

М. А. ИСАКОВИЧ

ОБЩАЯ АКУСТИКА

*Допущено Министерством высшего
[и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физических специальностей вузов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКС-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

Общая акустика. М. А. Исакович. Учебное пособие. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1973 г.

Книга представляет собой введение в теорию упругих волн. В ней излагаются общие закономерности поведения упругих волн в различных акустических ситуациях, устанавливаются точки зрения, позволяющие единообразно рассматривать различные акустические явления, выясняются внутренние связи между явлениями. Главное внимание уделено подробному выяснению физической сущности разбираемых вопросов, без привлечения сложного математического аппарата. В книгу включен ряд вопросов, представленных до сих пор только в специальной научной литературе. Основное содержание книги относится к изучению плоских и сферических упругих волн разных типов, как основных видов волн, встречающихся в большинстве теоретических и прикладных задач. Большое число детально рассмотренных задач позволяет также использовать книгу как справочное пособие.

В основу книги положен курс общей акустики, читаемый автором в Московском физико-техническом институте.

© Издательство «Наука», 1973.

И 0233-1829 89-73
042(02)-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава I. Упругие волны	9
§ 1. Распространение упругих волн (9). § 2. Волновое поле. Частица среды (14). § 3. Задачи акустики (15). § 4. Скорость звуковых волн (17). § 5. Одномерная волна. Способ «остановки движения» (19). § 6. Поперечные волны на струне (22). § 7. Изгибные волны на стержне (23). § 8. Продольные плоские волны в жидкости (26). § 9. Волны малой амплитуды. Линеаризация (28). § 10. Замечание относительно закона Гука (30).	
Глава II. Общие уравнения акустики. Плоские волны	32
§ 11. Полная система уравнений и гидродинамики (32). § 12. Граничные условия (35). § 13. Полная система акустических уравнений и ее упрощение (линеаризация). Особенность картины сплошной среды в акустике (36). § 14. Лапласова и ньютонова скорости звука. Температурные колебания в звуковой волне (43). § 15. Принцип суперпозиции волн (46). § 16. Волновое уравнение (47). § 17. Одномерная задача. Плоская волна (50). § 18. Гармонические плоские волны. Стоячие волны (54). § 19. Акустика микрогетерогенных сред. Температурные и вязкие волны (56). § 20. Поршневое излучение плоской волны. Импульс бегущей плоской волны (63).	
Глава III. Гармонические волны	66
§ 21. Гармонические волны (66). § 22. Комплексная запись гармонических волн (67). § 23. Разложение Фурье волны с произвольной зависимостью от времени (70). § 24. Спектральные разложения волн (72). § 25. Плоские гармонические волны (73). § 26. Сохранение формы бегущих гармонических плоских волн. Дисперсионное уравнение (75). § 27. Групповая скорость. Распространение узкополосного сигнала (79). § 28. Распространение широкополосного сигнала в диспергирующей среде (86). § 29. Пространственное спектральное разложение по плоским волнам (87). § 30. Поршневое излучение (88). § 31. Пристраивание плоской волны в среде к бегущей волне давления на плоскости (89). § 32. Неоднородные плоские волны (91). § 33. Пространственный спектр по плоским волнам для любого распределения давления на плоскости (95). § 34. Пространственный спектр по плоским волнам для любого распределения нормальных скоростей на плоскости (98). § 35. Волны, модулированные по фронту (101). § 36. Волны комплексных частот (102).	
Глава IV. Энергия звуковых волн	106
§ 37. Звуковая энергия (106). § 38. Плотность энергии в звуковой волне (109). § 39. Плотность потока мощности в звуковой волне (115).	

Глава V. Отражение и прохождение плоских волн при нормальном падении

123

§ 40. Отражение и прохождение звука (123). § 41. Отражение от идеальных границ. Метод мнимых изображений (124). § 42. Правильное отражение. Отражение гармонических волн (127). § 43. Отражение и прохождение звука на границе двух сред (130). § 44. Плавное изменение свойств среды. Лучевая картина (138). § 45. Проводимость и импеданс линейного препятствия. Поле перед препятствием (142). § 46. Отражение от «сосредоточенной массы» и прохождение через нее (147). § 47. Отражение от «сосредоточенной упругости» и прохождение через нее (150). § 48. Отражение от резонатора. Согласование двух сред (153). § 49. Препятствия в виде плоскопараллельных слоев (155). § 50. Отражение негармонических волн (163). § 51. Теория длинных линий (166). § 52. Узкая труба и стержень как длинные линии (168).

Глава VI. Наклонное падение плоских волн

171

§ 53. Отражение и прохождение плоских волн при наклонном падении. Закон Снеллиуса (171). § 54. Отражение и прохождение звука на границе двух сред (174). § 55. Анализ формул Френеля (176). § 56. Отражение гармонических волн и импульса при закритических углах скольжения. Полное отражение (180). § 57. Рефракция лучей в неоднородной среде (183). § 58. Проводимость и импеданс при синусоидальном распределении давления по плоскости. Отражение от поверхности с заданной проводимостью. Учет неидеальности среды (187). § 59. Поверхностная волна вблизи плоской границы, характеризуемой нормальной проводимостью (195). § 60. Применение теории длинных линий к задачам о наклонном падении волн (198).

Глава VII. Волны в узких трубах

202

§ 61. Узкие трубы (202). § 62. Гармонические волны в узкой трубе (202). § 63. Ограниченные трубы. Собственные колебания в ограниченных трубах (204). § 64. Труба, ограниченная крышками с конечной проводимостью (206). § 65. Крышки с потерями (212). § 66. Свободные колебания в трубах. Задачи с начальными условиями (215). § 67. Вынужденные колебания в трубах (218). § 68. Распространение звука в трубах с податливыми стенками (224).

Глава VIII. Волноводы

230

§ 69. Волноводное распространение звука (230). § 70. Нормальные волны. Плоская задача (232). § 71. Волноводы с идеальными стенками (236). § 72. Нормальная проводимость стенок (242). § 73. Поглощающие стенки (250). § 74. Создание гармонического поля в волноводе (252). § 75. «Затягивание» импульса в волноводе (257). § 76. Волновод с прямоугольным сечением (258). § 77. Стоячие волны в помещении (259). § 78. Произвольные свойства стенок (262). § 79. Распространение инфразвука в море. Плоская задача (263). § 80. Распространение инфразвука в море. Трехмерная задача (266). § 81. Круглая труба как волновод (269).

Глава IX. Сферически-симметричные волны

272

§ 82. Сферические волны (272). § 83. Сферически-симметричные волны (274). § 84. Скорость частиц в сферически-симметричной волне (276). § 85. Гармонические сферически-симметричные волны (278). § 86. Сферически-симметричные колебания сферического объема жидкости (282). § 87. Монополь. Объемная скорость (284). § 88. Сопротивление среды в сферической волне. Присоединенная масса (288). § 89. Колебания упругой сферы в среде. Колебания газового пузырька в воде (289). § 90. Мощность излучения монополя. Плотность энергии в сферически-симметричной волне (293).

§ 91. Лучевая картина для монополя. Монополь в слоисто-неоднородной среде (299). § 92. Монопольный приемник (304). § 93. Совместная работа нескольких монополей (305). § 94. Характеристики направленности системы монополей (308). § 95. Приемные системы из монополярных приемников (312). § 96. Близкорасположенные монополи (313). § 97. Мощность, излучаемая при совместном действии близкорасположенных монополей (315). § 98. Монополь в волноводе (319). § 99. Взаимодействие монополей в волноводе (322).

Глава X. Диполь 326

§ 100. Диполь. Момент диполя (326). § 101. Диполь как осциллирующая сфера. Кардионидный излучатель (328). § 102. Присоединенная масса диполя. Сила диполя (331). § 103. Влияние идеальных стенок на излучение диполя (336). § 104. Мощность излучения диполя (338). § 105. Негармонический дипольный источник (339). § 106. Осцилляции и излучение звука малым твердым телом под действием сторонней силы (341). § 107. Вращающийся диполь (346). § 108. Дипольное излучение малых тел, осциллирующих с большой амплитудой. Дипольное излучение вращающихся тел (348).

Глава XI. Рассеяние звука 350

§ 109. Рассеяние звука на препятствии (350). § 110. Малое препятствие, отличающееся от среды только сжимаемостью (354). § 111. Малое препятствие, отличающееся от среды только плотностью (358). § 112. Рассеяние звука пузырьком газа в жидкости (363). § 113. Резонатор Гельмгольца. Рассеяние звука резонатором Гельмгольца (370). § 114. Рассеяние звука в слабо неоднородной среде (374). § 115. Рассеяние от слабо шероховатой поверхности (380).

Глава XII. Поглощение звука 385

§ 116. Затухание звука (385). § 117. Затухание звука в результате поглощения (388). § 118. Различные механизмы поглощения звука (392). § 119. Индикаторные диаграммы для частицы среды (394). § 120. Расчет коэффициентов поглощения звука для различных механизмов поглощения (397).

Глава XIII. Распространение волн конечной амплитуды 407

§ 121. Волны конечной амплитуды (407). § 122. Плоская бегущая волна конечной амплитуды (точное решение) (408). § 123. Нахождение квадратичной поправки методом малых возмущений (412). § 124. Квадратичная поправка в плоской волне (414). § 125. Квадратичная поправка для бегущей плоской волны (418). § 126. Нелинейное взаимодействие волн. Акустическое детектирование (422). § 127. Затухание волн конечной амплитуды, обусловленное нелинейностью (424). § 128. О нелинейных поправках высших порядков (426). § 129. Распространение плоской волны конечной амплитуды в среде с дисперсией скорости (427). § 130. Стоячие волны конечной амплитуды (430). § 131. Уравнения квадратичной поправки для неоднородных волн (432). § 132. О нелинейном взаимодействии плоских волн, бегущих под углом друг к другу (434).

Глава XIV. Упругие волны в твердых телах 437

§ 133. Твердое тело как акустическая среда (437). § 134. Тензор деформации (437). § 135. Тензор напряжений (440). § 136. Закон Гука (441). § 137. Граничные условия для твердых тел (442). § 138. Однородные деформации

ции. Различные модули упругости (443). § 139. Продольные и поперечные плоские волны в твердом теле (447). § 140. Общие уравнения распространения волн в твердом теле (451). § 141. Скалярный и векторный потенциалы (453).

Глава XV. Отражение и прохождение плоских волн в твердом теле. Твердые волноводы

457

§ 142. Отражение от идеальных стенок (457). § 143. Отражение и прохождение звука на границе жидкости и твердой среды (464). § 144. Рэлеевская волна (467). § 145. Влияние граничащей среды на поверхностные волны (469). § 146. Твердые волноводы (472).

Глава XVI. Сферические волны в твердом теле

477

§ 147. Типы сферических волн в твердом теле (477). § 148. Сферически-симметричные волны. Радиальные колебания твердой сферы (477). § 149. Монополь в твердой среде (479). § 150. Колебания сферической полости в твердом теле. Рассеяние на резонансной полости (482). § 151. Крутоль (486). § 152. Диполь в твердом теле (489).

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современной акустике, наряду с традиционными областями — музыкальной и архитектурной акустикой, электроакустикой, теорией дифракции звука и т. д., быстро развиваются новые направления: биоакустика, гидроакустика, учение о гиперзвуке, ультразвуковая технология и многие и многие другие. Разнообразие явлений, с которыми приходится встречаться во всех этих областях акустики, очень велико; несмотря на это, в их основе лежат закономерности, общие для любых упругих волн. Поэтому возможен единый подход к изучению поведения упругих волн, как бы ни различались изучаемые явления. Такого подхода требует не только развитие акустики как науки, но и педагогические цели.

В связи с этим в предлагаемом пособии сделана попытка осуществить подобный подход: наука о звуке трактуется как своеобразная механика упругих волн, в которой изучается поведение волн как самостоятельных объектов, в отличие от обычной механики, занимающейся поведением материальных тел.

Автор стремился изложить общие закономерности поведения упругих волн в различных типичных ситуациях, предложить точки зрения, позволяющие единообразно рассматривать разнообразные акустические явления, выяснить внутренние связи между ними. Большое внимание уделялось физическому рассмотрению изучаемых явлений и законов.

Автор пытался использовать преимущества единого подхода для освещения возможно большего числа вопросов, в том числе таких, которые до сих пор разбирались только в специальной литературе. При этом он стремился обойтись без сколько-нибудь сложного математического аппарата, полагая, что это способствует созданию «акустической интуиции», необходимой для работников в области акустики и далеко не совпадающей, а зачастую даже противоречащей «механической интуиции», укоренившейся в нас в силу повседневного опыта обращения с предметами и в результате изучения механики материальных тел. По мнению автора, «акустическая интуиция» окажется полезной и при изучении других «волновых наук».

Изложение ведется в основном на материале плоских и сферических волн: с ними чаще всего приходится встречаться и в теоретических исследованиях, и в прикладных вопросах.

Несмотря на то, что в книге нет подробного разбора отдельных конкретных задач, взятых из каких-либо определенных областей акустики, автор предполагает, что книга может служить первичным теоретическим фундаментом для всех этих областей. Ряд типичных акустических ситуаций рассмотрен детально, вплоть до получения окончательных формул; это должно облегчить непосредственное использование книги при решении прикладных задач.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, а также на лиц, занимающихся прикладными вопросами акустики. В основу книги положен курс общей акустики, читаемый автором в Московском физико-техническом институте.

Считаю своим долгом принести глубокую благодарность за ряд ценных советов и замечаний рецензентам — профессорам А. Н. Бархатову и В. А. Звереву и чл.-корр. АН СССР С. М. Рытову, а также другим лицам, знакомившимся с книгой во время ее подготовки, в особенности Ю. Л. Газаряну и Б. С. Отарову.

Автор

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

§ 1. Распространение упругих волн

В первой главе мы выделим задачи механики, которыми занимается акустика, напомним и углубим основные представления акустики как учения об упругих волнах и приведем характерные примеры распространения упругих волн.

Существование упругих волн вытекает из законов Ньютона. Удар по торцу тонкого длинного стержня сжимает слой, прилегающий к торцу, и сообщает ему скорость. Возникшие силы упругости ускоряют следующий слой и деформируют его. Упругие силы, возникшие при деформации второго слоя, остановят первый слой, а второй слой приобретет скорость. В результате окажется, что первый слой остановился и вернулся в недеформированное состояние, а второй начал двигаться и сжался. Так движение и деформация будут передаваться от слоя к слою, — по стержню побегит упругая волна, которая будет переносить исходное возмущение вдоль по стержню практически без изменения.

Во всех других случаях распространения упругих волн в любых средах — твердых, жидких и газообразных — основные черты картины те же, что мы описали для стержня: частицы среды в волне приобретают скорость, деформируются и в них возникают упругие напряжения, которые и передают волну дальше по телу.

Заметим, что из приведенной наглядной картины еще не следует существование упругих волн, пока мы не подкрепили качественные рассуждения фактическим обращением к законам Ньютона (мы выполним это в § 8). Действительно, подобное описание можно было бы повторить и для «теплового удара» — кратковременного прикладывания нагретого тела к торцу. Первоначально нагреется торцевой слой, затем он нагреет смежный слой, а сам при этом охладится, и т. д. Однако, как можно показать, тепловой волны, переносящей нагретое состояние вдоль стержня, не возникает: нагревание расплывается по начальному участку стержня. Передача тепла описывается совсем другими законами, чем передача механического возмущения.

При распространении волны следует различать два совершенно разных явления: *движение частиц среды в волне* и *перемещение самой упругой волны по среде*. Первое явление — это движение

частиц как материальных точек; второе явление — переход возмущенного состояния среды с одних частиц на другие. Так, величина смещения и скорость частицы в волне зависят от силы звука, например для слышимых звуков — от их громкости. Эти величины в звуковой волне, как правило, очень малы, а после прохождения волны каждая частица практически остается в своем исходном положении. Волна же удаляется по среде от места возникновения; скорость ее велика (сотни и тысячи метров в секунду) и не зависит от силы звука, а только от свойств среды: чем больше упругость среды, тем больше упругие напряжения, возникающие в среде при данной деформации, и тем быстрее передается возмущение от частицы к частице — тем больше скорость звука; чем больше плотность, тем медленнее частицы приобретают скорость при действии данных упругих напряжений — тем скорость звука меньше.

Скорость звука всегда конечна и определяется именно упругими свойствами и плотностью среды. Отсюда следует, что во всех акустических вопросах нужно учитывать как упругость среды, так и ее инерционные свойства; от других же свойств среды ее акустическое поведение не зависит.

Если к телу приложить силу, то в нем всегда должна создаться упругая волна. Однако в обычных задачах теоретической механики упругие волны не учитывают. Например, изучая движение свободного тела, возникающее под действием прикладываемой к телу силы, считают, что ускорение получает сразу все тело в целом, а не только участок приложения силы, затем соседний участок и т. д. Аналогично, рассматривая действие силы на закрепленное тело, считают, что тело, деформируясь, приходит в равновесие все сразу, во всех своих частях. Такой подход равносителен предположению, что скорость звука в теле бесконечна. В первом примере это соответствует *абсолютно жесткому* телу (бесконечная упругость), а во втором — *безмассовому* телу. Механические задачи при таком подходе сильно упрощаются. В частности, оказывается возможным в каждой задаче учитывать либо только массу тела (первый пример), либо только его упругие свойства (второй пример).

Акустика *принципиально* отказывается рассматривать реальные тела как абсолютно жесткие или безмассовые, потому что при этом теряется изучаемое явление: *распространение* волны, т. е. передача возмущения по телу с конечной скоростью. К специфично акустическим задачам мы относим те, в которых возникающие упругие волны существенно сказываются на явлении в целом. К задачам же теоретической механики в чистом виде относим те, в которых упругими волнами можно пренебрегать.

Упругие волны отсутствуют, если сила, действующая на тело, постоянна. Упругие волны малы, если сила меняется медленно, так что передача возмущения по телу успевает происходить за малую долю времени, характерного для изменения силы. При синусоидальном действии силы за характерный промежуток времени можно считать ее период, при импульсном действии — время нарастания

силы. Время же передачи возмущения определяется характерным размером тела и скоростью звука.

Обозначим скорость звука через c , характерный размер тела через L и характерный промежуток времени через T . Процесс можно считать медленным, можно пренебрегать возникающей упругой волной и относить задачу к «обычной» механике, если

$$L/c \ll T.$$

Тогда состояние тела в каждый момент (его ускорение и деформация) зависит только от сил, действующих на него в этот же момент. Если же это неравенство не выполнено, то процесс следует считать быстрым. Движение тела определяется при этом в основном возникшей упругой волной. В частности, ускорение и скорости разных точек свободного тела различны: тело движется не как одно целое; если же тело закреплено, то его деформированное состояние определится не только величиной сил в данный момент, но и ранее созданными волнами.

Между такими крайними случаями лежат и все промежуточные соотношения между характерным временем действия силы и временем пробега волны по телу, когда роль упругих волн может оказаться более или менее важной.

В качестве примера укажем, что синусоидальную силу частотой 1000 Гц, действующую на стальной стержень длиной 10 см, следует считать медленным воздействием (скорость звука в стали превышает 5000 м/сек). Если эта сила действует вдоль стержня на один его конец, то различие в ускорениях между двумя концами меньше 1%; обычно такой малой разницей можно пренебречь. Если второй конец стержня жестко оперт, то таким же малым окажется и различие в сжатиях у опертого конца и конца, на который действует сила: стержень будет сжиматься и растягиваться «квазистатически», почти равномерно по всей длине. Но ту же силу следует считать быстрым воздействием, если она приложена к длинному рельсу: она создаст в нем типичный волновой процесс (стоячую волну); части рельса будут сжаты в то же время, когда другие — растянуты.

Для Земли в целом следует считать быстрыми даже воздействия с периодами во много минут; при землетрясениях в земной коре возникают упругие волны с периодами, доходящими почти до часа: это — время, требующееся для пробега упругой волны по всей планете.

В некоторых явлениях упругие волны могут оказаться существенными, даже если нас интересует только движение данного тела как целого. Например, в классической задаче о соударении идеально упругих шаров пренебрежение возникающими упругими волнами приводит к ошибке при подсчете скорости шаров после соударения. В самом деле, уравнение сохранения энергии обычно пишут как равенство кинетических энергий системы шаров до и после соударения. Правильное решение должно учитывать, однако,

и энергию возникших при ударе упругих волн. Кинетическая энергия шаров, рассматриваемых как материальные точки, окажется поэтому после соударения всегда меньше, чем перед соударением, — удар шаров из идеально упругого материала происходит подобно удару шаров с неполной упругостью.

Изучать упругие волны можно двумя принципиально разными способами. Можно рассматривать волну как движение материальных точек (частиц среды), упруго взаимодействующих между собой. В этом способе объект изучения — отдельные частицы среды и их движение. К частицам можно применить уравнения механики системы материальных точек, учесть силы взаимодействия между ними, их инерцию и найти таким способом движение каждой частицы. Так удастся рассмотреть, однако, только простейшие виды волн — бегущие одномерные волны (примеры см. в §§ 6—8). Для волн же любого вида этот способ весьма неудобен. В самом деле, силы упругости, действующие на какую-либо частицу, вызваны деформациями соседних частиц, а эти деформации связаны с движением еще более удаленных частиц и т. д.; в итоге, чтобы найти движение одной частицы, требуется выяснить и движение всех остальных частиц среды. Но тогда, оказывается, проще с самого начала отказаться от громоздкого рассмотрения поведения каждой частицы в отдельности и вместо этого изучать *волну в целом как самостоятельный объект*. В этом и заключается второй способ.

При втором способе изучения содержание акустики как науки можно назвать *механикой упругих волн*, в противоположность механике частиц среды, с которой имеем дело при первом способе.

Выбор в качестве основного объекта изучения не отдельных частиц среды, а всей волны в целом диктуется тем, что для волны удастся найти простые законы поведения: законы распространения, законы отражения и преломления на границах разных сред, законы рассеяния от препятствий, особенности поведения в ограниченных областях среды и т. д. Получить равноценные результаты, изучая движение системы отдельных взаимодействующих частиц, было бы практически невозможно. Конечно вывод уравнения поведения волн основан на тех же уравнениях механики частиц. Более того, все результаты волновой теории в принципе можно было бы получить расчетом движений всех частиц среды, сколь ни неосуществимо на практике было бы такое вычисление: принципиальной невозможности, вроде той, которая встречается при попытке вывода законов термодинамики только из механики Ньютона, здесь нет.

Схема построения акустики как механики упругих волн имеет, таким образом, следующий вид. Общие законы поведения упругих волн мы получим как следствия ньютоновской механики для частиц среды. Но, получив эти законы, мы в каждой конкретной физической ситуации будем искать поведение волны в целом, уже не интересуясь движением отдельных частиц среды, в которой бежит волна. В тех же случаях, когда это понадобится, можно снова

перейти к частицам: изучив волну в целом, легко найти движение каждой частицы.

Роль механики волн как самостоятельной дисциплины подчеркивается следующим обстоятельством. В смежных науках — оптике и радиофизике, также изучающих волны, — нет речи о частицах среды, да и о самой среде тоже (для основного явления — распространения электромагнитных волн в вакууме). Но, тогда как электрические и магнитные явления нельзя связать с механическим поведением тел, законы электромагнитных волн оказались весьма близкими к законам механики упругих волн. Волновая картина в этом смысле универсальна. В отличие от акустики, волновые представления в других науках, имеющих дело с волновыми явлениями, первичны, но свои исходные понятия и математический аппарат эти науки в значительной степени заимствовали из акустики как науки о волнах. Исторически акустика послужила прототипом всех волновых наук.

Хотя звуковая волна — механическое явление, поведение волны — явление совершенно иное, чем движение материальных тел. Действительно, обычные в механике тел понятия координаты, траектории, ускорения, неприменимы к волне или применимы лишь частично, хотя эти понятия остаются полностью в силе для каждой частицы среды, в которой бежит волна. Так, волне, выходящей из некоторого источника звука, нельзя приписать какой-либо траектории, так как она расходится от источника во все стороны.

Любая волна в данной среде движется с неизменной скоростью, поэтому к волне понятие ускорения неприменимо. Требуется более глубокого анализа даже основное в акустике понятие скорости волны: оно оказывается отличным от понятия скорости тела (см. § 4).

Но даже в тех случаях, когда поведение волны, казалось бы, похоже на движение тела по инерции (например, бегущая плоская волна), все же это поведение принципиально отлично от движения тела. Так, если на пути волны есть препятствие, то она разделится на две волны, бегущие в противоположных направлениях: отраженную и прошедшую. При падении синусоидальной волны эти обе волны также будут синусоидальными, а если подобрать препятствие так, чтобы их амплитуды были равны, то они окажутся равными 0,707 от амплитуды падающей волны. Если бы, однако, обе такие волны были посланы вместе в одну сторону, то они образовали бы одну волну с амплитудой $0,707 + 0,707 = 1,414$.

Далее, если в какой-либо среде бегут две волны, то каждая бежит, «не замечая» другой, как если бы в среде существовала только она одна. Вместе с тем для волны явится препятствием каждая неоднородность среды. Попадая на ограниченное препятствие, волна рассеивается во все стороны; при этом какая-то часть волны возвращается и в то место, откуда вышла исходная волна, — на этом основаны гидролокация и ультразвуковая дефектоскопия

(обнаружение при помощи ультразвука дефектов, например трещин, внутри непрозрачных материалов).

Ввиду всех этих и многих других особенностей поведения волн, **о** волнах, как правило, не говорят «движутся», оставляя этот термин для перемещений тел (в том числе, конечно, и для перемещений частиц среды в волне). О волне говорят, что она «распространяется», понимая под этим термином всю картину изменения возмущенного состояния среды с течением времени.

Для описания распространения упругих волн существует привилегированная «абсолютная» система координат: система, связанная с самой средой в целом. Для электромагнитных волн в вакууме, конечно, никакой привилегированной системы нет.

Отметим, наконец, что простые законы распространения упругих волн справедливы только при условии *достаточной малости отклонений* частиц среды в волне от положения равновесия. Понятие об изменении этих законов при нарушении условия малости колебаний дадим в гл. XIII.

§ 2. Волновое поле. Частица среды

Будем характеризовать волну непрерывным распределением в среде *давления, скорости частиц, плотности и температуры* (иногда и некоторыми другими величинами; например, в твердых телах вместо давления рассматривают *тензор напряжений*). В каждой волне эти величины и их изменения связаны друг с другом. Совокупность всех этих величин называют *волновым полем*. Распространение волны — это изменение волнового поля с течением времени.

Чтобы ввести понятие волнового поля, приходится рассматривать среду как *сплошную*. Поэтому механику волн мы будем строить на основе *механики сплошных сред*, отказавшись от уравнений механики дискретной системы материальных точек. С математической стороны это означает переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям в частных производных. В дальнейшем характеристики волны будем считать дифференцируемыми (требуемое число раз) функциями координат и времени.

Понятие о *частице среды* вводится так, как это принято в механике сплошных сред: игнорируя молекулярное строение вещества, назовем частицей любой мысленно выделенный участок среды, малый по сравнению с расстоянием, на котором состояние среды изменяется существенным образом (например, по сравнению с длиной волны звука), или по сравнению с другими характерными размерами в рассматриваемой задаче (например, при вибрациях пластинки — по сравнению с толщиной пластинки). Понятие частицы полезно, пока выбранные участки содержат все же еще очень большое число молекул (для газов требование еще строже: участок должен быть велик по сравнению с длиной свободного пробега молекул).

В разных случаях движение частиц требуется знать с разной степенью подробности. Так, изучая перемещение частицы, можно принимать, что она движется как целое, и рассматривать ее как материальную точку с массой, равной массе выделенного участка среды. Этого достаточно, если нас интересуют только инерциальные свойства частицы.

Но если нужно найти давление внутри такой частицы, то различие в движении разных ее частей уже нельзя не учитывать: возникающие упругие напряжения определяются именно этим различием, т. е. деформацией частицы, например в жидкости — изменением объема, сжатием среды. При этом *степень сжатия* можно считать постоянной на всем протяжении частицы. Наконец, если требуется найти результирующую сил упругости, действующих на частицу со стороны смежных частиц, то необходимо еще более детальное знание движения частицы: следует знать различие в сжатии (а следовательно, и в давлении) по обе стороны частицы.

Есть исключительные случаи, когда картиной сплошной среды нельзя пользоваться всюду и понятие частицы пригодно не ко всем участкам среды. Например, в сильной ударной волне в газе (например, при взрыве) свойства среды резко меняются на расстоянии порядка длины свободного пробега молекул. Тогда участки, пересекаемые фронтом такой волны, нельзя считать частицами. Эти вопросы выходят, однако, за рамки настоящей книги.

Акустику жидкостей и газов будем рассматривать совместно на основе гидродинамики сжимаемой жидкости: возмущение и в жидкостях и в газах одинаково передается силами давления, возникающими при сжатии и расширении частиц. Термином «жидкость» будем поэтому для краткости обозначать как капельные жидкости, так и газы. В твердых телах возникают, помимо давления, еще и сдвиговые упругие напряжения при изменении формы частиц. Поэтому есть важные различия в акустическом поведении твердых тел (которое мы будем рассматривать на основе теории упругости) и жидкостей.

В основном эта книга посвящена акустике жидкостей. Акустика твердых тел изучается в последних трех главах книги.

§ 3. Задачи акустики

Превышение p давления в волне над давлением P в невозмущенной среде (например, в воздухе — превышение над атмосферным давлением) будем называть *акустическим давлением* или *звуковым давлением*. Подчеркнем, что эта величина нас интересует сама по себе, а не как приращение невозмущенного давления. Основные величины, характеризующие акустическое состояние жидкости помимо давления, это скорость частиц жидкости (v), а также плотность (ρ) и температура (T) жидкости.

При движении жидкости, в том числе и в любой звуковой волне, все эти величины изменяются от точки к точке и с течением вре-

мени. Изменения этих величин зависят друг от друга. Так, давление зависит от плотности и температуры, изменение скорости частиц с течением времени зависит от пространственного изменения давления и т. п.

Если все эти изменения зависят от времени и координат достаточно гладко, то связь между величинами, характеризующими волну, оказывается чрезвычайно сильной: в этом случае задание пространственно-временной зависимости только одной из величин (например, давления) однозначно определяет пространственно-временные зависимости всех остальных величин.

Математически зависимости между величинами, характеризующими упругую волну, можно выразить дифференциальными уравнениями в частных производных с независимыми переменными — временем и координатами. Согласно сказанному выше эти уравнения обеспечивают однозначное решение для всех входящих в них характеристик волны, если зависимость от времени и координат для одной из этих величин задана. Такие системы уравнений называют *полными*.

В гидродинамике идеальной жидкости полная система состоит из *уравнения движения, уравнения непрерывности и уравнения состояния среды* *). В следующей главе мы подробно рассмотрим эту полную систему.

Полная система уравнений сама по себе отнюдь не определяет еще движение жидкости, в нашем случае — волну; однозначность движения получится, только если, как сказано выше, задать зависимость от времени и координат какой-либо из величин, характеризующих волну, либо же подчинить волну дополнительным условиям: наложить на искомое движение некоторые дополнительные требования, т. е. указать конкретную *акустическую ситуацию*, определяющую волну.

Основные типы задач, встречающиеся в различных акустических ситуациях и приводящие к однозначному решению, следующие.

1. *Задачи о свободных волнах.* Нахождение волн, которые могут распространяться в неограниченной среде в отсутствие внешних воздействий; нахождение типов волн, сохраняющих свою форму при распространении.

2. *Задачи с начальными условиями.* В них задается распределение давления и скоростей частиц во всей среде для некоторого момента времени (начальный момент) и требуется найти волну в дальнейшие моменты времени. Можно доказать, что эта задача решается однозначно.

3. *Краевые задачи.* В этих задачах изучают волны в ограниченном участке среды, свойства границ которого считают заданными.

*) Если потребуется учесть вязкость и теплопроводность жидкости, мы не будем писать соответственные общие уравнения: в акустике всегда можно учесть эти факторы как поправку к волнам в идеальной жидкости.

Например, это могут быть абсолютно жесткие, абсолютно мягкие и другие типы стенок. Оказывается, что в отсутствие внешних воздействий в таком объеме среды возможен только дискретный набор гармонических колебаний среды; задача сводится к нахождению этого набора.

4. Задачи о *сторонних воздействиях — источниках звука*. В этих задачах рассматривают звуковые волны, создаваемые посторонними телами, помещенными в неограниченную среду и совершающими колебания, или силами, приложенными к среде, и т. п. Звуковое поле в этом случае — волны, расходящиеся от колеблющихся тел и уходящие в бесконечность.

5. Задачи о *рассеянии от препятствий*. В этих задачах задано звуковое поле и требуется найти, как оно изменится, если поместить в среду те или иные препятствия. Это — задачи об отражении и прохождении звука, а также дифракционные задачи.

6. Задачи с *затуханием звука*. Зная степень неидеальности среды (вязкость и теплопроводность), найти затухание волн по мере их распространения.

Большинство других задач акустики сводится к тем или иным комбинациям перечисленных типов. Например, можно поставить задачу с начальными условиями для ограниченного участка среды; тогда, помимо нахождения гармонических частот и формы колебания дискретного набора волн, можно будет еще найти и амплитуду каждого колебания. В архитектурной акустике имеют дело с источниками звука, расположенными в ограниченном участке среды. В гидроакустике рассматривают распространение звука в среде (вода), ограниченной двумя плоскостями (дном моря и свободной поверхностью воды).

Основное внимание в этой книге будет уделено разбору типичных задач, возникающих в различных акустических ситуациях, изложению общих и специальных методов их решения и получению ответов для наиболее важных и часто встречающихся случаев.

§ 4. Скорость звуковых волн

Прежде чем переходить к изучению конкретных типов волн, уточним понятие скорости в применении к такому объекту, как звуковая волна.

В справочниках приведены значения скорости звука в различных средах. В газах скорость звука близка к средней скорости молекул и составляет при нормальных условиях несколько сот метров в секунду (наибольшая скорость у водорода, 1200 м/сек). Скорость звука в жидкостях составляет, в круглых числах, от 1 до 2 км/сек. Скорость упругих волн в твердых телах доходит до 5—6 км/сек, а в алмазе имеет рекордное значение 18 км/сек, превосходя третью космическую скорость!

Мы уже говорили, что поведение волны сильно отличается от поведения материальных точек. Уточним теперь, что именно

подразумевают под термином «скорость» применительно к звуку. Оказывается, это понятие не совпадает с тем, которое принято для тел.

В самом деле, скорость тела определяют как отношение пути, пройденного телом, ко времени, затраченному на прохождение

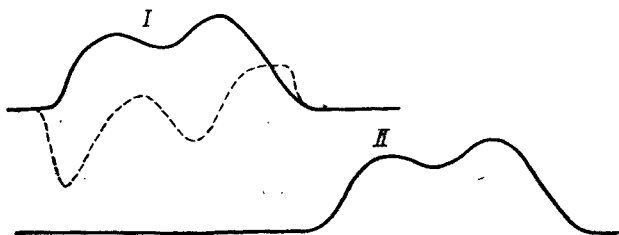


Рис. 4.1. Поперечная волна бежит вдоль струны, не меняя формы профиля. Сплошная линия — профиль смещений, пунктир — профиль поперечных скоростей (для момента I).

этого пути. При этом подразумевается, что отождествление тела в разные моменты времени всегда возможно: для макроскопических тел это не представляет трудностей, а меченые атомы позволяют фиксировать даже микроскопические частицы вещества. Объект, положение которого фиксируют в разные моменты времени для того, чтобы определить его скорость, вовсе не должен быть обязательно материальным телом. Скорость зайчика гальванометра можно искать с тем же правом и таким же точно способом, как и скорость дробинки или скорость небесного тела. Требуется только, чтобы объект практически не изменялся с течением времени, так, чтобы его можно было отождествить в двух разных положениях.

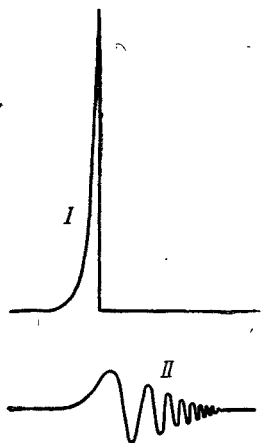


Рис. 4.2. Короткая поперечная волна на стержне (I) превращается с течением времени в длинный знакопеременный сигнал (II).

Возможность отождествить в разные моменты времени движущееся тело и каждую его частицу в механике тривиальна и всегда подразумевается. Но волна связана в разные моменты с различными частицами среды. Поэтому отождествление может относиться только к форме волны.

Если форма волны сохраняется, то отождествление возможно. Форма сохраняется, например, для любой бегущей волны на натянутой струне (см. § 6). На рис. 4.1 изображены «моментальные фотографии» натянутой струны, по которой бежит поперечная волна, в некоторые моменты I и II. Видно, что волна бежит по

струне без изменений формы, подобно твердому телу. В этом случае длину пробега волны легко определить, скорость волны имеет простой физический смысл и эту скорость можно измерять.

На рис. 4.2 даны аналогичные моментальные фотографии поперечной изгибающей волны на стержне. Мы видим, что форма волны изменилась неузнаваемо и отождествление соответственных точек волны в два разных момента времени невозможно. В этом случае нет никакой определенной длины пробега, а понятие скорости волны не имеет смысла. Дело не в том, что эту скорость трудно измерить, а в том, что понятие скорости *неприменимо* к объектам, которые меняют свою форму слишком быстро. Волна не сохраняет в этом случае свое тождество в том смысле, как сохраняет свое тождество материальное тело: даже если тело деформируется или распадается на части, эти части все же можно отождествить; но пометить отдельные точки волны так, чтобы потом, когда ее форма изменится, снова опознать их, — невозможно принципиально.

Наиболее интересные для нас продольные звуковые волны в неограниченной среде сохраняют, как правило, свою форму *); поэтому для них понятие скорости звука применимо. Эту скорость и указывают в справочниках.

§ 5. Одномерная волна. Способ «остановки движения»

Скорость одномерных волн можно найти, не обращаясь к механике волн как таковой, прямо на основе динамики материальных тел. Мы рассмотрим вкратце в этом и в ближайших параграфах одномерные волны и некоторые конкретные примеры таких волн.

Одномерные волны — это волны, в которых все характеристики зависят, помимо времени, только от одной координаты. Одномерными могут быть как волны, бегущие в одномерной среде (волны на струне, в стержне, в жидкости, заполняющей узкую трубу, и т. п.), так и волны в двухмерных (плоская волна на пластинке) и трехмерных средах (плоская волна в неограниченной среде). Если эту единственную координату обозначить через x , то каждая величина, характеризующая волну (давление, скорость частиц и т. д.), будет некоторой функцией времени и этой координаты (для определенности рассматриваем давление p):

$$p = p(x, t).$$

График зависимости от координат или от времени какой-либо величины, характеризующей волну, называют пространственным или временным *профилем* волны для этой величины. Профили разных величин в одной и той же волне вообще различны. Например, профиль скоростей частиц для волны на струне, показанный на рис. 4.1 для момента t пунктиром, имеет совершенно другую форму,

*) Строго говоря, форма сохраняется только приближенно, однако с достаточной точностью (см. § 9).

чем профиль смещений, изображенный сплошной линией. Особенно интересны волны, не меняющие своего профиля при распространении. Такие волны можно использовать для передачи информации: информация, заключенная в форме волны, передается в этом случае без потерь. Для таких волн понятие скорости применимо, а зависимость любой величины, характеризующей волну, от координаты x и времени t можно записать в виде

$$p = p(x \mp ct),$$

где c — скорость волны, а верхний и нижний знаки соответствуют бегу волны в положительном и отрицательном направлении оси x (мы условно будем называть эти направления «вправо» и «влево»). В самом деле, давая времени произвольное приращение T , а координате соответственное приращение $\pm cT$, получим то же самое значение p . Часто более удобна другая запись:

$$p = p(t \mp x/c). \quad (5.1)$$

Для таких волн «моментальная фотография» пространственного профиля в какой-либо момент t_0

$$p = p(t_0 \mp x/c)$$

совпадает с точностью до масштаба и начала отсчета с временным профилем той же величины в любой фиксированной точке x_0 :

$$p = p(t \mp x_0/c).$$

Для волн, бегущих вправо, пространственный и временной профили «перевернуть» друг относительно друга. Для волн, бегущих влево, такого переворачивания нет.

Очень важны *гармонические* бегущие волны вида

$$p = p_0 \cos(\omega t \mp kx - \varepsilon).$$

Здесь p_0 — *амплитуда* гармонической волны, ε — ее *начальная фаза*; *период* T волны связан с *циклической частотой* ω и «обычной» частотой в герцах (число колебаний в секунду) f соотношением

$$T = 2\pi/\omega = 1/f.$$

Длина волны λ связана с *волновым числом* k соотношением

$$\lambda = 2\pi/k.$$

Пространственный и временной профили гармонической одномерной бегущей волны — синусоиды. Скорость гармонической волны называют *фазовой скоростью*; она выражается через циклическую частоту и волновое число формулой

$$c = \omega/k. \quad (5.2)$$

Для всякой волны, бегущей без изменения формы, временная и пространственная производные величин, характеризующих волну,

связаны простым соотношением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mp c \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Вторые производные по времени и по координате в такой волне оказываются связанными уравнением

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0. \quad (5.3)$$

Это — *волновое уравнение* (в одном измерении). Оно вообще удовлетворяется только данной волной. Но если в данной среде волна любой формы бежит без изменения профиля с той же скоростью c , то (5.3) — общее уравнение бегущих одномерных волн для данной среды. Если разные волны, сохраняющие свою форму, бегут с разными скоростями, то говорят, что имеет место *дисперсия скорости* волн. В этом случае не все волны могут сохранять свою форму при распространении, а (5.3) не удовлетворяется любой волной.

Как мы увидим, синусоидальные волны сохраняют свою форму при распространении. При наличии дисперсии фазовые скорости различны для гармонических волн разной длины или разной частоты. Если фазовая скорость одинакова для всех синусоидальных волн, то дисперсии нет.

В реальных средах встречаются все варианты: в некоторых средах дисперсия отсутствует и без изменения формы распространяются любые волны, в других форму сохраняют только некоторые виды волн и имеется дисперсия скорости, в третьих вообще нет волн, распространяющихся без изменения формы.

В следующих параграфах дадим примеры всех этих вариантов, причем будем применять наглядный *метод остановки движения*: будем искать такую движущуюся относительно среды систему координат (x'), относительно которой профиль волны был бы неподвижен. Если это удастся, — значит, волна бежит без изменения формы и ее скорость c равна скорости системы (x') относительно «абсолютной» системы координат (x), в которой среда покоится. Относительно такой системы (x') движение частиц в волне будет установившимся: среда будет «протекать» с постоянной скоростью вдоль профиля волны.

Ввиду простоты установившихся движений этот метод позволит легко найти скорость бегущей волны.

В качестве примеров рассмотрим поперечные волны на струне и на стержне и продольные волны в неограниченной среде. Эти случаи хорошо известны из общего курса физики; здесь мы рассматриваем их другим способом, чтобы показать, как можно найти скорость бегущей волны, не прибегая к общим уравнениям для этих волн. Кроме того, последний пример позволит нам пояснить требование малости колебаний, о котором упоминалось в конце § 1.

Заметим, что упругие волны — не единственно возможные механические волны. Например, в волнах на поверхности воды

(морское волнение) передача возмущения водной поверхности осуществляется силой тяжести, в магнитоакустических волнах — лоренцевыми силами. Законы распространения всех механических волн сходны между собой. В этой книге мы рассмотрим только упругие волны.

§ 6. Поперечные волны на струне

Классический пример распространения волн — *поперечная волна* на математической идеальной струне. Так называется бесконечная абсолютно нерастяжимая идеально гибкая нить, натянутая с некоторой постоянной силой *). «Средой» является в данном случае натянутая нить.

Пусть по струне бежит волна поперечных отклонений. Форму деформированной струны можно считать профилем смещений струны. Если возмущение занимает ограниченную область на струне, то неподвижную систему отсчета можно считать связанной

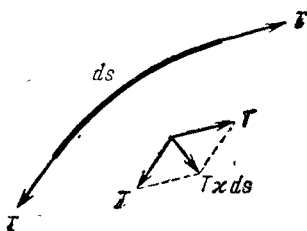


Рис. 6.1. Силы, действующие на элемент струны, и их результирующая.

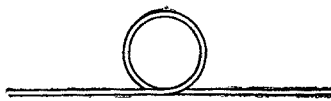


Рис. 6.2. Самопересекающийся профиль бежит по струне с той же скоростью, что и волна любой другой формы.

со струной вне области возмущения: перенос массы, осуществляемый возмущением, бесконечно мал по сравнению с полной массой бесконечной струны. Поэтому, если нам удастся найти такую скорость c подвижной системы отсчета, что профиль струны в этой системе неподвижен, то частицы струны пробегают этот неподвижный профиль с той же скоростью c . Тогда ускорение элемента струны, пробегающего в данный момент времени некоторую точку неподвижного профиля, равно $c^2 \kappa$, где κ — кривизна профиля в этой точке, и направлено по главной нормали к профилю в этой точке.

Обозначим натяжение струны через T и ее погонную плотность через ρ . Элемент струны длины ds имеет массу ρds . Значит сила, которая должна действовать на элемент ds для осуществления данного движения, равна $c^2 \rho ds$ и также направлена по главной нормали к профилю. Но единственные силы, действующие на элемент ds , — это силы натяжения на его концах (рис. 6.1). Их равнодействующая равна $T \kappa ds$ и направлена по главной нормали

*) «Физическая» струна — растяжимая гибкая нить, растянутая постоянной силой.

к элементу. Условие осуществления данного движения имеет вид

$$T \kappa ds = c^2 \mu \rho ds,$$

откуда

$$T = \rho c^2.$$

Это соотношение не зависит от формы профиля волны; при любой форме профиль остается неизменным и бежит относительно струны со скоростью

$$c = \sqrt{T/\rho}.$$

Заметим, что неизменность формы сохраняется и у неплоских, и у самопересекающихся профилей, например имеющих вид витка (рис. 6.2). Такая «баранка» будет бежать по струне с той же универсальной скоростью $\sqrt{T/\rho}$.

§ 7. Изгибные волны на стержне

Более сложный случай — изгибные волны на упругом стержне. Напомним, что понятие изгибных волн само по себе есть некоторая аппроксимация, предполагающая, что все поперечные сечения стержня остаются при изгибе плоскими, а средняя линия остается нерастянутой. Тогда, как известно, взаимодействие элементов стержня сводится к перерезывающим силам F , действующим перпендикулярно к средней линии, и изгибающим моментам M , перпендикулярным к плоскости изгиба. Эти величины связаны соотношением

$$F = -\frac{dM}{ds},$$

где s — длина дуги средней линии стержня. Такая аппроксимация требует только малости высоты поперечного сечения стержня по сравнению с радиусом кривизны профиля, т. е. малости деформаций материала стержня, но несколько не ограничивает ни величину смещений точек стержня от положений равновесия, ни углы наклона профиля к невозмущенной оси стержня, т. е. не ограничивает форму средней линии в целом.

Как и для струны, «остановим движение» и найдем условие неизменности профиля. Мы увидим сейчас, что «остановить» удастся только профили, продолжающиеся периодически неограниченно по всему стержню. В таких волнах нет невозмущенных участков стержня. Поэтому нужно будет различать искомую скорость c подвижной системы относительно центра тяжести стержня и скорость v протекания среды по «остановленному» профилю.

Найдем сначала скорость протекания v . Как и для струны, результирующая сила, действующая на элемент стержня ds , равна $\rho v^2 \kappa ds$ и совпадает по направлению с нормалью к профилю волны в данной точке (ограничимся волнами, оставляющими среднюю

линию стержня в одной плоскости). Равнодействующая сил, действующих на данный элемент стержня, образована разностью перерезывающих сил на концах элемента. Она равна

$$\frac{dF}{ds} ds = -\frac{d^2M}{ds^2} ds$$

и также направлена по нормали к профилю. Но, как известно, изгибающий момент пропорционален кривизне стержня: $M = G\kappa$, где G — изгибная жесткость стержня — величина, зависящая от упругих свойств материала стержня и от размеров и формы его поперечного сечения. Следовательно, условие неизменности профиля волны выражается уравнением

$$\frac{d^2\kappa}{ds^2} + \frac{\rho v^2}{G}\kappa = 0. \quad (7.1)$$

В отличие от соответственного условия для струны, оно удовлетворяется не при всякой форме профиля: его можно рассматривать как уравнение для кривизны профиля тех волн, которые распространяются без изменения формы; скорость протекания среды через остановленный профиль есть произвольный параметр задачи.

Выбирая удобным образом начало отсчета дуг, можем записать общее решение уравнения (7.1) в виде

$$\kappa = \kappa_0 \cos ks, \quad (7.2)$$

где

$$k = v\sqrt{\rho/G}, \quad (7.3)$$

а произвольная величина κ_0 — амплитуда кривизны профиля. Зависимость кривизны от длины дуги средней линии стержня оканчивается, таким образом, синусоидой с волновым числом, пропорциональным скорости протекания.

Угол наклона стержня к оси x выразится формулой

$$\varphi = \varphi_0 \sin ks, \quad (7.4)$$

где амплитуда угла наклона равна $\varphi_0 = \kappa_0/k$. На рис. 7.1 построены по формуле (7.4) профили волн с одной и той же скоростью протекания (а значит, и с одинаковыми длинами волн), но с различными амплитудами угла наклона. Числа означают амплитуду угла наклона в радианах.

Из (5.2) и (7.3) следует, что частота изменения кривизны для каждого элемента стержня равна $\omega = vk = v^2\sqrt{\rho/G}$. Отсюда следует, что скорость протекания v связана с волновым числом и с частотой формулами

$$v = k\sqrt{G/\rho} = \sqrt{\omega^4/G\rho}. \quad (7.5)$$

Скорость c перемещения профиля относительно неподвижной системы координат зависит как от длины волны $\lambda = 2\pi/k$, так и от

амплитуды φ_0 . В самом деле, при протекании участка стержня длиной в одну длину волны λ смещение центра тяжести этого участка в направлении оси x равно согласно (7.4)

$$\int_0^{\lambda} \cos(\varphi_0 \sin ks) ds = \frac{1}{2\pi} \lambda \int_0^{2\pi} \cos(\varphi_0 \sin u) du = \lambda J_0(\varphi_0).$$

Таким образом, ясно, что скорость центра тяжести участка стержня относительно неподвижного профиля (а следовательно, и искомая скорость профиля c) равна

$$c = v J_0(\varphi_0). \quad (7.6)$$

Здесь $J_0(\varphi_0)$ — бesselева функция нулевого порядка от амплитуды угла поворота стержня φ_0 .

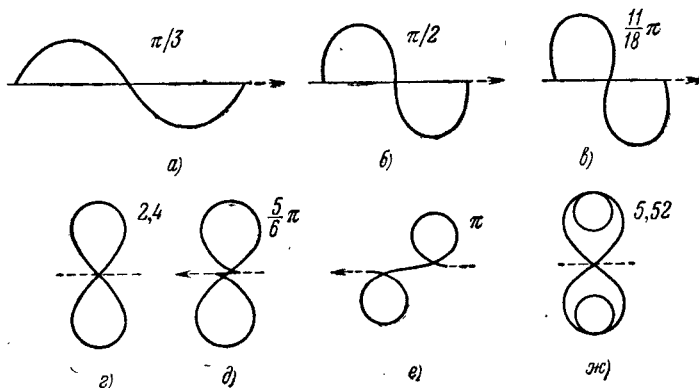


Рис. 7.1. Отрезки профиля поперечных смещений неизменных волн с одной и той же скоростью протекания v , но с различными амплитудами угла наклона. Для каждого угла наклона изображен отрезок профиля в одну длину волны. Участок оси абсцисс между концами витка пропорционален скорости c данной волны относительно неподвижной системы координат.

Итак, изгибные волны обладают дисперсией: скорость изгибных волн растет с уменьшением длины волны. Такую дисперсию называют аномальной; нормальной дисперсией считается рост скорости вместе с ростом длины волны. Эти термины заимствованы из оптики: обычно в прозрачных средах скорость световых волн растет с длиной волны.

На рис. 7.1 длина участка оси абсцисс, соответствующего одному витку, отнесенная к длине волны, равна отношению c/v . Скорость c для волн (г) и (ж) равна нулю; скорость для волн (д) и (е) относительно неподвижной системы координат направлена, в отличие от остальных профилей, влево. В системе координат, в которой профили неподвижны, перетекание происходит из нижнего витка в верхний и обратно.

Форма профиля и законы движения точек стержня в декартовых координатах x, y имеют очень сложный и мало наглядный вид. Упрощение получается только для малой амплитуды углов наклона профиля: $\varphi_0 \ll 1^*$). Тогда бесселева функция близка к единице, так что можно считать скорость протекания и скорость профиля относительно неподвижной системы координат равными. Кроме того, при $\varphi_0 \ll 1$ можно положить $s = x$ и $\kappa = d^2y/dx^2$ (y — поперечное смещение стержня), совершая ошибку, не большую чем φ_0^2 по сравнению с единицей. Тогда уравнение (7.2) можно записать в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \kappa_0 \cos kx.$$

Дважды интегрируя по x , найдем форму неподвижного профиля в декартовых координатах в виде

$$y = -\frac{\kappa_0}{k^2} \cos kx.$$

В неподвижной системе координат волна имеет, следовательно, вид

$$y = -\frac{\kappa_0}{k^2} \cos(kx - \omega t),$$

где ω и k связаны уравнением $\omega = k^2 \sqrt{G/\rho}$.

§ 8. Продольные плоские волны в жидкости

В предыдущих двух параграфах мы занимались довольно «экзотическими» типами волн. Теперь перейдем к чаще всего встречающимся продольным волнам, имеющим в акустике наибольшее значение: рассмотрим одномерную волну сжатия в упругой среде. Примерами могут служить плоские волны в неограниченной среде, продольные волны в газе или жидкости, заключенных в цилиндрическую трубу, продольные волны в упругом стержне.

Пусть одномерная волна сжатия бежит в жидкости в положительном направлении оси x . Характеристики этой волны одинаковы во всех точках любой плоскости, перпендикулярной к оси x , а смещения всех частиц параллельны этой оси. Частицей среды в такой волне можно считать участок среды между близкими плоскостями, перпендикулярными к оси x . Взаимодействие частиц сводится к силам давления, действующим по границам между частицами.

*) Физический смысл этого неравенства — малость длины изгибающей волны по сравнению с ее радиусом кривизны. Это условие эквивалентно требованию малости амплитуды линейного отклонения стержня от прямой по сравнению с длиной волны.

В рассматриваемом случае можно мысленно выделить в среде цилиндрическую трубку произвольного (например, единичного) сечения с осью, параллельной оси x , и рассматривать движение среды только внутри такой трубки, считая стенки трубки абсолютно жесткими: наличие такой трубки не нарушило бы движения среды внутри нее.

Как и в предыдущих двух примерах распространения волн, применим метод «остановки движения». В данном случае профиль волны — это график зависимости давления в среде от координаты x . Если существует система координат (x'), относительно которой профиль волны неподвижен, то движение среды относительно такой системы координат *установившееся* и среда в трубке протекает относительно этой системы в обратном направлении. В тех местах, где возмущение отсутствует, например в сечении B , скорость протекания среды относительно системы (x') равна c и направлена в отрицательную сторону. В местах, где возмущение отлично от нуля, например в сечении A , скорость протекания среды c' отлична от c . Если v — скорость частиц относительно неподвижной системы, то $c' = c - v$.

Поскольку движение установившееся, к участку AB трубки можно применить в системе (x') законы сохранения вещества и импульса. Согласно закону сохранения вещества при установившемся движении суммарная масса среды, вытекающей из трубки, должна быть равна нулю. Пусть среда втекает в A и вытекает из B . Обозначим невозмущенную плотность среды через ρ , а возмущенную — через $\rho' = \rho + \delta\rho = \rho(1 + s)$; относительное приращение плотности $s = \delta\rho/\rho$ называют *акустическим сжатием* среды. Закон сохранения вещества запишется в виде

$$\rho c - \rho' c' = 0,$$

откуда следует

$$v = c - c' = sc' = \frac{s}{1+s} c. \quad (8.1)$$

Далее, согласно закону сохранения импульса, для установившегося течения жидкости сумма приращения количества движения среды в рассматриваемом объеме за единицу времени и импульса сил давления, действующих на границы объема, равна нулю. Изменение количества движения создается средой, втекающей в A и вытекающей из B .

Так как вытекает жидкость, несущая отрицательное количество движения, то поток через B дает положительное приращение количества движения ρc^2 , а поток через A дает отрицательное приращение количества движения $-\rho' c'^2$.

Исходное давление (например, атмосферное давление в воздухе) дает суммарный импульс, равный нулю. Акустическое давление в месте наличия возмущения (в сечении A) дает импульс $-p$. Таким

образом, закон сохранения импульса запишется в виде

$$\rho c^2 - \rho' c'^2 - p = 0.$$

Пользуясь полученными выше равенствами, найдем отсюда

$$p = \rho c(c - c') = \rho c v = \rho c^2 \frac{s}{1+s}. \quad (8.2)$$

Эта зависимость между акустическим давлением и акустическим сжатием должна выполняться для того, чтобы законы сохранения были справедливы, т. е. для того, чтобы в системе (x') движение было установившимся. Если бы этому требованию удалось удовлетворить при каком-либо значении s , то была бы возможна плоская продольная волна, бегущая без изменения формы, и ее скорость была бы равна этому значению s .

Однако фактически такая зависимость не выполняется ни для каких реальных веществ: во всех веществах давление растет быстрее, чем плотность, а не медленнее, как следовало бы из (8.2). Следовательно, для реальных сред желаемую систему координат найти нельзя, т. е. в реальной среде продольная плоская волна не может распространяться без изменения своей формы.

§ 9. Волны малой амплитуды. Линеаризация

Повседневный опыт и лабораторные исследования показывают, однако, что в действительности продольные волны с высокой точностью сохраняют форму своего профиля. Дело в том, что для малых амплитуд волны, когда s достаточно мало по сравнению с единицей, уравнение (8.2) удовлетворяется приближенно с высокой степенью точности. В самом деле, если пренебречь малой величиной s по сравнению с единицей, то правую часть (8.2) можно приближенно заменить величиной $\rho c^2 s$; при этом, сохраняя члены порядка s , мы отбрасываем члены, квадратичные по s , и члены еще более высокого порядка малости. С другой стороны, при малых степенях сжатия приближенно выполняется закон Гука: давление пропорционально степени сжатия. Это значит, что, снова с точностью до членов первого порядка по s , можно считать

$$p = Ks, \quad (9.1)$$

где постоянная K — *модуль упругости* среды — величина, обратная так называемой *сжимаемости* среды $\beta = 1/K$. Теперь для удовлетворения (8.2), т. е. для «остановки профиля», достаточно положить $\rho c^2 = K = 1/\beta$, откуда, с той же степенью точности,

$$c = \sqrt{K/\rho} = \sqrt{1/\beta\rho}, \quad (9.2)$$

где, не изменяя порядка погрешности, можно в качестве плотности брать как возмущенное, так и невозмущенное значение.

Строго говоря, это — предельный результат, справедливый при стремлении s к нулю. Часто говорят, что результат относится к «бесконечно малым амплитудам». Найденная величина c есть, таким образом, скорость продольных волн бесконечно малой амплитуды. Форма волны при этом безразлична: дисперсия отсутствует и волна любой формы бежит с одной и той же скоростью, т. е. возможны волны вида $p(t \mp x/c)$ при любом виде функции p . Обращаясь к физическому смыслу величин p и $\delta p = \rho s$ как приращений невозмущенных давления P и плотности ρ и комбинируя формулы (9.1) и (9.2), найдем

$$c^2 = \frac{p}{\delta\rho} = \frac{dP}{d\rho}. \quad (9.3)$$

Из формулы (9.2) следует, что, зная плотность среды и скорость звука в ней, можно найти ее модуль упругости (или сжимаемость среды). Обычно на практике определение сжимаемости производится акустическим методом путем непосредственного измерения скорости звука и плотности среды. Как увидим, в формулу (9.2) входит адиабатическая сжимаемость среды (см. § 15).

Скорость волны малой амплитуды найдена выше в результате применения двух аппроксимаций, которые обычно называют *линеаризациями*, так как они состоят в отбрасывании квадратичных по s и сохранении линейных по s членов. Одна из аппроксимаций связана с кинематикой движения: это — линеаризация соотношения между сжатием и скоростью частиц, полученного из закона сохранения массы. Она заключается в замене нелинейного соотношения (8.1) на линейное:

$$v = cs. \quad (9.4)$$

Вторая аппроксимация относится к динамике. Эта линеаризация заключается в замене истинной зависимости между сжатием и давлением линейной зависимостью (законом Гука). В газах главная часть ошибки, вызываемой линеаризациями, обусловлена кинематической линеаризацией, в жидкостях и твердых телах — динамической линеаризацией.

Ошибка, обусловленная линеаризациями, мала в том смысле, что в уравнениях отброшены члены, малые по сравнению с сохраняемыми членами. Это не значит, однако, что ошибка будет оставаться малой и в *решении* уравнения, во все время движения волны. Напротив, можно показать, что ошибка, обусловленная линеаризациями, накапливается по мере распространения волны: чем дальше пробежала волна, тем сильнее деформируется ее профиль. Здесь можно провести аналогию с другими случаями, когда также пренебрежение малыми величинами по сравнению с большими приводит в конце концов к ошибке, не малой по сравнению с интересующей нас величиной. Например, силы внутренней вязкости в звуковой волне ничтожны по сравнению с силами упругости. Однако если не учитывать эти малые силы вязкости, то придем

к заключению, что волна никогда не затухнет. Здесь также причина неправильного заключения — в неучете накапливающегося эффекта. Ясно, что как квадратичными членами при определении скорости, так и вязкими силами при определении амплитуды волны можно пренебрегать только на ограниченных участках распространения волны. «Достаточная» малость s означает, что на данном участке распространения волны ошибка не успевает накопиться до существенной в рассматриваемой задаче величины.

Из (9.4) следует, что условие применимости для плоской волны принятых аппроксимаций — малость акустического сжатия s — может быть сформулировано еще и как условие малости отношения v/c скорости частиц к скорости звука по сравнению с единицей. Вообще отношение какой-либо скорости к скорости звука называют *числом Маха* и обозначают буквой M . Значит, линейаризация для плоской волны допустима (во всяком случае на ограниченных участках) в тех случаях, когда число Маха для движения частиц среды в волне мало по сравнению с единицей. Для оценки порядка чисел Маха в обычно встречаемых звуках укажем, что в воздухе при мощных звуковых волнах, создающих в ушах болевое ощущение, число Маха достигает всего 0,0014.

В этой книге нас будет интересовать волны малой амплитуды, для которых линейаризация дает малую ошибку. Только в гл. XIII мы специально рассмотрим, какие изменения вносит учет следующего приближения в нелинейных уравнениях, которым подчиняются звуковые волны.

§ 10. Замечание относительно закона Гука

Из сказанного ясно, что кинематическая аппроксимация тем точнее, чем меньше деформация (сжатие) в волне. На первый взгляд представляется, что так же должно всегда обстоит дело и с динамической аппроксимацией и что для любой среды и для деформации любого вида (пока она мала) сила должна быть пропорциональна величине, характеризующей деформацию. Можно попытаться обосновать это утверждение тем, что при малом изменении формы тела возникающую силу всегда можно разложить в степенной ряд по величине, характеризующей деформацию, и пренебречь в разложении всеми членами, кроме первого.

Однако утверждение, что упругая сила всегда пропорциональна вызывающему ее смещению, не всегда верно. Например, для растянутой упругой (т. е. растяжимой) нити, закрепленной в двух точках без провисания и оттягиваемой действием силы, приложенной к ее середине, можно принять за величину, характеризующую деформацию, поперечное смещение нити в точке действия силы. Легко видеть, что для малых значений поперечного смещения сила пропорциональна кубу смещения. В этом случае линейаризация неприменима ни при каких амплитудах. Ясно, что линейаризация возможна только тогда, когда разложение в степенной ряд

начинается с члена, содержащего первую степень величины, характеризующей деформацию.

Встречаются, как исключение, и неограниченные среды, в которых нельзя произвести линеаризацию соотношения деформация — сила даже для малых деформаций, например сыпучие тела, порошки. Так, при сжатии песка или порошка упругие силы возникают, но при растяжении песчинки просто отходят друг от друга и сила упругости не возникает. Линейность соотношения деформация — сила получится, если песок уже сжат предварительно, как, например, в песчаном грунте на большой глубине, где песчинки прижаты друг к другу весом вышележащих слоев; сжатие будет увеличивать, а разрежение — уменьшать уже имеющуюся упругую силу взаимодействия между песчинками и дополнительная сила будет линейно зависеть от деформации.

Опыт показывает, что в обычных однородных связных средах закон Гука справедлив для малых деформаций и без всякого предварительного сжатия. Среда, в которых выполняется закон Гука для малых деформаций, будем называть *линейными*.

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ.
ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 11. Полная система уравнений гидродинамики

В этой главе мы начинаем систематическое изучение акустики. «Остановка движения» — искусственный прием, которым удастся рассматривать только одномерные бегущие волны. Поэтому сейчас обратимся к полной системе уравнений гидродинамики (о ней уже упоминалось в § 3), которая позволит изучать любые волны. Напомним вкратце вывод этих уравнений (подробности можно найти в любом учебнике гидродинамики).

Начнем с вывода уравнения Эйлера — уравнения движения частиц под действием сил упругости среды. Рассмотрим малую частицу среды объема Ω , ограниченную поверхностью S . Так как частица мала, а характеристики среды непрерывны, можем считать плотность среды по всей частице постоянной, массу частицы приравнять $\rho\Omega$ и, полагая, что вся частица движется как одно целое, найти ее ускорение как производную $d\mathbf{v}/dt$ ее скорости по времени. Силы, действующие на частицу со стороны окружающей среды, — это силы давления. На элемент поверхности $dS = \mathbf{N} dS$ (dS — площадь элемента, \mathbf{N} — единичная внешняя нормаль к поверхности) действует сила $-\mathbf{p} dS$; результирующая сил давления составит

$$-\int_S \mathbf{p} dS.$$

Таким образом, в применении к частице, находящейся под действием только сил давления, второй закон Ньютона имеет вид

$$\rho\Omega \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\int_S \mathbf{p} dS.$$

Согласно теореме Гаусса—Остроградского интеграл по поверхности можно заменить интегралом по объему:

$$\int_S \mathbf{p} dS = \int_{\Omega} \nabla p d\Omega.$$

Но при непрерывности всех характеристик среды градиент давления на протяжении малой частицы можно считать постоянным, так

что интеграл равен $\Omega \nabla p$. Окончательно, сокращая на Ω и перенося все члены в одну часть, получим уравнение Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = 0. \quad (11.1)$$

Если помимо сил давления на среду действуют сторонние силы, распределенные с плотностью \mathbf{f} на единицу объема, то уравнение (11.1) примет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (11.2)$$

Уравнение движения среды есть *нелинейное* векторное уравнение первого порядка относительно характеристик среды p , \mathbf{v} , ρ .

Так как скорость частиц зависит и от времени, и от координат, то ее производную по времени следует брать с учетом того, что координаты частицы сами зависят от времени. Ускорение выражается через частные производные скорости по времени и по координатам следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}. \quad (11.3)$$

Первый член справа — так называемое *локальное ускорение* — производная скорости по времени, явно входящему; эта часть ускорения характеризует изменение скорости в данном месте пространства. При установившемся течении среды (например, при равномерном протекании жидкости по трубе переменного сечения) эта производная равна нулю. Остальные члены образуют так называемое *конвективное ускорение*, обусловленное переходом частицы из места с одной скоростью в место с другой скоростью. Например, при равномерном течении жидкости в трубе переменного сечения эта часть характеризует увеличение скорости частиц при переходе из широкой части трубы в узкую и уменьшение — при переходе из узкой части в широкую. Пользуясь (11.3), можно записать уравнение Эйлера в виде

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0. \quad (11.4)$$

Выведем теперь *уравнение неразрывности* среды. Название связано с тем, что это уравнение справедливо, только если в среде не образуются разрывы (как, например, разрывы при кавитации).

Рассмотрим объем Ω среды, ограниченный неподвижной поверхностью S . Если разрывов нет, то приращение массы в объеме равно массе среды, втекающей через поверхность S . Скорость приращения массы в малом объеме равна $\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}$; масса, втекающая за единицу времени через элемент поверхности dS , равна $-\rho \mathbf{v} dS$.

Следовательно, уравнение неразрывности выразится следующим равенством:

$$\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_S \rho v dS.$$

Снова заменяя интеграл по поверхности интегралом по объему, получим

$$\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_{\Omega} \nabla(\rho v) d\Omega.$$

Ввиду малости рассматриваемого объема можно положить интеграл равным $\Omega \nabla(\rho v)$. Сокращая на Ω и перенося все члены в одну часть, получим окончательно уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0. \quad (11.5)$$

Уравнение неразрывности скалярно и, как и уравнение Эйлера, *нелинейно* относительно характеристик среды.

В дальнейшем встретятся случаи движения среды, удовлетворяющие вместо уравнения неразрывности уравнению вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = \rho V. \quad (11.6)$$

Это уравнение можно также интерпретировать как уравнение неразрывности, но примененное к среде, куда поступает «из ниоткуда» дополнительное «стороннее» количество среды. Величину V называют *плотностью сторонней объемной скорости*: она дает дополнительный объем, поступающий за единицу времени в единичный объем.

Наконец, *уравнение состояния* связывает давление, плотность (или сжатие) и температуру среды. Уравнение состояния не имеет какого-либо стандартного вида для всех веществ, наподобие уравнения Эйлера или уравнения неразрывности. Поэтому запишем его здесь в самом общем виде:

$$f(P, \rho, T) = 0. \quad (11.7)$$

Уравнение состояния также *нелинейно*.

Если при данном движении среды плотность однозначно связана с давлением (так бывает обычно в акустике), то уравнение состояния можно записать в виде

$$\rho = \rho(P) \text{ или } s = s(p). \quad (11.8)$$

Система уравнений (11.1), (11.5) и (11.7) или (11.8) является *полной системой уравнений гидродинамики*.

§ 12. Граничные условия

На границе жидкости с другими телами движение жидкости подчиняется определенным условиям — граничным условиям. Например, на абсолютно жесткой поверхности нормальная компонента скорости частиц должна обращаться в нуль:

$$Nv = 0. \quad (12.1)$$

Это соотношение можно считать определением абсолютно жесткой поверхности. Реальное осуществление такой границы возможно с хорошей точностью только для газов: в нормальных условиях достаточно массивное твердое тело или поверхность жидкости (но только для звуковых волн *) практически почти всегда можно считать абсолютно жесткими. Для жидкостей и твердых тел осуществить абсолютно жесткую границу затруднительно, но, как увидим, в ряде случаев понятие об абсолютно жесткой границе окажется полезным и для этих сред (см. § 41).

Если жидкость идеальна, то абсолютно жесткая поверхность не накладывает никаких ограничений на касательную компоненту скорости частиц, равную v — $N(Nv)$: жидкость может беспрепятственно скользить вдоль границы. В действительности реальная жидкость прилипает к границе и касательная скорость также обращается в нуль: вблизи границы жидкость оказывается заторможенной, причем расстояние, на котором торможение еще заметно, определяется вязкостью жидкости и частотой колебаний. Эта толщина *акустического пограничного слоя* во всех практически интересных случаях настолько мала по сравнению с длиной звуковой волны, что эффектом прилипания обычно можно пренебрегать (см., однако, §§ 19 и 58).

Другой важнейший тип границы — *абсолютно мягкая граница*. Граничное условие на такой границе (которое можно принять за определение «абсолютной мягкости») есть

$$p = 0. \quad (12.2)$$

Особенность этого условия по сравнению с предыдущим состоит в том, что оно должно быть выполнено не на определенной поверхности в пространстве, а для определенных частиц жидкости, так как для того, чтобы давление оставалось равным нулю, поверхность должна перемещаться в пространстве. Это граничное условие осуществляется на границе капельной жидкости или твердого тела с вакуумом. Для газов границу с вакуумом осуществить нельзя, но есть случаи, как увидим в § 41, когда некоторые поверхности будут играть роль абсолютно мягких границ и для газов.

Другие типы граничных условий будем рассматривать по мере необходимости, когда будем встречаться с ними в конкретных задачах.

*) Для установившихся течений газа поверхность жидкости нельзя считать абсолютно жесткой: ведь морские волны вызываются именно движением воздуха!

§ 13. Полная система акустических уравнений и ее упрощение (линеаризация). Особенности картины сплошной среды в акустике

Полная система уравнений гидродинамики удовлетворяется при любых движениях жидкости; значит, звуковые волны также удовлетворяют этим уравнениям. Это — точные уравнения. Но акустика интересуется только малыми колебаниями среды, и поэтому точность уравнений гидродинамики в акустике — это не только лишнее, но даже и вредное обстоятельство, поскольку оно связано с большой сложностью этих уравнений, в частности с их нелинейностью. Так как в дальнейшем мы будем интересоваться только звуковыми волнами малых амплитуд, то эти уравнения можно заменить более простыми *приближенными* уравнениями, решения которых будут тем не менее мало отличаться от решений точных уравнений. Особенно важно, что упрощение позволит прийти к *линейным* уравнениям.

В § 9 мы по существу пользовались уже подобным упрощением, которое позволило найти в качестве приближенного решения плоские волны, бегущие без изменения формы, и определить скорость таких волн. Теперь сделаем подобное же упрощение в полной системе точных уравнений гидродинамики; именно, отбросим в них те члены, которые *для звуковых волн* оказываются малыми по сравнению с остальными членами. Для того чтобы можно было выполнить такое разделение различных членов, оценим раньше всего входящие в уравнения гидродинамики производные по времени и по пространству от величин, характеризующих волну (давление, скорость частиц и т. д.). Так как речь идет не о вычислениях, а об оценках производных, расчет можно делать грубо, по порядку величины. Попутно получим такую же грубую оценку применимости понятия «малые амплитуды», которой уже пользовались в § 9, а также грубую оценку отбрасываемых «малых величин» в уравнениях.

Итак, пусть T — характерный промежуток времени для данной волны, т. е. промежуток времени, в течение которого данная величина в волне (например, давление) меняется на величину своего порядка. Тогда частную производную этой величины по времени можно оценить как отношение ее наибольшего значения к промежутку времени T . (Частную производную какой-либо величины по времени d/dt будем в дальнейшем обозначать иногда индексом t или точкой над символом дифференцируемой величины.) Для гармонической плоской волны наибольшее значение производной по времени какой-либо величины равно амплитуде самой величины, умноженной на угловую частоту ω . Значит, для гармонической волны за характерный промежуток времени следует принять $1/\omega = T_0/2\pi$, где T_0 — период волны.

Аналогично пусть L — характерная длина, т. е. расстояние, на котором (в среднем) данная величина меняется на величину

своего порядка. Частная производная по координате по порядку равна тогда отношению наибольшего значения дифференцируемой величины к длине L . Для гармонической плоской волны за характерную длину следует принять величину $1/k = \lambda/2\pi$, где λ — длина волны.

Пользуясь этими оценками, можем теперь сравнить между собой различные члены в точных уравнениях гидродинамики и, сохраняя только наибольшие члены, упростить эти уравнения.

Начнем с уравнения Эйлера (11.4). Для звуковых волн p — это избыточное давление по отношению к не входящему явно в уравнение невозмущенному давлению среды P . Ускорение частиц представлено в (11.4) в виде суммы локального и конвективного ускорений. Согласно сказанному выше локальное ускорение по порядку величины равно v/T , где v — наибольшее значение скорости частиц, а конвективное ускорение также по порядку величины равно v^2/L . Значит, отношение конвективного ускорения к локальному равно по порядку величины vT/L . Но $vT = u$ есть путь, проходимый частицами со скоростью v за характерный промежуток времени T , т. е. по порядку u — наибольшее смещение частиц в волне. Отсюда следует, что отношение конвективного ускорения к локальному равно отношению u/L наибольшего смещения частиц к характерному размеру волны. Таким образом, если смещения частиц малы по сравнению с характерным размером волны, $u/L \ll 1$, то конвективное ускорение мало по сравнению с локальным. Тогда можно пренебречь конвективным ускорением, и уравнение (11.4) примет вид

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (13.1)$$

Далее, в этом уравнении плотность также есть переменная величина, отличная от плотности ρ_0 невозмущенной среды:

$$\rho = \rho_0 (1 + s).$$

Но при $u/L \ll 1$ акустическое сжатие по порядку величины также не более u/L . Поэтому в приближенном уравнении можно, не меняя степени точности, пренебрегать отличием фактической плотности от невозмущенного значения ρ_0 ; уравнение (13.1) принимает тогда вид (нуль в индексе для простоты записи опущен)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (13.2)$$

Уравнение (13.2) линейно относительно величин p и v . Упрощение в том и состоит, что приближенное уравнение оказывается линейным по отношению к интересующим нас величинам. Для этого, как мы видели, достаточно отбросить в уравнении члены порядка u/L (и высшего порядка) по отношению к сохраняемым, порядок которых принят за единицу.

Уравнение (13.2) справедливо с указанной точностью как для однородных, так и для неоднородных сред. В последнем случае невозмущенное значение плотности есть функция координат точки и (13.2) есть уравнение с коэффициентами, зависящими от координат.

Очевидно, при $u/L \ll 1$ можно заменять полную производную любой величины, характеризующей частицу жидкости, локальной производной — частной производной по времени; выше это было сделано для скорости частиц. В этом приближении дифференциальные и интегральные (по времени и координатам) операции над величинами, характеризующими частицу, независимы и, в частности, можно менять порядок дифференцирования и интегрирования по времени и по координатам. Проинтегрируем по времени уравнение (13.2) и сделаем перестановку порядка интегрирования (по времени) и дифференцирования (по координатам):

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^t \nabla p \, dt = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \int_{t_0}^t p \, dt.$$

Здесь \mathbf{v}_0 — скорость частицы в начальный момент времени t_0 . Мы видим, что, в отличие от ускорения, скорость частицы в данный момент зависит не только от распределения давления в среде в этот же момент, но и от всей истории частицы. Если в начальный момент частица покоилась, то

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \int_{t_0}^t p \, dt. \quad (13.3)$$

Для одномерного движения

$$v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{t_0}^t p \, dt.$$

Если среда однородна, то (13.3) можно записать в виде

$$\mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^t p \, dt \right)$$

и, следовательно, движение потенциально и потенциал скоростей есть

$$\Phi = -\frac{1}{\rho_0} \int_{t_0}^t p \, dt. \quad (13.4)$$

В свою очередь давление и скорость частиц выражаются через потенциал формулами

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi. \quad (13.5)$$

Теперь линеаризуем уравнение неразрывности (11.5), считая, как и выше, что $u/L \ll 1$. В подробной записи имеем

$$\nabla(\rho \mathbf{v}) = \nabla\{\rho_0(1+s)\mathbf{v}\} = \nabla(\rho_0 \mathbf{v}) + \nabla(\rho_0 s \mathbf{v}).$$

Так как s по порядку не больше u/L , то вторым членом справа можно пренебречь по сравнению с первым. Тогда приходим к упрощенному уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \rho_0 = 0.$$

В среде с постоянной невозмущенной плотностью это дает

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (13.6)$$

В дальнейшем часто будем характеризовать изменяющееся состояние среды не плотностью, а сжатием; например, (13.6) можно записать в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (13.7)$$

Уравнение состояния, т. е. зависимость между давлением и сжатием, также можно линеаризовать для любых сред, кроме, как мы уже говорили, сред типа порошка. Линеаризуя уравнение (11.8), получим уравнение состояния в виде

$$s = \beta p. \quad (13.8)$$

Система уравнений (13.2), (13.7), (13.8) — полная система линеаризованных уравнений акустики.

Сжимаемость β можно представить в виде

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}, \quad (13.9)$$

причем производная берется для невозмущенного состояния среды. Мы видели в § 9, что сжимаемость связана со скоростью плоской волны в среде соотношением

$$\beta = 1/\rho c^2, \quad (13.10)$$

так что уравнение (13.8) можно переписать в виде

$$s = \frac{1}{\rho c^2} p. \quad (13.11)$$

Линеаризованную связь между давлением и сжатием можно рассматривать как обобщенный закон Гука для объемного сжатия среды с модулем упругости $K = \rho c^2 = 1/\beta$. В следующем параграфе мы найдем, как связана сжимаемость со статическими свойствами среды.

Часто удобно, исключая сжатие из (13.7) и (13.8), свести полную систему уравнений акустики к двум уравнениям. Первое из них — по-прежнему уравнение (13.2), а второе принимает вид

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla v = 0. \quad (13.12)$$

Любое частное решение уравнений (13.2) и (13.12) есть *свободная волна* в среде.

Уравнения (13.2) и (13.12) — *полная система линейных общих уравнений акустики* для давления и скорости частиц. Мы видим, что среды можно отличить друг от друга акустическим способом, только если их плотности или сжимаемости не одинаковы.

Во всем дальнейшем мы будем пользоваться этой полной системой, решения которой тем меньше отличаются от соответственных решений точных уравнений гидродинамики, чем меньше величина u/L . В плоской волне критерий $u/L \ll 1$ совпадает с критерием малости сжатия ($s \ll 1$) и с критерием малости числа Маха ($M = v/c \ll 1$). Действительно, в плоской бегущей волне отношение L/T равно скорости звука, и следовательно, $u/L = v/c = s = M$. Оба критерия совпадают по порядку во всех случаях, когда звуковое поле похоже на плоскую волну.

Но иногда требование $M \ll 1$ оказывается недостаточным: число Маха и сжатие среды могут быть малыми, в то время как смещения частиц не будут малы по сравнению с характерным размером движения жидкости. Это получится, если пространственная неоднородность поля определяется не волновым характером процесса, а геометрией задачи. Таково, например, движение в сферической волне вблизи центра (расхождение волны) или протекание жидкости в трубе переменного сечения. В этих случаях масштаб пространственной неоднородности не зависит от скорости звука и сохранился бы даже при полной несжимаемости среды. При таких движениях конвективная производная может не быть малой по сравнению с локальной производной даже при малом числе Маха: поле быстро меняется в пространстве независимо от скорости временного изменения. Особенно нагляден пример установившегося протекания жидкости в трубе: локальная производная любой величины, характеризующей течение, равна нулю во всех точках, а конвективная производная отлична от нуля: критерий малости числа Маха при малой скорости течения будет выполнен, но критерий $u/L \ll 1$ нарушится и линеаризацию уравнений произвести будет нельзя. Только требование $u/L \ll 1$ универсально для любой формы волны и для любой сжимаемости среды.

Уравнения (13.2) и (13.12) применимы не только к однородным средам, но и ко всем средам, свойства которых изменяются от точки к точке непрерывно. В уравнении движения (13.2) важно только, какова плотность данной частицы, а плотность других частиц несущественна. Аналогично в уравнении (13.12) важна сжимаемость среды только в данной точке.

Мы установили ограничение величины возмущения сверху, позволяющее линеаризовать уравнения гидродинамики. Но в акустике появляется дополнительное ограничение величины возмущения, относящееся к применимости самого понятия сплошной непрерывной среды. Это требование ограничивает величину возмущения *снизу*. В самом деле, требования применимости картины непрерывной сплошной среды всегда включают масштаб движений. Одним из масштабов движения в акустике является длина волны звука. Человек ведет разговор на звуковых волнах, длина которых варьирует от 10 см до 4 м; высокочастотные эхолокационные сигналы летучих мышей имеют длину волны в несколько миллиметров. По отношению к этому масштабу все среды всегда можно считать сплошными и непрерывными, за исключением только сильно разреженных газов, в которых велика длина свободного пробега молекул.

Но в акустике есть и другой пространственный масштаб: смещение частиц в волне. Обращаясь к этой величине, мы, оставаясь целиком в области классической физики, попадаем в *микромир*.

В самом деле, возьмем для определенности звук в воздухе при частоте, для которой слух человека наиболее чувствителен, — 2000—3000 гц. На «болевым пороге» — при воздействии мощного звука, слуховое восприятие которого сопровождается болевыми ощущениями, — смещения частиц достигают 0,1 мм и амплитуда скорости частиц доходит до 1 м/сек. Но громкий разговор на расстоянии 1 м от говорящего человека создает колебания с амплитудой всего в сотню-другую ангстрем (3—4% длины световой волны), причем скорость частицы меньше 1 м в час. Наконец, при едва слышном звуке на «пороге слышимости» молодого человека (с возрастом слух ухудшается) частицы среды колеблются с амплитудой около $5 \cdot 10^{-10}$ см и с амплитудой скорости около 2 м в год (амплитуда звукового давления $3 \cdot 10^{-4}$ бар). Заметим, впрочем, что *ускорения* частиц, даже при очень слабых звуках, не так уж малы по обычным масштабам: даже на пороге слышимости ускорение частиц достигает примерно 1 мм/сек² (при болевом пороге ускорение очень велико: оно доходит примерно до 1000g, т. е. до 10 км/сек²!).

Естественно возникает вопрос: каким же образом можно воспринимать такие слабые звуки? Ведь даже обычные тепловые движения молекул в огромной степени превосходят движения частиц. В самом деле, на пороге слышимости смещения частиц в звуковой волне на четыре порядка меньше длины свободного пробега молекул в атмосферном воздухе, а скорость частиц на девять порядков меньше скорости молекул. Почему же тепловое движение молекул не маскирует слабых акустических движений частиц? Почему мы не слышим тепловое движение молекул?

Дело в том, что тепловое движение молекул хаотично. И хотя каждая молекула за период звука пробегает большое расстояние, в *целом* тепловое смещение частицы, состоящей из огромного числа

молекул, мало даже по сравнению с ничтожными звуковыми смещениями. В самом деле, для восприятия звука важно, как ведет себя в наружном звуковом канале уха воздух, соприкасающийся с барабанной перепонкой; этот объем Ω воздуха по порядку составляет 1 см^3 . Центр тяжести такого объема совершает в звуковой волне регулярные звуковые колебания (это интересующая нас величина) и беспорядочно колеблется вследствие теплового движения составляющих его молекул (это «помеха»). Колебание центра тяжести данного объема воздуха в результате теплового движения составляющих его молекул аналогично броуновскому движению посторонней частицы в газе. Это — результирующее движение, вызываемое огромным числом отдельных толчков. Сравнить с акустическим движением данной частицы среды следует не движение отдельной молекулы, а именно броуновское движение этой же частицы, т. е. макроскопического объема воздуха, малого по сравнению с длиной волны звука. При этом звуковое движение частицы следует сравнивать с той частью броуновского движения, частотный спектр которой воспринимается слухом так же, как и данный звук. Это значит, что с амплитудой звукового смещения следует сравнивать броуновское смещение за один период звука.

В силу хаотичности молекулярного движения, как известно, броуновское смещение какого-либо объема газа уменьшается при увеличении числа составляющих его молекул как единица, поделенная на корень квадратный из числа молекул, а растет как корень квадратный из истекшего времени. Пусть длина свободного пробега одной молекулы равна l , а среднее время между соударениями равно τ . Тогда среднее смещение объема Ω за время τ составит $l/\sqrt{\Omega N}$, где N — число молекул в единице объема. Нас интересует смещение объема за время одного периода колебаний T : оно будет больше полученной величины в $\sqrt{T/\tau}$ раз и составит $l\sqrt{T/\tau\Omega N}$. Но время между соударениями в среднем равно длине свободного пробега, разделенной на скорость молекул, которую можно приближенно положить равной скорости звука в газе c . В результате получим для броуновского смещения L за время, равное периоду:

$$L = \sqrt{lcT/\Omega N}.$$

Подставляя сюда округленные значения $N = 2,7 \cdot 10^{19}$, $c = 3 \times 10^4 \text{ см/сек}$, $\Omega = 1 \text{ см}^3$, $l = 10^{-5} \text{ см}$ (для воздуха при нормальных условиях), получим $L \approx 10^{-10} \sqrt{T}$ см, что дает для частоты 2—3 кгц примерно $2 \cdot 10^{-12} \text{ см}$. Таким образом, броуновское движение еще не маскирует звук даже на пороге слышимости. Физиологический аппарат слуха ставит для человека и животных границу там, где тепловое движение частиц воздуха еще не сказывается; но «запас» совсем невелик: будь ухо на несколько порядков чувствительнее (а диапазон чувствительности уха от болевого порога до порога слышимости по мощности и так превышает

13 порядков!), оно слышало бы уже беспорядочный тепловой шум— броуновское движение воздуха у барабанной перепонки.

Теперь ясно, какова добавочная граница применимости картины сплошной среды в акустике: амплитуда звуковой волны должна быть много больше броуновского движения объема среды, малого по сравнению с длиной волны звука. Таким образом, среду нельзя считать сплошной для очень слабых звуков. Новое требование появилось потому, что в акустике встречаются с исключительно малыми смещениями среды, в то время как в обычной гидродинамике сами движения среды макроскопичны.

§ 14. Лапласова и ньютонова скорости звука. Температурные колебания в звуковой волне

Мы видели в § 9, что скорость звука в плоской волне определяется плотностью и сжимаемостью среды. Но сжимаемость не определена для данной среды однозначно: она зависит от температурного режима среды при сжатиях и разрежениях. В самом деле, всякая среда при сжатии нагревается («адиабатическое нагревание»), а при разрежении охлаждается*), а давление зависит не только от степени сжатия среды, но и от ее температуры. Поэтому сжимаемость зависит от того, успевают ли выравниваться возникающие в звуковой волне температурные разности. Если бы выравнивание успевало происходить полностью на протяжении каждого полупериода волны, так что температура в волне оставалась бы одинаковой во всех точках, несмотря на различие давлений, то упругие свойства среды характеризовались бы *изотермической сжимаемостью* $\beta_{из}$. Если бы выравнивание температур совершенно не успевало произойти, то упругие свойства среды определялись бы *адиабатической сжимаемостью* $\beta_{ад}$. Как известно, отношение изотермической и адиабатической сжимаемости равно отношению γ теплоемкостей среды при постоянном давлении (C_p) и при постоянном объеме (C_v):

$$\frac{\beta_{из}}{\beta_{ад}} = \frac{C_p}{C_v} = \gamma. \quad (14.1)$$

В действительности разности температур выравниваться не успевают и распространение звука происходит адиабатически, т. е. в выражение для скорости звука входит адиабатическое значение сжимаемости:

$$c^2 = 1/\rho\beta_{ад}. \quad (14.2)$$

Заметим, что измерить адиабатическую сжимаемость статическим методом практически нельзя, поскольку любой сосуд, куда

*) Важное исключение — вода в температурном интервале 0—4° С, в котором наблюдается обратный эффект, что связано с аномальным температурным расширением воды в этом интервале.

можно заключить сжимаемое вещество, теплопроводен и при сжатии или разрежении происходит теплообмен между веществом и сосудом. Адиабатическую сжимаемость нужно измерять так быстро, чтобы теплообмен не успевал произойти в заметной степени. Колебательное движение в звуковой волне как раз является таким быстрым процессом, и $\beta_{ад}$ можно найти из формулы (14.2), измерив скорость звука и плотность среды. Изотермическую сжимаемость можно найти экспериментально статическим методом, производя измерение давления сжатой или разреженной среды после того, как ее температура вернется к исходному значению. Перечисленные измерения позволяют найти важную термодинамическую величину — отношение теплоемкостей γ :

$$\gamma = \rho c^2 \beta_{из}.$$

Для того чтобы найти расчетным способом изменение температуры в волне, вернемся к уравнению состояния (11.7). Для малых амплитуд давления, плотности и температуры уравнение состояния также можно линеаризовать, представляя в виде

$$s = \beta_{из} p - \alpha T', \quad (14.3)$$

где T' — изменение температуры, p — акустическое давление, s — акустическое сжатие, α — коэффициент температурного расширения среды. В звуковой волне процесс адиабатичен, т. е. должно быть

$$s = \beta_{ад} p.$$

Сравнивая с предыдущей формулой, найдем, что изменения температуры в волне равны

$$T' = \frac{\beta_{из} - \beta_{ад}}{\alpha} p$$

или, пользуясь (14.1),

$$T' = \frac{\gamma - 1}{\alpha} s = \frac{\gamma - 1}{\alpha} \beta_{ад} p. \quad (14.4)$$

Для идеального газа точное уравнение состояния имеет вид

$$P = R\rho T.$$

Линеаризуя это уравнение, получим

$$s = \frac{p}{P_0} - \frac{T'}{T_0},$$

где P_0 и T_0 — невозмущенные значения полного давления P и абсолютной температуры T . Отсюда видно, что в идеальном газе изотермическая сжимаемость равна обратному значению невозмущенного давления: $\beta_{из} = 1/P_0$, а коэффициент термического расширения равен обратному значению невозмущенной температуры,

$\alpha = 1/T_0$. Согласно (14.2) скорость звука в газе равна

$$c = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}. \quad (14.5)$$

Например, для воздуха при нормальных условиях $P_0 = 10^5$ бар, $\rho_0 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ г/см³ и $\gamma = 1,4$. Это дает для скорости звука значение $c_{\text{возд}} \approx 3,3 \cdot 10^4$ см/сек, что хорошо согласуется с опытом.

Из (14.5) следует, что скорость звука в воздухе (или в другом газе) не зависит от невозмущенного давления, поскольку невозмущенная плотность ρ_0 пропорциональна этому давлению P_0 . Изменение же температуры газа влияет на скорость звука: согласно уравнению состояния отношение P_0/ρ_0 пропорционально абсолютной температуре; следовательно, скорость звука в газе пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры. При комнатной температуре скорость звука растет примерно на 0,17% на каждый градус повышения температуры *).

В свободной атмосфере при поднятии на высоту меняются как плотность и давление, так и температура воздуха, но на скорость влияет только изменение температуры. В обычных условиях в тропосфере температура воздуха падает с высотой, значит, уменьшается и скорость звука. Поэтому «звуковой барьер» (резкое нарастание сопротивления воздуха при достижении самолетом скорости звука) на высоте наступает при меньшей скорости полета, чем у земной поверхности.

Интересно, что Ньютон, давший первый теоретический расчет скорости звука в газе, исходил из уравнения Бойля—Мариотта для давления газа; это равносильно предположению об изотермичности процесса распространения звука. Соответствующее значение

$$c_n = \sqrt{P_0 / \rho_0}, \quad (14.6)$$

которое можно назвать *ньютоновой скоростью* звука, для воздуха равно $2,8 \cdot 10^4$ см/сек, что примерно на 20% меньше действительного значения. Указание на адиабатичность звуковых волн было сделано Лапласом; поэтому значение, даваемое (14.5), иногда называют *лапласовой скоростью* звука и обозначают c_n . Реальная скорость звука в газе — лапласова скорость. Очевидно,

$$c_n / c_n = \sqrt{\gamma}.$$

Формула (14.4) дает для изменения температуры в звуковой волне в газе величину

$$T' = \frac{\gamma - 1}{\gamma P_0} T_0 p.$$

* В жидкостях и твердых телах в обычных условиях скорость звука падает при увеличении температуры. Вода — исключение: в ней скорость звука растет с повышением температуры до примерно 74° С и только при больших температурах начинает падать.

Для нормальных условий $T_0 \approx 270^\circ \text{C}$ и для воздуха получается $T' \approx 0,78 \cdot 10^{-4} p$. На пороге слышимости амплитуда колебаний температуры составляет всего только около 2,5 стомиллионной доли градуса (на болевом пороге — около $0,1^\circ$). Эти малые изменения температуры и создают двадцатипроцентную разницу между лапласовой и ньютоновой скоростями.

Малый теплообмен между различно нагретыми участками сжатия и разрежения в звуковой волне, который все же успевает произойти за половину периода, сказывается только в небольшой потере энергии звуковой волны и переходе ее в тепло, в результате чего волна постепенно затухает при распространении. Учет таких потерь мы выполним в гл. XII. На скорость же звука малый теплообмен практически не влияет.

До сих пор мы неявно принимали, что поведение среды в звуковой волне описывается тем же уравнением состояния, что и при равновесных условиях, т. е. что в волне сжатие среды однозначно зависит от давления и от температуры в данный момент времени. Но это справедливо только для не слишком быстропеременных процессов — для звуков не слишком высоких частот. В самом деле, при изменении степени сжатия в среде начинаются внутримолекулярные и межмолекулярные процессы, переводящие ее от состояния равновесия, соответствующего одной степени сжатия, к состоянию равновесия, соответствующему другой степени сжатия. Если характерное время τ этих процессов много меньше периода звуковой волны ($\omega\tau \ll 1$), то среда все время будет находиться в квазиравновесном состоянии и давление в ней будет определяться действительно только степенью сжатия.

Но при обратном соотношении характерных времен ($\omega\tau \gg 1$) эти процессы не будут успевать следовать за волной и состояние среды будет определяться не только степенью сжатия в данный момент, но и степенью сжатия в предыдущие моменты, по крайней мере за время τ . При таком соотношении времен никакого уравнения состояния, которое бы связывало давление со сжатием и температурой в один и тот же момент времени, быть не может; в результате при одном и том же значении степени сжатия давление в среде окажется различным при разных частотах волн. Поэтому эффективная сжимаемость среды окажется зависящей от частоты звука, а значит, волны разной частоты будут распространяться с разной скоростью — появится дисперсия скорости звука. Эти вопросы рассмотрим подробнее в гл. XII.

§ 15. Принцип суперпозиции волн

Из линейности уравнений акустики относительно давления, скорости частиц и т. п. следует важное свойство волн. Пусть волна $p_1(t, r)$ есть какое-нибудь частное решение акустических уравнений, а волна $p_2(t, r)$ — другое частное решение этих же уравнений. Тогда, в силу линейности уравнений акустики, волна

$p = p_1 + p_2$ также есть частное решение этих уравнений. Физически это означает, что если волны p_1 и p_2 могут свободно распространяться в среде под действием только внутренних сил упругости, без какого-либо стороннего воздействия, то волна $p = p_1 + p_2$ также может распространяться в этой среде как свободная волна. В силу линейности соотношений между давлением p , скоростью частиц v и сжатием s все эти величины в волне равны сумме соответственных величин в составляющих волнах p_1 и p_2 .

Мы приходим, таким образом, к понятию суммирования или *суперпозиции* волн: в линейной среде каждая свободная волна распространяется независимо от всех остальных и звуковое поле в каждой точке — это просто сумма полей составляющих свободных волн. Для скалярных характеристик волны (например, для давления, температуры *) суммирование алгебраическое, для векторных (скорость, ускорение частиц) — векторное. На принципе суперпозиции основана вся теория интерференции — явления, хорошо известного из курса физики и общего для всех видов волн, подчиняющихся линейным уравнениям.

Важное применение принципа суперпозиции — представление данной волны в виде суммы или интеграла других волн, которые проще для изучения, чем исходная волна, например, в виде гармонических волн разных частот. Этот вопрос рассмотрим подробно в следующей главе.

Отметим, что принцип суперпозиции приближенный: он справедлив с той же степенью точности, с какой выполнена линеаризация уравнений гидродинамики для звуковых волн. Для звуков большой амплитуды принцип суперпозиции неприменим.

§ 16. Волновое уравнение

Часто бывает удобно, исключая все величины, характеризующие волну, кроме одной, привести полную систему уравнений акустики к одному-единственному уравнению относительно этой величины.

Для адиабатического процесса полную систему образуют уравнения первого порядка (13.2) и (13.12), где сжимаемость есть $\beta_{ад}$. В однородной среде величины $\beta_{ад}$ и ρ_0 не зависят от координат; продифференцируем уравнение (13.12) по времени, переставим порядок дифференцирования скорости по времени и по пространству и заменим величину $\partial v / \partial t$ на ее значение из уравнения (13.2): $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$. Тогда получим уравнение

$$\rho \beta_{ад} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla(\nabla p) = 0,$$

*) Напоминаем, что характеристиками волны считаются *приращения* равновесных значений соответственных величин.

или, заменяя $\rho\beta_{ад}$ на $1/c^2$,

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (16.1)$$

где $\Delta = \nabla^2 = \text{div grad}$. Это — *волновое уравнение* для давления. В результате исключения других величин порядок уравнения повысился: волновое уравнение имеет второй порядок.

Если в той или иной задаче удалось найти решение (16.1) для давления в волне как функции координат и времени, то скорость частиц определим простой квадратурой при помощи формулы (13.3). Аналогично можно найти и другие характеристики волны (например, сжатие или изменение температуры).

Как было сказано в § 13, исходные уравнения первого порядка справедливы как в однородной, так и в любой неоднородной среде. Но волновое уравнение справедливо уже не для всех неоднородных сред. Если от координат зависит только сжимаемость среды, а невозмущенная плотность постоянна по всему пространству, то волновое уравнение сохранит свою форму. (16.1). Однако теперь это — уравнение с переменными коэффициентами, в котором величина c меняется от точки к точке и вообще не имеет смысла скорости звука в среде, потому что в такой среде волны вообще не сохраняют свою форму при распространении *).

Если от координат зависит плотность среды, то, повторяя процедуру исключения скорости частиц, придем к уравнению вида

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla p \nabla \ln \rho = 0,$$

отличающемся от волнового уравнения.

Волновое уравнение с переменным коэффициентом c^2 справедливо и для потенциала скоростей, если плотность постоянна по всей среде. Для того чтобы волновому уравнению удовлетворяли сжатие среды и компоненты скорости частиц, необходимо, чтобы были постоянными и сжимаемость, и плотность.

Волновое уравнение в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (16.2)$$

Если движение зависит только от одной координаты, например x , то волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (16.3)$$

*) Величину c можно считать «локальной» скоростью звука для волны высокой частоты, когда можно пренебрегать изменением c даже на расстояниях, больших по сравнению с длиной волны.

Для справок приведем здесь запись волнового уравнения в часто применяющихся цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе (x, r, φ) уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (16.4)$$

В сферических координатах r, θ, φ уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (16.5)$$

Нам удалось упростить точные уравнения гидродинамики, пользуясь тем, что в акустике смещения частиц малы по сравнению с расстояниями, на которых эти смещения заметно меняются. Но такой подход принципиально связан с выбором системы координат, относительно которой невозмущенная среда покоится. В системе координат, движущейся относительно среды, смещения частиц уже не будут малы и в новой системе нельзя будет произвести такие же упрощения. Поскольку принцип относительности Галилея справедлив для точных уравнений гидродинамики, он неприменим к упрощенным уравнениям: волновое уравнение, которое мы получили из упрощенных уравнений, не инвариантно по отношению к галилееву преобразованию.

В самом деле, пусть имеем волну $p(t; x, y, z)$, удовлетворяющую в системе координат (x, y, z) , связанной с невозмущенной средой, волновому уравнению (16.2). Возьмем систему координат (x', y', z') , движущуюся относительно среды со скоростью U в направлении оси x . Формулы перехода от одной системы координат к другой имеют вид

$$x = x' + Ut, \quad y = y', \quad z = z'.$$

В новой системе координат зависимость давления от координат и времени примет вид

$$p'(t; x', y', z') \equiv p(t; x' + Ut, y', z').$$

Частные производные по координатам останутся без изменения, но частная производная по времени изменится: будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t} - U \frac{\partial p'}{\partial x'}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - 2U \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x'} + U^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2}.$$

Подставляя в волновое уравнение, найдем, что в новой системе координат давление удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t'^2} + 2 \frac{U}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x'} - \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2} = 0,$$

отличающемся от волнового. Таким образом, пользуясь упрощенными уравнениями, мы привязываем себя к «абсолютной» системе координат.

§ 17. Одномерная задача. Плоская волна

Изучение волн начнем с простейшего случая *одномерного движения* среды, когда все характеристики волны зависят только от одной декартовой координаты, например координаты x . Поверхности, на которых фаза данной волны имеет одно и то же значение, называют *фронтами волны*. В этом случае фронты — плоскости $x = \text{const}$.

Поскольку давление меняется только в направлении, перпендикулярном к фронтам, скорость частиц в одномерном движении также направлена перпендикулярно к фронтам.

Для одномерного звукового поля можно найти общее решение $p = p(t, x)$ волнового уравнения, принимающего в этом случае вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

Сделаем в этом уравнении замену переменных

$$\alpha = t - \frac{x}{c}, \quad \beta = t + \frac{x}{c}.$$

Частные производные давления по t и по x выразятся через производные по новым переменным следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{\partial p}{\partial \beta} \right).$$

Повторяя дифференцирование, найдем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} - 2 \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} \right).$$

Подставляя полученные выражения в волновое уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Отсюда следует, что частная производная $\partial p / \partial \alpha$ должна быть независимой от переменной β ; ее можно считать произвольной

функцией от α :

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = F(\alpha).$$

Интегрируя по α , найдем

$$p = \int F(\alpha) d\alpha + g(\beta) = f(\alpha) + g(\beta),$$

где $f(\alpha) = \int F(\alpha) d\alpha$ и $g(\beta)$ — также произвольные функции своих аргументов. Возвращаясь к исходным переменным, найдем, что общее решение одномерного волнового уравнения — так называемое «даламберово решение» — имеет вид

$$p = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (17.1)$$

Любая функция от $t - x/c$ или от $t + x/c$ представит собой бегущую плоскую волну: первая — волну, бегущую направо, вторая — волну, бегущую налево. Общее решение одномерной задачи сводится к сумме двух плоских волн произвольной формы, бегущих навстречу друг другу. Каждая из этих волн в отдельности перемещается в направлении положительной (или отрицательной) оси x как твердое тело со скоростью c .

Таким образом, введение понятия скорости для плоской бегущей волны в среде делается оправданным. Однако оно неоднозначно. Вводя это понятие, мы неявно предполагаем, что волна движется как твердое тело в направлении оси x . Но картина несколько не изменится, если считать, что возмущение движется как твердое тело в направлении, составляющем с осью x угол θ , со скоростью $c/\cos \theta$, как это показано на рис. 17.1 для синусоидальной волны. Оба случая принципиально неразличимы, так как неразличимы состояния возмущения среды в любых точках одного и того же фронта волны. Поэтому пока мы будем считать данное определение направления и величины скорости волны условным. Ниже, в гл. III, мы увидим, что есть и принудительные основания принимать именно такое определение, помимо очевидного удобства.

Приведем сводку важнейших соотношений между характеристиками бегущей плоской волны. Пусть давление в волне задано в виде

$$p = p(t \mp x/c),$$

где верхний знак соответствует волне, бегущей в положительном, а нижний — в отрицательном направлении оси x . Связь между давлением, скоростью и сжатием в бегущей волне имеет вид

$$v = \pm \frac{1}{\rho c} p = \pm cs. \quad (17.2)$$

Отсюда, пользуясь (14.2), найдем еще соотношения

$$v = \pm \sqrt{\frac{\beta_{\text{ад}}}{\rho}} p = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho \beta_{\text{ад}}}} s. \quad (17.3)$$

Участки среды, в которых сжатие (а значит, и давление) положительны, движутся в сторону бега волны, а участки отрицательных давлений движутся навстречу бегу волны. Частицы, в которых звуковое давление равно нулю, имеют и скорость, равную

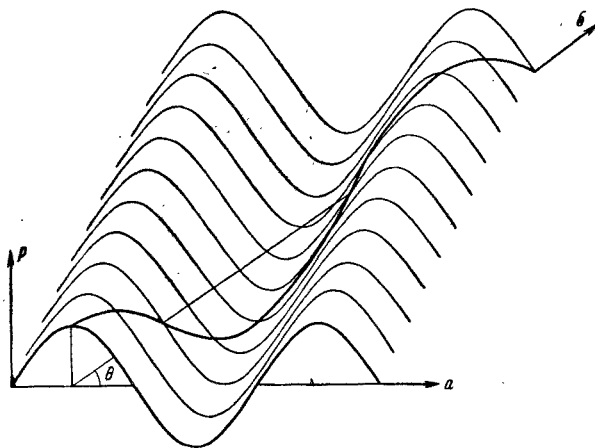


Рис. 17.1. Двухмерный профиль давлений в плоской синусоидальной волне в плоскости, проходящей через направление распространения волны. Перемещение волны в направлении a со скоростью c неотличимо от перемещения в направлении b со скоростью $c/\cos \theta$.

нулю. Если всегда считать направление бега волны положительным, то в положительном направлении будут двигаться сжатые участки, а в отрицательном — разреженные участки среды, и в формулах (17.2) и (17.3) всегда можно брать знак плюс. Отношение скорости частиц к давлению в бегущей волне при таком выборе положительного направления в любой момент времени равно величине

$$\frac{v}{p} = \frac{1}{\rho c} = \sqrt{\frac{\beta_{\text{ад}}}{\rho}}. \quad (17.4)$$

Это отношение называют *волновой проводимостью* среды. Она не зависит от формы волны, а только от свойств среды.

Величину ρc , обратную волновой проводимости, называют *волновым сопротивлением* среды.

Все приведенные здесь формулы справедливы только в отсутствие дисперсии.

Полученная нами запись плоской бегущей волны связана с выбором оси x в направлении распространения волны. Напишем

уравнение плоской волны в векторной форме. Это позволит в дальнейшем получить выражение для плоской волны и в любой системе координат.

Для этого введем вектор S , перпендикулярный к фронтам волны и равный по модулю *обратному* значению скорости: $S = 1/c$. Вектор S будем называть *вектором медленности* волны. Обозначим радиус-вектор произвольной точки среды, проведенный из начала координат, через r . Очевидно, $x/c = Sr$. Следовательно, уравнение бегущей плоской волны можно записать в виде

$$p(t - x/c) = p(t - Sr). \quad (17.5)$$

Последняя запись не связана с выбором системы координат. Если для плоской бегущей волны известна зависимость давления от времени в какой-либо точке и вектор медленности S известен, то уравнение волны получится путем замены в этой зависимости времени t на бином $t - Sr$ (где радиус-вектор r проведен из данной точки). Соотношение (17.2) между скоростью частиц и давлением в плоской волне можно записать, пользуясь вектором медленности, в векторной форме:

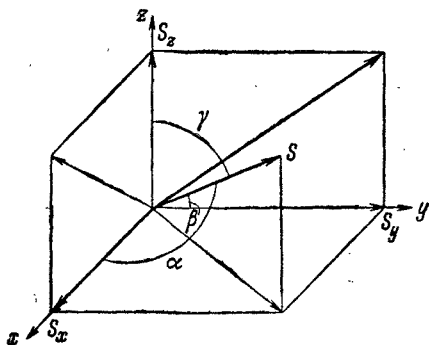


Рис. 17.2. Вектор медленности плоской волны и его проекции на координатные оси и координатные плоскости. Жирные стрелки — вектор медленности исходной волны и векторы медленности следов волны на оси x и на плоскости $x = 0$.

$$v = \frac{S}{\rho} p(t - Sr). \quad (17.6)$$

Пользуясь (17.5), можно записать выражение для волны в координатной форме при любом расположении координатных осей относительно направления распространения волны:

$$p(t - Sr) = p(t - xS_x - yS_y - zS_z) = \\ = p(t - xS \cos \alpha - yS \cos \beta - zS \cos \gamma). \quad (17.7)$$

Здесь $S_x = S \cos \alpha$, $S_y = S \cos \beta$, $S_z = S \cos \gamma$ — проекции вектора медленности на координатные оси; α , β , γ — углы вектора медленности с координатными осями (рис. 17.2).

«След» плоской волны на какой-либо оси, например на оси x , $p_{(y=z=0)} = p(t - S_x x)$, можно рассматривать как одномерную волну, бегущую вдоль оси x . Аналогично «след» волны на какой-нибудь плоскости, например плоскости $x = 0$, $p_{(x=0)} = p(t - S_y y - S_z z)$, можно рассматривать как двухмерную волну, бегущую на плоскости $x = 0$. Временная зависимость всех величин, характеризующих волну, во всех следах та же, что и в исходной

волне, но медленности следов другие: они равны проекциям вектора медленности исходной волны на соответственные оси или плоскости. Так, медленность следа на оси x есть $S_x = S \cos \alpha$, а медленность следа на плоскости $x = 0$ есть $\sqrt{S_y^2 + S_z^2} = S \sin \alpha$.

Вектор медленности исходной плоской волны и медленности ее следов на осях и плоскостях координат находятся в тех же соотношениях друг с другом, как вектор скорости движущейся материальной точки и скорости ее проекций на оси и на плоскости. При волновом подходе к акустическим процессам вектор медленности — понятие, имеющее непосредственный физический смысл, точно так же, как в механике материальных точек имеет смысл вектор скорости. Понятие же вектора скорости для волн имеет не больший смысл, чем понятие вектора медленности для движущейся точки. Лишь для одномерных движений, когда скорость или медленность можно считать скалярами и принципиально нет вопроса о проекциях или следах рассматриваемого объекта, можно было бы на равных правах применять понятие скорости и медленности как для волн, так и для материальных точек. Применимо всегда для тех и для других объектов и понятие медленности или скорости *по модулю*. В этом смысле обычно и говорят о скорости волн, а не о медленности; но так говорят только в силу привычки: мы чаще обсуждаем движение тел, чем волн.

То обстоятельство, что для волн понятие вектора скорости не имеет смысла и на его место становится понятие вектора медленности волны, связано с принципиальным различием между механикой волн и механикой материальных точек, о котором мы уже говорили в § 1.

§ 18. Гармонические плоские волны. Стоячие волны

Рассмотрим вкратце свойства одного из важнейших типов плоских волн: гармонических плоских волн, в которых давление зависит синусоидально от времени и координаты (в гл. III гармонические волны рассмотрим более подробно). Мы видели в § 5, что гармоническую плоскую волну, бегущую вдоль оси x , можно записать в виде

$$p = p_0 \cos(\omega t - kx - \varepsilon). \quad (18.1)$$

При соответственном выборе начала отсчета времени (или координаты) начальную фазу ε можно обратить в нуль. Часто удобна запись, в которой начальная фаза равна 0 или $\pi/2$:

$$p = p_0 \cos(\omega t - kx), \quad p = p_0 \sin(\omega t - kx).$$

Фронты гармонических волн — это поверхности равных фаз. Для сред, подчиняющихся волновому уравнению, скорость гармонической волны не зависит от частоты и равна скорости любой плоской волны. В более сложных случаях фазовая скорость ока-

зывается различной для волн разной частоты (или длины волны), а негармонические волны своей формы не сохраняют и поэтому к ним понятие скорости неприменимо. Две гармонические плоские волны одинаковой частоты и равных амплитуд, бегущие навстречу друг другу, образуют стоячую волну:

$$p = \frac{1}{2} p_0 \cos(\omega t - kx) + \frac{1}{2} p_0 \cos(\omega t + kx) = p_0 \cos kx \cos \omega t. \quad (18.2)$$

Узловые плоскости для давления отстоят друг от друга на половину длины волны и разделяют участки среды, в каждом из которых колебания давления синфазны; в смежных участках колебания давления противофазны. Скорость частиц в стоячей волне выражается формулой

$$v = \frac{p_0}{\rho c} \sin kx \sin \omega t. \quad (18.3)$$

Узловые плоскости для скорости частиц делят участки с синфазными колебаниями давления пополам и разделяют участки длиной в половину волны, в каждом из которых скорости синфазны, в то время как в смежных участках — противофазны. Узловые плоскости давления совпадают с пучностями скорости и наоборот. Временная зависимость скорости частиц сдвинута относительно временной зависимости давления на четверть периода; пространственные зависимости скорости частиц и давления сдвинуты на четверть длины волны друг относительно друга.

Бегающую гармоническую плоскую волну можно записать в виде

$$p = p_0 \cos(\omega t - kr - \epsilon), \quad (18.4)$$

где k — волновой вектор, равный по модулю волновому числу и направленный вдоль вектора медленности волны: $k = \omega S$. В координатной форме такая плоская гармоническая волна имеет вид

$$p = p_0 \cos(\omega t - xk \cos \alpha - yk \cos \beta - zk \cos \gamma - \epsilon), \quad (18.5)$$

где α, β, γ — углы волнового вектора k с осями координат.

Две плоские гармонические волны равной частоты и одинаковой амплитуды, бегущие под углом друг к другу, образуют интер-

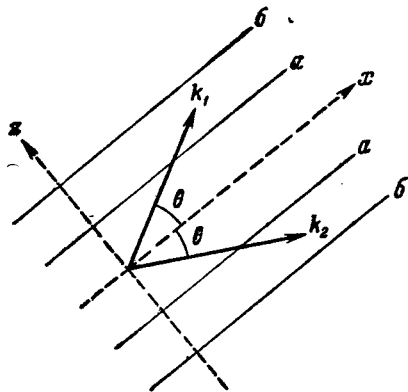


Рис. 18.1. Суперпозиция двух плоских гармонических волн равной частоты и одинаковой амплитуды, бегущих под углом друг к другу. Линии a — узловые плоскости для давления, линии b — узловые плоскости для z -компоненты скорости частиц. Вдоль оси x бежит синусоидальная волна с волновым числом $k \cos \theta$.

ференционную картину, бегущую в одном направлении и стоячую — в другом. Примем биссектрису между волновыми векторами этих волн за ось x , а биссектрису смежного угла — за ось z (рис. 18.1). В такой системе координат эти волны можно записать в виде

$$p_1 = \frac{1}{2} p_0 \cos(\omega t - xk \cos \theta - zk \sin \theta),$$

$$p_2 = \frac{1}{2} p_0 \cos(\omega t - xk \cos \theta + zk \sin \theta),$$

где θ — половина угла между волновыми векторами обеих волн. Суперпозиция этих волн образует интерференционную картину:

$$p = p_1 + p_2 = p_0 \cos(zk \sin \theta) \cos(\omega t - xk \cos \theta).$$

Эту суперпозицию можно рассматривать как волну, стоячую по оси z и бегущую без изменения формы вдоль оси x . Фронты этой волны перпендикулярны к оси x , а распределение давлений, скоростей частиц и т. п. вдоль фронта неравномерно. Этой неравномерностью такая волна отличается от одномерной бегущей волны.

Фазовая скорость волны в направлении оси x равна $\frac{\omega}{k \cos \theta} = \frac{c}{\cos \theta}$ и всегда больше скорости плоской волны в среде.

В волне есть узловые плоскости для давления и для z -компонент скорости частиц. Эти плоскости перпендикулярны к оси z и совпадают с плоскостями $zk \sin \theta = \pm \frac{2l-1}{2} \pi$ и $zk \sin \theta = \pm l\pi$ соответственно. С любыми двумя плоскостями первой группы можно совместить две абсолютно жесткие стенки, не меняя движения среды между стенками. Аналогично можно разместить на любых двух плоскостях второй группы абсолютно мягкие стенки, также не нарушая движения. Наконец, совместив с одной из плоскостей первой группы абсолютно жесткую, а с одной из плоскостей второй группы — абсолютно мягкую стенку, также не нарушим движения среды между стенками.

Таким образом, мы нашли некоторые типы волн, которые могут бежать, не меняя формы, между двумя идеальными (абсолютно жесткими или абсолютно мягкими) стенками. Такой тип распространения называют *волноводным*. Подробно рассмотрим его в гл. VIII.

§ 19. Акустика микронеоднородных сред. Температурные и вязкие волны

Многие неоднородные среды можно в вопросах распространения звука рассматривать как однородные. Это *микронеоднородные* среды, т. е. среды, масштаб неоднородностей которых мал по сравнению с длиной звуковой волны, число неоднородностей на длине волны велико, а их распределение по среде достаточно равно-

мерно, чтобы среду можно было считать в среднем «акустически однородной» или «макроднородной» на участках, больших по сравнению с размерами неоднородностей, но все еще малых по сравнению с длиной волны. Для не слишком больших ультразвуковых частот такими средами можно считать эмульсии, взвеси, аэрозоли, поликристаллы, жидкости, содержащие газовые пузырьки, и т. п. Решая многие акустические вопросы, можно игнорировать неоднородность таких сред, подобно тому, как мы игнорируем молекулярное строение однородных сред, рассматривая их как сплошные. Тогда можно получить и для микронеоднородных сред полную систему акустических уравнений; однако акустические характеристики этих сред, рассматриваемых как однородные, — *эффективная* плотность ρ и *эффективная* сжимаемость β — сложным образом зависят от размеров неоднородностей, от свойств компонент среды и, как увидим, от частоты колебаний.

Ограничимся далее двухкомпонентными микронеоднородными средами. Если плотности, сжимаемости и коэффициенты адиабатического нагревания при сжатии $\frac{\gamma-1}{\alpha}\beta_{ад}$ равны для обеих компонент, то по отношению к звуковой волне обе компоненты тождественны и микронеоднородная среда ведет себя как однородная. Особенности в поведении микронеоднородных сред появляются только при различии этих характеристик в компонентах среды; тогда в среде появляется характерная дисперсия скорости звука и сильное поглощение звуковых волн. Два наиболее важных случая, а именно различие сжимаемостей и различие плотностей, рассмотрим на примере распространения звука в эмульсии, считая, что как зерна эмульсии, так и расстояния между ними много меньше длины звуковой волны.

Предположим сначала, что среды различаются только сжимаемостью.

Очевидно, сжатие элемента микронеоднородной среды составляется аддитивно из сжатий компонент; поэтому сжимаемости также складываются *аддитивно*:

$$\beta = \varepsilon\beta_1 + (1 - \varepsilon)\beta_2,$$

где β_1 и β_2 — сжимаемости компонент, а ε — объемная концентрация первой компоненты. Но при различии сжимаемостей обычно различны и коэффициенты адиабатического нагревания. Поэтому при прохождении звука температуры компонент будут изменяться по-разному и между компонентами начнется теплообмен. При этом процесс сжатий и разрежений *макроскопически*, в масштабе длины звуковой волны, будет по-прежнему идти адиабатически, как и в однородных жидкостях. В этом смысле скорость звука лапласова. Но *микроскопически*, в масштабе размеров зерен эмульсии и расстояний между зернами, процесс будет неадиабатичен, а степень теплообмена будет зависеть от частоты: большой теплообмен при малых частотах и малый теплообмен при больших

частотах. Следовательно, складываемые аддитивно сжимаемости β_1 и β_2 компонент — неадиабатические.

При малых частотах разности температур между зернами эмульсии и второй средой успевают выровняться: процесс, оставаясь макроскопически адиабатичным, будет микроскопически изотермичен. Соответствующую скорость звука можно назвать «ньютон-лапласовой». При больших частотах выравнивания практически не будет: процесс адиабатичен не только макроскопически, но и микроскопически — скорость звука «лаплас-лапласова». Таким образом, для высоких частот

$$\beta = \varepsilon\beta_{1ад} + (1 - \varepsilon)\beta_{2ад}.$$

«Лаплас-лапласову» скорость звука в эмульсии можно найти по формуле

$$c = \{ \rho [\varepsilon\beta_{1ад} + (1 - \varepsilon)\beta_{2ад}] \}^{-1/2}.$$

Можно показать, что при наличии теплообмена сжимаемость эмульсии всегда больше, чем сжимаемость в отсутствие такого теплообмена и тем больше, чем полнее теплообмен: ньютон-лапласова скорость меньше лаплас-лапласовой. Поэтому при увеличении частоты скорость звука в эмульсии растет. Область дисперсии лежит в некотором интервале частот, на нижней границе которого можно считать температуры зерен эмульсии полностью выравненными с температурой заполняющей среды, а на верхней границе можно считать, что теплообмен практически совершенно не успевает произойти. Внутри же дисперсионной области теплообмен происходит частично, а «глубина прогрева» за половину периода лежит в окрестности размеров зерна эмульсии.

Так как неполный теплообмен между телами разных температур есть термодинамически необратимый процесс, то в дисперсионной области частот должно наблюдаться значительное поглощение звуковой энергии. Опыт подтверждает это заключение.

Аналогичная картина наблюдается в эмульсии с компонентами разных плотностей ρ_1 и ρ_2 . В этом случае зерна эмульсии либо отстают от соседних частиц окружающей среды, либо обгоняют их, в зависимости от того, больше плотность зерен, чем плотность второй среды, или меньше ее. В реальных средах при этом возникают силы вязкости, выравнивающие скорости зерен и окружающей среды. При малых частотах силы вязкости успевают выравнивать скорости и движение происходит как в однородной среде с плотностью $\rho = \varepsilon\rho_1 + (1 - \varepsilon)\rho_2$. Но на более высоких частотах вязкие силы не успевают разогнать или затормозить зерно эмульсии на всю глубину и обе компоненты в звуковой волне имеют различные скорости. Поэтому пользоваться написанной выше формулой аддитивности плотностей в этом случае нельзя, а эффективная плотность участков, малых по сравнению с длиной волны, но содержащих много зерен эмульсии, сложным образом зависит от частоты.

В акустике микронеоднородных сред возникают, таким образом, задачи о выравнивании температур через границу двух различно нагретых сред при периодическом изменении разности температур и задачи о выравнивании скачка скоростей путем вязкости при соприкосновении сред, движущихся вдоль границы с периодически меняющейся разностью скоростей. В случае разных температур задача сводится к определению «глубины прогрева», в случае разных скоростей — к определению «глубины захватывания» вязкостью слоев, прилегающих к границе скачка скорости. В эмульсии выравнивание температур или скоростей происходит через сферическую границу зерна эмульсии с окружающей средой. Математически решение этой задачи громоздко, хотя и не представляет принципиальной трудности; однако составить себе количественное представление о «глубине проникновения» температуры или скорости можно на более простом примере: для плоской границы среды, на которой задана переменная температура или скорость. Приведем соответственный расчет. Начнем с задачи о теплообмене.

Пусть на плоскости $x = 0$ создана переменная температура, меняющаяся по синусоидальному закону $T = T_0 \cos \omega t$, около некоторой средней температуры среды, граничащей с этой плоскостью. Среда теплопроводна, поэтому переменное температурное поле проникает в среду, образуя в ней своеобразную температурную волну.

В силу симметрии задачи температурное поле в среде зависит только от расстояния от плоскости и от времени: $T = T(x, t)$. Вдали от плоскости, очевидно, T будет убывать: тепло не успеет проникнуть на большое расстояние.

Для того чтобы найти температурную волну, необходимо составить уравнение, которому подчиняется температура неравномерно нагретой среды. Как известно, плотность потока тепла q пропорциональна градиенту температуры:

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x},$$

где κ — коэффициент теплопроводности среды.

Рассмотрим элемент объема длиной dx и единичного сечения. С одного торца в него поступает поток тепла $+q$, на другом торце поток тепла $-(q + \frac{\partial q}{\partial x} dx)$, так что путем теплопроводности внутрь элемента поступает в единицу времени энергия — $(\partial q / \partial x) dx$. Секундное приращение энергии в единичном объеме равно

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Вся эта энергия идет на повышение температуры единичного объема. Следовательно, скорость изменения температуры $\partial T / \partial t$ в объеме составит $-\frac{1}{\rho C} \frac{\partial q}{\partial x}$, где ρ — плотность среды, а C — ее тепло-

емкость. Если объем элемента остается в процессе теплопередачи неизменным, то C есть теплоемкость при постоянном объеме; если неизменно давление, то C есть теплоемкость при постоянном давлении. Суммируя сказанное, приходим к выводу, что температура в неоднородно нагретой среде меняется по закону

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (19.1)$$

где $\chi = \kappa/\rho C$ есть *температуропроводность* вещества.

Например, для воздуха при 20°C и нормальном давлении $\chi_p = \kappa/\rho C_p = 0,18 \text{ см}^2/\text{сек}$; $\chi_v = \kappa/\rho C_v = 0,25 \text{ см}^2/\text{сек}$. Для воды $\chi_p \approx \chi_v = 0,0014 \text{ см}^2/\text{сек}$.

Теперь решим поставленную выше задачу о передаче тепла в среду от плоскости с заданной переменной температурой. Решение уравнения (19.1) будем искать в виде плоской синусоидальной волны с амплитудой, экспоненциально убывающей по мере удаления от плоскости (в положительном направлении оси x):

$$T = T_0 \exp(-\xi_x x) \cos(\omega t - \xi_x x). \quad (19.2)$$

Условия на границе удовлетворяются таким решением автоматически, а величина ξ_x определяется при подстановке (19.2) в (19.1):

$$\xi_x = \sqrt{\omega/2\chi}.$$

Таким образом, распределение температур — быстро убывающая температурная волна, бегущая от плоскости в среду. Ее волновое число и коэффициент затухания равны друг другу. Амплитуда колебаний температуры спадает в e раз на расстоянии

$$o_x = 1/\xi_x = \sqrt{2\chi/\omega\rho C} = \Lambda_x/2\pi,$$

где Λ_x обозначает длину температурной волны. Расстояние δ_x можно считать «глубиной прогревания» при данной частоте. На расстоянии же одной длины температурной волны амплитуда спадает в 535 раз, т. е. в обычных условиях до пренебрежимой величины.

Найденные соотношения объясняют малую роль теплопроводности при распространении звука в однородной среде, о чем мы уже говорили. В самом деле, степень выравнивания температур между сжатыми и разреженными участками в звуковой волне могла бы быть велика, только если глубина прогревания была бы сравнима с длиной звуковой волны. Но соотношение между этими величинами делается ясным из рис. 19.1, на котором показано, как зависят от частоты волновое число звуковой волны $k = \omega/c$ и волновое число температурной волны ξ_x . Первый график — прямая, второй — парабола. Мы видим, что в низкочастотной области

спектра волновое число температурных волн очень велико по сравнению с волновым числом звуковых волн: глубина прогрева относительно мала по сравнению с масштабом неоднородности температуры и процесс распространения звука действительно можно считать адиабатическим.

Переход к изотермичности процесса, а значит, и переход от лапласовой к ньютоновой скорости звука мог бы наблюдаться только при приближении к точке пересечения графиков ω' . Однако

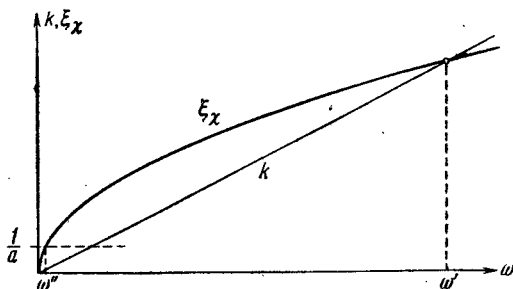


Рис. 19.1. Волновые числа звуковых и температурных волн. Почти весь рисунок лежит в диапазоне частот, при которых распространение звука уже прекратилось: в выбранном масштабе диапазон распространяющихся волн — малый участок вблизи начала координат.

для всех реальных сред при частоте, приближающейся к ω' , распространение звука уже практически прекращается. Например, для воздуха точка перехода соответствует примерно $2 \cdot 10^{10}$ гц, что отвечало бы длине волны звука около 10^{-6} см — меньшей длины свободного пробега молекул. При этой частоте никакого распространения звука уже нет. Пока звук распространяется, его скорость в любой однородной среде всегда можно считать лапласовой.

В микронеоднородной же среде температурная неоднородность задается самой структурой среды: размерами неоднородностей. В ней частота перехода ω'' определяется соотношением между размерами неоднородностей и длиной температурной волны. В микронеоднородной среде $\omega'' \ll \omega'$, и выравнивание температур происходит при сравнительно низких частотах. При высоких частотах теплообмен ослабляется. На рис. 19.1 горизонтальный пунктир отвечает обратной величине характерного размера a неоднородностей (например, радиуса зерен эмульсии). Точка пересечения этой прямой с параболой волновых чисел температурной волны лежит в области перехода от ньютон-лапласовой скорости к лаплас-лапласовой скорости звука в эмульсии.

Глубины прогрева для воздуха и для воды равны (частота f выражена в герцах):

$$\delta_x(\text{воздуха}) = 0,24/\sqrt{f}, \quad \delta_x(\text{воды}) = 0,021/\sqrt{f}.$$

Глубина прогревания меняется с изменением частоты медленно — обратно пропорционально корню квадратному из частоты. Поэтому, например, в воде глубина прогревания у поверхности при сезонных изменениях температуры воздуха (период — один год, $f = 0,000000032$ гц) составляет всего 1,2 м. Фактически наблюдаемое летнее прогревание до глубин в сотни метров вызвано не теплопроводностью воды, а перемешиванием верхних слоев с нижними в результате штормов, волнения моря и подводных течений.

В твердых телах перемешивания нет. Поэтому, например, в земле амплитуда годовых (не говоря уже о суточных) колебаний температуры мала уже на сравнительно небольшой глубине — порядка 2—3 м. На такой глубине температура весь год мало отличается от среднегодовой.

В умеренном климатическом поясе водопроводные трубы на такой глубине под поверхностью земли никогда не замерзают. В Сибири же на такой глубине «вечная мерзлота» не исчезает даже летом.

Зная глубину прогревания при той или иной частоте, можно найти, при каких частотах звука произойдет заметное выравнивание температур между компонентами в эмульсии, т. е. найти дисперсионную область для эмульсии. Дисперсионная область лежит вблизи частоты, при которой глубина проникновения близка к радиусу зерен эмульсии. Например, для эмульсии бензола в воде (для бензола $\delta_x = 0,0175/\sqrt{f}$ см) при размере зерен эмульсии ≈ 5 микрон эта критическая частота лежит вблизи 5 кгц. При частотах много ниже 5 кгц скорость звука в эмульсии соответствует микроизотермическому процессу, а при частотах много выше — микроадиабатическому.

В вопросе о передаче движения в среду вязкостью достаточно рассмотреть такую задачу: пусть плоскость $x = 0$, осуществленная в виде какой-либо пластинки, совершает в своей плоскости колебания по синусоидальному закону:

$$v_{(x=0)} = v_0 \cos \omega t.$$

Если с пластинкой соприкасается среда, то силы вязкости будут переносить движение в глубь среды в виде своеобразной вязкой волны, быстро затухающей при удалении от плоскости. Картина, таким образом, аналогична случаю задания на плоскости переменной температуры.

Как и для температурной волны, в силу симметрии задачи движение в среде может зависеть только от расстояния от плоскости и от времени: $v = v(x, t)$.

Для того чтобы найти вязкую волну, напишем уравнение движения среды под действием силы вязкости. Рассмотрим слой жидкости, лежащий между x и $x + dx$. Как известно, сила вязкости, действующая на плоскость, пропорциональна производной ско-

рости течения вдоль плоскости в направлении, перпендикулярном к плоскости. На сторону x выделенного слоя в расчете на единицу площади действует сила вязкости $F = -\eta (\partial v / \partial x)$, где η — коэффициент вязкости; на противоположную сторону действует сила вязкости

$$-(F + \frac{\partial F}{\partial x} dx) = \eta \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

Результирующая этих сил равна

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

Но масса слоя в расчете на единицу площади есть ρdx .

Следовательно, уравнение движения слоя можно записать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (19.3)$$

где $\nu = \eta / \rho$ есть кинематический коэффициент вязкости среды.

Это — уравнение вязких волн, аналогичное уравнению (19.1) для температурных волн. Так как уравнения для плоской вязкой и плоской температурной волн совпадают по форме, то одинаковую форму имеют и решения, с той разницей, что в решении для вязких волн вместо коэффициента температуропроводности следует взять кинематический коэффициент вязкости. Вязкая волна имеет, таким образом, вид

$$v = v_0 \exp(-\xi_\nu x) \cos(\omega t - \xi_\nu x), \quad (19.4)$$

где $\xi_\nu = \sqrt{\omega / 2\nu}$, а «глубина проникновения» вязкой волны составляет $\delta_\nu = \sqrt{2\nu / \omega}$.

§ 20. Поршневое излучение плоской волны. Импульс бегущей плоской волны

До сих пор мы еще не задавались вопросом об излучении волн и только выясняли, каково их поведение, если они уже созданы. Теперь покажем, как излучить в покоившуюся первоначально среду бегущую плоскую волну.

Пусть требуется создать плоскую волну, бегущую в положительном направлении, профиль давлений в которой был бы задан формулой

$$p = p \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Проведем мысленно плоскость перпендикулярно к направлению распространения этой волны, например плоскость $x = 0$. Среда слева от этой плоскости действует на среду справа с силами давления, отвечающими равномерно распределенному давлению: $p_0 = p(t)$. Если устранить среду слева от плоскости $x = 0$, но продолжать действовать на границу среды, оставшейся справа, с теми же силами давления p_0 , то движение среды справа не изменится. Но, согласно (17.2), частицы в бегущей волне должны двигаться со скоростями, равными $v = p/\rho c$. Значит, установив в плоскости $x = 0$ бесконечный поршень и сообщив ему скорость $v_0 = p_0/\rho c$ в направлении оси x , получим в среде справа от поршня требуемую бегущую волну $p = p(t - x/c)$. При этом между давлением на поршне и скоростью поршня все время будет сохраняться соотношение $p_0/v_0 = \rho c$.

Эта картина создания плоской волны с заданным профилем, так называемое *поршневое излучение*, — не более как мысленный эксперимент, принципиально неосуществимый в действительности, так как для этого потребовался бы поршень бесконечных размеров. Если же взять поршень конечных размеров, то плоская волна не сможет быть создана, хотя бы потому, что точки в середине поршня и точки у краев поршня будут находиться в различных условиях. Если, однако, размеры поршня очень велики по сравнению с расстоянием, пробегаемым звуком за время T , характерное для рассматриваемого звукового процесса (например, период для гармонического движения), то для большей части поверхности поршня отношение p_0/v_0 будет мало отличаться от ρc . Поэтому для достаточно большого поршня результирующая сила F , необходимая для придания жидкости, прилегающей к поршню, скорости v_0 , будет мало отличаться от величины $S\rho c v_0$, где S — площадь поршня. Соответственно этому волна *вблизи* поршня будет похожа на плоскую волну.

Можно, однако, получить и точную картину плоской волны, если поршень конечной площади вставить в цилиндрическую трубу с абсолютно жесткими стенками. В этом случае внутри трубы движение частиц и возникающие давления в точности соответствуют картине плоской волны в безграничном пространстве, и все соотношения, выведенные нами для плоских волн, выполняются для такой волны полностью.

Допустим, что создание волны длилось конечное время, так что, например, за пределами интервала времени (t_0, t_1) поршень неподвижен. Найдем полный импульс J звукового давления в любой точке среды. Поскольку одни и те же значения давления повторяются во всех точках с соответственным запаздыванием, достаточно проинтегрировать по времени давление на поршне:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} p_0(t) dt.$$

Но $p_0 = \rho c v_0$. Значит,

$$J = \rho c \int_{t_0}^{t_1} v_0(t) dt = \rho c \xi,$$

где ξ — суммарное смещение поршня за все время движения. Ясно, что если в конце процесса поршень вернулся в исходное положение, то суммарный импульс равен нулю. Далее, если давление в волне было все время одного знака, то поршень должен был все время двигаться в одном направлении (вправо при положительном давлении и влево при отрицательном), и, следовательно, после того как волна будет излучена, поршень окажется в смещенном положении.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

§ 21. Гармонические волны

В настоящей главе подробно рассмотрим гармонические волны разных типов. В теории колебаний гармоническая зависимость от времени играет важную роль. В частности, это связано с тем, что гармоническая зависимость сохраняется при прохождении колебаний через *линейные колебательные системы с постоянными параметрами* — резонаторы, фильтры и т. п.: эти системы дают гармонический отклик на гармоническое воздействие. Так как в линейных системах принцип суперпозиции справедлив, то в них оказывается удобным рассматривать колебания с любой зависимостью от времени при помощи разложения Фурье, т. е. представлять их в виде суперпозиции колебаний с одним-единственным, гармоническим видом зависимости от времени.

В вопросах акустики гармоническая зависимость от времени имеет аналогичные преимущества: для сред, в которых волны удовлетворяют линейным уравнениям (а таковы практически все среды для волн малой амплитуды), синусоидальная зависимость от времени сохраняется при распространении волны, при ее отражении и преломлении, при рассеянии от препятствий и т. п. Волны с другой зависимостью от времени таким свойством не обладают. Так как, кроме того, для линейных уравнений акустики справедлив принцип суперпозиции, то волну с практически любой зависимостью от времени можно представить в виде суперпозиции гармонических волн разных частот. Такое представление позволяет вместо волн с любой зависимостью от времени изучать волны с одной-единственной зависимостью — гармонической, что удобно именно ввиду сохранения этими волнами своей временной зависимости. Такое разложение волн на гармонические составляющие называют, как и в случае колебаний, *спектральным разложением Фурье*. В зависимости от того, периодична или нет исходная волна, приходим соответственно к ряду или к интегралу Фурье. *Обратное преобразование* позволяет восстановить исходную волну по ее спектру.

Поэтому, зная поведение гармонических волн разных частот в тех или иных условиях распространения, можно методом Фурье найти поведение волн любого типа.

Разложение Фурье произвольной плоской волны приводит к гармоническим плоским волнам разных частот. Они имеют вид (18.1). Если плоская волна бежит без изменения формы со скоростью c , то для всех компонент ее разложения по Фурье имеет место соотношение $\omega/k = c$. При изменении формы бегущей плоской волны (при наличии дисперсии в среде) отдельные фурье-составляющие формы не меняют, но бегут с разными фазовыми скоростями ω/k .

Важнейшим формальным приемом, облегчающим расчеты и вообще изучение гармонических волн, является представление их в комплексном виде, к которому сейчас и перейдем.

§ 22. Комплексная запись гармонических волн

Давление в любой гармонической волне можно записать в виде

$$p_1 = p' \cos(\omega t - \varepsilon). \quad (22.1)$$

Амплитуда p' и начальная фаза ε колебаний зависят только от координат точки. Например (см. гл. IX), в сферически симметричной расходящейся гармонической волне $p' = \text{const}/r$ и $\varepsilon = kr$. Из (22.1) следует, что скорость частиц, сжатие и другие характеристики волны в каждой точке также меняются с течением времени по синусоидальному закону.

Для гармонической волны волновое уравнение упрощается — подставляя (22.1) в волновое уравнение (16.1), получим так называемое *уравнение Гельмгольца*

$$\Delta p_1 + k^2 p_1 = 0. \quad (22.2)$$

В уравнение Гельмгольца входят производные только по координатам; таким образом, для гармонических волн зависимость от времени можно исключить из уравнений.

