ограничимся лишь следующим частным результатом:

Теорема 8. *Функция* $\zeta(s)$, *определенная для* $\sigma > 1$ *формулой* (1), *аналитически продолжаема на полуплоскость* $\sigma > 0$, *причем в этой последней полуплоскости она однозначна и имеет единственной особенностью простой полюс в точке* $s = 1$ *с вычетом* 1.

Полагая в теореме А (стр. 28) $\lambda_n = n$, $c_n = 1$, $\Phi(x) = x^{-s}$, получаем, что для $X \geqslant 1$

$$\sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} = s\int_1^X \frac{[x]}{x^{s+1}}\,dx + \frac{[X]}{X^s}.$$

Полагая $[x] = x - (x)$, так что $0 \leqslant (x) < 1$, находим:

$$\sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} - \frac{s}{(s-1)X^{s-1}} - s\int_1^X \frac{(x)}{x^{s+1}}\,dx + \frac{1}{X^{s-1}} - \frac{(X)}{X^s}. \quad (2)$$

и $(x) = x - [x]$. В этом и в аналогичных случаях регулярность функции $f_X(s)$ во всей плоскости s (при фиксированном X) может быть либо установлена путем разложения подинтегрального выражения по степеням s и почленного интегрирования, либо выведена из общих теорем. И в том и в другом случаях нетрудно показать, что производная от $f_X(s)$ может быть получена путем диференцирования под знаком интеграла: следовательно, по теореме Вейерштрасса, то же справедливо и для $f(s)$ во всей области равномерной сходимости.

Беря $X \to \infty$ и замечая, что $\left|\frac{1}{X^{s-1}}\right| = \frac{1}{X^{\sigma-1}}$ и $\left|\frac{(X)}{X^s}\right| < \frac{1}{X^\sigma}$, видим, что для $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{(x)}{x^{s+1}}\,dx. \tag{3}$$

Но $\left|\frac{(x)}{x^{s+1}}\right| < \frac{1}{x^{\sigma+1}}$; поэтому последний интеграл равномерно сходится для $\sigma > \delta$ при любом фиксированном положительном δ и, значит, представляет функцию от s, регулярную во всей полуплоскости $\sigma > 0$ (см. сноску на стр. 36—37). Это и доказывает теорему, ибо формула (3) осуществляет продолжение $\zeta(s)$ на полуплоскость $\sigma > 0$.

3. $\zeta(s)$ ограничена в любой полуплоскости $\sigma \geqslant 1 + \delta > 1$, так как $|\zeta(s)| \leqslant \zeta(\sigma) \leqslant \zeta(1+\delta)$. Формулы, полученные в § 2, позволяют оценить порядок величины $|\zeta(s)|$ в соседстве с прямой $\sigma = 1$, и влево от нее. Прежде всего нас интересуют точки $s = \sigma + ti$ с большим $|t|$; при этом мы можем ограничиться верхней полуплоскостью $t > 0$, ибо, как показывает формула (3), $\zeta(\sigma + ti)$ и $\zeta(\sigma - ti)$ имеют сопряженные комплексные значения.

Здесь и во всем последующем мы употребляем букву A (иногда a), с индексом или без, для обозначения положительной абсолютной константы, численное определение которой нас не интересует. Через $A(\alpha, \beta, \ldots)$ мы обозначаем положительное число, зависящее лишь от явно указанных параметров α, β, ... Наконец, мы употребляем символ O и в применении к функциям, содержащим параметры; так, мы говорим, что, при $t \to \infty$, $f(\sigma, t) = O(t^\sigma)$ равномерно в известных пределах изменения σ, если для всех $t > t_0$ и всех σ в указанных пределах имеет место неравенство $|f(\sigma, t)| < Kt^\sigma$, где K и t_0 не зависят от t и σ.

Теорема 9.

$$|\zeta(s)| < A \ln t \qquad (\sigma \geqslant 1,\ t \geqslant 2), \tag{4}$$

$$|\zeta'(s)| < A \ln^2 t \qquad (\sigma \geqslant 1,\ t \geqslant 2), \tag{5}$$

$$|\zeta(s)| < A(\delta)\, t^{1-\delta} \quad (\sigma \geqslant \delta,\ t \geqslant 1), \tag{6}$$

где $0 < \delta < 1$.

В силу формул (2) и (3) имеем для $\sigma > 0$, $t \geqslant 1$, $X \geqslant 1$:

$$\zeta(s) - \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{(s-1)X^{s-1}} + \frac{(X)}{X^s} - s\int_X^\infty \frac{(x)\,dx}{x^{s+1}}. \tag{7}$$

Следовательно,

$$|\zeta(s)| < \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{tX^{\sigma-1}} + \frac{1}{X^\sigma} + |s|\int_X^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}} <$$
$$< \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{tX^{\sigma-1}} + \frac{1}{X^\sigma} + \left(1 + \frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{X^\sigma},$$

так как $|s| < \sigma + t$. Если $\sigma \geqslant 1$, то

$$|\zeta(s)| < \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n} + \frac{1}{t} + \frac{1}{X} + \frac{1+t}{X} \leqslant (\ln X + 1) + 3 + \frac{t}{X},$$

так как $t \geqslant 1$, $X \geqslant 1$. Полагая $X = t$, получаем (4).

Если $\sigma \geqslant \eta$, где $0 < \eta < 1$, то

$$|\zeta(s)| < \sum_{n \leqslant X} \frac{1}{n^\eta} + \frac{1}{tX^{\eta-1}} + \left(2 + \frac{t}{\eta}\right)\frac{1}{X^\eta} <$$
$$< \int_0^{[X]} \frac{dx}{x^\eta} + \frac{X^{1-\eta}}{t} + \frac{3t}{\eta X^\eta} \leqslant \frac{X^{1-\eta}}{1-\eta} + X^{1-\eta} + \frac{3t}{\eta X^\eta}.$$

Беря, как выше, $X = t$, находим:

$$|\zeta(s)| < t^{1-\eta}\left(\frac{1}{1-\eta} + 1 + \frac{3}{\eta}\right) \quad (\sigma \geqslant \eta,\ t \geqslant 1), \tag{8}$$

откуда вытекает (6).

Неравенство (5) может быть выведено либо аналогичным путем из формулы, получающейся при диференцировании равенства (7), либо следующим образом. Пусть $s_0 = \sigma_0 + t_0 i$ — произвольная точка области $\sigma \geqslant 1$, $t \geqslant 2$ и C — окружность с центром в s_0 и радиусом $\rho < \frac{1}{2}$; тогда

$$|\zeta'(s_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\zeta(s)\,ds}{(s-s_0)^2}\right| \leqslant \frac{M}{\rho},$$

где M — максимум модуля $|\zeta(s)|$ на C. Но для всех точек s окружности C имеем $\sigma \geqslant \sigma_0 - \rho \geqslant 1 - \rho$ и $1 < t < 2t_0$. Следовательно, в силу неравенства (8),

$$M < (2t_0)^\rho \left(\frac{1}{\rho} + 1 + \frac{3}{1-\rho}\right) < \frac{10t_0^\rho}{\rho},$$

ибо $\rho < 1 - \rho < 1$, $2^\rho < 2$; отсюда

$$|\zeta'(s_0)| < 10\frac{t_0^\rho}{\rho^2}.$$

Возьмем $\rho = \dfrac{1}{\ln t_0 + 2}$; тогда $t_0^\rho = e^{\rho \ln t_0} < e$, так что

$$|\zeta'(s_0)| < 10e(\ln t_0 + 2)^2.$$

Но это равносильно равенству (5), ибо s_0 есть произвольная точка области $\sigma \geqslant 1$, $t \geqslant 2$.

Оценки (4), (5), (6) отнюдь не являются наилучшими, и то же можно сказать и про другие оценки для $\zeta(s)$, приводимые на протяжении настоящей книги. Правда, дальнейшие уточнения этих оценок не имеют существенного значения в теории простых чисел, ибо они все равно стираются при переходе от $\zeta(s)$ к ее логарифму или логарифмической производной — функциям, непосредственно выступающим в этой теории. Однако проблема определения истинного порядка роста $\zeta(\sigma + ti)$ как функции от t является одной из важнейших в теории функции $\zeta(s)$, правда, и одной из труднейших; ее решение еще далеко не закончено[1]).

4. *Нули.* Естественно ожидать, что в приложениях функции $\zeta(s)$ к теории простых чисел ее нули будут играть важную роль, как особенности функций $\ln \zeta(s)$ и $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, занимающих в теории простых чисел центральное место. Эйлерово произведение $\zeta(s) = \prod(1 - p^{-s})^{-1}$ показывает (как было замечено в § 1), что в полуплоскости $\sigma > 1$ не содержится нулей $\zeta(s)$, однако из него непосредственно не видно, как будет обстоять дело вне этой полуплоскости. Мы докажем теперь, прежде всего, следующую теорему.

Теорема 10. *$\zeta(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma = 1$. Далее, при $t \to \infty$*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O\{(\ln t)^A\} \tag{9}$$

равномерно для всех $\sigma \geqslant 1$.

---

[1]) См. *T*, гл. I, V, VI.

Доказательство основывается на элементарном неравенстве

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta \geqslant 0, \tag{10}$$

справедливом для всех вещественных θ [левая часть равна $2(1+\cos\theta)^2$].

В силу равенства (13), стр. 27, имеем для $\sigma>1$:

$$\ln|\zeta(\sigma+ti)|=\Re\sum_{n=2}^{\infty}c_n n^{-\sigma-ti}=\sum_{n=2}^{\infty}c_n n^{-\sigma}\cos(t\ln n),$$

где c_n равно $\frac{1}{m}$, если n есть m-я степень простого числа, и равно нулю в противном случае. Отсюда[1]), принимая во внимание (10), имеем:

$$\ln|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+ti)\zeta(\sigma+2ti)|=$$
$$=\sum c_n n^{-\sigma}\{3+4\cos(t\ln n)+\cos(2t\ln n)\}\geqslant 0,$$

ибо $c_n\geqslant 0$. Следовательно,

$$\{(\sigma-1)\zeta(\sigma)\}^3\left|\frac{\zeta(\sigma+ti)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2ti)|\geqslant\frac{1}{\sigma-1}\quad(\sigma>1). \tag{11}$$

Отсюда явствует, что точка $1+ti$ $(t\gtrless 0)$ не может служить нулем $\zeta(s)$. Действительно, в противном случае левая часть при $\sigma\to 1+0$ стремилась бы к конечному пределу [именно, к $|\zeta'(1+ti)|^4|\zeta(1+2ti)|$] вследствие того, что $\zeta(s)$ регулярна в точках $1+ti$ и $1+2ti$ и имеет простой полюс, с вычетом 1, в точке $s=1$; правая же часть стремилась бы к бесконечности. Это доказывает первую часть теоремы.

При доказательстве второй части мы можем предполагать, что $1\leqslant\sigma\leqslant 2$, ибо для $\sigma\geqslant 2$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|=\left|\prod_p(1-p^{-s})\right|\leqslant\prod_p(1+p^{-\sigma})<\zeta(\sigma)\leqslant\zeta(2).$$

Если $1<\sigma\leqslant 2$, $t\geqslant 2$, то вследствие неравенств (11) и (4)

$$(\sigma-1)^3\leqslant\{(\sigma-1)\zeta(\sigma)\}^3|\zeta(\sigma+ti)|^4|\zeta(\sigma+2ti)|\leqslant$$
$$\leqslant A_1^3\cdot|\zeta(\sigma+ti)|^4\cdot A_2\ln 2t;$$

отсюда (так как $\ln 2t\leqslant\ln t^2=2\ln t$)

$$|\zeta(\sigma+ti)|\geqslant\frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{A_3(\ln t)^{\frac{1}{4}}}\quad(1\leqslant\sigma\leqslant 2,\ t\geqslant 2) \tag{12}$$

---

[1]) $f^n(s)$ есть n-я степень, $f^{(n)}(s)$ — n-я производная функции $f(s)$.

(для $\sigma = 1$ это тривиально). Пусть теперь $1 < \eta < 2$; тогда для $1 \leqslant \sigma \leqslant \eta$, $t \geqslant 2$, в силу неравенства (5),

$$|\zeta(\sigma + ti) - \zeta(\eta + ti)| = \left| \int_\sigma^\eta \zeta'(u + ti)\, du \right| \leqslant A_4 \ln^2 t \cdot (\eta - 1);$$

отсюда, принимая во внимание (12), получаем:

$$|\zeta(\sigma + ti)| \geqslant |\zeta(\eta + ti)| - A_4(\eta - 1)\ln^2 t \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(\eta - 1)^{\frac{3}{4}}}{A_3 (\ln t)^{\frac{1}{4}}} - A_4(\eta - 1)\ln^2 t.$$

Но последнее неравенство сохраняет силу, вследствие (12), и для $\eta \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t \geqslant 2$; значит, оно справедливо вообще для всех $1 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t \geqslant 2$. Выберем теперь $\eta = \eta(t)$ так, чтобы

$$\frac{(\eta - 1)^{\frac{3}{4}}}{A_3 (\ln t)^{\frac{1}{4}}} = 2A_4(\eta - 1)\ln^2 t,$$

для чего нужно, очевидно, положить:

$$\eta = 1 + (2A_3 A_4)^{-4} (\ln t)^{-9},$$

и возьмем t столь большим (скажем, $t > t_0$), чтобы было $\eta < 2$. Тогда для $1 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t > t_0$ мы будем иметь:

$$|\zeta(\sigma + ti)| \geqslant A_4(\eta - 1)\ln^2 t = A_5 (\ln t)^{-7}.$$

Это и доказывает формулу (9) (с $A = 7$).

Неравенство (10) является лишь одним из бесчисленного множества аналогичных неравенств вида

$$c_0 + c_1 \cos\theta + \ldots + c_m \cos m\theta \geqslant 0,$$

которые могли бы быть использованы для той же цели, раз только коэфициенты положительны и $c_1 > c_0$. Таково, например, неравенство

$$5 + 8\cos\theta + 4\cos 2\theta + \cos 3\theta \geqslant 0.$$

Приведенное нами доказательство первой части теоремы 10 принадлежит в существенных чертах Адамару[1]). Совершенно отличное доказательство было дано де-ла-Валле-Пуссеном[2]); оно значительно сложнее и требует гораздо больше предварительных сведений о свойствах функции $\zeta(s)$.

---

[1]) *Hadamard, 3*. См. также *Mertens, 2*; *H*, I, 242—258.
[2]) *De la Vallée-Poussin, 1*.

5. *Фундаментальная формула.* Установив все необходимые свойства $\zeta(s)$, мы переходим теперь к выводу из них интересующих нас свойств $\psi(x)$. В фундаментальном соотношении (17), стр. 27, связывающем эти две функции, $f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ выражено через $\psi(x)$. Для наших целей было бы, очевидно, желательно иметь, наоборот, выражение $\psi(x)$ через $f(s)$. Однако непосредственное рассмотрение $\psi(x)$ приводит к некоторым затруднениям, связанным с вопросами сходимости; чтобы обойти эти затруднения, мы будем сначала оперировать с функцией

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(u)\,du = \int_1^x \psi(u)\,du = \sum_{n<x} (x-n)\Lambda(n). \quad (13)$$

(Тождественное совпадение двух последних выражений является простым следствием теоремы А, стр. 28). Обратный переход от $\psi_1(x)$ к $\psi(x)$ будет уже сравнительно нетрудным делом. Прежде всего мы докажем фундаментальную формулу

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds \quad (x>0,\ c>1), \quad (14)$$

где интегрирование производится по прямой $\sigma = c$. Доказательство основывается на следующей теореме:

Теорема В. *Пусть k — целое положительное число, $c>0$, $y>0$; тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{y^s ds}{s(s+1)\ldots(s+k)} = \begin{cases} 0 & (y \leqslant 1), \\ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^k & (y \geqslant 1). \end{cases}$$

Интеграл абсолютно сходится, ибо на контуре интегрирования подинтегральное выражение по модулю меньше $y^c|t|^{-k-1}$. Обозначим через I интеграл по бесконечному промежутку и через I_T — интеграл в пределах от $c-Ti$ до $c+Ti$ $\left(\text{оба с множителем } \frac{1}{2\pi i}\right)$. Применяя теорему Коши о вычетах, заменяем контур интегрирования в I_T дугою окружности C с центром в $s=0$, проходящей через точки $s = c \pm Ti$. Если $y \geqslant 1$, то берем дугу C_1, лежащую левее прямой $\sigma = c$, в предположении, что T столь велико, что $R > 2k$, где R — радиус окружности C. Это дает:

$$I_T = S + I(C_1), \tag{15}$$

где S есть сумма вычетов подинтегрального выражения в его полюсах $s = 0, -1, \ldots, -k$ и $I(C_1)$ — интеграл вдоль C_1. Но на C_1 $\sigma \leqslant c$ и, значит, $|y^s| = y^\sigma \leqslant y^c$, так как $y \geqslant 1$; точно так же

$$|s+n| \geqslant R - k > \frac{1}{2} R \quad (n = 0, 1, \ldots, k);$$

отсюда

$$|I(C_1)| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y^c}{\left(\frac{1}{2} R\right)^{k+1}} \cdot 2\pi R = \frac{2^{k+1} y^c}{R^k} < \frac{2^{k+1} y^c}{T^k}.$$

Следовательно, в силу равенства (15), $I_T \to S$ при $T \to \infty$. Итак, $I = S$; но

$$S = \sum_{r=0}^{k} \frac{y^{-r}}{(-1)^r r! (k-r)!} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{y}\right),$$

что и доказывает теорему для $y \geqslant 1$. Для случая $y \leqslant 1$ доказательство аналогично, с тем отличием, что берется правая дуга C_2 окружности C; так как внутри нового контура уже не содержатся полюсы, то для интеграла I получается значение нуль.

Отсюда формула (14) выводится следующим образом. По теореме В для $x > 0$ и $c > 0$

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leqslant x} \left(1 - \frac{n}{x}\right) \Lambda(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)}\, ds.$$

Если $c > 1$, то можно переставить порядок суммирования и интегрирования, ибо ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \left| \frac{\Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)}\, ds \right| < x^c \sum_{1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{c^2 + t^2}$$

сходится [1]). Следовательно,

$$\frac{\psi_1(x)}{x}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{x^s}{s(s+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{x^s}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds,$$

что эквивалентно формуле (14).

Интегрируя в правой части формулы (17), стр. 27, по частям, получаем:

$$\frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\psi_1(x)}{x^{s+2}}\,dx \qquad (\sigma>1) \tag{16}$$

$[\psi_1(x)=0$ для $x<2]$. Равенства (14) и (16) можно рассматривать как примеры на формулу обращения Меллина, либо, после замены переменной, как пару взаимно обратных формул типа „преобразований Фурье", так что каждая может быть выведена из другой на основании общих теорем. Они являются частными случаями общих формул теории рядов Дирихле, справедливых при гораздо более широких условиях [2]).

6. Мы теперь выведем асимптотическую формулу для $\psi_1(x)$, чем будет сделан решающий шаг к доказательству асимптотического закона распределения простых чисел.

Теорема 11. *При* $x\to\infty$

$$\psi_1(x)\sim\frac{1}{2}x^2.$$

Во всем последующем предполагается, что $x>1$. Из формулы (14) имеем:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}=\int\limits_{(c)}g(s)x^{s-1}\,ds, \tag{17}$$

---

[1]) Указанная перемена порядка суммирования и интегрирования основывается на следующем общем принципе: пусть S_x и T_y обозначают суммирования или интегрирования относительно указанных переменных; тогда

$$S_xT_yf(x,y)=T_yS_xf(x,y),$$

если только одна из частей этого равенства остается конечной при замене f на $|f|$ и, в случае вхождения интегралов, удовлетворяются некоторые условия интегрируемости (что в интересующих нас приложениях всегда имеет место). По поводу частного случая $f\geqslant 0$ см. Ш. Ж. де-ла-Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, §§ 41, 42. Общий случай может быть приведен к этому с помощью следующего известного приема: полагаем $f=u+vi$, $u=u_1-u_2$, $|u|=u_1+u_2$, $v=v_1-v_2$, $|v|=v_1+v_2$, и применяем затем указанный выше частный случай к u_1, u_2, v_1, v_2 в отдельности.

[2]) *HR*, теоремы 13, 24, 29, 39, 40.

где $c > 1$, (c) обозначает прямую $\sigma = c$, и

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{s(s+1)}\cdot\zeta'(s)\cdot\frac{1}{\zeta(s)}.$$

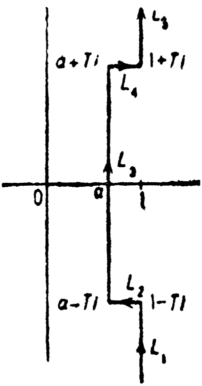
По теоремам 8, 9, 10 функция $g(s)$ регулярна для $\sigma \geqslant 1$, за исключением точки $s = 1$, и

$$|g(s)| < A_1\cdot|t|^{-2}\cdot A_2(\ln|t|)^2\cdot A_3(\ln|t|)^{A_4} <$$
$$< |t|^{-\frac{3}{2}} \quad (\sigma \geqslant 1,\ |t| > |t_0|). \tag{18}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и пусть $L = L(\varepsilon) = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ будет бесконечный ломаный контур, указанный на черт. 1, причем $T = T(\varepsilon)$ выбрано так, что

$$\int_T^\infty |g(1+ti)|\,dt < \varepsilon, \tag{19}$$

а затем $a = a(T) = a(\varepsilon)$ $(0 < a < 1)$ — так, чтобы прямоугольник $a \leqslant \sigma \leqslant 1$, $-T \leqslant t \leqslant T$ не содержал нулей функции $\zeta(s)$. Первое возможно в силу неравенства (18), а второе вследствие того, что $\zeta(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma = 1$ (по теореме 10) и (как регулярная функция) имеет их самое большее конечное число в области $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1, -T \leqslant t \leqslant T$. Применяя к интегралу (17) теорему Коши, находим:



Черт. 1.

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \int_L g(s)x^{s-1}\,ds = \frac{1}{2} + I, \tag{20}$$

где $\frac{1}{2}$ получается вследствие наличия полюса в $s = 1$ $\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right.$, как логарифмическая производная функции с простым полюсом, имеет в точке $s = 1$ простой полюс с вычетом -1]. Действительно, в силу нашего выбора контура L подинтегральное выражение регулярно на линиях (c) и L и в промежутке между ними (за исключением точки $s = 1$); интегрируя сперва по замкнутому контуру, отсекаемому прямыми линиями $t = \pm U$, где

$U > \max(t_0, T)$, видим, что интегралы по отрезкам этих линий, входящим в указанный замкнутый контур, будут по модулю

$$\leqslant (c-1) \max_{1 \leqslant \sigma \leqslant c} |g(\sigma \pm Ui)| x^{\sigma-1} < (c-1) U^{-\frac{\delta}{2}} x^{c-1},$$

в силу неравенства (18), и, значит, стремятся к нулю при $U \to \infty$; (18) показывает, кроме того, что I сходится абсолютно. Напишем $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$, где $I_1, \ldots, I_5$ суть интегралы, взятые соответственно вдоль $L_1, \ldots, L_5$. Так как $g(s) x^{s-1}$ принимает сопряженные значения для сопряженных значений s, имеем по неравенству (19):

$$|I_1| = |I_5| = \left| \int\limits_T^\infty g(1+ti) x^{ti} \, dt \right| \leqslant \int\limits_T^\infty |g(1+ti)| \, dt < \varepsilon.$$

Точно так же (вследствие того, что $x > 1$)

$$|I_2| = |I_4| = \left| \int\limits_\alpha^1 g(\sigma + Ti) x^{\sigma + Ti - 1} \, d\sigma \right| \leqslant M \int\limits_\alpha^1 x^{\sigma-1} \, d\sigma < \frac{M}{\ln x},$$

$$|I_3| \leqslant M x^{\alpha-1} \cdot 2T,$$

где $M = M(T, \alpha) = M(\varepsilon)$ есть максимум модуля $|g(s)|$ на конечных отрезках L_2, L_3, L_4. Применяя эти оценки к формуле (20), получаем:

$$\left| \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \right| = |I| < 2\varepsilon + \frac{2M}{\ln x} + \frac{2MT}{x^{1-\alpha}} < 3\varepsilon$$

для всех $x > x_0 = x_0(\varepsilon, T, \alpha, M) = x_0(\varepsilon)$. Это и доказывает, что $\frac{\psi_1(x)}{x^2} \to \frac{1}{2}$ при $x \to \infty$.

Нашей целью при перенесении контура интегрирования влево является, очевидно, достижение того, чтобы на новом контуре $|x^{s-1}| = x^{\sigma-1}$ сделалось возможно меньшим. Однако возможность наткнуться на особенности подинтегрального выражения, вызванные нулями функции $\zeta(s)$, ставит границы этому перенесению. Имеется другое доказательство, при котором контур интегрирования уже вообще не переходит влево за прямую $\sigma = 1$. В кратких чертах оно таково: из формулы (14) и теоремы В (с заменой переменной $s = s' + 1$) имеем:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right) ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} h(s) x^{s-1} ds$$

$(x>1,\ c>1)$. Как и выше, мы перемещаем контур интегрирования влево, но теперь за новый контур мы принимаем уже прямую $\sigma=1$, что можно сделать, так как $h(s)$ регулярна в точке $s=1$. Это дает:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(1+ti)\,e^{\xi ti}\,dt, \tag{21}$$

где $\xi=\ln x$. Так как интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h(1+ti)|\,dt$$

сходится $\left(\text{как можно убедиться, применяя оценки для } |\zeta'(s)| \text{ и } \frac{1}{|\zeta(s)|} \text{ из теорем 9 и 10}\right)$, то в силу простого обобщения известной теоремы Римана-Лебега из теории рядов Фурье интеграл в правой части формулы (21) должен стремиться к нулю при $\xi\to\infty$, что и доказывает теорему.

7. Теперь мы должны вывести из теоремы 11 соответствующее соотношение для $\psi(x)$. Этот вывод основывается на следующей теореме.

Теорема C. *Пусть $c_1,\ c_2,\ \ldots$ — заданная числовая последовательность и*

$$C(x)=\sum_{n\leqslant x}c_n,\quad C_1(x)=\int\limits_0^x C(u)\,du=\sum_{n\leqslant x}(x-n)\,c_n.$$

Если $c_n\geqslant 0$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ и $C_1(x)\sim Cx^c$ при $x\to\infty$, где C и c — положительные постоянные, то тогда $C(x)\sim Ccx^{c-1}$.

(Тождество двух выражений для $C_1(x)$ является следствием теоремы A.)

Пусть $0<\alpha<1<\beta$. Так как $c_n\geqslant 0$, то $C(u)$ является неубывающей функцией от u; поэтому для $x>0$

$$C(x)\leqslant\frac{1}{\beta x-x}\int\limits_x^{\beta x}C(u)\,du=\frac{C_1(\beta x)-C_1(x)}{(\beta-1)\,x},$$

$$\frac{C(x)}{x^{c-1}}\leqslant\frac{1}{\beta-1}\left(\frac{C_1(\beta x)}{(\beta x)^c}\beta^c-\frac{C_1(x)}{x^c}\right).$$

Пусть β фиксировано и $x \to \infty$; так как $\frac{C_1(y)}{y^c} \to C$ при $y \to \infty$, то будем иметь:

$$\overline{\lim} \frac{C(x)}{x^{c-1}} \leqslant C \frac{\beta^c - 1}{\beta - 1}.$$

Аналогично, рассматривая интервал $(\alpha x, x)$, получим:

$$\underline{\lim} \frac{C(x)}{x^{c-1}} \geqslant C \frac{1 - \alpha^c}{1 - \alpha}.$$

Беря α и β достаточно близкими к единице, мы можем сделать правые части полученных неравенств произвольно близкими к Cc (производной от Cx^c в точке $x = 1$). Следовательно,

$$\overline{\lim} \frac{C(x)}{x^{c-1}} = \underline{\lim} \frac{C(x)}{x^{c-1}} = Cc.$$

Переход от $C(x) \sim Ccx^{c-1}$ к $C_1(x) \sim Cx^c$ выполняется (и притом почти тривиально) без наложения ограничивающего условия $c_n \geqslant 0$. Что обратный переход от $C_1(x) \sim Cx^c$ к $C(x) \sim Ccx^{c-1}$, вообще говоря, неверен, показывает пример $c_n = 1 + (-1)^n n$. См. ниже, в § 10, некоторые общие замечания относительно теоремы C.

8. *Асимптотический закон распределения простых чисел.* Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел получается теперь путем простого соединения результатов предыдущих теорем.

Теорема 12. *При* $x \to \infty$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

По теореме 11, $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2} x^2$. Так как $\Lambda(n) \geqslant 0$, то, по теореме C, $\psi(x) \sim x$, а это, по теореме 3, эквивалентно утверждению, что $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.

Теорема 12 доставляет следующий результат относительно n-го простого числа p_n.

Теорема 13. *При* $n \to \infty$

$$p_n \sim n \ln n.$$

Действительно, положим $y = \pi(x)$; тогда при $x \to \infty$

$$\frac{y \ln x}{x} \to 1, \tag{22}$$

откуда

$$\ln y + \ln \ln x - \ln x \to 0$$

и, значит,

$$\frac{\ln y}{\ln x} \to 1.$$

В соединении с (22) это дает:

$$\frac{y \ln y}{x} \to 1,$$

откуда, полагая $x = p_n$, мы и получаем требуемый результат, ибо $\pi(p_n) = n$.

Обратно, теорема 12 может быть выведена из теоремы 13, так что эти две теоремы эквивалентны. В самом деле, пусть теорема 13 верна и $n = n(x)$ определяется неравенством $p_n \leqslant x < p_{n+1}$. Тогда, при $x \to \infty$, $p_n \sim n \ln n$ и $p_{n+1} \sim (n+1) \ln (n+1) \sim n \ln n$, откуда $x \sim n \ln n$ или же $x \sim y \ln y$, так как $y = \pi(x) = n$. Отсюда выводим, как выше, что $\ln x \sim \ln y$ и, значит, $y \sim \frac{x}{\ln x}$.

9. Приведенное выше доказательство асимптотического закона распределения простых чисел основывается на том обстоятельстве, что $\zeta(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma = 1$. Естественно встает вопрос: существенно ли это свойство $\zeta(s)$ для справедливости асимптотического закона? Утвердительный ответ на этот вопрос доставляется тем фактом, что, как мы сейчас покажем, обратно, отсутствие нулей $\zeta(s)$ на прямой $\sigma = 1$ является прямым следствием асимптотического закона, если принять за известные свойства функции $\zeta(s)$, указанные в теореме 8.

По формуле (17), стр. 27, при $\sigma > 1$

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}}\, dx = -\frac{1}{s}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} = \Phi(s);$$

функция $\Phi(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 0$, за исключением простых полюсов в нулях $\zeta(s)$. Примем теперь, что асимптотический закон выполняется, т. е. $\psi(x) = x + o(x)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ будем иметь $|\psi(x) - x| < \varepsilon x$, начиная с $x \geqslant x_0 = x_0(\varepsilon)\ (> 1)$; отсюда для $\sigma > 1$

$$|\Phi(s)| < \int_1^{x_0} \frac{|\psi(x) - x|}{x^2}\, dx + \int_{x_0}^\infty \frac{\varepsilon}{x^\sigma}\, dx < K + \frac{\varepsilon}{\sigma - 1},$$

где $K = K(x_0) = K(\varepsilon)$. Это показывает, что

$$|(\sigma - 1)\Phi(\sigma + ti)| < K(\sigma - 1) + \varepsilon < 2\varepsilon$$

для всех σ, достаточно близких к единице: $1 < \sigma < \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon, K) = \sigma_0(\varepsilon)$. Следовательно, для всякого фиксированного t

$$(\sigma - 1)\Phi(\sigma + ti) \to 0$$

при $\sigma \to 1 + 0$. Но это не могло бы быть, если бы точка $1 + ti$ была нулем функции $\zeta(s)$, ибо в таком случае $(\sigma - 1)\Phi(\sigma + ti)$ стремилось бы к пределу, отличному от нуля, а именно к вычету $\Phi(s)$ в простом полюсе $1 + ti$.

10. Как было уже указано во введении, доказательство асимптотического закона распределения простых чисел, не опирающееся явно или неявно на понятие аналитической функции от комплексного переменного, еще никем не было найдено. Проведенное выше исследование показывает, что это обусловлено неразрывной связью закона распределения с поведением $\zeta(s)$ на всей прямой $\sigma = 1$.