Если (22.1) есть интересующее нас решение уравнения (22.2), то, как легко проверить прямой подстановкой, функция

$$p_2 = p' \sin(\omega t - \varepsilon) \quad (22.3)$$

тоже есть некоторое решение, а значит, так же изображает волну, как и (22.1). Решение (22.3) отличается от (22.1) только сдвигом фазы на четверть периода. Любая линейная комбинация этих двух решений также есть решение. Для расчетов особенно удобна следующая комплексная линейная комбинация:

$$\bar{p} = p_1 - ip_2 = p e^{-i\omega t}. \quad (22.4)$$

Здесь введено обозначение $p = p' e^{i\varepsilon}$. При такой записи волны стандартная для всех точек гармоническая зависимость от времени оказывается представленной множителем $e^{-i\omega t}$, не зависящим от координат. Например, плоская гармоническая волна, бегущая по оси x вправо, запишется в виде $p e^{-i\omega t + ikx}$. Обычно

для краткости записи временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускают. Отметим, что умножение на i , равносильное умножению на $e^{i\pi/2}$, соответствует изменению фазы колебания или фазы волны на четверть периода.

Величину p в (22.4) называют *комплексной амплитудой* колебания; она зависит только от координат и характеризует амплитуду p' и фазу ϵ колебаний среды в различных точках. Уравнению Гельмгольца удовлетворяют как полное решение (22.4), так и его комплексная амплитуда p в отдельности. Вещественная же амплитуда p' уравнению Гельмгольца не удовлетворяет.

Введенные комплексные гармонические волны удобны при расчетах, потому что в них входит только одна (экспоненциальная) функция вместо двух различных тригонометрических функций (косинус и синус), переходящих друг в друга при дифференцировании и интегрировании. Следует, однако, иметь в виду, что сами комплексные решения уравнения Гельмгольца не имеют никакого физического смысла. Действительно, всякая физическая величина, всякое показание прибора, например отсчет по тому или иному индикатору, всегда есть вещественное число. Физический смысл имеет только вещественная часть комплексной волны. Для перехода от комплексной волны к имеющей физический смысл вещественной волне необходимо предварительно восстановить опущенный временной множитель $e^{-i\omega t}$, а затем взять от комплексной величины вещественную часть. Чтобы вещественная часть результата операций над комплексными волнами равнялась результату тех же операций над вещественными частями комплексных волн, эти операции должны быть линейными: допустимо сложение, вычитание волн, дифференцирование их по времени и по координатам. Но, например, вещественная часть произведения не равна произведению вещественных частей комплексных чисел. Поэтому энергию или мощность волны нельзя получить непосредственно перемножением комплексных величин, характеризующих волну, а приходится возвращаться к вещественной записи (см. гл. IV).

При изучении гармонических колебаний и волн весьма удобно пользоваться также отношениями комплексных величин. Для гармонического процесса такое отношение не зависит от времени (множители $e^{-i\omega t}$ сокращаются). Фаза полученного отношения равна разности фаз делителя и делителя. Если обе величины одной природы, например падающая на препятствие волна и отраженная волна, то модуль отношения равен отношению вещественных амплитуд этих волн. Весьма полезными оказываются и отношения величин различной природы, например давления и скорости (так называемый *импеданс*) и т. д. В дальнейшем мы часто будем встречаться с такими величинами.

Дифференцирование по времени комплексной волны осуществляется умножением на $-i\omega$, интегрирование — делением на $-i\omega$. Например, комплексная скорость частиц в комплексной

волне $\tilde{p} = p' e^{-i\omega t + i\varepsilon}$ равна, согласно (13.3),

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{i\rho\omega} \nabla p = \frac{1}{i\rho\omega} (\nabla p' \cdot e^{i\varepsilon} + i\nabla\varepsilon \cdot p' e^{i\varepsilon}) = \\ &= \frac{1}{i\rho\omega} (\nabla \ln p' + i\nabla\varepsilon) p. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Отсюда видно, в частности, что движение каждой частицы в гармонической волне — плоское: скорость частицы параллельна векторам $\nabla p'$ и $\nabla\varepsilon$, а компоненты вдоль этих векторов сдвинуты по фазе на четверть периода. В разных точках плоскость движения частиц может быть разной.

Так же удобна для расчетов и сопряженная (22.4) комплексная комбинация

$$\tilde{p}^* = p_1 + ip_2 = p^* e^{i\omega t}, \quad (22.6)$$

где звездочка, как обычно, обозначает комплексно-сопряженную величину. Обе комбинации различаются знаком при i , однако часто говорят, что вторая комбинация соответствует *отрицательной частоте*: это связано с видом временного множителя, принимающего для второй комбинации вид $e^{i\omega t}$, который действительно можно получить из временного множителя первой комбинации изменением знака частоты. При расчетах с отрицательными частотами все комплексные величины также должны быть заменены сопряженными значениями, дифференцирование и интегрирование должно осуществляться умножением и делением на $i\omega$, комплексная скорость выразится через сопряженное давление формулой

$$\mathbf{v}^* = \frac{1}{-i\omega\rho} \nabla p^* = \frac{1}{-i\omega\rho} (\nabla \ln p' - i\nabla\varepsilon) p^*,$$

плоская волна, бегущая направо, запишется в виде $p = e^{i\omega t - ikx}$ и т. д. Все результаты линейных операций получатся комплексно сопряженными по отношению к результатам, исходящим из выражений для положительных частот. Заменяются на сопряженные вообще все функции от комплексных характеристик волн, в частности и отношения комплексных величин, характеризующих волну (например, коэффициент отражения, импеданс). Окончательные результаты всякого расчета также получатся комплексно сопряженными по отношению к результатам, исходящим из выражений для положительных частот. С отрицательными частотами приходится встречаться, например, в разложениях волн в интеграл Фурье, распространенный на частоты от $-\infty$ до $+\infty$, в случае, когда разложение Фурье производится по комплексным экспонентам, а не по тригонометрическим функциям.

При переходе к вещественной части результат получится один и тот же независимо от знака частоты: волны, различающиеся только знаком частоты, совпадают как физические объекты, несмотря на различную математическую запись.

§ 23. Разложение Фурье волны с произвольной зависимостью от времени

Покажем, что при соблюдении известных условий, налагаемых на временную зависимость волны $p(t, \mathbf{r})$, которые будем считать выполненными, можно представить волну в виду суперпозиции гармонических волн различных частот путем разложения по Фурье функции p . Эти условия таковы: если функция периодична по времени, то она разлагается в ряд Фурье; если функция не периодична, но достаточно быстро убывает при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ (например, является ограниченным по времени импульсом), то она разлагается в интеграл Фурье. Если спадание на бесконечности недостаточно быстрое, то разложение в интеграл Фурье неосуществимо. Будем пользоваться комплексным представлением волн.

Периодическая функция с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ разлагается в ряд

$$p(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} p_n(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t}, \quad \text{где } p_n(\mathbf{r}) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T p(t, \mathbf{r}) e^{in\omega_0 t} dt.$$

Коэффициенты $p_n(\mathbf{r})$, меняющиеся от точки к точке, — амплитуды спектра волны в каждой точке.

Непериодическая функция разлагается в интеграл

$$p(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где

$$p_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} dt.$$

Коэффициенты $p_\omega(\mathbf{r})$ называют спектральной плотностью амплитуды разложения. Элементы интеграла в области от $-\infty$ до нуля — волны с отрицательными частотами. В этой области $p_\omega = p_{-\omega}^*$.

Покажем, что каждое из гармонических слагаемых, т. е. член ряда $p_n(\mathbf{r}) e^{-in\omega_0 t}$ или элемент интеграла $d\omega p_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$, является волной, способной распространяться в данной среде. Математически это значит, что гармонические слагаемые должны каждое в отдельности удовлетворять уравнению (22.2).

Волна $p_\omega(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет по условию волновому уравнению

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

Гармоническую компоненту ряда или интеграла можно записать,

опуская постоянный множитель, в виде

$$p_{\omega} = \int_a^b p e^{i\omega t} dt,$$

считая, что для периодической функции $b - a = T$, а частота для компоненты номера n есть $n\omega_0$; для непериодической функции интеграл берется в бесконечных пределах ($a = -\infty$, $b = +\infty$), а частота принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Умножим волновое уравнение на $e^{i\omega t}$ и проинтегрируем по времени в пределах от a до b . В первом члене, меняя порядок интегрирования и дифференцирования, найдем

$$\int_a^b \Delta p e^{i\omega t} dt = \Delta \int_a^b p e^{i\omega t} dt = \Delta p_{\omega}.$$

Во втором члене дважды произведем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} e^{i\omega t} dt &= \left. \frac{\partial p}{\partial t} e^{i\omega t} - i\omega \int_a^b \frac{\partial p}{\partial t} e^{i\omega t} dt \right|_a^b = \\ &= \left. \frac{\partial p}{\partial t} e^{i\omega t} - i\omega \left. p e^{i\omega t} - \omega^2 \int_a^b p e^{i\omega t} dt \right|_a^b. \end{aligned}$$

Но для периодической функции значения функции и ее производных на концах интервала длиной в один период равны между собой, поэтому первые два члена исчезают. Для непериодической функции эти члены исчезают потому, что по условию сама функция p исчезает на бесконечности. Следовательно,

$$\int_a^b \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} e^{i\omega t} dt = -\omega^2 \int_a^b p e^{i\omega t} dt = -\omega^2 p_{\omega}.$$

Отсюда получим, подставляя в проинтегрированное уравнение,

$$\Delta p_{\omega} + k^2 p_{\omega} = 0,$$

т. е. компоненты Фурье действительно удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а значит, члены разложения данной волны действительно являются волнами, каждая из которых может распространяться независимо от других.

Доказанная теорема имеет важнейшее значение: она придает физический смысл разложению Фурье по времени. Эта математическая операция имеет смысл замены волны с произвольной временной зависимостью суперпозицией волн со стандартной зависимостью от времени — гармонической зависимостью.

Разложение Фурье имеет физический смысл не только для волн, удовлетворяющих волновому уравнению, но, как можно показать (см. § 26), и для волн в более сложных средах. Необходимо только, чтобы уравнение, которому удовлетворяет давление (или какая-либо иная характеристика волны), было линейным и однородным.

Помимо рассмотренных типов волн, возможны еще волны, которые неразложимы ни в ряд, ни в интеграл Фурье, но все же могут быть представлены в виде суперпозиции некоторого дискретного набора гармонических волн: это суммы гармонических волн несоизмеримых частот. Такие волны называют *почти периодическими*, потому что, как можно показать, любой отрезок такой волны повторяется со сколь угодно большой точностью через достаточно большой промежуток времени. Простейший пример почти периодической волны — биения между двумя волнами близких, но несоизмеримых частот. Аналитически почти периодическую волну можно записать в виде

$$p(t, r) = \sum_n p_n(r) e^{-i\omega_n t},$$

где частоты ω_n несоизмеримы.

§ 24. Спектральные разложения волн

Разложение волн с любой зависимостью от времени на гармонические волны разных частот — это пример так называемого *спектрального разложения*: представления данной функции в виде линейной суперпозиции (ряда или интеграла) стандартного набора функций с более простыми свойствами. Если эти вспомогательные функции изучены, то исследование других функций сводится к определению коэффициентов в спектральном разложении. В акустике (и в других волновых науках) в качестве такого стандартного набора удобно пользоваться гармоническими функциями времени, представляя заданную волну в виде интерференционной картины гармонических волн разных частот. Спектральный подход освобождает нас от необходимости исследовать каждую волну со своей зависимостью от времени в отдельности: каждая звуковая волна оказывается представленной в виде суперпозиции гармонических функций, и рассмотрение временной зависимости оказывается упрощенным до предела.

Но поле гармонической волны зависит вообще от трех координат, и при одной и той же частоте зависимость от координат может быть самой разной. Возникает вопрос о возможности дальнейшего упрощения изучения волн: возможности представления произвольных гармонических по времени функций от координат также в виде суперпозиции некоторого набора гармонических волн (конечно, той же частоты), стандартно зависящих от координат, — вопрос о *пространственном спектре* гармонической волны.

Ответ на этот вопрос зависит от акустической ситуации. Если известно поле данной гармонической волны на плоскости, то в качестве стандартного набора можно взять плоские гармонические волны (мы увидим в § 33, что это возможно только при некотором обобщении понятия плоских волн), если известно поле на сфере, то удобно производить разложение в спектр по набору так называемых сферических волн, и т. п. В данной главе рассмотрим разложение поля по плоским волнам. Для этого теперь изучим подробно плоские волны и их обобщения.

§ 25. Плоские гармонические волны

Произвольную плоскую волну можно разложить в спектр, т. е. ее можно представить в виде суперпозиции плоских же гармонических волн (оговорки — те же, что и выше для спектрального разложения любой волны). Напишем в комплексной форме бегущую плоскую гармоническую волну. Как указано в § 17, выражение для плоской волны (в векторной записи) получается из выражения для временной зависимости в точке путем замены времени t на бином $t - \mathbf{S}r$, где \mathbf{S} — вектор медленности волны. В гармонической волне временная зависимость дается множителем $e^{-i\omega t}$. Значит, бегущую плоскую гармоническую волну можно записать в виде

$$p = p_0 \exp[-i\omega(t - \mathbf{S}r)],$$

где p_0 — постоянная (вообще — комплексная). Эту постоянную будем называть *комплексной амплитудой плоской волны*. Для гармонических волн удобно пользоваться вместо вектора медленности \mathbf{S} пропорциональным ему волновым вектором $\mathbf{k} = \omega\mathbf{S}$. Плоская гармоническая волна записывается тогда в виде

$$p = p_0 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}r), \quad (25.1)$$

что можно считать комплексной записью формулы (18.4) при $p_0 = |p_0| e^{i\epsilon}$. Фронты волны совпадают с плоскостями $\mathbf{k}r = \text{const}$, перпендикулярными к \mathbf{k} . Комплексная амплитуда колебания в какой-либо точке есть $p_0 \exp(i\mathbf{k}r)$ и равна амплитуде волны p_0 (общей для всех точек), умноженной на фазовый множитель $\exp(i\mathbf{k}r)$. Если в той или иной задаче амплитуда волны не существенна (например, при нахождении коэффициента отражения волны от препятствия), то амплитуду, как и временной множитель, опускают:

$$p = \exp(i\mathbf{k}r). \quad (25.2)$$

Для волны, бегущей, например, вдоль оси x вправо или влево,

$$p = \exp(\pm ikx). \quad (25.3)$$

Для того чтобы вернуться к вещественной записи плоской волны, необходимо предварительно восстановить оба комплекс-

ных множителя, и p_0 и $e^{-i\omega t}$, и лишь тогда брать вещественную часть от получившегося выражения:

$$p = \operatorname{Re} [p_0 \exp(-i\omega t + ikr)] = |p_0| \cos(\omega t - kr - \varepsilon). \quad (25.4)$$

В плоской гармонической волне зависимость от координат в данный момент времени также является синусоидальной, как и временная зависимость в каждой данной точке. Фаза ε комплексной амплитуды волны окажется существенной, только если придется иметь дело одновременно с несколькими волнами. Имея дело только с одной волной, всегда можно выбрать начало отсчета времени, например, так, чтобы амплитуда волны была вещественна ($\varepsilon = 0$).

Скорость частиц в волне $p = \exp(ikr)$, согласно (22.5), выражается формулой

$$v = \frac{k}{\rho\omega} \exp(ikr) = \frac{k}{k} \frac{p}{\rho c}. \quad (25.5)$$

Для плоской волны можно написать разложение Фурье, принимая за аргумент вместо времени линейную комбинацию $t - Sr$. Тогда спектр разложения не будет зависеть от координат. Разложение для волны, бегущей вдоль оси x , имеет вид

$$p\left(t - \frac{x}{c}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p_n \exp(-in\omega_0 t + ink_0 x)$$

для периодической волны с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ (при $k_0 = \omega_0/c$) и вид

$$p\left(t - \frac{x}{c}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega \exp(-i\omega t + ikx) d\omega$$

(при $k = \omega/c$) для непериодической волны, разложимой в интеграл Фурье по времени. Отсюда видно, что волна в каждый момент времени оказывается разложенной в спектр по координатам, т. е. представлена в виде суперпозиции синусоидальных пространственных распределений. Амплитуды спектров разложения p_n (или p_ω) не зависят ни от координат, ни от времени.

Кроме плоских волн, разложимых в ряд или в интеграл Фурье, возможны еще волны, хотя в таком виде и не представимые, но которые все же можно выразить в виде суперпозиции гармонических плоских волн. Такими волнами будут, в частности, волны вида

$$p\left(t - \frac{x}{c}\right) = \sum_n p_n \exp(-i\omega_n t + ik_n x),$$

где p_n — постоянные, величины ω_n несоизмеримы, а $\omega_n/k_n = c$ для всех n .

Переходя к декартовой системе координат, в которой направляющие косинусы волнового вектора равны $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$,

получим из (25.2) координатное представление плоской гармонической волны:

$$\begin{aligned} p &= \exp(ik \cos \alpha \cdot x + ik \cos \beta \cdot y + ik \cos \gamma \cdot z) = \\ &= \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z), \end{aligned} \quad (25.6)$$

где проекции волнового вектора на оси координат $k_x = k \cos \alpha$, $k_y = k \cos \beta$, $k_z = k \cos \gamma$ равны волновым числам следов волны на координатных осях. Так как эти проекции меньше модуля волнового вектора, то медленность следов меньше, чем медленность волны, а скорость следов больше скорости волны.

На координатных плоскостях следы волны представляют собой двумерные гармонические волны. Например, на плоскости $z = 0$ бежит волна $p = \exp(ik_x x + ik_y y)$ с волновым числом $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k \sin \gamma$, равным проекции волнового вектора k на плоскость $z = 0$. Скорость этого следа также больше скорости волны. Из уравнения (22.2) следует

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/c^2. \quad (25.7)$$

Каждая комбинация трех вещественных чисел k_x , k_y , k_z , удовлетворяющих уравнению (25.7), соответствует плоской гармонической волне данной частоты, бегущей в направлении, определяемом направляющими косинусами

$$\cos \alpha = k_x/k, \quad \cos \beta = k_y/k, \quad \cos \gamma = k_z/k.$$

Часто располагают какую-либо координатную плоскость (например, плоскость xz) параллельно волновому вектору данной плоской волны. Тогда движение не зависит от третьей координаты (y) и волну можно записать в виде $p = \exp(ik_x x + ik_z z)$, где $k_x = k \cos \theta$, $k_z = k \sin \theta$. Угол θ между волновым вектором и осью x называют *углом скольжения* данной волны относительно оси x или относительно плоскости xy .

Комплексная форма записи удобна не только для звуковых, но и для любых гармонических волн. Так, температурную волну (19.2) можно записать, опуская временной множитель, в виде

$$T = T_0 \exp(i\xi_x x - \xi_x x). \quad (25.8)$$

Вязкая волна (19.4) запишется в виде

$$v = v_0 \exp(i\xi_v x - \xi_v x). \quad (25.9)$$

§ 26. Сохранение формы бегущих гармонических плоских волн. Дисперсионное уравнение

В средах, подчиняющихся волновому уравнению, плоская волна любой формы распространяется без искажения. В других средах этим свойством обладают только гармонические плоские волны. Единственное условие, налагаемое при этом на среду, —

это ее *линейность*: в среде должен быть справедлив принцип суперпозиции, и, кроме того, если в среде может распространяться какая-либо волна, то волна, отличающаяся только множителем при давлении, скорости частиц и т. п., также может распространяться в данной среде. Уравнение, которому подчиняется, например, давление p в такой среде, можно записать в виде

$$\mathcal{L}(p) = 0, \quad (26.1)$$

где \mathcal{L} — линейный однородный оператор (например, для сред, подчиняющихся волновому уравнению, $\mathcal{L} \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$).

Докажем свойство сохранения формы гармоническими волнами произвольной частоты или произвольной длины волны для такой среды. Для этого нужно доказать, что в числе решений уравнения (26.1) есть волны вида

$$p = \exp(-i\omega t + ikr) \quad (26.2)$$

для любой длины волны (и соответственной частоты) или для любой частоты (и соответственной длины волны).

Пусть оператор \mathcal{L} переводит некоторую функцию p в некоторую функцию q :

$$\mathcal{L}(p) = q. \quad (26.3)$$

Если $q \equiv 0$, то соответственная функция p представляет собой свободную волну в среде. Возьмем p в виде (26.2) и, подставив в (26.3), продифференцируем обе части этого равенства по времени. В силу линейности и однородности оператора дифференцирование и действие оператора можно переставлять между собой, так что

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}(p)}{\partial t} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = \mathcal{L}(-i\omega p) = -i\omega \mathcal{L}(p) = -i\omega q.$$

Таким образом, $\partial q / \partial t = -i\omega q$, откуда следует

$$q = \tilde{q} e^{-i\omega t},$$

где \tilde{q} от времени уже не зависит, но вообще зависит от ω . Подставляя это выражение в (26.3), получим уравнение, в котором временные зависимости отсутствуют и содержащее частоту как параметр. Например, для волнового уравнения получится уравнение Гельмгольца относительно амплитуд колебаний \tilde{q} в разных точках. Далее, дифференцируя (26.3) по координатам, найдем снова в силу тех же свойств оператора

$$\nabla q = \nabla \mathcal{L}(p) = \mathcal{L}(\nabla p) = \mathcal{L}(ikp) = ik \mathcal{L}(p) = ikq,$$

т. е. $\nabla q = ikq$. Отсюда следует, что q можно представить в виде

$$q = f(\omega, k) \exp(-i\omega t + ikr),$$

где f может зависеть, помимо ω и k , только от коэффициентов оператора.

При произвольных ω и k функция $\exp(-i\omega t + ikr)$, конечно, не представит волну, которая могла бы распространяться в данной среде, так как вообще эта функция не является решением уравнения (26.1). Но если выбрать ω и k так, чтобы выполнилось условие

$$f(\omega, k) = 0, \quad (26.4)$$

то будет и $q = 0$, и для такой комбинации ω и k уравнение (26.1) будет удовлетворено: соответственная монохроматическая волна в среде сможет распространяться как свободная. Вообще каждому значению ω будет соответствовать решение уравнения (26.4) относительно k и каждому значению k будет соответствовать решение уравнения (26.4) относительно частоты ω . Для изотропной среды это уравнение может содержать только модуль волнового вектора, так что уравнение можно привести к виду

$$F(\omega, k^2) = 0. \quad (26.5)$$

Уравнение (26.5) называют *дисперсионным уравнением* для данной среды. Например, дисперсионное уравнение, соответствующее волновому уравнению (16.1), есть

$$k^2 - \omega^2/c^2 = 0,$$

где c — постоянная. Дисперсия в средах, описываемых волновым уравнением, таким образом, отсутствует: фазовая скорость гармонической волны любой длины есть c .

Пример дисперсионного распространения дают изгибные волны на стержне. Как известно из курса сопротивления материалов, уравнение для поперечного смещения ζ стержня при малых колебаниях можно записать в виде

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0,$$

где G — коэффициент изгибной жесткости. Отсюда, подставляя решение вида $\exp(-i\omega t + ikx)$, найдем дисперсионное уравнение изгибных волн в виде

$$k^4 - \frac{\rho}{G} \omega^2 = 0 \quad (26.6)$$

(в § 7 мы применили другой способ нахождения этого дисперсионного уравнения). Зависимость фазовой скорости от частоты или волнового числа имеет вид

$$c = \omega/k = k \sqrt{G/\rho} = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{G/\rho}. \quad (26.7)$$

Еще пример — морские волны на поверхности воды («гравитационные волны»). Как известно из гидродинамики, на поверхности несжимаемой жидкости, находящейся в поле силы тяжести,

могут распространяться поверхностные волны. Потенциал скорости таких волн удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Первое из этих уравнений — условие несжимаемости среды, второе — уравнение движения поверхностной волны. Поверхностную волну можно найти в виде $\varphi = \exp(-i\omega t + ikx + kz)$. Подставляя это выражение, автоматически удовлетворяющее требованию несжимаемости среды, в уравнение движения, найдем дисперсионное уравнение в виде

$$k - \frac{1}{g} \omega^2 = 0. \quad (26.8)$$

Скорость поверхностных волн зависит от частоты или волнового числа по закону

$$c = g/\omega = \sqrt{g/k}, \quad (26.9)$$

что, в отличие от изгибных волн на стержне, соответствует нормальной дисперсии.

Спектральный подход к решению задач акустики требует нахождения всех монохроматических волн, способных распространяться в данной среде. В принципе это можно сделать, решая дисперсионное уравнение относительно ω или относительно k (фактически такое решение может оказаться очень трудным). Если решение получено, т. е. известно $\omega = \omega(k)$ или $k = k(\omega)$, то фазовая скорость получается в виде $c = \omega/k(\omega)$ или $c = \omega(k)/k$ — как функция либо частоты, либо волнового числа. Вообще для *любого* линейного уравнения для волн $\mathcal{L}(p) = 0$ всегда имеет место дисперсия: случай волнового уравнения, когда дисперсия отсутствует, — исключение, но исключение очень важное: это, как мы видели, уравнение волн в свободной неограниченной среде.

В акустике встречаются два принципиально различных типа дисперсии. Один тип обусловлен *физическими свойствами среды*: зависимостью упругих напряжений не только от деформаций, но и от скорости изменения деформации. В плоской звуковой волне в неограниченной среде возможен только этот тип дисперсии. Он всегда сопровождается поглощением звуковой энергии. Классические примеры таких сред — лед, вар. При малой скорости деформирования возникающие упругие силы малы, и за достаточно долгое время эти тела могут растекаться подобно жидкостям под действием собственного веса. Но при резком ударе возникающие силы — такие же, как в обычных твердых телах: кусок льда или вара разбивается при таком ударе на осколки. Поэтому в таких телах при разной частоте колебаний скорость волн различна: с ростом частоты всегда растут и упругие силы,

скорость звука увеличивается (аномальная дисперсия). Опыт показал, что такой дисперсией обладает также ряд жидкостей и многоатомные газы. «Область дисперсии», т. е. частотный диапазон, в котором зависимость упругости от частоты заметна, меняется в различных веществах от долей герца до тысяч мегагерц. Более подробно этот тип дисперсии рассмотрен в гл. XII.

Другой тип дисперсии обусловлен *границами среды*, в которой распространяется волна, и не зависит от свойств среды. Этот тип с поглощением звука не связан и целиком определяется кинематикой волнового движения в ограниченной среде. Такова, например, рассчитанная выше дисперсия скорости изгибных волн в стержне. Физическая картина дисперсии для изгибных волн заключается в том, что коэффициент упругости стержня растет при уменьшении длины изгибаемого участка; поэтому с уменьшением длины волны, т. е. с увеличением частоты, скорость волн растет. Дисперсия наблюдается и при распространении волн в жидких средах, заключенных в трубах, и т. д. Более подробно эти вопросы рассмотрены в гл. VIII.

§ 27. Групповая скорость. Распространение узкополосного сигнала

Монохроматическая волна не может передать никакой информации, никакого сигнала: в такой волне в каждой точке происходили, происходят и всегда будут неизменно происходить гармонические колебания. Чтобы передать сигнал при помощи волн, необходимо, чтобы в ней что-нибудь менялось, чтобы волна была *модулирована* тем или иным способом, например, чтобы она длилась ограниченный промежуток времени. Это уже не будет монохроматическая волна; такой сигнал можно рассматривать как интерференционную картину, образованную суперпозицией гармонических волн разных частот. Информацию передаст именно эта интерференционная картина.

Но в диспергирующей среде сама интерференционная картина меняется, так как компоненты разных длин волн распространяются с разной скоростью. Таким образом, в диспергирующей среде передаваемая информация оказывается искаженной.

Какова глубина этого искажения и в какой мере все-таки можно передавать сигнал в диспергирующей среде, можно выяснить при помощи фурье-представления волны.

Выясним раньше всего, как найти изменение данного профиля волны при ее распространении в среде с заданным законом дисперсии. Для этого достаточно выполнить следующие действия: разложим по Фурье данный профиль на сумму синусоид различных длин волн и припишем каждой синусоиде временной множитель соответственно дисперсионному уравнению среды, как сказано в предыдущем параграфе. Каждая из полученных таким образом компонент — свободная гармоническая волна, фазовая скорость

которой может быть найдена из дисперсионного уравнения. За заданный промежуток времени каждая синусоида пробежит расстояние, пропорциональное ее скорости. Сложив эти синусоиды в их новом положении, получим новую форму профиля.

В отсутствие дисперсии весь набор гармоник просто сместится на одно и то же расстояние как одно целое, и в результате профиль волны также сдвинется на то же расстояние, сохранив свою форму. Но в диспергирующей среде смещения отдельных синусоид различны, так как различны их фазовые скорости. Синусоиды «расфазированы» друг с другом по мере распространения, и их суперпозиция по истечении некоторого времени даст уже новую интерференционную картину — новый профиль, другой формы, чем исходный. Сигнал, распространяясь, меняет свою форму. Поэтому понятие скорости к такому сигналу неприменимо.

Из сказанного ясна связь между возможностью передачи информации при помощи волны и применимостью к волне понятия скорости.

Все же удастся найти некоторый элемент интерференционной картины, который не меняется при распространении и при наличии дисперсии, если спектр сигнала достаточно узок, т. е. если длины волн (и частоты) компонент данной волны мало отличаются друг от друга. Этот элемент — *огibaющая* интерференционной картины. Если спектр узкий то, как сейчас покажем, огibaющая сигнала не меняет своей формы и перемещается с некоторой определенной скоростью, хотя сам сигнал внутри огibaющей свою форму меняет.

Скорость огibaющей называют *групповой скоростью*. Вводя групповую скорость, мы обобщаем понятие скорости для волн: сохраняет форму все же не волна, а только ее огibaющая. Но это дает нам возможность отождествлять форму огibaющей, подобно тому как в бездисперсионной среде мы могли отождествлять форму самой волны. И это снова дает нам возможность передавать информацию при помощи волн, даже в диспергирующих средах.

Итак, рассмотрим узкополосный сигнал — например «синусоиду с медленно меняющейся амплитудой». Этот термин условен: амплитуда по определению — постоянная величина. Рис. 27.1 поясняет этот термин: на нем показана «моментальная фотография» участка интерференционной картины двух монохроматических волн близкой длины волны, бегущих в одну сторону. «Длина периода» получающихся пространственных биений («длина периода» огibaющей) равна $L = \frac{2\pi}{|k_1 - k_2|}$, где k_1 и k_2 — близкие волновые числа компонент. На одной такой длине укладывается $\frac{k_1}{|k_1 - k_2|}$ длин волн составляющих, что при близких k_1 и k_2 — большая величина. Огibaющая биений — квазипериодическая кривая.

Возможна волна в виде «синусоиды с переменной амплитудой», у которой огибающая — ограниченная в пространстве кривая, выделяющая некоторую «группу» или «цуг» волн (рис. 27.2). Спектр такой группы, даваемый интегралом Фурье исходной волны, как можно показать, обязательно сплошной. Чем уже спектр, тем длиннее цуг: имеет место соотношение $L \cdot \Delta k \geq 2\pi$,

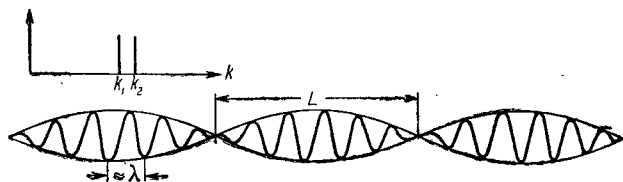


Рис. 27.1. Биения, их огибающая (тонкая линия) и их дискретный спектр — две близкие спектральные линии k_1 и k_2 .

где L — длина цуга, Δk — ширина спектра, т. е. длина интервала волновых чисел спектра, вне которого амплитуды спектра пренебрежимо малы. Это соотношение можно назвать *принципом неопределенности в акустике*: чем уже спектр, тем хуже локализована волна в среде, т. е. тем больший участок она занимает. Аналогичное соотношение неопределенностей имеет место и для временного спектра процессов: чем уже спектр, тем хуже временная локализация процесса, т. е. тем большее время он длится.

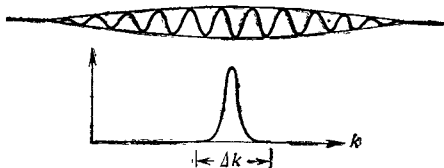


Рис. 27.2. Группа волн, ее огибающая и ее сплошной спектр.

Найдем вначале групповую скорость для наглядного и наиболее простого случая

биений между двумя монохроматическими волнами. Пусть составляющие имеют длины волн λ_1 и λ_2 и фазовые скорости c_1 и c_2 . Положим для определенности $\lambda_1 > \lambda_2$ и $c_1 > c_2$ («нормальная дисперсия»). Чтобы найти скорость огибающей, применим «метод остановки движения» ко второй составляющей и найдем скорость огибающей по отношению к новой системе координат, движущейся относительно среды со скоростью c_2 ; складывая относительную скорость огибающей с c_2 , получим искомую скорость огибающей относительно среды, т. е. групповую скорость u .

В новой системе координат вторая синусоида неподвижна, а первая движется относительно нее со скоростью $c_1 - c_2$. На рис. 27.3 обе синусоиды изображены схематически, в виде решеток с шагом, равным соответственной длине волны. Будем следить за каким-либо определенным местом огибающей, например за местом совпадения каких-либо штрихов решеток. При движении первой решетки относительно второй место совпадения будет

переходить с одного штриха на другой. Средняя скорость этого перемещения и есть скорость огибающей в новой системе координат. Так как для перемещения места совпадения с одного штриха на соседний (при выбранном соотношении между длинами волн и скоростями — на предыдущий штрих) первая волна должна пройти расстояние $\lambda_1 - \lambda_2$, то этот переход займет промежуток времени $(\lambda_1 - \lambda_2)/(c_1 - c_2)$; за это время место совпадения сместится в отрицательном направлении на расстояние λ_2 . Значит,

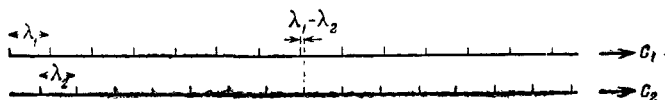


Рис. 27.3. К выводу формулы для групповой скорости. «Гребенки» длин волн напоминают основную и нониусную шкалы штангенциркуля.

скорость перемещения места совпадения штрихов, т. е. относительная скорость перемещения огибающей, равна $-\lambda_2 \frac{c_1 - c_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Групповая скорость равна, следовательно,

$$u = c_2 - \lambda_2 \frac{c_1 - c_2}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (27.1)$$

Эта формула остается справедливой и при любом другом соотношении между длинами волн и скоростями составляющих волн.

Легко получить и другие формы записи этого соотношения:

$$u = c_2 + k_1 \frac{c_1 - c_2}{k_1 - k_2} = \frac{k_1 c_1 - k_2 c_2}{k_1 - k_2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (27.2)$$

Если разности волновых чисел и частот малы по сравнению с самими волновыми числами и частотами, то групповую скорость можно записать в виде

$$u = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = c + k \frac{dc}{dk} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (27.3)$$

Из полученных формул видно, что групповая скорость совпадает с фазовой только в том случае, когда фазовая скорость не зависит от длины волны, т. е. в отсутствие дисперсии. При наличии дисперсии групповая скорость, как и фазовая, зависит от длины волны (или от частоты) составляющих. Как и фазовую скорость, групповую скорость в принципе можно найти из дисперсионного уравнения. Если дисперсионное уравнение дано в виде (26.5), то групповая скорость равна

$$u = - \frac{\partial F}{\partial k} : \frac{\partial F}{\partial \omega}. \quad (27.4)$$

Групповую скорость картины биений можно найти и расчетным способом. В самом деле, картина биений есть суперпозиция двух волн:

$$p = p_1 \exp(-i\omega_1 t + ik_1 x) + p_2 \exp(-i\omega_2 t + ik_2 x).$$

Это выражение можно записать так:

$$p = \exp(-i\omega_1 t + ik_1 x) \{ p_1 + p_2 \exp[-i(\omega_2 - \omega_1)t + i(k_2 - k_1)x] \}.$$

Если $|k_2 - k_1| \ll k_1$, то выражение в фигурных скобках — медленно меняющаяся функция по сравнению с множителем за скобками. Волну $\exp(-i\omega_1 t + ik_1 x)$ при такой записи картины биений называют *несущей*. Функцию

$$p_1 + p_2 \exp[-i(\omega_2 - \omega_1)t + i(k_2 - k_1)x] = p_1 + p_2 \exp[i(k_2 - k_1)(x - ut)]$$

называют *огibaющей*. Огибающая бежит без изменения со скоростью

$$u = (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1).$$

Изменение волны в целом можно представить себе как перемещение огибающей без изменения формы, происходящее с групповой скоростью, и перемещение несущей внутри огибающей, происходящее с фазовой скоростью. Относительно огибающей фаза несущей бежит со скоростью $c - u = \lambda \frac{dc}{d\lambda}$. При нормальной дисперсии эта скорость положительна, при аномальной дисперсии — отрицательна.

Групповую скорость для более сложного случая — суперпозиции произвольного числа монохроматических волн — можно найти аналогичным расчетом. Пусть

$$p = p_1 \exp(-i\omega_1 t + ik_1 x) + p_2 \exp(-i\omega_2 t + ik_2 x) + p_3 \exp(-i\omega_3 t + ik_3 x) + \dots,$$

и пусть длины волн составляющих настолько близки, что для любой пары волн номеров m и n

$$|k_m - k_n| \ll k_1, \quad |\omega_m - \omega_n| \ll \omega_1.$$

Представим данную суперпозицию в виде

$$p = \exp(-i\omega_1 t + ik_1 x) \{ p_1 + p_2 \exp[-i(\omega_2 - \omega_1)t + i(k_2 - k_1)x] + p_3 \exp[-i(\omega_3 - \omega_1)t + i(k_3 - k_1)x] + \dots \} \quad (27.5)$$

Учитывая условие близости частот и длин волн, имеем приближенно

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{k_3 - k_1} = \dots = \frac{d\omega}{dk} = u.$$

С этой степенью точности получим

$$p = \exp(-i\omega_1 t + ik_1 x) \{p_1 + p_2 \exp[i(k_2 - k_1)(x - ut)] + \\ + p_3 \exp[i(k_3 - k_1)(x - ut)] + \dots\}.$$

И в этом случае огибающая суперпозиции волн (выражение в фигурных скобках) также распространяется, не изменяя своей формы, со скоростью u , в то время как несущая бежит внутри огибающей.

То же рассуждение годится и для суперпозиции не только дискретного, но и непрерывного множества монохроматических волн, т. е. для волны со сплошным спектром, при условии достаточно узкого спектра разложения волны в интеграл Фурье. «Моментальную фотографию» такой суперпозиции можно записать в виде

$$p(x) = \exp(ik_0 x) f(x),$$

где $f(x)$ — огибающая, медленно меняющаяся по сравнению с экспоненциальным множителем и быстро спадающая за пределами «длины цуга»: спектр ее лежит в области волновых чисел, много меньших волнового числа k_0 несущей монохроматической волны, имеющей частоту $\omega_0 = k_0 c_0$. Согласно сказанному выше распространение такой группы будет происходить по закону

$$p(x, t) = \exp(-i\omega_0 t + ik_0 x) f(x - ut),$$

где u по-прежнему определяется формулами (27.3), в которых все величины берутся для значения несущей частоты ω_0 .

Дифференцируя уравнение (26.6), получим

$$2\omega d\omega - \frac{G}{\rho} 4k^3 dk = 0,$$

откуда, пользуясь (26.7), найдем, что групповая скорость изгибных волн вдвое больше фазовой скорости волн этой же частоты:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = 2 \frac{G}{\rho} \frac{k^3}{\omega} = 2c.$$

Аналогично из (26.8) и (26.9) найдем, что групповая скорость гравитационных волн вдвое меньше фазовой скорости. В обоих примерах групповая скорость зависит от частоты (длины волны).

Важно отметить, что групповая скорость может сильно отличаться от фазовых скоростей всех монохроматических волн, входящих в состав спектра данного сигнала, несмотря на то, что

в узкополосном по частоте сигнале все составляющие имеют близкие фазовые скорости.

Уточним, что значит требование «достаточной узости» спектра волны. Групповая скорость получается одинаковой для любой пары составляющих только приближенно, в результате приравнивания отношений конечных разностей $(\omega - \omega_0)/(k - k_0)$ производной $d\omega/dk$ в точке k_0 . В действительности эти отношения вообще отличны от производной, и поэтому огибающая будет постепенно менять свою форму, причем тем быстрее, чем шире спектр волны. Для того чтобы найти, в течение какого времени и на каком расстоянии можно еще пренебрегать изменением формы огибающей для волны с заданной шириной спектра, учтем следующий член разложения отношения $(\omega - \omega_0)/(k - k_0)$ по малой величине $k - k_0$:

$$\frac{\omega - \omega_0}{k - k_0} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 (k - k_0) + \dots$$

Члены высших порядков по отношению к малой разности волновых чисел $k - k_0$ опущены. Вызванная опусканием второго члена ошибка в фазе составляющих за время T не превысит

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 (\Delta k)^2 T,$$

где Δk — ширина спектра волновых чисел. Пока эта ошибка остается малой по сравнению с единицей, можно считать, что огибающая не меняет своей формы и движется с групповой скоростью, определяемой как $u = d\omega/dk$ в точке k_0 . Таким образом, время, в течение которого можно считать огибающую неизменной, должно удовлетворить неравенству

$$T \ll \frac{2}{\left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 (\Delta k)^2} = \frac{2}{\left(\frac{du}{dk} \right)_0 (\Delta k)^2}.$$

Так как огибающая движется со скоростью u , то отсюда следует, что она сохраняет свою форму на отрезке пути l , удовлетворяющем неравенству

$$l \ll \frac{2u}{(du/dk)_0 (\Delta k)^2}.$$

Для данного времени пробега T или данной длины пробега волны l можно считать спектр узким и применять понятие групповой скорости, а огибающая волны сохранит свою форму, если выполнены условия

$$\Delta k \ll \sqrt{\frac{2}{T (du/dk)_0}} \quad \text{или} \quad \Delta k \ll \sqrt{\frac{2u}{l (du/dk)_0}}$$

соответственно.

§ 28. Распространение широкополосного сигнала в диспергирующей среде

Воспользуемся теперь понятием групповой скорости для того, чтобы выяснить, как передается в диспергирующей среде волновой сигнал с произвольно большой шириной спектра. Это можно сделать, хотя для такого сигнала в целом нет какой-либо определенной групповой скорости и огибающая сигнала изменяется на рассматриваемом участке пробега волны.

В самом деле, такой широкополосный сигнал всегда можно представить в виде некоторой интерференционной картины, обра-

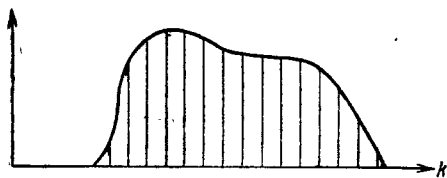


Рис. 28.1. Разбиение широкополосного спектра на множество узкополосных спектров.

зованной суперпозицией ряда узкополосных сигналов, соответствующих каждому узкому участку спектра (рис. 28.1). Каждая группа волн, отвечающая данному узкому участку спектра, распространяется со своей групповой скоростью. Групповые скорости

разных групп будут вообще различны, так как различны их несущие частоты. Поэтому по мере распространения сигнал будет «расползаться»: группы с большей групповой скоростью опередят группы с меньшей групповой скоростью и короткий исходный импульс превратится в длинную группу, вдоль которой будет меняться не только амплитуда, но и несущая частота. При этом в голове группы будут находиться волны, для которых групповая скорость имеет наибольшее значение, а в хвосте группы — волны с наименьшей групповой скоростью. Диспергирующая среда производит как бы спектральное разложение сигнала, раздвигая в пространстве (и по времени прихода в отдаленную точку) группы с различными несущими частотами.

Так, короткий импульс изгибных волн на стержне растягивается таким образом, что впереди оказываются волны короткие, а позади — длинные (см. рис. 4.2). Напротив, короткий импульс гравитационных волн на поверхности воды превращается по мере распространения в колебание, начинающееся с больших длин волн и кончающееся короткими волнами. Например, гравитационные волны цунами, вызванные землетрясением на дне океана, пробежав большое расстояние по поверхности моря, обрушиваются на берег в виде очень длинной волны (длина свыше 10 км, период 10—15 и более минут), после чего приходят более короткие волны высших частот. В обоих случаях первыми приходят волны с большей фазовой скоростью. Форма звукового сигнала, принимаемого в воде от дальнего взрыва, произведенного в глубине моря, растягивается на многие секунды и приобретает осциллирующий характер, указывающий на наличие дисперсии звука

при таком распространении. Аналогичная картина наблюдается и при дальнейшем приеме взрыва, произведенного в атмосфере или в толще земли.

Дисперсия скорости звука в атмосфере, в океане и в земной коре обусловлена неоднородностью среды и влиянием границ (дно и поверхность воды, земная поверхность). Эта дисперсия оказывает сильное влияние на распространение звука. При распространении в море сигнал, приходящий по воде (звук взрыва приходит раньше всего по земной коре, скорость звука в которой много больше, чем скорость звука в воде), начинается с волн, обладающих наименьшей фазовой скоростью, так как именно эти волны имеют наибольшую групповую скорость, а время прихода волн данной частоты определяется их групповой, а не фазовой скоростью.

§ 29. Пространственное спектральное разложение по плоским волнам

Теперь вернемся к вопросу о пространственном спектральном разложении волн. В § 24 мы упоминали, что если известно распределение поля гармонической сложной волны на какой-либо плоскости, то распространение этой волны удобно изучать, разлагая ее на суперпозицию гармонических плоских волн. Пусть на плоскости задано распределение давлений или нормальных скоростей частиц. Тогда, как известно из теории дифференциальных уравнений, в отсутствие волн, приходящих из бесконечности, поле в полупространстве, прилегающем к плоскости и не содержащем источников звука, определяется по заданному полю на границе единственным образом.

Отсутствие источников проверяется тем, что волновое уравнение удовлетворяется во всем полупространстве. Приход волн из бесконечности имеет следующие признаки: для плоских волн признаком прихода из бесконечности является отрицательность компоненты волнового вектора вдоль нормали к плоскости, обращенной внутрь данного полупространства. Для полей более сложной формы признаком наличия волн, приходящих из бесконечности, служит следующее: если в среде есть сколь угодно малое затухание, то для создания конечного поля на данной плоскости поле на бесконечности должно было бы быть бесконечным. Поэтому достаточно проверить, как будет вести себя на бесконечности поле, если, сохраняя поле на данной плоскости, ввести слабое затухание в среду. Это можно сделать, приписывая в выражениях для волн волновому числу малую положительную мнимую часть, что равносильно, как увидим в гл. XII, наличию малого затухания звука в среде. Если в результате этого амплитуда той или иной волны будет стремиться к бесконечности по мере удаления от плоскости, то такая волна будет приходящей.

Будем ниже рассматривать случай, когда приходящих волн нет. Поле в полупространстве можно тогда считать полем, излученным заданным распределением давлений или нормальных скоростей частиц на плоскости. Давления можно осуществить силами, перпендикулярными к плоскости и распределенными с требуемой плотностью. Нормальные скорости частиц можно создать, сообщая соответственные нормальные скорости точкам плоскости.

Схема нахождения поля в полупространстве в виде суперпозиции плоских волн такова. Пусть задано гармоническое поле на плоскости (давление или нормальная скорость) как некоторая функция двух координат. Разложим заданное распределение давления или нормальной скорости в двойной ряд (или интеграл) по Фурье. Компоненты разложения будут иметь вид (опускаем амплитуду) $\exp(-i\omega t + i\xi x + i\eta y)$, т. е. будут представлять собой двухмерные плоские волны одной и той же частоты, бегущие по плоскости $z = 0$ с разными скоростями. Если удастся к каждой такой двухмерной волне пристроить уходящую от плоскости трехмерную волну (на это можно надеяться потому, что каждая трехмерная волна создает на плоскости двухмерную волну как свой след), то суперпозиция всех найденных уходящих волн будет иметь на плоскости заданное распределение давлений (или нормальных скоростей) и явится, в силу теоремы единственности, искомым разложением поля в полупространстве на плоские волны.

§ 30. Поршневое излучение

Начнем выполнять намеченную в предыдущем параграфе программу для простейшего случая поршневого излучения, когда на плоскости задано *равномерное* распределение давления или скорости частиц. В этом случае задача решается совсем просто, даже если отказаться от гармоничности волны. В самом деле, пусть на границе $z = 0$ задано равномерное распределение давления $p(t)$ и требуется «пристроить» к этому распределению уходящую от плоскости в полупространство $z > 0$ волну, которая обращалась бы на плоскости $z = 0$ в эту заданную функцию времени. Легко видеть, что бегущая от границы волна

$$p = \tilde{p}(t - z/c) \quad (30.1)$$

есть искомое решение.

Проследим на этом примере, к чему привел бы отказ от требования отсутствия приходящих волн. Если не ставить этого требования, то, очевидно, волна

$$p = p(t + z/c) \quad (30.2)$$

также удовлетворит условию на плоскости $z = 0$. Более того, волна

$$p = Ap(t - z/c) + (1 - A)p(t + z/c) \quad (30.3)$$

при любом A также удовлетворит условию на границе. Поставив требование ухода волны от плоскости, мы выбрали определенную акустическую ситуацию: излучение звука границей. Решение (30.2) соответствует падению волны, пришедшей из бесконечности, на идеальный поглотитель (таким поглотителем могло бы быть просто второе полупространство $z < 0$, заполненное той же средой).

Наконец, решение (30.3) соответствует отражению на данной плоскости волны, пришедшей из бесконечности, с коэффициентом отражения, равным $A/(1 - A)$. Таким образом, все три задачи отвечают вполне реальным ситуациям, каждая из которых дает на плоскости одно и то же поле; выбор решения определяется не только распределением давления на плоскости, но и условиями задачи в целом. Мы выбрали условие отсутствия приходящих волн; это уже определяет выбор решения (30.1) однозначно.

Попытаемся теперь пристраивать уходящие плоские волны к другим распределениям давления на исходной плоскости, причем больше не будем оговаривать подразумеваемое в дальнейшем требование ухода волны на бесконечность.

§ 31. Пристраивание плоской волны в среде к бегущей волне давления на плоскости

Пусть распределение давления на плоскости $z = 0$ задано в виде

$$p = p_0 \exp(i\xi x - i\omega t). \quad (31.1)$$

Здесь ξ — волновое число двумерной гармонической волны частоты ω , бегущей в плоскости $z = 0$ вдоль оси x . Для того чтобы пристроить к этой бегущей волне плоскую волну в пространстве, вспомним (§ 17), что след любой гармонической плоской волны на плоскости есть двумерная волна с той же частотой и амплитудой давления и с волновым числом, равным проекции волнового вектора k пространственной волны на плоскость. Значит, в нашей задаче ξ есть проекция на плоскость $z = 0$ волнового вектора искомой волны.

На рис. 31.1 дано построение для нахождения искомого волнового вектора. На оси x отложен отрезок ξ и из конца его восстановлен перпендикуляр в плоскости xz до пересечения с окружностью, описанной в той же плоскости радиусом $k = \omega/c$ из начала отрезка. Волновой вектор искомой волны соединяет центр окружности с точкой пересечения. Решений оказывается два: одно соответствует волне, бегущей от плоскости, — это и есть нужное нам решение; второе соответствует волне, приходящей из бесконечности, и поэтому мы должны его отбросить. Компонента по оси z волнового вектора пристроенной волны равна $\sqrt{k^2 - \xi^2}$, так что окончательное решение для уходящей волны

имеет вид

$$p = p_0 \exp(i\xi x + i\sqrt{k^2 - \xi^2}z). \quad (31.2)$$

Волну в пространстве, пристроенную к двумерной волне на плоскости, называют *спектром*. Угол скольжения θ спектра относительно плоскости $z = 0$ определяется равенствами

$$\cos \theta = \xi/k, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - (\xi/k)^2}. \quad (31.3)$$

Заметим, что скорость $\gamma = \omega/\xi$ волны на плоскости больше скорости $c = \omega/k$ волны в пространстве: $\gamma = c/\cos \theta$.

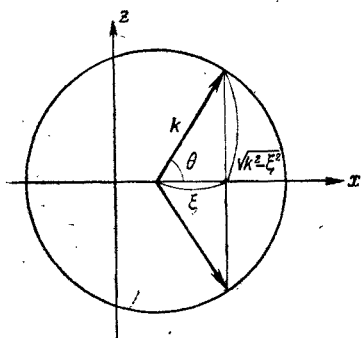


Рис. 31.1. Построение волнового вектора k плоской гармонической волны данной частоты по волновому числу ξ ее следа на плоскости $z = 0$. Построение возможно только для $\xi \leq k$.

Проследим, как будет меняться спектр при изменении волнового числа ξ двумерной волны фиксированной частоты, заданной на плоскости. При $\xi = 0$ давление распределено равномерно по всей плоскости: в полупространство излучится волна, бегущая перпендикулярно к плоскости ($\theta = 90^\circ$). Это — уже рассмотренный случай поршневого излучения. С увеличением ξ волновой вектор спектра начнет поворачиваться и угол скольжения будет уменьшаться. При $\xi = k$ угол скольжения обратится в нуль и волна будет бежать вдоль плоскости. При $\xi > k$ никакой плоской волны в полупространстве, следом которой явилась бы данная волна на плоскости, быть не может,

так как проекция волнового вектора не может быть больше величины самого вектора. Это ограничение можно сформулировать еще и так: чтобы к данной гармонической волне на плоскости можно было пристроить плоскую волну в пространстве, скорость (и длина волны) на плоскости должна быть больше скорости (и длины волны) в среде.

Можно попытаться продолжить заданное распределение давлений на плоскости в виде волны в полупространстве и для более сложных случаев. В самом деле, при известных ограничениях заданное распределение давления, меняющееся с течением времени по гармоническому закону, можно разложить на плоскости в ряд или в интеграл Фурье по координате. Волна, пристроенная к такому распределению, представится суперпозицией спектров, соответствующих каждой из бегущих волн разложения Фурье.

Такой прием позволил бы решить задачу об излучении звука плоскостью, на которой задано произвольное распределение давлений, если бы не ограничение, указанное выше: волновые

числа гармонических волн на плоскости должны быть меньше волнового числа в среде, соответствующего заданной частоте. Поэтому не всякое распределение поля на плоскости можно продолжить при помощи спектров в полупространство, а только такое, которое не содержит компонент с волновым числом, превосходящим волновое число волны данной частоты в среде. Это значит, что не удастся продолжить в среду компоненты, бегущие по плоскости медленнее, чем волна в среде. «Мелкая» структура распределения, которая при данной частоте как раз и соответствует малым длинам волн, малой скорости и большим волновым числам, «не продолжается» в среду в виде плоских волн.

Однако удобство спектральных разложений так велико, что имеет смысл обобщить понятие плоской волны так, чтобы оно охватило и такие волны, следы которых были бы синусоидами, скорость которых могла бы быть сколь угодно мала и, значит, волновое число следа — сколь угодно велико. При этом придется поступиться другими свойствами компонент: они фактически будут не плоскими волнами, и старое название имеет смысл сохранить только потому, что эти волны можно записать аналитически в той же форме, что и «настоящие» плоские волны. Такие «обобщенные» плоские волны называют *неоднородными* плоскими волнами, в отличие от «обычных» плоских волн, которые называют *однородными*.

§ 32. Неоднородные плоские волны

Итак, будем искать гармонические волны, след которых на какой-нибудь плоскости есть синусоидальная волна, бегущая медленнее плоской волны в среде. Для простоты рассмотрим сначала плоскую задачу, считая, что движение частиц происходит в плоскости xz и не зависит от координаты y . Тогда уравнение (22.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0. \quad (32.1)$$

Будем искать решение в виде $p = e^{i\xi x} f(z)$, считая, что $\xi > k$. Подставляя в (32.1), получим уравнение для $f(z)$:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - (\xi^2 - k^2) f = 0, \quad \text{где } \xi^2 - k^2 > 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$f = e^{-\alpha z},$$

где положено $\alpha = \sqrt{\xi^2 - k^2}$. Очевидно, всегда $\alpha < \xi$. Таким образом, искомая неоднородная волна имеет вид

$$p = \exp(i\xi x - \alpha z), \quad (32.2)$$

причем $\xi^2 - \alpha^2 = k^2$.

В отличие от однородных плоских волн, эту волну нельзя представить как одномерную: ее фронты совпадают с плоскостями $x = \text{const}$, но амплитуда колебаний вдоль фронтов не постоянна, а меняется экспоненциально (рис. 32.1). След волны на оси z есть синфазное колебание, экспоненциально убывающее или нарастающее вдоль оси в зависимости от знака α . Вся волна перемещается как твердое тело в направлении оси x , перпендикулярно

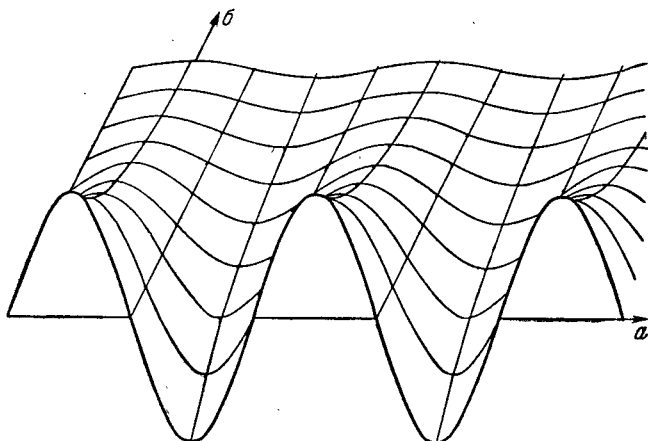


Рис. 32.1. Двухмерный профиль неоднородной волны (ср. рис. 17.1). a — направление быстрого изменения фазы (направление бега волны), b — направление быстрого изменения амплитуды.

к фазовым фронтам. Вспомним, что для однородной волны направление перемещения волны как твердого тела было неопределенным, и мы условно выбрали его как направление, перпендикулярное к фронтам волны. Для неоднородных волн такой определенности нет и принятая нами условность оказывается обоснованной, так как однородную плоскую волну можно считать предельным случаем неоднородной волны при $\alpha \rightarrow 0$. Скорость волны есть $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}}$. Она может быть как угодно мала, если только коэффициент экспоненты α достаточно велик по абсолютной величине, т. е. если амплитуда колебания достаточно быстро меняется вдоль оси z . След волны на оси, проведенной по любому другому направлению, будет синусоидальным по фазе и экспоненциально меняющимся по амплитуде. Ось x — направление быстрого изменения фазы (при постоянной амплитуде). Ось z — направление быстрого изменения амплитуды (при постоянной фазе). Эти два направления взаимно перпендикулярны.

Три отрезка длиной k , k_x и k_z (при $k > \xi$) и соответственно три отрезка k , ξ и α (при $k \leq \xi$) всегда образуют прямоугольные треугольники. В однородной волне гипотенузой служит k , а в не-

однородной, бегущей вдоль оси x , гипотенузой служит ξ . На рис. 32.2 показаны эти геометрические соотношения.

Формально неоднородную волну можно записать в той же форме, что и однородную, вводя *мнимые медленности следов* волны. Так, полагая $k_x = \xi$, $k_z = i\alpha$, можем записать (32.2) в том же виде, что и обычную однородную волну. Формальное сходство можно еще больше подчеркнуть, вводя и для неоднородной волны угол скольжения. В однородной волне величины $k \cos \theta$ и $k \sin \theta$, где θ — угол скольжения относительно оси x (угол между волновым вектором и осью x). Для неоднородной волны можно получить те же формулы, если ввести *мнимый угол скольжения* $\theta = i\psi$ согласно соотношению $k \cos \theta = \xi = k \operatorname{ch} \psi$. Тогда $k \sin \theta = i\alpha = ik \operatorname{sh} \psi$. Таким образом, неоднородную волну можно рассматривать как гармоническую волну с комплексным волновым вектором, образующим с заданной плоскостью мнимый угол скольжения.

Очевидно, неоднородная волна не может существовать во всем неограниченном пространстве, так как ее амплитуда растет в одну сторону оси z бесконечно. Если α положительно, то в полупространстве $z > 0$ может существовать волна $\exp(i\xi x - \alpha z)$, а в полупространстве $z < 0$ — волна $\exp(i\xi x + \alpha z)$. В слое, заключенном между двумя плоскостями, параллельными плоскости $z = 0$, могут существовать обе неоднородные волны.

Неоднородная плоская волна не является чисто продольной волной: скорость v частиц имеет компоненту, перпендикулярную к направлению распространения волны. В самом деле, из (32.2) следует

$$v_x = \frac{\xi}{\rho\omega} \rho, \quad v_z = \frac{i\alpha}{\rho\omega} \rho.$$

Интегрируя по времени, найдем компоненты смещения частиц:

$$u_x = \frac{i\xi}{\rho\omega^2} \rho, \quad u_z = \frac{-\alpha}{\rho\omega^2} \rho.$$

Переходя к вещественной записи, имеем

$$u_x = -e^{-\alpha z} \frac{\xi}{\rho\omega^2} \sin(\xi x - \omega t), \quad u_z = -e^{-\alpha z} \frac{\alpha}{\rho\omega^2} \cos(\xi x - \omega t).$$

Исключая множители, содержащие время, найдем уравнение траектории частиц:

$$\frac{u_x^2}{(e^{-\alpha z} \xi / \rho\omega^2)^2} + \frac{u_z^2}{(e^{-\alpha z} \alpha / \rho\omega^2)^2} = 1.$$

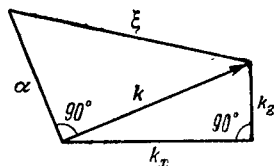


Рис. 32.2. Геометрические соотношения между компонентами волнового вектора по осям координат для однородной и для неоднородной волны при одинаковой частоте.

Частицы в неоднородной волне движутся по эллипсам с полуосями $e^{-\alpha z} \xi / \rho \omega^2$ и $e^{-\alpha z} \alpha / \rho \omega^2$ с центрами в местах невозмущенного положения частиц. Большая ось лежит в направлении быстрого изменения фазы, т. е. в направлении распространения волны; малая ось — в направлении быстрого изменения амплитуды.

Неоднородная плоская волна, в отличие от однородной, может существовать и в несжимаемой среде. В самом деле, в несжимаемой среде $k = 0$, так что уравнение (32.1) принимает вид $\Delta p = 0$. В этом случае возможны волны вида $p = \exp(i\xi x - \xi z)$. Приблизительно такой вид имеют, например, гравитационные волны на поверхности воды. Хотя вода и сжимаема, но скорость гравитационных волн настолько мала (десятки м/сек по сравнению с 1500 м/сек — скоростью звука в воде), что величиной k^2 можно пренебрегать по сравнению с ξ^2 . Вообще, для плоских волн критерий возможности рассматривать данную среду как несжимаемую имеет вид $k^2 \ll \xi^2$. Конечно, такие плоские волны неоднородные.

Неоднородную волну, бегущую по любому направлению, получим, формально заменяя в выражении для однородной плоской волны вещественный волновой вектор k комплексным волновым вектором $\xi + i\alpha$:

$$p = \exp[i(\xi + i\alpha)r] = \exp[i\xi r - \alpha r]. \quad (32.3)$$

Так как единственное требование, налагаемое на гармоническую волну, — это удовлетворение уравнению (22.2), то, подставляя (32.3) в (22.2), найдем условие, которому должны удовлетворять векторы ξ и α :

$$(\xi + i\alpha)^2 = k^2.$$

Приравнивая отдельно вещественные и мнимые части слева и справа, получим

$$\xi^2 - \alpha^2 = k^2, \quad \xi\alpha = 0.$$

При выполнении этих условий (32.3) есть неоднородная плоская волна. Направление быстрого изменения фазы (направление распространения волны) совпадает с вектором ξ ; в этом направлении амплитуда волны остается постоянной. Направление быстрого изменения амплитуды совпадает с вектором α ; в этом направлении фаза волны остается постоянной. Уравнения фронтов имеют вид $\xi r = \text{const}$. Векторы ξ и α взаимно перпендикулярны. Если совместить оси x и z с векторами ξ и α , то вернемся к представлению неоднородной волны (32.2).

Теперь, располагая помимо обычных плоских волн еще и неоднородными волнами, фазовая скорость которых может быть сколь угодно мала, всегда сможем решить задачу: пристроить к любому гармоническому полю на плоскости суперпозицию уходящих от плоскости плоских гармонических волн в полупро-

странстве (в том числе и неоднородных), следом которой явилось бы данное поле на плоскости. Тем самым решается и задача о представлении в виде суперпозиции плоских волн любого поля в полупространстве, не содержащем источников звука (в том числе и источников на бесконечности).

§ 33. Пространственный спектр по плоским волнам для любого распределения давления на плоскости

Вернемся к выражению (31.2) для спектра волны, соответствующего на плоскости двумерной волне давлений $p_0 \exp(i\xi x - i\omega t)$. Если скорость этой двумерной волны меньше c , т. е. $\xi > k$, то (31.2) по-прежнему можно считать спектром, но теперь этот спектр — неоднородная волна

$$p = p_0 \exp(i\xi x - \sqrt{\xi^2 - k^2}z),$$

бегущая вдоль плоскости и экспоненциально убывающая при удалении от плоскости. Чем больше ξ , т. е. чем меньше длина волны распределения давления на плоскости, тем, при данной частоте, быстрее спадает давление при удалении от плоскости.

Пусть волновое число двумерной волны на плоскости фиксировано; выясним, как меняется соответствующий ей пространственный спектр при изменении частоты. На рис. 33.1 показано изменение волнового вектора спектра при изменении частоты от бесконечности (угол скольжения равен при этом 90°) до значения $\omega = \xi c$ (угол скольжения равен нулю). При еще меньших частотах спектр делается неоднородным и волна бежит вдоль плоскости, экспоненциально спадая в направлении, перпендикулярном к ней. При стремлении частоты к нулю спектр приобретает асимптотически форму

$$p = p_0 \exp(i\xi x - \xi z).$$

Такое же распределение давлений получилось бы при абсолютной несжимаемости жидкости.

Обратим внимание на то, что при неоднородном спектре поверхность не излучает звука, возмущение сконцентрировано вблизи плоскости, вдоль которой бежит неоднородная волна. В несжимаемой среде излучения звука нет никогда, но в данном случае жидкость, хотя и сжимаема, ведет себя в этом отношении, как несжимаемая: частицы только перетекают под действием

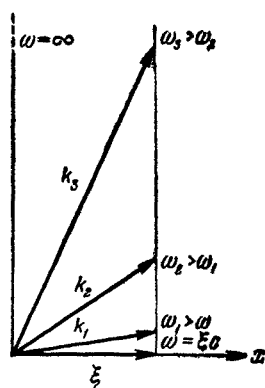


Рис. 33.1. При изменении частоты волновой вектор спектра для данного гармонического распределения на плоскости поворачивается так, что его проекция ξ на ось x остается неизменной.

разности давления между местами с большим и меньшим давлением, и возмущение вдаль не передается.

Вообще, во всех случаях, когда характерные размеры неоднородности поля малы по сравнению с длиной волны, поведение жидкости близко к тому, как вела бы себя несжимаемая среда.

Найденным спектрам легко дать наглядную интерпретацию. Мысленно разрежем плоскую волну данной частоты с волновым вектором k плоскостью, составляющей с ее волновым вектором угол θ . Следом данной волны на плоскости разреза явится бегущая волна с волновым числом $\xi = k \cos \theta$. Удалим среду в полупространстве, откуда приходит волна, а ее действие заменим заданием на секущей плоскости того распределения давлений, которое было в самой плоской волне. Тогда картина во втором полупространстве не изменится и в нем по-прежнему будет распространяться волна, являющаяся спектром по отношению к распределению давлений на плоскости. Этим же способом можно интерпретировать и неоднородные спектры: они получатся при «разрезании» среды, в которой бежит неоднородная волна, плоскостью, перпендикулярной к фронтам неоднородной волны.

Теперь легко найти спектральное представление в виде суперпозиции плоских волн для поля, соответствующего любому периодическому распределению давления на плоскости, меняющемуся по гармоническому закону. Пусть поле на плоскости зависит только от координаты x :

$$p_{z=0} = f(x) = f(x + L).$$

Обозначив для удобства $2\pi/L = \xi$, можем записать разложение в ряд Фурье функции f в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\xi x}, \quad \text{где} \quad f_n = \frac{\xi}{2\pi} \int_0^L f(x) e^{-in\xi x} dx.$$

Каждому слагаемому ряда сопоставим спектр, приписывая ему соответственный номер n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$p_n = f_n \exp(in\xi x + i\sqrt{k^2 - (n\xi)^2} z).$$

Следовательно, поле в пространстве, имеющее на плоскости гармонически зависящее от времени распределение $f(x) e^{-i\omega t}$, имеет вид

$$p(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n \exp(in\xi x + i\sqrt{k^2 - (n\xi)^2} z).$$

Действительно, это — поле, уходящее от плоскости и обращающееся в заданное распределение давления при $z = 0$.

Поле представлено в виде набора спектров — плоских волн, из которых, однако, распространяющимися будут не все, а только те, для которых $n\xi \leq k$. Угол скольжения θ_n распространяю-

щегося спектра номера n относительно плоскости $z = 0$ тем меньше, чем выше номер спектра:

$$\cos \theta_n = n\xi/k, \quad \sin \theta_n = \sqrt{1 - (n\xi/k)^2}.$$

Остальные спектры нераспространяющиеся: это неоднородные волны, бегущие вдоль оси x и затухающие экспоненциально вдоль оси z ; чем выше номер затухающего спектра, тем больше затухание. Затухающие спектры образуют так называемое «ближнее поле»; оно заметно только вблизи плоскости *). Вдали заметны только распространяющиеся спектры, для которых длины волн компонент разложения Фурье на плоскости больше длины волны данной частоты в среде. Таким образом, мелкие детали распределения давления на плоскости, которым соответствуют компоненты разложения малой длины волны, окажутся потерянными: звуковая волна может перенести на расстояние только те детали, которые крупнее длины волны звука данной частоты. Если вся структура распределения мельче длины волны звука, т. е. $\xi > k$, то распространяться вдали от плоскости будет только нулевой спектр $f_0 e^{ikz}$, отвечающий постоянной составляющей в распределении давления по плоскости. Никаких сведений о «тонкой структуре» поля на плоскости он не понесет, и вдали от плоскости можно будет установить только факт наличия гармонического поля.

Аналогично решается задача о «пристраивании» поля в полупространстве к непериодическому по координате полю на плоскости, если это распределение можно разложить в интеграл Фурье. Пусть

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi} e^{i\xi x} d\xi, \quad \text{где} \quad p_{\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Тогда поле в пространстве можно представить в виде непрерывного спектра волн:

$$p(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi} \exp(i\xi x + i\sqrt{k^2 - \xi^2} z) d\xi.$$

Этот интеграл можно разбить следующим образом:

$$\begin{aligned} p(x, z) = & \int_{-\infty}^{-k} p_{\xi} \exp(i\xi x - \sqrt{\xi^2 - k^2} z) d\xi + \\ & + \int_k^{\infty} p_{\xi} \exp(i\xi x - \sqrt{\xi^2 - k^2} z) d\xi + \\ & + \int_{-k}^k p_{\xi} \exp(i\xi x + i\sqrt{k^2 - \xi^2} z) d\xi. \end{aligned}$$

*) Таким затухающим спектром можно считать синусоидальную морскую волну на поверхности воды. Колебания воды быстро спадают по мере погружения: морская волна не излучает звук в глубину моря. Быстрым спаданием колебаний с ростом глубины пользуются морские организмы и подводные лодки: погружение на сравнительно небольшую глубину позволяет достичь спокойных вод даже во время сильного шторма.

В первых двух интегралах суммируются неоднородные волны, дающие ближнее поле. Третий интеграл составлен из распространяющихся волн, уходящих от плоскости. На большом расстоянии существен только этот последний член; но вблизи от плоскости вклад неоднородных волн может доминировать.

Наконец, рассмотрим распределения давления на плоскости $z = 0$, зависящие от обеих координат x и y . Если данное распределение давления на плоскости $f(x, y)$ разлагается в двойной ряд Фурье вида

$$f(x, y) = \sum_m \sum_n f_{mn} \exp(im\xi x + in\eta y),$$

то, как легко видеть, поле в полупространстве, имеющее следом на данной плоскости данное распределение, равно двойной сумме:

$$p(x, y, z) = \sum_m \sum_n f_{mn} \exp [im\xi x + in\eta y + i\sqrt{k^2 - (m\xi)^2 - (n\eta)^2}z].$$

В числе спектров распространяющейся — только те, для которых $(m\xi)^2 + (n\eta)^2 \leq k^2$. Направляющие косинусы их волновых векторов равны $m\xi/k$, $n\eta/k$, $\sqrt{k^2 - (m\xi)^2 - (n\eta)^2}/k$. Спектры, для которых $(m\xi)^2 + (n\eta)^2 > k^2$, неоднородные; они бегут вдоль плоскости $z = 0$ и экспоненциально затухают вдоль оси z .

§ 34. Пространственный спектр по плоским волнам для любого распределения нормальных скоростей на плоскости

Аналогично можно продолжить в полупространство и поле нормальных скоростей частиц, заданное на плоскости. Так, поршневое излучение получится, если плоскости $z = 0$ сообщить колебательное движение в направлении оси z . Если нормальная скорость каждой точки плоскости равна $v(t)$, то в полупространство побежит волна $p = \rho c v(t - z/c)$. Такое излучение может быть создано колебаниями реальной пластины (отвлекаемся пока от конечных размеров пластины). Колебания пластины могут при этом иметь не только нормальную, но и касательную составляющую, однако излучение создаст только нормальная составляющая. Если среда — идеальная жидкость, то наличие касательных скоростей вообще никак не скажется на движении прилегающей среды: на поверхности будет существовать разрыв касательной скорости между частицами границы и частицами среды. В реальной вязкой жидкости разрыва не будет — жидкость будет прилипать к пластине и касательные смещения последней создадут в жидкости короткие быстро затухающие вязкие волны (см. § 19). Они практически никак не скажутся на создаваемой звуковой волне.

При синусоидальном распределении нормальных скоростей

$$v = v_0 e^{i\xi x} \quad \text{при } z = 0$$

получается спектр с таким же углом скольжения, как и при распределении давления с той же длиной волны:

$$p = p_0 \exp(i\xi x + i\sqrt{k^2 - \xi^2}z).$$

Остается только найти амплитуду этого спектра. Пользуясь соотношением $v_z = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial z}$, найдем, что амплитуда волны давления, создаваемой данным распределением нормальных скоростей на плоскости, равна $p_0 = \rho c v_0 / \sqrt{1 - \xi^2/k^2}$. Таким образом, искомый спектр есть

$$p = \frac{\rho c v_0}{\sqrt{1 - \xi^2/k^2}} \exp(i\xi x + i\sqrt{k^2 - \xi^2}z).$$

Вводя угол скольжения, найдем

$$p = \frac{\rho c v_0}{\sin \theta} \exp(i\xi x + i\sqrt{k^2 - \xi^2}z).$$

Переход спектра из распространяющегося в неоднородный будет происходить, как и при задании синусоидального распределения давления, при $\xi = k$ (при $\gamma = c$). Но случаи задания распределения давления и нормальной скорости резко различаются по степени возбуждения соответственного спектра, т. е. по амплитуде создаваемой волны. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Выберем такие амплитуды давления и нормальной скорости, чтобы при поршневом излучении создаваемые волны были одинаковы. Для этого достаточно взять давление единичной амплитуды и нормальную скорость амплитуды $1/\rho c$. Каждое из таких распределений в отдельности создаст при $\theta = 90^\circ$ одну и ту же волну e^{ikz} . Будем теперь уменьшать угол скольжения спектра, например, сохраняя частоту, увеличивать ξ , причем будем сохранять и амплитуды синусоидальных распределений давления и нормальной скорости на плоскости, полагая

$$p = e^{i\xi x}, \quad v = \frac{1}{\rho c} e^{i\xi x} \quad \text{при } z = 0.$$

Тогда амплитуда волны, создаваемой распределением давления, будет оставаться постоянной, а амплитуда волны, создаваемой распределением нормальных скоростей, будет расти как

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2/k^2}}$$

и будет стремиться к бесконечности при $\xi \rightarrow k$. При $\xi > k$, когда создаваемые спектры будут неоднородными, амплитуды их на

плоскости также будут не равны: большее значение будет иметь волна, создаваемая нормальными скоростями.

Такое положение вещей делается наглядным при помощи уже примененной в § 33 интерпретации спектра как результата сечения плоской волны плоскостью. При повороте секущей плоскости амплитуда распределения давления на плоскости не меняется, а амплитуда распределения нормальных скоростей убывает пропорционально синусу угла скольжения волны относительно этой плоскости. Поэтому для получения прежней амплитуды нормальной скорости приходится увеличивать амплитуду плоской волны в отношении $1/\sin \theta$.

Приведем еще формулы, дающие разложение поля, создаваемого в полупространстве периодическим распределением нормальных скоростей на плоскости. Если на плоскости $z = 0$ задано, например, двоякопериодическое распределение нормальных скоростей v_z , так что

$$v_z = \sum_m \sum_n b_{mn} \exp(im\xi x + in\eta y),$$

то поле в полупространстве будет иметь вид

$$p = \rho c \sum_m \sum_n \frac{b_{mn}}{\sqrt{1 - (m\xi/k)^2 - (n\eta/k)^2}} \exp[im\xi x + in\eta y + i\sqrt{k^2 - (m\xi)^2 - (n\eta)^2}z].$$

По сравнению с относительными значениями отдельных членов разложения Фурье на плоскости, в амплитудах спектров оказываются подчеркнутыми более высокие номера: увеличение амплитуды тем больше, чем меньше угол скольжения данного спектра.

При создании волны в полупространстве заданным распределением нормальных скоростей на ограничивающей плоскости, так же как и при создании поля распределением давлений, весь набор спектров распадается на ближнее поле, состоящее из неоднородных волн, и на поле, излучаемое плоскостью в виде однородных распространяющихся волн. С таким разбиением поля на две части, ведущие себя по-разному, приходится иметь дело, в частности, в вопросах излучения звука вибрациями протяженных конструкций, например обшивок кораблей (излучение подводного звука), фюзеляжа самолетов, кожухов механизмов и т. п. Во всех этих случаях излучение в окружающую среду создается нормальными смещениями этих больших поверхностей, а вследствие большой величины этих поверхностей по сравнению с длинами волн нормальных смещений оценку излучаемого звука можно провести, считая поверхность плоской.

В большинстве случаев нормальные смещения создаются изгибными волнами, бегущими по поверхности. Но изгибные волны обладают, как мы видели, большой дисперсией, и низкочастотные изгибные волны имеют малую фазовую скорость. Если скорость

этих волн меньше скорости звука той же частоты в окружающей среде, то они создадут только ближнее поле, и вдали оно не будет заметно. Только волны, бегущие быстрее, чем волны в среде, дадут заметное излучение, которое может быть принято на большом расстоянии от колеблющейся поверхности. Если, например, речь идет о шумопеленгации, т. е. об обнаружении корабля с большого расстояния по его звуку, который в значительной части создается вибрациями обшивки, то неоднородные спектры не будут играть роли и нужно учитывать только сравнительно высокочастотную часть вибраций, соответствующую изгибным волнам, бегущим быстрее звука в воде. Но, например, в вопросах действия корабля на подводную акустическую мину, приводимую в действие низкочастотным звуковым полем корабля, проходящего поблизости от мины, существенно именно ближнее поле.

Интересна особенность волн на слегка изогнутых поверхностях. На плоской пластине нормальные смещения создаются практически только изгибными волнами. Но на изогнутой пластине нормальные смещения создают и волны продольного типа, хотя эти смещения, как правило, малы по сравнению со смещениями в изгибных волнах, вызываемых теми же силами, приложенными к пластине. Однако волны продольного типа бегут с большой скоростью, большей, чем скорость звука в воздухе или в воде. Поэтому соответственные спектры всегда распространяющиеся, и, несмотря на то, что вибрации поверхности, вызываемые волнами продольного типа, малы по сравнению с вибрациями в изгибных волнах, продольные волны могут давать решающий вклад в суммарное поле излучения. Ближнее же поле всегда создается в основном изгибными волнами.

§ 35. Волны, модулированные по фронту

Иногда плоская волна изменяется так, что фронты волны оказываются *модулированными*: либо поверхности равных фаз оказываются не плоскими, а волнистыми, либо амплитуда волны вдоль фазового фронта оказывается переменной. Так бывает, например, после прохождения плоской волны через *дифракционную пластинку*, образованную полосами с разной степенью прозрачности для звуковой волны (амплитудная модуляция), либо после отражения волны от волнистой поверхности (фазовая модуляция). Важный пример модуляции фронта *световой волны* — прохождение ее через ультразвуковой пучок: ввиду изменения коэффициента преломления при сжатиях и растяжениях среды световая волна оказывается модулированной по фронту как по амплитуде, так и по фазе. Модуляция света на ультразвуке позволяет изучать визуально структуру звуковых пучков.

Итак, может оказаться, что на некоторой плоскости, которая в отсутствие возмущений совпадала бы с плоскостью фронта данной гармонической волны, поле окажется неравномерным. Огра-

нимся случаем периодической неравномерности. В силу принципа суперпозиции можно представить картину на этой плоскости как сумму равномерного распределения (постоянная составляющая разложения возмущения в ряд Фурье) и периодически распределенных возмущений разных длин волн (высшие компоненты разложения).

Можно, применяя изложенный выше метод, определить дальнейшую судьбу волны. Постоянная составляющая даст нулевой спектр. Остальные составляющие будут вести себя по-разному. Составляющие, длина периодичности которых на плоскости больше длины волны в среде, образуют спектры, которые побегут по направлениям, отличным от направления распространения исходной волны («боковые спектры»). Мелкая же структура, образованная компонентами возмущения с длинами волн, меньшими длины волны в среде, даст начало только неоднородным волнам, которые затухнут вблизи от рассматриваемой плоскости и вдали от нее вообще сказываться не будут.

Если все периодические составляющие возмущения имеют длину волны, меньшую длины волны звука, то они выровняются уже на малом расстоянии, и вперед побегит волна, очищенная от всех этих возмущений. Так, например, волна, отраженная от стенки, изогнутой по синусоиде с длиной волны, меньшей длины волны звука, отражается от стенки как от абсолютно гладкого зеркала. Искажение волны заметно только в «ближнем поле» — вблизи от стенки, где неоднородные спектры еще не успели затухнуть.

§ 36. Волны комплексных частот

Помимо неоднородных плоских волн, приведем для полноты и другие обобщения гармонических волн, которыми также удобно пользоваться в комплексной записи. Так, легко проверить прямой подстановкой в (22:2), что при $\omega/k = c$

$$p = \exp [-i\omega (1 - i\eta) t + ik (1 - i\eta) x] \quad (36.1)$$

есть свободная волна. Из физических соображений ясно, что η должно быть положительным, иначе волна нарастает с течением времени неограниченно. Однако при положительном η волну нельзя рассматривать для любых отрицательных моментов времени, так как она безгранично растет при $t \rightarrow -\infty$. Таким образом, эту волну можно рассматривать только в полубесконечном временном интервале, начинающемся с некоторого определенного момента времени. В этом — аналогия волны (36.1) с волной, неоднородной по пространству, которую можно рассматривать только в полубесконечном пространстве.

Волну (36.1) можно считать гармонической, с комплексной частотой $\tilde{\omega} = \omega (1 - i\eta)$ и комплексным волновым числом $\tilde{k} =$

$= k(1 - i\eta)$ «той же комплексности» *). В вещественном представлении волна имеет вид

$$p = \exp(-\omega\eta t + k\eta x) \cos(\omega t - kx).$$

Ее можно интерпретировать, например, как излучение какого-либо осциллятора, возбужденного ударом в какой-то момент времени и постепенно уменьшающего свою амплитуду вследствие «высвечивания» звуковой волны. Амплитуда волны в каждой точке уменьшается с течением времени вследствие уменьшения амплитуды колебания осциллятора. Пространственное же распределение амплитуд в каждый данный момент нарастает при удалении от начальной точки, так как более далекие части волны были излучены в более ранние промежутки времени, когда амплитуда осциллятора еще была велика.

Интересно, что такая же картина имеет место вдали от источника звука не только для плоской волны, но и в пространственном случае излучения сферической волны (например, для звука удара колокола). В этом случае, хотя амплитуда и убывает при удалении от источника вследствие расхождения волн (убывание по степенному закону обратно пропорционально расстоянию от источника), но это убывание перекрывается указанным выше экспоненциальным нарастанием (ср. § 89).

Наконец, рассмотрим наиболее общий случай: *неоднородные по пространству волны комплексной частоты*. Такую волну можно записать в виде

$$p = \exp\{-i(\omega - i\eta)t + i(\xi + i\alpha)r\}. \quad (36.2)$$

Здесь $\omega - i\eta$ — комплексная частота и $\xi + i\alpha$ — комплексный волновой вектор. Подставляя (36.2) в (22.2), получим условие, связывающее ω , η , ξ и α :

$$(\xi + i\alpha)^2 = \frac{1}{c^2} (\omega - i\eta)^2. \quad (36.3)$$

Разделяя вещественные и мнимые части, найдем

$$\xi^2 - \alpha^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \eta^2),$$

$$\xi\alpha = -\frac{1}{c^2} \omega\eta.$$

Если четыре величины ω , η , ξ и α удовлетворяют этим двум соотношениям, то (36.2) действительно представляет собой свободную волну в данной среде.

Согласно формуле (22.5) скорость частиц в такой волне равна

$$v = \frac{\xi + i\alpha}{\rho(\omega - i\eta)} p.$$

*) «Одинаковая комплексность» двух чисел означает, что их отношение вещественно.

Следовательно, движение частиц в волне происходит в плоскости, параллельной векторам ξ и α . В каждой такой плоскости можно указать четыре характерных направления: а) направление быстрого изменения фазы, параллельное вектору ξ ; б) направление фронта, вдоль которого фаза не меняется, перпендикулярное к вектору ξ ; в) направление быстрого изменения амплитуды, совпадающее с направлением вектора α ; г) направление, вдоль которого амплитуда не меняется, перпендикулярное к вектору α (рис. 36.1).

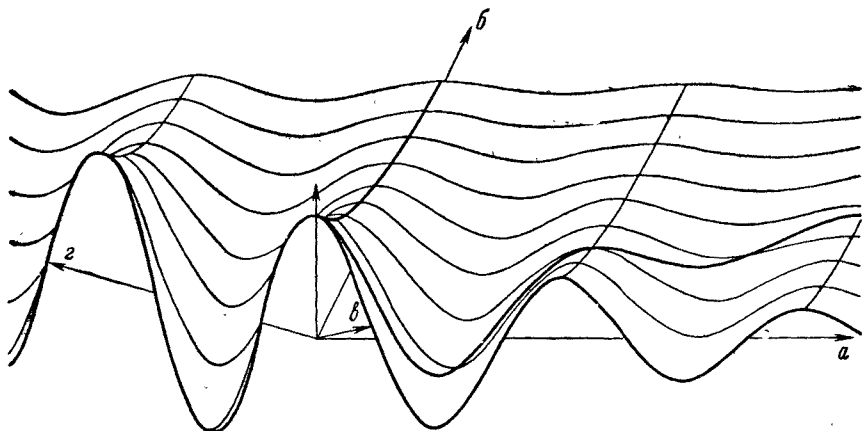


Рис. 36.1. Двухмерный профиль неоднородной волны комплексной частоты. a — направление быстрого изменения фазы, b — направление постоянной фазы, δ — направление быстрого изменения амплитуды, z — направление постоянства амплитуды.

В отличие от неоднородной волны с вещественной частотой, в волне вида (36.2) направления быстрого изменения амплитуды и фазы не составляют прямого угла, а ось, вдоль которой профиль волны перемещается как твердое тело, не совпадает с направлением быстрого изменения фазы.

Найдем вектор скорости перемещения волны (36.2) как твердого тела. Обозначим этот вектор γ . Очевидно, должно выполняться условие

$$(\xi + i\alpha)\gamma = \omega - i\eta,$$

откуда следует

$$\xi\gamma = \omega, \quad \alpha\gamma = -\eta. \quad (36.4)$$

Вектор γ должен представлять собой линейную комбинацию векторов ξ , α , т. е. $\gamma = a\xi + b\alpha$, где a и b — пока неизвестные постоянные. Умножая обе части этого выражения на ξ и на α , получим, учитывая (36.4),

$$\xi^2 a + \xi\alpha b = \omega, \quad \xi\alpha a + \alpha^2 b = -\eta.$$

Решая эту систему относительно a и b , найдем

$$a = \frac{\omega\alpha^2 + \eta\alpha\xi}{[\alpha\xi]^2}, \quad b = -\frac{\omega\alpha\xi + \eta\xi^2}{[\alpha\xi]^2}.$$

Наконец, подставляя в выражение для γ , найдем после простых переделок:

$$\gamma = \frac{\omega[\alpha[\xi\alpha]] - \eta[\xi[\alpha\xi]]}{[\alpha\xi]^2}.$$

Модуль вектора скорости равен

$$\gamma = \left(\frac{\omega^2\alpha^2 + \eta^2\xi^2 + 2\omega^2\eta^2/c^2}{\alpha^2\xi^2 - \omega^2\eta^2/c^4} \right)^{1/2}.$$

Обобщая понятие плоской гармонической волны, мы нашли, что любое из обобщений можно записать в том же виде, что и обычную однородную волну:

$$p = \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}r),$$

где как ω , так и \mathbf{k} могут быть комплексными и должны удовлетворять единственному условию

$$k^2 = \omega^2/c^2.$$

Все такие волны будем объединять названием *монохроматических плоских волн*.

ЭНЕРГИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

§ 37. Звуковая энергия

Создавая звуковую волну в покоящейся среде, мы сообщаем частицам среды кинетическую энергию и изменяем их внутреннюю энергию. Найдем плотность дополнительной энергии в волне по отношению к невозмущенному состоянию.

Плотность кинетической энергии частиц в волне равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (37.1)$$

где ρ — плотность частицы, а v — ее скорость. Плотность кинетической энергии — квадратичная величина относительно возмущения среды. Плотность частиц можно считать равной невозмущенной плотности среды. Погрешность будет третьего порядка малости по отношению к малому возмущению, что приведет к относительной ошибке того же порядка, что и при линеаризации уравнений гидродинамики; следовательно, такое приближение допустимо.

Вопрос о плотности внутренней энергии более сложен: только часть изменения этой энергии связана с звуковой волной. Рассмотрим, например, поршень, входящий в трубу, заполненную газом и закрытую со второго конца. При вдвигании поршня он совершит над газом положительную работу и, значит, увеличит внутреннюю энергию газа; при выдвигании поршня работа будет отрицательной, и энергия газа уменьшится. Работу A , совершаемую поршнем и равную изменению внутренней энергии, можно в обоих случаях выразить формулой

$$A = -P \delta\Omega,$$

где P — давление газа в трубе, а $\delta\Omega$ — приращение объема газа при перемещении поршня (отрицательное при вдвигании поршня и положительное при выдвигании). Таким образом, плотность внутренней энергии, сообщенной газу, равна

$$E_{\text{вн}} = -P \frac{\delta\Omega}{\Omega} = Ps, \quad (37.2)$$

где Ω — объем трубы, а s — среднее сжатие газа. Мы пренебрегли изменением давления в трубе при смещении поршня, считая

сжатие малым; найденная добавочная внутренняя энергия линейно зависит от возмущения.

Легко видеть, однако, что этот линейный добавок не имеет никакого отношения к звуковой волне. В самом деле, будем мы вдвигать поршень быстро или медленно, рассчитанное выше приращение внутренней энергии будет одинаково, хотя в первом случае вдоль трубы побежит звуковая волна, а во втором случае весь объем просто испытает равномерное сжатие. Нас же интересует часть энергии, связанная со звуковой волной, в которой среда сжата всегда неравномерно. Поэтому поставим задачу по другому: выясним, как меняется внутренняя энергия среды, когда одна ее часть испытывает сжатие, другая — разрежение, а объем среды в целом не меняется. Для этого рассмотрим трубу с поршнем внутри нее, заполненную газом и закрытую с обоих концов, так что суммарный объем газа сохраняется неизменным. Сместив поршень, сожмем газ в одной части трубы и разрежим его в другой. Изменения внутренней энергии в обеих частях трубы окажутся, согласно (37.2), равными по абсолютной величине и противоположными по знаку. Такой расчет даст для суммарной добавочной энергии нуль.

Этот явно ошибочный результат получился потому, что мы, как и выше, не учли изменений давления в обеих частях трубы при перемещении поршня. В действительности эти изменения создадут разность давлений по обе стороны поршня и работа будет производиться против результирующей сил этих давлений. Энергия, сообщенная газу, и будет равна этой работе. Добавочная энергия — квадратичная величина по отношению к возмущению, поскольку и смещение поршня, и изменение давления — величины линейные. Полученный выше нулевой результат относится только к линейным членам, которые, как теперь видно, соответствуют только перераспределению между обеими частями трубы уже имевшейся ранее в газе энергии: в одной части трубы энергия увеличится настолько же, насколько в другой уменьшится.

Найдем интересующую нас квадратичную добавку к энергии. Пусть вначале поршень располагался посередине трубы. Тогда приращения давления можно считать в обеих частях трубы одинаковыми по величине и отличающимися только знаком (более точный расчет учитывал бы уже и члены третьего порядка, которыми мы будем пренебрегать, как и выше, при определении кинетической энергии).

Давление в одной половине трубы изменится от P до $P + p$, а во второй — от P до $P - p$. При малом перемещении поршня можно принять с достаточной степенью точности, что работа производится на всем перемещении против среднего давления для каждой половины трубы; против давления $P + \frac{1}{2} p$ в одной половине и против давления $P - \frac{1}{2} p$ в другой половине. Таким

образом, суммарная работа выразится формулой

$$A = -\left(P + \frac{1}{2} \rho\right) \delta\Omega + \left(P - \frac{1}{2} \rho\right) \delta\Omega = -\rho\delta\Omega.$$

Линейные члены, соответствующие перераспределению энергии, сокращаются. Квадратичные члены положительны для обеих половинок трубы, они и дают добавку энергии, вызванную неравномерностью сжатия среды. Сокращающиеся линейные члены мы впредь рассматривать не будем и будем условно приписывать каждой половинке трубы в качестве приращения внутренней энергии только эту квадратичную добавку. Суммарное приращение энергии окажется найденным правильно, а перераспределение энергии никакой дополнительной работы не требует и из рассмотрения вообще выпадает.

Таким образом, плотность (условную в указанном смысле) внутренней энергии в каждой половинке трубы можно записать в виде

$$E_{\text{вн}} = -\rho \frac{\delta\Omega}{2\Omega} = \frac{1}{2} \rho s, \quad (37.3)$$

где Ω теперь — объем половины трубы.

Наконец, пользуясь зависимостью между ρ и s , получим

$$E_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \frac{s^2}{\beta} = \frac{1}{2} \beta \rho^2,$$

где β — сжимаемость среды. Обратим внимание на то, что в несжимаемой среде ($\beta = 0$) внутренняя акустическая энергия равна нулю.

Если суммарный объем интересующей нас массы газа меняется, то, разумеется, необходимо учитывать и линейный член: в этом случае он не будет равен нулю. Интересно рассмотреть пример, связанный с оценкой энергии, выделяющейся при взрыве. Продукты взрыва вытесняют атмосферный воздух и, расширяясь до атмосферного давления, производят работу, равную этому атмосферному давлению, умноженному на объем продуктов взрыва. Это как раз и есть линейная часть энергии, выражаемая через объем продуктов взрыва.

Известен рассказ, что Энрико Ферми оценил энергию первого взрыва атомной бомбы в Аламогордо, наблюдая, насколько снесло звуковой волной, пришедшей от взрыва, бумажки, которые он выпускал из рук, давая им свободно падать в ожидании прихода волны. Такую оценку можно произвести следующим образом. Смещение l бумажки соответствует перемещению полусферического слоя атмосферы, находящегося от взрыва на расстоянии, которое обозначим r . Значит, суммарный объем, вытесненный взрывом, составлял $2\pi r^2 l$. Это приращение объема нужно умножить на атмосферное давление P — в результате получится линейная

часть работы (осложнения, связанные с переменностью атмосферного давления по высоте, можно при грубой оценке игнорировать). Ферми находился примерно на расстоянии $r = 10$ км от места взрыва. Бумажки были снесены примерно на $l = 1$ м. Значит, вытесненный объем составлял $2\pi \cdot (10^6)^2 \cdot 100 \approx 6 \cdot 10^{14}$ см³. Атмосферное давление равно 10^6 бар. Значит, работа против атмосферного давления, совершенная взрывом, была равна $A = 6 \cdot 10^{14} \cdot 10^6$ эрг $= 6 \cdot 10^{10}$ кдж. Но энергетический эквивалент взрыва 1 кг тротила равен примерно 1000 ккал $= 4000$ кдж. Значит, указанная энергия соответствует взрыву $1,5 \cdot 10^7$ кг $= 15$ 000 тонн тротила, что хорошо согласуется с известной цифрой 20 000 тонн тротилового эквивалента для бомбы этого типа.

§ 38. Плотность энергии в звуковой волне

Указанным в предыдущем параграфе способом можно ввести (условную) плотность внутренней энергии и в звуковой волне. Для частицы, имеющей объем $d\Omega$ и испытавшей сжатие s , измененное давление равно $P + p$, относительное изменение объема равно $s/(1 + s)$ (это уточненное значение требуется только для расчета работы исходного давления P), среднее давление за время сжатия равно $P + \frac{1}{2}p$. Работа, произведенная над частицей данной массы, равна

$$dA = \left(P + \frac{1}{2}p\right) \frac{s}{1+s} d\Omega.$$

Интегрируя по всему объему, занятому возмущением, найдем

$$A = \int_{\Omega} \left(P + \frac{1}{2}p\right) \frac{s}{1+s} d\Omega = P \int_{\Omega} \frac{s}{1+s} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2}p \frac{s}{1+s} d\Omega,$$

где область интегрирования Ω охватывает интересующий нас участок среды. Но первый интеграл справа дает просто суммарное приращение объема рассматриваемой массы газа. Если этот объем не изменился, то интеграл равен нулю. Тогда суммарная работа, совершенная над средой, окажется равной

$$A = \int_{\Omega} \frac{1}{2}ps d\Omega$$

(во втором интеграле пренебречь s в знаменателе можно). Условную плотность внутренней энергии и здесь будем считать равной

$$E_{\text{вн}} = \frac{1}{2}ps = \frac{1}{2} \frac{s^2}{\beta} = \frac{1}{2} \beta p^2.$$

Суммарная условная плотность энергии в волне есть сумма плотностей кинетической и приращения внутренней энергии:

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{вн}} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \beta p^2. \quad (38.1)$$

Так как в бегущей плоской волне в каждой точке и в каждый момент времени $p = \pm \rho c v$, то в такой волне в любой точке и в любой момент времени плотность кинетической энергии равна плотности внутренней энергии и суммарная плотность звуковой энергии равна

$$E = \rho v^2 = \beta p^2. \quad (38.2)$$

Плотность энергии в бегущей плоской волне удовлетворяет волновому уравнению. В самом деле, квадрат (и, более того, любая степень) давления в бегущей волне, как и само давление, является функцией от бинорма $t \mp x/c$, т. е. может рассматриваться как некоторое решение одномерного волнового уравнения (для стоячей волны это утверждение неверно).

Пользуясь формулой (38.2), можно получить следующие выражения для суммарной энергии всей бегущей плоской волны в целом (в расчете на единицу площади фронта):

$$\beta \int_{-\infty}^{\infty} p^2 dx = \frac{1}{\rho c} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 dt = \rho \int_{-\infty}^{\infty} v^2 dx = \rho c \int_{-\infty}^{\infty} v^2 dt.$$

В первом и третьем интегралах x , p и v берутся в произвольный момент времени, во втором и четвертом — в произвольной точке. Подынтегральное выражение отлично от нуля только в области, занятой возмущением (в первом и третьем интегралах), и только в тот промежуток времени, когда возмущение проходит через данную точку (во втором и четвертом интегралах).

При помощи той же исходной формулы (38.2) для плотности энергии бегущей плоской волны можно найти и выражение для плотности энергии в случае суперпозиции двух волн, бегущих по одному направлению. Так, сумма двух плоских волн $p_1 = p_1(t - x/c)$ и $p_2 = p_2(t - x/c)$, бегущих в одну и ту же сторону, также есть бегущая плоская волна,

$$p(t - x/c) = p_1 + p_2.$$

Значит, плотность энергии в ней равна

$$E = \beta p^2 = \beta (p_1 + p_2)^2 = \beta p_1^2 + \beta p_2^2 + 2\beta p_1 p_2 = E_1 + E_2 + 2\beta p_1 p_2,$$

где E_1 и E_2 — плотности энергии составляющих волн p_1 и p_2 в отдельности.

Таким образом, плотность энергии суперпозиции двух волн, бегущих в одном и том же направлении, вообще отличается от суммы энергий составляющих: для энергий волн принцип суперпозиции несправедлив. Плотность энергии результирующего поля может быть как больше, так и меньше суммы плотностей энергий составляющих и может даже обращаться в нуль (тривиальный случай двух волн противоположного знака: $p_1 = -p_2$).

Для суперпозиции двух плоских волн $p_1 = p_1(t - x/c)$ и $p_2 = p_2(t + x/c)$, бегущих навстречу друг другу, имеем

$$p = p_1 + p_2, v = v_1 + v_2 = \frac{1}{\rho c} (p_1 - p_2),$$

откуда

$$E = \frac{1}{2} \beta p^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \beta (p_1 + p_2)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{(\rho c)^2} (p_1 - p_2)^2 = \\ = \beta p_1^2 + \beta p_2^2 = E_1 + E_2. \quad (38.3)$$

Таким образом, для плоских волн, бегущих навстречу друг другу, плотности энергии всегда складываются. В отличие от бегущей волны, в суперпозиции встречных волн (например, в стоячей волне) плотности кинетической и внутренней энергии не равны друг другу в каждой точке.

Наконец, в суперпозиции двух плоских волн, бегущих под любым углом друг к другу, давления складываются алгебраически, а скорости — векторно. Выбирая ось x в направлении распространения одной из волн и ось y — в плоскости, содержащей оба направления распространения, найдем для результирующего давления и компонент результирующей скорости частиц:

$$p = p_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + p_2 \left(t - \frac{x}{c} \cos \theta - \frac{y}{c} \sin \theta \right),$$

$$v_x = \frac{1}{\rho c} p_1 + \frac{\cos \theta}{\rho c} p_2, \quad v_y = \frac{\sin \theta}{\rho c} p_2,$$

где θ — угол между направлениями распространения обеих волн. Суммарная плотность энергии равна

$$E = \frac{1}{2} \beta (p_1 + p_2)^2 + \frac{1}{2} \rho \left[\frac{1}{(\rho c)^2} (p_1 + p_2 \cos \theta)^2 + \frac{1}{(\rho c)^2} p_2^2 \sin^2 \theta \right] = \\ = \beta p_1^2 + \beta p_2^2 + \beta p_1 p_2 (1 + \cos \theta) = E_1 + E_2 + \sqrt{E_1 E_2} (1 + \cos \theta).$$

В этой формуле заключены в виде частных случаев рассмотренная выше суперпозиция двух волн, бегущих в одном и том же направлении ($\theta = 0$), и двух волн, бегущих навстречу друг другу ($\theta = \pi$).

Плотность звуковой энергии очень мала по обычным масштабам энергетики даже для очень громких звуков. Так, плотность энергии в звуковой волне, создаваемой при обычной речи на расстоянии 1 м от говорящего (60 дБ над стандартным уровнем 0,0002 бара, т. е. звуковое давление 0,2 бара), равна примерно $1,4 \cdot 10^{-8}$ эрг/см³. Фортиссимо оркестра в зале доводит плотность энергии до 10^{-5} – 10^{-4} эрг/см³. Таким образом, в большом концертном зале (20 000 м³) при фортиссимо оркестра суммарная звуковая энергия достигает примерно 10^6 эрг, что равно работе силы тяжести при поднятии грузика 10 г на высоту 1 м.

Еще меньше плотность звуковой энергии в воде: при том же давлении 0,2 бара плотность энергии составляет всего 10^{-12} эрг/см³. Дело в том, что, как видно из формулы (38.2), при заданном звуковом давлении плотности энергии относятся как сжимаемости сред. При одинаковом звуковом давлении плотность энергии в воде в $1,4 \cdot 10^4$ раз меньше, чем в воздухе *). Вообще (не только в звуковой волне) при одинаковом давлении упругая энергия, накапливаемая в газе, огромна по сравнению с энергией в жидкости именно потому, что газы более податливы, чем жидкости. В газе изменение объема, создающее заданное изменение давления, во много раз больше, чем в жидкости.

Интересны иллюстрации этого обстоятельства, взятые из неакустических областей. Почему применяют гидравлические, а не пневматические испытания котлов? Разрыв котла, испытываемого гидравлически, безопасен: запасенная в сжатой воде и выделенная при разрыве стенок котла энергия мала и приведет только к вытеканию небольшого количества жидкости, в то время как разрыв пневматически испытываемого котла — это настоящий взрыв (хотя и значительно менее мощный, чем взрыв котла под паром, когда происходит дополнительное выделение энергии перегретой воды). Способность накапливать большую энергию при заданном значении силы характерна для всяких упругих систем с малым модулем упругости. Этим объясняется меньшая сила толчков на неровностях пути при езде на более податливых рессорах; безопасность прыжка на согнутые ноги и опасность перелома при прыжке на выпрямленные ноги; преимущество сильно вытягивающегося перед разрывом пенькового каната при швартовке корабля по сравнению со стальным тросом, обладающим той же прочностью на разрыв, и т. д.

При одинаковой скорости частиц плотности энергии в бегущей волне пропорциональна плотности среды. Так, при одинаковой скорости частиц плотность энергии в воде в 800 раз больше, чем в воздухе.

При заданной плотности звуковой энергии давления и скорости в бегущих волнах в разных средах относятся как корни квадратные из обратных отношений сжимаемостей и плотностей соответственно.

Рассмотрим подробнее плотность энергии в гармонической волне: в гармонических волнах энергетические соотношения имеют интересные особенности. Для нахождения плотности энергии в гармонической волне запишем давление и скорость частиц в вещественном виде (экспоненциальная запись не годится, поскольку при нахождении энергии требуются квадратичные

*) Тем не менее в специальных концентраторах, создающих сходящиеся пучки ультразвука, удается получать огромные плотности энергии и потоки мощности даже в воде: плотность энергии свыше 10^9 эрг/см³ и плотность потока мощности свыше 10 квт/см².

величины):

$$p = p_0 \cos(\omega t - \varepsilon), \quad v = v_0 \cos(\omega t - \eta),$$

где p_0 и v_0 — амплитуды давления и скорости в данной точке, а ε и η — начальные фазы. Плотность энергии в данной точке выразится формулой

$$E = \frac{1}{2} \beta p_0^2 \cos^2(\omega t - \varepsilon) + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \cos^2(\omega t - \eta).$$

Плотность кинетической и внутренней энергии осциллирует между нулем и максимальными значениями $\frac{1}{2} \beta p_0^2$ и $\frac{1}{2} \rho v_0^2$. Найдем среднее значение плотности энергии за один период. Так как интеграл от квадрата косинуса за период равен $\frac{1}{2}$, то искомое среднее равно

$$\bar{E} = \frac{1}{4} \beta p_0^2 + \frac{1}{4} \rho v_0^2.$$

Средняя плотность энергии за период, очевидно, равна приближенно среднему за промежуток времени, много больший периода.

Рассмотрим теперь среднюю за большой промежуток времени плотность энергии суммы двух гармонических волн разной частоты:

$$p = p_1 \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1) + p_2 \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2),$$

$$v = v_1 \cos(\omega_1 t - \eta_1) + v_2 \cos(\omega_2 t - \eta_2).$$

Мгновенная плотность энергии в данной точке выразится теперь формулой

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} \beta [p_1^2 \cos^2(\omega_1 t - \varepsilon_1) + p_2^2 \cos^2(\omega_2 t - \varepsilon_2) + \\ + 2p_1 p_2 \cos(\omega_1 t - \varepsilon_1) \cos(\omega_2 t - \varepsilon_2)] + \\ + \frac{1}{2} \rho [v_1^2 \cos^2(\omega_1 t - \eta_1) + v_2^2 \cos^2(\omega_2 t - \eta_2) + \\ + 2v_1 v_2 \cos(\omega_1 t - \eta_1) \cos(\omega_2 t - \eta_2)]. \end{aligned}$$

Но среднее от произведения косинусов разных частот за большой промежуток времени стремится к нулю по мере увеличения промежутка, поэтому члены, содержащие это произведение, при усреднении можно опустить. Тогда

$$\bar{E} = \frac{1}{4} \beta p_1^2 + \frac{1}{4} \beta v_1^2 + \frac{1}{4} \beta p_2^2 + \frac{1}{4} \rho v_2^2 = \bar{E}_1 + \bar{E}_2,$$

т. е. средние плотности энергии двух гармонических волн разной частоты аддитивны.

Очевидно, аддитивность средних плотностей энергии имеет место и для любого числа составляющих гармонических волн данного звукового поля. Так, для периодического поля средняя энергия равна сумме средних за период поля энергий его гармонических составляющих. При этом фазы компонент роли не играют: средняя энергия зависит только от амплитудного спектра данного периодического поля.

Для бегущей плоской гармонической волны $p = p_0 \cos(\omega t - kx - \varepsilon)$ плотность энергии равна, согласно (38.2),

$$E = \beta p_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varepsilon) = \rho v_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \varepsilon).$$

Плотность энергии в плоской волне осциллирует от точки к точке по синусоидальному закону между нулем и значением $\beta p_0^2 = \rho v_0^2$ (рис. 38.1). Средняя плотность энергии в бегущей гармонической волне как по времени, так и по пространству равна

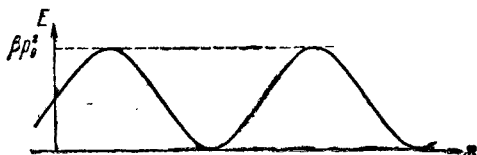


Рис. 38.1. Мгновенное пространственное распределение плотности звуковой энергии в бегущей плоской гармонической волне.

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \beta p_0^2 = \frac{1}{2} \rho v_0^2. \quad (38.4)$$

В стоячей гармонической волне

$$p = p_0 \cos kx \cos \omega t = \frac{1}{2} p_0 \cos(\omega t - kx) + \frac{1}{2} p_0 \cos(\omega t + kx)$$

средняя плотность энергии в любой точке (или равная ей средняя по пространству плотность энергии в любой момент времени) равна

$$\bar{E} \approx \frac{1}{4} \beta p_0^2.$$

В отличие от бегущей волны, в стоячей волне средние по времени значения кинетической и внутренней энергии не равны друг другу в каждой точке:

$$\bar{E}_{\text{кин}} = \frac{1}{8} \beta p_0^2 (1 - \cos 2kx),$$

$$\bar{E}_{\text{вн}} = \frac{1}{8} \beta p_0^2 (1 + \cos 2kx).$$

Кинетическая энергия достигает максимума в узлах, а внутренняя — в пучностях давления.

Аддитивность средних плотностей энергий имеет место не только для гармонических волн разных частот, но и для статистических волн при их *статистической независимости*. В этом случае *функция корреляции* давления в этих волнах, равная по определению среднему по времени значению произведения давлений, равна нулю.

Для того чтобы энергии складывались в среднем, достаточно, чтобы обращалось в нуль среднее значение произведения давлений. Требование статистической независимости волн является достаточным, но не необходимым, как мы видели на примере двух синусоид разных частот.

§ 39. Плотность потока мощности в звуковой волне

Рассмотрим теперь передачу звуковой энергии по среде. Передача осуществляется звуковым давлением, совершающим работу при перемещении частиц среды, на которые оно действует. При расчете передаваемой энергии достаточно учитывать работу только звукового давления, потому что, как показано в предыдущем параграфе, работа равновесного давления приводит лишь к перераспределению энергии в среде.

Найдем мощность сил звукового давления, действующего на частицы, расположенные на какой-либо плоской элементарной площадке dS . Сила звукового давления, действующая на площадку, равна $p dS$. Пусть скорость частиц, лежащих на этой площадке, равна v ; тогда искомая мощность есть $p v dS$. Эта мощность зависит от ориентировки площадки по тому же закону, что и поток массы среды, протекающей через эту площадку: $dQ = p v dS$. Поэтому, по аналогии с применяемым в гидродинамике понятием вектора плотности потока импульса среды $J = p v$, введем вектор плотности потока мощности:

$$W = p v. \quad (39.1)$$

Мощность сил давления, приложенных к площадке dS , равна

$$p v dS = W dS \quad (39.2)$$

(аналогично формуле, выражающей поток вещества через площадку: $dQ = J dS$).

Формулы (39.1), (39.2) — общие гидродинамические формулы, если p есть полное давление; но мы будем относить величины $p v dS$ и W только к акустическим величинам (так же, как плотность энергии в предыдущем параграфе): плотность потока звуковой мощности будем рассматривать как условную величину в том же смысле, как и плотность звуковой энергии в среде.

В бегущей плоской волне модуль вектора W равен

$$W = p v = \frac{1}{\rho c} p^2 = \rho c v^2, \quad (39.3)$$

а сам вектор направлен по вектору медленности волны. Плотность потока мощности в направлении какой-либо оси координат, например оси z , равна $p v_z$.

Плотности потока мощности плоских волн, бегущих в одном направлении, не аддитивны. Так, плотность потока мощности

волны $p = p_1 (t - x/c) + p_2 (t + x/c)$ равна

$$W = \frac{1}{\rho c} p^2 = W_1 + W_2 + \frac{2}{\rho c} p_1 p_2.$$

Аддитивность получится, если рассматривать средние за длительный промежуток времени потоки мощности для гармонических волн разных частот или для статистических волн при условии их статистической независимости. Здесь положение такое же, как и при расчете плотности энергии суммы двух волн.

Плотность потока мощности суперпозиции двух плоских волн, бегущих навстречу друг другу, всегда равна разности плотностей потоков мощности этих волн. В самом деле, в суммарном поле волн $p_1 = p_1 (t - x/c)$ и $p_2 = p_2 (t + x/c)$ имеем

$$p = p_1 + p_2, \quad v = v_1 + v_2 = \frac{1}{\rho c} (p_1 - p_2),$$

откуда

$$W = pv = (p_1 + p_2) \frac{1}{\rho c} (p_1 - p_2) = W_1 - W_2.$$

Между плотностью звуковой энергии в среде и плотностью потока звуковой мощности существует важное соотношение, аналогичное закону сохранения энергии в механике. Умножим уравнение движения

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = 0$$

скалярно на вектор v и уравнение неразрывности

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla v = 0$$

на давление p . Складывая полученные уравнения, найдем

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial t} + \beta p \frac{dv}{dt} + v \nabla p + p \nabla v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{2} \beta p^2 \right) + \nabla (pv) = 0.$$

В скобках стоят соответственно плотность звуковой энергии E и вектор плотности потока мощности W . Значит,

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla W = 0. \quad (39.4)$$

Это — дифференциальный закон сохранения звуковой энергии в среде.

Проинтегрируем это уравнение по какому-либо объему Ω , ограниченному неподвижной поверхностью S . При интегрировании второго слагаемого можно преобразовать объемный интеграл в поверхностный.

Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} E d\Omega + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{W} d\mathcal{S} = 0. \quad (39.5)$$

Эта формула выражает интегральный закон сохранения энергии для звуковой энергии.

Этот «акустический» закон сохранения энергии пришлось вывести специально, вместо того чтобы сослаться прямо на «обычный» закон сохранения энергии, потому что как плотность энергии, так и плотность потока мощности берутся не полностью: учитывается только их квадратичная — «акустическая» — часть по отношению к давлению и скорости, а перераспределение энергии не учитывается.

Полученная формула относится к замкнутым объемам. Однако для бегущей плоской волны, ограниченной во времени, формулу можно применять и к незамкнутой поверхности. В самом деле, пусть имеется плоская звуковая волна, исчезающая на некотором расстоянии слева и справа от данной точки. Проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную к направлению распространения волны. Слева и справа от этой плоскости построим цилиндры, опирающиеся на эту плоскость, с осью, параллельной направлению распространения волны, и замкнем эти цилиндры достаточно далеко справа и слева от плоскости, где возмущение уже отсутствует или еще отсутствует. Рассматривая каждый из этих цилиндров как замкнутый объем и применяя к каждому из них закон сохранения акустической энергии, получим, что поверхностные интегралы сводятся к интегралам по общему основанию цилиндров, так как потоки через боковые и через далекие стенки равны нулю.

Теорему о сохранении акустической энергии можно поэтому трактовать как протекание энергии сквозь плоскость, перпендикулярную к направлению распространения волны: уменьшение энергии с одной стороны плоскости равно увеличению энергии с другой стороны.

Легко найти величину этого потока: так как для выбранной поверхности нормаль \mathbf{n} совпадает с направлением скорости частиц, то, согласно (38.2), в расчете на единицу площади поток через плоскость равен

$$\mathbf{n} \mathbf{W} = p\mathbf{v} = p^2/\rho c = cE. \quad (39.6)$$

В этой формуле существенно использование соотношения $v = p/\rho c$, справедливого только в отсутствие дисперсии. Тогда плотность потока мощности оказывается равной плотности энергии, умноженной на скорость волны. Этот результат наглядно интерпретируется так: энергия в бегущей плоской волне переносится со скоростью звука.

Заметим, что в гармонической волне связать наличие потока мощности или усредненного потока мощности с каким-либо переносом энергии нельзя: так как в гармонической волне возмущение охватывает всю среду, то замкнуть цилиндры, о которых шла речь выше, так, чтобы их основания оказались вне области возмущения, невозможно. Если же замкнуть цилиндры внутри возмущенной области, то теорема сохранения выразит только, что в замкнутом объеме энергия бегущей гармонической волны не изменяется в среднем за период. Тем не менее в этом случае плотность энергии можно локализовать и для гармонической волны в каждый момент времени.

Если в среде имеется дисперсия, то уравнение (39.6) справедливо только для монохроматических волн, т. е. в случае, когда нельзя говорить о переносе энергии по среде. При этом следует еще иметь в виду, что величина c в (39.6) — разная для различных частот. Но формулу, аналогичную (39.6) и дающую скорость перемещения энергии по среде, можно получить для узкополосного сигнала — группы волн. В самом деле, в этом случае вся энергия сосредоточена в области, занятой группой, и эта группа перемещается с групповой скоростью u . Поэтому энергия волны также перемещается с групповой скоростью, и вместо формулы (39.6) имеем теперь

$$nW = uE. \quad (39.7)$$

Для гармонических волн мощность какого-либо процесса удобно характеризовать ее средним значением за период или за промежутки времени, большой по сравнению с периодом. Задача о нахождении среднего по времени произведения двух гармонических величин одного периода часто возникает в теории колебаний: к ней сводятся все задачи о нахождении мощности гармонических процессов любой природы. В акустике одна из величин — давление, другая — скорость; при воздействии какой-либо гармонической силы на тело одна из величин — сама сила, другая — скорость тела; в электрических цепях одна из величин — разность потенциалов, а другая — сила тока. Дадим общее правило нахождения средней мощности во всех этих задачах, причем будем обозначать перемножаемые величины по-прежнему буквами p и v , какова бы ни была их физическая природа.

Рассмотрим самый общий случай:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \exp(-i\omega t + i\varepsilon), \\ v &= v_0 \exp(-i\omega t + i\varepsilon + i\varphi), \end{aligned} \quad (39.8)$$

когда между исходными величинами имеется некоторый сдвиг фаз φ . Амплитуды p_0 и v_0 будем считать вещественными. Поскольку нахождение мощности есть нелинейная операция над гармоническими величинами p и v , перейдем к вещественной

записи:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cos(\omega t - \varepsilon), \\ v &= v_0 \cos(\omega t - \varepsilon - \varphi). \end{aligned}$$

Мгновенная мощность процесса равна

$$\begin{aligned} W &= p_0 v_0 \cos(\omega t - \varepsilon) \cos(\omega t - \varepsilon - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} p_0 v_0 [\cos \varphi + \cos(2\omega t - 2\varepsilon - \varphi)]. \end{aligned} \quad (39.9)$$

При усреднении по периоду волны второе слагаемое в скобках даст нуль. Таким образом, средняя мощность процесса равна

$$\overline{W} = \frac{1}{2} p_0 v_0 \cos \varphi. \quad (39.10)$$

В частном случае синфазности величин p и v ($\varphi = 0$) средняя мощность равна

$$\overline{W} = \frac{1}{2} p_0 v_0. \quad (39.11)$$

В случае, когда p и v сдвинуты по фазе на 90° , средняя мощность равна нулю.

Часто удобно вычислять мощность без перехода к вещественной записи: как легко получить из (39.8), $p v^* + p^* v = 2 p_0 v_0 \cos \varphi$. Значит,

$$\overline{W} = \frac{1}{4} (p v^* + p^* v). \quad (39.12)$$

В ряде случаев одну из величин, например v , удобно представить в виде суммы двух слагаемых, из которых одно синфазно со второй величиной (p), а другое сдвинуто относительно нее на 90° . В комплексной записи это значит, что одно слагаемое пропорционально p , а второе пропорционально ip . В этом случае говорят об «одинаковой мнимости» и о «разной мнимости» величин. Пусть, например, $v = v' + v''$ и p и v' — величины одинаковой, а p и v'' — разной мнимости. Мгновенная мощность равна

$$p v = p v' + p v''. \quad (39.13)$$

В первом слагаемом сдвиг фаз между сомножителями равен нулю, значит, средняя величина этого слагаемого равна

$$\overline{p v'} = \frac{1}{2} p_0 v_0.$$

Среднее значение второго слагаемого равно нулю. Следовательно, средняя мощность всего процесса есть

$$\overline{W} = \overline{p v} = \overline{p v'} = \frac{1}{2} p_0 v_0. \quad (39.14)$$

Слагаемые в (39.13) соответствуют слагаемым в скобках в (39.9). Первое слагаемое в обеих формулах дает постоянную мощность, производящую накапливающуюся с течением времени работу; это так называемая *активная мощность* процесса. Второй член, дающий в среднем по времени нуль, называют *реактивной мощностью*. Соответственно компоненты v' и v'' называют активной и реактивной компонентами величины v относительно величины p , принятой за основную. Можно было бы принять за основную величину v и тогда представить p в виде суммы активной и реактивной составляющих относительно второй из них равен амплитуде, умноженной на косинус угла сдвига фаз между величинами. Этот косинус равен отношению активной мощности к амплитуде реактивной мощности.

При комплексной записи часто удобно вводить *импеданс* — отношение Z величин p и v :

$$Z = p/v$$

Импеданс гармонического процесса — в общем случае комплексная величина, не зависящая от времени. Средняя мощность процесса простым образом выражается через вещественную часть импеданса и амплитуду скорости. В самом деле, в общем случае (39.8)

$$Z = \frac{p_0 \exp(-i\omega t + i\varepsilon)}{v_0 \exp(-i\omega t + i\varepsilon + i\varphi)} = \frac{p_0}{v_0} e^{-i\varphi}$$

и вещественная часть импеданса равна $\text{Re } Z = p_0/v_0 \cos \varphi$, откуда, пользуясь (39.10), непосредственно получаем

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \text{Re } Z \cdot v_0^2. \quad (39.15)$$

Согласно (22.5) вектор скорости частиц в гармонической звуковой волне можно представить в виде суммы

$$v = \frac{\nabla \ln p'}{i\rho\omega} p + \frac{\nabla \varepsilon}{\rho\omega} p.$$

Первое слагаемое имеет мнимость, отличную от давления, а второе — ту же мнимость, что и давление. Отсюда видно, что пространственное изменение амплитуды колебаний в волне не дает вклада в средний поток мощности, и он определяется только градиентом фазы и направлен вдоль этого градиента. Средний вектор плотности потока мощности равен

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \frac{\nabla \varepsilon}{\rho\omega} p_0^2. \quad (39.16)$$

Например, в бегущей плоской гармонической волне $\nabla \varepsilon = k$ и, следовательно,

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho c} = \frac{1}{2} \rho c \alpha_0^2 \quad (39.17)$$

(что, конечно, можно было получить и непосредственно из соотношения $v = p/\rho c$).

В стоячей волне средняя плотность потока мощности равна нулю.

В неоднородной гармонической волне $p = p_0 \exp(i\xi r - \alpha r)$ вектор потока средней мощности направлен вдоль вещественной компоненты волнового вектора ξ и, согласно (39.16), равен $\frac{1}{2} p_0^2 \frac{\xi}{\rho \omega}$. В перпендикулярном направлении, вдоль мнимой компоненты волнового вектора α , средний поток мощности равен нулю, так как скорость частиц в направлении α имеет другую мнимость, чем давление.

Воспользуемся полученными результатами, чтобы найти мощность, уносимую от плоскости спектрами — плоскими волнами, излучаемыми плоскостью, на которой заданы бегущие синусоидальные распределения давления или скорости. Пусть задано давление $p = p_0 e^{i\xi x}$ при $z = 0$, причем пусть $\xi < k$. Тогда нормальная компонента скорости частиц на плоскости равна $v_z = (p/\rho c) \sin \theta$, где θ — угол скольжения данного спектра; скорость и давление синфазны и средняя плотность потока в направлении оси z равна

$$\overline{W}_z = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho c} \sin \theta.$$

При изменении угла скольжения от 90° до нуля при неизменной амплитуде давления излучаемая в направлении оси z мощность падает от своего максимального значения до нуля, изменяясь по закону $\sin \theta$ (рис. 39.1, *a*). Таким образом, при заданной амплитуде давления на плоскости наиболее эффективно излучение, перпендикулярное к плоскости, — поршневое излучение.

При $\xi > k$ нормальная скорость оказывается разной мнимости с давлением. Поэтому средняя излучаемая энергия в этом случае равна нулю: бесконечная плоскость, вдоль которой бежит синусоидальная волна давлений, ничего не излучает, если скорость бега волны меньше скорости звука в среде (длина волны возмущения на плоскости меньше длины волны звука той же частоты в среде).

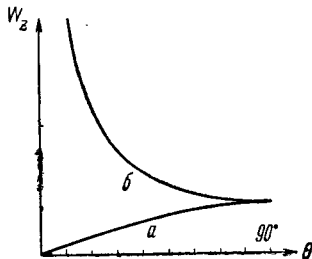


Рис. 39.1. *a* — мощность излучения волной давления, бегущей по плоскости, *б* — мощность излучения волной нормальных скоростей, бегущей по плоскости. Эффективность излучения выше при излучении волной нормальных скоростей и быстро растет при уменьшении угла скольжения излученной волны.

Обращение в нуль среднего потока мощности в направлении оси z соответствует превращению данного спектра в неоднородную волну, бегущую вдоль плоскости $z = 0$.

Найдем теперь излучение звука при задании на плоскости синусоидальной бегущей волны нормальных скоростей: $v_z = v_0 e^{i\xi x}$ при $z = 0$. Давление на плоскости выразится в этом случае так: $p = \rho c v_z / \sin \theta$. Следовательно, при $\xi < k$ средний поток мощности будет равен

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \frac{\rho c v_0^2}{\sin \theta}.$$

При заданной амплитуде нормальной скорости излучаемая мощность растет при изменении угла скольжения от 90° до нуля, изменяясь по закону $1/\sin \theta$ (рис. 39.1, б). Поршневое излучение оказывается наименее эффективным, а скользящее — наиболее эффективным. При $\xi > k$ поток мощности обращается в нуль, как и при задании давления, по той же причине: создаваемая волна делается неоднородной, бегущей вдоль плоскости $z = 0$.

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ

§ 40. Отражение и прохождение звука

В предыдущих главах мы изучили поведение плоских волн, бегущих в неограниченной однородной среде. В дальнейшем нам придется изучать распространение волн в частично или полностью ограниченных средах. В качестве первого шага к этим задачам в ближайших двух главах выясним, что происходит, когда на пути волны находится *плоское однородное препятствие*. Препятствием может служить жесткая стенка, граница с другой средой, граница с вакуумом и т. п. Границу препятствия будем считать резкой. Заметим, что это не обязательно означает реальный скачок свойств в молекулярном масштабе, как на границе двух разных сред; переход от свойств среды к свойствам препятствия, происходящий непрерывно в слое, тонком по сравнению с длиной волны, действует на волну, падающую на препятствие, так же, как и резкий скачок свойств. Поведение волны, падающей на переходный слой большой толщины, рассмотрим в § 44.

Препятствие вызывает в среде появление *отраженной* волны, бегущей навстречу падающей; в силу симметрии волна, отраженная от плоского однородного препятствия, также плоская. Если препятствие — это другая однородная среда, то в ней возникает еще и третья волна — *прошедшая* волна, также плоская.

Свойства препятствия налагают определенные требования на давление и скорость частиц у границы препятствия. Это — *граничные условия* (см. § 12), которым должно удовлетворять *суммарное* поле падающей и отраженной волн. Например, на границе с вакуумом суммарное давление падающей и отраженной волн должно равняться нулю; на границе с абсолютной жесткой стенкой должна равняться нулю нормальная компонента суммарной скорости частиц и т. п. Если препятствие — другая среда, то граничные условия связывают значения суммарного поля на границе в первой среде с полем прошедшей волны во второй среде.

Наконец, как отраженная, так и прошедшая волны должны уносить звуковую энергию от препятствия. Как увидим в § 42, это требование не всегда удовлетворяется тривиальным образом. При выполнении всех указанных требований отраженная и прошедшая волны оказываются определенными однозначно.

Наша задача заключается в отыскании отраженной и прошедшей волн по известным свойствам препятствия для любой падающей волны. В этой главе рассмотрим только простейший случай *нормального падения* плоской волны на препятствие. Это — одномерная задача: все величины в волне зависят только от одной координаты (например, z). Падающую волну можно в этом случае записать в виде $p(t - z/c)$, а отраженную — в виде $\bar{p}(t + z/c)$. Если препятствием является другая среда, скорость звука в которой равна c' , то возникающую прошедшую волну можно записать в виде $p'(t - z/c')$.

Поскольку задача одномерная, то все результаты, которые получим ниже, можно будет перенести на другие одномерные случаи (отражение и прохождение волн на струне, в трубе, заполненной жидкостью, и т. п.), характеризуя препятствия, располагаемые на пути волны, соответственным способом в каждом случае. Об этом будет подробнее сказано в § 51.

§ 41. Отражение от идеальных границ. Метод мнимых изображений

Простейшие виды препятствий — это «свободная граница» (абсолютно мягкая поверхность) и «закрепленная» граница (абсолютно жесткая поверхность). Такие границы будем называть *идеальными*.

Пусть свободная граница совпадает с плоскостью $z = 0$. Граничное условие требует, чтобы в этой точке обращалась в нуль сумма давлений в падающей и отраженной волне: $p(t) + \bar{p}(t) = 0$. Следовательно,

$$\bar{p}\left(t + \frac{z}{c}\right) = -p\left(t + \frac{z}{c}\right). \quad (41.1)$$

Волна давлений отражается от свободной границы, не меняя зависимости от времени, но изменив знак на обратный. При этом пространственное распределение давления вдоль оси z изменяется на зеркально обращенное, так как отраженная волна бежит навстречу падающей. Скорости частиц в обеих волнах равны соответственно

$$v = \frac{1}{\rho c} p\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad \bar{v} = -\frac{1}{\rho c} \bar{p}\left(t + \frac{z}{c}\right) = \frac{1}{\rho c} p\left(t + \frac{z}{c}\right), \quad (41.2)$$

так что волна скоростей отражается от свободной границы также без изменения формы, но, в отличие от волны давления, и без изменения знака. Отсюда следует, что суммарная скорость частиц на свободной границе вдвое больше скорости в падающей волне.

Найденная нами отраженная волна вместе с падающей обращают давление в нуль в точке $z = 0$, в то время как граничное

условие требует обращения давления в нуль на самой свободной поверхности, которая под действием падающей волны колеблется вблизи точки $z = 0$, а не совпадает с ней все время. Значит, при нахождении отраженной волны мы делаем некоторую ошибку, относя граничное условие к поверхности препятствия в отсутствие волны. Такую же ошибку будем делать и во всех других случаях более или менее податливых препятствий. Однако это ошибка того же порядка, что и допускаемая при линейризации уравнения движения или уравнения непрерывности: она заключается в пренебрежении изменением той или иной величины, характеризующей волну, на расстоянии, равном перемещению частиц в волне. Пока волны можно вообще рассматривать в линейном приближении, такое пренебрежение допустимо.

Для падающей гармонической волны $p = e^{ikz}$ отраженная волна равна $\bar{p} = -e^{-ikz}$. Суммарное давление и скорость равны соответственно $p + \bar{p} = 2i \sin kz$, $v + \bar{v} = \frac{1}{\rho c} 2 \cos kz$. Это — поле стоячей волны с амплитудой давления 2 и с узлом на границе. В вещественной записи

$$p + \bar{p} = 2 \sin kz \sin \omega t = 2 \cos \left(kz - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$v + \bar{v} = \frac{1}{\rho c} 2 \cos kz \cos \omega t.$$

Амплитуда давления и амплитуда скорости частиц распределены в суммарном поле по закону косинуса. Пространственное распределение амплитуд давления сдвинуто относительно распределения амплитуд скоростей на четверть волны к границе.

Практически свободной можно считать границу твердой или жидкой среды не только с вакуумом, но и с газом, если только давление газа не слишком велико (требуется, чтобы плотность газа была мала по сравнению с плотностью конденсированной среды). Такова, например, для подводного звука свободная поверхность воды (например, в море). При нормальном падении звука из воды на свободную поверхность результирующее давление на границе с атмосферой меньше 0,0006 от давления в падающей волне, что практически всегда пренебрежимо мало. В газе осуществить свободную границу для плоской волны нельзя.

Для абсолютно жесткой границы в нуль должна обращаться суммарная нормальная скорость частиц границы: $\frac{1}{\rho c} p(t) - \frac{1}{\rho c} \bar{p}(t) = 0$. Значит,

$$\bar{p} \left(t + \frac{z}{c} \right) = p \left(t + \frac{z}{c} \right), \quad (41.3)$$

т. е. волна давлений отражается, не меняя ни формы, ни знака. Давление на границе оказывается удвоенным по сравнению с дав-

лением в падающей волне. Волна скорости частиц при этом отражается без изменения формы, но с обратным знаком.

Для гармонической волны $p = e^{ikz}$, падающей на жесткую границу, отраженная волна есть $p = e^{-ikz}$, и суммарное поле представляется в виде

$$p + \bar{p} = 2 \cos kz \cos \omega t,$$

$$v + \bar{v} = \frac{1}{\rho c} 2 \sin kz \sin \omega t = \frac{1}{\rho c} 2 \cos \left(kz - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Поле снова есть стоячая волна с удвоенной амплитудой. На границе оказывается пучность давлений. Распределение давлений сдвинуто относительно распределений скоростей на четверть волны от границы назад.

Реальное осуществление абсолютно жесткой границы для жидкостей и для твердых сред весьма затруднительно. Абсолютно жестких тел в природе нет — речь может идти только о большей или меньшей жесткости ограничивающей среды по сравнению со средой, в которой распространяется звук. Для газов при нормальном давлении, ввиду большого различия плотностей, по крайней мере при не слишком «скользящем» падении волны, границу с жидкостью или твердым телом с достаточной степенью точности можно считать абсолютно жесткой; практически это значит, что на такой границе нормальная компонента результирующей скорости частиц много меньше этой компоненты в падающей волне. В самом деле, например, для нормального падения звука из воздуха на водную поверхность результирующая скорость частиц у границы (а значит, и скорость границы) меньше, чем 0,0006 скорости частиц в падающей волне.

Отражение от идеальных границ часто бывает удобно интерпретировать при помощи *метода мнимых изображений*. Пусть требуется найти звуковое поле, создаваемое заданными источниками звука в среде, занимающей полупространство, ограниченное абсолютно жесткой плоской стенкой. Мысленно уберем стенку, заполним второе полупространство той же средой и разместим во втором полупространстве в симметричных относительно стенки точках такие же источники звука, как и в данном, как бы зеркально отразив их в плоскости стенки. Старые и новые источники вместе создадут в получившейся неограниченной среде поле, симметричное относительно плоскости стенки. Поэтому на плоскости симметрии нормальные скорости частиц будут равны нулю. Но это и есть условие абсолютной жесткости стенки — следовательно, поле в данном полупространстве осталось таким же, как и при наличии стенки.

Зеркально отраженные источники называют *мнимыми источниками*, а прием замены поля в ограниченном пространстве полем в неограниченном пространстве, создаваемом помимо заданных источников еще и мнимыми источниками, называют *методом мнимых изображений*. Отраженная волна — это поле, создаваемое

в исходном полупространстве мнимыми источниками, расположенными во втором полупространстве.

Аналогично задачу о поле в полупространстве, ограниченном абсолютно мягкой стенкой, можно заменить задачей о поле в безграничном пространстве, но в этом случае мнимые изображения должны работать в противофазе с данными источниками, создавая в точках плоскости стенки давления, равные по величине и противоположные по знаку давлениям, создаваемым действительными источниками. Например, подводный источник звука создает в море такое же поле, какое создавали бы в безграничном водном пространстве данный источник и его отражение в водной поверхности, работающее в противофазе.

Эхо, слышимое при отражении звука от стены, можно рассматривать как звук, пришедший от мнимого источника, расположенного в симметричной точке позади стены, при условии, что стена была бы убрана. Запаздывание эхо относительно исходного звука — это как раз время, требующееся для пробега звука от мнимого источника (двойное расстояние до стенки).

Найденные нами волны, отраженные абсолютно мягкой и абсолютно жесткой стенками можно рассматривать как мнимые зеркальные изображения падающей волны в абсолютно мягкой и в абсолютно жесткой стенке.

Пусть в неограниченной среде имеется расположение источников, симметричное относительно некоторой плоскости. Тогда эту плоскость можно считать абсолютно жесткой границей. Пожалуй, это единственный случай реального осуществления идеальной жесткой плоской границы. Следует, конечно, иметь в виду, что граница является абсолютно жесткой только для данного поля, и при нарушении строгой симметричности источников плоскость симметрии перестает быть идеальной границей. Аналогично, плоскость симметрии, разделяющая симметричные источники, работающие в противофазе, можно считать для данного поля свободной поверхностью. В таком поле «свободная» поверхность осуществляется и для газа.

§ 42. Правильное отражение. Отражение гармонических волн

При неидеальной границе отраженная волна может иметь другой профиль, чем падающая, т. е. функции p и \bar{p} могут различаться. Если различие состоит только в постоянном множителе, так что для препятствия, расположенного в точке $z = 0$,

$$\bar{p}\left(t + \frac{z}{c}\right) = \mathcal{U} p\left(t + \frac{z}{c}\right),$$

то отражение называют *правильным*, а величину \mathcal{U} — *коэффициентом отражения*. Точно так же, если препятствие образовано другой средой и профиль прошедшей волны отличается от профиля

падающей только постоянным множителем, так что

$$p' \left(t - \frac{z}{c'} \right) = \mathcal{W} p \left(t - \frac{z}{c} \right),$$

то прохождение также называют правильным, а величину \mathcal{W} — коэффициентом прохождения. При неправильном отражении понятия коэффициентов отражения и прохождения неприменимы.

Если препятствие расположено не в начале координат, а в точке $z = z_0$, то правильно отраженная волна есть

$$\bar{p} = \mathcal{V} p \left(t + \frac{z - 2z_0}{c} \right),$$

а правильно прошедшая

$$p' = \mathcal{W} p \left(t - z_0 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c'} \right) - \frac{z}{c'} \right).$$

Величина $2z_0/c$ есть добавочное время пробега отраженной волны по сравнению с отражением от границы, расположенной в точке $z = 0$. Для прошедшей волны соответственная величина равна $z_0 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c'} \right)$.

Для гармонической падающей волны $p = e^{ikz}$ отраженная и прошедшая в точке $x = 0$ волны запишутся в виде $\bar{p} = \mathcal{V} e^{-ikz}$, $p' = \mathcal{W} e^{ik'z}$. Для препятствия, расположенного в точке $z = z_0$, соответственные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \mathcal{V} \exp [-ik(z - 2z_0)], \\ p' &= \mathcal{W} \exp [i(k - k')z_0 + ik'z]. \end{aligned}$$

Свободная граница и жесткая стенка дают, как мы видели, правильное отражение для волн любой формы. Коэффициент отражения для свободной границы равен -1 , а для жесткой стенки $+1$.

Если отражение правильное, то можно ввести понятие коэффициента отражения и коэффициента прохождения и для скорости частиц, совершенно аналогично тому, как выше он был введен для давления. Коэффициент отражения для скорости частиц равен по модулю и противоположен по знаку коэффициенту отражения для давления.

Замечательным свойством монохроматических плоских волн в их комплексном представлении является то, что их отражение от линейных плоских препятствий всегда правильное. Препятствие называют линейным, если для него отражение суммы любых двух волн равно сумме отражений для этих двух волн в отдельности и отражение любой волны, умноженной на любую постоянную, равно отражению данной волны, умноженному на ту же постоянную.