Методом, примененным в доказательстве теоремы 6, можно доказать следующее общее положение: пусть

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \quad (s > 1), \quad C(x) = \sum_{n \leqslant x} c_n;$$

тогда

$$\text{из } \frac{C(x)}{x} \to C \text{ вытекает } (s - 1) f(s) \to C \tag{23}$$

(при $x \to \infty$ и $s \to 1 + 0$). Если бы было справедливо и обратное предложение, то для получения асимптотического закона распределения простых чисел достаточно было бы просто положить $c_n = \Lambda(n)$. Но обратное предложение, вообще говоря, не верно, и исследование, проведенное в § 9, показывает, как построить противоречащий пример. Для этого достаточно взять за $f(s)$ функцию, сходную по свойствам с $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, но имеющую особенности на прямой $\sigma = 1$, отличные от $s = 1$, например:

$$f(s) = \zeta(s) + \frac{1}{2}\zeta(s - i) + \frac{1}{2}\zeta(s + i) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1 + \cos(\ln n)}{n^s} = \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}. \tag{24}$$

В этом случае $(s - 1) f(s) \to 1$ при $s \to 1 + 0$. И, однако, так как $f(s)$ имеем полюсы в точках $s = 1 \pm i$, то рассуждения § 9 показывают, что $\frac{C(x)}{x}$ при $x \to \infty$ не может стремиться к единице (а в силу утверждения (23) и вообще ни к какому пределу). И действительно, нетрудно непосредственно проверить (например, с помощью теоремы А), что

$$C(x) = x + \frac{x}{\sqrt{2}} \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + o(x).$$

Наши теоремы в их взаимной связи будут лучше всего поняты, если рассматривать их как теоремы „абелева“ и „тауберова“ типа. Переход от $C(x) \sim Ccx^{c-1}$ к $C_1(x) \sim Cx^c$ (§ 7, стр. 49) есть теорема абелева типа — не связываемое никакими ограничивающими условиями заключение от поведения функции к поведению ее среднего; теорема С — „обращение“ этой теоремы, справедливое лишь после ограничений, наложенных на функцию, от которой берется среднее, — есть теорема тауберова типа. Применяя вместо теоремы С другие тауберовы теоремы и вместо $\psi_1(x)$ другие вспомогательные функции, мы можем дать приведенному доказательству асимптотического закона распределения простых чисел самые разнообразные формы, не изменяя при этом их принципа[1]).

Другим примером абелевой теоремы может служить утверждение (23), ибо $f(s)$ представляется в виде среднего от $C(x)$ при помощи формулы, аналогичной формуле (17), стр. 27. Однако обращение этой теоремы не верно даже при условии $c_n \geqslant 0$, как показывает пример (24). Правда, для рядов Дирихле и степенных рядов с положительными коэфициентами существуют тауберовы теоремы (Харди и Литтльвуда), которые могут быть использованы в качестве базиса для доказательства асимптотического закона простых чисел. Однако эти теоремы применяются к вспомогательной функции $\sum \Lambda(n) z^n$ $(0<z<1)$, поведение которой исследуется методами теории аналитических функций[2]); в применении к $\sum \Lambda(n) n^{-s}$ они доставляют лишь доказательство соотношения

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} \sim \ln x,$$

полученного уже, и притом совершенно элементарным путем, в гл. I (теорема 7).

11. Исследованиями настоящей главы установлена взаимная связь асимптотического закона распределения простых чисел с отсутствием у $\zeta(s)$ нулей на прямой $\sigma = 1$. Однако отсюда еще никоим образом нельзя заключить об *эквивалентности* этих двух предложений, ибо при доказательстве асимптотического закона мы опирались на вспомогательную теорему о порядке роста функции $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Этот дефект был устранен Винером, которому удалось дать доказательство асимптотического закона, опираясь, кроме свойств $\zeta(s)$, указанных в теореме 8,

---

[1]) Доказательство, изложенное в тексте, представляет незначительную модификацию доказательства Ландау. По поводу других доказательств см. *H, BC* и приведенные там ссылки на литературу.

[2]) *Hardy* and *Littlewood, 1, 2* (127—134). Их доказательство можно заменить более элементарным, основываясь на найденном Карамата простом доказательстве соответствующей тауберовой теоремы. В принципе доказательство Карамата аналогично доказательству фундаментальной теоремы общей тауберовой теории Винера (см. § 11), однако особенности частного случая, рассмотренного Карамата, позволили путем применения специального приема доказать теорему замечательно простым путем [см. *Wiener, 2* (51)].

лишь на отсутствие у $\zeta(s)$ нулей на прямой $\sigma=1$. Доказательство Винера является применением его общей тауберовой теории [1]).

12. Тот факт, что асимптотический закон распределения простых чисел не был до сих пор доказан методами вещественного переменного, послужил поводом к установлению удобной классификации теорем по их „глубине". Мы называем теорему „элементарной" или „трансцендентной" сообразно тому, может ли она или не может быть доказана без помощи теории аналитических функций. Далее, две теоремы называют „эквивалентными", если они могут быть выведены одна из другой „элементарными" методами.

Один из наиболее разительных примеров „эквивалентных" теорем связан с равенством:

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\ldots, \tag{25}$$

указанным Эйлером в 1748 г. [2]). Члены ряда в правой части представляют собой обратные величины целых положительных чисел q, не делящихся ни на какой квадрат (т. е. содержащих все простые множители лишь в первых степенях), снабженные знаком $+$ или $-$, смотря по тому, содержит ли q четное или же нечетное количество простых множителей. В современных обозначениях это равенство записывают так: $\sum\frac{\mu(n)}{n}=0$, где $\mu(n)$ — функция Мöбиуса. Чисто формальная аргументация Эйлера, сводящаяся фактически к указанию на то, что правая часть равна

$$\Pi(1-p^{-1})=\frac{1}{\zeta(1)}=\frac{1}{\infty}=0,$$

может быть несколько модифицирована с помощью введения переменной s и предельного перехода по $s\to 1+0$; этим путем мы обнаруживаем, уже совершенно строго, что указанный ряд, в случае, если он сходится, должен иметь своей суммой нуль. Но сходимость этого ряда была впервые установлена в 1897 г. фон Мангольдтом, причем доказательство его базировалось на довольно специальных фактах из теории функции $\zeta(s)$ [3]). В настоящее время известно, что сходимость

---

[1]) *Wiener, 1, 2.* Первоначальное доказательство Винера было основано на одной тауберовой теореме для рядов Ламберта, из которой, как это было хорошо известно, асимптотический закон распределения простых чисел вытекает сравнительно просто. Эта теорема и ее связь с теорией чисел были впервые исследованы Харди и Литтльвудом (*Hardy* and *Littlewood, 3*), однако они не имели в виду доказательства асимптотического закона, ибо опирались явно на теорему, несколько более глубокую, чем сам этот закон. Винер дал независимое доказательство тауберовой теоремы для рядов Ламберта, причем выполнимость условий его общей теоремы в рассматриваемом случае основывалась лишь на том, что $\zeta(1+ti)\neq 0$ для всех вещественных t. Другие доказательства асимптотического закона, опирающиеся на теорию Винера, но не применяющие рядов Ламберта, были последовательно получены Икеара (*Ikehara, 1*) и самим Винером (*Wiener, 2*).

[2]) *Euler, 2,* § 227, Exemplum I.

[3]) *von Mangoldt, 3; H,* II, 567—616.

этого ряда „эквивалентна" асимптотическому закону распределения простых чисел [1]. Таким образом эйлерово равенство (25) оказывается „трансцендентной" теоремой. Интересно отметить, что хотя ряд в правой части представляет формальное разложение произведения $\Pi(1-p^{-1})$, тот факт, что произведение n первых сомножителей этого бесконечного произведения стремится к нулю при $n \to \infty$, является „элементарной" теоремой (теорема 1), тогда как теорема о том, что сумма первых членов ряда стремится к определенному пределу, является уже „трансцендентной".

Различие между „элементарными" и „трансцендентными" теоремами, конечно, связано с наличным состоянием наших знаний и является до известной степени неопределенным, поскольку рассуждения, не опирающиеся явно на понятие аналитической функции, могут тем не менее быть тесно связанными с родственными с ним идеями. Так, теория Винера, упомянутая в § 11, дает возможность вывести асимптотический закон распределения простых чисел из свойств $\zeta(s)$ без какого бы то ни было прямого применения теории аналитических функций. И, однако, работа Винера базируется на теории преобразований Фурье, почти столь же сложной, как и теория аналитических функций, и отнюдь не отделенной от нее китайской стеной. Поэтому и сам Винер не считает свою теорию строго „элементарной" в указанном смысле [2].

---

[1] *Landau*, 3.

[2] С тех пор, как были написаны эти строки, Ландау удалось вывести асимптотический закон распределения простых чисел из свойств $\zeta(s)$ не только без применения теории аналитических функций, но и совершенно независимо от общей теории Винера. Его рассуждения совершенно элементарны и опираются лишь на теорему Римана о стремлении коэфициентов Фурье к нулю и на монотонность функции $\psi(x)$ (см. приложение в конце книги). И, однако, это не дает права назвать его доказательство „элементарным", ибо оно основывается на свойствах функции $\zeta(s)$, которые не только доказываются, но даже формулируются лишь с помощью теории аналитических функций. *Перев.*

Глава III.

ДАЛЬНЕЙШАЯ ТЕОРИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ. ПРИМЕНЕНИЯ.

1. В настоящей главе мы займемся систематическим изложением теории дзета-функции и применим наши результаты к дальнейшему исследованию функций $\psi(x)$ и $\pi(x)$.

2. *Аналитическое продолжение и функциональное уравнение.* Мы снова возвращаемся к вопросу об аналитическом продолжении функции $\zeta(s)$ и хотим теперь определить всю область ее существования. Одним из методов, ведущих к достижению этой цели, является расширение этой области, шаг за шагом, путем последовательного интегрирования по частям в формуле (3), стр. 38, или, что фактически одно и то же, путем применения формулы суммирования Эйлера-Маклорена. Однако мы предпочтем другие методы, имеющие то преимущество, что они естественно приводят к важному функциональному соотношению, связывающему $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$.

Теорема 14. *Функция $\zeta(s)$, определенная для $\sigma > 1$ формулой $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, является однозначной аналитической функцией во всей плоскости s, имеющей единственной особенностью (на конечном расстоянии) простой полюс в $s = 1$ с вычетом 1.*

Далее, $\zeta(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{1}{2}\pi s\,\Gamma(s)\,\zeta(s). \tag{1}$$

Имеем:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty y^{s-1} e^{-y}\,dy = n^s \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx}\,dx \quad (\sigma > 0,\ n > 0);$$

поэтому для $\sigma > 1$

$$\Gamma(s)\,\zeta(s) = \sum_1^\infty \Gamma(s)\,n^{-s} = \sum_1^\infty \int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx}\,dx,$$

что после перемены порядка суммирования и интегрирования и применения формулы суммы геометрической прогрессии дает:

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx. \tag{2}$$

Указанная перемена порядка суммирования и интегрирования допустима, так как [стр. 45, сноска [1])]

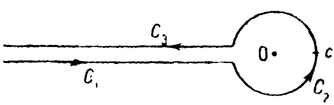
$$\sum_1^\infty \int\limits_0^\infty |x^{s-1}e^{-nx}|\,dx=\sum_1^\infty \int\limits_0^\infty x^{\sigma-1}e^{-nx}\,dx=\sum_1^\infty \Gamma(\sigma)\,n^{-\sigma}=\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)$$

имеет конечное значение.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,dz,$$

взятый вдоль (бесконечного) контура $C=C_1+C_2+C_3$, указанного на черт. 2, где $c<2\pi$ и C_1, C_3 проходят соответственно по верхнему и нижнему краю разреза вдоль отрицательной вещественной оси плоскости z. Мы определяем z^s для всех s как $\exp(s\ln z)$, где $\ln z$ непрерывен на разрезанной указанным образом плоскости z и принимает вещественные значения на положительной вещественной оси. Полагая



Черт. 2.

$$z=re^{\theta i}\quad (r>0,\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

имеем:

$$|z^s|=e^{\sigma\ln r-t\theta}=r^\sigma e^{-t\theta}.$$

Интеграл $I(s)$ (если он сходится) не зависит, по теореме Коши, от c и является функцией от одного только s. Но он сходится для всех s и притом равномерно в любом круге $|s|<\Delta$, ибо на C_1 и C_3

$$\left|\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\right|=\frac{r^{\sigma-1}e^{\pm t\pi}}{e^r-1}<\frac{r^{\Delta-1}e^{\Delta\pi}}{e^r-1}<e^{-\frac{1}{2}r}$$

для всех $r>r_0=r_0(\Delta)$. Следовательно, $I(s)$ регулярен в произвольном круге $|s|<\Delta$ и, значит, представляет целую функцию. (См. сноску на стр. 36—37; с помощью выведенной ниже формулы (3) $I(s)$ выражается через интегралы, взятые по вещественным переменным.)

Полагая на C_1, C_2, C_3 соответственно $z = re^{-\pi i}$, $ce^{\theta i}$, $re^{\pi i}$ и обозначая для сокращения $\frac{1}{e^{-z}-1} = g(z)$, получаем:

$$2\pi i I(s) = -\int\limits_c^\infty r^{s-1} e^{-s\pi i} g(-r)\,dr +$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{\pi} c^s e^{s\theta i} g(ce^{\theta i})\,i\,d\theta + \int\limits_c^\infty r^{s-1} e^{s\pi i} g(-r)\,dr$$

или

$$\pi I(s) = \sin s\pi \int\limits_c^\infty r^{s-1} g(-r)\,dr + \frac{c^s}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{s\theta i} g(ce^{\theta i})\,d\theta =$$

$$= I_1(s, c) + I_2(s, c). \tag{3}$$

Так как $zg(z)$ регулярно для $|z| < 2\pi$, имеем $|zg(z)| \leqslant A_1$ в круге $|z| \leqslant \pi$; следовательно, для $c \leqslant \pi$

$$|I_2(s, c)| \leqslant \frac{c^\sigma}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-t\theta}\,\frac{A_1}{c}\,d\theta \leqslant \pi A_1 e^{|t|\pi} c^{\sigma-1}. \tag{4}$$

Пусть теперь $\sigma > 1$; тогда в силу неравенства (4) $I_2(s, c) \to 0$ при $c \to 0$ (и s фиксированном), поэтому, принимая во внимание формулу (2), будем иметь:

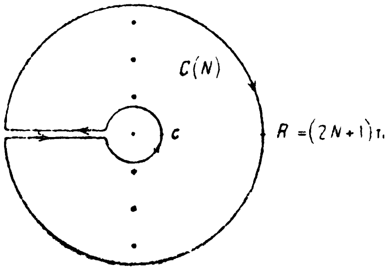
$$\pi I(s) = \lim_{c\to 0} I_1(s, c) = \sin s\pi \int\limits_0^\infty r^{s-1} g(-r)\,dr = \sin s\pi\,\Gamma(s)\,\zeta(s).$$

Следовательно, в силу известной формулы Эйлера,

$$\zeta(s) = \frac{\pi I(s)}{\sin s\pi\,\Gamma(s)} = \Gamma(1-s)\,I(s). \tag{5}$$

Так как $I(s)$ является целой функцией, то это равенство, доказанное сперва в предположении $\sigma > 1$, определяет $\zeta(s)$ как мероморфную функцию с полюсами в тех из точек $s = 1, 2, 3, \ldots$ [полюсах $\Gamma(1-s)$], в которых $I(s) \neq 0$. Но при целом s подинтегральное выражение в $I(s)$ является однозначной функцией от z и $I(s)$ есть вычет этой функции в точке $z=0$; следовательно, $I(1)=-1$, $I(2)=I(3)=\ldots=0$. Таким образом точки $s=2, 3, \ldots$ не являются полюсами $\zeta(s)$ (что, впрочем, явствует из того, что они лежат в полуплоскости $\sigma>1$). И так как

$$(s-1)\zeta(s)=-(1-s)\Gamma(1-s)I(s)=-\Gamma(2-s)I(s),$$



Черт. 3.

то точка $s=1$ является простым полюсом с вычетом $-\Gamma(1)I(1)=1$. Это доказывает первую часть теоремы.

Для доказательства второй части примем, что $\sigma<0$; по теории аналитического продолжения мы имеем на это право, так как обе части формулы (1) регулярны, за исключением полюсов, во всей плоскости s. Рассмотрим

$$I_N(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(N)}\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\,dz,$$

где $C(N)$ есть замкнутый контур, обозначенный на черт. 3, и N — целое положительное число. На внешней окружности имеем:

$$z=Re^{\theta i}\quad(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

$$\left|\frac{z^{s-1}}{e^{-z}-1}\right|=R^{\sigma-1}e^{-t\theta}\left|\frac{1}{e^{-z}-1}\right|<R^{\sigma-1}e^{|t|\pi}A_2\ [1].$$

---

[1]) Модуль $\left|\frac{1}{e^{-z}-1}\right|$ ограничен в области $S(\delta)$, остающейся после удаления из плоскости z внутренних частей кругов радиуса $\delta\,(<\pi)$ с центрами в $s=2n\pi i\ (n=0, \pm1, \pm2, \ldots)$; действительно, он периодичен с периодом $2\pi i$, не превышает $\frac{e}{e-1}$ для $|x|\geqslant1$ $(z=x+yi)$ и непрерывен, а следовательно, ограничен в области $-1\leqslant x\leqslant1$, $-\pi\leqslant y\leqslant\pi$, $|z|\geqslant\delta$. Окружность же $|z|=R$ целиком содержится, например, в $S\left(\frac{1}{2}\pi\right)$.

Поэтому эта часть контура $C(N)$ вносит в $I_N(s)$ величину, меньшую по модулю, чем $R^\sigma e^{|t|\pi} A_2$, и, значит, стремящуюся к нулю при $N \to \infty$, ибо $\sigma < 0$. Отсюда вытекает, что

$$I_N(s) \to I(s) \text{ при } N \to \infty.$$

Но теперь, по теореме Коши о вычетах,

$$I_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \{(2n\pi i)^{s-1} + (-2n\pi i)^{s-1}\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (2n\pi)^{s-1} \left(e^{\frac{1}{2}\pi(s-1)i} + e^{-\frac{1}{2}\pi(s-1)i}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (2n\pi)^{s-1} \cdot 2\cos\frac{1}{2}\pi(s-1) = 2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{1}{2}\pi s \sum_{n=1}^{N} n^{s-1}.$$

Следовательно,

$$I(s) = \lim_{N\to\infty} I_N(s) = 2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{1}{2}\pi s \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} =$$

$$= 2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{1}{2}\pi s\,\zeta(1-s),$$

так как $\mathfrak{R}(1-s) = 1 - \sigma > 1$.

В соединении с формулой (5) это дает:

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s \sin\frac{1}{2}\pi s\,\zeta(1-s)}{\sin\pi s\,\Gamma(s)},$$

откуда и вытекает уравнение (1).

3. *Функция* $\xi(s)$. Пользуясь известными свойствами функции $\Gamma(s)$, можно преобразовать функциональное уравнение к более симметричной форме.

Теорема 15. *Функция*

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s) \tag{6}$$

является целой и удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

Кроме того, $\xi(s)$ *принимает на прямых* $t = 0$ *и* $\sigma = \frac{1}{2}$ *вещественные значения.*

Наконец,

$$\xi(0) = \xi(1) = \frac{1}{2}.$$

Действительно, множитель при $\zeta(s)$ в формуле (1)

$$2(2\pi)^{-s} \sin\frac{1}{2}\pi(1-s)\cdot\Gamma(s) =$$

$$= \frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right)} \cdot \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s\right)}$$

(в силу формул Лежандра и Эйлера из теории гамма-функции). Поэтому функция

$$\varphi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s)$$

удовлетворяет функциональному уравнению $\varphi(1-s) = \varphi(s)$. Эта функция мероморфна, и вследствие функционального уравнения полюсы ее симметрично расположены относительно точки $s = \frac{1}{2}$. Так как единственным полюсом в полуплоскости $\sigma > 0$ служит простой полюс в точке $s = 1$ $\left[\text{с вычетом } \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1\right]$, то единственными полюсами во всей плоскости s будут простые полюсы в точках $s = 0$ и $s = 1$. Следовательно,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\varphi(s)$$

является целой функцией, и

$$\xi(1-s) = \frac{1}{2}(1-s)(-s)\varphi(1-s) = \frac{1}{2}(s-1)s\varphi(s) = \xi(s).$$

Из формул (6), (5), (3) и свойств $\Gamma(s)$ и остальных входящих в эти формулы элементарных функций явствует, что $\xi(s)$

вещественна для вещественных s и $\xi(\sigma+ti)$ и $\xi(\sigma-ti)$ имеют сопряженные значения [1]). В частности, сопряженные значения имеют $\xi\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ и $\xi\left(\frac{1}{2}-ti\right)$. Но, с другой стороны, в силу функционального уравнения эти значения между собой равны. Следовательно, они вещественны.

Наконец,

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)\cdot(s-1)\zeta(s),$$

так что $\xi(1)=\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 1=\frac{1}{2}$, а $\xi(0)=\xi(1)$ в силу функционального уравнения.

Риман обозначал через $\xi(t)$ функцию, которая в наших обозначениях запишется в виде $\xi\left(\frac{1}{2}+ti\right)$, и рассматривал t как комплексное переменное. Принятая нами запись введена Ландау, который обозначает риманову $\xi(t)$ через $\Xi(t)$. Функциональное уравнение показывает, что $\Xi(t)$ есть четная функция от t.

4. В предыдущих параграфах изложено одно из двух доказательств Римана. Второе доказательство, приводящее непосредственно к симметрической форме функционального уравнения, основывается на тождестве:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x}} \quad (x>0), \tag{7}$$

представляющем собой частный случай линейного преобразования тэта-функции [2]).

Имеется доказательство другого типа, основанное на формуле суммирования Пуассона:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n)=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos 2\pi nu\,du. \tag{8}$$

Формально это есть разложение периодической функции

$$F(x)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(n+x)$$

---

[1]) Эти результаты можно вывести также, в силу известной общей теоремы, из того факта, что $\zeta(s)$ есть однозначная аналитическая функция, принимающая вещественные значения на луче $s>1$ вещественной оси.

[2]) *Riemann*, *1*; см. также *T*, 43 (4) и замечание в конце последнего параграфа. По поводу истории функционального уравнения см. *Landau*, *2*.

при $x=0$ в ряд Фурье $\sum(a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx)$. Для справедливости такого разложения достаточно, чтобы $f(x)$ и $f'(x)$ были непрерывны для всех x, за исключением, быть может, конечного числа значений для $f'(x)$, и чтобы $f(x)$ и $|f'(x)|$ были интегрируемы в пределах $(-\infty, \infty)$; действительно, при этих условиях $F(x)$ является непрерывной функцией с ограниченным изменением в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ и, значит, подходит под признак Жордана.

Формулу (8) можно использовать для вывода тождества (7) и тем самым, косвенным путем, для доказательства функционального уравнения для $\zeta(s)$. Однако ее можно применить и более непосредственно и притом различными способами; приведем в качестве примера следующий [1]). Пусть

$$f(x) = f(x, s) = \left(x - \frac{1}{2}\right)_{-s} - 2x_{-s} + \left(x + \frac{1}{2}\right)_{-s},$$

$$\Phi(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n, s),$$

где x_{-s} равно x^{-s} для $x > 0$ и равно 0 для $x \leqslant 0$. Для $\sigma > 1$

$$\Phi(s) = \sum_{1}^{\infty}\left(n - \frac{1}{2}\right)^{-s} - 2\sum_{1}^{\infty} n^{-s} + \sum_{0}^{\infty}\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-s} =$$

$$= 2\sum_{1}^{\infty} 2^s \left\{(2n-1)^{-s} + (2n)^{-s}\right\} - 4\sum_{1}^{\infty} n^{-s} =$$

$$= 2^{1+s}\zeta(s) - 4\zeta(s) = 4(2^{s-1} - 1)\zeta(s).$$

Функция $\Phi(s)$ регулярна для $\sigma > -1$, так как, при $n \to \infty$, $f(n, s) = O(n^{-\sigma-2})$ равномерно во всякой конечной области изменения s; поэтому формула

$$\zeta(s) = \frac{1}{4}(2^{s-1} - 1)^{-1}\Phi(s) \tag{9}$$

дает аналитическое продолжение $\zeta(s)$ на полуплоскость $\sigma > -1$ и показывает, что $\zeta(s)$ в этой полуплоскости регулярна, за исключением, быть может, полюсов в точках

$$s = 1 + \frac{2n\pi i}{\ln 2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Для вещественных s из интервала $-1 < s < 0$ $f(x)$ удовлетворяет условиям применимости формулы (8), так что

$$\Phi(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} I(2\pi n, s) \quad (-1 < s < 0), \tag{10}$$

---

1) *Mordell, 1*; см. также *Hardy, 1*. Указания на другие доказательства см. в *ВС*, 759—763; *Т*, 2, сноска.

где

$$I(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(u - \frac{1}{2}\right)_{-s} - 2u_{-s} + \left(u + \frac{1}{2}\right)_{-s} \right\} \cos \xi u \, du.$$

Подинтегральное выражение в $I(\xi, s)$ будет $O(u^{-\sigma-2})$ при $u \to \infty$ и $O(|u - u_0|^{-\sigma})$ при $u \to u_0$, где $u_0 = 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, и притом равномерно для всех вещественных ξ и в любой конечной области изменения s; поэтому $I(\xi, s)$ непрерывна относительно s и ξ для $-1 < \sigma < 1$ и всех вещественных ξ и регулярна в полосе $-1 < \sigma < 1$ для любого фиксированного ξ. Если $\xi \neq 0$ и $0 < s < 1$, то мы можем разбить $I(\xi, s)$ соответственно трем членам, стоящим в фигурных скобках, на три интеграла, сходящихся по второй теореме о среднем значении. Выполняя подстановки $u = v + \frac{1}{2}$, v, $v - \frac{1}{2}$ и снова соединяя все три интеграла в один, получаем:

$$I(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{-s} \left\{ \cos \xi \left(v + \frac{1}{2}\right) - 2 \cos \xi v + \cos \xi \left(v - \frac{1}{2}\right) \right\} dv =$$

$$= \int_{0}^{\infty} v^{-s} \cos \xi v \left(2 \cos \frac{1}{2} \xi - 2\right) dv =$$

$$= 2\left(\cos \frac{1}{2} \xi - 1\right) |\xi|^{s-1} \sin \frac{1}{2} \pi s \, \Gamma(1 - s)$$

по известной формуле для гамма-функции (легко получающейся при помощи теоремы Коши из эйлерова интеграла). Окончательная формула для $I(\xi, s)$, доказанная в условиях $\xi \neq 0$, $0 < s < 1$, справедлива при $\xi \neq 0$ во всей полосе $-1 < \sigma < 1$, так как обе ее части представляют в этой полосе регулярные функции от s. Из непрерывности относительно ξ явствует, что в указанной полосе $I(0, s) = 0$ (что можно проверить и непосредственно). Подставляя в (10), получаем, что для $-1 < s < 0$

$$\Phi(s) = -8(2\pi)^{s-1} \sin \frac{1}{2} \pi s \, \Gamma(1 - s)(1 + 3^{s-1} + 5^{s-1} + \ldots) =$$

$$= 8(2\pi)^{s-1} \sin \frac{1}{2} \pi s \, \Gamma(1 - s)(2^{s-1} - 1)\zeta(1 - s),$$

так как $1 - s > 1$. Сопоставляя это с формулой (9), находим:

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{1}{2} \pi s \, \Gamma(1 - s) \zeta(1 - s). \tag{11}$$

Так как $\zeta(s)$, за исключением полюсов, регулярна в полуплоскости $\sigma > -1$, то правая часть формулы (11) регулярна с точностью до полюсов в полуплоскости $\sigma < 2$. Таким образом формула (11) завершает продолжение $\zeta(s)$ (как мероморфной функции) на всю плоскость и справедлива для всех значений s. Формула (1) получается отсюда путем замены s на $1 - s$. Но мы видели из формулы (9), что $\zeta(s)$

во всяком случае регулярна в полуплоскости $\sigma > 1$ и полосе $-1 < \sigma < 1$. Следовательно, в силу (11) она регулярна в полуплоскости $\sigma < 0$ и полосе $0 < \sigma < 2$, за исключением, быть может, полюса в $s = 1$ [вызывающегося наличием множителя $\Gamma(1-s)$]. В совокупности эти результаты показывают, что точка $s = 1$ является единственным возможным полюсом $\zeta(s)$. Для окончательного разрешения вопроса замечаем прежде всего, что $\Phi(0) = 1$ (по определению), так что, как показывает формула (9), $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Значит, по (11), при $s \to 1$

$$(s-1)\zeta(s) = -2(2\pi)^{s-1}\sin\frac{1}{2}\pi s\,\Gamma(2-s)\,\zeta(1-s) \to$$

$$\to -2\cdot 1\cdot 1\cdot \Gamma(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,$$

и, следовательно, точка 1 действительно является простым полюсом с вычетом 1.

Формально формула Пуассона дает непосредственное преобразование одной стороны формулы (11) в другую, однако приходится итти несколько окольным путем во избежание трудности, возникающей вследствие того, что $\sum n^{-s}$ и $\sum n^{s-1}$ не имеют общей области сходимости.

5. *Нули.* Прежде чем перейти к детальному исследованию вопроса о существовании нулей у функций $\zeta(s)$ и $\xi(s)$, мы установим некоторые важные факты, относящиеся к расположению этих возможных нулей.

Теорема 16. (I) *Нули $\xi(s)$ (в случае, если они существуют) все расположены в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ и притом симметрично относительно прямых $t = 0$ и $\sigma = \frac{1}{2}$.*

(II) *$\zeta(s)$ и $\xi(s)$ имеют одни и те же нули (притом с одинаковой кратностью), за исключением простых нулей $\zeta(s)$ в точках $s = -2, -4, -6, \ldots$*

(III) *$\xi(s)$ не имеет нулей на вещественной оси.*

Имеем:

$$\xi(s) = (s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)\zeta(s) = h(s)\,\zeta(s).$$

Но $\zeta(s)$ (как показывает эйлерово произведение) не имеет нулей при $\sigma > 1$, и то же справедливо и для $h(s)$. Следовательно, $\xi(s)$ не имеет нулей при $\sigma > 1$, а значит, и при $\sigma < 0$, ибо $\xi(s) = \xi(1-s)$. Нули (если они существуют) симметрично расположены как относительно вещественной оси, ибо $\xi(\sigma \pm ti)$ комплексно сопряжены, так и относительно точки $s = \frac{1}{2}$, так как $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Следовательно, они симметрично расположены также относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Этим доказывается утверждение (I).

Несовпадение нулей $\zeta(s)$ и $\xi(s)$ может вызываться лишь влиянием нулей и полюсов $h(s)$. Но единственным нулем $h(s)$ является $s=1$, и в этой точке ни $\zeta(s)$, ни $\xi(s)$ не равны нулю, ибо $\zeta(s)$ имеет в $s=1$ полюс, а $\xi(1)=\frac{1}{2}$ по теореме 15. Далее, $h(s)$ имеет простые полюсы в точках $s=-2, -4, -6, \ldots$ Так как в этих точках $\xi(s)$ регулярна и отлична от нуля, то они должны служить простыми нулями функции $\zeta(s)$. Это доказывает утверждение (II).

Для доказательства утверждения (III) достаточно, в силу предложений (I) и (II) и равенства $\xi(0)=\xi(1)=\frac{1}{2}$, показать, что $\zeta(s) \neq 0$ в интервале $0 < s < 1$. Имеем:

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = (1-2^{-s}) + (3^{-s}-4^{-s}) + \ldots \quad (\sigma > 0);$$

действительно, это равенство, во всяком случае, справедливо для $\sigma > 1$, и так как

$$|(2n-1)^{-s}-(2n)^{-s}| = \left| s\int\limits_{2n-1}^{2n} \frac{dx}{x^{s+1}} \right| \leqslant \frac{|s|}{(2n-1)^{\sigma+1}} < \frac{\Delta}{(2n-1)^{\delta+1}}$$

для $\sigma > \delta$, $|s| < \Delta$, где δ и Δ — фиксированные положительные числа, то обе стороны регулярны в полуплоскости $\sigma > 0$. Когда $0 < s < 1$, эта формула дает $(1-2^{1-s})\zeta(s) > 0$ или $\zeta(s) < 0$.

Полоса $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ называется „критической полосой“ и прямая $\sigma = \frac{1}{2}$ — „критической прямой“ функции $\zeta(s)$. Нули -2, -4, -6, ... функции $\zeta(s)$, в большинстве вопросов не играющие роли, называются „тривиальными нулями“.

6. Мы должны теперь доказать, что $\xi(s)$ действительно имеет нули или, иными словами, что $\zeta(s)$ имеет нетривиальные нули. Наше доказательство будет основываться на теории целых функций. Соответствующие разделы этой теории излагаются в следующем параграфе; мы предпошлем им доказательство двух теорем из общей теории функций, которыми мы будем дальше пользоваться.

Теорема D. *Пусть $f(z)$ регулярна в круге $|z-z_0| \leqslant R$ и имеет (по меньшей мере) n нулей в круге $|z-z_0| \leqslant r$ ($<R$); тогда, в предположении $f(z_0) \neq 0$, имеем:*

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leqslant \frac{M}{|f(z_0)|}, \tag{12}$$

где M есть максимум модуля $|f(z)|$ на окружности $|z-z_0| = R$.

Кратные нули считаются (как обычно) соответственно порядку их кратности.