Выведем это свойство гармонических волн. Пусть падающая волна $p = p(t - z/c)$ при отражении превращается в некоторую волну $\bar{p}(t + z/c)$. Тогда, в силу линейности препятствия, падающая волна вида $\partial p/\partial t$ должна превратиться при отражении в волну $\partial \bar{p}/\partial t$, а падающая волна вида $-i\omega p$ превратится в отраженную вида $-i\omega \bar{p}$. Но для гармонической волны $\partial p/\partial t = -i\omega p$. Значит, $\partial \bar{p}/\partial t = -i\omega \bar{p}$, откуда находим, что временная зависимость отраженной волны действительно имеет тот же вид, что и в падающей волне, т. е. отраженная волна должна иметь вид $\bar{p} = \mathcal{V} \exp(-i\omega t - ikz)$, где коэффициент \mathcal{V} определяется свойствами данного препятствия и, вообще, частотой ω волны.

Форма гармонической волны сохраняется при отражении только при комплексном представлении волн. Действительно, если коэффициент отражения есть комплексное число, $\mathcal{V} = |\mathcal{V}| e^{-i\varepsilon}$, то, переходя к вещественной записи, найдем, что падающей волне $p = \cos(\omega t - kz)$ соответствует отраженная волна вида

$$\begin{aligned} \bar{p} &= |\mathcal{V}| \cos(\omega t + kz + \varepsilon) = \\ &= |\mathcal{V}| [\cos \varepsilon \cos(\omega t + kz) - \sin \varepsilon \sin(\omega t + kz)]. \end{aligned}$$

Таким образом, строго говоря, в этом случае не сохраняет свою форму и гармоническая волна; однако нарушение формы сводится только к сдвигу по фазе по отношению к падающей волне. При комплексном же представлении сдвиг фазы нарушением формы не считают: его относят к коэффициенту отражения и отражение считают правильным.

Рассматривать гармонические волны (в комплексном представлении) в задаче об отражении очень удобно, так как отражение всегда получается правильное. Но сама постановка задачи об отражении гармонических волн отличается от случая падения волны произвольной формы, например ограниченного импульса. В самом деле, пока ограниченный импульс не достиг препятствия, он бежит так, как если бы препятствия не было. Когда импульс достигнет препятствия, вблизи границы возникнет некоторое сложное звуковое поле, зависящее от граничных условий; это — процесс отражения. Через некоторое время падающая волна исчезнет и перед препятствием останется только одна бегущая от препятствия отраженная волна. Таким образом, до отражения имеется *только* падающая волна, а после отражения — *только* отраженная. Падающую волну можно считать *причиной*, а отраженную — *следствием* в таком же смысле, как камень, падающий в воду, можно считать причиной всплеска.

Для гармонической волны положение другое: нет моментов, когда существовала бы только падающая или только отраженная волна, — гармонический процесс не имеет ни начала, ни конца и «принцип причинности» не работает. Задача об отражении формулируется для этого случая так: две гармонические волны, одна —

бегущая к препятствию, а другая — от него, совместно удовлетворяют данному граничному условию. Как, зная свойства препятствия и одну из этих волн («падающую»), найти вторую («отраженную»)?

В этой постановке задачи за «падающую» можно принять любую из этих волн; вторая будет «отраженной». Так как по времени волны не разделены, то нет и оснований считать одну волну причиной другой. Факт же бега фазы по направлению к препятствию или от него имеет только внешнее сходство с фактом бега импульса к препятствию или от него: импульс переносит энергию, а гармоническая волна — нет. Физический смысл можно приписать только задаче об отражении ограниченного импульса, так как все реальные процессы имеют начало. Задача с гармонической падающей волной — идеализация в такой же мере, как и задачи с гармоническими волнами, распространяющимися в неограниченной среде. В обоих случаях идеализация полезна, пока достаточно длинные цуги — «отрезки синусоид» — ведут себя подобно гармонической волне в течение достаточно долгого времени.

Рассмотрение ограниченного цуга позволяет все же выяснить, какая волна является падающей, и для гармонических волн: в качестве падающей следует взять ту волну, для которой групповая скорость направлена к препятствию. Тогда в реальной постановке задачи, где в качестве падающей волны взят цуг конечной длины, придем к той же картине, что и для ограниченного импульса. При этом внутри падающего цуга фаза может бежать либо к препятствию (положительная фазовая скорость), либо от препятствия (отрицательная фазовая скорость). Поэтому для гармонических волн за падающую волну будем выбирать ту из волн, для которой групповая скорость направлена к препятствию. В исключительных случаях отрицательной фазовой скорости падающей волной следует считать ту, фаза которой бежит от препятствия, а отраженной — ту, фаза которой бежит к препятствию. В дальнейшем будем считать, что фазовая и групповая скорости совпадают по направлению.

§ 43. Отражение и прохождение звука на границе двух сред

Пусть плоская волна $p(t - z/c)$ падает нормально на плоскую границу $z = 0$ между двумя однородными средами. В первой среде возникает отраженная волна $\bar{p}(t + z/c)$, а во второй — прошедшая $p'(t - z/c')$.

Мы увидим сейчас, непосредственно произведя расчет, что отражение и прохождение всегда правильные. Отраженную и прошедшую волны можно записать в виде

$$\bar{p} = \mathcal{V}p(t + z/c), \quad p' = \mathcal{W}p(t - z/c'),$$

где \mathcal{V} и \mathcal{W} определяются свойствами сред и не зависят от формы волны. Для гармонических волн падающую, отраженную и

прошедшую волны можно записать в виде

$$p = e^{ikz}, \quad \tilde{p} = \mathcal{V}e^{-ikz}, \quad p' = \mathcal{W}e^{ik'z}.$$

Величины коэффициента отражения \mathcal{V} и коэффициента прохождения \mathcal{W} нужно подобрать так, чтобы были удовлетворены граничные условия. Граничных условий два: равенство давлений и равенство скоростей частиц по обе стороны границы. Со стороны первой среды берется суммарное поле падающей и отраженной волны, со стороны второй — поле прошедшей волны.

Условие равенства давлений по обе стороны границы, или, что то же, непрерывность давления при переходе через границу, реально выполняется всегда. Нарушение этого условия вызвало бы бесконечное ускорение границы, так как сколь угодно тонкий слой сколь угодно малой массы, включающий внутри себя границу, находился бы тогда под действием конечной разности давлений по обеим сторонам слоя. В результате разность давлений выравнивалась бы мгновенно.

Условие равенства скоростей выражает *неразрывность среды на границе*: среды не должны отдаляться друг от друга или проникать взаимно друг в друга. Это требование может на практике оказаться нарушенным, например, при кавитации, когда внутри жидкости образуются разрывы (разрывы возникают легче на границе двух сред, чем внутри одной среды). Будем считать, что нарушения граничных условий не происходит. В противном случае нижеследующий расчет неприменим, а отражение и прохождение окажутся неправильными.

Скорости частиц в падающей, отраженной и прошедшей волнах даются формулами

$$v = \frac{1}{\rho c} p, \quad \tilde{v} = -\frac{1}{\rho c} \tilde{p}, \quad v' = \frac{1}{\rho' c'} p'.$$

Граничные условия можно написать так:

$$\text{при } z = 0 \quad p + \tilde{p} = p', \quad v + \tilde{v} = v'.$$

Подставляя сюда соответственные выражения для давлений и скоростей частиц, найдем, сокращая на $p(t)$:

$$1 + \mathcal{V} = \mathcal{W}, \quad \frac{1}{\rho c} (1 - \mathcal{V}) = \frac{1}{\rho' c'} \mathcal{W}. \quad (43.1)$$

Число граничных условий равно числу возникающих (помимо падающей) волн — отраженной и прошедшей, так что, подбирая соответственным образом оставшиеся пока неопределенными множители \mathcal{V} и \mathcal{W} , всегда можно удовлетворить обоим граничным условиям, причем единственным образом. И это правило общее. В других акустических задачах число граничных условий может оказаться другим. Тогда возникнет и другое число волн, но оно снова равно числу граничных условий.

В исключительных случаях удается удовлетворить граничным условиям меньшим числом волн (например, коэффициент отражения может обратиться в нуль), но никогда не бывает, чтобы при данном числе граничных условий падающая волна вызвала бы возникновение большего числа различных волн: так как равным числом волн уже можно удовлетворять граничным условиям, то получилось бы, что при одной и той же падающей волне и одних и тех же препятствиях могут возникнуть различные волновые поля, а это противоречит принципу причинности.

Система (43.1) имеет единственное решение:

$$\mathcal{R} = \frac{\rho'c' - \rho c}{\rho'c' + \rho c}, \quad \mathcal{T} = \frac{2\rho'c'}{\rho'c' + \rho c}. \quad (43.2)$$

Это — так называемые *формулы Френеля* (для нормального падения). Мы видим, что коэффициенты отражения и прохождения зависят только от волновых сопротивлений сред, и если эти сопротивления равны для обеих сред, то для нормального падения плоской волны среды акустически неразличимы: отражение от границы отсутствует и волна проходит во вторую среду целиком, как если бы все пространство было заполнено только первой средой. Для такого полного прохождения вовсе не требуется, чтобы плотности обеих сред и скорости звука в них равнялись друг другу в отдельности, т. е. чтобы совпадали механические свойства сред: достаточно равенства произведений плотности на скорость звука.

В вопросах статики более жесткой средой естественно называть среду с меньшей сжимаемостью. Поведение таких сред ближе к поведению абсолютно жесткого тела, чем поведение сред с большей сжимаемостью. В акустике сжимаемость еще не определяет того, ведет ли себя данная среда по отношению к падающей на нее волне как податливая или как жесткая граница. В акустике следует сравнивать *волновые сопротивления* сред, т. е. отношения плотности к сжимаемости: та из двух сред жестче, для которой это отношение больше. Это обстоятельство снова подчеркивает своеобразие волновых задач сравнительно с задачами механики тел.

Меняя местами ρc и $\rho'c'$, найдем коэффициенты отражения и прохождения и для волны, падающей из второй среды на границу с первой: абсолютная величина коэффициента отражения будет та же, что и при падении из первой среды, но знак его изменится на обратный. Коэффициент прохождения изменится в отношении волновых сопротивлений сред. По абсолютной величине коэффициент отражения всегда меньше единицы (что следует и прямо из закона сохранения энергии); он положителен, если волна падает из среды с меньшим волновым сопротивлением, и отрицателен в обратном случае. Коэффициент прохождения всегда положителен и не превосходит 2.

Таким образом, отраженная и прошедшая волны равны:

$$\tilde{p} = \frac{\rho'c' - \rho c}{\rho'c' + \rho c} p \left(t + \frac{z}{c} \right), \quad p' = \frac{2\rho'c'}{\rho'c' + \rho c} p \left(t - \frac{z}{c} \right).$$

Давление и скорость на границе (безразлично, с какой стороны от границы) равны:

$$p + \bar{p} = p' = \frac{2\rho'c'}{\rho'c' + \rho c} p(t), \quad v + \bar{v} = v' = \frac{2}{\rho'c' + \rho c} p(t). \quad (43.3)$$

Отношение давления к скорости частиц на границе оказывается равным волновому сопротивлению второй среды $\rho'c'$. Это можно было предвидеть, и не делая расчета, поскольку во второй среде имеется только бегущая волна.

Из формул Френеля видно, что коэффициенты отражения и прохождения зависят не от самих значений волнового сопротивления сред, а от их отношения. Отношение $\zeta = \rho'c'/\rho c$ волновых сопротивлений первой и второй среды называют *относительным волновым сопротивлением*. Формулы Френеля выражаются через относительное волновое сопротивление следующим образом:

$$\mathcal{V} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}, \quad \mathcal{W} = \frac{2\zeta}{\zeta + 1}. \quad (43.4)$$

Очевидно,

$$\mathcal{V}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\mathcal{V}(\zeta),$$

$$\mathcal{W}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta} \mathcal{W}(\zeta).$$

На рис. 43.1 дан график зависимости коэффициента отражения от ζ . Согласно последним формулам можно обойтись участком графика для $\zeta < 1$ (где $\mathcal{V} < 0$). Значения коэффициента прохождения получаются прибавлением единицы к коэффициенту отражения. При $\zeta = 1$ коэффициент отражения равен нулю и волна, нормально падающая на границу раздела двух сред, проходит из первой среды во вторую целиком, не отражаясь. Картина в первой среде в этом случае такая, как если бы волна полностью поглощалась границей. В этом случае достаточно возникновения только одной волны (прошедшей), чтобы, совместно с падающей, удовлетворить обоим граничным условиям. При $\zeta > 1$ коэффициент отражения положителен и при $\zeta \rightarrow \infty$ стремится к единице.

Значения поля на границе, отнесенные к полю в падающей волне, равны

$$\frac{p + \bar{p}}{p} = 1 + \mathcal{V} = \frac{2\zeta}{1 + \zeta} = \mathcal{W}, \quad \frac{v + \bar{v}}{v} = 1 - \mathcal{V} = \frac{2}{1 - \zeta} = 2 - \mathcal{W}.$$

Эти величины всегда положительны, и их полусумма равна единице. При ζ очень малом (вторая среда акустически очень мягкая по сравнению с первой, как, например, при отражении подводного звука от поверхности моря) давление стремится к нулю,

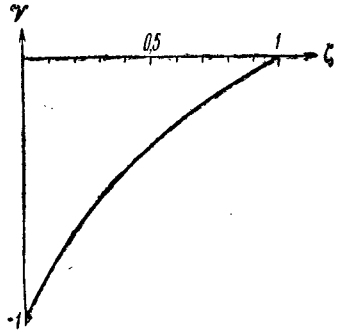


Рис. 43.1. Зависимость коэффициента отражения от относительного волнового сопротивления сред ζ . Для $\zeta > 1$ следует снять с графика значение \mathcal{V} для $1/\zeta$ и считать коэффициент отражения положительным.

а скорость частиц стремится к удвоенной скорости в падающей волне. При ζ очень большом (например, отражение воздушного звука от поверхности моря) к нулю стремится скорость частиц на границе, а удваивается давление. Предельный переход ζ к нулю и к бесконечности соответствует переходу к абсолютно мягкой и абсолютно жесткой границе.

Для иллюстрации сказанного приведем реальные (округленные) соотношения для прохождения звука из воздуха в воду и обратно при нормальном падении плоской волны. Для воды $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $c \approx 1,5 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$ (морская вода), $\rho c = 1,5 \cdot 10^5 \text{ г/см}^2 \cdot \text{сек}$; для воздуха $\rho = 0,00125 \text{ г/см}^3$, $c = 3,4 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$, $\rho c = 42 \text{ г/см}^2 \cdot \text{сек}$. При падении звука из воздуха в воду $\zeta = 3500$, $\mathcal{V} = 0,99943$, $\mathcal{W} = 1,99943$, $p'/p = 1,99943$, $v'/v = 0,00057$. При падении звука из воды в воздух $\zeta = 0,000285$, $\mathcal{V} = -0,99943$, $\mathcal{W} = 0,00057$, $p'/p = 0,00057$, $v'/v = 1,99943$. Отношение же потока энергии, проходящей через границу раздела, к потоку энергии в падающей волне составляет в обоих случаях 0,00114.

Таким образом, энергия передается из воды в воздух и обратно очень плохо, несмотря на то, что в первом случае давление в прошедшей волне практически удваивается по сравнению с падающей волной, а во втором случае удваивается скорость. Плохая передача звука из воды в воздух создала поговорку: «нем как рыба». В воздухе звуки, создаваемые рыбами, действительно обычно не слышны, но в воде «голоса» рыб и некоторых других морских животных настолько сильны, что иногда мешают действию подводной акустической аппаратуры.

Отношения медленностей звука во второй и в первой среде (обратное отношение скоростей звука) называют *коэффициентом преломления второй среды относительно первой*; будем обозначать это отношение через $n = S'/S = c/c'$. Отношение плотностей сред обозначим через $m = \rho'/\rho$. Очевидно, $\zeta = m/n$. Формулы Френеля выразятся через эти относительные величины так:

$$\mathcal{V} = \frac{m-n}{m+n}, \quad \mathcal{W} = \frac{2m}{m+n}. \quad (43.5)$$

Формулы (43.3) приобретают особенно симметричный вид:

$$\frac{p'}{p} = \frac{2m}{m+n}, \quad \frac{v'}{v} = \frac{2n}{m+n}.$$

Свободную поверхность и абсолютно жесткую стенку можно рассматривать как границу двух сред при определенных предельных свойствах второй среды. Так, свободную поверхность можно рассматривать как предельный случай стремления к нулю плотности или скорости звука, что равносильно предельному переходу $m \rightarrow 0$ или $n \rightarrow \infty$. Абсолютно жесткая поверхность явится предельным случаем для стремления к бесконечности плотности или скорости звука во второй среде, что равносильно предельному

переходу $m \rightarrow \infty$ или $n \rightarrow 0$. Отметим, что второе условие соответствует переходу к абсолютно жесткой поверхности только для нормального падения волны; остальные три варианта предельных переходов дадут требуемые граничные условия и для наклонного падения (см. § 55).

Если скорости звука в обеих средах равны, то

$$\mathcal{V} = \frac{m-1}{m+1}, \quad \mathcal{W} = \frac{2m}{m+1}. \quad (43.6)$$

При равных плотностях обеих сред

$$\mathcal{V} = \frac{1-n}{1+n}, \quad \mathcal{W} = \frac{2}{1+n}. \quad (43.7)$$

При малом различии волновых сопротивлений сред часто можно пользоваться приближенными выражениями для коэффициентов отражения и прохождения. Пусть, например, $\xi = 1 + \varepsilon$, где $|\varepsilon| \ll 1$. Тогда, как легко видеть из (43.4), с точностью до малых первого порядка относительно ε

$$\mathcal{V} = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \mathcal{W} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если близки друг к другу не только волновые сопротивления, но и плотности и скорости звука в обеих средах в отдельности: $m = 1 + \alpha$, $n = 1 + \beta$, где $|\alpha| \ll 1$, $|\beta| \ll 1$, то

$$\mathcal{V} = \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \mathcal{W} = 1 + \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Приведем еще несколько видов записи формул Френеля. Через статические характеристики сред — плотность и сжимаемость — коэффициенты отражения и прохождения выражаются так:

$$\mathcal{V} = \frac{\sqrt{\rho'/\beta'} - \sqrt{\rho/\beta}}{\sqrt{\rho'/\beta'} + \sqrt{\rho/\beta}}, \quad \mathcal{W} = \frac{2\sqrt{\rho'/\beta'}}{\sqrt{\rho'/\beta'} + \sqrt{\rho/\beta}}.$$

При отражении от границы двух разных газов, находящихся при одинаковом давлении,

$$\mathcal{V} = \frac{\sqrt{m} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{m} + \sqrt{\alpha}}, \quad \mathcal{W} = \frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{m} + \sqrt{\alpha}}, \quad (43.8)$$

где $\alpha = \gamma'/\gamma$ — отношение отношений теплоемкостей для обоих газов, а m — отношение молекулярных весов газов.

При отражении от границы между двумя объемами одного и того же газа, находящимися при одинаковом давлении, но при разных абсолютных температурах (T и T'),

$$\mathcal{V} = \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T'}}{\sqrt{T} + \sqrt{T'}}, \quad \mathcal{W} = \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{T} + \sqrt{T'}}. \quad (43.9)$$

Если разность температур мала, то

$$\mathcal{V} = \frac{T - T'}{4T}.$$

Теперь рассмотрим энергетические соотношения при отражении и прохождении волны. Так как отраженная волна имеет ту же форму, что и падающая, а знак на энергию не влияет, то для отношения плотности потока мощности в отраженной волне \tilde{W} к плотности потока в падающей W получаем

$$\frac{\tilde{W}}{W} = \mathcal{V}^2 : 1 = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} = \left(\frac{\xi-1}{\xi+1} \right)^2.$$

В силу закона сохранения энергии, отношение плотности потока в прошедшей волне W' к плотности потока в падающей должно равняться

$$\frac{W'}{W} = (1 - \mathcal{V}^2) : 1 = \frac{4\xi}{(1+\xi)^2}.$$

Это легко проверить и непосредственно, подсчетом потоков мощности.

Плотность потока мощности падающей волны распределяется между отраженной и прошедшей волнами в отношении

$$\frac{\tilde{W}}{W'} = \frac{(m-n)^2}{4mn} = \frac{(\xi-1)^2}{4\xi^2}.$$

При $\xi \ll 1$ почти вся энергия отражается, и прошедшая энергия относится к падающей приблизительно как $W'/W = 4\xi$.

При $\xi \gg 1$ снова почти вся энергия отражается, и отношение равно $\tilde{W}/W = 4/\xi$.

Напротив, если ξ близко к единице, то почти вся энергия проходит во вторую среду, и отношение отраженной энергии к падающей оказывается равным приблизительно $W'/W = (\xi - 1)^2/4$.

Все эти соотношения между долями отраженной и прошедшей энергии сохраняются, как уже было сказано, и при обращении падения волны — при падении из второй среды на первую.

На рис. 43.2 даны графики зависимости величин \tilde{W}/W и W'/W от ξ . Сумма ординат кривых все время равна единице, что выражает закон сохранения энергии. Кривые расположены симметрично относительно прямой, проведенной параллельно оси абсцисс на ординате 0,5. Энергия делится пополам между отраженной и прошедшей волнами при относительном волновом сопротивлении $\xi = 3 \pm 2\sqrt{2}$, т. е. при ξ , равном приблизительно 5,83, и при $\xi = 1/5,83 = 0,172$.

В заключение этого параграфа выясним, как меняется частота гармонических волн при отражении и прохождении на границе двух сред, движущейся относительно самих сред, остающихся

в покое. Примером такой акустической ситуации является отражение и прохождение волн на фронте ударной волны в газе, где акустические характеристики среды по обе стороны фронта различны. Другой пример — распространение звука в стержне, наполовину погруженном в жидкость, при изменении уровня воды: на погруженном участке стержня акустические свойства стержня несколько изменяются в результате реакции окружающей среды, так что граница между участками с разными свойствами перемещается относительно среды вместе с уровнем.

Рассматриваемая задача — вариант известного из общего курса физики вопроса о доплеровском сдвиге частоты — изменении частоты принимаемого звука при движении источника или приемника относительно среды. Напомним формулы для этого сдвига частоты для случая движения источника или приемника вдоль соединяющей их прямой. Обозначим частоту колебаний источника звука через ω , а скорость приемника или источника — через U (положительной будем считать скорость, увеличивающую расстояние между источником и приемником). Тогда, как легко получить из чисто кинематических соображений, при движении приемника принимаемая частота окажется равной

$$\omega' = \omega (1 - M),$$

а при движении источника звука — равной

$$\omega'' = \omega / (1 + M).$$

Здесь через $M = U/c$ обозначено число Маха для движения источника или приемника звука. Различие в сдвиге частоты при одинаковой относительной скорости источника и приемника вызвано тем, что оба случая различны по отношению к абсолютной акустической системе координат (см. § 1).

Для нахождения сдвигов частот при отражении и прохождении напечем граничные условия равенства давлений и скоростей частиц на движущейся границе для гармонической падающей волны $\exp\{-i\omega(t - z/c)\}$, считая пока неизвестными частоты ω_1 и ω_2 отраженной и прошедшей волн:

$$e^{-i\omega(t-z/c)} + \mathcal{V}e^{-i\omega_1(t+z/c)} = \mathcal{W}e^{-i\omega_2(t-z/c)},$$

$$\frac{1}{\rho c} e^{-i\omega(t-z/c)} - \frac{\mathcal{V}}{\rho c} e^{-i\omega_1(t+z/c)} = \frac{\mathcal{W}}{\rho' c'} e^{-i\omega_2(t-z/c)},$$

где $z = Ut$.

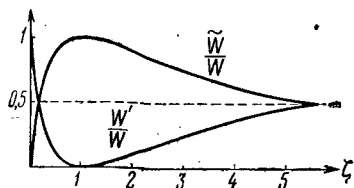


Рис. 43.2. Зависимость от z отношений отраженной и прошедшей энергии к падающей энергии.

Для того чтобы граничные условия оставались выполненными в любой момент времени, требуется, чтобы экспоненты тождественно равнялись друг другу для $z = Ut$. Выполняя эту подстановку, найдем

$$\omega_1 = \omega \frac{1 - M}{1 + M}, \quad \omega_2 = \frac{1 - M}{1 - M'},$$

где $M = U/c$ и $M' = U/c'$ — числа Маха для движущейся границы относительно первой и относительно второй среды. На величине коэффициентов отражения и прохождения движение границы при неподвижности самих сред не сказывается.

Полученные формулы можно рассматривать как комбинации формул для движущихся источника и приемника: граница «принимает» колебания, причем частота меняется, как при движении приемника, а затем «переизлучает» эти колебания, что дает изменение частоты, как при движении источника. Это представление находится в соответствии с картиной вторичных волн Гюйгенса, также известной из общего курса физики.

§ 44. Плавное изменение свойств среды. Лучевая картина

Мы рассмотрели отражение и прохождение звука при скачкообразном изменении свойств среды — при резкой границе между средами с различными акустическими свойствами. При нормальном падении коэффициенты отражения и прохождения определяются в этом случае только отношением волновых сопротивлений сред по обе стороны от границы. Даже если переход от одного волнового сопротивления к другому происходит не скачком, а непрерывно, но на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны, коэффициенты отражения и прохождения остаются практически такими же, как и при скачке.

Но картина совершенно меняется, если переход происходит *плавно*, на расстоянии настолько большом, что относительное приращение волнового сопротивления на расстоянии одной длины волны очень мало по сравнению с единицей. Отражение от такой переходной области оказывается малым; оно тем меньше, чем меньше изменение волнового сопротивления на расстоянии одной длины волны, т. е. чем длиннее переходная область, и в пределе, при изменении волнового сопротивления на одной длине волны, стремящемся к нулю, отражение стремится к нулю, волна переходит от одного значения волнового сопротивления к другому без отражения, как при распространении в однородной среде. В этом случае обычно говорят не о двух средах с переходным слоем, а об одной неоднородной среде.

Такой плавный переход можно рассматривать при заданной частоте звука как предельный случай бесконечно плавного изменения свойств среды, а при заданной степени неоднородности

среды — как предельный случай звука бесконечно высокой частоты (бесконечно малой длины волны).

То обстоятельство, что результат изменения свойств среды зависит от плавности этого изменения и что при достаточно плавном изменении свойств волна «не замечает» этого изменения, отнюдь не тривиально. Противоположный пример — вкатывание шарика вверх по наклонной плоскости: какой бы пологой ни делать наклонную плоскость, шарик, начавший вкатываться с определенной скоростью, достигнет всегда лишь некоторой определенной высоты. При любой плавности подъема шарик «запоминает» испытываемое им изменение высоты и оно сказывается на его скорости. Волна же, бегущая в плавно меняющейся среде, «забывает» встречаемое ею на пути распространения изменение волнового сопротивления среды.

Выясним механизм этого «забывания». Пусть гармоническая плоская волна бежит в среде, волновое сопротивление которой зависит от одной координаты — расстояния, отсчитываемого вдоль направления распространения волны. Среда, свойства которых зависят только от одной координаты, называют *слоисто-неоднородными*. Разобьем мысленно данную слоисто-неоднородную среду на множество тонких (по сравнению с длиной волны) плоскопараллельных слоев, перпендикулярных к направлению распространения; будем считать среду однородной в пределах каждого такого слоя и изменяющей свои свойства малым скачком при переходе от одного слоя к другому. При достаточной малости скачков поведение волны в такой среде будет таким же, как и в действительной среде.

Волна, бегущая в каком-либо слое, попадая на ближайшую границу, частично отразится и частично пройдет в следующий слой. Как мы видели в предыдущем параграфе, коэффициент отражения от границы, на которой происходит малое изменение относительного волнового сопротивления ϵ , равен приблизительно $\epsilon/2$. Значит поток мощности, уносимый отраженной волной от этой границы — малая величина второго порядка (она составляет долю в $\epsilon^2/4$ от потока мощности в падающей волне) и прохождение через границу — почти полное. Точно так же и прохождение через вторую границу, — почти полное, и поток мощности в отраженной от нее волне — малая величина второго порядка; то же происходит и на третьей, четвертой и т. д. границах.

Но чтобы найти поток мощности в суммарной отраженной волне, недостаточно сложить потоки от отдельных отражений на последовательных границах: энергии волн одной и той же частоты, бегущих в одном и том же направлении, не аддитивны. Необходимо сначала сложить эти волны, а лишь затем вычислять поток мощности волны суммарной амплитуды. Выполним такое сложение. При этом будем пренебрегать последующими отражениями однократно отразившихся волн: их амплитуда будет иметь второй и более высокий порядки малости по малой величине ϵ .

Такое пренебрежение окажется оправданным, если в результате расчета только с первыми отражениями мы увидим, что суммарная отраженная волна действительно мала по сравнению с падающей.

Схематическая картина нескольких первых отражений показана на рис. 44.1. При подсчете суммарной амплитуды отраженной волны следует сложить все отраженные волны с учетом их фаз. Эти фазы растут при переходе от слоя к слою соответственно увеличивающейся длине пробега волны: при увеличении пробега на половину длины волны (в данном месте среды) фаза отражения изменяется на 2π (волна проходит дополнительно двойное — туда и обратно — расстояние в среде). Поэтому фаза последовательных отражений будет многократно

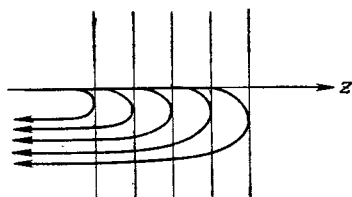


Рис. 44.1. Схема последовательных отражений проходящей волны от границ слоев, слабо отличающихся по своим волновым сопротивлениям.

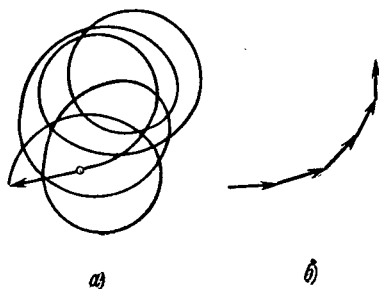


Рис. 44.2. а) Вектор, замыкающий спираль, дает (комплексную) амплитуду коэффициента отражения; б) начало спирали в увеличенном масштабе: каждый отрезок — коэффициент отражения от соответственной границы слоев.

обходить полный круг, а так как свойства среды меняются медленно, то вклады отдельных границ, размещающихся на участке среды толщиной в одну половину длины волны, почти в точности уничтожат друг друга. В этом взаимном уничтожении последовательных отражений вследствие их расфазировки и заключается механизм «забывания» волной изменения волнового сопротивления на пути ее распространения. В результате отражение останется близким к нулю, как бы сильно ни изменилось волновое сопротивление, если только это изменение было достаточно медленным.

Взаимное уничтожение вкладов в суммарное отражение последовательных границ слоев можно наглядно показать на векторной диаграмме результирующего колебания, представляемого в виде геометрической суммы колебаний, вносимых последовательными границами (рис. 44.2). Диаграмма образует ломаную спираль, описывающую один виток при каждом пробеге волной пути в половину длины волны. Амплитуда (комплексная) результирующего отражения от слоя данной толщины изображается вектором, соединяющим начало и конец спирали. Модуль коэффициента отражения очень мал по сравнению с амплитудой отраже-

ния от резкого скачка волновых сопротивлений, равного полному изменению этой величины на всем переходном слое, когда эффекты всех малых скачков складываются в одной и той же фазе.

Пренебрегая малым остаточным отражением при достаточно медленном изменении свойств среды, можно считать, что волна распространяется в неоднородной среде без отражения. Амплитуды же давления и скорости частиц в проходящей волне могут при этом измениться очень сильно: амплитуда проходящей волны «запоминает» суммарное изменение волнового сопротивления на пути ее пробега. Плотность потока мощности волны сохраняется, несмотря на изменение волнового сопротивления, значит, согласно (39.6), давление в волне меняется пропорционально корню квадратному из волнового сопротивления, а скорость частиц — обратно пропорционально корню квадратному из волнового сопротивления.

Например, плотность воздуха на высоте 30—40 км в сто раз меньше, чем у земли, а скорость звука мало отличается от приземной. Следовательно, амплитуда давления звука, приходящего от источника, находящегося на этой высоте (например, звук от ракетного двигателя), увеличится, дойдя до земли, в 10 раз. Впрочем, такое увеличение имело бы место только для плоской волны, бегущей в вертикальном направлении. В действительности звуковая волна при распространении будет еще расходиться в стороны, так что наш расчет показывает только, что дает изменение волнового сопротивления при прочих равных условиях.

Разобьем мысленно слабо неоднородную среду на цилиндры с образующими, перпендикулярными к слоям. В каждой такой мысленно выделенной трубке волна бежит без отражений и не обмениваясь энергией с соседними трубками; стенки трубок можно считать абсолютно жесткими. Будем называть такие цилиндры *лучевыми трубками*, а их образующие — *лучами*. Распространение плоской волны перпендикулярно к слоям слоисто-неоднородной среды можно представить себе как бег звуковой энергии вдоль таких лучей, без отражений в обратном направлении. Эти лучи совпадают с линиями тока скоростей частиц. Волновые фронты в каждой точке перпендикулярны к лучу.

Подчеркнем еще раз, что для достаточно низких частот всякое изменение свойств среды будет резким и волна будет отражаться от сколь угодно плавного изменения волнового сопротивления; и только по мере повышения частоты отражение будет уменьшаться, стремясь к нулю при бесконечном повышении частоты. Поэтому можно считать лучевую картину асимптотикой волновой картины в неоднородной среде для *бесконечно высоких частот*. Понятие «слабо неоднородная среда» относительно и зависит от длины волны.

Если при распространении луч встретит границу, которая явится резкой и для той высокой частоты, для которой среду в целом можно считать слабо неоднородной, то он разделится на

два: отраженный и прошедший, и амплитуды полей, соответствующих лучам, можно найти по формулам Френеля. Лучи, соответствующие отраженной волне, геометрически совпадут с падающими лучами, но акустически это разные лучи: звук бежит в лучевых трубках падающей и отраженной волн в противоположных направлениях. Для лучей имеет место принцип суперпозиции: полное поле в данной точке равно сумме полей, приносимых в данную точку всеми лучами, проходящими через эту точку.

Из построения лучей ясно, что лучевая картина не зависит от длины волны (при условии, что длина волны уже настолько мала, что лучевая картина вообще применима). Однако при суперпозиции лучей, например в случае суперпозиции падающих и отраженных лучей, поле в каждой определенной точке зависит от длины волны, так как ею определяется соотношение фаз волн, распространявшихся по составляющим лучам и пришедшим в данную точку. Таким образом, для монохроматической волны в нашем случае лучевая картина еще не исчерпывает характеристик поля: поле разбивается на лучи, но в каждой лучевой трубке будет волновая картина интерференции.

§ 45. Проводимость и импеданс линейного препятствия. Поле перед препятствием

Вернемся к отражениям от препятствий с резкими границами.

Часто приходится встречаться с линейными препятствиями, отражение волн от которых неправильное. В этом случае для нахождения отражения применяют метод Фурье, разлагая падающую волну в суперпозицию гармонических плоских волн разных частот, которые, как было показано в § 42, отражаются без изменения формы, но, вообще, с разными коэффициентами отражения. Суперпозиция отраженных гармонических волн и дает результирующую отраженную волну. Таким образом, можно ограничиться задачей об отражении только гармонических волн. Коэффициент отражения гармонической волны зависит не только от препятствия, но и от среды, из которой падает и в которую отражается волна. Поэтому желательно дать такую характеристику препятствия, которая не зависела бы от вида среды, в которую оно помещено.

Рассмотрим отражение гармонической волны от препятствия, помещенного в точку $z = 0$. Пусть падающая волна есть $p = p_0 \exp(-i\omega t + ikz)$. Тогда отраженная волна должна иметь вид $\tilde{p} = \mathcal{V} p_0 \exp(-i\omega t - ikz)$ и результирующие давление и скорость частиц на границе соответственно равны:

$$(p + \tilde{p})_{z=0} = (1 + \mathcal{V}) p_0 e^{-i\omega t}, \quad (v + \tilde{v})_{z=0} = \frac{1}{\rho c} (1 - \mathcal{V}) p_0 e^{-i\omega t}.$$

Эта скорость одновременно является скоростью поверхности препятствия, вызванной результирующим давлением $(p + \tilde{p})_{z=0}$, син-

фазно действующим на всю поверхность препятствия. Отношение скорости к давлению на границе не зависит от времени. Будем называть его *входной проводимостью* препятствия для данной частоты при нормальном падении и обозначать буквой Y . Легко видеть, что

$$Y \equiv \left(\frac{v + \tilde{v}}{\rho + \tilde{\rho}} \right)_{z=0} = \frac{1}{\rho c} \frac{1 - \mathcal{V}}{1 + \mathcal{V}}. \quad (45.1)$$

Проводимость — это и есть желаемая характеристика препятствия: эта величина не зависит от вида среды, соприкасающейся с препятствием, и не зависит даже от того, имеется ли вообще такая соприкасающаяся среда. Давление можно было бы прикладывать не при помощи звуковой волны, а, например, твердым поршнем, пондеромоторными силами, синфазно действующими на всю поверхность препятствия, и т. п. Во всех этих случаях отношение скорости к давлению на поверхности препятствия окажется для данной частоты одним и тем же.

Проводимость данного препятствия может зависеть только от частоты; коэффициент же отражения гармонической волны, отражающейся от данного препятствия, зависит и от свойств среды. Действительно, из (45.1) находим

$$\mathcal{V} = \frac{(1/\rho c) - Y}{(1/\rho c) + Y}. \quad (45.2)$$

Если препятствием является вторая среда, то проводимость препятствия есть волновая проводимость этой среды: $Y = 1/\rho'c'$, и (45.2) можно свести к первой формуле (43.2). В этом случае (как и для идеальных границ) проводимость препятствия не зависит от частоты; отсюда следует, как мы уже знаем из § 43, что в этом случае при отражении свою форму сохраняют все волны и что формула (45.2) годится для волн любой формы. Вообще же проводимость препятствий других типов от частоты зависит, волны произвольной формы при отражении от таких препятствий свою форму меняют, а для гармонических волн формула (45.2) годится, только если для каждой частоты подставлять свое значение проводимости.

Если препятствие — некоторая известная конструкция, то его проводимость можно рассчитать по законам механики. Ниже мы дадим такой расчет для ряда различных препятствий. Когда постоянно имеют дело с одной и той же средой (обычно это воздух или вода), в которую помещают различные препятствия, удобно пользоваться величиной *относительной проводимости* η — отношением проводимости препятствия к волновой проводимости среды: $\eta = \rho c Y$. Коэффициент отражения выражается через относительную проводимость формулой

$$\mathcal{V} = \frac{1 - \eta}{1 + \eta}. \quad (45.3)$$

Во многих задачах удобнее пользоваться не проводимостью, а обратной величиной — так называемым *входным импедансом* препятствия $Z = 1/Y$, равным отношению гармонически меняющегося давления на поверхности препятствия к вызываемой этим давлением скорости поверхности. Коэффициент отражения гармонической волны выражается через импеданс поверхности формулой

$$\mathcal{V} = \frac{Z - \rho c}{Z + \rho c}. \quad (45.4)$$

Вводя *относительный импеданс* препятствия $\zeta = 1/\eta = Z/\rho c$ как отношение импеданса к волновому сопротивлению среды, выразим коэффициент отражения формулой

$$\mathcal{V} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}. \quad (45.5)$$

В дальнейшем будем характеризовать свойства поверхности то проводимостью, то импедансом, в зависимости от того, что даст возможность получить более простые формулы.

Рассмотренные в § 41 препятствия в виде свободной границы и жесткой стенки также можно охарактеризовать проводимостями или импедансами. Импеданс свободной границы равен нулю, ее проводимость равна бесконечности; импеданс жесткой стенки равен бесконечности, ее проводимость равна нулю. Если относительная проводимость препятствия велика по сравнению с единицей (модуль импеданса мал по сравнению с волновым сопротивлением среды), то коэффициент отражения близок к -1 , так что препятствие ведет себя подобно свободной границе. Если относительная проводимость препятствия мала сравнительно с единицей (модуль импеданса велик по сравнению с волновым сопротивлением среды), то коэффициент отражения близок к $+1$, так что препятствие ведет себя подобно абсолютно жесткой стенке. Одно и то же препятствие при данной частоте может вести себя то как свободная граница, то как жесткая стенка, в зависимости от волнового сопротивления среды, в которую помещено препятствие. С другой стороны, как увидим ниже, в одной и той же среде одно и то же препятствие может вести себя то как жесткая стенка, то как свободная граница, в зависимости от частоты.

Проводимость препятствия может быть не только вещественным (как в случае препятствия в виде другой среды), но и комплексным числом (примеры таких препятствий рассмотрены в следующих параграфах). Если проводимость чисто мнимая, то модуль коэффициента отражения равен единице, так как в этом случае числитель и знаменатель выражения для коэффициента отражения отличаются только знаком действительной части. В общем случае проводимость имеет как мнимую, так и вещественную части. Положим $Y = R + iX$, где R и X — вещественные. Тогда

коэффициент отражения равен

$$\mathcal{V} = \frac{1 - i\rho cX - \rho cR}{1 + i\rho cX + \rho cR}, \quad (45.6)$$

и его модуль выражается формулой

$$|\mathcal{V}| = \sqrt{\frac{(\rho cX)^2 + (1 - \rho cR)^2}{(\rho cX)^2 + (1 + \rho cR)^2}}. \quad (45.7)$$

Отсюда видно, что при положительной вещественной проводимости ($R > 0$) модуль коэффициента отражения меньше единицы, а при отрицательной ($R < 0$) больше единицы.

Случай $R > 0$ (обычно имеющий место на практике) соответствует частичному переходу энергии падающей звуковой волны из среды в препятствие. Это может быть как поглощение звуковой энергии препятствием (превращение ее в тепло, как, например, в звукопоглощающих материалах, которыми облицовывают стены залов для уменьшения «гулкости»), так и пропускание акустической энергии в среду позади препятствия, не связанное с поглощением. Более редкий случай $R < 0$ приводит к росту энергии звука в среде при отражении; это — случай *активного* препятствия; таково, например, препятствие в виде фронта пламени, скорость горения которого зависит от давления.

Рассмотрим результирующее поле, образующееся перед препятствием при падении на него гармонической волны e^{ikx} , — интерференционную картину, образованную падающей и отраженной волнами. Для общности предположим, что коэффициент отражения — комплексный:

$$\mathcal{V} = |\mathcal{V}| e^{i\varepsilon},$$

где ε — фаза коэффициента отражения. Амплитуда давления в разных точках перед препятствием определяется по формуле

$$|p + \tilde{p}| = |e^{ikz} + |\mathcal{V}| e^{i\varepsilon - ikz}| = \sqrt{1 + |\mathcal{V}|^2 + 2|\mathcal{V}| \cos(\varepsilon - 2kz)}. \quad (45.8)$$

Вдоль оси z амплитуда давления колеблется между значениями $1 + |\mathcal{V}|$ (в точках, где $2kz = \varepsilon - 2l\pi$) и $1 - |\mathcal{V}|$ (в точках, где $2kz = \varepsilon - (2l + 1)\pi$). Максимумы и минимумы чередуются, располагаясь на расстоянии четверти длины волны звука друг от друга. Полуразность измеренных максимальных и минимальных значений амплитуды равна модулю коэффициента отражения. При изменении частоты вся эта интерференционная картина максимумов и минимумов перед препятствием сжимается или растягивается, так что все расстояния в этой картине пропорциональны длине волны звука.

Поле перед препятствием не есть вообще ни чисто бегущая, ни чисто стоячая волна. Его можно было бы представить как супер-

позицию стоячей и бегущей волн, однако такое разложение не однозначно. В самом деле, имеем

$$e^{ikz} + \mathcal{V}e^{-ikz} = 2e^{i\varepsilon/2} \cos(kz - \varepsilon/2) - (1 - |\mathcal{V}|)e^{i\varepsilon - ikz} = \\ = 2|\mathcal{V}|e^{i\varepsilon/2} \cos(kz - \varepsilon/2) + (1 - |\mathcal{V}|)e^{ikz}.$$

Ввиду такой неоднозначности подобному разложению нельзя приписать какой-либо определенный физический смысл. Волну перед препятствием удобно характеризовать коэффициентом бегучести κ , определяемым как отношение минимальной амплитуды перед препятствием к максимальной:

$$\kappa = \frac{1 - |\mathcal{V}|}{1 + |\mathcal{V}|}.$$

Коэффициент бегучести обращается в нуль для чисто стоячей волны и в единицу для чисто бегущей. Перемещая приемник давления перед препятствием, можно измерить как коэффициент бегучести, так и расстояния L_1 от препятствия до ближайшего максимума и L_2 — до ближайшего минимума давления. Зная κ и L_1 или κ и L_2 , можно найти амплитуду и фазу коэффициента отражения, а зная коэффициент отражения, можно найти импеданс препятствия. В самом деле, согласно (45.8) фаза коэффициента отражения найдется по формуле

$$\varepsilon = 2kL_1 = \pi + 2kL_2,$$

его абсолютная величина равна

$$|\mathcal{V}| = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}.$$

Таким образом, коэффициент отражения равен

$$\mathcal{V} = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} e^{i2kL_1} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} e^{i2kL_1}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (45.1), найдем проводимость препятствия:

$$Y = \frac{1}{\rho c} \frac{\kappa - i \operatorname{tg} kL_1}{1 - i\kappa \operatorname{tg} kL_1} = \frac{1}{\rho c} \frac{1 - i\kappa \operatorname{tg} kL_2}{\kappa - i \operatorname{tg} kL_2}.$$

Этот прием определения проводимости широко применяется на практике.

Для препятствия в виде границы со второй средой фаза отражения равна либо 0 (при волновом сопротивлении второй среды большем, чем у первой), либо π (при обратном соотношении между волновыми сопротивлениями). Модуль коэффициента отражения в этом случае от частоты не зависит. Волновое сопротивление второй среды выражается через коэффициент бегучести либо формулой $\rho'c' = \rho c/\kappa$ (при $\rho'c' > \rho c$), либо формулой $\rho'c' = \kappa \rho c$ (при $\rho'c' < \rho c$). В первом случае на границе лежит максимум амплитуды давления, во втором — минимум.

§ 46. Отражение от «сосредоточенной массы» и прохождение через нее

Перейдем теперь к изучению различных конкретных видов препятствий.

Акустика принципиально отказывается рассматривать абсолютно несжимаемые тела. Однако в некоторых задачах оказывается, что сжимаемость того или иного из рассматриваемых тел практически роли не играет; тогда в данной задаче это тело можно рассматривать как несжимаемое. Такова ситуация при нормальном падении гармонической волны из какой-либо среды на пластину (жидкую или твердую — безразлично), граничащую второй стороной с вакуумом, при условии, что толщина пластины мала по сравнению с длиной волны данной частоты в материале пластины.

В этом случае пластину можно приближенно считать несжимаемой и движущейся под действием падающей волны как целое. Тогда толщина пластины несущественна, и всю ее массу можно считать сосредоточенной на ее границе со средой. Так приходим к понятию препятствия в виде *сосредоточенной массы*. Сосредоточенную массу можно охарактеризовать поверхностной плотностью μ , равной плотности ρ_0 вещества пластины, умноженной на ее толщину h , т. е. $\mu = \rho_0 h$.

Найдем импеданс и проводимость такого препятствия. Согласно закону Ньютона уравнение движения такой пластины при воздействии на нее равномерно распределенного давления p есть

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = p.$$

Для гармонического закона изменения давления частоты ω

$$\mu (-i\omega v) = p, \quad (46.1)$$

откуда найдем импеданс Z и проводимость Y сосредоточенной массы:

$$Z = -i\omega\mu, \quad Y = \frac{i}{\omega\mu}. \quad (46.2)$$

Импеданс оказался чисто мнимым отрицательным, а проводимость — чисто мнимой положительной; поэтому и о всяком препятствии с чисто мнимым отрицательным импедансом или чисто мнимой положительной проводимостью (как бы они ни зависели от частоты) говорят, что оно имеет массовый характер.

Относительный импеданс равен

$$\zeta = -i \frac{\omega\mu}{\rho c} = -imkh, \quad \text{где } m = \rho_0/\rho. \quad (46.3)$$

Коэффициент отражения от препятствия в виде сосредоточенной массы выражается, согласно (45.4), так:

$$\mathcal{V} = \frac{-i\omega\mu - \rho c}{-i\omega\mu + \rho c} = \frac{-imkh - 1}{-imkh + 1}. \quad (46.4)$$

Модуль коэффициента отражения от сосредоточенной массы оказывается равным единице для любой среды при любой величине поверхностной плотности и при любой частоте. При низкой частоте импеданс данной сосредоточенной массы мал, коэффициент отражения близок к -1 и препятствие ведет себя подобно свободной границе. На высоких частотах импеданс велик, коэффициент отражения близок к $+1$ и препятствие ведет себя как жесткая стенка. Термины «малая» и «большая» частота означают выполнение неравенств $\omega\mu/\rho c = mkh \ll 1$ и $\omega\mu/\rho c = mkh \gg 1$ соответственно. Фаза ε коэффициента отражения дается формулой

$$\varepsilon = \pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{\omega\mu}{\rho c}. \quad (46.5)$$

Фаза растет от π до 2π с увеличением частоты от нуля до бесконечности.

Тонкую пластину иногда можно считать сосредоточенной массой и в том случае, когда позади пластины не вакуум, а какое-либо другое препятствие. (Критерий допустимости такого предположения дадим в § 49.) В этом случае говорят, что сосредоточенная масса *нагружена* на некоторое препятствие. Пусть импеданс этой нагрузки равен Z' . Найдем импеданс препятствия в целом. Так как пластину считаем несжимаемой, то скорость ее задней стенки можно принять равной скорости v передней стенки. Вместо формулы (46.1) теперь получим

$$\mu (-i\omega v) = p - p', \quad (46.6)$$

где p' — давление на задней стороне пластины. Но $p' = Z'v$; уравнение (46.6) примет вид

$$(-i\omega\mu + Z')v = p,$$

откуда найдем искомый импеданс:

$$Z = -i\omega\mu + Z'. \quad (46.7)$$

Таким образом, импеданс нагрузки на сосредоточенную массу прибавляется к импедансу сосредоточенной массы в отсутствие нагрузки. Если нагрузка — полубезграничная среда, граничащая с пластиной сзади, то входной импеданс препятствия равен

$$Z = -i\omega\mu + \rho'c'.$$

Пользуясь (45.4), получим коэффициент отражения в виде

$$\mathcal{V} = \frac{-i\omega\mu + \rho'c' - \rho c}{-i\omega\mu + \rho'c' + \rho c}. \quad (46.8)$$

Коэффициент отражения по модулю оказывается меньше единицы:

$$|\mathcal{V}| = \sqrt{\frac{(\omega\mu)^2 + (\rho'c' - \rho c)^2}{(\omega\mu)^2 + (\rho'c' + \rho c)^2}} \quad (46.9)$$

(энергия падающей волны частично переходит во вторую среду).

Найдем коэффициент прохождения \mathcal{W}^p звука. Скорость пластины равна

$$v' = \frac{1}{\rho c} (1 - \mathcal{V}) = \frac{2}{-i\omega\mu + \rho'c' + \rho c}.$$

Такова же и амплитуда скорости частиц во второй среде. Но во второй среде имеется только бегущая волна. Значит, давление во второй среде имеет амплитуду

$$\mathcal{W}^p = \rho'c'v' = \frac{2\rho'c'}{-i\omega\mu + \rho'c' + \rho c}$$

и прошедшая волна имеет вид

$$p = \frac{2\rho'c'}{-i\omega\mu + \rho'c' + \rho c} e^{ik'z}, \quad \text{где } k' = \frac{\omega}{c'}.$$

Очевидно, что при прохождении звука через сосредоточенную массу выполняется закон сохранения энергии: сумма потоков мощности отраженной и прошедшей волн, уносящих энергию от препятствия, равна потоку мощности в падающей волне, несущей энергию к препятствию:

$$\frac{1}{2} \frac{|\mathcal{V}|^2}{\rho c} + \frac{1}{2} \frac{|\mathcal{W}^p|^2}{\rho'c'} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho c}.$$

Если среда позади пластины та же, что и спереди, то коэффициенты отражения и прохождения выразятся формулами

$$\mathcal{V} = \frac{-i\omega\mu}{-i\omega\mu + 2\rho c}, \quad \mathcal{W}^p = \frac{2\rho c}{-i\omega\mu + 2\rho c}.$$

Отраженная и прошедшая энергии окажутся равными другу другу при условии $\omega\mu = 2\rho c$.

В архитектурной акустике весьма важен вопрос о «звукоизоляции» перегородок, характеризующей уменьшение интенсивности звука при прохождении через перегородку. Если считать перегородку сосредоточенной массой, то для нормального падения звука отношение потоков энергии в прошедшей и в падающей волнах равно

$$|\mathcal{W}^p|^2 = \frac{4(\rho c)^2}{(\omega\mu)^2 + 4(\rho c)^2}.$$

Для того чтобы получить изоляцию порядка 40 дб (хорошая межквартирная изоляция), должно быть $\omega\mu = 200 \rho c$. Для воз-

духа $\rho c = 42$; значит, например, для частоты 1000 гц такую звукоизоляцию могла бы создать перегородка с поверхностной плотностью всего $1,2 \text{ г/см}^2$. На практике перегородка гораздо большей массы создает гораздо меньшую звукоизоляцию. Значит, картину передачи звука через перегородку нельзя аппроксимировать рассмотренной выше схемой одномерного распространения звука при нормальном падении на одиночное препятствие.

§ 47. Отражение от «сосредоточенной упругости» и прохождение через нее

Акустика принципиально отказывается рассматривать тела без массы. Однако в некоторых задачах оказывается, что масса какого-либо из рассматриваемых тел практически не играет роли; тогда в данной задаче можно рассматривать это тело как не имеющее массы. Такова ситуация при нормальном падении гармонической волны из какой-либо среды на пластину (жидкую или твердую — безразлично), опертую задней стенкой на абсолютно жесткую стенку, при условии, что толщина пластины мала по сравнению с длиной волны данной частоты в материале пластины. В этом случае пластину можно считать находящейся в состоянии статического сжатия или растяжения и считать деформацию пластины, а значит, и возникающие силы давления одинаковыми по всей толщине пластины. Так приходим к понятию препятствия в виде *сосредоточенной упругости*.

Если к поверхности такого препятствия приложить давление p , то пластина сожмется на величину, пропорциональную давлению (закон Гука). Обозначая смещение передней стенки пластины через ξ , можем записать связь между давлением и смещением в виде уравнения

$$p = \kappa \xi, \quad (47.1)$$

где κ — коэффициент упругости пластины для испытываемой ею деформации сжатия в расчете на единицу площади препятствия. Если модуль упругости материала пластины есть E , а толщина пластины h , то $\kappa = E/h$. Уравнение (47.1) есть граничное условие на поверхности сосредоточенной упругости. Для гармонического движения $\xi = v/(-i\omega)$, где v — скорость передней стенки пластины, и уравнение можно записать в виде

$$p = \kappa \left(\frac{v}{-i\omega} \right). \quad (47.2)$$

Значит, импеданс Z и проводимость Y сосредоточенной упругости равны соответственно

$$Z = i\kappa/\omega, \quad Y = -i\omega/\kappa. \quad (47.3)$$

Импеданс оказался чисто мнимым положительным, а проводимость — чисто мнимой отрицательной; поэтому и о всяком пре-

препятствии с чисто мнимым положительным импедансом или с чисто мнимой отрицательной проводимостью (как бы они ни зависели от частоты) говорят, что оно имеет характер упругости. Для препятствий упругого типа удобно пользоваться проводимостью, а не импедансом. Относительная проводимость сосредоточенной упругости равна

$$\eta = -i\rho c\omega/\kappa = -ikhK/E, \quad (47.4)$$

где $K = \rho c^2$ — модуль объемной упругости среды.

Коэффициент отражения от сосредоточенной упругости выражается, согласно (45.3), формулой

$$\mathcal{V} = \frac{1 + (i\rho c\omega/\kappa)}{1 - (i\rho c\omega/\kappa)}. \quad (47.5)$$

Амплитуда коэффициента отражения равна единице. Частотный ход отражения — обратный случаю сосредоточенной массы, граничащей с вакуумом. При низкой частоте мала проводимость, коэффициент отражения близок к $+1$ и препятствие ведет себя подобно абсолютно жесткой границе. На высоких частотах велика проводимость, коэффициент отражения близок к -1 и препятствие ведет себя как свободная граница. Термины «малая» и «большая» частота означают выполнение неравенств $\omega\rho c/\kappa \ll 1$ и $\omega\rho c/\kappa \gg 1$ соответственно. Фаза ε коэффициента отражения равна

$$\varepsilon = 2 \arctg \frac{\rho c\omega}{\kappa}. \quad (47.6)$$

Фаза растет от 0 до π по мере роста частоты от нуля до бесконечности.

То, что сосредоточенная упругость ведет себя на низкой частоте как абсолютно жесткая стенка, не значит, что на этих частотах уменьшаются *смещения* поверхности препятствия при той же самой амплитуде приложенного давления: эти смещения вообще от частоты не зависят. К нулю стремится с частотой *скорость* поверхности препятствия; это и определяет поведение препятствия с акустической точки зрения, т. е. отражение от препятствия. В статике определяющим является смещение, а в акустике — скорость.

Тонкую пластину иногда можно рассматривать как сосредоточенную упругость и в том случае, когда позади пластины не абсолютно жесткая стенка, а какое-либо другое препятствие (критерий допустимости такого предположения дадим в § 49). Найдем проводимость препятствия в виде сосредоточенной упругости, нагруженной на второе препятствие с проводимостью Y' .

В этом случае давление внутри пластины выразится формулой

$$p = \kappa (\xi - \xi'), \quad (47.7)$$

где ξ' — смещение задней стенки пластины. Но $\xi = v/(-i\omega)$,

$\xi' = v'/(-i\omega)$, где v и v' — скорости передней и задней стенок пластины. Кроме того, $v' = Y'p$. Формулу (47.7) можно привести к виду

$$p = \frac{\kappa}{-i\omega} (v - Y'p),$$

откуда

$$Y = \frac{-i\omega}{\kappa} + Y'. \quad (47.8)$$

Таким образом, проводимость нагрузки на сосредоточенную упругость складывается с проводимостью сосредоточенной упругости, опертой на стенку с нулевой проводимостью.

Если нагрузкой является полубесконечная среда, граничащая с задней стенкой пластины, то проводимость на передней стенке пластины равна

$$Y = \frac{-i\omega}{\kappa} + \frac{1}{\rho'c'}.$$

В этом случае коэффициент отражения равен (см. (45.2))

$$\mathcal{V} = \left[\frac{1}{\rho c} - \frac{1}{\rho'c'} + \frac{i\omega}{\kappa} \right] : \left[\frac{1}{\rho c} + \frac{1}{\rho'c'} - \frac{i\omega}{\kappa} \right] \quad (47.9)$$

и его модуль меньше единицы:

$$|\mathcal{V}| = \sqrt{\left[\left(\frac{\kappa}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho c} - \frac{1}{\rho'c'} \right)^2 \right] : \left[\left(\frac{\kappa}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho c} + \frac{1}{\rho'c'} \right)^2 \right]} \quad (47.10)$$

(так как волна проходит и во вторую среду позади пластины).

Аналогично расчету для сосредоточенной массы найдем коэффициент прохождения:

$$\mathcal{W} = \frac{2/\rho c}{\frac{1}{\rho c} + \frac{1}{\rho'c'} - \frac{i\omega}{\kappa}}.$$

В этом случае модуль коэффициента прохождения также можно было бы найти при помощи закона сохранения энергии, используя (47.10).

Если среда позади пластины та же, что и спереди, то коэффициенты отражения и прохождения равны

$$\mathcal{V} = \frac{i\omega/\kappa}{\frac{2}{\rho c} - \frac{i\omega}{\kappa}}, \quad \mathcal{W} = \frac{2/\rho c}{\frac{2}{\rho c} - \frac{i\omega}{\kappa}}.$$

Отраженная и прошедшая энергии равны друг другу при условии $\omega/\kappa = 2/\rho c$.

§ 48. Отражение от резонатора, Согласование двух сред

Найдем проводимость сосредоточенной упругости κ , нагруженной на сосредоточенную массу μ . Такое препятствие есть резонатор типа «масса на пружинке», возбуждаемый силой, приложенной со стороны пружинки. В этом случае проводимости упругого слоя и нагрузки на него складываются, так что проводимость всей конструкции в целом будет равна

$$Y = \frac{-i\omega}{\kappa} + \frac{1}{-i\omega\mu}.$$

При резонансной частоте резонатора, равной $\omega_0 = \sqrt{\kappa/\mu}$, проводимость системы обратится в нуль: препятствие станет эквивалентным жесткой стенке. При этом резонатор будет совершать интенсивные колебания: будет наблюдаться резонанс. Строго говоря, при такой частоте вообще нет установившегося решения — амплитуда колебаний нарастает безгранично. Но если предположить, как всегда в таких случаях, что имеется малое трение, то решение имеется: передняя стенка резонатора будет почти неподвижна, а масса будет совершать колебания тем большей амплитуды, чем меньше трение. При достаточно малом затухании такой резонатор дает хорошее приближение к абсолютно жесткой стенке для резонансной частоты, так что гармоническая волна этой частоты, падающая на резонатор, будет отражаться с коэффициентом отражения, весьма близким к $+1$.

Если, переставив элементы препятствия, нагрузить сосредоточенную массу на сосредоточенную упругость, опертую, в свою очередь, на жесткую стенку, то импеданс такого препятствия найдется как сумма импедансов его элементов:

$$Z = -i\omega\mu + \frac{i\kappa}{\omega}.$$

При резонансной частоте импеданс препятствия обращается в нуль и оно делается эквивалентным свободной поверхности, так что отражение от него гармонической волны резонансной частоты происходит с коэффициентом отражения — 1 . Однако явление резонанса будет отсутствовать: несмотря на совпадение частот, амплитуда смещения передней стенки препятствия при падении на него волны резонансной частоты будет лишь вдвое превосходить амплитуду в падающей волне.

Мы видели, что при переходе звуковой волны из одной среды в другую прохождение неполное, если только волновые сопротивления сред не равны друг другу. При большом различии волновых сопротивлений сред коэффициент отражения по модулю близок к единице и большая часть звуковой энергии отражается обратно в первую среду. В этом случае часто говорят, что среды «не согласованы» между собой (термин заимствован из теории электрических цепей). Естественно возникает вопрос о *согласовании*

сред, или (на этот раз заимствуем термин из оптики) о *просветлении* границы раздела между средами, путем помещения между ними некоторого слоя. Такое просветление очень важно, например, в вопросах излучения звука в среду, резко отличающуюся по волновому сопротивлению от материала излучателя, а также в *звуковой оптике*, где отражения на границах звуковых линз не только уменьшают фокусируемую энергию, но и создают «фон» несфокусированного звука, ослабляющий контрастность акустического изображения (снова аналогично ситуации в оптических приборах, с той разницей, что коэффициенты отражения в акустике, как правило, велики по сравнению с отражением света от границы стекла с воздухом).

В качестве просветляющего слоя в акустике можно применить резонатор типа «пружинка—масса», составленный из сосредоточенной упругости κ и сосредоточенной массы μ . Пусть такой резонатор вставлен между средами с волновыми сопротивлениями ρc и $\rho'c'$, причем $\rho c \geq \rho'c'$. Тогда для гармонической волны, падающей из первой среды, просветление можно получить, если резонатор вставлен пружинкой в сторону падающей волны. В самом деле, в этом случае масса μ резонатора будет нагружена на волновое сопротивление второй среды $\rho'c'$, так что импеданс нагруженной массы равен $-i\omega\mu + \rho'c'$; проводимость нагрузки на пружину равна, следовательно, $1/(-i\omega\mu + \rho'c')$. Но проводимость сосредоточенной упругости складывается с проводимостью нагрузки. Следовательно, входная проводимость нагруженного осциллятора равна

$$Y = \frac{-i\omega}{\kappa} + \frac{1}{-i\omega\mu + \rho'c'}.$$

Для того чтобы отражение отсутствовало и прохождение было полным, требуется выполнение равенства $Y = 1/\rho c$. Приравняв вещественные части этого равенства, получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\rho'c'}{\rho c} \right).$$

Частота полного пропускания оказывается меньше резонансной частоты осциллятора. Элементы осциллятора данной частоты найдем, приравняв мнимые части равенства $Y = 1/\rho c$:

$$\kappa = \omega_0 \sqrt{\rho c \rho' c'}, \quad \mu = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\rho c \rho' c'}.$$

Легко проверить, что подобранный таким образом осциллятор даст полное просветление и для волны, падающей со стороны второй среды; при этом расположение элементов осциллятора должно оставаться прежним; элемент упругости должен прилегать к более жесткой среде, а элемент массы — к менее жесткой. Одинаковое прохождение с одной и с другой стороны — пример «принципа взаимности» в акустике.

§ 49. Препятствия в виде плоскопараллельных слоев

В одномерной задаче об отражении нормально падающей волны всякое препятствие можно рассматривать как плоскопараллельный слой или последовательность таких слоев. Для нахождения отражения достаточно знать проводимость препятствия или его импеданс: коэффициент отражения получится по формуле (45.2) или (45.4). Найдем импеданс однородного слоя, нагруженного задней стенкой на заданный импеданс Z' . Решения этой задачи будет достаточно для нахождения импеданса любой последовательности слоев; в самом деле, достаточно будет найти импеданс последнего слоя последовательности, принять его за нагрузку предпоследнего слоя и т. д., вплоть до нахождения импеданса на передней стенке первого слоя.

В прошлых параграфах мы уже решали аналогичные простейшие задачи, но только приближенно, для слоев малой толщины по сравнению с длиной волны, считая механические свойства таких слоев «сосредоточенными». Теперь дадим точное решение задачи. Попутно получатся и границы применимости понятий о «сосредоточенных» массе и упругости.

Итак, пусть требуется найти импеданс нагруженного слоя толщины h , и пусть плотность и скорость звука в веществе слоя равны соответственно ρ_0 и c_0 . Из соображений симметрии ясно, что для данной частоты ω наиболее общий вид одномерного поля в слое есть (с точностью до произвольного множителя) суперпозиция двух плоских волн, бегущих друг другу навстречу:

$$p = e^{ik_0 z} + \mathcal{V} e^{-ik_0 z}.$$

Волну, бегущую в отрицательном направлении, можно считать отражением (коэффициент отражения \mathcal{V}) от препятствия с импедансом Z' волны, бегущей в положительном направлении. Считая, что начало координат расположено на задней стенке слоя, имеем

$$\mathcal{V} = \frac{Z' - \rho_0 c_0}{Z' + \rho_0 c_0}.$$

На передней стенке слоя, в точке $z = -h$, давление равно

$$\begin{aligned} e^{-ik_0 h} + \mathcal{V} e^{ik_0 h} &= \frac{(Z' + \rho_0 c_0) e^{-ik_0 h} + (Z' - \rho_0 c_0) e^{ik_0 h}}{Z' + \rho_0 c_0} = \\ &= 2 \frac{Z' \cos k_0 h - i \rho_0 c_0 \sin k_0 h}{Z' + \rho_0 c_0}. \end{aligned}$$

Скорость частиц в этой же точке выразится формулой

$$\frac{1}{\rho_0 c_0} (e^{-ik_0 h} - \mathcal{V} e^{ik_0 h}) = \frac{2}{\rho_0 c_0} \frac{-i Z' \sin k_0 h + \rho_0 c_0 \cos k_0 h}{Z' + \rho_0 c_0}.$$

Деля одно равенство на другое, найдем искомый импеданс слоя с нагрузкой, а после элементарных переделок и соответствующую проводимость ($Y' = 1/Z'$):

$$Z = i\rho_0 c_0 \frac{Z' - i\rho_0 c_0 \operatorname{tg} k_0 h}{Z' \operatorname{tg} k_0 h + i\rho_0 c_0}, \quad (49.1)$$

$$Y = \frac{1}{i\rho_0 c_0} \frac{(1/i\rho_0 c_0) \operatorname{tg} k_0 h + Y'}{(1/i\rho_0 c_0) - Y' \operatorname{tg} k_0 h}.$$

Импеданс и проводимость оказываются зависящими не только от вещества слоя и от нагрузки, но еще и от величины $k_0 h$ — *набега фазы* волны данной частоты на толщине слоя. Таким образом, импеданс определяется интерференционной картиной внутри слоя. При увеличении толщины слоя значения импеданса будут повторяться с периодом изменения толщины слоя, равным половине длины волны. Если Z' — чисто мнимое, то Z также чисто мнимое и при изменении толщины слоя будет изменяться по модулю от 0 (при $\operatorname{tg} k_0 h = Z'/i\rho_0 c_0$) до ∞ (при $\operatorname{tg} k_0 h = -i\rho_0 c_0/Z'$). Для слоя толщиной в целое число полуволн ($k_0 h = l\pi$) формула (49.1) дает $Z = Z'$, т. е. слой толщиной в полволны или в целое число полуволн не меняет импеданса нагрузки, а значит, коэффициент отражения от такого слоя будет таким же, как от нагрузки в отсутствие слоя.

Исследуем полученную формулу для импеданса и рассмотрим важнейшие частные случаи. Пусть задняя стенка слоя свободна: $Z' = 0$ ($Y' = \infty$). Импеданс и проводимость слоя будут равны (индекс символизирует величину импеданса или, соответственно, проводимости нагрузки):

$$Z_0 = -i\rho_0 c_0 \operatorname{tg} k_0 h, \quad Y_\infty = \frac{i}{\rho_0 c_0} \operatorname{ctg} k_0 h. \quad (49.2)$$

Слой действует как «эффективная» сосредоточенная масса, распределенная с плотностью

$$\mu' = \frac{\rho_0}{k_0} \operatorname{tg} k_0 h = \mu \frac{\operatorname{tg} k_0 h}{k_0 h},$$

где $\mu = \rho_0 h$, как и ранее, — фактическая поверхностная плотность слоя.

Пусть позади слоя жесткая стенка: $Z' = \infty$ ($Y' = 0$). Соответствующие импеданс и проводимость будут равны

$$Z_\infty = i\rho_0 c_0 \operatorname{ctg} k_0 h, \quad Y_0 = \frac{-i}{\rho_0 c_0} \operatorname{tg} k_0 h. \quad (49.3)$$

Слой действует как «эффективная» сосредоточенная упругость

$$\kappa' = \rho_0 c_0^2 k_0 \operatorname{ctg} k_0 h = \kappa k_0 h \operatorname{ctg} k_0 h,$$

где $\kappa = \rho_0 c_0^2/h$ — статический коэффициент упругости слоя.

Пользуясь этими формулами, нетрудно выразить импеданс и проводимость в общем случае (формулы (49.1)) через величины Z' , Z_0 и Z_∞ или через Y' , Y_0 и Y_∞ :

$$Z = Z_\infty \frac{Z' + Z_0}{Z' + Z_\infty}, \quad Y = Y_\infty \frac{Y' + Y_0}{Y' + Y_\infty}. \quad (49.4)$$

В некоторых случаях выражения (49.4) можно упростить. Пусть, например, $|Z'| \ll |Z_\infty|$. Тогда, пренебрегая в знаменателе в первой формуле (49.4) величиной Z' по сравнению с Z_∞ , найдем приближенно

$$Z = Z' + Z_0. \quad (49.5)$$

В этом случае импеданс нагрузки просто прибавляется к импедансу слоя в отсутствие нагрузки. Если, кроме того, толщина слоя мала по сравнению с длиной волны, $k_0 h \ll 1$, то приближенно $\mu' \approx \mu$. Значит, слой можно считать сосредоточенной массой при выполнении двух условий: $|Z'| \ll |Z_\infty|$ и $k_0 h \ll 1$. Для аддитивности нагрузки достаточно первого условия.

Аналогично, если $|Y'| \ll |Y_\infty|$, то в знаменателе второй формулы (49.4) можно пренебречь Y' по сравнению с Y_∞ и приближенно принять

$$Y = Y' + Y_0. \quad (49.6)$$

В этом случае проводимость нагрузки просто прибавляется к проводимости слоя, опертого на жесткую стенку. Если, кроме того, толщина слоя мала по сравнению с длиной волны, то приближенно $\kappa' \approx \kappa$, и формула (49.6) примет вид (47.8). Значит, слой можно считать сосредоточенной упругостью при выполнении двух условий: $|Y'| \ll |Y_\infty|$ и $k_0 h \ll 1$. Для аддитивности проводимостей достаточно первого условия.

Таким образом, для того чтобы данный слой можно было считать сосредоточенным, недостаточно, чтобы он был тонок по сравнению с длиной волны: важно еще, какова нагрузка на слой. При некоторых нагрузках тонкий слой можно считать сосредоточенным, а при других нет. Тонкий слой можно считать сосредоточенной массой, если импеданс нагрузки достаточно мал, и сосредоточенной упругостью, если импеданс нагрузки достаточно велик.

Вернемся к слою с нулевым импедансом нагрузки и сравним зависимость его импеданса от частоты с зависимостью импеданса сосредоточенной массы, равной массе данного слоя. В качестве аргумента удобно взять величину $k_0 h$, пропорциональную частоте. На рис. 49.1 показаны графики величины iZ для слоя и для сосредоточенной массы. Для слоя получается тангенсоида, для сосре-

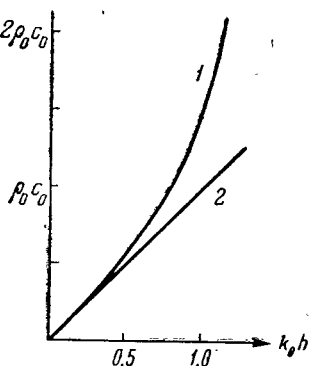


Рис. 49.1. Сравнение импедансов слоя конечной толщины (1) и сосредоточенной массы (2), равной полной массе слоя.

доточенной массы — прямая, вначале идущая весьма близко к тангенсоиде; расхождение достигает, например, 10%, только начиная с $k_0 h = 0,515$. Импеданс слоя растет быстрее, чем импеданс сосредоточенной массы, равной массе слоя, т. е. быстрее чем частота, или, при фиксированной частоте, чем толщина слоя. При $k_0 h = \pi/2$ импеданс обращается в бесконечность и меняет знак, приобретая характер упругости. Далее импеданс уменьшается по модулю при увеличении частоты и обращается в нуль при $k_0 h = \pi$. После этого весь цикл изменений импеданса повторяется снова с периодом изменения $k_0 h$, равным π .

График рис. 49.1 является, с точностью до вертикального масштаба, графиком проводимости (точнее говоря, графиком величины — iY) для слоя, опертого на жесткую стенку. Прямойлинейный график даст проводимость сосредоточенной упругости для коэффициента упругости, равного $\rho_0 c_0^2/h$. Здесь также различие в проводимостях слоя и сосредоточенной упругости остается меньше 10%, пока величина $k_0 h$ не превосходит 0,515. При увеличении $k_0 h$ проводимость слоя растет, обращаясь в бесконечность при $k_0 h = \pi/2$. При дальнейшем увеличении $k_0 h$ проводимость меняет знак, приобретая массовый характер, уменьшается до нуля (при $k_0 h = \pi$), и далее весь цикл изменения проводимости повторяется с периодом π .

Возвращаясь к задаче об отражении от слоя, найдем коэффициент отражения звука от нагруженного слоя в виде

$$\mathcal{V} = \frac{Z_\infty [(Z' + Z_0)/(Z' + Z_\infty)] - \rho c}{Z_\infty [(Z' + Z_0)/(Z' + Z_\infty)] + \rho c} = \frac{Z_\infty (Z' + Z_0) - \rho c (Z' + Z_\infty)}{Z_\infty (Z' + Z_0) + \rho c (Z' + Z_\infty)}, \quad (49.7)$$

где ρ и c — плотность и скорость звука в среде перед слоем, из которой на слой падает волна. Аналогичную формулу для \mathcal{V} можно написать и через проводимости:

$$\mathcal{V} = \frac{-Y_\infty (Y' + Y_0) + (1/\rho c) (Y' + Y_\infty)}{Y_\infty (Y' + Y_0) + (1/\rho c) (Y' + Y_\infty)}.$$

Важный частный случай — слой, помещенный в среду. В этом случае нагрузка на слой равна ρc и коэффициент отражения равен

$$\mathcal{V} = \frac{Z_\infty Z_0 - (\rho c)^2}{Z_\infty Z_0 + 2Z_\infty \rho c + (\rho c)^2} = \frac{-Y_\infty Y_0 + (1/\rho c)^2}{Y_\infty Y_0 + 2(1/\rho c) Y_\infty + (1/\rho c)^2}, \quad (49.8)$$

или, после подстановки выражений (49.2) и (49.3) и простых преобразований,

$$\mathcal{V} = \frac{i \operatorname{tg} k_0 h \left(\frac{1}{\xi} - \xi \right)}{2 - i \operatorname{tg} k_0 h \left(\frac{1}{\xi} + \xi \right)}, \quad (49.9)$$

где через $\xi = \rho_0 c_0 / \rho c$ обозначено отношение волновых сопротивлений вещества слоя и вещества среды.

По импедансу слоя можно найти только отраженную волну. Но в задаче о слое как препятствии интересно рассмотреть не только коэффициент отражения, но и прошедшую волну и волны, распространяющиеся внутри слоя. Поэтому заново рассмотрим всю задачу о падении волны на слой, помещенный в среду. Начало координат выберем теперь на передней границе слоя. Пусть падающая волна есть e^{ikz} , отраженная $\mathcal{V}e^{-ikz}$, прошедшая $\mathcal{W}e^{ik(z-h)}$, и пусть внутри слоя бегут волны $\mathcal{A}e^{ik_0z}$ и $\mathcal{B}e^{-ik_0z}$. На границах слоя, т. е. в точках $z = 0$ и $z = h$, должны выполняться граничные условия: равенство давлений и скоростей частиц по обе стороны границы. Для границы $z = 0$ найдем

$$1 + \mathcal{V} = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \quad \zeta(1 - \mathcal{V}) = \mathcal{A} - \mathcal{B}. \quad (49.10)$$

Для границы $z = h$ найдем аналогично

$$\mathcal{A}e^{i\alpha} + \mathcal{B}e^{-i\alpha} = \mathcal{W}, \quad \mathcal{A}e^{i\alpha} - \mathcal{B}e^{-i\alpha} = \zeta\mathcal{W}. \quad (49.11)$$

Здесь для краткости через $\alpha = k_0h$ обозначен набег фазы в веществе слоя на толщине слоя. Из уравнений (49.10) находим

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}[1 + \mathcal{V} + \zeta(1 - \mathcal{V})], \quad \mathcal{B} = \frac{1}{2}[1 + \mathcal{V} - \zeta(1 - \mathcal{V})]. \quad (49.12)$$

Из (49.11) получим

$$\frac{\mathcal{A}e^{i\alpha} - \mathcal{B}e^{-i\alpha}}{\mathcal{A}e^{i\alpha} + \mathcal{B}e^{-i\alpha}} = \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \cos \alpha + i(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \sin \alpha}{(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \cos \alpha + i(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \sin \alpha} = \zeta.$$

Подставляя сюда выражения (49.12) для \mathcal{A} и \mathcal{B} , получим уравнение для определения коэффициента отражения; решая его, найдем

$$\mathcal{V} = \frac{i \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right)}{2 - i \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right)} \quad (49.13)$$

(что, конечно, совпадает с (49.9)). Но мы можем найти амплитуды и других волн:

$$\mathcal{W} = \frac{2/\cos \alpha}{2 - i \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right)}, \quad \mathcal{A} = (1 + \zeta) \frac{1 - i \operatorname{tg} \alpha}{2 - i \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right)},$$

$$\mathcal{B} = (1 - \zeta) \frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{2 - i \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right)}. \quad (49.14)$$

Возвращаясь к подробным обозначениям, можно переписать выражения для коэффициентов отражения и прохождения

следующим образом ($m = \rho_0/\rho$, $n = c/c_0$):

$$\mathcal{V} = \frac{i \operatorname{tg}(nkh) \left(\frac{n}{m} - \frac{m}{n} \right)}{2 - i \operatorname{tg}(nkh) \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right)}, \quad \mathcal{W} = \frac{2/\cos(nkh)}{2 - i \operatorname{tg}(nkh) \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \right)}. \quad (49.15)$$

Исследуем полученные формулы. При $k_0 h = l\pi$, когда на толщине слоя укладывается целое число полуволн, коэффициент отражения обращается в нуль и волна проходит через слой полностью: $\mathcal{W} = 1$. Это кажется парадоксальным, особенно при большом различии волновых сопротивлений среды и вещества слоя. Согласно изложенной теории плоская волна частоты 1000 гц, падающая в воздухе нормально на стальную плиту толщиной 2,75 м, должна пройти насквозь без отражения! В действительности, в полном согласии с интуицией, такое явление никогда не наблюдается. Причина этого делается понятной, если подробнее рассмотреть этот случай полного прохождения. При $k_0 h = l\pi$ имеем $\operatorname{tg}(nkh) = 0$ и величины \mathcal{A} и \mathcal{B} делаются равными $\mathcal{A} = (1 + \zeta)/2$, $\mathcal{B} = (1 - \zeta)/2$. Давление и скорость частиц в слое равны соответственно

$$\begin{aligned} p &= \cos k_0 z + i\zeta \sin k_0 z, \\ v &= \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(\cos k_0 z + i \frac{1}{\zeta} \sin k_0 z \right). \end{aligned} \quad (49.16)$$

При большом различии волновых сопротивлений в среде и в слое, т. е. при $\zeta \gg 1$ (как в примере со стальной плитой в воздухе, когда $\zeta \approx 10^5$) или при $\zeta \ll 1$ (как было бы, например, при полном прохождении звука из стального полупространства в стальное полупространство через воздушный слой толщиной в полволны: $\zeta = 10^{-5}$), поле в слое близко к стоячей волне с узлами давления или скорости на границах слоя. Амплитуда этих колебаний (давления — в первом случае и скорости частиц — во втором) весьма велика по сравнению с соответственными величинами в падающей волне: это резонансное колебание слоя.

Показательно сравнение плотности энергии в таком полуволновом слое с плотностью энергии в падающей волне. В падающей волне единичной амплитуды плотность энергии есть

$$E = \beta/2$$

($\beta = 1/\rho c^2$ — сжимаемость среды). Внутри слоя плотность энергии равна сумме плотностей энергии волны амплитуды \mathcal{A} , бегущей вперед, и волны амплитуды \mathcal{B} , бегущей в противоположном направлении. При резонансе, т. е. при $k_0 h = l\pi$, плотность энергии равна

$$E_0 = \frac{1}{2} \beta_0 \left(\frac{1+\zeta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta_0 \left(\frac{1-\zeta}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \beta_0 (1 + \zeta^2)$$

($\beta_0 = 1/\rho_0 c_0^2$ — сжимаемость материала слоя). Отношение плотностей энергии внутри и вне слоя составляет

$$\frac{E_0}{E} = \frac{1}{2} \frac{\beta_0}{\beta} (1 + \zeta^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0}{\beta} + \frac{\rho_0}{\rho} \right).$$

Для стального полуволнового слоя в воздухе это отношение превышает 3000. Для полуволнового воздушного слоя между двумя стальными полупространствами это отношение превысило бы миллион. Таким образом, полное прохождение через полуволновую пластину соответствует весьма острому резонансу и малые отклонения по частоте сразу сильно уменьшают пропускание. В самом деле, при $kh = l\pi (1 + \varepsilon)$, где $\varepsilon \ll 1$, находим из (49.13) с точностью до ε^2

$$\mathcal{V} = \frac{-i\pi\varepsilon \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right)}{2 - i\pi\varepsilon \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right)}.$$

Отсюда следует, что требуемое для получения данного (по модулю) коэффициента отражения $|\mathcal{V}|$ относительное изменение частоты ε составит

$$\varepsilon = \frac{2}{l\pi} \frac{|\mathcal{V}|}{\zeta \sqrt{1 - |\mathcal{V}|^2}} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{2}{l\pi} \frac{\zeta |\mathcal{V}|}{\sqrt{1 - |\mathcal{V}|^2}}$$

соответственно для случаев $\zeta \gg 1$ и $\zeta \ll 1$. Для стальной пластины в воздухе толщиной в полволны достаточно изменить частоту менее чем на 1/100 000 долю (в нашем примере на 1/100 гц) или изменить в том же отношении толщину пластины (в нашем примере на 28 микрон), чтобы прошла лишь половинная энергия колебания, а вторая половина отразилась ($|\mathcal{V}| = 0,7$). Для того чтобы отразилось 99% падающей энергии, достаточно изменить частоту на 1/10 000 долю (0,1 гц) или изменить толщину всего на четверть миллиметра. Наконец, при наличии затухания в материале слоя снова появляется отражение, и полное прохождение получить нельзя. Например, если бы угол потерь в стали составлял всего 1/100 000 (при этом волна, распространяющаяся в неограниченной среде, затухала бы в e раз, лишь пробежав расстояние в полмиллиона длин волн), в нашем примере отразилась бы уже половина падающей энергии.

Эти числа приведены только для иллюстрации: действительные условия всегда еще больше отличаются от идеальных, и поэтому при большом различии волновых сопротивлений среды и слоя коэффициент отражения по модулю практически всегда равен единице.

При отношении волновых сопротивлений порядка нескольких единиц или десятков расчетные условия достаточно выдерживать более грубо, избирательное пропускание выражено отчетливо и полуволновую пластинку или пластинку толщиной в целое

число полуволн можно использовать как монохроматор. Например, для $\zeta = 30$ (что примерно соответствует стальной пластинке в воде) ширина линии пропускания для полуволновой пластинки составит примерно 4% от частоты полного пропускания. Волны с частотами, отличающимися меньше чем на 2% от частоты полного пропускания, проходят с амплитудами, не меньшими 0,7 от амплитуды падающей волны. Для пластинки толщиной в целую длину волны ширина пропускания составит только 2% и т. д. Монохроматизация усиливается при увеличении числа полуволн, укладываемых на толщине слоя.

Заметим, что полуволновой слой обычно не используют как монохроматор по частотам, так как на ультразвуковых частотах, для которых только и возможно практически создать в среде плоские волны, излучатели дают сами по себе весьма узкополосное излучение. Но, как увидим в § 60, слой может выделять волны по направлениям, так что при фиксированной частоте через данный слой будут проходить только плоские волны, близкие к одному определенному направлению. Поэтому такой слой используют как монохроматор гармонических волн по направлениям волновых векторов.

Вернемся снова к задаче о «просветлении» границы между двумя различными средами. Эта задача была решена в § 48 при помощи сосредоточенных препятствий (массового и упругого препятствия). Теперь решим эту же задачу, используя слой конечной толщины. Подберем такой материал и такую толщину слоя, чтобы, помещая этот слой между двумя средами с заданными волновыми сопротивлениями, получить полный переход звуковой энергии из первой среды во вторую, т. е. чтобы коэффициент отражения обращался в нуль. Для этого импеданс искомого просветляющего слоя, нагруженного на волновое сопротивление второй среды, должен равняться волновому сопротивлению первой среды. Полагая в (49.1) $Z' = \rho'c'$, запишем это условие в виде

$$i\rho_0c_0 \frac{\rho'c' - i\rho_0c_0 \operatorname{tg} k_0h}{\rho'c' \operatorname{tg} k_0h + i\rho_0c_0} = \rho c. \quad (49.17)$$

За исключением тривиального случая $\rho c = \rho'c'$, это соотношение, рассматриваемое как уравнение относительно ρ_0c_0 , имеет решение только при бесконечном значении тангенса. Следовательно, толщину слоя нужно принять равной $k_0h = \frac{2l+1}{2} \pi$ (l — целое). Тогда из (49.17) сразу получается условие просветления

$$\rho_0c_0 = \sqrt{\rho c \rho'c'}. \quad (49.18)$$

Итак, просветляющий слой должен иметь толщину, равную нечетному числу четвертей волны в материале слоя, а волновое сопротивление этого материала должно равняться среднему гео-

метрическому волновых сопротивлений просветляемых сред. Ясно, что слой, просветляющий границу для прохождения звука из первой среды во вторую, явится просветляющим и для прохождения звука той же частоты в обратном направлении, — еще один пример «принципа взаимности».

При изменении частоты прохождение будет неполным и по-явится отражение. Если принять

$$k_0 h = \frac{2l+1}{2} \pi (1 + \varepsilon), \quad \text{где} \quad \frac{2l+1}{2} \pi \varepsilon \ll 1,$$

то коэффициент отражения выразится приближенной формулой

$$\mathcal{R} = \frac{i \frac{2l+1}{2} \pi \varepsilon \left(\frac{\rho' c'}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho' c'} \right)}{2 + i \frac{2l+1}{2} \pi \varepsilon \left(\frac{\rho' c'}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho' c'} \right)}.$$

При большом различии волновых сопротивлений сред коэффициент отражения быстро растет при удалении от частоты просветления.

Можно показать, что полностью устранить отражение можно даже при наличии поглощения звука в материале просветляющего слоя, — для этого потребуется только соответственно изменить толщину слоя и подобрать несколько измененную плотность или скорость звука в материале слоя. Но при этом прохождение звука будет неполным: часть звуковой энергии поглотится в самом слое.

В то время как для монохроматора узость полосы пропускания — вообще желательное свойство, для просветляющего слоя это — недостаток. Чем большее число полуволн добавлено к четвертьволновому слою, тем уже пропускаемый им диапазон частот. Поэтому, обратно тому, что рекомендуется для монохроматора, просветляющие слои следует делать минимальной толщины — в одну четверть волны.

§ 50. Отражение негармонических волн

От препятствий, проводимость которых зависит от частоты, негармонические волны отражаются неправильно. В этом случае отраженную волну будем искать при помощи метода Фурье. Для этого падающую волну

$$p = p \left(t - \frac{z}{c} \right) \quad (50.1)$$

разложим в интеграл Фурье:

$$p \left(t - \frac{z}{c} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\omega} e^{-i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right)} d\omega, \quad (50.2)$$

где спектральная плотность определится по формуле

$$p_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p \left(t - \frac{z}{c} \right) e^{i\omega(t-z/c)} dt. \quad (50.3)$$

Волны, соответствующие элементам интеграла

$$p_{\omega} e^{-i\omega(t-z/c)} d\omega$$

испытывают правильное отражение и превратятся в отраженные волны вида

$$\mathcal{V}(\omega) p_{\omega} e^{-i\omega(t+z/c)} d\omega,$$

где $\mathcal{V}(\omega)$ — значение коэффициента отражения для гармонической волны частоты ω . Согласно сказанному в § 22 $\mathcal{V}(-\omega) = \mathcal{V}^*(\omega)$. Искомая отраженная волна найдется путем интегрирования по частоте всех элементарных отраженных волн:

$$\tilde{p} \left(t + \frac{z}{c} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(\omega) p_{\omega} e^{-i\omega(t+z/c)} d\omega. \quad (50.4)$$

Заметим, что частотная зависимость коэффициента отражения от реальных препятствий не может быть произвольной. В самом деле, если передний фронт падающей волны еще не дошел до препятствия, то формула (50.4) должна давать нулевые значения для всех моментов времени, пока передний фронт волны, отразившись от препятствия, не достигнет данной точки, т. е. пока фронт не пробежит расстояние до препятствия плюс расстояние от препятствия до данной точки. Например, невозможна частотная зависимость коэффициента отражения вида $\mathcal{V}(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$, т. е. неосуществимо препятствие, отражающее волны только одной-единственной частоты и поглощающее или пропускающее все остальные гармонические волны. В самом деле, в этом случае окажется, что при $p_{\omega_0} \neq 0$ отраженная волна будет отлична от нуля во всех точках и во все моменты времени, т. е. отраженная волна появится до того, как падающая волна упадет на препятствие; что противоречит принципу причинности. Невозможен также коэффициент отражения вида $\mathcal{V}(\omega) = \sin \tau\omega$: в этом случае принцип причинности окажется нарушенным для падающей волны, имеющей вид короткого импульса.

Если известна частотная зависимость проводимости данного препятствия: $Y = Y(\omega)$, то формулу (50.4) можно переписать в виде

$$\tilde{p} \left(t + \frac{z}{c} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \rho c Y(\omega)}{1 + \rho c Y(\omega)} p_{\omega} e^{-i\omega(t+z/c)} d\omega$$

или через импеданс $Z = 1/Y$

$$\tilde{p}\left(t + \frac{z}{c}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\omega) - \rho c}{Z(\omega) + \rho c} p_{\omega} e^{-i\omega(t+z/c)} d\omega.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим препятствие в виде сосредоточенной массы с поверхностной плотностью μ , импеданс которого равен $Z(\omega) = -i\omega\mu$. При отрицательных частотах Z , как и следует, обращается в комплексно-сопряженную величину:

$$Z(-\omega) = Z^*(\omega) = i\omega\mu.$$

Волна, отраженная от такого препятствия, имеет вид .

$$\tilde{p}\left(t + \frac{z}{c}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega - i\Omega}{\omega + i\Omega} p_{\omega} e^{-i\omega(t+z/c)} d\omega. \quad (50.5)$$

Здесь введено обозначение $\Omega = \rho c/\mu$.

Возьмем для примера в качестве падающей волны экспоненциальный импульс:

$$p = 0 \quad \text{при } t - z/c < 0,$$

$$p = e^{-\alpha(t-z/c)} \quad \text{при } t - z/c \geq 0.$$

Если препятствие расположено в точке $z = 0$, то передний фронт этого импульса достигнет препятствия в момент времени $t = 0$. Спектр импульса имеет вид $p_{\omega} = i/2\pi(\omega + i\alpha)$, так что отраженная волна (50.5) принимает для данного случая вид

$$\tilde{p}\left(t + \frac{z}{c}\right) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega + i\alpha} \frac{\omega - i\Omega}{\omega + i\Omega} e^{-i\omega(t+z/c)} d\omega. \quad (50.6)$$

Интеграл в данном случае легко вычислить методом вычетов. Заметим раньше всего, что при $t + z/c < 0$ (моменты времени до прихода отраженной волны) в верхней плоскости комплексного переменного ω ($\text{Im}\omega > 0$) подынтегральное выражение экспоненциально стремится к нулю при уходе на бесконечность. Поэтому путь интегрирования в (50.6) — действительную ось — можно замкнуть в верхней полуплоскости полуокружностью бесконечно большого радиуса. Но в верхней полуплоскости подынтегральное выражение не имеет полюсов; следовательно, интеграл равен нулю, что и следовало ожидать согласно принципу причинности. При $t + z/c > 0$ замыкание контура интегрирования можно провести в нижней полуплоскости. Но на нижней полуплоскости подынтегральное выражение имеет полюсы; следовательно, интеграл равен сумме вычетов в этих полюсах.

При $\alpha \neq \Omega$ на нижней полуплоскости имеются два простых полюса в точках $\omega = -i\alpha$ и $\omega = -i\Omega$, и интеграл оказывается равным

$$\tilde{p}(t + z/c) = \frac{\alpha + \Omega}{\alpha - \Omega} e^{-\alpha(t+z/c)} - \frac{2\Omega}{\alpha - \Omega} e^{-\Omega(t+z/c)}. \quad (50.7)$$

При $\alpha = \Omega$ находим либо непосредственно из (50.6), либо предельным переходом из (50.7):

$$\tilde{p}\left(t + \frac{z}{c}\right) = (1 - 2\Omega t) e^{-\Omega(t+z/c)}. \quad (50.8)$$

На рис. 50.1 дан профиль падающей волны и профили отраженных волн, рассчитанные по формулам (50.7) и (50.8) для случаев $\alpha/\Omega = 1/2; 1; 2$. Форма волны при отражении меняется. Легко убедиться непосредственным подсчетом, что суммарная энергия отраженной волны равна суммарной энергии падающей волны при любом значении μ . Ясно, что такое соотношение

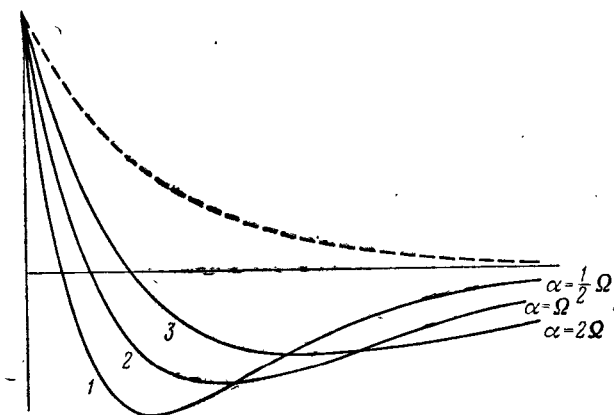


Рис. 50.1. Изменение формы профиля при отражении экспоненциального импульса (пунктир) от сосредоточенной массы разной величины. 1 — отражение от «легкой» стенки, 2 — промежуточный случай, 3 — отражение от «тяжелой» стенки.

всегда будет выполнено при любом чисто мнимом («реактивном») входном импедансе препятствия, когда модуль коэффициента отражения для любой частоты равен единице и спектр отраженной волны отличается от спектра падающей только фазами компонент, что не влияет на энергию волны.

§ 51. Теория длинных линий

Мы уже говорили, что одномерная задача о распространении волн в жидкой среде допускает, помимо плоской волны в неограниченной среде, целый ряд других интерпретаций, в которых тем же соотношениям, что имеют место для давления и скорости частиц в жидкости, удовлетворяют другие величины. Различные интерпретации может получить и плотность среды. Неизменной остается интерпретация скорости волны: все переменные величины в волне зависят от времени и координаты только через биномы $t \mp z/c$, где c есть величина, характерная для данной среды, —

скорость звука или, вообще говоря, скорость одномерного возмущения (при отсутствии дисперсии).

Можно дать различные интерпретации не только задаче о волне, бегущей в неограниченной среде, но и всей развитой в этой главе теории отражения от препятствий, прохождения через препятствия и прохождения через границу двух сред. Можно также характеризовать препятствия граничными условиями, налагаемыми на величины, соответствующие давлению и скорости частиц. Тогда при одинаковой форме граничных условий и величины коэффициента отражения, коэффициента прохождения, импеданса и т. д. получатся такие же, как и в предыдущих параграфах, хотя физически все элементы среды будут иными.

Например, для поперечных волн на струне угол наклона можно интерпретировать как сжатие, а поперечную скорость — как скорость частиц; при этом погонная плотность ρ будет соответствовать объемной плотности среды в задаче о плоских волнах, а натяжение струны — модулю объемной упругости среды. Связывая две полубесконечные струны, приходим к задаче, эквивалентной задаче о двух различных полубесконечных средах, граничащих по плоскости. Так как натяжение одинаково в обеих «полуструнах», что отвечает равенству модулей упругости, то квадрат коэффициента преломления равен в данной интерпретации отношению погонных плотностей: $n^2 = m$ (плотности второй струны к плотности первой). Коэффициент отражения от границы между струнами с плотностями ρ и ρ' равен

$$q_r = \frac{m - n}{m + n} = \frac{\rho'/\rho - \sqrt{\rho'/\rho}}{\rho'/\rho + \sqrt{\rho'/\rho}} = \frac{\sqrt{\rho'/\rho} - 1}{\sqrt{\rho'/\rho} + 1}.$$

«Свободную границу» для струны можно осуществить, привязывая ее к струне нулевой плотности. Жесткую границу можно осуществить, привязывая струну к неподвижному телу.

С формальной точки зрения все интерпретации вполне равноправны, так как для каждой из них набор уравнений и граничные условия для изучаемых величин одни и те же. Поэтому для каждой интерпретации в соответственных случаях будем всегда приходить к одним и тем же окончательным формулам, в которые останется только подставлять те или иные физические величины, соответственно выбранной интерпретации. Такое единое рассмотрение всех подобных одномерных волновых задач получило название *теории длинных линий*. Теория длинных линий позволяет рассматривать отражение от препятствий, прохождение через границу двух сред, прохождение волны через «многослойную» систему, когда на пути волны стоят участки различных сред и требуется найти отраженное и прошедшее поле, а также поле внутри каждой из сред. В числе слоев могут быть и сосредоточенные препятствия, например, сосредоточенные массы или упругости.

Все задачи, которые можно решать методами теории длинных линий, относятся к средам, в которых уравнение распространения для величин, соответствующих давлению и скорости частиц, есть волновое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

Не всякая одномерная волна есть решение именно такого уравнения. Например, поперечные волны на стержне описываются, как мы видели, уравнением четвертого порядка и для него волна вида $p(t \mp z/c)$ является решением, только если это гармоническая волна, а распространение волн происходит с дисперсией. К таким средам теория длинных линий, конечно, неприменима.

§ 52. Узкая труба и стержень как длинные линии

Применим теорию длинных линий к распространению звука в жидкости или газе, заполняющем узкую *) цилиндрическую трубу с жесткими стенками. Замечательно, что если такую трубу изогнуть, то распространение звука в ней останется таким же, как и в прямой трубе, с той только разницей, что координату придется отсчитывать не по прямой, а по изогнутой оси трубы. Изгибы оси могут быть сколь угодно крутыми, хотя бы даже изломами: волна бежит в такой трубе, не замечая изгибов, так же, как если бы труба была вытянута в прямую линию. Изогнутые узкие трубы широко применяют в медных духовых инструментах. Трубу изгибают только для уменьшения габаритов инструмента, звуки же, издаваемые изогнутой трубой, имеют ту же высоту, как если бы труба была выпрямлена.

Бегущую волну в такой трубе можно записать в виде $p(t \mp z/c)$, где в качестве z взята теперь длина дуги осевой линии трубы. Ускорение частиц среды вдоль трубы создается изменением давления вдоль оси трубы. Нормальное же ускорение частиц создается реакцией неподвижных стенок трубы. Волновое уравнение для узкой трубы постоянного сечения (все равно, прямой или изогнутой) имеет тот же вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

Скорость звука в узкой трубе не зависит ни от площади сечения, ни от его формы, и равна скорости звука в неограниченной среде.

При соединении труб разного поперечного сечения получим аналог двух различных граничащих между собою сред. Однако

*) Узкой трубой считаем трубу, поперечник которой много меньше длины волны звука. Особенности распространения волн в широких трубах не позволяют интерпретировать их как длинные линии. Более подробно акустику узких труб рассмотрим в гл. VII, а акустику широких труб — в гл. VIII.

граничное условие оказывается теперь другим. В самом деле, пусть, например, соединены полубесконечные трубы с сечениями q и q' , заполненные одной и той же средой, и пусть из трубы с сечением q падает волна $p(t - z/c)$. Место соединения труб частично отразит волну и частично ее пропустит. Отраженная волна будет иметь вид $\mathcal{V}p(t + z/c)$, а прошедшая — вид $\mathcal{W}p(t - z/c)$, где коэффициенты отражения и прохождения найдутся из граничных условий. Очевидно, в непосредственной близости от места соединения труб движение частиц будет несколько отличаться от движения в одномерной волне, однако для достаточно узких труб этот участок много короче длины волны, и этим отличием можно пренебрегать. Граничные условия — это равенство давлений по обе стороны от границы и равенство потоков среды по обе стороны. Эти условия можно записать следующим образом:

$$1 + \mathcal{V} = \mathcal{W}, \quad q(1 - \mathcal{V}) = q'\mathcal{W},$$

откуда сразу находим

$$\mathcal{V} = \frac{q - q'}{q + q'}, \quad \mathcal{W} = \frac{2q}{q + q'}. \quad (52.1)$$

Широкая (по сравнению с первой) вторая труба почти эквивалентна свободной границе. В частности, узкую трубу, открывающуюся в свободную атмосферу, можно считать соединенной с трубой бесконечной ширины и, следовательно, граничащей с вакуумом. Узкая вторая труба соответствует жесткой границе. В обоих случаях во вторую трубу проходит малая доля энергии. При равенстве площадей поперечных сечений отражение отсутствует независимо от формы поперечного сечения. Например, при Т-образном соединении трубы сечения q с трубой сечения $q/2$ волна, распространяющаяся в более широкой трубе, не отразится от места соединения, а перейдет во вторую трубу, распространяясь в обе стороны от места соединения.

Сравнивая найденные формулы с формулами Френеля для границы двух сред, видим, что вместо погонных плотностей сред $q\rho$ и $q'\rho$, которые можно было бы ожидать при данной интерпретации, за плотности следует принять величины ρ/q и ρ/q' соответственно. Дело в том, что граничное условие в рассмотренном случае другое, чем во френелевой задаче: равны друг другу по обе стороны границы не нормальные скорости частиц, а полные потоки через оба сечения.

На распространение в трубах похоже распространение в узких твердых стержнях. Однако аналогия сохраняется только для прямых стержней. Граничные условия для двух соединенных прямых стержней из одного и того же материала с сечениями q и q' , лежащих на одной прямой, — это равенство скоростей частиц по обе стороны от границы и равенство сил взаимодействия. Эти условия можно записать в виде

$$q(1 + \mathcal{V}) = q'\mathcal{W}, \quad 1 - \mathcal{V} = \mathcal{W},$$

откуда

$$\mathcal{V} = \frac{q' - q}{q' + q}, \quad \mathcal{W} = \frac{2q'}{q' + q}. \quad (52.2)$$

В этом случае можно пользоваться формулами (43.6), принимая в качестве плотностей сред погонные плотности стержней ρq

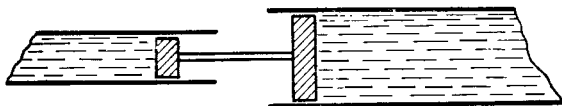


Рис. 52.1. Схема соединения труб, приводящая к уравнениям (52.2) для коэффициентов отражения и прохождения.

и $\rho q'$. Интерпретация свободной границы и жесткой стенки получилась обратной той, что имела место для соединенных труб: второй тонкий стержень похож на границу с вакуумом, а толстый — на абсолютно жесткую границу. Впрочем, если вместо непосредственного соединения труб связать их при помощи безмассового двойного поршня, как показано на рис. 52.1, то граничные условия станут такими же, как и для стержней, и мы придем к тому же соотношению (52.2).

Полученные формулы легко обобщить и на стержни из разных материалов.

НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

§ 53. Отражение и прохождение плоских волн при наклонном падении. Закон Снеллиуса

При наклонном падении плоской волны на плоское однородное препятствие возникают такие же вопросы об отражении и прохождении, как и при нормальном падении. Но в этом случае задача не одномерная: данная фаза волны подходит к разным точкам препятствия не одновременно — след волны бежит вдоль препятствия. Медленность следа зависит не только от медленности звука в данной среде, но и от угла скольжения θ падающей волны — угла, составляемого вектором медленности падающей волны S с поверхностью препятствия. Поэтому вообще отражение и (если препятствие — другая среда) прохождение зависят не только от свойств препятствия, но и от этого угла.

Зная медленность волн в данной среде и угол скольжения падающей волны, можно найти вектор медленности отраженной волны, а зная, кроме того, величину медленности во второй среде, можно найти и вектор медленности волны, прошедшей во вторую среду.

В самом деле, для того чтобы на границе препятствия выполнялись граничные условия, необходимо, чтобы медленности следов на препятствии падающей, отраженной и прошедшей волн были равны между собой. Физический смысл этого требования — в том, чтобы следы волн не обгоняли друг друга. При нарушении этого требования, даже если граничные условия удовлетворены в какой-то момент времени, они нарушатся вследствие «расфазировки» следов в другие моменты. Ясно, что требование равенства медленностей следов универсально и должно выполняться для всяких типов плоских волн, падающих на любые плоские однородные препятствия.

Это требование будем называть *законом Снеллиуса*. Его можно сформулировать еще и по-другому: так как медленность следа волны на плоскости равна проекции вектора медленности волны на эту плоскость, то проекции векторов медленности падающей, отраженной и прошедшей волн на границу препятствия должны совпадать. Значит, если все три вектора медленности отложить

от какой-либо точки границы, то концы векторов будут лежать на одной нормали к границе (рис. 53.1).

Обозначим через N единичный вектор нормали к границе, направленный из среды, в которой распространяется падающая волна, в препятствие, и направим ось z по вектору N ; ось x выберем в плоскости падения — плоскости, содержащей векторы N и S . Очевидно, вектор медленности отраженной волны можно записать в виде

$$\tilde{S} = S - 2N(SN). \quad (53.1)$$

У падающей и отраженной волн x -компоненты векторов медленности равны друг другу и равны $S \cos \theta$; z -компоненты противоположны и равны $\pm N(SN)$; модуль этой компоненты равен $S \sin \theta$. Угол $\tilde{\theta}$ между вектором \tilde{S} и границей называют углом скольжения отраженной волны. Очевидно,

модуль этой компоненты равен $S \cos \theta$; z -компоненты противоположны и равны $\pm N(SN)$; модуль этой компоненты равен $S \sin \theta$. Угол $\tilde{\theta}$ между вектором \tilde{S} и границей называют углом скольжения отраженной волны. Очевидно,

$$\tilde{\theta} = \theta. \quad (53.2)$$

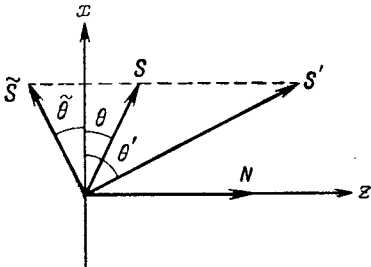


Рис. 53.1. Расположение векторов медленности падающей, отраженной и прошедшей волн при падении на плоскую границу двух сред $z = 0$.

Легко видеть, далее, что вектор медленности во второй среде S' равен

$$S' = S + N\{(S' - S)N\}. \quad (53.3)$$

Пользуясь формулой $n = S'/S = c/c'$, легко записать вектор медленности прошедшей волны через вектор медленности падающей и коэффициент преломления n :

$$S' = S - N(SN) + N\sqrt{(n^2 - 1)S^2 + (NS)^2}. \quad (53.4)$$

Но согласно закону Снеллиуса должно быть

$$S \cos \theta = S' \cos \theta', \quad (53.5)$$

где θ' — угол скольжения прошедшей волны. Следовательно,

$$\frac{\cos \theta'}{\cos \theta} = \frac{1}{n} = \frac{S}{S'} = \frac{c'}{c}. \quad (53.6)$$

Отсюда следует, что углы скольжения падающей и прошедшей волн взаимны: соотношение сохранится, если считать вторую среду первой и первую — второй, приняв θ' за угол скольжения падающей волны, а θ — за угол скольжения прошедшей и положив коэффициент преломления равным $S/S' = 1/n$.

Из (53.6) следует, что при прохождении угол скольжения меньше с той стороны, где медленность меньше: $\theta' < \theta$ при $n < 1$ и $\theta' > \theta$ при $n > 1$. Из (53.6) находим далее

$$\sin \theta' = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta} \quad (53.7)$$

При падении на плоскостойкую многослойную среду волна, проходя из слоя в слой, частично проходит и частично отражается, причем на каждой границе выполняется закон Снеллиуса: проекции векторов медленности всех отраженных и проходящих волн на границы слоев равны между собой и равенство

$$S \cos \theta = \text{const} \quad (53.8)$$

выполняется для всех этих волн. Это же равенство будет соблюдаться и в пределе, при сколь угодно тонких слоях, когда среду можно представить себе как слоисто-неоднородную с непрерывно изменяющимися характеристиками (см. § 57).

В векторной форме закон Снеллиуса (53.8) можно переписать в виде

$$[N[SN]] = \text{const},$$

где S — вектор медленности любой из отраженных или прошедших волн.

Иногда вместо углов скольжения θ , $\tilde{\theta}$ и θ' пользуются *углом падения* χ , *углом отражения* $\tilde{\chi}$ и *углом преломления* χ' — углами между соответственными векторами медленности и нормалью к границе (внешней нормалью N для углов χ и χ' и внутренней — N для угла $\tilde{\chi}$). Очевидно,

$$\theta + \chi = \tilde{\theta} + \tilde{\chi} = \theta' + \chi' = \pi/2.$$

Формулы (53.2) и (53.6) можно записать в виде

$$\tilde{\chi} = \chi, \quad \frac{\sin \chi'}{\sin \chi} = \frac{c'}{c}.$$

Эти соотношения формулируются в школьном курсе физики как законы Снеллиуса *для световых лучей*. Первый закон Снеллиуса: угол падения равен углу отражения; второй закон Снеллиуса: синусы углов преломления и падения относятся как скорости света в соответственных средах. На волновом языке мы объединили оба закона в один; применение волновой картины показало универсальность закона Снеллиуса для любого типа волн.

Из всего сказанного следует, что для плоской волны, падающей на однородное плоское препятствие, падающую и отраженную волны всегда можно записать в виде

$$p = p(t - Sr), \quad \tilde{p} = \tilde{p}(t - \tilde{S}r),$$

где \tilde{S} определяется формулой (53.1). Форма волны вообще при отражении меняется, т. е. функции p и \tilde{p} различны. Если различие заключается только в постоянном множителе, т. е.

$$\tilde{p}(t) = \mathcal{V} p(t),$$

то отражение правильное и \mathcal{V} называют коэффициентом отражения.

Аналогично, если на границе со второй средой прошедшая волна плоская *), то она должна иметь вид $p'(t - S'r)$, где S' определяется формулой (53.3) или (53.4). Вообще форма волны при прохождении меняется. Если различие заключается только в постоянном множителе, т. е.

$$p'(t) = \mathcal{W}p(t),$$

то прохождение правильное и \mathcal{W} называют коэффициентом прохождения.

В настоящей главе ставится задача отыскания волны \tilde{p} (и p' для задачи о границе двух сред) для любого однородного линейного плоского препятствия и при любом виде падающей волны p .

Для идеальных границ выражение для отраженной волны получается элементарно. Как легко проверить, на абсолютно мягкой границе волна

$$p = p(t - Sr) = p(t - S \cos \theta \cdot x - S \sin \theta \cdot z)$$

отражается в виде волны

$$\tilde{p} = -p(t - \tilde{S}r) = -p(t - S \cos \theta \cdot x + S \sin \theta \cdot z).$$

Аналогично отражение на абсолютно жесткой стенке имеет вид

$$\tilde{p} = p(t - \tilde{S}r) = p(t - S \cos \theta \cdot x + S \sin \theta \cdot z).$$

§ 54. Отражение и прохождение звука на границе двух сред

Обозначим плотности и медленности звука в первой и второй среде соответственно через ρ , ρ' и S , S' и рассмотрим падение на границу волны вида

$$p = p(t - S \cos \theta \cdot x - S \sin \theta \cdot z).$$

Если отражение правильное (условие правильности выясним ниже), то, как уже было сказано, отраженную и прошедшую волны можно записать в виде

$$\tilde{p} = \mathcal{V}p(t - S \cos \theta \cdot x + S \sin \theta \cdot z),$$

$$p' = \mathcal{W}p(t - S' \cos \theta' \cdot x - S' \sin \theta' \cdot z).$$

Например, для падающей гармонической волны

$$p = \exp(ik \cos \theta \cdot x + ik \sin \theta \cdot z)$$

*) В то время как отражение плоской волны — всегда также плоская волна, прошедшая волна может и не быть плоской волной, а представлять собой суперпозицию неоднородных волн (см. § 56).

отраженная и прошедшая волны равны

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \mathcal{V} \exp(ik \cos \theta \cdot x - ik \sin \theta \cdot z), \\ p' &= \mathcal{W} \exp(ik' \cos \theta' \cdot x + ik' \sin \theta' \cdot z).\end{aligned}$$

В написанных выше формулах величины \mathcal{V} и \mathcal{W} — неизвестные пока коэффициенты отражения и прохождения, которые должны быть определены из граничных условий. Углы скольжения θ и θ' связаны формулами (53.6), (53.7).

Граничные условия — это равенство давлений и нормальных скоростей частиц по обе стороны границы раздела сред. На касательные компоненты скорости никаких ограничений в идеальных средах не накладывается: в решении, которое мы найдем, эти компоненты окажутся различными. Получающийся разрыв касательной компоненты скорости частиц на границе совместим с принятым предположением об идеальности среды, т. е. об отсутствии вязкости. Для реальных жидкостей разрыв сглаживают вязкие волны, описанные нами в § 19. Обычно они мало влияют на картину отражения и прохождения; поэтому мы пока пренебрежем ими, считая жидкость идеальной (см. впрочем ниже § 58).

Так как на границе аргументы функции p одинаковы для всех трех волн, то граничные условия можно записать для волны любой формы в виде

$$1 + \mathcal{V} = \mathcal{W}, \quad \frac{S \sin \theta}{\rho} (1 - \mathcal{V}) = \frac{S' \sin \theta'}{\rho'} \mathcal{W}. \quad (54.1)$$

Первое уравнение совпадает с соответственным уравнением для нормального падения (первое уравнение (43.1)). Это объясняется тем, что давление — скаляр, и поэтому условие, на него налагаемое, не связано с направлением распространения волн. Второе уравнение иное, чем для нормального падения: в него входят нормальные компоненты векторов скорости частиц, которые зависят не только от величины, но и от направления этих векторов.

Решая уравнения (54.1) относительно коэффициентов отражения и прохождения, найдем

$$\mathcal{V} = \frac{(\rho'/S' \sin \theta') - (\rho/S \sin \theta)}{(\rho'/S' \sin \theta') + (\rho/S \sin \theta)}, \quad \mathcal{W} = \frac{2\rho'/S' \sin \theta'}{(\rho'/S' \sin \theta') + (\rho/S \sin \theta)} \quad (54.2)$$

или, через волновые сопротивления,

$$\mathcal{V} = \frac{(\rho'c'/\sin \theta') - (\rho c/\sin \theta)}{(\rho'c'/\sin \theta') + (\rho c/\sin \theta)}, \quad \mathcal{W} = \frac{2\rho'c'/\sin \theta'}{(\rho'c'/\sin \theta') + (\rho c/\sin \theta)}.$$

54.3)

В отличие от случая нормального падения, коэффициенты оказались зависящими не только от свойств самих сред, но и от угла

скольжения падающей волны. В частности, при одинаковых волновых сопротивлениях обеих сред, но неравных плотностях и скоростях звука в отдельности, коэффициент отражения не равен нулю.

Пользуясь принятыми ранее обозначениями, можем переписать формулы (54.2) в таком виде:

$$\mathcal{V} = \frac{m \sin \theta - n \sin \theta'}{m \sin \theta + n \sin \theta'}, \quad \mathcal{W} = \frac{2m \sin \theta}{m \sin \theta + n \sin \theta'}. \quad (54.4)$$

Из этих формул можно исключить угол скольжения преломленной волны при помощи (53.7):

$$\mathcal{V} = \frac{m \sin \theta - \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}{m \sin \theta + \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}, \quad \mathcal{W} = \frac{2m \sin \theta}{m \sin \theta + \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}. \quad (54.5)$$

Наконец, деля числитель и знаменатель на $\sin \theta$, получим формулы, куда входит только одна тригонометрическая функция:

$$\mathcal{V} = \frac{m - \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta}}{m + \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta}}, \quad \mathcal{W} = \frac{2m}{m + \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta}}. \quad (54.6)$$

Полученные выражения для \mathcal{V} и \mathcal{W} — формулы Френеля для наклонного падения.

В различных задачах удобно пользоваться то одним, то другим представлением этих коэффициентов.

Из (54.5) видно, что при $n > 1$ отражение и прохождение — правильные при любом угле скольжения падающей волны. При $n < 1$ правильность сохраняется только при углах скольжения падающей волны, больших так называемого критического угла скольжения $\theta_{\text{кр}}$, определяемого равенством

$$\cos \theta_{\text{кр}} = n. \quad (54.7)$$

При меньших значениях угла скольжения («закритических» углах) выражения для \mathcal{V} и \mathcal{W} теряют смысл (становятся мнимыми). Картина отражения и прохождения при закритических углах более сложна и упрощается только для гармонических волн (см. § 56).

§ 55. Анализ формул Френеля

Проанализируем теперь зависимость коэффициентов отражения и прохождения от характеристик сред и от угла скольжения падающей волны. Из формул (54.6) видно, что оба коэффициента меняются монотонно при изменении угла скольжения падающей волны. При нормальном падении ($\theta = \pi/2$) снова возвращаемся

к формулам (43.5). Дифференцируя (54.5) по θ , найдем, что при $\theta = \pi/2$

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\theta} = \frac{d\mathcal{W}}{d\theta} = 0,$$

т. е. коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении имеют экстремальные значения. Из второй формулы (54.6) видно, что этот экстремум при $n < 1$ — минимум, а при $n > 1$ — максимум. Коэффициент прохождения не обращается в нуль ни при каком угле скольжения падающей волны, но стремится к нулю при стремлении θ к нулю («скользящее падение»).

Найдем, при каких условиях обращается в нуль коэффициент отражения, т. е. при каких условиях вся звуковая энергия переходит во вторую среду целиком (при этом граничным условиям удастся удовлетворить не тремя волнами, как обычно, а только двумя: падающей и прошедшей). Раньше всего заметим, что за исключением случая нормального падения равенство волновых сопротивлений не является для полного прохождения ни необходимым, ни достаточным условием: необходима, как сейчас увидим, специальная комбинация значений m , n и θ , чтобы осуществить полное прохождение, и не при любых значениях m и n вообще есть угол полного прохождения. В самом деле, приравнявая нулю первое из выражений (54.6), найдем, что угол скольжения падающей волны должен для этого удовлетворять уравнению

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{n^2 - 1}{m^2 - n^2}. \quad (55.1)$$

Отсюда следует, что коэффициент отражения может обратиться в нуль только при условии

$$\frac{n^2 - 1}{m^2 - n^2} > 0, \quad (55.2)$$

т. е. при выполнении одной из пар соотношений

$$m > n > 1, \quad m < n < 1.$$

Согласно первому из уравнений (54.4) при угле скольжения, обращающем коэффициент отражения в нуль, должно выполняться условие $m \sin \theta = n \sin \theta'$. Комбинируя его с условием (53.6), найдем, что при полном прохождении волны

$$\operatorname{ctg} \theta = m \operatorname{ctg} \theta'.$$

Определяемые этими соотношениями углы являются взаимными: если полное прохождение возможно из первой среды во вторую, то оно возможно и из второй среды в первую.

При угле полного прохождения амплитуда давления прошедшей волны равна, согласно первому уравнению (54.1), амплитуде

падающей. Это не значит, что при этом угле скольжения амплитуда прошедшей волны больше, чем при других углах: коэффициент прохождения, как и коэффициент отражения, всегда изменяется монотонно и при $n < 1$ продолжает расти при уменьшении θ , а при $n > 1$ продолжает убывать.

Из (54.6) видно, что при $n > 1$ коэффициент отражения монотонно убывает при уменьшении угла скольжения падающей волны от значения $\mathcal{V} = (m - n)/(m + n)$ при $\theta = 90^\circ$ до значения $\mathcal{V} = -1$ при $\theta = 0$. В зависимости от того, будет ли $m > n$ или

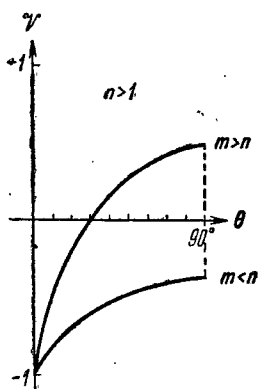


Рис. 55.1. Примерный ход зависимости коэффициента отражения от угла скольжения падающей волны при $n > 1$.

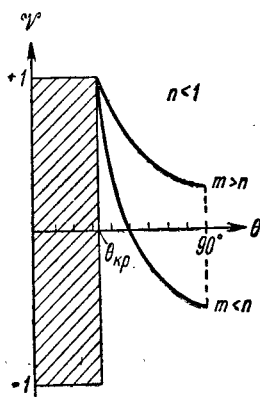


Рис. 55.2. Примерный ход зависимости коэффициента отражения от угла скольжения падающей волны при $n < 1$. Заштрихована «закритическая» область углов, в которой отражение неправильное.

$m < n$, общий ход коэффициента отражения имеет вид одной или другой из кривых, показанных на рис. 55.1.

При $n < 1$ коэффициент отражения монотонно растет от значения $\mathcal{V} = (m - n)/(m + n)$ при $\theta = 90^\circ$ до значения $\mathcal{V} = +1$ при критическом угле скольжения. При угле скольжения меньше критического формулы Френеля для волны произвольной формы теряют смысл как для коэффициента отражения, так и для коэффициента прохождения: корень $\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}$ делается мнимым. Это значит, что предположение о правильности отражения, из которого мы исходили при выводе этих формул, не оправдывается для закритических углов ($\theta < \theta_{кр}$), а потому и сами понятия коэффициентов отражения и прохождения оказываются здесь неприменимыми. При угле скольжения, в точности равном критическому, отражение еще остается правильным: угол скольжения прошедшей волны обращается в нуль и она бежит параллельно границе сред. При этом угле коэффициент отражения равен $+1$, как при отражении от абсолютно жесткой стенки (действительно,

нормальные скорости частиц на границе равны при этом нулю), а коэффициент прохождения обращается в 2.

Общий ход коэффициента отражения при $n < 1$ для случаев $m > n$ и $m < n$ показан на рис. 55.2.

Для отражения звука на границе воздух—вода критический угол скольжения равен примерно 77° .

Невозможность правильного отражения при закритических углах скольжения ясна из кинематической картины, приводящей к закону Снеллиуса. При критическом угле медленность следа прошедшей волны достигает наибольшего значения: вектор медленности во второй среде параллелен границе (рис. 55.3). При дальнейшем уменьшении угла скольжения проекция медленности падающей волны еще увеличивается, а для прошедшей волны дальнейшее увеличение проекции медленности уже невозможно.

Отметим интересный случай равенства скоростей звука в обеих средах ($n = 1$). Тогда волна переходит во вторую среду, не меняя угла скольжения, а коэффициенты отражения и прохождения оказываются независимыми от угла скольжения:

$$\mathcal{V} = \frac{m-1}{m+1}, \quad \mathcal{W} = \frac{2m}{m+1}.$$

В качестве примера таких сред укажем на ртуть и воду.

Формулы Френеля можно написать и через углы падения и преломления. Например, формулы (54.4) примут вид

$$\mathcal{V} = \frac{m \cos \chi - n \cos \chi'}{m \cos \chi + n \cos \chi'}, \quad \mathcal{W} = \frac{2m \cos \chi}{m \cos \chi + n \cos \chi'}.$$

Аналогично случаю нормального падения (§ 43) можно найти доплеровский сдвиг частот при отражении и прохождении на движущейся границе и для наклонного падения.

При угле скольжения падающей волны θ частоты отраженной и прошедшей волн оказываются, как легко видеть, равными соответственно

$$\omega_1 = \omega \frac{1 - M \sin \theta}{1 + M \sin \theta}, \quad \omega_2 = \omega \frac{1 - M \sin \theta}{1 - M \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}.$$

Как и в случае нормального падения, величины коэффициентов отражения и прохождения остаются при этом такими же, как и при неподвижной границе раздела.

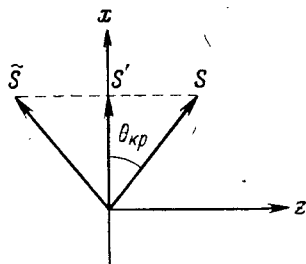


Рис. 55.3. Расположение векторов медленности падающей, отраженной и прошедшей волн при критическом угле скольжения падающей волны.

Выясним, при каких условиях отражение мало при наклонном падении волны на границу двух сред. Легко видеть, что близости волновых сопротивлений сред, как это было при нормальном падении, в этом случае недостаточно и требуется малое различие как плотностей, так и скоростей звука в отделимости. Если $m = 1 + \alpha$ и $n = 1 + \beta$, то во всяком случае должно быть $\alpha \ll 1$ и $\beta \ll 1$. Оказывается, однако, что и этих требований иногда недостаточно. В самом деле, пренебрегая величиной β^2 по сравнению с β , можем представить, согласно (54.5), коэффициент отражения в виде

$$\mathcal{V} = \frac{1 + \alpha - \sqrt{1 + 2\beta/\sin^2 \theta}}{1 + \alpha + \sqrt{1 + 2\beta/\sin^2 \theta}}.$$

Для того чтобы коэффициент отражения был мал по сравнению с единицей, необходимо, таким образом, чтобы одновременно выполнялись условия $\alpha \ll 1$; $\beta/\sin^2 \theta \ll 1$. Тогда приближенно

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{\beta}{\sin^2 \theta} \right). \quad (55.3)$$

Таким образом, ограничение на изменение коэффициента преломления более жесткое, чем для отношения плотностей, и, кроме того, усиливается по мере уменьшения угла скольжения волны.

§ 56. Отражение гармонических волн и импульса при закритических углах скольжения. Полное отражение

При $n < 1$ отражение при закритических углах не может быть правильным, так как компонента вектора медленности вдоль границы не может превосходить самого вектора. Но для гармонических волн этого ограничения нет: мы видели в § 32, что можно взять одну из компонент волнового вектора сколь угодно большой при условии, что вторая компонента чисто мнимая и сумма квадратов компонент по-прежнему равна квадрату волнового числа. Таким образом, для гармонических волн условию Снеллиуса можно удовлетворить при любом угле скольжения падающей волны. При закритических углах нормальная компонента волнового вектора прошедшей волны — мнимое число: прошедшая волна — неоднородная, бегущая вдоль границы и экспоненциально убывающая при удалении от нее.

Полученные выше формулы Френеля можно применять для гармонических волн и при закритических углах скольжения; при этом коэффициенты отражения и прохождения окажутся комплексными.

При закритическом угле скольжения θ падающей волны прошедшая волна имеет вид

$$\mathcal{W} \exp(ik \cos \theta \cdot x - k \sqrt{\cos^2 \theta - n^2} \cdot z).$$

Формулы Френеля принимают вид

$$\mathcal{R} = \frac{m \sin \theta - i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta + i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}, \quad \mathcal{T} = \frac{2m \sin \theta}{m \sin \theta + i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}, \quad (56.1)$$

где корень вещественный. При закритическом угле отражение полное: модуль коэффициента отражения равен единице. Прошедшая волна не уносит энергию от границы, хотя, конечно, плотность энергии во второй среде нулю не равна.

Фаза коэффициента отражения равна

$$\varepsilon = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta}$$

и изменяется от 0 до $-\pi$ при уменьшении угла скольжения падающей волны от $\theta_{кр}$ до 0° .

Коэффициент отражения изменяется при этом от $+1$ до -1 , описывая на плоскости комплексных значений \mathcal{R} полуокружность единичного радиуса (рис. 56.1). Фаза коэффициента прохождения равна $\varepsilon/2$. Коэффициент прохождения изменяется в том же диапазоне углов от 2 до 0.

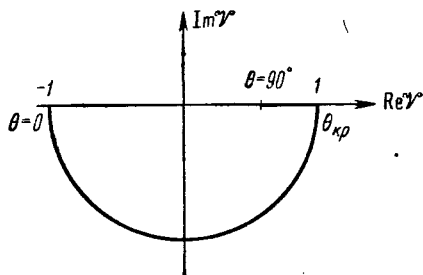


Рис. 56.1. Годограф коэффициента отражения от границы двух сред при $n < 1$.

Фаза коэффициента отражения при данном закритическом угле $\theta < \theta_{кр}$ одинакова для любой частоты падающей гармонической волны. Эта добавочная фаза равносильна уменьшению длины пробега отраженной волны в среде на величину ε/k , различную для волн разных частот. Можно сказать, что отражение при закритическом угле скольжения падающей волны сопровождается «сосредоточенной» (на границе) дисперсией. Поэтому при падении негармонической плоской волны под закритическим углом скольжения форма волны в результате отражения изменится. Но отражение и в этом случае полное и энергия не перетекает во вторую среду.

Для границы воздух—вода полное отражение начинается с $\theta = 77^\circ$: при меньших углах скольжения падающая волна отражается целиком.

Если вторая среда несжимаемая, то любой угол скольжения, кроме 90° , закритический, и коэффициенты отражения и прохождения равны

$$\mathcal{R} = \frac{m \sin \theta - i \cos \theta}{m \sin \theta + i \cos \theta}, \quad \mathcal{T} = \frac{2m \sin \theta}{m \sin \theta + i \cos \theta}.$$

Прошедшая волна при этом всегда неоднородная:

$$p' = \mathcal{T} \exp(ik \cos \theta \cdot x - k \cos \theta \cdot z).$$

При отражении от несжимаемой среды при угле скольжения, отличным от прямого, любая волна, кроме гармонической, изменит свою форму. При нормальном падении такая среда, как уже говорилось, эквивалентна абсолютно жесткой стенке и любая волна отражается от нее без изменения формы с коэффициентом отражения, равным единице.

Для того чтобы найти, как меняется форма несинусоидальной волны при отражении от границы под закритическим углом скольжения, разложим падающую волну по Фурье и, отразив каждую гармоническую компоненту в отдельности по формуле Френеля, сложим полученные отраженные волны. Разложение по Фурье вещественной волны включает как положительные, так и отрицательные частоты. Но для отрицательных частот коэффициент отражения следует брать комплексно сопряженным по отношению к коэффициенту отражения для положительных частот. Поэтому коэффициенты отражения для разных гармонических компонент различны: один коэффициент для всех компонент с положительными частотами и другой — комплексно-сопряженный — для компонент с отрицательными частотами. Если бы коэффициент отражения был одинаков и для положительных и для отрицательных частот, форма волны при отражении не изменилась бы; это и имеет место при докритических углах.

Итак, пусть угол скольжения волны $p = p(t - S \cos \theta \cdot x - S \sin \theta \cdot z)$ меньше критического угла. Вводя обозначение $\xi = t - S \cos \theta \cdot x - S \sin \theta \cdot z$ и разлагая падающую волну в интеграл Фурье, имеем

$$p(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\xi\omega} d\omega,$$

где

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi, \quad g(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = g^*(\omega).$$

Каждая элементарная волна $d\omega g(\omega) e^{-i\xi\omega}$ отразится от границы со своим коэффициентом отражения. Для элементов с положительными частотами отраженная волна получится путем умножения на общий для них всех коэффициент отражения

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2 = \frac{m \sin \theta - i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta + i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}} = \\ &= \frac{m^2 \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta - n^2)}{m^2 \sin^2 \theta + (\cos^2 \theta - n^2)} - i \frac{2m \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m^2 \sin^2 \theta + (\cos^2 \theta - n^2)} \end{aligned}$$

с последующей заменой аргумента ξ на аргумент $\eta = t - S \cos \theta \cdot x + S \sin \theta \cdot z$. Для элементов с отрицательными частотами

различие только в том, что в качестве коэффициента отражения следует взять сопряженное значение: $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}_1 - i\mathcal{V}_2$.

Итак, при $\omega > 0$ отраженные элементы интеграла будут иметь вид $d\omega g(\omega) \mathcal{V} e^{-i\eta\omega}$, а при $\omega < 0$ — вид $d\omega g(\omega) \mathcal{V}^* e^{-i\eta\omega}$.

Отраженная волна запишется, таким образом, в виде

$$\tilde{p}(\eta) = \int_0^{\infty} g(\omega) (\mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2) e^{-i\eta\omega} d\omega + \int_{-\infty}^0 g(\omega) (\mathcal{V}_1 - i\mathcal{V}_2) e^{-i\eta\omega} d\omega.$$

Это выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\eta) &= \mathcal{V}_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\eta\omega} d\omega + \\ &+ i\mathcal{V}_2 \left[\int_0^{\infty} g(\omega) e^{-i\eta\omega} d\omega - \int_{-\infty}^0 g(\omega) e^{-i\eta\omega} d\omega \right] = \\ &= \mathcal{V}_1 p(\eta) + i\mathcal{V}_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{|\omega|} g(\omega) e^{-i\eta\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое — правильное отражение падающей волны с коэффициентом отражения \mathcal{V}_1 . Второе слагаемое имеет тот же амплитудный спектр, но коэффициент отражения равен $i\mathcal{V}_2$ для части спектра с $\omega > 0$ и равен $-i\mathcal{V}_2$ для части спектра с $\omega < 0$. Второе слагаемое, а вместе с тем и все отражение, имеет поэтому другую форму, чем падающая волна. В частности, отраженная волна появляется в данной точке границы раньше, чем туда доходит падающий импульс, чего не могло быть при докритических углах скольжения. Разумеется, это — не нарушение принципа причинности, так как скорость звука во второй среде больше скорости звука в первой и возмущение, пробегающее во второй среде, опережает возмущение, проходящее в первой, и, выходя снова в первую среду, появляется до прихода падающей волны.

Проведенное выше разбиение отраженной волны на два слагаемых — правильное и неправильное отражение — совершенно условно. Можно было бы считать, что в данном поле имеется любое по амплитуде правильное слагаемое, точно так же, как любое число можно разложить на два слагаемых, выбирая одно из них произвольно. Но выбранное разбиение удобно, так как дает простые выражения для слагаемых через вещественную и мнимую части коэффициента отражения и через спектр падающей волны.

§ 57. Рефракция лучей в неоднородной среде

В § 44 мы видели, что при достаточно высокой частоте волны (или достаточно медленном изменении свойств среды) бегущая плоская волна может распространяться в слоисто-неоднородной среде в направлении, перпендикулярном к слоям, без отражений.

Это обстоятельство позволило нам в этом случае представить волновое поле в виде системы лучей. Можно ли ввести лучевую картину и для наклонного падения волны на слои, т. е. будет ли отсутствовать отражение и в этом случае? Естественно предположить, что отражение будет отсутствовать только тогда, когда свойства среды меняются достаточно медленно. Это предположение оказывается справедливым, но мы увидим, что требования медленности изменения свойств среды в этом случае более жесткие, чем для нормального падения. Кроме того, медленность изменения волнового сопротивления не является вообще ни необходимым, ни достаточным условием: требуется медленность изменения как плотности среды, так и локальной скорости звука в ней в отдельности.

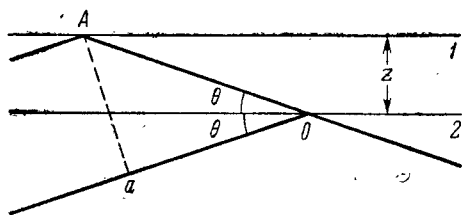


Рис. 57.1. Определение разности фаз отражений плоской волны от плоских границ 1 и 2.

Разобьем, как и для случая нормального падения, среду на тонкие по сравнению с длиной волны слои и примем, что суммарное отражение образовано суммой отражений от границ слоев с учетом фаз отражений. Различие со случаем нормального падения будет двояким: коэффициенты отражения будут больше, а набег фазы последовательных отражений меньше, чем при нормальном падении. В самом деле, согласно (55.3) коэффициент отражения $(1/2)(\alpha - \beta/\sin^2 \theta)$ от границы может оказаться при малых углах скольжения θ много большим, чем коэффициент отражения $(\alpha - \beta)/2$ для отражения от той же границы при нормальном падении. Разность же фаз волн, отраженных от границ, отстоящих друг от друга на z , равна, как видно из рис. 57.1,

$$k(OA - Oa) = 2kz \sin \theta$$

вместо $2kz$ при нормальном падении. Таким образом, требование малости суммарного отражения сводится к требованию малости величины $(1/2)(\alpha - \beta/\sin^2 \theta)$ для скачка свойств среды соответствующего смещению перпендикулярно к слоям на расстояние порядка $1/k \sin \theta$. Если плотность среды не меняется от точки к точке или играет малую роль в суммарном отражении, то требование плавности изменений скорости звука при наклонном падении оказывается в $1/\sin^3 \theta$ раз более жестким, чем для нормального падения.

В дальнейшем будем считать, что условия отсутствия отражения выполнены и можно применять лучевую картину и на случай наклонного падения. Заметим, что при не очень значительных изменениях скорости звука (например, в пределах 10%) доста-

точно переходного слоя толщиной порядка одной длины волны, чтобы отражение не превышало по амплитуде 10% от падающей волны вплоть до угла скольжения 12° , а при толщине слоя в 5 длин волн отражение не превышает 1% вплоть до угла скольжения 5° . Изменение плотности влияет на отражение в меньшей степени, чем изменение скорости: требование к медленности изменения плотности растет с уменьшением угла скольжения только как $1/\sin \theta$.

Итак, пусть задан некоторый плоский фронт волны в слоистой неоднородной среде. Начнем строить лучевую картину, считая, что все лучи выходят из этого фронта перпендикулярно к фронту. Если скорость звука в среде постоянна (меняется только плотность), то лучевая картина будет такой же, как и при нормальном падении: система параллельных прямых; различие будет только в том, что лучи будут пересекать слои под углом скольжения, не равным $\pi/2$. Но если — что наиболее интересно — скорость звука меняется от слоя к слою, то, поскольку вектор медленности направлен вдоль луча и при переходе от слоя к слою должен выполняться закон Снеллиуса, луч будет искривляться (рис. 57.2); вдоль луча будет выполняться равенство

$$S \cos \theta = \text{const}, \quad (57.1)$$

где θ — угол скольжения луча по отношению к слоям. Искривление луча называют *рефракцией*.

Очевидно, кривизна луча, выходящего из данной точки фронта, определится законом изменения медленности вблизи данной точки. Поэтому вообще кривизны лучей будут различны, а новые фронты волны, как правило, уже не будут плоскими. Возникает вопрос: в какой степени можно продолжать пользоваться лучевой картиной, если волна плоская только на одном каком-то фронте? Очевидно, точное изображение поля при помощи лучевой картины уже невозможно: соседние лучевые трубки уже не тождественны, симметрия нарушена и между ними может происходить акустическое взаимодействие через стенки. Но при очень высоких частотах искривление фронта окажется еще очень малым для участков, очень больших по сравнению с длиной волны. Волну можно тогда считать *локально плоской*, и тонкие лучевые трубки будут долго идти почти параллельно. Если нас интересуют локальные свойства звукового поля, а не вся картина поля в целом во всей среде, то волну можно считать всюду локально плоской с медленно меняющимся направлением распространения. Пока взаимодействие между лучевыми трубками мало, им можно пренебрегать, что

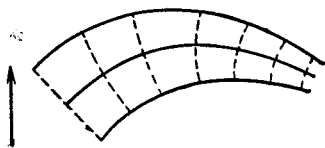


Рис. 57.2. Форма лучей (сплошные кривые) и фронтов волны (пунктир) в неоднородной среде. Стрелкой показано направление, в котором скорость звука увеличивается.