Мы можем принять, что $z_0 = 0$, ибо общий случай приводится к этому посредством подстановки $z = z_0 + z'$. Пусть $f(z)$ имеет в круге $|z| \leqslant r$ нули $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (где кратные нули выписаны повторно соответствующее количество раз); тогда $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z) = \varphi(z) \prod_{\nu=1}^{n} \frac{R(z-a_\nu)}{R^2 - \bar{a}_\nu z},$$

где $\bar{a}_\nu$ сопряженно с a_ν и $\varphi(z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant R$. На окружности $|z| = R$ каждый сомножитель произведения в правой части равен по модулю единице; поэтому

$$|\varphi(z)| = |f(z)| \leqslant M \quad (|z| = R).$$

Вследствие регулярности $\varphi(z)$ в круге $|z| \leqslant R$ имеем (по принципу максимума модуля или же в силу неравенств Коши) $|\varphi(0)| \leqslant M$. Следовательно,

$$|f(0)| = |\varphi(0)| \prod_{\nu=1}^{n} \frac{|a_\nu|}{R} \leqslant M \left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

что и доказывает теорему, так как по предположению $f(0) \neq 0$.

Теорема D во многих приложениях играет ту же роль, что и более точная формула Иенсена, из которой неравенство (12) вытекает как простое следствие.

Теорема E. *Пусть в круге $|z-z_0| < R$ функция*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

регулярна и удовлетворяет неравенству:

$$\Re f(z) \leqslant U;$$

тогда

$$|c_n| \leqslant \frac{2(U - \Re c_0)}{R^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

и во всяком круге $|z-z_0| \leqslant r < R$ *имеем:*

$$|f(z)-f(z_0)| \leqslant \frac{2r}{R-r}\{U-\Re f(z_0)\},$$

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!}\right| \leqslant \frac{2R}{(R-r)^{\nu+1}}\{U-\Re f(z_0)\} \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots).$$

Мы снова можем принять, что $z_0=0$. Пусть

$$\Phi(z)=U-f(z)=U-c_0-\sum_1^{\infty} c_n z^n=\sum_0^{\infty} b_n z^n \quad (|z|<R),$$

и C обозначает окружность $|z|=r<R$; тогда

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)\,dz}{z^{n+1}}=\frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi}(P+iQ)e^{-n\theta i}\,d\theta \quad (n\geqslant 0), \tag{14}$$

где

$$\Phi(re^{\theta i})=P(r,\ \theta)+iQ(r,\ \theta)=P+iQ.$$

Рассматривая интеграл от регулярной функции $\Phi(z)z^{n-1}$, взятый по той же окружности, получаем:

$$0=\frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(P+iQ)e^{n\theta i}\,d\theta \quad (n\geqslant 1).$$

Заменяя в этом равенстве i на $-i$, сокращая на r^n и складывая с (14), где предварительно обе части умножены на r^n, находим:

$$b_n r^n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Pe^{-n\theta i}\,d\theta \quad (n\geqslant 1).$$

Но $P=U-\Re f(z)\geqslant 0$ в круге $|z|<R$ и, в частности, на окружности C. Следовательно, для $n\geqslant 1$

$$|b_n|\,r^n \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Pe^{-n\theta i}|\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P\,d\theta=2\Re b_0$$

в силу (14). Беря $r\to R$, получаем:

$$|b_n|\,R^n \leqslant 2\beta_0 \qquad (n\geqslant 1), \tag{15}$$

где $\beta_0 = \Re b_0$, а это эквивалентно неравенству (13), ибо $b_0 = U - c_0$ и $b_n = -c_n$ $(n \geqslant 1)$.

Неравенство (15) показывает, что в круге $|z| \leqslant r < R$

$$|\Phi(z) - \Phi(0)| = \left|\sum_1^\infty b_n z^n\right| \leqslant \sum_1^\infty 2\beta_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n = \frac{2\beta_0 r}{R - r}$$

и

$$|\Phi^{(\nu)}(z)| \leqslant \sum_{n=\nu}^\infty n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\frac{2\beta_0 r^{n-\nu}}{R^n} =$$

$$= \frac{d^\nu}{dr^\nu}\left[\sum_{n=0}^\infty 2\beta_0\left(\frac{r}{R}\right)^n\right] = \frac{d^\nu}{dr^\nu}\left[\frac{2\beta_0 R}{R - r}\right] = \frac{2\beta_0 R \cdot \nu!}{(R - r)^{\nu+1}} \qquad (\nu \geqslant 1).$$

Эти неравенства эквивалентны указанным в формулировке теоремы неравенствам для $f(z)$, ибо

$$\Phi(z) = U - f(z), \qquad \beta_0 = U - \Re f(0).$$

Теорема E, с различными степенями точности утверждаемых неравенств, была доказана Адамаром, Борелем и Каратеодори. В приведенной здесь форме она уже не доступна дальнейшему усилению, как показывает рассмотрение функции $f(z) = \frac{z}{1+z}$, для которой в круге $|z| < 1$ имеем $\Re f(z) < \frac{1}{2}$.

7. *Целые функции.* Пусть $G(z)$ — целая функция, не приводящаяся тождественно к постоянной и удовлетворяющая условию $G(0) \neq 0$.

Нули $G(z)$, в случае, если их имеется бесконечное множество, можно расположить в последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ в порядке возрастания модулей, так что

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots, \ |a_n| \to \infty,$$

причем нули с совпадающими модулями чередуются между собой в любом порядке, а кратные нули выписаны повторно соответствующее количество раз. Рассмотрим ряд $\sum |a_n|^{-\alpha}$.

Для $\alpha = 0$ он расходится; с другой стороны, если он сходится для какого-либо вещественного значения α, то он сходится и для всех бо́льших значений, так что существует единственное $\tau \geqslant 0$, обладающее тем свойством, что для $\alpha > \tau$ ряд сходится, а для $\alpha < \tau$ расходится; для $\alpha = \tau$ он может как сходиться, так и расходиться. Число τ называется *показателем* *сходимости* последовательности $\{|a_n|\}$. Пусть $k+1$ будет наименьшее целое значение α, для которого ряд сходится; таким образом $k \geqslant 0$, и если τ не целое, то $k < \tau < k+1$, тогда как при целом τ имеем $\tau = k$ или $k+1$, смотря по тому, будет ли ряд $\sum |a_n|^{-\tau}$ расходиться или же сходиться; тогда

$$G(z) = e^{H(z)} \prod_n \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k} \right\}, \tag{16}$$

где $H(z)$ — целая функция, и произведение абсолютно сходится для всех z (если $k = 0$, то показатель при e в общем члене произведения считаем равным нулю). Это — классическая теорема Вейерштрасса, принимаемая нами здесь без доказательства. Мы допускаем также законность всех формальных преобразований равенства (16), совершаемых в дальнейшем, отсылая за доказательствами к изложениям теории Вейерштрасса.

Если $G(z)$ имеет лишь конечное число нулей (или же ни одного), то мы полагаем по определению $\tau = k = 0$; тогда формула (16) остается в силе, с тем отличием, что $\prod$ будет теперь уже конечным произведением (которое, в случае, если нет совсем нулей, принимается равным единице).

Если функция $H(z)$, которая однозначно определена с точностью до слагаемого, равного произвольному кратному от $2\pi i$, есть полином, то мы будем обозначать степень последнего через h.

Определим теперь *порядок* целой функции. Пусть $M(r)$ будет максимум модуля $|G(z)|$ на окружности $|z| = r$; так как $G(z)$ не есть постоянная, то $M(r)$ монотонно возрастает до бесконечности вместе с r (по принципу максимума и теореме Лиувилля). Если для некоторого вещественного значения β имеет место соотношение

$$\ln M(r) = O(r^\beta) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{17}$$

то существует единственное $\omega \geqslant 0$, такое, что указанное соотношение выполняется для всех $\beta > \omega$ и ни для одного $\beta < \omega$; для $\beta = \omega$ оно может как выполняться, так и не выполняться. Число ω и называется порядком $G(z)$. [Определение числа ω не содержит никаких ссылок на нули $G(z)$ и не предполагает, например, существования формулы (16).]

Мы переходим сейчас к установлению ряда неравенств, связывающих τ, h и ω. В этих неравенствах существование меньшей части уже обеспечивается существованием большей, которое каждый раз заранее предполагается.

Теорема F1. $\omega \leqslant \max(\tau, h)$.

Далее соотношение (17) *имеет место при* $\beta = \max(\tau, h)$, *если либо*

$$\tau < h, \tag{I}$$

либо

$$\sum |a_n|^{-\tau} \text{ есть бесконечный сходящийся ряд.} \tag{II}$$

Имеем по формуле (16):

$$G(z) = e^{H(z)} \prod_n \Phi\left(\frac{z}{a_n}\right), \tag{18}$$

где $H(z)$ есть полином степени h и

$$\Phi(\zeta) = (1 - \zeta)\, e^{\zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + \frac{\zeta^k}{k}}.$$

Для $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}$

$$|\Phi(\zeta)| = \left| e^{-\frac{\zeta^{k+1}}{k+1} - \frac{\zeta^{k+2}}{k+2} - \ldots} \right| \leqslant e^{|\zeta|^{k+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)} =$$
$$= e^{2|\zeta|^{k+1}} \leqslant e^{|2\zeta|^{k+1}}.$$

Для $|\zeta| > \frac{1}{2}$

$$|\Phi(\zeta)| \leqslant (1 + |\zeta|)\, e^{|\zeta| + \ldots + |\zeta|^k} = (1 + |\zeta|)\, e^{(|\zeta|^{1-k} + \ldots + 1)|\zeta|^k} \leqslant$$
$$\leqslant (1 + |\zeta|)\, e^{(2^{k-1} + \ldots + 1)|\zeta|^k} < e^{|2\zeta|^k + \ln(1 + |\zeta|)}.$$

Таким образом для всех ζ

$$|\Phi(\zeta)| \leqslant e^{|2\zeta|^{\vartheta} + \ln(1 + |\zeta|)}, \tag{19}$$

где ϑ может принимать любое значение из интервала $k \leqslant \vartheta \leqslant \leqslant k + 1$.

Выберем $\vartheta > 0$ так, чтобы ряд $\sum |a_n|^{-\vartheta}$ (в случае, если он бесконечен) сходился. Такой выбор всегда совместим с условием $k \leqslant \vartheta \leqslant k + 1$, причем ϑ может быть взято произвольно близким к τ; действительно, если $\sum |a_n|^{-\tau}$ есть сходящийся бесконечный ряд (так что $\tau > 0$), то мы можем положить $\vartheta = \tau$, во всех же остальных случаях $k \leqslant \tau < k + 1$, и тогда можно взять $\tau < \vartheta < k + 1$. При указанном выборе ϑ имеем в силу неравенства (19) (обозначая через K_1, K_2, ... числа, зависящие лишь от ϑ и от функции G):

$$|\Phi(\zeta)| \leqslant e^{K_1 |\zeta|^{\vartheta}},$$

и, значит, из формулы (18):

$$|G(z)| \leqslant \exp\left(|H(z)| + K_1 \sum_n \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\vartheta}\right),$$

$$M(r) < \exp(K_2 r^h + K_3 r^{\vartheta}) \quad (r > 1)$$

$\left(\text{где } K_3 = K_1 \sum |a_n|^{-\vartheta}\right)$. Следовательно,

$$\ln M(r) = O\left(r^h\right) + O\left(r^{\vartheta}\right) \text{ при } r \to \infty, \tag{20}$$

так что $\omega \leqslant \max(h, \vartheta)$. Так как ϑ может быть взято сколь угодно близко к τ, то отсюда следует, что $\omega \leqslant \max(h, \tau)$.

Если $\tau < h$, то мы можем взять $\vartheta < h$, и соотношение (20) показывает, что (17) выполняется для $\beta = h = \max(h, \tau)$. Если $\sum |a_n|^{-\tau}$ есть сходящийся бесконечный ряд, то мы можем взять $\vartheta = \tau$, и (17) будет выполняться для $\beta = \max(h, \vartheta) = \max(h, \tau)$.

Теорема F2. $\tau \leqslant \omega$.

Мы можем принять, что $G(z)$ имеет бесконечное множество нулей, ибо в противном случае $\tau = 0 \leqslant \omega$. Применим теорему D к $G(z)$, беря $z_0 = 0$, $R = 2r_n$, $r = r_n$, где $r_n = |a_n|$. Так как в круге $|z| \leqslant r_n$ лежит n нулей $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то мы получаем:

$$2^n \leqslant \frac{M(2r_n)}{|G(0)|};$$

отсюда, в силу определения ω, вытекает, что для всякого фиксированного положительного ε $n \ln 2 = O\{(2r_n)^{\omega+\varepsilon}\}$ при $n \to \infty$. Значит, для всех достаточно больших n

$$n < r_n^{\omega + 2\varepsilon}$$

или

$$r_n^{-\omega - 3\varepsilon} < n^{-\frac{\omega + 3\varepsilon}{\omega + 2\varepsilon}}.$$

Так как $\dfrac{\omega + 3\varepsilon}{\omega + 2\varepsilon} > 1$, то ряд $\sum r_n^{-\omega - 3\varepsilon}$ сходится; отсюда $\tau \leqslant \omega + 3\varepsilon$ и, следовательно, $\tau \leqslant \omega$, ибо ε может быть взято произвольно малым.

Теорема F3. $h \leqslant \omega$.

Существование ω обеспечивает, по теореме F2, существование τ и, значит, сходимость вейерштрассова произведения (16). Нам нужно показать, что $H(z)$ является полиномом, степень которого не превышает $[\omega]$. Мы можем принять, что $G(0)=1$, $H(0)=0$, так как h и ω не изменяются от умножения $G(z)$ на постоянный множитель, отличный от нуля. Пусть

$$H(z)=\sum_{1}^{\infty} b_\nu z^\nu.$$

Для всякого положительного R имеем:

$$G(z)=\prod_{|a_n|<R}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdot G_R(z), \tag{21}$$

где $G_R(z)$ есть целая функция от z, не имеющая уже нулей в круге $|z|<R$. Так как $G_R(0)=G(0)=1$, то мы можем написать:

$$G\ (z)=e^{g_R(z)}, \tag{22}$$

где $g_R(z)$ регулярна в круге $|z|<R$ и $g_R(0)=0$. Пусть

$$g_R(z)=\sum_{1}^{\infty} c_\nu^{(R)} z^\nu \qquad (|z|<R).$$

На окружности $|z|=2R$

$$|G(z)|\geqslant \prod_{|a_n|<R}\left(\frac{2R}{R}-1\right)\cdot |G_R(z)|=|G_R(z)|$$

и, значит,

$$|G_R(z)|\leqslant M(2R).$$

Так как $G_R(z)$ есть целая функция, то, по принципу максимума, это неравенство выполняется во всем круге $|z|\leqslant 2R$ и, в частности, для $|z|<R$; отсюда следует, что

$$\Re\, g_R(z)=\ln|G_R(z)|\leqslant \ln M(2R) \qquad (|z|<R),$$

и, значит, по теореме E (так как $g_R(0)=0$)

$$|c_\nu^{(R)}|\leqslant \frac{2\ln M(2R)}{R^\nu} \qquad (\nu=1,\ 2,\ \ldots). \tag{23}$$

Сравнивая формулы (21) и (22) с вейерштрассовым произведением (16), видим, что для $|z|<R$

$$H(z)+P_R(z)+$$
$$+\sum_{|a_n|\geqslant R}\left\{\ln\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+\frac{z}{a_n}+\ldots+\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k\right\}=g_R(z),$$

где взяты главные ветви логарифмов и $P_R(z)$ есть полином, степень которого не превосходит k. Диференцируя ν раз, деля на $\nu!$ и полагая $z=0$, получаем:

$$b_\nu + \frac{1}{\nu} \sum_{|a_n| \geqslant R} \frac{1}{a_n^\nu} = c_\nu^{(R)} \qquad (\nu > k). \tag{24}$$

Пусть теперь $\nu > \omega$; тогда, по теореме F2, $\nu > \tau \geqslant k$. Следовательно, принимая во внимание (23) и (24), имеем:

$$|b_\nu| \leqslant \frac{2 \ln M(2R)}{R^\nu} + \frac{1}{\nu} \sum_{|a_n| \geqslant R} \frac{1}{|a_n|^\nu}.$$

Фиксируем в этом неравенстве значение ν и будем безгранично увеличивать R. Тогда первый член в правой части будет стремиться к нулю, так как $\nu > \omega$, а второй член (для ν, больших, чем τ) — так как ряд $\sum |a_n|^{-\nu}$ сходится (или представляет конечную сумму). Но b_ν не зависит от R. Значит, $b_\nu = 0$ и притом для всех $\nu > \omega$. Следовательно,

$$H(z) = \sum_{\nu=1}^{[\omega]} b_\nu z^\nu,$$

что и доказывает теорему.

Теорема F1 принадлежит Борелю [1]), теоремы F2 и F3 — Адамару [2]). Приведенное выше доказательство теоремы F3, значительно упрощенное по сравнению с первоначальным доказательством Адамара, было предложено Ландау [3]). В теории Адамара даются и другие соотношения, содержащие коэфициенты степенного ряда для $G(z)$, однако мы их здесь касаться не будем.

Соединяя теоремы F1, F2, F3, мы получаем следующий результат, суммирующий требуемые для наших целей сведения из теории целых функций.

Теорема F. *Имеем*:

$$\omega = \max(\tau, h),$$

где существование одной стороны обеспечивает существование другой.

Далее, если $\omega > 0$ *и для* $\beta = \omega$ *соотношение* $\ln M(r) = O(r^\beta)$ *не выполняется, то тогда* $\tau = \omega$, $G(z)$ *имеет бесконечное множество нулей, и ряд* $\sum |a_n|^{-\tau}$ *расходится.*

---

[1]) *E. Borel*, Leçons sur les fonctions entières (Paris, Gauthier-Villars, 1900), 61.

[2]) *Hadamard, 1.*

[3]) *Landau, 9; V*, II, 72—74.

Первая часть теоремы непосредственно вытекает из неравенств теорем F1, F2, F3. Для доказательства второй части замечаем сперва, что должно иметь место равенство $\tau = \omega$, ибо из $\tau < \omega (= h)$ вытекало бы, по теореме F1 (I), что $\ln M(r) = O(r^{\omega})$. Далее, так как $\tau = \omega > 0$, то $G(z)$ должно иметь бесконечное множество нулей. Наконец, если бы бесконечный ряд $\sum |a_n|^{-\tau}$ сходился, то мы опять-таки имели бы, по теореме F1 (II), $\ln M(r) = O(r^{\omega})$.

Числа τ и ω называются иногда соответственно „истинным" и „кажущимся" порядком функции $G(z)$. Целое число $\max(k, h)$ называется „родом" $G(z)$.

8. *Нули* $\xi(s)$. Мы исследуем сперва поведение целой функции $\xi(s)$ для больших $|s|$ и определим ее порядок ω.

Теорема 17. *Пусть* $M(r)$ *будет максимум* $|\xi(s)|$ *на окружности* $|s| = r$; *тогда при* $r \to \infty$

$$\ln M(r) \sim \frac{1}{2} r \ln r.$$

Имеем:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s).$$

Но $|\zeta(s)| \leqslant \zeta(2)$ для $\sigma \geqslant 2$ и (по теореме 9) $|\zeta(s)| < A_1 |t|^{\frac{1}{2}}$ для $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $|t| \geqslant 2$, так что $|\zeta(s)| < A_2 |s|^{\frac{1}{2}}$ для $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $|s| > 3$. Применяя к $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)$ формулу Стирлинга [1]), получаем, что для

---

[1]) Наиболее удобной для запоминания формой этой формулы является

$$\ln \Gamma(z+\alpha) = \left(z + \alpha - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O(|z|^{-1})$$

при $|z| \to \infty$, равномерно в любом фиксированном угле $|\arg z| \leqslant \pi - \delta < \pi$ и в любой ограниченной области изменения α; при этом для логарифмов берутся ветви, вещественные для вещественных положительных значений аргумента. Эта форма получается без труда в качестве следствия из ее частного случая для $\alpha = 0$, однако для приложений удобнее сохранять параметр α. Доказательство этой формулы (для $\alpha = 0$) см., например, у Bieberbach'a, Lehrbuch der Funktionentheorie, I, XIV.

$\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, $|s| = r > 3$,

$$|\xi(s)| < e^{\left|\frac{1}{2}s \ln \frac{1}{2}s\right| + A_3|s|} < e^{\frac{1}{2} r \ln r + A_4 r},$$

так как $\ln \frac{1}{2} s = \ln|s| - \ln 2 + i \arg s$ и $|\arg s| < \frac{1}{2}\pi$. Из функционального уравнения $\xi(s) = \xi(1-s)$ заключаем, что

$$|\xi(s)| < e^{\frac{1}{2}|1-s| \ln|1-s| + A_4|1-s|} < e^{\frac{1}{2} r \ln r + A_5 r}$$

для $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$, $|s| = r > 4$. Соединяя эти неравенства, получаем:

$$M(r) < e^{\frac{1}{2} r \ln r + A_6 r} \quad (r > 4).$$

С другой стороны, для $r > 2$

$$M(r) \geqslant \xi(r) > 1 \cdot \pi^{-\frac{1}{2}r} \Gamma\left(\frac{1}{2} r\right) \cdot 1 > e^{\frac{1}{2} r \ln r - A_7 r}.$$

Таким образом для $r > 4$ имеем:

$$\frac{1}{2} r \ln r - A_7 r < \ln M(r) < \frac{1}{2} r \ln r + A_6 r,$$

что и доказывает теорему.

Теорема 18. $\xi(s)$ *имеет бесконечное множество нулей. Ряд* $\sum_{\rho} |\rho|^{-\alpha}$, *где* ρ *пробегает эти нули, сходится для* $\alpha > 1$ *и*

Нам потребуется также (хотя и не в полном ее виде) формула

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \ln z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$

равномерно во всяком угле $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$. Эта формула может быть либо доказана аналогичным образом (но несколько проще), либо выведена из формулы для $\ln \Gamma(z)$ с помощью равенства:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

где в качестве C следует взять окружность с центром в $\zeta = z$ и радиусом $|z| \sin \frac{1}{2}\delta$, и положить:

$$f(z) = \ln \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + z - \frac{1}{2} \ln 2\pi.$$

расходится для $\alpha \leqslant 1$. *Вейерштрассово произведение для* $\xi(s)$ *имеет вид*:

$$\xi(s) = e^{b_0 + b_1 s} \prod_{\rho} \left\{ \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \right\},$$

где b_0 *и* b_1 — *постоянные.*

Далее,

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = b_1 + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right), \tag{25}$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right), \tag{26}$$

где $b = b_1 + \frac{1}{2} \ln \pi$.

Так как $\xi(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ (теорема 15), то теория, изложенная в § 7, непосредственно применима к $\xi(s)$. По теореме 17, $\xi(s)$ есть функция порядка 1, и соотношение $\ln M(r) = O(r)$ не имеет места. Следовательно, по теореме F, $\tau = 1$, $h = 1$ или 0, $\xi(s)$ имеет бесконечное множество нулей, и ряд $\sum |\rho|^{-1}$ по этим нулям расходится. Это доказывает утверждение относительно $\sum |\rho|^{-\alpha}$, а также разложение в вейерштрассово произведение. Формула (25) получается из вейерштрассова произведения путем логарифмического диференцирования, а (26) вытекает отсюда в силу соотношения:

$$\xi(s) = (s-1)\, \pi^{-\frac{1}{2}s}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right) \zeta(s).$$

Абсолютная сходимость бесконечного произведения и ряда для всех s (отличных от ρ в случае ряда) является, конечно, следствием вейерштрассовой теории.

Можно показать, что

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2} \ln(4\pi) - 1 - \frac{1}{2} C = -0{,}023\ \ldots, \\ b &= \ln(2\pi) - 1 - \frac{1}{2} C = 0{,}549\ \ldots, \end{aligned} \tag{27}$$

где C — эйлерова постоянная[1]); однако численные значения указанных постоянных не нужны в приводимых нами приложениях.

---

[1]) См. *T*, 3—4.

9. Обозначим нули $\xi(s)$, т. е. нетривиальные нули $\zeta(s)$, общим символом:

$$\rho = \beta + \gamma i.$$

Из теоремы 16 мы знаем, что для всех ρ $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, а из теоремы 10, — что $\beta < 1$, так что, вследствие симметрии относительно $\sigma = \frac{1}{2}$, $0 < \beta < 1$. Нижеследующая теорема значительно усиливает эти результаты.

Теорема 19. *$\zeta(s)$ не имеет нулей в области*

$$\sigma > 1 - \frac{a}{\ln(|t| + 2)},$$

где a — некоторая положительная абсолютная константа[1]).

Доказательство, как и в случае теоремы 10 (которая не предполагается известной), опирается на неравенство:

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geqslant 0. \tag{28}$$

Мы исходим из равенства (26), которое записываем в форме:

$$f(s) = g(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \tag{29}$$

где

$$f(s) = \sum_\rho \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right),$$

$$g(s) = -b + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)}.$$

Применяя формулу $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum \Lambda(n)\, n^{-s}$ в соединении с неравенством (28), получаем, что для $\sigma > 1$ и вещественных t

$$\Re\left\{3\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + 4\frac{\zeta'(\sigma+ti)}{\zeta(\sigma+ti)} + \frac{\zeta'(\sigma+2ti)}{\zeta(\sigma+2ti)}\right\} \leqslant 0;$$

---

[1]) Конечно, для нас важен лишь порядок величины $\frac{a}{\ln(|t|+2)}$ при больших $|t|$; однако мы пишем $\ln(|t|+2)$ вместо $\ln|t|$, для того чтобы наша формула была справедлива для всех t. Подобные приемы постоянно применяются в работах этого рода.

отсюда, в силу равенства (29),

$$\Re\{3f(\sigma)+4f(\sigma+ti)+f(\sigma+2ti)\}\leqslant$$
$$\leqslant\Re\{3g(\sigma)+4g(\sigma+ti)+g(\sigma+2ti)\}\quad(\sigma>1). \tag{30}$$

Выберем теперь (что, очевидно, возможно) такое положительное число a_1, чтобы $\zeta(s)$ не имела нулей в квадрате $|\sigma-1|\leqslant a_1$, $|t|\leqslant a_1$, и примем во всем дальнейшем, что $1<\sigma\leqslant 2$, $|t|>a_1$; тогда, применяя асимптотическую формулу для $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ (см. сноску на стр. 74—75), мы получим:

$$\Re\{3g(\sigma)+4g(\sigma+ti)+g(\sigma+2ti)\}<\frac{3}{\sigma-1}+A_1\ln(|t|+2). \tag{31}$$

С другой стороны, для $s=\sigma$, $\sigma+ti$, $\sigma+2ti$

$$\Re f(s)=\sum_{\rho}\Re\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)=\sum_{\rho}\left(\frac{\sigma-\beta}{|s-\rho|^2}+\frac{\beta}{|\rho|^2}\right)>$$
$$>\frac{\sigma-\beta_0}{|s-\rho_0|^2}>0,$$

где $\rho_0=\beta_0+\gamma_0 i$ — какой-нибудь из нулей $\zeta(s)$ (мы пользуемся тем, что $\sigma>1$ и $0\leqslant\beta\leqslant 1$ для каждого ρ). Следовательно,

$$\Re\{3f(\sigma)+4f(\sigma+ti)+f(\sigma+2ti)\}>4\frac{\sigma-\beta_0}{(\sigma-\beta_0)^2+(t-\gamma_0)^2}. \tag{32}$$

Неравенства (32), (30), (31) дают:

$$4\frac{\sigma-\beta_0}{(\sigma-\beta_0)^2+(t-\gamma_0)^2}<\frac{3}{\sigma-1}+A_1\ln(|t|+2),$$

для $1<\sigma\leqslant 2$, $|t|>a_1$, и ограничение $\sigma\leqslant 2$ может быть теперь отброшено (с возможным увеличением значения A_1), так как при $\sigma>2$ левая часть не превышает $\frac{4}{\sigma-\beta_0}<4$. Полагая $t=\gamma_0$ и опуская индекс 0, получаем в частности:

$$\frac{4}{\sigma-\beta}-\frac{3}{\sigma-1}<A_2\ln(|\gamma|+2)\quad(\sigma>1), \tag{33}$$

где $\rho=\beta+\gamma i$ — нуль, для которого $|\gamma|>a_1$.

Из (33) вытекает прежде всего, что $\beta<1$; в самом деле, если бы $\beta=1$, то левая часть при $\sigma\to 1+0$ стремилась бы к бесконечности; поэтому мы можем для $\sigma>1$ положить

$\sigma = 1 + \lambda(1-\beta)$, где $\lambda > 0$; тогда неравенство (33) примет вид:

$$\left(\frac{4}{1+\lambda} - \frac{3}{\lambda}\right)\frac{1}{1-\beta} < A_2 \ln(|\gamma| + 2) \qquad (\lambda > 0).$$

Выражение в скобках в левой части, очевидно, положительно для достаточно больших λ. Беря, например, $\lambda = 4$, получаем:

$$\beta < 1 - \frac{a_2}{\ln(|\gamma| + 2)},$$

где $a_2 = \frac{1}{20A_2}$. Так как это справедливо для всех ρ, для которых $|\gamma| > a_1$, то в силу нашего выбора a_1 мы и получаем утверждение теоремы; мы можем положить, например,

$$a = \min(a_2,\ a_1 \ln 2).$$

10. Мы теперь выведем ряд следствий из теоремы 19, заменяя при этом $\frac{a}{\ln(|t|+2)}$ общей функцией от $|t|$, удовлетворяющей некоторым условиям; это даст нам возможность сразу получить следствия из возможных уточнений теоремы 19. Прежде всего мы докажем теорему о порядке величины $\frac{\zeta'}{\zeta}$.

Теорема 20. *Пусть $\zeta(s)$ не имеет нулей в области*

$$\sigma > 1 - \eta(|t|),$$

где $\eta(t)$ — убывающая функция от t $(t \geqslant 0)$, имеющая непрерывную производную $\eta'(t)$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$0 < \eta(t) \leqslant \frac{1}{2}, \tag{I}$$

$$\eta'(t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to \infty, \tag{II}$$

$$\frac{1}{\eta(t)} = O(\ln t) \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{III}$$

Пусть, далее, α — фиксированное число из интервала $0 < \alpha < 1$; тогда

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\ln^2 |t|) \quad \textit{при} \quad t \to \pm\infty,$$

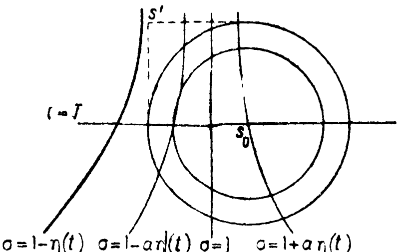
равномерно в области

$$\sigma \geqslant 1 - \alpha\eta(|t|).$$

Мы можем принять, что $t > 0$. Точно так же мы можем ограничиться областью $1 - \alpha\eta(t) \leqslant \sigma \leqslant 1 + \alpha\eta(t)$ изменения σ; действительно, если $\sigma \geqslant 1 + \alpha\eta(t)$, то, заменяя для краткости $\eta(t)$ через η, имеем:

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leqslant \sum \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\alpha\eta}} = -\frac{\zeta'(1+\alpha\eta)}{\zeta(1+\alpha\eta)} < \frac{A_1}{\alpha\eta},$$

так как $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ имеет простой полюс в точке 1; последняя же величина, в силу условия (III), есть $O(\ln t)$.



Черт. 4.

Так как $\zeta(s)$ регулярна и не имеет нулей в односвязной области D, выделяемой неравенствами $t > 0$, $\sigma > 1 - \eta(t)$, то существует ветвь $Z(s)$ функции $\ln \zeta(s)$, регулярная в D и при $\sigma > 1$ определяемая формулой:

$$Z(s) = \ln \zeta(s) = \sum_{p, m} \frac{1}{mp^{ms}}$$

[стр. 27, (13)]. Применим теорему E к $Z(s)$ и двум окружностям с общим центром в $s_0 = 1 + \alpha H + Ti$, проходящим соответственно через точки $1 - \alpha H + Ti$ и $1 - \frac{1}{2}(1+\alpha) H + Ti$, где $T > 1$ и $H = \eta(T)$ (черт. 4); радиусы этих окружностей

$$r = 2\alpha H, \quad R = \alpha H + \frac{1}{2}(1+\alpha) H = \frac{1}{2}(1 + 3\alpha) H.$$

Для достаточно больших T эти окружности лежат целиком в D. Действительно, так как $R < 2H \leqslant 1$ [в силу условия (I)], $T > 1$ и $\eta(t)$ — убывающая функция, то утверждаемое положение, во всяком случае, имеет место, если точка

$$1 - \frac{1}{2}(1+\alpha) H + (T + R) i = \sigma' + t' i = s'$$

лежит в D, а это условие, эквивалентное условию $\sigma' > 1 - \eta(t')$, выполняется для всех достаточно больших T, так как

$$\left.\begin{aligned} \sigma' - 1 + \eta(t') = -\frac{1}{2}(1+\alpha)H + \\ + \eta(T+R) = \\ = -\frac{1}{2}(1+\alpha)H + \\ + \eta(T) + R\eta'(\tau) = \\ = \left\{\frac{1}{2}(1-\alpha) + \frac{1}{2}(1+3\alpha)\eta'(\tau)\right\}H > 0 \end{aligned}\right\} (T < \tau < T+R)$$

для всех $T > T_1$ в силу условия (II). Следовательно, для $T > T_1$, $Z(s)$ будет регулярной в круге $|s - s_0| < R$.