и позволяет сохранить лучевую картину и в этом случае. Очевидно, фронты волны будут поворачиваться вместе с лучами, оставаясь перпендикулярными к лучам. Если задать во всей среде зависимость S от координаты z , то формулу (57.1) можно считать уравнением лучей в данной слоисто-неоднородной среде.

Из сказанного следует, что лучевую картину можно построить и для того случая, когда в среде задан и неплоский фронт волны, если только радиусы кривизны фронта велики по сравнению с длиной волны. При этом не требуется постоянство амплитуды колебаний вдоль фронта, лишь бы ее относительное изменение было мало на расстоянии, большом по сравнению с длиной волны. Лучи выходят из такого фронта по нормальям и подчиняются

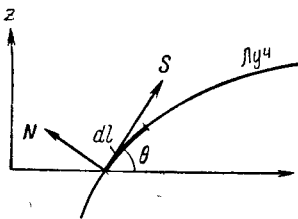


Рис. 57.3. К нахождению кривизны луча.

уравнению (57.1). Лучевая картина по-прежнему будет давать распределение звукового поля в среде асимптотически, при стремлении частоты к бесконечности. Если нарисовать лучи достаточно часто, так, чтобы направления смежных лучей мало различались на всем их протяжении, то можно получить представление и об изменении амплитуды волны, поскольку, в силу сохранения потока мощности вдоль

каждой трубки, места расширения трубок соответствуют уменьшению плотности потока мощности и обратно.

Уравнение лучей удобно написать в виде зависимости кривизны луча от закона изменения медленности звука в среде и угла скольжения луча относительно границ слоев $z = \text{const}$. Дифференцируя (57.1), получим (рис. 57.3)

$$\cos \theta dS - \sin \theta \cdot S d\theta = 0.$$

Но

$$dS = \frac{dS}{dz} dz = \frac{dS}{dz} \sin \theta dl,$$

где через dl обозначена длина элемента дуги луча. Подставляя в предыдущее уравнение, найдем кривизну $\kappa = d\theta/dl$ луча в виде

$$\kappa = \cos \theta \frac{d \ln S}{dz}.$$

Заменяя дифференцирование по направлению оси z , т. е. по нормали к слоям дифференцированием по нормали N к лучу, найдем

$$\kappa = \frac{d \ln S}{dN} = - \frac{d \ln c}{dN}. \quad (57.2)$$

Таким образом, кривизна луча, проходящего через данную точку, тем больше, чем меньше его угол скольжения. Наибольшую

кривизну имеет луч, выходящий из данной точки параллельно слоям. Луч всюду обращен вогнутостью в сторону уменьшения скорости звука: он как бы стремится уйти от мест с большой скоростью звука в место с малой скоростью.

Имея в виду асимптотический характер лучевой картины, можно обобщить ее и на случай произвольной, а не только слоистой неоднородности среды, если только сохранить требование медленности изменения свойств среды по всем направлениям. В самом деле, в этом случае любую среду можно считать *локально-слоистой* со слоями, перпендикулярными к вектору $\text{grad } S$, который по условию, накладываемому на неоднородность среды, медленно меняет свое направление от точки к точке. Уравнение луча имеет тот же вид (57.2) и в этом случае, с той разницей, что углом скольжения луча в данной точке следует считать угол между лучом и плоскостью, перпендикулярной к направлению $\text{grad } S$ в этой точке.

§ 58. Проводимость и импеданс при синусоидальном распределении давления по плоскости. Отражение от поверхности с заданной проводимостью. Учет неидеальности среды

Отражение под углом произвольной плоской волны от линейного однородного плоского препятствия, вообще неправильное, как и при нормальном падении. Поэтому рассмотрим вначале наклонное падение гармонических волн, которые всегда отражаются правильно; отражение же негармонических волн можно будет находить методом Фурье как сумму отражений составляющих спектральных компонент.

Пусть на линейное однородное препятствие, совмещенное с плоскостью $z = 0$, падает волна

$$\exp(ik \cos \theta \cdot x + ik \sin \theta \cdot z).$$

Отраженную волну можно записать в виде

$$\mathcal{V} \exp(ik \cos \theta \cdot x - ik \sin \theta \cdot z).$$

Суммарные давление и нормальная компонента скорости частиц на границе равны соответственно

$$(1 + \mathcal{V}) \exp(ik \cos \theta \cdot x) \quad \text{и} \quad \frac{\sin \theta}{\rho c} (1 - \mathcal{V}) \exp(ik \cos \theta \cdot x).$$

Отношение нормальной скорости границы препятствия к давлению на границе

$$Y = \frac{\sin \theta}{\rho c} \frac{1 - \mathcal{V}}{1 + \mathcal{V}} \quad (58.1)$$

не зависит ни от времени, ни от координат точки на препятствии. Ясно также, что оно не зависит от вида среды, из которой падает

волна, и вообще от того, имеется ли среда. Действительно, величина Y показывает только, какую скорость получают точки препятствия при распределении вдоль его поверхности бегущей синусоидальной волны давлений. Нормальная скорость препятствия также оказывается распределенной вдоль поверхности в виде бегущей синусоидальной волны с тем же волновым числом $k \cos \theta$. Введенная величина Y может зависеть только от частоты и от волнового числа бегущей по поверхности волны давлений. Будем называть Y *входной проводимостью препятствия*, обобщая тем самым введенное в § 45 понятие проводимости при синфазном возбуждении поверхности (нормальное падение волны) на случай синусоидального возбуждения (падение волны под произвольным углом скольжения). Так как для данной среды при данной частоте волновое число $k \cos \theta$ следа на поверхности однозначно связано с углом скольжения падающей волны, то говорят, что проводимость зависит, помимо частоты, еще и от угла скольжения падающей волны: $Y = Y(\omega, \theta)$. Из (58.1) найдем

$$\mathcal{Y} = \frac{(\sin \theta / \rho c) - Y}{(\sin \theta / \rho c) + Y}. \quad (58.2)$$

Коэффициент отражения зависит от угла скольжения падающей волны не только через явно входящий синус, но и неявно, через посредство Y .

Как и в случае нормального падения, будем характеризовать поверхность также и (входным) импедансом Z — величиной, обратной проводимости:

$$Z = 1/Y.$$

Входной импеданс также зависит от частоты и угла скольжения падающей волны. Из (58.2) следует

$$\mathcal{Y} = \frac{Z - (\rho c / \sin \theta)}{Z + (\rho c / \sin \theta)}.$$

В дальнейшем будем на равных правах пользоваться как проводимостью, так и импедансом, в зависимости от удобства.

Как именно находить проводимость или импеданс данного препятствия — отдельный вопрос, который будем решать только для некоторых частных случаев. Но если Y или Z для данного препятствия известны, можно найти отражение от этого препятствия волны, падающей из любой среды, граничащей с препятствием.

Приведем несколько примеров, где проводимость препятствия по-разному зависит от частоты и от угла скольжения падающей волны.

Входная проводимость границы раздела двух сред зависит от угла скольжения падающей волны, но не зависит от частоты:

$$Y = \frac{\sin \theta'}{\rho' c'} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \rho c}. \quad (58.3)$$

В качестве примера препятствия с импедансом, зависящим от частоты, рассмотрим очень тонкий по сравнению с длиной волны жидкий слой, граничащий второй стороной с вакуумом. При наклонном падении давление будет приходиться на различные участки слоя в разных фазах. В пределах участков, малых по сравнению с длиной волны (но больших по сравнению с толщиной слоя), можно считать, что на весь участок действует синфазно равномерно распределенная сила, как если бы на этот участок гармоническая волна падала нормально. Следовательно, и ускорение данного участка будет, как и при нормальном падении, равно отношению давления к поверхностной плотности слоя. Поэтому, как и для нормального падения, входной импеданс такого слоя будет равен $-i\omega\mu$, где μ — поверхностная плотность слоя. Колебания частиц будут происходить в разных фазах вдоль слоя, соответственно фазе следа падающей волны на слое. Мы видим, что входной импеданс зависит в этом случае от частоты, но не от угла скольжения. Независимость от угла скольжения связана с тем, что каждый малый участок слоя движется независимо от других. Если слой не жидкий, а, например, тонкая упругая пластина, то это уже не будет верно: ускорение какого-либо элемента определится не только давлением прилегающего участка среды, но и воздействием соседних участков самой пластины, в данном случае действием перерезывающих сил, возникающих при изгибе. Поэтому входной импеданс твердой пластинки зависит и от частоты, и от угла скольжения падающей волны.

Если, как в примере с жидким слоем, соседние участки препятствия не взаимодействуют, то входной импеданс (или проводимость) не зависит от угла скольжения падающей плоской волны, и то обстоятельство, что фаза движения меняется вдоль границы, роли не играет. В этих случаях для каждой данной частоты будет только одно-единственное значение входного импеданса, от угла скольжения не зависящее. Входной импеданс, не зависящий от угла, называют *нормальным импедансом* (*нормальная проводимость*). Можно показать, что для препятствия с нормальным импедансом отношение давления к нормальной скорости на его поверхности вообще не зависит от формы поля и остается тем же, например, при падении сферической волны.

Иногда входной импеданс слабо зависит от угла скольжения и этой зависимостью можно пренебречь. Таков, например, входной импеданс среды, скорость звука в которой очень мала по сравнению со скоростью звука в среде, откуда идет волна. В самом деле, тогда угол скольжения прошедшей волны остается весьма близким к 90° при любом угле скольжения падающей волны и, согласно (58.3), входной импеданс почти не зависит от θ , ввиду большой величины n ; прошедшая волна уходит во вторую среду при любом угле падения почти под одним и тем же углом. Если коэффициент преломления любой, но каким-либо способом удалось ограничить движение частиц во второй среде

каким-либо фиксированным направлением, не зависящим от угла скольжения падающей волны, то и в этом случае импеданс второй среды нормальный. Так будет, например, если поместить во вторую среду (имеющую произвольную скорость звука) «сотовую конструкцию» — гребенку параллельных абсолютно жестких перегородок, делящих среду на независимые слои (или трубочки), узкие по сравнению с длиной волны в среде. Тем самым будет принудительно задан «угол преломления» — как угол α между нормалью к границе раздела и направлением трубочек. Движение в каждой трубочке будет зависеть только от давления на ее конце. Примерно так ведут себя пористые жесткие штукатурки, встречающиеся в архитектурной акустике: воздух в порах имеет принудительное направление движения, не зависящее от угла падения волны в целом. Легко показать, что для сотовой конструкции с наклоном трубочек к нормали α и коэффициентом скважности v (отношение площади сечений трубочек к общей поверхности препятствия) входной импеданс равен $Z = \rho c / (\epsilon \cos \alpha)$.

Итак, для нахождения отражения гармонической плоской волны от плоского препятствия достаточно знать его проводимость или входной импеданс. Если падает плоская волна произвольной формы, то можно поступить так же, как и при нахождении отражения при падении на границу двух сред под закритическим углом (см. § 56). Вообще проводимость зависит от частоты: $Y = Y(\omega)$, так что каждая компонента разложения Фурье отразится со своим коэффициентом отражения. Кроме того, для отрицательных частот значения входной проводимости надо брать сопряженными соответственным значениям для положительных частот. Так, если падающая волна может быть представлена в виде

$$p(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\xi\omega} d\omega,$$

то отраженную волну можно написать в виде интеграла

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\eta) = & \int_0^{\infty} \frac{(\sin \theta / \rho c) - Y(\omega)}{(\sin \theta / \rho c) + Y(\omega)} g(\omega) e^{-i\eta\omega} d\omega + \\ & + \int_{-\infty}^0 \frac{(\sin \theta / \rho c) - Y^*(\omega)}{(\sin \theta / \rho c) + Y^*(\omega)} g(\omega) e^{-i\eta\omega} d\omega. \end{aligned}$$

При наклонном падении волны, так же как и при нормальном, идеальные границы можно рассматривать как предельные случаи при стремлении проводимости или импеданса границы соответственно к нулю или к бесконечности. Абсолютно мягкая граница соответствует бесконечной проводимости и нулевому импедансу, а абсолютно жесткая — нулевой проводимости и бесконечному импедансу. Можно рассматривать эти случаи и как гра-

ницы со средой, характеристики которой стремятся к некоторым предельным значениям. Так, абсолютно мягкая граница получится, если стремиться к нулю плотность второй среды либо скорость звука в ней (устраивая сжимаемость к бесконечности), что соответствует предельным переходам $m \rightarrow 0$ либо $n \rightarrow \infty$. Для получения абсолютно жесткой границы можно стремиться плотность второй среды к бесконечности: $m \rightarrow \infty$. Стремление же скорости звука во второй среде к бесконечности ($n \rightarrow 0$) не приведет при наклонном падении (в отличие от нормального падения) к имитации абсолютно жесткой стенки, потому что при $n = 0$ любой угол скольжения, кроме 90° , закритический и отражение неправильное (а во второй среде возникают неоднородные волны).

Обратим внимание на любопытный парадокс, связанный с падением волны под углом скольжения 0° («скользящее падение»). При абсолютно жесткой стенке коэффициент отражения от нее равен $+1$ при любом θ , даже при $\theta \rightarrow 0$. Но, с другой стороны, при любом конечном значении проводимости границы коэффициент отражения равен -1 при $\theta = 0$ и остается равным нулю даже при стремлении проводимости границы к нулю. В первом случае поле в первой среде равно удвоенному падающему полю; во втором случае оно равно нулю.

Разрешение парадокса — в том, что в двух случаях рассматривают *разный порядок предельных переходов*: стремление угла скольжения к 0° и стремление проводимости границы к нулю. Если раньше перейти к пределу по проводимости, оставаясь при конечном угле скольжения, и лишь потом стремиться угол к нулю, то получим первый случай. Если перейти к пределу $\theta = 0$, а затем стремиться проводимость к нулю, получим второй случай. Если бы мы стремились к нулю одновременно и угол скольжения, и проводимость границы, то могли бы получить любое значение коэффициента отражения между -1 и $+1$, в зависимости от того, к чему стремилась бы величина $\sin \theta/Y$.

Но интереснее всего то, что для реальных сред парадокс делается беспредметным: *акустически* абсолютно жесткая стенка не осуществима, как мы сейчас покажем, даже при помощи действительно абсолютно неподвижной границы среды. Мы увидим, что при $\theta \rightarrow 0$ коэффициент отражения плоской волны от такой границы в реальной среде всегда стремится к -1 , а не к $+1$.

Дело в том, что в реальных средах, в отличие от идеальной жидкости, теплопроводность и вязкость — конечные величины. Поэтому стенку нельзя считать адиабатической границей для среды: граничным условием явится равенство температур среды и стенки, что требует, в отличие от идеальной среды, выравнивания температур между средой и стенкой. Конечная же вязкость приводит к прилипанию частиц к границе; в результате на границе должна обращаться в нуль не только нормальная, но, в отличие от идеальной среды, и касательная компонента скорости частиц. Мы покажем, что такое действие теплопроводности и вязкости

эквивалентно малой, но конечной проводимости границы в идеальной среде, а это приводит к коэффициенту отражения $\mathcal{V} = -1$ при достаточно малых углах скольжения.

Выясним в отдельности действие либо только теплопроводности, либо только вязкости. Начнем с действия теплопроводности. Для простоты расчета примем, что температура стенки $z = 0$ не меняется (бесконечна либо плотность, либо теплопроводность, либо теплоемкость стенки; при отражении звука в газе от твердой стенки или от поверхности жидкости это условие будет выполнено с высокой степенью точности).

Если бы стенка была адиабатична, то изменения температуры среды вблизи нее равнялись бы, согласно (14.4),

$$T_{\text{ад}} = \frac{\gamma - 1}{\alpha} \beta_{\text{ад}} p_{(z=0)}.$$

В силу теплопроводности стенки изменение температуры на границе должно упасть до нуля. Действие стенки в этом отношении равносильно периодическому изменению температуры на границе с той же амплитудой, что и $T_{\text{ад}}$, но противоположного знака. Такое изменение вызовет в среде температурную волну (см. § 19), быстро спадающую при удалении от стенки, и оба изменения температуры — адиабатическое изменение вследствие сжатия среды и температурная волна, вызванная теплопроводностью стенки, — в сумме удовлетворят граничному условию постоянства температуры на стенке. Так как длина температурной волны очень мала по сравнению с длиной звуковой волны, то можно считать, что распределение температур «локально-равномерно» на участках, больших по сравнению с длиной температурной волны, но еще малых по сравнению с длиной звуковой волны. Тогда температурную волну можно записать, в согласии с (25.8), в виде

$$T' = -\frac{\gamma - 1}{\alpha} \beta_{\text{ад}} p_{(z=0)} \exp(-i\xi_{\chi} z + \xi_{\chi} z).$$

Распределение температур в реальной среде вблизи теплопроводящей стенки отличается на величину T' от распределения при адиабатической границе. В то же время выравниванием температур на расстоянии порядка звуковой волны или изменением давления и адиабатического нагревания при удалении от стенки на расстояния многих глубин прогревания можно пренебрегать.

Но изменение температуры соответствует изменению сжатия среды при том же давлении. В соответствии с уравнением состояния (14.3) добавочное сжатие равно

$$s' = -\alpha T' = (\gamma - 1) \beta_{\text{ад}} p_{(z=0)} \exp(-i\xi_{\chi} z + \xi_{\chi} z).$$

Интегрируя по z в пределах от $-\infty$ до 0 (вследствие быстрого спадания температурной волны фактически интегрирование выполняется в тонком пристеночном слое в несколько глубин про-

гревания), получим суммарное изменение объема пристеночного слоя в расчете на единицу площади границы:

$$u = \int_{-\infty}^0 s' dz = \frac{(1+i)(\gamma-1)\beta_{ад} p_{(z=0)}}{2\xi_x} \quad (58.4)$$

Это изменение сжатия пристеночного слоя при теплообмене эквивалентно для падающей волны смещению границы по нормали на ту же величину u . Значит, теплообмен у границы эквивалентен движению адиабатической границы с нормальной скоростью $v_z = -i\omega u$. Подставляя $\beta_{ад} = 1/\rho c^2$, получим из (58.4)

$$v_z = \frac{(1-i)(\gamma-1)}{\rho c^2} \frac{\omega p_{(z=0)}}{2\xi_x}$$

Отсюда заключаем, что в реальной среде теплообмен акустически эквивалентен замене неподвижной стенки в идеальной нетеплопроводной среде границы с проводимостью

$$Y = \frac{v_z}{p_{(z=0)}} = \frac{(1-i)(\gamma-1)\omega}{2\rho c^2 \xi_x} \quad (58.5)$$

Согласно (58.2) коэффициент отражения равен в этом случае

$$\mathcal{V} = \frac{\sin \theta - (1-i)(\gamma-1)k/2\xi_x}{\sin \theta + (1-i)(\gamma-1)k/2\xi_x} \quad (58.6)$$

Поскольку, как мы видели в § 19, отношение k/ξ_x всегда мало по сравнению с единицей, при больших углах скольжения падающей волны коэффициент отражения близок к $+1$: стенка ведет себя почти в точности как акустически абсолютно жесткая. Но при $\theta \rightarrow 0$ коэффициент отражения стремится к -1 , несмотря на то, что стенка абсолютно неподвижна. Переход от $\mathcal{V} = +1$ к $\mathcal{V} = -1$ совершается в наиболее интересной области углов скольжения падающей волны, близких к величине k/ξ_x . В этой области, полагая приближенно $\sin \theta \approx \theta$, найдем, что минимум модуля коэффициента отражения достигается при характерном угле скольжения

$$\theta_x = (\gamma-1) \frac{k}{\sqrt{2}\xi_x} \quad (58.7)$$

При этом угле $\mathcal{V} = \frac{\sqrt{2}-1+i}{\sqrt{2}+1-i}$ и минимальный модуль равен 0,415. Таким образом, получающийся коэффициент отражения по энергии равен всего 0,172. Следовательно, вблизи стенки поглощается 82,8% потока мощности волны, бегущего в направлении к границе. Это, впрочем, не значит, что поглощение энергии, вызванное теплопередачей, больше при этом угле, чем при более крутых углах падения волны: эта энергия мало зависит от угла, пока угол больше найденного критического угла, но подводимая

к стенке энергия уменьшается при уменьшении θ . При углах, меньших θ_x , давление у стенки падает, так как коэффициент отражения приближается к -1 и адиабатическое нагревание у стенки и потери энергии быстро убывают.

Мы видим, что минимальное значение коэффициента отражения не зависит ни от частоты, ни от термодинамических свойств среды; но критический угол от этих характеристик зависит. Действительно, из (58.7) следует (см. § 19), что этот угол равен

$$\theta_x = \sqrt{\omega} \frac{\gamma - 1}{c} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho C_p}}.$$

Аналогичным способом можно найти и действие вязкости. При отсутствии прилипания касательная скорость среды на границе равнялась бы

$$v = (\cos \theta / \rho c) p_{(z=0)}.$$

Прилипание остановит среду у границы. Действие стенки в этом отношении равносильно сообщению среде на самой границе добавочной касательной скорости той же амплитуды, но противоположного знака. Это создаст в среде вблизи границы сдвиговую волну вида

$$v' = -(\cos \theta / \rho c) p_{(z=0)} \exp(-i\xi_v z + \xi_v z).$$

Это дает дополнительный по сравнению с отсутствием прилипания поток среды через поверхность, перпендикулярную к границе, равный

$$U = \int_{-\infty}^0 v' dz = -\frac{\cos \theta}{\rho c} p_{(z=0)} \frac{1}{(1-i)\xi_v}.$$

Выделим мысленно в среде у поверхности границы прямой цилиндр, опирающийся на единичную площадку. Через боковую стенку такого цилиндра вытекает поток, равный

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\cos \theta}{\rho c} i k \cos \theta \cdot p_{(z=0)} \frac{1}{(1-i)\xi_v} = (1-i) \frac{\omega}{\rho c^2} \cos^2 \theta \cdot p_{(z=0)} \frac{1}{2\xi_v}.$$

Это изменение количества среды в пристеночном объеме при наличии вязкости равносильно, как легко видеть, смещению по нормали границы в отсутствие вязкости, происходящему с этой же скоростью $v_z = \partial U / \partial x$. Значит, прилипание вязкой границы к стенке эквивалентно движению границы по нормали со скоростью v_z в среде без вязкости, т. е. наличию у границы проводимости

$$Y = \frac{v_z}{p_{(z=0)}} = (1-i) \frac{\cos^2 \theta}{\rho c^2} \cdot \frac{\omega}{2\xi_v}. \quad (58.8)$$

Сравнивая (58.8) с (58.5), заключаем, что вязкость в среде и прилипание среды к границе также приводят к появлению эффективной проводимости, как и теплопроводность вблизи теплопроводящей стенки, хотя, конечно, физические картины влияния вязкости и влияния теплопроводности различны. В частности, при скользящих углах падения волны коэффициент отражения стремится к -1 ; при характерном угле, определяемом (приближенно) формулой

$$\theta_v = k / \sqrt{2\xi_v},$$

модуль коэффициента отражения минимален и равен, как и в случае теплопроводности, $0,415$. При $\theta \rightarrow 0$ коэффициент отражения стремится к -1 .

§ 59. Поверхностная волна вблизи плоской границы, характеризующейся нормальной проводимостью

Мы видели, что все случаи отражения плоских волн любой формы от плоского однородного препятствия сводятся к задаче об отражении плоских гармонических волн. Эта последняя задача решается, как мы видели, если известна частотная зависимость проводимости или импеданса препятствия. Для гармонических волн удобно пользоваться комплексными представлениями как самих падающих и отраженных волн, так и углов скольжения. Мнимый угол скольжения соответствует неоднородной волне. Проводимость препятствия в общем случае — комплексная. Особый интерес представляет нахождение для препятствия с заданной входной проводимостью такой гармонической волны, которая одна может удовлетворить граничному условию на поверхности препятствия. Такой случай соответствует обращению коэффициента отражения от препятствия в нуль или в бесконечность.

С подобными случаями мы уже встречались. Так, в § 30 рассматривалось нормальное падение на «поглотитель» — препятствие с вещественным входным импедансом, равным волновому сопротивлению среды; коэффициент отражения при этом обращается в нуль. Аналогично, отсутствует отражение наклонно падающей волны, если входной импеданс препятствия — чисто активный и равен волновому сопротивлению среды, разделенному на синус угла скольжения. Отражение отсутствует и при падении волны на границу двух сред при угле скольжения $\theta = \operatorname{arctg} \sqrt{(n^2 - 1)/(m^2 - n^2)}$. В обоих случаях имеется поток энергии, идущий из среды в препятствие, которое можно поэтому рассматривать как поглотитель или, мысленно отбросив препятствие, заменить его той же средой, заполняющей все второе полупространство, в которое падающая волна войдет без отражения.

Выясним теперь условие отсутствия отражения от препятствия с любой нормальной проводимостью Y . Из (58.2) следует, что это

условие имеет вид

$$\sin \theta = \rho c Y = \eta, \quad (59.1)$$

где через η обозначена относительная проводимость препятствия.

Вся теория волны, удовлетворяющей в одиночку данному граничному условию, заключена в этом уравнении. Проанализируем его для разных свойств поверхности препятствия.

Пусть проводимость — вещественное положительное число. Могут представиться два случая: $\eta < 1$ и $\eta > 1$, что соответствует

неравенствам $Z > \rho c$ и $Z < \rho c$. В первом случае искомый угол найдется по формуле $\theta = \arcsin \eta$. Это значит, что плоская волна вида $\exp(ik\sqrt{1-\eta^2}x + ik\eta z)$, падая на заданную поверхность, не отразится от нее и будет целиком поглощена.

Во втором случае $\theta = (\pi/2) - i \operatorname{argch} \eta$. Это значит, что от данного препятствия не отразится неоднородная волна вида $\exp(-k\sqrt{\eta^2-1}x + ik\eta z)$. Это — волна, бегущая нормально к границе и убывающая экспоненциально вдоль границы. Такому решению, однако, можно придать физический смысл только в том случае, если по условиям задачи область, содержащая $x = -\infty$, исключена.

Перейдем теперь к общему случаю, когда проводимость комплексна, и положим

$$\eta = r + i\zeta. \quad (59.2)$$

Угол скольжения искомой падающей волны тоже будет в этом случае комплексным:

$$\theta = \alpha + i\beta.$$

Из (59.1) найдем

$$\sin \theta = \sin \alpha \operatorname{ch} \beta + i \cos \alpha \operatorname{sh} \beta = r + i\zeta, \quad (59.3)$$

откуда

$$\sin \alpha \operatorname{ch} \beta = r, \quad \cos \alpha \operatorname{sh} \beta = \zeta.$$

Исключая из этих выражений $\sin \alpha$ и $\operatorname{sh} \beta$, получим систему

$$\sin^2 \alpha + \operatorname{ch}^2 \beta = 1 + r^2 + \zeta^2, \quad \sin^2 \alpha \operatorname{ch}^2 \beta = r^2.$$

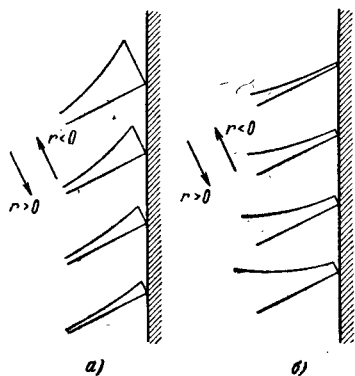


Рис. 59.1. Неоднородная волна вблизи плоскости с комплексной проводимостью. Стрелки показывают направление бега волны для поглощающей плоскости ($r > 0$) и для генерирующей плоскости ($r < 0$). Кривые показывают распределение амплитуд вдоль фронтов, изображенных прямыми линиями. а) Плоскость с проводимостью упругого типа ($\zeta < 0$); б) плоскость с проводимостью массового типа ($\zeta > 0$).

Значит, величины $\sin^2 \alpha$ и $\operatorname{ch}^2 \beta$ являются решениями уравнения

$$x^2 - (1 + r^2 + \zeta^2)x + r^2 = 0.$$

Корни этого уравнения даются формулой

$$x = \frac{1}{2}(1 + r^2 + \zeta^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + r^2 + \zeta^2)^2 - 4r^2},$$

из которой видно, что оба решения вещественные положительные. Легко показать, что корень, отвечающий верхнему знаку, всегда больше единицы, а корень, отвечающий нижнему знаку, — меньше единицы. Полагая $\operatorname{ch}^2 \beta$ равным первому корню, а $\sin^2 \alpha$ — второму корню, найдем после простых переделок следующие вещественные значения для $\operatorname{ch} \beta$ и $\sin \alpha$:

$$\operatorname{ch} \beta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 + r^2) + \zeta^2} + \sqrt{(1 - r^2) + \zeta^2} \right],$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(1 + r^2) + \zeta^2} - \sqrt{(1 - r^2) + \zeta^2} \right].$$

Согласно (59.3) искомая волна имеет вид

$$p = \exp(ik \cos \theta \cdot x + ikrz - k\zeta z).$$

Для $r > 0$, т. е. для поверхности, поглощающей энергию, $\alpha > 0$: след волны на нормали к границе бежит по направлению к границе. При $r < 0$ $\alpha < 0$ и волна бежит от границы: поверхность генерирует звуковую энергию. Знак величины ζ определяет характер реактивной части проводимости границы: знак плюс означает массовую проводимость, знак минус — упругую.

В первом случае амплитуда нарастает при удалении от поверхности, во втором — убывает (рис. 59.1). При чисто реактивной проводимости препятствия $\alpha = 0$ и волна бежит вдоль поверхности («поверхностная волна», рис. 59.2). В этом случае уравнение волны имеет вид

$$p = \exp(ik\sqrt{1 + \zeta^2}x - k\zeta z).$$

Волна оказывается замедленной по сравнению с плоской волной, как и во всех остальных случаях реактивного импеданса. Очевидно, в неограниченном полупространстве поверхностная волна, бегущая

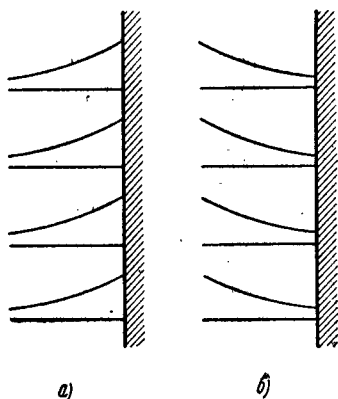


Рис. 59.2. Неоднородная волна, бегущая вдоль плоскости с чисто реактивной проводимостью ($r = 0$). а) Проводимость упругого типа, б) проводимость массового типа.

вдоль границы, возможна только при упругой проводимости стенки. В слое возможно существование такой волны и вблизи стенки с массовым импедансом, при условии, что вторая стенка имеет упругий входной импеданс того же модуля.

В заключение заметим, что условие (59.1) обращения в нуль коэффициента отражения совпадает с условием обращения коэффициента отражения в бесконечность, если за угол скольжения падающей волны взят угол $\theta' = -\theta$. Это равносильно замене в вышеприведенных формулах угла α на угол $-\alpha$ при сохранении угла β неизменным. Разница в этих двух подходах к задаче — чисто формальная. Ведь имеется только одна волна, и безразлично, считать ли, что падающая волна конечна, а отраженная равна нулю или что падающая волна равна нулю, но отраженная конечна, — нужно только соответственно переименовывать волны и изменять углы.

§ 60. Применение теории длинных линий к задачам о наклонном падении волн

Сравним некоторые выражения, относящиеся к отражению и прохождению плоских волн при нормальном и при наклонном падении на границу двух сред и на препятствие, характеризуемое импедансом:

	Нормальное падение	Наклонное падение
Падающая волна	$p(t - Sz)$	$p(t - S \cos \theta \cdot x - S \sin \theta \cdot z)$
Отраженная волна	$\mathcal{V}p(t + Sz)$	$\mathcal{V}p(t - S \cos \theta \cdot x + S \sin \theta \cdot z)$
Прошедшая волна	$\mathcal{W}p(t - S'z)$	$\mathcal{W}p(t - S \cos \theta \cdot x - S' \sin \theta' \cdot z)$
Граничные условия на границе двух сред	$1 + \mathcal{V} = \mathcal{W}$ $\frac{S}{\rho}(1 - \mathcal{V}) = \frac{S'}{\rho'}\mathcal{W}$	$1 + \mathcal{V} = \mathcal{W}$ $\frac{S \sin \theta}{\rho}(1 - \mathcal{V}) = \frac{S' \sin \theta'}{\rho'}\mathcal{W}$
Формулы Френеля	$\mathcal{V} = \frac{(S/\rho) - (S'/\rho')}{(S/\rho) + (S'/\rho')}$ $\mathcal{W} = \frac{2S/\rho}{(S/\rho) + (S'/\rho')}$	$\mathcal{V} = \frac{(S \sin \theta/\rho) - (S' \sin \theta'/\rho')}{(S \sin \theta/\rho) + (S' \sin \theta'/\rho')}$ $\mathcal{W} = \frac{2S \sin \theta/\rho}{(S \sin \theta/\rho) + (S' \sin \theta'/\rho')}$
Коэффициент отражения от импедансной поверхности	$\mathcal{V} = \frac{Z - \rho/S}{Z + \rho/S}$	$\mathcal{V} = \frac{Z - \rho/S \sin \theta}{Z + \rho/S \sin \theta}$

Различие между столбцами можно сформулировать так: в то время как в левом столбце имеется общая зависимость от t для всех трех волн, т. е. волновой процесс происходит синфазно по всей плоскости, в правом столбце имеется общая зависимость от комбинации $t - S \cos \theta \cdot x$, т. е. вся картина бежит по оси x (с медленностью $S \cos \theta$). Зависимость от координаты z различается только тем, что вместо медленностей S и S' звука в правом столбце фигурируют проекции $S \sin \theta$ и $S' \sin \theta'$ медленностей на ось z . Такая же замена медленностей на их проекции выполнена и в граничных условиях, и в формулах Френеля.

Значит, формально можно вместо задачи о наклонном падении решать задачу о нормальном падении волны на границу фиктивных сред с медленностями $\bar{S} = S \sin \theta$ и $\bar{S}' = S' \sin \theta'$ (а для гармонических волн — с волновыми числами $\bar{k} = k \sin \theta$ и $\bar{k}' = k' \sin \theta'$) и с теми же плотностями, что у настоящих сред; при этом получатся правильные значения коэффициентов отражения и прохождения. Если теперь приписать полученной картине движение вдоль оси x с медленностью $S \cos \theta$, то получится полная картина отражения и прохождения при наклонном падении. Тем самым решение задачи о наклонном падении свелось к решению задачи о нормальном падении. Фиктивные медленности будут зависеть от угла скольжения падающей волны. Волновые сопротивления фиктивных сред станут равны $\rho c / \sin \theta$ и $\rho' c' / \sin \theta'$. Коэффициент преломления нужно брать равным

$$\bar{n} = \frac{\bar{S}'}{\bar{S}} = \frac{n \sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}{\sin \theta}.$$

Отношение m плотностей останется неизменным. Хотя вводимые таким образом среды фиктивны, соответственные волновые сопротивления вполне реальны: величины $\rho c / \sin \theta$ и $\rho' c' / \sin \theta'$ действительно равны отношениям давления к нормальной скорости на границе для падающей и для прошедшей волн. Поэтому, вводя обозначения

$$Z = \rho c / \sin \theta, \quad Z' = \rho' c' / \sin \theta', \quad \xi = Z' / Z,$$

получим формулы Френеля в том же виде, что и для нормального падения:

$$\mathcal{V} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad \mathcal{W} = \frac{2\xi}{\xi + 1}.$$

Аналогично можно решать и другие задачи о наклонном падении. Например, отражение от препятствия в виде сосредоточенной массы найдем по формулам для нормального падения, заменяя медленность звука в среде на ее проекцию $S \sin \theta$. Коэффициент отражения окажется, в соответствии с формулой (46.4), равным

$$\mathcal{V} = \frac{-i\omega\mu - \rho c / \sin \theta}{-i\omega\mu + \rho c / \sin \theta}.$$

По такому же рецепту можно решать и задачу о прохождении звука через слой, через последовательность слоев и т. п. Все задачи о падении плоской волны на любую «многослойную» среду можно решать при помощи уравнений, полученных для нормального падения, выполняя соответственные замены медленностей звука в каждом слое на соответственную проекцию медленности. Этим способом вся теория длинных линий переносится на случай наклонного падения.

Есть все же одна особенность наклонного падения, не имеющая аналогии в теории длинных линий: это падение на границу двух сред под закритическим углом падения; отражение при этом перестает быть правильным. Поэтому для волн произвольной формы этот случай нужно исключить. Но для гармонических волн по-прежнему можно пользоваться формулами теории длинных линий, имея только в виду, что для закритических углов придется пользоваться комплексными углами преломления или, что то же, вводить мнимую компоненту медленности по оси z или мнимую компоненту волнового вектора. Такой случай в одномерной задаче (при нормальном падении) встретиться не может.

Применим сказанное для нахождения отражения и прохождения через слой гармонической плоской волны при наклонном падении. Для этого в формулах (49.15) для нормального падения заменим n на $\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta} / \sin \theta$ и k на $k \sin \theta$:

$$\mathcal{V} = \frac{i \operatorname{tg}(kh \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}) \left(\frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}{m \sin \theta} - \frac{m \sin \theta}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}} \right)}{2 - i \operatorname{tg}(kh \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}) \left(\frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}{m \sin \theta} + \frac{m \sin \theta}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}} \right)},$$

$$\mathcal{W} = \frac{2/\cos(kh \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta})}{2 - i \operatorname{tg}(kh \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}) \left(\frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}{m \sin \theta} + \frac{m \sin \theta}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}} \right)}.$$

Отсюда получается, в частности, условие полного прохождения звука через слой:

$$kh \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta} = l\pi.$$

Это условие равносильно следующему:

$$k_0 h \sin \theta_0 = l\pi,$$

где k_0 — волновое число в веществе слоя, а θ_0 — угол скольжения прошедшей волны в слое. Это значит, что на толщине слоя укладывается целое число полуволн следа волны на оси z в слое. Таким образом, пластина может служить монохроматором для случая наклонного падения, причем одна и та же пластина будет пропускать при разных углах падения волны разной частоты. С другой стороны (и этому нет аналогии для нормального падения волны на слой), пластина может служить монохроматором и для волн

одной и той же частоты, но идущих с разными углами падения: полностью будет пропускаться только одно направление падения. Как и для нормального падения, монохроматизация будет тем более острой, чем больше различие свойств среды и слоя. В примере, приведенном в § 49, отклонение направления падения волны от нормального на $10'$ уже приведет к отражению половины энергии, а на $30'$ — к отражению 99% падающей энергии. При косом падении на пропускающий слой избирательность будет еще гораздо больше.

При закритических углах скольжения полного прохождения не произойдет. В самом деле, в этом случае аргумент тангенса станет мнимым, а тангенс от мнимого аргумента (гиперболический тангенс) никогда в нуль не обращается (кроме неинтересного случая нулевой толщины слоя). Выражения для коэффициентов отражения и прохождения выразятся при закритических углах скольжения формулами

$$\mathcal{V} = \frac{-i \operatorname{th}(kh \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}) \left(\frac{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta} + \frac{m \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}} \right)}{2 + i \operatorname{th}(kh \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}) \left(\frac{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta} - \frac{m \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}} \right)},$$

$$\mathcal{W} = \frac{2/\operatorname{ch}(kh \sqrt{\cos^2 \theta - n^2})}{2 + i \operatorname{th}(kh \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}) \left(\frac{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta} - \frac{m \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}} \right)}.$$

Ни \mathcal{V} , ни \mathcal{W} никогда не обращаются в нуль. Коэффициент прохождения убывает с увеличением толщины слоя экспоненциально. Особый интерес представляет падение в точности под критическим углом. Тогда формулы принимают вид

$$\mathcal{V} = \frac{imkh \sqrt{1 - n^2}}{2 - imkh \sqrt{1 - n^2}}, \quad \mathcal{W} = \frac{2}{2 - imkh \sqrt{1 - n^2}}.$$

При увеличении толщины пластины амплитуда прошедшей волны убывает в этом случае не экспоненциально, а медленнее: при больших значениях kh коэффициент прохождения убывает как $1/kh$.

§ 61. Узкие трубы

Цилиндрическую трубу с абсолютно жесткими стенками можно рассматривать как длинную линию, поскольку вдоль такой трубы может бежать одномерная волна любого профиля. В широких трубах могут распространяться также и неоднородные волны, но если труба достаточно узкая, распространение других волн невозможно: всякое неоднородное возмущение быстро затухает вдоль трубы. Термин *узкая труба* имеет относительный смысл: в гл. VIII мы покажем, что для звука с длиной волны λ труба прямоугольного сечения со стороной L будет «узкой» при $L < \lambda/2$, а круглая труба радиуса a будет «узкой» при $a < 0,61\lambda$.

Если труба «очень» узкая, т. е. $L \ll \lambda/2$ или $a \ll 0,61\lambda$, то, как мы уже упоминали в § 52, распространение волны в ней не зависит от того, прямая ее ось или изогнутая или даже имеет изломы: во всех случаях давление и скорость частиц, оставаясь практически постоянными по всему сечению трубы, зависят только от одной координаты — расстояния, отсчитываемого вдоль оси трубы. Скорость волн, отсчитываемая вдоль оси трубы с жесткими стенками, всегда равна скорости звука в неограниченной среде *).

Если труба не узкая, то считать ее длинной линией можно, только если труба прямая и только для плоской волны, бегущей вдоль оси трубы; в такой трубе возможны, однако, и волны других типов.

В этой главе будем заниматься главным образом *стоячими волнами* в отрезках узких труб, закрытых крышками.

§ 62. Гармонические волны в узкой трубе

Хотя в данной главе мы будем изучать стоячие волны, сделаем предварительно несколько замечаний о распространении звука в *неограниченных* узких трубах. В таких трубах могут распространяться гармонические волны любой частоты. Самый общий вид

*) В случаях изломов трубы и вообще крутого изгибания трубы появляется и отраженная волна, однако при поперечнике трубы, малом по сравнению с длиной волны, амплитуда отражения очень мала.

гармонической волны данной частоты ω можно записать, например, в одном из следующих видов (множитель $e^{-i\omega t}$, как обычно, опускаем):

$$p = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (62.1)$$

$$p = A \cos kx + B \sin kx, \quad (62.2)$$

$$p = A \cos (kx - \alpha). \quad (62.3)$$

Любую из этих трех формул можно получить из любой другой соответственным подбором коэффициентов (вообще говоря, комплексных), и любая из этих формул может изображать как бегущую, так и стоячую волну, а также квазистоячую волну с любой степенью бегучести. Так, бегущую волну e^{ikx} можно получить из формулы (62.1), если положить в ней $A = 1$, $B = 0$, из формулы (62.2), если положить в ней $A = 1$, $B = i$, и из формулы (62.3), если положить в ней $A = \sec \alpha$ и устремить α к $i\infty$.

В каждое из выражений (62.1), (62.2) и (62.3) входят четыре произвольные постоянные: вещественные и мнимые части величин A и B или A и α .

Фазу комплексной амплитуды бегущей волны можно изменить как угодно, как переносом начала отсчета времени, так и переносом начала отсчета координат; для бегущей волны таким подбором начала отсчета всегда можно получить, например, вещественную амплитуду. Для стоячей волны переносить начало отсчета координат нельзя, не меняя формы записи (например, при смещении начала координат на четверть волны функция $\cos kx$ переходит в $\sin kx$): начало отсчета определено с точностью до целого кратного длины волны.

Обычно запись (62.1) (при $B = 0$ или $A = 0$) применяют для бегущих волн, а запись (62.2) и (62.3) — для стоячих волн, хотя, как указано выше, можно, пользуясь комплексными постоянными, переходить от одной формулы к другой. Но при выборе вещественных значений амплитуд и фаз термин «стоячая волна» по отношению к записи (62.2) или (62.3) или термин «бегущая волна» по отношению к записи (62.1) имеют обычный смысл. В дальнейшем будем считать, что амплитуды и фазы вещественны.

Любую гармоническую волну в трубе можно представить в виде суперпозиции стоячей и бегущей волны. Действительно, (62.1) при любых A и B можно записать в виде

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = 2B \cos kx + (A - B)e^{ikx}.$$

В этой записи волна представлена в виде суперпозиции стоячей волны и волны, бегущей в положительном направлении. Это не значит, однако, что энергия в волне также переносится в положительном направлении. В самом деле, ту же волну можно представить как суперпозицию стоячей волны и волны, бегущей в отрицательном направлении:

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = 2A \cos kx + (B - A)e^{-ikx}.$$

Таким образом, разбиение данной волны на стоячую и бегущую неоднозначно. Парадокса с направлением переноса энергии нет, так как потоки энергии в данном случае не аддитивны: мы видели в § 39, что аддитивность имеет место только для бегущих волн. Перенос энергии (в той степени, в которой о нем можно говорить для гармонических волн) будет происходить в ту сторону, для которой модуль амплитуды A или B больше.

§ 63. Ограниченные трубы. Собственные колебания в ограниченных трубах

В узкой неограниченной трубе, как и в неограниченной среде, могут существовать свободные гармонические волны любой частоты, как бегущие, так и стоячие. Иначе обстоит дело с волнами в конечном отрезке трубы, закрытом крышками, через которые звук не проходит. В таком отрезке трубы возможны только стоячие волны, и притом только определенных дискретных частот. Эти стоячие волны называют *собственными колебаниями трубы*. Основная задача о звуке в отрезке трубы заключается в нахождении этих дискретных частот собственных колебаний.

Начнем с простейшего случая труб, закрытых абсолютно жесткими или абсолютно мягкими крышками. Конечно, осуществление таких крышек возможно только с некоторой степенью точности: практически крышка может быть только *достаточно* жесткой или *достаточно* мягкой, в том смысле, что дальнейшее увеличение степени жесткости или податливости крышки уже не меняет заметно искомые частоты стоячих волн. Для труб, заполненных газом, осуществление достаточно жестких крышек труда не представляет. Для жидкости крышка из твердого материала будет достаточно жесткой только при достаточной ее толщине; заметим, что при заполнении трубы жидкостью возникает также и вопрос о достаточной степени жесткости боковых стенок (см. ниже, § 68).

Абсолютно мягкой «крышкой» явится, конечно, граница, с вакуумом. Но такая граница неосуществима для газов. Почти абсолютно мягкая «крышка» узкой трубы осуществляется гораздо проще — открыванием конца трубы: практически давление (звуковое, а не атмосферное!) у открытого конца трубы равно нулю (расталкивать частицы среды в стороны в неограниченной среде легче, чем продвигать в одном направлении столб среды длиной порядка длины волны). Все же давление у открытого конца не в точности равно нулю. Мы еще вернемся к этому вопросу при расчете излучения звука открытым концом трубы.

Итак, обратимся к расчету частот гармонических колебаний, возможных в ограниченной трубе. Начнем со случая идеальных крышек. На абсолютно жестких крышках скорости частиц обращаются в нуль. Поэтому на крышках должны оказаться пучности давления, и, следовательно, на длине трубы уложится целое число полуволн. Отсюда следует, что для волновых чисел при

собственных колебаниях должно удовлетворяться уравнение

$$kL = l\pi, \quad (63.1)$$

где L — длина трубы и $l = 1, 2, 3, \dots$. Каждому значению l соответствует значение $k_l = l\pi/L$ волнового числа стоячей волны, возможной в данной трубе; никаких других гармонических волн в трубе быть не может. Этот набор волн образует *полную систему* гармонических волн в трубе с жесткими крышками. Давление в волне номера l распределено вдоль трубы по закону

$$p_l = \cos \frac{l\pi x}{L}. \quad (63.2)$$

Распределение скоростей частиц дается формулой

$$v_l = -\frac{1}{i\rho c} \sin \frac{l\pi x}{L}. \quad (63.3)$$

На рис. 63.1 показаны распределения амплитуд давления и скорости для трех первых номеров колебаний.

Частоты собственных колебаний составляют арифметическую прогрессию:

$$\omega_l = \frac{l\pi c}{L}. \quad (63.4)$$

Собственное колебание наименьшей частоты называют *основным тоном*, колебания высших частот — *обертнами*. В трубе с жесткими крышками частоты обертонов относятся к частоте основного тона как целые числа; такие обертоны называют *гармоническими*.

Отметим весьма важное свойство так называемой *ортогональности* собственных колебаний:

$$\frac{2}{L} \int_0^L p_{l_1} p_{l_2} dx = \begin{cases} 1 & \text{при } l_1 = l_2, \\ 0 & \text{при } l_1 \neq l_2. \end{cases}$$

Из свойств ортогональности и полноты набора собственных колебаний в трубе следует, что любое свободное колебание в трубе можно однозначно представить как суперпозицию собственных колебаний, взятых с теми или иными амплитудами (см. § 66).

Аналогично найдем свободные колебания и в трубе с абсолютно мягкими крышками: на крышках должны лежать узлы давления, а следовательно, вдоль трубы снова должно укладываться целое число полуволн. Соответствующее условие снова имеет вид (63.1). Распределения давлений и скоростей в трубе с открытыми концами имеют вид

$$p_l = \sin \frac{l\pi x}{L}, \quad v_l = \frac{1}{i\rho c} \cos \frac{l\pi x}{L}. \quad (63.5)$$

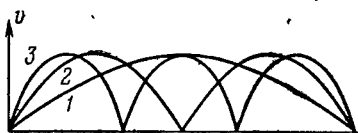
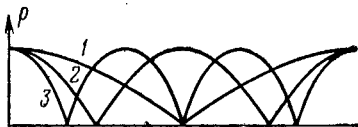


Рис. 63.1. Распределение амплитуд давлений и скоростей частиц в первых трех собственных колебаниях в трубе с обоими жесткими крышками.

Распределение амплитуд давлений и скоростей частиц — такое же, как распределение амплитуд скоростей и давлений соответственно в трубе с жесткими крышками. Частоты собственных колебаний оказываются такими же, как и в трубе той же длины с жесткими крышками. Обертоны открытой трубы также гармонические. Выполняется также условие ортогональности всех собственных колебаний, и они образуют полную систему функций: других гармонических колебаний в трубе быть не может.

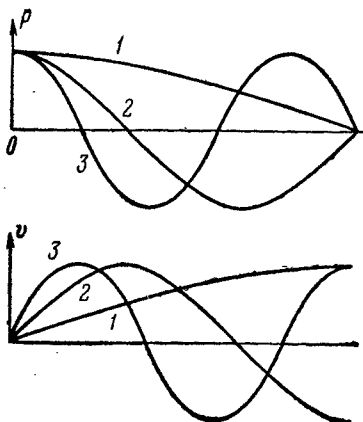


Рис. 65.2. То же, что на рис. 63.1, для трубы с одной жесткой и второй мягкой крышкой.

В трубе с одной абсолютно жесткой и другой абсолютно мягкой крышкой на первой из них должна оказаться пучность, а на второй — узел давлений. Поэтому на длине трубы должно укладываться нечетное число четвертей длин волн. Это дает следующее условие для волнового числа:

$$kL = \frac{2l-1}{2} \pi. \quad (63.6)$$

Давления и скорости последовательных волн выразятся формулами

$$p_l = \cos \frac{2l-1}{2L} \pi x, \quad (63.7)$$

$$v_l = -\frac{1}{i\rho c} \sin \frac{2l-1}{2L} \pi x.$$

Формы первых трех колебаний показаны на рис. 63.2. Частоты последовательных волн равны

$$\omega_l = \frac{2l-1}{2L} \pi c. \quad (63.8)$$

Органые трубы делают двух типов: открытые с обоих концов («открытые трубы») и открытые с одного и жестко закрытые с другого конца («закрытые трубы»). Открытый конец равносильен абсолютно мягкой крышке. Поэтому при игре на органе в «открытых» трубах возбуждается весь набор гармонических обертонов основного тона, а в «закрытых» — только нечетные обертоны. Это приводит к характерному различию тембров этих двух типов труб.

§ 64. Труба, ограниченная крышками с конечной проводимостью

Дискретный набор обертонов получается и для любых неидеальных звуконепроницаемых (т. е. полностью отражающих) крышек трубы, но, вообще, обертоны в этом случае негармонические. Охарактеризуем крышки трубы входными проводимостями. Для звуко-

непроницаемых крышек проводимости должны быть чисто мнимыми; вообще говоря, они могут зависеть от частоты. Обозначим проводимость первой крышки через Y_0 и возьмем на этой крышке начало координат. Проводимость второй крышки, имеющей координату $x = L$, обозначим через Y_L . Граничные условия для давления и скорости каждого из собственных колебаний трубы имеют вид

$$v/p = -Y_0 \text{ при } x = 0; \quad v/p = Y_L \text{ при } x = L.$$

Знак минус в первой формуле указывает на то, что направление «входа» в первую крышку противоположно положительному направлению оси x . Искомые решения можно записать в виде $p = \cos(kx - \alpha)$. Тогда

$$v = -\frac{1}{i\rho c} \sin(kx - \alpha) \quad \text{и} \quad \frac{v}{p} = -\frac{1}{i\rho c} \operatorname{tg}(kx - \alpha).$$

Подставляя в граничные условия, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = -i\rho c Y_0; \quad \operatorname{tg}(kL - \alpha) = -i\rho c Y_L.$$

Эти уравнения можно записать по другому:

$$\alpha = -\operatorname{arctg}(i\rho c Y_0), \quad kL - \alpha = -\operatorname{arctg}(i\rho c Y_L).$$

Согласно сказанному выше аргументы в правых частях равенств вещественны *). Складывая эти уравнения, найдем

$$kL = \frac{\omega L}{c} = -\operatorname{arctg}(i\rho c Y_0) - \operatorname{arctg}(i\rho c Y_L).$$

Это есть частотное уравнение колебаний в трубе с заданными проводимостями крышек.

В силу многозначности обратных тригонометрических функций удобно сделать приведение углов к первой четверти. Тогда частотное уравнение можно записать в виде

$$-\operatorname{arctg}(i\rho c Y_0) - \operatorname{arctg}(i\rho c Y_L) = kL - l\pi, \quad (64.1)$$

где оба арктангенса по модулю меньше $\pi/2$, а l принимает значения $0, 1, 2, \dots$. Каждому значению l соответствует обертона трубки. Частотное уравнение можно рассматривать и как уравнение относительно частоты ω собственных колебаний, и как уравнение относительно величины kL , которая пропорциональна этой частоте. Величина $kL/2\pi$ есть число длин волн, укладываемых на длине трубки.

К уравнению (64.1) можно прийти и по-другому исходя из представления собственных колебаний в трубе в виде суперпозиции двух плоских волн, бегущих в противоположных направлениях и переходящих друг в друга при отражениях от крышек. Получим

*) Заметим, однако, что те же уравнения, мы получили бы и при проводимостях не чисто мнимых, а имеющих и вещественную часть. Эти случаи рассмотрим в следующем параграфе.

частотное уравнение, исходя непосредственно из коэффициентов отражения крышек. Пусть коэффициенты отражения крышек при падении на них гармонической волны равны \mathcal{V}_0 и \mathcal{V}_L соответственно. Эти коэффициенты могут быть функциями частоты. Пусть в трубе, закрытой такими крышками, происходят собственные колебания частоты (пока неизвестной) ω . Поле в трубе можно написать в виде суперпозиции двух волн:

$$p = e^{ikx} + Ae^{-ikx}.$$

взаимно переходящих друг в друга при отражении от крышек. У крышки $x = 0$ падающая волна есть Ae^{-ikx} , а отраженная волна есть e^{ikx} . Следовательно, у этого конца трубы должно выполняться равенство $1 = A\mathcal{V}_0$. На втором конце трубы падает волна e^{ikx} и отражается волна Ae^{-ikx} . Следовательно, должно выполняться равенство $\mathcal{V}_L e^{ikL} = Ae^{-ikL}$. Исключая A из полученных равенств, найдем искомое частотное уравнение

$$\mathcal{V}_0 \mathcal{V}_L e^{2ikL} = 1. \quad (64.2)$$

В этом уравнении частота входит как в k , так и в коэффициенты отражения. От этого уравнения легко вернуться к частотному уравнению, содержащему проводимости. В самом деле, согласно (45.2) коэффициенты отражения выражаются через проводимости крышек Y_0 и Y_L формулами

$$\mathcal{V}_0 = \frac{1 - \rho c Y_0}{1 + \rho c Y_0}, \quad \mathcal{V}_L = \frac{1 - \rho c Y_L}{1 + \rho c Y_L}$$

или

$$\mathcal{V}_0 = |\mathcal{V}_0| \exp [2i \operatorname{arctg} (\rho c Y_0)],$$

$$\mathcal{V}_L = |\mathcal{V}_L| \exp [2i \operatorname{arctg} (\rho c Y_L)].$$

Подставляя эти выражения в (64.2) и считая $|\mathcal{V}_0| = |\mathcal{V}_L| = 1$ (полное отражение), найдем

$$\exp [2ikL + 2i \operatorname{arctg} (\rho c Y_0) + 2i \operatorname{arctg} (\rho c Y_L)] = 1.$$

Отсюда видно, что показатель экспоненты должен быть целым кратным $2\pi i$.

Следовательно,

$$kL + \operatorname{arctg} (\rho c Y_0) + \operatorname{arctg} (\rho c Y_L) = \pi,$$

что совпадает с формулой (64.1), полученной другим способом.

Рассмотрим, как меняются собственные частоты трубы при замене идеальных границ крышками с конечной проводимостью. Так как проводимости обеих крышек входят в частотное уравнение одинаково, то достаточно выяснить характер изменений при замене только одной из них. Поэтому будем считать, что одна граница (например, левая) абсолютно жесткая, т. е. $Y_0 = 0$,

и допустим, что вторая крышка имеет проводимость Y_L . Тогда частотное уравнение (64.1) примет вид

$$\operatorname{tg} kL = -i\rho c Y_L. \quad (64.3)$$

Для реактивных крышек величина iY_L вещественная, положительная для крышек упругого типа и отрицательная для крышек массового типа. Значит, крышка упругого типа понижает, а крышка массового типа повышает собственные частоты трубы. Относительное изменение частоты составляет для колебания номера l

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{1}{l\pi} \operatorname{arctg}(i\rho c Y_L), \quad (64.4)$$

где ω_0 — собственная частота данного колебания при второй жесткой крышке, а значение проводимости (вообще зависящей от частоты) должно быть взято при уже измененной собственной частоте $\omega_0 + \Delta\omega$, а не при частоте ω_0 .

На рис. 64.1 даны распределения скорости измененного собственного колебания трубы с левой жесткой крышкой и правой упругой и массовой. В трубах с неидеальными крышками узел скорости смещен от крышки: длина волны изменилась соответственно изменению собственной частоты колебания. Отрезок от узла до узла скорости равен длине трубы, снабженной обеими жесткими крышками, имеющей ту же собственную частоту, что и данная труба с неидеальной крышкой. Эта эквивалентная длина больше фактической длины трубы при упругой крышке и меньше при массовой. Относительная разность фактической и эквивалентной длин равна

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{l\pi} \operatorname{arctg}(i\rho c Y_L).$$

Пусть крышка осуществлена в виде безмассового поршня, удерживаемого пружинкой с коэффициентом упругости (на единицу площади трубы), равным κ . Тогда $iY_L = \omega/\kappa$, и уравнение (64.3) примет вид

$$\operatorname{tg} kL = -\rho c \frac{\omega}{\kappa} = -\frac{\rho c^2}{\kappa L} kL.$$

На рис. 64.2 показано, как решать графически это трансцендентное уравнение для kL . Значения kL для последовательных собственных колебаний найдутся как абсциссы точек пересечения последовательных ветвей тангенсоиды $\operatorname{tg} kL$ с прямой, угловой коэффициент которой равен взятому с обратным знаком отношению двух коэффициентов упругости: коэффициента упругости $\rho c^2/L$ столба среды единичного сечения длины L и удельного коэффициента упругости κ крышки.

Из графика видно, что обертоны не гармоничны: нарушение гармоничности наибольшее для первых номеров колебаний; при увеличении номера колебания последовательность частот стремится

к последовательности нечетных целых чисел, соответствующих трубе с открытым вторым концом. Это понятно из того, что проводимость упругой крышки стремится к бесконечности при стремлении частоты к бесконечности.

Если крышка осуществлена в виде массивного поршня с поверхностной плотностью μ , скользящего в трубе без трения, то проводимость крышки равна $-1/i\omega\mu$, и уравнение частот можно написать в виде

$$\operatorname{ctg} kL = \frac{\omega\mu}{\rho c} = \frac{\mu}{\rho L} kL,$$

позволяющем удобно решать его графически (рис. 64.3): значения kL для собственных колебаний трубы найдутся как абсциссы точек

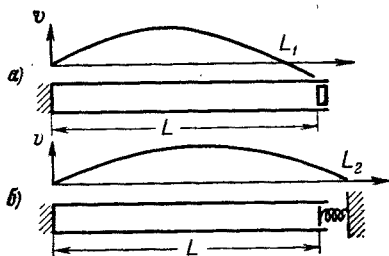


Рис. 64.1. L_1 и L_2 — эквивалентные длины труб с обеими жесткими крышками, имеющих те же частоты первого собственного колебания, что и труба длины L с одной жесткой и второй массовой (а) или упругой (б) крышкой.

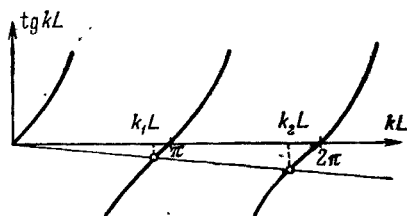


Рис. 64.2. Нахождение собственных частот в трубе с одной жесткой и второй упругой крышкой.

пересечения ветвей котангенсоиды с прямой, угловой коэффициент которой равен отношению массы поршня к массе всей среды в трубе.

Интересен случай крышки, очень массивной по сравнению с массой среды в трубе: $\mu \gg \rho L$. Тогда, как видно на графике, первое значение для kL (пересечение с пунктирной линией) может быть очень мало по сравнению с единицей, а значит, частота этого колебания низкая, так что на длине трубы укладывается малая доля длины волны. Остальные же колебания почти не изменят своих частот по сравнению со случаем абсолютно жесткой второй крышки, и практически можно считать, что они по-прежнему будут образовывать гармонический ряд обертонов. В подобном низкочастотном колебании среда в трубе находится в квазистатическом режиме и действует как пружина.

Перейдем к общему случаю, считая, что задана частотная зависимость (или зависимость от kL) проводимостей обеих крышек, и дадим графический метод нахождения собственных частот трубы на основе уравнения (64.1). Начертим график зависимости величины $y = -\operatorname{arctg}(\rho c Y_0) - \operatorname{arctg}(\rho c Y_L)$ от kL , выбирая значения арктангенсов в пределах $(-\pi/2, +\pi/2)$, и нанесем на него семей-

ство прямых $y = kL - l\pi$. Абсциссы точек пересечения графика с прямыми семейства дадут все искомые значения для kL (рис. 64.4). Каждая из прямых семейства даст по крайней мере одно решение, кроме, быть может, прямой с $l = 0$.

Для обеих абсолютно жестких крышек график вырождается в прямую, совпадающую с осью абсцисс. Для обеих свободных концов трубы график вырождается в прямую $+\pi$ или $-\pi$. Для одного абсолютно жесткого и другого открытого конца трубы график совпадает с прямой $+\pi/2$ или $-\pi/2$.

При малых, но не равных нулю проводимостях возможно появление нового типа колебания, отсутствующего при жестких крышках. В самом деле, если обе крышки массового типа или одна массового, а другая упругого, но по модулю проводимость последней меньше модуля проводимости массовой крышки, то, как видно из (64.1), график начнется выше оси абсцисс (линия a на рис. 64.4) и появится решение, отсутствовавшее при нулевой проводимости крышек: низкочастотное колебание, определяемое пересечением графика с прямой, соответствующей $l = 0$.

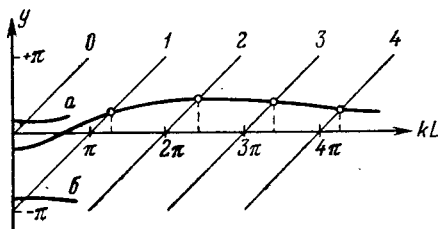


Рис. 64.4. График для нахождения собственных частот в трубе с обеими неидеальными крышками. Линии a и b — графики левой части уравнения (64.1) в случае, когда имеется низкочастотное собственное колебание.

Если обе крышки с малой проводимостью упругого типа, либо модуль проводимости крышки упругого типа больше модуля проводимости крышки массового типа, то дополнительного низкочастотного колебания нет и собственные колебания трубы укладываются (приближенно) в гармонический ряд.

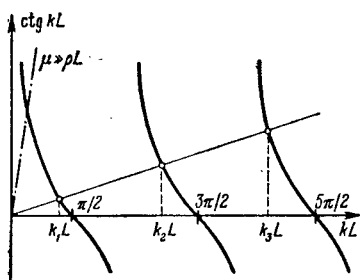


Рис. 64.3. Нахождение собственных частот в трубе с одной жесткой и второй массовой крышкой. При большой массе крышки первое колебание получается низкочастотным (длина соответственной волны много больше длины трубы) и выпадает из ряда остальных собственных частот, близких к гармонической последовательности.

решение, отсутствовавшее при нулевой проводимости крышек: низкочастотное колебание, определяемое пересечением графика с прямой, соответствующей $l = 0$.

Частоты же остальных колебаний будут близки к частотам в трубе с абсолютно жесткими крышками, т. е. практически будут по-прежнему образовывать гармонический ряд. Частота нового колебания в этот ряд не войдет и может быть много меньше основного тона гармонического ряда. Для случая $Y_0 = 0$ и второй крышки массового типа мы находили уже это колебание на графике 64.3 как колебание наименьшей частоты.

Аналогично вышесказанному, если проводимости крышек очень велики, но не бесконечны, то также возможно появление дополнительного низкочастотного колебания, отсутствующего при абсолютно мягких крышках: колебание появится, если обе крышки упругие либо если они разных типов, но проводимость массовой крышки по модулю меньше проводимости крышки упругого типа. В этих случаях график проходит при малых kL вблизи прямой — l (рис. 64.4, линия б) и дополнительное колебание соответствует пересечению с прямой, отвечающей $l = 1$. При другой комбинации проводимостей крышек дополнительное колебание не появляется. В отличие от остальных, при дополнительном колебании по длине трубы укладывается только малая доля длины волны, так что распределение давлений и скоростей частиц в этом колебании оказывается совсем другим, чем для остальных собственных колебаний трубы: движение среды происходит квазистатически.

При малых проводимостях столб среды в трубе играл роль пружины: кинетическая энергия его мала по сравнению с потенциальной и его можно рассматривать как пружину с коэффициентом упругости (рассчитанным на единицу площади поперечного сечения трубы), равным $\rho c^2/L$. При больших проводимостях, наоборот, столб среды практически не сжат — потенциальной энергией его можно пренебречь по сравнению с кинетической и он движется как твердое тело. В первом случае трубу с крышками можно рассматривать как осциллятор со столбом среды в качестве элемента упругости, а во втором случае — тоже как осциллятор, но столб среды ведет себя в этом случае как элемент массы.

Колебания «нулевого номера» интересны тем, что длина волны соответственной частоты в неограниченной среде много больше размеров самой трубы. Для всех остальных собственных колебаний самая низкая частота дает длину волны в неограниченной среде порядка двойного или четверного размера трубы. Вообще, за исключением особых случаев, вроде рассмотренных выше, всегда можно считать, что длина волны наименьшей собственной частоты данного объема (не обязательно трубы, а, например, помещения) равна по порядку наибольшему линейному размеру объема.

§ 65. Крышки с потерями

Предположим теперь, что крышка трубы частично поглощает падающую на нее энергию, так что колебания в трубе постепенно затухают. Затухающее колебание можно представить как колебание с комплексной частотой, мнимая часть которой отрицательна. Поглощающая крышка характеризуется комплексной проводимостью $Y = iX + R$, причем должно быть $R > 0$. Рассмотрим трубу, у которой одна крышка абсолютно жесткая, а вторая — поглощающая. Для такой трубы частотное уравнение (64.3) примет вид

$$\operatorname{tg} kL = \rho c X - i \rho c R. \quad (65.1)$$

Из этого уравнения можно найти вещественную и мнимую части kL , а значит, и вещественную и мнимую части ω . В общем случае уравнение (65.1) придется решать численно, но если наличие поглощения вносит лишь малую поправку в величину ω , то уравнение можно решить и аналитически.

В самом деле, пусть решение частотного уравнения в отсутствие поглощения есть k_0L , так что $\operatorname{tg} k_0L = \rho cX$. Положим $kL = k_0L + i\alpha + \beta$ и будем считать $|\alpha + \beta| \ll 1$. Разлагая в (65.1) тангенс в ряд и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, найдем

$$\operatorname{tg} k_0L + (i\alpha + \beta)(1 + \operatorname{tg}^2 k_0L) + (i\alpha + \beta)^2 \operatorname{tg} k_0L(1 + \operatorname{tg}^2 k_0L) = \rho cX - i\rho cR. \quad (65.2)$$

Разделяя вещественную и мнимую части, видим, что вещественная поправка — величина второго порядка малости по отношению к мнимой поправке.

Ограничиваясь членами не выше второго порядка малости относительно α , найдем

$$\alpha = -\frac{\rho cR}{1 + \operatorname{tg}^2 k_0L} = -\frac{\rho cR}{1 + (\rho cX)^2}, \quad (65.3)$$

$$\beta = \alpha^2 \operatorname{tg} k_0L = \frac{(\rho cR)^2 \rho cX}{[1 + (\rho cX)^2]^2}.$$

Разложением (65.2) можно пользоваться, если третий член много меньше второго по модулю, т. е. при условии

$$\frac{R}{X} \frac{(\rho cX)^2}{1 + (\rho cX)^2} \ll 1.$$

Если $\rho c|X| \geq 1$ (реактивная проводимость крышки имеет порядок величины волновой проводимости среды или превосходит ее), то условие будет выполнено только при $R \ll |X|$. Формулы (65.3) можно переписать в виде

$$\alpha = -\frac{R}{X} \frac{\rho cX}{1 + (\rho cX)^2} = -\frac{R}{X} \frac{\operatorname{tg} k_0L}{1 + \operatorname{tg}^2 k_0L} = -\frac{1}{2} \frac{R}{X} \sin 2k_0L,$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{R^2}{X^2} \frac{(\rho cX)^3}{[1 + (\rho cX)^2]^2} = \frac{R^2}{X^2} \frac{\operatorname{tg}^3 k_0L}{(1 + \operatorname{tg}^2 k_0L)^2} = \\ &= \frac{R^2}{X^2} \left(\frac{1}{4} \sin 2k_0L - \frac{1}{8} \sin 4k_0L \right). \end{aligned}$$

Значит,

$$\omega = \omega_0 \left[1 - i \frac{R}{X} \frac{\sin 2k_0L}{2k_0L} + \frac{R^2}{X^2} \left(\frac{\sin 2k_0L}{2k_0L} - \frac{1}{2} \frac{\sin 4k_0L}{4k_0L} \right) \right].$$

В первом приближении по малой величине R/X частот колебания не меняется и действие поглощения на крышках сводится только к затуханию колебаний. С этой точностью собственное колебание трубы можно записать в виде

$$p = \exp \left\{ -i\omega_0 t - \omega \frac{R}{X} \frac{\sin 2k_0 L}{2k_0 L} t \right\} \times \\ \times \left(\cos k_0 x + i \frac{R}{X} \frac{\sin 2k_0 L}{2k_0 L} \sin k_0 x \right). \quad (65.4)$$

Частота колебаний изменяется только во втором порядке: при упругих крышках появление поглощения уменьшает частоту, при массовых — увеличивает.

При чисто активной проводимости второй крышки уравнение (64.3) напишем в виде

$$kL = l\pi - \operatorname{arctg}(\rho cR).$$

При $\rho cR < 1$ имеем $\operatorname{arctg}(\rho cR) = i \operatorname{argth}(\rho cR)$, так что

$$kL = l\pi - i \operatorname{argth}(\rho cR), \quad (65.5)$$

т. е. вещественная часть частоты в точности равна частоте колебаний в трубе с абсолютно жесткой второй крышкой, а коэффициент затухания равен $(\omega/l\pi) \operatorname{argth}(\rho cR)$. При малой относительной проводимости ($\rho cR \ll 1$); это дает $kL \approx l\pi - i\rho cR$, а поле в трубе приближенно равно

$$p \approx \exp \left\{ -i\omega_0 t - \frac{\omega_0 \rho cR}{l\pi} t \right\} \cdot \left(\cos \frac{l\pi}{L} x + i\rho cR \frac{x}{L} \sin \frac{l\pi}{L} x \right).$$

При $\rho cR > 1$ имеем $\operatorname{arctg}(i\rho cR) = \frac{\pi}{2} + i \operatorname{argth} \frac{1}{\rho cR}$, так что

$$kL = \frac{2l-1}{2} \pi - i \operatorname{argth} \frac{1}{\rho cR}, \quad (65.6)$$

т. е. вещественная часть частоты в точности равна частоте колебаний в трубе с одной жесткой и второй мягкой крышкой, а коэффициент затухания равен $\frac{\omega}{[(2l-1)/2]\pi} \operatorname{argth} \frac{1}{\rho cR}$. Для большой относительной проводимости ($\rho cR \gg 1$) это дает

$$kL = \frac{2l-1}{2} \pi - \frac{i}{\rho cR},$$

а поле в трубе принимает вид

$$p = \exp \left\{ -i\omega_0 t - \frac{\omega_0 t}{[(2l-1)/2] \rho cR} \right\} \times \\ \times \left(\cos \frac{2l-1}{2L} \pi x + \frac{i}{\rho cR} \frac{x}{L} \sin \frac{2l-1}{2L} \pi x \right).$$

При $\rho c R = 1$ из частотного уравнения получаем $kL = l\pi - i\infty$, что соответствует бегущей волне. Однако из условия на первой крышке следует, что амплитуда волны должна равняться нулю: искомое решение в данном случае — тождественный нуль.

Важный случай комплексной проводимости крышки — это открытый конец трубы. До сих пор мы считали, что проводимость открытого конца бесконечна. Это не точно: проводимость велика, но имеет конечное значение. В самом деле, на открытом конце лежит пучность скорости. Значит, при колебаниях через открытый конец попеременно втекает и вытекает поток среды; открытый конец можно рассматривать как некоторый *излучатель звука*. Поэтому через открытый конец излучается энергия из трубы в окружающую среду. Но в этом случае на открытом конце трубы должна совершаться работа, следовательно, давление p на открытом конце должно быть отлично от нуля: работа этого давления над потоком, протекающим через открытый конец, и должна равняться излучаемой энергии. Подробнее этот вопрос рассмотрим в § 90.

§ 66. Свободные колебания в трубах. Задачи с начальными условиями

В ряде случаев представляют интерес колебания, возникающие в трубах в результате того, что среда в трубе была выведена из равновесия, а затем предоставлена самой себе. Если в какой-либо момент времени (будем считать его начальным) заданы распределения давления и скоростей частиц вдоль трубы, то, в отсутствие сторонних воздействий, можно найти колебания в трубе во все последующие моменты времени. В этой задаче принимаем, что скорости частиц и давления одинаковы по каждому сечению трубы и меняются только от сечения к сечению.

В качестве примера можно представить себе трубу с жесткими крышками, разделенную на два отрезка тонкой диафрагмой, расположенной в каком-либо сечении трубы. Если давление в одной части трубы повышают и в какой-то момент диафрагма лопаается, то процесс после разрыва диафрагмы соответствует таким *начальным условиям*: скорость частиц равна нулю, а давление распределено ступенькой вдоль трубы. Другой пример: труба движется вдоль своей оси и внезапно останавливается при соударении с препятствием. Начальные условия в этом случае: равенство нулю начальных давлений и постоянная начальная скорость частиц по всей длине трубы.

Можно доказать, что для любых начальных условий и при любых непроницаемых для звука крышках колебание в трубе можно представить в виде суперпозиции собственных колебаний данной трубы. Это легко показать для идеальных крышек на основе теории рядов Фурье. Пусть, например, крышки абсолютно жесткие. Набор собственных частот и волновых чисел обертонов данной

трубы, т. е. всех возможных в ней [гармонических волн, имеет вид

$$\omega_l = l\pi c/L, \quad k_l = l\pi/L.$$

Распределение давлений и скоростей в обертоном номере l можно записать в виде

$$p_l = \cos k_l x (A_l \cos \omega_l t + B_l \sin \omega_l t),$$

$$v_l = (1/\rho c) \sin k_l x (A_l \sin \omega_l t - B_l \cos \omega_l t),$$

где A_l и B_l — произвольные числа.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ заданы распределения вдоль трубы давления

$$p(x, 0) = p_0(x)$$

и скоростей частиц

$$v(x, 0) = v_0(x).$$

Подберем числа A_l и B_l так, чтобы суперпозиция собственных колебаний удовлетворяла заданным начальным условиям. Для этого должны иметь место равенства

$$p_0(x) = \sum_l A_l \cos(k_l x),$$

$$v_0(x) = (-1/\rho c) \sum_l B_l \sin k_l x,$$

т. е. A_l и B_l должны равняться компонентам Фурье разложения в ряд начальных распределений давления и скорости, причем давление считается продолженным симметрично, а скорость частиц — антисимметрично; при этом разложение для давления содержит только косинусы, а разложение для скорости — только синусы.

Искомое поле можно представить в виде суперпозиции двух полей: одного p' с начальными условиями

$$p'(x, 0) = p_0(x),$$

$$v'(x, 0) = 0$$

и другого p'' с начальными условиями

$$p''(x, 0) = 0,$$

$$v''(x, 0) = v_0(x).$$

Для первого поля решение есть

$$p'(x, t) = \sum_l A_l \cos k_l x \cos \omega_l t,$$

где

$$A_l = \frac{2}{L} \int_0^L p_0(x) \cos k_l x dx.$$

Для второго поля решение для скорости частиц есть

$$v''(x, t) = -\frac{1}{\rho c} \sum_l B_l \sin k_l x \cos \omega_l t,$$

где

$$B_l = -\frac{2\rho c}{L} \int_0^L v_0(x) \sin k_l x dx.$$

Величина p'' найдется из уравнения

$$p'' = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \int v'' dx,$$

т. е.

$$p'' = \sum_l B_l \cos k_l x \sin \omega_l t,$$

так что окончательно искомое решение можно записать в виде

$$p = p' + p'' = \frac{2}{L} \sum_l \cos k_l x \left\{ \cos \omega_l t \int_0^L p_0(x) \cos k_l x dx - \right. \\ \left. - \rho c \sin \omega_l t \int_0^L v_0(x) \sin k_l x dx \right\}$$

или

$$p = \frac{2}{L} \sum_l \cos \left(\frac{l\pi}{L} x \right) \left\{ \cos \left(\frac{l\pi c}{L} t \right) \int_0^L p_0(x) \cos \left(\frac{l\pi}{L} x \right) dx - \right. \\ \left. - \rho c \sin \left(\frac{l\pi c}{L} t \right) \int_0^L v_0(x) \sin \left(\frac{l\pi}{L} x \right) dx \right\}.$$

Аналогично получим для мягких крышек формулу

$$p = \frac{2}{L} \sum_l \sin \left(\frac{l\pi}{L} x \right) \left\{ \cos \left(\frac{l\pi c}{L} t \right) \int_0^L p_0(x) \sin \left(\frac{l\pi}{L} x \right) dx + \right. \\ \left. + \rho c \sin \left(\frac{l\pi c}{L} t \right) \int_0^L v_0(x) \cos \left(\frac{l\pi}{L} x \right) dx \right\}$$

и для одной жесткой и одной мягкой крышки — формулу

$$\rho = \frac{2}{L} \sum_l \cos \left(\frac{2l-1}{2L} \pi x \right) \times \\ \times \left\{ \cos \left(\frac{2l-1}{2L} \pi ct \right) \int_0^L \rho_0(x) \cos \left(\frac{2l-1}{2L} \pi x \right) dx - \right. \\ \left. - \rho c \sin \left(\frac{2l-1}{2L} \pi ct \right) \int_0^L v_0(x) \sin \left(\frac{2l-1}{2L} \pi x \right) dx \right\}.$$

§ 67. Вынужденные колебания в трубах

Мы видели, что свободные колебания в трубе могут происходить только при определенных частотах. Но если на среду оказывать стороннее воздействие, то можно создать в трубе (вынужденное) колебание произвольной частоты. Здесь есть аналогия с сосредоточенными колебательными системами, в которых также частоты собственных колебаний образуют дискретный набор, но которые могут колебаться на любой частоте, если на них воздействовать с силой, имеющей эту частоту. Как и в сосредоточенных системах, при совпадении частоты вынуждающего воздействия с какой-либо собственной частотой трубы возникают резонансные явления.

Вынуждающее воздействие может иметь различный характер: это может быть заданное движение крышки, сила, приложенная к концу трубы или в какому-либо сечению трубы, это может быть сторонний источник жидкости, распределенный по какому-либо сечению внутри трубы, и т. п. Ввиду узости трубы безразлично, распределен ли источник жидкости (или сторонняя сила) равномерно по всему сечению или сосредоточен в одной точке сечения, эффект стороннего воздействия в обоих случаях будет одинаков. Особенно важны случаи, когда сторонние воздействия действуют не в одном каком-либо сечении, но распределены вдоль всей трубы; таковы воздействия электрических и магнитных полей на пластины или стержни электромеханических излучателей, которые, так же как и трубы, можно рассматривать как отрезки длинных линий.

Рассмотрим различные случаи возбуждения трубы сторонними гармоническими воздействиями. Собственные колебания трубы можно не учитывать: если они и имели место, то при сколь угодно малом трении они с течением времени затухнут. На вынужденные колебания трение практически не влияет, за исключением случая резонанса, когда установившиеся колебания возможны только при наличии трения, а амплитуда колебаний на резонансе и вблизи него зависит от величины трения.

Рассмотрим вначале возбуждение трубы с одного конца. Пусть труба закрыта с одного конца крышкой с входной проводимостью Y , а на другом конце задана сторонняя сила частоты ω , создающая

в этом конце давление $p_0 e^{-i\omega t}$. Создаваемое такой силой колебание в трубе имеет ту же частоту, а давление распределено вдоль трубы по закону

$$p = A \cos(kx + \alpha) e^{-i\omega t}.$$

Из условия на первом конце найдем

$$\alpha = \operatorname{arctg}(i\rho c Y).$$

Амплитуду A найдем из условий возбуждения, т. е. из условия на втором конце:

$$A \cos(kL + \alpha) = p_0;$$

отсюда

$$A = p_0 / \cos(kL + \alpha),$$

и, следовательно, искомое колебание есть

$$p = p_0 \frac{\cos(kx + \alpha)}{\cos(kL + \alpha)}. \quad (67.1)$$

Если при данной частоте конец трубы, к которому приложено стороннее давление, совпадает с пучностью давления, т. е. если $\cos(kL + \alpha) = \pm 1$, то вынужденное колебание имеет наименьшую амплитуду, равную амплитуде p_0 стороннего давления. По мере удаления точки приложения стороннего давления от пучности и приближения ее к узлу давления собственного колебания, труба возбуждается все сильнее. При частоте, для которой точка приложения стороннего давления есть узел давления, наступает резонанс. Это — частота собственных колебаний трубы с открытым вторым концом. Таким образом, при резонансе $kL + \alpha = [(2l - 1)/2] \pi$. Наименьшее возбуждение соответствует собственной частоте трубы с закрытым вторым концом.

Аналогично решается задача при задании на втором конце трубы скорости частиц (например, при помощи колеблющегося поршня, вставляемого во второй конец трубы). Форма колебания и в этом случае будет иметь вид (67.1). Если сторонняя скорость у второго конца трубы равна $v_0 e^{-i\omega t}$, то амплитуда колебания найдется из условия возбуждения, т. е. из условия на втором конце:

$$-\frac{1}{i\rho c} A \sin(kL + \alpha) = v_0.$$

Следовательно, в этом случае $A = -i\rho c v_0 / \sin(kL + \alpha)$, и колебание имеет вид

$$p = -i\rho c v_0 \frac{\cos(kx + \alpha)}{\sin(kL + \alpha)}.$$

Выражение для скорости частиц примет вид, аналогичный (67.1)

$$v = v_0 \frac{\sin(kx + \alpha)}{\sin(kL + \alpha)}. \quad (67.2)$$

Резонанс при данной сторонней скорости наступает при частоте собственных колебаний трубы, закрытой со второго конца абсолютно жесткой крышкой. Таким образом, при резонансе $kL = l\pi$. Амплитуда колебания тем больше, чем ближе точка задания сторонней скорости к узлу скорости.

Трубу можно возбуждать, сообщая частицам скорости или прикладывая давление не обязательно у конца трубы, но в любой точке (в любом сечении) внутри нее. Пусть, например, труба разделена в точке x_1 на две части безмассовым тонким поршнем, к которому приложена сила F . Трубу будем считать закрытой с обеих сторон абсолютно жесткими крышками. Чтобы найти движение в трубе, заметим, что в силу граничных условий на крышках давление в левой части трубы должно иметь вид

$$p_1 = A \cos kx \quad (0 \leq x \leq x_1),$$

и в правой части — вид

$$p_2 = B \cos [k(L - x)] \quad (x_1 \leq x \leq L).$$

Две неизвестные амплитуды колебаний A и B найдутся из условий на поршне:

$$v_1 = v_2, \quad p_2 - p_1 = F/S \quad \text{при } x = x_1,$$

т. е. должно быть выполнено условие равенства скоростей по обе стороны поршня, а разность давлений с обеих сторон должна уравновешивать стороннюю силу, действующую на поршень площади S . Подставляя выражения для полей, найдем

$$v_1 = -\frac{A}{i\rho c} \sin kx_1 = v_2 = \frac{B}{i\rho c} \sin k(L - x_1),$$

$$p_2 - p_1 = -A \cos kx_1 + B \cos k(L - x_1) = F/S,$$

откуда

$$A = -\frac{F}{S} \frac{\sin k(L - x_1)}{\sin kL}, \quad B = \frac{F}{S} \frac{\sin kx_1}{\sin kL}. \quad (67.3)$$

Резонанс наступит при совпадении частоты возмущающей силы с одной из собственных частот трубы, т. е. при условии $kL = l\pi$.

Нетрудно решить эту же задачу и для других видов крышек. Так, для трубы, открытой с обоих концов, найдем

$$p_1 = A \sin kx, \quad p_2 = B \sin k(L - x),$$

где

$$A = -\frac{F}{S} \frac{\cos k(L - x_1)}{\sin kL}, \quad B = \frac{F}{S} \frac{\cos kx_1}{\sin kL}. \quad (67.4)$$

Для трубы, у которой слева жесткая, а справа мягкая крышка,

$$p_1 = A \cos kx, \quad p_2 = B \sin [k(L - x)],$$

где

$$A = -\frac{F}{S} \frac{\cos k(L - x_1)}{\cos kL}, \quad B = -\frac{F}{S} \frac{\sin kx_1}{\cos kL}. \quad (67.5)$$

Для трубы, закрытой крышками с проводимостями Y_0 и Y_L ,

$$p_1 = A \cos(kx + \alpha), \quad p_2 = B \cos[k(L - x) + \beta],$$

где

$$\alpha = -\arctg(i\rho c Y_0), \quad \beta = \arctg(i\rho c Y_L).$$

Амплитуды колебаний равны

$$A = -\frac{F}{S} \frac{\sin[k(L - x_1) + \beta]}{\sin(kL + \alpha + \beta)}, \quad B = \frac{F}{S} \frac{\sin(kx_1 + \alpha)}{\sin(kL + \alpha + \beta)}. \quad (67.6)$$

При любых крышках резонанс наступает при совпадении частоты возмущающей силы с одной из собственных частот трубы с заданными крышками.

Аналогичные задачи возникают и в случае, когда в трубу помещен источник жидкости. Пусть *объемная скорость* источника (количество жидкости, подаваемое за единицу времени) равна $Ve^{-i\omega t}$. Тогда поля в каждой из частей трубы, на которые она разделена источником, можно взять в том же виде, что и при задании силы. Но условия в месте помещения источника будут другие: в этом случае должны выполняться условия

$$p_1 = p_2, \quad v_2 - v_1 = V/S.$$

Амплитуды для колебаний в левой и правой частях трубы выражаются следующими формулами:

для жестких крышек

$$A = i\rho c \frac{V}{S} \frac{\cos k(L - x_1)}{\sin kL}, \quad B = i\rho c \frac{V}{S} \frac{\cos kx_1}{\sin kL}; \quad (67.7)$$

для мягких крышек

$$A = -i\rho c \frac{V}{S} \frac{\sin k(L - x_1)}{\sin kL}, \quad B = -i\rho c \frac{V}{S} \frac{\sin kx_1}{\sin kL}; \quad (67.8)$$

для трубы, у которой слева жесткая, а справа мягкая крышка,

$$-A = -i\rho c \frac{V}{S} \frac{\sin k(L - x_1)}{\cos kL}, \quad B = -i\rho c \frac{V}{S} \frac{\cos kx_1}{\cos kL};$$

для крышек с проводимостями Y_0 и Y_L

$$A = i\rho c \frac{V}{S} \frac{\cos[k(L - x_1) + \beta]}{\sin(kL + \alpha + \beta)},$$

$$B = i\rho c \frac{V}{S} \frac{\cos(kx_1 + \alpha)}{\sin(kL + \alpha + \beta)}. \quad (67.9)$$

Пользуясь найденными выражениями для амплитуд волн, возникающих в трубе слева и справа от источника звука, можно определить поле в трубе и в случае, когда источники звука распределены по всей длине трубы. Возьмем для определенности трубу с обеими жесткими крышками и предположим, что по всей длине

трубы распределены сторонние силы с плотностью $F(x)$ ($0 < x < L$). Сила, действующая на элемент dx_1 в сечении x_1 , даст, согласно (67.3), в части трубы слева от точки x_1 поле

$$p_1 = - \frac{F(x_1) dx_1}{S} \frac{\sin k(L-x_1)}{\sin kL} \cos kx \quad (67.10)$$

и в правой части трубы — поле

$$p_2 = \frac{F(x_1) dx_1}{S} \frac{\sin kx_1}{\sin kL} \cos k(L-x). \quad (67.11)$$

Чтобы найти суммарное поле в точке x трубы, вызванное всеми сторонними силами, достаточно проинтегрировать все поля вида (67.10), (67.11) по x_1 , причем для области слева от точки наблюдения следует брать формулу (67.11), а для области справа от точки наблюдения — формулу (67.10), так как в первом случае точка наблюдения лежит справа от источников, а во втором — слева. В итоге получаем

$$p(x) = \int_0^x p_2 dx_1 + \int_x^L p_1 dx_1 = \frac{\cos k(L-x)}{S \sin kL} \int_0^x F(x_1) \sin kx_1 dx_1 - \\ - \frac{\cos kx}{S \sin kL} \int_x^L F(x_1) \sin k(L-x_1) dx_1.$$

Например, для равномерного распределения силы вдоль трубы $F(x_1) \equiv F$ найдем

$$p(x) = \frac{F}{S} \frac{\cos k(L-x)}{\sin kL} \Big|_0^x \left(-\frac{1}{k} \cos kx_1 \right) - \\ - \frac{F}{S \sin kL} \Big|_x^L \left\{ \frac{1}{k} \cos k(L-x_1) \right\} = \frac{F}{kS \sin kL} \{ \cos k(L-x) - \cos kx \}.$$

И в этом случае для наступления резонанса необходимо, чтобы частота возмущающей силы совпадала с частотой какого-либо собственного колебания трубы. Но этого условия недостаточно; в самом деле, при $kL = l\pi$ (что соответствует собственным частотам трубы) имеем

$$\cos k(L-x) - \cos kx = [(-1)^l - 1] \cos kx;$$

значит, при l нечетном резонанс есть, а при l четном резонанса нет (в нуль обращается не только знаменатель выражения для давления, но и числитель). Это легко понять, если учесть, что передача энергии среде в трубе — это работа сторонних сил при перемещении частиц. При l четном по длине трубы укладывается четное число полуволн и каждой частице с какой-либо определенной скоростью соответствует другая со скоростью равной и прямо противо-

положительной, так что суммарная работа над всей средой в трубе оказывается равной нулю. При l нечетном этого не будет: остается одна нескомпенсированная полуволна.

Для трубы, открытой с обоих концов, найдем аналогично

$$p_1(x) = - \frac{\sin k(L-x)}{S \sin kL} \int_0^x F(x_1) \cos kx_1 dx_1 + \\ + \frac{\sin kx}{S \sin kL} \int_x^L F(x_1) \cos k(L-x_1) dx_1.$$

Для равномерного распределения силы вдоль трубы получится $p(x) = 0$. Никакого звукового колебания в этом случае нет: вся среда в трубе осциллирует как целое со скоростью $v = iF/S\rho\omega$.

При частоте резонанса и вблизи нее при расчете амплитуды вынужденного колебания нельзя пренебрегать поглощением звука. Если поглощение отсутствует, то при резонансной частоте вообще нет установившегося колебания и амплитуда растет безгранично. При резонансе возможно нарушение линейности вследствие роста амплитуды еще до того, как затухание ограничит рост колебания. Мы будем все же считать, что линейность не нарушается (некоторые специальные явления при нелинейных колебаниях в трубах рассмотрим в гл. XIII), и учтем потери энергии.

В реальных условиях в трубах могут наблюдаться процессы поглощения энергии различного рода. Основные механизмы — это поглощение колебательной энергии на стенках трубы вследствие вязкости среды и поглощение на крышках при наличии активной составляющей проводимости. Вязкость в самой среде всегда также приводит к поглощению энергии, однако малому по сравнению с тем, которое вызывается влиянием вязкости у стенок. Впрочем, действие вязкости в обоих случаях неразличимо и его можно учесть, считая, что волновое число комплексно: $\tilde{k} = k(1 + i\eta)$ (см. гл. XII).

Будем считать (это всегда имеет место в практически важных случаях), что затухание колебаний мало. Это значит, что выполняется условие $\eta \ll 1$. В этом случае распределение давлений и скоростей вдоль трубы мало отличается от распределения вне резонанса при отсутствии поглощения, но амплитуда резонансных колебаний существенно зависит от η . В самом деле, рассмотрим этот случай, полагая для простоты, что труба имеет одну жесткую крышку и возбуждается давлением, приложенным у второго, открытого конца. В этом случае $\alpha = 0$ и, подставляя в (67.1) вместо k комплексное волновое число $\tilde{k}(1 + i\eta)$, получим

$$p = p_0 \frac{\cos [\tilde{k}(1 + i\eta)x]}{\cos [\tilde{k}(1 + i\eta)L]}.$$

Резонансная частота колебания номера l соответствует значению $kL = [(2l - 1)/2] \pi$. При этой частоте решение имеет вид

$$p = p_0 \frac{\cos [k(1 + i\eta)x]}{(-1)^l i \eta kL} = p_0 \frac{\cos \left[\frac{2l-1}{2} \pi (1 + i\eta) \frac{x}{L} \right]}{(-1)^l i [(2l-1)/2] \pi \eta}$$

Максимальная амплитуда у жесткой крышки равна

$$\frac{|p_0|}{[(2l-1)/2] \pi \eta}$$

Полуширина резонансной кривой соответствует изменению величины kL на $\pm \eta kL$, т. е. относительному изменению частоты $\Delta\omega/\omega = \pm \eta$. Следовательно, добротность колебания составляет $Q = 1/2\eta$ и не зависит *явно* от номера колебания. Зависимость, однако, имеется ввиду того, что сама величина η растет с повышением частоты.

Теперь найдем, как влияет активное сопротивление крышки на резонансную амплитуду колебания. Пусть проводимость крышки — чисто активная и величина ρcR мала по сравнению с единицей. Снова предположим, что второй конец трубы открыт и к нему приложено стороннее давление p_0 . Полагая в (67.1) $\alpha = \arctg(i\rho cR) \approx i\rho cR$, получим

$$p = p_0 \frac{\cos(kx + i\rho cR)}{\cos(kL + i\rho cR)}$$

Резонансная частота колебания номера l соответствует $kL = [(2l - 1)/2] \pi$. При этой частоте решение имеет вид

$$p = p_0 \frac{\cos \left(\frac{2l-1}{2} \pi \frac{x}{L} + i\rho cR \right)}{(-1)^l i \rho cR}$$

Максимальная амплитуда равна приблизительно $|p_0|/\rho cR$.

§ 68. Распространение звука в трубах с податливыми стенками

До сих пор мы считали боковые стенки трубы абсолютно жесткими. Теперь выясним, как сказывается на распространении звука податливость стенок: найдем влияние податливости стенок на скорость распространения звука.

Будем считать, что поперечник трубы мал по сравнению с длиной распространяющейся в ней волны; тогда по-прежнему можно считать движение частиц в трубе одномерным. Но изменение длины столба среды в трубе будет по-другому зависеть от давления, поскольку давление вызовет не только сжатие среды, но и изменение сечения трубы, что для волны, бегущей в трубе, равносильно изменению сжимаемости среды.

В самом деле, относительное укорочение столба среды в трубе, обусловленное сжимаемостью самой среды, равно $\beta_0 \rho = (1/\rho c_0^2) \rho$, где β_0 и $c_0 = \sqrt{1/\rho\beta_0}$ — сжимаемость и скорость звука для самой среды. Увеличение сечения трубы под действием давления вызовет дополнительное укорочение столба, равное $\Delta S/S$, где S — площадь сечения трубы и ΔS — приращение площади сечения. Это укорочение имело бы место и для несжимаемой среды. Результирующее укорочение равно $\beta_0 \rho + (\Delta S/S)$. Следовательно, эффективная сжимаемость β среды равна

$$\beta = \beta_0 + \frac{\Delta S}{\rho S}.$$

В среде, обладающей такой сжимаемостью и помещенной в трубу с абсолютно жесткими стенками, волны будут распространяться так же, как в данной среде, помещенной в трубу с податливыми стенками. Таким образом, скорость звука в трубе с податливыми стенками равна

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho\beta}} = \sqrt{\frac{1}{\rho\beta_0 + (\rho\Delta S/\rho S)}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + (\Delta S/S\rho\beta_0)}}.$$

Например, для круглой трубы радиуса a имеем $S = \pi a^2$ и $\Delta S/S = 2u/a$, где u — радиальное смещение стенок трубы, которое предполагаем малым по сравнению с радиусом трубы. Это дает для круглой трубы

$$\beta = \beta_0 + \frac{2u}{\rho a}, \quad (68.1)$$

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + (2u/a\rho\beta_0)}}. \quad (68.2)$$

В дальнейшем будем заниматься только круглыми трубами. Обозначим коэффициент пропорциональности между давлением и радиальным смещением через $\kappa = \rho/u$; это — обобщенный коэффициент упругости стенок. Для обычной упругой реакции стенок $\kappa > 0$ и постоянно. Скорость звука выразится через этот коэффициент формулой

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta_0 + (2\rho/a\kappa)}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + (2/a\kappa\beta_0)}}. \quad (68.3)$$

Мы видим, что при упругой реакции стенок скорость волны в трубе меньше скорости звука в неограниченной среде и дисперсия скорости отсутствует. Реакция упругая, если периметр трубы много меньше длины волны звука в материале трубы. Для металлических узких труб, заполненных газом или жидкостью (например, для водопроводных труб), это условие всегда выполнено.

Коэффициент упругости круглой трубы легко найти для случая, когда толщина δ ее стенки мала по сравнению с радиусом. Изме-

ние радиуса, вызываемое данным давлением, легко найти из условия равновесия половины стенки трубы (рис. 68.1) под действием давления и упругого напряжения в стенке. Согласно показанной на рисунке схеме сил

$$2ap = 2\delta E' \frac{u}{a},$$

где E' — модуль упругости стенки трубы*). Отсюда находим коэффициент упругости трубы:

$$\kappa = \delta E' / a^2.$$

Скорость волн найдется согласно формуле

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + (2a/\delta E' \beta_0)}}. \quad (68.4)$$

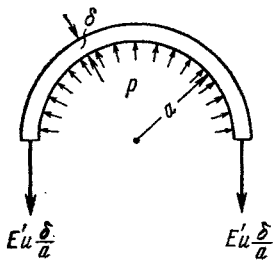


Рис. 68.1. Внутреннее давление в трубе уравновешивается напряжениями в стенке трубы.

Например, скорость волн в воде, заполняющей стальную трубу полуметрового диаметра с толщиной стенки 2,5 см, примерно на 10% меньше, чем скорость звука в неограниченной водной среде.

Изменение радиуса трубы под действием давления звуковой волны внутри нее создает вынужденную изгибную волну в стенке, бегущую вдоль оси трубы. Мы пренебрегали возникающими в изгибной волне перерезывающими силами, действующими между сечениями трубы, ввиду малости этих сил по сравнению с учтенными в расчете силами, растяжения, действующими в каждом сечении.

В трубе с упругими стенками могла бы распространяться волна даже при полной несжимаемости среды. В самом деле, в этом случае формула (68.3) дает

$$c = \sqrt{\alpha \kappa / 2\rho}. \quad (68.5)$$

Практически эта формула применима и при конечной сжимаемости, при достаточно малом коэффициенте упругости стенок. В самом деле, если выполнено соотношение $\kappa \ll 2/a\beta_0$, то под корнем в знаменателе (68.3) можно пренебречь первым членом по сравнению со вторым, т. е. пренебречь сжимаемостью среды, что и приведет снова к (68.5). В этом случае эффективная сжимаемость практически целиком создается податливостью стенок трубы. С этим случаем встречаемся при распространении звука в воде, заполняющей резиновую трубку, а также при распространении пульсовой волны в артерии (случай, в связи с которым и была впервые рассмотрена задача о влиянии податливости стенок трубы на скорость волны в трубе).

*) E' связано с модулем Юнга E материала трубы формулой $E' = E/(1 - \nu^2)$, где ν — коэффициент Пуассона (см. § 138).

Если реакция стенок трубы не чисто упругая, как в разобранным выше случае, то изменение сечения трубы зависит не только от величины давления, но и от формы волны. Тогда понятие постоянной эффективной сжимаемости для любой волны ввести нельзя и оно будет годиться только для гармонических процессов. Эффективная сжимаемость будет зависеть от частоты, сможет менять знак, и появится дисперсия скорости звука: без изменения формы в такой трубе смогут распространяться только синусоидальные волны.

Переходя к этому более общему случаю, предположим, что стенки можно охарактеризовать их проводимостью Y , которую будем считать чисто мнимой (отсутствие поглощения на стенках). Так как радиальная скорость частиц в круглой трубе есть $-i\omega u$, то $Y = -i\omega u/\rho$. Уравнение (68.1) можно переписать в виде

$$\beta = \beta_0 + \frac{2Y}{-i\omega a} = \beta_0 \left(1 + \frac{2Y\rho c_0}{-ik_0 a} \right).$$

Умножая на $\rho\omega^2$, получим квадрат волнового числа волны в трубе:

$$k^2 = k_0^2 + \frac{2Y\rho\omega}{-ia} = k_0^2 \left(1 + \frac{2Y\rho c_0}{-ik_0 a} \right). \quad (68.6)$$

Во всех проведенных расчетах мы полагали, что движение среды одномерное, т. е. пренебрегали радиальными составляющими скоростей частиц по сравнению с их осевыми составляющими. Легко указать критерий допустимости такого предположения. В самом деле, радиальная компонента найдется по проводимости стенок трубы: $v_r = Y \cdot \rho$. Осевая же компонента получится из эффективного сопротивления волны в трубе по формуле $v_x = (1/\rho c) p$, т. е., согласно (68.6),

$$v_x = \left(\sqrt{1 + \frac{2Y\rho c_0}{-ik_0 a}} / \rho c_0 \right) p.$$

Очевидно, условие $|v_r| \ll |v_x|$ будет выполнено, если

$$\rho c_0 Y \ll 2/k_0 a. \quad (68.7)$$

Из (68.6) следует, что боковые стенки с проводимостью упругого типа ($iY > 0$) понижают фазовую скорость, а стенки с проводимостью массового типа ($iY < 0$) повышают фазовую скорость волны по сравнению со скоростью c_0 в неограниченной среде. Если стенка осуществлена в виде обобщенной пружины с коэффициентом упругости κ , т. е. $Y = -i\omega/\kappa$, то приходим к уже рассмотренному выше случаю бездисперсионного распространения со скоростью (68.3). Если стенки осуществлены в виде массы, распределенной с поверхностной плотностью m , то проводимость есть $Y = 1/(-i\omega m)$ и дисперсионное уравнение (68.6) примет вид

$$k^2 = k_0^2 - \frac{2\rho}{a m} = k_0^2 \left(1 - \frac{2\rho}{k_0^2 a m} \right) = k_0^2 \left(1 - \frac{2}{\omega^2 a m \beta_0} \right). \quad (68.8)$$

Распространение в такой трубе возможно не при всех частотах: ниже критической частоты $\omega_{кр} = \sqrt{2/a\mu\beta_0}$ имеем $k^2 < 0$ и волновое число получается чисто мнимым, т. е. волна неоднородная, экспоненциально меняющаяся вдоль волновода, и колебание в ней происходит синфазно во всех точках. При частотах выше $\omega_{кр}$ имеем $k^2 > 0$ и волна распространяющаяся, причем имеется дисперсия: фазовая скорость оказывается равной

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 - (2/\omega^2 a \mu \beta_0)}}$$

В критической точке фазовая скорость бесконечна и затем монотонно уменьшается по мере увеличения частоты, стремясь к скорости звука в неограниченной среде c_0 . Групповую скорость найдем из (68.8), дифференцируя уравнение почленно:

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{c_0^2}{c} = c_0 \sqrt{1 - \frac{2}{\omega^2 a \mu \beta_0}}$$

Групповая скорость равна нулю при критической частоте и при повышении частоты монотонно растет, стремясь к c_0 . Произведение фазовой и групповой скорости остается одинаковым для всех частот и равно квадрату скорости звука в неограниченной среде. Соотношение такого типа характерно и для многих других случаев дисперсионного распространения звука в ограниченных средах.

Если скорость волн в материале трубы меньше скорости звука в среде, заполняющей трубу (так будет, например, для резиновой трубки, заполненной водой), то в диапазоне частот, при которых трубу можно еще считать узкой, будет лежать радиальный резонанс трубы, при котором проводимость стенок обращается в бесконечность. При частотах ниже резонансной проводимость будет иметь характер упругости, а при частотах выше резонансных — характер массы. Соответственно усложнится и дисперсионное поведение трубы. В самом деле, рассмотрим радиальные колебания трубы под действием гармонического внутреннего давления p . Боковые стенки трубы можно считать колебательной системой, в которой элементом массы является масса самой стенки, а упругая сила создается растяжением оболочки при изменении ее радиуса. Для радиального колебания можно написать уравнение движения стенки в виде

$$-\omega^2 i \mu = p - \kappa u, \quad (68.9)$$

где коэффициент упругости κ — дается формулой (68.4). Из (68.9) следует, что проводимость стенки трубы равна

$$Y = \frac{-i\omega u}{p} = \frac{-i\omega/\mu}{\omega_1^2 - \omega^2},$$

где $\omega_1 = \sqrt{\kappa/\mu}$ есть собственная частота радиально-симметричных колебаний пустой трубы. Дисперсионное уравнение (68.6)

можно записать в данном случае в виде

$$k^2 = k_0^2 \frac{\omega_1^2 + \omega'^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} = k_0^2 \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2}, \quad (68.10)$$

где $\omega' = \sqrt{2\rho c_0^2/a\mu}$ — собственная частота радиально-симметричных колебаний трубы в случае, если бы стенка была лишена упругости (при сохранении массы), а $\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega'^2}$ — собственная частота таких же колебаний трубы в случае, если бы среда была лишена массы (при сохранении упругости).

Диапазон частот между ω_1 и ω_2 — «полоса запираания». В этой полосе k мнимое и волна не распространяется, а испытывает экспоненциальное затухание. На рис. 68.2 приведена для случая $\omega_2^2/\omega_1^2 = 1,5$ дисперсионная кривая узкой трубы с упругими стенками, заполненной жидкостью. Заштрихована область запираания (отрицательное k^2).

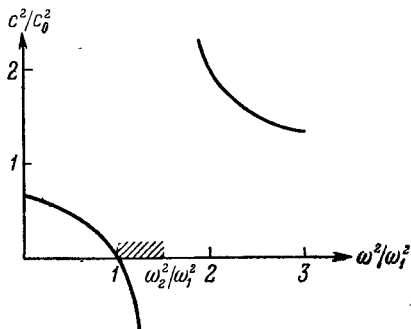


Рис. 68.2. Дисперсионная кривая узкой трубы с упругими стенками, заполненной жидкостью. Заштрихована область запираания (отрицательное k^2).

Условие (68.7) принимает в рассматриваемом случае вид

$$\omega^2 \ll \frac{\kappa}{\mu + (\kappa\rho/2)} = \omega_0^2.$$

По физическому смыслу частота ω_0^2 — это собственная частота радиально-симметричных колебаний трубы при условии, что вся масса заполняющей ее жидкости расположена на стенке.

ВОЛНОВОДЫ

§ 69. Волноводное распространение звука

Звуковая волна, излученная в неограниченную среду, убывает при распространении вследствие расхождения во все стороны. Действие переговорных труб основано на том, что в среде, заключенной в трубу, волна не расходится. Так же без расхождения происходит распространение звука в водопроводных трубах, в вентиляционных каналах, в длинных коридорах, в туннелях метро и т. п. В метро шумно именно потому, что звук, создаваемый движущимся поездом, не расходится в стороны, а бежит внутри туннеля; действительно, в местах выхода линии наружу шум, слышимый внутри вагона, резко снижается. Распространение в трубах интересно именно отсутствием расхождения волн в стороны.

В узких трубах, т. е. в трубах, поперечные размеры которых малы по сравнению с длиной волны звука, могут распространяться только плоские волны, бегущие вдоль оси трубы. В широких трубах распространение звука может иметь совершенно другой характер. Важнейшая особенность распространения звука в широких трубах — изменение формы волны при распространении вдоль оси трубы. Такие широкие трубы называют *волноводами*: термин выбран по аналогии со словами «водопровод», «воздуховод» и т. п. Распространение волн, характерное для таких широких труб, называют *волноводным распространением*.

Волноводами называют также слои среды, заключенные между двумя параллельными звуконепропускаемыми стенками; распространение в широких слоях также носит волноводный характер. В слоях волны расходятся только в двух измерениях и поэтому хотя и ослабляются при распространении, но медленнее, чем в неограниченной среде: вместо убывания давления по закону обратной пропорциональности расстоянию в слое получается обратная пропорциональность корню квадратному из расстояния.

Замечательно, что волноводное распространение возможно и в слоях, не ограниченных какими-либо стенками. Простейший пример — плоский слой какой-либо среды, заключенный между двумя полупространствами, заполненными другой средой, скорость звука в которой больше, чем в слое. Волны, бегущие в та-

ком слое под закритическими углами скольжения, испытывают полное отражение на границах слоя и не могут из него выйти. Полу-пространства с большой скоростью звука играют для этих волн роль непроницаемых стенок.

Волноводы встречаются и в природных условиях. Подводный волновод образуется слоем воды в океане, ограниченным сверху свободной поверхностью (практически идеальным отражателем) и снизу дном моря, скорость звука в котором больше скорости звука в воде. Еще более интересен волновод, создающийся в самой толще воды в силу слоистой неоднородности акустических свойств воды океана по вертикали: на некоторой глубине (обычно на нескольких сотнях метров под поверхностью) скорость звука в воде минимальна и возрастает кверху, где расположены прогреваемые солнцем слои воды (скорость звука в воде, в отличие от других жидкостей, растет с температурой), и книзу — вследствие повышения гидростатического давления (скорость звука во всех жидкостях растет с повышением давления). Слой, содержащий уровень минимальной скорости, явится волноводом, так как лучи, пересекающие этот уровень под малыми углами к горизонтали, рефрагируя в более высоких и более глубоких слоях, возвращаются, как это мы видели в § 57, к этому уровню.

Аналогичные волноводы образуются и в атмосфере вблизи высоты минимальной температуры воздуха, где расположен и минимум скорости звука.

Лучи, удерживаемые подводным волноводом (или каналом, как часто называют естественные волноводы), не доходят ни до дна, где они могли бы частично перейти в грунт, ни до волнующейся поверхности, где они могли бы испытать рассеяние; поглощение же в воде сравнительно мало, и поэтому звук в волноводе распространяется на весьма большое расстояние с малым ослаблением. В качестве примера укажем, что звук взрыва тротилового заряда весом всего 2,7 кг был обнаружен гидрофоном, расположенным в канале на расстоянии 5750 км от взрыва. Звук затратил более одного часа на преодоление этого расстояния. Пришедший звук резко отличался от короткого импульса самого взрыва: он растянулся на целую минуту, что соответствует в пространстве протяженности звуковой волны около 90 км. Такое расплывание сигнала характерно для волноводного распространения импульсов: оно вызвано дисперсией скорости звука в волноводе.

Мы увидим, что без искажения в волноводе могут распространяться только некоторые типы гармонических волн. Дисперсия приводит к тому, что убывание звукового давления вдоль волновода в негармонической волне происходит не просто соответственно степени расхождения волны, так как волна не только расходится в стороны, но и растягивается вдоль направления распространения. Здесь приходится встречаться с очень сложными законами, а всю задачу о распространении негармонического сигнала

приходится решать методом Фурье, разлагая сигнал на его гармонические составляющие.

Но главная трудность изучения распространения звука в волноводах лежит в том, что даже при одной частоте в данном волноводе могут существовать волны, меняющие форму при распространении. Гармонические волны, распространяющиеся без изменения формы, называют *нормальными волнами* данного волновода. Можно показать, что любая гармоническая волна может быть представлена в виде суперпозиции таких нормальных волн. Поэтому начнем с нахождения всех нормальных волн данного волновода на различных частотах, с определения скорости их распространения, дисперсии, распределения давления и скоростей частиц по сечению волновода. Вначале ограничимся простейшими типами волноводов: трубами и слоями с жесткими границами. Таковы все искусственные волноводы, более простые, чем естественные волноводы в непрерывных слоистых средах.

§ 70. Нормальные волны. Плоская задача

Изучение волноводного распространения начнем с простейшего случая — с плоской задачи. Пусть волновод образован однородной средой, заполняющей слой между двумя параллельными стенками или трубу прямоугольного сечения. Координатную плоскость $xу$ выберем на одной из стенок и ограничимся пока движениями, происходящими параллельно плоскости xz и не зависящими от координаты y . Стенки волновода будем считать непроницаемыми для звука. Значит, в направлении оси z волна должна быть стоячей.

Поэтому гармоническую волну частоты ω , бегущую вдоль волновода без изменения формы, можно записать в виде

$$p = p_0 \cos(\zeta z + \epsilon) e^{\pm i \xi x}, \quad (70.1)$$

где верхний и нижний знаки относятся к волнам, бегущим вправо и влево соответственно. Продольная и поперечная компоненты ξ и ζ волнового числа $k = \omega/c$ должны удовлетворять соотношению

$$\xi^2 + \zeta^2 = k^2. \quad (70.2)$$

Следовательно, нормальную волну можно записать также в таком виде:

$$p = p_0 \cos(\zeta z + \epsilon) \exp(\pm i \sqrt{k^2 - \zeta^2} x). \quad (70.3)$$

Величины ζ и ϵ определяются из граничных условий на стенках волновода, т. е. при $z = 0$ и $z = h$, где h — высота волновода. В зависимости от конструкции стенок граничные условия могут зависеть от частоты, но могут и не зависеть. Мы увидим ниже, что при каждой частоте граничные условия определяют не единственное значение ζ , но бесконечный ряд дискретных значений, каждому из которых соответствует своя нормальная волна.

Будем нумеровать нормальные волны в порядке возрастания ζ .

Отметим здесь аналогию нормальных волн с собственными колебаниями среды в ограниченной узкой трубе, где также существует дискретный бесконечный набор (стоячих) волн. Однако в трубе каждое собственное колебание может существовать только на одной-единственной частоте, в то время как нормальная волна в волноводе возможна при любой частоте. Поведение данной нормальной волны существенно зависит от частоты. Для частот, при которых $\zeta < k$, значение ξ вещественно и волна распространяющаяся; при $\zeta > k$ значение ξ мнимое и волна (неоднородная с экспоненциальным изменением амплитуды вдоль волновода) превращается в синфазное колебание среды во всех точках:

$$p = p_0 \cos(\zeta z + \epsilon) \exp(\pm \sqrt{\zeta^2 - k^2} x). \quad (70.4)$$

Как и неоднородные бегущие волны в неограниченной среде, неоднородные нормальные волны не могут существовать во всем волноводе, а только в том полуволноводе, в котором волна убывает, либо на конечном отрезке волновода. Частоту, при которой $\zeta = k$ и, следовательно, $\xi = 0$, называют *критической*. При частоте выше критической волна распространяющаяся, при частоте ниже критической — неоднородная. На самой критической частоте колебания в волноводе происходят синфазно по всей его длине, с постоянной амплитудой вдоль волновода. Волновод на этой частоте ведет себя как труба бесконечной ширины в направлении оси x с длиной, равной h , причем роль крышек играют стенки волновода. Критические частоты волновода — это собственные частоты такой трубы.

Каждую нормальную волну вида (70.1) удобно рассматривать как некоторую гармоническую волну, бегущую вдоль оси x , с фронтом, перпендикулярным к направлению распространения, но, в отличие от плоских волн в неограниченной среде, с амплитудой, меняющейся вдоль фронта (по косинусоиду). Волновое число такой волны есть ξ . Уравнение (70.2) можно считать дисперсионным уравнением нормальных волн: оно связывает волновое число ξ с частотой, входящей в уравнение явно (через посредство k) и неявно (через посредство ζ , в случае зависимости этой величины от частоты). Если волна распространяющаяся, можно ввести понятие *фазовой скорости нормальной волны* γ :

$$\gamma = \omega/\xi. \quad (70.5)$$

Так как в распространяющейся волне $\xi \leq k$, то фазовая скорость нормальных волн больше скорости звука в среде (исключительный случай $\gamma < c$ рассмотрим в § 72). Бесконечность фазовой скорости при критической частоте выражает синфазность колебаний по всей длине волновода.

Продольная компонента скорости частиц в данной нормальной волне равна

$$v_x = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial x} = \pm \frac{\xi}{\rho\omega} p = \pm \frac{p}{\rho\gamma} = \pm \frac{\sqrt{k^2 - \xi^2}}{\rho\omega} p. \quad (70.6)$$

Распределение продольной компоненты скорости совпадает, таким образом, с распределением давления. Соотношению $p = \rho c v$ для плоских волн в неограниченной среде соответствует соотношение $p = \rho\gamma v_x$ в нормальной волне. Величина $\rho\gamma$ — аналог волнового сопротивления для нормальной волны. Для нормальной волны скорость частиц в направлении распространения меньше, чем для плоской волны в неограниченной среде при том же значении давления.

Фазовая скорость данной нормальной волны зависит от частоты: волновое распространение происходит с дисперсией. Для данного номера нормальной волны можно ввести понятие *группы волн*, так же как и для других одномерных волн, как суперпозиции нормальных волн одного и того же номера, но разных (близких) частот. Если спектр нормальной волны узкий, то волна имеет вдоль оси x вид длинного цуга и можно следить за его огибающей, скорость u которой и является групповой скоростью данной нормальной волны. Согласно § 27, $u = d\omega/d\xi$. Дифференцируя обе части дисперсионного уравнения (70.2), найдем

$$\xi d\xi + \zeta \frac{d\zeta}{d\omega} d\omega = \frac{\omega d\omega}{c^2},$$

откуда получим для групповой скорости выражение

$$u = \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{c^2}{\gamma} \frac{1}{1 - c^2 \frac{d(\zeta^2)}{d(\omega^2)}}. \quad (70.7)$$

Если в данном волноводе ζ для данной нормальной волны от частоты не зависит, то получается следующее простое соотношение между фазовой и групповой скоростями:

$$u\gamma = c^2. \quad (70.8)$$

В этом случае групповая скорость нормальной волны всегда меньше скорости звука. Замечательно, что иногда групповая скорость в волноводе может быть больше скорости звука в среде. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, заметим только, что такое явление возможно, например, в тех случаях, когда стенки волновода сами представляют собой упругие среды со скоростью звука в них большей, чем в среде, заполняющей волновод.

Дисперсия скорости звука в волноводах никак не связана со свойствами самой среды, заполняющей волновод: это — «геометрическая» дисперсия, обусловленная наличием границ. В этом отношении есть сходство между дисперсией в волноводе и дисперсией изгибных волн в стержнях, также обусловленной наличием

границ (хотя законы дисперсии в обоих случаях различны). В гл. XII мы познакомимся с дисперсией плоских волн в неограниченной среде, носящей другой характер и обусловленной именно свойствами среды.

Распределение поперечной компоненты скорости частиц дается формулой

$$v_z = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial z} = p_0 \frac{-\zeta}{i\rho\omega} \sin(\zeta z + \varepsilon) e^{\pm i\xi x}. \quad (70.9)$$

Если ни ζ , ни ε не зависят для данной нормальной волны от частоты, то поперечные распределения давления и обеих компонент скоростей также не зависят от частоты. Траектории частиц — эллипсы с осями, лежащими вдоль осей x и z . В узлах давления эллипсы вырождаются в вертикальные отрезки, а в максимумах давления — в горизонтальные отрезки.

В неоднородной нормальной волне ($\zeta > k$) скорости частиц равны

$$v_x = i \frac{\sqrt{\zeta^2 - k^2}}{\rho\omega} \cos(\zeta z + \varepsilon) \exp(-\sqrt{\zeta^2 - k^2} x),$$

$$v_z = i \frac{\zeta}{\rho\omega} \sin(\zeta z + \varepsilon) \exp(-\sqrt{\zeta^2 - k^2} x).$$

Компоненты скорости оказываются синфазными, значит, траектории частиц — отрезки прямых линий. Наклон прямых меняется по высоте волновода: от горизонтального в точках $\zeta z + \varepsilon = l\pi$ до вертикального в точках $\zeta z + \varepsilon = [(2l - 1)/2]\pi$. Напомним, что для плоских волн ситуация обратная: траектории — отрезки прямых в однородных волнах и эллипсы в неоднородных волнах. В неоднородной нормальной волне амплитуда продольной компоненты скорости частиц может превышать скорость частиц в однородной плоской волне при той же амплитуде давления в данной точке.

Нормальную волну можно представить в виде суперпозиции двух плоских волн, бегущих под одинаковыми углами к оси волновода. Так, согласно (70.1) для волны, бегущей вправо,

$$p = \frac{1}{2} p_0 [\exp(i\xi x + i\zeta z + i\varepsilon) + \exp(i\xi x - i\zeta z - i\varepsilon)]; \quad (70.10)$$

ξ и ζ — компоненты волновых векторов составляющих плоских волн по осям x и z . Углы наклона волновых векторов к оси волновода — углы скольжения составляющих волн — определяются уравнением

$$\sin \theta = \pm \zeta/k \text{ или } \cos \theta = \xi/k. \quad (70.11)$$

Компонента скорости частиц вдоль оси волновода может быть записана через угол скольжения в виде

$$v_x = (p/\rho c) \cos \theta.$$

Фазовая скорость нормальной волны выразится через угол скольжения составляющих волн формулой

$$\gamma = c/\cos \theta. \quad (70.12)$$

Фазовая скорость равна скорости следа составляющих волн на стенках волновода. Величина ξ — волновое число следа.

Каждую из плоских волн, образующих нормальную волну, можно считать отражением второй из них на соответственной границе. Волна $\exp(i\xi x + i\zeta z + i\varepsilon)$ — отражение волны $\exp(i\xi x - i\zeta z - i\varepsilon)$ в стенке $z = 0$, а волна $\exp(i\xi x - i\zeta z - i\varepsilon)$ — отражение волны $\exp(i\xi x + i\zeta z + i\varepsilon)$ в стенке $z = h$. Новым по сравнению с обычным случаем отражения от стенки является взаимность соотношения падающая — отраженная волна на обеих границах сразу. Именно требование этой взаимности и приводит к дисперсионному уравнению (70.2). При критической частоте $\theta = \pi/2$.

Нормальную волну можно интерпретировать еще одним способом: как участок интерференционной картины в неограниченной среде, образованной двумя плоскими волнами, наклоненными своими волновыми векторами под углами $\pm\theta$ к оси x (ср. § 18). При этом на плоскостях $z = 0$ и $z = h$ отношение давления к z -компоненте скорости должно быть как раз равно импедансу стенок при данном угле скольжения. Тогда можно заключить в волновод участок интерференционной картины, не изменяя ее. Заключенная в волновод часть интерференционной картины и представляет собой нормальную волну в волноводе. Например, если на этих плоскостях z -компонента скорости частиц обращается в нуль, то в среду можно вложить две бесконечные абсолютно жесткие плоскости $z = 0$ и $z = h$, не нарушая движения среды.

Представление нормальной волны в виде двух плоских волн возможно и для неоднородных нормальных волн. В этом случае обе составляющие плоские волны тоже будут неоднородными, бегущими по оси z .

§ 71. Волноводы с идеальными стенками

Свойства нормальных волн проиллюстрируем на примере волноводов с идеальными стенками. Пусть обе стенки абсолютно жесткие. Условие абсолютной жесткости стенок — это требование обращения в нуль z -компоненты скорости частиц на стенках. Согласно формуле (70.9) для того, чтобы условие было выполнено на нижней стенке, должно быть $\varepsilon = 0$. Условие на верхней стенке принимает тогда вид $\sin \zeta h = 0$, откуда находим

$$\zeta h = l\pi,$$

где l — любое целое число. Таким образом, нормальная волна в волноводе с жесткими стенками имеет вид

$$p = p_0 \cos\left(\frac{l\pi}{h} z\right) \exp\left(ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh}\right)^2} x\right) \quad (71.1)$$

(для определенности выбираем волны, бегущие вправо). Компоненты скорости частиц выражаются формулами

$$v_x = \frac{\sqrt{1 - (l\pi/kh)^2}}{\rho c} p,$$

$$v_z = -\frac{l\pi/kh}{i\rho c} p_0 \sin\left(\frac{l\pi}{h} z\right) \exp\left\{ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh}\right)^2} x\right\}.$$

Целое число $l = 0, 1, 2, \dots$ называют номером нормальной волны. Оно дает число нулей (узлов давления) в поперечном распределении амплитуды давления. На рис. 71.1 слева показано

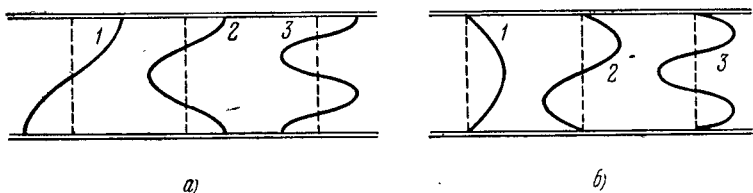


Рис. 71.1. а) Распределение давлений и x -компоненты скорости частиц для первых трех нормальных волн (не считая нулевой) в волноводе с жесткими стенками; б) распределение z -компоненты скорости частиц для этих волн.

распределение давления для нескольких первых номеров нормальных волн; одновременно эти графики дают в некотором масштабе распределение x -компоненты скорости частиц; справа дано распределение z -компоненты скорости. По высоте волновода укладывается целое число полувольт, равное номеру нормальной волны. Так как величина ζ для данного номера нормальной волны не зависит от частоты, то эти длины полувольт никак не связаны с длиной волны звука данной частоты в неограниченной среде: в данном случае распределение давлений поперек волновода в данной нормальной волне не зависит от частоты звука, а только от номера волны и от высоты волновода; оно не зависит и от свойств среды, заполняющей волновод. Это распределение поперек волновода в данной нормальной волне полностью совпадает по форме с распределением давления в узкой трубе длины h , закрытой с обеих сторон абсолютно жесткими крышками, при собственном колебании того же номера, что и данная нормальная волна.

В волноводе с абсолютно жесткими стенками существует нулевая нормальная волна вида $p = e^{ikx}$ ($l = 0$, $\zeta = 0$, $\xi = k$). Для нее нет соответственного собственного колебания в трубе. Это — обычная плоская волна, которая распространяется и в не-

ограниченной среде. Она не типична для волноводов: она, в частности, не имеет дисперсии. Для всех номеров, не равных нулю, распространение типично волноводное. Дисперсионное уравнение

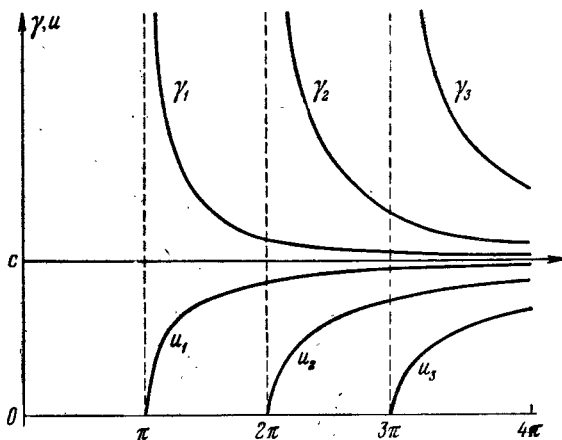


Рис. 71.2. Дисперсионные кривые фазовых и групповых скоростей в волноводе с жесткими стенками. Горизонтальная прямая — «дисперсионная кривая» для нулевой нормальной волны (фазовая и групповая скорости постоянны и равны скорости звука в неограниченной среде.)

для волновода с жесткими стенками можно записать в виде

$$\xi = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (l\pi/h)^2} = k \sqrt{1 - (l\pi/kh)^2}. \quad (71.2)$$

Фазовая скорость равна

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{1 - (l\pi/kh)^2}}. \quad (71.3)$$

Так как ξ для данного номера нормальной волны от частоты не зависит, то групповая скорость равна

$$u = c \sqrt{1 - (l\pi/kh)^2}. \quad (71.4)$$

За исключением волны нулевого номера, фазовые скорости всех нормальных волн выше скорости звука в среде, а групповые — ниже этой скорости. При увеличении частоты фазовая скорость монотонно убывает, стремясь к c асимптотически сверху, а групповая — растет, стремясь к c снизу. При критической частоте фазовая скорость данной нормальной волны равна бесконечности, а групповая — нулю. Для данной частоты фазовая скорость тем выше (а групповая тем ниже), чем выше номер нормальной волны. Для неоднородных нормальных волн показатель экспоненты затухания тем больше, чем выше номер волны.

На рис. 71.2 дан график частотной зависимости фазовых и групповых скоростей нескольких нормальных волн первых но-

меров. В качестве аргумента взята удобная при изучении волноводов безразмерная величина kh , пропорциональная частоте; этой величиной часто будем пользоваться как аргументом и в дальнейшем. Проводя на графике прямую, параллельную оси абсцисс, найдем значения аргумента kh для волн разных номеров, имеющих одинаковые фазовые (и групповые) скорости. Любая сумма нормальных волн этих частот, взятых с произвольными амплитудами, распространяется в волноводе без изменения формы. Две разные нормальные волны имеют равные фазовые или групповые скорости, если их частоты относятся как их номера. Следовательно, дисперсионные кривые волн разных номеров переходят друг в друга при однородном растяжении графика; абсциссы точек пересечения графиков с любой горизонтальной прямой образуют арифметическую прогрессию.

Набор критических частот в волноводе с жесткими стенками совпадает с набором собственных частот в трубе длиной h с жесткими крышками. При дальнейшем понижении частоты ниже критического значения распространение данной нормальной волны прекращается и она превращается в неоднородную. При этом распределение давления поперек волновода остается таким же, как и при частотах выше критической. Прекращение распространения называют *запиранием* волновода для данной нормальной волны.

Если волновод оказался запертым для какого-либо номера, то он будет заперт и для всех волн высших номеров. Для нулевой нормальной волны критической частоты нет (условно, для общности, можно считать, что критическая частота есть, но равна нулю): для нее волновод не запирается ни при какой конечной частоте, и эта волна в волноводе с жесткими стенками всегда распространяющаяся. Из других нормальных волн при данной частоте распространяются только те, для которых $l < kh/\pi$; при частотах ниже первой критической ($kh < \pi$; высота волновода меньше половины длины волны звука данной частоты) распространяется только волна нулевого номера; все остальные нормальные волны неоднородные. Следовательно, такая труба *узкая* (см. § 61).

Узкие трубы часто применяют с целью получить в них плоскую волну (такие трубы применяются, например, для измерения импедансов материалов). Мы уже знаем, что в неограниченном пространстве создать плоскую волну невозможно, а в узкой трубе, какой бы излучатель ни создавал гармоническое звуковое поле, на некотором расстоянии от него в волноводе будет бежать только плоская волна вида e^{ikx} : остальные нормальные волны, которые могли создаться источником, неоднородные, и их поле быстро затухает при удалении от источника. В широкой трубе получить поле плоской волны в чистом виде трудно, так как в ней могут распространяться и волны высших порядков. Это обстоятельство ограничивает на практике поперечные размеры труб, используемых для создания в них плоских волн.

В широкой трубе также можно создать плоскую волну, пользуясь специальным источником, например, излучая звук пластинкой, закрывающей все сечение трубы, совершающей колебания поршневого типа и не возбуждающей волн высших порядков. Но если излучатель не чисто поршневой или если в волноводе имеются какие-либо неровности, то нормальные волны высших порядков в волноводе появятся и поле нулевой нормальной волны будет в той или иной степени этими волнами искажено. Только в узкой трубе любое искажение формы плоской волны экспоненциально затухает вдоль нее и поэтому практически не сказывается.

Представление нормальной волны в виде пары плоских волн имеет для волновода с жесткими стенками вид

$$p = \frac{1}{2} p_0 \left[\exp \left(i \frac{l\pi}{h} z + ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right) + \exp \left(-i \frac{l\pi}{h} z + ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right) \right]. \quad (71.5)$$

Углы скольжения этих волн определяются зависимостью

$$\sin \theta = l\pi/kh. \quad (71.6)$$

Фазовая скорость выражается через этот угол скольжения (как и для любого волновода) формулой (70.12). Групповая скорость в волноводе с жесткими стенками равна $u = c \cos \theta$. Для наглядной интерпретации этого выражения достаточно представить себе, что вместо монохроматической волны взята волна с узким спектром — длинный цуг. В неограниченной среде скорость цуга равна c . Но в волноводе нормальная волна образована последовательными отражениями плоской волны от стенок, происходящими подобно отражениям мяча, брошенного об стенку под углом θ . Цуг проходит зигзагообразный путь, двигаясь вдоль зигзагов со скоростью c . Поэтому вдоль оси волновода его перемещение происходит со скоростью $c \cos \theta$, т. е. с групповой скоростью.

Для волновода с абсолютными мягкими стенками найдем нормальные волны, полагая $\epsilon = -\pi/2$ и $\zeta h = l\pi$ ($l = 1, 2, \dots$). Нормальные волны в таком волноводе имеют вид

$$p = p_0 \sin \left(\frac{l\pi}{h} z \right) \exp \left\{ ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right\}.$$

Компоненты скорости частиц равны

$$v_x = \frac{\sqrt{1 - (l\pi/kh)^2}}{\rho c} p,$$

$$v_z = \frac{l\pi/kh}{i\rho c} p_0 \cos \left(\frac{l\pi}{h} z \right) \exp \left\{ ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right\}.$$

Нулевая волна отсутствует. Ниже частоты $\pi c/h$ — критической частоты для нормальной волны номера l — никакая волна в дан-

ном волноводе распространяться не может. Поперечные распределения давления и z -компоненты скорости совпадают с распределениями соответственных величин в трубе с открытыми концами. Критические частоты, фазовые и групповые скорости в волноводе с мягкими стенками даются теми же формулами, что и для волновода с абсолютно жесткими стенками. Таким образом, график дисперсионных кривых y^2 обоих типов волноводов одинаковый (за исключением линии нулевой волны, отсутствующей для волновода с мягкими стенками). Для волновода с мягкими стенками представление нормальной волны в виде пары плоских волн имеет вид

$$p = \frac{1}{2i} p_0 \left[\exp \left(i \frac{l\pi}{h} z + ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right) - \exp \left(-i \frac{l\pi}{h} z + ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right) \right].$$

Углы скольжения этих волн определяются формулой (71.6).

Наконец, в волноводе с одной жесткой и одной мягкой стенкой (для определенности за жесткую стенку примем границу $z = 0$) нормальные волны имеют вид

$$p = p_0 \cos \left(\frac{2l-1}{2h} \pi z \right) \exp \left\{ ik \sqrt{1 - \left(\frac{2l-1}{2kh} \pi \right)^2} x \right\},$$

что соответствует $\varepsilon = 0$ и граничному условию на верхней границе $\zeta h = [(2l-1)/2] \pi$, где $l = 1, 2, \dots$. Здесь также отсутствует нулевая волна. Критические частоты образуют последовательность, пропорциональную нечетным целым числам: $\frac{1}{2} \frac{\pi c}{h}$; $\frac{3}{2} \frac{\pi c}{h}$; $\frac{5}{2} \frac{\pi c}{h}$, ..., как собственные частоты в трубе с одной жесткой и одной мягкой стенкой. Нормальная волна выражается в виде суммы двух плоских волн следующим образом:

$$p = \frac{1}{2} p_0 \left[\exp \left(i \frac{2l-1}{2h} \pi z + ik \sqrt{1 - \left(\frac{2l-1}{2kh} \pi \right)^2} x \right) + \exp \left(-i \frac{2l-1}{2h} \pi z + ik \sqrt{1 - \left(\frac{2l-1}{2kh} \pi \right)^2} x \right) \right].$$

Углы скольжения плоских волн определяются из соотношения

$$\sin \theta = [(2l-1)/2kh] \pi.$$

Фазовая и групповая скорости равны соответственно

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{2l-1}{2kh} \pi \right)^2}, \quad u = c \sqrt{1 - \left(\frac{2l-1}{2kh} \pi \right)^2}.$$

§ 72. Нормальная проводимость стенок

Теперь рассмотрим волноводы со стенками, характеризующимися нормальной проводимостью. Характерные черты таких волноводов будут ясны уже в случае, если одна стенка волновода (например, нижняя) абсолютно жесткая и только вторая характеризуется нормальной проводимостью. Полагая для простоты записи амплитуду волны равной единице, можем нормальные волны для этого случая записать в виде

$$p = e^{i\xi x} \cos \zeta z; \quad (72.1)$$

z -компонента скорости частиц выразится формулой

$$v_z = -\frac{\zeta}{i\rho\omega} e^{i\xi x} \sin \zeta z. \quad (72.2)$$

Граничное условие на верхней стенке запишется так:

$$(v_z/p)_{z=h} = Y,$$

где Y — проводимость стенки. Подставляя сюда (72.1) и (72.2), найдем условие на верхней стенке:

$$\zeta h \operatorname{tg} \zeta h = -i\rho\omega h Y = -i\eta kh, \quad (72.3)$$

где $\eta = \rho c Y$ — относительная проводимость стенки. Эту формулу можно рассматривать как дисперсионное уравнение для данного волновода: определив отсюда ζ , найдем ξ из (70.2). В настоящем параграфе ограничимся случаями чисто мнимой проводимости, т. е. будем считать, что потерь на стенке нет. Наличие вещественного слагаемого в Y , соответствующего поглощению на стенке, рассмотрим в § 74.

Вясним, когда можно пренебрегать конечной проводимостью второй стенки, т. е. при каком условии нормальные волны в волноводе мало отличаются от соответственных волн в волноводе с обеими жесткими стенками. Требования два: должно мало измениться распределение давлений поперек волновода и должна мало измениться скорость волны. Для нулевой нормальной волны первое требование будет удовлетворено, если величина $|\zeta h|$ мала по сравнению с единицей. В этом случае, полагая в (72.3) тангенс равным аргументу, имеем приближенно $(\zeta h)^2 = -i\eta kh$, откуда получим требование к проводимости в виде: $|\eta| \ll 1/kh$. Далее приближенно найдем

$$\xi h = kh \left(1 + \frac{1}{2} i \frac{\eta}{kh} \right). \quad (72.4)$$

Следовательно, для того чтобы скорость волны мало изменилась, должно выполняться требования $|\eta| \ll kh$. Для широкого волновода более жестким является первое условие, для узкого — второе.

Для волны произвольного номера $l \neq 0$ приближенное сохранение распределения давления поперек волновода требует выполнения условия $\zeta h = l\pi + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$; тогда (72.3) приводит к требованию $|\eta| \ll l\pi/kh$. Далее с той же степенью точности, что и выше

$$(\xi h)^2 = (\xi_0 h)^2 \left[1 + \frac{2i\eta kh}{(\xi_0 h)^2} \right], \quad (72.5)$$

где $(\xi_0 h)^2 = (kh)^2 - (l\pi)^2$, и, следовательно, чтобы скорость мало изменилась, требуется выполнение условия $|\eta| \ll (\xi_0 h)^2/2kh$. Это условие может оказаться значительно жестче первого условия при приближении к критической частоте данной нормальной волны.

Можно получить аналогичные условия для очень большой проводимости стенки. Нормальные волны будут в этом случае близки к волнам с абсолютно мягкой второй стенкой. Если проводимость ни очень мала, ни очень велика, то нормальные волны не похожи на те, которые получаются при идеальных стенках, и приходится исследовать дисперсионное уравнение более подробно. К этому сейчас и перейдем.

Если стенка осуществлена в виде сосредоточенной массы, то проводимость ее равна $i/\omega\mu$, где μ — поверхностная плотность стенки. Дисперсионное уравнение можно записать в этом случае в виде

$$\operatorname{ctg} \zeta h = (\mu/\rho h) \zeta h. \quad (72.6)$$

Если стенка осуществлена в виде сосредоточенной упругости, то проводимость равна $-i\omega/\kappa$, где κ — поверхностный коэффициент упругости. В этом случае дисперсионное уравнение принимает вид

$$\zeta h \operatorname{tg} \zeta h = -\rho h \omega^2/\kappa = -\omega^2/\omega_0^2. \quad (72.7)$$

Здесь через $\omega_0 = \sqrt{\kappa/\rho h}$ обозначена собственная частота осциллятора, образованного стенкой как элементом упругости, и средой, заполняющей волновод, как элементом массы.