Далее, по теореме 9,

$$\Re Z(s) = \ln|\zeta(s)| < \ln\left(A_2 t^{\frac{1}{2}}\right) < \ln T \quad (T > T_2)$$

во всем круге $|s - s_0| < R$, так как для каждой точки $s = \sigma + ti$ имеем $\sigma > \frac{1}{2}$ и $T - 1 < t < T + 1$. Наконец,

$$|\Re Z(s_0)| \leqslant |Z(s_0)| \leqslant \sum_{p,m} \frac{1}{mp^{m(1+\alpha H)}} < \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha H}} < \frac{1}{\alpha H}.$$

Следовательно, по теореме E, для достаточно больших T

$$|Z'(s)| < \frac{2R}{(R-r)^2}\{\ln T - \Re Z(s_0)\} < \frac{4(1+3\alpha)}{(1-\alpha)^2 H}\left(\ln T + \frac{1}{\alpha H}\right)$$

во всем круге $|s - s_0| \leqslant r$. Это неравенство выполняется, в частности, вдоль радиуса, соединяющего s_0 с $1 - \alpha H + Ti$, т. е. для

$$s = \sigma + Ti, \quad 1 - \alpha\eta(T) \leqslant \sigma \leqslant 1 + \alpha\eta(T).$$

Так как $Z' = \frac{\zeta'}{\zeta}$ и, в силу условия (III), $\frac{1}{H} = O(\ln T)$, то мы и получаем утверждение теоремы.

11. *Приложения к* $\psi(x)$ *и* $\pi(x)$. Мы можем теперь получить более точные асимптотические соотношения для $\pi(x)$ и связанных с ней функций. Как и в главе II, мы начнем с $\psi_1(x)$.

Теорема 21. *В условиях теоремы* 20

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^2 e^{-\alpha\omega(x)}\right)$$

при $x \to \infty$, *где* $\omega(x)$ *есть минимум функции* $\eta(t)\ln x + \ln t$ *для* $t \geqslant 1$.

Указанный минимум $\omega(x)$ существует для каждого $x > 0$, ибо $\eta(t)\ln x + \ln t$ для $t \geqslant 1$ непрерывна и безгранично возрастает вместе с t.

Пусть $x > 1$. Применяя к фундаментальной формуле (14), стр. 43, теорему Коши, получаем:

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \frac{1}{2} + I,$$

где C обозначает кривую $\sigma = 1 - \alpha\eta(|t|)$. Это вытекает из того, что в области, ограничиваемой кривой C и прямой $\sigma = c$, подинтегральное выражение регулярно, за исключением точки $s = 1$, и, по теореме 20, при $t \to \pm\infty$ (и x фиксированном) имеем равномерно:

$$\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(t^{-2}\ln^2|t|) = o(1)\,.$$

При оценке интеграла мы можем в силу симметрии ограничиться верхней половиной C_1 кривой C. Применяя теорему 20 и обозначая через $K_1, K_2, \ldots$ положительные числа, зависящие от функции η и числа α, имеем на C_1:

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < K_1\ln^2(t+2), \quad \left|\frac{ds}{dt}\right| = |-\alpha\eta'(t) + i| < K_2,$$

откуда

$$|I| < K_3\int\limits_0^\infty \frac{x^{-\alpha\eta(t)}\ln^2(t+2)}{(t+1)^2}\,dt =$$

$$= K_3\int\limits_1^\infty \frac{x^{-\alpha\eta(u-1)}\ln^2(u+1)}{u^2}\,du\,.$$

Следовательно, так как $\eta(u-1) \geqslant \eta(u)$ и $x > 1$,

$$\left|\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right| = |I| < K_3\int\limits_1^\infty e^{-\alpha\eta(u)\ln x - \alpha\ln u}\,\frac{\ln^2(u+1)}{u^{2-\alpha}}\,du \leqslant$$

$$\leqslant K_3 e^{-\alpha\omega(x)}\int\limits_1^\infty \frac{\ln^2(u+1)}{u^{2-\alpha}}\,du = K_4 e^{-\alpha\omega(x)}$$

где последний интеграл сходится, так как $2 - \alpha > 1$.

Теорема 22. *В условиях и обозначениях теорем* 20 *и* 21 *имеем:*

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right), \tag{34}$$

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right). \tag{35}$$

Мы начнем с указания некоторых простых свойств $\omega(x)$. Пусть $x_1 > x_2 > 0$ и t_1 и t_2 — значения t, для которых достигаются минимумы $\omega(x_1)$ и $\omega(x_2)$; тогда

$$\omega(x_2) \leqslant \eta(t_1)\ln x_2 + \ln t_1 < \eta(t_1)\ln x_1 + \ln t_1 = \omega(x_1),$$

$$\omega(x_1) \leqslant \eta(t_2)\ln x_1 + \ln t_2 = \omega(x_2) + \eta(t_2)(\ln x_1 - \ln x_2) <$$
$$< \omega(x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2),$$

так что $\omega(x)$ и $\ln x - \omega(x)$ являются возрастающими (в строгом смысле) функциями от x для $x > 0$. Так как $\omega(1) = 0$ и $\ln 1 - \omega(1) = 0$, мы получаем в частности, что, для $x > 1$, $0 < \omega(x) < \ln x$.

Пусть теперь $x > 2$ и h есть функция от x, удовлетворяющая условию $0 < h < \frac{1}{2}x$. Так как ψ — возрастающая функция, то

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} \psi(u)\,du \leqslant \psi(x) \leqslant \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} \psi(u)\,du. \tag{36}$$

Крайние выражения равны

$$\frac{\psi_1(x \mp h) - \psi_1(x)}{\mp h} = x \mp \frac{h}{2} + O\left(\frac{x^2 e^{-\alpha\omega\left(\frac{1}{2}x\right)}}{h}\right), \tag{37}$$

по теореме 21, так как $\frac{1}{2}x < x - h < x < x + h < \frac{3}{2}x$ и ω есть возрастающая функция. Под знаком O мы можем заменить $\omega\left(\frac{1}{2}x\right)$ через $\omega(x)$, ибо $\ln u - \omega(u)$ есть возрастающая функция от u и

$$e^{-\alpha\omega\left(\frac{1}{2}x\right)} = \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\alpha} e^{\alpha\left\{\ln\frac{1}{2}x - \omega\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\alpha} e^{\alpha\{\ln x - \omega(x)\}} = 2^{\alpha} e^{-\alpha\omega(x)}.$$

Следовательно, в силу соотношений (36) и (37),

$$\psi(x)=x+O(h)+O\left(h^{-1}x^2e^{-\alpha\omega(x)}\right).$$

Полагая $h=\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}$, получаем (34).

Выведем теперь с помощью частного суммирования соответствующую формулу для $\Pi(x)$ [стр. 27, (16)]. Имеем прежде всего:

$$\Pi(x)=\sum_{2\leqslant n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{\ln n}=\int_2^x\frac{\psi(u)\,du}{u\ln^2 u}+\frac{\psi(x)}{\ln x},$$

по теореме А (стр. 28). Далее, интегрируя почленно, имеем:

$$\int_2^x\frac{du}{\ln u}=\int_2^x\frac{u\,du}{u\ln^2 u}+\frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln 2}.$$

Вычитание дает:

$$\Pi(x)-\operatorname{li}x=\int_2^x\frac{\psi(u)-u}{u\ln^2 u}du+\frac{\psi(x)-x}{\ln x}+O(1). \tag{38}$$

Применяя (34), находим:

$$\Pi(x)-\operatorname{li}x=O\left(\int_2^x e^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(u)}du\right)+O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right)+O(1).$$

Член $O(1)$ в правой части может быть опущен, так как

$$xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}>xe^{-\frac{1}{2}\alpha\ln x}=x^{1-\frac{1}{2}\alpha}>x^{\frac{1}{2}}>1. \tag{39}$$

Далее, интеграл под знаком O равен

$$\int_2^x e^{\frac{1}{2}\alpha\{\ln u-\omega(u)\}}\frac{du}{u^{\frac{1}{2}\alpha}}\leqslant e^{\frac{1}{2}\alpha\{\ln x-\omega(x)\}}\int_2^x\frac{du}{u^{\frac{1}{2}\alpha}}<\frac{xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}}{1-\frac{1}{2}\alpha},$$

так как $1-\frac{1}{2}\alpha>0$. Следовательно,

$$\Pi(x)-\operatorname{li}x=O\left(xe^{-\frac{1}{2}\alpha\omega(x)}\right). \tag{40}$$

Наконец,

$$\Pi(x)-\pi(x)=\sum_{m=2}^{M}\frac{\pi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)}{m}=O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+O\left(Mx^{\frac{1}{3}}\right)=O\left(x^{\frac{1}{2}}\right), \quad (41)$$

$\left(M=\left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]\right)$ и (35) вытекает из (40), (41) и (39).

12. Конкретизируем теперь общие результаты, полученные в § 11, с помощью теоремы 19. В соединении с теоремой 22 она дает следующее:

Теорема 23. *При* $x\to\infty$

$$\psi(x)=x+O\left(xe^{-a\sqrt{\ln x}}\right), \quad (42)$$

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O\left(xe^{-a\sqrt{\ln x}}\right), \quad (43)$$

где a есть положительная абсолютная константа.

Действительно, по теореме 19, мы можем для $t\geqslant 2$ в теоремах §§ 10 и 11 положить $\eta(t)=\frac{a_1}{\ln t}$, где a_1 — подходяще выбранное число; тогда для $x>1$, применяя неравенство

$$u+v\geqslant 2\sqrt{uv},$$

где u, $v>0$, имеем:

$$\eta(t)\ln x+\ln t\geqslant\begin{cases}2\sqrt{a_1\ln x} & (t\geqslant 2),\\ \eta(2)\ln x & (1\leqslant t\leqslant 2),\end{cases}$$

причем первое из этих неравенств переходит в равенство при $\ln t=\sqrt{a_1\ln x}$; отсюда $\omega(x)=2\sqrt{a_1\ln x}$ для всех достаточно больших x. Беря в теореме 22 $\alpha=\frac{1}{2}$, мы и получаем теорему 23 с $a=\frac{1}{2}\sqrt{a_1}$.

Функция $e^{a\sqrt{\ln x}}$ возрастает быстрее любой положительной степени $\ln x$ и вместе с тем медленнее любой положительной степени x. Таким образом соотношение (43) означает, в частности, что

$$\pi(x)=\operatorname{li}x+O\left(\frac{x}{\ln^{\Delta}x}\right) \quad (44)$$

при любом фиксированном положительном Δ; однако это соотношение не дает нам права утверждать, что ошибка равна

$$O(x^{1-\delta}) \text{ с } \delta>0.$$

Легко показать с помощью интегрирования по частям, что

$$\operatorname{li} x = \frac{x}{\ln x} + \frac{1!x}{\ln^2 x} + \ldots + \frac{(k-1)!x}{\ln^k x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)$$

для любого фиксированного целого положительного k. Подставляя это в (44) и беря $\Delta = 4$, $k = 3$, получаем после небольших преобразований:

$$\pi(x) - \frac{x}{\ln x - B} = \left(1 - B\right)\frac{x}{\ln^2 x} + (2 - B^2)\frac{x}{\ln^3 x} + O\left(\frac{x}{\ln^4 x}\right),$$

где B — любая константа. Отсюда явствует, что лежандрова функция $\frac{x}{\ln x - B}$ даст наилучшее приближение к $\pi(x)$ для больших x тогда, когда мы положим $B = 1$, но, однако, и в этом случае она не будет столь хороша в качестве приближения, как $\operatorname{li} x$ (см. гл. I, § 8, стр. 32).

13. Результаты §§ 9 и 12 принадлежат де-ла-Валле-Пуссену; изложенный выше метод вывода теоремы 23 из теоремы 19 был предложен Ландау [1]). Ландау дал доказательство теоремы 19 (а тем самым и теоремы 23), не зависящее от теории целых функций и даже от существования $\zeta(s)$ во всей плоскости [2]).

Численное значение константы a в формуле (43) было дано де-ла-Валле-Пуссеном и затем улучшено Ландау. Однако воспроизводить здесь эти значения нет смысла, поскольку сейчас известно, что функция $\sqrt{\ln x}$ сама может быть заменена лучшей. Этим успехом мы обязаны Литтльвуду. Он показал, что $\zeta(s)$ не имеет нулей в области вида

$$\sigma > 1 - a_1 \frac{\ln\ln(|t| + 3)}{\ln(|t| + 3)}.$$

Эта теорема заложена чрезвычайно глубоко, и за доказательством ее мы вынуждены отослать к монографии Титчмарша [3]).

Однако, если принять ее за известную, то мы можем уже без труда вывести соответствующее уточнение теоремы 23. За функцию $\eta(t)$ §§ 10 и 11 мы можем теперь взять

$$\eta(t) = a_2 \frac{\ln\ln t}{\ln t} \quad (t \geqslant 3).$$

Тогда будем иметь:

$$\eta(t)\ln x + \ln t \geqslant \begin{cases} 2\,(a_2 \ln x \ln\ln t)^{\frac{1}{2}} \geqslant (2a_2 \ln x \ln\ln x)^{\frac{1}{2}} & (t \geqslant \xi), \\ \eta(\xi)\ln x = \frac{1}{2}\, a_2 (\ln x)^{\frac{1}{2}} \ln\ln x & (1 \leqslant t \leqslant \xi), \end{cases}$$

---

[1]) *De la Vallée-Poussin, 2*; *H*, I, 318—333.

[2]) *V*, II, 9—28; *T*, 14—17 (теорема 8).

[3]) *T*, 20—23 (теорема 13); *V*, II, 31—44. По поводу первоначальной формулировки см. *Littlewood, 2* (§ 4). Метод Ландау оказался обладающим настолько большими преимуществами, что Литтльвуд отказался от опубликования своего доказательства.

где $\xi = e^{\sqrt{\ln x}}$ и $x \geqslant e^{(\ln 3)^2}$, так что $\xi \geqslant 3$. Следовательно,

$$\omega(x) \geqslant (2a_2 \ln x \ln \ln x)^{\frac{1}{2}}$$

для всех достаточно больших x. Соответственно этому теорема 22 дает следующий результат.

Теорема 24. *При* $x \to \infty$

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-a\sqrt{\ln x \ln \ln x}}\right),$$
$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(xe^{-a\sqrt{\ln x \ln \ln x}}\right),$$

где a — положительная абсолютная константа.

Эти формулы содержат наилучшие известные до сих пор оценки остаточных членов для функций $\psi(x)$ и $\pi(x)$ [1]).

14. *Гипотеза Римана.* Риман выставил предположение, что все нетривиальные нули функции $\zeta(s)$ лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Однако это предположение никогда с тех пор не было ни доказано, ни опровергнуто. Доводы в пользу „гипотезы Римана“ (так называют теперь это предположение), а также ее связь с общей теорией функции $\zeta(s)$ рассматриваются в монографии Титчмарша, к которой мы и отсылаем читателя за дальнейшими справками [2]). Однако мы не можем здесь обойти молчанием отношения этой гипотезы к проблеме распределения простых чисел. Нетрудно усмотреть, что асимптотические соотношения настоящей главы допускают существенные улучшения в случае справедливости гипотезы Римана. Действительно, тогда мы можем взять за функцию $\eta(t)$ §§ 10 и 11 $\eta(t) = \frac{1}{2}$; полагая

$$\alpha = 1 - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

мы получим ошибку порядка $O\left(x^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}\right)$ в формуле для $\psi_1(x)$ и порядка $O\left(x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\varepsilon}\right)$ в формулах для $\psi(x)$ и $\pi(x)$. Однако эти результаты могут быть еще значительно улучшены. Прежде всего показатель степени $\frac{3}{4}$ в последней формуле можно

---

[1]) *BC*, 789, сноска [176]); *V*, II, 3—8, 44—47.

[2]) *T*, гл. III и V. См. также *Siegel*, *1*.

заменить через $\frac{1}{2}$; появление показателя $\frac{3}{4}$ объясняется лишь несовершенством метода. Кроме того, сомножители $x^{\frac{1}{2}}$ и $x^{\frac{1}{4}}$ можно заменить степенями $\ln x$. Хотя эти улучшения и могут быть в известных пределах произведены путем подходящего изменения метода этой главы, тем не менее предпочтительнее воспользоваться другим методом. Этот последний основан на применении „явных формул", составляющих главный предмет следующей главы.

Глава IV.

Явные формулы.

1. В настоящей главе рассматриваются различного рода точные представления в виде бесконечных рядов для функций, связанных с $\psi(x)$. Эти „явные формулы“ чрезвычайно интересны как сами по себе, так и по своим многочисленным применениям, с которыми мы познакомимся отчасти в конце главы.

Наши доказательства будут основываться на применении теоремы Коши к контурам, проходящим через критическую полосу, и мы должны будем прежде всего получить более точное представление о распределении мнимых частей комплексных нулей функции $\zeta(s)$.

2. *Плотность распределения нулей.* Обозначаем через $N(T)$, где $T>0$, число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е., по теореме 16, число тех нулей $\rho=\beta+\gamma i$ функции $\zeta(s)$ или $\xi(s)$, для которых $0<\gamma \leqslant T$.

Теорема 25. *При* $T \to \infty$

$$N(T)=\frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln T).$$

Пусть $T>3$ и на первых порах не совпадает ни с одним γ; тогда $\xi(s)$ имеет $2N(T)$ нулей внутри прямоугольника с вершинами $2 \pm Ti$ и $-1 \pm Ti$ и ни одного на его границе. Следовательно, по теореме Коши („принцип аргумента“),

$$4\pi N(T)=[\arg \xi(s)]_C,$$

где $[\arg \xi(s)]_C$ обозначает приращение $\arg \xi(s)$, когда s описывает периметр C этого прямоугольника в положительном направлении. Но

$$[\arg \xi(s)]_C=\left[\arg \frac{1}{2} s(s-1)\right]_C+[\arg \varphi(s)]_C,$$

где $\varphi(s)=\pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) \zeta(s)$. Первое слагаемое в правой части равно 4π, и так как $\varphi(s)$ принимает равные значения в точках s и $1-s$ и сопряженные значения в точках $\sigma \pm ti$, то второе слагаемое, очевидно, равно $4\,[\arg \varphi(s)]_L$, где L есть ломаная линия, состоящая из отрезка L_1 от 2 до $2+Ti$ и приложенного к нему отрезка L_2 от $2+Ti$ до $\frac{1}{2}+Ti$. Следовательно,

$$\pi N(T)=\pi+\left[\arg \pi^{-\frac{1}{2}s}\right]_L+\left[\arg \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\right]_L+[\arg \zeta(s)]_L. \quad (1)$$

Имеем прежде всего

$$\left[\arg \pi^{-\frac{1}{2}s}\right]_L=\left[-\frac{1}{2}t\ln \pi\right]_L=-\frac{1}{2}T\ln \pi .$$

Далее $\left(\text{см. сноску на стр. 74—75, с } z=\frac{1}{2}Ti,\ a=\frac{1}{4}\right)$

$$\left[\arg \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\right]_L=\left[\Im \ln \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\right]_L=$$

$$=\Im \ln \Gamma=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}Ti\right)-\Im \ln \Gamma(1)=$$

$$=\Im\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}Ti\right)\ln\left(\frac{1}{2}Ti\right)-\frac{1}{2}Ti+\frac{1}{2}\ln 2\pi\right\}+O\left(T^{-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}T\ln\left(\frac{1}{2}T\right)-\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{2}T+O\left(T^{-1}\right)$$

при $T\to\infty$. Подставляя это в (1), получаем:

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}+\frac{1}{\pi}[\arg \zeta(s)]_L+O\left(\frac{1}{T}\right). \quad (2)$$

Пусть теперь m будет число различных точек s' линии L (исключая концы), в которых $\Re\zeta(s)=0$ (это число, как будет явствовать из дальнейшего, необходимо конечно). Тогда

$$[\arg \zeta(s)]_L \leqslant (m+1)\pi, \quad (3)$$

потому что, когда s описывает один из $m+1$ кусков, на которые L делится точками s', $\arg \zeta(s)$ не может измениться более чем на π, так как $\Re\zeta(s)$ не меняет знака. Но ни одна из точек s' не может лежать на L_1, так как

$$\Re\zeta(2+ti)\geqslant 1-\sum_2^{\infty}\frac{1}{n^2}>1-\frac{1}{2^2}-\int_2^{\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{1}{4}. \quad (4)$$

Следовательно, m есть число различных точек σ интервала $\frac{1}{2} < \sigma < 2$, в которых $\Re\zeta(\sigma + Ti) = 0$, или, что то же, число различных нулей функции

$$g(s) = \frac{1}{2}\{\zeta(s + Ti) + \zeta(s - Ti)\}$$

в интервале $\frac{1}{2} < s < 2$ вещественной оси, ибо $g(\sigma) = \Re\zeta(\sigma + Ti)$ для вещественных σ, поскольку $\zeta(\sigma + Ti)$ и $\zeta(\sigma - Ti)$ имеют сопряженные значения. Так как $g(s)$ регулярна, за исключением $s = 1 \pm Ti$, то m конечно, и мы получаем для него верхнюю границу, применяя теорему D (стр. 56) к $g(s)$ и кругам $|s-2| \leqslant \frac{7}{4}$, $|s-2| \leqslant \frac{3}{2}$. В силу условия $T > 3$, $g(s)$ регулярна в бо́льшем круге и удовлетворяет, по теореме 9, неравенству:

$$|g(s)| < \frac{1}{2}A_1\left(|t + T|^{\frac{3}{4}} + |t - T|^{\frac{3}{4}}\right) < A_1(T+2)^{\frac{3}{4}},$$

так как $\sigma \geqslant \frac{1}{4}$ и $1 < |t \pm T| < 2 + T$ во всех точках $s = \sigma + ti$ указанного круга. Кроме того, в силу неравенства (4),

$$g(2) = \Re\zeta(2 + Ti) > \frac{1}{4}.$$

Следовательно, по теореме D

$$\left(\frac{7}{6}\right)^m < \frac{A_1(T+2)^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{4}} < T \quad (T > T_0 \geqslant 3),$$

откуда и получаем $m < A_2 \ln T$ для $T > T_0$. Подставляя это в (2) и (3), видим, что для $T > T_0$

$$\left|N(T) - \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} + \frac{T}{2\pi}\right| \leqslant A_3 \ln T,$$

в предположении, что T не совпадает ни с одним γ. Но теперь это ограничение можно отбросить, в чем убеждаемся, заменяя T, в случае, если оно совпадает с одним из γ, бо́льшим значением T' (отличным от всех γ) и беря $T' \to T + 0$.

Отметим некоторые следствия теоремы 25, полезные в приложениях.

Теорема 25a. *Пусть h — фиксированное положительное число. Тогда при $T \to \infty$*

$$N(T+h) - N(T) = O(\ln T).$$

Этот результат вытекает из теоремы 25, так как, полагая

$$P(t) = \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi},$$

имеем:

$$P(T+h) - P(T) = hP'(T+\vartheta h) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

и

$$P'(t) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi}.$$

Теорема 25b. *При $T \to \infty$ имеем:*

$$\sum_{0<\gamma\leqslant T} \frac{1}{\gamma} = O(\ln^2 T), \quad \sum_{\gamma > T} \frac{1}{\gamma^2} = O\left(\frac{\ln T}{T}\right).$$

Суммы берутся с учетом кратности по всем ρ, мнимые части γ которых удовлетворяют указанным неравенствам. Обозначая эти суммы соответственно через S и S', имеем:

$$S \leqslant \sum_{m=0}^{[T]} s_m, \quad S' \leqslant \sum_{m=[T]}^{\infty} s'_m,$$

где через s_m и s'_m обозначены суммы $\sum \frac{1}{\gamma}$ и $\sum \frac{1}{\gamma^2}$ для $m < \gamma \leqslant m+1$. Пусть $m \geqslant 1$ и число членов в суммах s_m и s'_m

$$N(m+1) - N(m) = \nu_m;$$

тогда $s_m \leqslant \frac{\nu_m}{m}$, $s'_m \leqslant \frac{\nu_m}{m^2}$. По теореме 25a, $\nu_m = O(\ln m)$ при $m \to \infty$; следовательно, при $T \to \infty$

$$S = O(1) + O\left(\sum_{2}^{[T]} \frac{\ln m}{m}\right) = O(\ln^2 T),$$

$$S' = O\left(\sum_{[T]}^{\infty} \frac{\ln m}{m^2}\right) = O\left(\frac{\ln T}{T}\right).$$

Теорема 25с. *Пусть нули $\rho=\beta+\gamma i$ с положительной мнимой частью, $\gamma>0$, расположены в последовательность*

$$\rho_n=\beta_n+\gamma_n i$$

в порядке возрастания γ_n, так что $\gamma_{n+1}\geqslant\gamma_n$; тогда при $n\to\infty$

$$|\rho_n|\sim\gamma_n\sim\frac{2\pi n}{\ln n}.$$

Действительно, так как $N(\gamma_n-1)<n\leqslant N(\gamma_n+1)$ и

$$2\pi N(\gamma_n\pm1)\sim(\gamma_n\pm1)\ln(\gamma_n\pm1)\sim\gamma_n\ln\gamma_n,$$

то имеем: $2\pi n\sim\gamma_n\ln\gamma_n$, откуда $\ln n\sim\ln\gamma_n$ и $\gamma_n\sim\dfrac{2\pi n}{\ln\gamma_n}\sim\dfrac{2\pi n}{\ln n}$.

Принимая во внимание неравенства $\gamma_n\leqslant|\rho_n|<\gamma_n+1$, мы и получаем требуемый результат.

Теорема 25, содержащая одно из наиболее важных свойств функции $\zeta(s)$, была указана Риманом, но впервые доказана фон-Мангольдтом [1]). Трудность ее состоит, конечно, в оценке значения $[\arg\zeta(s)]_L$. Приведенное доказательство принадлежит Бэклунду [2]). В отличие от доказательства фон-Мангольдта оно не опирается на теорему 18 и доставляет поэтому одновременно новое доказательство существования бесконечного множества комплексных нулей. Сведения относительно плотности распределения нулей, полученные нами этим путем, более точны, чем доставляемые теоремой 18; в самом деле, мы видим теперь (из теоремы 25с), что ряд $\sum\dfrac{1}{|\rho|(\ln|\rho|)^\alpha}$ сходится для $\alpha>2$ и расходится для $\alpha\leqslant2$.

Заметим, что теорема 25а, достаточная для многих приложений, существенно проще теоремы 25. Она может быть сразу доказана путем применения теоремы D непосредственно к $\zeta(s)$ и к двум кругам, проходящим соответственно через точки $\frac{1}{2}+(T+2h)i$ и $\frac{1}{2}+(T+h)i$ с общим центром в $c+Ti$ [$c=c(h)$ — достаточно большое положительное число] с использованием симметрии относительно $\sigma=\frac{1}{2}$.

3. В настоящем параграфе мы выведем неравенство, которому удовлетворяет $\left|\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$ на некоторой совокупности линий, пересекающих критическую полосу, обходя нули $\zeta(s)$.

---

[1]) *Riemann, 1, von Mangoldt, 1, 2, 4; H,* I, 368—378.

[2]) *Backlund, 1, 2.* По поводу дальнейшего уточнения остаточного члена см. *T,* 58—61, 87—93, 96.

Теорема 26. *Существует такая числовая последовательность* $T_2, T_3, \ldots,$ *что*

$$m < T_m < m+1 \quad (m=2, 3, \ldots)$$

и

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < A \ln^2 t \quad (-1 \leqslant \sigma \leqslant 2,\ t = T_m).$$

По теореме 18, формула (26),

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = b - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)} + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= g(s) + \Sigma(s),$$

где $\Sigma(s)$ обозначает бесконечный ряд.

Пусть $s=\sigma+ti$, $s_0=2+ti$, где $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t>2$ и t не совпадает ни с одним γ. Пусть, далее, δ_0 будет расстояние от t до ближайшего γ и

$$\delta = \delta(t) = \min(\delta_0, 1);$$

тогда для всех $\rho = \beta + \gamma i$

$$|s-\rho|^2 \geqslant (t-\gamma)^2 \geqslant \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}(t-\gamma)^2 \geqslant \frac{1}{2}\delta^2\{1+(t-\gamma)^2\},$$

$$|s_0-\rho|^2 = (2-\beta)^2 + (t-\gamma)^2 \geqslant 1+(t-\gamma)^2,$$

так как $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Следовательно,

$$|\Sigma(s) - \Sigma(s_0)| = \left|\sum_{\rho}\frac{s_0-s}{(s-\rho)(s_0-\rho)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\rho}\frac{3}{\left(\frac{1}{2}\delta^2\right)^{\frac{1}{2}}\{1+(t-\gamma)^2\}} < \frac{6}{\delta}\sum_{\rho}\frac{1}{1+(t-\gamma)^2}.$$

С другой стороны,

$$\Re\,\Sigma(s_0) = \sum_{\rho}\left(\frac{2-\beta}{|s_0-\rho|^2}+\frac{\beta}{|\rho|^2}\right) \geqslant \sum_{\rho}\frac{1}{4+(t-\gamma)^2} >$$

$$> \frac{1}{4}\sum_{\rho}\frac{1}{1+(t-\gamma)^2},$$

так как

$$0 \leqslant \beta \leqslant 1, \ |s_0 - \rho|^2 \leqslant 4 + (t-\gamma)^2;$$

отсюда

$$|\Sigma(s) - \Sigma(s_0)| < \frac{24}{\delta} \Re\, \Sigma(s_0) \leqslant \frac{24}{\delta} |\Sigma(s_0)|.$$

Таким образом

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - g(s)\right| = |\Sigma(s)| \leqslant \frac{25}{\delta} |\Sigma(s_0)| = \frac{25}{\delta} \left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)} - g(s_0)\right|.$$

Применяя асимптотическую формулу для $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ (см. сноску на стр. 74—75) к $g(s)$ и $g(s_0)$ и замечая, что $\left|\frac{\zeta'(s_0)}{\zeta(s_0)}\right| \leqslant \sum \frac{\Lambda(n)}{n^2}$, получаем:

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < \frac{A_1}{\delta} \ln t. \tag{5}$$

Пусть теперь m — любое целое число, превышающее единицу, ν_m — число тех ρ, мнимая часть которых падает на интервал $m < \gamma \leqslant m+1$, так что $\nu_m = N(m+1) - N(m)$. Если мы разделим интервал $(m, m+1)$ на $\nu_m + 1$ равных частей, то по крайней мере один подинтервал не будет содержать внутри ни одного γ. Возьмем за T_m центр такого интервала, тогда для $t = T_m$ имеем $\delta \geqslant \frac{1}{2(\nu_m+1)}$, и теорема вытекает из неравенства (5), так как (по теореме 25а) $\nu_m < A_2 \ln m < A_2 \ln t$.

Нам потребуется также следующая, более элементарная теорема.

Теорема 27. *В области, полученной после удаления из полуплоскости $\sigma \leqslant -1$ внутренних частей кругов радиуса $\frac{1}{2}$ с центрами в $s = -2, -4, -6, \ldots$, т. е. в области*

$$\sigma \leqslant -1, \ |s-n| \geqslant \frac{1}{2} \qquad (n = -2, -4, -6, \ldots),$$

имеет место неравенство:

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < A \ln(|s|+1).$$

Заменяя в функциональном уравнении s на $1-s$ и беря логарифмическую производную, получаем:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\ln 2\pi+\frac{1}{2}\pi\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi s-\frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)}-\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}.$$

Но для всех s из определенной выше области R имеем $1-\sigma\geqslant 2$, так что

$$\left|\frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}\right|\leqslant\sum\frac{\Lambda(n)}{n^2},$$

$$\left|\frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)}\right|<A_1|\ln(1-s)|<A_2\ln(|s|+1).$$

Далее (см. сноску на стр. 58),

$$\left|\frac{1}{2}\pi\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi s\right|=\left|\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i}{e^{\pi si}-1}\right|<A_3$$

в области R. Комбинируя эти неравенства, мы и получаем требуемый результат.

4. *Явная формула для* $\psi_1(x)$. Мы приступаем к выводу явных формул и начинаем, как обычно, с $\psi_1(x)$.

Теорема 28. *Для* $x\geqslant 1$

$$\psi_1(x)=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\sum_\rho\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}-x\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}+\frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{1-2r}}{2r(2r-1)}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I(m)=-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds,$$

взятый в положительном направлении по контуру прямоугольника $C=C(m)$ с вершинами $2\pm T_m i$, $-2m-1\pm T_m i$, где m — целое число, превышающее единицу, и T_m — числа теоремы 26. Обозначим через $I_1(m)$ интеграл по стороне $(2-T_m i,\ 2+T_m i)$ и через $I_2(m)$ интеграл, взятый по оставшейся части контура C.