Если проводимость стенки чисто мнимая, но стенка осуществлена не в простейшем виде сосредоточенной массы или упругости, а в виде более сложной конструкции, вышеприведенными формулами можно все же пользоваться, однако в этом случае следует приписывать величинам поверхностной плотности или упругости значения, соответственно меняющиеся с частотой. Так, для положительной мнимой проводимости достаточно положить в (72.6) $\mu = 1/(-i\omega Y(\omega))$, а для отрицательной мнимой проводимости положить в (72.7) $\kappa = \omega/iY(\omega)$.

Найдем нормальные волны для стенки в виде сосредоточенной массы. Дисперсионное уравнение можно решать графическим методом, отыскивая точки пересечения ветвей котангенсоиды $\operatorname{ctg} \zeta h$

и прямой $(\mu/\rho h) \zeta h$ (рис. 72.1). Абсциссы получающихся точек пересечения дадут нам искомые значения ζh для последовательных номеров нормальных волн. Так как эти значения не зависят от частоты волны, то (как и в случае абсолютно жестких или абсолютно мягких стенок) распределение поля поперек волновода для данной нормальной волны также не будет зависеть от частоты и будет справедлива формула (70.8). В рассматриваемом волноводе имеются волны всех номеров, включая и нулевую волну, т. е.

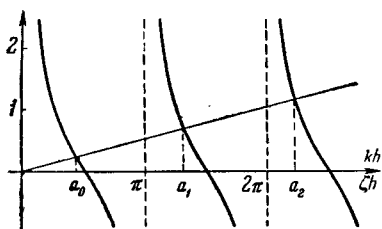


Рис. 72.1. Графическое решение дисперсионного уравнения (72.6) для волновода с массовой стенкой. Точки a_0, a_1, \dots дают значения ζh для нормальных волн соответственных номеров независимо от частоты; они же дают критические значения kh для этих нормальных волн.

волны номера l лежит между $l\pi$ и $[(2l + 1)/2] \pi$, сдвигаясь к первому значению при увеличении массы и ко второму — при уменьшении массы. При безграничном увеличении поверхностной плотности или при стремлении ее к нулю придем соответственно к предельным случаям волновода с обеими бесконечно жесткими стенками и к волноводу с одной бесконечно жесткой и одной абсолютно мягкой стенкой. Последнее объясняет «запирание» волновода на конечной частоте для нулевой волны.

Для случаев «малой» и «большой» массы стенки дисперсионное уравнение можно решить приближенно и аналитически. Так, для тех номеров нормальных волн, для которых $\mu/\rho h \ll 1/l\pi$ («малая нагрузка»), можно положить $\zeta h = [(2l + 1)/2] \pi - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$. Тогда из (72.6) найдем приближенно

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\rho h} \frac{2l+1}{2} \pi, \quad \text{откуда} \quad \zeta h = \frac{2l+1}{2} \pi \left(1 - \frac{\mu}{\rho h} \right).$$

Нормальные волны мало отличаются от волн для волновода с мягкой стенкой. Для нормальных волн, для которых $\mu/\rho h \gg 1/l\pi$ («большая нагрузка»), можно положить $\zeta h = l\pi + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$. Тогда приближенно

$$\varepsilon = \frac{\rho h}{\mu l \pi}, \quad \text{откуда} \quad \zeta h = l\pi \left(1 + \frac{\rho h}{\mu (l\pi)^2} \right).$$

Нормальные волны высоких номеров мало отличаются от нормальных волн для волновода с абсолютно жесткими стенками, как и следовало ожидать ввиду роста импеданса массового типа при увеличении частоты.

Теперь перейдем к случаю стенки упругого типа. Выясним раньше всего, возможна ли в таком волноводе нулевая волна, т. е. волна, сохраняющая знак давления по всему поперечному сечению волновода. Для того чтобы сохранялся знак давления, должно быть $\zeta h < \pi/2$. Но в пределах первой четверти тангенс положителен, значит, уравнение (72.7) такого корня не имеет и нулевой волны с вещественным ζ быть не может. Решение, однако, есть при ζ чисто мнимом: полагая $\zeta = ir$, приведем (72.7) к виду

$$rh \operatorname{th} rh = i\rho\omega h Y. \quad (72.8)$$

Так как при изменении r от нуля до бесконечности левая часть (72.8) изменяется также от нуля до бесконечности, то, каково бы ни было отрицательное мнимое Y , уравнение всегда имеет решение. Искомая волна имеет вид

$$p = \operatorname{ch}(rz) \cdot \exp(i\sqrt{k^2 + r^2}x), \quad (72.9)$$

где r — решение уравнения (72.8). Таким образом, в волноводе с упругой стенкой нулевая волна имеется при любой частоте (критическая частота равна нулю). Нулевая волна при низкой частоте — это то же, что волна в узкой трубе с упругой стенкой (§ 68). Фазовая скорость этой волны меньше скорости звука в неограниченной среде, — это и есть то исключение, которое упоминалось в § 70. Нулевая волна обладает дисперсией скорости.

Для волновода с упругой стенкой, осуществляемой устройством типа пружины, дисперсионное уравнение для нулевой волны можно представить в виде

$$\operatorname{cth} rh = \frac{\kappa h}{\rho c^2 (kh)^2} rh = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} rh. \quad (72.10)$$

Это уравнение удобно решать графически (рис. 72.2), отыскивая точку пересечения графиков зависимости от rh гиперболического котангенса $\operatorname{cth} rh$ и прямой

$$\frac{\kappa h}{\rho c^2 (kh)^2} rh = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} rh.$$

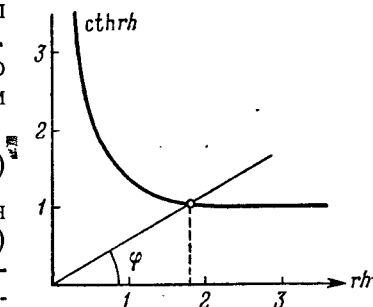


Рис. 72.2. Графическое решение дисперсионного уравнения (72.10) для нулевой волны в волноводе с упругой стенкой.

Если задано значение kh или частота волны, то угол наклона φ прямой найдется из уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{\kappa h}{\rho c^2 (kh)^2}.$$

При $\omega = \omega_0$, что соответствует $\varphi = 45^\circ$, $rh = 1,2$ и $\operatorname{ch} rh = 1,8$; это значит, что давление на нижней стенке составляет $1/1,8 = 0,56$ от давления на верхней стенке.

Дисперсионное уравнение упрощается для «малых» ($\omega/\omega_0 \ll 1$) и для «больших» ($\omega/\omega_0 \gg 1$) частот. В первом случае $rh \ll 1$ и можно положить приближенно $\operatorname{th} rh = rh$; дисперсионное уравнение примет вид $(rh)^2 = \omega^2/\omega_0^2$, откуда получим $\xi^2 = k^2 (1 + \rho c^2/\kappa h)$. В этом случае распространение происходит в принятом приближении без дисперсии, со скоростью

$$v^{(0)} = \frac{c}{\sqrt{1 + \rho c^2/\kappa h}}.$$

Поле нулевой волны в этом случае приближенно выражается так:

$$p = \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\rho c^2}{\kappa h} (kz)^2 \right] \exp \left\{ ik \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho c^2}{\kappa h} \right) x \right\},$$

т. е. давление распределено по сечению волновода почти равномерно. Выражение для скорости волны подобно выражению, полученному в § 68 для узкой трубы с упругой стенкой. Мы видим, что применимость этой формулы не требует обязательно узости волновода: достаточно выполнения условия

$$\frac{\rho c^2}{\kappa h} (kh)^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1,$$

которое осуществимо и в широкой трубе ($\xi h \gg 1$), если только κ достаточно велико.

В другом предельном случае $\omega/\omega_0 \gg 1$ гиперболический котангенс можно приближенно положить равным единице. Тогда $rh \approx (\rho c^2/\kappa h) (kh)^2 \gg 1$ и дисперсионное уравнение нулевой нормальной волны примет вид

$$\xi^2 = k^2 \left[1 + \frac{(\rho c)^2}{(\kappa/\omega)^2} \right].$$

Дисперсионное уравнение оказывается независимым от высоты волновода и совпадает с уравнением поверхностной волны, бегущей вдоль импедансной упругой поверхности с поверхностной упругостью κ (§ 59). Это значит, что поле вблизи жесткой стенки настолько мало по сравнению с полем на упругой стенке, что наличие или отсутствие второй стенки (или замена ее стенкой с другими свойствами) уже не играет роли. Здесь в свою очередь выделяются два предельных случая: большое и малое значение параметра

$\frac{\rho c}{\kappa/\omega}$ по сравнению с единицей (выше предполагалось только, что это отношение велико по сравнению с $1/kh$). Для случая $\frac{\rho c}{\kappa/\omega} \gg 1$ получим фазовую скорость

$$\gamma = \kappa/\rho\omega.$$

Фазовая скорость может оказаться много меньшей c . Групповая скорость равна в этом случае половине фазовой.

Для другого предельного случая $\frac{\rho c}{\kappa/\omega} \ll 1$ как фазовая, так и групповая скорости мало зависят от частоты, почти равны скорости в неограниченной среде и обе меньше этой скорости. Однако распределение давления поперек волновода и в этом случае таково, что на второй стенке поле много меньше, чем на упругой стенке. Хотя поправка к скорости сравнительно с однородной волной и мала, но в распределение амплитуд по фронту она входит в экспоненту и поэтому сказывается сильно.

Итак, в волноводе с упругой стенкой всегда есть нулевая упругая волна (72.9). Фазовая скорость ее распространения всегда меньше скорости распространения в неограниченной среде.

Кроме нулевой волны в таком волноводе могут распространяться и нормальные волны волноводного типа — волны высших номеров, для которых давление уже не сохраняет знак по всему сечению волновода. Каждая из них будет даваться формулой (72.1) при вещественных значениях ζ . Для каждой из них имеется своя критическая частота, ниже которой данная нормальная волна будет неоднородной вдоль волновода. Выше критической частоты ξ будет вещественным и меньшим, чем k .

В самом деле, отказавшись от условия $\zeta h < \pi/2$, можем удовлетворить дисперсионному уравнению (72.7) бесконечным числом решений, при которых $\zeta h > \pi/2$. Критические частоты получатся при помощи построения, показанного на рис. 72.3, выполненного для случая проводимости типа пружины. Значения $(kh)_{кр}$ (точки a_1, a_2, \dots) соответствуют критическим частотам для первой, второй, \dots нормальной волны. Этот же график позволяет находить значения ζh для любого заданного значения kh . Абсциссы точек параболы — $(\rho c^2/\kappa h) (kh)^2$ представляют собой значения kh , а абсциссы последовательных ветвей графика, изображающего функцию $\zeta h \operatorname{tg} \zeta h$, представляют собой значения ζh . На графике дано построение, решающее дисперсионное уравнение для данной частоты, т. е. для заданного значения $kh = x$. Построение позволяет по данному kh получить соответствующее значение $\zeta h = b_1, b_2, \dots$ для каждой из ветвей графика, соответствующей каждая отдельной нормальной волне. Для примера, изображенного на графике, первые две волны имеют значения $\zeta h = b_1, \zeta h = b_2$, меньшие, чем исходное значение $kh = x$, и, следовательно, для них значения ξ вещественны (и меньше k) и соответственные

нормальные волны распространяющиеся. Для третьей нормальной волны получается значение $\zeta h = b_3$, большее x и, следовательно, значение ξ чисто мнимое: волна — неоднородная вдоль оси волновода.

В данном случае для волны данного номера l значение ζh , а значит и распределение давления поперек волновода, не остается постоянным, как это было при идеальных стенках или стенках в виде сосредоточенной массы, но меняется с изменением частоты.

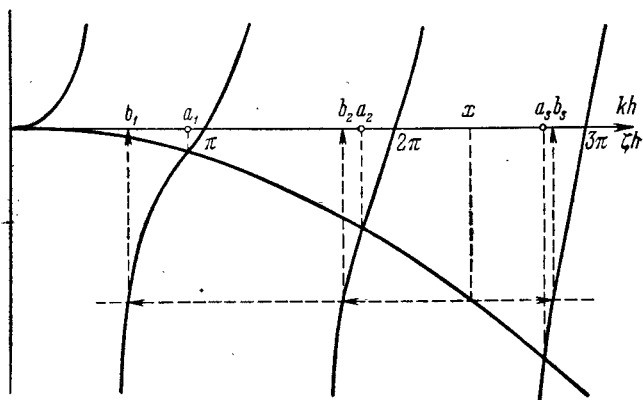


Рис. 72.3. Графическое решение уравнения (72.7) для волновода с упругой стенкой для нормальных волн порядка 1, 2, 3,

Из рис. 72.2 видно, что критическое значение $(kh)_{кр}$ для нормальной волны номера l всегда лежит между $[(2l - 1)/2] \pi$ и $l\pi$. При безграничном повышении частоты, начиная от критической, величина ζh монотонно уменьшается от значения $(kh)_{кр}$, стремясь к величине $[(2l - 1)/2] \pi$. При бесконечной частоте распределение давления поперек волновода такое же, как для абсолютно мягкой верхней стенки. Число узлов давления по высоте волновода для нормальной волны данного номера равно при любой частоте номеру волны, как это было и в случае волновода с абсолютно жесткими стенками.

Для каждой данной волны фазовая скорость уменьшается при увеличении частоты. Поэтому в дисперсионном уравнении (72.7) от частоты зависят ξ , и ζ , так что для волновода с упругой стенкой уже нет такого простого соотношения между фазовой и групповой скоростью, какое имело место для ранее рассмотренных волноводов. Ясно только, что при бесконечном увеличении частоты как фазовая, так и групповая скорости стремятся к скорости звука в неограниченной среде. Так же, как и для случая абсолютно жесткой (или абсолютно мягкой) стенки, фазовая скорость при критической частоте равна бесконечности, и волна в волноводе представляет собой одномерное колебание поперек волновода, синфаз:

ное по всей его длине и совпадающее с колебанием в узкой трубе длиной h с крышкой с проводимостью $-i\omega/\kappa$.

Как и для нулевой нормальной волны, для нормальных волн высших порядков также можно получить приближенные решения дисперсионного уравнения для предельных случаев малых и больших частот. Так, для $\omega/\omega_0 \ll 1$ из (72.7) следует, что ζh для волны номера l близко к $l\pi$. Полагая $\zeta h = l\pi - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, имеем приближенно

$$\varepsilon = \frac{1}{l\pi} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2, \quad \text{откуда} \quad \zeta h = l\pi \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0 l\pi} \right)^2 \right]$$

и приближенно

$$\xi^2 = k^2 \left[1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2 + 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0 l\pi} \right)^2 \right].$$

Для $\omega/\omega_0 \gg 1$ из (72.7) следует, что ζh близко к $[(2l-1)/2]\pi$. Полагая $\zeta h = [(2l-1)/2]\pi + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, имеем приближенно

$$\varepsilon = \frac{2l-1}{2} \pi \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \quad \text{и} \quad \zeta h = \frac{2l-1}{2} \pi \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right],$$

откуда

$$\xi^2 = k^2 \left\{ 1 - \left(\frac{2l-1}{2} \frac{\pi}{kh} \right)^2 \left[1 + 2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] \right\}.$$

Теперь перейдем к волноводам с обеими стенками, характеризуемыми нормальной проводимостью. Обозначим входные проводимости нижней и верхней стенок через Y_0 и Y_1 соответственно. Нормальную волну будем искать в виде (70.1). Граничные условия для нижней и верхней стенок запишутся в виде

$$\frac{\xi}{i\rho\omega} \operatorname{tg} \varepsilon = Y_0, \quad \frac{-\xi}{i\rho\omega} \operatorname{tg} (\zeta h + \varepsilon) = Y_1.$$

Исключая угол ε при помощи тождества $\operatorname{tg} (\zeta h + \varepsilon) = (\operatorname{tg} \zeta h + \operatorname{tg} \varepsilon)/(1 - \operatorname{tg} \zeta h \operatorname{tg} \varepsilon)$, получим дисперсионное уравнение в виде

$$\zeta h \operatorname{tg} \zeta h = -i\rho\omega h \frac{Y_0 + Y_1}{1 + (\rho\omega/\xi)^2 Y_0 Y_1}. \quad (72.11)$$

Подробного исследования этого случая проводить здесь не будем. Легко видеть, что при $Y_0 = 0$ приходим к уже разобранным случаю волновода с одной импедансной и одной абсолютно жесткой стенкой.

Как и в волноводах с идеальными стенками, нормальные волны в волноводах с импедансными стенками можно также представлять в виде суперпозиции двух плоских волн, бегущих под углами скольжения $\pm\theta$ к оси волновода, причем угол θ по-прежнему

связан с ξ и ζ соотношением (70.11). Уравнение (72.11) можно записать в виде уравнения относительно этого угла в следующем виде:

$$kh \sin \theta \operatorname{tg} (kh \sin \theta) = -i \rho \omega h \frac{Y_0 + Y_1}{1 + (\rho \omega / k \sin \theta)^2 Y_0 Y_1}.$$

Фазовая скорость искомой нормальной волны по-прежнему будет задана формулой (70.12), но, за исключением волноводов со стенками в виде сосредоточенных масс, групповую скорость уже нельзя будет найти по простой формуле $u = k \cos \theta$: это обусловлено зависимостью ζ от частоты.

Хотя нахождение групповой скорости в волноводе с произвольными импедансными стенками требует трудных расчетов, легко показать, что для всех нормальных волн, кроме нулевой, групповая скорость при критической частоте равна нулю. Мы видели, что это справедливо для волноводов с абсолютно жесткими или абсолютно мягкими стенками или со стенками в виде массовой нагрузки. Теперь предположим, что стенки имеют произвольную проводимость. Дисперсионное уравнение (72.11) определяет ζ как функцию k . На критической частоте $\xi = 0$ и $\zeta = k_{\text{кр}}$. При малом отклонении k от критического значения $k = k_{\text{кр}} + \alpha$, величина ζ также получит некоторое приращение и станет равной $k_{\text{кр}} + A\alpha$, где A — конечная величина: $A = d\zeta/dk$ в точке $k = k_{\text{кр}}$. Отсюда следует, что значение ξ в точке, близкой к критической, равно

$$\xi = \sqrt{(k_{\text{кр}} + \alpha)^2 - (k_{\text{кр}} + A\alpha)^2} \approx \sqrt{B\alpha},$$

где B — тоже конечная величина. Но в критической точке $\xi_{\text{кр}} = 0$. Значит, новое значение ξ есть приращение $d\xi$, соответствующее приращению dk , равному α . Отсюда находим и групповую скорость:

$$u = \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{d\omega}{dk} \frac{dk}{d\xi} = c \frac{\alpha}{\sqrt{B\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 73. Поглощающие стенки

Если стенки волновода частично поглощают падающий на них звук, то нормальные волны распространяются в таком волноводе с затуханием. Если стенки при этом по-прежнему характеризуются нормальной проводимостью, то это значит, что проводимость не чисто мнимая, а имеет положительную вещественную часть. Мы покажем, что в этом случае нормальная волна испытывает экспоненциальное затухание по мере распространения. Часто искусственно создают поглощение на стенках труб — искусственных волноводов; например, стенки вентиляционных каналов покрывают изнутри звукопоглощающими покрытиями, чтобы уменьшить передачу шума вдоль каналов.

Заметим, что если бы затухание имелось в самой среде, то нормальные волны также затухали бы экспоненциально, причем затухающие нормальные волны получаются из найденных выше решений просто заменой вещественного волнового числа на волновое число с соответственной мнимой добавкой (см. гл. XII). Покажем, как найти затухание нормальных волн в случае, когда нижняя стенка волновода абсолютно жесткая, а верхняя характеризуется нормальной проводимостью с положительной вещественной частью: $Y = iX + R$, где $R > 0$. Предположим также, что проводимость стенки мала (должны быть выполнены условия $\delta c |Y| / kh \ll 1$ и $\rho c |Y| kh \ll 1$); тогда форма нормальных волн мало меняется по сравнению со случаем абсолютно жестких стенок и расчет можно вести по уравнениям (72.4) и (72.5), полагая в них проводимость стенки комплексной. Выполняя подстановку, найдем из (72.4) для нулевой нормальной волны

$$\xi = k - \frac{1}{2} \frac{\rho c X}{h} + i \frac{1}{2} \frac{\rho c R}{h}.$$

В выбранном приближении, т. е. с точностью до первого порядка малости относительно $\rho c |Y| kh$, наличие вещественной части проводимости не влияет на вещественную часть волнового числа, т. е. не сказывается на фазовой скорости волны. Затухание определяется экспоненциальным множителем $\exp\left(-\frac{\rho c R}{2h} x\right)$. Из формулы (72.5) получим аналогичное выражение для волнового числа волны номера l :

$$\xi = \xi_0 - \frac{\rho \gamma X}{h} + i \frac{\rho \gamma R}{h}.$$

Здесь также наличие затухания не влияет на скорость волн. Коэффициент затухания для нормальных волн высших порядков оказывается больше удвоенного коэффициента затухания для нулевой нормальной волны и растет с увеличением номера нормальной волны пропорционально фазовой скорости. Поэтому при распространении, например, в вентиляционном канале, проводимость стенок которого обычно можно считать малой, волны высших порядков быстро затухнут, волна же нулевого порядка затухнет слабо и сможет передать шум на большое расстояние вдоль канала. Так как подобная передача звука — нежелательное явление, то приходится принимать специальные меры для преобразования нулевой волны в волны высших типов, которые затухают быстрее.

Рассмотрим теперь более общий случай проводимости, не малой по сравнению с проводимостью массы среды в волноводе. Затухание же по-прежнему будем считать малым. Дисперсионное уравнение сохраняет прежнюю форму (72.3), но ζh уже нельзя считать близким к $l\pi$. Предположим, что нормальная волна в отсутствие поглощения на стенках известна и компоненты волновых

чисел плоских волн, образующих нормальную волну в таком волноводе, обозначим через ζ_0 и $\xi_0 = \sqrt{k^2 - \zeta_0^2}$, где ζ_0 удовлетворяет уравнению

$$\zeta_0 h \operatorname{tg} \zeta_0 h = -i\omega\rho h (iX).$$

Так как малая вещественная добавка внесет малую поправку и в ζ , то положим $\zeta h = \zeta_0 h - i\epsilon h$. С точностью до малых первого порядка по ϵh , $\operatorname{tg} \zeta h = \operatorname{tg} \zeta_0 h - i\epsilon h (1 + \operatorname{tg}^2 \zeta_0 h)$. Сохраняя в дисперсионном уравнении только первые степени ϵ , найдем

$$\epsilon = \frac{\omega\rho R/\zeta_0 h}{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta_0 h + (1/\zeta_0 h) \operatorname{tg} \zeta_0 h}.$$

Но $\xi^2 + (\zeta_0 - i\epsilon)^2 = k^2$. Следовательно, приближенно

$$\xi = \sqrt{\xi_0^2 + 2i\zeta_0\epsilon} = \xi_0 + i \frac{\rho\gamma R/h}{1 + \operatorname{tg}^2 \zeta_0 h + (1/\zeta_0 h) \operatorname{tg} \zeta_0 h}.$$

В этом приближении поглощение снова не влияет на скорость волны; поглощение оказывается уменьшенным по сравнению со случаем стенки малой проводимости.

§ 74. Создание гармонического поля в волноводе

До сих пор мы рассматривали только «свободные волны» в волноводе, т. е. волны, способные распространяться в волноводе в отсутствие сторонних воздействий. Практически всегда волны создаются некоторыми «источниками» — сторонними воздействиями. Рассмотрим волны, создаваемые в волноводе заданными распределениями по какому-либо сечению волновода гармонически меняющихся с течением времени сил или x -компонент скорости частиц. Это — задача об излучении звука в волновод.

Если сторонние давления (или сторонние x -компоненты скорости) распределены в сечении так же, как они распределены в нормальной волне какого-либо номера при той же частоте, то в полуволноводе, прилегающем к этому сечению, победит нормальная волна соответственного номера. Суперпозиция таких распределений по сечению даст в полуволноводе суперпозицию соответственных нормальных волн. Естественно возникает вопрос, получится ли в полуволноводе суперпозиция нормальных волн и для произвольного распределения по излучающему сечению давлений или скоростей частиц. Можно показать, что при стенках волновода, характеризующихся нормальной проводимостью, ответ утвердительный. Не решая этой общей задачи, дадим только способ эффективного нахождения всех создаваемых нормальных волн для простейшего случая волновода с абсолютно жесткими стенками.

Пусть в поперечном сечении волновода $x = 0$ задано распределение сторонних давлений $\Pi = \Pi(z)$, не зависящее от координаты

наты y , и требуется найти поле в правом полуволноводе. Разложим функцию $\Pi(z)$ в ряд Фурье по функциям, дающим поперечное распределение давлений в нормальных волнах разных порядков для данного волновода, т. е. по функциям $\cos\left(\frac{l\pi}{h}z\right)$ ($l=0, 1, 2, \dots$).

Как известно из теории рядов Фурье, эти косинусы образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $(0, h)$, и поэтому любое распределение сторонних давлений (если оно удовлетворяет некоторым условиям, всегда оказывающимся выполненными в случаях, имеющих физический интерес) можно единственным способом представить в виде такого ряда. Разложение будет иметь вид

$$\Pi(z) = \Pi_0 + \Pi_1 \cos \frac{\pi z}{h} + \Pi_2 \cos \frac{2\pi z}{h} + \dots,$$

где

$$\Pi_0 = \frac{1}{h} \int_0^h \Pi(z) dz, \quad \Pi_l = \frac{2}{h} \int_0^h \Pi(z) \cos \frac{l\pi z}{h} dz \quad (l \neq 0).$$

Но каждому слагаемому ряда можно поставить в соответствие нормальную волну, бегущую в положительном направлении, вида

$$p_l = \Pi_l \cos \frac{l\pi z}{h} \exp\left(ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh}\right)^2} x\right).$$

Следовательно, искомое поле имеет вид

$$p = \sum_l p_l = \sum_l \Pi_l \cos \frac{l\pi z}{h} \exp\left(ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh}\right)^2} x\right).$$

В самом деле, мы получили суперпозицию нормальных волн, уходящих от источника и дающих на плоскости $x=0$ как раз требуемое распределение давления. С другой стороны, поле типа уходящих волн, для которого заданы на границах значения давления или нормальной скорости (в данном случае давление задано на поперечном сечении волновода $x=0$, а нормальные скорости — на стенках полуволновода, где они обращаются в нуль), определено однозначно. Значит, найденная суперпозиция нормальных волн является единственным решением данной задачи.

Аналогично можно решить задачу для случая, когда на сечении $x=0$ задано распределение нормальных скоростей частиц: $v_x = U(z)$. Снова разложим заданное распределение в ряд Фурье по косинусам:

$$U(z) = U_0 + U_1 \cos \frac{\pi z}{h} + U_2 \cos \frac{2\pi z}{h} + \dots,$$

где

$$U_0 = \frac{1}{h} \int_0^h U(z) dz, \quad U_l = \frac{2}{h} \int_0^h U(z) \cos \frac{l\pi z}{h} dz \quad (l \neq 0).$$

Каждому слагаемому ряда можно поставить в соответствие нормальную волну, бегущую в положительном направлении. В данном случае такая волна будет иметь вид

$$p_l = \rho \gamma_l U_l \cos \frac{l\pi z}{h} \exp \left[ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right],$$

где γ_l — фазовая скорость нормальной волны номера l . Искомым полем явится суперпозиция всех найденных таким образом нормальных волн:

$$\begin{aligned} p &= \sum_l p_l = \rho \sum_l \gamma_l U_l \cos \frac{l\pi z}{h} \exp \left[ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right] = \\ &= \rho c \sum_l \frac{U_l}{\sqrt{1 - (l\pi/kh)^2}} \cos \frac{l\pi z}{h} \exp \left[ik \sqrt{1 - \left(\frac{l\pi}{kh} \right)^2} x \right]. \end{aligned}$$

Это разложение создаваемого поля по нормальным волнам также является единственным.

Тот же способ расчета поля можно провести и для волновода с идеально мягкими стенками с той разницей, что в этом случае в качестве полной ортогональной системы на отрезке $(0, h)$ следует взять набор синусов $\sin \left(\frac{l\pi}{h} z \right)$ ($l=1, 2, \dots$). Поэтому и для такого волновода любое поле, излученное заданным распределением давления или x -компоненты скоростей частиц по поперечному сечению, также может быть единственным образом представлено в виде суперпозиции нормальных волн данного волновода. То же утверждение верно и для волновода с одной абсолютно жесткой и одной абсолютно мягкой стенкой. Полная ортогональная система функций в этом случае $\cos \left(\frac{2l-1}{h} \pi z \right)$ ($l=1, 2, \dots$) также дается распределениями давления или x -компоненты скоростей частиц в нормальных волнах данного волновода.

Наконец, можно показать, что в волноводе с любыми импедансными стенками функции распределения давлений или x -компоненты скоростей частиц для всех нормальных волн образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $(0, h)$, хотя эта система функций является набором косинусов некратных дуг. Эти функции имеют вид $\cos(\xi z + \epsilon)$, где все значения ξ и ϵ определяются из граничных условий. Во всех случаях полнота системы обеспечивает возможность представить данное распределение давления (или x -компоненты скорости частиц) по сечению суперпозицией соответственных распределений по сечению для

нормальных волн данного волновода; поэтому излучаемое поле можно представить в виде суперпозиции убегающих нормальных волн. Ортогональность же системы обуславливает единственность такого представления.

Легко доказать ортогональность любых двух различных нормальных волн p_1 и p_2 в волноводе с нормальной проводимостью стенок. Напомним, что ортогональностью называется обращение в нуль интеграла по сечению:

$$\int_0^h p_1 p_2 dz = 0.$$

Так как x -компонента скорости пропорциональна давлению, то условие ортогональности для этой компоненты выражается той же формулой.

Для доказательства справедливости этого равенства напомним раньше всего уравнения, которым удовлетворяют какие-либо две различные нормальные волны p_1 и p_2 , в виде

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + (k^2 - \xi_1^2) p_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} + (k^2 - \xi_2^2) p_2 = 0.$$

Умножая первое уравнение на p_2 , а второе на p_1 , вычитая почленно и интегрируя, найдем

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left(p_2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - p_1 \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2} \right) dz + (\xi_2^2 - \xi_1^2) \int_0^h p_1 p_2 dz = \\ & = \int_0^h \frac{\partial}{\partial z} \left(p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} - p_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} \right) dz + (\xi_2^2 - \xi_1^2) \int_0^h p_1 p_2 dz = \\ & = \left[p_2 \frac{\partial p_1}{\partial z} - p_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} \right]_0^h + (\xi_2^2 - \xi_1^2) \int_0^h p_1 p_2 dz = 0. \end{aligned}$$

Но первый член обращается в нуль в силу импедансных условий на границах волновода. С другой стороны, для разных нормальных волн различны величины ξ_1 и ξ_2 . Следовательно, должно быть

$$\int_0^h p_1 p_2 dz = 0,$$

что и требовалось доказать. Доказательство полноты рассматриваемой системы функций затрагивать не будем.

В получающихся суперпозициях нормальных волн распространяющиеся волны представлены только теми несколькими первыми номерами, для которых $\xi < k$ (например, в волноводе с абсолютно жесткими стенками — только волнами, номера которых удовлет-

воряют неравенству $l\pi/kh \leq 1$). Все волны высших номеров экспоненциально затухают и заметны только вблизи исходного сечения волновода. Поэтому на большое расстояние передается не вся структура распределения поля со всеми ее деталями, заданная в исходном сечении, а лишь ее наиболее плавная часть, которую изображают первые члены разложения по косинусам или синусам. Мелкие детали, «тонкая структура» распределения давлений оказывается «срезанной». Волновод не может передавать детали мельче половины длины волны звука. Если ширина волновода меньше половины длины волны, то, каково бы ни было распределение давлений или x -компоненты скорости частиц в данном сечении, на большом расстоянии от этого сечения будет распространяться только плоская волна. В этом случае, каков бы ни был излучатель, помещенный в волновод, наблюдая поле вдали от него, можно только установить наличие работающего источника звука, да еще интеграл давления по сечению (величину P_0), но никаких заключений об исходном распределении давлений по сечению сделать нельзя.

Если представить каждую нормальную волну в виде суперпозиции двух плоских волн, то окажется, что в волноводе имеется только конечный дискретный набор направлений, в которых бегут эти плоские волны (последовательно отражаясь от стенок), причем эти направления никак не зависят от исходного распределения давлений или скоростей по сечению и меняются только при изменении частоты. Какой-нибудь остронаправленный приемник звука в волноводе принимал бы сигнал только с этих нескольких направлений. От исходных распределений будут зависеть только амплитуды волн, бегущих по этим нескольким направлениям.

Между полями, создаваемыми в волноводе с идеальными стенками сторонними воздействиями, распределенными по какому-либо сечению, и полями, создаваемыми в неограниченном полупространстве периодическим распределением давлений или нормальных скоростей по границе полупространства, есть глубокая связь. В самом деле, можно зеркально «отразить» в каждой из стенок волновода как распределения сторонних давлений по сечению, так и звуковые поля в волноводе и стенки волновода, и можно продолжать такие отражения неограниченно. После того как выполнено каждое отражение, промежуточные стенки можно убирать, не нарушая полей, так как, например для абсолютно жестких стенок в силу симметрии нормальные скорости на стенках и их отражениях равны нулю, а давления равны по обе стороны от стенок. В результате мы приходим к полупространству, на границе которого задано периодическое распределение сторонних давлений, т. е. к задаче, рассмотренной в §§ 33, 34. Мы знаем, что в полупространстве получающееся поле состоит из (распространяющихся и неоднородных) спектров, бегущих по разным направлениям. Эти спектры и совпадают с теми плоскими волнами, из которых состоят нормальные волны волновода.

§ 75. «Затягивание» импульса в волноводе

Если сторонние воздействия негармоничны, то создаваемые ими в волноводе нормальные волны также немонохроматичны. Для каждой отдельной нормальной волны стороннее воздействие создаст вообще как однородные, так и неоднородные волны. На больших расстояниях вдоль волновода от места приложения сторонних воздействий неоднородные волны успеют затухнуть, и каждую нормальную волну достаточно будет рассматривать только для частот выше критической частоты этой волны. С такими случаями встречаемся, например, в естественных волноводах (атмосфера, вода океанов, земная кора), где главный интерес представляет распространение волн на очень большие расстояния.

В диапазоне частот выше критической волновод является для каждой данной нормальной волны диспергирующей средой с определенным законом дисперсии, зависящим от свойств самого волновода. Поэтому профиль каждой нормальной волны в направлении оси волновода будет меняться по мере распространения. Особенно интересно распространение в волноводе широкополосного сигнала (например, звука взрыва в естественном волноводе). Поскольку групповая скорость каждой нормальной волны в волноводе зависит от частоты, волновод произведет «спектральный анализ» волны: вперед уйдут частотные составляющие, соответствующие большей групповой скорости, затем побегут составляющие с меньшей групповой скоростью и т. д., вплоть до минимальной групповой скорости, с которой данная волна может распространяться в волноводе. В результате получится «затягивание» сигнала во времени и по пространству, и, например, в точке приема, отстоящей на большом расстоянии от места взрыва в воздухе или в воде, вместо короткого импульса будет наблюдаться длинный осциллирующий сигнал.

В волноводе с идеальными стенками групповая скорость растет по мере повышения частоты. Значит, в таком волноводе раньше всего придет высокочастотная часть спектра, а затем все более низкие частоты, вплоть до критической (см. также § 28). Фактически волна с критической несущей частотой наблюдаться не будет: ее групповая скорость равна нулю. Практически это значит, что вблизи критической частоты даже очень малое поглощение в волноводе или при отражениях от стенок успеет поглотить всю волну.

Если в волноводе возбуждена не одна немонохроматическая нормальная волна, а несколько, то каждая даст на большом расстоянии от места создания свой сигнал и результирующая волна явится суперпозицией затянутых сигналов, отвечающих каждой нормальной волне. Это приведет к тому, что одновременно будут наблюдаться различные несущие частоты, поскольку дисперсионные соотношения различны для каждой нормальной волны.

Заметим, что вообще волновая картина затянутого сигнала (как, впрочем, и исходного сигнала) может быть различна для разных z . Поэтому, например, при наблюдении в море формы сигнала, регистрируемого гидрофонами, расположенными на разной глубине, различны и были бы различны, даже если бы удавалось принимать только одну нормальную волну, а не интерференцию нескольких нормальных волн. Только в волноводах, где z -компонента волнового числа ζ не зависит от частоты (как, например, в волноводе с идеальными стенками или со стенками в виде сосредоточенных масс), форма волны не зависит от координаты z .

§ 76. Волновод с прямоугольным сечением

Откажемся от условия двумерности движения и рассмотрим все трехмерные нормальные волны в волноводе. Начнем с волновода в виде трубы с прямоугольным сечением и абсолютно жесткими стенками. Выберем систему координат так, чтобы две стенки волновода совпадали с координатными плоскостями $y = 0$ и $z = 0$. Нормальные волны в таком волноводе можно записать в виде (волна, бегущая вправо)

$$p = p_0 \cos\left(\frac{l_1\pi}{h_1} y\right) \cos\left(\frac{l_2\pi}{h_2} z\right) \exp\left\{ik \sqrt{1 - \left(\frac{l_1\pi}{kh_1}\right)^2 - \left(\frac{l_2\pi}{kh_2}\right)^2} x\right\}, \quad (76.1)$$

где h_1 и h_2 — длины сторон поперечного сечения волновода, а l_1 и l_2 — любые целые числа. Как и в плоской задаче, для каждой частоты имеется бесконечный дискретный набор нормальных волн. Незатухающими будут те из них, для которых выполняется неравенство $(l_1\pi/h_1)^2 + (l_2\pi/h_2)^2 \leq k^2$. Фазовые скорости этих волн

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 - (l_1\pi/kh_1)^2 - (l_2\pi/kh_2)^2}} \quad (76.2)$$

превосходят скорость звука в среде. Групповые скорости

$$u = c^2/v,$$

напротив, меньше скорости звука. Волны с одним нулем в индексах соответствуют двумерным волнам, разбиравшимся выше. Каждую нормальную волну можно представить в виде суперпозиции четырех плоских бегущих волн:

$$\exp\left\{ik \sqrt{1 - \left(\frac{l_1\pi}{kh_1}\right)^2 - \left(\frac{l_2\pi}{kh_2}\right)^2} x \pm i \frac{l_1\pi}{h_1} y \pm i \frac{l_2\pi}{h_2} z\right\},$$

каждая из которых переходит поочередно в остальные при последовательных отражениях от стенок волновода; после четырех отражений снова получается исходная плоская волна. Обобщение сказанного на случай мягких стенок или стенок, характеризую-

щихся нормальной проводимостью, затруднений не представляет.

Легко обобщить на случай трехмерных нормальных волн в прямоугольном волноводе и задачу об излучении нормальных волн сторонними воздействиями, распределенными по сечению волновода. Пусть, например, в сечении $x = 0$ задано распределение сторонних давлений $\Pi = \Pi(y, z)$. Разложение в ряд Фурье напишем в виде

$$\Pi(y, z) = \sum_{l_1, l_2} \Pi_{l_1, l_2} \cos\left(\frac{l_1 \pi}{h_1} y\right) \cos\left(\frac{l_2 \pi}{h_2} z\right),$$

где

$$\Pi_{l_1, l_2} = \frac{\delta_{l_1, l_2}}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} \Pi(y, z) \cos\left(\frac{l_1 \pi}{h_1} y\right) \cos\left(\frac{l_2 \pi}{h_2} z\right) dy dz.$$

Здесь $\delta_{00} = 1$, $\delta_{l_1, 0} = \delta_{0, l_2} = 2$, $\delta_{l_1, l_2} = 4$.

Тогда поле, создаваемое в правом полуволноводе сторонними давлениями, можно записать в виде следующей суперпозиции нормальных волн:

$$p = \sum_{l_1, l_2} \Pi_{l_1, l_2} \cos\left(\frac{l_1 \pi}{h_1} y\right) \cos\left(\frac{l_2 \pi}{h_2} z\right) \times \\ \times \exp\left\{ik \sqrt{1 - \left(\frac{l_1 \pi}{kh_1}\right)^2 - \left(\frac{l_2 \pi}{kh_2}\right)^2} x\right\}. \quad (76.3)$$

Аналогично при задании сторонних x -компонент скорости на сечении $x = 0$ в виде некоторого распределения $U = U(y, z)$ найдем поле в волноводе в виде

$$p = \rho c \sum_{l_1, l_2} \frac{U_{l_1, l_2}}{\sqrt{1 - (l_1 \pi / kh_1)^2 - (l_2 \pi / kh_2)^2}} \cos\left(\frac{l_1 \pi}{h_1} y\right) \cos\left(\frac{l_2 \pi}{h_2} z\right) \times \\ \times \exp\left\{ik \sqrt{1 - \left(\frac{l_1 \pi}{kh_1}\right)^2 - \left(\frac{l_2 \pi}{kh_2}\right)^2} x\right\}, \quad (76.4)$$

где

$$U_{l_1, l_2} = \frac{\delta_{l_1, l_2}}{h_1 h_2} \int_0^{h_1} \int_0^{h_2} U(y, z) \cos\left(\frac{l_1 \pi}{h_1} y\right) \cos\left(\frac{l_2 \pi}{h_2} z\right) dy dz. \quad (76.5)$$

§ 77. Стоячие волны в помещении

Возьмем прямоугольный волновод с жесткими стенками и ограничим его двумя поперечными жесткими стенками. Получилось прямоугольное помещение, в котором могут существовать стоячие волны, соответствующие различным нормальным волнам в волноводе. Это — собственные колебания помещения, обобщение соб-

ственных колебаний узких труб на большее число измерений. В отличие от волновода, здесь, как и в ограниченной трубе, теряется возможность непрерывного изменения частоты, так как граничные условия на третьей паре стенок выделяют для каждого номера нормальной волны дискретный набор частот. Выбирая в качестве координатных осей три ребра помещения, собственное колебание в помещении можем записать в виде

$$\rho_{l_1 l_2 l_3} = \cos\left(\frac{l_1 \pi}{h_1} x\right) \cos\left(\frac{l_2 \pi}{h_2} y\right) \cos\left(\frac{l_3 \pi}{h_3} z\right), \quad (77.1)$$

где l_1, l_2, l_3 — целые числа, а h_1, h_2, h_3 — длины ребер помещения. Найденную волну можно представить также в виде суперпозиции восьми бегущих плоских волн вида

$$\exp\left(\pm i \frac{l_1 \pi}{h_1} x \pm i \frac{l_2 \pi}{h_2} y \pm i \frac{l_3 \pi}{h_3} z\right).$$

Каждая из таких волн переходит в одну из других при отражениях на стенках волновода.

Величины

$$\pm l_1 \pi / h_1, \pm l_2 \pi / h_2, \pm l_3 \pi / h_3 \quad (77.2)$$

равны соответственно компонентам волновых векторов этих волн по осям координат. Следовательно, волновое число волны должно равняться

$$k = \pi \sqrt{(l_1/h_1)^2 + (l_2/h_2)^2 + (l_3/h_3)^2}, \quad (77.3)$$

откуда получим частоту колебания порядка (l_1, l_2, l_3) в виде

$$\omega_{l_1 l_2 l_3} = \pi c \sqrt{(l_1/h_1)^2 + (l_2/h_2)^2 + (l_3/h_3)^2}.$$

Число нормальных волн с частотой не выше заданной, возможных в данном помещении, быстро растет при повышении заданной частоты.

Приведем геометрическое построение, дающее волновые векторы всех плоских волн, составляющих стоячие волны в данном прямоугольном помещении, для которых частота не выше некоторой заданной величины. Для этого построим в пространстве прямоугольную решетку с расстояниями между узлами $\pi/h_1, \pi/h_2, \pi/h_3$ соответственно по осям x, y, z . Как видно из (77.2), вектор, проведенный из начала координат в какой-либо узел решетки, дает по направлению и по величине один из восьми волновых векторов возможного собственного колебания в помещении. Достаточно даже рассматривать только один октант решетки и соответственно волновой вектор только одной из восьми волн, образующих собственное колебание: остальные получатся последовательными отражениями в координатных плоскостях.

Пусть задана некоторая частота и соответствующее ей волновое число равно k . Опишем из начала координат сферу радиуса k . Все узлы решетки, попадающие внутрь сферы или лежащие на ее поверхности, имеют значение волнового числа не больше k , а значит, и частоту не выше заданной. Если заданный волновой вектор много больше каждой из величин $\pi/h_1, \pi/h_2, \pi/h_3$, то можно оценить асимптотически общее число таких волн. В самом деле, искомое число N внутренних по отношению к сфере узлов решетки равно числу ячеек решетки, не пересекаемых сферой. Если размеры ячейки малы по сравнению с радиусом сферы, то число пересекаемых ячеек относительно мало и им можно пренебречь по сравнению с общим числом ячеек в сфере. Но тогда искомое число можно найти просто как отношение одной восьмой объема сферы к объему одной ячейки:

$$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi k^3 \cdot \frac{\pi^3}{h_1 h_2 h_3} = \frac{1}{6\pi^2} \Omega k^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{\Omega}{\lambda^3}, \quad (77.4)$$

где через $\Omega = h_1 h_2 h_3$ обозначен объем помещения, а λ — длина волны звука. Формула показывает, что число нормальных колебаний частоты ниже заданной растет асимптотически как объем помещения и как куб частоты. Например, для помещения объемом 100 м^3 (обычная комната) число нормальных колебаний частоты ниже 1000 гц превосходит 4500 , а в концертных залах оно составляет уже миллионы. Ясно, что в таких помещениях резонансные свойства оказываются совершенно стертными, так как частоты отдельных колебаний располагаются друг от друга настолько близко, что резонансные кривые всех колебаний (за исключением самых низких, недоступных слуху) перекрывают друг друга.

На рис. 77.1 показано соответствующее построение для плоского случая, когда искомое число следует определять как отношение четверти площади окружности радиуса k к площади одной двумерной ячейки двумерной решетки. Соответствующая формула имеет вид

$$N = \frac{1}{4} \pi k^2 \cdot \frac{\pi^2}{h_1 h_2} = \pi \frac{\Omega}{\lambda^2}. \quad (77.5)$$

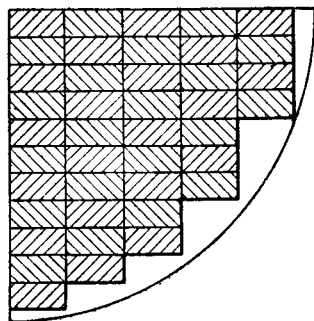


Рис. 77.1. Двухмерная иллюстрация геометрического способа подсчета числа собственных колебаний в помещении, имеющих частоты ниже заданной. Формула (77.5) дает для выбранного примера 48 колебаний; фактический подсчет (число заштрихованных прямоугольничков, целиком лежащих внутри окружности) дает всего 41 собственное колебание. Большая относительная погрешность связана с малым общим числом волн. Из чертежа ясно, что формула дает всегда завышенное число собственных колебаний.

§ 78. Произвольные свойства стенок

Вернемся к плоской задаче и перейдем к самому общему случаю произвольных механических свойств стенок, когда их нельзя охарактеризовать нормальной проводимостью. Такова, например, стенка в виде упругой пластинки, стенка в виде полупространства какой-либо среды, граничащая с данным слоем, и т. п. Последний случай очень важен в гидроакустике, где слой воды, ограниченный свободной поверхностью с одной стороны и толщиной грунта — с другой, можно рассматривать как волновод.

В таких случаях для нахождения нормальных волн требуется знать коэффициент отражения гармонических плоских волн, падающих на стенку под различными углами. Это позволяет найти нормальную волну в виде суперпозиции двух плоских волн с одинаковыми углами скольжения, переходящих одна в другую при отражении на стенках:

$$p = \exp(ik \cos \theta \cdot x + ik \sin \theta \cdot z) + A \exp(ik \cos \theta \cdot x - ik \sin \theta \cdot z).$$

Первая из этих волн должна переходить во вторую при отражении от верхней границы, а вторая — в первую при отражении от нижней границы.

Пусть коэффициенты отражения плоских волн данной частоты на нижней и верхней стенках равны соответственно $\mathcal{V}_0(\theta)$ и $\mathcal{V}_1(\theta)$. Тогда должны выполняться условия:

$$A \exp(-ikh \sin \theta) = \mathcal{V}_1(\theta) \exp ikh \sin \theta$$

на верхней границе,

$$A \mathcal{V}_0(\theta) = 1 \text{ на нижней границе.}$$

Исключая A , найдем (ср. с (64.2)):

$$\mathcal{V}_0(\theta) \mathcal{V}_1(\theta) e^{2ikh \sin \theta} = 1. \quad (78.1)$$

Это и есть дисперсионное уравнение волновода, позволяющее для каждой частоты найти все нормальные волны волновода. Это — уравнение относительно угла скольжения θ . Найдя все решения этого уравнения, определим соответственные значения $\mathcal{V}_0(\theta)$ и $\mathcal{V}_1(\theta)$, а значит, и величину A и всю волну в целом. Фазовая скорость волны выразится через найденный угол скольжения формулой

$$v = c / \cos \theta.$$

Напомним, что групповая скорость вообще не будет равна $c \cos \theta$ ввиду наличия дисперсии на стенках.

В качестве примера применим (78.1) к волноводу с абсолютно жесткими стенками. В нем $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = 1$ и (78.1) примет вид

$$e^{2ikh \sin \theta} = 1.$$

Его решения суть $\sin \theta = \frac{\xi}{k} = \frac{l\pi}{kh}$ — результат, который мы

получили в § 71 другим путем. Аналогично при абсолютно мягких стенках $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1 = -1$, и получается снова такое же дисперсионное уравнение, как и при жестких стенках, с той разницей, что волны нулевого порядка не будет. В самом деле, при $l = 0$ соотношение

$$A = 1/\mathcal{V}_0 = -1$$

дает для амплитуды соответственной нормальной волны тождественный нуль.

Для одной жесткой и одной стенки с проводимостью Y имеем

$$\mathcal{V}_0 = 1, \quad \mathcal{V}_1 = \frac{\sin \theta/\rho c - Y}{\sin \theta/\rho c + Y},$$

откуда

$$Y = \frac{\sin \theta}{\rho c} \frac{e^{2ikh \sin \theta} - 1}{e^{2ikh \sin \theta} + 1} = i \frac{\sin \theta}{\rho c} \operatorname{tg}(kh \sin \theta).$$

Подставляя в это уравнение вместо $kh \sin \theta$ величину ζh , вернемся снова к формуле (72.3).

§ 79. Распространение инфразвука в море. Плоская задача

Результаты предыдущего параграфа применимы к важной задаче о волноводном распространении звука низкой частоты в море. В районах постоянной глубины море можно рассматривать как волновод, ограниченный дном и свободной поверхностью воды. Для низких частот можно пренебрегать неровностями дна и неровностью свободной поверхности, вызванной морским волнением, и считать границы волновода плоскими. Кроме того, можно пренебрегать и неоднородностью среды, вызываемой изменением температуры и гидростатического давления с глубиной. Практически, если при данной частоте возможно распространение лишь нескольких первых номеров нормальных волн, то море можно рассматривать как однородный плоскопараллельный слой, лежащий на упругом полупространстве — морском грунте. Морской грунт, вообще, — упругое твердое тело, неоднородное по глубине. Найти нормальные волны в волноводе, ограниченном таким упругим телом, весьма сложно. Но некоторые основные черты моря как волновода можно представить себе, упрощая задачу: аппроксимировав грунт жидким однородным полупространством с некоторыми эффективными значениями плотности и сжимаемости. Тогда, пользуясь данными предыдущего параграфа, можно, ограничиваясь, как и выше, плоской задачей, написать дисперсионное уравнение нормальных волн, исходя из коэффициентов отражения плоских

волн у дна и у поверхности воды. Коэффициент отражения у дна равен

$$\mathcal{V}_0 = \frac{m \sin \theta - \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}}{m \sin \theta + \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta}},$$

где m — отношение плотности грунта к плотности воды, а n — коэффициент преломления грунта относительно воды. Коэффициент отражения от свободной поверхности равен $\mathcal{V}_1 = -1$.

Нас интересуют волны, распространяющиеся в водном слое без затухания. Если звуковая энергия переходит в грунт, то модуль коэффициента отражения от дна меньше единицы, и волна затухает по мере распространения. Поэтому есть смысл рассматривать водный слой как волновод только для таких волн, для которых энергия в грунт не перетекает, т. е. случай $|\mathcal{V}_0| = 1$. Значит, следует исключить случай $n > 1$, а также случай $n < 1$ для углов скольжения θ плоских волн, образующих нормальную волну, больших критического угла скольжения $\theta_{кр}$, определяемого уравнением $\cos \theta_{кр} = n$. Таким образом, лишь при $\cos \theta > n$ в слое воды возможно распространение незатухающих нормальных волн.

Найдем дисперсионное уравнение для нормальных волн, удовлетворяющих этому требованию. Коэффициент отражения от нижней границы в этом случае комплексный:

$$\mathcal{V}_0 = \frac{m \sin \theta - i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta + i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}.$$

Подставляя в (78.1), найдем

$$-\frac{m \sin \theta - i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta + i \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}} e^{2ikh \sin \theta} = 1$$

или

$$\exp \left[2ikh \sin \theta - 2i \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta} \right] = -1,$$

откуда

$$kh \sin \theta = \frac{2l-1}{2} \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\cos^2 \theta - n^2}}{m \sin \theta}, \quad (79.1)$$

где l может принимать значения $1, 2, \dots$

При критическом угле скольжения $\sin \theta_{кр} = \sqrt{1 - n^2}$ из дисперсионного уравнения (79.1) получим уравнение для критической частоты

$$k_{кр} h = \frac{2l-1}{2} \pi \frac{1}{\sqrt{1 - n^2}}.$$

При критической частоте $\mathcal{V}_0 = 1$ и нормальная волна имеет вид

$$p = \cos\left(\frac{2l-1}{2h} \pi z\right) \exp(ik_{\text{кр}}nx)$$

и, следовательно, то же распределение давления по глубине, что и нормальная волна в волноводе с абсолютно жесткой нижней границей. Однако при этом частота выше критической для волновода с жесткой стенкой в $1/\sqrt{1-n^2}$ раз. Фазовая скорость волны при критической частоте конечна, в отличие от волноводов с импедансными стенками. При возрастании частоты от критической угол скольжения для данной нормальной волны убывает и стремится асимптотически к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. При этом коэффициент отражения от грунта стремится к -1 и волновод ведет себя асимптотически как слой, ограниченный двумя абсолютно мягкими границами.

Волновое число нормальной волны при критической частоте равно волновому числу плоской волны в грунте. Значит, при критической частоте фазовая скорость $\gamma = c/\cos \theta_{\text{кр}} = c/n$ нормальной волны равна скорости звука в грунте. Легко показать, что при этой частоте групповая скорость нормальной волны также равна скорости звука в грунте. В самом деле, обратная величина групповой скорости равна $\frac{1}{u} = \frac{d\xi}{d\omega}$, а волновое число нормальной волны можно записать в виде $\xi = (\omega/c) \cos \theta$. Следовательно,

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\omega}{c} \sin \theta \frac{d\theta}{d\omega}.$$

Но из (79.1) следует

$$\frac{d\theta}{d\omega} = -\frac{h}{c} \sin \theta \left\{ kh \cos \theta + \frac{m(1-n^2) \cos \theta}{(m^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - n^2) \sqrt{\cos^2 \theta - n^2}} \right\}^{-1}$$

откуда видно, что при критической частоте, когда $\sqrt{\cos^2 \theta - n^2} = 0$, величина $d\theta/d\omega$ также обращается в нуль. Следовательно, при этом $1/u = 1/\gamma$, что и требовалось показать.

При частоте выше критической $d\theta/d\omega < 0$ и групповая скорость уменьшается. Значит, скорость звука в грунте есть наибольшая скорость передачи сигнала в таком волноводе.

Это обстоятельство используют для определения скорости звука в морском грунте: звук взрыва, произведенного в воде, принимают в воде же на большом расстоянии от места взрыва. «Вступление» сигнала должно соответствовать пробегу этого расстояния со скоростью звука в грунте. Нужно иметь в виду, однако, что амплитуда возбуждения волны в точности на критической частоте равна нулю: при критическом угле скольжения в грунте должна распространяться плоская волна, бегущая вдоль границы, и при конечной амплитуде она несла бы с собой бесконечную энергию. Фактически регистрируется волна, приходящая уже с несколько

меньшей групповой скоростью, для которой угол скольжения меньше критического, и волна в грунте — неоднородная, несущая конечный поток энергии и поэтому возбуждающаяся с конечной амплитудой.

Анализ выражения для групповой скорости показывает, что для каждой нормальной волны для частоты выше критической групповая скорость сначала убывает, опускаясь ниже скорости звука в воде, а затем, после прохождения минимума, снова растет, стремясь при повышении частоты к скорости звука в воде (рис. 79.1).

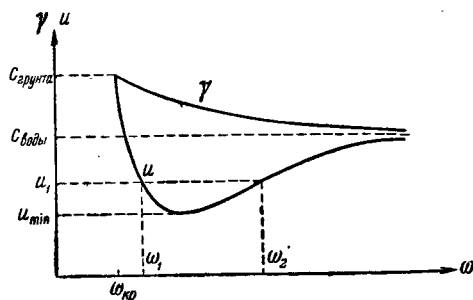


Рис. 79.1. Дисперсионные кривые нормальной волны некоторого номера в море. «Вступление сигнала» происходит в момент $L/c_{\text{грунта}}$, где L — дистанция от места взрыва до приемника. В момент $L/c_{\text{воды}}$ происходит второе вступление, после которого сигнал приходит как суперпозиция колебаний двух разных частот (например, в момент L/u_1 приходят частоты ω_1 и ω_2). Наконец, в момент $L/u_{\text{мин}}$ сигнал оканчивается.

Затем на него наложится

второе «вступление» сигнала большой частоты, приходящее со скоростью звука в воде; несущая частота этого сигнала убывает с течением времени. Сигнал окончится, когда растущая частота первого и убывающая частота второго сигнала сравняются, что произойдет в момент времени, соответствующий минимальной скорости распространения в море данной нормальной волны.

§ 80. Распространение инфразвука в море. Трехмерная задача

В предыдущем параграфе мы ограничились плоской задачей распространения звука в море, имея целью простейшим способом выяснить влияние границы, которую нельзя охарактеризовать нормальной проводимостью, на волноводное распространение. Теперь рассмотрим задачу, более реально отвечающую естественным волноводам в виде слоев (морю или атмосфере), — задачу о радиально-симметричном распространении звука в слое. В этом случае нормальные волны будут стоячими только по вертикальной координате z . Для нахождения нормальных волн придется раньше всего получить волновое уравнение в цилиндрических координатах. Имея в виду в следующем параграфе рассмотреть также в ци-

линдрических координатах задачи, не имеющие такой симметрии, напишем соответственное волновое уравнение в общем виде. Такое уравнение можно было бы получить из декартовой записи путем замены переменных, однако здесь приведем более наглядный вывод, исходящий из векторной записи уравнения. Уравнение Гельмгольца для гармонической волны можно записать в виде

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p + k^2 p = 0.$$

Первый член слева найдем как отношение потока вектора $\operatorname{grad} p$ через поверхность элемента среды, ограниченного близкими координатными поверхностями, к объёму этого элемента. В цилиндрических координатах z, r, φ компоненты вектора $\operatorname{grad} p$ равны $\partial p/\partial z, \partial p/\partial r, \partial p/r \partial \varphi$. Объём элемента среды, вырезаемого координатными поверхностями z и $z + dz, r$ и $r + dr, \varphi$ и $\varphi + d\varphi$ (рис. 80.1) равен $dz dr r d\varphi$. Поток, вытекающий из этого объёма, равен

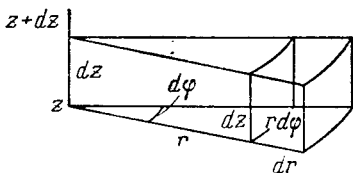


Рис. 80.1. Элемент объема среды в цилиндрических координатах.

$$\frac{\partial}{\partial z} (r dr d\varphi \frac{\partial p}{\partial z}) dz + \frac{\partial}{\partial r} (r dz d\varphi \frac{\partial p}{\partial r}) dr + \frac{\partial}{\partial \varphi} (dr dz \frac{\partial p}{r \partial \varphi}) d\varphi.$$

Деля на объём элемента, получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2},$$

и уравнение Гельмгольца примет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + k^2 p = 0. \quad (80.1)$$

Поскольку для радиально-симметричной задачи зависимость от угла отсутствует, можем отбросить в уравнении член с угловой производной и будем искать решение в виде волны, давление в которой равно произведению некоторой функции от вертикальной координаты z на некоторую функцию от радиуса r , т. е. $p = Z(z) R(r)$. Подставляя в (80.1) и разделяя переменные, найдем

$$\frac{Z''}{Z} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} - k^2.$$

Так как слева стоит функция только от z , а справа — функция только от r , то обе части должны равняться постоянной. Обозначая её через $-\zeta^2$, получим решение для Z в виде стоячей волны по оси z :

$$Z = \cos(\zeta z + \varepsilon),$$

т. е. ту же зависимость, что и для плоской волны, Уравнение для R примет вид

$$R'' + \frac{1}{r} R' - (k^2 - \zeta^2) R = 0$$

— уравнение для бесселевых функций нулевого порядка. Волна, бегущая от центра, выразится через ханкелеву функцию первого рода: $R = H_0^{(1)} \left(\sqrt{k^2 - \zeta^2} r \right)$. Таким образом, искомая нормальная волна есть

$$p = p_0 \cos(\zeta z + \varepsilon) H_0^{(1)} \left(\sqrt{k^2 - \zeta^2} r \right).$$

Формула полностью аналогична выражению (70.3), с той разницей, что бегущая плоская волна заменена бегущей цилиндрической волной. Величины ζ и ε найдутся из граничных условий: они будут совпадать со значениями для соответственной плоской волны той же частоты, бегущей в том же волноводе. Для цилиндрических и плоских нормальных волн будут совпадать дисперсионные уравнения, нумерация нормальных волн, распределение давлений и компонент скоростей частиц. Различаться будут только закон спада поля с расстоянием и набег фазы вблизи начала координат. В цилиндрической волне происходит спадание амплитуды асимптотически как $1/\sqrt{r}$, в то время как двухмерная волна в слое свою амплитуду сохраняет. На больших дистанциях набег фазы нарастает одинаково для обоих типов волн.

Не имеет аналога для двухмерных волн особенность давления на оси $r = 0$ (логарифмическая особенность функции Ханкеля нулевого порядка). Она указывает на наличие «сторонних воздействий» в области вблизи оси. Действительно, для двухмерных волн данная нормальная волна приходит из «минус-бесконечности»; но для цилиндрической волны «минус-бесконечности» нет: волна приходит из начала координат. Требуемое «стороннее воздействие» найдем так: радиальная скорость частиц вблизи оси есть

$$v_r = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial r} \sim \frac{1 - \sqrt{k^2 - \zeta^2}}{i\rho\omega} \cos(\zeta z + \varepsilon) \frac{1}{r}.$$

Поместив на оси цилиндр, поверхность которого пульсирует со скоростями v_r , т. е. цилиндр, вытесняющий среду для каждого слоя высоты dz со скоростью

$$V = \frac{-2\pi \sqrt{k^2 - \zeta^2}}{i\rho\omega} \cos(\zeta z + \varepsilon) dz$$

(для малых r это распределение не зависит от r), получим нормальную скорость на поверхности цилиндра, равную нормальной скорости в найденной волне. Поэтому, заменяя цилиндрический участок среды вблизи оси таким пульсирующим цилиндром, придем к представлению об излучении цилиндрической нормальной волны в слой (ср. § 74).

§ 81. Круглая труба как волновод

Рассмотрим теперь волноводы с круговым сечением. Они важны ввиду широкого распространения в технике круглых труб. Направим ось x цилиндрической системы координат x, r, φ по оси трубы и будем искать нормальные волны в виде $f(r, \varphi) e^{i\xi x}$. Подставляя в (80.1), в котором z заменено на x , получим уравнение для f :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \xi^2) f = 0. \quad (81.1)$$

Но зависимость от полярного угла должна, из физических соображений, быть периодической, с периодом, кратным 2π . Каждый коэффициент кратности даст волны с другим распределением поля по углу. Для каждого коэффициента кратности l зависимость от полярного угла можно выбрать в виде $\cos l\varphi$ или $\sin l\varphi$. Полагая $f = R(r) \cos l\varphi$ или $f = R(r) \sin l\varphi$, получим из (81.1) уравнение для R :

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(k^2 - \xi^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (81.2)$$

Это — известное уравнение для бесселевых функций порядка l . Из физических соображений из двух линейно независимых решений этого уравнения $J_l(\zeta r)$ и $N_l(\zeta r)$, где $\zeta = \sqrt{k^2 - \xi^2}$, следует выбрать первое, так как только оно остается конечным в центре трубы (для кольцевой трубы следовало бы взять вообще оба решения). Итак, нормальные волны в круглой трубе можно представить в виде

$$p = J_l(\zeta r) \exp(i \sqrt{k^2 - \xi^2} x) \cos l \varphi$$

или

$$p = J_l(\zeta r) \exp(i \sqrt{k^2 - \xi^2} x) \sin l \varphi.$$

В простейшем случае радиальной симметрии получаем нормальную волну нулевого углового номера $l = 0$:

$$p = J_0(\zeta r) \exp(i \sqrt{k^2 - \xi^2} x).$$

Значения ζ набора радиально-симметричных волн определяются граничными условиями. Наиболее важен случай жестких стенок трубы, т. е. случай равенства нулю радиальной скорости на границе. Обозначая радиус трубы через a , получим следующее граничное условие:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=a} = -\zeta J_1(\zeta a) = 0. \quad (81.3)$$

Корни этого уравнения — нули бесселевой функции первого порядка: 0; 3,83; 7,02; 10,17; 13,32, ... Волновые числа ξ нор-

мальных волн будут, таким образом, равны соответственно k ; $\sqrt{k^2 - (3,83/a)^2}$; $\sqrt{k^2 - (7,02/a)^2}$. . . Решение $\xi = k$ соответствует нормальной волне e^{ikx} ; это — плоская волна, которая может распространяться в волноводе с любой формой сечения, если стенки его абсолютно жесткие. Последовательные номера найденных корней (не считая $\xi = 0$) — радиальные номера волн — дают число узловых окружностей радиальной скорости; они имеют одно и то же положение для волны данного радиального номера при любой частоте. Радиус сечения делится этими окружностями в отношении последовательных нулей бесселевой функции первого порядка; стенка трубы соответствует нулю номера, равного радиальному номеру волны.

Критические частоты соответствуют $\xi = 0$, т. е. на критической частоте величина ka равна соответственному нулю бесселевой функции. Например, при критической частоте первой нормальной волны $ka = 3,83$. При этом длина волны звука $\lambda = 1,62a$ или $a = 0,61\lambda$. Разность последовательных критических значений ka стремится к π по мере возрастания номера волны. На критических частотах колебания чисто радиальные (*радиальный резонанс*). Ниже критической частоты ξ — чисто мнимое, распространение волны прекращается и нормальная волна делается неоднородной вдоль оси волновода.

Распределение давлений и осевых скоростей по радиусу дается бесселевой функцией нулевого номера. В целом эта зависимость похожа на косинусоиду, за исключением участка малых ζr , и с тем отличием, что амплитуда осцилляций не остается постоянной, а убывает с увеличением радиуса (асимптотически — как \sqrt{r}). Зависимость фазовых и групповых скоростей от ka имеет тот же характер, что и зависимость от kh для плоского волновода. На критических частотах фазовые скорости обращаются в бесконечность, а групповые — в нуль; при стремлении частоты к бесконечности обе скорости стремятся к c сверху и снизу соответственно.

Нормальные волны следующего углового номера ($l = 1$) уже не имеют осевой симметрии.

$$p = J_1(\zeta r) \exp(i\sqrt{k^2 - \zeta^2} x) \cos \varphi$$

или

$$p = J_1(\zeta r) \exp(i\sqrt{k^2 - \zeta^2} x) \sin \varphi.$$

На оси нормальной волны первого углового и высших угловых номеров всегда лежит нуль давления. Каждому угловому номеру соответствует целый набор радиальных номеров, имеющих, как и в волне нулевого углового номера, различные распределения поля по радиусу. Первые критические частоты нормальных волн углового номера $l = 1$ соответствуют значениям $ka = 1,84$; $5,33$; $8,54$, . . .

Волны с угловой зависимостью в виде косинуса и в виде синуса получаются друг из друга поворотом всего распределения поля по сечению на 90° вокруг оси волновода. Это — так называемые *вырожденные* волны: при одинаковых частотах они имеют совпадающие скорости. Любая суперпозиция двух таких волн одинаковой частоты распространяется без изменения формы.

Особый интерес представляют нормальные волны высоких угловых порядков: случаи, когда номер бесселевой функции l превышает величину ka . При $l < ka$ распределение давления по радиусу трубы похоже на синусоиду, но при $l > ka$ форма бесселевой функции, а значит, и радиальное распределение поля совершенно другие. Вблизи оси трубы давление оказывается малым, и чем выше номер, тем, при данной частоте, дальше простирается эта область малых значений; узлы давления по радиусу отсутствуют. Возмущения велики только на стенках трубы.

Эту особенность можно понять следующим образом. Рассмотрим для простоты критическую частоту ($\xi = 0$). Давление на окружности стенки трубы распределено по синусоидальному закону и, считая по длине окружности, одна волна занимает участок $\Lambda = 2\pi a/l$. С другой стороны, длина волны в среде есть $\lambda = 2\pi/k$. Отношение этих величин есть $\Lambda/\lambda = ka/l$. При $ka < l$ периодичность пространственного распределения давлений по стенке трубы мельче, чем длина волны звука. Если бы такая периодичность была задана на плоской стенке, давление спадало бы при удалении от плоскости экспоненциально (см. § 32). При такой же периодичности на вогнутой поверхности давление спадает медленнее, но все же так, что на расстоянии нескольких длин волн может оказаться весьма малым по сравнению с полем на самой стенке. Эту картину распределения давлений можно назвать своеобразным «*скин-эффектом*».

Иногда номер волны, генерируемой в трубе, задается самим шумящим устройством. Например, многолопастный вентилятор создает волну, номер которой равен числу лопастей. В этих случаях звуковое поле в трубе сосредоточено на ее периферии.

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ

§ 82. Сферические волны

В предыдущих главах мы подробно изучили плоские волны. Перейдем теперь к не менее важному типу волн — *сферическим волнам*, т. е. к волнам со сферическими фронтами. С такими волнами мы встречаемся в первую очередь при изучении источников и приемников звука, а также в вопросах рассеяния звука.

Мы видели, что плоскую волну реально можно создать только в ограниченной области, например в среде, заполняющей трубу с абсолютно жесткими стенками. Для создания плоской волны в неограниченном пространстве потребовался бы неосуществимый излучатель бесконечных размеров — колеблющаяся плоскость.

Иначе обстоит дело со сферическими волнами. Любое колеблющееся тело конечных размеров создает вдали от тела волну сферической формы. Вблизи от такого источника звука фронты волн могут иметь^{*} и другую форму. Например, вблизи кварцевой пластинки, колеблющейся с ультразвуковой частотой, фронты волн имеют вид участков плоскости; волна становится сферической лишь *асимптотически*, при удалении от источника звука на большое расстояние. Но, в отличие от плоских волн, реальная волна по мере распространения все более приближается к сферической^{*}), а при некоторых видах колебаний тела идеально сферическая волна излучается, прямо начиная с поверхности тела.

Сферические волны не обязательно *сферически-симметричны*, т. е. амплитуда волны вдоль фронта не обязательно одинакова во всех точках.

В сферических волнах поле убывает по мере удаления от центра волны, причем, как будет показано, начиная с достаточно большого расстояния давление и скорость частиц убывают обратно пропорционально расстоянию от центра, а плотность энергии — обратно пропорционально квадрату этого расстояния. Этот «закон обратных квадратов» связан с конечностью скорости звука и справедлив в общем случае только при отсутствии дисперсии. Для иллюстрации рассмотрим, например, сферу, которую расширили

^{*}) Стремление фронтов к сферической форме происходит так, что абсолютные отклонения фронтов от сфер остаются конечными, но относительное отклонение стремится к нулю.

от первоначального до какого-то нового радиуса. При отсутствии дисперсии в среде побежит сферически-симметричная волна в виде расширяющегося шарового слоя толщины cT , где T — время расширения сферы. Вне слоя возмущения еще нет, а внутри него — уже нет. Если волна ушла на такое расстояние, что средний радиус r возмущенного слоя стал уже намного больше толщины слоя, то объем, занятый возмущением, можно считать приближенно пропорциональным r^2 . Но в силу закона сохранения энергии суммарная энергия в слое должна оставаться неизменной, а так как плотность энергии пропорциональна квадрату амплитуды волны, то отсюда и следует указанный закон убывания.

Если сфера не просто расширяется от одного радиуса до другого, а совершает какое-нибудь другое движение, то расстояние, начиная с которого справедлив закон обратных квадратов, следует определять, беря в качестве T характерное время процесса. Например, для гармонических пульсаций сферы следует взять в качестве T период колебаний; расстояние в этом случае должно быть много больше длины волны.

При наличии дисперсии закон обратных квадратов справедлив только для гармонических сферических волн, так как в этом случае только они не меняют своей формы при распространении.

Если условие $r \gg cT$ не выполнено, то приведенные рассуждения несправедливы и убывание плотности энергии не подчиняется закону обратных квадратов. Например, в несжимаемой среде, где это условие никогда не выполняется, так как любое возмущение охватывает мгновенно все пространство, скорость частиц убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, и поэтому плотность энергии убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния.

В отличие от плоских волн, в сферической волне профиль, строго говоря, не остается неизменным даже в отсутствие дисперсии: действительно, амплитуда волны убывает при удалении от центра. Мы увидим, что для сферически-симметричных волн остается неизменным профиль величины rp . Для скорости частиц такая нормировка возможна только вдали от центра: вблизи амплитуда скорости убывает быстрее — обратно пропорционально квадрату расстояния.

Отметим замечательное свойство сферических волн: полный импульс сферической волны, длящейся конечное время, равен нулю в любой точке среды. В самом деле, в качестве такой сферической волны можно взять любую волну, создаваемую произвольными начальными возмущениями конечной области пространства, либо излучателями, действующими в течение конечного времени. Импульс выразится интегралом от давления в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Интегрируя по времени в бесконечных пределах уравнение движения

$$\rho \frac{dv}{dt} + \nabla p = 0,$$

найдем для любой точки

$$\rho v \Big|_{-\infty}^{\infty} + \nabla \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p dt = 0.$$

Так как по предположению скорость частиц на бесконечных пределах равна нулю, то градиент интеграла также равен нулю, а это значит, что импульс должен быть постоянен во всем пространстве. Но при удалении на бесконечность от места создания волны давление убывает, стремясь к нулю. Значит, эта постоянная равна нулю, и во всех точках среды должно иметь место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} p dt = 0. \quad (82.1)$$

Отсюда следует, в частности, что сферическая волна не может состоять только из области сжатия, бегущей по среде, или только из области разрежения, но обязательно включает как сжатие, так и разрежение. Напомним, что, в отличие от сферических волн, в плоских волнах возмущения чистого сжатия или чистого разрежения возможны (см. § 20).

Есть еще одно принципиальное различие между плоскими и сферическими возмущениями: в несжимаемой среде никакого плоского возмущения быть не может, в то время как сферическое возмущение в несжимаемой среде возможно — например возмущение, вызываемое пульсациями или осцилляциями любого тела. На расстояниях, малых по сравнению с длиной волны, распределение скоростей частиц и распределение давлений в сжимаемой среде мало отличаются от распределений этих величин в несжимаемой среде при тех же пульсациях или осцилляциях тела.

§ 83. Сферически-симметричные волны

В этой главе мы будем изучать *сферически-симметричные* волны. Такие волны одномерные: все их характеристики (давление, скорость частиц и т. д.) зависят, помимо времени, только от одной координаты — расстояния r от центра волны. Поэтому такие волны имеют ряд общих черт с плоскими волнами. Но поскольку единственная координата принадлежит не декартовой, а сферической системе координат, имеются и существенные различия в поведении этих двух типов волн.

Волновое уравнение в сферических координатах для сферически-симметричной волны легко получить из общего вида волнового уравнения в векторной записи:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

В сферически-симметричном движении

$$\text{grad } p = \frac{r}{r} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Возьмем малый элемент объема, вырезаемый сферами радиуса r и $r + dr$. Поток градиента, втекающего через поверхность сферы радиуса r , равен $4\pi r^2 (\partial p / \partial r)$. Следовательно, поток, вытекающий из указанного элемента объема, равен $\frac{\partial}{\partial r} (4\pi r^2 \frac{\partial p}{\partial r}) dr$. Разделив на объем данного элемента $4\pi r^2 dr$, найдем искомую дивергенцию:

$$\text{div grad } p = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right).$$

Наконец, в силу тождества

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp)$$

можем записать волновое уравнение в окончательном виде:

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} = 0. \quad (83.1)$$

Мы видим, что по отношению к величине rp уравнение является обычным одномерным волновым уравнением в переменных r и t . Значит, для величины rp имеют место решения в виде бегущих волн: $rp = f(t - r/c)$ (расходящаяся) и $rp = g(t + r/c)$ (сходящаяся), где f и g — произвольные функции. Сходящаяся и расходящаяся волны давления имеют, следовательно, в общем случае вид

$$p = \frac{f(t - r/c)}{r}, \quad p = \frac{g(t + r/c)}{r}. \quad (83.2)$$

Отличие от решений для плоских волн в том, что координата принципиально не может принимать отрицательные значения.

Профили давления сходящейся и расходящейся волн отличаются от профиля плоской волны как бы «перспективным сокращением» при удалении вдоль радиуса-вектора.

Подобно тому как любую одномерную плоскую волну можно представить в виде суперпозиции двух волн, бегущих друг другу навстречу, любую сферически-симметричную волну p можно представить в виде суперпозиции одной расходящейся и одной сходящейся волны:

$$p = \frac{f(t - r/c) + g(t + r/c)}{r}. \quad (83.3)$$

В бегущей сферической волне одна и та же временная зависимость давления повторяется во всех точках, но только в разном масштабе (по закону обратной пропорциональности расстоянию

от центра) и с запаздыванием, равным времени пробега волны до рассматриваемой точки. Изменение этого масштаба от точки к точке не зависит от скорости звука и, например, остается таким же и для несжимаемой жидкости, когда давление изменяется во всех точках среды синфазно, без запаздывания. Независимость изменения масштаба от скорости звука имеет место только для давления; для скорости частиц такой независимости нет.

Для бегущих сферически-симметричных волн давление принимает в центре волны бесконечное значение. Это значит, что такие волны не могут существовать во всем пространстве: центр волны должен быть исключен. Чтобы реально осуществить чисто сходящуюся или чисто расходящуюся волну в отдельности, в центре нужно расположить некоторое тело: «поглотитель» или «излучатель» (см. ниже, § 85).

Существуют, однако, и сферические волны, остающиеся конечными во всем пространстве, включая центр волны: такие волны — это определенная комбинация расходящейся и сходящейся волн. В самом деле, давление в точке $r = 0$ конечно, если в любой момент времени выполняется соотношение

$$f(t) + g(t) = 0.$$

Искомая волна имеет, следовательно, вид

$$p = \frac{f(t - r/c) - f(t + r/c)}{r}. \quad (83.4)$$

Раскрывая неопределенность, получающуюся при $r = 0$, находим давление в центре волны, конечное во всем пространстве, в виде

$$p_{r=0} = -\frac{2}{c} \frac{\partial f(t)}{\partial t}.$$

§ 84. Скорость частиц в сферически-симметричной волне

В силу симметрии скорость v частиц в сферически-симметричной волне направлена по радиусу-вектору и, как и давление, зависит, помимо времени, только от расстояния r от центра волны. Поэтому, согласно (13.3), в сферической волне

$$v - v_0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \int_{t_0}^t p dt,$$

где v_0 — скорость частиц в момент времени t_0 . Если до какого-то момента времени возмущение в данной точке отсутствовало, то

$$v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^t p dt.$$

Для бегущей волны, как легко получить из (83.2),

$$v = \pm \frac{p}{\rho c} + \frac{1}{\rho r} \int_{-\infty}^t p dt. \quad (84.1)$$

Верхний знак относится к расходящейся, а нижний — к сходящейся волне.

Мы видим, что в сферической бегущей волне скорость частиц не пропорциональна давлению в тот же момент, как это имеет место в плоской бегущей волне, а связана с давлением более сложной зависимостью, содержащей также расстояние от центра волны, а главное — содержащей всю историю волны до рассматриваемого момента. Асимптотически, при стремлении радиуса к бесконечности, получается соотношение $v = \pm p/\rho c$ — такое же, как и для плоской волны. При конечном r скорость частиц представляется суммой двух слагаемых. Первое из них связано с давлением той же зависимостью, что и полная скорость частиц в плоской волне; профиль этого слагаемого воспроизводит профиль давления. В частности, это слагаемое изменяется по тому же закону, что и давление: обратно пропорционально расстоянию от центра волны. Второй член спадает быстрее — как $1/r^2$. Поэтому вблизи от центра волны это — главный член, а вдали им можно пренебречь.

Второй член сохраняется и в несжимаемой жидкости (при замене $t \pm r/c$ на t в аргументе p), когда вся среда движется синфазно, и волны, собственно, нет; первое слагаемое обращается при этом в нуль. Поэтому второй член называют *неволновым*, а первый — *волновым*. Соответственно расстояния, на которых этот член играет существенную роль, называют *неволновой зоной*. сферической волны, а большие расстояния относят к *волновой зоне*. Размеры неволновой зоны определяются временным характером возмущения. Качественно можно сказать, что для быстропеременных процессов радиус неволновой зоны мал, а для медленных процессов — велик. Для гармонического процесса критерием является величина kr . Всю область $kr \lesssim 1$ следует считать неволновой зоной (при $kr = 1$ оба члена равны по модулю); область $kr \gg 1$, (расстояния, много большие длины волны) — это волновая зона. При негармонических процессах для качественной оценки (другой в этом случае нет) следует сравнивать время r/c пробега звуком расстояния от центра волны до рассматриваемой точки с характерным временем T изменения давления на величину порядка самого давления. При $r/c \lesssim T$ точка лежит в неволновой зоне, при $r/c \gg T$ — в волновой зоне.

Далеко за пределами неволновой зоны, на большом расстоянии от центра волны, поле сферической волны является *локально-плоским*. Мы подразумеваем под этим, что в пределах участков, больших по сравнению с длиной волны, но малых по сравнению с расстоянием от центра, поле сферической волны можно с большой

точностью изобразить как поле некоторой плоской волны. Эта изображающая волна бежит в направлении радиуса-вектора данного участка, а ее амплитуда обратно пропорциональна расстоянию участка от центра.

Интеграл в (84.1) имеет наглядный физический смысл. Это суммарный импульс звукового давления за все время от $-\infty$ до рассматриваемого момента времени t . Мы видели, что этот интеграл обращается в нуль при бесконечном верхнем пределе при условии, что звук длился конечное время. Для частного случая сферически-симметричной волны эту теорему можно заново получить из (84.1), считая, что на верхнем пределе $t = +\infty$ величины p и v обращаются в нуль. Заметим, что, несмотря на равенство нулю среднего давления, результирующее смещение частиц после прохождения сферической волны может отличаться от нуля. Так будет, например, если волна создана сферой, изменившей свой радиус.

Так как величина rp в бегущей волне зависит только от комбинации $t \mp r/c$, то из равенства (82.1) легко получить, что если в данный момент как в центре волны, так и на бесконечности возмущение отсутствует, то выполняется равенство

$$\int_0^{\infty} rp dr = 0. \quad (84.2)$$

§ 85. Гармонические сферически-симметричные волны

Гармонические бегущие сферически-симметричные волны с единичной амплитудой давления на единичном расстоянии от центра имеют следующий вид:

$$p = \frac{e^{\pm ikr}}{r}, \quad (85.1)$$

где верхний знак отвечает расходящейся, а нижний — сходящейся волне. Соответственные значения скорости частиц равны

$$v = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\pm ikr - 1}{r^2} e^{\pm ikr} = \frac{1}{i\rho ckr} \frac{\pm ikr - 1}{r} e^{\pm ikr}. \quad (85.2)$$

В выражении для скорости неволновой член, соответствующий — 1 в биноме, сдвинут на 90° по фазе от волнового, синфазного с давлением члена: ikr . До расстояния $r = 1/k$ неволновой член по модулю преобладает; на больших расстояниях преобладает волновой член.

Стоячие сферические гармонические волны

$$p = \frac{\cos kr}{r}, \quad p = \frac{\sin kr}{r} \quad (85.3)$$

можно рассматривать как сумму или разность двух бегущих.

Соответственные значения скорости частиц равны

$$v = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{-kr \sin kr - \cos kr}{r^2} = \frac{1}{i\rho ckr} \frac{-kr \sin kr - \cos kr}{r},$$

$$v = \frac{1}{i\rho\omega} \frac{kr \cos kr - \sin kr}{r^2} = \frac{1}{i\rho ckr} \frac{kr \cos kr - \sin kr}{r}. \quad (85.4)$$

Любую гармоническую сферически-симметричную волну можно представить в виде суперпозиции двух бегущих или двух стоячих или одной бегущей и одной стоячей волны, так же, как это делается и для плоских одномерных волн.

Обе бегущие волны и первая из стоячих имеют особенность в центре волны: бесконечную амплитуду давления. Поэтому такие волны имеют физический смысл только в том случае, если центр волны занят каким-либо телом. Вторая стоячая волна особенности не имеет и может существовать во всей среде, включая и центр волны; это частный случай волны вида (83.4). При стремлении радиуса к нулю скорость частиц в волнах, имеющих особенность, стремится к бесконечности и испытывает разрыв при прохождении через центр волны. В волне, особенности не имеющей, скорость частиц непрерывна и в центре волны обращается в нуль.

Каждая из указанных волн соответствует определенной акустической ситуации. Например, расходящуюся волну можно создать, помещая пульсирующую сферу в неограниченную среду. Сходящуюся волну можно создать в жидкости, заполняющей сферический сосуд, стенки которого совершают пульсационные колебания, помещая в центре поглотитель, целиком поглощающий сходящуюся волну, так что расходящаяся волна не возникает (ниже найдем, каковы должны быть свойства такого поглотителя). Стоячую волну с особенностью можно создать, помещая пульсирующую сферу в центр сферического сосуда с звуконепропускаемой стенкой: расходящаяся волна, отражающаяся от стенки, возвращается к центру в виде сходящейся волны. Разумеется, такая волна существует только вне пульсирующей сферы. Наконец, стоячая волна без особенности создается в среде, целиком заполняющей сферический сосуд, при пульсациях стенок сосуда. В этом случае, в отличие от остальных, в центре никаких посторонних тел располагать не надо.

Последние три типа волн можно получить как частные случаи отражения сходящейся сферической волны от сферы, помещенной в центре волны, подбирая соответственное значение входного импеданса поверхности сферы Z . Введем коэффициент отражения сходящейся волны при ее отражении от центральной сферы, записывая расходящуюся сферическую волну, возникающую при отражении, в виде

$$p = \mathcal{Q} \frac{\exp(-2ika + ikr)}{r},$$

где \mathcal{V} — коэффициент отражения, зависящий от входного импеданса сферы радиуса a . Сходящаяся бегущая волна соответствует коэффициенту отражения $\mathcal{V} = 0$, стоячая волна с особенностью — коэффициенту отражения $\mathcal{V} = e^{2ika}$ и стоячая волна без особенности — коэффициенту отражения $\mathcal{V} = -e^{2ika}$. Найдем соотношение, связывающее коэффициент отражения, радиус сферы и ее входной импеданс. Суммарное поле падающей и отраженной волн на поверхности сферы дается формулами

$$p_{r=a} = \frac{e^{-ika}}{a} + \mathcal{V} \frac{e^{-ika}}{a};$$

$$v_{r=a} = \frac{1}{ipcka} \left(\frac{-ika-1}{a} e^{-ika} + \mathcal{V} \frac{ika-1}{a} e^{-ika} \right).$$

Из граничного условия $(p/v)_{r=a} = -Z$ (для входного импеданса нормальная скорость считается положительной в направлении внутрь сферы) получим $Z = ipcka (1 + \mathcal{V})/[1 + ika + \mathcal{V}(1 - ika)]$, откуда, вводя обозначение $\xi = Z/\rho c$ для относительного входного импеданса, имеем

$$\xi = ika \frac{1 + \mathcal{V}}{1 + ika + \mathcal{V}(1 - ika)}, \quad (85.5)$$

$$\mathcal{V} = \frac{ika\xi - (ika - \xi)}{ika\xi + (ika - \xi)}. \quad (85.6)$$

Проанализируем эти формулы для наиболее интересных случаев.

Для получения чисто сходящейся волны ($\mathcal{V} = 0$) импеданс должен быть равен, согласно (85.5)

$$\xi = ika/(1 + ika). \quad (85.7)$$

Если радиус отражающей сферы велик ($ka \gg 1$), то $\xi \approx 1$, как и следовало ожидать, поскольку при большом радиусе сферическая волна похожа на плоскую, для которой полное поглощение достигается как раз при $\xi = 1$ (см. § 43). При малом радиусе сферы получим

$$\xi \approx ika(1 - ika). \quad (85.8)$$

Таким образом, для того чтобы малая сфера целиком поглотила падающую на нее сходящуюся волну, ее входной импеданс должен быть мал по модулю и должен быть комплексным, с мнимой частью упругого типа; при этом активная часть импеданса должна быть мала по сравнению с его реактивной частью. Любопытно, что, в противоположность случаю плоской волны, при чисто вещественном импедансе полное поглощение невозможно. Легко рассчитать, что при чисто вещественном импедансе минимальное значение коэффициента отражения сходящейся сферической волны получается при

$$\xi = \sqrt{(ka)^2/[1 + (ka)^2]}$$

и равно по модулю

$$|\mathcal{V}| = \sqrt{1 + (ka)^2} - ka.$$

Эта величина никогда в нуль не обращается, а при малом ka близка к единице: малая сфера с любым чисто активным импедансом отражает почти все.

Стоячую волну без особенностей можно получить, как ясно из физических соображений, помещая в качестве центрального тела сферу из той же среды, что и остальное пространство. Поскольку коэффициент отражения при этом равен $-\exp(2ika)$, то, согласно (85.5), импеданс такой сферы есть

$$\zeta = \frac{ika \sin ka}{\sin ka - ka \cos ka}. \quad (85.9)$$

Импеданс чисто реактивный, а характер реакции (упругая или массовая реакция) зависит от радиуса сферы. При $ka = l\pi$ (l — целое) импеданс обращается в нуль, т. е. сфера ведет себя как вакуумная полость. При малых значениях ka импеданс приближенно равен $3i/ka$ и, следовательно, имеет упругий характер. Сравнивая эту величину с (85.7), мы видим, что при малых значениях ka импеданс, устраняющий особенность, оказывается по модулю весьма большим по сравнению с импедансом, обеспечивающим полное поглощение падающей волны.

Наконец, волна стоячего типа с особенностью, соответствующая $\mathcal{V} = \exp(2ika)$, создается при чисто мнимом импедансе центральной сферы, равном

$$\zeta = \frac{ika \cos ka}{\cos ka + ka \sin ka}, \quad (85.10)$$

что дает при малых ka значение $\zeta \approx ika$, отличающееся от импеданса, соответствующего полному поглощению, только отсутствием активной части.

Рассмотрим теперь обратную задачу: дан импеданс малой сферической поверхности. Требуется найти результирующее поле при падении на сферу сходящейся сферической волны. Из (85.6) видно, что как при $\zeta \ll ka$, так и при $\zeta \gg ka$ коэффициент отражения будет близок к -1 , так что результирующее поле будет близко к полю без особенностей вида $p = (\sin kr)/r$. Значит, поле будет практически одинаково при помещении в центр сходящейся волны малой сферы с очень большим импедансом (например, абсолютно жесткой сферы) и с очень малым импедансом (например, вакуумной полости). Только при относительном импедансе с реактивной частью упругого типа, близкой к ika , коэффициент отражения будет близок к $+1$ и результирующее поле будет близко к полю с особенностью вида $(\cos kr)/r$ или $\exp(-ikr)/r$.

Здесь есть аналогия с поведением резонатора, на который действует возмущающая сила данной частоты. Поле без особенностей

аналогично поведению резонатора при очень большой жесткости пружины или при очень малой ее жесткости: в обоих случаях движение осциллятора остается малым, что соответствует малым значениям скорости в поле без особенностей вблизи центра. «Резонанс» в данном случае соответствует $\zeta = ika$, при этом скорости вблизи центра делается большой. Это — не только внешняя аналогия, и картине резонанса можно придать реальный смысл, помещая в центр волны упругую сферу.

§ 86. Сферически-симметричные колебания сферического объема жидкости

Рассмотрим сферический сосуд, заполненный жидкостью или газом. Среда в сосуде может совершать различные свободные гармонические сферически-симметричные колебания. Найдем все такие колебания. Стенку сосуда будем считать непроницаемой для звуковых волн (чисто мнимый импеданс стенки). Тогда колебание будет представлять собой стоячую волну. Поскольку давление во всем сосуде должно оставаться конечным, волна должна иметь вид $p = (\sin kr)/r$.

Значение k , а следовательно, и частота колебаний найдутся из граничного условия на стенке сосуда: отношение давления в волне к скорости частиц должно равняться входному импедансу Z стенки сосуда. Из (85.3) и (85.4) найдем, что граничное условие имеет вид

$$i\rho cka \frac{\sin ka}{ka \cos ka - \sin ka} = Z,$$

где a — радиус сосуда, или, в более компактном виде,

$$\frac{ka \operatorname{tg} ka}{\operatorname{tg} ka - ka} = i\zeta. \quad (86.1)$$

Так как импеданс стенки в общем случае зависит от частоты, то можно считать, что правая часть, как и левая, есть функция ka , и рассматривать последнее уравнение как (трансцендентное) уравнение частот с неизвестной ka . Решения образуют бесконечный дискретный набор значений ka , соответствующий такому же бесконечному дискретному набору собственных частот сферически-симметричных колебаний среды в сосуде. График функции (86.1) дан на рис. 86.1. Если известна частотная зависимость импеданса стенки сосуда, то по этому графику можно определять собственные значения величины ka .

Рассмотрим некоторые простейшие случаи.

Пусть $\zeta = 0$, т. е. граница колеблющегося сферического объема жидкости свободна (вибрации капли). Тогда, как видно из (86.1), собственные значения ka образуют гармонический ряд π , 2π , 3π , ... На собственной частоте на диаметре капли укладывается,

таким образом, целое число длин волн. Резонансные частоты равны, следовательно, $\pi c/a$, $2\pi c/a$, $3\pi c/a$, . . . Для самого низкочастотного колебания как давление, так и скорость сохраняют свой знак во всем объеме сферы. Радиальное распределение амплитуд этих величин показано на рис. 86. 2. Сами эти величины по фазе сдвинуты друг относительно друга на четверть периода.

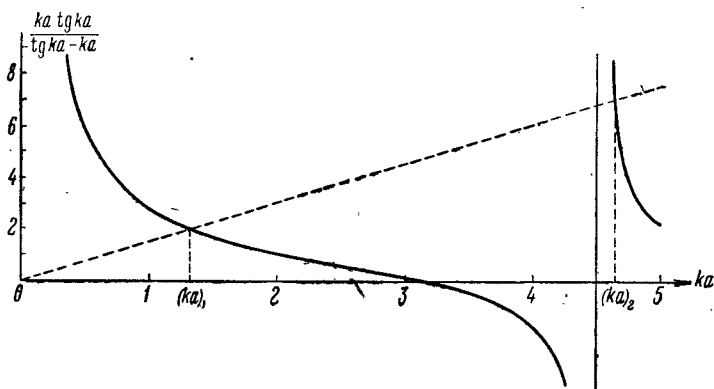


Рис. 86.1. График функции $\frac{ka \operatorname{tg} ka}{\operatorname{tg} ka - ka}$. В интервале значений ka от 0 до примерно 4,49 функция принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, при любом импедансе границы в этом диапазоне значений ka имеется значение, соответствующее собственной частоте. Низкие частоты ($0 < ka < \pi$) отвечают массовому импедансу, а высокие ($\pi < ka < 4,4934$) — упругому импедансу. Пунктиром показано для примера определение двух нижших значений ka для стенки массового типа с поверхностной плотностью $\mu = ap$.

Интересно, что амплитуда скорости частиц на поверхности сферы не максимальна: в самом деле, если, например, в выражении

$$i\rho\omega v = \frac{kr \cos kr - \sin kr}{r^2}$$

положить $kr = \pi - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, т. е. рассмотреть скорость вблизи границы для первого колебания, то приближенно

$$v = \frac{i\pi}{\rho\omega a^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\pi}\right).$$

Отсюда видно, что амплитуда колебаний [растет от конца радиуса к центру. Так как в центре она равна нулю, а знак скорости сохраняется на всем радиусе, то ясно, что в некоторой точке амплитуда достигает максимума. Уравнение для радиуса, соответствующего максимуму скорости, найдем, приравнявая нулю производную скорости частиц по r , что дает $kr/\operatorname{tg} kr = 1 - (kr)^2/2$. Это соответствует радиусу $r = 0,6626a$ ($kr = 2,08$). Скорость на поверхности сферы составляет 0,725 от максимального значения скорости.

Для абсолютно жесткой стенки уравнение (86.1) примет вид $ka = \text{tg } ka$. Решения этого уравнения приближенно равны

$$ka = \frac{(2l+1)\pi}{2} - \frac{2}{(2l+1)\pi}.$$

Уже для первого колебания ($l = 1$) приближенное значение $ka = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} \approx 4,50$ отличается от точного менее чем на 0,2%;

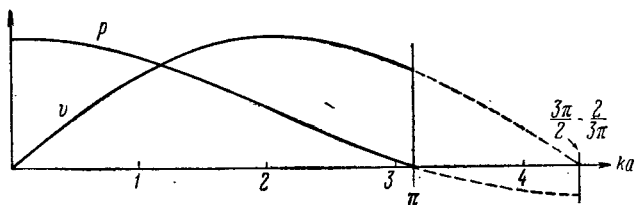


Рис. 86.2. Сплошными линиями показано распределение вдоль радиуса амплитуд давлений и скорости частиц для первого нормального колебания свободного сферического объема жидкости ($ka = \pi$). Пунктир достраивает эти распределения до кривых, соответствующих сферическому объему жидкости в абсолютно жесткой оболочке.

погрешность для более высоких номеров еще меньше. Наини́зшая частота собственного колебания для жесткой границы выше, чем частота для свободной границы при том же радиусе. На рис. 86.2 показано соответственное распределение давлений и скоростей частиц по радиусу.

§ 87. Монополь. Объемная скорость

Теперь займемся расходящейся сферически-симметричной волной. Создание такой волны представим себе следующим образом. Пусть в среду помещена сфера с проницаемыми стенками, внутри которой попеременно создается то избыток, то недостаток некоторого количества вещества данной среды; это количество будет то выходить через стенки во внешнюю среду, то возвращаться обратно через стенки внутрь сферы. Такое устройство есть идеальный излучатель, создающий снаружи сферы сферически-симметричную расходящуюся волну (проницаемую сферу можно и не осуществлять материально: важно только появление и исчезновение некоторого объема среды). Радиус сферы может быть любым, но особенно важен случай сферы малого радиуса по сравнению с радиусом неволновой зоны. Такой излучатель называют *монополем*.

В пределах неволновой зоны скорость частиц на поверхности сферы в расходящейся волне примерно обратно пропорциональна квадрату радиуса. Поверхность же сферы прямо пропорциональна квадрату радиуса, так что для создания данного поля снаружи сферы общее количество втекающей или вытекающей через стенки

среды (поток среды через поверхность сферы) следует брать практически не зависящим от радиуса. Значит, это количество и будет определять данную сферически-симметричную волну; можно ожидать, что радиус сферы (пока он мал) при данном количестве создаваемой и исчезающей среды роли не играет; поэтому при малом радиусе сферы говорят о *точечном монополе*.

Подтвердим эти соображения расчетом. Пусть монополь в виде малой сферы радиуса a создает волну $p = f(t - r/c)/r$. Согласно (84.1) скорость частиц на поверхности сферы равна

$$v_{r=a} = \frac{1}{\rho a^2} \int_{-\infty}^t f\left(t - \frac{a}{c}\right) dt + \frac{1}{\rho a c} f\left(t - \frac{a}{c}\right),$$

что дает следующий поток скорости частиц через всю поверхность сферы:

$$4\pi a^2 v_{r=a} = \frac{4\pi}{\rho} \left[\int_{-\infty}^t f\left(t - \frac{a}{c}\right) dt + \frac{a}{c} f\left(t - \frac{a}{c}\right) \right].$$

Введем величину

$$V(t) = \frac{4\pi}{\rho} \int_{-\infty}^t f(t) dt. \quad (87.1)$$

Очевидно, поток равен сумме двух первых членов разложения этой величины в ряд по степеням приращения a/c аргумента вблизи значения аргумента $t - a/c$:

$$4\pi a^2 v_{r=a} = V(t) - \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^2 V(t)}{\partial t^2} - \dots,$$

откуда видно, что поток через поверхность сферы, создающий данную волну, отличается от $V(t)$, только начиная со второго порядка относительно малой величины a/cT , где T — характерное время изменения V . Величину $V(t)$ называют *объемной скоростью монополя*. Мы видим, действительно, что этот поток мало зависит от радиуса a сферы. Объемная скорость монополя очень велика по сравнению со скоростью изменения под действием звуковой волны объема сферы того же радиуса a , вырезанного в среде вне источника этого источника, среду практически можно считать несжимаемой, а приближенные формулы обрывать на втором члене.

Выразим теперь поле сферической волны через объемную скорость монополя, создающего эту волну. Из (87.1) имеем

$$f(t) = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\partial V(t)}{\partial t}.$$

Значит, давление в волне равно

$$p = \frac{\rho}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} V\left(t - \frac{r}{c}\right) \approx \frac{\rho}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} V(t) - \frac{\rho}{4\pi c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(t). \quad (87.2)$$

Отсюда видно, что излучение обусловлено только *изменением* объемной скорости.

Скорость частиц получится в виде

$$v = \frac{1}{4\pi r^2} V\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{4\pi r c} \frac{\partial}{\partial t} V\left(t - \frac{r}{c}\right) \approx \frac{1}{4\pi r^2} V(t). \quad (87.3)$$

Заметим, что данная сферически-симметричная волна может быть создана также протеканием среды через поверхность сферы не малого радиуса, но тогда поток среды через поверхность \dot{V} не будет равен объемной скорости сферической волны и будет зависеть от радиуса.

Для гармонического монополя с объемной скоростью

$$V(t) = V_0 e^{-i\omega t}$$

имеем

$$p = -i\rho\omega V_0 \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (87.4)$$

$$v = -V_0 \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr}.$$

В этом случае критерий малости радиуса монополя a имеет вид $ka \ll 1$. Отличие потока через поверхность сферы радиуса a от величины V_0 равно $1/2 (ka)^2 V_0$, т. е. относительная погрешность равна $1/2 (ka)^2 : 1$.

Фазу объемной скорости гармонического монополя можно считать произвольной (если еще не выбрана фаза какой-либо другой величины, характеризующей волну, например фаза давления в той или иной точке): изменение фазы равносильно изменению начала отсчета времени. Например, изменение знака V_0 равносильно сдвигу начала отсчета на половину периода.

Появление и исчезновение среды внутри проницаемой или мысленно выделенной в среде сферы можно имитировать другим, более реальным процессом: пульсацией непроницаемой сферы малого радиуса. Такой излучатель также называют монополем. Строго говоря, в таком излучателе за объемную скорость нельзя принять величину $4\pi a^2 v$, где v — скорость поверхности излучателя, так как при колебаниях будет меняться и сам радиус сферы, а это даст нелинейную квадратичную поправку к потоку скорости. Действительно, скорости поверхности $v = v_0 \cos \omega t$ соответствует

изменение радиуса

$$\Delta a = (v_0/\omega) \sin \omega t,$$

так что поток скорости окажется равным

$$4\pi \left(a + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \right)^2 v_0 \cos \omega t.$$

Добавка к потоку составляет квадратичную по отношению к скорости величину $4\pi a (v_0^2/\omega) \sin 2\omega t$ *). Это — колебание двойной частоты. Относительная величина нелинейной добавки равна

$$v_0/\omega a = M/ka,$$

где $M = v_0/c$ — число Маха. Чтобы различие между двумя видами монополя было мало, должно выполняться условие $M \ll ka$ (обычного требования малости числа Маха по сравнению с единицей здесь оказывается недостаточно). В дальнейшем будем предполагать выполненным и это условие. Так как $v_0/\omega = \Delta a$ — амплитуда смещения поверхности, то условие равносильно требованию малости изменения радиуса сферы по сравнению с самим радиусом.

Из сказанного выше следует важное заключение о связи между конструктивными элементами монополя и создаваемым им полем. При заданной величине вытесняемого объема, который определяется в конечном счете размерами излучателя (например, радиусом малой сферы), объемная скорость пропорциональна частоте звука. Значит, создаваемое звуковое давление пропорционально квадрату частоты, а излученная энергия — четвертой степени частоты. Следовательно, эффективность излучения малого источника звука быстро падает с понижением частоты. В частности, поэтому «бас-громкоговорители» должны иметь такие большие размеры по сравнению с «пищалками» — громкоговорителями для высоких частот звука.

Возьмем в качестве излучателя звука не пульсирующую сферу, а пульсирующее тело любой формы и, кроме того, сообщим поверхности тела различные скорости в разных точках, требуя только, чтобы объем тела менялся с течением времени. Тогда при размерах тела, не малых по сравнению с длиной волны, излучаемое поле будет иметь сложную структуру, зависящую и от формы, и от размеров тела по отношению к длине волны, и от распределения скоростей по его поверхности. Если же тело мало по сравнению с длиной волны, то, как можно показать, вдали от тела главная часть поля всегда явится сферически-симметричной расходящейся волной — такой же волной, которую создал бы монополь в виде пульсирующей сферы малого радиуса с объемной скоростью, равной суммарному потоку скорости через поверхность тела.

*) Членом, содержащим v_0^3 , пренебрегаем.

§ 88. Сопротивление среды в сферической волне. Присоединенная масса

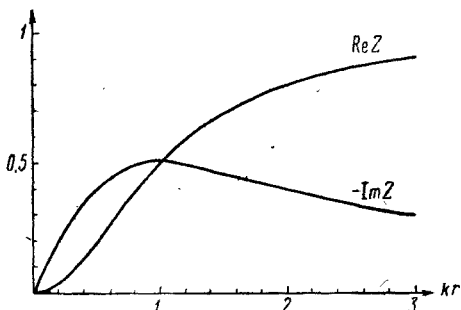
Введем для сферически-симметричной волны понятие сопротивления среды, аналогичное этому понятию для плоской волны: отношение давления к скорости частиц. Мы видели, что для плоских волн любой формы сопротивление среды не зависит от времени и равно ρc . Для сферических волн отношение давления к скорости вообще зависит от времени. Поэтому понятие сопротивления среды можно ввести только для гармонических волн, для которых зависимость от времени одинакова для давления и для скорости и поэтому выпадает.

Согласно (85.1) и (85.2) для расходящейся гармонической сферически-симметричной волны сопротивление среды равно

$$Z = \frac{p}{v} = \frac{i\rho ckr}{ikr - 1} = -\frac{i\rho ckr}{1 + (kr)^2} + \frac{\rho c (kr)^2}{1 + (kr)^2}. \quad (88.1)$$

В отличие от плоской волны, сопротивление оказывает комплексным и зависящим от расстояния до центра волны и от частоты. Мнимая часть сопротивления отрицательна, т. е. имеет характер массового сопротивления.

Рис. 88.1. Вещественная и мнимая (с обратным знаком) части относительного сопротивления среды $Z/\rho c$ в сферически-симметричной волне.



На рис. 88.1 даны зависимости $-\text{Im } Z/\rho c$ и $\text{Re } Z/\rho c$ от kr . При малых значениях kr мнимая часть зависит от kr линейно, затем рост мнимой части замедляется, достигает максимума (равного $1/2\rho c$) при $kr = 1$, а затем убывает, асимптотически стремясь к нулю по мере возрастания kr . Вещественная часть сопротивления по модулю относится к мнимой как $kr : 1$; при малых kr она имеет порядок $(kr)^2$ и мала по сравнению с мнимой частью, а при $kr \rightarrow \infty$ стремится к ρc . При $kr = 1$ вещественная и мнимая части сопротивления равны по модулю. Асимптотическое поведение сопротивления делается понятным, если учесть, что увеличение kr равносильно удалению на бесконечность, где сферическая волна делается похожей на плоскую.

Сопротивление, испытываемое со стороны среды поверхностью сферы малого радиуса r ($kr \ll 1$), равно приближенно

$$Z = -i\omega\rho r (1 + ikr). \quad (88.2)$$

Вещественная часть сопротивления мала по сравнению с мнимой, а эта последняя имеет массовый характер и в данном приближении совпадает с реакцией $-i\omega\rho r$, которую оказывала бы несжимаемая жидкость той же плотности. Действие реактивной

части сопротивления в отсутствие среды можно имитировать, распределяя равномерно на поверхности сферы массу с поверхностной плотностью ρ . Суммарная масса для всей сферы составит тогда $4\pi r^3\rho$, что равно массе среды в тройном объеме сферы. Эту массу называют *присоединенной массой* сферы.

Присоединенная масса не зависит от частоты. Фактическая реактивная часть сопротивления в сжимаемой среде меньше сопротивления присоединенной массы в отношении $1 : [1 + (kr)^2]$. Модуль полного сопротивления среды в сжимаемой среде меньше сопротивления присоединенной массы в $[1 + 1/2(kr)^2]$ раз (поправки относятся к случаю $kr \ll 1$).

Для монополя, осуществленного в виде малой пульсирующей сферы, расчет сил, необходимых для создания заданной объемной скорости, можно вести, исходя из величины присоединенной массы, как если бы среда была несжимаемой. Различие фаз сопротивления для сжимаемой и несжимаемой среды тоже мало; однако, как мы уже говорили, это малое различие играет принципиальную роль в вопросе об излучении звука.

§ 89. Колебания упругой сферы в среде. Колебания газового пузырька в воде

Возьмем в качестве монополя упругую безмассовую сферу радиуса a с удельным коэффициентом упругости κ . Это значит, что в поле давления p приращение Δa радиуса сферы равно $\Delta a = -p/\kappa$. Такая сфера, помещенная в несжимаемую среду, явится для сферически-симметричных колебаний осциллятором с одной степенью свободы. Обобщенная масса такого осциллятора — это присоединенная масса среды, равная $4\pi a^3\rho$; обобщенный коэффициент упругости равен $4\pi a^2\kappa$. Следовательно, собственная частота осциллятора равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi a^2\kappa}{4\pi a^3\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa}{a\rho}}. \quad (89.1)$$

Такой же расчет можно выполнить и для сферы, помещенной в сжимаемую среду, если длина волны собственной частоты в среде велика по сравнению с размерами сферы, т. е. выполнено условие $k_0 a \ll 1$, где $k_0 = \omega_0/c$. Для этого должно выполняться неравенство $\kappa \ll \rho c^2/a$. Если сфера — сплошное тело, это значит, что сжимаемость тела должна быть много больше сжимаемости среды (такому условию всегда удовлетворяет, например, газовый пузырек в воде). Колебания упругой сферы в сжимаемой среде можно по-прежнему рассматривать как колебания осциллятора с одной степенью свободы, но его колебания будут теперь затухающими: энергия колебаний будет «высвечиваться» — затрачиваться на излучение звука колеблющейся сферой.

Расчет осциллятора в этом случае проще всего выполнить следующим образом. Если сфера мала по сравнению с длиной волны,

то можно пользоваться формулой (88.2), отличающейся от формулы для несжимаемой среды только множителем $1 + ika$, учитывающим активную часть реакции среды. Полную реакцию сжимаемой среды на сферу можно, следовательно, имитировать в формуле для сопротивления, распределяя по поверхности сферы «комплексную поверхностную плотность» $\rho r (1 + ika)$. Тогда частоту колебаний — теперь она также комплексна — найдем по той же формуле (89.1):

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho r (1 + ika)}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} ika \right). \quad (89.2)$$

Таким образом, амплитуда колебаний будет затухать по закону

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{1}{2} k_0 a \omega_0 t \right),$$

а энергия осциллятора — по закону

$$E = E_0 \exp \left(-k_0 a \omega t \right).$$

Добротность осциллятора равна $Q = 1/k_0 a$.

Ширина резонансной кривой равна $\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q = k_0 a$.

В этом расчете принято, что $k_0 a \ll 1$. Поэтому при подсчете затухания волновое число можно было рассчитывать, исходя из вещественной частоты, полученной при пренебрежении сжимаемостью, а частоту колебаний считать той же, что и в отсутствие сжимаемости. При комплексной частоте получим и комплексное волновое число:

$$k = k_0 \left(1 - \frac{1}{2} ika \right).$$

Таким образом, излучаемая волна имеет вид

$$p = p_0 \exp \left(-i\omega_0 t - \frac{1}{2} k_0 a \omega_0 t \right) \frac{\exp \left(ik_0 r + \frac{1}{2} k_0 a k_0 r \right)}{r}.$$

Обратим внимание на то, что в каждый момент времени при удалении от центра волны амплитуда колебаний вначале падает вследствие сферического расхождения, а затем растет вследствие перевешивания экспоненциального множителя. (Минимум амплитуды соответствует $k_0 r = 2/k_0 a$.) Физический смысл этой зависимости от расстояния был пояснен в § 36.

Для всякого осциллятора, помещенного в среду, излучение эквивалентно некоторому затуханию. В нашем расчете мы учитывали только это «радиационное» затухание. Если в осцилляторе имеются и собственные потери, то их следует добавить к радиационным потерям.

В качестве примера рассмотрим колебания газового пузырька в жидкости. Газовый пузырек можно считать практически безмассовой упругой сферой. Найдем коэффициент упругости пузырька. Пусть радиус пузырька a получил малое приращение

$\Delta a \ll a$. Тогда его объем $(4/3)\pi a^3$ получит приращение $4\pi a^2 \Delta a$, а значит, сжатие газа в пузырьке будет равно

$$s = -\frac{4\pi a^2 \Delta a}{(4/3)\pi a^3} = -3 \frac{\Delta a}{a}.$$

В результате давление внутри пузырька получит приращение $p = s/\beta = -3 \Delta a/a\beta$, где β — сжимаемость газа. Отсюда следует, что коэффициент упругости равен $\kappa = -p/\Delta a = 3/a\beta$. Подставляя в (89.1), найдем частоту радиально-симметричных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{a^2 \rho \beta}}. \quad (89.3)$$

Остается только вопрос, соответствует ли сжимаемость газа в пузырьке адиабатическому или изотермическому процессу? Дело в том, что при малом радиусе пузырька весь газ в нем находится практически в статическом режиме и целиком испытывает адиабатические нагревания и охлаждения при изменениях объема. Выравнивается же не плавное изменение температуры на расстояниях в четверть длины волны, как в волне в неограниченной среде, а резкий скачок на границе окружающей жидкости, температура которой в волне почти не меняется (вода при 4°C вообще не меняет температуру при сжатиях и разрежениях), с малым объемом газа в пузырьке. Поэтому в данном случае теплообмен гораздо больше, чем в волне, бегущей в неограниченном газе, и можно ожидать, что при некоторых условиях газ в пузырьке окажется в режиме, близком к изотермическому. Очевидно, все будет зависеть от соотношения между длиной температурной волны в газе и радиусом пузырька. Если длина температурной волны мала по сравнению с радиусом, то процесс приблизительно адиабатический; если длина волны порядка радиуса или больше его, то процесс близок к изотермическому. Соответственно в первом случае в формуле (89.3) следует брать адиабатическую, а во втором случае — изотермическую сжимаемость.

Условие адиабатичности имеет вид $a \gg \delta_x$, где $\delta_x = 0,24/\sqrt{f}$ — глубина прогревания (см. § 19). При выполнении этого условия можно считать $\beta = 1/\gamma P$, где P — давление газа в пузырьке (гидростатическое давление, сложенное с капиллярным давлением $2T/a$, где T — капиллярная постоянная; второе слагаемое играет роль только для очень малых пузырьков). Теперь (89.3) примет вид

$$\omega = \sqrt{\frac{3\gamma P}{a^2 \rho}}. \quad (89.4)$$

Для пузырька воздуха вблизи свободной поверхности воды это даст $\omega a = 2050$ или $f a = 327$ гц·см. Критерий адиабатичности примет вид $a \gg 0,24^2/327 = 1,8 \cdot 10^{-4}$ см: радиус пузырька должен быть много больше двух микрон. Это соответствует частотам много

меньшим мегагерца. Так как наиболее важны на практике частоты порядка нескольких килогерц, то газ в пузырьках с соответственными резонансными частотами всегда находится в квазиadiaбатическом режиме.

Отметим еще простую формулу:

$$ka = \sqrt{3\beta_{\text{воды}}/\beta_{\text{газа}}}.$$

Для воздушного пузырька вблизи свободной поверхности воды это дает примерно $ka = 0,014 = 1/71$. Отсюда видно, что исходное предположение о малости размеров шарика по сравнению с длиной волны не только в воде, но и в газе выполняется, так что предположение о квазистатическом характере сжатий и разрежений газа в пузырьке при собственных колебаниях было обоснованным, а при расчете собственной частоты колебаний можно было пренебрегать сжимаемостью воды (относительное изменение частоты вследствие сжимаемости воды равно по порядку $(ka)^2 = 1/5000$).

На глубине H м под поверхностью воды гидростатическое давление превышает атмосферное в $1 + H/10$ раз. Поэтому собственная частота пузырька данного радиуса на глубине H в $\sqrt{1 + H/10}$ раз больше, чем собственная частота у поверхности. Например, на глубине 30 м собственная частота пузырька данного радиуса вдвое больше, чем у поверхности.

Сжимаемость среды вносит затухание в колебания пузырька в результате «высвечивания» пузырьком акустических волн. Если бы других потерь энергии колебаний не было, то добротность пузырька в воде у поверхности была бы равна $Q = 1/ka = 71$: свободные колебания пузырька затухали бы в e раз после $Q/\pi = = 23$ колебаний. При увеличении глубины добротность пузырька данного радиуса уменьшается в отношении $1 : \sqrt{1 + H/10}$; например, при одном и том же радиусе добротность пузырька на глубине 30 м вдвое меньше, чем у поверхности. У всплывающего пузырька, содержащего неизменное количество газа, при изменении глубины изменяется и радиус, и давление. В результате собственная частота пузырька при всплытии с глубины H до поверхности уменьшается в отношении $1 : (1 + H/10)^{3/4}$, а добротность растет в отношении $(1 + H/10)^{1/2} : 1$.

Приведенный расчет затухания колебаний пузырька учитывает только «высвечивание» колебательной энергии пузырька, превращающейся в звуковую энергию в воде. В действительности имеет место и переход механической энергии в тепло: хотя колебания газа происходят квазиadiaбатически, сглаживание температурных скачков у границы газ — вода приводит к потерям энергии. Вязкость жидкости и влияние поверхностно-активных веществ на поверхности пузырька также вносят свой вклад в потери механической энергии. В результате добротность пузырька оказывается меньше величины $1/ka$, достигаемой при отсутствии перехода механической энергии в тепло. При наличии потерь добротность

зависит от размеров пузырька (и соответственно от резонансной частоты), так как сами механизмы потерь связаны с размерами пузырька. Существенно сказывается и состав газа в пузырьке (вследствие различной теплопроводности разных газов).

Пульсации пузырька — не единственные возможные сферически-симметричные колебания газа в пузырьке: в нем возможны также колебания типа рассмотренных в § 86 для абсолютно жесткой стенки, для которых $ka = \text{tg } ka$. Это — колебания высокой частоты (первое же колебание в 200 раз выше по частоте пульсационного колебания), для которых граница с жидкостью является приближенно жесткой. Набор таких колебаний аналогичен набору гармонических колебаний в трубе с жесткими стенками. Низкочастотная же пульсация аналогична добавочному колебанию, появляющемуся в трубе при замене абсолютной жесткой стенки массивным поршнем. Для пузырька роль такого массивного поршня играет присоединенная масса жидкости.

§ 90. Мощность излучения монополя. Плотность энергии в сферически-симметричной волне

Мощность, излучаемая монополем, равна суммарному потоку вектора плотности потока мощности через любую поверхность, окружающую монополь. Для расчета удобно выбрать в качестве такой поверхности сферу, описанную из центра волны. Найдем раньше всего мгновенную плотность потока мощности, т. е. величину $W = pv$. Пользуясь формулой (84.1), находим для расстояния r от центра

$$W = \frac{p^2}{\rho c} + \frac{p}{\rho r} \int_{-\infty}^t p dt. \quad (90.1)$$

Первое слагаемое, обусловленное волновым членом скорости, назовем *активным потоком мощности* (ср. § 39, где это понятие было введено для гармонических процессов). Второй член, обусловленный неволновым членом скорости, назовем *реактивным потоком*.

Реактивная мощность не дает никакого вклада в энергию, передаваемую среде окончательно. В самом деле, второй член в (90.1) можно представить в виде производной по времени от величины

$$\frac{1}{2rp} \left(\int p dt \right)^2.$$

Поэтому если излучение длилось в течение конечного промежутка времени, то суммарная энергия, обусловленная этим членом и сообщенная среде, равна нулю, поскольку интеграл равен нулю. Для гармонического процесса переданная в среду реактивная энергия обращается в нуль за один период. Таким образом, реактивная часть энергии не остается в среде, а переходит из излуча-

теля в среду и обратно. В несжимаемой среде имеется только реактивный поток.

Активная мощность существенно положительна: она накапливается в среде по мере излучения. Интеграл по времени от этой мощности и дает энергию, перешедшую в среду. Плотность активного потока мощности убывает с расстоянием как $1/r^2$. Следовательно, суммарный поток активной мощности через всю сферу от ее радиуса не зависит. Плотность реактивного потока мощности убывает быстрее: как $1/r^3$, так что полный мгновенный поток реактивной мощности убывает по мере удаления от излучателя. Однако в неволновой зоне мгновенный поток реактивной мощности превосходит по абсолютной величине поток активной мощности.

Соответственно двум компонентам мощности, часто называют два слагаемых скорости в формуле (84.1) активной и реактивной компонентами скорости по отношению к давлению. Наоборот, можно, приняв за исходную величину объемную скорость, найти активную и реактивную компоненты давления на поверхности монополя по отношению к объемной скорости (для малых r):

$$p(t, r) = \rho \frac{\partial V(t)}{\partial t} \frac{1}{4\pi r} - \rho \frac{\partial^2 V(t)}{\partial t^2} \frac{1}{4\pi c}. \quad (90.2)$$

Суммарный мгновенный поток мощности есть

$$\rho V = \rho V \frac{\partial V}{\partial t} \frac{1}{4\pi r} - \rho V \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \frac{1}{4\pi c}.$$

Первое слагаемое в (90.2) дает реактивную часть давления, работа которой за длительное время в среднем равна нулю, а второе слагаемое — активную часть давления, работа которой накапливается с течением времени.

В гармонической расходящейся волне $p = p_0 e^{i(kr - \omega t)}/r$ плотность потока мощности равна

$$W = \frac{|p_0|^2}{\rho c r^2} \left[\cos^2(\omega t - kr) + \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) \cos(\omega t - kr) \right]. \quad (90.3)$$

Первое слагаемое в скобках дает активную, а второе — реактивную часть мощности. Среднее значение плотности потока равно $\bar{W} = \frac{1}{2} \frac{|p_0|^2}{\rho c r^2}$. Таким образом, суммарная средняя мощность, излучаемая монополем, равна $J = 4\pi r^2 \bar{W} = 2\pi |p_0|^2 / \rho c$.

Так как $|p_0| = \rho \omega |V| / 4\pi$, то эта мощность выразится через объемную скорость монополя $|V|$ и через линейную скорость $v = |V| / 4\pi a^2$ поверхности малой пульсирующей сферы радиуса a следующим образом:

$$J = \frac{1}{8\pi} \rho c k^2 |V|^2 = \frac{1}{2} 4\pi a^2 \rho c v^2 (ka)^2. \quad (90.4)$$

Сравним мощность излучения монополя с мощностью излучения плоской волны поршнем той же площади $4\pi a^2$ и колеблю-

щимся с той же скоростью v , что и поверхность пульсирующего шарика. Для того чтобы поршень излучал плоскую волну, его нужно поместить в цилиндрическую трубу того же сечения. Мощность излучения плоского поршня равна $J_{\text{поршня}} = (1/2) 4\pi a^2 \rho c v^2$, т. е. в $1/(ka)^2$ раз больше мощности излучения монополя. Таким образом, эффективность излучения звука в виде сферической волны пульсирующим телом, малым по сравнению с длиной волны, мала по сравнению с излучением плоской волны с той же площади излучающей поверхности.

В сходящейся бегущей волне плотность потока мощности записывается так же, как и в расходящейся волне, но с обратным знаком: вектор потока направлен к центру волны, а не наружу, как в расходящейся волне. Для суперпозиции сходящейся и расходящейся волн

$$p = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}$$

плотность потока мощности равна

$$\mathcal{W} = pv = \frac{1}{\rho c} \frac{f^2 - g^2}{r^2} + \frac{1}{\rho r} p \int_{-\infty}^t p dt.$$

Последний член справа — реактивный поток мощности. При усреднении он пропадает. Средние потоки мощности сходящейся и расходящейся волн вычитаются друг из друга, так же как вычитаются потоки мощности в плоских волнах, бегущих навстречу друг другу.

В гармонических стоячих волнах (85.3) средние потоки мощности равны нулю. Интересно отметить, что в волнах $(\cos kr)/r$ и e^{ikr}/r распределения давлений и скоростей вблизи центра волны почти идентичны: для обеих волн давления и скорости стремятся по модулю к бесконечности по мере приближения к центру волны, причем отношения соответственных величин стремятся к единице. Тем не менее в первой волне излучение отсутствует, а во второй волне оно есть. Дело в том, что в первой волне давление и объемная скорость сдвинуты по фазе друг относительно друга точно на 90° , так что работа сил давления чисто реактивная и средняя работа равна нулю. Во втором же случае малая добавка к давлению — второй член в (90.2), — не зависящая от расстояния от центра, если это расстояние уже мало, совпадает по фазе с объемной скоростью частиц и производит активную работу.

Зная мощность излучения, можно найти затухание пульсирующего осциллятора другим способом, чем в § 89. В самом деле, при амплитуде скорости v поверхности пульсирующего шарика энергия, запасенная осциллятором, равна $E = (1/2) 4\pi a^3 \rho v^2$ (амплитуда кинетической энергии присоединенной массы). Секундная же потеря энергии — dE/dt есть как раз мощность излучения и дается формулой (90.4). Отсюда находим $dE/dt = -ka\omega E$,

что дает закон затухания по энергии $E = E_0 \exp(-ka\omega t)$ в согласии с § 89. Из (90.3) видно, что отношение амплитуды реактивной мощности на поверхности пульсирующей сферы радиуса a к средней активной мощности равно $1/ka : 1$; для малого излучателя это отношение весьма велико. Мощность же двигателя, приводящего излучатель в действие, должна равняться амплитуде реактивной мощности — иначе излучатель не сможет работать. Таким образом, для малых излучателей двигатель работает в основном вхолостую и на акустическое излучение идет только малая часть развиваемой им мощности.

Используем полученные результаты для расчета затухания собственных колебаний в узкой трубе с одним открытым концом. Из сказанного в конце § 65 видно, что открытый конец можно рассматривать как монополюсный источник: из него в окружающую среду периодически поступает и возвращается обратно некоторый объем среды. Так как размеры отверстия малы по сравнению с длиной волны, то наличие отверстия мало меняет скорость частиц внутри трубы. Поэтому найти количество вытекающей и втекающей среды можно, считая, что наличие излучения не влияет на скорость среды в трубе.

Обозначим амплитуду скорости частиц в пучности скорости через v , а площадь поперечного сечения трубы — через S . Объемная скорость монополя, которым можно заменить трубу, равна $V = Sv$. Согласно (90.4) излучаемая мощность равна $J = (1/8\pi) \rho c k^2 V^2 = (1/8\pi) \rho c k^2 S^2 v^2$. С другой стороны, мощность сил давления в открытом конце равна $(1/2) \rho S v$. Приравнявая эти два выражения для мощности, найдем искомую вещественную компоненту проводимости открытого конца:

$$R = \frac{v}{p} = \frac{4\pi}{\rho c k^2 S}.$$

Например, для круглой трубы радиуса a получим $R = = 4/[(\rho c (ka)^2)]$. Для узкой трубы ($ka \ll 1$) проводимость открытого конца оказывается большой по сравнению с $1/\rho c$.

При расчете мы предполагаем, что давление в открытом конце синфазно со скоростью. В действительности давление имеет еще и мнимую компоненту, т. е. компоненту, ортогональную к скорости (сдвинутую относительно скорости на $1/4$ периода). Средняя мощность этой второй компоненты равна нулю. Ее действие заключается в некотором сдвиге собственных частот трубы: открытый конец равносителен некоторой массовой проводимости, поэтому его действие несколько повышает собственные частоты трубы. Но это изменение для достаточно узких труб очень мало. Если требуется только знать коэффициент затухания трубы с открытым концом, то этим изменением частоты можно пренебречь.

Коэффициент затухания трубы с одним абсолютно жестким концом и одним концом с большой активной проводимостью R равен, согласно § 65, $\alpha = \omega / \left(\frac{2l-1}{2} \pi \rho c R \right)$. Но для открытого

конца $\rho c R = 4/(ka)^2$; значит, коэффициент затухания в этом случае равен

$$\alpha = \frac{\omega (ka)^2}{4(2l-1)\pi/2} = \frac{1}{4} \left(\frac{2l-1}{2} \pi \right)^2 c \frac{a^2}{L^3}.$$

С увеличением номера обертона коэффициент затухания быстро растет, а добротность падает. Наименьший коэффициент затухания (для основного тона) равен $(\pi^2/16) c (a^2/L^3)$. Добротность трубы с одним закрытым и одним открытым концом равна

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\alpha} = \frac{(2l-1)\pi}{(ka)^2} = \frac{L^2}{a^2} \frac{4}{(2l-1)\pi}.$$

Найдем теперь плотность энергии в сферической волне. Подставляя в (37.1) выражение (84.1) для скорости частиц, получим

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} \beta p^2 + \frac{1}{\rho c r} p \int_{-\infty}^t p dt + \frac{1}{2\rho r^2} \left(\int_{-\infty}^t p dt \right)^2. \quad (90.5)$$

Первый член равен плотности потенциальной энергии в волне. В плоской волне имеется только такой член. Остальные слагаемые — добавочные по сравнению со случаем плоской волны — обусловлены наличием неволновой части скорости. Последнее слагаемое — квадрат неволнового члена — всегда положительно: оно равно кинетической энергии в несжимаемой жидкости при такой же временной зависимости давления. Это видно, если положить в (90.5) $c = \infty$ (и в коэффициентах, и в выражении для давления). Среднее слагаемое — произведение волнового и неволнового членов — может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для гармонической волны его среднее значение за период равно нулю. Для непериодического движения его среднее значение за длительный промежуток времени стремится к нулю по мере увеличения времени усреднения. Таким образом, в средних величинах нужно учитывать только первый и третий члены. Следовательно, кинетическая энергия в сферической волне в среднем больше, чем потенциальная (в плоской бегущей волне эти величины равны друг другу).

По мере удаления от центра волны различие уменьшается и плотность кинетической энергии стремится к плотности потенциальной энергии, убывая вместе с ней по закону обратных квадратов расстояния от центра волны. Вблизи же центра волны, в неволновой зоне, главную долю кинетической энергии составляет положительный добавочный член; он убывает с расстоянием как $1/r^4$.

В сферически-симметричной гармонической волне $\vec{p}_d = \rho_0 e^{i(kr - \omega t)}/r$ имеем, согласно вышесказанному,

$$E = E_{\text{кин}} + E_{\text{вн}} = \rho_0^2 \frac{\beta}{r^2} \left[\cos^2(\omega t - kr) + \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) \cos(\omega t - kr) + \frac{1}{2} \frac{1}{(kr)^2} \sin^2(\omega t - kr) \right].$$

Среднее по времени дает

$$\bar{E} = \frac{\beta \rho_0^2}{2r^2} \left[1 + \frac{1}{2} (kr)^2 \right].$$

Отношение средних значений кинетической и внутренней энергии равно

$$\frac{\bar{E}_{\text{кин}}}{\bar{E}_{\text{вн}}} = 1 + \frac{1}{(kr)^2}.$$

Суммарная энергия, запасенная в гармонической сферической волне в сжимаемой среде, бесконечна: плотность энергии убывает как $1/r^2$, а объем сферических слоев одинаковой толщины растет при $r \rightarrow \infty$ как r^2 ; значит, каждый такой слой добавляет к суммарной энергии в среде одинаковые слагаемые. В несжимаемой же среде суммарная энергия конечна. В самом деле, в несжимаемой среде потенциальная энергия равна нулю, а плотность кинетической энергии может быть записана в следующем виде:

$$E_{\text{кин}} = \rho v_0^2 a^4 / 2r^4,$$

где a — радиус пульсирующей сферы, создающей данную волну, а v_0 — амплитуда скорости ее поверхности. Интегрируя плотность кинетической энергии по всей среде снаружи сферы радиуса a , найдем

$$\int_a^{\infty} E_{\text{кин}} \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{1}{2} 4\pi a^3 \rho v_0^2.$$

Суммарная (реактивная) энергия в несжимаемой жидкости оказывается равной энергии присоединенной массы $4\pi a^3 \rho$, движущейся со скоростью v_0 поверхности монополя.

В сжимаемой среде бесконечный вклад в энергию среды дает активная часть энергии. Мгновенная мощность, которую должен развивать первичный двигатель малого излучателя, определяется реактивной мощностью и равна $|dE/dt| = \omega |E|$. А излученная энергия создана малой добавкой к мощности и дает большую суммарную энергию потому, что накапливается в среде, в то время как реактивная часть циркулирует, то поступая в среду из излучателя, то возвращаясь в излучатель из среды.

§ 91. Лучевая картина для монополя. Монополь в слоисто-неоднородной среде

Как мы уже отметили в § 84, вдали от монополя звуковое поле можно локально изображать плоской волной. «Локально» означает здесь: «на участке, большом по сравнению с длиной волны», а «вдали» — «на расстоянии, большом по сравнению с размерами этого участка». Ценность такого изображения в том, что поведение сферической волны на подобном участке похоже на поведение плоской волны. Например, если на границу раздела двух однородных сред падает сферическая волна от монополя, расположенного достаточно далеко от границы, то отраженное и прошедшее поле вблизи границы можно вычислять прямо по формулам Френеля для плоских волн, подставляя для каждого участка границы соответственный угол скольжения (угол между радиусом-вектором данного участка и границей) и амплитуду, соответствующую расстоянию участка от центра волны.

Ввиду такого сходства можно ввести для сферической волны понятия луча и лучевой трубки аналогично тому, как это было сделано в §§ 44. 57 для плоских волн. В однородной среде лучи представляются радиусами-векторами, проведенными из центра волны. Скорости частиц, как и для лучей в плоской волне, направлены вдоль стенок лучевых трубок, и звуковая энергия бежит вдоль трубок, не переходя из одной в другую. Лучи располагаются перпендикулярно фронтам, так что лучевые трубки равномерно расширяются при удалении от центра волны и плотность потока активной мощности уменьшается обратно пропорционально площади сечения трубки, что соответствует закону обратных квадратов.

Если на пути луча, вышедшего из точечного источника, встречается резкая граница, то направление отраженного и прошедшего лучей определяется по закону Снеллиуса, а распределение энергии между ними — по формулам Френеля. Лучевая картина отражения от резкой границы окажется локально аналогичной картине для плоской волны, но с углами скольжения, медленно меняющимися вдоль границы.

Особенно интересен случай перехода лучей в среду с большей скоростью звука. В этом случае проходят (частично отражаясь) только лучи, лежащие внутри кругового конуса, соответствующего критическому углу скольжения; остальные лучи отражаются полностью. Попадая во вторую среду, лучевые трубки расширяются, засвечивая всю вторую среду, причем расширение тем больше, чем ближе к критическому углу скольжения для падающего луча. Поэтому плотность энергии в лучевых трубках во второй среде быстро падает с уменьшением угла скольжения и, как можно показать, стремится к нулю при приближении угла скольжения прошедшего луча к нулю. Таким образом, вдали от источника сферической волны поле во второй среде вблизи границы раздела будет мало по сравнению с полем в первой среде

по другую сторону границы (конечно, в действительности на самой границе поля равны: выравнивание полей на границе обеспечивается неоднородной волной полного отражения, — явление, не учитываемое в лучевой картине). По мере удаления от границы по нормали поле во второй среде растёт, так как при этом мы переходим к лучам с большим углом скольжения. Важный пример такой ситуации — переход звука из воздуха в воду (рис. 91.1).

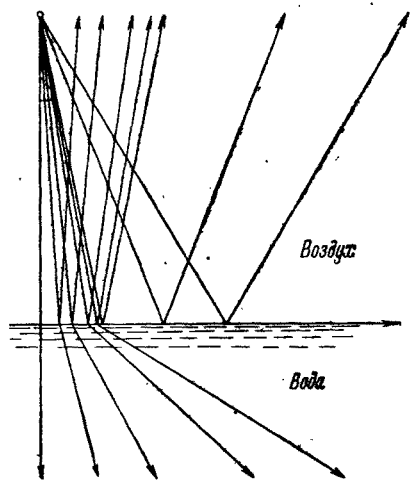


Рис. 91.1. Переход звука из воздуха в воду. Лучи, лежащие внутри конуса, отмеченного дужкой, засвечивают все водное полупространство. Лучи вне этого конуса испытывают полное отражение от поверхности воды.

Но особенно полезна картина лучей при изучении звукового поля точечного источника в неоднородной среде. Ограничимся для простоты и здесь случаем слоисто-неоднородной среды. Если изменение свойств среды мало на расстоянии длины волны, то можно по-прежнему пользоваться картиной рефракции лучей согласно формуле (57.2), считая, что они локально представляют плоскую волну и подчиняются закону Снеллиуса. В частности, лучи от точечного источника искривляются в сторону меньших скоростей звука.

Например, в обычных метеорологических условиях температура воздуха, а вместе с ней и скорость звука уменьшаются снизу вверх. Поэтому звуковые лучи изгибаются кверху, в результате чего слышимость на земле быстро убывает при удалении от источника звука (рис. 91.2, а). При аномальном распределении температур, например в ясную ночь, когда земная поверхность выхолаживается в результате излучения тепла, а вместе с ней охлаждаются и нижние слои воздуха, температура растёт снизу вверх («температурная инверсия») и лучи изгибаются книзу: слышимость на далеком расстоянии улучшается (рис. 91.2, б). Таким образом, слышимость далеких источников шума улучшается ночью не только потому, что меньше посторонних близких шумов, но и в результате рефракции.

Другое важное явление, связанное с рефракцией, — это распространение сейсмических волн, т. е. звуковых волн в Земле (такие волны вызываются землетрясениями, подземными взрывами и т. п.). Скорость звука в горных породах растёт с увеличением глубины. Поэтому сейсмические лучи, загибаясь, возвращаются к поверхности, отражаются от нее, снова загибаются и т. д., так что значительная часть сейсмической энергии оказы-

вается сосредоточенной в сравнительно тонком слое земной коры (рис. 91.3).

В море часто случается, что на некоторой глубине скорость звука в воде имеет минимальное значение, увеличиваясь к поверхности вследствие повышения температуры и увеличиваясь

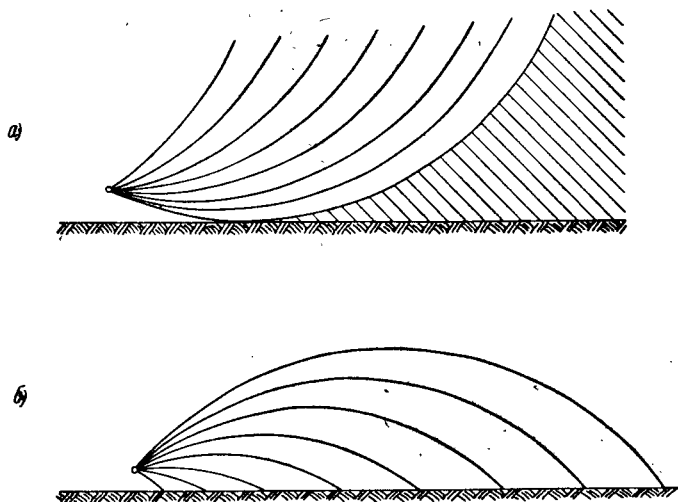


Рис. 91.2. Звуковые лучи при убывании (а) и возрастании (б) температуры воздуха с высотой. Заштрихована область звуковой тени, куда лучи не попадают и где источник звука практически не слышен.