При $m\to\infty$ имеем $I_1(m)\to\psi_1(x)$, по фундаментальной формуле (14), стр. 43. В интеграле $I_2(m)$ имеем по теоремам 26 и 27:

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|<A_1\ln^2|s|<A_2\ln^2 m,$$

так как $|s| < 2m+1+T_m < 3m+2$; кроме того, $|s| > m$, $|s+1| > m$ и $|x^{s+1}| = x^{\sigma+1} \leqslant x^3$, так как $x \geqslant 1$; поэтому

$$|I_2(m)| < \frac{x^3 A_2 \ln^2 m}{2\pi m^2}(4m+6+2T_m) < A_8 x^3 \frac{\ln^2 m}{m},$$

так что $I_2(m) \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда получаем:

$$I(m) \to \psi_1(x) \text{ при } m \to \infty. \tag{6}$$

Но по теореме Коши о вычетах:

$$I(m) = \frac{x^2}{2} - \sum_{|\gamma| < T_m} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - x\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \sum_{r=1}^{m} \frac{x^{-2r+1}}{(-2r)(-2r+1)};$$

действительно подинтегральное выражение имеет полюсы в точках 1, 0, -1 и нулях (ρ и $-2r$) $\zeta(s)$, причем нулю n-го порядка функции $\zeta(s)$ соответствует простой полюс с вычетом n ее логарифмической производной $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, а полюсу n-го порядка — простой полюс с вычетом $-n$. Беря $m \to \infty$ и сравнивая с (6), получаем требуемое утверждение. Оба бесконечных ряда абсолютно сходятся, так как их общие члены по модулю меньше, соответственно, чем $\frac{x^2}{\gamma^2}$ и $\frac{1}{r^2}$. Второй ряд, разумеется, может быть выражен в конечном виде, однако это несущественно.

Обобщенная форма теоремы 28 послужила Валле-Пуссену базисом для его доказательства асимптотического закона распределения простых чисел[1]. Основную формулу де-ла-Валле-Пуссен получил путем подстановки вместо $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ его выражения из формулы (26), стр. 76, и почленного интегрирования — процедуры, которую нетрудно обосновать. Однако его метод уже не годится для более тонких проблем, рассматриваемых в последующих параграфах.

---

[1]) *De la Vallée-Poussin, 1.*

5. Явная формула для $\psi_1(x)$ основывается в конечном счете на частном случае $k=1$ теоремы B (стр. 43). Общая форма этой теоремы приводит к явной формуле для

$$\psi_k(x)=\frac{1}{k!}\sum_{n\leqslant x}(x-n)^k\Lambda(n)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^x(x-u)^{k-1}\psi(u)\,du,$$

где $\psi_k(x)$ k-кратный интеграл функции $\psi(x)$ (в пределах от нуля до x). Сама функция $\psi(x)$ может рассматриваться формально как соответствующая случаю $k=0$, однако этот случай представляет теоретические трудности, так как знаменатель $s(s+1)\ldots(s+k)$, обеспечивающий при $k>0$ абсолютную сходимость интеграла в теореме B, при $k=0$ приводится к одному s. Мы должны сперва доказать аналог теоремы B для $k=0$.

Теорема G. *Для $c>0$, $y>0$ имеем:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{y^s}{s}\,ds=\begin{cases}0 & (y<1),\\ \frac{1}{2} & (y=1),\\ 1 & (y>1),\end{cases}\tag{7}$$

где в случае $y=1$ для интеграла берется „главное значение Коши“, т. е. предел интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti}\frac{y^s}{s}\,ds\tag{8}$$

при $T\to\infty$.

Кроме того, если

$$I(y)=I(y,T)+\Delta(y,T),$$

где $I(y)$ и $I(y,T)$ обозначают соответственно интегралы (7) и (8), то для $T>0$

$$|\Delta(y,T)|<\begin{cases}\dfrac{y^c}{\pi T\,|\ln y|} & (y\neq 1),\\[2mm] \dfrac{c}{\pi T} & (y=1),\end{cases}\tag{9}$$

$$|\Delta(y,T)|<y^c\quad (\textit{всегда}).\tag{10}$$

Пусть сначала $y > 1$. По теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{y^s}{s}\,ds = 1,$$

где интеграл берется в положительном направлении вдоль прямоугольника с вершинами $c - Ui$, $c + Vi$, $-X + Vi$, $-X - Ui$, где $U > 0$, $V > 0$, $X > 0$. Фиксируем U и V и берем $X \to \infty$. Тогда интеграл по стороне $(-X + Vi,\ -X - Ui)$ стремится к нулю, так как контур интегрирования сохраняет длину $U + V$ и на нем $\left|\frac{y^s}{s}\right| \leqslant \frac{y^{-X}}{X} < \frac{1}{X}$, ибо $y > 1$, $X > 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-Ui}^{c+Vi} \frac{y^s}{s}\,ds = 1 - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-Ui}^{c-Ui} \frac{y^s}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+Vi}^{c+Vi} \frac{y^s}{s}\,ds = 1 - I(-U) + I(V).$$

$I(-U)$ и $I(V)$ абсолютно сходятся и

$$|I(-U)| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{c} \frac{y^\sigma}{U}\,d\sigma = \frac{y^c}{2\pi U \ln y}, \quad |I(V)| < \frac{y^c}{2\pi V \ln y},$$

так как $y^\sigma = e^{\sigma \ln y}$ и $\ln y > 0$. Этим доказываются для случая $y > 1$ формулы (7) и (9). В случае $y < 1$ рассуждаем аналогичным образом, с тем отличием, что теперь берем прямоугольник, лежащий вправо от прямой $\sigma = c$.

В случае $y = 1$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T} \frac{dt}{c+ti} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T} \frac{c-ti}{c^2+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{T} \frac{c\,dt}{c^2+t^2},$$

так как вещественная и мнимая части подинтегрального выражения представляют собой соответственно четную и нечетную функции от t. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-Ti}^{c+Ti} \frac{ds}{s} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{T}^{\infty} \frac{c\,dt}{c^2+t^2} < \begin{cases} \dfrac{c}{\pi T}, \\ \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где первое неравенство получается путем замены знаменателя $c^2 + t^2$ через t^2, а второе — путем замены нижнего предела T

на 0. Это устанавливает справедливость формул (7), (9), (10) для $y=1$.

Остается доказать неравенство (10) для $y \neq 1$. Пусть Γ будет дуга окружности $|s|=\sqrt{c^2+T^2}=R$, расположенная влево или вправо от прямой $\sigma=c$, соответственно тому, будет ли $y>1$ или $y<1$; тогда, по теореме Коши и формуле (7),

$$|\Delta(y, T)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{y^s}{s}\,ds\right|<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{y^c}{R}\cdot 2\pi R=y^c.$$

Нетрудно показать, что для $U>0$, $V>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-Ui}^{c+Vi}\frac{ds}{s}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2\pi}\ln\frac{V}{U}+\vartheta\frac{2c}{\pi T}, \tag{11}$$

где $|\vartheta|<1$ и $T=\min(U, V)$, так что интеграл (7) не сходится в обычном смысле для $y=1$.

6. *Явная формула для* $\psi_0(x)$. Теорема G приводит к точной формуле не для самой функции $\psi(x)$, а для

$$\psi_0(x)=\frac{\psi(x+0)+\psi(x-0)}{2}=\sum_{n\leqslant x}{}'\Delta(n),$$

где штрих при знаке суммы указывает, что для целого x член, соответствующий $n=x$, должен быть взят с коэфициентом $\frac{1}{2}$; $\psi_0(x)$ отличается от $\psi(x)$ лишь если x есть степень простого числа, $x=p^m$, причем разность равна тогда $\frac{1}{2}\ln p$.

Теорема 29.

$$\psi_0(x)=x-\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ (x>1), \tag{12}$$

где $\sum\limits_{\rho}$ *означает предел суммы*

$$S(x, T)=\sum_{|\gamma|\leqslant T}\frac{x^\rho}{\rho} \tag{13}$$

при $T\to\infty$.

Далее, полагая

$$\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho}=S(x, T)+R(x, T), \tag{14}$$

имеем для $x > 1$, $T > 3$:

$$|R(x, T)| < \begin{cases} A\dfrac{x^3}{x-1}\left(\dfrac{\ln^2 T}{T} + \dfrac{1}{T\xi}\right) & (x \neq p^m), \\ A\dfrac{x^3}{x-1}\dfrac{\ln^2 T}{T} & (x = p^m), \end{cases} \tag{15}$$

$$|R(x, T)| < A\frac{x^3}{x-1}\frac{\ln^2 T}{T} + A\ln x \quad (\textit{всегда}), \tag{16}$$

где $\xi = \xi(x)$ *есть абсолютная величина разности между* x *и ближайшей степенью* p^m *простого числа.*

Пусть $T > 3$. Обозначим через T' первое из чисел T_m теоремы 26, превышающее T, и пусть q будет нечетное целое число, большее, чем T. Рассмотрим

$$J(q) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x^s}{s}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds =$$

$$= J_1 + J_2(q) + J_3(q) + J_4(q),$$

где интеграл берется в положительном направлении по прямоугольнику с вершинами $2 \pm T'i, -q \pm T'i$ и J_1, J_2, J_3, J_4 — части этого интеграла, соответствующие четырем сторонам указанного прямоугольника, начиная со стороны $(2 - T'i, 2 + T'i)$. В J_1 заменяем $-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ рядом $\sum\dfrac{\Lambda(n)}{n^s}$ и интегрируем почленно (что законно ввиду равномерной сходимости); принимая во внимание формулу (7) и определение функции $\psi_0(x)$, получаем в обозначениях теоремы G (при $c = 2$):

$$J_1 = \sum_1^\infty \Lambda(n)\, I\left(\frac{x}{n}, T'\right) = \sum_1^\infty \Lambda(n)\, I\left(\frac{x}{n}\right) - \sum_1^\infty \Lambda(n)\,\Delta\left(\frac{x}{n}, T'\right) =$$

$$= \psi_0(x) - \sum_1^\infty \Lambda(n)\,\Delta\left(\frac{x}{n}, T'\right) = \psi_0(x) - X.$$

На остальных трех сторонах контура C имеем по теоремам 26 и 27:

$$|f(s)| < \frac{x^\sigma}{|s|}A_1 \ln^2|s| < 3A_1\frac{\ln^2 3|s|}{3|s|}x^\sigma <$$

$$< 3A_1\frac{\ln^2 3T}{3T}x^\sigma < A_2\frac{\ln^2 T}{T}x^\sigma, \tag{17}$$

так как $3|s| > 3T > 9 > e^2$ и $\frac{\ln^2 u}{u}$ есть убывающая функция для $u > e^2$. Поэтому $|J_3(q)| < K_T x^{-q}$ (где K_T зависит только от T), и так как $x > 1$, то $J_3(q) \to 0$ при $q \to \infty$. Таким образом

$$\lim_{q\to\infty} J(q) = \psi_0(x) - X - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{2}\{f(\sigma + T'i) - f(\sigma - T'i)\}\,d\sigma =$$
$$= \psi_0(x) - X - Y. \tag{18}$$

Интеграл Y в силу неравенства (17) $(x > 1)$ абсолютно сходится и

$$|Y| < \frac{A_2}{\pi}\frac{\ln^2 T}{T}\int_{-\infty}^{2} e^{\sigma \ln x}\,d\sigma = A_3\frac{\ln^2 T}{T}\frac{x^2}{\ln x}. \tag{19}$$

С другой стороны, по теореме о вычетах:

$$\lim_{q\to\infty} J(q) = x - \sum_{|\gamma|<T'}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{-2r}}{-2r}.$$

Сравнивая с (18) и заменяя последний ряд его суммой, получаем, пользуясь обозначением (13):

$$\psi_0(x) = x - S(x, T') - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + X + Y =$$
$$= x - S(x, T) - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + P, \tag{20}$$

где

$$P = X + Y + \{S(x, T) - S(x, T')\} = X + Y + Z. \tag{21}$$

Так как $T < T' < T + 2$, то, по теореме 25а,

$$|Z| \leqslant 2\{N(T') - N(T)\}\frac{x}{T} < A_4\frac{\ln T}{T}x. \tag{22}$$

Оценим теперь

$$X = \sum_{1}^{\infty}\Lambda(n)\,\Delta\left(\frac{x}{n}, T'\right) = \sum_{1}^{\infty} u_n. \tag{23}$$

По теореме G, (9), при $c=2$

$$|u_n| \leqslant \Lambda(n) \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{\pi T \left|\ln \frac{x}{n}\right|} \leqslant \frac{x^2}{\pi T} \frac{\Lambda(n)}{n^2} \frac{n+x}{|n-x|} \quad (n \neq x); \tag{24}$$

в самом деле, полагая $v = \min\left(\frac{x}{n}, \frac{n}{x}\right)$, имеем $0 < v < 1$ и

$$\left|\ln \frac{x}{n}\right| = -\ln\{1-(1-v)\} > 1-v > \frac{1-v}{1+v} = \frac{|n-x|}{n+x}.$$

Пусть $\nu = \nu(x)$ есть целое число, определяемое неравенствами $\nu - \frac{1}{2} < x \leqslant \nu + \frac{1}{2}$. Если $|n-x| > \frac{1}{2}x$, то

$$\frac{n+x}{|n-x|} = \left|1 + \frac{2x}{n-x}\right| \leqslant 1 + \frac{2x}{|n-x|} < 5.$$

Если $|n-x| \leqslant \frac{1}{2}x$, но $n \neq \nu$, то мы можем написать $n = \nu \pm r$, где r есть целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$0 < r = |n-\nu| \leqslant |n-x| + |\nu - x| \leqslant 2|n-x| \leqslant x.$$

Следовательно, в силу (23) и (24)

$$|X - u_\nu| \leqslant \frac{x^2}{\pi T}\left(\sum_{|n-x|>\frac{1}{2}x} \frac{\ln n}{n^2}\cdot 5 + 2\sum_{r=1}^{[x]} \frac{\ln\left(\frac{3}{2}x\right)}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2} \frac{\frac{5}{2}x}{\frac{1}{2}r}\right) <$$

$$< \frac{x^2}{\pi T}\left(5\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} + A_5 \frac{\ln^2(2x)}{x}\right) < A_6 \frac{x^2}{T}. \tag{25}$$

Соединяя формулу (21) и неравенства (25), (19), (22), получаем:

$$|P - u_\nu| < A_6 \frac{x^2}{T} + A_3 \frac{\ln^2 T}{T} \frac{x^2}{\ln x} +$$

$$+ A_4 \frac{\ln T}{T} x < A_7 \frac{\ln^2 T}{T}\left(\frac{x^2}{\ln x} + x^2\right). \tag{26}$$

Остается рассмотреть u_ν. Примем сначала, что x не есть p^m. Тогда, если ν равно p^m, то, принимая во внимание, что $\nu + x \leqslant 2\nu + \frac{1}{2} < 3\nu$, имеем в силу неравенства (24):

$$|u_\nu| \leqslant \frac{x^2}{\pi T} \frac{3\Lambda(\nu)}{\nu} \frac{1}{|\nu - x|} < A_8 \frac{x^2}{T\xi},$$

так как $|\nu - x| = \xi$ по самому определению числа ξ; это же неравенство сохраняет силу и для ν, не равного p^m, так как в этом случае $u_\nu = 0$. Если же x есть p^m, то, по теореме G, (9),

$$|u_\nu| = |u_x| = |\Lambda(x)\Delta(1, T')| \leqslant \ln x \cdot \frac{2}{\pi T'} < A_9 \frac{x^2}{T}.$$

Независимо от этого имеем в обоих случаях, по теореме G, (10),

$$|u_\nu| \leqslant \ln \nu \cdot \left(\frac{x}{\nu}\right)^2 < A_{10} \ln x.$$

Комбинируя эти результаты с (26) и замечая, что

$$\ln x = -\ln\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right\} > 1 - \frac{1}{x}, \quad 1 > 1 - \frac{1}{x},$$

видим, что P удовлетворяет неравенствам, аналогичным (15) и (16). Но это доказывает теорему. В самом деле, неравенства, соответствующие (15), в соединении с (20) показывают прежде всего, что для всякого фиксированного $x > 1$ $S(x, T)$ стремится к пределу $S(x)$ при $T \to \infty$, причем $S(x) = S(x, T) - P$, а тогда мы заключаем из (14), что $R(x, T) = -P$, так что требуемые неравенства для $R(x, T)$ вытекают из полученных уже нами для P.

Неравенства (15) и (16), конечно, могут быть уточнены. Порядок относительно x можно, очевидно, понизить, заменяя прямую $\sigma = 2$, использованную в доказательстве, прямой, лежащей левее. Кроме того, оценивая другим методом интегралы по горизонтальным частям контура, можно понизить порядок относительно T на множитель $\ln T$[1]). Однако и в приведенной здесь форме неравенства (15) и (16) достаточны для наших приложений.

7. Явная формула (12) наводит на мысль, что числа p^m [точки разрыва функции $\psi_0(x)$] и числа ρ связаны между собой. Однако до сих пор не удалось установить соотношения между ними в виде, существенно более явном, чем в формуле (12).

---

[1]) *V*, II, 108—120; *Landau, 4*. По поводу более глубоких результатов, опирающихся на гипотезу Римана, см. *Littlewood, 2* (§ 8), *3*.

Из неравенства для „остаточного члена“ $R(x, T)$ можно извлечь интересные сведения о поведении ряда $\sum \frac{x^{\rho}}{\rho}$. Будем писать, как в теореме 25c, $\rho_n = \beta_n + \gamma_n i$ ($n = 1, 2, \ldots; \gamma_{n+1} > \gamma_n > 0$) и введем обозначение $\rho_{-n} = \beta_n - \gamma_n i$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \{ v_n(x) - v_{-n}(x) \} = \sum_{1}^{\infty} 2\Re v_n(x), \tag{27}$$

где $v_n(x) = \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Пусть $S_N(x)$ есть сумма N первых членов и $S(x) = \lim\limits_{T \to \infty} S(x, T)$; тогда

$$|S_N(x) - S(x)| \leqslant |S_N(x) - S(x, \gamma_N)| + |R(x, \gamma_N)| < \frac{2x\nu_N}{\gamma_N} + |R(x, \gamma_N)|,$$

где ν_N есть число нулей $\rho = \beta + \gamma i$ с $\gamma = \gamma_N$. Так как, по теореме 25a, $\nu_N = O(\ln \gamma_N)$, то из неравенства (15) немедленно вытекает, что ряд (27) сходится [к сумме $S(x)$] для всех $x > 1$ и притом равномерно во всяком замкнутом интервале, содержащемся в этой области и не содержащем степеней простых чисел. В интервале, содержащем степень простого числа, сходимость не может быть равномерной, так как $\psi_0(x)$, а значит, и $S(x)$, разрывна в точках $x = p^m$. Но, как можно показать с помощью неравенства (16), ряд будет „ограниченно сходящимся“ во всяком фиксированном интервале $1 < a \leqslant x \leqslant b$. Если $x \leqslant 1$, то рассуждения § 6 теряют силу; однако о характере сходимости ряда (27) в интервале $0 < x < 1$ мы можем заключить, исходя из характера сходимости для $x > 1$, замечая, что $\rho' = 1 - \rho$ пробегает вместе с ρ нетривиальные нули $\zeta(s)$, и

$$\left| \frac{x^{\rho}}{\rho} + x \frac{x^{-\rho'}}{\rho'} \right| = \left| \frac{x^{\rho}}{\rho\rho'} \right| \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \quad (0 < x < 1);$$

таким путем убеждаемся, что ряд (27) в интервале $0 < x < 1$ сходится, причем точки p^{-m} играют ту же роль, что и точки p^m для $x > 1$. Конечно, формула (12) здесь уже теряет силу, однако, применяя к интегралу

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{x^{1-s}}{s-1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds$$

методы § 6, получаем формулу:

$$\sum_{n < \frac{1}{x}} \frac{\Lambda(n)}{n} = \ln \frac{1}{x} - C + \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (0 < x < 1),$$

где C есть эйлерова постоянная. Можно показать, что для ряда (27) в окрестности точек $p^{\pm m}$ имеет место „явление Гиббса“. Для $x = 1$

ряд (27) сходится (и притом абсолютно), однако ни одна из явных формул не остается в силе, и ряд не может быть ограниченно сходящимся в окрестности $x=1$ (ни слева, ни справа) вследствие наличия в явных формулах членов $-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ и $-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Поведение каждого из рядов:

$$\sum_{1}^{\infty} v_n(x), \quad \sum_{1}^{\infty} v_{-n}(x)$$

в отдельности можно исследовать, пользуясь в рассуждениях § 6 прямоугольником

$$(2-U'i,\ 2+V'i,\ -q+V'i,\ -q-U'i),$$

где $U' \neq V'$, и прилагая соответственно расширенную теорему G. Этим путем обнаруживается, что указанные ряды равномерно сходятся в любом замкнутом интервале, лежащем на полупрямой $x>0$ и не содержащем точек 1, $p^{\pm m}$, но уже не сходятся в этих точках[1]).

Отметим тесную аналогию с известной формулой:

$$[x]_0 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n} = \sum_{-\infty}^{\infty}{}'' \frac{e^{2\pi nxi}}{2\pi ni} \quad \left(\sum{}'' = \sum_{n \neq 0}\right),$$

которую можно рассматривать как явную формулу для функции:

$$[x]_0 = \frac{1}{2}([x+0]+[x-0]) = \sum_{n \leqslant x}{}' 1 \quad (x>0),$$

и доказать подобными же (хотя, естественно, и более простыми) методами с помощью производящей функции:

$$\frac{1}{e^s-1} = \sum_{1}^{\infty} e^{-ns} \quad (\sigma>0).$$

Фундаментальный мемуар Римана был посвящен выводу явной формулы, аналогичной (12), для функции $\Pi_0(x) = \frac{1}{2}\{\Pi(x+0)+\Pi(x-0)\}$ (в наших обозначениях). Его формула (после исправления одной численной ошибки и перемены обозначений) такова:

$$\Pi_0(x) = \mathrm{li}\, x - \sum_{\rho} \qquad = \int_{x}^{\infty}\frac{du}{(u^2-1)\,u\ln u} - \ln 2 \quad (x>1),$$

---

[1]) *Landau, 5*; *Cramér, 1, 2*; *T*, 61—63.

где $\operatorname{li} x^{\rho} = \operatorname{li} e^{\rho \ln x}$ и

$$\operatorname{li} e^{w} = \int\limits_{-\infty+vi}^{u+vi} \frac{e^{z}}{z}\, dz \quad (w = u + vi, v \gtreqless 0)\,^{1)}.$$

Эта формула, равно как и формула для $\psi_0(x)$, впервые была строго доказана фон Мангольдтом [2]).

8. *Применения.* В качестве первого применения покажем, как явная формула для $\psi_1(x)$ (теорема 28) может быть использована для доказательства асимптотического закона распределения простых чисел. Имеем:

$$\frac{\psi_2(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - U(x) + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (28)$$

при $x \to \infty$. Но ряд $U(x)$ равномерно сходится в области $x \geqslant 1$, так как

$$\left|\frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}\right| = \frac{x^{\beta-1}}{|\rho(\rho+1)|} \leqslant \frac{x^{\beta-1}}{\gamma^2} \leqslant \frac{1}{\gamma^2}$$

и ряд $\sum \frac{1}{\gamma^2}$ — сходящийся. Поэтому при $x \to \infty$

$$\lim U(x) = \sum_{\rho} \lim \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} = \sum_{\rho} 0 = 0,$$

ибо $|x^{\rho-1}| = x^{\beta-1}$, и по теореме 10 $\beta < 1$ во всех членах. Следовательно, $\frac{\psi_1(x)}{x^2} \to \frac{1}{2}$, откуда и вытекает, в силу теоремы C (стр. 48), как и прежде, асимптотический закон распределения простых чисел.

Из формулы (28), в соединении с теоремами 19 и 25а, можно вывести более точные соотношения, чем указанные в теореме 23. Таким, в основных чертах, путем и шел Валле-Пуссен [3]).

---

[1]) Если определить $\operatorname{li} e^{u}$ для вещественных u как $\frac{1}{2} \lim\limits_{v \to 0} (\operatorname{li} e^{u+vi} + \operatorname{li} e^{u-vi})$, то нетрудно проверить, что это будет совпадать с определением $\operatorname{li} x$, данным на стр. 9. Наше определение, при котором $\operatorname{li} e^{w}$ является непрерывной функцией на луче $w < 0$ вещественной оси, отличается от обычного, которое делает ее непрерывной на луче $w > 0$. Наш $\operatorname{li} e^{w}$ при $w \to \infty$ асимптотически равен $\frac{e^{w}}{w}$ во всяком фиксированном угле $\delta \leqslant \arg w \leqslant 2\pi - \delta$ $(0 < \delta < \pi)$.

[2]) *von Mangoldt, 2*; *H*, I, 333—363 (см. также 516—532); *Cramér, 1.*

[3]) *De la Vallée Poussin, 2.*

Для дальнейших применений введем число Θ, определяемое как *верхняя граница вещественной части нулей* $\zeta(s)$.

Очевидно, $\Theta \leqslant 1$, так как в полуплоскости $\sigma > 1$ нулей нет. С другой стороны, из существования нетривиальных нулей $\zeta(s)$ и их симметричного расположения относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ вытекает, что $\Theta \geqslant \frac{1}{2}$. Таким образом $\frac{1}{2} \leqslant \Theta \leqslant 1$, и это все, что известно по поводу Θ. $\Theta = \frac{1}{2}$ в том и только в том случае, если справедлива гипотеза Римана. Мы докажем теперь следующую теорему, теряющую, правда, свое значение, если $\Theta = 1$, но зато покрывающую и значительно усиливающую результаты гл. III в случае, если $\Theta < 1$.

Теорема 30. *Имеем*:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + O(x^{\Theta+1}), \tag{29}$$

$$\psi(x) = x + O(x^{\Theta}\ln^2 x), \tag{30}$$

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O(x^{\Theta}\ln x). \tag{31}$$

Соотношение (29) представляет собой прямое следствие формулы (28), ибо

$$|U(x)| \leqslant \sum_{\rho} \frac{x^{\beta-1}}{\gamma^2} \leqslant \sum_{\rho} \frac{x^{\Theta-1}}{\gamma^2} = A_1 x^{\Theta-1} \qquad (x \geqslant 1)$$

вследствие сходимости ряда $\sum \frac{1}{\gamma^2}$.

Для доказательства соотношения (30) применяем теорему 29, полагая в неравенстве (16) $T = x^2$ $(x > 2)$. Это дает:

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= x - S(x, x^2) - R(x, x^2) + O(1) = \\ &= x - S(x, x^2) + O(\ln^2 x).\end{aligned}$$

Но, по теореме 25b,

$$|S(x, x^2)| \leqslant 2 \sum_{0<\gamma\leqslant x^2} \frac{x^{\Theta}}{\gamma} = O(x^{\Theta}\ln^2 x).$$

Так как $\psi(x) - \psi_0(x) = O(\ln x)$, то мы и получаем требуемый результат.

Наконец, соотношение (31) выводится с помощью интегрирования по частям. Применяя (30) в соединении с формулами (38) и (41), стр. 84, 85, получаем:

$$\pi(x)-\mathrm{li}\, x=O\left(\int_2^x u^{\Theta-1}du\right)+O\left(x^{\Theta}\ln x\right)+O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=O\left(x^{\Theta}\ln x\right),$$

ибо $\Theta\geqslant\frac{1}{2}$.

Имеется другой метод вывода соотношения (30), хотя и менее непосредственный, но зато более элементарный, поскольку он базируется не на теореме 29, а на теореме 28 [1]). Пусть h — функция от x, удовлетворяющая для достаточно больших x неравенству $1\leqslant h<\frac{1}{2}x$; тогда по теореме 28

$$\frac{\psi_1(x\pm h)-\psi_1(x)}{\pm h}=$$

$$=x\pm\frac{1}{2}h-\sum_{\rho}\frac{(x\pm h)^{\rho+1}-x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)(\pm h)}-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}+O\left(\frac{1}{xh}\right). \qquad (32)$$

Обозначив общий член ряда справа через w_ρ, имеем:

$$|w_\rho|\leqslant\frac{(x+h)^{\Theta+1}+x^{\Theta+1}}{\gamma^2 h}<\frac{4x^{\Theta+1}}{\gamma^2 h},$$

так как $(x+h)^{\Theta+1}<\left(\frac{3}{2}x\right)^{\Theta+1}\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^2 x^{\Theta+1}\ 3x^{\Theta+1}$; кроме того,

$$|w_\rho|=\left|\frac{1}{\rho h}\int_x^{x\pm h}u^{\rho}\,du\right|\leqslant\frac{1}{|\rho|}(x+h)^{\Theta}<\frac{2x^{\Theta}}{|\gamma|};$$

поэтому

$$\left|\sum_{\rho}w_\rho\right|<8x^{\Theta}\sum_{\gamma>0}\min\left(\frac{x}{\gamma^2 h},\ \frac{1}{\gamma}\right)=8x^{\Theta}\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\frac{x}{h}}\frac{1}{\gamma}+8x^{\Theta}\sum_{\gamma>\frac{x}{h}}\frac{x}{\gamma^2 h}=$$

$$=O\left(x^{\Theta}\ln^2\frac{x}{h}\right)+O\left(x^{\Theta}\cdot\frac{x}{h}\cdot\frac{h}{x}\ln\frac{x}{h}\right)=O(x^{\Theta}\ln^2 x),$$

по теореме 25b $\left(\text{так как } 2<\frac{x}{h}\leqslant x\right)$. Но $\psi(x)$ (см. стр. 83) заключается между двумя выражениями в левой части формулы (32). Следовательно,

$$\psi(x)=x+O(h)+O(x^{\Theta}\ln^2 x).$$

Беря, в частности, $h=1$, мы и получаем (30).

---

[1]) *Holmgren, 1*; *Landau, 6*, 5—10.

Менее точное соотношение $\psi(x) = x + O(x^{\Theta+\varepsilon})$, где ε — любое фиксированное положительное число, мы можем получить более прямым путем, модифицируя метод, примененный в гл. III, беря за контур интегрирования прямую $\sigma = \Theta + \frac{1}{2}\varepsilon$. Если мы оперируем с $\psi_1(x)$, то мы должны перейти к $\psi(x)$ путем составления отношения конечных разностей для $\psi_1(x)$ до оценки интеграла по прямой $\sigma = \Theta + \frac{1}{2}\varepsilon$. Если мы оперируем непосредственно с $\psi(x)$, то рассматриваем конечную область интегрирования $(-T, T)$ и делаем T функцией от x, как в первом из приведенных выше доказательств соотношения (30).

Если гипотеза Римана верна, то теорема 30 дает:

$$\psi(x) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x\right)$$

$$\pi(x) = \operatorname{li} x + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln x\right).$$

Эти результаты, полученные фон Кохом[1]) в 1901 г., содержат самую лучшую оценку остаточных членов в формулах для $\psi(x)$ и $\pi(x)$, выведенную на основании гипотезы Римана.

9. Соотношение (30) связывает порядок величины $\psi(x) - x$ (для больших x) с числом Θ, но только с одной стороны. Нетрудно получить оценку снизу, в которой также фигурирует Θ, так что мы вправе заключить, что (в известных пределах точности) порядок $\psi(x) - x$ вполне определяется числом Θ. Мы введем в качестве меры порядка $\psi(x) - x$ число Θ', определяемое как *нижняя граница чисел* α, *для которых*

$$\psi(x) - x = O(x^{\alpha}). \tag{33}$$

Тогда мы будем иметь:

Теорема 31.

$$\Theta' = \Theta.$$

В самом деле, прежде всего $\Theta' \leqslant \Theta$ в силу формулы (30). С другой стороны, по формуле (17), стр. 27, имеем:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1} = s\int_1^{\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}}\, dx, \tag{34}$$

где сначала предполагается $\sigma > 1$. Но для любого фиксированного положительного δ имеем, по определению числа Θ',

$$\left|\frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}}\right| \leqslant A(\delta)\frac{x^{\Theta'+\delta}}{x^{\sigma+1}} \leqslant A(\delta)\, x^{-1-\delta} \quad (\sigma > \Theta' + 2\delta,\ x \geqslant 1).$$

---

[1]) *von Koch, 1.*

Поэтому интеграл в первой части формулы (34) равномерно сходится для $\sigma > \Theta' + 2\delta$ и, значит, представляет функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > \Theta'$. Но тогда из (34) вытекает, что $\zeta(s)$ не может иметь нулей при $\sigma > \Theta'$ или, иными словами, что $\Theta \leqslant \Theta'$. Это и завершает доказательство.

Из двух неравенств: $\Theta' \leqslant \Theta$ и $\Theta \leqslant \Theta'$, последнее, конечно, более элементарно. Доказательство его в принципе сходно с доказательством того, что из асимптотического закона распределения простых чисел вытекает отсутствие у $\zeta(s)$ нулей на прямой $\Re s = 1$ (гл. II, § 9, стр. 50—51), однако проще в деталях.

Из теоремы 31 и определения числа Θ' вытекает, что соотношение (33) не может выполняться ни для какого $\alpha < \Theta$. Так как $\Theta \geqslant \frac{1}{2}$, то мы заключаем, что (33) определенно неверно для $\alpha < \frac{1}{2}$, причем можно утверждать даже больше этого, если гипотеза Римана неверна $\left(\text{т. е. если } \Theta > \frac{1}{2}\right)$. Таким образом мы видим, что комплексные нули функции $\zeta(s)$ накладывают определенные ограничения на степень точности, с которой $\psi(x)$ может быть заменено через x и $\pi(x)$ через $\operatorname{li} x$. Дальнейшее развитие этого замечания приводит к некоторым очень любопытным результатам, которые будут подробно рассмотрены в следующей главе.

Глава V.

НЕПРАВИЛЬНОСТИ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ.

1. До сих пор мы занимались преимущественно нахождением верхних оценок для порядка разности $\pi(x)-\operatorname{li} x$ и др., иными словами, теоремами, утверждающими известную правильность в распределении простых чисел. Целью настоящей главы является получение результатов в прямо противоположном направлении. Это даст нам возможность решить поставленный во введении вопрос о том, выполняется ли неравенство $\pi(x) < \operatorname{li} x$ для всех x, собственно и послуживший толчком к открытию тонких результатов, излагаемых в настоящей главе.

Наши теоремы наиболее удобно формулировать с помощью символа Ω, представляющего собой естественное дополнение к ставшим уже классическими символам O и o. Мы пишем:

$$f(x)=\Omega(x)$$

(при $x \to \infty$), если существует такое положительное число c, не зависящее от x, что неравенство $|f(x)|>cx$ выполняется для произвольно больших значений x; можно сказать, таким образом, что символ Ω является прямым отрицанием символа o. Если $f(x)$ — вещественная функция, то мы пишем:

$$f(x)=\Omega_{+}(x),$$

если $f(x)>cx$ для произвольно больших x, и

$$f(x)=\Omega_{-}(x),$$

если $f(x)<-cx$ для произвольно больших x; отсюда явствует что Ω эквивалентно утверждению: „по крайней мере одно из Ω_{+} и Ω_{-}“. Для обозначения утверждения „и Ω_{+} и Ω_{-}“ мы будем писать $\Omega_{\pm}$. Так,

$$x \sin x=\Omega_{\pm}(x), \quad x+x \sin x=\Omega(x),$$

причем в последнем соотношении уже нельзя заменить Ω через $\Omega_{\pm}$.

Специальная функция x под знаком Ω взята для иллюстрации; конечно, вместо нее может стоять любая положительная бесконечно возрастающая функция.

Символ Ω был введен Харди и Литтльвудом; мы заменили лишь их Ω_R и Ω_L через Ω_+ и Ω_- [1]).

Тип теорем, занимающих нас в этой главе, хорошо иллюстрируется сделанным в конце предыдущей главы (§ 9) замечанием, которое можно записать так:

$$\psi(x) - x = \Omega\left(x^{\alpha}\right)$$

для каждого $\alpha < \Theta$ и, значит, во всяком случае, для каждого $\alpha < \frac{1}{2}$.

Однако важно изучить не только величину, но и знак разности $\psi(x) - x$ и др., и нашей первой задачей является замена в приведенном соотношении символа Ω через $\Omega_{\pm}$. Для этой цели нам потребуются некоторые результаты из теории рядов и интегралов Дирихле, которые и приводятся в следующем параграфе.

2. *Ряды и интегралы Дирихле.* Предметом этой теории (в ее простейшей форме) являются ряды и интегралы вида:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}, \quad \int_{1}^{\infty} \frac{c(x)}{x^s}\, dx, \tag{1}$$

где $c(x)$ предполагается ограниченной и интегрируемой (по Риману) функцией в каждом конечном интервале $1 \leqslant x \leqslant X$ и $s = \sigma + ti$ — комплексное переменное. Имеют место следующие классические результаты:

I. *Если ряд (или интеграл) Дирихле сходится при* $s = s_1 = \sigma_1 + t_1 i$, *то он сходится для всех* $s = \sigma + ti$ *с* $\sigma > \sigma_1$ *и притом равномерно в любом фиксированном угле:*

$$|\arg(s - s_1)| \leqslant a < \frac{1}{2}\pi.$$

II. *Если ряд (или интеграл) Дирихле сходится для некоторых значений* s, *но, однако, не для всех, то существует, и притом единственное, вещественное число* σ_0, *обладающее тем свойством, что ряд (или интеграл) сходится для всех* s

[1]) *Hardy* and *Littlewood*, *2*, 138.

в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$ *и ни для какого* s *в полуплоскости* $\sigma < \sigma_0$.

Определение. *Число* σ_0 *называется абсциссой сходимости, прямая* $\sigma = \sigma_0$ — *прямою сходимости и полуплоскость* $\sigma > \sigma_0$ — *полуплоскостью сходимости ряда* (*или интеграла*) *Дирихле.* (В предельных случаях сходимости или расходимости для всех значений s мы можем писать $\sigma_0 = -\infty$ или $\sigma_0 = +\infty$.)

III. *Ряд* (*или интеграл*) *Дирихле представляет в своей полуплоскости сходимости регулярную функцию от* s, *все производные которой получаются почленным диференцированием* (*для интегралов — диференцированием под знаком интеграла*).

Теорема I легко доказывается с помощью абелева суммирования (для интегралов — интегрирования по частям), теорема II получается тогда методом дедекиндова сечения, а теорема III вытекает из I на основании теорем Вейерштрасса (см. сноску на стр. 36—37) [1]).

Имеется известная аналогия между рядами Дирихле $\sum c_n n^{-s}$ и степенными рядами $\sum c_n z^n$; и действительно, оба эти типа рядов могут рассматриваться как частные случаи обобщенного ряда Дирихле:

$$\sum_{1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s} (\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \lambda_n \to \infty), \tag{2}$$

если в степенном ряде произвести предварительно подстановку $z = e^{-s}$. Но эта аналогия прекращается в ряде существенных пунктов. Так, например, прямая сходимости ряда Дирихле (соответствующая окружности сходимости степенного ряда), вообще не стоит ни в какой явной зависимости от особенностей аналитической функции $f(s)$, определяемой (на основании теоремы III) рядом. Это утверждение можно иллюстрировать рядом $1 - 2^{-s} + 3^{-s} - \ldots$, для которого $\sigma_0 = 0$, и, однако, представляемая им функция $(1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ не имеет особенностей ни в какой конечной части плоскости s. Однако имеется один важный частный случай, когда σ_0 определяется особенностями функции $f(s)$.

Теорема H. *Если* c_n [*или* $c(x)$] *вещественны и сохраняют постоянный знак для всех достаточно больших* n (*или* x), *то вещественная точка* $s = \sigma_0$ *прямой сходимости ряда* (*или*

---

[1]) По поводу деталей отсылаем к *HR*, 3—5.

интеграла) Дирихле (1) *служит особенностью функции* $f(s)$, *представляемой этим рядом* (*или интегралом*).

В случае многозначности аналитической функции $f(s)$ рассматриваемая особенность принадлежит однозначной ветви, представляемой формулой (1).

Предположим, что теорема неверна. Тогда существует некоторая область D, содержащая как полуплоскость $\sigma > \sigma_0$, так и точку $s = \sigma_0$, и такая, что $f(s)$ регулярна в D и тождественно совпадает с (1) в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$. Возьмем $\alpha > \sigma_0$ и выберем R так, чтобы круг $|s - \alpha| < R$ содержал точку $s = \sigma_0$ (т. е. $R > \alpha - \sigma_0$), но сам в свою очередь содержался в D; тогда вследствие регулярности $f(s)$ в D будем иметь:

$$f(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(s-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{(\alpha - s)^n}{n!} (-1)^n f^{(n)}(\alpha) \quad (|s - \alpha| < R).$$

Пусть для определенности мы рассматриваем интеграл Дирихле, и $c(x) \geqslant 0$ для $x > x_1$; тогда, так как $\alpha > \sigma_0$, имеем:

$$(-1)^n f^{(n)}(\alpha) = \int_1^{\infty} \frac{c(x)(\ln x)^n}{x^\alpha}\, dx \geqslant \int_1^{X} \frac{c(x)(\ln x)^n}{x^\alpha}\, dx$$

для $X > x_1$. Подставляя это в ряд Тейлора для $f(s)$, получаем, что для вещественных s в интервале $\alpha - R < s \leqslant \alpha$

$$f(s) \geqslant \sum_{0}^{\infty} \frac{(\alpha - s)^n}{n!} \int_1^{X} \frac{c(x)(\ln x)^n}{x^\alpha}\, dx =$$

$$= \int_1^{X} \sum_{0}^{\infty} \frac{(\alpha - s)^n}{n!} \frac{c(x)(\ln x)^n}{x^\alpha}\, dx.$$

Перестановка порядка суммирования и интегрирования законна ибо последний ряд равномерно сходится на сегменте $1 \leqslant x \leqslant X$, поскольку общий член его не превосходит по абсолютной величине $K\frac{(R \ln X)^n}{n!}$, где K — верхняя граница для $\left|\frac{c(x)}{x^\alpha}\right|$ на этом сегменте. Выполняя суммирование под знаком интеграла, находим:

$$f(s) \geqslant \int_1^X \frac{c(x)}{x^\alpha} e^{(\alpha-s)\ln x}\, dx = \int_1^X \frac{c(x)}{x^s}\, dx.$$

Так как интеграл в правой части возрастает с возрастанием X $(X > x_1)$, то полученное нами неравенство показывает, что интеграл Дирихле сходится во всех точках интервала $\alpha - R < s \leqslant \alpha$. Но это невозможно, так как указанный интервал заходит влево от линии $\sigma = \sigma_0$.

Теорема H принадлежит Ландау. Соответствующая теорема для степенных рядов была доказана Прингсгеймом, однако его доказательство неприменимо к рядам Дирихле [1]).

Заметим, между прочим, что с помощью этой теоремы можно доказать, что $\zeta(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma = 1$ [2]). Мы исходим из тождества:

$$\frac{\zeta^2(s)\,\zeta(s+\gamma i)\,\zeta(s-\gamma i)}{\zeta(2s)} = \sum_1^\infty \frac{|C_n|^2}{n^s} \quad (\sigma > 1), \tag{3}$$

где $\gamma \gtreqless 0$ и $C_n = \sum_{d \mid n} d^{\gamma i}$, причем суммирование производится по всем (положительным) делителям d числа n. Это тождество (представляющее частный случай одного тождества Рамануйана) можно доказать, применяя к ряду в правой части формулу Эйлера (теорема 5). Пусть σ_0 — абсцисса сходимости этого ряда; тогда $\sigma_0 \leqslant 1$, и если $\sigma_0 < 1$, то с помощью аналитического продолжения убеждаемся, что формула (3) справедлива для всех $\sigma > \sigma_0$, поскольку тогда левая часть $f(s)$ необходимо регулярна в этой полуплоскости. Так как $|C_n|^2 \geqslant 0$, то из теоремы H [вследствие однозначности функции $f(s)$] вытекает, что σ_0 есть самая правая особенность $f(s)$ на вещественной оси. Если бы $\zeta(s)$ имело нуль в $1 + \gamma i$ (и, следовательно, также в $1 - \gamma i$), то мы имели бы $\sigma_0 = -1$ (ибо числитель был бы тогда регулярен всюду, а самым правым нулем знаменателя является $s = -1$). Однако нетрудно показать самыми различными способами, что это невозможно; например, из формулы (3) тогда следовало бы, что $f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant |C_1|^2 = 1$, тогда как на самом деле $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

3. Мы применим теперь результаты § 2 к доказательству следующей теоремы:

---

1) *Landau, 1.* См. также *Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2-е изд. (Berlin, Springer, 1929), 14, 72.

2) *Ingham, 1.*

Теорема 32. *Для всякого фиксированного положительного* δ

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}(x^{\Theta-\delta}), \tag{4}$$

$$\Pi(x) - \operatorname{li} x = \Omega_{\pm}(x^{\Theta-\delta}). \tag{5}$$

Здесь Θ, как и выше, обозначает верхнюю границу вещественных частей нулей $\zeta(s)$.

Соотношения (4) и (5) доказываются независимо друг от друга, ибо (5) из (4) нельзя вывести путем частного суммирования. Мы дадим здесь доказательство соотношения (5); доказательство для (4) аналогично, однако несколько проще.

Пусть $0 < \alpha < \Theta$. Для вещественных $s > 1$ имеем, согласно формулы (18), стр. 28,

$$s\int_1^{\infty} \frac{\Pi(x)}{x^{s+1}}\,dx = \ln \zeta(s).$$

Далее,

$$s\int_e^{\infty} \frac{\operatorname{li} x}{x^{s+1}}\,dx = \left[-\frac{\operatorname{li} x}{x^s}\right]_e^{\infty} + \int_e^{\infty} \frac{dx}{x^s \ln x} =$$

$$= \frac{\operatorname{li} e}{e^s} + \int_{s-1}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy =$$

$$= \frac{\operatorname{li} e}{e^s} + \int_{s-1}^{1} \frac{dy}{y} + \int_{s-1}^{1} \frac{e^{-y}-1}{y}\,dy + \int_1^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy =$$

$$= -\ln(s-1) + g(s),$$

где $g(s)$ — целая функция. Наконец,

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^{s+1}}\,dx = \frac{1}{s-\alpha}.$$

Комбинируя эти результаты, получаем:

$$\int_1^{\infty} \frac{c(x)}{x^s}\,dx = f(s) \quad (s > 1), \tag{6}$$

где

$$c(x) = \frac{\Pi(x) - \operatorname{li} x - x^{\alpha}}{x} \quad (x \geqslant e), \quad \frac{\Pi(x) - x^{\alpha}}{x} \quad (1 \leqslant x < e),$$

$$f(s) = \frac{1}{s} \ln \{(s-1)\zeta(s)\} - \frac{1}{s-\alpha} - \frac{g(s)}{s}. \tag{7}$$

Пусть σ_0 будет абсцисса сходимости интеграла Дирихле (6). Тогда этот интеграл представляет однозначную ветвь функции $f(s)$, регулярную для $\sigma > \sigma_0$. Но из формулы (7) явствует, что такая ветвь не может существовать, если полуплоскость $\sigma > \sigma_0$ содержит хотя бы один нуль $\zeta(s)$, поэтому необходимо $\sigma_0 \geqslant \Theta$. С другой стороны, $f(s)$ не имеет особенностей на луче $s > \alpha$ вещественной оси, поскольку $(s-1)\zeta(s)$ регулярно и отлично от нуля на этом луче. Отсюда, в частности, вытекает, что точка $s = \sigma_0$ не является особенностью функции $f(s)$, ибо $\sigma_0 \geqslant \Theta > \alpha$. Но тогда из теоремы H вытекает, что мы не можем иметь $c(x) \leqslant 0$ для всех достаточно больших x. Следовательно, для произвольно больших x будет выполняться неравенство $c(x) > 0$, т. е. $\Pi(x) - \operatorname{li} x > x^{\alpha}$. И аналогично можно доказать, что $\Pi(x) - \operatorname{li} x < -x^{\alpha}$ для произвольно больших x. Так как α — любое число из интервала $0 < \alpha < \Theta$, то соотношение (5) доказано.

Отметим, что доказательство существенно опирается на тот факт, что $\zeta(s)$ не имеет нулей на положительной вещественной оси, — свойство, обычно не играющее сколько-нибудь значительной роли.

Так как

$$\psi(x) - x = \psi([x]) - [x] + O(1),$$

то соотношение (4) эквивалентно следующему:

$$\psi(n) - n = \Omega_{\pm}(n^{\Theta - \delta}),$$

где $n \to \infty$ по целым значениям. Это показывает, в частности, что число $W(n)$ перемен знака в последовательности

$$\psi(1) - 1, \quad \psi(2) - 2, \ldots, \quad \psi(n) - n$$

безгранично возрастает при $n \to \infty$. Полиа получил более точный результат:

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{W(n)}{\ln n} \geqslant \frac{c}{\pi},$$

где c определено следующим образом: если $\zeta(s)$ имеет нули $\Theta + \gamma i$ на прямой $\sigma = \Theta$, то c есть наименьшее положительное γ, соответствующее этим нулям; в противном случае $c = +\infty$ [1]). Доказательство основывается на некотором уточнении теоремы H.

[1]) *Pólya, 1.*

4. Так как $\Theta \geqslant \frac{1}{2}$, то из соотношения (4) вытекает, что $\psi(x) - x = \Omega_{\pm}\left(x^{\frac{1}{2}-\delta}\right)$. Путем некоторого уточнения доказательства можно получить следующую теорему:

Теорема 33.

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}\left(x^{\frac{1}{2}}\right).$$

Если $\Theta > \frac{1}{2}$, то это (и даже больше) вытекает непосредственно из (4), ибо мы можем взять δ так, чтобы $\Theta - \delta > \frac{1}{2}$. Мы поэтому предположим, что $\Theta = \frac{1}{2}$. Имеем для $\sigma > 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{c(x)}{x^s}\,dx = f(s), \tag{8}$$

где

$$c(x) = \frac{\psi(x) - x + cx^{\frac{1}{2}}}{x}, \quad f(s) = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} + \frac{c}{s-\frac{1}{2}},$$

причем c — положительное постоянное число. Пусть, если это возможно, $c(x) \geqslant 0$ для всех $x \geqslant X\,(>1)$; тогда, так как $f(s)$ имеет на вещественной оси самую правую особенность в точке $s = \frac{1}{2}$, из теоремы H вытекает, что абсцисса сходимости интеграла (8) σ_0 будет равна $\frac{1}{2}$, так что равенство (8) имеет место для всех $\sigma > \frac{1}{2}$ [1]). Отсюда для $\sigma > \frac{1}{2}$

$$|f(\sigma + ti)| \leqslant \int_1^X \frac{|c(x)|}{x^\sigma}\,dx + \int_X^{\infty} \frac{c(x)}{x^\sigma}\,dx = \int_1^X \frac{|c(x)| - c(x)}{x^\sigma}\,dx + f(\sigma) \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_1^X \frac{|c(x)|}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx + f(\sigma) = K + f(\sigma),$$

---

[1]) Мы можем при желании вообще обойтись здесь без теоремы H (которая в дальнейшем ходе доказательства уже более не применяется), ибо сходимость интеграла (8) при $\sigma > \frac{1}{2}\,(=\Theta)$ обеспечивается [независимо от каких бы то ни было предположений относительно знака при $c(x)$] теоремой 30.

где K не зависит от σ и t. Положим $t=\gamma_1$, где $\frac{1}{2}+\gamma_1 i$ есть нуль с наименьшим положительным γ; умножим обе части полученного неравенства на $\sigma-\frac{1}{2}$ и возьмем $\sigma\to\frac{1}{2}+0$; это дает:

$$\frac{m_1}{\left|\frac{1}{2}+\gamma_1 i\right|}\leqslant c,$$

где m_1 есть порядок кратности нуля $\frac{1}{2}+\gamma_1 i$. Но c находится в нашем распоряжении. Беря его в интервале $0<c<\frac{m_1}{\left|\frac{1}{2}+\gamma_1 i\right|}$, видим, что наше предположение, что $c(x)\geqslant 0$ при $x\geqslant X$, приводит к противоречию. Следовательно, $c(x)<0$ для произвольно больших x. Аналогичный результат получаем и для функции

$$c(x)=\frac{-\psi(x)+x+cx^{\frac{1}{2}}}{x}.$$

Так как c может быть взято произвольно близко к $\frac{m_1}{\left|\frac{1}{2}+\gamma_1 i\right|}$, то заключаем, что при $x\to\infty$

$$\overline{\lim}\,\frac{\psi(x)-x}{x^{\frac{1}{2}}}\geqslant\delta_1,\quad \underline{\lim}\,\frac{\psi(x)-x}{x^{\frac{1}{2}}}\leqslant-\delta_1,$$

где

$$\delta_1=\frac{m_1}{\left|\frac{1}{2}+\gamma_1 i\right|}.$$

Теоремы 32 и 33 принадлежат Э. Шмидту. До него менее точные результаты в том же направлении были получены Фрагменом [1]). Очевидно, эти методы бóльших результатов дать не могут. Так, те же рассуждения в применении к формуле (16), стр. 45, показывают, что

$$\psi_1(x)-\frac{1}{2}x^2=\Omega_{\pm}\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$

однако, с другой стороны, мы знаем из теоремы 30, что если $\Theta=\frac{1}{2}$, то $\psi_1(x)-\frac{1}{2}x^2=O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$.

---

[1]) *Phragmén, 1, 2*; *Schmidt, 1.* По поводу другого доказательства теоремы 33 см. *Littlewood, 4.*

5. Введем обозначения

$$P(x) = \pi(x) - \operatorname{li} x, \quad Q(x) = \Pi(x) - \operatorname{li} x, \quad R(x) = \psi(x) - x.$$

Из теоремы 32 явствует, что $Q(x)$ и $R(x)$ при возрастании x до бесконечности меняют знак бесчисленное множество раз. Однако соответствующая проблема для $P(x)$ более сложна, так как $\pi(x)$ менее непосредственно связана с $\zeta(s)$, чем $\Pi(x)$ и $\psi(x)$. Полагая $M = \left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]$, имеем:

$$Q(x) - P(x) = \sum_{m=2}^{M} \frac{\pi\left(x^{\frac{1}{m}}\right)}{m} = \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(Mx^{\frac{1}{3}}\right) \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{n}\, x},$$

так что

$$P(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\left(-1 + Q(x)\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} + o(1)\right). \tag{9}$$

Член -1 в правой части показывает, что можно ожидать преобладания отрицательных значений для $P(x)$; однако будет ли $P(x)$ *всегда* отрицательно, на что, повидимому, указывают имеющиеся таблицы, нельзя решить, основываясь на полученных до сих пор результатах. Если $\Theta > \frac{1}{2}$, то, по теореме 32, при $x \to \infty$

$$\overline{\underline{\lim}}\, \frac{R(x)}{x^{\frac{1}{2}}} = \pm\infty, \quad \overline{\underline{\lim}}\, Q(x)\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = \pm\infty, \tag{10}$$

и второй из этих результатов, в комбинации с формулой (9), показывает, что $P(x)$ меняет знак бесчисленное множество раз; однако это заключение теряет силу, если $\Theta = \frac{1}{2}$ [1].

---

[1]) С помощью метода § 4 можно было бы показать, что

$$\overline{\lim}\, Q(x)\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} \geqslant \delta_1 = \frac{m_1}{\left|\frac{1}{2} + \gamma_1 i\right|},$$

и этого было бы достаточно для доказательства того, что $P(x)$ меняет знак бесчисленное множество раз, если бы δ_1 было больше, чем единица. Однако на самом деле δ_1 равно приблизительно 0,07 (см. *T*, 45—47).

Для разрешения вопроса об изменениях знака $P(x)$ мы докажем ряд теорем, из которых в совокупности будет следовать, что соотношения (10) имеют место независимо от справедливости или ложности гипотезы Римана. Эти теоремы гораздо более трудны, чем предшествующие, так что нам представляется необходимым, прежде чем перейти к их подробным доказательствам, указать в общих чертах руководящие идеи, лежащие в их основе. Исходя из явной формулы для $\psi_0(x)$ (теорема 29) и предполагая, что гипотеза Римана истинна (что мы можем сделать), мы заменяем знаменатели $\rho = \frac{1}{2} + \gamma i$ в $\sum \frac{x^\rho}{\rho}$ через γi (что дает достаточное приближение) и тем самым сам этот ряд через

$$2x^{\frac{1}{2}} \sum_{\gamma > 0} \frac{\sin(\gamma \ln x)}{\gamma} = 2x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\gamma_n \ln x)}{\gamma_n}.$$

Теперь последний ряд (без множителя $2x^{\frac{1}{2}}$) формально равен

$$-\mathfrak{J}\, G(i \ln x),$$

где

$$G(s) = G(\sigma + ti) = \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_n s}}{\gamma_n}, \tag{11}$$

и мы хотим показать, что при $t \to \infty$

$$\overline{\lim}\, \mathfrak{J}\, G(ti) = +\infty, \quad \underline{\lim}\, \mathfrak{J}\, G(ti) = -\infty. \tag{12}$$

Мы начинаем с исследования $G(s)$ для $\sigma > 0$. Ряд, определяющий функцию $G(s)$, абсолютно и равномерно сходится во всякой фиксированной полуплоскости $\sigma > \delta > 0$, так как

$$\left| \frac{e^{-\gamma_n s}}{\gamma_n} \right| = \frac{1}{\gamma_n e^{\gamma_n \sigma}} < \frac{1}{\gamma_n \cdot \gamma_n \sigma} < \frac{1}{\gamma_n^2 \delta},$$

и ряд $\sum \frac{1}{\gamma_n^2 \delta}$ сходится. Значит, $G(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma > 0$. Мы показываем сперва, с помощью теоремы Дирихле о диофантовых приближениях, что существуют точки $s = \sigma + ti$ с малым положительным σ и большим положительным t, в которых $\mathfrak{J}G(s)$ велико и положительно, и точки, в которых $\mathfrak{J}G(s)$ велико по абсолютной величине и отрицательно. Но эти точки, будучи „близки" к прямой $\sigma=0$, все же недостаточно близки, чтобы можно было тривиально заключить о поведении $\mathfrak{J}G(s)$ *на* этой прямой, и для перехода от поведения $\mathfrak{J}G(s)$ в указанных точках к поведению $\mathfrak{J}G(s)$ на прямой $\sigma=0$ мы должны использовать одну теорему из общей теории функций, принадлежащую Фрагмену и Линделёфу. При этом оказывается необходимым опереться на одно из неравенств для „остаточного члена" $R(x, T)$ в теореме 29; $G(s)$ непосредственно на самой прямой $\sigma=0$ не определяется.

6. Мы начнем с доказательства общих теорем Дирихле и Фрагмена-Линделёфа, упомянутых в предыдущем параграфе.

Теорема J. *Пусть* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_N$ N *вещественных чисел и* q — *целое положительное число. Тогда во всяком интервале вида*

$$\tau \leqslant t \leqslant \tau q^N \quad (\tau > 0)$$

существует такое число t, *что каждое из произведений*

$$t\Theta_1, \ t\Theta_2, \ldots, \ t\Theta_N$$

отличается от ближайшего целого числа менее чем на $\frac{1}{q}$.

Воспользуемся (исключительно в целях удобства) языком N-мерной геометрии. Рассмотрим „единичный N-мерный куб", т. е. совокупность „точек" $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, определенных неравенствами:

$$0 \leqslant x_1 < 1, \ldots, \ 0 \leqslant x_N < 1,$$

и разделим его на q^N меньших, равных между собой кубов „плоскостями", параллельными координатным „плоскостям", так что каждый из этих меньших кубов определяется неравенствами вида:

$$\frac{n_1-1}{q} \leqslant x_1 < \frac{n_1}{q}, \ldots, \frac{n_N-1}{q} \leqslant x_N < \frac{n_N}{q},$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_N$ — целые положительные числа, не превосходящие q.

Рассмотрим точки

$$P_r = \{(r\tau\Theta_1), (r\tau\Theta_2), \ldots, (r\tau\Theta_N)\} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

где τ — положительное число и $(u) = u - [u]$. Каждая точка P_r лежит в единичном кубе и, значит, в одном из меньших кубов. Так как всего имеется лишь q^N меньших кубов, то по крайней мере один из них будет содержать более чем одну из $q^N + 1$ точек $P_0, P_1, \ldots, P_{q^N}$. Пусть P_r и P_s $(0 \leqslant s < r \leqslant q^N)$ лежат в одном и том же меньшем кубе; тогда

$$|(r\tau\Theta_n) - (s\tau\Theta_n)| < \frac{1}{q} \quad (n = 1, 2, \ldots, N),$$

т. е.

$$|h\tau\Theta_n - k_n| < \frac{1}{q} \quad (n = 1, 2, \ldots, N),$$

где $h = r - s$ и $k_n = [r\tau\Theta_n] - [s\tau\Theta_n]$. Так как $1 \leqslant h \leqslant q^N$ и k_n — целое, то число $t = h\tau$ удовлетворяет нашим требованиям.

Теорема K. *Пусть D будет область плоскости s, определенная неравенствами:*

$$t > t_0, \quad g_1(t) < \sigma < g_2(t),$$

причем $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_1 \leqslant g_1(t) < g_2(t) \leqslant \alpha_2 \quad (t \geqslant t_0),$$

где α_1 и α_2 — постоянные. Пусть $f(s)$ регулярна в D и непрерывна в области D', получающейся присоединением к D ее границы; пусть, далее, $f(s)$ удовлетворяет во всей области D' неравенству вида:

$$|f(s)| < Ke^{e^{ct}}, \tag{13}$$

где

$$0 < c < \frac{\pi}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

и K и c — постоянные; тогда, если неравенство

$$|f(s)| \leqslant C \tag{14}$$

(где C — постоянная) выполняется во всех точках на границе D, то оно должно выполняться во всей области D.

Мы можем принять, что $\alpha_1 = -\frac{1}{2}\pi$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi$ (в противном случае мы могли бы предварительно произвести линейную подстановку $s' = \pi \dfrac{s - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_2 - \alpha_1}\Bigg)$; при этом предположении $0 < c < 1$.

Пусть, в противоречие с утверждением теоремы, неравенство (14) выполняется во всех точках границы, но не имеет места по крайней мере в одной внутренней точке $s^* = \sigma^* + t^* i$, так что $|f(s^*)| = C + 2\delta$, где $\delta > 0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = f(s)\, e^{-\varepsilon \cos bs},$$

где $c < b < 1$, а ε положительно и столь мало, что

$$|\varphi(s^*)| > C + \delta. \tag{15}$$

Это, очевидно, возможно (причем ε зависит, конечно, от s^*). Так как $0 < b < 1$ и $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\pi$, то в D' мы имеем:

$$|\varphi(s)| = |f(s)|\, e^{-\varepsilon \cos b\sigma \operatorname{ch} bt} \leqslant |f(s)|\, e^{-\frac{1}{2}\varepsilon \cos \frac{1}{2} b\pi \cdot e^{bt}} \leqslant |f(s)|.$$

Следовательно, $|\varphi(s)| \leqslant C$ на границе области D и

$$|\varphi(s)| < K \exp\left(e^{ct} - \frac{1}{2}\varepsilon \cos \frac{1}{2} b\pi \cdot e^{bt}\right)$$

внутри. Так как $\frac{1}{2}\varepsilon \cos \frac{1}{2} b\pi > 0$ и $b > c$, то выражение в правой части стремится к нулю при $t \to \infty$. По тому можно найти такое $T > t^*$, чтобы это выражение было меньше, чем $C + \delta$, для $t = T$. Отсюда следует, что если D_T есть (ограниченная) область, определенная неравенствами $t_0 < t < T$, $g_1(t) < \sigma < g_2(t)$, то $|\varphi(s)| < C + \delta$ на всей границе D_T. Тогда, по принципу максимума (φ регулярна в D_T и непрерывна в D'_T), $|\varphi(s)| < C + \delta$ во всех внутренних точках области D_T. Но это противоречит неравенству (15), так как, при нашем выборе T, s^* лежит внутри D_T.

Теорема K принадлежит к очень широкому классу теорем типа „f либо ограничена, либо очень высокого порядка". Она утверждает, что если модуль $|f(s)|$ удовлетворяет неравенству (14) на границе D, то он либо удовлетворяет тому же неравенству внутри D, либо будет настолько высокого порядка, что не подчиняется никакому неравенству типа (13). Что последнее действительно возможно, показывает пример:

$$f(s)=e^{\cos s}, \quad t_0=0, \quad g_1(t)=\alpha_1=-\frac{1}{2}\pi, \quad g_2(t)=\alpha_2=+\frac{1}{2}\pi;$$

в самом деле, в этом случае $|f(s)|=e^{\cos\sigma \operatorname{ch} t}$, так что модуль $|f(s)|\leqslant e$ на границе D и, однако, не удовлетворяет никакому неравенству вида (13) внутри этой области. Так как такое неравенство имеет место при $c=\frac{\pi}{\alpha_2-\alpha_1}=1$, то этот пример показывает также, что теорема не может быть существенно улучшена путем ослабления условия (13).

При допущении необходимости некоторых общих ограничений, таких, как (13), накладываемых на порядок роста функции, теорема K может быть рассматриваема как расширение принципа максимума на известный класс неограниченных областей.

7. Мы приведем теперь, в виде ряда лемм, необходимые нам свойства функции

$$G(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-\gamma_n s}}{\gamma_n}=\sum_{\gamma>0}\frac{e^{-\gamma s}}{\gamma} \quad (\sigma>0),$$

введенной в § 5.

Лемма 1. *Каждому положительному* ε *соответствует такое положительное* $\sigma_1=\sigma_1(\varepsilon)$, *что в интервале*

$$T_0\leqslant T<T_0 e^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}}, \tag{16}$$

где $0<\sigma<\sigma_1$, $T_0>0$, *найдется число* $T=T(\varepsilon, \sigma, T_0)$, *обладающее тем свойством, что*

$$|G(\sigma+ti+Ti)-G(\sigma+ti)|<\varepsilon$$

для всех вещественных t.