ко дну вследствие повышения гидростатического давления. Поэтому в слое вблизи уровня минимальной скорости луч, выходящий под малым углом к горизонту, будет изгибаться то вверх,

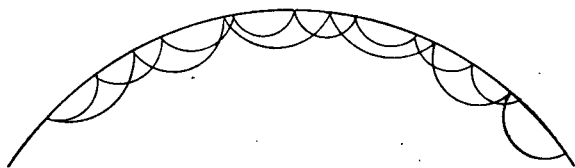
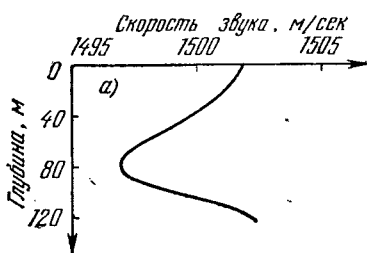


Рис. 91.3. Последовательные отражения двух сейсмических лучей, вышедших из одной точки под земной поверхностью.

то вниз, не удаляясь значительно от этого уровня. Это — лучевая картина волноводного распространения звука, рассмотренного подробно с волновой точки зрения в гл. VIII. На рис. 91.4, б в качестве примера представлена лучевая картина распространения звука от точечного монополя в море для распределения скорости звука по глубине, схематически показанного

на рис. 91.4, а. Каждый луч соответствует определенному углу скольжения при выходе из источника. Несмотря на то, что весь диапазон изменения скорости звука по глубине внутри волноводной части водной толщи составляет всего 7,5 м/сек (1/2% от скорости звука), эта малая неоднородность создает, как видно из лучевой картины, весьма неравномерное распределение звукового



поля, резко отличающееся от распределения, которое было бы в однородной среде.

В однородной среде лучи прямые и лучевые трубки, выходящие из монополя, расширяются равномерно по мере удаления от

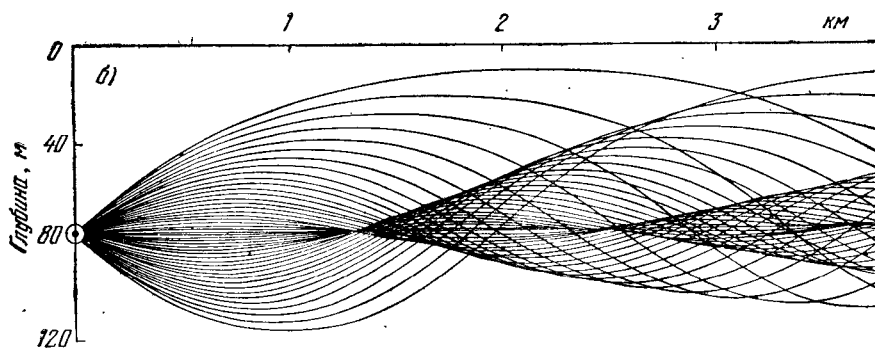


Рис. 91.4. а) Распределение скорости звука по глубине, считая от поверхности воды; б) лучи, построенные для такого распределения скорости для разных углов выхода из излучателя (каждые $0,2^\circ$). Для наглядности горизонтальный масштаб чертежа сильно сжат относительно вертикального. Лучи ясно очерчивают несколько огибающих — каустик.

источника; в неоднородной среде расширение трубок, образуемых в этом случае криволинейными лучами, определяется не только расстоянием от источника, но и искривлением лучей. В среднем расширение трубок в волноводе происходит медленнее, чем в однородной безграничной среде; поэтому плотность звуковой энергии в волноводе убывает медленнее, чем в безграничной среде.

Как видно из рис. 91.4, вдали от источника в каждую точку среды приходит несколько лучей; в силу принципа суперпозиции результирующее поле равно сумме полей, приносимых отдельными лучами. Особенно интересны области вблизи огибающих семейства лучей, вышедших из источника под близкими углами. Эти огибающие называют *каустиками*. При подходе к каустике лучи сближаются, и на самой каустике, которой лучи

касаются, сечения лучевых трубок обращаются в нуль. Явление сближения смежных лучей вблизи каустики и их пересечение на каустике называют *фокусировкой* лучей. Плотность потока мощности вблизи каустики, рассчитанная по лучевой картине, обращается в бесконечность.

Этот физически противоречивый результат показывает, что вблизи каустик пользоваться лучевой картиной для определения величины поля нельзя. Теория волн в локально-однородных средах, из которой мы фактически исходили до сих пор при нахождении поля в медленно меняющейся среде, оказывается непригодной для расчета поля вблизи каустик. Здесь необходим точный волновой расчет. Такой расчет показывает, что лучи можно строить для всей среды, не обращая внимания на то, что они касаются каустик; нельзя только вычислять плотность энергии вблизи каустик, исходя из степени расширения или сужения лучевых трубок. На каустиках лучи как бы испытывают полное отражение: по другую сторону от каустики звуковое поле представляет собой экспоненциально убывающую волну, локально представляемую неоднородной волной, бегущей вдоль каустики.

Поясним причину неприменимости лучевой картины вблизи каустик. Для того чтобы можно было представлять звуковое поле в виде совокупности лучевых трубок, вдоль которых, независимо от соседних трубок, бежит почти плоская волна, необходимо, во-первых, чтобы не происходило отражения вдоль трубки, и, во-вторых, чтобы стенки трубок можно было считать жесткими. Первое требование всегда удовлетворяется, если свойства среды меняются мало на длине волны. Второе требование удовлетворяется автоматически для лучей, падающих на слоисто-неоднородную среду по нормали, и для лучей, исходящих из монополя в однородной среде: в обоих случаях звуковое поле симметрично относительно границ трубок и поэтому их можно заменить жесткими перегородками. Но для изогнутых лучей симметрия нарушается, независимость трубок делается только приближенной, и для того чтобы взаимодействие между трубками было мало, требуется, чтобы поперечные градиенты поля были малы.

Там, где лучевая картина локально похожа на ту, что получается в однородной среде, т. е. лучи идут параллельно или сечение трубки меняется медленно, поперечные градиенты малы и лучевая картина применима. Но вблизи каустик степень сужения близких трубок сильно меняется в поперечном направлении, градиенты поперек трубок велики и скорости частиц направлены под углом друг к другу, т. е. нарушается второе условие применимости лучевой картины. В этом случае волны в соседних трубках сильно взаимодействуют и энергия переносится из трубок сильно сужившихся в трубки менее сужившиеся. В результате бесконечное поле на каустике не образуется и противоречивых результатов не получается, как, конечно, и должно быть в исправ-

ленной теории. Но такая «корректировка» требует отказа от чисто лучевой картины.

Точная теория показывает, что «откорректированное» поле вблизи каустика все же очень велико по сравнению с полем вне каустика. Таким образом, наличие фокусировки лучей указывает на область сильного повышения плотности энергии поля, хотя и не дает возможности его рассчитать лучевым методом.

В данной неоднородной среде положение каустика зависит от вида исходной волны. Для поля монополя это означает зависимость от местоположения монополя.

Лучевая картина точечного источника, как и лучевая картина рефракции плоской волны, не зависит от длины волны. Положение каустика также от длины волны не зависит, и, несмотря на то, что для вычисления поля вблизи каустика требуется применять волновую теорию, положение каустика можно найти, пользуясь только лучевой картиной.

Различные лучи могут иметь общую точку и не на каустике: возможна «случайная» встреча лучей, принадлежащих к разным конгруэнциям (см. рис. 91.4). В этом случае фокусировки звука не происходит и суммарное поле в точке пересечения находится по правилу суперпозиции. Для монохроматической волны в точках пересечения будет наблюдаться интерференционная картина, зависящая от соотношения фаз пришедших по разным лучам волн. В среднем для разных длин волн в точках пересечения будут складываться плотности энергии поля. Таким образом, для звука со сплошным спектром суммарная плотность энергии не будет зависеть от частотного спектра и будет определяться только лучевой картиной. Важное исключение — пересечение лучей с малой разностью хода, фазы которых в точке пересечения мало отличаются друг от друга. Такая ситуация встречается при распространении подводного звука при пересечении лучей, попадающих в некоторую точку прямо от источника и после отражения от свободной поверхности воды.

§ 92. Монопольный приемник

Излучателю-монополю можно сопоставить *приемник-монополь*, реагирующий на падающую на него волну независимо от направления прихода волны. Такой «ненаправленный» приемник можно осуществить, например, пользуясь каким-либо пьезоэлектрическим кристаллом, реагирующим на всестороннее сжатие. Если кристалл очень мал по сравнению с длиной волны звука, то его можно считать находящимся в однородном поле давлений, так что разность потенциалов, снимаемая с обкладок пьезокристалла, зависит только от амплитуды приходящего давления, но не от направления прихода волны. Поэтому приемник-монополь можно назвать *приемником давления*. В стоячей волне он зарегистрирует давление в том месте, куда он помещен; максимальное пока-

зание будет в пучности, минимальное — в узле давления. В бегущей волне показания такого приемника одинаковы в любой точке.

При помощи приемника давления можно установить наличие и определить величину звукового поля давления, но нельзя установить направление на источник звука и даже выяснить, один ли источник создает давление в данной точке или несколько.

Монопольные излучатели и приемники оказываются в большинстве случаев тесно связанными по своей физической природе. Каждый *линейный* монополь-излучатель может работать в качестве монопольного приемника и обратно. Свойство линейности поясним на примере электроакустических излучателей и приемников. *Линейный* монополь-излучатель — это монополь, приводимый в действие электрическим генератором, причем на каждой данной частоте объемная скорость монополя пропорциональна приложенному напряжению. *Линейный* монополь-приемник — это монополь, в котором возбуждаемое на клеммах электрическое напряжение пропорционально падающему на приемник звуковому давлению.

Оказывается, что линейные излучатели и приемники *обратимы*: если, например, на клеммы электромеханического приемника подать электрическое напряжение, то он начнет работать как излучатель, а если излучатель поместить в звуковое поле, отсоединив его от электрического генератора, то на его обкладках будет генерироваться электрическое напряжение. Эта обратимость — частный случай обратимости всякого линейного электромеханического (и не только электромеханического) устройства: так же ведут себя всякие электромоторы и электрогенераторы. По существу, излучатель можно рассматривать как электромотор, с той разницей, что он осуществляет не вращательное, а колебательное движение; приемник же можно рассматривать как электрогенератор переменного тока. Так же обратим и пьезоэлектрический приемник: при подаче на него переменного тока он, в результате обратного пьезоэлектрического эффекта, будет в такт с изменением напряжения изменять свой объем, т. е. работать как излучатель.

Свойство обратимости и далеко идущая аналогия в излучательных свойствах и приемных свойствах одинаковых по своей схеме излучателей и приемников сохраняются и для более сложных типов этих устройств.

§ 93. Совместная работа нескольких монополей

Монополь создает в среде *ненаправленное излучение*: его звуковое поле сферически-симметрично — одинаково во всех направлениях. Часто требуется создать *направленное* излучение звука, различное по разным направлениям. Этого можно добиться, используя систему излучателей: совместную работу нескольких

монополей, разнесенных на некоторое расстояние друг от друга. В некоторых направлениях поля отдельных излучателей, складываясь, создадут большее поле, в других — вычитаясь — меньшее поле; в результате и получится определенная угловая неравномерность — *направленность* излучаемого результирующего поля. Направленность излучения создается, таким образом, в результате интерференции полей отдельных излучателей. При произвольном расстоянии между излучателями определенную направленность можно получить вообще только для монохроматических излучателей с фиксированным соотношением между фазами, поскольку только тогда интерференционная картина не меняется с течением времени. Поэтому направленность систем будем рассматривать только для монохроматического звука. Можно показать, что вдали от источников звука любое направленное излучение можно представить как поле некоторого набора монополей. Поэтому в основе теории направленности излучения лежит задача о совместной работе нескольких монополей (в простейшем случае двух).

К задаче об одновременном действии двух монополей сводится также отыскание поля одного монополя при наличии в среде идеальной стенки. В § 41 мы видели, что поле монополя при наличии абсолютно жесткой стенки совпадает с полем в среде без стенки, создаваемым данным монополем и его синфазно работающим изображением. Аналогично поле монополя при наличии абсолютно мягкой стенки (например, подводный излучатель вблизи свободной поверхности воды) такое же, как поле в отсутствие стенки при одновременной работе данного монополя и его зеркального изображения, работающего в противофазе с данным монополем.

Нас будет интересовать поле нескольких одновременно работающих монополей. Мы будем считать, что поле, создаваемое каждым из них в отдельности, известно и что при совместном действии каждый излучатель работает так же, как и в одиночку.

Последняя фраза нуждается в уточнении. Что значит, что излучатели работают «так же»? Ведь условия работы изменились: по соседству появились другие излучатели. Значит ли это, что сохраняется энергия, излучаемая каждым монополем, или что сохраняется объемная скорость, или еще какая-либо величина? Такой вопрос возникает потому, что, как оказывается, нельзя сохранить одновременно неизменными все характеристики данного монополя при его совместной работе с другими монополями. Действие данного монополя зависит от действия соседних монополей: излучатели взаимодействуют между собой. Можно сохранить объемную скорость, но тогда изменится излучаемая мощность; можно сохранить мощность, но для этого придется изменить объемную скорость. Таким образом, самое понятие «неизменности действия» монополя при его совместной работе с другими излу-

телями не разумеется само собою и нуждается в специальном определении.

Мы примем такое определение: монополь работает неизменно, если его объемная скорость не изменяется. Теперь можно ставить вопрос: как найти результирующее поле нескольких монополей при условии, что поля, создаваемые каждым из монополей при раздельной работе, известны?

Можно ли применять для нахождения результирующего поля принцип суперпозиции? До сих пор принцип суперпозиции применялся нами только для полей без источников и означал, что если пространственно-временные распределения давления $p_1(t, \mathbf{r})$ и $p_2(t, \mathbf{r})$ являются свободными волнами, то и распределение $p = p_1(t, \mathbf{r}) + p_2(t, \mathbf{r})$ — также свободная волна. Но теперь в среде имеются излучатели. Если они осуществлены, например, в виде пульсирующих сфер, то они явятся *препятствиями*, которые будут рассеивать звуковые волны, падающие на них со стороны других излучателей. Рассеяние на излучателях как на препятствиях приведет к тому, что поле нескольких одновременно действующих монополей (да и вообще излучателей любого типа) не будет удовлетворять принципу суперпозиции.

Однако практически особенно важен случай, когда размеры монополей малы по сравнению с расстояниями между ними. Тогда на достаточном расстоянии от излучателей рассеянные волны настолько малы по сравнению с «прямыми» волнами, доходящими до данной точки без рассеяния, что ими можно пренебрегать и, игнорируя роль излучателей как препятствий, применять принцип суперпозиции к полям, создаваемым каждым излучателем в отдельности. Принцип суперпозиции будет нарушаться только в непосредственной близости к поверхности излучателей. Подчеркнем, что возможность применения принципа суперпозиции не означает, что излучатели не взаимодействуют между собой: пренебрегать можно только рассеянными полями (см. ниже, § 97).

В случаях, когда к полям нескольких излучателей можно применять принцип суперпозиции, говорят, что излучатели «прозрачны» для полей других излучателей. В этом смысле излучатели, расположенные друг от друга на расстояниях, больших по сравнению с их размерами, «прозрачны». Излучатели, осуществленные не в виде пульсирующих твердых тел, а в виде сторонних источников вещества, всегда «прозрачны», так как звуковые волны проходят, не рассеиваясь, через среду, независимо от того, составлена она из «старых» частиц или из появившихся «новых» частиц.

Что же касается специального вопроса о рассеянии волн на излучателе и вообще на препятствии, помещенном в среду, то он представляет самостоятельный большой интерес, особенно в тех случаях, когда в рассматриваемую точку не попадает прямая волна и звук в нее может прийти только путем рассеяния. Этим вопросом мы займемся в гл. XI.

§ 94. Характеристики направленности системы монополей

При совместной работе нескольких монополей, расположенных в ограниченной области пространства, зависимость поля от расстояния и от угла наблюдения оказывается вообще очень сложной. Однако в большинстве случаев нас интересует только поле на большом расстоянии от системы. В этом случае выражение для поля значительно упрощается: можно показать, что поле любой системы гармонических излучателей данной частоты, расположенной в ограниченной области среды на достаточно большом расстоянии от этой области, асимптотически всегда можно представить в виде произведения стандартной функции от расстояния e^{ikr}/r на функцию только от направления:

$$p = A \frac{e^{ikr}}{r} \Theta(\theta, \varphi). \quad (94.1)$$

Здесь A — постоянная (которую будем выбирать так, чтобы максимальное значение угловой функции Θ равнялось по модулю единице), а θ и φ — углы сферической системы координат с центром в любой точке области, занятой системой. Угловую функцию $\Theta(\theta, \varphi)$ называют *характеристикой направленности* данной системы излучателей. Фаза A может зависеть от θ .

Вывод формулы (94.1) и оценку расстояния, начиная с которого можно пользоваться этой формулой, продемонстрируем на простейшем примере двух монополей. Этот случай можно свести к двум еще более простым случаям совместной работы двух одинаковых синфазных излучателей и двух одинаковых противофазных излучателей. В самом деле, пусть в точках O и O' расположены два («прозрачных») монополя с объемными скоростями V и V' . Очевидно, их можно заменить двумя совмещенными системами излучателей, расположенных в тех же точках: системой излучателей с объемными скоростями $(V + V')/2$ (синфазные излучатели) и системой излучателей с объемными скоростями $(V - V')/2$ и $-(V - V')/2$ (противофазные излучатели). Каждую из таких систем удобно рассматривать отдельно, а искомое поле есть суперпозиция полей этих систем.

Начнем с синфазной системы. Обозначим расстояние между излучателями через L , а общую объемную скорость каждого из них — через V . Вследствие симметрии системы относительно ее оси OO' поле цилиндрически симметрично относительно этой оси. Поле, создаваемое системой в некоторой точке приема M (рис. 94.1), равно

$$p = -i\rho\omega \frac{V}{4\pi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'} \right).$$

Поскольку $r' = \sqrt{r^2 - 2Lr \cos \theta + L^2}$, отсюда имеем

$$p = -i\rho\omega V \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \left\{ 1 + \frac{\exp\{ikr [V \sqrt{1 - 2(L/r) \cos \theta + (L^2/r^2)} - 1]\}}{V \sqrt{1 - 2(L/r) \cos \theta + (L^2/r^2)}} \right\}. \quad (94.2)$$

Зависимость поля от расстояния r от системы и от угла наблюдения оказывается очень сложной; в частности, угловая зависимость поля меняется при изменении расстояния. Чтобы это выражение удалось привести к виду (94.1), необходимо раньше всего уйти от системы на расстояние, во много раз превышающее ее размеры, т. е. следует потребовать выполнения условия $L/r \ll 1$. Тогда для любых углов θ можно считать поля, приходящие в точку приема M , пропорциональными амплитудам объемных скоростей излучателей, а в нашем случае — считать амплитуды приходящих полей равными. Корень в знаменателе в (94.2) можно положить равным единице (относительная погрешность в амплитуде соответственного колебания имеет при этом порядок L/r).

Но в фазе колебания сделать такую же замену корня единицей нельзя, так как для фаз существенны не относительные, а абсолютные ошибки: результирующая ошибка в фазе должна быть меньше единицы. Поэтому условия $L/r \ll 1$ вообще недостаточны. Разлагая квадратный корень в ряд по степеням малой величины L/r до третьего члена, найдем, что фаза второго члена в скобках равна

$$ikr \left(\sqrt{1 - 2 \frac{L}{r} \cos \theta + \frac{L^2}{r^2}} - 1 \right) \approx -ikL \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{ikL^2}{r} \sin^2 \theta$$

с точностью до величин высших порядков. Отсюда видно, что разность фаз между вкладками обоих излучателей в результирующее поле можно будет считать независимой от расстояния, если будет выполнено второе условие малости: $kL^2/r \ll 1$.

При выполнении обоих условий выражение в скобках в (94.2) окажется зависящим только от угла — мы придем к выражению вида (94.1). Разность фаз между вкладками обоих излучателей в этом приближении можно определять так, как если бы радиус-векторы, проведенные из излучателей в точку приема, были параллельны.

С той же степенью точности можно отсчитывать расстояние до точки приема и угол наблюдения не обязательно от первого излучателя, но и от любой точки на соединяющем их отрезке и, вообще, в объеме с размерами порядка L .

Такие же рассуждения можно повторить и для системы из произвольного числа монополей, причем несущественно, будут ли одинаковы амплитуды и фазы объемных скоростей всех излучателей. Во-первых, требуется уйти от системы на расстояние, большее по сравнению с наибольшим размером системы L . Тогда

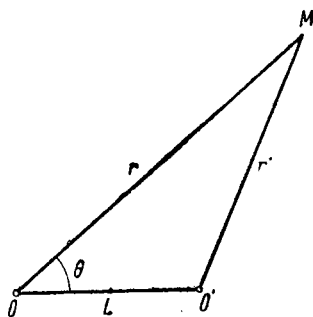


Рис. 94.1. К расчету поля двух совместно работающих монополей.

амплитуды колебаний, приходящих от отдельных излучателей в точку приема, можно считать пропорциональными амплитудам объемных скоростей монополей. Во-вторых, следует потребовать, чтобы было выполнено условие $kL^2/r \ll 1$: тогда разности фаз между этими колебаниями перестанут зависеть от увеличения расстояния r . Для таких расстояний поле системы можно будет с указанной точностью представить в виде (94.1).

Два условия малости относятся к различным характеристикам полей. Первое обеспечивает сохранение отношений амплитуд вкладов каждого излучателя в поле в точке приема при изменении расстояния. Второе условие обеспечивает неизменность разности фаз при удалении по данному направлению. Второе условие, в отличие от первого, зависит от частоты; поэтому более жестким может быть как первое, так и второе условие: при низких частотах более жестко первое условие, а при высоких — второе.

Область, ограниченную расстоянием от системы, много меньшим, чем $r_0 = kL^2$, называют *прожекторной зоной*. На расстоянии, много большем r_0 , поле имеет вид расходящейся сферической волны с определенной характеристикой направленности. Но в пределах прожекторной зоны поле имеет совершенно другой характер.

Например, поле, излучаемое колеблющейся пьезоэлектрической пластинкой, создает впереди себя резко очерченное поле, ограниченное цилиндром с пластинкой в основании (прожекторный пучок). На расстоянии r_0 пучок расплывается, а на расстоянии, много большем r_0 , превращается в сферическую волну с характеристикой, зависящей от соотношения между размерами пластинки и длиной волны излучаемого звука.

Возвращаясь к двум синфазным излучателям, видим, что при выполнении обоих условий малости поле системы можно записать в виде

$$p = -i\rho\omega \exp\left(-\frac{1}{2}ikL \cos\theta\right) 2V \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \cos\left(\frac{1}{2}kL \cos\theta\right). \quad (94.3)$$

Таким образом, характеристика направленности имеет вид

$$\Theta = \cos\left(\frac{1}{2}kL \cos\theta\right). \quad (94.4)$$

Характеристику направленности удобно изображать как поверхность, длина радиуса-вектора которой равна значению Θ , соответствующему данному направлению. Очевидно, характеристика монополя — сфера единичного радиуса. Для двух синфазных монополей характеристика направленности дается уравнением (94.4). Это — поверхность вращения вокруг оси системы. Уравнение (94.4) можно рассматривать также как уравнение в полярных координатах меридионального сечения характеристики.

При больших значениях kL (94.4) дает «многолепестковую» характеристику с рядом одинаковых максимумов, разделенных нулевыми значениями (рис. 94.2). Каждый лепесток — конусообразное тело вращения. В максимумах, соответствующих направлениям, для которых $\cos \theta = 2l\pi/kL$ (l — целое), поле системы равно двойному полю, создаваемому одним из монополей (разность фаз вкладов каждого монополя — целое число периодов).

Нули соответствуют направлениям $\cos \theta = (2l + 1)\pi/kL$. В направлениях, соответствующих $\cos \theta = (2l + 1)\pi/2kL$, имеем $\Theta = 1/\sqrt{2}$, что означает, что в этих направлениях плотность потока мощности излучения составляет половину максимальной.

При многолепестковой характеристике и в направлениях, не слишком близких к оси системы, ширина лепестков составляет («от нуля до нуля») приблизительно

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{kL \sin \theta}. \quad (94.5)$$

Ширина «по уровню половинной мощности» равна половине этого значения. Характеристика симметрична относительно направления $\theta = \pi/2$, в котором лежит один из максимумов.

При уменьшении величины kL , что соответствует уменьшению частоты или расстояния между излучателями, все лепестки начинают поворачиваться, приближаясь к положительному и отрицательному направлениям оси системы и несколько меняя свою форму (уширяясь). Лепесток, подошедший к оси, исчезает при дальнейшем уменьшении kL , так что число лепестков уменьшается вместе с kL . Число лепестков, т. е. число нулей в диапазоне изменения θ от нуля до 90° , равно целой части величины kL/π . Минимальное расстояние между излучателями, при котором имеется еще целый лепесток, равно половине длины волны ($kL = \pi$). Единственный лепесток имеет в этом случае вид тора с нулевым просветом (рис. 94.3). При дальнейшем уменьшении kL поле не исчезает ни по какому направлению и при стремлении kL к нулю характеристика стремится к сфере, а амплитуда во всех направлениях делается равной двойной амплитуде поля, создаваемого одним излучателем.

Мы видим, что форма характеристики существенно зависит от частоты излучения. Поэтому при некогерентном излучении системы излучателей вообще не обладают никакой определенной характеристикой направленности. Если представить себе

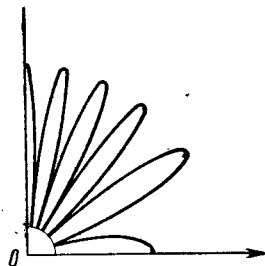


Рис. 94.2. Многолепестковая характеристика направленности системы двух синфазных монополей, расположенных на расстоянии $4,25\lambda$ друг от друга ($kL = 9\pi \approx 28$). Показан первый квадрант меридионального сечения характеристики, которое симметрично относительно обеих осей.

излучаемое поле разложенным в спектр Фурье по частотам, то характеристики для каждой частоты будут различны и различные частотные составляющие окажутся пространственно разделенными по углам.

Для противофазных одинаковых излучателей суммарное поле можно получить из (94.2), беря в скобках разность вместо суммы. На расстояниях, удовлетворяющих вышеприведенным требованиям, суммарное поле равно

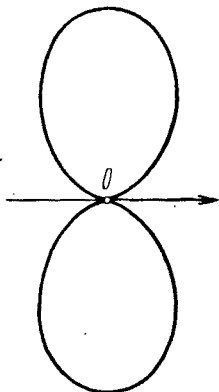


Рис. 94.3. Характеристика направленности образована вращением овала

$$\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)$$

вокруг касательной к вершине.

$$\rho = \rho \omega \exp\left(-\frac{1}{2} ikL \cos \theta\right) \cdot 2V \times \times \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \sin\left(\frac{1}{2} kL \cos \theta\right). \quad (94.6)$$

Для больших kL характеристика также многолепестковая, но вся картина повернута на половину лепестка: в направлении $\theta = \pi/2$ теперь лежит нуль характеристики. Симметрия характеристики относительно оси системы и угла $\theta = \pi/2$ имеет место и в этом случае. Максимумы поля, как и в предыдущем случае, равны двойным значениям поля, создаваемого одним излучателем.

Из формулы (94.5) видна обратная зависимость между размерами системы (выраженными в длинах волн) и угловыми размерами лепестков. Это — «принцип неопределенности» для направленности систем. Для получения более острых лепестков требуется увеличивать размеры системы. Однако в акустике принцип неопределенности направленности — не «настоящий» принцип: применяя излучатели с различными фазами, можно получить при заданных размерах системы сколь угодно узкий лепесток характеристики. Это ясно уже из того, что, как увидим в § 96, направленность (хотя бы и не острую) удастся получить и при сколь угодно малых размерах системы («сверхнаправленность»). Однако это возможно лишь ценой повышения реактивной мощности сравнительно с системами, для которых условие (94.5) остается выполненным.

§ 95. Приемные системы из монополярных приемников

Представим себе, что имеется система одинаковых монополярных приемников, выходные клеммы которых соединены последовательно, чтобы напряжения, возникающие при падении на них звуковой волны, складывались. Тогда разности фаз между напряжениями, возникающими на отдельных приемниках при приходе

волны из какого-нибудь излучателя, расположенного в точке M , будут такими же, как разности фаз давлений, которые возникли бы в M , если бы все приемники были заменены одинаковыми синфазными излучателями. Следовательно, результирующее показание системы приемников будет пропорционально показанию приемника, находящегося в точке M , при условии, что на месте приемников системы располагаются синфазные излучатели. Поэтому приемная система будет обладать характеристикой направленности, совпадающей с характеристикой направленности соответственной системы излучателей. В частности, можно построить приемник, обладающий «дипольной» характеристикой направленности (см. § 96): для этого достаточно соединить два одинаковых близкорасположенных приемника «навстречу» друг другу, так, чтобы возникающие напряжения вычитались. Таким образом, система преобразователей, способная работать в режиме излучения (при питании ее электрической мощностью) и в режиме приема (при облучении ее звуком с разных направлений), имеет одинаковую характеристику направленности в обоих режимах.

§ 96. Близкорасположенные монополи

Рассмотрим подробнее системы монополей с близкорасположенными излучателями ($kL \ll 1$). Тогда достаточно потребовать выполнения только условия $L/r \ll 1$: второе условие малости выполнится автоматически. Излучатели будем считать прозрачными, а объемные скорости их V и V' — произвольными.

При $L/r \ll 1$ можно считать $r' = r - L \cos \theta$ и $kr' = kr - kL \cos \theta$. Погрешность составляет по порядку величины L/r или kL в степени выше первой. Пренебрегая этими погрешностями, найдем результирующее поле в виде

$$p = -i\rho\omega(V + V') \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + i\rho\omega V' L \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos \theta, \quad (96.1)$$

что соответствует суперпозиции поля монополя с объемной скоростью, равной сумме объемных скоростей данных источников и поправочного поля.

Если $V + V' \neq 0$, то при малых kL и L/r поправочное поле мало по сравнению с основным и обычно им можно пренебречь. Но при $V + V' = 0$ (два противофазных одинаковых излучателя) основное поле обращается в нуль и остается только поправочное поле. По аналогии с электростатикой и гидродинамикой такую систему называют *диполем*. Таким образом, суммарное поле двух близкорасположенных монополей равно с выбранной точностью сумме монопольного и (малого) дипольного излучения. Характеристика направленности диполя $\Theta = \cos \theta$ изображается двумя касающимися шарами единичного радиуса с линией центров, направленной по оси диполя. Меридиан характеристики

направленности — «восьмерочная» кривая (рис. 96.1). Более подробно рассмотрим диполи в следующей главе.

Пока мы будем считать $V + V' \neq 0$ и пренебрежем поправочным полем. Центром системы можно тогда взять любую точку вблизи излучателей. Перенос монополя на малое расстояние равносильно добавлению малого дипольного поля.

Если данные монополи не синфазны, то объемные скорости их — комплексные числа. Поэтому сложение объемных скоростей следует производить по правилу геометрического сложения комплексных чисел с учетом сдвига фаз.

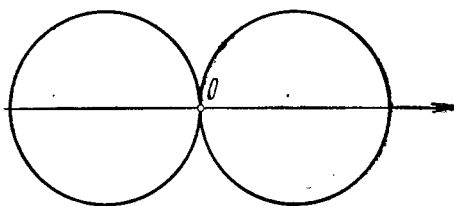


Рис. 96.1. «Восьмерочная характеристика» направленности диполя образована вращением «восьмерки» вокруг линии центров.

При синфазной работе обоих излучателей сложение арифметическое.

При одновременной работе многих монополей одинаковой частоты с объемными скоростями V, V', V'', \dots , расположенных в области, малой по сравнению с длиной волны, результирующее поле вдали от группы равно с той же точностью (при выполнении условия $V + V' + V'' + \dots \neq 0$ и пренебрежении поправочным полем)

$$p = -i\rho\omega \frac{V + V' + V'' + \dots}{4\pi r} e^{ikr}, \quad (96.2)$$

т. е. совпадает с полем одного единственного монополя с объемной скоростью, равной (геометрической) сумме объемных скоростей всех излучателей.

Результирующее поле сферически-симметрично и не зависит от того, как размещены излучатели в пределах малой области. Начало координат можно выбрать в любой точке этой области или вблизи нее.

При анализе совместной работы нескольких излучателей возникает следующий парадокс. Пусть, например, два близко расположенных одинаковых монополя работают синфазно. Получающееся поле эквивалентно, как мы видели, полю одного монополя с двойной объемной скоростью. Но излучаемая мощность пропорциональна квадрату объемной скорости. Значит, два близко расположенных источника звука излучают не вдвое, а вчетверо большую мощность, чем один излучатель в отдельности. По этой же причине один монополь, расположенный вблизи жесткой границы полупространства, излучает двойную мощность в это полупространство сравнительно с мощностью, которую он излучал бы в полное пространство в отсутствие стенки. Аналогично n синфазно работающих одинаковых монополей, расположенных в об-

ласти, малой по сравнению с длиной волны, излучают энергию не в n , а в n^2 большую, чем один излучатель в отдельности. Разрешение этого парадокса рассмотрим в следующем параграфе.

§ 97. Мощность, излучаемая при совместном действии близкорасположенных монополей

Изменение мощности, излучаемой близкорасположенными монополями при их совместной работе, обычно считают парадоксальным потому, что оно происходит при неизменности объемных скоростей излучателей: излучатели продолжают работать «так же», как и в одиночку.

Разрешение парадокса заключается в следующем. Пусть два одинаковых монополя работают синфазно. Мощность, излучаемая данным монополем, например пульсирующей сферой, равна его объемной скорости (она по условию остается неизменной), умноженной на активную компоненту давления на поверхности сферы (т. е. на компоненту, синфазную с объемной скоростью, см. § 39). Но данный излучатель работает теперь, находясь в поле давлений другого излучателя. Поэтому поле на его поверхности складывается из «собственного» давления и добавочного давления, создаваемого на его поверхности вторым излучателем. Если радиусы сфер малы по сравнению с расстоянием между ними, добавочное давление можно считать распределенным на поверхности сферы равномерно, так же как и собственное давление излучателя. Давление, создаваемое монополем, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} p &= -i\rho\omega \frac{V}{4\pi r} e^{ikr} = \\ &= -i\rho\omega \frac{V}{4\pi r} \left(1 + ikr - \frac{(kr)^2}{2} - i \frac{(kr)^3}{6} + \dots \right). \end{aligned} \quad (97.1)$$

При малой величине kr активная часть давления определяется вторым членом в скобках и равна $\rho\omega kV/4\pi$ (реактивная часть определяется первым членом). Мы видим, что она не зависит от расстояния, пока, конечно, членами высших порядков можно пренебрегать, т. е. пока величина kr достаточно мала по сравнению с единицей. Значит, для каждого из двух близких одинаковых синфазных монополей активная компонента давления, создаваемая одним из них на поверхности другого, равна активной компоненте давления, создаваемого самим излучателем; в результате активное давление удваивается, а значит, удваивается и излучаемая мощность независимо от расстояния между излучателями, пока оно остается малым по сравнению с длиной волны.

Что же касается суммарного добавочного давления (суммы реактивного и активного давления на поверхности излучателя),

то оно изменяется примерно обратно пропорционально расстоянию между излучателями, однако фаза этого суммарного давления изменяется при этом как раз так, что активная компонента остается без изменения. Рис. 97.1 иллюстрирует это утверждение. Та же картина получится и при приближении монополя к жесткой стенке: добавочное активное давление на поверхности пульсирующей сферы создается в этом случае волнами, отраженными от стенки.

Для излучения дополнительной энергии требуется большая работа от первичного двигателя излучателя. Если пульсирующая сфера сама по себе есть колебательная система, совершающая свободные колебания, например газовый пузырек в воде, амплитуда колебаний которого убывает в результате расходования

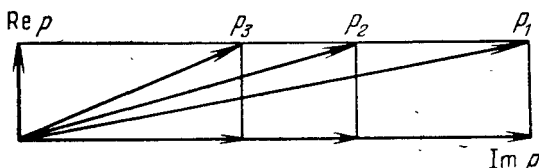


Рис. 97.1. Приближенный график изменения вещественной и мнимой частей давления, создаваемого монополем при увеличении расстояния от него, пока это расстояние остается малым по сравнению с $1/k$.

начальной энергии на излучение, то при приближении пузырька к стенке пульсации будут затухать вдвое скорее.

При синфазной работе многих близкорасположенных излучателей мощность, излучаемая каждым из них, растет пропорционально числу излучателей. Поэтому мощность излучения тесной группы одинаковых синфазных излучателей равна мощности одного из них, работающего в одиночку, умноженной на квадрат числа излучателей.

Если же в группе излучателей каждые два из них находятся друг от друга на расстоянии, большом по сравнению с длиной волны, то добавочное активное давление на поверхности каждого из них, обусловленное всеми остальными, мало по сравнению с активным давлением, обусловленным действием самого этого излучателя. Поэтому суммарная мощность излучения такой группы равна (почти в точности) просто сумме мощностей отдельных излучателей. Для такой рассредоточенной группы одинаковых излучателей суммарная излученная мощность равна мощности одного из излучателей, умноженной на число излучателей, причем относительные фазы излучателей безразличны. Мощность, излучаемая одним излучателем, расположенным далеко (по сравнению с длиной волны) от жесткой стенки, равна мощности при излучении в неограниченную среду. Конечно, при этом в некоторых участках интерференционной картины, получающейся при наложении полей всех излучателей, мощность может оказаться больше (например, для двух одинаковых излучателей мощность может быть четверо большей, чем мощность одного излучателя в этом же

месте); но это будет компенсироваться (почти полностью) тем, что в других местах мощность излучения будет мала.

Если сдвиг фаз между объемными скоростями двух одинаковых излучателей, расположенных близко друг от друга, равен 90° , то соседство другого излучателя не оказывает влияния на суммарную мощность, излучаемую обоими. Это видно из того, что в этом случае амплитуда объемной скорости эквивалентного монополя равна гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами, равными объемным скоростям составляющих излучателей. И вообще, при сдвиге фаз на 90° результирующая объемная скорость равна гипотенузе прямоугольного треугольника, построенного на составляющих объемных скоростях как на катетах. Сложение излученных мощностей есть в этом случае акустическое выражение теоремы Пифагора.

Интересно, что в этом случае реактивные мощности обоих излучателей находятся в *противофазе*. Действительно, при умножении объемной скорости на i реактивная компонента давления также умножается на i , что дает в результате для реактивной мощности умножение на $i^2 = -1$. На этом обстоятельстве основан способ устранения реактивной нагрузки присоединенной массы, передающейся на первичный двигатель излучателя. В самом деле, пусть кинематическая схема некоторого низкочастотного ($ka \ll 1$) излучателя включает вал, приводящий своим вращением в движение рабочий элемент излучателя (например, выдвигает поршень). Нагрузка на поршень передается и на вал, в результате чего вал должен передавать как активный, так и реактивный (превышающий активный в отношении $1 : ka$) момент вращения. Мгновенная мощность мотора должна поэтому значительно превышать активную мощность излучателя. Навесим на вал второй такой же излучатель, сдвинутый по фазе на 90° от первого. Суммарное излучение звука удвоится по мощности. Реактивные же моменты на валу будут взаимно противоположны и, взаимно уничтожаясь, будут только скручивать вал, не передавая нагрузку на мотор, который должен будет развивать только активную мощность. При низких частотах эта мощность мала по сравнению с реактивной мощностью, и такое устройство позволяет резко снизить требуемую мощность мотора.

Для двух близкорасположенных одинаковых противофазных монополей с объемными скоростями $+V$ и $-V$ результирующее поле равно, согласно (96.1),

$$p = i\rho\omega VL \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos\theta. \quad (97.2)$$

Таково, в частности, поле монополярного излучателя, расположенного вблизи абсолютно мягкой поверхности, например монополя в воде на малой глубине $L/2$ под свободной поверхностью ($kL \ll 1$). Вторым монополем противоположной фазы явится в этом случае мнимое изображение данного монополя в свободной поверхности,

как в зеркале. Амплитуда (вдали от излучателей при $kr \gg 1$) такого поля по модулю относится к полю p_0 одного монополя с той же объемной скоростью как $|p/p_0| = kL \cos \theta$. Результирующее поле мало, так как поля обоих монополей почти уничтожают друг друга; точное уничтожение достигается в плоскости, перпендикулярной к прямой, проходящей через монополи ($\theta = 90^\circ$).

При удалении от этой плоскости полного уничтожения не происходит вследствие небольшого различия в расстояниях до излучателей ($L \cos \theta$), а также набегающей небольшой разности фаз $kL \cos \theta$. Поэтому, как мы видели в § 96, поле оказывается не сферически-симметричным: характеристика направленности — восьмёрка, имеющая только вращательную (цилиндрическую) симметрию относительно оси, проходящей через излучатели.

Мощность, излучаемая двумя близкорасположенными противофазными монополями в данном направлении, относится к мощности, излучаемой одним монополем, как $(kL)^2 \cos^2 \theta$. Поэтому полная мощность, излучаемая двумя монополями, будет относиться к мощности одного монополя как $(kL)^2 \overline{\cos^2 \theta}$, где черточка означает усреднение по всем направлениям. Среднее значение квадрата косинуса по всем направлениям равно

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi 2\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, отношение излучаемых мощностей равно $1/3 (kL)^2$, а так как мощность излучения одного монополя равна $(1/8\pi) \rho c k^2 V^2$, то излучение двух противоположных монополей равно

$$J_{+-} = \frac{1}{24\pi} \rho c k^4 (VL)^2.$$

Отсюда следует, что мощность излучения одного монополя вблизи свободной поверхности среды равна

$$J' = \frac{1}{48\pi} \rho c k^4 (VL)^2. \quad (97.3)$$

Иногда нужно найти мощность излучения тесно расположенной группы излучателей одинаковой частоты, работающих с случайными независимыми фазами. По определению это есть среднее значение излучаемой мощности для группы со всевозможными равновероятными соотношениями между фазами. Можно доказать, что среднее значение излучаемой мощности равно в этом случае мощности отдельного излучателя, умноженной на число излучателей.

Докажем эту теорему для простейшего случая, когда фазы излучателей могут принимать только два значения: 0 и π , причем

оба значения равновероятны. Для двух излучателей теорема очевидна. В самом деле, возможны следующие равновероятные комбинации фаз обоих излучателей: плюс—плюс, плюс—минус, минус—плюс, минус—минус. Примем мощность излучения отдельного излучателя за единицу. Тогда мощность первой и последней комбинаций равна 4, а мощности второй и третьей — нулю. Среднее значение по всем четырем возможным комбинациям действительно равно в этом случае 2.

Теорему для любого числа излучателей докажем методом индукции. Допустим, что утверждение верно для группы, из некоторого числа излучателей. Если для какого-либо из комбинаций фаз разность числа излучателей с положительной и с отрицательной фазой равна n , то излучаемая мощность для этой комбинации равна n^2 . Добавим к группе еще один излучатель, фаза которого также с одинаковой вероятностью может принимать значение 0 и значение π . Если дополнительный излучатель имеет фазу 0, то мощность излучения увеличенной группы станет равна $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$; если он имеет фазу π , то мощность излучения станет равна $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$. Полусумма этих выражений равна $n^2 + 1$, и, значит, среднее изменение излучаемой мощности при добавлении к данной группе еще одного излучателя равно единице, какова бы ни была исходная комбинация фаз в группе. Поэтому и добавка к средней мощности, рассчитанной по всем возможным комбинациям фаз, также равна единице, что и доказывает сделанное утверждение.

§ 98. Монополь в волноводе

Найдем теперь, как работает монополь, помещенный в волновод. Ограничимся случаем абсолютно жестких стенок и примем, что сечение волновода прямоугольное, со сторонами h_1 и h_2 .

В предыдущем параграфе мы видели, что излучаемая мощность монополя сильно меняется, даже если вблизи него расположена только одна стенка, так как тогда монополь работает дополнительно «против» давления, создаваемого звуком, отраженным от стенки. На большом расстоянии стенка практически не меняет работы монополя. В волноводе с прямоугольным сечением монополю приходится работать против давления, создаваемого бесчисленными отражениями прямого звука от всех четырех стенок волновода. Поэтому влияние волновода на работу монополя оказывается более сильным, чем влияние одной стенки, и, главное, это влияние сохранится и для широких волноводов при большом расстоянии излучателя от стенок.

Примем плоскость поперечного сечения, в котором расположен монополь, за плоскость $x = 0$ и обозначим координаты монополя в плоскости $x = 0$ через y_0 и z_0 . Плоскость $x = 0$ есть плоскость симметрии создаваемого звукового поля. Поэтому в каждом полуволноводе поле можно представить в виде одинаковой

системы нормальных волн, убегающих от сечения $x = 0$ вправо и влево, а монополь можно заменить жестким экраном, перегородивающим волновод по плоскости $x = 0$, на котором задано распределение x -компоненты скоростей в виде δ -функции

$$v_x = \frac{1}{2} V \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

со стороны, обращенной вправо, и

$$v_x = -\frac{1}{2} V \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

со стороны, обращенной влево. Следуя § 76, разложим эти распределения x -компоненты скоростей частиц по плоскости $x = 0$ в двойные ряды Фурье справа и слева:

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{2} V \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) = \\ = \pm \frac{V}{2h_1 h_2} \sum_{l_1 l_2} \delta_{l_1 l_2} \cos \frac{l_1 \pi y_0}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z_0}{h_2} \cos \frac{l_1 \pi y}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z}{h_2}. \end{aligned}$$

Верхний знак соответствует правому полуволноводу. «Пристраивая» к каждому слагаемому соответствующую нормальную волну, убегающую от монополя (однородные волны) или убывающую в направлении от источника (неоднородные волны), получим следующие выражения для создаваемых в волноводе нормальных волн:

$$p_{00} = \frac{\rho c V}{2h_1 h_2} \exp(\pm ikx), \quad (98.1)$$

$$\begin{aligned} p_{l_1 l_2} = \delta_{l_1 l_2} \frac{\rho c V}{2h_1 h_2} \frac{1}{\sqrt{1 - (l_1 \pi / kh_1)^2 - (l_2 \pi / kh_2)^2}} \times \\ \times \cos \frac{l_1 \pi y_0}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z_0}{h_2} \cos \frac{l_1 \pi y}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z}{h_2} \times \\ \times \exp[\pm ik \sqrt{1 - (l_1 \pi / kh_1)^2 - (l_2 \pi / kh_2)^2} x]. \quad (98.2) \end{aligned}$$

Будет ли волна данного номера распространяющейся или неоднородной — определяется для данного волновода только частотой излучения и не зависит от положения монополя в волноводе. Но степень возбуждения, т. е. амплитуда нормальной волны, от этого положения зависит для всех волн (кроме нулевой) и может изменяться от нуля (при помещении монополя в узел распределения давления нормальной волны) до максимального значения (в пучности распределения). Максимальная степень возбуждения распространяющихся волн по мере увеличения номеров растет, а степень возбуждения неоднородных волн падает. Амплитуда данной распространяющейся нормальной

волны с ростом частоты убывает, а амплитуда неоднородной волны растет. Общее правило для распространяющихся и неоднородных волн — увеличение степени возбуждения по мере приближения к критической частоте. При частоте ниже критической для волн номеров (0, 1) и (1, 0) распространяется только одна нулевая нормальная волна.

Нормальные волны, создаваемые в волноводе монополю, можно интерпретировать еще и по-другому. Одна стенка равносильна появлению мнимого излучателя. Вторая стенка вызывает появление еще одного мнимого излучателя; кроме того, оба эти мнимых излучателя, отвечающие двум первым отражениям прямого звука, отражаются в свою очередь в противоположных стенках. Это дает, помимо однократных первых отражений, мнимые излучатели, соответствующие двукратным отражениям — по разу от каждой стенки. Точно так же появляются мнимые излучатели, соответствующие трехкратным, четырехкратным и т. д. отражениям от стенок. Эти отражения создадут периодическую цепочку излучателей с периодом, равным двойному расстоянию между стенками. Кроме того, отражения во второй паре стенок всей этой цепочки приведут окончательно к появлению двоякопериодической решетки излучателей с периодами $2h_1$ и $2h_2$.

Таким образом, формулы (98.1) и (98.2) дают также поле, создаваемое в неограниченной среде такой двоякопериодической решеткой излучателей. Отсюда следует, в частности, что если периоды подобной решетки, помещенной в неограниченную среду, меньше длины волны, то такая решетка ничего не излучает, кроме «нулевого спектра» — плоской волны, распространяющейся перпендикулярно к плоскости решетки. Никаких боковых спектров такая решетка создать не может (см. § 35).

Поле бесконечной цепочки, естественно, сильно отличается от поля одного монополя в неограниченной среде. Поэтому мы можем ожидать, что мощность излучения данного монополя еще сильнее изменится при помещении его в волновод, чем при помещении вблизи стенки. Кроме того, излучаемая мощность может зависеть и от положения монополя в волноводе. Рассчитаем эту мощность.

Излучаемая мощность определяется только распространяющимися волнами, а в силу ортогональности волн разных номеров мощности, уносимые отдельными волнами, аддитивны. Нулевая волна переносит мощность

$$J_0 = \frac{1}{2} \frac{V^2}{h_1 h_2} \rho c \quad (98.3)$$

(в обе стороны). Замечательно, что эта величина не зависит ни от положения монополя, ни от частоты излучения. Она равна половине мощности, излученной в виде плоской волны поршнем, закрывающим волновод, для которого произведение площади на линейную скорость равнялось бы объемной скорости данного

монополя. Отношение мощности J_0 к мощности J , излучаемой моноподем с той же объемной скоростью в неограниченную среду, равно, согласно (90.4),

$$\frac{J_0}{J} = \frac{4\pi}{k^2 h_1 h_2} = \frac{\lambda^2}{\pi S},$$

где λ — длина волны звука, а S — площадь сечения трубы. Отсюда видно, что в узкой трубе излучение может во много раз превосходить излучение в неограниченную среду того же источника звука. При стремлении площади сечения трубы или частоты к нулю мощность, излучаемая моноподем с данной объемной скоростью, растет безгранично.

Пока частота настолько мала, что высшие нормальные волны еще не распространяются, (98.3) дает полную излучаемую в волновод мощность. Но по мере повышения частоты в передачу мощности по волноводу будут включаться все новые и новые нормальные волны. До достижения критической частоты данная волна не передает мощности. В момент достижения критической частоты возникает передача бесконечной мощности. При дальнейшем увеличении частоты излучаемая мощность падает, стремясь асимптотически к мощности J_0 , передаваемой с нулевой волной.

Поясним физический смысл этого парадоксального результата: наличия бесконечных пиков мощности на критических частотах. Расчет дал бесконечное значение мощности потому, что по предположению объемная скорость не изменилась; при этом давление в создаваемой волне действительно стремилось бы к бесконечности при приближении частоты к критической. Но всякий первичный двигатель, приводящий в движение излучатель, располагает лишь ограниченной мощностью и способен развивать лишь ограниченные силы. Поэтому при приближении к критической частоте амплитуда объемной скорости не сможет оставаться постоянной и будет стремиться к нулю так, чтобы излученная мощность оставалась равной располагаемой мощности двигателя. При этом амплитуда других нормальных волн обратится в нуль: на критической частоте какой-либо нормальной волны фактически возбудится только эта волна.

§ 99. Взаимодействие монополей в волноводе

Если в волноводе расположены два монополя, то каждый из них работает в поле, созданном не только им самим и его отражениями от стенок волновода, но и вторым излучателем и его отражениями от стенок. Это также приводит к особенностям по сравнению с совместной работой двух монополей в неограниченной среде. Найдем мощность, излучаемую монополями при их совместной работе в прямоугольном волноводе с жесткими стенками при заданной объемной скорости излучателей.

В неограниченной среде излучаемая мощность монополя заметно изменяется в присутствии другого монополя только при достаточно малом расстоянии между ними. Это объясняется тем, что звук распространяется в виде убывающей по амплитуде сферической волны. Но в волноводе излучение переносится в виде нормальных волн, которые не убывают при распространении. Поэтому взаимодействие между монополями сохраняется на сколь угодно большом расстоянии.

Взаимодействие между монополями в волноводе рассмотрим сначала для простейшего случая одинаковых монополей, работающих на столь низкой частоте, что в волноводе может распространяться только нулевая нормальная волна. Пусть один монополь расположен в точке $x = 0$, а второй — в точке $x_0^* > 0$. Пусть объемные скорости монополей равны V и $Ve^{i\varphi}$ соответственно. Согласно (98.1) поля монополей в отдельности можно записать в виде

$$p_1 = \rho c \frac{V}{2h_1 h_2} e^{\pm ikx} \quad (\text{плюс при } x > 0, \text{ минус при } x < 0);$$

$$p_2 = \rho c \frac{V}{2h_1 h_2} e^{\pm ik(x-x_0) + i\varphi} \quad (\text{плюс при } x > x_0, \text{ минус при } x < x_0).$$

Считая монополи «прозрачными» (см. § 93), найдем, что суммарное поле справа от обоих монополей (в области $x > x_0$) представляется в виде волны, бегущей вправо:

$$p = p_1 + p_2 = \rho c \frac{V}{2h_1 h_2} (1 + e^{-ikx_0 + i\varphi}) e^{ikx},$$

слева от обоих монополей (в области $x < 0$) — в виде волны, бегущей влево:

$$p = \rho c \frac{V}{2h_1 h_2} (1 + e^{ikx_0 + i\varphi}) e^{-ikx},$$

и между монополями (в области $0 < x < x_0$) — в виде стоячей волны:

$$p = \rho c \frac{V}{2h_1 h_2} e^{\frac{1}{2} ikx_0 + \frac{1}{2} i\varphi} \cos \left[k \left(x - \frac{x_0}{2} \right) - \frac{\varphi}{2} \right].$$

Амплитуды бегущих волн равны

$$\rho c \frac{V}{h_1 h_2} \cos \frac{kx_0 - \varphi}{2} \quad (\text{волна, бегущая вправо})$$

и

$$\rho c \frac{V}{h_1 h_2} \cos \frac{kx_0 + \varphi}{2} \quad (\text{волна, бегущая влево}).$$

При различных сдвигах фаз между объемными скоростями и при различных расстояниях между излучателями будут получаться различные комбинации интенсивностей излучения. При $\varphi = 0$ и при расстоянии между монополями, равном целому числу длин волн, амплитуда каждой из бегущих волн будет равна двойной амплитуде волны, излучаемой одним монополем, и, следовательно, суммарная мощность излучения будет равна учетверенной мощности излучения одиночного монополя в волноводе: мощность каждого из них возрастает вдвое по сравнению с их работой в одиночку.

Этот результат аналогичен удвоению мощности излучения в неограниченной среде при работе двух одинаковых синфазных монополей, расположенных на малом расстоянии друг от друга. Но в неограниченной среде удвоение мощности происходит только приблизительно и только при близком расположении излучателей, в то время как в волноводе удвоение возможно и на больших расстояниях и является точным на расстояниях, кратных длине волны. При $\varphi = 0$ и при расстоянии между монополями, равном нечетному числу полудлин волн, суммарная мощность излучения обоих монополей равна нулю: каждый монополь полностью гасит поле, создаваемое другим, и неуничтоженной остается только стоячая волна между ними. Это — пример «активного гашения» звукового поля данного источника звука соответственно подобранным другим источником звука. Гашение излучения оказывается полным, в отличие от случая двух противофазных ($\varphi = \pi$) монополей, расположенных на малом расстоянии друг от друга, когда в волноводе останется излучение, пропорциональное расстоянию между монополями. Описанный случай еще раз иллюстрирует неаддитивность энергетических характеристик звуковых полей.

При произвольном φ общая мощность, излучаемая обоими монополями, относится к излучению одиночного монополя в волноводе как $2(1 + \cos \varphi \cos k_0 x) : 1$. Таким образом, как удвоение излучаемой мощности, так и обращение излучаемой мощности в нуль можно получить только при синфазной и при противофазной работе излучателей.

Рассмотрим взаимодействие монополей на более высоких частотах, когда в волноводе могут распространяться волны высших номеров. Взаимодействие различно для разных номеров волн. Для нулевого номера картина по-прежнему точно такая же, как и при низкой частоте. Для других номеров существенно не только то, как далеко отстоят монополи в направлении, параллельном оси, но и в какой точке сечения они находятся: действительно, от этого зависят степени возбуждения соответственных волн. Если один из них находится в точке $(0, y_1, z_1)$, а другой в точке (x_0, y_2, z_2) , то при одинаковых объемных скоростях и синфазной работе излучателей амплитуды волны номера l_1, l_2 , обусловленные первым и вторым монополями в отдельности, соответственно

равны

$$A_{1l_1l_2} = \delta_{l_1l_2} \frac{\rho c V}{2h_1 h_2} \frac{1}{\sqrt{1 - (l_1 \pi / kh_1)^2 - (l_2 \pi / kh_2)^2}} \cos \frac{l_1 \pi y_1}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z_1}{h_2};$$

$$A_{2l_1l_2} = \delta_{l_1l_2} \frac{\rho c V}{2h_1 h_2} \frac{1}{\sqrt{1 - (l_1 \pi / kh_1)^2 - (l_2 \pi / kh_2)^2}} \times \\ \times \cos \frac{l_1 \pi y_1}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z_2}{h_2} \exp \left[ik \sqrt{1 - \left(\frac{l_1 \pi}{kh_1} \right)^2 - \left(\frac{l_2 \pi}{kh_2} \right)^2} x_0 \right].$$

Результирующее поле данной нормальной волны равно

$$p_{l_1l_2} = (A_{1l_1l_2} + A_{2l_1l_2}) \cos \frac{l_1 \pi y}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z}{h_2} \times \\ \times \exp \left[\pm ik \sqrt{1 - \left(\frac{l_1 \pi}{kh_1} \right)^2 - \left(\frac{l_2 \pi}{kh_2} \right)^2} x \right],$$

где знаки \pm в показателях относятся для первого монополя к полуволноводам $x > 0$ и $x < 0$, а для второго — к полуволноводам $x > x_0$ и $x < x_0$ соответственно. Для волн, бегущих вне отрезка $(0, x_0)$, получим следующее выражение для амплитуд:

$$|A_{1l_1l_2} + A_{2l_1l_2}| = \delta_{l_1l_2} \frac{\rho c V}{2h_1 h_2} \frac{1}{\sqrt{1 - (l_1 \pi / kh_1)^2 - (l_2 \pi / kh_2)^2}} \times \\ \times \left\{ \cos^2 \frac{l_1 \pi y_1}{h_1} \cos^2 \frac{l_2 \pi z_1}{h_2} + \cos^2 \frac{l_1 \pi y_2}{h_1} \cos^2 \frac{l_2 \pi z_2}{h_2} + \right. \\ \left. + 2 \cos \frac{l_1 \pi y_1}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z_1}{h_2} \cos \frac{l_1 \pi y_2}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z_2}{h_2} \times \right. \\ \left. \times \cos \left[k \sqrt{1 - \left(\frac{l_1 \pi}{kh_1} \right)^2 - \left(\frac{l_2 \pi}{kh_2} \right)^2} x_0 \right] \right\}^{1/2}.$$

Отсюда видно, что амплитуда излучаемых волн может колебаться в интервале между величинами

$$\delta_{l_1l_2} \frac{\rho c V}{2h_1 h_2} \frac{1}{\sqrt{1 - (l_1 \pi / kh_1)^2 - (l_2 \pi / kh_2)^2}} \times \\ \times \left| \cos \frac{l_1 \pi y_1}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z_1}{h_2} \pm \cos \frac{l_1 \pi y_2}{h_1} \cos \frac{l_2 \pi z_2}{h_2} \right|$$

в зависимости от расстояния x_0 между монополями в волноводе.

ДИПОЛЬ

§ 100. Диполь, Момент диполя

Ввиду важности источников дипольного типа рассмотрим их подробно. Поле диполя, составленного из двух монополей с объемными скоростями $-V$ и $+V$, расположенных на расстоянии L , малом по сравнению с длиной волны, можно, согласно формуле (97.2), записать в виде

$$p = i\rho\omega VL \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos\theta.$$

Эта формула справедлива при $L/r \ll 1$, а в качестве r можно взять расстояние от любой точки отрезка, соединяющего диполи, например от середины отрезка.

Полного уничтожения полей, создаваемых одинаковыми противофазными источниками, не происходит, так как расстояния от источников до данной точки различны и поэтому приходящие в эту точку колебания не в точности противофазны (это дает первый член в биноме) и различаются по амплитуде (второй член в биноме).

Ось диполя будем называть ось, проведенную от монополя с объемной скоростью $-V$ к монополю с объемной скоростью $+V$. Очевидно, сместив начало отсчета времени на половину периода, придем к противоположному направлению оси, так что выбор между этими двумя направлениями может играть роль только при совместном рассмотрении нескольких диполей (сравните с неопределенностью знака объемной скорости монополя, § 87).

Поле диполя определяется не объемной скоростью составляющих его монополей и не расстоянием между монополями в отдельности, но произведением этих величин, так называемым моментом диполя $M = VL$. Одинаковое дипольное излучение можно осуществить при помощи различных пар противофазных монополей, подбирая объемные скорости монополей и расстояния между ними так, чтобы моменты были одинаковы. В дальнейшем мы увидим, что дипольное излучение можно осуществить, и совсем не пользуясь монополями, при помощи других устройств. В связи со всем этим удобно характеризовать дипольный источник не

составляющими его монополями и расстоянием между ними, а именно его моментом. Выражение (97.2) примет тогда вид

$$p = i\rho\omega M \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos\theta. \quad (100.1)$$

Если расстояние L стремиться к нулю, сохраняя объемные скорости составляющих монополей неизменными, то момент диполя, а вместе с ним и поле диполя также будут стремиться к нулю. Так, располагая монополь с фиксированной объемной скоростью под свободной поверхностью воды и приближая его к поверхности, обнаружим, что поле во всех точках под водой будет стремиться к нулю вместе с расстоянием монополя до поверхности («дипольный эффект»). Но если, стремя размеры диполя к нулю, одновременно увеличивать в обратном отношении объемные скорости составляющих монополей, чтобы момент диполя не менялся, то неизменным будет оставаться и излучаемое поле. Так приходим к понятию *точечного диполя* с заданным моментом

$$M = \lim_{V \rightarrow \infty, L \rightarrow 0} VL.$$

Если ось x направить по оси диполя, то (100.1) можно записать так:

$$p = i\rho\omega M \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right). \quad (100.2)$$

Удобно считать момент диполя вектором, направленным по оси диполя. Тогда (100.2) можно представить в виде, не зависящем от системы координат:

$$p = i\rho\omega M \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \right). \quad (100.3)$$

Уравнение (100.2) показывает, что можно было бы ввести само понятие диполя, дифференцируя поле монополя по координате источника. Но выбранный нами путь более содержателен физически и, главное, позволяет рассматривать также «квазидиполи» — пары противофазных монополей, расположенных на малом, но конечном расстоянии друг от друга.

Фронты волн, излучаемых точечным диполем, — сферы с амплитудой, меняющейся по углу по закону «восьмерки» независимо от расстояния. Зависимость амплитуды поля диполя от расстояния удовлетворяет закону вида $1/r$ только на достаточно большом расстоянии от диполя ($kr \gg 1$). В неволновой зоне ($kr \ll 1$) давление спадает как $1/r^2$. Область $kr \sim 1$ промежуточная. Вдали от источника, вдоль какого-либо радиуса, давление меняется по амплитуде и фазе так же, как и поле монополя с эффективной объемной скоростью, равной — $ikM \cos\theta$. Вдали от источника различие между полем диполя и монополя делается заметным только при переходе от одного радиуса-вектора к другому вдоль

меридиана характеристики направленности, т. е. при изменении угла θ .

В отличие от монополя, скорость частиц в поле диполя не направлена по радиусу, а имеет еще и составляющую вдоль меридиана: волна не чисто продольная. Радиальная и меридиональная составляющие определяются по формулам

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{\partial r} = M \frac{2 - 2ikr - (kr)^2}{4\pi r^3} e^{ikr} \cos \theta, \\ v_\theta &= \frac{1}{i\rho\omega} \frac{\partial p}{r \partial \theta} = -M \frac{ikr - 1}{4\pi r^3} e^{ikr} \sin \theta. \end{aligned} \quad (100.4)$$

Радиальная составляющая в неволновой зоне убывает как $1/r^3$, а в волновой — асимптотически как $1/r$. Меридиональная составляющая имеет в неволновой зоне тот же порядок, что и радиальная ($1/r^3$), но, в отличие от радиальной составляющей, продолжает убывать быстро и в волновой зоне — как $1/r^2$. Таким образом, вдали от источника скорость направлена практически вдоль радиуса-вектора, и в этом отношении также поле диполя делается похожим на поле монополя, а волна асимптотически делается продольной.

Это свойство дальних полей — общее для всех систем излучателей: закон убывания давления и радиальной составляющей скорости стремится к закону обратной пропорциональности от радиуса, а нерадиальная компонента скорости становится малой по сравнению с радиальной компонентой. Поэтому поля любых излучателей конечных размеров делаются вдали для каждого направления похожими на поля монополей; но амплитуды соответственных эффективных объемных скоростей различны для каждого направления и относятся друг к другу как длины соответственных радиусов-векторов характеристики направленности.

§ 101. Диполь как осциллирующая сфера. Кардиоидный излучатель

Мы видели, что сферически-симметричный источник можно осуществить в виде пульсирующей сферы. Столь же простую и наглядную интерпретацию можно дать и дипольному источнику: диполь эквивалентен сфере неизменного радиуса, осциллирующей вдоль оси диполя. В самом деле, пусть сфера радиуса a совершает гармонические осцилляции частоты ω со скоростью u . Будем считать, что амплитуда смещений сферы мала не только по сравнению с длиной волны звука, но и по сравнению с радиусом сферы. Как видно из рис. 101.1, радиальная скорость частиц на поверхности сферы должна, в силу граничного условия равенства нормальных скоростей, равняться $u \cos \theta$. Эту скорость можно приписывать точкам на поверхности сферы в ее среднем положении. Сравнивая эту величину с радиальной скоростью, создаваемой

диполем с моментом M на сфере того же радиуса a (100.4), найдем, что радиальные скорости равны при условии

$$u = M \frac{2 - 2ika - (ka)^2}{4\pi a^3} e^{ika}. \quad (101.1)$$

Но поле, создаваемое в среде осциллирующей сферой, полностью определяется нормальными скоростями на поверхности сферы. Значит, осциллирующая сфера создает в среде такое же поле, как и диполь с моментом

$$M_1 = 4\pi a^3 u \frac{e^{-ika}}{2 - 2ika - (ka)^2}. \quad (101.2)$$

Это поле равно

$$p = i\rho\omega \cdot 4\pi a^3 u \frac{e^{-ika}}{2 - 2ika - (ka)^2} \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos\theta. \quad (101.3)$$

Давление на поверхности сферы равно

$$p_{r=a} = i\rho\omega a u \frac{ika - 1}{2 - 2ika - (ka)^2} \cos\theta. \quad (101.4)$$

Для скоростей частиц получаются формулы

$$v_r = u \frac{a^3}{r^3} \frac{2 - 2ikr - (kr)^2}{2 - 2ika - (ka)^2} e^{ik(r-a)} \cos\theta, \quad (101.5)$$

$$v_\theta = -u \frac{a^3}{r^3} \frac{ikr - 1}{2 - 2ika - (ka)^2} e^{ik(r-a)} \sin\theta.$$

Это — формулы, справедливые при любом радиусе осциллирующей сферы. Два близкорасположенных противофазных монополя дают поле, выражаемое формулами такого вида только приближенно. Угловое распределение нормальных и касательных скоростей частиц — такое же, как и для соответственных компонент скорости поверхности сферы: $u_r = u \cos\theta$ и $u_\theta = -u \sin\theta$. Амплитуды скорости поверхности и скорости частиц у поверхности для нормальной компоненты совпадают; для касательной же компоненты амплитуды различны: среда скользит относительно поверхности сферы.

Наиболее важен случай малого радиуса осциллирующей сферы по сравнению с длиной излучаемой волны ($ka \ll 1$), которым почти исключительно и будем заниматься. В этом случае, пренебрегая малыми порядка $(ka)^2$ по сравнению с единицей, можно записать приближенно:

$$M = 2\pi a^3 u, \quad (101.6)$$

$$p = i\rho\omega \cdot 2\pi a^3 u \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos\theta. \quad (101.7)$$

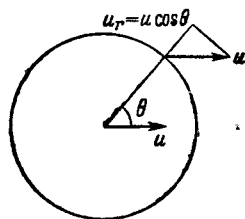


Рис. 101.1. Радиальная компонента скорости движущейся сферы.

Для малой осциллирующей сферы момент, а значит, и поле диполя остаются неизменными, если изменять радиус и скорость сферы так, чтобы величина ua^3 оставалась неизменной: можно уменьшить объем осциллирующей сферы, увеличив во столько же раз ее скорость (и наоборот), не меняя излученного поля. Приближенное значение касательной скорости частиц на поверхности сферы равно $1/2 u \sin \theta$, так что относительная скорость скольжения частиц относительно поверхности осциллирующей сферы равна $3/2 u \sin \theta$.

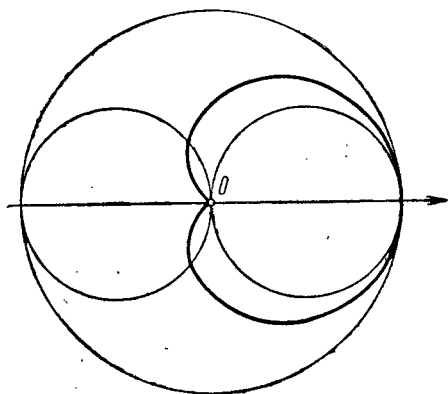


Рис. 101.2. Кардиоидная характеристика направленности системы — монополь — диполь.

Комбинируя излучение монополя и диполя, можно получить «однонаправленные» характеристики излучения, т. е. можно создать источник звука, излучающий преимущественно в одно полупространство. В самом деле, поместим в одну точку монополь с объемной скоростью V и диполь с моментом M . Совместная работа этих излучателей создаст поле

$$p = -i\rho\omega V \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + i\rho\omega M \frac{ikr-1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos \theta,$$

что даст на большом расстоянии от источников ($kr \gg 1$)

$$p = -\frac{i\rho\omega}{4\pi r} e^{ikr} (V - ikM \cos \theta).$$

Выбирая $V = -ikM$, получим характеристику направленности с максимумом в направлении $\theta = 0$ и нулевым излучением в прямо противоположном направлении ($\theta = \pi$). В сечении плоскостью, проходящей через ось диполя, характеристика имеет вид *кардиоиды* $(1 + \cos \theta)/2$ (рис. 101.2). Такой «кардиоидный излучатель» можно в принципе реализовать при помощи одной сферы, совершающей одновременно пульсации и осцилляции с соответственно подобранными амплитудами. При $ka \ll 1$ суммарное давление на поверхности сферы приближенно равно

$$p_{r=a} = -i\rho\omega M \frac{e^{ika}}{4\pi a^2} [(1 - ika) \cos \theta - ika].$$

Первый член в скобках — вклад диполя, второй — монополя. По амплитуде вклад монополя — малая добавка по сравнению с вкладом диполя. Но она приводит, тем не менее, к большому изменению характеристики направленности излучателя.

В настоящее время большое внимание уделяется вопросу об определении характеристики направленности различных сложных излучателей по измерениям их поля вблизи излучателя: такие измерения, естественно, проще, чем измерения на большом расстоянии, где характеристика уже образовалась. Рассмотренный пример показывает трудность этой задачи: малые погрешности измерения ближнего поля давлений данного излучателя могут привести к резкому отличию расчетной характеристики направленности от фактической.

§ 102. Присоединенная масса диполя. Сила диполя

Найдем, с какой силой нужно действовать на безмассовую сферу данного радиуса a , чтобы сообщать ей данную скорость u . Требуемая сила — это взятая с обратным знаком реакция среды на движущуюся сферу, и ее можно найти непосредственно, интегрируя давление, создаваемое сферой, по всей ее поверхности. Преобразуя (101.4), найдем давление на поверхности сферы в виде

$$p_{r=a} = \rho c u \frac{-i [2ka + (ka)^3] + (ka)^4}{4 + (ka)^4} \cos \theta. \quad (102.1)$$

Вследствие симметрии поля достаточно учитывать только составляющую сил давления вдоль оси диполя: перпендикулярные к оси симметрии компоненты сил давления взаимно уничтожаются. Искомая сила, с которой сфера действует на среду, найдется по формуле

$$\Phi = \int_S p_{r=a} \cos \theta dS,$$

где интегрирование распространено на всю поверхность S сферы. Реакция среды на сферу равна, очевидно, $-\Phi$.

Поскольку давление одинаково во всех точках одной параллели ($\theta = \text{const}$), в качестве элемента интегрирования можно взять полоску между двумя близкими параллелями, считая переменной интегрирования полярный угол. Площадь такой полоски равна $2\pi a^2 \sin \theta d\theta$. Следовательно, результирующая сила есть

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\pi a^2 \int_0^\pi p_{r=a} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi a^2 \rho c u \frac{-i [2ka + (ka)^3] + (ka)^4}{4 + (ka)^4} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{4}{3} \pi a^2 \rho c u \frac{-i [2ka + (ka)^3] + (ka)^4}{4 + (ka)^4}. \quad (102.2) \end{aligned}$$

Отсюда находим *механический импеданс* безмассовой сферы, погруженной в жидкость:

$$\frac{\Phi}{u} = \frac{4}{3} \pi a^2 \rho c \frac{-i [2ka + (ka)^3] + (ka)^4}{4 + (ka)^4}. \quad (102.3)$$

Импеданс оказался комплексным: сила по фазе отличается от скорости. Реактивная часть импеданса отрицательна и, следовательно, импеданс имеет массовый характер. Соотношение между реактивной и активной частью импеданса зависит от соотношения между радиусом сферы и длиной волны звука, т.е. от величины ka .

На рис. 102.1 показана зависимость реактивной и активной части величины $\Phi / (\frac{4}{3} \pi a^2 \rho c u)$ от ka . В предельном случае $ka \gg 1$ (малая длина волны) реактивная часть механического импеданса Φ/u стремится к нулю, а активная часть стремится к $(\frac{4}{3}) \pi a^2 \rho c$, что соответствует механическому импедансу при поршневом излучении плоской волны с поршня площади $(\frac{4}{3}) \pi a^2$, равной $1/3$ общей поверхности осциллирующей сферы. Напомним, что для пульсирующей сферы большого радиуса соответственная величина равня-

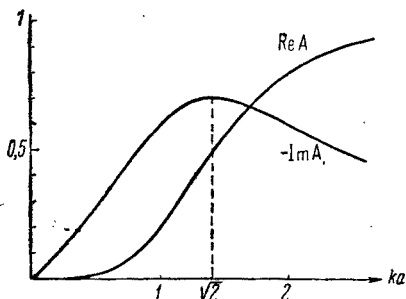


Рис. 102.1. Вещественная и мнимая части относительного импеданса сферы $A = \Phi / (\frac{4}{3} \pi a^2 \rho c u)$. Максимальное значение мнимой части равно $1/\sqrt{2}$ и достигается при $ka = \sqrt{2}$. Вещественная часть стремится к единице при $ka \rightarrow \infty$.

лась всей площади поверхности сферы. Различие объясняется тем, что нормальные скорости частиц на поверхности осциллирующей сферы убывают от полюсов к экватору (ср. § 97).

Практически наиболее важен противоположный предельный случай — малый радиус сферы по сравнению с длиной волны ($ka \ll 1$). В этом случае в самом первом приближении, пренебрегающем сжимаемостью среды,

$$\Phi = -i \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \omega u = -i \frac{1}{3} \rho \omega M. \quad (102.4)$$

Пока нас интересует только модуль силы, погрешностью, обусловленной отбрасыванием членов высших порядков по малой величине ka , можно пренебрегать.

Отметим, что скорости частиц вблизи сферы практически одинаковы при наличии и при отсутствии сжимаемости, а плотность кинетической энергии вблизи сферы в сжимаемой среде велика по сравнению с плотностью потенциальной энергии (потенциальная энергия равна нулю при отсутствии сжимаемости).

Если масса сферы отлична от нуля и равна, например, μ , то для сообщения сфере той же колебательной скорости потребуется

добавить к силе Φ еще силу, равную массе сферы, умноженной на ее ускорение, т. е. силу, сообщающую ту же скорость сфере вне среды.

Следовательно, *результатирующая* сторонняя сила Φ^* , сообщающая погруженной сфере массы μ скорость u , должна быть равна

$$\Phi^* = \Phi - i\omega\mu u = -i\omega u \left(\mu + \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \right) = -i\omega u \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 (\rho + 2\rho_1),$$

где ρ_1 — плотность материала сферы.

Таким образом, в динамическом отношении погружение осциллирующей сферы в несжимаемую жидкость как бы увеличивает массу сферы на величину $(2/3) \pi a^3 \rho$, равную массе среды в половинном объеме сферы. Эту эффективную добавку к массе называют присоединенной массой осциллирующей сферы. Кинетическая энергия присоединенной массы, колеблющейся со скоростью u , равна, как легко проверить, кинетической энергии несжимаемой жидкости при колебании погруженной в нее сферы со скоростью u . Динамическое поведение погруженной сферы при осцилляциях таково, как если бы на нее навесили эту присоединенную массу.

Аналогично, хотя и более сложно влияет реакция среды и на тела другой формы (см. § 106). Собственная частота колебаний груза, закрепленного на пружине, понижается при погружении груза в жидкость, и по изменению частоты можно найти присоединенную массу. Аналогично меняется частота колебаний маятника данной длины при погружении в среду. При точных определениях силы тяжести по наблюдению качаний маятника присоединенную массу воздуха приходится учитывать; по сравнению с качаниями в вакууме период колебаний маятника в воздухе увеличен.

Мы нашли силу, с которой следует действовать на малую сферу в несжимаемой среде, чтобы сообщить ей данную колебательную скорость. Учет сжимаемости, как сказано выше, почти не меняет силу. Поэтому можно найти излученное поле, пользуясь найденным значением силы для несжимаемой среды, в которой излучения нет. При помощи уравнений (100.3) и (102.4) можно выразить поле малой осциллирующей сферы через силу Φ или силу Φ^* :

$$p = -3\Phi \nabla \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = -3\Phi^* \frac{\rho}{\rho + 2\rho_1} \nabla \frac{e^{ikr}}{4\pi r}.$$

Если плотность материала сферы равна плотности среды (так будет, если сфера образована «замороженным» участком среды), то сторонняя сила, которую будем в этом случае обозначать через F , равна

$$F = 3\Phi = -i\rho\omega M = -i\rho\omega \cdot 2\pi a^3 u, \quad (102.5)$$

и поле выражается через эту силу так:

$$p = -F \nabla \frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (102.6)$$

В дальнейшем будем также пользоваться тензорной записью этой формулы:

$$p = -F_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (102.7)$$

Силу F будем называть *силой диполя*. Если сила диполя направлена вдоль оси x , то

$$p = -F \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = -F \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos \theta. \quad (102.8)$$

Мы видим, что силу диполя можно считать сторонней силой, прилагаемой непосредственно к среде: малую сферу, выделенную в среде, считаем отвердевшей и к ней и прикладываем силу. Получающееся звуковое поле не зависит от размера этой сферы, а только от приложенной извне силы.

Замечательно, что выражение для поля излучения, создаваемого силой, приложенной к сфере, малой по сравнению с длиной волны, удастся написать, исходя из величины силы, возникающей при движении сферы в несжимаемой среде, т. е. в среде, в которой излучения нет. Выясним, какая при этом делается погрешность. Сохраняя в (102.3) член следующего порядка малости по ka , найдем более точные выражения для сил:

$$\begin{aligned} \Phi &= -i \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \omega u \left[1 + i \frac{1}{2} (ka)^3 \right], \\ F &= -i 2\pi a^3 \rho \omega u \left[1 + i \frac{1}{6} (ka)^3 \right]. \end{aligned} \quad (102.9)$$

Таким образом, переход к несжимаемой среде приведет к относительной ошибке в модуле сил порядка всего $(ka)^6$ (абсолютная погрешность в фазе сил получится порядка $(ka)^3$). Соответственно сила диполя, создающая в несжимаемой среде скорость u , создаст при наличии сжимаемости скорость $u \left[1 - i \frac{1}{6} (ka)^3 \right]$.

Малая ошибка в амплитуде всегда незначительна. Малая ошибка в фазе существенна только при подсчете излучаемой мощности: при пренебрежении малым мнимым членом получим, что сила и скорость имеют разные мнимости, что соответствует полному отсутствию излучения (см. § 104). В полученных уточненных выражениях главный член соответствует реактивной компоненте силы, а малая добавка другой мнимости — активной компоненте.

Для диполей можно поставить тот же вопрос, что был поставлен в § 93 для монополей: каково поле нескольких одновременно

работающих диполей? Как и там, необходимо раньше всего условиться: что значит неизменная работа данного диполя при наличии в среде других диполей? Мы будем считать *по определению*, что диполь работает неизменно, если сила диполя не изменилась. Будем считать, кроме того, что диполи «прозрачны» (ср. § 93). Тогда для полей диполей имеет место принцип суперпозиции.

Если к отвердевшей сфере приложить две силы F_1 и F_2 одинаковой частоты и фазы, то сфера будет двигаться так, как если бы к ней была приложена равнодействующая $F_1 + F_2$ обеих сил, т. е. силы диполей складываются. Если силы действуют на две разные отвердевшие сферы, то при расстоянии между сферами, малом по сравнению с длиной волны, совместное действие сил также равносильно одному диполю с силой $F_1 + F_2$. Отсюда следует, что если в области, малой по сравнению с длиной волны, действуют синфазно сторонние силы одинаковой частоты F_1, F_2, F_3 , то в результате будет создано дипольное излучение с силой результирующего диполя, равной равнодействующей всех сторонних сил $F_1 + F_2 + F_3 + \dots$. Излученное поле, таким образом, равно

$$p = -(F_1 + F_2 + F_3 + \dots) \nabla \frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (102.10)$$

В частности, если сумма сил равна нулю (например, две равные и взаимно противоположные силы $+F$ и $-F$ приложены в близких точках), то дипольное излучение отсутствует: малое остаточное излучение имеет другую характеристику направленности, чем диполь (четырёхлепестковую характеристику). Легко также видеть, что по амплитуде вдали от места приложения сил остаточное поле относится к полю диполя, соответствующего одной силе F , как $kL : 1$, где L — расстояние между точками приложения сил $+F$ и $-F$. Это полностью аналогично тому, что амплитуда поля двух одинаковых близкорасположенных противофазных монополей относится к амплитуде одиночного монополя с той же объемной скоростью так же как $kL : 1$.

Из сказанного следует, что можно и не «замораживать» данный малый участок среды, к которому приложена данная сила. Конечно, движение отвердевшего участка отличается от движения жидкого участка, к которому приложены те же сторонние силы: жидкий участок деформируется под действием сил, а твердое тело сохраняет свою форму и движется как целое. Тем не менее дипольное излучение в обоих случаях одинаково: действительно, замораживание участка жидкости равносильно добавлению сил упругости, препятствующих относительно перемещению частиц данного участка. Но силы упругости — это внутреннее по отношению к участку силы, а равнодействующая внутренних сил всегда равна нулю. Несущественна также и форма (малого) участка, по которому распределена сила. Во всех случаях излученное поле определится формулой (102.6); в частности, ось диполя направлена по равнодействующей сил.

Если же сторонние силы приложены не к самой среде, а к погруженному в нее телу другой плотности, чем среда, то эта сила не будет равна силе диполя и картина излучения будет другой и будет зависеть от того, является ли тело твердым, а если нет, — то от характера распределения сил по телу. Этот вопрос рассмотрим в § 106.

Интересный пример суперпозиции двух прямо противоположных диполей — излучение камертона. В силу симметрии колебаний ножек камертона результирующая сила, действующая с их стороны на воздух, равна нулю. Поэтому равно нулю и дипольное излучение. Слышен только остаточный слабый звук. Поворачивая камертон вокруг его оси, легко заметить, что характеристика направленности остаточного излучения имеет четыре максимума. Так как остаточное излучение мало, колебательная энергия ножек расходуется медленно и камертон звучит долго.

Другой интересный пример — акустическое поведение корабля, качающегося на волнении. Центр тяжести корабля при вертикальной качке то поднимается, то опускается. Следовательно, на него действует вертикальная сила со стороны воды, а по закону действия и противодействия он действует на воду с равной противоположной силой. На первый взгляд эта сторонняя по отношению к воде сила должна вызывать излучение дипольного типа в воде, происходящее с частотой вертикальной качки корабля. В действительности, однако, такое дипольное излучение корабля полностью отсутствует. Дело в том, что морское волнение само по себе не создает излучения звука в воду (см. § 33). Корабль же отличается, с акустической точки зрения, от вытесненного объема воды только неизменностью своей формы (тем, что корпус корабля — твердое тело). Механически форма поддерживается силами упругости корпуса, т. е. внутренними силами. «Замораживая» вытесненный объем воды, мы пришли бы к той же акустической ситуации. Но в этом случае, по сравнению с водой в отсутствие корабля, добавились бы только силы, в сумме дающие нуль, а они дипольного излучения не создают.

§ 103. Влияние идеальных стенок на излучение диполя

Действие идеальной стенки на поле диполя можно заменить действием мнимого изображения диполя в плоскости границы как в зеркале, как это делалось в § 93 для монополя. Согласно сказанному в предыдущем параграфе силу диполя будем считать неизменной.

Чтобы найти мнимое изображение диполя, представим его в виде пары одинаковых противофазных монополей; тогда, отразив каждый из монополей в отдельности, получим отраженный диполь. Мнимое изображение диполя также есть диполь. На рис. 103.1 показаны случаи абсолютно жесткой и абсолютно мягкой стенок. Показаны как сами противофазные монополи, так и моменты

диполей. Компонента момента, параллельная стенке, отражается как монополь: синфазно от жесткой стенки и противофазно от мягкой стенки. Наоборот, нормальная компонента момента диполя отражается противофазно в жесткой стенке и синфазно в мягкой стенке. Все сказанное об отражении момента относится и к отражению пропорционального ему вектора силы диполя. Практически первый случай — жесткая стенка — важен особенно для воздушной акустики, поскольку твердые тела и поверхность воды могут считаться твердыми границами для воздушного звука. Второй случай особенно важен в подводной акустике.

Если расстояние от границы мало по сравнению с длиной волны («низкочастотный звук»), то диполь вместе со своим мнимым изображением эквивалентен одному диполю с моментом, равным векторной сумме моментов данного диполя и его мнимого изображения. Значит, вблизи абсолютно жесткой стенки компонента момента суммарного диполя, перпендикулярная к стенке, пропадет, а компонента, параллельная стенке, удвоится.

Вблизи мягкой стенки, наоборот, пропадет параллельная компонента и удвоится компонента момента, перпендикулярная к стенке. Рядом с жесткой стенкой произвольный дипольный источник ведет себя как диполь с осью, параллельной стенке, а рядом с мягкой стенкой — как диполь с осью, перпендикулярной к стенке. Граница как бы поворачивает характеристику направленности диполя, ставя ее ось параллельно границе в случае жесткой стенки и перпендикулярно — в случае мягкой стенки. Так, подводный диполь с любым направлением оси, расположенный на малом расстоянии от свободной поверхности воды, эквивалентен диполю с вертикальной осью: излучение цилиндрически-симметрично относительно вертикальной оси и теряет направленность в горизонтальной плоскости.

В частности, поле диполя, расположенного у жесткой стенки перпендикулярно к стенке, уничтожается его мнимым изображением, а поле диполя, параллельного стенке, удваивается. Вблизи свободной границы картина обратная: сила, приложенная к свободной границе перпендикулярно к ней, излучает двойное поле по сравнению с такой же силой в неограниченной среде, а сила, приложенная параллельно границе, ничего не излучает.

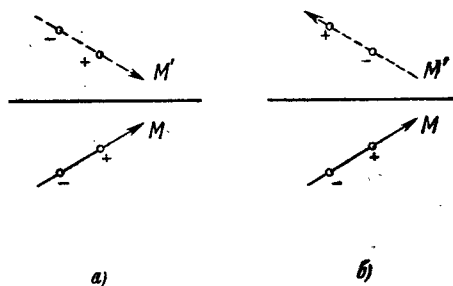


Рис. 103.1. Диполь вблизи абсолютно жесткой (а) и абсолютно мягкой (б) границы. Показаны составляющие монополи диполей и их мнимых изображений. M — момент действительного диполя, M' — момент мнимого диполя.

Вблизи свободной границы теряет горизонтальную направленность не только дипольный излучатель, но и дипольный приемник. Например, дипольный гидрофон вблизи свободной поверхности воды не имеет направленности в горизонтальной плоскости и его характеристика направленности цилиндрически-симметрична относительно вертикальной оси. И, вообще, горизонтальную направленность теряет любая система излучателей или приемников, расположенная на расстоянии от свободной поверхности, малом по сравнению с длиной волны.

§ 104. Мощность излучения диполя

Мощность, излучаемую дипольным источником звука, можно рассчитать как поток мощности, уходящий от источника через замкнутую поверхность, окружающую источник, например сферу большого радиуса r , описанную из источника как из центра. При $kr \gg 1$ давление и радиальная скорость стремятся соответственно к величинам

$$p \rightarrow -\rho\omega k M \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \cos\theta \quad \text{и} \quad v_r \rightarrow -k^2 \frac{M}{4\pi r} e^{ikr} \cos\theta.$$

Поле можно рассматривать локально как плоскую волну, бегущую по радиусу; в частности, $p/v = \rho c$. Плотность потока мощности есть $(1/2) p v_r$, а полный поток мощности, выходящей через поверхность сферы, а значит, и мощность излучения диполя найдутся интегрированием этой плотности по всей поверхности сферы.

Таким образом, искомая мощность есть (ср. с (97.3))

$$J = \int_0^\pi \frac{1}{2} p v_r 2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{24\pi} \rho c k^4 M^2. \quad (104.1)$$

Для случая, когда диполь образован малой сферой радиуса a , получим, пользуясь (101.6), (102.4) и (102.5), следующие выражения для этой же мощности:

$$J = \frac{3}{8\pi\rho c} k^2 \Phi^2 = \frac{1}{24\pi\rho c} k^2 F^2 = \frac{1}{6} \pi a^2 \rho c (ka)^4 u^2. \quad (104.2)$$

Мощность излучения диполя можно найти и иначе — как среднюю мощность силы диполя при ее воздействии на осциллирующую сферу. Эта мощность равна $(1/2) u \operatorname{Re} F$, что дает после подстановки соответственных значений из (102.9) снова тот же результат (104.2): $J = (1/6) \pi a^2 \rho c (ka)^4 u^2$.

Излучение диполя весьма мало эффективно даже по сравнению с излучением монополя: отношение активной части силы к реактивной («косинус фи») для монополя равно ka , а для диполя, как это видно из (102.9), всего $(1/6) (ka)^3$. Мощность звука, излу-

чаемая малой осциллирующей сферой, относится к мощности, излучаемой пульсирующей сферой того же радиуса и с той же скоростью поверхности, как $(1/_{12}) (ka)^2 : 1$, а к мощности излучения плоской волны с площади, равной поверхности сферы, как $(1/_{12}) (ka)^4 : 1$.

То, что осциллирующая сфера (диполь) излучает много меньше, чем пульсирующая сфера (монополь), можно объяснить наглядно тем, что при осцилляциях разности давлений впереди и позади малой сферы успевают выравняться местными потоками — перетеканием жидкости от мест с большим давлением к местам с меньшим давлением. При пульсациях же избыточное давление создается сразу по всей поверхности сферы, — жидкости перетекать «некуда».

Подобная же картина наблюдается и при колебаниях струн. Струны музыкальных инструментов почти не излучают воздушных звуковых волн и практически весь слышимый нами звук создан колебаниями деки, возбуждаемой струнами. Воздух не успевает обтекать большую деку, как он обтекает тонкую струну, и поэтому создаваемые декой сжатия передаются в воздух в виде волны, а не местных потоков.

§ 105. Негармонический дипольный источник

Мы видели, что поле гармонического дипольного источника можно рассматривать как производную поля гармонического монополя по координате точки, в которой расположен источник. Аналогично можно прийти к дипольному источнику негармонического типа, дифференцируя по координате источника поле негармонического монополя.

В самом деле, возьмем в качестве объемной скорости монополя величину

$$V(t) = \frac{1}{dx} M(t),$$

где $M(t)$ — момент диполя — произвольная функция времени. Поле такого монополя выразится, согласно (87.2), формулой

$$p_0 = \frac{1}{dx} \frac{\rho}{4\pi r} \frac{\partial M(t-r/c)}{\partial t}.$$

Дифференциал этого поля конечен: он соответствует полю двух монополей противоположных знаков, разнесенных на расстояние dx :

$$p = \frac{\partial p_0}{\partial x} dx = \frac{\rho}{4\pi r^2} \left[\frac{\partial M(t-r/c)}{\partial t} + \frac{r}{c} \frac{\partial^2 M(t-r/c)}{\partial t^2} \right] \cos \theta. \quad (105.1)$$

Соответственное значение радиальной скорости найдется по формуле

$$v_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^t p dt = \frac{1}{2\pi r^3} \left[M \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \frac{\partial M(t-r/c)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{c^2} \frac{\partial^2 M(t-r/c)}{\partial t^2} \right] \cos \theta. \quad (105.2)$$

Как и в гармоническом случае, можно показать, что поле (105.1) можно получить в результате осцилляций твердой сферы. Как легко найти из граничных условий, соответственная скорость сферы радиуса a равна

$$u(t) = \frac{1}{2\pi a^3} \left[M \left(t - \frac{a}{c} \right) + \frac{a}{c} \frac{\partial M(t-a/c)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^2 M(t-a/c)}{\partial t^2} \right].$$

Сила, с которой такая сфера действует на среду, найдется, снова аналогично случаю гармонического диполя, по формуле

$$\Phi = 2\pi a^2 \int_0^\pi p \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} \rho \left[\frac{\partial M(t-a/c)}{\partial t} + \frac{a}{c} \frac{\partial^2 M(t-a/c)}{\partial t^2} \right].$$

При достаточно малом радиусе сферы, т. е. таком радиусе, при котором последующие члены разложений по a/c малы по сравнению с предыдущими, формулы можно упростить, ограничиваясь только старшими членами по отношению к радиусу сферы. С точностью до членов, содержащих a/c в степени не выше четвертой, скорость сферы равна

$$u(t) = \frac{1}{2\pi a^3} \left[\frac{\partial M(t)}{\partial t} - \frac{1}{6} \frac{a^3}{c^3} \frac{\partial^3 M(t)}{\partial t^3} \right].$$

Отсюда с такой же точностью найдем

$$M(t) = 2\pi a^3 \left[u(t) + \frac{1}{6} \frac{a^3}{c^3} \frac{\partial^3 u(t)}{\partial t^3} \right],$$

а также

$$\Phi(t) = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \left[\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^3 u(t)}{\partial t^3} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{c^3} \frac{\partial^4 u(t)}{\partial t^4} \right].$$

В выражении для Φ первые два члена в скобках соответствуют реактивной нагрузке: их работа в среднем за достаточно большой промежуток времени равна нулю. Последний член в скобках дает активную часть нагрузки: его работа составляет излученную

энергию. Излучаемую мощность можно записать в таком виде

$$J = \frac{1}{3} \pi \frac{a^6}{c^3} \rho u(t) \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^4}.$$

Если излучение длилось в течение ограниченного времени, то полная излученная энергия равна

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi u dt = \frac{1}{3} \pi \frac{a^6}{c^3} \rho \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^4} dt = \frac{1}{3} \pi \frac{a^6}{c^3} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} \right]^2 dt.$$

Главный член реактивной нагрузки обусловлен присоединенной массой: он равен массе среды в половинном объеме сферы, умноженной на ускорение сферы. Эта часть нагрузки сохранится в несжимаемой жидкости, в которой активный член и излучаемая мощность обратятся в нуль. Если пренебрегать активной нагрузкой, то придем к приближенным формулам, пригодным с большой точностью при движении малой сферы:

$$M(t) \approx 2\pi a^3 u(t),$$

$$\Phi(t) \approx \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{3} \rho \frac{\partial M}{\partial t}.$$

Можно ввести и «силу диполя» F как силу; сообщаемую скоростью u «замороженной» сфере, выделенной в данной среде. Как и для гармонического случая, найдем

$$F = 3\Phi = \rho \frac{\partial M}{\partial t}.$$

Следовательно, звуковое поле негармонического диполя можно записать в виде

$$\rho = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{F(t-r/c)}{4\pi r} = -\rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial M(t-r/c)}{\partial t} \cdot \frac{1}{4\pi r} \right],$$

или в векторной форме:

$$\rho = -\nabla \frac{F(t-r/c)}{4\pi r} = -\rho \nabla \left[\frac{\partial M(t-r/c)}{\partial t} \frac{1}{4\pi r} \right].$$

§ 106. Осцилляции и излучение звука малым твердым телом под действием сторонней силы

В предыдущих параграфах мы изучили излучение, создаваемое малой жесткой сферой, осциллирующей в жидкости с заданной скоростью. Мы показали также, что при нахождении движения сферы заданной массы влияние реакции среды можно учесть, добавляя к фактической массе сферы «присоединенную массу».

Поставим теперь те же задачи для малого тела произвольной формы: определим его излучение, если известна скорость его осцилляций, и найдем скорость осцилляций тела, если известна сторонняя сила, на него действующая. Решив эти две задачи, мы сможем найти излучение, создаваемое малым твердым телом, на которое действует заданная сторонняя сила. Движение среды вокруг движущегося тела произвольной формы не удастся найти в явном виде, как мы это сделали для сферы. Поэтому обе поставленные задачи допускают только частичное решение.

Для решения поставленных задач не требуется знать движение среды во всех деталях: достаточно знать реакцию среды на движение тела. Так же как и для малой сферы, реакция среды на движение малого тела любой формы практически не зависит от сжимаемости среды. Поэтому при определении этой реакции будем считать среду несжимаемой, а излучение будем находить координатным образом — по модулю силы, с которой тело действует на среду.

Как мы видели выше, для определения реакции среды на заданное движение сферы достаточно знать только одну величину: присоединенную массу среды. Для тела любой другой формы такой одной величины нет: реакция среды существенно зависит от формы тела и от его ориентировки относительно направления его движения. Так, при движении плоской фигуры плашмя реакция велика, а при движении ребром — мала. Покажем, что реакцию при движении по любому направлению для тела любой формы можно найти, если знать шесть величин, зависящих от формы этого тела. Рассмотрим этот вопрос в общем виде.

Пусть в несжимаемой среде, покоящейся на бесконечности, данное твердое тело совершает гармонические колебания*) вдоль какой-либо прямой. Как известно из гидродинамики, движение, возникающее в идеальной несжимаемой жидкости при перемещении в ней твердого тела, является потенциальным и полностью определяется скоростью тела в данный момент. При этом амплитуда колебаний частиц среды пропорциональна амплитуде скорости колебаний тела и не зависит от частоты: компоненты скорости частиц являются линейными однородными функциями компонент скорости тела с коэффициентами, зависящими от координат частицы. Следовательно, кинетическая энергия среды — однородная квадратичная функция компонент скорости тела.

В дальнейшем удобно пользоваться тензорными обозначениями. Пусть скорость тела есть вектор u_j . Кинетическую энергию среды можно записать в виде

$$T = a_{j\mu} u_j u_\mu.$$

*) Пользуясь результатами предыдущего параграфа, нетрудно провести все рассмотрение и для произвольного движения тела.

Коэффициенты a_{ji} зависят от формы и величины тела и от направления выбранных осей и пропорциональны плотности среды. Обозначая $a_{ji} + a_{ij} = \mu_{ji}$, можем переписать эту формулу в виде

$$T = \frac{1}{2} \mu_{ji} \dot{u}_j \dot{u}_i.$$

Так как кинетическая энергия среды инвариантна по отношению к преобразованию координат, а вектор u_j произволен, то система коэффициентов μ_{ji} образует тензор. Очевидно, тензор μ_{ji} симметричен и, следовательно, определяется шестью величинами. Его называют *тензором присоединенных масс* тела. Будем считать, что тензор присоединенных масс для данного тела известен. Для частного случая сферического твердого тела тензор присоединенных масс — диагональный тензор $\delta_{ji} \frac{2}{3} \rho a^3$; его диагональные компоненты по любой оси равны присоединенной массе сферы.

Зная тензор присоединенных масс, можно найти силу Φ_j , с которой тело, движущееся с данным ускорением, действует на среду. Действительно, работа этой силы должна равняться приращению кинетической энергии среды (внутренняя энергия нежизнеспособной среды не меняется). Мощность силы равна $\Phi_j \dot{u}_j$. Приравнявая ее производной по времени от кинетической энергии, получим

$$\Phi_j \dot{u}_j = \frac{1}{2} \mu_{ji} \ddot{u}_j \dot{u}_i + \frac{1}{2} \mu_{ji} \dot{u}_j \ddot{u}_i = \mu_{ji} \dot{u}_i \ddot{u}_j,$$

где \ddot{u}_i — вектор ускорения тела. Так как u_j — произвольный вектор, то, согласно известной теореме векторной алгебры, должно быть

$$\Phi_j = \mu_{ji} \ddot{u}_i. \quad (106.1)$$

Реакция среды на тело равна $-\Phi_j = -\mu_{ji} \ddot{u}_i$.

Пусть масса тела, совершающего данное движение, равна μ . Очевидно, сторонняя сила Φ_j^* , сообщающая погруженному телу данное ускорение, сложенная с реакцией среды, равна массе тела, умноженной на ускорение: $\Phi_j^* - \mu_{ji} \ddot{u}_i = \mu \ddot{u}_j$. В более симметричном виде это равенство можно записать так:

$$\Phi_j^* = (\mu \delta_{ji} + \mu_{ji}) \ddot{u}_i, \quad (106.2)$$

где δ_{ji} — единичный тензор.

Тензор $\delta_{ji} \mu + \mu_{ji}$ можно назвать *тензором эффективной массы* тела.

Уравнение (106.2) выражает равенство сторонней силы Φ_j^* , действующей на тело, произведению тензора эффективной массы на вектор ускорения тела; (106.2) есть обобщение второго закона Ньютона на тела, погруженные в жидкость: реакция среды приводит к тому, что эффективная масса приобретает тензорный

характер. Для погруженной сферы эффективную массу можно по-прежнему рассматривать как скаляр.

Если плотность тела равна плотности среды, то сторонняя сила, сообщающая телу данное ускорение, равна

$$\Phi_j^* = (\rho\Omega\delta_{j\mu} + \mu_{j\mu})\dot{u}_\mu, \quad (106.3)$$

где Ω — объем тела. Но в этом случае можно считать, что сила приложена прямо к среде, и следовательно, Φ_j^* есть сила диполя F_j . Отсюда следует, согласно (102.7), что в среде создается излучение

$$p = -(\rho\Omega\delta_{j\mu} + \mu_{j\mu})\dot{u}_\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (106.4)$$

Теперь решим обратную задачу: найдем движение, совершаемое данным телом под действием заданной сторонней силы. Воспользовавшись (106.4), мы сможем после этого решить и задачу об излучении, создаваемом телом под действием данной сторонней силы.

Итак, пусть на данное тело действует сторонняя сила Φ_j^* . Неизвестные компоненты ускорения тела под действием этой силы найдем из уравнений (106.2). В тензорных обозначениях решения этих уравнений записываются очень просто при помощи тензора $n_{j\mu}$, обратного тензору эффективной массы. Этот обратный тензор определяется соотношениями

$$(\mu\delta_{\alpha j} + \mu_{\alpha j})n_{\alpha i} = \delta_{ji}. \quad (106.5)$$

Умножая уравнение (106.2) на $n_{j\alpha}$, найдем неизвестные ускорения в виде

$$\dot{u}_\alpha = \Phi_j^* n_{j\alpha}. \quad (106.6)$$

Отсюда, согласно (106.3), найдем силу диполя F_j :

$$F_j = (\rho\Omega\delta_{j\alpha} + \mu_{j\alpha})\Phi_i^* n_{i\alpha}. \quad (106.7)$$

Наконец, подставляя в (106.4), найдем и излучаемое поле:

$$p = -(\rho\Omega\delta_{j\alpha} + \mu_{j\alpha})\Phi_i^* n_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (106.8)$$

Пользуясь (106.5) и (106.6), можно переписать выражение для силы диполя так, чтобы роль различия в массе тела и массе вытесняемой им жидкости выступила более наглядно. Действительно,

$$\begin{aligned} F_j &= (\mu\delta_{j\alpha} + \mu_{j\alpha})n_{\alpha i}\Phi_i^* + (\rho\Omega - \mu)\delta_{j\alpha}n_{\alpha i}\Phi_i^* = \\ &= \delta_{ji}\Phi_i^* + (\rho\Omega - \mu)\Phi_i^* n_{ij}, \end{aligned}$$

и окончательно

$$F_j = \Phi_j^* + (\rho\Omega - \mu)\dot{u}_j. \quad (106.9)$$

или в векторной форме

$$F = \Phi^* + (\rho\Omega - \mu) \dot{u}_0 \quad (106.10)$$

Полученные формулы решают все поставленные задачи до конца, за исключением одного пункта: как же найти тензор присоединенных масс для тела данной формы? Общего ответа на этот вопрос дать нельзя. В этом и заключается смысл сделанной выше оговорки о частичном решении поставленной задачи. Для некоторых простейших форм тела — сферы, эллипсоида, тонкого диска — аналитические выражения для компонент тензора получить удастся, но для любой формы тела задачу решить можно только приближенно, при помощи численных методов, либо экспериментально, определяя ускорение тела, погруженного в данную среду, при воздействии известной силы.

Из полученных формул следует, что векторы сторонней силы, силы диполя и ускорения тела вообще не совпадают по направлению. Из (106.9) или (106.10) видно, что при равенстве массы тела массе вытесняемой им жидкости сила диполя совпадает со стороной силой; но даже в этом случае ускорение тела вообще направлено не по оси диполя. В общем случае произвольной формы и любой массы тела все три вектора совпадают по направлению только для трех взаимно перпендикулярных направлений действия сторонней силы — *главных направлений* тензора присоединенных масс. Для этих направлений (обозначим соответственные оси через x_1 , x_2 и x_3) отличны от нуля только диагональные компоненты тензора присоединенных масс; будем обозначать их соответственно μ_1 , μ_2 , μ_3 .

Относя движение к главным направлениям, легко составить себе наглядное представление о движении тела и об излучении им звука при различных соотношениях между плотностями тела и среды и при различной форме тела. По отношению к главным осям x_1 , x_2 , x_3 тензор n_{jl} также делается диагональным и соответственные компоненты n_1 , n_2 , n_3 равны

$$n_1 = \frac{1}{\mu + \mu_1}, \quad n_2 = \frac{1}{\mu + \mu_2}, \quad n_3 = \frac{1}{\mu + \mu_3}.$$

Компоненты вектора ускорения \ddot{u}_i выразятся в этой системе координат формулами

$$\ddot{u}_1 = \frac{1}{\mu + \mu_1} \Phi_1^*, \quad \ddot{u}_2 = \frac{1}{\mu + \mu_2} \Phi_2^*, \quad \ddot{u}_3 = \frac{1}{\mu + \mu_3} \Phi_3^*.$$

Компоненты силы диполя выразятся формулами

$$F_1 = \frac{\rho\Omega + \mu_1}{\mu + \mu_1} \Phi_1^*, \quad F_2 = \frac{\rho\Omega + \mu_2}{\mu + \mu_2} \Phi_2^*, \quad F_3 = \frac{\rho\Omega + \mu_3}{\mu + \mu_3} \Phi_3^*.$$

Для тела очень большой массы по сравнению с массой вытесненного объема и компонентами тензора присоединенных масс

направления ускорения тела и силы диполя близки к направлению сторонней силы. Чем больше масса тела, тем при данной сторонней силе меньше сила диполя, а значит, и мощность излучения. Если масса тела μ больше массы вытесненного объема среды $\rho\Omega$, то сторонняя сила заданной величины создаст наибольшее излучение, если она действует вдоль оси, соответствующей наибольшей из величин μ_1, μ_2, μ_3 . В обратном случае ($\mu < \rho\Omega$) излучение наибольшее для оси, соответствующей наименьшей из этих величин.

Особенно интересен случай очень легкого тела, когда его массой можно пренебречь по сравнению с массой вытесненной среды и с компонентами тензора присоединенных масс. Тогда

$$F_1 = \frac{\rho\Omega + \mu_1}{\mu_1} \Phi_1^*, \quad F_2 = \frac{\rho\Omega + \mu_2}{\mu_2} \Phi_2^*, \quad F_3 = \frac{\rho\Omega + \mu_3}{\mu_3} \Phi_3^*.$$

Если главная компонента тензора присоединенных масс для данного направления мала по сравнению с массой вытесненной среды (например, компонента для продольной оси тела в виде иголки), то сила диполя много больше сторонней силы и создаст излучение, большее по сравнению с излучением, создаваемым той же сторонней силой, приложенной непосредственно к среде. Так, для удлиненного эллипсоида вращения с отношением осей 10 : 1 главные компоненты тензора присоединенных масс равны приблизительно $\mu_1 = \mu_2 = 0,960\rho\Omega$, $\mu_3 = 0,021\rho\Omega$. Если масса эллипсоида равна нулю, то данная сторонняя сила, приложенная к нему вдоль большой оси, создаст излучение по амплитуде примерно в 24 раза большее, чем при приложении силы в перпендикулярном направлении. По сравнению с силой, приложенной к эллипсоиду с той же плотностью, что и среда, выигрыш в амплитуде для большой оси — в 48,6 раза и для малой оси — в 2,04 раза (по мощности излучения выигрыши соответственно в 2300 раз и в 4 раза).

При приложении данной силы к безмассовой сфере амплитуда излучаемого поля увеличится в 3 раза (по сравнению с приложением силы непосредственно к среде), а значит, мощность излучения — в 9 раз.

Напомним в заключение, что при $\mu = \rho\Omega$ сила диполя совпадает со сторонней силой и ось диполя направлена вдоль сторонней силы. Скорость же тела и при этом условии имеет вообще другое направление, если только сторонняя сила не совпадает с одной из главных осей тензора присоединенных масс.

§ 107. Вращающийся диполь

Рассмотрим *вращающийся диполь*: источник звука в виде сферы радиуса a , обращающейся равномерно по окружности со скоростью u . Примем, что радиус сферы мал по сравнению с длиной волны излучаемого звука и что радиус окружности обращения

мал по сравнению с радиусом сферы. Движение сферы есть суперпозиция двух осцилляций по двум взаимно перпендикулярным диаметрам окружности обращения, происходящих со сдвигом фаз в четверть периода. Излучение сферы будет, следовательно, образовано суперпозицией полей двух диполей со взаимно перпендикулярными осями, имеющих частоту, равную угловой скорости обращения сферы, и работающих со сдвигом фаз в четверть периода. Рассмотрим поля этих диполей в плоскости обращения. Поле первого диполя запишем, отсчитывая угол φ в плоскости обращения от оси этого диполя:

$$p_1 = i\omega \cdot 2\pi a^3 u \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} \cos \varphi.$$

Поле второго диполя равно

$$p_2 = i\omega \cdot 2\pi a^3 u \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikr} i \sin \varphi,$$

а результирующее поле получается в виде

$$p = p_1 + p_2 = i\omega \cdot 2\pi a^3 u \times \\ \times \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{i(kr + \varphi)}.$$

При выходе из плоскости обращения поле каждого диполя изменяется как $\cos \theta$, где θ —

угол между радиусом-вектором точки наблюдения и плоскостью обращения. Таким образом, окончательно

$$p = i\omega \cdot 2\pi a^3 u \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{i(kr + \varphi)} \cos \theta.$$

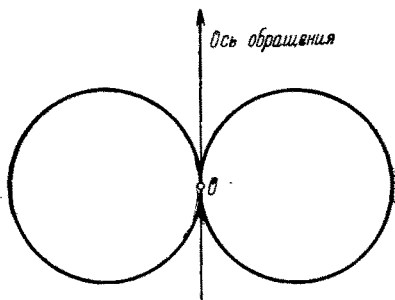


Рис. 107.1. Характеристика направленности сферы, обращающейся по окружности: тор с нулевым просветом.

Характеристика направленности есть тело вращения относительно оси, перпендикулярной к плоскости обращения сферы: она получается вращением единичной окружности вокруг своей касательной (рис. 107.1). Это — тор с нулевым просветом. «Динольность» теперь относится к отклонению от плоскости, а не от оси: дипольные «восьмерки» получаются при сечении характеристики плоскостями, перпендикулярными к плоскости обращения.

Фаза излученного поля бежит не только вдоль радиусов-векторов, но и по азимуту: следы фронтов волн на каком-либо круговом конусе с осью, перпендикулярной к плоскости обращения, образуют спиральные витки с постоянным шагом вдоль любого радиуса-вектора. Перемещение фронтов соответствует вращению вокруг своей оси конуса с нанесенными на него следами фронтов; с угловой скоростью обращения сферы. В плоскости обращения сферы фронты образуют архимедовы спирали. Представить себе распространение такой волны можно, начертив на картонке архи-

медову спираль и приведя ее во вращение в своей плоскости вокруг центра.

Аналогичную формулу для поля можно получить и для излучателя, эквивалентного действующей на среду силе постоянной амплитуды F , направление которой вращается с угловой скоростью ω . Поле такой силы равно

$$p = -F \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{i(kr + \varphi)} \cos \theta.$$

При этом не обязательно, чтобы сила вращающегося диполя была приложена все время в одной точке: тот же результат — вращающийся диполь — получится, например, при вращающейся силе, точка приложения которой обегает окружность, малую по сравнению с длиной волны, так что сила составляет постоянный угол с радиусом-вектором точки приложения силы. При наличии нескольких сил, обегających с теми же угловыми скоростями ту же или разные окружности, силой вращающегося диполя будет векторная сумма всех сил (здесь требуется, чтобы вся область приложения сил была мала по сравнению с длиной волны).

§ 108. Дипольное излучение малых тел, осциллирующих с большой амплитудой. Дипольное излучение вращающихся тел

В § 102 мы видели, что поле диполя мало меняется при смещении осциллирующей сферы на расстояние, малое по сравнению с длиной волны. Поэтому можно отбросить требование, поставленное в § 101 относительно малости смещений малой осциллирующей сферы по сравнению с ее радиусом, и ограничиться требованием малости смещения только по сравнению с длиной волны. То же относится, конечно, и к дипольному излучению осциллирующих несферических тел. В идеальной среде всегда можно пользоваться формулами (101.7) (для сферы) и формулами (106.4) и (106.8) для тел любой формы.

Оговорка об идеальности среды относится к вычислению поля диполя по известной скорости тела. Дело в том, что в неидеальной (вязкой) среде картина обтекания не позволяет выразить реакцию среды через присоединенные массы: жидкость прилипает к телу, увлекаяющему за собой пограничный слой. Для малых частичек это приводит как бы к увеличению эффективного размера частичек; для больших (по сравнению с толщиной пограничного слоя) тел при больших амплитудах смещений наблюдается отрыв пограничного слоя с образованием вихрей, кавитационных каверн и т. п. Тогда расчет по формулам § 106, содержащим скорость тела, делается невозможным. Но даже и в этих случаях сила диполя выражается формулой (106.10) через стороннюю силу, действующую на тело, и ускорение, получаемое телом, и дипольное излучение можно найти по формуле (102.6), несмотря на полное

искажение гидродинамического поля вблизи самого колеблющегося тела.

Эти же соображения применимы и для вращающихся диполей, создаваемых обращающимися телами, при радиусах обращения, малых по сравнению с длиной волны, но не обязательно малых по сравнению с размерами самого тела. Этот случай важен, например, при расчете излучения вращающихся винтов и пропеллеров. Каждая лопасть винта, вращающегося в свободной среде — это, согласно вышесказанному, вращающийся дипольный источник. Векторы сил, действующих на лопасти, равны сторонам правильного многоугольника. Поэтому векторная сумма сил, действующих на среду со стороны винта, равна нулю, а следовательно, равна нулю и сила диполя винта в целом: дипольное излучение отсутствует. Но если винт работает вблизи корпуса корабля, то появляются силы, не уравновешиваемые на всех лопастях: это — силы, действующие, например, при прохождении лопасти вблизи ахтерштевня или пера руля, и силы, связанные с неоднородностью потока воды, обтекающей винт. Эта сила, появляющаяся поочередно на каждой лопасти, и образует дипольный источник. Основная частота этого дипольного источника определяется угловой скоростью вращения винта, умноженной на число лопастей; будет наблюдаться также дипольное излучение кратных частот. Реально в море действительно наблюдается так называемый дискретный спектр шума корабля, состоящий из этих частот. Ось диполя такого типа расположена горизонтально.

Наконец, при вращении одной лопасти, или вообще при обращении какого-либо тела по окружности, излучение представляет собой вращающийся диполь. Его излучение выражается формулой

$$p = -F \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{i(kr + \varphi)} \cos \theta,$$

где F — сила диполя — утроенная величина силы, действующей со стороны вращающегося тела на среду. «Восьмерочная характеристика» направленности в этом случае вращается с той же угловой скоростью, что и тело. На каждой плоскости, перпендикулярной к оси вращения, фронты волны оставляют след в виде вращающейся архимедовой спирали.

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

§ 109. Рассеяние звука на препятствии

До сих пор мы рассматривали только плоские бесконечные препятствия. В этой главе мы выясним, как влияет на звуковую волну препятствие конечных размеров. Препятствием будем считать любое тело из другого вещества, чем среда.

Поле, измененное препятствием, удобно представлять в виде суперпозиции двух полей: *первичной* волны, распространявшейся в среде в отсутствие препятствия, и рассеянного поля (*вторичной* волны) — добавки, вызванной наличием препятствия. При этом будем считать, что излучатели, создающие первичное поле, работают «одинаково» независимо от того, помещено препятствие в среду или нет (см. § 93).

Сделаем два замечания о самой постановке задачи о рассеянии. В гл. IX, рассматривая совместную работу нескольких излучателей, мы видели, что сами они могут явиться препятствиями для звуковых волн, создаваемых другими излучателями. Тогда мы пренебрегали рассеянным полем, потому что интересовались только особенностями «прямого» поля излучателей, к которому рассеяние на самих излучателях давало лишь малую поправку. Но теперь задача поставлена иначе: препятствия *пассивны*, никакого самостоятельного излучения не создают, поле в отсутствие препятствий известно, а мы интересуемся, как основной величиной, именно *добавкой к первичному полю*, вносимой препятствиями.

Второе замечание состоит в том, что рассеянные волны будут вторично и вообще повторно и многократно рассеиваться другими препятствиями. Такие рассеянные волны будут поправкой по отношению к однократно рассеянному полю, подобно тому как однократное рассеяние при совместной работе нескольких излучателей было поправкой к их первичному полю. Если однократно рассеянное поле мало по сравнению с первичным, то каждая вторично и многократно рассеянная волна мала по сравнению с однократно рассеянной, и ими можно пренебречь, если число рассеивателей не слишком велико. Но если рассеивателей много, то по мере распространения первичной волны произойдет накопление рассеянных волн, и в результате однократно рассеянное поле уже не будет мало по сравнению с первичным даже при малости

рассеяния от одного рассеивателя. Тогда пренебрежение вторичным и многократным рассеянием станет недопустимым. Нельзя пренебрегать вторичным и многократным рассеянием и в случаях, когда рассеяние на одном рассеивателе не мало. В настоящей книге мы не будем рассматривать эти более сложные случаи, требующие учета многократного рассеяния.

Если недопустимого накопления нет, то задачу о нахождении суммарного рассеянного поля всегда можно свести к задаче о рассеянии на отдельном препятствии: суммарное поле получится просто как суперпозиция полей, рассеянных однократно каждым препятствием в отдельности.

Поле, рассеянное данным препятствием, зависит не только от вида самого препятствия, но и от вида первичной волны. Будем рассчитывать рассеяние для первичной плоской бегущей волны. Расчет рассеяния для других типов первичных волн (стоячие волны, нормальные волны в волноводе и т. п.) дополнительных трудностей не представит.

Рассеяние на данном препятствии зависит от его формы и размеров и от сжимаемости и плотности вещества препятствия. Никакие другие свойства препятствия на рассеянии не сказываются. Если сжимаемость и плотность такие же, как у среды, то препятствие не вызывает рассеяния, каковы бы ни были его размеры и форма. В противном случае рассеяние происходит.

Препятствие движется в звуковом поле не так, как двигался бы вытесненный объем среды в отсутствие препятствия, а совершает некоторое дополнительное движение. Рассеянная волна и есть поле, создаваемое этим дополнительным движением. Но такое же поле создавало бы данное тело, совершающее это дополнительное движение в покоящейся среде. Значит, задачу о рассеянии звука препятствием в звуковой волне можно свести к задаче об излучении звука в покоящейся среде.

Если препятствие мало по сравнению с длиной волны, то дополнительное движение и рассеянное поле найти легко. Так, если препятствие имеет другую сжимаемость, чем среда, то оно изменяет свой объем либо больше, либо меньше, чем среда, в зависимости от того, какая сжимаемость больше. Дополнительное движение в этом случае — пульсация тела, и, следовательно, рассеяние монопольного типа. Если препятствие имеет другую плотность, чем среда, то оно либо отстает от среды, либо опережает ее, в зависимости от того, какая плотность больше. Дополнительное движение в этом случае — поступательное движение (осцилляции) тела, и, следовательно, рассеяние дипольного типа. Подробно эти два случая разобраны в следующих двух параграфах.

Рассеяние сильно зависит от соотношения между длиной волны рассеиваемого звука и размерами препятствия. Найти рассеяние для любых соотношений между размерами препятствия и длиной волны не удастся. Для препятствий, малых по сравнению с длиной

волны, мы дадим общее решение. Если препятствие весьма велико по сравнению с длиной волны и ограничено плавной поверхностью, радиусы кривизны которой также очень велики по сравнению с длиной волны, то найти рассеянное поле можно при помощи лучевой картины (это относится, однако, только к идеальным препятствиям).

Действительно, в этом случае можно считать отдельные участки поверхности локально-плоскими и находить отражение от них по закону равенства углов падения и отражения луча. Позади тела образуется тень, по сечению равная поперечному сечению тела

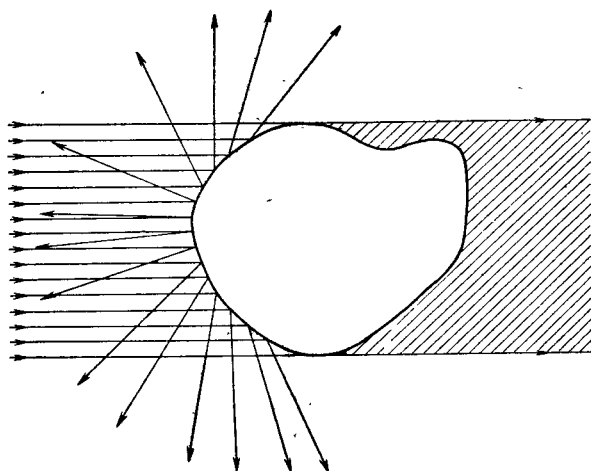


Рис. 109.1. Лучевая картина рассеяния звука телом, большим по сравнению с длиной волны. Область тени заштрихована.

(рис. 109.1). Поле перед телом можно найти как сумму падающей волны и волны, уносимой лучами от поверхности тела. Поле позади тела равно нулю (мы отвлекаемся от дифракционных явлений, например от проникновений поля в «геометрическую тень» и т. п.). Таким образом, рассеянное поле образовано вне тени отраженными лучами; в области тени оно равно падающему полю, взятому с обратным знаком, и гасит первичное поле, давая совместно с ним нуль.

Найдем поток мощности рассеянного поля, уходящий от тела. Очевидно, отраженные лучи в сумме дадут поток, равный потоку мощности в первичной волне, падающей на тело. Еще столько же даст рассеянное поле в области тени, так как оно просто равно по модулю первичному полю. Итого полный поток мощности рассеянного поля через любую замкнутую поверхность, окружающую тело, равен удвоенному потоку, падающему на тело. Иногда рассеяние удается рассчитать точно по волновой теории (например, для сферического препятствия) для любой длины волны, в том числе

и для волн, при которых полная тень не образуется. В предельном случае бесконечно коротких волн такой точный расчет совпадает асимптотически с приведенным выше расчетом. Противоречий с законом сохранения энергии, конечно, нет, так как позади тела энергия суммарного поля равна нулю и мощность отсюда не уносится ни первичным, ни рассеянным полем: уносят энергию только отраженные лучи, и они уносят как раз столько, сколько приносит к телу первичная волна.

К потоку частиц такой подход был бы неприменим: отсутствие частиц позади тела нельзя истолковать как результат интерференции двух одинаковых полей разного знака. Для частиц рассеяние данным телом измеряется взятым лишь один раз потоком частиц в падающей волне, перекрываемым рассеивающим телом.

Из приведенного выше рассуждения ясно, что рассеяние телом, большим по сравнению с длиной волны, зависит от ориентировки тела относительно первичной волны, но не зависит от длины волны, что находится в согласии с тем, что лучевые картины вообще не зависят от длины волны. Пока длина волны мала по сравнению со всеми характерными размерами тела, суммарный поток мощности рассеянной волны равен двойному потоку мощности первичной волны, падающему на тело.

Рассеяние волн телами, сравнимыми с длиной волны, — наиболее трудная задача. Она может быть решена только для простейших случаев: рассеяние на шаре, диске, эллипсоиде и некоторых других телах. Такие задачи, а также нахождение деталей структуры поля рассеяния большими препятствиями относятся к теории дифракции; в этой книге они не рассматриваются.

Поскольку рассеяние волн малыми препятствиями сильно зависит от соотношения между длиной волны звука и размерами препятствия, будем рассматривать только рассеяние гармонических волн. Частота гармонической волны, рассеянной на неподвижном препятствии, не меняется. Рассеяние волн с произвольной зависимостью от времени можно найти при помощи метода Фурье: путем разложения первичной волны на гармонические, нахождения рассеяния каждой гармонической компоненты в отдельности и последующего суммирования рассеянных полей всех частот. Ввиду зависимости рассеяния от длины волны спектр рассеянных волн вообще отличается от спектра первичной волны и, кроме того, может оказаться различным для разных направлений наблюдения.

В заключение этого параграфа приведем формулы доплеровского сдвига частоты рассеянного звука при движении рассеива-

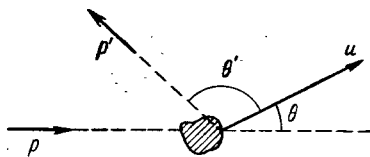


Рис. 109.2. К выводу формулы для доплеровского смещения частоты волны, рассеянной движущимся препятствием. p — направление падающей волны, p' — направление наблюдения рассеянной волны.

теля. В качестве первичного поля возьмем плоскую бегущую волну и воспользуемся гюйгенсовой картиной вторичных волн.

Обозначим через θ угол между скоростью препятствия u и первичной волной p , через θ' — угол между u и рассеянной волной p' (рис. 109.2). Тогда препятствие «принимает» волну (см. § 43), изменяя ее частоту в отношении $(1 - M \cos \theta) : 1$, и «переизлучает» волну, изменяя частоту в отношении $1 : (1 - M \cos \theta')$, где $M = u/c$ — число Маха для движения препятствия. В итоге, обозначая частоту первичной волны через ω , найдем, что частота ω' рассеянных волн различна для разных направлений наблюдения и выражается формулой

$$\omega' = \omega \frac{1 - M \cos \theta}{1 - M \cos \theta'}$$

В частности, при наблюдении в направлениях $\theta' = \pm \theta$ сдвиг частоты равен нулю.

§ 110. Малое препятствие, отличающееся от среды только сжимаемостью

Пусть на малое препятствие объема Ω с той же плотностью, что и среда, но со сжимаемостью β' , отличной от сжимаемости β среды, падает волна частоты ω . Тогда степень сжатия препятствия отличается от степени сжатия, которая была бы у элемента среды, вытесненного препятствием.

Так как препятствие мало, то можно считать, что оно находится в однородном поле давления; поэтому приращение его объема равно $-\Omega \beta' p$, где p — давление в первичной волне в месте нахождения препятствия.

Соответственное приращение для элемента среды в объеме препятствия составило бы $-\Omega \beta p$. Таким образом, препятствие создает дополнительное приращение объема, равное $U = \Omega (\beta - \beta') p$, а значит, действует подобно пульсирующему телу с объемной скоростью $V = -i\omega U = -i\omega \Omega (\beta - \beta') p$. Излучение такого монополюсного источника совпадает с полем, рассеянным препятствием.

С другой стороны, так как плотности препятствия и среды равны, то в целом препятствие движется вместе с окружающей средой, т. е. покоится относительно окружающей среды; поэтому рассеяние дипольного типа отсутствует. Мы считали, что сжатие тела происходит в статическом режиме, т. е. синфазно с давлением в первичной волне. Мы увидим, однако, что, несмотря на малость тела по сравнению с длиной волны как в среде, так и в материале препятствия, иногда деформация препятствия оказывается нестатической. Тогда придется изменить расчет (см. §§ 112, 113). В этом параграфе мы считаем, что эти исключительные условия не имеют места.

Согласно (87.4) рассеянное поле p_s равно

$$p_s = -\rho\omega^2\Omega(\beta - \beta')p \frac{e^{ikr}}{4\pi r} = -k^2\Omega \left(1 - \frac{\beta'}{\beta}\right) p \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (110.1)$$

где r — расстояние от рассеивателя до точки наблюдения. Расстояние r должно быть большим по сравнению с размерами рассеивателя. Рассеиваемую данным препятствием мощность найдем по формуле (90.4)

$$J_s = \frac{1}{8\pi\rho c} k^4\Omega^2 \left(1 - \frac{\beta'}{\beta}\right)^2 |p|^2. \quad (110.2)$$

Эта мощность оказывается пропорциональной четвертой степени волнового числа — рассеяние быстро растет с увеличением частоты зв ка. Форма и ориентировка тела относительно первичной волны оказываются, в отличие от рассеяния на большом препятствии, несущественными: рассеяние определится только давлением первичной волны, объемом тела и различием в сжимаемости тела и среды. В стоячей волне рассеяние зависит и от положения препятствия: в пучности давления рассеяние максимально, в узлах отсутствует, а в промежуточных точках принимает промежуточные значения. Мощность рассеянного излучения пропорциональна квадрату амплитуды волны в данной точке.

Эффективность, с которой данное препятствие рассеивает падающие на него волны, удобно характеризовать, сравнивая рассеиваемую мощность J_s с плотностью потока мощности $W = |p|^2/2\rho c$ в бегущей первичной волне. Отношение $\sigma = J_s/W$ этих двух величин, имеющее размерность площади, называют *сечением рассеяния* данного препятствия. Как мы видели, для тел, больших по сравнению с длиной волны, сечение рассеяния равно двойной «миделевой» площади сечения тела, перпендикулярного к направлению падения волны. В рассматриваемом случае малого препятствия получим

$$\sigma = \frac{1}{8\pi\rho c} k^4\Omega^2 \left(1 - \frac{\beta'}{\beta}\right)^2 |p|^2 : \frac{|p|^2}{2\rho c} = \frac{1}{4\pi} k^4\Omega^2 \left(1 - \frac{\beta'}{\beta}\right)^2. \quad (110.3)$$

Например, для сферы радиуса a ($ka \ll 1$)

$$\sigma = \frac{4}{9} \pi a^2 (ka)^4 \left(1 - \frac{\beta'}{\beta}\right)^2. \quad (110.4)$$

Для несжимаемой сферы ($\beta' = 0$) $\sigma = (4/9) \pi a^2 (ka)^4$.

Сечение рассеяния оказывается очень малым по сравнению с поперечным сечением πa^2 самой сферы: их отношение есть малая величина $(4/9) (ka)^4$. Соотношение такого же порядка получилось бы и для тела другой формы и при сжимаемости, не равной нулю *).

*) Важное исключение рассмотрим в § 112.

Любопытно отметить, что, например, для капли тумана диаметром 25 микрон сечение рассеяния при частоте звука 100 гц равно примерно одному барну (10^{-24} см²) — величине, характерной для сечений рассеяния при ядерных реакциях.

С другой стороны, мы видели, что при длине волны, малой по сравнению с размерами тела, сечение рассеяния имеет порядок площади сечения тела. Зависимость сечения рассеяния от длины волны обусловлена волновой природой звука: для частиц сечение рассеяния данного тела всегда совпадает с площадью его поперечного сечения. Можно привести аналогии и для других волновых движений. Так, торчащая из воды свая не рассеивает морские волны, которые как бы огибают сваю с обеих сторон. Но позади длинного волнолома вода спокойна — волны рассеиваются эффективно, так как волнолом велик по сравнению с длиной волны.

Другой пример: в лесу видно на очень небольшое расстояние — для малой длины волны света сечение рассеяния листа равно двойной его площади. Но звук в лесу слышен далеко: сечение рассеяния для относительно длинной звуковой волны — это малая доля площади листа. Еще пример: в густом тумане видно только «на расстояние вытянутой руки», но слышно так же далеко, как и в ясную погоду. Поэтому-то до изобретения радиолокации устройства для создания мощных звуковых сигналов (сирены и т. п.) были необходимой частью маячного оборудования и сохраняют свое значение еще и теперь. Да и радиолокационным волнам туман не оказывает большой помехи именно потому, что длина волны велика по сравнению с каплями тумана.

В последних замечаниях мы стали делать заключения о рассеянии звука многими малыми препятствиями, чем еще по существу не занимались. Частотная зависимость поля, рассеиваемого многими препятствиями, — та же, что и для одного препятствия. Покажем, что при хаотическом расположении препятствий суммарная рассеянная мощность равна мощности, рассеиваемой одиночным препятствием, умноженной на общее число препятствий. Здесь следует различать два случая. Если расстояния между соседними препятствиями велики по сравнению с длиной волны, то, как видно из § 97, мощности, рассеиваемые отдельными препятствиями, которые мы рассматриваем как «вторичные излучатели», просто складываются.

В случае же «микронеоднородных» сред (см. § 19) — сред, содержащих множество препятствий, расположенных на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны, — картина рассеяния совершенно другая. В самом деле, если бы препятствия располагались с постоянной концентрацией, совершенно равномерно, например в виде периодической решетки, то никакого рассеяния бы не было (хотя, как мы видели в § 19, наличие препятствий скажется на скорости звука). Это ясно хотя бы из того, что боковые спектры мелкомасштабной решетки — быстро затухающие неод-

народные волны (см. § 35). В оптике подобную ситуацию описывают так: в правильном кристалле световые волны, рассеиваемые каждой молекулой в отдельности, уничтожают друг друга всюду, кроме направления первичной волны.

Нас, однако, интересует случай хаотического расположения препятствий, когда их концентрация постоянна только в среднем. Это можно представить себе как наложение на равномерное распределение со средней концентрацией некоторой флуктуации концентрации. Рассеяние обусловлено только этой флуктуацией.

Среднеквадратичная флуктуация числа рассеивателей в объеме, заключающем в среднем N рассеивателей, равна \sqrt{N} . Если этот объем мал по сравнению с длиной волны, то все «лишние» или «недостающие» рассеиватели работают синфазно и, согласно § 97, их суммарное рассеяние по мощности равно $(\sqrt{N}p)^2 = Np^2$, где p^2 — мощность, рассеиваемая единичным препятствием. Что же касается соседних малых объемов, то, поскольку флуктуации в разных объемах независимы, мощности, рассеиваемые такими объемами, просто складываются. В итоге оказывается, что и в случае тесного (но хаотического) расположения препятствий мощность, рассеиваемая каждым из них, в среднем такая же, как и при разнесении их на большое расстояние друг от друга: в среднем каждое препятствие всегда рассеивает столько же, как если бы других препятствий вовсе не было.

Сказанное позволяет характеризовать микронеоднородную среду *удельным сечением рассеяния*, определяющим рассеивающую способность единичного объема рассеивающей среды. Именно, если в единице объема имеется n рассеивателей, характеризующихся сечением рассеяния σ , то единичному объему можно приписать удельное сечение рассеяния $n\sigma$. Бегущая волна с плотностью потока мощности W потеряет в виде рассеянных волн на единице длины пробега мощность $n\sigma W$.

Значит,

$$\frac{dW}{dx} = -n\sigma W,$$

откуда, интегрируя, найдем

$$W = W_0 e^{-n\sigma x}$$

— экспоненциальное убывание волны вследствие рассеяния на малых препятствиях.

Мы увидим в гл. XII, что поглощение звука также приводит к экспоненциальному закону убывания волны при ее распространении.

Поэтому, обнаружив на опыте, что волна убывает по мере распространения по экспоненциальному закону, еще нельзя решить, вызвано ли это затухание действием рассеяния или поглощением звуковой энергии.

§ 111. Малое препятствие, отличающееся от среды только плотностью

Степень сжатия такого препятствия та же, что и окружающей среды, поэтому оно не создает монопольного рассеяния. Но скорость препятствия отличается от скорости окружающих частиц среды: если плотность ρ' препятствия больше, чем плотность среды, то оно отстает от частиц среды, а если его плотность меньше, чем у среды, то оно обгоняет частицы. В результате препятствие движется относительно среды и поэтому создает в среде излучение дипольного типа. Это излучение и есть поле, рассеиваемое данным препятствием.

При малых размерах препятствия можно считать, что оно движется относительно среды, как в несжимаемой жидкости. Пусть скорость частиц в звуковой волне в месте расположения препятствия есть v . Можно считать, что жидкость колеблется вблизи препятствия как целое. Скорость тела обозначим через u . При неравенстве плотностей она отличается от скорости среды. Скорость движения тела относительно среды равна $u - v$. Следовательно, рассеянное поле совпадает с излучением, которое создавало бы данное тело, двигаясь в неподвижной среде со скоростью $u - v$. Поэтому, определяя силу диполя и само рассеянное поле, можем воспользоваться уравнениями (106.3) и (106.4), заменяя в них заданную скорость тела относительно среды пока неизвестной скоростью $u - v$. Переходя к тензорным обозначениям, получим силу диполя и рассеиваемое поле в виде

$$F_j = (\rho\Omega\delta_{jl} + \mu_{jl})(\dot{u}_l - \dot{v}_l), \quad (111.1)$$

$$p = -(\rho\Omega\delta_{jl} + \mu_{jl})(\dot{u}_l - \dot{v}_l) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad (111.2)$$

где μ_{jl} — тензор присоединенных масс для рассеивающего препятствия.

Для нахождения неизвестной скорости тела u_j составим уравнение движения тела. Если бы оно двигалось со скоростью окружающей среды, то сила, действующая со стороны среды, равнялась бы массе среды в объеме тела, умноженной на ускорение, т. е. $\rho\Omega\dot{v}_j$. К этому надо добавить реакцию среды, вызванную движением тела относительно среды, равную, согласно (106.1): $-\Phi_j = -\mu_{jl}(\dot{u}_l - \dot{v}_l)$. Следовательно, результирующая сила,

действующая на тело, есть $\rho\Omega\dot{v}_j - \mu_{jl}(\dot{u}_l - \dot{v}_l)$, и уравнение движения препятствия можно записать так:

$$\mu_{ij} = \rho\Omega\dot{v}_j - \mu_{jl}(\dot{u}_l - \dot{v}_l),$$

где $\mu = \rho'\Omega$ — масса препятствия. Пользуясь тождеством $u_j = \delta_{jl}u_l$, запишем уравнение движения в более симметричном

виде:

$$(\mu\delta_{jl} + \mu_{jl})\dot{u}_l = (\rho\Omega\delta_{jl} + \mu_{jl})v_l. \quad (111.3)$$

Отсюда найдем, интегрируя по времени, такое же соотношение между скоростями тела и среды:

$$(\mu\delta_{jl} + \mu_{jl})u_l = (\rho\Omega\delta_{jl} + \mu_{jl})v_l. \quad (111.4)$$

Решим эти уравнения относительно неизвестных компонент скорости тела. Умножая обе части уравнения (111.4) на тензор $n_{j\alpha}$, определенный формулой (106.5), получим

$$u_\alpha = (\rho\Omega\delta_{jl} + \mu_{jl})n_{j\alpha}v_l. \quad (111.5)$$

Таким образом, компоненты скорости тела — линейные однородные функции от компонент скорости частиц среды в месте нахождения препятствия, причем коэффициенты — вещественные числа. Следовательно при прямолинейных траекториях частиц среды (например, в однородной плоской волне) тело также будет колебаться по прямой.

Скорость тела относительно среды найдем, вычитая из (111.5) тождество $v_\alpha = (\mu\delta_{jl} + \mu_{jl})n_{j\alpha}v_l$. Это дает

$$u_\alpha - v_\alpha = (\rho\Omega - \mu)n_{\alpha l}v_l. \quad (111.6)$$

Направление колебаний тела и направление силы диполя рассеяния различны. Эти направления совпадают только для трех взаимно перпендикулярных направлений падения волны — направлений главных осей тензора присоединенных масс. Выбирая оси координат параллельными этим направлениям, получим из (111.5)

$$u_1 = \frac{\rho\Omega + \mu_1}{\mu + \mu_1} v_1, \quad u_2 = \frac{\rho\Omega + \mu_2}{\mu + \mu_2} v_2, \quad u_3 = \frac{\rho\Omega + \mu_3}{\mu + \mu_3} v_3. \quad (111.7)$$

Здесь μ_1, μ_2, μ_3 — значения компонент μ_{jl} для главных осей.