Имеем при $\sigma>0$ и вещественных t, T:

$$|G(\sigma+ti+Ti)-G(\sigma+ti)|=$$

$$=\left|\sum_{\gamma>0}\frac{e^{-\gamma\sigma-\gamma ti-\frac{1}{2}\gamma Ti}\left(e^{-\frac{1}{2}\gamma Ti}-e^{\frac{1}{2}\gamma Ti}\right)}{\gamma}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{\gamma>0}\frac{e^{-\gamma\sigma}\left|\sin\frac{1}{2}\gamma T\right|}{\gamma}\leqslant 2\sum_{\gamma>U}\frac{e^{-\gamma\sigma}}{\gamma}+$$

$$+2\sum_{n=1}^{N(U)}\frac{\left|\sin\frac{1}{2}\gamma_n T\right|}{\gamma_n}=2\sum\nolimits_1+2\sum\nolimits_2,$$

где $U > 3$ и $N(U)$ обозначает, как обычно, число нулей, для которых $0 < \gamma \leqslant U$. Так как для $x > 0$ имеем $e^x > x$, то, по теореме 25b,

$$\sum\nolimits_1 < \sum_{\gamma > U} \frac{1}{\sigma\gamma^2} < \frac{A_1}{\sigma} \frac{\ln U}{U}.$$

Теперь, беря целое положительное q и применяя теорему J к числам $\theta_n = \frac{\gamma_n}{2\pi}$ $[n = 1, 2, \ldots, N(U)]$, видим, что в интервале

$$T_0 \leqslant T \leqslant T_0 q^{N(U)} \tag{17}$$

существует такое T, что

$$\frac{T\gamma_n}{2\pi} = k_n + \varphi_n, \quad |\varphi_n| < \frac{1}{q}, \quad [n = 1, 2, \ldots, N(U)],$$

где все k_n — целые. Для этого T имеем, по теореме 25b,

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{n=1}^{N(U)} \frac{|\sin \pi \cdot \varphi_n|}{\gamma_n} \leqslant \sum_{1}^{N(U)} \frac{|\pi \varphi_n|}{\gamma_n} \leqslant \frac{\pi}{q} \sum_{0 < \gamma \leqslant U} \frac{1}{\gamma} < \frac{A_2 \ln^2 U}{q},$$

что, в соединении с оценкой для $\sum_1$, дает:

$$|G(\sigma + ti + Ti) - G(\sigma + ti)| < A_3 \left(\frac{\ln U}{\sigma U} + \frac{\ln^2 U}{q} \right)$$

для $\sigma > 0$ и всех вещественных t. Возьмем здесь

$$U = \frac{B}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma}, \quad q = \left[B \ln^2 \frac{1}{\sigma} \right] + 1, \quad B = \frac{6A_3}{\varepsilon},$$

где $0 < \sigma < \sigma_0$ и $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ выбрано столь малым, чтобы для указанных значений σ выполнялось неравенство $3 < U < \frac{1}{\sigma^2}$; тогда

$$|G(\sigma + ti + Ti) - G(\sigma + ti)| < A_3 \left(\frac{2 \ln \frac{1}{\sigma}}{B \ln \frac{1}{\sigma}} + \frac{4 \ln^2 \frac{1}{\sigma}}{B \ln^2 \frac{1}{\sigma}} \right) = \varepsilon.$$

Кроме того, так как, по теореме 25, $N(U) = O(U \ln U)$, то имеем:

$$N(U) \ln q \leqslant N\left(\frac{B}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma} \right) \cdot \ln \left(B \ln^2 \frac{1}{\sigma} + 1 \right) < \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{1+\varepsilon}$$

для $0 < \sigma < \sigma_1 = \sigma_1(B, \varepsilon) = \sigma_1(\varepsilon) \leqslant \sigma_0$. Следовательно, для $0 < \sigma < \sigma_1$ неравенство (17) предполагает (16), и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$s = \sigma + ti = re^{\theta i} \left(r > 0, \quad -\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi \right);$$

тогда при $r \to 0$ и фиксированном θ

$$\mathfrak{I}\, G(s) = -\frac{\theta}{2\pi} \ln \frac{1}{\sigma} + O(1).$$

Имеем:

$$G(s) = s \int_{\gamma_1}^{\infty} C(x)\, e^{-sx} dx \qquad (\sigma > 0), \tag{18}$$

где

$$C(x) = \sum_{0 < \gamma \leqslant x} \frac{1}{\gamma}.$$

Это вытекает из теоремы A (стр. 28), если положить там

$$\lambda_n = \gamma_n,\ c_n = \frac{1}{\gamma_n},\ \Phi(x) = e^{-sx},$$

так как

$$C(X)\, e^{-sX} = O\{N(X)\, e^{-\sigma X}\} = o(1)$$

при $X \to \infty$. Но для $x \geqslant \gamma_1$

$$C(x) = \int_{\gamma_1}^{x} \frac{N(u)}{u^2} du + \frac{N(x)}{x}$$

(снова по теореме A). Отсюда, по теореме 25, при $x \to \infty$

$$2\pi\, C(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + B \ln x + O(1),$$

где B — вещественная постоянная. Подставляя это в (18), получаем:

$$2\pi\, G(s) = \frac{1}{2} I_2 + B I_1 + R, \tag{19}$$

где

$$I_k = s\int_{\gamma_1}^{\infty} (\ln x)^k e^{-sx}\, dx \qquad (k=1,\ 2),$$

$$|R| < |s| \int_{\gamma_1}^{\infty} Ae^{-\sigma x}\, dx < A\frac{|s|}{\sigma} = \frac{A}{\cos\theta}.$$

Пусть I'_k будет интеграл, получающийся при замене в I_k нижнего предела γ_1 через нуль; тогда

$$|I_k - I'_k| = \left| s\int_0^{\gamma_1} (\ln x)^k e^{-sx} dx \right| \leqslant |s| \int_0^{\gamma_1} |\ln x|^k\, dx = A_k r.$$

Но, производя подстановку $sx = y$ и применяя теорему Коши, имеем:

$$I'_k = \int_0^{\infty} \left(\ln \frac{y}{s}\right)^k e^{-y}\, dy = \int_0^{\infty} \left(\ln\frac{1}{s} + \ln y\right)^k e^{-y} dy.$$

Развертывая $\left(\ln\frac{1}{s} + \ln y\right)^k$ и интегрируя почленно, видим, что I'_k есть полином степени k относительно $\ln\frac{1}{s}$ со старшим членом $\left(\ln\frac{1}{s}\right)^k$. Подставляя найденные результаты в (19), получаем, что при $r \to 0$

$$2\pi G(s) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^2 + B'\ln\frac{1}{s} + O(1),$$

где B' — вещественная постоянная. Так как

$$\ln\frac{1}{s} = \ln\frac{1}{r} - \theta i = \ln\frac{1}{\sigma} + \ln\cos\theta - \theta i,$$

то отсюда следует, что при $r \to 0$

$$2\pi \Im G(s) = -\theta\ln\frac{1}{r} - B'\theta + O(1) = -\theta\ln\frac{1}{\sigma} + O(1).$$

Лемма 3. *Если* $0 < c < \frac{1}{4}$, *то для каждого достаточно малого положительного* σ, $0 < \sigma < \sigma_0 = \sigma_0(c)$, *существуют такие два числа* $t' = t'(c, \sigma)$ *и* $t'' = t''(c, \sigma)$, *что*

$$t' > e^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \Im G(\sigma + t'i) > +c \ln\ln t',$$

$$t'' > e^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \Im G(\sigma + t''i) > -c \ln\ln t''.$$

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ и $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon)$ выбрано в соответствии с леммой 1. Беря $T_0 = e^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}}$, получаем из этой леммы, что для каждого σ в интервале $0 < \sigma < \sigma_1$ существует такое $T_\sigma = T_\sigma(\varepsilon)$, что

$$e^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}} \leqslant T_\sigma < e^{2\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+\varepsilon}}, \tag{20}$$

$$|G(\sigma + ti + iT_\sigma) - G(\sigma + ti)| < \varepsilon \tag{21}$$

для всех вещественных t.

Теперь, по лемме 2, с $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi(1-\varepsilon)$, имеем [так как $s = \sigma(1 + i \operatorname{tg} \theta)$]:

$$\mp \Im G(\sigma \pm \lambda\sigma i) \sim \frac{1}{4}(1-\varepsilon) \ln \frac{1}{\sigma} \qquad (\sigma \to +0),$$

где

$$\lambda = \operatorname{tg}\left\{\frac{1}{2}\pi(1-\varepsilon)\right\}.$$

Следовательно, для $0 < \sigma < \sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon)$

$$\mp \Im G(\sigma \pm \lambda\sigma i) > \frac{1}{4}(1-2\varepsilon) \ln \frac{1}{\sigma}. \tag{22}$$

Беря в (21) $t = \pm\lambda\sigma$, в соединении с (22) получаем для $0 < \sigma < \sigma_3 = \sigma_3(\varepsilon)$:

$$\mp \Im G(\sigma \pm \lambda\sigma i + T_\sigma i) > \frac{1}{4}(1-2\varepsilon) \ln \frac{1}{\sigma} - \varepsilon > \frac{1}{4}(1-3\varepsilon) \ln \frac{1}{\sigma}.$$

Но из неравенства (20) явствует, что для $0 < \sigma < \sigma_4 = \sigma_4(\varepsilon)$

$$e^{\frac{1}{\sigma}} < \pm\lambda\sigma + T_\sigma < e^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{1+2\varepsilon}}.$$

Беря

$$t' = T_\sigma - \lambda\sigma \quad \text{и} \quad t'' = T_\sigma + \lambda\sigma,$$

находим, что для

$$0 < \sigma < \sigma_5 = \min\left(\sigma_3, \sigma_4, \frac{1}{2}\right)$$

будет

$$t' > e^{\frac{1}{\sigma}}, \quad t'' > e^{\frac{1}{\sigma}}$$

и

$$\mathfrak{J}\, G(\sigma + t'i) > \frac{1}{4}(1 - 3\varepsilon)\ln\frac{1}{\sigma} > \frac{1 - 3\varepsilon}{4(1 + 2\varepsilon)} \ln\ln t' > 0,$$

и аналогичные неравенства имеют место для $-\mathfrak{J}\, G(\sigma + t''i)$. Это и доказывает теорему, так как $c < \frac{1}{4}$, и, следовательно, мы можем выбрать $\varepsilon = \varepsilon(c)$ так, чтобы коэфициент при $\ln\ln t'$ был больше, чем c.

Лемма 4. *Для* $0 < \sigma \leqslant 1$ *имеем*:

$$|G(s)| < A\left(\ln\frac{1}{\sigma} + 1\right)^2.$$

Пусть $U = \frac{e}{\sigma} \geqslant e$; тогда, применяя теорему 25b, имеем:

$$|G(s)| \leqslant \sum_{\gamma > 0} \frac{e^{-\gamma\sigma}}{\gamma} < \sum_{0 < \gamma \leqslant U} \frac{1}{\gamma} + \sum_{\gamma > U} \frac{1}{\sigma\gamma^2} < A_1 \ln^2 U + A_2 \frac{\ln U}{\sigma U},$$

откуда и вытекает утверждение леммы, так как

$$\sigma U = e, \quad \ln U = \ln\frac{1}{\sigma} + 1.$$

8. Мы теперь можем формулировать и доказать наши основные теоремы.

Теорема 34. *При* $x \to \infty$

$$\psi(x) - x = \Omega_{\pm}\left(x^{\frac{1}{2}} \ln\ln\ln x\right).$$

Мы докажем, что при $x \to \infty$

$$\overline{\lim} \frac{\psi(x) - x}{x^{\frac{1}{2}} \ln\ln\ln x} \geqslant \frac{1}{2}, \qquad \underline{\lim} \frac{\psi(x) - x}{x^{\frac{1}{2}} \ln\ln\ln x} \leqslant -\frac{1}{2}. \tag{23}$$

Если гипотеза Римана неверна $\left(\Theta > \frac{1}{2}\right)$, то эти результаты (и даже более сильные) вытекают из теоремы 32. Мы поэтому во всем дальнейшем будем предполагать, что гипотеза Римана верна $\left(\Theta = \frac{1}{2}\right)$.

По теореме 29, неравенство (16), стр. 101, имеем:

$$\psi_0(x) = x - \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\frac{1}{2}+\gamma i}}{\frac{1}{2}+\gamma i} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - R(x, T),$$

где

$$|R(x, T)| < A_1\left(x^2 \frac{\ln^2 T}{T} + \ln x\right) \qquad (x \geqslant 2, \ T > 3).$$

Так как $\frac{\ln^2 u}{u}$ убывает при $u \geqslant e^2$, то отсюда, в частности вытекает, что

$$|R(x, T)| < A_1\left(x^2 \frac{\ln^2 x^2}{x^2} + \ln x\right) < A_2 \ln^2 x \quad (x \geqslant e, \ T \geqslant x^2).$$

Но

$$\left|\sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\frac{1}{2}+\gamma i}}{\frac{1}{2}+\gamma i} - \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\frac{1}{2}+\gamma i}}{\gamma i}\right| = \left|\sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}+\gamma i}}{\left(\frac{1}{2}+\gamma i\right)\gamma i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\gamma^2} < A_3 x^{\frac{1}{2}},$$

так как ряд $\sum \frac{1}{\gamma^2}$ сходится, поэтому

$$\psi(x) - x = -\sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{x^{\frac{1}{2}+\gamma i}}{\gamma i} + R_1(x, T) =$$

$$= -2x^{\frac{1}{2}} \sum_{0 < \gamma \leqslant T} \frac{\sin(\gamma \ln x)}{\gamma} + R_1(x, T),$$

где

$$|R_1(x, T)| < A_4 x^{\frac{1}{2}} \qquad (x \geqslant e, \ T \geqslant x^2).$$

Полагая $x = e^t$ и

$$H(t) = \frac{\psi(x) - x}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\psi(e^t) - e^t}{2e^{\frac{1}{2}t}}, \qquad S_T(t) = -\sum_{0 < \gamma \leqslant T} \frac{\sin \gamma t}{\gamma},$$

находим:

$$|H(t) - S_T(t)| < \frac{1}{2} A_4 \qquad (t \geqslant 1, \ T \geqslant e^{2t}). \tag{24}$$

Это, в частности, дает:

$$|S_{T_1}(t) - S_{T_2}(t)| < A_4 \qquad (t \geqslant 1, \ T_1 \geqslant T_2 \geqslant e^{2t}). \tag{25}$$

Пусть теперь $G(s) = G(\sigma + ti)$ будет функция, рассмотренная в § 7; тогда для $\sigma > 0$

$$\Im G(\sigma + ti) - S_T(t) = \sum_{0 < \gamma \leqslant T} \frac{1 - e^{-\gamma\sigma}}{\gamma} \sin \gamma t -$$

$$- \sum_{\gamma > T} e^{-\gamma\sigma} \frac{\sin \gamma t}{\gamma} = \sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_2.$$

Так как для $u > 0$ имеем $0 < 1 - e^{-u} < u$, то

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \leqslant \sum_{0 < \gamma \leqslant T} \frac{\gamma\sigma}{\gamma} = N(T)\sigma < A_5 T^{\frac{3}{2}} \sigma.$$

Далее, полагая в теореме A (стр. 28)

$$\lambda_n = \gamma_n, \ c_n = \frac{\sin \gamma_n t}{\gamma_n} \ (\gamma_n > T), \ c_n = 0 \ (\gamma_n \leqslant T), \ \Phi(u) = e^{-u\sigma}$$

имеем в силу неравенства (25) при $t \geqslant 1$, $T \geqslant e^{2t}$:

$$\left|\sum\nolimits_2\right| = \left| \int_T^\infty \sigma e^{-u\sigma} \{S_u(t) - S_T(t)\}\, du \right| < \int_T^\infty \sigma e^{-u\sigma} A_4\, du < A_4.$$

Следовательно,

$$|\Im G(\sigma + ti) - S_T(t)| < A_5 T^{\frac{3}{2}} \sigma + A_4 \quad (t \geqslant 1, \ T \geqslant e^{2t}).$$

Комбинируя это с неравенством (24), полагая $T=e^{2t}$ и ограничивая соответствующим образом область изменения σ, получаем:

$$|H(t)-\Im G(\sigma+ti)|<A_6 \quad (t \geqslant 1,\ 0<\sigma \leqslant e^{-3t}). \qquad (26)$$

Предположим теперь, что первое из неравенств (23) неверно; тогда

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{H(t)}{\ln\ln t}<\frac{1}{4},$$

и, значит, можно найти такие a и t_1, $0<a<\frac{1}{4}$, $t_1>3$, что

$$H(t)<a\ln\ln t \quad (t \geqslant t_1). \qquad (27)$$

Выберем b и c так, чтобы выполнялись неравенства $a<b<$ $<c<\frac{1}{4}$; числа t_2, t_3, ... в последующем тексте зависят от a, b, c и выбраны так, что $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant \ldots$ Из неравенств (26) и (27) имеем:

$$\Im G(\sigma+ti)<a\ln\ln t+A_6<b\ln\ln t \quad (t \geqslant t_2,\ 0<\sigma \leqslant e^{-3t}). \qquad (28)$$

Применим теперь теорему K к функции

$$f(s)=\frac{e^{-i\frac{G(s)}{b}}}{\ln s}$$

(где для ln берется его главное значение) и области D', определяемой неравенствами $t \geqslant t_2$, $e^{-3t} \leqslant \sigma \leqslant 1$. На кривой $\sigma=e^{-3t}$ $(t \geqslant t_2)$, ограничивающей область слева, имеем вследствие неравенства (28):

$$|f(s)|=\frac{e^{\Im\frac{G(s)}{b}}}{|\ln s|}<\frac{e^{\ln\ln t}}{\ln t}=1.$$

На остальной части границы $f(s)$ ограничена, так как

$$G(s)| \leqslant G(\sigma) \leqslant G(e^{-3t_2}),$$

поэтому во всех точках границы

$$|f(s)| \leqslant C, \qquad (29)$$

где

$$C=C(t_2,\ b)=C(a,\ b).$$

Далее, во всей области D', по лемме 4,

$$|f(s)| < C_1 e^{\frac{|G(s)|}{b}} < C_1 e^{C_2 t^2},$$

так как $\ln \frac{1}{\sigma} \leqslant 3t$. Таким образом условия теоремы K выполнены и неравенство (29) должно сохранять силу во всей области D'. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} e^{\frac{\Im G(s)}{b}} = |f(s)\ln s| \leqslant C|\ln s| < & \qquad (t \geqslant t_2,\ e^{-3t} \leqslant \sigma \leqslant 1) \\ < 2C \ln t & \qquad (t \geqslant t_3,\ e^{-3t} \leqslant \sigma \leqslant 1), \end{aligned}$$

и, значит,

$$\Im G(s) < b \ln (2C \ln t) < c \ln \ln t$$
$$(t \geqslant t_4,\ e^{-3t} \leqslant \sigma \leqslant 1).$$

В соединении с (28) это дает:

$$\Im G(\sigma + ti) < c \ln \ln t \ (t \geqslant t_4,\ 0 < \sigma \leqslant t). \tag{30}$$

Но это невозможно, так как $0 < c < \frac{1}{4}$. Действительно, для достаточно малого σ точка $\sigma + t'i$ леммы 3 попадает в область $t \geqslant t_4$, $0 < \sigma < 1$, и в ней неравенство (30) нарушается. Полученное противоречие устанавливает первое из соотношений (23); второе выводится аналогичным путем из другой половины леммы 3.

9. Нам теперь предстоит вывести из теоремы 34 соответствующие результаты для $\Pi(x)$ и $\pi(x)$. Этот переход не совсем тривиален, поскольку мы имеем дело с односторонними неравенствами.

Теорема 35. *При* $x \to \infty$

$$\Pi(x) - \operatorname{li} x = \Omega_{\pm}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x} \ln \ln \ln x\right), \tag{31}$$

$$\pi(x) - \operatorname{li} x = \Omega_{\pm}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x} \ln \ln \ln x\right). \tag{32}$$

Предположим сначала, что $\Theta=\frac{1}{2}$. Полагая (как в § 5)

$\pi(x)-\operatorname{li} x=P(x), \quad \Pi(x)-\operatorname{li} x=Q(x), \quad \psi(x)-x=R(x)$,

имеем в силу соотношения (38), стр. 84:

$$Q(x)=\frac{R(x)}{\ln x}=\int\limits_2^x \frac{R(u)}{u \ln^2 u}\,du+O(1).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$Q(x)-\frac{R(x)}{\ln x}=\frac{R_1(x)}{x \ln^2 x}-\int\limits_2^x R_1(u)\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u \ln^2 u}\right)du+O(1), \quad (33)$$

где

$$R_1(x)=\int\limits_0^x R(u)\,du=\psi_1(x)-\frac{1}{2}x^2=O\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$

по теореме 30 $\left(\text{с } \Theta=\frac{1}{2}\right)$. Отсюда следует, что для $x>2$

$$\left|Q(x)-\frac{R(x)}{\ln x}\right|<\frac{A_1 x^{\frac{1}{2}}}{\ln^2 x}+\int\limits_2^x A_1 u^{\frac{3}{2}}\left|\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u \ln^2 u}\right)\right|du+A_2<$$

$$<\frac{A_3 x^{\frac{1}{2}}}{\ln^2 x}+A_4\int\limits_2^x \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}\ln^2 u}=\frac{A_3 x^{\frac{1}{2}}}{\ln^2 x}+A_4\int\limits_2^x \frac{u^{\frac{1}{4}}}{\ln^2 u}\,\frac{du}{u^{\frac{3}{4}}}.$$

Но $\dfrac{u^{\frac{1}{4}}}{\ln^2 u}$ в конце концов начинает возрастать и стремится к бесконечности, поэтому, для достаточно больших x, $x>x_0$

$$\left|Q(x)-\frac{R(x)}{\ln x}\right|<\frac{A_3 x^{\frac{1}{2}}}{\ln^2 x}+A_4\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\ln^2 x}\int\limits_2^x \frac{du}{u^{\frac{3}{4}}}<A_0\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln^2 x}.$$

Это показывает, что

$$\frac{Q(x)}{x^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln\ln\ln x}{\ln x}}-\frac{R(x)}{x^{\frac{1}{2}}\ln\ln\ln x}=O\left(\frac{1}{\ln x\ln\ln\ln x}\right)=o(1), \quad (34)$$

так что оба отношения в левой части имеют общие пределы неопределенности при $x\to\infty$. Итак, если $\Theta=\frac{1}{2}$, то соотношение (31) вытекает из теоремы 34. Если же $\Theta>\frac{1}{2}$, то оно вытекает из теоремы 32, (5). В том и другом случаях (32) вытекает из (31), ибо

$$\Pi(x)-\pi(x)=\frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+O\left(x^{\frac{1}{3}}\ln x\right)=O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\right).$$

Теоремы 34 и 35 принадлежат Литтльвуду [1]). Идея применения к вопросам этого типа теории диофантовых приближений принадлежит Гаральду Бору, давшему ей многочисленные применения первостепенной важности в общей теории рядов Дирихле [2]). Свойство функции $G(\sigma+ti)$, утверждаемое в лемме 1, можно назвать „аппроксимативной периодичностью" (относительно t); как раз аналогичные в известном отношении свойства лежат в основе теории почти периодических функций, начало которой положил Бор.

10. Теоремы 34 и 35, очевидно, решают проблему, послужившую поводом к их установлению, именно, проблему о знаке разности $P(x)=\pi(x)-\operatorname{li}x$. Соотношение (32) показывает, что $P(x)$, так же как и $Q(x)$ и $R(x)$, при безграничном возрастании x изменяет знак бесчисленное множество раз. Тем не менее представляется интересным несколько ближе познакомиться с вопросом и с численной точки зрения. В силу соотношений (23) и (34)

$$\overline{\lim}\frac{Q(x)\ln x}{x^{\frac{1}{2}}\ln\ln\ln x}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Поэтому для $0<\varepsilon<1$ заключаем из формулы (9), что неравенство

$$P(x)>\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\left\{-1+\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\ln\ln\ln x-\varepsilon\right\}$$

---

[1]) *Littlewood, 1*; *Hardy* and *Littlewood, 2.*

[2]) См. *T*, гл. I и IV.

выполняется для произвольно больших значений x. Но хотя правая часть этого неравенства определенно положительна для достаточно больших x, тем не менее она, во всяком случае, остается отрицательной в интервале[1]) $10 \leqslant x \leqslant 10^{700}$. Поэтому, если полученные нами результаты представляют некоторое приближение к истинному положению вещей, то неудивительно, почему в пределы существующих таблиц не попало ни одного x, для которого $P(x) > 0$. Как далеко мы должны итти до встречи с таким значением x, неизвестно. Теоретические соображения не дают никаких подходов к численному решению неравенства $P(x) > 0$.

Раньше особое значение придавалось функции, предположенной Риманом в качестве приближения для $\pi(x)$. Если мы „обратим" формулу $\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \ldots$ по теореме Мöбиуса [2]), то получим:

$$\pi(x) = \Pi(x) - \frac{1}{2}\Pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}\Pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \\ - \frac{1}{5}\Pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}\Pi\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \ldots,$$

где коэфициенты суть члены ряда (25) на стр. 53; риманова функция получается отсюда заменой всюду Π на li. Эта функция с изумительной точностью представляет $\pi(x)$ для всех значений x в пределах существующих таблиц [3]), и, однако, мы теперь знаем, что ее превосходство над $\mathrm{li}\, x$ иллюзорно. Действительно, члены $-\frac{1}{2}\mathrm{li}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\mathrm{li}\, x^{\frac{1}{3}} - \ldots$ составляющие в совокупности лишь $O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\right)$, не имеют никакого значения в формулах типа (32), так что для отдельных значений x (сколь угодно больших) одно приближение будет столь же далеко отклоняться от истинного значения, как и другое.

Эти замечания относятся лишь к индивидуальным значениям x. Но неравенство $\pi(x) < \mathrm{li}\, x$ и формула Римана приобретают известный смысл, если их рассматривать с точки зрения верности в с р е д н е м, во всяком случае, если гипотеза Римана справедлива. Так (предпола-

---

[1]) См. *Hardy*, Orders of Infinity (Cambridge Tracts in Math. and Physics, № 12). Приложение III, табл. I.

[2]) *H*, II, 579—580.

[3]) *Lehmer*, *1*, XIII—XVI; *J. Glaisher*, *2*, 84—88.

гая во всем дальнейшем справедливость гипотезы Римана), имеем, по теореме 28, для всех достаточно больших x

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x R(u)\,du\right| < x^{\frac{1}{2}} \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho(\rho+1)|} + A < \frac{1}{10} x^{\frac{1}{2}} \qquad (35)$$

$\left(\text{коэфициент } \frac{1}{10}\right.$ получается без труда из формул (25) и (27), стр. $\left.76\right)$; аналогичное неравенство можно вывести для $Q(x)$. Соединяя его с соотношением (9), можно показать, что

$$\int_2^x P(u)\,du < 0 \qquad (x > x_0),$$

так что $P(x)$ „отрицательно в среднем". Тем же путем можно убедиться в том, что $\operatorname{li} x - \frac{1}{2}\operatorname{li} x^{\frac{1}{2}}$ „в среднем" лучше аппроксимирует $\pi(x)$, чем $\operatorname{li} x$; что же касается последующих членов в формуле Римана, то они не оказывают никакого влияния даже при повторном образовании средних.

Неравенство (35) показывает, что колебания $R(x)$, вызываемые наличием в теореме 34 множителя $\ln\ln\ln x$, сглаживаются в процессе образования средней. Мы можем прибавить, что причиной этому явлению служит редкое распределение ненормально больших значений $|R(x)|$, а не только взаимное погашение положительных и отрицательных колебаний. Действительно, Крамер [1]) показал, что (в случае справедливости гипотезы Римана)

$$\int_0^x \frac{R^2(u)}{u}\,du = O(x),$$

откуда, по неравенству Шварца,

$$\frac{1}{x}\int_0^x |R(u)|\,du = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

Истинные порядки величин разностей $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ неизвестны, даже в предположении справедливости гипотезы Римана. Проблема заполнения пробела между результатами теоремы 30, с одной стороны, и теорем 34 и 35 — с другой, является одной из наиболее важных нерешенных проблем всей теории.

---

[1]) *Cramér, 3.* См. также *Cramér, 4, 5*; *BC*, 791—792; *V*, II, 151—156.

11. Мы заключим настоящую книгу некоторыми замечаниями о распределении нечетных простых чисел между арифметическими прогрессиями $4n+1$ и $4n+3$ [1]). Через $\pi^{(r)}(x)$ $(r=1, 3)$ мы будем обозначать число простых чисел вида $4n+r$, не превосходящих x.

Аналитическое исследование проблемы основывается на функции $L(s)$, определяемой (сначала для $\sigma>0$) рядом:

$$L(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n_s},$$

где $\chi(n)=0,\ 1,\ 0,\ -1$ соответственно для $n\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3 \pmod{4}$. Так как функция $\frac{\chi(n)}{n^s}$ „вполне мультипликативна" (стр. 25), то имеем:

$$L(s)=\prod_{p}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\sigma>1).$$

Функция $L(s)$ имеет свойства, очень сходные со свойствами $\zeta(s)$, с тем, однако, существенным отличием, что $L(s)$ регулярна во всех конечных точках, включая и точку $s=1$. Функциями, аналогичными $\pi(x)$ и $\Pi(x)$, служат:

$$\pi(x,\chi)=\sum_{p\leqslant x}\chi(p)=\pi^{(1)}(x)-\pi^{(3)}(x),\quad \Pi(x,\chi)=\sum_{p^m\leqslant x}\frac{\chi(p^m)}{m}. \tag{36}$$

С помощью функции $L(s)$ можно доказать, во-первых, „элементарными" методами (стр. 53), что существует бесчисленное множество простых чисел обоих видов $4n+1$ и $4n+3$, и, во-вторых „трансцендентными" методами, что при $x\to\infty$

$$\frac{\pi^{(1)}(x)}{\pi^{(3)}(x)}\to 1. \tag{37}$$

Первая теорема основывается на том факте, что $L(1)\neq 0$ [2]), а вторая — на том, что $L(s)$ не имеет нулей на прямой $\sigma=1$. Используя более тонкие свойства $L(s)$, Литтльвуд доказал, что

$$\pi^{(1)}(x)-\pi^{(3)}(x)=O\left(xe^{-a\sqrt{\ln x\ln\ln x}}\right);$$

---

[1]) Изложение общей теории распределения простых чисел в арифметических прогрессиях с разностью k, по отношению к которой наши рассмотрения представляют частный случай, см. в *H*, I, 391—535; II, 699—719; *V*, I, 79—96; II, 3—47.

[2]) Соотношение $L(1)\neq 0$, конечно, тривиально в рассматриваемом специальном случае ($k=4$). Однако установление соответствующих соотношений в общем случае, будучи еще элементарным, представляет главную трудность проблемы. Существование бесчисленного множества простых чисел в каждой из арифметических прогрессий $4n+1$ и

если для $L(s)$ выполняется аналог гипотезы Римана, то можно получить и более точные результаты.

Так как для каждого нечетного $p\chi(p^2) = +1$, то из (36) вытекает, что

$$\Pi(x, \chi) - \pi(x, \chi) = \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\ln x) \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x},$$

так что

$$\pi(x, \chi) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln x}\left[-1 + \Pi(x, \chi)\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} + o(1)\right].$$

Так как можно ожидать, что значения $\Pi(x, \chi)$ [как функции, „естественно" связанной с $\ln L(s)$] совершенно одинаково распределены по обе стороны от нуля, то последняя формула указывает, что у $\pi(x, \chi) = \pi^{(1)}(x) - \pi^{(3)}(x)$ будут преобладать отрицательные значения. На это же наводят (как было указано во введении) и чисто эмпирические соображения, более того, подсказывающие, что, для всех достаточно больших x, $\pi^{(1)}(x) < \pi^{(3)}(x)$. И, однако, методами §§ 7—9 можно доказать, что

$$\Pi(x, \chi)\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} = \Omega_{\pm}(\ln\ln\ln x),$$

откуда явствует, что в действительности $\pi^{(1)}(x) - \pi^{(3)}(x)$ меняет знак бесчисленное множество раз при безграничном возрастании x. Правда, если справедлив аналог гипотезы Римана, то можно показать, что простые числа вида $4n+3$ „в среднем" (в различных смыслах) более часты, чем простые числа вида $4n+1$ [1]).

$4n+3$ может быть доказано с помощью модификации метода Евклида, причем случай $4n+1$ более труден. Тот же метод применим и к некоторым другим частным значениям k, однако его до сих пор не удалось применить к общему случаю.

[1]) См. *Hardy* and *Littlewood*, *2*, 141—151; *Landau*, *6*, *7*.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

О МЕТОДЕ ЛАНДАУ-ИКЕАРА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ.

Д. А. Райков.

1. В разработке проблем, связанных с асимптотическим законом распределения простых чисел, большое внимание привлекал к себе вопрос об упрощении доказательства этого закона, т. е. о приведении к возможному минимуму числа свойств римановой функции $\zeta(s)$, на которые это доказательство опирается, а также об использовании в процессе доказательства возможно более элементарных средств анализа. В книге Ингама упомянуты, в качестве последних достижений в этом направлении, работы Винера и Икеара, которым удалось показать, что асимптотический закон распределения простых чисел не связан с поведением $\dfrac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)}$ при $t \to \infty$ и зависит, кроме тривиальных свойств функции $\zeta(s)$, лишь от отсутствия у нее нулей на прямой $\Re s = 1$. Однако, как справедливо указывает Ингам, методы, примененные ими при доказательстве, отнюдь не могли быть названы элементарными.

В 1932 г., уже после выхода в свет книги Ингама, появилась работа Ландау (*Landau, 11, 12*), в которой автору удалось, не изменяя основной идеи доказательств Винера и Икеара, освободиться от ссылки на общую тауберову теорию Винера и обойтись лишь при помощи самых элементарных средств анализа.

Вследствие интереса, который представляет эта работа Ландау, мы считали необходимым воспроизвести ее, в несколько измененном виде, в настоящей статье, помещаемой в качестве приложения к переводу книги Ингама.

2. Прежде чем излагать доказательство Ландау, наметим в общих чертах ход идей, нашедших в нем свое завершение[1]).