Амплитуда колебаний тем больше, чем меньше собственная масса рассеивающего тела. Для тела в виде тонкой пустой оболочки его собственной массой можно пренебречь по сравнению с присоединенными массами; тогда формулы (111.7) перейдут в такие:

$$u_1 = \frac{\rho\Omega + \mu_1}{\mu_1} v_1, \quad u_2 = \frac{\rho\Omega + \mu_2}{\mu_2} v_2, \quad u_3 = \frac{\rho\Omega + \mu_3}{\mu_3} v_3. \quad (111.8)$$

В этом случае скорость колебаний тела всегда больше скорости частиц среды и особенно велика для тех главных направлений, в которых компонента тензора присоединенных масс мала. Поэтому амплитуды колебаний могут сильно различаться при различных направлениях падения волны на тело, особенно при сильной сплюснутости («тарелка») или вытянутости («игла»). Скорость велика при падении волны вдоль иглы или в плоскости тарелки и мала (примерно равна скорости среды) при падении перпендикулярно к игле или плоскости тарелки. Для рассмотренного в § 106 безмассового эллипсоида вращения с отношением осей

10 : 1 скорость колебаний при падении волны вдоль большой оси будет превосходить скорость частиц среды в 48,6 раза, а при падении вдоль малой оси — в 2,04 раза.

Тело, отличающееся по плотности от среды и малое по сравнению с длиной волны звука, может быть использовано как направленный приемник звука. В самом деле, установив в теле каково-либо устройство, регистрирующее компоненту скорости колебаний (или смещения) тела в каком-либо направлении, связанном с телом, получим различные показания устройства при падении волны звука с разных направлений. Таким устройством может, например, быть грузик на пружинке, скользящий по направляющей, укрепленной внутри тела. Легко видеть, что такое устройство имеет дипольную характеристику направленности. В самом деле, формула (111.5) показывает, что компонента скорости u_α , соответствующая оси x_α , которую расположим вдоль направляющей, есть скалярное произведение вектора скорости среды v_i на вектор $(\rho\Omega\delta_{ji} + \mu_{ji}) n_{j\alpha}$, не зависящий от направления падения волны. Значит, действительно, характеристика устройства косинусообразная при любом расположении направляющей.

Ось характеристики направленности вообще не совпадает с направляющей. Совпадение будет только для направляющей, расположенной вдоль одного из главных направлений тензора присоединенных масс. Так как амплитуда колебаний тела по разным направлениям различна, то различной окажется и чувствительность такого приемника звука при разных расположениях направляющей. При $\mu < \rho\Omega$ чувствительность максимальна при расположении направляющей вдоль оси наименьшей главной компоненты тензора присоединенных масс; при $\mu > \rho\Omega$ чувствительность максимальна для оси наибольшей главной компоненты.

Вернемся к формуле для силы диполя. Пользуясь (111.3) и (111.5), получим из (111.1)

$$F_j = (\rho\Omega - \mu)(\rho\Omega\delta_{jl} + \mu_{jl})n_{l\alpha}\dot{v}_\alpha. \quad (111.9)$$

Для случая падения волны вдоль одной из главных осей найдем

$$F_1 = (\rho\Omega - \mu)\frac{\rho\Omega + \mu_1}{\mu + \mu_1}\dot{v}_1, \quad F_2 = (\rho\Omega - \mu)\frac{\rho\Omega + \mu_2}{\mu + \mu_2}\dot{v}_2, \\ F_3 = (\rho\Omega - \mu)\frac{\rho\Omega + \mu_3}{\mu + \mu_3}\dot{v}_3. \quad (111.10)$$

Рассеянное поле для падения вдоль оси x_1 равно

$$p = -(\rho\Omega - \mu)\frac{\rho\Omega + \mu_1}{\mu + \mu_1}\dot{v}_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (111.11)$$

и аналогично для направлений x_2 и x_3 .

Интересно рассмотреть два крайних случая: масса рассеивающего тела равна нулю и масса тела равна бесконечности (закреп-

ленное тело или тело «бесконечной массы»). Для безмассового тела сила диполя равна

$$F_1^{(0)} = (\rho\Omega + \mu_1) \frac{\rho\Omega}{\mu_1} \dot{v}_1. \quad (111.12)$$

Для закрепленного тела сила диполя равна

$$F_1^{(\infty)} = -(\rho\Omega + \mu_1) \dot{v}_1. \quad (111.13)$$

Для безмассового тела наибольшая сила диполя получается в направлении наименьшей из главных компонент тензора присоединенных масс; для закрепленного тела — в направлении наибольшей компоненты. Отношение сил диполя при падении звука вдоль главной оси на безмассовое и на такое же по форме закрепленное тело равно $\rho\Omega/\mu_1$. Для удлиненного в направлении падения волны тела («игла») безмассовое тело даст большее рассеяние, а для сплюсненного в направлении падения тела («тарелка») большее рассеяние даст закрепленное тело. Для сферического тела $\mu_1 = (1/2) \rho\Omega$; следовательно, амплитуда дипольного рассеяния, создаваемого безмассовой сферой (газовый пузырек в жидкости), по амплитуде вдвое больше, чем для закрепленной сферы, а мощность рассеяния больше в 4 раза.

Если плотность тела мало отличается от плотности среды, то можно положить $\mu = (\rho + \Delta\rho) \Omega$, где $\Delta\rho/\rho \ll 1$. Тогда из (111.10) получим приближенно силу диполя в виде

$$F_j = -\Delta\rho\Omega\dot{v}_j. \quad (111.14)$$

В этом случае и направление колебаний тела, и ось диполя рассеяния приближенно совпадают с направлением падения волны. Сила диполя, а значит, и рассеяние определяются только объемом препятствия и различием плотностей тела и среды, а форма тела и его ориентировка относительно падающей волны роли не играют*). Случай малого различия плотностей находит применение в важной задаче о рассеянии звука в слабо неоднородной по плотности среде (см. § 114).

Чтобы найти выражение для рассеиваемой мощности, отнесем движение к главным осям и подставим в формулу (104.2) выражения для $F_{1, 2, 3}$ из (111.10)

$$J_s = \frac{\omega^2}{24\pi\rho c} k^2 (\rho\Omega - \mu)^2 \left[\left(\frac{\rho\Omega + \mu_1}{\mu + \mu_1} \right)^2 v_1^2 + \left(\frac{\rho\Omega + \mu_2}{\mu + \mu_2} \right)^2 v_2^2 + \left(\frac{\rho\Omega + \mu_3}{\mu + \mu_3} \right)^2 v_3^2 \right].$$

*) Однако, как видно из (111.6), скорость тела относительно жидкости при этом вообще не совпадает с направлением падения волны.

Для сферы радиуса a получим

$$J = \frac{\omega^2}{24\pi\rho c} k^2 (\rho\Omega - \mu)^2 \left[\frac{(3/2)\rho\Omega}{\mu + (1/2)\rho\Omega} \right]^2 v^2.$$

Так, безмассовая сфера (например, газовый пузырек в воде) создает дипольное рассеяние мощностью

$$J^{(0)} = \frac{3}{8\pi\rho c} \omega^2 k^2 (\rho\Omega)^2 v^2 = \frac{2}{3} \pi a^2 \rho c (ka)^4 v^2.$$

Для закрепленной сферы

$$J^{(\infty)} = \frac{3}{32\pi\rho c} \omega^2 k^2 (\rho\Omega)^2 v^2 = \frac{1}{6} \rho c \pi a^2 (ka)^4 v^2.$$

Дипольное рассеяние на пузырьке оказывается в 4 раза больше, чем для закрепленной сферы. Соответственные сечения рассеяния (падающую мощность берем в виде $1/2\rho c v^2$) для этих двух случаев составляют $(4/3)\pi a^2 (ka)^4$ и $(1/3)\pi a^2 (ka)^4$, что по порядку величины совпадает с сечением для монопольного рассеяния на несжимаемой сфере.

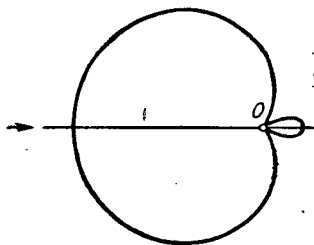


Рис. 111.1. Характеристика рассеяния малой жесткой и неподвижной сферы (первичная волна падает слева).

Вообще произвольный рассеиватель дает одновременно и монопольное, и дипольное рассеяние. Сечения рассеяния для обоих типов аддитивны вследствие ортогональности полей монопольного и дипольного типа p_1 и p_2 . В самом деле, характеристика направленности монополя сферически-симметрична, а характеристика диполя меняет знак

при перемене направления на обратное. Поэтому в симметричных относительно рассеивателя точках давления в рассеянном поле будут соответственно $p_1 + p_2$ и $p_1 - p_2$. В выражения для потоков мощности члены с произведением давлений войдут с разными знаками и в сумме уничтожатся, так что останутся только квадраты давлений, отвечающие обоим типам рассеяния в отдельности. В частности, для несжимаемой закрепленной сферы найдем:

$$\sigma = \frac{4}{9} \pi a^2 (ka)^4 + \frac{1}{3} \pi a^2 (ka)^4 = \frac{7}{9} \pi a^2 (ka)^4.$$

Соответственная характеристика направленности рассеяния для бегущей первичной волны получится как суперпозиция характеристик для несжимаемой сферы, имеющей плотность среды, и бесконечно тяжелой сферы, имеющей сжимаемость среды. Рас-

сеянные поля, согласно (110.1) и (111.11), равны соответственно (вдали от рассеивателя)

$$\rho_1 = -k^2 \Omega \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \rho, \quad \rho_2 = \frac{3}{2} k^2 \Omega \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \rho \cos \theta.$$

Складывая поля и нормируя полученный результат к единичному значению максимальной амплитуды, получим характеристику направленности по давлению в виде

$$\Theta(\theta) = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cos \theta,$$

где угол θ отсчитывается от направления падения волны. На рис. 111.1 дано сечение этой характеристики плоскостью, проходящей через направление падения волны. Наибольшее рассеяние создается в направлении навстречу падающей волне. Нули характеристики направленности соответствуют углу $\theta = \arccos(2/3)$, т. е. $\theta = \pm 48^\circ 10'$.

§ 112. Рассеяние звука пузырьком газа в жидкости

Среди малых препятствий газовый пузырек в жидкости замечателен своей высокой эффективностью рассеяния монопольного типа: пузырек всегда рассеивает много больше, чем абсолютно жесткое препятствие того же размера. Начиная с некоторой частоты, сечение рассеяния пузырька превосходит его поперечное сечение, а вблизи резонансной частоты сферически-симметричных пульсаций длузырка в воде сечение рассеяния превосходит его поперечное сечение в тысячи раз.

В § 89 мы нашли собственные колебания пузырька, в частности его резонансную частоту $\omega_0 = \sqrt{3P\gamma/\rho a^2}$. Теперь найдем вынужденные колебания пузырька под действием падающей на него звуковой волны; это позволит найти рассеиваемую им волну.

Пузырек — препятствие, имеющее и другую плотность, и другую сжимаемость, чем среда. Поэтому он создает и дипольное рассеяние, вызываемое его поступательными колебаниями как целого относительно жидкости, и монопольное рассеяние, вызываемое пульсациями. Мы видели в § 111, что поле дипольного рассеяния пузырька всего вдвое больше, чем рассеяние от неподвижной жесткой сферы, а рассеянная энергия всего четверо больше, так что сечение рассеяния для дипольного рассеяния составляет всего $(4/3) \pi a^2 (ka)^4$, т. е. по-прежнему очень мало по сравнению с поперечным сечением препятствия. Другая картина получается для монопольного рассеяния. Здесь придется провести более подробное исследование.

Начнем со-случая частот, много меньших резонансной частоты пузырька. При таких частотах можно считать, что осциллятор, которому мы уподобили пузырек, находится в квазистатическом режиме. Сжимаемость пузырька — это просто сжимаемость газа

В пузырьке, и для расчета рассеяния достаточно подставить эту величину в формулы § 110. Так, при адиабатическом колебании, когда теплообмен между газом и окружающей жидкостью не успевает произойти, сжимаемость газа равна $\beta' = 1/P\gamma$ и в формуле (110.4) можно пренебрегать единицей по сравнению с отношением сжимаемостей β'/β . Таким образом, в области низких частот сечение рассеяния пузырька можно положить приближенно равным

$$\sigma = \frac{4}{9} \pi a^2 (ka)^4 \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2. \quad (112.1)$$

Хотя частотная зависимость получилась такой же, как и для рассеяния на несжимаемом препятствии, абсолютная величина рассеяния выросла в огромной степени: в отношении квадратов сжимаемостей газа и жидкости. Для воздушного пузырька в воде это составляет около восьми порядков!

Пользуясь соотношениями $\beta = 1/\rho c^2$ и $\beta' = 3/\rho a^2 \omega_0^2$, получим следующее выражение для поперечного сечения рассеяния:

$$\sigma = 4\pi a^2 (\omega/\omega_0)^4. \quad (112.2)$$

Этой формулой можно пользоваться, пока величина ω/ω_0 мала по сравнению с единицей. Ошибка в расчете не превысит примерно 10%, если $\omega/\omega_0 < 1/3$. При повышении частоты и приближении ее к резонансной, а также при дальнейшем увеличении частоты формулой (112.2) пользоваться уже нельзя: хотя газ в пузырьке по-прежнему будет сжиматься и расширяться квазистатически, сжимаемость пузырька не будет равна сжимаемости содержащегося в нем газа, так как пузырек в целом как осциллятор уже не будет находиться в статическом режиме. Даже по фазе сжатие пузырька перестанет совпадать с давлением в падающей волне. Можно было бы все же воспользоваться той же формулой (112.1) для расчета рассеяния, найдя специально *эффективную сжимаемость* пузырька на любой частоте (это была бы вообще комплексная величина). Но проще решить общую задачу о рассеянии с самого начала, задаваясь первичной волной и отыскивая объемную скорость пузырька из граничных условий на его поверхности все в том же предположении о малости радиуса пузырька по сравнению с длиной волны в газе, заполняющем пузырек. Перейдем к такому расчету.

Пусть пузырек находится в поле гармонической первичной волны с единичной амплитудой давления. Волна, излучаемая пульсациями пузырька, вызванными действием этой волны, и будет искомой рассеянной волной. Ее можно записать в виде

$$p_s = -i\rho\omega V \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad)$$

где неизвестная объемная скорость определится из граничного условия, которое можно сформулировать как требование равен-

ства сопротивлений на границе внутри и снаружи пузырька. Сопротивление внутри пузырька найдем из формул § 89:

$$\frac{p}{v} \Big|_{r=a} = \frac{-3u/a\beta'}{-i\omega u} = -i \frac{3}{\omega a \beta'}$$

Давление снаружи пузырька на его поверхности равно сумме давлений в падающей и рассеянной волне, т. е.

$$p = 1 + p_s = 1 - i\omega\rho \frac{V e^{ika}}{4\pi a}$$

(изменением поля падающей волны вдоль диаметра пузырька можно пренебречь). Радиальная скорость пульсаций пузырька равна $v = V/4\pi a^2$ (радиальной скоростью, вызванной падающей волной, можно также пренебречь). Таким образом, сопротивление на границе пузырька снаружи его равно

$$\frac{p}{v} \Big|_{r=a} = \frac{1 - i\omega\rho V e^{ika}/4\pi a}{V/4\pi a^2}$$

Приравнивая оба выражения для сопротивления, полагая приближенно $e^{ika} = 1 + ika$ и делая простые преобразования, получим

$$V = i \frac{4\pi a \omega \rho}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega^2 ka} \quad (112.3)$$

Для объемной скорости получилось выражение, аналогичное резонансной формуле для осциллятора с добротностью $Q = 1/ka$. При амплитуде падающей волны, равной p_0 , величину объемной скорости будет достаточно умножить на p_0 .

Теперь мы можем исследовать законы рассеяния звука пузырьком при любых соотношениях между частотой падающего звука и собственной частотой пузырька, пока сохраняется условие малости радиуса пузырька по сравнению с длиной волны в газе. При выполнении этого требования газ в пузырьке сжат равномерно, квазистатически.

Как и для всякого осциллятора, существенно различными оказываются три области частот: область низких частот ($\omega \ll \omega_0$), резонансная область ($\omega \approx \omega_0$) и область высоких частот ($\omega \gg \omega_0$).

В низкочастотной области осциллятор управляется упругостью: присоединенной массой можно пренебречь. Это значит, что в формуле (112.3) в знаменателе можно пренебречь всеми членами, кроме первого. Это даст для объемной скорости величину $V = i4\pi a \omega / \rho \omega_0^2$ и для сечения рассеяния то же значение (112.2), которое мы уже получили выше из других соображений.

В другом предельном случае — случае высоких частот, когда осциллятор управляется массой (присоединенной), а упругостью можно пренебречь, — можно опустить в знаменателе все члены,

кроме второго. Это даст для объемной скорости величину $V = -i4\pi a/\rho\omega$ и для сечения рассеяния

$$\sigma = 4\pi a^2 \quad (112.4)$$

— величину, от частоты не зависящую и вчетверо превосходящую площадь поперечного сечения пузырька. По отношению к несжимаемому препятствию сечение рассеяния оказывается увеличенным в $9/(ka)^4$ раз. То же значение поперечного сечения рассеяния мы получили бы для вакуумной сферической полости в жидкости (при любой частоте). Подобные полости образуются при кавитации: они лишены воздуха и давление в них не превосходит малой величины давления насыщающих паров жидкости.

Рассмотрим, наконец, резонансную область частот, когда ω близко к ω_0 . При точном резонансе ($\omega = \omega_0$, $k = k_0 = \omega_0/c$) движение пузырька управляется только потерями энергии на излучение при колебаниях. В знаменателе (112.3) остается только последний член. Это дает $V = 4\pi/\rho\omega k$, откуда

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} = \frac{\lambda^2}{\pi}, \quad (112.5)$$

т. е. площадь круга радиуса λ/π . Это сечение больше поперечного сечения пузырька в $4/(ka)^2$ раз. Например, для резонансных пузырьков, находящихся в воде при атмосферном давлении (неглубоко под поверхностью воды), имеем: $\sigma = 20\,000 \cdot \pi a^2$. По отношению к сечению рассеяния несжимаемой сферы получается увеличение в $9/(ka)^6$ раз. Для воздушного пузырька вблизи свободной поверхности воды это означает увеличение сечения рассеяния на 12 порядков. Отношение амплитуд давлений в резонансном пузырьке и в первичной волне равно $Q = 1/ka$; для пузырька вблизи поверхности $Q \approx 71$. Для плоской первичной волны соответственное отношение скорости поверхности пузырька и скорости частиц в падающей волне равно Q^2 ; это дает для такого же пузырька величину ~ 5000 .

Приведенный расчет показывает, что наличие даже небольшого числа резонансных пузырьков на пути звуковой волны в воде должно приводить к значительному рассеянию звука. По мере «расстройки» пузырьков, т. е. при расхождении частоты падающей волны с резонансной частотой пузырька, эффективность пузырьков как рассеивателей быстро убывает. Полуширина резонансной кривой равна $\Delta\omega/\omega_0 = 1/2k_0a$. Для пузырька вблизи поверхности воды это дает примерно $\Delta\omega/\omega_0 = 0,007$. При такой расстройке рассеяние уменьшается по энергии вдвое по сравнению со случаем точного совпадения частот.

Из сказанного вытекает, что если в воде (например, в море) имеются пузырьки различных размеров, то наблюдаемое на данной частоте $f = \omega/2\pi$ рассеяние практически полностью будет определяться пузырьками «резонансного размера», т. е. пузырьками радиуса $a \approx 327/f$ (для пузырьков вблизи поверхности воды).

Пузырьки в море наблюдаются в ряде случаев: вблизи поверхности, куда они попадают при волнении вследствие обрушивания гребней волн, в глубине моря («глубоководные рассеивающие слои»), где они выделяются микроорганизмами. Наконец, плавательные пузыри рыб, расположенные в мягких тканях рыбы, также ведут себя как пузырьки в воде. На этом обстоятельстве основан один из методов поиска рыб: посылая в глубину моря короткий звуковой импульс в виде отрезка синусоиды и наблюдая вернувшийся отраженный импульс, рыбопоисковое судно, снабженное гидролокатором, может обнаружить скопление рыб с плавательным пузырем определенного размера.

Следует иметь в виду, что рассчитанная нами рассеивающая способность резонансных пузырьков сильно завышена, так как при расчете не были учтены потери механической энергии при колебаниях пузырька, всегда имеющиеся помимо излучения. Потери приводят к уменьшению резонансной амплитуды, а значит, и к уменьшению рассеяния. Как уже было сказано в § 89, имеют значение теплопроводность и другие факторы. Теплообмен, как и все остальные источники потерь механической энергии, приводит к добавлению соответственного мнимого слагаемого в знаменатель выражения для объемной скорости. Это слагаемое, как и слагаемое, соответствующее излучению, играет заметную роль вблизи резонансной частоты, т. е. как раз в условиях большого рассеяния. В результате оказывается, что на практике рассеяние резонансными пузырьками велико, но не столь велико, как можно было бы ожидать, если не учитывать, помимо рассеяния, необратимых потерь механической энергии.

Зато оказывается, что резонансные пузырьки не только рассеивают, но и поглощают энергию падающего звука, и вследствие большой амплитуды колебаний делают это довольно активно. Такого поглощения, например, достаточно, чтобы лишить звона звук чоканья бокалами, налитыми газированной водой или шампанским. В этом случае проявляется именно роль пузырьков как поглотителей звука, потому что без поглощения, при одном только рассеянии, акустическая энергия все равно оставалась бы в бокале, не уменьшаясь, и звон бы не ослабевал.

Влияние поглощения на рассеяние и подсчет самого поглощения удобно рассмотреть, исходя из баланса энергии пузырька как осциллятора с одной степенью свободы, колеблющегося в вынуждающем поле первичной волны. Уравнение баланса энергии позволяет найти другим способом и резонансную объемную скорость, и сечение рассеяния пузырька в отсутствие потерь, которое будем теперь обозначать σ_0 . В самом деле, пусть пузырек колеблется в установившемся режиме на своей резонансной частоте. Как известно, при вынужденных резонансных колебаниях скорость осциллятора находится в фазе с вынуждающей силой. За обобщенную скорость осциллятора примем объемную скорость пузырька; тогда обобщенной вынуждающей силой будет давле-

ние p_0 в первичной волне. Так как сила и скорость при резонансе синфазны, то среднее значение работы силы за период равно половине произведения амплитуд силы и скорости: $(1/2) p_0 V$.

С другой стороны, при установившихся колебаниях средняя энергия колебаний остается неизменной; следовательно, если потерь механической энергии нет, то пузырек должен всю эту получаемую от первичного поля энергию растрчивать на излучение, т. е. переводить ее в рассеянную волну. Но энергия, излучаемая пульсирующим источником с данной объемной скоростью V , равна $\frac{1}{8\pi} \rho c k^2 V^2$. Баланс энергии выразится так:

$$\frac{1}{2} p_0 V = \frac{1}{8\pi} \rho c k^2 V^2, \quad (112.6)$$

откуда находим объемную скорость:

$$V = \frac{4\pi}{\rho \omega k} p_0 = \frac{\rho_0}{\rho c} \sigma_0, \quad (112.7)$$

что совпадает со значением объемной скорости при резонансе, полученным ранее прямым расчетом амплитуды вынужденных колебаний пузырька. Эта объемная скорость и дает сечение рассеяния $\sigma_0 = 4\pi/k^2$.

Учтем теперь, помимо излучения, необратимые потери энергии, вызываемые силами, пропорциональными скорости; таковы, например, потери вследствие вязкости и теплопроводности. Тогда баланс энергии будет выглядеть по-другому: механическая энергия, получаемая пузырьком от первичного поля, будет частично затрачиваться на излучение, а частично теряться необратимо. Если обозначить обобщенный коэффициент трения через η , то уравнение баланса энергии (112.6) примет вид

$$\frac{1}{2} p_0 V = \frac{1}{8\pi} \rho c k^2 V^2 + \frac{1}{2} \eta V, \quad (112.8)$$

где первый член дает излученную, а второй — поглощенную энергию. Отсюда найдем объемную скорость пузырька:

$$V = \frac{\rho_0}{(\rho \omega k / 4\pi) + \eta} = \frac{\rho_0 / \rho c}{(1/\sigma_0) + (\eta / \rho c)}. \quad (112.9)$$

Введем вспомогательную величину: «сечение поглощения в отсутствие рассеяния» σ_1 , равную отношению мощности, расходуемой на трение при резонансном колебании в несжимаемой жидкости при давлении p_0 , к плотности потока энергии в плоской волне, бегущей с той же амплитудой давления p_0 в исходной среде. В несжимаемой среде амплитуда объемной скорости, согласно (112.9), равна в этом случае p_0/η . Следовательно, поглощаемая мощность равна $(1/2) p_0^2/\eta$. Значит,

$$\sigma_1 = \rho c / \eta. \quad (112.10)$$

Подставляя в (112.9), найдем отсюда

$$V = \frac{p_0}{\rho c} \frac{1}{(1/\sigma_0) + (1/\sigma_1)}.$$

Теперь легко найти и величины мощностей рассеяния и поглощения пузырьком:

$$J_{\text{расс}} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho c} \frac{1/\sigma_0}{[(1/\sigma_0) + (1/\sigma_1)]^2},$$

$$J_{\text{погл}} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho c} \frac{1/\sigma_1}{[(1/\sigma_0) + (1/\sigma_1)]^2}.$$

Следовательно, сечения рассеяния $\sigma_{\text{расс}}$ и поглощения $\sigma_{\text{погл}}$ равны

$$\sigma_{\text{расс}} = \frac{1/\sigma_0}{[(1/\sigma_0) + (1/\sigma_1)]^2}, \quad (112.11)$$

$$\sigma_{\text{погл}} = \frac{1/\sigma_1}{[(1/\sigma_0) + (1/\sigma_1)]^2}. \quad (112.12)$$

Суммарное сечение рассеяния и поглощения равно

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{полн}} &= \sigma_{\text{расс}} + \sigma_{\text{погл}} = \\ &= \frac{1}{(1/\sigma_0) + (1/\sigma_1)} \end{aligned}$$

или, иначе,

$$\frac{1}{\sigma_{\text{полн}}} = \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_1}. \quad (112.13)$$

Таким образом, при наличии поглощения складываются величины, обратные сечениям рассеяния в отсутствие потерь и поглощения в отсутствие рассеяния («параллельное» сложение).

Появление необратимых потерь при колебаниях пузырька всегда уменьшает полное сечение, т. е. уменьшает полную мощность, забираемую пузырьком из первичной волны. На рис. 112.1 показана зависимость относительных значений $\sigma_{\text{расс}}/\sigma_0$, $\sigma_{\text{погл}}/\sigma_0$ и $\sigma_{\text{полн}}/\sigma_0$ от приведенного коэффициента трения (от величины $\sigma_0/\sigma_1 = 4\pi\eta/\rho\omega k$).

При увеличении коэффициента трения сечение рассеяния убывает монотонно от максимального значения σ_0 при $\eta = 0$ до нуля при $\eta = \infty$. Сечение поглощения при этом сначала растет (от нуля при $\eta = 0$), достигает максимума, а затем снова стремится к нулю при $\eta \rightarrow \infty$. Максимум достигается при равенстве поглощенной и рассеянной мощностей. При этом равны и сечения рассеяния и

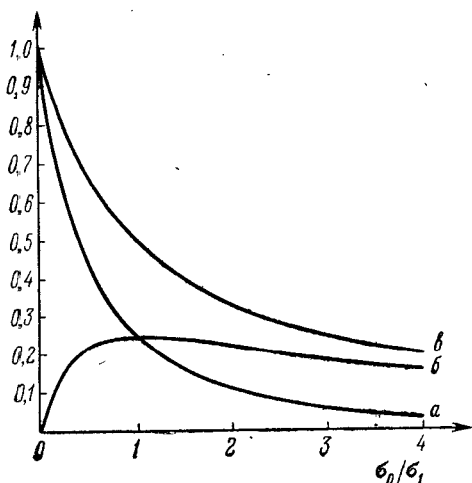


Рис. 112.1. Безразмерные графики зависимости от коэффициента трения: *a* — относительного сечения рассеяния $\sigma_{\text{расс}}/\sigma_0$; *б* — относительного сечения поглощения $\sigma_{\text{погл}}/\sigma_0$; *в* — относительного полного сечения $\sigma_{\text{полн}}/\sigma_0$ для резонансного пузырька.

поглощения: $\sigma_{\text{расс}} = \sigma_{\text{погл}} = \sigma_0/4 = \sigma_1/4$. Требуемый коэффициент трения составляет при этом $\eta = \rho c k^2/4\pi$. Суммарная мощность, забираемая от первичной волны при максимальном поглощении энергии, равна половине мощности, рассеиваемой резонансным пузырьком в отсутствие трения; половина забираемой мощности поглощается пузырьком и половина рассеивается.

Приведем еще некоторые формулы, связывающие сечения рассеяния и поглощения с величинами σ_0 и σ_1 :

$$\sigma_{\text{полн}}^2 = \sigma_0 \sigma_{\text{расс}} = \sigma_1 \sigma_{\text{погл}},$$

откуда

$$\sigma_{\text{расс}} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_{\text{погл}}} - \sigma_{\text{погл}}; \quad \sigma_{\text{погл}} = \sqrt{\sigma_0 \sigma_{\text{расс}}} - \sigma_{\text{расс}}.$$

Если в отдельности измерено либо сечение рассеяния резонансного пузырька, либо сечение поглощения, то вторую из этих величин можно найти по этим формулам.

Полное сечение выражается через σ_0 и $\sigma_{\text{погл}}$ или через σ_1 и $\sigma_{\text{расс}}$ формулами

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{1}{2} \sigma_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{\sigma_{\text{погл}}}{\sigma_0}} \right) = \frac{1}{2} \sigma_1 \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{\sigma_{\text{расс}}}{\sigma_1}} \right).$$

§ 113. Резонатор Гельмгольца. Рассеяние звука резонатором Гельмгольца

Низкая частота колебаний пузырька в жидкости обусловлена тем, что в колебаниях участвуют две среды с резко различными свойствами: эффективная масса осциллятора (присоединенная масса жидкости) велика благодаря большой плотности жидкости; эффективная упругость осциллятора (упругость газового объема) мала. Оказывается, что то же свойство низкочастотности колебаний малого объема можно получить и в одной среде, создавая устройство, в котором эффективная масса велика, несмотря на малую фактическую массу колеблющегося участка среды. Подобное устройство (*резонатор Гельмгольца*) состоит из сосуда, снабженного горлышком — узким отростком или отверстием, через которое сосуд сообщается с окружающей средой. При перемещении среды, заполняющей горлышко, в одну и в другую сторону среда в сосуде испытывает сжатия и разрежения, и давление в ней изменяется. На открытом же конце горлышка давление все время остается неизменным (атмосферным — для резонатора Гельмгольца в воздухе). Разность давлений на концах горлышка ускоряет массу среды в горлышке. Ввиду узости горлышка скорость движения среды в нем велика по сравнению со скоростью среды внутри сосуда, так что кинетическая энергия сосредоточена в горлышке, несмотря на то, что фактическая масса среды в горлышке много меньше массы среды в сосуде. Упругая же энергия окажется сосредоточенной в среде внутри сосуда.

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергия локализируются в разных телах: в среде в горлышке и в среде в сосуде. Значит, резонатор Гельмгольца можно считать, как и пузырек, осциллятором с сосредоточенными параметрами.

Рассчитаем собственную частоту такого резонатора. Если длина горлышка много больше его поперечника, то среда в горлышке движется как целое, и можно принять за обобщенную координату смещение u частиц в горлышке наружу. Обобщенной массой будет масса среды, заполняющая горлышко:

$$m = SL\rho, \quad (113.1)$$

где S — площадь сечения горлышка, L — его длина, а ρ — плотность среды. Степень сжатия среды в сосуде, соответствующая смещению u , есть $-Su/\Omega$, где Ω — объем сосуда. Значит, давление, возникающее в сосуде, равно $p = -Su/\beta\Omega$, где β — сжимаемость среды. Таким образом, обобщенная сила, действующая на обобщенную массу, равна

$$F = pS = -S^2u/\beta\Omega,$$

откуда находим обобщенный коэффициент упругости осциллятора в виде

$$\kappa = -\frac{F}{u} = \frac{S^2}{\beta\Omega}.$$

Искомая резонансная частота колебаний равна

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{m} = \frac{S}{\rho\beta L\Omega}. \quad (113.2)$$

Отсюда получим, в частности, имея в виду соотношение $k^2 = \rho\beta\omega^2$:

$$(k_0L)^2 = \frac{SL}{\Omega} = \frac{\text{объем горлышка}}{\text{объем сосуда}}. \quad (113.3)$$

Это равенство показывает, что длина волны на резонансной частоте не зависит от среды, заполняющей резонатор Гельмгольца, а только от его геометрических характеристик; отсюда следует, что резонансные частоты относятся как скорости звука в заполняющих средах.

Если вместо горлышка в стенке сосуда просто имеется малое отверстие, то скорость частиц в отверстии также будет повышена по сравнению со скоростью частиц в сосуде, так что можно считать, что кинетическая энергия сосредоточена в среде вблизи отверстия. Но движение среды в отверстии сложнее, чем движение в длинном горлышке: скорость имеет компоненту, как перпендикулярную к плоскости отверстия, так и параллельную, и меняется также в обоих этих направлениях.

Примем за обобщенную координату среднее смещение среды в плоскости отверстия. Обобщенная масса равна отношению удвоенной кинетической энергии среды вблизи отверстия к квадрату средней скорости среды в отверстии. При таком расчете среду можно считать несжимаемой, поскольку при низкой частоте собственных колебаний резонатора размеры отверстия малы по сравнению с длиной волны звука. Скорость среды быстро убывает при удалении от отверстия. Поэтому, если на протяжении, в несколько раз превышающем поперечник отверстия, стенка сосуда мало уклоняется от плоскости, то можно считать, что отверстие находится в плоском бесконечном экране. Если, кроме того, толщина стенки мала по сравнению с поперечными размерами отверстия, то ее можно считать бесконечно тонкой. Гидродинамический расчет, который здесь опускаем, дает значение эффективной массы, вычисленное при выполнении указанных условий для круглого отверстия:

$$m = \frac{1}{2} \pi^2 \rho a^3, \quad (113.4)$$

где a — радиус отверстия. Через площадь отверстия $S = \pi a^2$ эта масса выражается так:

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \rho S^{3/2}. \quad (113.5)$$

Вообще эффективная «масса отверстия» зависит не только от его площади, но и от формы. Однако пока форма отверстия мало отличается от круговой, последняя формула дает хорошее приближение. Так, расчет показывает, что эффективная масса эллиптического отверстия с отношением осей 2 : 1 всего на 3% меньше, чем для круглого отверстия той же площади. Сравнивая (113.5) с (113.1), видим, что «эффективная длина» для отверстия равна $L_{\text{эфф}} = 1/2 \sqrt{\pi S}$ (для круглого отверстия $L_{\text{эфф}} = 1/2 \pi a$). Подставляя в (113.2), найдем формулу для собственной частоты резонатора с отверстием:

$$\omega_0^2 = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{\pi} \rho \beta \Omega}. \quad (113.6)$$

Для круглого отверстия получается

$$\omega_0^2 = \frac{2a}{\rho \beta \Omega}. \quad (113.7)$$

Отметим, что для резонатора с фактической длиной горлышка, равной $(1/2) \sqrt{\pi S}$, формула (113.6) неприменима: длина горлышка не превосходит во много раз его поперечных размеров и влияние движения среды вблизи концов горлышка внесет заметную «концевую» поправку.

Свободные собственные колебания резонатора Гельмгольца затухают, потому что устье горлышка по отношению к внешней среде является источником объемной скорости: эта объемная скорость создаст излучение монопольного типа, в результате которого энергия резонатора будет постепенно «высвечиваться». Найдем коэффициент затухания резонатора, обусловленный таким излучением. Пусть амплитуда скорости частиц в горлышке резонатора равна v . Тогда объемная скорость, создаваемая при колебаниях, равна Sv , а следовательно, излучаемая мощность равна в среднем

$$J = \frac{1}{8\pi} \rho c k^2 S^2 v^2. \quad (113.8)$$

С другой стороны, запас энергии в резонаторе равен максимальной кинетической энергии среды в горлышке, т. е.

$$A = \frac{1}{2} \rho L S v^2.$$

Следовательно, коэффициент затухания равен

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{J}{A} = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega k S}{L}, \quad (113.9)$$

и число колебаний, после которого амплитуда колебаний убывает в e раз, равно

$$N = \frac{\omega}{2\pi\alpha} = \frac{4L}{kS} = 4 \sqrt{\frac{\Omega L^3}{S^3}}. \quad (113.10)$$

Добротность резонатора есть

$$Q = \pi N = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{4\pi L}{kS}. \quad (113.11)$$

Подобно пузырьку газа в жидкости, резонатор Гельмгольца — препятствие, весьма сильно рассеивающее звук на своей резонансной частоте. Расчет его сечения рассеяния осуществляется так же, как и для пузырька. Под действием первичной волны p_0 резонансной частоты резонатор приходит в интенсивные колебания и переизлучает в виде сферической волны монопольного типа такую же мощность, какая поступает к нему от падающей волны; это и есть рассеиваемая им энергия. На резонансной частоте давление в первичной волне синфазно со скоростью частиц в горлышке. Значит, мощность, сообщаемая первичной волной резонатору, равна $(1/2) S v p_0$. С другой стороны, объемная скорость Sv резонатора создает мощность излучения, определяемую формулой (113.8). Приравнявая эти две величины, найдем $Sv = (4\pi/\rho\omega k) p_0$, откуда найдется и рассеянная энергия:

$$J = \frac{2\pi}{\rho\omega k} |p_0|^2. \quad (113.12)$$

Мы видим, что при резонансной частоте ни объемная скорость, ни, следовательно, рассеиваемая мощность не зависят ни от конструкции, ни от размеров резонатора, но только от частоты. Сравнивая эту мощность с плотностью потока мощности в первичной волне, найдем, что, как и для пузырька, сечение рассеяния резонатора Гельмгольца равно

$$\sigma_0 = \frac{J}{\frac{1}{2} |p_0|^2 / \rho c} = \frac{4\pi}{k^2}.$$

При наличии необратимых потерь в резонаторе он не только рассеивает, но и поглощает звуковую энергию. Для резонатора также можно ввести понятие сечения поглощения при отсутствии рассеяния σ_1 , и соотношения между величинами σ_0 и σ_1 и сечениями поглощения и рассеяния будут такими же, как для пузырька (см. формулы (112.11)—(112.15)).

§ 114. Рассеяние звука в слабо неоднородной среде

В предыдущей главе мы рассматривали рассеяние звука на препятствиях в виде включений с другими механическими свойствами, чем у среды. Мы видели, что для малых размеров препятствий по сравнению с длиной волны звука рассеяние можно найти, сколь сильно бы ни различались механические свойства среды и препятствий.

В этом параграфе мы займемся рассеянием звука в среде, не имеющей резко выделенных неоднородностей, отдельных «включений», но свойства которой меняются от точки к точке непрерывно случайным образом. Практически важность этой задачи состоит в том, что атмосфера и вода в море обладают неоднородностью именно такого типа: температура воздуха и воды колеблется от точки к точке, плотность же и сжимаемость зависят от температуры. В воде зависимость плотности от температуры в обычных условиях весьма мала, и учитывать приходится только зависимость сжимаемости от температуры: вблизи 20° С сжимаемость увеличивается примерно на 0,4% при повышении температуры на один градус. В воздухе от температуры зависит только плотность: плотность уменьшается примерно на 0,3% при повышении температуры на 1° С.

Помимо температурной зависимости, плотность и сжимаемость воды и воздуха меняются регулярно по высоте вследствие наличия силы тяжести. Это изменение свойств среды также влияет на распространение звука и вообще должно быть учтено. Но в этой главе мы рассмотрим только роль статистических изменений механических свойств среды от точки к точке.

Задачу поставим следующим образом. Будем считать, что на ограниченный однородный участок среды падает некоторая заданная первичная волна (например, плоская волна). Та добавка, которую создаст неоднородный участок в дополнение к первичному

полю в среде без неоднородностей, и есть искомая рассеянная волна. Найти эту волну удастся в том случае, когда свойства среды мало отклоняются от своих средних по пространству значений, а статистические характеристики отклонений остаются одинаковыми во всей рассеивающей области. В этом случае рассеяние можно найти (приближенно), не налагая никаких ограничений на характерные пространственные размеры неоднородностей. Решение этой задачи дополняет в известном смысле решение задачи о рассеянии на малых включениях, в которой не было поставлено никаких ограничений для характеристик неоднородностей, но требовалась малость размеров препятствия по сравнению с длиной волны.

Как и для рассеяния на дискретных препятствиях, придется еще наложить условие малости рассеянного поля по сравнению с первичным. Тогда рассеянное поле можно найти методом малых возмущений. За нулевое приближение примем первичную волну в однородной среде, а рассеянную волну будем считать поправкой первого порядка. Для этой поправки можно написать приближенные уравнения; мы увидим, что они отличаются от уравнений нулевого приближения только наличием правой части, зависящей как от первичной волны, так и от неоднородностей среды. Правые части уравнений можно рассматривать как сторонние воздействия — сторонние силы и сторонние объемные скорости. В результате задачу о рассеянии удастся свести к задаче об излучении в однородной среде.

Это — тот же прием, какой был применен нами в задаче о дискретных малых включениях, где также задача о рассеянии заменялась задачей об излучении. Отметим, что в задаче о включениях точные уравнения решались приближенно, а в задаче о статистически-неоднородных средах приближенные уравнения решаются точно. Как и в задаче о дискретных рассеивателях, этот метод учитывает только однократное рассеяние на неоднородностях.

Собственно говоря, метод возмущений можно было бы применять не только для случайных, но и для регулярных изменений свойств среды от точки к точке, например в задаче о рефракции звука в море при регулярном изменении сжимаемости среды по глубине. Однако весь метод пригоден только для случая, когда поправка мала по сравнению с первичной волной. При регулярном изменении свойств среды поправка быстро накапливается и растет примерно пропорционально длине пройденного волной пути. В результате поправка быстро делается сравнимой с первичным полем даже при очень малых отклонениях свойств среды от средних значений, и весь метод перестает быть применимым. Так, «зоны тени» в море могут быть вызваны весьма малым регулярным изменением скорости звука по глубине уже на сравнительно небольшом расстоянии от источника звука. При случайном же распределении неоднородностей волны, рассеянные различными участками среды, *некогерентны* и действие одних неод-

нородностей уничтожается действием других. Остаток — рассеянное поле — нарастает поэтому медленно (как можно показать, пропорционально корню квадратному от пройденной длины пути). Поэтому в задаче о рассеянии на случайных неоднородностях метод малых возмущений можно применять для сравнительно больших расстояний.

Впрочем, формулы, которые мы получим для поля, рассеиваемого элементарным объемом среды, справедливы при любом — как регулярном, так и случайном — характере изменения свойств среды по пространству, так как в них входят только локальные свойства среды. Однако применять эти формулы можно только для расстояний, на которых исходная волна остается еще много большей рассеянного поля.

Итак, пусть свойства среды непрерывно и случайно изменяются от точки к точке и изменения составляют малую долю соответственных средних значений. Уравнения движения и неразрывности в непрерывно неоднородной среде можно написать в том же виде, что и в однородной:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p &= 0, \\ \beta \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (114.1)$$

Отличие заключается в том, что здесь коэффициенты уравнений ρ и β — случайные функции координат, а не постоянные величины. Пусть относительные изменения плотности и сжимаемости равны соответственно $\varepsilon \ll 1$ и $\eta \ll 1$, т. е.

$$\rho = \rho^0 (1 + \varepsilon) \text{ и } \beta = \beta^0 (1 + \eta),$$

где ρ^0 и β^0 — средние значения плотности и сжимаемости. Давление и скорость частиц в первичной волне, которые обозначим через p^0 и \mathbf{v}^0 , должны удовлетворять уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \rho^0 \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial t} + \nabla p^0 &= 0, \\ \beta^0 \frac{\partial p^0}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (114.2)$$

Обозначим давление и скорость частиц в рассеянном поле через p' и \mathbf{v}' . Тогда полное поле, которое должно удовлетворять уравнениям (114.1), выразится суммами $p^0 + p'$ и $\mathbf{v}^0 + \mathbf{v}'$. Подставляя эти величины в уравнения (114.1) и пользуясь (114.2), найдем

$$\begin{aligned} \rho^0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' + \rho^0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} &= -\rho^0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial t}, \\ \beta^0 \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}' + \beta^0 \eta \frac{\partial p'}{\partial t} &= -\beta^0 \eta \frac{\partial p^0}{\partial t}. \end{aligned}$$

Последние слагаемые слева — малые высшего порядка по отношению ко всем остальным членам. Поэтому будем ими пренебрегать. Тогда для рассеянного поля получатся следующие приближенные уравнения:

$$\begin{aligned} \rho^0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla p' &= -\rho^0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}^0}{\partial t}, \\ \beta^0 \frac{\partial p'}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}' &= -\beta^0 \eta \frac{\partial \rho^0}{\partial t}. \end{aligned} \quad (114.3)$$

Эти уравнения можно рассматривать как поля, создаваемые в однородной среде сторонними объемными скоростями, распределенными с плотностью $V = -\beta^0 \eta (\partial \rho^0 / \partial t)$, и сторонними силами, распределенными с плотностью $F = -\rho^0 \varepsilon (\partial \mathbf{v}^0 / \partial t)$. Так как сила F приложена к среде, ее можно считать силой диполя. Пусть первичная волна — плоская гармоническая бегущая волна единичной амплитуды давления $p^0 = e^{ikx}$. Тогда сторонняя объемная скорость в элементе объема $dx dy dz$ равна $i\omega \beta^0 \eta \exp(ikx) \times dx dy dz$, а его сила диполя равна $ike \exp(ikx) dx dy dz$. Следовательно, поле, рассеиваемое данным элементом объема, равно

$$dp' = \left(\omega^2 \rho^0 \beta^0 \eta \frac{e^{ikx+ikr}}{4\pi r} - ike \frac{ikr - 1}{4\pi r^2} e^{ikx+ikr} \cos \theta \right) dx dy dz,$$

где r и θ — соответственно расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения и угол между направлением на точку наблюдения и осью x .

Поле, рассеянное всей неоднородной областью, получится путем интегрирования этого выражения по всей рассеивающей области. Если точка наблюдения расположена достаточно далеко от рассеивающего объема (в волновой зоне по отношению к каждому рассеивающему элементу), то единицей в числителе дипольных членов можно пренебрегать, и рассеянное поле представится в виде

$$p' = k^2 \int (\eta + \varepsilon \cos \theta) \frac{e^{ikx+ikr}}{4\pi r} dx dy dz. \quad (114.4)$$

Суммарное рассеяние представлено в виде интеграла от полей монопольных источников, соответствующих неоднородностям сжимаемости, и дипольных источников, соответствующих неоднородностям плотности. Каждый из источников создает поле либо сферически-симметричное (монополи), либо с восьмерочной характеристикой (диполи). Однако результирующее поле может не обладать такой симметрией, поскольку оно образовано суперпозицией полей многих таких источников, расположенных в разных точках и имеющих разные фазы. На большом расстоянии от рассеивающего

объема, где уже успевает сформироваться характеристика направленности для рассеянного поля от всего объема в целом, эта характеристика определяется корреляцией неоднородностей в рассеивающем участке. Если радиус корреляции мал по сравнению с длиной волны звука и если неоднородности плотности и сжимаемости статистически независимы по пространству, то характеристика рассеяния по интенсивности явится просто суперпозицией сферической и восьмерочной характеристик, взятых с соответственным весом. При большом же радиусе корреляции неоднородностей среды характеристика будет сильно вытянута в направлении падения первичной волны: рассеянные волны будут распространяться в узком угле вблизи этого направления, а рассеяние вбок и особенно в обратном направлении будет практически отсутствовать.

Поясним, чем обусловлена зависимость направленности рассеяния области в целом от степени корреляции ее неоднородностей. Суммарное рассеяние определится тем, с какими фазами складываются вдали от рассеивающей области поля, рассеянные отдельными элементами среды. Эти фазы зависят как от знака неоднородности (величины ϵ и η могут быть как положительными, так и отрицательными), так и от набега фазы волны, приходящей к данной точке и затем рассеивающейся в этой точке.

Для простоты рассмотрим два рассеивателя A и B , лежащие на прямой, параллельной направлению падения первичной волны. Разность фаз рассеянного поля в какой-либо точке наблюдения M , обусловленная только длиной пробега волны, равна $k(AB + BM - AM)$. Для рассеяния точно вперед (точка наблюдения M_1) разность фаз равна нулю: насколько первичной волне меньше бежать до рассеивателя, настолько же рассеянной волне меньше бежать от рассеивателя до точки наблюдения. Для рассеяния в обратном направлении (точка наблюдения M_2) разность фаз равна $2kAB$: добавочная длина пробега равна двойному расстоянию между рассеивателями. Для рассеяния в каком-либо другом направлении разность фаз будет иметь промежуточное значение. Если расстояние точки наблюдения от рассеивателей велико по сравнению с расстоянием между рассеивателями (точка наблюдения во фраунгоферовой зоне по отношению к рассеивателям), то разность фаз будет зависеть от угла наблюдения как $kAB(1 - \cos \theta)$ и будет монотонно возрастать при увеличении угла θ .

К указанному геометрическому набегу фаз волн, рассеянных различными участками рассеивающей области, будут еще добавляться скачки фазы на полволны при изменении знака отклонения сжимаемости или плотности от среднего значения. Если радиус корреляции флуктуаций мал по сравнению с длиной волны звука, то такие скачки полностью замаскируют регулярный геометрический набег фаз, и можно будет считать, что рассеянные волны в любую точку наблюдения приходят со случайными фазами. По-

этому получающаяся сумма не будет зависеть от регулярного набега фаз, а только от исходной характеристики направленности отдельных рассеивателей: флуктуации сжимаемости дадут сферическую характеристику, а флуктуации плотности — дипольную, восьмерочную. Для того чтобы найти результирующую характеристику, придется перейти от характеристик по амплитуде к характеристике по интенсивности. При этом нужно будет учесть абсолютные значения флуктуаций сжимаемости и плотности, беря каждую из характеристик с «весом», пропорциональным интегралу от квадрата флуктуации по всей рассеивающей области.

При большой корреляции флуктуаций в направлении вперед синфазно будут складываться поля от больших участков рассеивающей среды (порядка радиуса корреляции). Рассеянное поле будет велико. В обратном же направлении участок, дающий вклад одного знака, будет только порядка четверти длины волны; знакопеременность величин, складывающихся в интеграле (114.4), будет более частой. В результате рассеянное поле будет мало. В других направлениях будет наблюдаться промежуточная картина. Чем больше радиус корреляции по сравнению с длиной волны, тем больше будет заостряться характеристика направленности, вытягиваясь вдоль направления падения волны. Никакого сходства с характеристикой направленности отдельных рассеивателей не останется.

Как уже было сказано, проведенный выше расчет рассеяния можно применять только до тех пор, пока рассеянное поле остается малым по сравнению с первичным. В противном случае уже нельзя было бы ограничиваться учетом только однократного рассеяния на неоднородностях среды. Соответственно в этом приближении первичную волну можно считать распространяющейся без ослабления вследствие рассеяния: там, где ослабление нужно было бы принять во внимание, требовался бы также учет многократного рассеяния.

Однако в некоторых случаях можно расширить область применимости метода и продолжать пользоваться им и тогда, когда первичная волна сколь угодно ослабевает вследствие рассеяния. Это возможно в тех случаях, когда в результате особых условий распространения однократно рассеянные волны уже больше не участвуют во вторичном рассеянии: например, когда первичная волна — это узкий звуковой пучок и рассеянные волны просто выходят из пучка и практически больше в него не возвращаются. Тогда ослабление первичной волны можно рассчитать, пользуясь энергетическими соображениями.

В самом деле, поскольку амплитуда рассеянной волны в приближении малых возмущений пропорциональна амплитуде первичной, то энергия, рассеиваемая на единичной длине пробега волны, пропорциональна квадрату этой амплитуды, т. е. пропорциональна исходной плотности энергии в первичной волне. Но по закону сохранения энергии эта энергия должна быть равна производной

энергии первичной волны, взятой с обратным знаком. Значит, можно положить $dE/dx = -\delta E$, где δ — коэффициент, зависящий от неоднородности среды. Отсюда найдем закон убывания падающей волны:

$$E = E^0 e^{-\delta x} \quad (114.5)$$

Аналогичный закон убывания мы получали и для дискретных рассеивателей.

Если рассеянные волны из игры не выходят и рассеиваются вторично и многократно, то рассеянное поле методом малых возмущений найти нельзя, но формула (114.5) сохраняет физический смысл: так убывает энергия *среднего поля* первичной волны.

§ 115. Рассеяние от слабо шероховатой поверхности

Метод малых возмущений позволяет также найти поле, рассеиваемое плоской поверхностью, возмущенной малыми и пологими шероховатостями, т. е. шероховатостями, высота которых мала по сравнению с длиной волны первичного излучения, а наклоны малы по сравнению с единицей. В этой задаче невозмущенной границей считают среднюю плоскость шероховатой поверхности. Если обозначить ее через $z = 0$, то уравнение возмущенной границы можно записать в виде $z = \zeta(x, y)$, где среднее значение ζ вдоль средней плоскости равно нулю. Малость высоты шероховатостей выражается условием $|k\zeta| \ll 1$, где k — волновое число первичного излучения; условия малости наклонов выразятся так: $|\partial\zeta/\partial x| \ll 1$; $|\partial\zeta/\partial y| \ll 1$. Статистические характеристики ζ будем считать неизменными вдоль всей плоскости.

Сумма падающей волны и волны, отраженной от невозмущенной границы, явится в данной задаче первичной волной p^0 . Полное поле представим как сумму первичной волны и рассеянной волны — добавочного поля p' , обусловленного шероховатостью. Наша задача — зная шероховатость поверхности, найти для заданной падающей волны рассеянную волну p' . Для малых шероховатостей рассеянное поле, как правило, мало по сравнению с первичным полем вдали от границы; во всяком случае, мы будем рассматривать только такие задачи.

Величина и характер рассеянного поля зависят от свойств шероховатой поверхности. Начнем со случая свободной шероховатой поверхности. Наиболее важный пример такой задачи — рассеяние подводного звука на свободной поверхности воды. Первичная волна удовлетворяет в этом случае условию $p^0 = 0$ на плоскости $z = 0$. Но полное давление $p^0 + p'$ должно обращаться в нуль не на этой плоскости, а на свободной границе среды $z = \zeta(x, y)$. На этой границе давление первичной волны с точностью до первой степени малой величины $k\zeta$ равно $(\partial p^0/\partial kz)_{z=0} k\zeta$, поскольку производная $(\partial p^0/\partial kz)_{z=0}$ имеет вообще порядок p^0 . Если теперь к поверхности $z = \zeta(x, y)$ приложить в дополнение

к первичному полю сторонние давления, распределенные по закону

$$\Pi = - \left(\frac{\partial p^0}{\partial kz} \right)_{z=0} k\xi, \quad (115.1)$$

то суммарное давление на свободной поверхности обратится в нуль, т. е. поле первичной волны и поле, создаваемое введенными сторонними давлениями, совместно удовлетворяют заданному на шероховатой поверхности граничному условию. Отсюда следует, что звуковое поле, создаваемое в среде сторонними давлениями (115.1), и есть рассеянное поле p' . Наконец, пренебрегая малыми величинами высших порядков относительно $k\xi$ и углов наклона поверхности к средней плоскости, можем считать, что сторонние давления приложены к средней плоскости $z = 0$: в этом приближении достаточно учесть шероховатость только для расчета сторонних давлений, после чего ее можно больше не учитывать.

Воспользуемся описанным методом для расчета рассеянного поля в некоторых важных случаях. При этом ограничимся для простоты плоскими задачами — обобщение на двухмерную шероховатость не представляет затруднений. Рассмотрим раньше всего синусоидальную шероховатую поверхность

$$\xi = a \cos \xi x, \quad (115.2)$$

считая, в соответствии с вышесказанным, что $ka \ll 1$ и $\xi a \ll 1$. Пусть на поверхность падает гармоническая плоская волна

$$\exp(ikx \cos \theta + ikz \sin \theta), \quad (115.3)$$

образующая угол скольжения θ со средней плоскостью $z = 0$ поверхности. Первичное поле образовано этой волной и ее отражением в плоскости $z = 0$:

$$p^0 = \exp(ikx \cos \theta + ikz \sin \theta) - \exp(ikx \cos \theta - ikz \sin \theta).$$

Согласно (115.1) рассеянное поле создается сторонними давлениями, распределенными по шероховатой поверхности по закону

$$\begin{aligned} \Pi &= -2ika \sin \theta \cos \xi x \cdot \exp(ikx \cos \theta) = \\ &= -ika \sin \theta \cdot \exp[i(k \cos \theta + \xi)x] - \\ &= -ika \sin \theta \cdot \exp[i(k \cos \theta - \xi)x]. \end{aligned} \quad (115.4)$$

Отсюда видно, что при падении плоской волны рассеяние синусоидальной шероховатостью эквивалентно излучению, создаваемому двумя двухмерными плоскими волнами сторонних давлений (115.4), бегущими по средней плоскости данной поверхности.

Как мы видели в § 33, каждая из таких двухмерных волн излучает в среду свой спектр — плоскую пространственную волну,

след которой на границе совпадает с двумерной волной. Рассеянное поле имеет, таким образом, вид

$$\begin{aligned} p' = p'_{+1} + p'_{-1} = & -ika \sin \theta \cdot \exp \left[ik \left(\cos \theta + \frac{\xi}{k} \right) x - \right. \\ & \left. - ik \sqrt{1 - \left(\cos \theta + \frac{\xi}{k} \right)^2} z \right] - \\ & -ika \sin \theta \cdot \exp \left[ik \left(\cos \theta - \frac{\xi}{k} \right) x - ik \sqrt{1 - \left(\cos \theta - \frac{\xi}{k} \right)^2} z \right], \end{aligned}$$

где индексом $+1$ обозначен спектр, след которого отстает от следа первичной волны, а индекс -1 обозначает спектр, след которого перегоняет или бежит в противоположную сторону по отношению к первичной волне. Углы скольжения спектров определяются формулами

$$\begin{aligned} \cos \theta_{+1} &= \cos \theta + \frac{\xi}{k}, \\ \cos \theta_{-1} &= \cos \theta - \frac{\xi}{k}. \end{aligned} \quad (115.5)$$

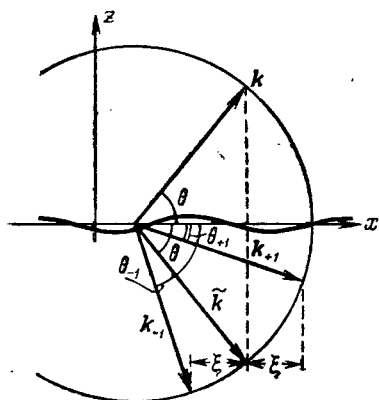


Рис. 115.1. Волновые векторы спектров рассеяния плоской волны, падающей на синусоидальную поверхность. k — волновой вектор падающей волны, \tilde{k} — волновой вектор «правильно рассеянной» (отраженной от плоскости) волны, k_{+1} и k_{-1} — волновые векторы спектров рассеяния. ξ — волновое число синусоидальной шероховатости.

Пока эти выражения остаются меньшими единицы, спектры рассеяния — однородные волны, уходящие от границы, и их волновые векторы — можно построить, как показано на рис. 115.1. Начиная с некоторого угла скольжения первичной волны и при дальнейшем его уменьшении косинус угла скольжения спектра $+1$ окажется больше единицы; это значит, что спектр станет неоднородным и будет бежать вдоль границы, экспоненциально затухая при удалении от нее. Если $\xi/k > 1$, то, начиная с некоторого угла скольжения первичной волны, станет неоднородным и второй спектр. При $\xi/k > 2$ оба спектра неоднородны при любом угле скольжения первичной волны; волна отражается от такой шероховатой поверхности как от зеркальной (если не считать возмущенного неоднородными спектрами «ближнего поля»).

Амплитуды обоих спектров одинаковы и равны $ka \sin \theta$ независимо от того, однородны спектры или нет. По мере уменьшения угла скольжения эффект шероховатости уменьшается: амплитуда спектров падает.

Аналогично можно найти рассеяние и от абсолютно мягкой поверхности с любой периодической шероховатостью. В самом

деле, так как высота (малых!) шероховатостей входит в выражение для сторонних давлений линейно, то к шероховатостям можно применять принцип суперпозиции: рассеяние от шероховатости $z = \xi_1 + \xi_2$ равно сумме полей, рассеянных от шероховатостей $z = \xi_1$ и $z = \xi_2$ в отдельности. Поскольку всякую периодическую шероховатость можно представить в виде суперпозиции косинусоидальных шероховатостей при помощи разложения Фурье, рассеяние плоской волны от такой поверхности представится в виде суперпозиции соответственных спектров: каждая косинусоида разложения создаст два спектра — один по одну и другой по другую сторону от направления зеркального отражения падающей плоской волны. Направления волновых векторов спектров определяются формулами

$$\cos \theta_{+1, l} = \cos \theta + \frac{l\xi}{k}, \quad \cos \theta_{-1, l} = \cos \theta - \frac{l\xi}{k}, \quad (115.6)$$

где $\xi = 2\pi/L$, L — основной период шероховатостей, l — номер спектра. Рассеяние происходит, таким образом, по дискретным направлениям. Из (115.6) ясно, что высокие номера спектров будут неоднородными: тонкая структура шероховатости не будет передаваться в среду. При $\xi/k > 2$ шероховатая поверхность ведет себя как зеркальная. С этим характерным свойством волн — «забывать» мелкомасштабные воздействия на них — мы уже встречались в гл. III и VIII.

Если шероховатость не периодична, но ее можно разложить в интеграл Фурье, то, «пристраивая» к каждому элементу разложения соответственный спектр, найдем рассеянное поле, которое в этом случае будет занимать непрерывную область углов.

Аналогично решается и задача о рассеянии волн на абсолютно жесткой шероховатой поверхности (например, рассеяние воздушного звука на волнующейся поверхности моря). В этом случае на границе должна обратиться в нуль суммарная нормальная скорость первичного и рассеянного поля $p^0 + p'$. Граничное условие для первичной волны — обращение в нуль z -компоненты скорости v_z^0 на плоскости $z = 0$. Как легко видеть, в первом приближении по малым величинам $k\xi$, $\partial\xi/\partial x$, $\partial\xi/\partial y$ первичная волна создает на шероховатой поверхности нормальную скорость

$$v_n^0 = \left(\frac{\partial v_z^0}{\partial kz} \right)_{z=0} k\xi - v_x^0 \frac{\partial \xi}{\partial x} - v_y^0 \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (115.7)$$

Поэтому граничное условие на шероховатой границе будет выполнено, если сообщить границе добавочно сторонние нормальные скорости — v_n^0 , которые «остановят» границу. Значит, рассеянное поле равно излучению, создаваемому сторонними нормальными скоростями — v_n^0 , распределенными по шероховатой границе. Как и для случая мягкой границы, сторонние нормальные скорости, приложенные к шероховатой границе, можно, не увеличивая по-

рядка погрешности, считать заданными как z -компоненты сторонней скорости v_z непосредственно на плоскости $z = 0$.

В качестве примера снова возьмем плоскую задачу о рассеянии волны (115.3) на синусоидальной поверхности (115.2), которую теперь считаем абсолютно жесткой. Согласно (115.7) сторонние скорости, заданные на плоскости $z = 0$, запишутся так:

$$v_z = -\frac{i}{\rho c} (ka \sin^2 \theta + \xi a \cos \theta) \exp \left[ik \left(\cos \theta + \frac{\xi}{k} \right) x \right] - \\ - \frac{i}{\rho c} (ka \sin^2 \theta - \xi a \cos \theta) \exp \left[ik \left(\cos \theta - \frac{\xi}{k} \right) x \right].$$

Отсюда сразу получим, согласно § 34, и сами спектры:

$$p_{+1} = -i \frac{ka \sin^2 \theta + \xi a \cos \theta}{\sqrt{1 - (\cos \theta + \xi/k)^2}} \exp \left[ik \left(\cos \theta + \frac{\xi}{k} \right) x - \right. \\ \left. - ik \sqrt{1 - \left(\cos \theta + \frac{\xi}{k} \right)^2} z \right], \\ p_{-1} = -i \frac{ka \sin^2 \theta - \xi a \cos \theta}{\sqrt{1 - (\cos \theta - \xi/k)^2}} \exp \left[ik \left(\cos \theta - \frac{\xi}{k} \right) x - \right. \\ \left. - ik \sqrt{1 - \left(\cos \theta - \frac{\xi}{k} \right)^2} z \right]. \quad (115.8)$$

Направления спектров получаются такими же, как и для абсолютно мягкой поверхности: углы скольжения их удовлетворяют тем же уравнениям (115.5); совпадают и условия однородности спектров. Но амплитуда рассеяния от жесткой поверхности совсем другая, чем от мягкой. В частности, при стремлении угла скольжения какого-либо рассеянного спектра к 0° или 180° («скользящий спектр») его амплитуда стремится к бесконечности. Это указывает, во-первых, что амплитуда рассеянного спектра действительно растет по мере его приближения к «скользящему», а во-вторых, что амплитуду «скользящего» или близкого к «скользящему» спектра нельзя рассчитывать по формуле (115.8).

ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА

§ 116. Затухание звука

Тот факт, что звук распространяется с конечной скоростью, известен с незапамятных времен, например, по наблюдению эхо. Измерения скорости звука всегда были довольно точны. Еще в 1738 г. французская академия наук получила для скорости звука в воздухе при 0° С значение 337 м/сек, всего на 1,7% отличающееся от современных измерений (332,45 м/сек). Но другое фундаментальное свойство процесса распространения — затухание в результате поглощения звука (т. е. перехода звуковой энергии в тепловую) — привлекло внимание только в XIX веке, а экспериментальное обнаружение и измерение поглощения было выполнено только в нашем веке. Это объясняется тем, что при умеренных частотах поглощение звука в воздухе или в воде удивительно мало *) и поэтому полностью маскируется другими причинами затухания.

Если бы не было расхождения в стороны, рассеяния на препятствиях и других причин затухания звуковых волн, помимо поглощения, то, например, звук мужского голоса (основная частота 100—150 гц) при распространении в атмосфере ослабел бы вдвое по амплитуде только после пробега примерно 60 км, т. е. только через 3 минуты свободного распространения. Звук громкого разговора в Ленинграде можно было бы услышать в Москве (по шестивинти получаса, требующегося для пробега звуком этой дистанции) при громкости еще заметно большей порога слышимости: потеря интенсивности составила бы всего 60 дБ. Правда, слов разобрать бы не удалось, так как обертоны, отличающие речь от синусоидального звукового сигнала, затухают гораздо быстрее (поглощение звука растет с частотой).

Конечно, такое малое поглощение совершенно незаметно на фоне затухания, вызванного другими причинами, всегда сопровождающими реальное распространение звука в свободной среде.

*) В воде, в горных и осадочных породах затухание звука (даже очень малой длины волны) ничтожно по сравнению с затуханием электромагнитных волн. Поэтому звуковые волны — единственное средство исследования водоемов и глубинных слоев Земли. В воздухе затухание звука выше, чем для электромагнитных волн, но все же очень мало для не слишком коротких волн.

Главная причина — расхождение звука во все стороны от источника. При удалении с расстояния в 1 м на расстояние 1 км от сферического источника расхождение вызывает затухание на 60 дБ, так что заметить на фоне этого затухания добавочное ослабление звука умеренной частоты вследствие поглощения невозможно.

В свободной атмосфере есть и другие причины, изменяющие затухание звука при распространении. Так, при распространении над землей рассеяние звука вверх неровностями почвы увеличивает затухание. По этой причине звук затухает над землей сильнее, чем над зеркально-гладкой поверхностью воды. Далее, в § 57 мы видели, что в неоднородной среде звук уклоняется в сторону, где скорость звука меньше. Так как скорость звука в воздухе растет с температурой, то звук отклоняется в сторону более холодного воздуха. Поэтому, если, как обычно, температура воздуха убывает при поднятии над землей, звук отклоняется вверх и при наблюдении у земли затухание его окажется увеличенным. При «температурной аномалии» (повышении температуры с высотой) затухание уменьшится.

Ветер также может увеличивать и уменьшать затухание звука, распространяющегося вдоль земли: скорость звука складывается со скоростью ветра, скорость же ветра растет при поднятии над землей, так как вблизи земли ветер тормозится трением. Поэтому при противном ветре (дующем от приемника к источнику звука) эффективная скорость звука уменьшается при поднятии и звук отклоняется вверх: затухание увеличивается. При попутном ветре эффективная скорость звука растет при поднятии над поверхностью земли и наблюдается уменьшенное затухание звука. В направлениях, перпендикулярных к ветру, он практически не влияет на затухание.

Казалось бы, устранив расхождение звука в стороны, например, пустив звук по длинной трубе или наблюдая затухание звука с течением времени в закрытом помещении, стенки которого не дают звуку выходить наружу, можно было бы все-таки определить поглощение в среде. Однако в таких случаях поглощение в среде маскируется большим поглощением звуковой энергии в непосредственной близости от стенок трубы или помещения — в так называемом акустическом пограничном слое.

В самом деле, сравним относительную роль поглощения звука в пограничном слое и во всем объеме помещения. Для определенности рассмотрим поглощение, вызываемое вязкостью среды. Перемещение участков среды как целого не вызывает вязкого поглощения: такое поглощение имеет место только при наличии градиентов скоростей частиц среды. Градиенты скорости вдали от стенок пропорциональны волновому числу k звуковой волны для данной частоты звука. Вблизи стенок градиент гораздо больше, так как к самой стенке частицы прилипают, а на расстоянии δ_v (см. § 19) скорость частиц уже почти такая, как если бы прилипание вовсе не было. Это расстояние определяет толщину погра-

ничного слоя; градиент скорости в этом случае можно считать пропорциональным $1/\delta_v$.

Силы вязкости, вызывающие поглощение, пропорциональны градиентам скорости, а их мощность, т. е. поглощенная в единицу времени энергия, пропорциональна еще скорости деформации частиц, которая в свою очередь также пропорциональна градиенту скорости. Таким образом, работа вязких сил, переводящая акустическую энергию в тепло и рассчитанная на единицу объема, пропорциональна в среде величине k^2 , а в пограничном слое — величине $1/\delta_v^2$. Объемы же, в которых происходит поглощение, — это соответственно объем помещения и объем пограничного слоя. По порядку величины эти объемы равны соответственно L^3 и $\delta_v L^2$, где L — линейный размер помещения. В итоге отношение энергий, поглощаемых в среде и в пограничном слое у стенок, будет равно по порядку величины

$$k^2 L^3 : \left(\frac{1}{\delta_v^2} \delta_v L^2 \right) = \delta_v L k^2.$$

Например, для воздуха при частоте 100 гц имеем: $k = 2 \text{ м}^{-1}$, $\delta_v = 0,0002 \text{ м}$. Для комнаты с линейными размерами порядка 10 м отношение вязких потерь в среде и у стенок составит, таким образом, по порядку величины $2 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 2^2 \approx 0,01$.

Примерно столько же, сколько вязкость, вносит в потери и теплопроводность, так что порядок отношения сохранится и при учете обоих механизмов.

При повышении частоты это отношение увеличивается; в нашем примере вязкие потери в среде и у стенок сравнялись бы при частоте около 2 кгц. В действительности доля поглощения в среде больше, чем дает приведенный расчет, потому что, помимо вязкого поглощения, в объеме среды имеется еще релаксационное поглощение (см. § 120), вызываемое наличием в воздухе водяного пара и углекислого газа. Поэтому поглощение у стенок и поглощение в объеме среды делаются равными при меньшей частоте. Тем не менее в малых помещениях (и уж во всяком случае в сосудах и в трубах) поглощение в пограничном слое играет главную роль в суммарных потерях звуковой энергии.

Маскировка поглощения звука в воздухе затуханием, вызываемым другими причинами, до сих пор не позволяет измерить непосредственно поглощение в воздухе звука низких частот, например звука человеческого голоса. Непосредственное измерение поглощения удастся только для звуков высокой частоты — ультразвуков, а поглощение на низкой частоте вычисляют по теоретическим формулам, проверенным на высоких частотах. Помимо того, что при высокой частоте поглощение звука в среде много больше, чем на низкой, на ультразвуковых частотах удастся создавать слабо расходящиеся пучки, устраняя тем самым основную причину затухания, маскирующую поглощение.

Отметим, кстати, различный ход затухания, вызываемый расхождением волн и поглощением звука. Затухание вследствие расхождения происходит по степенному закону (интенсивность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника). Затухание же вследствие поглощения происходит, как увидим ниже, по экспоненциальному закону: на данной длине пробега поглощается всегда одна и та же часть проходящей звуковой энергии. На каждый метр пробега звуковой волны поглощение добавляет одно и то же относительное затухание, а расхождение волн — все меньшее и меньшее относительное затухание. Поэтому вблизи источника звука преобладает затухание вследствие расхождения, а при распространении звука на большое расстояние в свободной среде (например, в подводном звуковом канале или в воздушном канале в атмосфере) роль поглощения в конце концов делается преобладающей.

Оставляя в стороне затухание, вызываемое другими причинами, в этой главе мы будем рассматривать только поглощение звука в среде. Так как в идеальной жидкости звуковая волна не поглощается, то причину поглощения следует искать в добавочных силах, возникающих в реальных жидкостях. Для того чтобы не учитывать расхождения волн, ограничимся изучением поглощения в плоских звуковых волнах.

§ 117. Затухание звука в результате поглощения

Неподвижные идеальные и реальные жидкости неразличимы по своим механическим свойствам: и в тех и в других касательных напряжений нет, а давление зависит только от степени сжатия среды. В движущихся идеальных жидкостях давление так же зависит от степени сжатия, как и при покое, и касательных напряжений по-прежнему нет. В реальной движущейся жидкости давление зависит от степени сжатия по-другому, чем в покоящейся; кроме того, в ней появляются дополнительные внутренние напряжения (как нормальные, так и касательные), зависящие от движения среды и поглощающие механическую энергию звуковых волн, превращая ее в тепло. Таким образом, в реальных жидкостях при движении имеются два вида напряжений: упругие, не приводящие к потерям механической энергии, и диссипативные, приводящие к потерям.

Для волн с произвольной зависимостью от времени закон затухания, вызываемого диссипативными напряжениями, очень сложен: по мере распространения волны не только убывает давление, но и меняется форма волны. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только гармонические волны: для них закон убывания всегда, как увидим, экспоненциальный, а форма волны не меняется. Влияние поглощения на волны другой формы можно найти методом Фурье, если скорость затухания для гармонических волн разных частот известна.

Преобразование звука в тепло при поглощении используют в медицине для прогрева внутренних тканей тела. Как известно, прогрев тканей высокочастотными электрическими полями (УВЧ) наибольший в тканях, наилучшим образом проводящих ток: в них происходит наибольшее поглощение электромагнитной энергии. Оказывается, что наибольшее поглощение звуковых волн происходит в тканях, плохо проводящих ток (сухожилия, надкостница). Поэтому ультразвуковая терапия внутренним прогревом дополняет прогрев УВЧ. Высокие частоты применяют при прогреве потому, что поглощение звука быстро растет с частотой. Кроме того, на высокой частоте легче создавать направленные пучки волн, что важно для точной локализации воздействия звука.

Диссипативные напряжения практически всегда малы по сравнению с давлением. Например, на частоте 3 Мгц диссипативные напряжения в воде составляют всего одну трехсоттысячную от упругого давления. Поэтому диссипативными напряжениями часто можно пренебрегать и считать среду идеальной, как мы и делали до сих пор. Но действие диссипативных напряжений накапливается: ведь рано или поздно вся энергия волны переходит в тепло, и волна полностью затухает. Амплитуда плоской волны в воде на частоте 3 Мгц уменьшается в 10 раз (энергия волны падает в 100 раз) на расстоянии примерно 10 м. Ясно, что при большой длине пробега волны поглощение приходится учитывать.

Вопрос о возможности пренебречь диссипативными напряжениями приходится решать в каждом конкретном случае по-разному. Общего критерия, конечно, нет. Ответ зависит, в частности, от требуемой точности решения задачи. Иногда пренебрежение поглощением приводит к качественным ошибкам: например, входное сопротивление ненагруженного четвертьволнового слоя или полуволнового слоя идеальной жидкости равно соответственно бесконечности и нулю, а при сколь угодно малом поглощении в обоих случаях получается конечная величина. Поглощение звука сильно сказывается в резонансных задачах: установление резонансной амплитуды требует многократного пробега волны взад и вперед по резонирующему объему, что равносильно большому пробегу волны в среде: в этом случае сказывается даже малое поглощение.

Динамические добавки к статическому давлению линейны, т. е. для гармонических волн пропорциональны сжатию, как и само статическое давление. Поэтому принцип суперпозиции можно применять и при наличии поглощения. Пренебрежение диссипативными напряжениями носит другой характер, чем пренебрежение нелинейными силами при линеаризации уравнений акустики: относительная ошибка при отбрасывании нелинейных членов тем меньше, чем меньше амплитуда волны, а относительная погрешность при пренебрежении поглощением от амплитуды волны не зависит.

Покажем, что затухание гармонических волн происходит по экспоненциальному закону. Обозначим плотность звуковой энергии через E . Мощность, поглощаемая в единице объема среды, $-dE/dt$, равна мощности диссипативных напряжений в этом объеме, т. е. произведению этих напряжений на соответствующую скорость деформации объема. В гармонической волне обе величины пропорциональны амплитуде давления. Значит, величина $-dE/dt$ пропорциональна квадрату амплитуды давления в волне. Но плотность энергии E в волне также пропорциональна квадрату амплитуды давления. Следовательно, обе величины пропорциональны друг другу. Обозначая коэффициент пропорциональности через 2α , имеем: $dE/dt = -2\alpha E$, откуда, интегрируя, находим экспоненциальный закон затухания по времени

$$E = E_0 e^{-2\alpha t}, \quad (117.1)$$

где E_0 — плотность энергии в начальный момент $t = 0$. Амплитуда давления также убывает по экспоненциальному закону

$$p = p_0 e^{-\alpha t}. \quad (117.2)$$

По этому же закону убывают скорость частиц, ускорение и другие линейные величины, характеризующие волну.

Величину

$$\alpha = -\frac{1}{2E} \frac{dE}{dt} \quad (117.3)$$

называют временным коэффициентом затухания по амплитуде (коэффициент затухания по мощности равен 2α). Его размерность совпадает с размерностью частоты: $[\alpha] = \text{сек}^{-1}$.

Из (117.2) видно, что за 1 секунду амплитуда волны убывает в $e^{-\alpha}$ раз. За это же время волна пробегает расстояние c . Отсюда следует, что в плоской волне амплитуда убывает с расстоянием по закону

$$p = p_0 e^{-(\alpha/c)x} = p_0 e^{-\delta x}, \quad (117.4)$$

где p_0 — давление в начальной точке $x = 0$. Величину

$$\delta = \frac{\alpha}{c} = -\frac{1}{2cE} \frac{dE}{dt} \quad (117.5)$$

называют пространственным коэффициентом затухания. Его размерность та же, что у волнового числа: $[\delta] = \text{см}^{-1}$.

Временной коэффициент затухания соответствует следующей ситуации: пусть в начальный момент времени во всей среде создана бегущая синусоидальная волна вида $p_0 e^{ikx}$. Тогда с течением времени волна будет меняться по закону

$$p = p_0 \exp(-\alpha t - i\omega t + ikx). \quad (117.6)$$

Тот же коэффициент определяет поведение стоячих волн, заданных в начальный момент, например, в виде $p_0 \cos kx$:

$$p = p_0 \cos kx \cdot \exp(-\alpha t - i\omega t). \quad (117.7)$$

Очевидно, в этих случаях можно считать частоту комплексной и полагать ее равной $\omega - i\alpha$. Комплексной будет и скорость звука $(\omega - i\alpha)/k$.

Соотношение между мнимой и вещественной частями частоты α/ω вообще зависит от частоты. Если величина α для данной вещественной частоты найдена для плоской волны, то можно пользоваться тем же значением комплексной частоты вместо ее вещественной части и для всех других задач с начальными условиями, например для собственных колебаний сферического объема жидкости в сосуде и т. п.

Пространственный коэффициент затухания соответствует волне, излучаемой заданными гармоническими колебаниями поршня. При амплитуде давления p_0 на поршне, расположенном в точке $x = 0$, излучаемая волна имеет вид

$$p = p_0 \exp(-i\omega t + ikx - \delta x). \quad (117.8)$$

В этом случае волновое число можно считать комплексным, полагая его равным $k + i\delta$. Комплексная медленность волны равна в этом случае $(k + i\delta)/\omega$ *). Этим же комплексным волновым числом можно пользоваться и для других задач об излучении. Например, в поглощающей среде сферически-симметричная волна, излучаемая монополем с объемной скоростью $V e^{-i\omega t}$, выразится формулой

$$p = -i\rho\omega V \frac{e^{i(k+i\delta)r}}{4\pi r} e^{-i\omega t}.$$

Коэффициент поглощения звука в средах измеряют либо по пространственному, либо по временному затуханию звука. Выбор метода зависит от величины затухания.

На высоких частотах, когда легко создать плоскую волну, а поглощение звука значительно, определяют пространственный коэффициент затухания. Для этого измеряют амплитуду звука в двух точках на определенном расстоянии L вдоль линии распространения звука. Как легко найти из (117.8), пространственный коэффициент затухания следующим образом выражается через амплитуды давления p_1 и p_2 в этих точках и через расстояние между точками:

$$\delta = \frac{1}{L} \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

*) В поглощающей среде комплексная медленность не равна единице, деленной на комплексную скорость!

Этот способ неприменим для низких частот и слабо поглощающих жидкостей, когда для достаточно точного измерения потребовалось бы взять очень большой отрезок L . В этих случаях измеряют временной коэффициент затухания α резонансных колебаний (стоячих волн) в сосуде. В этом методе приходится учитывать поглощение на стенках при отражениях, чтобы не получить завышенного результата измерения коэффициента поглощения.

§ 118. Различные механизмы поглощения звука

Поглощение звука осуществляется самыми различными физическими механизмами. В ряде случаев диссипативные силы создаются при трении колеблющейся среды о неподвижную границу. Возникающая сила «внешнего» трения действует на среду в направлении, противоположном скорости среды, а по величине пропорциональна этой скорости. К этому случаю можно свести действие стенок на волну в жидкости, заполняющей узкий капилляр: если толщина пограничного вязкого слоя δ , превышает радиус капилляра, то можно считать, что силы трения со стороны стенок приложены ко всему объему среды, заполняющей капилляр, а не только к поверхности столба жидкости, прилегающей к стенкам. К такому же случаю сводится и распространение звука в порах акустической штукатурки.

Один из главных механизмов поглощения звука — вязкие потери. Вызывающие их вязкие напряжения («внутреннее трение») — сдвиговые напряжения, возникающие при скольжении слоев жидкости друг по другу и пропорциональные скорости сдвиговой деформации среды. В звуковой волне действие этих напряжений выравнивает различие скоростей между слоями. При этом звуковая волна производит над средой положительную работу, на что тратится энергия волны, и звук затухает. Вязкое поглощение — «нелокальный» механизм потерь: он обусловлен различием в движении разных участков жидкости. В звуковой волне неравномерность скоростей частиц повторяется с пространственной периодичностью, равной длине звуковой волны, так что действие вязкости можно считать диссипативным механизмом выравнивания неравномерностей скорости, имеющих масштаб длины звуковой волны.

Вязким поглощением считают также потери, вызываемые изменениями сжатия. Формально это связано с тем, что диссипативные напряжения, линейно зависящие от тензора скоростей деформации, можно представить при помощи двух коэффициентов. Один из них — коэффициент сдвиговой вязкости η — характеризует касательное диссипативное напряжение, возникающее при скольжении слоев жидкости друг по другу. Второй из них — коэффициент объемной вязкости ζ — характеризует диссипативное давление, возникающее при всестороннем сжатии среды. Тензор диссипативных напряжений σ_{jk} выражается через два коэффициента

вязкости и через *тензор скоростей деформации*

$$v_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$$

формулой

$$\sigma_{jk} = \delta_{jk} \zeta v_{\alpha\alpha} + 2\eta \left(v_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} v_{\alpha\alpha} \right). \quad (118.1)$$

Сделаем одно замечание относительно сдвиговой вязкости и объемной вязкости. Микроскопическая картина сдвиговой вязкости, как мы говорили, *нелокальна*: слой среды, движущейся с большей скоростью, захватывает соседний слой, движущийся с меньшей скоростью, ускоряя его и в свою очередь замедляясь. Для газов молекулярная картина этого процесса заключается в диффузии молекул из одного слоя в другой и обратно, сопровождающейся обменом количеством движения, что и приводит к выравниванию средних скоростей слоев. Для объемной вязкости «обменного» механизма нет, так как при всестороннем сжатии все участки среды находятся в одинаковых условиях. Поэтому в основе явления объемной вязкости должен лежать *локальный* механизм: обычно это какой-либо релаксационный механизм. Термин «релаксация» применяют в случаях, когда давление, создаваемое внезапным изменением сжатия, постепенно убывает, стремясь к некоторому равновесному значению, отвечающему данному сжатию. Если «время релаксации», характеризующее такое запоздание, не очень мало по сравнению с периодом звуковой волны, то в гармонической волне давление будет отставать по фазе от сжатия. Это приводит к некоторой частотно-зависящей добавке к давлению, которое имело бы место при таком же статическом сжатии. При низких частотах добавка равносильна появлению объемной вязкости. Для более высоких частот добавка приводит, помимо добавочного поглощения, к изменению скорости звука (дисперсия скорости).

Характер релаксационных процессов ясно виден на классическом примере распространения звука в многоатомных газах, где процесс заключается в выравнивании энергии между внешними и внутренними степенями свободы молекул, осуществляемом путем соударений между молекулами. Внешние степени свободы — это три поступательные степени свободы молекулы. Энергия, входящая на них, определяет давление газа. В одноатомном газе молекулы имеют только эти степени свободы. В двух- или многоатомном газе имеются еще и внутренние: вращательные и колебательные степени свободы молекул. При прохождении звуковой волны через многоатомный газ энергия сообщается, путем соударений между молекулами, непосредственно только внешним степеням свободы. Но затем, после многих соударений, она частично переходит и на другие возбуждаемые степени свободы, стремясь к равномерному распределению между ними. Поэтому при сжатии данного объема газа возникшее первоначально давление, соответ-

ствующее передаче всей энергии поступательным степеням свободы, будет уменьшаться — «релаксировать», стремясь к некоторому меньшему значению, которое соответствует равномерному распределению энергии по степеням свободы. Но поскольку такое перераспределение требует многих соударений, оно отстает от исходного процесса сжатия и при синусоидальном процессе приводит к сдвигу фаз между сжатием и давлением, а в результате — к поглощению звуковой энергии.

Если время перераспределения энергии сравнительно велико, то релаксационные процессы вызывают сильную зависимость поведения вещества от частоты уже при не очень высоких частотах. В то время как феноменологическая картина сдвиговой вязкости для многих веществ сохраняется до частот, где распространение звука фактически прекращается, феноменологическая картина объемной вязкости должна быть заменена на значительно меньших частотах полной картиной релаксационного процесса.

Важное значение (особенно в газах) имеют термические механизмы поглощения звука. В звуковой волне места сжатия имеют повышенную температуру (по сравнению со средней температурой среды), а места разрежения — пониженную; это — результат «адиабатического» нагревания и охлаждения. В реальной жидкости измененные температуры частично выравниваются путем теплопроводности и путем теплоизлучения. Теплопроводность — локальный механизм обмена теплом между смежными участками среды. Теплопроводность выравнивает температурные неравномерности волны, имеющие (как и скорости частиц среды при вязком выравнивании скоростей) масштаб длины звуковой волны. Теплоизлучение выравнивает температурные разности между данным нагретым или охлажденным участком и средой в целом. Выравнивание происходит путем испускания и поглощения электромагнитных волн. В отличие от механизмов сдвиговой вязкости и теплопроводности, теплоизлучение — локальный механизм релаксационного типа: каждый элемент среды излучает или поглощает тепло независимо от соседних, единственно в меру отличия его температуры от средней температуры среды.

Всякие диссипативные силы вызываются процессами, идущими на межмолекулярном и внутримолекулярном уровне. Поэтому поглощение звука дает сведения о строении среды и о ее поведении в молекулярных масштабах, а не только о таких усредненных характеристиках среды, как модуль упругости или плотность.

§ 119. Индикаторные диаграммы для частицы среды

Мы видели, что для расчета коэффициента затухания нужно знать мощность диссипативных напряжений в единице объема среды, равную — dE/dt , а также плотность энергии E в среде. Эти величины наглядно представляются при помощи индикаторных

диаграмм для частицы среды. Индикаторная диаграмма — это график зависимости давления от степени сжатия среды. Диаграмма изображает графически работу, совершаемую над частицей силами давления со стороны окружающей среды, в расчете на единицу объема.

Построим раньше всего индикаторную диаграмму для статического давления $p_{ст}$. Статическое давление всегда находится в фазе со сжатием s и пропорционально ему: $p_{ст} = s/\beta$, где β — статическая сжимаемость среды. Индикаторная диаграмма изображается прямой линией (рис. 119.1, а). Котангенс угла наклона графика φ равен сжимаемости β . При изменении сжатия изображающая точка на графике дважды пробегает его: один раз в одном направлении и другой раз — в обратном. Работа сил давления над частицей при изменении сжатия от s до $s+ds$ равна $p_{ст}ds$ и изображается площадью соответственного столбика диаграммы (на рисунке — заштрихованный столбик). При прохождении диаграммы вправо ($ds > 0$) и влево ($ds < 0$) значения $p_{ст}$ повторяются, а значения ds меняют знаки. Поэтому работа за полный цикл колебания оказывается равной нулю. Это означает, что, как нам уже было известно, работа сил статического давления за период равна нулю, т. е. эти силы не вызывают поглощения звука.

Предположим теперь, что имеется еще добавочное давление q , отстающее по фазе относительно сжатия на четверть периода. Это значит, что мнимость q равна мнимости $-is$, т. е. величина $q/(-is)$ вещественна и положительна. На рис. 119.1, а изображена пунктиром диаграмма и этого добавочного давления q . Она представляет собой эллипс с осями, направленными по осям координат диаграммы. Изображающая точка обходит эллипс по часовой стрелке. Наконец, на том же рисунке изображена диаграмма суммарного давления $p_{ст} + q$, имеющая вид эллипса с наклонными осями, который также обходится изображающей точкой по часовой стрелке. Элементарная работа суммарного давления

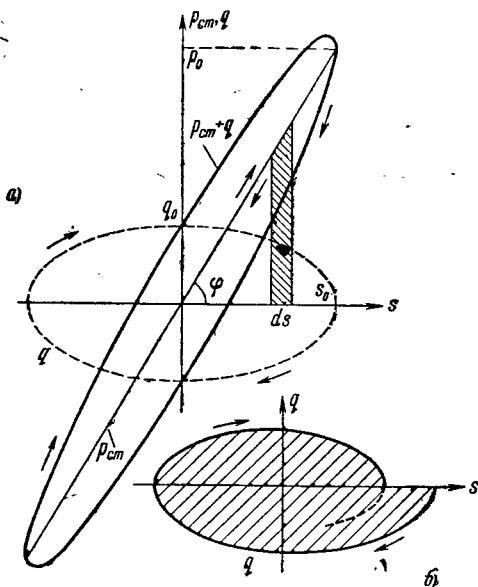


Рис. 119.1. а) Индикаторная диаграмма статического давления $p_{ст}$, диссипативного давления q и результирующего давления $p_{ст} + q$. б) Уточненная индикаторная диаграмма диссипативного давления для волны, затухающей с течением времени.

каждый раз изображается столбиком, но при прохождении изображающей точки вперед и назад высоты столбиков будут различны: при прохождении вправо (положительная работа) площадь столбика больше, чем при прохождении влево (отрицательная работа). В итоге за один обход эллипса $p_{ст} + q$, т. е. за один период, суммарная работа будет положительна: она изобразится площадью этого эллипса. Но, как легко видеть, площади эллипсов q и $p_{ст} + q$ равны друг другу. Поэтому для нахождения работы диссипативных сил можем пользоваться диаграммой для q (пунктирный эллипс).

Заметим, что, помимо диссипативного давления, динамическая добавка может содержать слагаемое, синфазное со сжатием, т. е. являющееся, как и статическое давление, упругим напряжением. В дальнейших расчетах будем обозначать такую добавку через p' , а результирующее упругое давление, находящееся в фазе со сжатием, — через $p = p_{ст} + p'$. Индикаторная диаграмма для результирующего упругого давления, так же как и для статического давления, изображается прямой линией; отличие заключается только в угле наклона. На рис. 119.1 добавка p' не показана. Скорость звука определяется через сжатие и результирующее упругое давление формулой

$$c^2 = p/\rho s. \quad (119.1)$$

Обозначим амплитудные значения сжатия s , упругого давления p и диссипативного давления q через s_0 , p_0 и q_0 соответственно. Тогда полуоси пунктирного эллипса на рис. 119.1 равны s_0 и q_0 ; следовательно, площадь этого эллипса (работа диссипативных сил за один период $T = 2\pi/\omega$) равна $\pi s_0 q_0$. Значит энергия, диссипирующая за 1 сек, т. е. мощность диссипативных сил, выражается формулой

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\pi s_0 q_0}{T} = \frac{\omega s_0 q_0}{2}.$$

С другой стороны, средняя плотность энергии в гармонической звуковой волне равна $E = (1/2) s_0 p_0$. Значит, согласно (117.3), временной коэффициент затухания равен

$$\alpha = \omega q_0 / 2p_0. \quad (119.2)$$

Пространственный коэффициент затухания найдем из (117.5):

$$\delta = k q_0 / 2p_0. \quad (119.3)$$

Итак, задача определения временного и пространственного коэффициентов затухания звука свелась к нахождению диссипативного добавочного давления, соответствующего данному динамическому упругому давлению.

Не всегда диссипативные силы выражаются скалярной динамической добавкой к давлению. Например, вязкие силы характери-

зуются тензором напряжений: кроме нормальных напряжений (давлений), вязкость создает также и касательные напряжения. Тем не менее и в этом случае возможно ввести эффективное добавочное диссипативное давление и снова вычислять коэффициенты затухания по формулам (119.2) и (119.3). В самом деле, пусть σ_{jk} есть тензор вязких напряжений. Как известно из гидродинамики, элементарная работа этих напряжений над частицей выражается так: $-\sigma_{jk} du_{jk}$, где du_{jk} — приращение тензора деформаций u_{jk} данной частицы. Но в гармонической волне все линейные величины пропорциональны друг другу. В частности, тензор деформаций пропорционален сжатию: $u_{jk} = a_{js}s$. Элементарную работу диссипативных сил над частицей можно поэтому записать так:

$$-\sigma_{jk} du_{jk} = -\sigma_{jk} a_{jk} ds = q ds, \quad (119.4)$$

где введено обозначение $q = -\sigma_{jk} a_{jk}$ *); эту величину можно считать эффективным значением диссипативного давления. Работа сил вязкости за период получится как площадь индикаторной диаграммы (эллипса), полуоси которого равны амплитудным значениям величин s и $-\sigma_{jk} a_{jk}$.

В приведенных расчетах затухания мы неявно делали одно предположение: мы все время предполагали, что затухание за один цикл мало. В самом деле, по мере затухания амплитуда колебания уменьшается и, следовательно, изображающая точка на индикаторной диаграмме движется фактически не по эллипсу, а по эллиптической спирали, и вместо площади эллипса следует брать площадь, показанную на рис. 119.1, б. Но если затухание за один цикл мало, то эти площади мало различаются и нашим расчетом можно пользоваться. Практически это требование выполняется почти всегда.

§ 120. Расчет коэффициентов поглощения звука для различных механизмов поглощения

Начнем со случая внешнего трения — воздействия на частицы среды силы, направленной противоположно скорости частицы, а по величине пропорциональной этой скорости. В этой задаче можно считать, что к единичному объему среды приложена сила $F = -\eta v$, где v — скорость объема, а η — коэффициент трения. Силу можно рассматривать как градиент, взятый с обратным знаком, некоторого давления q — эффективного диссипативного давления, действующего в среде благодаря трению на стенках. Это добавочное давление связано с F соотношением $F = -\partial q / \partial x$; значит, для плоской волны $p = e^{ikx}$ окажется $q = -F / ik = -i\eta v / k$.

Поскольку скорость синфазна со сжатием и пропорциональна ему, добавочное давление оказывается пропорциональным сжатию

*) Знак q выбран из тех соображений, что давление считается положительным, когда оно направлено по внутренней нормали, а величина $\sigma_{jk} a_{jk}$ положительна в противоположном случае.

среды, а по фазе отстает от сжатия на четверть периода, т. е. действительно является диссипативным давлением. Поэтому можно пользоваться формулами предыдущего параграфа: согласно (119.3)

$$\delta = \frac{kq_0}{2\rho_0} = \frac{\eta}{2\rho c}. \quad (120.1)$$

Замечательно, что при внешнем трении коэффициент затухания не зависит от частоты. Значит, не только гармоническая волна, но и волна любого вида распространяется в среде, испытывающей только внешнее трение, без изменения формы, а давление в ней убывает при распространении по экспоненциальному закону.

Рассмотрим теперь затухание звука, вызываемое вязкостью среды. Для плоской волны, бегущей вдоль оси x_1 , отлична от нуля только одна из производных компонент скорости, входящих в (118.1), а именно v_1 . При таком движении среды совершает работу только одна из компонент тензора напряжений, а именно σ_{11} , причем

$$\sigma_{11} = \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_1}.$$

Но в данном случае величина $\partial v_1 / \partial x_1$ равна дивергенции скорости, так что $\partial v_1 / \partial x_1 = -\partial s / \partial t = i\omega s$. Следовательно, согласно (119.4),

$$q = -i\omega \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) s.$$

Величина q и есть эквивалентное диссипативное давление. Отсюда, переходя к амплитудным значениям, найдем по формуле (119.3) коэффициент поглощения звука:

$$\delta = \omega^2 \frac{\frac{4}{3}\eta + \zeta}{2\rho c^3}. \quad (120.2)$$

Обратим внимание на получившуюся квадратичную частотную зависимость коэффициента поглощения («нормальное поглощение»). Эта зависимость приводит к тому, что при распространении в реальной среде в сложном звуке исчезают высшие гармоники, в то время как низшие частоты распространяются со сравнительно малым затуханием. Например, в большом концертном зале ясно ощущается обеднение тембра скрипки (сравнительно высококачественный музыкальный инструмент), если перейти из первых рядов партера на галерку.

Коэффициент затухания оказался обратно пропорциональным плотности. Это объясняется тем, что энергия в звуковой волне пропорциональна плотности среды, в то время как вязкие силы и,

следовательно, работа диссипативных сил непосредственно от плотности не зависят. В свободной атмосфере плотность воздуха быстро убывает при увеличении высоты над землей, в то время как вязкость остается неизменной. Поэтому на большой высоте поглощение звука велико и звук затухает сравнительно быстро.

Рассмотрим теперь термические механизмы поглощения звука. И теплоизлучение, и теплопроводность — это выравнивание «адиабатических» температурных изменений, возникающих при сжатиях и разрежениях.

При полном выравнивании температур, т. е. при изотермическом распространении звука, поглощение отсутствовало бы и скорость звука имела бы ньютоново значение $c_n = 1/\sqrt{\rho\beta}$, где β — изотермическая сжимаемость. При полном отсутствии выравнивания — адиабатический процесс — поглощения также не было бы, а скорость звука имела бы лапласово значение $c_d = \sqrt{\gamma/\rho\beta}$. В действительности температура выравнивается частично и поэтому поглощение всегда имеется.

Для механизма теплоизлучения при низких частотах скорость звука будет стремиться к значению c_n , а при высоких — к c_d . В самом деле, так как поток тепла меняет свое направление каждые полпериода, то выравнивание температур путем излучения успевает произойти тем в большей степени, чем больше период колебания. Более сложно обстоит дело с теплопроводностью: здесь играет роль не только период колебания, определяющий время, в течение которого происходит выравнивание температур, но и длина волны, определяющая пространственный масштаб неравномерности выравнивающихся температур. Успевают или не успевают выровняться температура за половину периода — определится соотношением между длиной волны звука и длиной тепловой волны при данной частоте. Пока волновое число тепловой волны велико по сравнению с волновым числом для звука, выравнивание температур мало и процесс идет практически адиабатически (лапласова скорость звука). При обратном соотношении волновых чисел процесс близок к изотермическому (ньютонова скорость звука). Но волновое число звуковых волн пропорционально частоте, а волновое число тепловых волн пропорционально корню квадратному из частоты (см. § 19). Поэтому при низких частотах распространение звука происходит с лапласовой скоростью, а при высоких частотах — с ньютоновой.

Перейдем к расчетам. Начнем с механизма теплоизлучения. В обычных условиях, например при распространении звука в атмосфере, роль такого теплоизлучения невелика. Важность этого механизма с теоретической стороны заключается в том, что он дает наглядный пример релаксационного процесса, приводящего к затуханию и к дисперсии скорости звука, подчиняющимся характерным законам, одинаковым для всех релаксационных процессов.

Напомним уравнение состояния среды для малых колебаний:

$$p = \frac{s}{\beta} + \frac{\alpha T}{\beta},$$

где α — коэффициент термического расширения. Величина $s/\beta = p_{\text{ст}}$ есть статическое давление, а слагаемое $\alpha T/\beta = p' + q$ (p' — вещественно, q мнимо) — динамическая добавка, обусловливаемая как адиабатическим изменением температуры при сжатиях и разрежениях, так и выравниванием создающихся при этом разностей температур. При в точности изотермическом или адиабатическом процессах было бы $q = 0$. Изменение температуры в результате теплоизлучения при постоянном сжатии определяется уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{T}{\tau}, \quad (120.3)$$

где T — отклонение температуры данного тела от средней температуры среды, а τ — так называемое время релаксации процесса. Интегрируя, найдем: $T = T_0 \exp(-t/\tau)$, где T_0 — значение T в начальный момент времени. Таким образом, физический смысл τ — время, в течение которого данное отклонение температуры тела от средней температуры убывает вследствие теплоизлучения в e раз.

При адиабатическом процессе $p = \gamma s/\beta$, откуда $T_{\text{ад}} = (\gamma - 1) s/\alpha$.

Значит, при наличии и сжатия, и теплоизлучения температура будет определяться уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T_{\text{ад}}}{\partial t} - \frac{T}{\tau} = \frac{\gamma - 1}{\alpha} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{T}{\tau}. \quad (120.4)$$

Умножая на α/β , получим уравнение для динамической добавки к давлению:

$$\frac{\partial (p' + q)}{\partial t} = \frac{\gamma - 1}{\beta} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p' + q}{\tau}. \quad (120.5)$$

Обратимся к гармонической звуковой волне. Вначале рассмотрим предельные случаи «большой» и «малой» частоты. Для этого удобно переписать (120.4) в виде

$$\frac{\partial (T - T_{\text{ад}})}{\partial t} = -\frac{T}{\tau}.$$

Будем считать частоту большой, если $\omega\tau \gg 1$, а малой, если $\omega\tau \ll 1$. При больших частотах температура почти не будет успевать выравниваться, и процесс распространения будет близок

к адиабатическому. Тогда в правой части последнего равенства можно приближенно положить $T = T_{ад}$. Интегрируя, найдем

$$T = T_{ад} - \frac{iT_{ад}}{\omega\tau}.$$

Динамическая добавка к давлению, следовательно, равна

$$p' + q = \frac{\alpha T}{\beta} = \frac{\alpha T_{ад}}{\beta} - \frac{i\alpha T_{ад}}{\beta\omega\tau} = \frac{(\gamma - 1)}{\beta} s - i \frac{(\gamma - 1)}{\beta\omega\tau} s.$$

Суммарное упругое давление равно $p = \gamma s/\beta$: эффективная сжимаемость принимает адиабатическое значение и, значит, скорость звука лапласова. Так как она соответствует предельно высоким частотам, будем обозначать эту скорость буквой c_{∞} . Коэффициент затухания найдем по формуле (119.3), подставляя в нее динамическое значение амплитуды упругого давления:

$$\delta_{\infty} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma c_{\infty}\tau}. \quad (120.6)$$

Замечательно, что коэффициент затухания для высоких частот не зависит от частоты: картина такая же, как и для внешнего трения с эффективным коэффициентом внешнего трения $\eta_{эфф} = \rho(\gamma - 1)/\gamma\tau$.

Теперь рассмотрим случай малых частот — процесс, близкий к изотермическому. Левая часть в уравнении (120.4) мала по сравнению с каждым слагаемым правой части и можно приближенно положить $T = -i\omega\tau T_{ад}$. Упругая компонента динамического давления в этом приближении отсутствует, так что скорость звука ньютонова. Так как она соответствует предельно низким частотам, будем обозначать ее буквой c_0 . Диссипативное давление равно $q = \alpha T/\beta = -i\omega\tau(\gamma - 1)p_{ст}$. Отсюда находим коэффициент затухания:

$$\delta_0 = \frac{(\gamma - 1)\omega^2\tau}{2c_0}. \quad (120.7)$$

Частотный ход затухания на низких частотах — такой же, как и для вязкости, т. е. на низких частотах поглощение звука «нормальное». Действие теплоизлучения можно интерпретировать для низких частот как наличие некоторой ∞ объемной вязкости с эффективным коэффициентом вязкости $\zeta_{эфф} = \rho\tau c_0^2(\gamma - 1)$.

Полученные выражения для коэффициентов поглощения и эффективных коэффициентов вязкости удобно выразить через предельные значения скорости c_0 и c_{∞} . В самом деле, $\gamma = c_{\infty}^2/c_0^2$. Пользуясь этим соотношением, получим для высоких частот:

$$\delta_{\infty} = \frac{c_{\infty}^2 - c_0^2}{2\tau c_{\infty}^3}. \quad (120.8)$$

Эффективный коэффициент внешнего трения равен $\eta_{\text{эфф}} = \rho (c_{\infty}^2 - c_0^2) / \tau c_{\infty}$. Для низких частот получим

$$\delta_0 = \frac{\omega^2 \tau (c_{\infty}^2 - c_0^2)}{2c_0^3}. \quad (120.9)$$

Эффективный коэффициент объемной вязкости $\zeta_{\text{эфф}} = \rho \tau (c_{\infty}^2 - c_0^2)$.

Последние формулы связывают поглощающие свойства жидкости с «дисперсионным скачком» квадрата скорости $\Delta (c^2) = c_{\infty}^2 - c_0^2$ при переходе от малых к высоким частотам и с временем релаксации τ . Эффект теплоизлучения приводит к «аномальному» поглощению: квадратичный закон затухания имеет место только на низких частотах, переходя к «насыщению» на высоких частотах.

Теперь, не ограничиваясь более предельными случаями, выясним, как происходит переход от нормального к аномальному поглощению, т. е. найдем характер изменения поглощения и скорости от частоты во всем диапазоне частот.

Уравнение (120.4) для гармонической волны принимает вид

$$-i\omega T = -i\omega \frac{\gamma - 1}{\alpha} s - \frac{T}{\tau},$$

откуда

$$T = \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\gamma - 1}{\alpha} s - i \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\gamma - 1}{\alpha} s.$$

Динамическая добавка к упругому давлению оказывается равной

$$p' = \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\gamma - 1}{\beta} s.$$

Таким образом, скорость звука при частоте ω определится из равенства

$$c^2 = \frac{p_{\text{ст}} + p'}{\rho s} = c_0^2 \frac{1 + \gamma \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} = c_0^2 + \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} (c_{\infty}^2 - c_0^2). \quad (120.10)$$

Отсюда для волнового числа при данной частоте получим

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1 + \omega^2 \tau^2}{1 + \gamma \omega^2 \tau^2} = k_0^2 \frac{1 + \omega^2 \tau^2}{1 + (c_{\infty}^2 / c_0^2) \omega^2 \tau^2}, \quad (120.11)$$

где $k_0 = \omega / c_0$. Диссипативное давление равно

$$q = -i \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{\gamma - 1}{\beta} s.$$

Согласно (119.3) (причем следует учесть добавку ρ')

$$\delta = \frac{(\gamma - 1) \omega^2 \tau \sqrt{(1 + \omega^2 \tau^2)/(1 + \gamma \omega^2 \tau^2)}}{2c_0 (1 + \gamma \omega^2 \tau^2)} = \frac{\omega^2 \tau (1 + \omega^2 \tau^2)^{1/2} (c_\infty^2 - c_0^2)}{2c_0^3 (1 + \omega^2 \tau^2 c_\infty^2 / c_0^2)^{3/2}}. \quad (120.12)$$

Из этой формулы непосредственно получаются и предельные значения поглощения для высоких и низких частот, найденные выше.

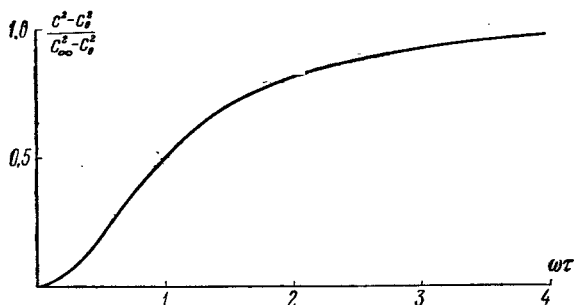


Рис. 120.1. Универсальный график относительной дисперсии при потерях в результате теплоизлучения и при любом другом релаксационном процессе.

Из уравнения (120.10) найдем относительный скачок квадрата скорости при данной частоте ω :

$$\frac{c^2 - c_0^2}{c_\infty^2 - c_0^2} = \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (120.13)$$

График этой функции показан на рис. 120.1. Это — универсальный график, не зависящий от величины $c_\infty^2 - c_0^2$. Зависимость коэффициента поглощения от $\omega\tau$ не удастся представить в таком же простом виде. Может оказаться удобным представление

$$\delta = \frac{c^2 - c_0^2}{2\tau c^3} = \frac{(c_\infty^2 - c_0^2) \omega^2 \tau^2 / (1 + \omega^2 \tau^2)}{2\tau [c_0^2 + (c_\infty^2 - c_0^2) \omega^2 \tau^2 / (1 + \omega^2 \tau^2)]^{3/2}}. \quad (120.14)$$

Мы видим, что механизм потерь путем теплоизлучения сопровождается дисперсией скорости звука. Можно доказать, что любой механизм поглощения сопровождается дисперсией. Но, как можно показать, и вязкость, и теплопроводность приводят к дисперсии в той частотной области (высокие частоты), где распространение звука уже прекращается вследствие большого затухания и поэтому практически не наблюдается. В механизме же теплоизлучения и в других релаксационных механизмах затухание может оказаться еще умеренным во всей частотной области, где имеет место заметная дисперсия скорости.

Механизм теплоизлучения — простейший пример целого ряда сходных друг с другом механизмов поглощения — так называемых *релаксационных механизмов*. Общей чертой всех этих механизмов является то, что динамическая добавка $p' + q$ к давлению при фиксированном сжатии спадает — «релаксирует» с течением времени, например, по экспоненциальному закону

$$\frac{\partial(p' + q)}{\partial t} = - \frac{p' + q}{\tau}, \quad (120.15)$$

где τ — время релаксации. Изменение же сжатия вызывает пропорциональное изменение динамического давления, так что в акустической волне динамическая добавка к статическому давлению удовлетворяет, как и для теплоизлучения, уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(p' + q) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p' + q}{\tau},$$

где β — некоторая константа вещества. Это уравнение совпадает с (120.5), если положить $\tilde{\beta} = \beta/(\gamma - 1)$. С учетом этой замены совпадут и дальнейшие расчеты. В частности, для произвольного релаксационного процесса с экспоненциальным законом релаксации имеют место полученные для релаксационного процесса частного вида (теплоизлучение) формулы (120.8)—(120.14), выражающие дисперсию и поглощение звука через предельные низкочастотные и высокочастотные значения скорости звука и время релаксации; остается в силе и график рис. 120.1.

Рассмотрим, наконец, механизм поглощения, обусловленный теплопроводностью, причем будем считать, что, как это и имеет место в действительности, до самых высоких частот выравнивание температур незначительно: процесс квазиadiaбатический. Общее уравнение изменения температуры в этом случае должно учитывать адиабатическое нагревание и эффект теплопроводности при постоянном сжатии. Уравнение теплопроводности для плоской волны

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c_V} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

заменяет в этом случае уравнение теплоизлучения. Общее уравнение принимает, следовательно, вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T_{ад}}{\partial t} + \frac{\kappa}{\rho c_V} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Так как процесс квазиadiaбатичен, то приближенно

$$\frac{\partial}{\partial t}(T - T_{ад}) = \frac{\kappa}{\rho c_V} \frac{\partial^2 T_{ад}}{\partial x^2},$$

откуда, интегрируя и подставляя $T_{ад} = \frac{\gamma-1}{\alpha} s$, найдем

$$T = \frac{\gamma-1}{\alpha} s - i \frac{\kappa}{\rho c_V} \frac{k^2}{\omega} \frac{\gamma-1}{\alpha} s.$$

Следовательно, вещественная добавка к давлению равна $p' = (\gamma - 1) s/\beta$, а диссипативное давление равно

$$q = -i \frac{\kappa}{\rho c_V} \frac{k^2}{\omega} \frac{\gamma-1}{\beta} s.$$

Вещественная добавка к давлению получается такого же вида, как при теплоизлучении на высоких частотах; значит, скорость распространения при не слишком высоких частотах лапласова.

Затухание определится все по той же формуле (119.3)

$$\delta = \frac{\kappa k^3}{2\rho\omega} \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_P} \right) = \frac{\omega^2 \kappa}{2\rho c^3} \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_P} \right). \quad (120.16)$$

Зависимости затухания от частоты, плотности и скорости звука — такие же, как и для вязкого механизма потерь (см. (120.2)). В этом отношении влияние вязкости и теплопроводности на затухание звука неразличимы. Совместно эти два механизма приводят к суммарному коэффициенту затухания вида

$$\delta = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_P} \right) \right]. \quad (120.17)$$

В газах механизмы вязкости и теплопроводности вносят примерно одинаковый вклад в поглощение звука. В жидкостях главную роль играет вязкость; исключением является ртуть, обладающая большой теплопроводностью при сравнительно малой вязкости.

Мы показали, как, пользуясь индикаторными диаграммами, рассчитать коэффициент поглощения гармонической волны. Можно найти коэффициент поглощения и по другому пути, внося в обычную систему акустических уравнений дополнительно диссипативные силы. Оказывается, что это равносильно введению *комплексной плотности* или *комплексной сжимаемости*. В самом деле, рассмотрим например случай внешнего трения. Внешнее трение дает дополнительную силу, действующую на частицу, поэтому придется внести дополнительный член в уравнение движения. Рассмотрим для простоты одномерную задачу. Вместо обычного уравнения движения придется написать

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \eta v = 0. \quad (120.18)$$

Но это уравнение можно переписать в обычном виде, если учесть, что $v = \frac{1}{-i\omega} \frac{\partial v}{\partial t}$, и ввести комплексную плотность $\tilde{\rho} = \rho + \frac{\eta}{-i\omega}$.

Тогда уравнение (120.18) запишется так:

$$\tilde{\rho} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Уравнение формально вернулось к обычному виду. В частности, можно для заданной частоты найти по обычной формуле и волновое число:

$$\tilde{k} = V \sqrt{\tilde{\rho} \tilde{\beta} \omega^2}.$$

В развернутом виде волновое число запишется в виде

$$\tilde{k} = V \sqrt{\rho \beta \omega^2 (1 + i\eta/\rho\omega)}.$$

Если затухание мало, т. е. мнимая часть волнового числа мала по сравнению с вещественной, то $k = k + i\eta/2\rho c$, что дает ту же величину затухания (120.1), что и найденная по способу индикаторных диаграмм.

Аналогично, если диссипативные силы связаны не со скоростью, а со сжатием среды, то их действие можно учесть, добавляя мнимую часть к сжимаемости: $\tilde{\beta} = \beta + i\varepsilon$. Это также приведет к появлению мнимой части в волновом числе, если снова формально воспользоваться стандартной формулой для волнового числа $k = V \sqrt{\rho \tilde{\beta} \omega^2}$; и эта мнимая часть снова явится коэффициентом затухания волны.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

§ 121. Волны конечной амплитуды

В гл. II мы показали, что точные уравнения гидродинамики и уравнение состояния нелинейны, и перешли от них к линейным уравнениям акустики, отбрасывая в уравнениях члены, содержащие квадраты и произведения величин первых порядков (давление, скорость, сжатие). Для плоских волн отбрасываемые члены относились к сохраняемым как $M : 1$, где $M = v/c = \beta p$ — число Маха. Ошибка в решениях при пренебрежении нелинейностью тем меньше, чем меньше число Маха. Однако, как правило, эта ошибка накапливается*), и поэтому при любом значении M звуковая волна по мере распространения постепенно искажается по сравнению с волной, изображаемой решением линейного уравнения. Для очень малых M звуковая волна может затухнуть прежде, чем произойдет заметное искажение. Но скорость накопления ошибки растет вместе с амплитудой волны, в то время как скорость затухания остается неизменной. Поэтому, начиная с некоторых значений числа Маха, искажение волны станет существенным даже при наличии поглощения. В таких случаях говорят о *волне конечной амплитуды*, в то время как при возможности пренебрежения нелинейными эффектами говорят о волне бесконечно малой амплитуды.

О количественной стороне нелинейного искажения можно судить по такому примеру. Для того чтобы нелинейное искажение плоской волны частоты 1000 гц составило по амплитуде 1% от амплитуды волны, рассчитанной по линейной теории, расстояние, которое должна пробежать волна, составит: на пороге слышимости 3000 км; на уровне звука, соответствующем громкой речи с расстояния 1 м, — 1 км; на уровне звука, соответствующем болевому порогу, — 1 м (цифры даны без учета затухания). Для расходящихся волн расстояния получились бы во много раз большими. При обычной интенсивности звуков речи или музыки нелинейные искажения еще очень малы: нелинейные искажения восприятия, вносимые слуховым органом человека, значительно больше, чем искажения при распространении. Но при звуках

*) В §§ 129, 130 указаны важные исключения.

высокой интенсивности — при звуках выстрелов, взрывов, реактивных струй, при обтекании сверхзвуковых самолетов, в мощном ультразвуке, используемом в технологических процессах, — нелинейные эффекты сильны.

При числах Маха порядка единицы или больших единицы линеаризованные уравнения совсем непригодны для описания волн. Непригодны они и в случаях, когда распространение волны, даже при небольших числах Маха, прослеживается на большом расстоянии или в течение долгого времени. Если нелинейные искажения велики, то придется совсем отказываться от линеаризации уравнений и искать решения исходных нелинейных уравнений. При малой нелинейности можно ограничиться поправками к решению линеаризованных уравнений. Первый случай более труден и получить требуемое решение удастся только в простейших случаях. Один такой случай рассмотрим в следующем параграфе. Во всей главе не будем учитывать поглощение.

§ 122. Плоская бегущая волна конечной амплитуды (точное решение)

Приведем точное решение задачи о плоской бегущей волне конечной амплитуды. В отличие от линеаризованной задачи, профиль волны конечной амплитуды изменится при распространении. Поэтому для такой волны неприменимо понятие скорости волны, в котором профиль волны не считается перемещающимся как твердое тело. Оказывается, однако, что каждая точка профиля бегущей плоской волны, т. е. *место с определенным значением звукового давления*, перемещается при распространении волны с постоянной скоростью; при этом скорость различна для разных значений давления — тем больше, чем больше давление. Найдем, какова эта скорость для разных значений давления; тогда сможем найти, как меняется профиль волны по мере распространения.

Пусть в данный момент форма профиля волны конечной амплитуды задана. Будем рассматривать каждый участок профиля как малое возмущение, наложенное на среду, находящуюся при некотором звуковом давлении p (среднее давление на рассматриваемом участке) и имеющую в целом некоторую скорость v (средняя скорость частиц на участке) относительно невозмущенной среды. Сами эти средние давления и скорости частиц меняются от участка к участку.

На данном участке скорость малых возмущений относительно среды равна $c = \sqrt{dp/d\rho}$, где производная взята для значения ρ , соответствующего среднему состоянию среды на данном участке (а не невозмущенному состоянию, как в линейной акустике). Так как это малое возмущение переносится средой со скоростью v , то суммарная скорость возмущения относительно невозмущенной среды (это и есть скорость точки профиля, в которой давление имеет данное значение) равна $c + v$. Величина c зависит только

от давления в данном месте. Покажем, что в бегущей волне скорость частиц также зависит только от давления.

В самом деле, рассмотрим малое возмущение в виде бегущей волны, наложенное на бегущую в ту же сторону волну конечной амплитуды. Давление δp и скорость частиц δv этого малого возмущения (добавляющиеся к средним значениям p и v в исходной волне конечной амплитуды) должны быть связаны соотношением $\delta v = \delta p / \rho c$. Но ρ и c зависят только от давления p . Значит, приращения δp и δv можно считать дифференциалами полного давления и полной скорости частиц в волне конечной амплитуды: $\delta v = dp / \rho c$, откуда, интегрируя, найдем

$$v = \int_0^p \frac{dp}{\rho c}. \quad (122.1)$$

Таким образом, бегущую волну конечной амплитуды можно записать в виде

$$p = p [x - (c + v) t], \quad (122.2)$$

где c и v являются функциями самого давления p . Это — обобщение решения для волн бесконечно малой амплитуды, распространенное на волны конечной амплитуды. Очевидно, скорость частиц выразится аналогичной формулой

$$v = v [x - (c + v) t].$$

Конкретная зависимость c и v от давления определяется свойствами среды (уравнением состояния). Найдем соответственные выражения для идеального газа. Так как волна распространяется практически адиабатически, то уравнение состояния можно записать в виде

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

где P_0 и ρ_0 — давление и плотность невозмущенной среды и $P = P_0 + p$. Скорость c малого возмущения при среднем давлении среды $P_0 + p$ определится из уравнения

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}, \quad (122.3)$$

откуда

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{c^2}{c_0^2} \right)^{\gamma/\gamma-1},$$

где $c_0 = \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$ — скорость малых возмущений относительно невозмущенной среды при давлении P_0 .

Скорость малых возмущений оказалась зависящей от уже имеющегося давления, что на первый взгляд противоречит резуль-

тату § 14 о независимости скорости звука от давления газа. Дело в том, что в § 14 газ рассматривался при разном давлении, но при одной и той же температуре. Здесь же, в волне, газ оказывается сжатым адиабатически и его температура, а вместе с тем и скорость малых возмущений растет с давлением.

Выполним в интеграле (122.1) замену переменной интегрирования, принимая за новую переменную скорость малого возмущения c . Из (122.3) имеем:

$$dp = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{c_0^2} \left(\frac{c^2}{c_0^2} \right)^{1/(\gamma-1)} d(c^2),$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{c^2}{c_0^2} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \frac{dp}{\rho c} = \frac{2}{\gamma-1} dc.$$

Подставляя в (122.1), найдем

$$v = \int_{c_0}^c \frac{2}{\gamma-1} dc = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0),$$

откуда $c = c_0 + v(\gamma - 1)/2$. Это есть скорость малого возмущения, распространяющегося поверх волны конечной амплитуды, имеющей в данной точке звуковое давление $p = P - P_0$. Скорость же ординаты профиля с этим давлением равна, согласно сказанному выше,

$$c + v = c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v = c_0 \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M \right). \quad (122.4)$$

Таким образом, профиль волны конечной амплитуды в идеальном газе изменяется при распространении волны по закону

$$p = p \left[x - c_0 \left(1 + \frac{\gamma+1}{2} M \right) t \right]. \quad (122.5)$$

Зная зависимость c и v от p , можем строить изменяющийся профиль волны по мере ее распространения. Каждая точка профиля переносится за время t на расстояние $(c + v)t$ (для идеального газа — на расстояние $c_0 [1 + M(\gamma + 1)/2]t$). Построение нового профиля по старому показано на рис. 122.1. Профиль меняется так, что участки с большим давлением обгоняют участки с меньшим давлением. Отсюда следует, в частности, что приведенный выше расчет не может применяться неограниченно: крутизна переднего склона фронта будет все время нарастать, и, как показывает рис. 122.1, если продолжать построение, то получится неоднозначность давления вблизи переднего фронта волны.

В действительности, конечно, неоднозначности не получается; образуется скачок давления на переднем фронте. Начиная с этого момента обычные уравнения гидродинамики идеальной жидкости

делаются неприменимыми: необходимо учитывать поглощение, особенно большое вблизи фронта ввиду больших градиентов скорости и температуры. При больших числах Маха и этого оказывается недостаточно и приходится переходить к молекулярно-кинетическим представлениям. В газе ширина области скачка, где неприменимы уравнения гидродинамики, оказывается для больших чисел Маха по порядку величины равной длине свободного пробега молекул. Скачок вызывает большое поглощение акустической энергии, приводящее к быстрому затуханию волны после образования скачка.

Выражение (122.2) можно представить в виде

$$p = p [x - c_0 t - (c - c_0 + v) t],$$

где при $M \ll 1$ величину в круглых скобках можно считать пропорциональной числу Маха. Разложим это выражение в ряд по степеням $(c - c_0 + v) t$ и ограничимся первыми двумя членами:

$$p = p(x - c_0 t) - (c - c_0 + v) t p_x(x - c_0 t) \quad (122.6)$$

(частные производные будем обозначать в этой главе соответственными индексами). Волна конечной амплитуды оказывается в этом приближении представленной в виде суммы двух членов: волны малой амплитуды $p' = p(x - c_0 t)$ с формой профиля, соответствующей начальному моменту времени (относительная амплитуда равна числу Маха) и распространяющейся по законам линейной акустики, и добавочной волны с амплитудой, пропорциональной квадрату числа Маха:

$$p'' = -(c - c_0 + v) t p_x(x - c_0 t) = \frac{1}{c_0} (c - c_0 + v) t p_t(x - c_0 t).$$

Этот добавочный член называют поэтому квадратичной поправкой к члену первого порядка — решению p' линеаризованного уравнения. Квадратичная поправка является в данном случае вековым членом в решении: она нарастает пропорционально прошедшему времени. Пока квадратичная поправка мала, она достаточно хорошо представляет изменение профиля волны конечной амплитуды. Ясно, что данное решение в виде суммы линейного решения и квадратичной поправки может годиться только на начальном

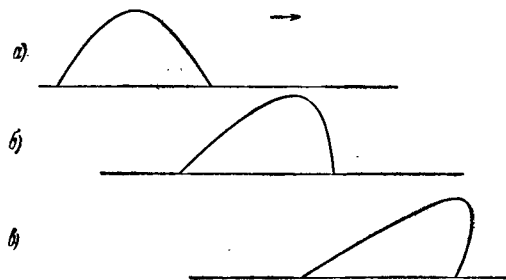


Рис. 122.1. Последовательные «моментальные фотографии» профиля волны, бегущей вправо. Форма *в* невозможна: еще до ее наступления в месте, где возникла бы двухзначность давления, образуется вертикальный фронт, что соответствует скачку давления — разрыву непрерывности давления.

этапе распространения волны: рост векового члена приведет к тому, что выбранное приближение станет с течением времени неприемлемым.

Квадратичную добавку удобно переписать иначе. Для малых чисел Маха приближенно

$$c - c_0 = \left(\frac{dc}{dp} \right)_0 p', \quad v = \frac{1}{\rho_0 c_0} p'.$$

Следовательно, с принятой степенью точности

$$p'' = \frac{t}{2\rho_0 c_0^2} \left[1 + \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 \right] (p')^2. \quad (122.7)$$

Нуль в индексе при производных означает, что производные берутся в точке $p = 0$.

§ 123. Нахождение квадратичной поправки методом малых возмущений

Точные решения нелинейных уравнений удается получить только в малом числе случаев. Случай плоской бегущей волны, рассмотренный в предыдущем параграфе, — один из немногих примеров такого решения. Зная точное решение, конечно, легко получить и приближенное (например, квадратичную поправку), как это также было показано в предыдущем параграфе. Но в других случаях точные решения не найдены и приходится ограничиваться приближенными решениями.

Если число Маха мало по сравнению с единицей и если волну рассматривают в течение не слишком долгого времени или на не слишком большом участке ее распространения, то можно учесть нелинейность путем введения малой поправки к решению линеаризованного уравнения, отыскивая поправку методом малых возмущений. Для этого как члены в точном уравнении, так и искомое решение представляют в виде ряда по степеням малого параметра — числа Маха — и, разделяя в уравнениях члены разных порядков, отыскивают последовательные члены решения. Следует иметь в виду, что в воздухе число Маха не превышает 0,0015 даже для болевого порога, поэтому число Маха действительно можно считать в ряде случаев малым параметром задачи.

В дальнейшем мы будем ограничиваться нахождением только второго члена — квадратичной поправки к решению линеаризованных уравнений. Вообще говоря, нахождение последовательных членов разложения сводится к решению линейных задач: к нахождению звукового поля в линейном приближении, вызванного сторонними источниками звука (сторонними объемными скоростями и сторонними силами), определяемыми предыдущими членами разложения. В первом приближении метода малых возмущений, когда помимо линейных членов удерживаются только члены второго порядка по числу Маха, сторонние источники опре-

деляются квадратами и произведениями величин первого приближения. Получающаяся квадратичная поправка обычно дает указание и на поведение волны в высших приближениях: пока поправка остается малой по сравнению с членом первого порядка, высшими членами разложения можно, как правило, пренебрегать.

Формально нахождение квадратичной поправки аналогично методу определения рассеянного поля в среде со слабыми неоднородностями (см. § 114). В обоих случаях нахождение дополнительного поля (нелинейной поправки — в одном случае и рассеянного поля — в другом) заменяется нахождением поля в линейной (соответственно однородной) среде, создаваемого сторонними источниками звука, зависящими от исходного поля.

В обоих случаях поправка мала, но накапливается, и поэтому рано или поздно эффект делается велик и расчет перестает быть применимым. Но при рассеянии на статистических неоднородностях фазы рассеянных волн случайны и нарастание поправки происходит медленно — пропорционально корню квадратному из времени распространения или из длины пробега волны. В нелинейном же эффекте добавочные поля складываются в фазе друг с другом и поправка растет быстрее: пропорционально самому времени или длине пробега. Поэтому время или длина пробега, для которых метод малых возмущений применим, в нелинейных задачах меньше, чем в задачах о рассеянии.

Встречаются различные акустические ситуации, в которых задачу о нахождении квадратичной поправки к заданному полю первого порядка приходится ставить по-разному. Так, может оказаться, что задано поле в некоторый момент времени t_0 . Тогда это поле можно принять за поле первого порядка, полагая поле второго порядка в начальный момент равным нулю, и искать, как оно меняется с течением времени.

В другой постановке может быть задано давление, создаваемое на поверхности излучателя звука (например, колеблющегося поршня). Тогда поле, создаваемое на излучателе, взятое в линейном приближении, можно принять за поле первого порядка, а квадратичную поправку к давлению принять на поверхности поршня равной нулю; задача будет состоять в этом случае в нахождении поправки к давлению во всем остальном пространстве. Заметим, что в этой задаче квадратичная поправка к смещению поршня уже не равна нулю.

В третьей постановке задачи можно принять за величину первого порядка заданное смещение поршня, так что квадратичную поправку к смещению на поршне следует принять равной нулю. Задача в этом случае состоит в отыскании поправки к давлению, определенному по линейной теории, во всем пространстве, в том числе и на самой поверхности поршня, где квадратичная поправка к давлению, рассчитанному по линейной теории, не будет равна нулю. Возможны и другие варианты постановки задачи.

§ 124. Квадратичная поправка в плоской волне

Простейшая задача нелинейной акустики — нахождение квадратичной поправки для плоской волны. Для этого удобно пользоваться лагранжевыми координатами. Дело в том, что граница жидкости (например, свободная граница) задается фиксированным значением лагранжевой координаты независимо от того, применяем мы линеаризацию или пользуемся точными уравнениями. В эйлеровых же координатах при учете квадратичной поправки следует относить граничное условие к переменному значению координаты, учитывая смещение границы, имеющее порядок, как мы видели в § 41, как раз тех квадратичных величин в уравнениях, которыми мы раньше пренебрегали.

Напишем раньше всего точные уравнения для одномерной задачи в лагранжевых координатах. Масса элемента среды, заключенного между плоскостями a и $a + da$, равна $\rho_0 da$, где ρ_0 — невозмущенная плотность среды. Давления на плоскостях, ограничивающих элемент, равны соответственно p и $p + p_a da$; значит, результирующая сила, действующая на данный элемент, равна $-p_a da$. Обозначая смещение элемента через $\xi = \xi(a, t)$, получим уравнение движения элемента в виде

$$\rho_0 \xi_{tt} + p_a = 0. \quad (124.1)$$

Точное уравнение движения оказалось линейным.

Длина данного элемента, в невозмущенном состоянии равная da , окажется после возмущения равной $da(1 + \xi_a)$. Значит, закон сохранения массы выразится формулой

$$\rho_0 da = \rho(1 + \xi_a) da,$$

где ρ — плотность элемента после деформации. Это уравнение можно записать в виде

$$\xi_a = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}. \quad (124.2)$$

Уравнение сохранения массы оказалось нелинейным. Наконец, уравнение состояния даст (нелинейную) зависимость плотности от давления

$$\rho = \rho(p)$$

(мы предполагаем, как обычно, что плотность среды зависит только от давления в данной точке).

Теперь напишем приближенные уравнения, разлагая точные значения звукового давления p , смещения ξ и приращения плотности $\rho - \rho_0$ в ряд по степеням числа Маха (или другой величины, пропорциональной числу Маха) и ограничиваясь членами первого порядка (линейное приближение) и второго порядка (квадратичная поправка). Величинами третьего порядка здесь и ниже будем пренебрегать. Линейные величины будем обозна-

чать одним штрихом, а квадратичные — двумя. Очевидно, уравнения можно будет написать отдельно для линейных и отдельно для квадратичных величин.

Итак, пусть

$$\begin{aligned} \rho &= \rho' + \rho'', \quad \xi = \xi' + \xi'', \\ \rho - \rho_0 &= \rho' + \rho''. \end{aligned} \quad (124.3)$$

В уравнении состояния напишем изменение плотности в виде ряда по степеням давления и, опуская члены третьего порядка, ограничимся первыми двумя слагаемыми:

$$\rho - \rho_0 = \rho' + \rho'' = \left(\frac{d\rho}{d\rho} \right)_0 (\rho' + \rho'') + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\rho}{d\rho^2} \right)_0 \rho'^2. \quad (124.4)$$

Производные следует брать в точке $\rho' + \rho'' = 0$, так что здесь $\left(\frac{d\rho}{d\rho} \right)_0 = \frac{1}{c_0^2}$. Таким образом,

$$\rho' = \frac{\rho'}{c_0^2},$$

$$\rho'' = \frac{\rho''}{c_0^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d(1/c^2)}{d\rho} \right)_0 \rho'^2 = \frac{\rho''}{c_0^2} - \frac{1}{2c_0^4} \left(\frac{dc^2}{d\rho} \right)_0 \rho'^2. \quad (124.5)$$

Подставляя (124.3) и (124.4) в уравнения (124.1) и (124.2), разделяя в этих уравнениях члены первого и второго порядков и опуская члены высших порядков, найдем следующие полные системы уравнений для величин первого и второго порядков:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \xi'_{tt} + \rho'_a &= 0, \\ \rho_0 \xi'_a + \rho' &= 0, \\ \frac{1}{c_0^2} \rho' - \rho' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (124.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \xi''_{tt} + \rho''_a &= 0, \\ \rho_0 \xi''_a + \rho'' &= \frac{\rho'^2}{\rho_0}, \\ \frac{1}{c_0^2} \rho'' - \rho'' &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d(1/c^2)}{d\rho} \right)_0 \rho'^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{c_0^4} \left(\frac{dc^2}{d\rho} \right)_0 \rho'^2. \end{aligned} \right\} \quad (124.7)$$

Удобно привести каждую из систем к одному уравнению, исключая две из величин ξ , ρ , ρ и оставляя только одну из них. Так, одно уравнение для давления получим, дифференцируя в каждой из систем (124.6) и (124.7) первое уравнение один раз по координате, второе и третье — дважды по времени и вычитая первое из суммы последних. Для давления первого порядка полу-

чится обычное волновое уравнение в одном измерении, написанное в лагранжевых координатах:

$$p'_{tt} - c_0^2 p'_{aa} = 0. \quad (124.8)$$

Для давления второго порядка придем, пользуясь также последним уравнением (124.6), к уравнению

$$p''_{tt} - c_0^2 p''_{aa} = G (p')_{tt}, \quad (124.9)$$

где так называемый коэффициент нелинейности G равен

$$G = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left[1 + \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 \right]. \quad (124.10)$$

Заметим, что при линеаризации можно было не делать различия между записью в лагранжевых и в эйлеровых координатах и, например, не различать решения в виде бегущей волны вида $p(t - a/c_0)$ и $p(t - x/c_0)$ соответственно. Но теперь, когда нас интересует и второй порядок величин, различие следует учитывать и, переходя от лагранжевых к эйлеровым координатам, нельзя в выражении для волны просто заменить a на x , а необходимо еще ввести поправку второго порядка. Конечно, выбор в качестве первого приближения решения волнового уравнения, написанного в лагранжевых координатах, не обязателен; за первое приближение можно было бы принять (в случае бегущей волны) не $p(t - a/c_0)$, а $p(t - x/c_0)$. Но соответственно пришлось бы изменить и квадратичную поправку; сумма поправочного члена с линейным решением должна в обоих случаях дать одну и ту же величину с точностью до членов высшего порядка малости.

Так как лагранжева (a) и эйлерова (x) координаты частиц связаны соотношением

$$x = a + \xi,$$

то волну первого порядка, заданную в лагранжевых координатах, можно с точностью до второго порядка малости выразить следующим образом в эйлеровых координатах:

$$p'(t, a) = p'(t, x) - \xi p'_x(t, x).$$

Обратно, волна, заданная в эйлеровых координатах, выразится в лагранжевых координатах так:

$$p'(t, x) = p'(t, a) + \xi p'_a(t, a).$$

Для бегущих волн полученные формулы преобразования координат можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} p'(t - a/c) &= p'(t - x/c) - \xi p'_x(t - x/c) = \\ &= p'(t - x/c) + (\xi/c) p'_t(t - x/c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'(t - x/c) &= p'(t - a/c) + \xi p'_a(t - a/c) = \\ &= p'(t - a/c) - (\xi/c) p'_t(t - a/c). \end{aligned}$$

чится обычное волновое уравнение в одном измерении, написанное в лагранжевых координатах:

$$p'_{tt} - c_0^2 p'_{aa} = 0. \quad (124.8)$$

Для давления второго порядка придем, пользуясь также последним уравнением (124.6), к уравнению

$$p''_{tt} - c_0^2 p''_{aa} = G (p'^2)_{tt}, \quad (124.9)$$

где так называемый коэффициент нелинейности G равен

$$G = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left[1 + \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 \right]. \quad (124.10)$$

Заметим, что при линеаризации можно было не делать различия между записью в лагранжевых и в эйлеровых координатах и, например, не различать решения в виде бегущей волны вида $p(t - a/c_0)$ и $p(t - x/c_0)$ соответственно. Но теперь, когда нас интересует и второй порядок величин, различие следует учитывать и, переходя от лагранжевых к эйлеровым координатам, нельзя в выражении для волны просто заменить a на x , а необходимо еще ввести поправку второго порядка. Конечно, выбор в качестве первого приближения решения волнового уравнения, написанного в лагранжевых координатах, не обязателен; за первое приближение можно было бы принять (в случае бегущей волны) не $p(t - a/c_0)$, а $p(t - x/c_0)$. Но соответственно пришлось бы изменить и квадратичную поправку; сумма поправочного члена с линейным решением должна в обоих случаях дать одну и ту же величину с точностью до членов высшего порядка малости.

Так как лагранжева (a) и эйлерова (x) координаты частиц связаны соотношением

$$x = a + \xi,$$

то волну первого порядка, заданную в лагранжевых координатах, можно с точностью до второго порядка малости выразить следующим образом в эйлеровых координатах:

$$p'(t, a) = p'(t, x) - \xi p'_x(t, x).$$

Обратно, волна, заданная в эйлеровых координатах, выразится в лагранжевых координатах так:

$$p'(t, x) = p'(t, a) + \xi p'_a(t, a).$$

Для бегущих волн полученные формулы преобразования координат можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} p'(t - a/c) &= p'(t - x/c) - \xi p'_x(t - x/c) = \\ &= p'(t - x/c) + (\xi/c) p'_t(t - x/c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'(t - x/c) &= p'(t - a/c) + \xi p'_a(t - a/c) = \\ &= p'(t - a/c) - (\xi/c) p'_t(t - a/c). \end{aligned}$$

нения. Именно, правая часть соответствует сторонним источникам звука с объемными скоростями, распределенными с плотностью

$$V = \left(\frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right)^2 \left[1 + \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 \right] (\rho'^2)_t = \beta G (\rho'^2)_t. \quad (124.13)$$

Поэтому можно заменить задачу о нахождении нелинейной квадратичной поправки линейной задачей о поле монопольных источников, распределенных по закону (124.13).