---

[1]) При желании читатель может этот параграф в первом чтении опустить.

Обозначим через $\pi(x)$ число простых чисел, не превосходящих x. Асимптотический закон распределения простых чисел состоит в том, что $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ при $x \to \infty$. Как показано в книге Ингама (гл. I, § 4), этот закон эквивалентен утверждению, что при $x \to \infty$ $\psi(x) \sim x$, где $\psi(x) = \sum\limits_{p^m \leqslant x} \ln p = \sum \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p$ (p пробегает все простые числа; сумма обрывается, как только p становится больше x). Исходным пунктом доказательства этого соотношения является формула:

$$-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx \tag{1}$$

[см. Ингам, гл. I, формула (17)]. Эта формула не дает явного аналитического выражения для интересующей нас функции $\psi(x)$, и о поведении этой последней мы должны поэтому судить по поведению выраженной через нее функции $-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

В гл. I, § 8 Ингам показывает, что, при $s \to 1+0$,

$$-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}.$$

Так как

$$\frac{1}{s-1} = \int\limits_1^\infty \frac{x\,dx}{x^{s+1}},$$

то получаем:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)\,dx}{x^{s+1}} \sim \int\limits_1^\infty \frac{x\,dx}{x^{s+1}} \quad (s \to 1+0),$$

откуда немедленно вытекает, что $\frac{\psi(x)}{x}$ не может стремиться к пределу, отличному от единицы. Но как раз вся трудность состоит в том, чтобы доказать, что $\frac{\psi(x)}{x}$ вообще стремится к какому бы то ни было пределу, а этого нельзя вывести из соотношения

$-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \sim \frac{1}{s-1}$. Следовательно, нужно использовать какие-то более глубокие свойства функции $-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$.

Мы стоим перед одной из проблем „тауберова типа“: *определить асимптотическое поведение функции $f(x)\,(=\psi(x))$, исходя из известного асимптотического поведения ее линейного преобразования*

$$F(s) = \int K(s, x) f(x)\,dx \left(= \int\limits_1^\infty x^{-s-1}\psi(x)\,dx\right)$$

и некоторых дополнительных условий.

Наиболее прямой подход к доказательству теорем тауберова типа состоит в *обращении* интеграла $F(s) = \int K(s, x) f(x)\,dx$, т. е. представлении $f(x)$, обратно, через $F(s)$. В зависимости от принятого способа обращения и определяется характер дополнительных условий, налагаемых на $F(s)$. Икеара и Ландау исходят из обращения $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx$ как *интеграла Фурье.* Именно этим, как мы ниже увидим, и объясняется использование отсутствия у $\zeta(s)$ нулей на прямой $\Re s = 1$ в качестве дополнительного условия, определяющего асимптотическое поведение $\psi(x)$.

Для представления $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx$ в виде интеграла Фурье сделаем в формуле (1) подстановку $x = e^u$ и положим $s = 1 + \varepsilon + ti$. Мы получим:

$$-\frac{1}{1+\varepsilon+ti}\frac{\zeta'(1+\varepsilon+ti)}{\zeta(1+\varepsilon+ti)} = \int\limits_0^\infty H(u)\,e^{-\varepsilon u}e^{-tui}\,du, \qquad (2)$$

где $H(u) = \frac{\psi(e^u)}{e^u}$. Прежде чем обращать этот интеграл, заметим, что для оценки асимптотического поведения функции $H(u)$ нам придется предварительно переходить к пределу по $\varepsilon \to 0$, ибо иначе быстрое убывание множителя $e^{-\varepsilon u}$ будет все скрадывать. Но тогда левая часть формулы (2) будет безгранично возрастать для $t=0$. Чтобы избавиться от этого неудобства, воспользуемся тем, что выражение $-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}$ уже регулярно в точке $s=1$ [1]), и заменим интеграл (2) разностью:

$$h_\varepsilon(t)=-\frac{1}{1+\varepsilon+ti}\frac{\zeta'(1+\varepsilon+ti)}{\zeta(1+\varepsilon+ti)}-\frac{1}{\varepsilon+ti}=$$

$$=\int_0^\infty [H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}e^{-tui}du. \tag{3}$$

Обращение этого интеграла по формуле Фурье дает:

$$[H(y)-1]\,e^{-\varepsilon y}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(t)e^{yti}dt, \tag{4}$$

откуда, переходя к пределу по $\varepsilon\to 0$, получаем:

$$H(y)-1=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(t)\,e^{yti}dt. \tag{5}$$

Руководящая идея доказательства асимптотического закона может быть теперь намечена в нескольких словах. Допустим, что можно перейти к пределу под знаком интеграла (5) и к интегралу от предельной функции можно применить теорему о стремлении коэфициентов Фурье $\int\varphi(t)\,e^{yti}\,dt$ к нулю при $y\to\infty$; тогда имеем при $y\to\infty$:

$$H(y)-1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(t)\,e^{yti}\,dt\to 0,$$

откуда

$$H(y)=\frac{\psi(e^y)}{e^y}\to 1$$

или

$$\frac{\psi(x)}{x}\to 1,$$

---

[1] $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ имеет в $s=1$ полюс первого порядка с вычетом 1.

а это и составляет требуемое утверждение. Таким образом асимптотический закон распределения простых чисел оказывается, в конечном счете, следствием давно известного и совершенно элементарного факта — стремления коэфициентов Фурье к нулю.

В какой мере выполняются наши допущения? Предельная функция

$$h(t)=\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(t)=-\frac{1}{1+ti}\frac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)}-\frac{1}{ti}$$

существует и регулярна для всех t: для $t\neq 0$ вследствие регулярности и *необращения в нуль* функции $\zeta(1+ti)$, для $t=0$ потому, что мы заблаговременно сняли полюс функции $-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ в точке $s=1$, вычтя $\frac{1}{s-1}$. Но что касается интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{yti}\,dt,$$

то мы вообще не знаем, существует ли он в обычном смысле и тем более стремится ли к нулю при $y\to\infty$, а раз так, то мы не можем провести указанную выше идею в ее непосредственной форме и вынуждены искать какого-либо обходного пути.

Таким обходным путем является у Ингама введение вместо $\psi(x)$ ее интеграла $\int_0^x \psi(x)\,dx=\psi_1(x)$ и, значит, вместо $-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ функции $-\frac{1}{s(s+1)}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, благодаря чему интеграл от предельной функции становится абсолютно сходящимся (см. Ингам, мелкий шрифт в конце § 6, гл. II). Но как раз для доказательства абсолютной сходимости этого интеграла Ингаму и приходится опираться на оценку асимптотического поведения $\left|\frac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)}\right|$ при $|t|\to\infty$, ибо интеграл берется в *бесконечных* пределах.

Икеара удалось обойти указанное выше затруднение совершенно иным путем, давшим ему возможность вообще не опираться на оценку асимптотического поведения $\left|\frac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)}\right|$.

Как мы только что подчеркнули, к этой оценке приходится прибегать вследствие того, что интеграл берется в бесконечных пределах, а этого нельзя обойти, если мы хотим получить для подинтегральной функции *точное* выражение через значение интеграла. Но это совсем и не нужно — нас интересует лишь *асимптотическое* поведение функции $H(y)$. Нельзя ли его определить, не обращая интеграла (3) *до конца*, т. е. не переходя в $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} h_\varepsilon(t)\,e^{yti}\,dt$ *предварительно* к пределу при $\Lambda\to\infty$?

Первая идея Икеара и состоит в том, чтобы, *фиксируя* Λ, *сначала* перейти к пределу по $\varepsilon\to 0$ и затем попытаться определить асимптотическое поведение $H(y)$, подходящим образом увеличивая Λ вместе с y.

Но здесь мы встречаемся с новым затруднением. Вместо формулы (4) мы имеем теперь:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} h_\varepsilon(t)\,e^{yti}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(\int\limits_{0}^{\infty}[H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}e^{-tui}\,du\right)e^{yti}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}\left(\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}e^{(y-u)\,ti}\,dt\right)du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}\,\frac{2\sin\Lambda(y-u)}{y-u}\,du,$$

в последнем же интеграле уже нельзя, без всякого обоснования, переходить к пределу по $\varepsilon\to 0$, ибо функция $\frac{\sin\Lambda(y-u)}{y-u}$ не является абсолютно интегрируемой в пределах от 0 до ∞. Икеара обходит это затруднение приемом, ставшим теперь уже классическим. Именно, его вторая идея состоит в том, чтобы вместо интеграла $\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} h_\varepsilon(t)\,e^{yti}\,dt$ рассматривать *среднее арифметическое* от него

$$\frac{1}{\Lambda}\int\limits_{0}^{\Lambda}\left(\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}h_\varepsilon(t)\,e^{yti}\,dt\right)d\lambda=\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{\Lambda}\right)h_\varepsilon(t)\,e^{yti}\,dt.$$

Мы получаем тогда:

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{\Lambda}\right)h_\varepsilon(t)\,e^{yti}\,dt=$$

$$=\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{\Lambda}\right)\left(\int_{0}^{\infty}[H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}e^{-tui}\,du\right)e^{yti}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}[H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}\left(\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{\Lambda}\right)e^{(y-u)ti}\,dt\right)du=$$

$$=\int_{0}^{\infty}[H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}\cdot\frac{2\sin^2\frac{\Lambda}{2}(y-u)}{\frac{\Lambda}{2}(y-u)^2}\,du,$$

и переход к пределу по $\varepsilon\to 0$ под знаком интеграла может быть выполнен, как мы ниже увидим, в обеих частях.

Производя этот предельный переход, получаем:

$$\int_{0}^{\infty}[H(u)-1]\frac{2\sin^2\frac{\Lambda}{2}(y-u)^2}{\frac{\Lambda}{2}(y-u)^2}\,du=$$

$$=\int_{-\Lambda}^{\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{\Lambda}\right)h(t)e^{yti}\,dt\to 0$$

при $y\to\infty$. Вклад Ландау заключается в том, что он заметил, что для перехода от этого соотношения к соотношению $H(y)\to 1$ достаточно совершенно элементарных средств анализа, если использовать еще *монотонность* функции $\psi(x)$.

После этих вводных замечаний, имевших целью осветить как характер самой проблемы, так и характер трудностей, возникших при ее разрешении, мы перейдем к изложению доказательства Ландау.

3. Нам нужно доказать, что, при $x\to\infty$, $\psi(x)\sim x$ (см. Ингам, гл. I, § 4). Перечислим прежде всего свойства функций $\psi(x)$ и $\zeta(s)$, на которые мы будем опираться:

1) $\psi(x)$ не убывает при возрастании x.

2) $\psi(x) = \sum\limits_{p^m \leq x} \ln p < x \ln x.$

3) При $\varepsilon \to 0$

$$h_\varepsilon(t) = -\frac{1}{1+\varepsilon+ti}\frac{\zeta'(1+\varepsilon+ti)}{\zeta(1+\varepsilon+ti)} - \frac{1}{\varepsilon+ti}$$

стремится к

$$h(t) = -\frac{1}{1+ti}\frac{\zeta'(1+ti)}{\zeta(1+ti)} - \frac{1}{ti}$$

равномерно на каждом конечном интервале $-A \leqslant t \leqslant A$. Это является следствием регулярности функции $-\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$ в области $\Re s \geqslant 1$, что в свою очередь вытекает из следующих свойств функции $\zeta(s)$: a) $\zeta(s)$ регулярна в области $\Re s \geqslant 1$, $s \neq 1$; b) $\zeta(s)$ имеет в точке $s = 1$ полюс первого порядка; c) $\zeta(s) \neq 0$ на прямой $\Re s = 1$. (По поводу доказательства этих свойств функции $\zeta(s)$ см. Ингам, теоремы 8 и 10.)

Для $H(u) = \frac{\psi(e^u)}{e^u}$ первые два свойства дают:

1′) Если $u_2 \geqslant u_1$, то $H(u_2) \geqslant e^{u_1 - u_2} H(u_1)$.
2′) $H(u) < u$.

Приступим теперь к доказательству. Из формулы

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\,dx = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

[см. Ингам, гл. I, формула (17)] получаем:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}}\,dx = -\frac{1}{s}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

или, после подстановки $x = e^u$ и $s = 1 + \varepsilon + ti$,

$$\int\limits_0^\infty [H(u) - 1]\, e^{-\varepsilon u} e^{-tui} du =$$

$$= -\frac{1}{1+\varepsilon+ti}\frac{\zeta'(1+\varepsilon+ti)}{\zeta(1+\varepsilon+ti)} - \frac{1}{\varepsilon+ti} = h_\varepsilon(t).$$

Умножая обе части на $\frac{1}{2}\left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)e^{yti}$ и интегрируя по t в пределах от -2Λ до $+2\Lambda$, находим:

$$\frac{1}{2}\int_{-2\Lambda}^{2\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)h_\varepsilon(t)\,e^{yti}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2\Lambda}^{2\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)\left(\int_0^\infty [H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}e^{-tui}\,du\right)e^{yti}dt=$$

$$=\int_0^\infty [H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}\left(\frac{1}{2}\int_{-2\Lambda}^{2\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)e^{(y-u)ti}\,dt\right)du=$$

$$=\int_0^\infty [H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}\,\frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du$$

или

$$\frac{1}{2}\int_{-2\Lambda}^{2\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)h_\varepsilon(t)\,e^{yti}dt=$$

$$=\int_0^\infty H(u)\,e^{-\varepsilon u}\,\frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du-\int_0^\infty e^{-\varepsilon u}\,\frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du. \quad (1)$$

Перемена порядка интегрирования по t и по u допустима, так как в силу свойства 2′) интеграл

$$\int_0^\infty [H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}e^{-tui}\,du$$

абсолютно сходится при всяком $\varepsilon>0$. (В самом деле,

$$\int_0^\infty \left|[H(u)-1]\,e^{-\varepsilon u}e^{-tui}\right|du<\int_0^\infty (u+1)\,e^{-\varepsilon u}du<\infty.)$$

Пусть теперь $\varepsilon\to 0$; тогда в силу свойства 3) левая часть формулы (1) стремится к $\frac{1}{2}\int_{-2\Lambda}^{2\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)h(t)\,e^{yti}dt$. Далее, интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon u} \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du$ в правой части стремится к $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du$. Действительно, последний интеграл существует и абсолютная величина разности

$$\left| \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du - \int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon u} \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du \right| =$$

$$= \left(\int\limits_0^A + \int\limits_A^\infty \right) (1 - e^{-\varepsilon u}) \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du <$$

$$< (1 - e^{-\varepsilon A}) \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du + \int\limits_A^\infty \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du,$$

и, значит, стремится к нулю при $A \to \infty$ и $\varepsilon A \to 0$.

Так как интеграл в левой части формулы (1) и второй интеграл в правой части этой формулы стремятся к определенным пределам при $\varepsilon \to 0$, то и первый интеграл в правой части имеет определенный предел. Покажем, что

$$\int\limits_0^\infty H(u) \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du$$

существует и представляет собой значение этого предела. Прежде всего при заданных A и δ мы можем выбрать такое ε_1, чтобы для всех $\varepsilon < \varepsilon_1$ выполнялось неравенство:

$$\int\limits_0^A H(u) \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du < \int\limits_0^A H(u) e^{-\varepsilon u} \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du + \delta,$$

и тем более

$$< \int\limits_0^\infty H(u) e^{-\varepsilon u} \frac{\sin^2 \Lambda (y-u)}{\Lambda (y-u)^2} du + \delta.$$

Беря теперь $\varepsilon \to 0$ и затем $\delta \to 0$, получаем:

$$\int_0^\Lambda H(u)\frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty H(u)\,e^{-\varepsilon u}\frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du;$$

отсюда вытекает, что $\int\limits_0^\infty H(u)\frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du$ существует и $\leqslant \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^\infty H(u)\,e^{-\varepsilon u}\frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du$. Так как меньше он быть не может, то наше утверждение доказано.

Таким образом переход к пределу по $\varepsilon \to 0$ можно произвести во всех трех интегралах. В результате мы получаем:

$$\frac{1}{2}\int_{-2\Lambda}^{2\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)h(t)\,e^{yti}\,dt =$$
$$= \int_0^\infty H(u)\frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du - \int_0^\infty \frac{\sin^2\Lambda(y-u)}{\Lambda(y-u)^2}\,du$$

или, после подстановки $\Lambda(u-y)=v$,

$$\frac{1}{2}\int_{-2\Lambda}^{2\Lambda}\left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)h(t)\,e^{yti}\,dt =$$
$$= \int_{-\Lambda y}^\infty H\left(y+\frac{v}{\Lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv - \int_{-\Lambda y}^\infty \frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv. \qquad (2)$$

Пусть Λ фиксировано и $y\to\infty$; тогда, по известной теореме теории рядов Фурье, левая часть формулы (2) стремится к нулю $\left[\text{ибо } \left(1-\frac{|t|}{2\Lambda}\right)h(t) \text{ непрерывна и пределы интеграции конечны}\right]$; далее, $\int\limits_{-\Lambda y}^\infty \frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv$ стремится к $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv = P < \infty$ [1]).

---

[1]) Для наших целей совершенно не важно, что $P=\pi$.

В итоге

$$I(y, \Lambda) = \int_{-\Lambda y}^{\infty} H\left(y + \frac{v}{\Lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv \to P \tag{3}$$

при $y \to \infty$.

Теперь уже нетрудно сообразить, почему отсюда следует, что $H(y) \to 1$. Если мы возьмем τ очень малым, а Λ столь большим, чтобы и $\Lambda\tau$ было велико, то при изменении v от $-\Lambda\tau$ до $+\Lambda\tau$ $H\left(y + \frac{v}{\Lambda}\right)$ будет лишь немногим отличаться от $H(y)$, тогда как $H\left(y + \frac{v}{\Lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}$ пройдет все значения, оказывающие сколько-нибудь заметное влияние на величину интеграла $I(y, \Lambda)$. Поэтому мы будем иметь:

$$I(y, \Lambda) \approx \int_{-\Lambda\tau}^{\Lambda\tau} H\left(y + \frac{v}{\Lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \approx H(y) \int_{-\Lambda\tau}^{\Lambda\tau} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \approx H(y) P,$$

с другой стороны, при достаточно больших y,

$$I(y, \Lambda) \approx P,$$

т. е., в совокупности,

$$H(y) \approx 1.$$

Конечно, все это лишь наводящие соображения, и мы дадим сейчас совершенно строгое доказательство. Именно здесь мы и воспользуемся монотонностью функции $\psi(x)$, т. е. свойством 1′).

а) $\overline{\lim\limits_{y \to \infty}}\, H(y) \leqslant 1.$

Действительно, в силу свойства 1′)

$$I(y, \Lambda) > \int_{-\Lambda\tau}^{\Lambda\tau} H\left(y + \frac{v}{\Lambda}\right) \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv >$$

$$> e^{-2\tau} H(y - \tau) \int_{-\Lambda\tau}^{\Lambda\tau} \frac{\sin^2 v}{v^2}\, dv = e^{-2\tau} H(y - \tau) P_{\Lambda\tau}.$$

Это дает:

$$H(y - \tau) < e^{2\tau} \frac{I(y, \Lambda)}{P_{\Lambda\tau}},$$

откуда в силу соотношения (3) заключаем, что

$$\overline{\lim_{y\to\infty}} H(y) = \overline{\lim_{y\to\infty}} H(y-\tau) \leqslant e^{2\tau}\frac{P}{P_{\Lambda\tau}}.$$

Возьмем теперь $\tau\to 0$ и $\Lambda\tau\to\infty$; так как при этом $e^{2\tau}\to 1$ и $P_{\Lambda\tau}\to P$, то мы и получаем:

$$\overline{\lim_{y\to\infty}} H(y) \leqslant 1.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $H(y)$ ограничено:

$$H(y) < K < \infty \tag{4}$$

для всех y.

$$\text{b)}\ \underline{\lim_{y\to\infty}} H(y) \geqslant 1.$$

Действительно, в силу неравенства (4)

$$\int_{-\Lambda\tau}^{\Lambda\tau} H\left(y+\frac{v}{\Lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv =$$

$$= I(y,\Lambda) - \left(\int_{-\Lambda y}^{-\Lambda\tau} + \int_{\Lambda\tau}^{\infty}\right) H\left(y+\frac{v}{\Lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv >$$

$$> I(y,\Lambda) - \left(\int_{-\infty}^{-\Lambda\tau} + \int_{\Lambda\tau}^{\infty}\right) K\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv = I(y,\Lambda) - K(P-P_{\Lambda\tau}).$$

С другой стороны, в силу свойства 2′)

$$\int_{-\Lambda\tau}^{\Lambda\tau} H\left(y+\frac{v}{\Lambda}\right)\frac{\sin^2 v}{v^2}\,dv < e^{2\tau} H(y+\tau)\,P_{\Lambda\tau}.$$

Соединяя эти два неравенства, получаем:

$$H(y+\tau) > e^{-2\tau}\frac{I(y,\Lambda)-K(P-P_{\Lambda\tau})}{P_{\Lambda\tau}},$$

откуда

$$\underline{\lim_{y\to\infty}} H(y) = \underline{\lim_{y\to\infty}} H(y+\tau) \geqslant e^{-2\tau}\frac{P-K(P-P_{\Lambda\tau})}{P_{\Lambda\tau}}.$$

Беря снова $\tau \to 0$ и $\Delta\tau \to \infty$, получаем:

$$\underline{\lim_{y \to \infty}} H(y) \geqslant 1.$$

Неравенства a) и b) в совокупности дают:

$$\lim_{y \to \infty} H(y) = \lim_{y \to \infty} \frac{\psi(e^y)}{e^y} = 1$$

или

$$\underline{\lim_{y \to \infty}} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

чем асимптотический закон распределения простых чисел и доказан.

БИБЛИОГРАФИЯ.

[Предлагаемый список литературы отнюдь не претендует на полноту. Исчерпывающее изложение предмета читатель найдет в двух монументальных работах Ландау (*H* и *V*), а краткий обзор — в прекрасной энциклопедической статье Бора и Крамера (*BC*). *H* содержит исчерпывающую библиографию до 1909 г., а *BC* — ссылки на различные работы до 1922 г. По поводу литературы, посвященной чистой теории дзета-функции, отсылаем читателя к книге Титчмарша (*T*).]

[Даты относятся, вообще говоря, к моменту опубликования. Если указаны две даты, то первая относится к моменту оглашения или представления работы, вторая же — к моменту напечатания.]

H. E. Landau, Handbüch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig, Teubner, 1909.

BHM. P. Bachmann - J. Hadamard-E. Maillet, Propositions transcendantes, de la théorie des nombres, Encyclopédie des sciences mathématiques, I, 17, 1910, 215—387.

HR. G. H. Hardy - M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, № 18, 1915.

BC. H. Bohr - H. Cramér, Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II C 8, 1922, 722—849.

V. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig, Hirzel, 1927.

T. E. C. Titchmarsh, The zeta-function of Riemann, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, № 26, 1930.

R. J. Backlund, 1. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, „Comptes rendus", 158, 1914, 1979—1981; *2.* Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, „Acta Math.", 41, 1918, 345—375.

S. Bochner, 1. Ein Satz von Landau und Ikehara, „Math. Zeitschrift", 37, 1933, 1—9; *2.* Umkehrsätze für allgemeine Limitierungsverfahren, „Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissens., phys.-math. Kl.", Berlin 1933, 126—144.

R. Breusch, 1. Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, dass zwischen x und $2x$ stets Primzahlen liegen, „Math. Zeitschrift", 34, 1932, 505—526.

V. Brun, 1. Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, „Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, mat.-naturv. Kl.", 1920_1, 3.

H. Cramér, 1. Über die Herleitung der Riemannschen Primzahlformel, „Arkiv för Mat., Astr. och Fys.", 13, 1918, 24; *2.* Studien über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, „Math. Zeitschrift", 4, 1919, 104—130; *3.* Some theorems concerning prime numbers, „Arkiv för Mat., Astr. och Fys.", 15, 1921, 5; *4.* Sur un problème de M. Phragmén, „Arkiv för Mat., Astr. och Fys.", 16, 1922, 27; *5.* Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie, „Math. Zeitschrift", 12, 1922, 147—153.

L. Euler, 1. Variae observationes circa series infinitas, „Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae", 9, 1737, 1744, 160—188. Opera omnia (1), 14, 216—244.]; *2.* Introductio in analysin infinitorum, Vol. I, Lausanne, Bousquet, 1748. [Opera omnia (1), 8.]

C. F. Gauss, 1. Werke; *a.* 1-е изд., Göttingen, 1863; *b,* 2-е изд., Göttingen, 1876.

J. Glaisher, 1. Factor table for the fourth million, London, Taylor and Francis, 1879; *2.* Factor table for the sixth million, London, Taylor and Francis, 1883.

J. W. L. Glaisher, 1. Separate enumerations of primes of the form $4n+1$ and of the form $4n+3$, „Proc. Royal Soc.", 29, 1879, 192—197.

J. Hadamard, 1. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, „Journal de math.", (4), 9, 1893, 171—215; *2.* Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, „Bulletin de la Soc. math. de France", 24, 1896, 199—220.

G. H. Hardy, 1. A new proof of the functional equation for the zeta-function, „Matematisk Tidssrift", B, 1922, 71—73; *2.* Note on a theorem of Mertens, „Journal London Math. Soc.", 2, 1927, 70—72.

G. H. Hardy and *J. E. Littlewood, 1.* New proofs of the prime-number theorem and similar theorems, „Quarterly Journal of Math.", 46, 1915, 215—219; *2.* Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, „Acta Math.", 41, 1918, 119—196; *3.* On a Tauberian theorem for Lambert's series, and some fundamental theorems in the analytical theory of numbers, „Proc. London Math. Soc." (2), 19, 1921, 21—29; *4.* Some problems of „Partitio numerorum": III, On the expression of a number as a sum of primes, „Acta Math.", 44, 1922, 1—70; *5.* Some problems of „Partitio numerorum", V: A further contribution to the study of Goldbach's problem, „Proc. London Math. Soc." (2), 22, 1923, 46—56.

C. J. Hargreave, 1. Analytical researches concerning numbers, „Philosophical Magazine" (3), 35, 1849, 36—53; *2.* On the law of prime numbers, „Philosophical Magazine" (4), 8, 1854, 114—122.

G. Hoheisel, 1. Primzahlprobleme in der Analysis, „Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissens., phys.-math. Kl.", Berlin 1930, 580—588.

E. Holmgren, 1. Om primtalens fördelning, „Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar", 59, 1902, 221—225.

S. Ikehara, 1. An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers, „Journal of Math. and Phys., Massachusetts Inst. of Technology", 10, 1931, 1—12.

A. E. Ingham, 1. Note on Riemann's ζ-function and Dirichlet's L-functions, „Journal London Math. Soc.", 5, 1930, 107—112.

J. Karamata, 1. Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes, „Math. Zeitschrift", 32, 1930, 319—320.

H. von Koch, 1. Sur la distribution des nombres premiers, „Acta Math.", 24, 1901, 159—182.

E. Landau, 1. Über einen Satz von Tschebyschef, „Math. Annalen", 61, 1905, 527—550; *2.* Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, „Bibliotheca Mathematica" (3), 7, 1906, 69—79. *3.* Über die Äquivalenz zweier Hauptsätze der analytischen Zahlentheorie, „Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissens. in Wien, math.-naturw. Kl.", 120, Abt. 2*a*, 1911, 973—988; *4.* Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion abhängen, „Acta Math.", 35, 1912, 271—294;

5. Über die Nullstellen der Zetafunktion, „Math. Annalen", 71, 1912, 548—564; *6, 7.* Über einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie, „Math. Zeitschrift", 1, 1918, 1—24; (zweite Abhandlung), 213—219; *8.* Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen, „Math. Zeitschrift", 20, 1924, 105—125; *9.* Über die Zetafunktion und die Hadamardsche Theorie der ganzen Funktionen, „Math. Zeitschrift", 26, 1927, 170—175; *10.* Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Zatz, „Nachrichten v. d. Gesellschaft der Wissens. zu Göttingen, math.-phys. Kl.", 1930, 255—276; *11.* Über Dirichletsche Reihen, „Nachrichten v. d. Gesellschaft der Wissens. zu Göttingen, math.-phys. Kl.", 1932, 525—527; *12.* Über den Wienerschen neuen Weg zum Primzahlsatz, „Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissens., phys.-math. Kl.", Berlin 1932, 514—521.

A. M. Legendre, 1. Essai sur la théorie des nombres; *a*, 1-е изд., Paris, Duprat, 1798; *b*, 2-е изд., Paris, Courcier, 1808; *2.* Théorie des nombres, Paris, Didot, 1830; 3-е издание предыдущей книги.

D. N. Lehmer, 1. List of prime numbers from 1 to 10 006 721, Carnegie Institution of Washington, Publication № 165, Washington, D. C., 1914.

J. E. Littlewood, (см. также *G. H. Hardy*), *1.* Sur la distribution des nombres premiers, „Comptes Rendus", 158, 1914, 1869—1872; *2.* Researches in the theory of the Riemann ζ-function, „Proc. London Math. Soc." (2), 20, 1922, xxii—xxviii Records, Feb. 10, 1921; *3.* Two notes on the Riemann zeta-function, „Proc. Cambridge Philos. Soc.", 22, 1924, 234—242; *4.* Mathematical notes: 3. On a theorem concerning the distribution of prime numbers, „Journal London Math. Soc.", 2, 1927, 41—45.

H. von Mangoldt, 1. Auszug aus einer Arbeit unter dem Titel: Zu Riemann's Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", „Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissens.", Berlin 1894, 883—896; *2.* Zu Riemann's Abhandlung „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", „Journal für die r. u. a. Math.", 114, 1895, 255—305; *3.* Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k}=0$, „Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissens.", Berlin, 1897, 835—852; *4.* Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$, „Math. Annalen", 60, 1905, 1—19.

F. Mertens, 1. Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie, „Journal für die r. u. a. Math.", 78, 1874, 46—62; *2.* Über eine Eigenschaft der Riemann'schen ζ-Function, „Sitzungsberichte d. Akad. d. Wissens. in Wien, math.-naturw. Kl.", 107, Abt. 2*a*, 1898, 1429—1434.

L. J. Mordell, 1. Some applications of Fourier series in the analytic theory of numbers, „Proc. Cambridge Philos. Soc.", 24, 1928, 585—596.

E. Phragmén, 1. Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann, „Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar", 48, 1891, 599—616; *2.* Sur une loi de symétrie relative à certaines formules asymptotiques, „Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar", 58, 1901, 189—202.

G. Pólya, 1, Über das Vorzeichen des Restgliedes im Primzahlsatz, „Nachrichten v. d. Gesellschaft der Wissens. zu Göttingen, math.-phys. Kl.", 1930, 19—27.

H. Rademacher, 1. Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie, „Abhandlungen aus d. math. Seminar d. Hamburgischen Univ.", 3, 1924, 12—30.

B. Riemann, 1. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, „Monatsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissens.", Berlin 1859, 1860, 671—680. [Gesammelte mathematische Werke, 1-е изд., 1876, 136—144, 2-е изд., 1892, 145—155; Oeuvres mathématiques, 1898, 165—176.]

E. Schmidt, 1. Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze, „Math. Annalen", 57, 1903, 195—204.

L. Schnirelmann (Л. Г. Шнирельман), *1.* Об аддитивных свойствах чисел. „Известия Донского Политехнического Института" (Новочеркасск), 14, 1930, 3—28. *2.* Über additive Eigenschaften von Zahlen, „Math. Annalen", 107, 1933, 649—690.

J. Schur, 1, 2. Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen, I, „Sitzungsberichte d. Preuss. Akad. d. Wissens.", Berlin 1929, 125—136; II, там же, 1929, 370—391.

C. L. Siegel, 1. Über Riemann's Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, „Quellen und Studien zur Geschichte der Math., Astr. und Phys.", Abt. B, 2, 1932, 45—80.

J. J. Sylvester, 1. On Tchebyscheff's theory of the totality of prime numbers comprised within given limits, „American Journal of Math.", 4, 1881, 230—247. *2, 3.* On arithmetical series, „Messenger of Math." (2), 21, 1892, 1—19; 87—120.

P. L. Tschebyscheff (П. Л. Чебышев), *1.* Теорія сравненій, С.-Петербург, 1849; Приложение III; *2.* Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée; a, „Mémoires présentés à l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg par divers savants", 6, 1848; 1851, 141—157; b, „Journal de math." (1), 17, 1852, 341—365; [Oeuvres, I, 27—48]; *3.* Mémoire sur les nombres premiers, a, „Mémoires présentés à l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg par divers savants", 7, 1850, 1854, 15—33; b, „Journal de math." (1), 17, 1852, 366—390. [Oeuvres, I, 49—70.]

C. J. de la Vallée-Poussin, 1. Recherches analytiques sur la théorie des nombres; Première partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général, „Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles", 20_2, 1896, 183—256; *2.* Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, „Mémoires couronnés de l'Acad. roy. des Sciences... de Belgique", 59, 1899—1900, 1.

N. Wiener, 1. A new method in Tauberian theorems, „Journal of Math. and Phys., Massachusetts Inst. of Technology", 7, 1927—1928, 161—184; *2.* Tauberian theorems, „Annals of Math." (2), 33, 1932, 1—100; *3.* The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge University Press, 1933.

СОДЕРЖАНИЕ

Цена 2 р. 75 к.

Т 23-5-4