В некоторых случаях ставится задача о нахождении квадратичной поправки не к давлению, а к смещению частиц или к степени сжатия среды. Соответственные уравнения можно получить по-прежнему из полной системы уравнений (124.6) и (124.7), исключая соответственно величины p'' и ρ'' или величины p'' и ξ'' . В результате получаются следующие уравнения первого и второго порядков:

для смещения

$$\begin{aligned} \xi'_{tt} - c_0^2 \xi'_{aa} &= 0, \\ \xi''_{tt} - c_0^2 \xi''_{aa} &= - \frac{(\rho_0 c_0^2)^2}{\rho_0} G [(\xi'_a)^2]_a; \end{aligned} \quad (124.14)$$

для приращения плотности

$$\begin{aligned} \rho'_{tt} - c_0^2 \rho'_{aa} &= 0, \\ \rho''_{tt} - c_0^2 \rho''_{aa} &= \frac{1}{\rho_0} (\rho'^2)_{tt} + \frac{c_0^2}{2} \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 (\rho'^2)_{aa}. \end{aligned} \quad (124.15)$$

§ 125. Квадратичная поправка для бегущей плоской волны

Будем искать квадратичную поправку для бегущей плоской волны при различных акустических ситуациях. Для бегущей волны правая часть уравнения (124.9) всегда является решением этого же уравнения без правой части:

$$(\rho'^2)_{tt} - c_0^2 (\rho'^2)_{aa} = 0.$$

Пользуясь этим соотношением, можно переписать (124.9) в виде

$$\rho''_{tt} - c_0^2 \rho''_{aa} = c_0^2 G (\rho'^2)_{aa}. \quad (125.1)$$

Это уравнение можно интерпретировать как одномерное уравнение линейной акустики при действии на среду сторонних сил, распределенных с объемной плотностью

$$f = -G (\rho'^2)_a. \quad (125.2)$$

Таким образом, для бегущей плоской волны квадратичную поправку можно рассматривать как результат действия в линей-

ной среде либо сторонних источников объемной скорости (124.13), либо сторонних сил (125.2). Для произвольной одномерной волны возможна только первая интерпретация. В различных случаях бывает удобно пользоваться либо одной, либо другой интерпретацией.

Рассмотрим сначала ситуацию, в которой в начальный момент $t = 0$ задано:

$$p' = p'(t \mp a/c_0); p'' = 0.$$

Квадратичная поправка в данном случае — это частное решение (124.9), которое в начальный момент обращается в нуль. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что таким решением является нарастающая волна

$$p'' = \frac{1}{2} Gt (p'^2)_t = -\frac{1}{2} \frac{G}{c_0} t (p'^2)_a. \quad (125.3)$$

Поправка оказывается вековым членом, потому что правая часть уравнения для поправки является решением однородного уравнения. В этом отношении явление сходно с процессом раскачки резонатора сторонней силой резонансной частоты. В данном случае совпадают не только частоты, как в задаче о резонаторе, но и скорости распространения стороннего воздействия и создаваемой этим воздействием волны, которая и является квадратичной поправкой: фазовые соотношения между волной и сторонним воздействием все время сохраняются и над возникающей волной все время производится работа одного и того же знака, что и приводит к нарастанию поправки.

Для волны синусоидального типа

$$p' \equiv p_0 \sin(\omega t - ka)$$

уравнение (124.9) принимает вид

$$p''_{tt} - c_0^2 p''_{aa} = 2p_0^2 G \omega^2 \cos(2\omega t - 2ka), \quad (125.4)$$

откуда

$$p'' = \frac{1}{2} p_0^2 G \omega t \sin(2\omega t - 2ka). \quad (125.5)$$

В каждый момент времени $t > 0$ квадратичная поправка — это синусоидальная же волна, но с длиной волны, равной половине длины волны в исходном звуковом поле. Временная зависимость давления в каждой точке — не синусоидальная. Имеет смысл, применяя неточную, но ходовую терминологию, называть квадратичную поправку гармонической волной двойной частоты или второй гармоникой исходной волны, приписывая ей «переменную амплитуду» $(1/2) p_0^2 G \omega t$, растущую пропорционально времени. Исходную волну удобно называть первой гармоникой. Такая трактовка имеет смысл только в том случае, когда нарастание амплитуды за один период мало по сравнению с самой амплитудой, т. е. при $\omega t \gg 1$.

Нарастание второй гармоники происходит за счет энергии исходной волны, амплитуда которой вследствие такой перекачки энергии будет уменьшаться с течением времени. Поэтому пользоваться методом малых возмущений, в котором для расчета квадратичной поправки принимается, что исходная волна практически не меняется с течением времени, можно только до тех пор, пока энергия поправки остается относительно малой. Это аналогично условию применимости метода малых возмущений в теории рассеяния: требованию малости рассеянного поля по сравнению с первичным. Если указанное требование выполнено, то можно найти (малое) ослабление исходной волны, вызванное перекачкой ее энергии во вторую гармонику (см. § 127).

Отношение амплитуды второй гармоники к амплитуде первой гармоники равно

$$\left| \frac{p''}{p'} \right| = \frac{1}{2} \rho_0 G \omega t = \pi \rho_0 G N, \quad (125.6)$$

где N — число периодов, протекших от начального момента.

Скорость нарастания относительного значения квадратичной поправки тем больше, чем выше частота. Изменение этого относительного значения за один период от частоты не зависит. Для идеального газа

$$\left| \frac{p''}{p'} \right| = \frac{1}{2} \pi (\gamma + 1) M N.$$

Рассмотрим теперь другую акустическую ситуацию: работу излучателя, создающего в данной точке заданное давление. Пусть, например, поршень, колеблющийся в трубе, создает на своей поверхности, имеющей лагранжеву координату $a = 0$, давление $p(t)$. В линейном приближении в трубе создается волна вида $p'(t - a/c)$. Квадратичная поправка должна, удовлетворяя уравнению (125.1), обращаться в нуль на поверхности поршня: $p'' = 0$ при $a = 0$. Аналогично предыдущей задаче непосредственной постановкой убедимся, что искомое решение имеет вид

$$p'' = -\frac{1}{2} G a (p')^2_a. \quad (125.7)$$

Например, для синусоидального закона изменения давления на поршне $p_0 \sin \omega t$ имеем $p' = p_0 \sin(\omega t - ka)$ и

$$p'' = \frac{1}{2} p_0^2 G k a \sin(2\omega t - 2ka). \quad (125.8)$$

В этом случае квадратичную поправку можно считать второй гармоникой с амплитудой $(1/2) p_0^2 G k a$, не зависящей от времени и растущей пропорционально расстоянию от поршня. Поправка является в решении вековым членом относительно координаты.

Отношение амплитуд второй и первой гармоник выражается формулой, аналогичной (125.6):

$$\left| \frac{p''}{p'} \right| = \frac{1}{2} \rho_0 G k a = \pi \rho_0 G N, \quad (125.9)$$

где N — число длин волн первой гармоники, укладываемых на расстоянии от излучателя до рассматриваемой точки.

Движение поршня в этой задаче не синусоидально. Действительно, подставляя найденное решение в первое уравнение (124.7), найдем для точки $a = 0$

$$\xi''_{tt} = \frac{G}{2\rho_0} (p''^2)_a = -\frac{G}{2\rho_0} \rho_0^2 k \sin 2\omega t,$$

что даст для рассматриваемого случая квадратичную поправку к смещению, равную

$$\xi'' = \frac{1}{8} \frac{\rho_0^2 G k}{\rho_0 \omega^2} \sin 2\omega t.$$

Поскольку смещение первого порядка равно в этом случае

$$\xi' = -\frac{\rho_0 k}{\rho_0 \omega^2} \cos \omega t,$$

то отношение амплитуд смещения для поправки и основного колебания равно $|\xi''/\xi'| = \rho_0 G/8$.

В качестве еще одного варианта постановки задачи примем за величину первого порядка заданное смещение поршня $\xi'(t)$, считая дополнительным условием задачи равенство $\xi'' = 0$ в точке $a = 0$. Из первого уравнения (124.7) видно, что при этом условии будет также $p''_a = 0$ при $a = 0$. Смещение в волне первого порядка равно в данном случае $\xi'(t - a/c)$. Соответственная величина давления первого порядка равна $p' = \rho_0 c_0 \xi'_t$. Простой подстановкой снова легко проверить, что искомое решение имеет вид

$$p'' = -\frac{1}{2} G a (p'^2)_a + \frac{1}{2} G p'^2. \quad (125.10)$$

Важно отметить, что, в отличие от линейного приближения, в приближении, учитывающем квадратичную поправку, интегральный импульс давления в бегущей волне не равен нулю даже при результирующем смещении поршня, обращаемом в нуль. В самом деле, пусть в точке $a = 0$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_t^2 dt = 0.$$

Интеграл от p' по времени в бесконечных пределах равен нулю. Обратится в нуль после интегрирования по времени в бесконечных пределах и первый член справа в (125.10) для бегущей волны

(этот член можно представить как производную по времени). Последний же член справа существенно положителен и при интегрировании даст величину, отличную от нуля. Этот интеграл и будет представлять собой импульс давления за время возвращения поршня в исходное положение.

Так, например, для синусоидального движения поршня $\xi' = \xi_0 \sin \omega t$ (при $\xi'' = 0$ для $a = 0$) давление первого порядка есть $p' = p_0 \cos \omega t$, а квадратичная поправка равна

$$p'' = \frac{1}{4} p_0^2 G [1 + \cos(2\omega t - 2ka) - 2ka \sin(2\omega t - 2ka)],$$

где $p_0 = \omega r c \xi_0$ — амплитуда давления первого порядка на поршне.

Следовательно, поршень испытывает добавочное давление второго порядка, равное $(1/4) p_0^2 G (1 + \cos 2\omega t)$. Результирующее давление на поршень складывается, таким образом, из синусоидального давления первого порядка, синусоидального же давления второго порядка двойной частоты и, наконец, постоянной составляющей также второго порядка. Усредненное по времени значение давления, действующего на поршень, движущийся синусоидально, равно $(1/4) p_0^2 G$. То же значение имеет среднее по времени давление и для любой другой частицы среды.

§ 126. Нелинейное взаимодействие волн, Акустическое детектирование

Для плоских волн, бегущих по одному и тому же направлению, нелинейные эффекты неаддитивны. Если первое приближение есть сумма двух волн, $p' = p'_1 + p'_2$, то нелинейный эффект не есть сумма квадратичных поправок p''_1 и p''_2 , которые возникли бы при распространении каждой из волн p'_1 и p'_2 в отдельности. В самом деле, рассмотрим для определенности ситуацию с заданным давлением $p'_1 + p'_2$ на излучателе. Формула (125.7) в этом случае даст

$$p'' = -\frac{1}{2} G a (p_1'^2)_a - \frac{1}{2} G a (p_2'^2)_a - G a (p_1' p_2')_a. \quad (126.1)$$

Первые два члена — квадратичные поправки для каждой волны в отдельности. Добавочный вековой член $p''_{12} = -G a (p_1' p_2')_a$ оказывается зависящим от обеих волн первого порядка одновременно. Его появление — результат *нелинейного взаимодействия волн* — нарушает принцип суперпозиции, справедливый для линейного случая.

Например, нелинейное взаимодействие двух гармонических волн приводит к появлению добавочных (к гармоникам двойной частоты) волн *суммарной* и *разностной* частот. В самом деле, подставляя в (126.1) величины

$$p'_1 = p_{10} \sin(\omega_1 t - k_1 a) \quad \text{и} \quad p'_2 = p_{20} \sin(\omega_2 t - k_2 a),$$

получим

$$\begin{aligned} \rho'' = & \frac{1}{2} p_{10}^2 G k_1 a \sin(2\omega_1 t - 2k_1 a) + \frac{1}{2} p_{20}^2 G k_2 a \sin(2\omega_2 t - 2k_2 a) - \\ & - \frac{1}{2} p_{10} p_{20} G (k_1 - k_2) a \sin[(\omega_1 - \omega_2) t - (k_1 - k_2) a] + \\ & + \frac{1}{2} p_{10} p_{20} G (k_1 + k_2) a \sin[(\omega_1 + \omega_2) t - (k_1 + k_2) a]. \quad (126.2) \end{aligned}$$

Удваиваются, складываются и вычитаются как частоты, так и соответственные волновые числа. Амплитуды отдельных компонент пропорциональны соответственным квадратам и произведениям амплитуд волн первого приближения, а также волновым числам (или частотам) компонент. Поэтому нелинейные гармоники более высоких частот имеют относительно большую амплитуду: амплитуда гармоники суммарной частоты больше, чем амплитуда гармоники разностной частоты.

Аналогично можно найти квадратичную поправку и для волны первого порядка, заданной в виде суммы многих гармоник разностной частоты, а также для волны со сплошным спектром. В спектр квадратичной поправки войдут все волны двойной частоты по отношению к каждой компоненте первого порядка и, сверх того, все волны суммарных и разностных частот для каждой пары гармонических компонент исходной волны.

Как интересный частный случай рассмотрим демодуляцию модулированной волны первого порядка, осуществляемую в квадратичной поправке. Пусть, например, волна первого приближения — это гармоническая волна, модулированная по амплитуде с частотой Ω :

$$\rho' = p_0 \sin(\omega t - ka) [1 + \mu \cos(\Omega t - K a)],$$

где $\Omega/K = c_0$. Представим ее в виде суммы волн несущей частоты и двух боковых частот:

$$\begin{aligned} \rho' = & p_0 \sin(\omega t - ka) + \frac{1}{2} \mu p_0 \sin[(\omega + \Omega) t - (k + K) a] + \\ & + \frac{1}{2} \mu p_0 \sin[(\omega - \Omega) t - (k - K) a]. \end{aligned}$$

Согласно найденному выше квадратичная поправка будет содержать частоты

$$2\omega, 2(\omega + \Omega), 2(\omega - \Omega), 2\omega + \Omega, 2\omega - \Omega, 2\Omega, \Omega.$$

Слагаемое с частотой Ω имеет вид

$$\rho''_{(\Omega)} = \frac{1}{2} \mu p_0^2 G K a \sin(\Omega t - K a).$$

Таким образом, нелинейный характер распространения приводит к созданию волны модулирующей частоты в числе гармонических компонент квадратичной поправки, аналогично тому, как детектирование из гармонически модулированного колебания создает гармоническое колебание модулирующей частоты. Этот процесс можно называть *акустическим детектированием*.

§ 127. Затухание волн конечной амплитуды, обусловленное нелинейностью

Для волн конечной амплитуды распространение сопровождается затуханием, не связанным с поглощением энергии, а обусловленным переходом части энергии исходной волны в волну квадратичной поправки. Принятый нами метод расчета квадратичной поправки не позволяет найти это затухание непосредственно. С таким же положением вещей мы встречались в вопросе о затухании волны, распространяющейся в слабо рассеивающей среде и теряющей свою энергию на создание рассеянных волн. Как в задаче о рассеянии, так и в задаче о распространении волн конечной амплитуды метод малых возмущений позволяет (со всеми оговорками о малости эффекта рассеяния или соответственно нелинейности) найти с достаточной точностью *добавочное* поле, но он совершенно не учитывает обратного воздействия возникающих волн на исходную волну, которое и приводит к ее затуханию. В задаче о рассеянии мы все же нашли искомое затухание, применив закон сохранения энергии: суммарная энергия падающей и рассеянной волн должна была оставаться постоянной. Аналогичный прием применим и в задаче о нелинейности: в отсутствие поглощения энергия волны квадратичной поправки в сумме с энергией волны первого приближения должна сохраняться.

Рассмотрим в качестве волны первого приближения бегущую плоскую волну, излучаемую поршнем, создающим в данной точке $a = 0$ гармоническое давление $p_0 \sin \omega t$. В этом случае амплитуда второй гармоники оказывается, согласно (125.8), равной $1/2 p_0^2 Gka$. Плотность потока мощности этой волны пропорциональна квадрату ее амплитуды $(1/2 p_0^2 Gka)^2$. Значит, эта величина вычтется из плотности потока мощности исходной волны, пропорционального квадрату исходной амплитуды p_0^2 . Оставшаяся плотность потока мощности пропорциональна $p_0^2 [1 - (1/2 p_0 Gka)^2]$. Извлекая корень квадратный из этой величины, найдем амплитуду исходной волны, уменьшившуюся вследствие затухания. Ввиду предположенной малости амплитуды второй гармоники по сравнению с амплитудой исходной волны имеем приближенно для амплитуды исходной волны на расстоянии a от излучателя

$$p \approx p_0 \left[1 - \frac{1}{8} p_0^2 G^2 (ka)^2 \right] = p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \pi^2 G^2 p_0^2 N^2 \right),$$

где N — расстояние от излучателя, выраженное в длинах исходной волны.

Таким образом, уменьшение амплитуды пропорционально квадрату пути, пройденного волной: по мере нарастания второй гармоники энергия отбирается от первой гармоники и передается второй гармонике все быстрее и быстрее. В этом принципиальное отличие хода нелинейного затухания от затухания, вызванного поглощением энергии в среде или рассеянием на малых неоднородностях, для которых затухание не зависит от амплитуды исходной волны и пропорционально длине пути, пройденного волной. Нелинейное же затухание оказывается пропорциональным теперь квадрату амплитуды и квадрату длины пройденного пути (напоминаем, что все сказанное относится только к начальным участкам распространения, когда при расчете квадратичной поправки еще можно считать амплитуду исходной волны неизменной и, исходя из полученного результата, рассчитывать уменьшение амплитуды).

На рис. 127.1 даны примерные графики начального хода затухания амплитуды волны, вызванного нелинейностью (парабола a) и линейным поглощением или рассеянием (экспонента b). Ясно, что уменьшение амплитуды волны, обусловленное нелинейностью, нельзя охарактеризовать коэффициентом затухания.

В разобранным случае задача состояла в нахождении пространственного нелинейного затухания. В другой постановке задачи, при задании начального условия $p'' = 0$ при $t = 0$, приходим к временному нелинейному затуханию. Если исходная волна в момент времени $t = 0$ задана в виде

$$p' = p_0 \sin(\omega t - ka),$$

то, как нетрудно показать, в результате перекачки ее энергии во вторую гармонику амплитуда будет уменьшаться с течением времени по закону

$$p = p_0 \left[1 - \frac{1}{8} p_0^2 G^2 (\omega t)^2 \right] = p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \pi^2 p_0^2 G^2 N^2 \right),$$

где N — протекшее время, выраженное в периодах волны.

Нелинейность не только вызывает переход энергии из волны в ее квадратичную гармонику, что не связано с уменьшением суммарной акустической энергии; она вызывает и ускоренное поглощение звуковой энергии и переход ее в тепло. В самом деле, во всякой реальной среде имеется поглощение звуковой энергии,

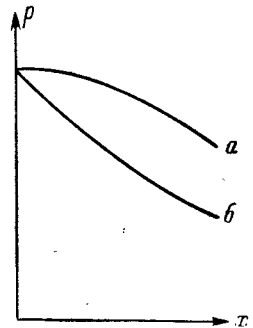


Рис. 127.1. Зависимость амплитуды гармонической волны от длины пробега для нелинейного затухания (a) и для линейного поглощения звука (b).

и, как правило, чем выше частота, тем это поглощение происходит быстрее. Значит, энергия, переходящая из данной волны в ее гармонику, будет поглощена в среде быстрее, чем она поглотилась бы, оставаясь в волне основной частоты.

§ 128. О нелинейных поправках высших порядков

Учет квадратичной поправки — это по существу учет второго члена в разложении решения точных уравнений гидродинамики по малому параметру — числу Маха. На начальных стадиях процесса (например, на малых расстояниях от излучателя), когда квадратичная поправка еще мала, сумма первого приближения и квадратичной поправки еще достаточно хорошо описывает точное решение, но на большом расстоянии от излучателя расчет с точностью до квадрата числа Маха уже делается недостаточно точным и следует учесть следующий член разложения, пропорциональный кубу числа Маха, затем член с M^4 и т. д.

Физически это значит, что по мере распространения в волне будут появляться компоненты все новых частот — спектр волны будет обогащаться. При этом волны высших порядков будут возникать как непосредственно из волны первого порядка, так и в результате нелинейного взаимодействия между волной первого и второго порядка (что даст третью гармонику исходной волны как волну суммарной частоты), первого и третьего порядка (что даст четвертую гармонику как волну суммарной частоты и снова вторую гармонику — как волну разностной частоты) и т. д. Появятся также составляющие волн высших порядков, обязанные тройному нелинейному взаимодействию между уже образовавшимися гармониками, например, шестая гармоника — как результат взаимодействия второй и третьей гармоник и исходной волны. Все это приведет к тому, что энергия будет постепенно перетекать из исходной гармоники и гармоник низших порядков во все более и более высокие гармоники.

Создание новых гармоник качественно можно представить себе так же, как и создание второй гармоники. Уравнение для гармоники какого-либо номера можно будет записать как уравнение для линейной среды, но с правой частью, в которой будут стоять степени и произведения гармоник низших порядков. Правую часть можно будет рассматривать как сторонние воздействия: распределенные источники объемной скорости или источники силы, излучение которых и создает данную гармонику. Нарастание гармоник будет иметь такой же резонансный характер, как и для второй гармоники. Практически расчет последовательных приближений делается громоздким уже при вычислении третьей гармоники. Поэтому для вычисления поля на таком расстоянии, когда волна уже сильно изменила свою форму, пользуются другими методами и находят изменяющуюся форму волны непосредственно, не вычисляя, как нарастают гармоники.

Отношение амплитуд второй и первой гармоник выражается формулой, аналогичной (125.6):

$$\left| \frac{p''}{p'} \right| = \frac{1}{2} \rho_0 G k a = \pi \rho_0 G N, \quad (125.9)$$

где N — число длин волн первой гармоники, укладываемых на расстоянии от излучателя до рассматриваемой точки.

Движение поршня в этой задаче не синусоидально. Действительно, подставляя найденное решение в первое уравнение (124.7), найдем для точки $a = 0$

$$\xi''_{tt} = \frac{G}{2\rho_0} (p'')_a = -\frac{G}{2\rho_0} \rho_0^2 k \sin 2\omega t,$$

что даст для рассматриваемого случая квадратичную поправку к смещению, равную

$$\xi'' = \frac{1}{8} \frac{\rho_0^2 G k}{\rho_0 \omega^2} \sin 2\omega t.$$

Поскольку смещение первого порядка равно в этом случае

$$\xi' = -\frac{\rho_0 k}{\rho_0 \omega^2} \cos \omega t,$$

то отношение амплитуд смещения для поправки и основного колебания равно $|\xi''/\xi'| = \rho_0 G/8$.

В качестве еще одного варианта постановки задачи примем за величину первого порядка заданное смещение поршня $\xi'(t)$, считая дополнительным условием задачи равенство $\xi'' = 0$ в точке $a = 0$. Из первого уравнения (124.7) видно, что при этом условии будет также $p''_a = 0$ при $a = 0$. Смещение в волне первого порядка равно в данном случае $\xi'(t - a/c)$. Соответственная величина давления первого порядка равна $p' = \rho_0 c_0 \xi'_t$. Простой подстановкой снова легко проверить, что искомое решение имеет вид

$$p'' = -\frac{1}{2} G a (p'')_a + \frac{1}{2} G p'^2. \quad (125.10)$$

Важно отметить, что, в отличие от линейного приближения, в приближении, учитывающем квадратичную поправку, интегральный импульс давления в бегущей волне не равен нулю даже при результирующем смещении поршня, обращаемом в нуль. В самом деле, пусть в точке $a = 0$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_t^2 dt = 0.$$

Интеграл от p' по времени в бесконечных пределах равен нулю. Обратится в нуль после интегрирования по времени в бесконечных пределах и первый член справа в (125.10) для бегущей волны

(этот член можно представить как производную по времени). Последний же член справа существенно положителен и при интегрировании даст величину, отличную от нуля. Этот интеграл и будет представлять собой импульс давления за время возвращения поршня в исходное положение.

Так, например, для синусоидального движения поршня $\xi' = \xi_0 \sin \omega t$ (при $\xi'' = 0$ для $a = 0$) давление первого порядка есть $p' = p_0 \cos \omega t$, а квадратичная поправка равна

$$p'' = \frac{1}{4} p_0^2 G [1 + \cos(2\omega t - 2ka) - 2ka \sin(2\omega t - 2ka)],$$

где $p_0 = \omega r c \xi_0$ — амплитуда давления первого порядка на поршне.

Следовательно, поршень испытывает добавочное давление второго порядка, равное $(1/4) p_0^2 G (1 + \cos 2\omega t)$. Результирующее давление на поршень складывается, таким образом, из синусоидального давления первого порядка, синусоидального же давления второго порядка двойной частоты и, наконец, постоянной составляющей также второго порядка. Усредненное по времени значение давления, действующего на поршень, движущийся синусоидально, равно $(1/4) p_0^2 G$. То же значение имеет среднее по времени давление и для любой другой частицы среды.

§ 126. Нелинейное взаимодействие волн, Акустическое детектирование

Для плоских волн, бегущих по одному и тому же направлению, нелинейные эффекты неаддитивны. Если первое приближение есть сумма двух волн, $p' = p'_1 + p'_2$, то нелинейный эффект не есть сумма квадратичных поправок p''_1 и p''_2 , которые возникли бы при распространении каждой из волн p'_1 и p'_2 в отдельности. В самом деле, рассмотрим для определенности ситуацию с заданным давлением $p'_1 + p'_2$ на излучателе. Формула (125.7) в этом случае даст

$$p'' = -\frac{1}{2} G a (p_1'^2)_a - \frac{1}{2} G a (p_2'^2)_a - G a (p_1' p_2')_a. \quad (126.1)$$

Первые два члена — квадратичные поправки для каждой волны в отдельности. Добавочный вековой член $p''_{12} = -G a (p_1' p_2')_a$ оказывается зависящим от обеих волн первого порядка одновременно. Его появление — результат *нелинейного взаимодействия волн* — нарушает принцип суперпозиции, справедливый для линейного случая.

Например, нелинейное взаимодействие двух гармонических волн приводит к появлению добавочных (к гармоникам двойной частоты) волн *суммарной* и *разностной* частот. В самом деле, подставляя в (126.1) величины

$$p'_1 = p_{10} \sin(\omega_1 t - k_1 a) \quad \text{и} \quad p'_2 = p_{20} \sin(\omega_2 t - k_2 a),$$

получим

$$\begin{aligned} p'' = & \frac{1}{2} p_{10}^2 G k_1 a \sin(2\omega_1 t - 2k_1 a) + \frac{1}{2} p_{20}^2 G k_2 a \sin(2\omega_2 t - 2k_2 a) - \\ & - \frac{1}{2} p_{10} p_{20} G (k_1 - k_2) a \sin[(\omega_1 - \omega_2) t - (k_1 - k_2) a] + \\ & + \frac{1}{2} p_{10} p_{20} G (k_1 + k_2) a \sin[(\omega_1 + \omega_2) t - (k_1 + k_2) a]. \quad (126.2) \end{aligned}$$

Удваиваются, складываются и вычитаются как частоты, так и соответственные волновые числа. Амплитуды отдельных компонент пропорциональны соответственным квадратам и произведениям амплитуд волн первого приближения, а также волновым числам (или частотам) компонент. Поэтому нелинейные гармоники более высоких частот имеют относительно большую амплитуду: амплитуда гармоники суммарной частоты больше, чем амплитуда гармоники разностной частоты.

Аналогично можно найти квадратичную поправку и для волны первого порядка, заданной в виде суммы многих гармоник разной частоты, а также для волны со сплошным спектром. В спектр квадратичной поправки войдут все волны двойной частоты по отношению к каждой компоненте первого порядка и, сверх того, все волны суммарных и разностных частот для каждой пары гармонических компонент исходной волны.

Как интересный частный случай рассмотрим демодуляцию модулированной волны первого порядка, осуществляемую в квадратичной поправке. Пусть, например, волна первого приближения — это гармоническая волна, модулированная по амплитуде с частотой Ω :

$$p' = p_0 \sin(\omega t - ka) [1 + \mu \cos(\Omega t - K a)],$$

где $\Omega/K = c_0$. Представим ее в виде суммы волны несущей частоты и двух боковых частот:

$$\begin{aligned} p' = p_0 \sin(\omega t - ka) + \frac{1}{2} \mu p_0 \sin[(\omega + \Omega) t - (k + K) a] + \\ + \frac{1}{2} \mu p_0 \sin[(\omega - \Omega) t - (k - K) a]. \end{aligned}$$

Согласно найденному выше квадратичная поправка будет содержать частоты

$$2\omega, 2(\omega + \Omega), 2(\omega - \Omega), 2\omega + \Omega, 2\omega - \Omega, 2\Omega, \Omega.$$

Слагаемое с частотой Ω имеет вид

$$p''_{(\Omega)} = \frac{1}{2} \mu p_0^2 G K a \sin(\Omega t - K a).$$

Таким образом, нелинейный характер распространения приводит к созданию волны модулирующей частоты в числе гармонических компонент квадратичной поправки, аналогично тому, как детектирование из гармонически модулированного колебания создает гармоническое колебание модулирующей частоты. Этот процесс можно называть *акустическим детектированием*.

§ 127. Затухание волн конечной амплитуды, обусловленное нелинейностью

Для волн конечной амплитуды распространение сопровождается затуханием, не связанным с поглощением энергии, а обусловленным переходом части энергии исходной волны в волну квадратичной поправки. Принятый нами метод расчета квадратичной поправки не позволяет найти это затухание непосредственно. С таким же положением вещей мы встречались в вопросе о затухании волны, распространяющейся в слабо рассеивающей среде и теряющей свою энергию на создание рассеянных волн. Как в задаче о рассеянии, так и в задаче о распространении волн конечной амплитуды метод малых возмущений позволяет (со всеми оговорками о малости эффекта рассеяния или соответственно нелинейности) найти с достаточной точностью *добавочное* поле, но он совершенно не учитывает обратного воздействия возникающих волн на исходную волну, которое и приводит к ее затуханию. В задаче о рассеянии мы все же нашли искомое затухание, применив закон сохранения энергии: суммарная энергия падающей и рассеянной волн должна была оставаться постоянной. Аналогичный прием применим и в задаче о нелинейности: в отсутствие поглощения энергия волны квадратичной поправки в сумме с энергией волны первого приближения должна сохраняться.

Рассмотрим в качестве волны первого приближения бегущую плоскую волну, излучаемую поршнем, создающим в данной точке $a = 0$ гармоническое давление $p_0 \sin \omega t$. В этом случае амплитуда второй гармоники оказывается, согласно (125.8), равной $1/2 p_0^2 Gka$. Плотность потока мощности этой волны пропорциональна квадрату ее амплитуды $(1/2 p_0^2 Gka)^2$. Значит, эта величина вычтется из плотности потока мощности исходной волны, пропорционального квадрату исходной амплитуды p_0^2 . Оставшаяся плотность потока мощности пропорциональна $p_0^2 [1 - (1/2 p_0 Gka)^2]$. Извлекая корень квадратный из этой величины, найдем амплитуду исходной волны, уменьшившуюся вследствие затухания. Ввиду предположенной малости амплитуды второй гармоники по сравнению с амплитудой исходной волны имеем приближенно для амплитуды исходной волны на расстоянии a от излучателя

$$p \approx p_0 \left[1 - \frac{1}{8} p_0^2 G^2 (ka)^2 \right] = p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \pi^2 G^2 p_0^2 N^2 \right),$$

где N — расстояние от излучателя, выраженное в длинах исходной волны.

Таким образом, уменьшение амплитуды пропорционально квадрату пути, пройденного волной: по мере нарастания второй гармоники энергия отбирается от первой гармоники и передается второй гармонике все быстрее и быстрее. В этом принципиальное отличие хода нелинейного затухания от затухания, вызванного поглощением энергии в среде или рассеянием на малых неоднородностях, для которых затухание не зависит от амплитуды исходной волны и пропорционально длине пути, пройденного волной. Нелинейное же затухание оказывается пропорциональным теперь квадрату амплитуды и квадрату длины пройденного пути (напоминаем, что все сказанное относится только к начальным участкам распространения, когда при расчете квадратичной поправки еще можно считать амплитуду исходной волны неизменной и, исходя из полученного результата, рассчитывать уменьшение амплитуды).

На рис. 127.1 даны примерные графики начального хода затухания амплитуды волны, вызванного нелинейностью (парабола a) и линейным поглощением или рассеянием (экспонента b). Ясно, что уменьшение амплитуды волны, обусловленное нелинейностью, нельзя охарактеризовать коэффициентом затухания.

В разобранным случае задача состояла в нахождении пространственного нелинейного затухания. В другой постановке задачи, при задании начального условия $p'' = 0$ при $t = 0$, приходим к временному нелинейному затуханию. Если исходная волна в момент времени $t = 0$ задана в виде

$$p' = p_0 \sin(\omega t - ka),$$

то, как нетрудно показать, в результате перекачки ее энергии во вторую гармонику амплитуда будет уменьшаться с течением времени по закону

$$p = p_0 \left[1 - \frac{1}{8} p_0^2 G^2 (\omega t)^2 \right] = p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \pi^2 p_0^2 G^2 N^2 \right),$$

где N — протекшее время, выраженное в периодах волны.

Нелинейность не только вызывает переход энергии из волны в ее квадратичную гармонику, что не связано с уменьшением суммарной акустической энергии; она вызывает и ускоренное поглощение звуковой энергии и переход ее в тепло. В самом деле, во всякой реальной среде имеется поглощение звуковой энергии,

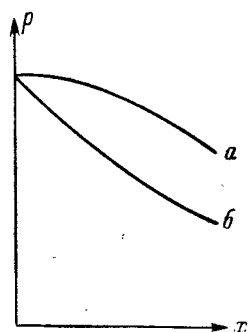


Рис. 127.1. Зависимость амплитуды гармонической волны от длины пробега для нелинейного затухания (a) и для линейного поглощения звука (b).

и, как правило, чем выше частота, тем это поглощение происходит быстрее. Значит, энергия, переходящая из данной волны в ее гармонику, будет поглощена в среде быстрее, чем она поглощалась бы, оставаясь в волне основной частоты.

§ 128. О нелинейных поправках высших порядков

Учет квадратичной поправки — это по существу учет второго члена в разложении решения точных уравнений гидродинамики по малому параметру — числу Маха. На начальных стадиях процесса (например, на малых расстояниях от излучателя), когда квадратичная поправка еще мала, сумма первого приближения и квадратичной поправки еще достаточно хорошо описывает точное решение, но на большом расстоянии от излучателя расчет с точностью до квадрата числа Маха уже делается недостаточно точным и следует учесть следующий член разложения, пропорциональный кубу числа Маха, затем член с M^4 и т. д.

Физически это значит, что по мере распространения в волне будут появляться компоненты все новых частот — спектр волны будет обогащаться. При этом волны высших порядков будут возникать как непосредственно из волны первого порядка, так и в результате нелинейного взаимодействия между волной первого и второго порядка (что даст третью гармонику исходной волны как волну суммарной частоты), первого и третьего порядка (что даст четвертую гармонику как волну суммарной частоты) и снова вторую гармонику — как волну разностной частоты) и т. д. Появятся также составляющие волн высших порядков, обязанные тройному нелинейному взаимодействию между уже образовавшимися гармониками, например, шестая гармоника — как результат взаимодействия второй и третьей гармоник и исходной волны. Все это приведет к тому, что энергия будет постепенно перетекать из исходной гармоники и гармоник низших порядков во все более и более высокие гармоники.

Создание новых гармоник качественно можно представить себе так же, как и создание второй гармоники. Уравнение для гармоники какого-либо номера можно будет записать как уравнение для линейной среды, но с правой частью, в которой будут стоять степени и произведения гармоник низших порядков. Правую часть можно будет рассматривать как сторонние воздействия: распределенные источники объемной скорости или источники силы, излучение которых и создает данную гармонику. Нарастание гармоник будет иметь такой же резонансный характер, как и для второй гармоники. Практически расчет последовательных приближений делается громоздким уже при вычислении третьей гармоники. Поэтому для вычисления поля на таком расстоянии, когда волна уже сильно изменила свою форму, пользуются другими методами и находят изменяющуюся форму волны непосредственно, не вычисляя, как нарастают гармоники.

Конечно, и при учете гармоник высших порядков нельзя рассчитывать волну на сколь угодно времени вперед или для любого расстояния от излучателя. Начиная с некоторого момента времени (или с какого-то расстояния) расчетный ряд гармоник перестает сходиться. Во всяком случае этот способ непригоден незадолго до образования разрыва и после его образования.

§ 129. Распространение плоской волны конечной амплитуды в среде с дисперсией скорости

Наличие дисперсии в среде сильно влияет на распространение волн конечной амплитуды. Начнем с гармонической волны в качестве волны первого порядка. По-прежнему можно написать уравнение поправки как уравнение в линейной среде с наличием сторонних источников. Скорость бега пространственного распределения сторонних источников — это скорость исходной волны. Скорость же бега второй гармоники вследствие дисперсии отличается от этой скорости. Поэтому при распространении фаза стороннего воздействия и фаза второй гармоники будут расходиться между собой, вместо того чтобы оставаться в неизменном соотношении, как это имело место в отсутствие дисперсии. В результате такой расфазировки перекачка энергии из первой гармоники во вторую начнет замедляться, прекратится, а затем и переменит знак, так что энергия начнет возвращаться из второй гармоники в первую и полностью вернется в первую гармонику. Вековой член в решении будет отсутствовать.

При дальнейшем распространении волны этот цикл сможет повториться многократно. При достаточной величине дисперсии может оказаться, что амплитуда второй гармоники за все время цикла будет оставаться малой по сравнению с амплитудой первой гармоники. Тогда практически не будет ограничения во времени распространения или в пути пробега волны, на котором допустимо пользоваться приближением, учитывающим только квадратичную поправку.

Проиллюстрируем сказанное расчетом. Пусть скорость звука для частоты первой гармоники равна c . Волну первого порядка возьмем в виде

$$p' = p_0 \sin(\omega t - ka). \quad (129.1)$$

Уравнение для второй гармоники имеет вид

$$\rho''_{it} - \tilde{c}^2 \rho''_{aa} = 2\rho_0^2 \omega^2 G \cos(2\omega t - 2ka), \quad (129.2)$$

где \tilde{c} — скорость второй гармоники. Как увидим, \tilde{c} соответствует, в зависимости от акустической ситуации, либо частоте, либо длине волны второй гармоники, т. е. либо двойной частоте, либо двойному волновому числу первой гармоники. Правая часть уравнения (129.2) не удовлетворяет однородному уравнению, так как при наличии дисперсии двойной частоте не соответствует двойное

волновое число. Поэтому резонансных явлений при распространении волны не будет.

В самом деле, рассмотрим акустическую ситуацию, в которой в начальный момент задано $p'' = 0$. В этом случае поправка должна иметь пространственную периодичность, равную пространственной периодичности стороннего воздействия, т. е. поправка есть гармоника с волновым числом $2k$. Так как скорость \tilde{c} волны с волновым числом $2k$ не равна скорости волны с волновым числом k , то и частота $\tilde{\omega} = \tilde{c} \cdot 2k$ этой волны не равна 2ω . Искомое решение можно записать как сумму частного решения уравнения (129.2) («вынужденная волна») и решения однородного уравнения («свободная волна»), подобранного так, чтобы удовлетворить начальному условию. Частное решение можно выбрать в виде

$$p_1'' = A \cos(2\omega t - 2ka).$$

Подставляя в (129.2), найдем

$$A = \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2 G \omega^2}{(\tilde{\omega}/2)^2 - \omega^2}.$$

«Свободная волна» с тем же волновым числом имеет вид

$$p_2'' = B \cos(\tilde{\omega} t - 2ka).$$

Для того чтобы в начальный момент сумма обоих решений равнялась нулю, достаточно положить $B = -A$.

Таким образом, после элементарного преобразования найдем искомое решение в виде

$$p'' = p_1'' + p_2'' = \rho_0^2 G \frac{\omega^2 \sin [(\tilde{\omega}/2) - \omega] t}{(\tilde{\omega}/2)^2 - \omega^2} \sin \left[\left(\frac{\tilde{\omega}}{2} + \omega \right) t - 2ka \right].$$

Временная зависимость решения представляет собой картину биений: векового члена действительно нет. Амплитуда второй гармоники (частоты $\tilde{\omega}/2 + \omega$) сначала растет, достигает максимального значения, $\frac{1}{2}$ равного

$$\rho_0^2 G \frac{\omega^2}{(\tilde{\omega}/2)^2 - \omega^2},$$

затем начинает убывать и наконец совсем исчезает, после чего весь цикл повторяется снова и снова. Полный период биений равен

$$\frac{2\pi}{|(\tilde{\omega}/2) - \omega|}.$$

Этот расчет пригоден только для случая малости максимальной амплитуды второй гармоники по сравнению с амплитудой первой гармоники, т. е. при достаточно большой дисперсии. Тогда можно пренебрегать малым изменением амплитуды первой гармоники на всем протяжении цикла биений, а также влиянием попра-

вок порядка выше второго при распространении волны в течение многих циклов.

Начальный участок нарастания второй гармоники имитирует линейное нарастание амплитуды векового члена, и при малой дисперсии амплитуда ее может достигнуть большой величины, что обозначит неприменимость расчета. При предельном переходе к отсутствию дисперсии найденное решение переходит в (125.5).

Аналогичный расчет легко провести и при задании синусоидального давления в некоторой точке. В этом случае заданной является временная периодичность стороннего воздействия, равная двойной частоте колебаний поршня 2ω . Но соответствующее волновое число при этом не будет равно $2k$, а должно быть получено как $\bar{k} = 2\omega/\bar{c}$, где \bar{c} — скорость волны частоты 2ω . Тем же способом, что и выше, найдем решение:

$$p'' = p_0^2 G \frac{(\bar{k}/2)^2 \sin [(\bar{k}/2) - k] a}{(\bar{k}/2)^2 - k^2} \sin [2\omega t - (\bar{k}/2 + k) a].$$

Здесь также получаются биения — на этот раз пространственные. Максимальное значение амплитуды второй гармоники равно

$$p_0^2 G \frac{(\bar{k}/2)^2}{|(\bar{k}/2)^2 - k^2|}.$$

Длина одного цикла биений есть

$$\frac{2\pi}{|(\bar{k}/2) - k|}.$$

Наличие дисперсии объясняет, почему не образуются «ударные волны», «скачки» в волнах на морской поверхности, хотя их нельзя считать волнами бесконечно малой амплитуды, и вообще почему в таких волнах можно пренебрегать *накоплением* нелинейного эффекта.

Дисперсия морских волн выражается соотношением $\omega^2 = gk$, где g — ускорение силы тяжести. Расфазировка волн двойной частоты с волной первого порядка приводит к сдвигу фаз на полволны уже на расстоянии одной четверти волны. Практически перехода энергии в высокие гармоники нет*).

Дисперсией звука можно объяснить сравнительно малое ослабление звука при его распространении в верхних слоях атмосферы на расстояния в десятки тысяч километров, наблюдающееся после взрывов искусственных (атомные взрывы) или естественных (вулканический взрыв о-ва Кракатау). Звуки таких взрывов оказываются захваченными атмосферным волноводом — областью минимальной скорости звука, расположенной в высоких слоях

*) Однако на мелководье (например, в устьях рек, куда заходят морские приливы), где дисперсия отсутствует, нелинейный эффект накапливается и, в частности, приводит к явлению *борь* типа ударной волны.

атмосферы. Если бы распространение происходило без дисперсии, то скоро бы образовывалась ударная волна (скачок давления) и волна быстро бы затухала. В действительности в результате волноводной дисперсии волна затухает сравнительно слабо.

§ 130. Стоячие волны конечной амплитуды

Рассмотрим квадратичную поправку к стоячей волне в узкой трубе, ограниченной крышками с теми или иными акустическими свойствами: например, крышками абсолютно жесткими, абсолютно мягкими или крышками, характеризующимися каким-либо импедансом и т. п. В качестве волны первого порядка будем каждый раз брать стоячую волну линейной теории, полагая, что квадратичная поправка в начальный момент равна нулю. Мы увидим, что характер поправки существенно зависит от свойств крышек.

Пусть длина трубы равна L . Совместим начало координат с одним из концов трубы. Начнем со случая абсолютно жестких крышек с обеих сторон трубы. В качестве линейного приближения возьмем стоячую волну номера l :

$$p' = p_0 \cos ka \sin \omega t, \quad \text{где} \quad k = \frac{l\pi}{L} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{l\pi c_0}{L}.$$

В этом случае уравнение (124.9) для квадратичной поправки принимает вид

$$p''_{tt} - c_0^2 p''_{aa} = p_0^2 G \omega^2 (1 + \cos 2ka) \cos 2\omega t.$$

Как нетрудно убедиться прямой подстановкой, квадратичная поправка, удовлетворяющая начальному условию $p'' = 0$ при $t = 0$, — это волна

$$p'' = \frac{1}{4} p_0^2 G (1 - \cos 2\omega t + \omega t \cos 2ka \sin 2\omega t).$$

Первые два члена в скобках дают давление, распределенное равномерно вдоль трубы и осциллирующее с двойной частотой вокруг среднего значения $(1/4) p_0^2 G$. Третий член — стоячая волна удвоенного номера (вторая гармоника исходной волны) с амплитудой, нарастающей пропорционально времени, протекшему от начального момента. Аналогично случаю бегущей волны квадратичная поправка и здесь представляет собой вековой член — носит резонансный характер, что объясняется наличием в правой части уравнения члена $\cos 2ka \cos 2\omega t$, являющегося для заданных граничных условий собственным решением уравнения без правой части.

Иначе обстоит дело в трубе со свободными концами. В такой трубе за волну первого порядка можно принять

$$p' = p_0 \sin ka \sin \omega t.$$

Уравнение (124.9) для квадратичной поправки примет вид

$$p''_{tt} - c_0^2 p''_{aa} = p_0^2 G \omega^2 (1 - \cos 2ka) \cos 2\omega t.$$

В правой части этого уравнения нет слагаемого, совпадающего с решением уравнения без правой части и удовлетворяющего граничным условиям (обращение давления в нуль на концах трубы). Поэтому и решение не имеет резонансного характера: вековой член отсутствует. В самом деле, одним из частных решений уравнения является периодическая функция

$$p''_1 = \frac{1}{4} p_0^2 G (\cos 2ka - 1 + ka \sin 2ka) \cos 2\omega t.$$

Для получения решения, удовлетворяющего начальному условию, т. е. обращаемого в нуль в момент $t = 0$, достаточно добавить к этому частному решению неоднородного уравнения решение однородного уравнения, также обращаемое в нуль на концах трубы, которое принимало бы в начальный момент значение

$$-\frac{1}{4} p_0^2 G (\cos 2ka - 1 + ka \sin 2ka).$$

Дадим наглядное объяснение качественному различию результатов для разобранных двух случаев. Мы видели, что появление квадратичной поправки можно трактовать как результат воздействия на среду сторонних объемных скоростей. В каждой точке трубы сообщаемая второй гармонике мощность равна произведению сторонней объемной скорости на давление в создаваемой волне. Поскольку сторонние объемные скорости имеют двойную частоту по сравнению с исходной волной, возбуждаться может только волна этой двойной частоты, т. е. волна двойного номера по сравнению с исходной. Но совпадения частот стороннего воздействия и волны недостаточно для того, чтобы происходила перекачка энергии в волну. Действительно, распределение объемной скорости вдоль трубы в обоих случаях имеет вид $\cos 2ka$; постоянную составляющую можно не учитывать, так как для всех номеров нормальных волн, кроме первого (в трубе с открытыми концами) работа постоянной составляющей равна нулю. В трубе с жесткими крышками распределение давлений в волне двойной частоты также имеет вид $\cos 2ka$, и поэтому работа в каждой точке всей трубы положительна, в результате чего энергия перекачивается во вторую гармонику. Для трубы же с мягкими крышками давление во второй гармонике распределено по закону $\sin 2ka$, ортогонально к распределению сторонних объемных скоростей: работа в разных точках трубы имеет разные знаки, а в целом по трубе равна нулю. В результате вековых членов нет.

В трубе с одной абсолютно жесткой и другой абсолютно мягкой крышкой вторая гармоника не возникнет, потому что в наборе собственных колебаний такой трубы нет четных гармоник: частоты различных номеров колебаний относятся как 1 : 3 : 5 . . . Наконец,

если крышки в трубе не идеальные, а, например, характеризуются каким-либо импедансом, то набор собственных колебаний в такой трубе также вообще негармонический, так что для какого-либо номера собственных колебаний не найдется колебаний двойной частоты. Сторонние же объемные скорости всегда имеют двойную по отношению к исходной волне частоту. Во всех этих случаях (за исключением двух абсолютно жестких крышек) частота возможных нормальных колебаний не совпадает с частотой стороннего воздействия: вековых членов нет. В этом смысле жесткие крышки — исключительный случай.

§ 131. Уравнения квадратичной поправки для неодномерных волн

До сих пор мы рассматривали только одномерные волны, для которых было целесообразно применять лагранжевы уравнения. В неодномерном случае оказывается удобнее пользоваться эйлеровыми уравнениями. Точные уравнения гидродинамики в эйлеровой форме запишем в виде

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v}_t + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p &= 0, \\ \rho_t + \nabla (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho &= \rho(p). \end{aligned} \quad (131.1)$$

Первое из этих уравнений — уравнение движения, второе — уравнение неразрывности, третье — уравнение состояния.

Напишем приближенные уравнения, представляя, как и раньше, все величины в виде рядов по степеням числа Маха и ограничиваясь членами первого порядка (линейное приближение) и второго порядка (квадратичная поправка). Линейные величины будем обозначать одним штрихом, а квадратичные — двумя штрихами. Как и выше, напишем уравнения отдельно для линейных и отдельно для квадратичных величин.

Итак, положим

$$p = p' + p'', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}'', \quad \rho - \rho_0 = \rho' + \rho''. \quad (131.2)$$

Первые два уравнения (131.1) дадут

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho' + \rho'') (\mathbf{v}'_t + \mathbf{v}''_t) + (\rho_0 + \rho' + \rho'') (\mathbf{v}' + \mathbf{v}'', \nabla) (\mathbf{v}' + \mathbf{v}'') + \\ + \nabla p' + \nabla p'' = 0, \\ \rho'_t + \rho''_t + \nabla \{ (\rho_0 + \rho' + \rho'') (\mathbf{v}' + \mathbf{v}'') \} = 0. \end{aligned}$$

Отбрасывая члены порядка выше второго и разделяя величины по порядку малости, найдем для величин первого порядка

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathbf{v}'_t + \nabla p' &= 0, \\ \rho'_t + \rho_0 \nabla \mathbf{v}' &= 0; \end{aligned} \quad (131.3)$$

для величин второго порядка

$$\begin{aligned}\rho_0 \ddot{\mathbf{v}}_t + \nabla p'' &= -\rho'' \dot{\mathbf{v}}_t - \rho_0 (\mathbf{v}'' \nabla) \dot{\mathbf{v}}', \\ \rho_t'' + \rho_0 \nabla \mathbf{v}'' &= -\rho'' \nabla \mathbf{v}'' - \mathbf{v}'' \nabla \rho''.\end{aligned}\quad (131.4)$$

Таким образом, поле первого приближения удовлетворяет однородным линейным уравнениям, а поправка — тем же уравнениям с правой частью, т. е. со сторонними воздействиями. Преобразуем эти уравнения к виду, удобному для исследования.

Из первого из уравнений (131.3) видно, что поле скоростей первого порядка потенциально. В этом случае, как известно,

$$(\mathbf{v}'' \nabla) \dot{\mathbf{v}}' = \nabla (1/2 v'^2).$$

Подставляя (124.5) в уравнения (131.4) и пользуясь уравнениями (131.3), получим последовательно

$$\begin{aligned}\rho_0 \ddot{\mathbf{v}}_t + \nabla p'' &= -\frac{1}{c_0^2} p' \dot{\mathbf{v}}_t - \rho_0 \nabla \left(\frac{1}{2} v'^2 \right) = \\ &= \frac{1}{\rho_0 c_0^2} p' \nabla p' - \rho_0 \nabla \left(\frac{1}{2} v'^2 \right) = \nabla \left(\frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} p'^2 - \frac{1}{2} \rho_0 v'^2 \right); \\ p_t'' + \rho_0 c_0^2 \nabla \mathbf{v}'' &= \frac{1}{2 c_0^2} \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 (p'^2)_t - p' \nabla \dot{\mathbf{v}}' - \dot{\mathbf{v}}' \nabla p' = \\ &= \frac{1}{2 c_0^2} \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 (p'^2)_t + \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} (p'^2)_t + \rho_0 \mathbf{v}'' \dot{\mathbf{v}}_t = \\ &= \left\{ \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} \left[1 + \rho_0 \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 \right] p'^2 + \frac{1}{2} \rho_0 v'^2 \right\}_t.\end{aligned}$$

Но $T = \frac{1}{2} \rho_0 v'^2$ есть плотность кинетической, а $U = \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} p'^2$ — плотность внутренней энергии поля первого порядка. Значит, уравнения для квадратичной поправки можно записать в виде

$$\begin{aligned}\rho_0 \ddot{\mathbf{v}}_t + \nabla p'' &= \nabla (U - T), \\ p_t'' + \rho_0 c_0^2 \nabla \mathbf{v}'' &= \left\{ \left[1 + \rho_0 \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 \right] U + T \right\}_t.\end{aligned}\quad (131.5)$$

Отсюда видно, что квадратичную поправку можно считать волной, создаваемой сторонними источниками: дипольными источниками с силой диполя, распределенной с плотностью $F = \nabla (U - T)$, и монополярными источниками с объемной скоростью, распределенной с плотностью

$$V = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \left\{ \left[1 + \rho_0 \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 \right] U + T \right\}_t.$$

Исключая из уравнений (131.5) скорость частиц, получим для квадратичной поправки волновое уравнение с правой частью:

$$\begin{aligned} p''_{tt} - c_0^2 \Delta p'' &= \left\{ \left[1 + \rho_0 \left(\frac{dc^2}{dp} \right)_0 \right] U + T \right\}_{tt} - c_0^2 \Delta (U - T) = \\ &= \left[\left(\frac{2G}{\beta} - 1 \right) U + T \right]_{tt} - c_0^2 \Delta (U - T). \end{aligned} \quad (131.6)$$

Для идеального газа найдем, пользуясь (124.12):

$$p''_{tt} - c_0^2 \Delta p'' = (\gamma U + T)_{tt} - c_0^2 \Delta (U - T). \quad (131.7)$$

Для бегущей волны $p' = p'(t \mp x/c)$, как мы знаем, всегда $U = T = 1/2\beta (p')^2$, и уравнение (131.6) можно записать в виде

$$p''_{tt} - c_0^2 \frac{\partial^2 p''}{\partial x^2} = G (p'^2)_{tt}, \quad (131.8)$$

что в точности совпадает по форме с уравнением (124.9); но, во-первых, оно, в отличие от последнего, написано в эйлеровых координатах, а не в лагранжевых и, во-вторых, относится только к бегущим волнам, а не к произвольным одномерным волнам, как уравнение в лагранжевых координатах.

Если бегущая волна в первом порядке задана одинаковыми формулами в эйлеровых и лагранжевых координатах, то и квадратичные поправки выразятся одинаковыми формулами. Решения же § 130, конечно, не переносятся на эйлеровы координаты без дополнительных изменений.

Для задачи с первым приближением в виде бегущей плоской волны $p' = p'(x - c_0 t)$ и для случая, когда начальное значение квадратичной поправки принимается равным нулю, решение имеет вид

$$p'' = \frac{1}{2} G t (p'^2)_t,$$

что совпадает с приближенной формулой (122.7), полученной из точного решения.

§ 132. О нелинейном взаимодействии плоских волн, бегущих под углом друг к другу

В § 126 мы видели, что при нелинейном взаимодействии двух плоских волн, бегущих в одном направлении, помимо волн двойной частоты для каждой из гармонических компонент исходных волн появляются еще вековые члены суммарных и разностных частот. Выясним теперь, как обстоит дело с квадратичной поправкой в случае, когда исходные плоские волны бегут под углом друг к другу. Оказывается, что в отсутствие дисперсии волны двойных частот появляются по-прежнему, но волны суммарной

и разностной частот уже не являются вековыми членами в решении.

В самом деле, применим результаты предыдущего параграфа к сумме волн первого порядка:

$$p' = p_1 \cos(\omega_1 t - k_1 r) + p_2 \cos(\omega_2 t - k_2 r),$$

где волновые векторы составляющих волн k_1 и k_2 не параллельны. Из (131.5) следует, что сторонние объемные скорости и сторонние силы, зависящие от обеих волн первого порядка, распределены во времени и в пространстве по законам

$$\sin[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)r] \quad \text{и} \quad \sin[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)r].$$

Таким образом, сторонние воздействия оказываются бегущими волнами, в которых частоты равны арифметической сумме или разности частот волн первого порядка, а волновые векторы равны векторной сумме или разности соответственных волновых векторов. Ясно, что в этом случае фазовые скорости сторонних воздействий не равны скорости свободных волн в среде: волна суммарной частоты бежит быстрее, а волна разностной частоты бежит медленнее звука. Картина возбуждения волн суммарной и разностной частоты получается аналогичной картине в среде с дисперсией скорости (см. § 129): энергия будет то перекачиваться из волны первого порядка в волны суммарной и разностной частоты, то возвращаться обратно в волны первого порядка. Нарастания и убывания волн суммарной и разностной частоты будут носить характер биений, причем чем ближе друг к другу направления волновых векторов исходных волн, тем период биений длиннее и тем точнее картина биений «имитирует» вековые члены. С точки зрения наличия вековых членов можно сказать, что в среде без дисперсии монохроматические волны, бегущие по разным направлениям, не взаимодействуют между собой.

Иначе обстоит дело при взаимодействии *ограниченных* («коллимированных») пучков волн, бегущих в разных направлениях, например двух монохроматических пучков ультразвука, исходящих из двух разнесенных излучателей и пересекающихся в некоторой ограниченной области взаимодействия. В этом случае сторонние источники можно найти тем же способом, что и при пересечении неограниченных плоских волн, но эти источники оказываются расположенными в некотором ограниченном объеме. Область взаимодействия явится некоторой пространственной антенной для волн суммарной и разностной частот. Создающиеся биения окажутся в этом случае оборванными на границах области взаимодействия, и волны суммарной и разностной амплитуды будут распространяться вне области взаимодействия как свободные волны.

Явление распространения волн суммарных и разностных частот *вне области взаимодействия* первичных полей первого порядка называют *рассеянием звука на звуке*. Величина этого рассеяния

зависит, помимо амплитуд исходных пучков и частот исходных волн, еще и от формы области взаимодействия и от угла между первичными пучками.

Вековые члены суммарной и разностной частоты могут появиться в результате взаимодействия неограниченных плоских волн только при наличии в среде дисперсии скорости звука. Так будет, если волновое число для суммарной или разностной частоты в диспергирующей среде равно соответственно модулю суммы или разности волновых векторов исходных волн. Считая волновой вектор функцией частоты: $k = k(\omega)$, можем записать соответственные условия так:

$$k(\omega_1 \pm \omega_2) = |k(\omega_1) \pm k(\omega_2)|,$$

или так:

$$[k(\omega_1 \pm \omega_2)]^2 = [k(\omega_1)]^2 + [k(\omega_2)]^2 \pm 2k(\omega_1)k(\omega_2)\cos\theta,$$

где θ — угол между волновыми векторами исходных волн. Отсюда можно найти те углы θ , при которых появляются вековые члены суммарной и разностной частоты. Из последней формулы получаются следующие условия существования таких углов:

$$\begin{aligned} k(\omega_1 + \omega_2) &< k(\omega_1) + k(\omega_2), \\ k(|\omega_1 - \omega_2|) &> |k(\omega_1) - k(\omega_2)|. \end{aligned}$$

Эти неравенства наверное будут выполнены для любых частот, если групповая скорость больше фазовой для любой частоты, и наверное не будут выполнены при обратном соотношении между этими скоростями.

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ 133. Твердое тело как акустическая среда

Твердые тела отличаются от жидкостей тем, что при деформациях в них возникают не только давления, но и сдвиговые упругие напряжения. Поэтому в твердых телах, помимо продольных волн того же типа, что и в жидкостях, могут распространяться и поперечные волны, в которых частицы колеблются перпендикулярно к направлению распространения.

В жидкостях степень сжатия полностью определяет возникающее давление — единственную величину, характеризующую напряженное состояние среды. В твердом теле картина напряженного состояния более сложна и требует более подробного учета картины деформаций. Вместо скаляров — сжатия и давления — появляются тензоры деформации и тензоры напряжений. Акустику твердой среды начнем с напоминания основных свойств этих тензоров. Среду будем считать изотропной.

§ 134. Тензор деформации

Если каждая точка твердого тела получила одно и то же смещение, то это значит, что тело переместилось поступательно: деформация тела отсутствует, и следовательно, никаких упругих напряжений в теле не возникло. Деформаций может не быть и при различных смещениях разных точек, например при вращении тела как целого. Напряжения возникают только в тех случаях, когда расстояния между точками тела изменяются.

Изменение смещений от точки к точке можно характеризовать производными компонент смещений u_1, u_2, u_3 по координатам какой-либо прямоугольной декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) , т. е. величинами du_j/dx_i . Однако такие производные еще не характеризуют деформацию, так как в них входят также смещения тела как целого. Поэтому удобно выделить такие величины, которые зависели бы только от изменений расстояний между точками тела. Это можно сделать следующим образом. Возьмем в теле две точки, координаты которых различаются на dx_j . Квадрат расстояния dL между этими точками равен

$$dL^2 = dx_j^2. \quad (134.1)$$

После деформации расстояние между точками станет равно dL' :

$$(dL')^2 = (dx_j + du_j)^2, \quad (134.2)$$

где du_j — приращение вектора смещений при переходе от первой точки ко второй. Для близких точек, т. е. для малых значений dx_j , можно положить

$$du_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l. \quad (134.3)$$

«Малость» вектора dx_j , конечно, относительна и означает малость его модуля по сравнению с расстояниями, на которых величина производных $\partial u_j / \partial x_l$ изменяется заметным образом.

Подставляя (134.3) в (134.2), найдем

$$\begin{aligned} (dL')^2 &= dx_j^2 + 2 \frac{\partial u_j}{\partial x_l} dx_l dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} dx_l dx_m = \\ &= (dL)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) dx_j dx_l. \end{aligned}$$

Таким образом, приращение квадрата расстояния между двумя близкими точками равно

$$(dL')^2 - (dL)^2 = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) dx_j dx_l. \quad (134.4)$$

Можно показать, что величина

$$u_{jl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right) \quad (134.5)$$

есть тензор; ее называют *тензором деформации*. Очевидно, тензор деформации симметричен. Если все компоненты тензора деформации обращаются в нуль (инвариантное свойство тензора), и только в этом случае, расстояния между частицами тела не меняются и оно движется как абсолютно жесткое тело. Таким образом, u_{jl} действительно характеризует деформацию тела независимо от его движения как целого.

Если малы компоненты тензора деформации, то обычно малы и производные $\partial u_j / \partial x_i$; исключением являются случаи изгибания или кручения стержня или изгибание пластины, когда велик угол поворота средней линии или угол закручивания. Если не рассматривать эти особые случаи, то можно линейаризовать выражение для тензора деформации, пренебрегая квадратичными членами, и записать его в виде

$$u_{jl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right). \quad (134.6)$$

Если линейаризация возможна, то линейаризованные тензоры можно складывать (принцип суперпозиции): две деформации u_{jl}

и v_{ji} , совершенные одна за другой, эквивалентны одной деформации $u_{ji} + v_{ji}$. Погрешность при таком расчете — того же порядка, что и при переходе от (134.5) к (134.6).

Каждая из компонент линеаризованного тензора деформаций имеет простой физический смысл. Диагональная компонента (компонента с двумя совпадающими индексами), например u_{11} , равна относительному растяжению элемента среды в направлении соответственной оси (в данном случае оси x_1). Сумма диагональных компонент тензора деформации равна дивергенции смещений точек среды, т. е. акустическому сжатию среды, взятому с обратным знаком: $u_{\alpha\alpha} = \operatorname{div} \mathbf{u} = -s$.

Недиагональная компонента (компонента с различными индексами), например u_{23} , равна изменению в результате деформации прямого угла между соответственными осями координат, проведенными в среде (деформация сдвига).

Компоненты тензора деформации изменяются при повороте осей. Формулы преобразования между компонентами u_{ji} в старой системе (x_1, x_2, x_3) и компонентами u'_{ji} в новой системе (x'_1, x'_2, x'_3) имеют вид

$$u'_{ji} = u_{\alpha\beta} \gamma'_{\alpha j} \gamma_{\beta i}, \quad u_{ji} = u_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha j} \gamma_{\beta i},$$

где $\gamma_{ji} = \cos(x_j, x'_i)$, $\gamma'_{ji} = \cos(x'_j, x_i)$ — направляющие косинусы осей одной системы относительно другой. Очевидно, $\gamma_{j\alpha} \gamma_{i\alpha} = \delta_{ji}$ и $\gamma_{ji} = \gamma'_{ij}$. Величина $u_{\alpha\alpha}$ при повороте осей не меняется.

Как известно, симметричный тензор имеет систему главных осей. В этой системе координат от нуля отличны только диагональные компоненты тензора. Следовательно, любая деформация может быть представлена в виде суперпозиции трех растяжений в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Если деформация такова, что все три растяжения равны, так что тензор деформаций можно представить в виде $u_{ji} = \delta_{ji} u$, то это свойство называется инвариантным. В этом случае каждая система координат оказывается главной и деформации сдвига отсутствуют. В самом деле, по закону преобразования компонент тензора имеем в этом случае

$$u'_{ji} = u_{\alpha\beta} \gamma'_{\alpha j} \gamma_{\beta i} = u \delta_{\alpha\beta} \gamma'_{\alpha j} \gamma_{\beta i} = u \gamma'_{\beta j} \gamma_{\beta i} = u \delta_{ji}.$$

Если в каждой точке твердого тела компоненты тензора деформации одинаковы, то деформацию называют *однородной*. При этом и напряженное состояние среды оказывается одинаковым во всех точках*), а следовательно, результирующая сил упругости, действующих на любой объем среды, равна нулю. Поэтому деформация в упругой волне не может быть однородной.

*) При случаях изгиба и кручения, упомянутых в § 134, одинаковое напряженное состояние может иметь место и при тензоре деформаций, меняющемся от точки к точке.

§ 135. Тензор напряжений

Для того чтобы определить напряженное состояние среды в данной точке, достаточно задать напряжения, действующие по трем взаимно перпендикулярным плоскостям, проведенным через данную точку. Пусть эти плоскости — координатные плоскости декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) . Векторы напряжения на плоскости с нормалью x_j обозначим через σ_j . Компоненты напряжения на плоскости с нормалью x_j обозначим через σ_{ji} ; первый индекс обозначает номер оси, нормальной к координатной плоскости, на которой определяется напряжение; второй индекс — номер компоненты в данной системе координат.

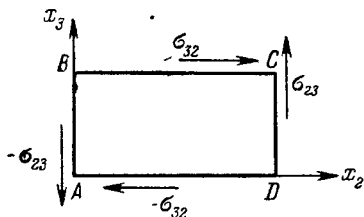


Рис. 135.1. К доказательству симметричности тензора напряжений.

Например, σ_{23} есть компонента в направлении оси x_3 упругой силы, действующей на плоскость с нормалью x_2 , отнесенная к единице площади. Для координатных плоскостей другой системы координат, проходящих через ту же точку, компоненты напряжений будут другими. Найдем связь между компонентами напряжений в одной и в другой системе.

Векторы напряжения для систем координат (x_1, x_2, x_3) и (x'_1, x'_2, x'_3) удовлетворяют уравнениям $\sigma'_j = \sigma_{\alpha} \gamma_{\alpha j}$, $\sigma_j = \sigma'_{\alpha} \gamma'_{\alpha j}$. Проектируя эти уравнения соответственно на оси x'_1, x'_2, x'_3 и оси x_1, x_2, x_3 , получим соотношения

$$\sigma'_{ji} = \sigma_{\alpha\beta} \gamma'_{\alpha j} \gamma_{\beta i}, \quad \sigma_{ji} = \sigma'_{\alpha\beta} \gamma'_{\alpha j} \gamma_{\beta i}.$$

Отсюда видно, что напряженное состояние в точке твердого тела выражается *тензором*: величины σ_{ji} преобразуются как компоненты тензора второго ранга. Тензор σ_{ji} называют *тензором напряжений*.

Рассмотрим (для простоты ограничимся плоским случаем, рис. 135.1) касательные напряжения, приложенные к мысленно выделенному элементу среды $ABCD$. Момент, создаваемый касательными напряжениями, равен $(\sigma_{23} - \sigma_{32}) AB \cdot BC$, и следовательно, имеет второй порядок малости по отношению к размерам элемента. Но момент инерции элемента имеет третий порядок малости относительно этих размеров. Следовательно, компоненты σ_{23} и σ_{32} должны быть равны, иначе элемент получил бы бесконечное угловое ускорение. Отсюда заключаем, что всегда $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, т. е. тензор напряжений симметричен.

Тензор напряжений, подобно тензору деформаций, также может быть приведен к главным осям. В этом случае отличны от нуля только диагональные элементы и напряжения по всем трем координатным плоскостям направлены по нормали. Если к тому же все нормальные напряжения в этой системе равны друг другу, так что

тензор напряжений в этой системе принимает вид $\sigma_{ji} = \delta_{ji}\sigma$, то это свойство оказывается инвариантным и любая система координат явится главной: ни по какой плоскости нет касательных напряжений. Доказательство проводится так же, как и для тензора деформации (см. § 134).

Таким образом, в этом случае нормальное напряжение получается одним и тем же для любого направления площадки, а касательные напряжения отсутствуют. Это — такое же напряженное состояние, как в сжатой жидкости. Оно возникнет, например, при погружении твердого тела в жидкость, находящуюся под давлением.

Величина σ в этом случае равна давлению, взятому с обратным знаком: $\sigma = -p$ (в отличие от напряжений, давление считается положительным, если сила давления направлена по внутренней нормали к площадке).

§ 136. Закон Гука

Внутренние напряжения в твердых телах определяются деформациями тела, подобно тому как давление в жидкости определяется ее сжатием. Связь между напряжениями и деформациями может быть разного типа. Может оказаться, что напряжение в данный момент зависит от того, какие деформации испытывало тело за всю его историю (аналогично жидкостям с релаксацией), а может оказаться, что напряженное состояние в данный момент определяется только деформацией в этот самый момент; если при этом внутренняя вязкость отсутствует, то работа в теле при циклическом деформировании тела (с возвращением к исходному состоянию) равна нулю. Более того: будем заниматься только телами с линейной упругостью, т. е. телами, для которых связь между компонентами напряжения и деформации линейна. Наконец, ограничимся только изотропными твердыми телами. Требование линейности исключает большие значения тензора деформации, а также исключает среды типа порошков, для которых сжатие вызывает напряжения, но растяжение приводит только к нарушению контакта между частицами.

Напишем самый общий вид линейного соотношения между компонентами тензоров напряжения и деформации. Это соотношение должно иметь тензорный характер: иначе соотношение, справедливое в одной системе координат, оказывалось бы неверным в другой, в то время как по самому смыслу такого соотношения оно должно быть инвариантно по отношению к выбору системы координат. Можно написать два различных тензора второго ранга, линейно зависящих от компонент тензора деформации: первый — это сам тензор деформации; второй — это тензор $u_{\alpha\alpha}\delta_{ji}$. Величина

$$u_{\alpha\alpha} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

— инвариант; его физический смысл — относительное изменение объема элемента (дивергенция смещения). Наиболее общее линейное соотношение между тензорами деформации и напряжения можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ji} = \lambda \delta_{ji} u_{\alpha\alpha} + 2\mu u_{ji}, \quad (136.1)$$

где λ и μ — так называемые *коэффициенты Ламе* — величины, характеризующие упругие свойства данной среды. Это соотношение называют *обобщенным законом Гука*.

Уравнения (136.1) можно решить относительно тензора деформации. В самом деле, свертывая это уравнение по индексам j и i , найдем

$$u_{\alpha\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{3\lambda + 2\mu}. \quad (136.2)$$

Подставляя в (136.1) и решая относительно u_{ji} , получим

$$u_{ji} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ji} \sigma_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ji}. \quad (136.3)$$

Например,

$$u_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad u_{23} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{23}.$$

§ 137. Граничные условия для твердых тел

Рассмотрим важнейшие виды граничных условий для границ твердого тела с другими телами или с вакуумом; разнообразие здесь большее, чем для жидкостей. Будем обозначать ось, совпадающую с нормалью к границе, индексом n , а две взаимно перпендикулярные оси в плоскости границы — индексом α ($\alpha = 1, 2$).

1. Свободная граница. На свободной границе равны нулю компоненты тензора упругого напряжения, соответствующие площадке, лежащей на границе: $\sigma_{nn} = \sigma_{n\alpha} = 0$.

2. Граница с абсолютно жестким телом при наличии «склейки». Равны нулю все компоненты смещения точек границы: $u_n = u_\alpha = 0$.

3. Граница с абсолютно жестким телом при наличии «смазки». Равны нулю нормальное смещение границы и касательные напряжения на границе: $u_n = 0$; $\sigma_{n\alpha} = 0$.

4. «Приклеенная» жесткая в продольном направлении идеально гибкая пластинка. Касательные смещения и нормальные напряжения равны нулю: $u_\alpha = 0$; $\sigma_{nn} = 0$.

5. Граница с жидкостью. Нормальное давление на границе равно давлению в жидкости, взятому с обратным знаком; касательные напряжения равны нулю; нормальные скорости твердого тела и жидкости на границе равны между собой: $\sigma_{nn} = -p$; $\sigma_{n\alpha} = 0$; $u_n = u'_n$.

6. Граница с другим твердым телом при наличии «склейки». Парно равны все компоненты смещений обоих тел на границе и одноименные компоненты тензора напряжений: $u_j = u'_j$; $\sigma_{nn} = \sigma'_{nn}$; $\sigma_{n\alpha} = \sigma'_{n\alpha}$.

7. Граница с другим твердым телом при наличии «смазки». Равны парно нормальные смещения и нормальные напряжения обоих тел на границе. Касательные напряжения в обоих телах равны нулю: $u_n = u'_n$; $\sigma_{nn} = \sigma'_{nn}$; $\sigma_{n\alpha} = \sigma'_{n\alpha} = 0$.

§ 138. Однородные деформации. Различные модули упругости

При *однородной* деформации напряженное состояние среды одинаково во всех точках тела: тензор напряжений не зависит от координат. Однородная деформация — это статическая деформация, так как на каждую частицу со стороны соседних действуют одинаковые противоположно направленные силы, и поэтому равнодействующая напряжений, действующих на частицу, равна нулю.

Если деформация неоднородна, но меняется от точки к точке непрерывно, то для вычисления напряжений в малой окрестности данной точки деформацию можно считать однородной и учитывать неоднородность только при вычислении силы, действующей на элементарный объем. Важнейшие типы однородных деформаций — всестороннее сжатие, чистый сдвиг, растяжение вдоль одной оси.

Всесторонним растяжением (или *всесторонним сжатием* — в зависимости от знака деформации) называют деформацию, при которой удлинение одинаково по всем трем осям, а сдвиговые деформации равны нулю:

$$u_{11} = u_{22} = u_{33}; \quad u_{23} = u_{31} = u_{12} = 0.$$

Подставляя в уравнение (136.1), найдем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) u_{\alpha\alpha}; \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0. \quad (138.1)$$

Отличны от нуля только нормальные напряжения. Величину

$$K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$$

называют *модулем всестороннего сжатия* или *объемным модулем упругости*. Формулу (138.1) можно записать также в виде

$$\frac{1}{3} \sigma_{\alpha\alpha} = K u_{\alpha\alpha}.$$

В этом виде формула справедлива и для любой неоднородной деформации, что легко видеть, свертывая (136.1) по индексам j и l . Таким образом, среднее значение трех нормальных напряжений зависит только от дивергенции смещения, или, что то же, от сжатия среды.

Деформацией чистого сдвига в плоскости x_2x_3 называют деформацию, при которой отличны от нуля только компоненты $u_{23} = u_{32}$ тензора деформации. Из (136.1) найдем, что в этом случае отличными от нуля будут только напряжения

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu u_{23} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right);$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0. \quad (138.2)$$

Таким образом, второй коэффициент Ламе имеет физический смысл *модуля сдвига*. При обращении μ в нуль твердое тело обращается в жидкость с сжимаемостью $\beta = 1/\lambda$.

Деформацией растяжения вдоль оси x_1 называют такую деформацию, при которой отлична от нуля только компонента u_{11} тензора деформаций (такого типа деформация, но не однородная, а меняющаяся вдоль оси x_1 , возникает в плоской волне, бегущей вдоль оси x_1). Из (136.1) найдем в этом случае

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) u_{11}; \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda u_{11};$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0. \quad (138.3)$$

Нормальное напряжение достигает наибольшего значения вдоль направления растяжения, а наименьшего — в перпендикулярном направлении. Для жидкости, испытывающей ту же деформацию, оба напряжения были бы равны друг другу.

Величину

$$\lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3}\mu$$

называют *упругим модулем плоской волны*. Как и всякая деформация, не сводящаяся к всестороннему сжатию, растяжение вдоль одной оси связано со сдвигом. Однако при данном выборе координатных осей (главные оси) сдвиговые компоненты тензоров деформации и напряжения равны нулю.

Часто приходится иметь дело с ограниченными твердыми телами, например цилиндрическими стержнями и пластинами. Растяжение таких ограниченных участков сред происходит иначе, чем растяжение сплошной среды. Рассмотрим однородное растяжение вдоль оси стержня со свободной боковой поверхностью. Направим ось x_1 по оси стержня. Единственной отличной от нуля компонентой напряжения будет σ_{11} , так как на боковых стенках стержня напряжения должны обращаться в нуль, а в силу однородности деформации компоненты тензора напряжений постоянны по всему телу.

В этом случае из уравнения (136.1) найдем

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) u_{11} + \lambda (u_{22} + u_{33}),$$

$$\sigma_{22} = \lambda u_{11} + (\lambda + 2\mu) u_{22} + \lambda u_{33} = 0,$$

$$\sigma_{33} = \lambda (u_{11} + u_{22}) + (\lambda + 2\mu) u_{33} = 0,$$

откуда получим

$$u_{22} = u_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} u_{11} \quad (138.4)$$

и, подставляя в первое уравнение,

$$\sigma_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} u_{11}. \quad (138.5)$$

Величину

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (138.6)$$

называют *коэффициентом Пуассона*. Согласно (138.4) он дает отношение поперечного изменения размеров («пуассоново сжатие») к продольному при сжатии или растяжении стержня. Величину

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (138.7)$$

называют *модулем Юнга* для стержня.

Пользуясь величинами E и ν , получим из (136.3) следующие выражения деформации растяжения по любым трем взаимно перпендикулярным направлениям через нормальные напряжения по этим направлениям:

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \\ u_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{33} + \sigma_{11})], \\ u_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]. \end{aligned} \quad (138.8)$$

Так как в закон Гука входят только две независимые характеристики вещества, то между тремя различными модулями упругости K , μ и E должна быть линейная зависимость, а коэффициент Пуассона можно выразить через любые два различных модуля упругости. Соответственные формулы можно записать так:

$$E = \frac{9\mu K}{3K + \mu}; \quad K = \frac{1}{3} \frac{\mu E}{3\mu - E}; \quad \mu = \frac{3EK}{9K - E}, \quad (138.9)$$

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = \frac{E - 2\mu}{2\mu} = \frac{3K - E}{6K}. \quad (138.10)$$

Из повседневного опыта ясно, что объемный модуль упругости и модуль сдвига — не отрицательные числа: тела «сопротивляются» деформации, а не «способствуют» ей. Поэтому из (138.10) следует, что ν для любого тела должно находиться в пределах от -1 (при

$K = 0$) до $1/2$ (при $\mu = 0$). Отрицательные значения коэффициента Пуассона для реальных сред не встречаются, так что фактически всегда выполняются неравенства

$$0 \leq \nu < \frac{1}{2}. \quad (138.11)$$

Отсюда, в частности, следует, что и коэффициент Ламе λ также всегда положителен; предельный случай $\nu \rightarrow 1/2$ соответствует $\mu \rightarrow 0$, т. е. переходу от твердого тела к жидкости. Вещества с модулем сдвига, малым по сравнению с модулем всестороннего сжатия, называют *водоподобными*. Примеры водоподобных тел — резины, мягкие пластмассы, мягкие живые ткани. Для водоподобных тел справедливы приближенные соотношения

$$E \approx 3\mu; \quad \nu \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda} \right). \quad (138.12)$$

Коэффициент Пуассона, близкий к нулю, имеет пробка: при растяжении и сжатии куска пробки поперечные размеры куска практически не меняются. Это позволяет использовать для закупоривания бутылок цилиндрические пробки. Пробки из резины, для которой коэффициент Пуассона близок к $1/2$, приходится делать коническими: цилиндрическая резиновая пробка может оказаться самотормозящимся устройством, и ее будет невозможно продвинуть в горлышко бутылки.

Можно выразить все модули упругости через какой-нибудь один из модулей и через коэффициент Пуассона. Так, из полученных выше формул найдем

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{2}{3} \mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} = \frac{1}{3} E \frac{1}{1-2\nu} = \frac{1}{3} (\lambda + 2\mu) \frac{1+\nu}{1-\nu}, \\ \mu &= (\lambda + 2\mu) \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} = \frac{3}{2} K \frac{1-2\nu}{1+\nu} = E \frac{1}{2(1+\nu)}, \\ E &= (\lambda + 2\mu) \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} = 3K(1-2\nu) = 2\mu(1+\nu), \\ \lambda + 2\mu &= 3K \frac{1-\nu}{1+\nu} = \mu \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} = E \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}. \end{aligned} \right\} (138.13)$$

Отсюда видно, в частности, что все модули упругости всегда положительны и имеют место неравенства:

$$E \leq 3K; \quad 2\mu \leq E \leq 3\mu; \quad K \leq \lambda + 2\mu \leq 3K.$$

Случай растяжения бесконечной пластины — промежуточный между растяжением стержня и продольным растяжением в безграничной среде. Пусть пластина лежит в плоскости x_1x_2 и растягивается вдоль оси x_1 . Тогда растяжение по оси x_2 отсутствует: $u_{22} = 0$; кроме того, нормальное напряжение вдоль оси x_3 равно нулю: $\sigma_{33} = 0$. Пользуясь (136.1), находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) u_{11} + \lambda u_{33}, \\ \sigma_{33} &= \lambda u_{11} + (\lambda + 2\mu) u_{33} = 0. \end{aligned}$$

Из второго из этих уравнений находим уравнение, аналогичное (138.4):

$$u_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} u_{11}, \quad (138.14)$$

т. е. коэффициент поперечного сжатия пластины по толщине (его можно назвать коэффициентом Пуассона для пластины $\nu_{пл}$) равен

$$\nu_{пл} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}. \quad (138.15)$$

Подставляя найденное значение u_{33} в формулу для σ_{11} , найдем формулу, аналогичную (138.5):

$$\sigma_{11} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} u_{11}. \quad (138.16)$$

Величину

$$E_{пл} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \quad (138.17)$$

называют модулем Юнга для пластины. Очевидно, $2\mu < E_{пл} < 4\mu$.

Модуль Юнга для пластины всегда превышает модуль Юнга для стержня. Это вызвано тем, что в пластине частицы не могут смещаться по оси x_2 , как в стержне. Легко видеть, что модуль плоской волны больше обеих модулей Юнга. Полезно заметить формулы

$$\nu_{пл} = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad (138.18)$$

$$E_{пл} = \frac{E}{1 - \nu^2} = \mu \frac{2}{1 - \nu} = (\lambda + 2\mu) \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu^2} = 3K \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu^2}. \quad (138.19)$$

Величина $\nu_{пл}$ для всех веществ лежит в пределах $0 < \nu_{пл} < 1$, принимая значение, близкое к единице, для водоподобных сред. Для таких сред приближенно

$$E \approx 4\mu, \quad \nu_{пл} \approx 1 - 2 \frac{\mu}{\lambda}. \quad (138.20)$$

§ 139. Продольные и поперечные плоские волны в твердом теле

Один из типов плоских волн в твердом теле подобен волне в жидкости: это — продольная волна. Пусть смещения частиц u направлены по оси x и зависят только от координаты x (для этого простого случая можно обойтись без тензорных обозначений; вообще тензорные обозначения обычно удобны для расчетов самых общих случаев, а в конкретных частных случаях удобнее выбирать определенную систему координат, применительно к данной

задаче). Напомним составление уравнений движения для такого случая. Для этого рассмотрим, какие силы действуют на поверхность выделенного элемента среды, который возьмем в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz , параллельными осям координат. Так как все смещения зависят только от координаты x , то напряжения по боковым стенкам элемента взаимно уничтожаются в силу симметрии. Нормальные же напряжения по передней и задней стенкам будут равны соответственно

$$-dy dz (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad dy dz (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right).$$

Таким образом, равнодействующая сил напряжения на элемент со стороны окружающей среды будет равна

$$dx dy dz (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обозначая плотность среды через ρ , получим уравнение движения в виде

$$\rho \ddot{u} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (139.1)$$

Это — линеаризованное уравнение (ср. § 13): вместо полной производной по времени взята частная производная; плотность принята равной невозмущенному значению.

Это уравнение имеет решения в виде плоских волн продольного смещения произвольной формы, бегущих в положительном и отрицательном направлении оси x (волны сжатия и растяжения):

$$u = u(t \mp x/c_l), \quad (139.2)$$

где скорость продольных волн $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. В отличие от жидкости, эта скорость определяется не только модулем всестороннего сжатия среды, но и модулем сдвига:

$$c_l = \sqrt{\left(K + \frac{4}{3} \mu \right) / \rho}.$$

Таким же способом можно показать, что скорости продольных волн в стержне ($c_{ст}$) или в пластине ($c_{пл}$) равны соответственно

$$c_{ст} = \sqrt{E/\rho}; \quad c_{пл} = \sqrt{E_{пл}/\rho} = c_{ст} / \sqrt{1 - \nu^2}. \quad (139.3)$$

Из этих трех скоростей продольных волн наибольшее значение имеет скорость волн в безграничной среде c_l : это наибольшая скорость возмущения в твердом теле. Кинематическое сходство плоской продольной волны в твердой среде с такой же волной в жидкости не распространяется на напряжения: в жидкости давление не зависит от ориентировки площадки, на которой оно измеряется, и в плоской волне равно $p = -K (\partial u / \partial x)$, где K — модуль упругости

продольной волны, совпадающий для жидкости с модулем всестороннего сжатия. В твердом же теле распределение величины, аналогичной давлению — нормального напряжения, взятого с обратным знаком, — зависит от расположения площадки: на площадке с нормалью, направленной вдоль распространения волны, нормальное напряжение равно $\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x}$, а по перпендикулярной к этому направлению площадке (например, площадке с нормалью y или z) напряжение равно $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}$.

В твердом теле, как уже говорилось, помимо продольных волн, может распространяться волна поперечного типа, в которой смещения частиц перпендикулярны к направлению распространения. Это — волна чистого сдвига. Пусть, например, смещения u частиц направлены по оси y и зависят только от координаты x . Тогда, как легко видеть, движение выделенного параллелепипеда $dx dy dz$ определяет сдвиговые напряжения $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, действующие на гранях $dy dz$. Напряжения на передней и задней гранях будут равны соответственно

$$-\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{и} \quad \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right).$$

Уравнение движения снова получится в виде волнового уравнения

$$\rho \ddot{u} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (139.4)$$

Решениями уравнения являются плоские сдвиговые волны поперечного смещения в направлении оси y

$$u = u(t \mp x/c_t), \quad (139.5)$$

где скорость c_t поперечных волн равна $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$.

Гармонические волны рассмотренных типов можно записать в следующем виде:

продольная волна в неограниченной среде:

$$e^{ik_l x}, \quad \text{где} \quad k_l = \sqrt{\rho\omega^2/(\lambda + 2\mu)};$$

продольная волна в стержне:

$$e^{ik_{ст} x}, \quad \text{где} \quad k_{ст} = \sqrt{\rho\omega^2/E};$$

продольная волна в пластине:

$$e^{ik_{пл} x}, \quad \text{где} \quad k_{пл} = \sqrt{\rho\omega^2/E_{пл}};$$

поперечная (сдвиговая) волна в неограниченной среде:

$$e^{ik_t x}, \quad \text{где} \quad k_t = \sqrt{\rho\omega^2/\mu}.$$

Напомним, что в продольных волнах в неограниченной среде в стержне и в пластине смещения параллельны направлению рас-

пространения (если отвлечься от малых поперечных «пуассоновых» смещений); в поперечных волнах смещение перпендикулярно к направлению распространения.

В твердой среде, как и в жидкости, возможно распространение неоднородных гармонических плоских волн как продольного, так и поперечного типов. Скорости этих волн меньше соответственно величин c_l и c_t , а амплитуда меняется экспоненциально вдоль фронта. Продольные и поперечные неоднородные волны со смещениями, лежащими в плоскости xz , и бегущие вдоль оси x , можно записать в виде

$$e^{i\xi x - \alpha z}$$

где $\xi^2 - \alpha^2 = k_l^2$ для продольных волн и $\xi^2 - \alpha^2 = k_t^2$ для поперечных волн.

Пользуясь выражениями для упругих модулей, полученными в § 138, выпишем соотношения между скоростями различных типов однородных волн в твердом теле и коэффициентом Пуассона:

$$\frac{c_l^2}{c_t^2} = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu}; \quad \frac{c_{\text{ст}}^2}{c_t^2} = 2(1+\nu), \quad \frac{c_{\text{пл}}^2}{c_t^2} = \frac{2}{1-\nu};$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{c_l^2 - 2c_t^2}{c_l^2 - c_t^2} = \frac{1}{2} \frac{k_t^2 - 2k_l^2}{k_t^2 - k_l^2}.$$

Например, при $\nu = 1/3$ имеем $c_l^2 = 4c_t^2$ или $k_l^2 = 4k_t^2$. Из неравенств § 138 следует, что всегда

$$2c_l^2 < c_l^2; \quad 2c_t^2 < c_{\text{ст}}^2 < 3c_t^2; \quad 2c_t^2 < c_{\text{пл}}^2 < 4c_t^2. \quad (139.6)$$

Обобщая понятие волнового сопротивления среды, для твердой среды можно ввести понятия *продольного волнового сопротивления* ρc_l и *поперечного волнового сопротивления* ρc_t . Легко видеть, что для волны, бегущей вдоль оси x ,

$$\rho c_l = \frac{-\sigma_{xx}}{\partial u / \partial t} \quad \text{и} \quad \rho c_t = \frac{-\sigma_{xy}}{\partial u / \partial t},$$

где через u обозначено смещение частиц в продольной и в поперечной плоской волне соответственно. Аналогично можно ввести и понятия проводимости (или импеденса) в нормальном и в касательном направлении (во втором случае подразумевается, что среда «приклеена» к препятствию). Эти проводимости в нормальном и касательном направлениях определяются формулами

$$Y_n = \frac{\partial u_n / \partial t}{-\sigma_{nn}}; \quad Y_\alpha = \frac{\partial u_\alpha / \partial t}{-\sigma_{n\alpha}}.$$

Сдвиговая волна вида (139.5) была выбрана *линейно поляризованной* в направлении оси y . Но вдоль оси x могут бежать сдвиговые волны, поляризованные и по другим направлениям. Суперпозиция таких волн особенно просто записывается для гар-

монических волн. В этом случае самый общий вид сдвиговой волны данной частоты, бегущей вдоль оси x , можно представить в виде суперпозиции двух волн, линейно поляризованных в двух взаимно перпендикулярных направлениях:

$$u = (ja + kb)e^{ikx},$$

где j и k — орты осей y и z . Варьируя соотношение между комплексными амплитудами a и b волн, поляризованных по осям y и z , получим волны, в которых частицы описывают разные эллипсы (лежащие все в плоскостях, перпендикулярных к оси x). Например, при обоих вещественных коэффициентах a и b получается линейная поляризация: частицы движутся по прямой, наклоненной к оси y под углом $\text{arctg}(b/a)$. При комплексном отношении a/b получается *эллиптическая поляризация* волны: траектории частиц — эллипсы с разным наклоном осей. При $a/b = \pm i$ получается *круговая поляризация*: траектории частиц — окружности радиуса $|a|$. Скорость всех этих типов поперечных волн одинакова и также равна c_t .

Приведем формулы для плотности потока мощности в плоских волнах в твердом теле. В продольной волне $u = u(t - x/c_t)$, бегущей вдоль оси x , единственная компонента напряжения, производящая работу, есть σ_{xx} . Значит, плотность потока мощности есть $\overline{W} = -\sigma_{xx}(\partial u/\partial t)$ или, поскольку $\sigma_{xx} = -\rho c_t(\partial u/\partial t)$: $\overline{W} = \rho c_t(\partial u/\partial t)^2$. Для гармонической волны $u = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$ мгновенный поток мощности равен $\overline{W} = \rho c_t \omega^2 u_0^2$, что даст для среднего потока

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \rho c_t \omega^2 u_0^2.$$

Аналогично для поперечной волны $u = u(t - x/c_t)$, бегущей вдоль оси x и поляризованной, например, вдоль оси y , единственная компонента напряжения, производящая работу, есть σ_{xy} , что дает для плотности потока мощности выражение $\overline{W} = -\sigma_{xy}(\partial u/\partial t)$. Так как в сдвиговой волне $\sigma_{xy} = -\rho c_t(\partial u/\partial t)$, то $\overline{W} = \rho c_t(\partial u/\partial t)^2$ и для гармонической волны с амплитудой смещения u_0 средний поток мощности равен

$$\overline{W} = \frac{1}{2} \rho c_t \omega^2 u_0^2.$$

§ 140. Общие уравнения распространения волн в твердом теле

Напишем линеаризованные уравнения движения для твердой среды. Рассмотрим параллелепипед со сторонами dx_1 , dx_2 и dx_3 .

Если бы деформация была однородной, то одноименные напряжения на противоположных гранях, например нормальные напряжения на гранях с нормальными, совпадающими с положительным и отрицательным направлением оси x_1 , были бы равны друг другу по величине и противоположны по знаку: это были бы напряже-

ния $-\sigma_{11}$ и σ_{11} . Аналогичные соотношения имели бы место и для других противоположных граней и для других компонент напряжения. Так, по противоположным граням с нормальными, параллельными оси x_2 , действовали бы напряжения $-\sigma_{23}$ и σ_{23} , $-\sigma_{22}$ и σ_{22} и т. д.

Но при неоднородном напряженном состоянии, например в упругой волне, напряжения по противоположным граням не равны по модулю: если на одной грани нормальное напряжение равно $-\sigma_{11}$, то на противоположной грани напряжение равно $\sigma_{11} + (\partial\sigma_{11}/\partial x_1) dx_1$; аналогично на других гранях будут действовать напряжения $-\sigma_{23}$ и $\sigma_{23} + (\partial\sigma_{23}/\partial x_2) dx_2$, напряжения $-\sigma_{22}$ и $\sigma_{22} + (\partial\sigma_{22}/\partial x_2) dx_2$ и т. д. Умножая действующие напряжения на площади соответственных граней ($dx_2 dx_3$, $dx_3 dx_1$, $dx_1 dx_2$) и складывая, найдем, что результирующая сила, действующая на данный параллелепипед, равна сумме $(\partial\sigma_{ji}/\partial x_i) dx_1 dx_2 dx_3$.

Под действием этой силы данный элемент будет двигаться с ускорением \ddot{u}_j . Масса элемента составляет $\rho dx_1 dx_2 dx_3$, где ρ — плотность данной твердой среды. Значит, уравнение движения элемента среды можно записать в следующем виде:

$$\rho \ddot{u}_j = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} \quad (140.1)$$

или, выражая компоненты тензора напряжений через компоненты тензора деформации,

$$\rho \ddot{u}_j = \lambda \frac{\partial u_{aa}}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial u_{jl}}{\partial x_l}.$$

Замечая, что

$$2 \frac{\partial u_{jl}}{\partial x_l} = \frac{\partial u_{aa}}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_\alpha^2},$$

получим еще следующую форму записи уравнения движения:

$$\rho \ddot{u}_j = (\lambda + \mu) \frac{\partial u_{aa}}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_\alpha^2}. \quad (140.2)$$

Отсюда удобно перейти к векторной записи уравнения

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (140.3)$$

Воспользуемся еще векторным тождеством

$$\Delta \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u}.$$

Тогда (140.3) примет вид

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u}. \quad (140.4)$$

Как известно, всякий вектор можно представить в виде суммы потенциального вектора, вихрь которого равен нулю, и соленоид-

дальнего вектора, дивергенция которого равна нулю. Если представить в таком виде вектор смещения \mathbf{u} , то можно получить отдельно уравнения для потенциальной и соленоидальной части смещения. В самом деле, положим $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_t$, считая $\text{rot } \mathbf{u}_1 = 0$ и $\text{div } \mathbf{u}_t = 0$. Подставляя в (140.4), найдем

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_1 + \rho \ddot{\mathbf{u}}_t = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u}_1 - \mu \text{rot rot } \mathbf{u}_t. \quad (140.5)$$

В силу единственности разложения данного вектора на потенциальную и соленоидальную части отсюда находим

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_1 = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u}_1,$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_t = -\mu \text{rot rot } \mathbf{u}_t$$

или, вспоминая выражения для скоростей продольных и поперечных волн,

$$\ddot{\mathbf{u}}_1 - c_l^2 \text{grad div } \mathbf{u} = 0, \quad \ddot{\mathbf{u}}_t + c_t^2 \text{rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (140.6)$$

Применяя векторное тождество $\text{rot rot } = \text{grad div} - \Delta$ к векторам \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_t , найдем

$$\text{grad div } \mathbf{u}_1 = \Delta \mathbf{u}_1 \quad \text{и} \quad \text{rot rot } \mathbf{u}_t = -\Delta \mathbf{u}_t.$$

Следовательно, уравнения (140.6) можно переписать в виде волновых уравнений для векторов \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_t :

$$\ddot{\mathbf{u}}_1 - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_1 = 0, \quad \ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0. \quad (140.7)$$

В частном случае плоских волн, распространяющ ихся вдоль оси x , т. е. волн, смещения в которых зависят только от координаты x , приходим снова к уравнениям (139.1) и (139.4), которые снова дают решения (139.2) и (139.5).

Для гармонических волн уравнения (140.7) принимают вид

$$\Delta \mathbf{u}_1 + k_l^2 \mathbf{u}_1 = 0, \quad \Delta \mathbf{u}_t + k_t^2 \mathbf{u}_t = 0. \quad (140.8)$$

Это — уравнения Гельмгольца для векторов \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_t .

§ 141. Скалярный и векторный потенциалы

Зачастую при решении конкретных задач удобно иметь дело с уравнениями не относительно векторов (в нашем случае векторов смещения), а скаляров. Поэтому сейчас введем некоторые скаляры, дифференцированием которых можно было бы получить и смещения, и напряжения в твердом теле, и напишем для них уравнения движения вместо уравнений (140.7), (140.8) для смещений. Именно, представим (что всегда возможно) потенциальную часть смещения в виде градиента некоторого скаляра ϕ , а соленоидальную часть — в виде вихря некоторого вектора ψ :

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi.$$

Очевидно,

$$u_i = \text{grad } \varphi \text{ и } u_i = \text{rot } \psi. \quad (141.1)$$

Скаляр φ называют *скалярным потенциалом* данного движения среды, а вектор ψ — *векторным потенциалом*. Казалось бы, такой заменой цель не достигнута полностью, так как два вектора u_i и u_i заменены одним скаляром и одним вектором. Однако в наиболее часто встречающихся случаях приходится иметь дело с движениями, имеющими ту или иную симметрию, например, с плоскими движениями; в этих случаях, как увидим, не равной нулю остается только одна компонента векторного потенциала ψ и уравнение для нее также является скалярным. В тех же случаях, когда нас интересуют только потенциальные движения среды, вся задача сводится к нахождению только одного скалярного потенциала φ . Сжатие среды всегда выражается только через скалярный потенциал: $s = -\text{div } u = -\Delta\varphi$. Поэтому среднее нормальное напряжение также выразится только через φ :

$$\frac{1}{3} \sigma_{\alpha\alpha} = -\left(\lambda + \frac{2}{3} \mu\right) \Delta\varphi.$$

В тензорной записи из (141.1) имеем

$$u_j = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \varepsilon_{\alpha\beta j} \frac{\partial\psi_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (141.2)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta j}$ — дискриминантный тензор, компоненты которого равны нулю, если в числе индексов имеются два одинаковых, и равны +1 или -1, если индексы соответственно образуют или не образуют циклическую перестановку порядка 1, 2, 3. Подставляя (141.2) в (134.6), получим

$$u_{j\mu} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_\mu} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{\alpha\beta j} \frac{\partial^2\psi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_j} + \varepsilon_{\alpha\beta j} \frac{\partial^2\psi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_j} \right). \quad (141.3)$$

Согласно (136.1) тензор напряжений выразится формулой

$$\sigma_{j\mu} = \delta_{j\mu} \lambda \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + 2\mu \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \left(\varepsilon_{\alpha\beta j} \frac{\partial^2\psi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_j} + \varepsilon_{\alpha\beta j} \frac{\partial^2\psi_\beta}{\partial x_\alpha \partial x_j} \right).$$

Получим уравнения для скалярного и для векторного потенциалов в отдельности. Подставляя вместо u_i в первое из уравнений (140.6) величину $\text{grad } \varphi$, найдем

$$\text{grad } (\ddot{\varphi} - c_j^2 \Delta\varphi) = 0.$$

Интегрируя один раз по координатам, найдем, что скалярный потенциал удовлетворяет волновому уравнению

$$\ddot{\varphi} - c_j^2 \Delta\varphi = 0. \quad (141.4)$$

При получении этого уравнения мы теряем аддитивное решение в виде линейной функции от времени, умноженной на линейную

функцию от координат. Однако это решение не дает никакого вклада в волновое движение среды, и его можно опускать. Для гармонического движения получим из (141.4) уравнение Гельмгольца для скалярного потенциала:

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0.$$

Аналогично, подставляя вместо u_i во второе уравнение (140.8) функцию $\text{rot } \psi$, найдем

$$\text{rot}(\ddot{\psi} - c_1^2\Delta\psi) = 0.$$

Интегрируя один раз по координатам, получим волновое уравнение и для векторного потенциала

$$\ddot{\psi} - c_1^2\Delta\psi = 0. \quad (141.5)$$

При получении этого уравнения мы теряем аддитивное решение в виде потенциального вектора. Но и это решение не дает никакого вклада в движение среды и его тоже можно опустить. Для гармонического движения получим уравнение Гельмгольца и для векторного потенциала:

$$\Delta\psi + k_1^2\psi = 0.$$

Особенно просты волновые уравнения для плоского движения. Если движение происходит параллельно плоскости xz и не зависит от координаты y , то отлична от нуля только y -компонента векторного потенциала: в противном случае не равнялась бы нулю y -компонента смещения. Для этой единственной не равной нулю компоненты, которую будем обозначать ψ , волновое уравнение делается скалярным:

$$\ddot{\psi} - c_1^2\Delta\psi = 0. \quad (141.6)$$

Таким образом, уравнения такого плоского движения — это два скалярных волновых уравнения: уравнение (141.4) для скалярного потенциала и уравнение (141.6) для единственной не обращающейся в нуль y -компоненты векторного потенциала.

Компоненты смещения для этого плоского движения равны

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (141.7)$$

Формулы, выражающие напряжения через потенциалы, получим из формул (136.1) и (141.7). Так, для σ_{zz} имеем

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} = \lambda \Delta\varphi + 2\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2\mu \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z}.$$

Прибавляя к правой части $2\mu (\partial^2\varphi/\partial x^2)$ и вычитая эту же величину, найдем

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \Delta\varphi - 2\mu \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} \right).$$

Но, согласно волновому уравнению (141.4),

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi = \frac{\lambda + 2\mu}{c_l^2} \ddot{\varphi} = \frac{\mu}{c_t^2} \ddot{\varphi},$$

так что

$$\sigma_{zz} = \mu \left[\frac{1}{c_t^2} \ddot{\varphi} - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right]. \quad (141.8)$$

Аналогично найдем, пользуясь (141.6):

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = \\ &= \mu \left[\Delta \psi + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right] = \mu \left[\frac{1}{c_t^2} \ddot{\psi} + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (141.9)$$

Так же получим и выражение для σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \mu \left[\frac{1}{c_t^2} \ddot{\varphi} - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right]. \quad (141.10)$$

Из симметрии задачи следует, кроме того:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0. \quad (141.11)$$

Наконец, как легко видеть;

$$\sigma_{yy} = \mu \left(\frac{1}{c_t^2} - \frac{2}{c_l^2} \right) \ddot{\varphi}. \quad (141.12)$$

Для гармонических волн формулы (141.8)—(141.10) и (141.12) дадут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz} &= -\mu \left[k_l^2 \varphi + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right], \\ \sigma_{xz} &= -\mu \left[k_l^2 \psi - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \right], \\ \sigma_{xx} &= -\mu \left[k_l^2 \varphi + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right], \\ \sigma_{yy} &= -\mu \left[k_l^2 - 2k_l^2 \right] \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (141.13)$$

ОТРАЖЕНИЕ И ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ. ТВЕРДЫЕ ВОЛНОВОДЫ

§ 142. Отражение от идеальных стенок

Отражение волн в твердых средах сложнее, чем в жидкостях: если на границу твердого тела падает одна продольная плоская волна или одна поперечная, то отражаются сразу две — и продольная и поперечная. (Исключение: падение поперечной волны, поляризованной перпендикулярно к плоскости падения; в этом случае отражается только одна волна того же типа, что и падающая.) Увеличение числа отраженных волн по сравнению с отражением в жидкости (и преобразование типов волн при отражении) связано с большим числом условий на границе твердой среды (см. § 137).

Будем рассматривать плоские волны, падающие на плоскую границу. Падающую волну будем считать либо продольной волной, либо поперечной волной с поляризацией в плоскости падения, либо поперечной волной с поляризацией, перпендикулярной к плоскости падения. Любую поперечную волну можно представить как суперпозицию волн этих двух линейных поляризаций.

Из соображений симметрии ясно, что волна с поляризацией, перпендикулярной к плоскости падения, будет отражаться и проходить из среды в среду независимо от волн остальных двух типов: так как нормальные смещения границы для такой волны, так же как и нормальное напряжение, и касательное напряжение, лежащее в плоскости падения, равны нулю, то для смещений и напряжений остается только по одному граничному условию; поэтому число волн на границе будет всегда то же, что и для случая жидких сред, и отраженная и прошедшая волны будут всегда поперечными волнами той же поляризации. Коэффициент отражения по смещению для такой волны равен $+1$ для свободной границы и -1 для абсолютно жесткой границы, т. е. границы, не допускающей скольжения. Легко получаются решения и для других случаев отражения и прохождения такой волны, вывод которых предоставляем читателю.

Займемся теперь более интересным случаем падения продольной волны или поперечной волны с поляризацией в плоскости падения: каждая из таких волн вызывает и волну своего типа при отражении и прохождении, и вторую волну. Задачи об отражении и прохождении волн этих двух типов будем решать стандартным способом.

Продольную волну будем записывать при помощи скалярного потенциала φ , а поперечную — при помощи единственной не равной нулю компоненты ψ векторного потенциала в направлении, перпендикулярном к плоскости падения. Плоскость падения примем за плоскость xz и ось x расположим на границе. Отличной от нуля будет y -компонента векторного потенциала и, как и скалярный потенциал, она будет зависеть только от координат x и z .

Будем предполагать, что отражение и прохождение правильные. Аналогично случаю жидких сред, это будет не всегда справедливо («закритические углы»), но при нарушении правильности отражения в общем случае она сохранится для гармонических волн. Интересная особенность твердого тела по сравнению с жидкостью: в нем может иметь место нарушение правильности отражения при падении поперечной волны и при отражении от идеальной (например, свободной) границы, а не только на границе двух сред.

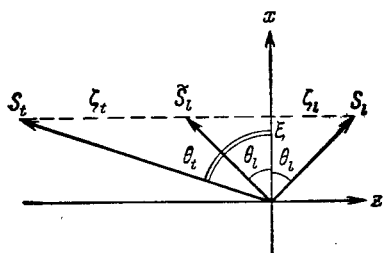


Рис. 142.1. Векторы медленности падающей продольной (S_i), отраженной продольной (S_r) и отраженной поперечной волны (S_t).

Обозначим x -компоненту медленности падающей волны через ξ ; в силу закона Снеллиуса x -компоненты всех остальных волн, возникающих в процессе отражения и прохождения, будут равны той же величине ξ ; z -компоненты векторов медленности продольной и поперечной волн обозначим через ζ_i и ζ_t соответственно. Согласно волновым уравнениям имеют место соотношения

$$\zeta_i^2 = S_i^2 - \xi^2, \quad \zeta_t^2 = S_t^2 - \xi^2, \quad (142.1)$$

где $S_i = 1/c_l$ и $S_t = 1/c_t$ — медленности продольной и поперечной волн соответственно. Отсюда следует важное соотношение

$$S_t^2 - 2\zeta_t^2 = -(S_i^2 - 2\xi^2). \quad (142.2)$$

Пусть на границу падает волна продольного типа (рис. 142.1). Обозначим углы скольжения продольной и поперечной волн через θ_i и θ_t соответственно. Очевидно, всегда $\theta_i < \theta_t$. Имеем

$$\xi = S_i \cos \theta_i = S_t \cos \theta_t, \quad \zeta_i = S_i \sin \theta_i, \\ \zeta_t = S_t \sin \theta_t = S_i \sqrt{n^2 - \cos^2 \theta_i}, \quad (142.3)$$

где через $n = S_t/S_i$ обозначено отношение медленностей поперечной и продольной волн — величина, аналогичная коэффициенту преломления. Согласно (139.6) всегда $n > \sqrt{2}$.

Зададим падающую волну скалярным потенциалом $\varphi = f(t - \xi x - \zeta_i z)$. Вообще отразятся две волны: одна продольного и одна поперечного типа. Если отражение правильное, то можно

ввести два коэффициента отражения: \mathcal{V}_i для продольной и \mathcal{V}_t для поперечной волны. Тогда отраженную продольную волну можно записать в виде

$$\bar{\Phi} = \mathcal{V}_i f(t - \xi x + \zeta_i z).$$

Таким образом, суммарный скалярный потенциал равен

$$\Phi + \bar{\Phi} = f(t - \xi x - \zeta_i z) + \mathcal{V}_i f(t - \xi x + \zeta_i z). \quad (142.4)$$

Единственная не равная нулю компонента векторного потенциала равна

$$\bar{\Psi} = \mathcal{V}_t f(t - \xi x + \zeta_i z). \quad (142.5)$$

Подставляя (142.4) и (142.5) в граничные условия, выраженные при помощи формул § 141 через потенциалы и их производные, получим уравнения для определения коэффициентов отражения.

Рассмотрим этим способом отражение волн для важнейших типов отражающих границ.

а) *Свободная граница.* Граничные условия в этом случае — обращение в нуль на границе напряжений σ_{zx} , σ_{zz} и σ_{zy} . Условие $\sigma_{zy} = 0$ удовлетворяется величинами (142.4) и (142.5) автоматически. Подставляя эти величины в (141.8) и (141.9) и приравнивая напряжения нулю для значения $z = 0$, получим граничные условия в виде

$$(S_i^2 - 2\xi^2) \mathcal{V}_i - 2\xi\zeta_i \mathcal{V}_t = -(S_i^2 - 2\xi^2),$$

$$2\xi\zeta_i \mathcal{V}_i + (S_i^2 - 2\xi^2) \mathcal{V}_t = 2\xi\zeta_i.$$

При выводе мы использовали соотношения

$$\frac{\partial f(t - \xi x \mp \zeta_i z)}{\partial x} = -\xi \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{\partial f(t - \xi x \mp \zeta_i z)}{\partial z} = \mp \zeta_i \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{\partial f(t - \xi x + \zeta_i z)}{\partial z} = \zeta_i \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Решая полученную систему уравнений относительно коэффициентов отражения, найдем

$$\mathcal{V}_i = \frac{4\xi^2 \zeta_i \zeta_t - (S_i^2 - 2\xi^2)^2}{4\xi^2 \zeta_i \zeta_t + (S_i^2 - 2\xi^2)^2}, \quad (142.6)$$

$$\mathcal{V}_t = \frac{4\xi \zeta_t (S_i^2 - 2\xi^2)}{4\xi^2 \zeta_i \zeta_t + (S_i^2 - 2\xi^2)^2}.$$

При нормальном падении продольной волны ($\xi = 0$) имеем $\mathcal{V}_i = -1$, $\mathcal{V}_t = 0$. При падении под другими углами \mathcal{V}_i в нуль обратиться не может, так как всегда $S_i^2 > 2S_i^2 > 2\xi^2$. Мы увидим, что \mathcal{V}_t также не обращается в нуль ни при каком угле скольжения.

Таким образом, отраженное поле, как было сказано выше, действительно состоит из двух волн: одной — одноименной с падающей (продольной) и другой — разноименной.

Коэффициенты отражения можно выразить через импедансы продольной и поперечной волн

$$Z_l = \rho/S_l \sin \theta_l \quad \text{и} \quad Z_t = \rho/S_t \sin \theta_t.$$

В самом деле, подставляя в (142.6) выражения

$$\xi = S_l \cos \theta_l, \quad \zeta_l = S_l \sin \theta_l, \quad \zeta_t = S_t \sin \theta_t,$$

получим

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_l &= \frac{Z_t \sin^2 2\theta_l - Z_l \cos^2 2\theta_l}{Z_t \sin^2 2\theta_l + Z_l \cos^2 2\theta_l}, \\ \mathcal{V}_t &= -\frac{Z_t \sin 4\theta_l}{Z_t \sin^2 2\theta_l + Z_l \cos^2 2\theta_l}. \end{aligned} \quad (142.7)$$

Можно получить при помощи (142.3) формулы для коэффициентов отражения, куда войдет только угол скольжения падающей волны θ_l :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_l &= \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \theta_l \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_l} - [n^2 + (n^2 - 2) \operatorname{ctg}^2 \theta_l]^2}{4 \operatorname{ctg}^2 \theta_l \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_l} + [n^2 + (n^2 - 2) \operatorname{ctg}^2 \theta_l]^2}, \\ \mathcal{V}_t &= \frac{4 \operatorname{ctg} \theta_l [n^2 + (n^2 - 2) \operatorname{ctg}^2 \theta_l]}{4 \operatorname{ctg}^2 \theta_l \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_l} + [n^2 + (n^2 - 2) \operatorname{ctg}^2 \theta_l]^2}. \end{aligned} \quad (142.8)$$

Эти выражения удобны, когда требуется проследить зависимость коэффициентов отражения от угла скольжения падающей волны. При стремлении угла скольжения продольной волны к 0° коэффициент отражения продольной волны стремится к -1 , а коэффициент отражения поперечной волны стремится к нулю.

б) *Абсолютно жесткая граница, не допускающая скольжения.* В этом случае на границе должны обращаться в нуль компоненты u_x , u_y и u_z смещения частиц. Условие $u_y = 0$ выполняется для полей (142.4) и (142.5) автоматически. Из формул (141.7) найдем граничные условия в виде

$$\xi \mathcal{V}_l + \zeta_t \mathcal{V}_t = -\xi, \quad \zeta_l \mathcal{V}_l - \xi \mathcal{V}_t = \zeta_l.$$

Решая эту систему относительно коэффициентов отражения и пользуясь (142.3), найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_l &= \frac{\zeta_l \zeta_t - \xi^2}{\zeta_l \zeta_t + \xi^2} = -\frac{\cos(\theta_l + \theta_t)}{\cos(\theta_l - \theta_t)}, \\ \mathcal{V}_t &= -\frac{2\xi \zeta_l}{\zeta_l \zeta_t + \xi^2} = -\frac{\sin(\theta_l + \theta_t) - \sin(\theta_l - \theta_t)}{\cos(\theta_l - \theta_t)}. \end{aligned} \quad (142.9)$$

Коэффициент отражения продольной волны обращается в нуль при $\theta_l + \theta_t = 90^\circ$. В этом случае при отражении продольная волна

переходит целиком в поперечную с направлением распространения, перпендикулярным к направлению распространения падающей волны. Но тогда направления векторов смещения в падающей (продольной) и отраженной (поперечной) волне совпадают (рис. 142.2). Ясно, что при этом граничному условию можно удовлетворить, просто подбирая амплитуду и фазу смещений в поперечной волне так, чтобы они совпадали с амплитудой и фазой в падающей продольной волне. Пользуясь (142.3), получим, что угол скольжения, соответствующий полному переходу продольной волны в поперечную, равен $\theta_l = \text{arccctg } n = \text{arctg } S_l/S_t$. Этот угол скольжения можно назвать углом Брюстера, в соответствии с названием, принятым в аналогичной оптической задаче. Так как всегда $S_l/S_t < 1/\sqrt{2}$, то угол Брюстера всегда меньше $35^\circ 15' 48''$.

Формулы, дающие зависимость коэффициентов отражения от угла скольжения падающей волны, имеют вид

$$\mathcal{V}_l = \frac{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \text{ctg}^2 \theta_l} - \text{ctg}^2 \theta_l}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \text{ctg}^2 \theta_l} + \text{ctg}^2 \theta_l}, \quad (142.10)$$

$$\mathcal{V}_t = - \frac{2 \text{ctg} \theta_l}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \text{ctg}^2 \theta_l} + \text{ctg}^2 \theta_l}.$$

в) *Абсолютно жесткая стенка, не допускающая касательных напряжений.* В этом случае на границе должны обращаться в нуль нормальное смещение u_z и касательное напряжение σ_{xz} . Из формул (141.7) и (141.9) получим граничные условия в виде

$$\zeta_l \mathcal{V}_l - \xi \mathcal{V}_t = \zeta_l, \quad 2\xi \zeta_l \mathcal{V}_l + (S_l^2 - 2\xi^2) \mathcal{V}_t = 2\xi \zeta_l,$$

что дает для коэффициентов отражения следующие значения:

$$\mathcal{V}_l = 1, \quad \mathcal{V}_t = 0. \quad (142.11)$$

Таким образом, поперечная волна при отражении не возникает. Картина отражения потенциала продольной волны такая же, как в жидкости при отражении от абсолютно жесткой стенки.

г) *Жесткая гибкая пластинка, не допускающая касательных смещений.* В этом случае на границе должны удовлетворяться условия обращения в нуль касательных смещений u_x и нормальных напряжений σ_{zz} . Это приводит к граничным условиям

$$\xi \mathcal{V}_l + \zeta_l \mathcal{V}_t = -\xi, \quad (S_l^2 - 2\xi^2) \mathcal{V}_l - 2\xi \zeta_l \mathcal{V}_t = -(S_l^2 - 2\xi^2).$$

Отсюда находим коэффициенты отражения

$$\mathcal{V}_l = -1, \quad \mathcal{V}_t = 0. \quad (142.12)$$

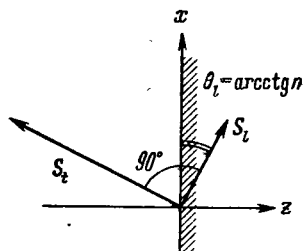


Рис. 142.2. При падении плоской продольной волны на жесткую стенку, не допускающую скольжений, под углом скольжения $\theta_l = \text{arccctg } n$ (угол Брюстера) отражается только поперечная волна.

Поперечная волна снова не возникает, но картина такая же, как для волны в жидкости при отражении от абсолютно мягкой стенки.

Совершенно аналогично можно решить и задачу об отражении от различных границ поперечной падающей волны с поляризацией, лежащей в плоскости падения (рис. 142.3). В этом случае y -компоненту векторного потенциала падающей волны выберем в виде $f(t - \xi x - \zeta_t z)$. Суммарный векторный потенциал падающей и

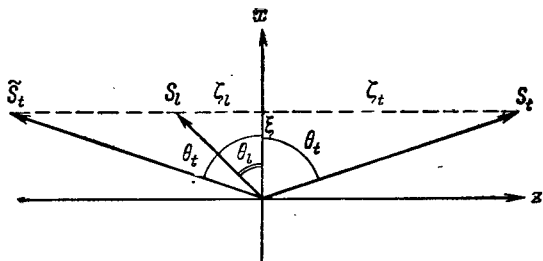


Рис. 142.3. Картина отражения при падении поперечной волны, поляризованной в плоскости падения.

отраженной поперечных волн и скалярный потенциал отраженной продольной волны запишем в виде

$$\psi + \bar{\psi} = f(t - \xi x - \zeta_t z) + \mathcal{V}_t f(t - \xi x + \zeta_t z), \quad (142.13)$$

$$\bar{\psi} = \mathcal{V}_t f(t - \xi x + \zeta_t z). \quad (142.14)$$

Тем же способом, что и для продольной падающей волны, решим задачи об отражении от границ типов (а), (б), (в), (г) и для падающей поперечной волны. Приведем результаты расчета коэффициентов отражения от этих случаев, обозначая теперь через n отношение S_r/S_t .

Для отражения от границы типа (а):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t &= \frac{4\xi^2 \zeta_t \zeta_i - (S_t^2 - 2\xi^2)^2}{4\xi^2 \zeta_t \zeta_i + (S_t^2 - 2\xi^2)^2} = \\ &= \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \theta_t \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_t} - (1 - \operatorname{ctg}^2 \theta_t)^2}{4 \operatorname{ctg}^2 \theta_t \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_t} + (1 - \operatorname{ctg}^2 \theta_t)^2} = \frac{Z_t \sin^2 2\theta_t - Z_l \cos^2 2\theta_t}{Z_t \sin^2 2\theta_t + Z_l \cos^2 2\theta_t}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_l = - \frac{4\xi \zeta_t (S_t^2 - 2\xi^2)}{4\xi^2 \zeta_t \zeta_i + (S_t^2 - 2\xi^2)^2} = \quad (142.15a)$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{4 \operatorname{ctg} \theta_t (1 - \operatorname{ctg}^2 \theta_t)}{4 \operatorname{ctg}^2 \theta_t \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_t} + (1 - \operatorname{ctg}^2 \theta_t)^2} = \\ &= \frac{Z_l \sin 4\theta_t}{Z_t \sin^2 2\theta_t + Z_l \cos^2 2\theta_t}. \quad (142.15b) \end{aligned}$$

При угле скольжения 45° коэффициент отражения продольной волны обращается в нуль, а коэффициент отражения поперечной волны станет равным $+1$. При угле скольжения, меньшем критического угла $\theta_{кр} = \arccos n$, правильное отражение невозможно: компонента вектора медленности продольной волны по оси z оказывается мнимой. Это — случай, аналогичный полному отражению в жидкости. В этом случае приходится переходить к гармоническим волнам, для которых мнимые значения компонент волновых векторов имеют смысл: отраженная продольная волна является неоднородной гармонической волной, экспоненциально убывающей при удалении от границы. Формулы для коэффициентов отражения можно сохранить и для закритических углов, считая величины $S_i, S_t, \xi, \zeta_i, \zeta_t$ равными волновым числам продольной и поперечной волны и компонентам волновых векторов по осям x и z соответственно.

При закритическом угле скольжения волны сдвига вдали от границы будет наблюдаться только поперечная волна с амплитудой, равной единице; продольная волна будет поверхностной, бегущей вдоль границы. Вообще во всех случаях падения поперечной волны отраженная продольная волна становится неоднородной при закритическом угле скольжения. Так как всегда $n < 1/\sqrt{2}$, критический угол скольжения всегда больше 45° .

Для отражения от границы типа (б):

$$\mathcal{V}_t = \frac{\zeta_i \zeta_t - \xi^2}{\zeta_i \zeta_t + \xi^2} = -\frac{\cos(\theta_t + \theta_i)}{\cos(\theta_t - \theta_i)} = \frac{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_t} - \operatorname{ctg}^2 \theta_t}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_t} + \operatorname{ctg}^2 \theta_t}, \quad (142.16a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i &= \frac{2\xi\zeta_t}{\zeta_i\zeta_t + \xi^2} = \frac{\sin(\theta_t + \theta_i) + \sin(\theta_t - \theta_i)}{\cos(\theta_t - \theta_i)} = \\ &= \frac{2\operatorname{ctg} \theta_t}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_t} + \operatorname{ctg}^2 \theta_t}. \quad (142.16б) \end{aligned}$$

Аналогично случаю падения продольной волны, при условии $\zeta_i \zeta_t = \xi^2$ падающая волна переходит целиком в волну другого типа, в данном случае поперечная волна — в продольную. В этом случае также направления распространения отраженной и падающей волн перпендикулярны друг к другу: $\theta_t + \theta_i = 90^\circ$. Угол Брюстера выражается формулой $\theta_t = \operatorname{arcctg} n = \operatorname{arctg} S_t/S_i$. Углы Брюстера для падения продольной волны и для падения поперечной волны дополняют друг друга до 90° .

Для случаев (в) и (г) получаются соответственно следующие величины для коэффициентов отражения:

$$\text{в) } \mathcal{V}_t = -1, \quad \mathcal{V}_i = 0; \quad (142.16в)$$

$$\text{г) } \mathcal{V}_t = +1, \quad \mathcal{V}_i = 0. \quad (142.16г)$$

§ 143. Отражение и прохождение звука на границе жидкости и твердой среды

Теперь рассмотрим отражение и прохождение волн на плоской границе между твердым телом и жидкостью или другим твердым телом. Эта задача аналогична задаче Френеля об отражении и прохождении на границе двух жидких сред, с той разницей, что при каждом отражении и прохождении в твердой среде будет возникать в общем случае по две волны (одна продольная и одна поперечная), а не по одной.

Будем считать, что отражение и прохождение правильные. Для волн произвольной формы это накладывает ограничение на угол скольжения падающей волны: он должен быть докритическим для всех отраженных и прошедших волн. В этом случае обычным способом найдем формулы Френеля — формулы для коэффициентов отражения и прохождения всех возникающих волн. При падении под закритическим углом волна вообще меняет свою форму при отражении и прохождении; в этом случае сохраняют свою форму только гармонические волны и для них имеют место те же формулы Френеля, что и для докритических углов, но коэффициенты отражения делаются вообще комплексными, а сами отраженные и прошедшие волны — неоднородными.

Пусть волна падает из жидкости на твердое тело. Это задача важная, например, для гидроакустики (отражение от грунта), иммерсионной дефектоскопии и т. п. В этой задаче удобно задать волны в жидкости не в виде поля давления, а через потенциал смещений, как и в твердом теле. Давление p и смещение u_0 частиц в жидкости выразятся через потенциал смещений Φ так:

$$p = -\rho_0 \ddot{\Phi}, \quad u_0 = \text{grad } \Phi. \quad (143.1)$$

Пусть падающая волна задана в жидкости своим потенциалом смещения

$$\Phi = f(t - \xi x - \zeta_0 z).$$

Тогда полный потенциал в жидкости и скалярный и векторный потенциалы φ и ψ прошедших волн в твердом теле можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi + \tilde{\Phi} &= f(t - \xi x - \zeta_0 z) + \mathcal{V}_0 f(t - \xi x + \zeta_0 z), \\ \varphi &= \mathcal{W}_l f(t - \xi x - \zeta_l z), \\ \psi &= \mathcal{W}_t f(t - \xi x - \zeta_t z); \end{aligned} \quad (143.2)$$

здесь \mathcal{W}_l и \mathcal{W}_t — коэффициенты прохождения; помимо обозначений предыдущего параграфа, принято еще обозначение $\zeta_0 = \sqrt{S_0^2 - \xi^2}$ для z -компоненты медленности S_0 звука в жидкости и обозначение \mathcal{V}_0 для коэффициента отражения звука в жидкости.

Обозначая угол скольжения волны в жидкости через θ_0 , получим соотношения:

$$\begin{aligned} \xi &= S_0 \cos \theta_0 = S_l \cos \theta_l = S_t \cos \theta_t; & \zeta_0 &= S_0 \sin \theta_0; \\ \zeta_l &= S_0 \sqrt{n_l^2 - \cos^2 \theta_0}; & \zeta_t &= S_0 \sqrt{n_t^2 - \cos^2 \theta_0}, \end{aligned} \quad (143.3)$$

где $n_l = S_l/S_0$ и $n_t = S_t/S_0$ — показатели преломления продольных и поперечных волн в твердом теле относительно жидкости.

Условия на границе заключаются в равенстве нормальных смещений в жидкости и в твердом теле, в равенстве нормальных напряжений (нормальное напряжение в твердом теле должно быть равно давлению в жидкости, взятому с обратным знаком) и в обращении в нуль касательного напряжения в твердом теле. Граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \zeta_0 \mathcal{V}_0 + \zeta_l \mathcal{W}_l + \xi \mathcal{W}_t &= \zeta_0, \\ \rho_0 \mathcal{V}_0 - \mu (S_l^2 - 2\xi^2) \mathcal{W}_l - 2\mu \xi \zeta_t \mathcal{W}_t &= -\rho_0, \\ 2\xi \zeta_l \mathcal{W}_l - (S_t^2 - 2\xi^2) \mathcal{W}_t &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно коэффициента отражения \mathcal{V}_0 и коэффициентов прохождения \mathcal{W}_l и \mathcal{W}_t продольных и поперечных волн и обозначая отношение плотностей ρ/ρ_0 твердого тела и воды через m , найдем формулы Френеля в виде

$$\mathcal{V}_0 = \frac{m \zeta_0 [(S_l^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \zeta_l \zeta_t] - \zeta_l S_l^4}{m \zeta_0 [(S_l^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \zeta_l \zeta_t] + \zeta_l S_l^4} = \frac{Z_t \sin^2 2\theta_t + Z_l \cos^2 2\theta_t - Z_0}{Z_t \sin^2 2\theta_t + Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_0}, \quad (143.4a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_l &= \frac{2\zeta_0 S_l^2 (S_l^2 - 2\xi^2)}{m \zeta_0 [(S_l^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \zeta_l \zeta_t] + \zeta_l S_l^4} = \\ &= -\frac{1}{m} \frac{2Z_l \cos 2\theta_t}{Z_t \sin^2 2\theta_t + Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_0}, \end{aligned} \quad (143.4b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_t &= \frac{4\xi \zeta_0 \zeta_t S_l^2}{m \zeta_0 [(S_l^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \zeta_l \zeta_t] + \zeta_l S_l^4} = \\ &= \frac{1}{m} \frac{2Z_t \sin 2\theta_t}{Z_t \sin^2 2\theta_t + Z_l \cos^2 2\theta_t + Z_0}. \end{aligned} \quad (143.4b)$$

Здесь введено обозначение $Z_0 = \rho_0/S_0 \sin \theta_0$. Из формулы для \mathcal{V}_0 видно, что входное сопротивление упругого полупространства равно

$$\bar{Z} = Z_t \sin^2 2\theta_t + Z_l \cos^2 2\theta_t.$$

Пользуясь (143.3), перепишем последние формулы так, чтобы в них входил, помимо коэффициентов преломления n_l и n_t и

отношения плотностей m , только угол скольжения падающей волны θ_0 :

$$\mathcal{V}_0 = \frac{m [A^2 + 4 \operatorname{ctg}^2 \theta_0 a_t a_l] - n_t^4 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_0)^2 a_l}{m [A^2 + 4 \operatorname{ctg}^2 \theta_0 a_t a_l] + n_t^4 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_0)^2 a_l}, \quad (143.5a)$$

$$\mathcal{W}_l = \frac{2n_t^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_0) A}{m [A^2 + 4 \operatorname{ctg}^2 \theta_0 a_t a_l] + n_t^4 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_0)^2 a_l}, \quad (143.5b)$$

$$\mathcal{W}_t = \frac{4n_t^2 \operatorname{ctg} \theta_0 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_0) a_l}{m [A^2 + 4 \operatorname{ctg}^2 \theta_0 a_t a_l] + n_t^4 (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta_0)^2 a_l}, \quad (143.5b)$$

где введены обозначения

$$A = n_t^2 + (n_t^2 - 2) \operatorname{ctg}^2 \theta_0;$$

$$a_t = \sqrt{n_t^2 + (n_t^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_0}, \quad a_l = \sqrt{n_t^2 + (n_t^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \theta_0}.$$

Проследим, как меняются коэффициенты отражения и прохождения при изменении угла скольжения падающей волны. При нормальном падении ($\theta_0 = 90^\circ$) получаем

$$\mathcal{V}_0 = \frac{m - n_l}{m + n_l}, \quad \mathcal{W}_l = \frac{2}{m + n_l}, \quad \mathcal{W}_t = 0,$$

а это те же формулы Френеля для потенциалов отраженной и прошедшей волн при нормальном падении на границу двух жидких сред с теми же плотностями и скоростями продольных волн. Скорость сдвиговых волн в данном случае роли не играет, и поперечные волны не возникают, как, впрочем, видно и из симметрии задачи. При скользющем падении ($\theta_0 = 0^\circ$) находим $\mathcal{V}_0 = -1$; $\mathcal{W}_l = \mathcal{W}_t = 0$. При стремлении угла скольжения падающей волны к нулю суммарное поле стремится к нулю в обеих средах, также аналогично тому, что мы нашли для границы двух различных жидкостей.

При изменении угла скольжения падающей волны возможно обращение в нуль коэффициента отражения \mathcal{V}_0 . В самом деле, при $m > n_l > 1$ коэффициент отражения положителен при $\theta_0 = 90^\circ$ и отрицателен при $\theta_0 \rightarrow 0$, причем все время сохраняет вещественные значения. Значит, при каком-то промежуточном угле падения коэффициент отражения обращается в нуль. Аналогично, при $m < n_l < 1$ коэффициент отражения отрицателен при нормальном падении и стремится к $+1$ при приближении к критическому углу по отношению к продольным волнам, также оставаясь вещественным. Значит, при каком-то угле скольжения $\theta_0 > \arccos n_l$ коэффициент отражения и в этом случае обратится в нуль. Таким образом, условия возможности нулевого отражения при падении волны на твердую среду совпадают с соответствующими условиями для двух жидкостей. Скорость сдвиговых волн в твердом теле сказывается только на величине угла скольжения, при котором отра-

жение обращается в нуль. Прошедшее поле, несущее в этом случае всю энергию падающего, состоит из продольной, и из поперечной волны.

Коэффициент прохождения продольной волны обращается в нуль при $\xi^2 = S_l^2/2$, т. е. при угле скольжения преломленной поперечной волны, равном 45° . Угол скольжения падающей волны равен при этом $\theta_0 = \arccos(n_l/\sqrt{2})$ и всегда меньше критического угла скольжения для продольных волн, так что в нуль обращается амплитуда продольной волны, уже успевшей обратиться в неоднородную по мере уменьшения угла скольжения.

Может обратиться в нуль и коэффициент прохождения поперечной волны: это происходит при критическом угле скольжения $\theta_{кр} = \arccos n_l$ для продольной волны. При этом угле скольжения коэффициент отражения равен единице, а продольная волна в твердом теле — плоская волна, бегущая вдоль границы.

Совершенно аналогичным способом можно выполнить расчеты и для задачи о падении продольной или поперечной волны в твердом теле на границу его с жидкостью.

§ 144. Рэлеевская волна

Вернемся к задаче о падении на свободную границу твердого тела продольной или поперечной волны и поставим вопрос: в каком случае отражается только волна другого наименования, чем падающая, т. е. поперечная при падении продольной волны и продольная при падении поперечной? Формулы (142.6) и (142.15) показывают, что условия обоих вариантов одинаковы:

$$(S_l^2 - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2 \zeta_l \zeta_t = 0. \quad (144.1)$$

Преобразуем это уравнение, которое можно рассматривать как уравнение относительно компоненты медленности ξ вдоль границы. Пользуясь выражениями (142.1) и освобождаясь от радикалов, получим

$$(S_l^2 - 2\xi^2)^4 - 16\xi^4 (S_l^2 - \xi^2)(S_l^2 - \xi^2) = 0.$$

Поделим это уравнение на ξ^8 и, введя обозначение $q = S_l/\xi$, раскроем скобки и выполним упрощения; уравнение примет вид

$$q^6 - 8q^4 + 24 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{S_l^2}{S_t^2}\right) q^2 - 16 \left(1 - \frac{S_l^2}{S_t^2}\right) = 0. \quad (144.2)$$

Легко видеть, что это уравнение имеет относительно величины q один вещественный корень, лежащий между 0 и 1. В самом деле, подставляя вместо q нуль, получим в левой части (144.2) отрицательное число; подставляя вместо q единицу, получим положительное число. Значит, где-то между нулем и единицей действительно имеется искомый корень. Каков же физический смысл найденного решения $q < 1$? Так как при этом $\xi > S_t$, то след

волны бежит по границе медленнее, чем сдвиговая волна, а значит, и подавно медленнее, чем продольная волна. Таким образом, обе волны — и падающая и отраженная — неоднородные *).

Поле бежит вдоль границы с медленностью ξ и убывает в направлении от границы в глубь тела. Поле представляет собой совокупность двух неоднородных волн: одной — продольного и другой — поперечного типа, каждую из которых можно считать падающей (под мнимым углом скольжения), одновременно считая вторую отраженной (тоже под мнимым углом).

Но чаще рассматривают все получающееся поле как одну волну, распространяющуюся вдоль границы («рэлеевская волна»). Рэлеевская волна распространяется без дисперсии. Скорость этой волны $c_R = 1/\xi$ меньше скорости сдвиговых волн. Отношение этой скорости к скорости сдвиговых волн зависит от коэффициента Пуассона, изменяясь от 0,875 (большой модуль сдвига) до 0,96 (водоподобная среда) при изменении коэффициента Пуассона от 0 до 1/2. Скорость рэлеевской волны мало зависит от модуля объемного сжатия во всем диапазоне его изменения от 0 до ∞ , но сильно зависит от модуля сдвига (с точностью до 10% скорости сдвиговой и рэлеевской волны пропорциональны друг другу). Ее распространение обуславливает, таким образом, преимущественно сдвиговая упругость, связанная с колебаниями среды вблизи границы.

Интересно отметить, что возможны вообще и другие поверхностные неоднородные волны, распространяющиеся вблизи свободной границы той или иной среды. Таковы, например, волны, которые могут распространяться в жидком полупространстве под действием силы тяжести (морские поверхностные волны). В этом случае сила веса является квазиупругой силой. Однако в этом случае распространение волн сопровождается дисперсией. Другой пример — жидкое полупространство, ограниченное натянутой мембраной или упругой пластиной (см. следующий параграф). Наконец, с аналогичной картиной в жидкой среде мы встречались, рассматривая волну в жидкости, бегущую вдоль импедансной плоскости с упругим импедансом. Рэлеевская волна может распространяться и при несжимаемости среды ($\nu = 1/2$). В этом случае $c_R = 0,96 c_t$.

Волны Рэля важны в сейсмике: поскольку они являются поверхностными, они расходятся при распространении от источника волн только в двух измерениях (например, землетрясения — по земной коре) и поэтому затухают медленнее (как $1/r$ по энергии), чем волны, распространяющиеся в объеме (обычные продольные и поперечные волны, убывающие по квадратичному закону). Поэтому их можно наблюдать на таких больших расстояниях от эпицентра землетрясения, на которых волны других типов уже не заметны.

*) Можно иначе прийти к этому же решению: найти, при каком условии одноименная отраженная волна имеет бесконечную амплитуду.

Волны Рэлея применяют также в дефектоскопии для регистрации поверхностных трещин, которые являются рассеивающими препятствиями для таких волн. Их малая скорость удобна также для использования в линиях задержки.

§ 145. Влияние граничащей среды на поверхностные волны

Как действует толща океана на рэлеевскую волну, бегущую по дну? Нормальные смещения дна в рэлеевской волне создают в воде звуковые волны, но реакция водной среды также должна каким-то образом воздействовать на рэлеевскую волну. Расчет такого воздействия довольно сложен; но само явление влияния граничащей среды на волну, распространяющуюся вдоль поверхности, возникает и в других, более простых случаях. Поэтому рассмотрим качественную сторону влияния среды на простой модели: влияние граничащей жидкости на волну, бегущую по натянутой мембране.

Пусть поверхностная плотность мембраны равна ρ_m . Рассмотрим поперечные плоские волны, бегущие на мембране в направлении оси x . Натяжение по оси x мембраны в расчете на один погонный сантиметр в направлении оси обозначим через T . В отсутствие жидкости уравнение одномерного движения мембраны имеет вид

$$\rho_m \ddot{u} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

где u — поперечное смещение точек мембраны в направлении оси z . Скорость волн на мембране в этом случае равна $c_m = \sqrt{T/\rho_m}$, а гармоническую волну, бегущую по мембране, можно записать в виде $u = e^{ik_m x}$, где $k_m = \omega/c_m = \sqrt{\rho_m \omega^2/T}$; дисперсия отсутствует.

Теперь предположим, что мембрана граничит одной стороной с жидкостью, плотность которой равна ρ и скорость звука $c = \omega/k$. Будем искать плоские волны частоты ω , которые могут распространяться по такой «нагруженной» мембране в виде $e^{i\xi x}$, где величину ξ предстоит определить.

Волна поперечных смещений u на плоскости $z = 0$ вызовет в жидкости плоскую волну давлений вида $A \exp(i\xi x + i\sqrt{k^2 - \xi^2} z)$, амплитуда которой определится из граничного условия на поверхности мембраны: z -компонента смещений частиц в жидкости при $z = 0$ должна равняться u . Это дает $u = Ai\sqrt{k^2 - \xi^2}/\rho\omega^2$, откуда находим амплитуду волны в среде:

$$A = -\frac{i\rho\omega^2}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} u.$$

Уравнение движения мембраны, граничащей с жидкостью, отличается от уравнения для свободной мембраны добавочной силой:

давлением среды, и принимает вид

$$\rho_m \ddot{u} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p = 0.$$

Для гармонической волны получим отсюда

$$-\rho_m \omega^2 + T \xi^2 - \frac{i \rho \omega^2}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} = 0$$

или

$$(\xi^2 - k_m^2) \sqrt{\xi^2 - k^2} = \frac{\rho}{\rho_m} k_m^2. \quad (145.1)$$

Это и есть дисперсионное уравнение для волн на мембране, граничащей с жидким полупространством. Дисперсионное уравнение удобно представить в виде

$$\frac{\rho}{k \rho_m} \frac{1}{\sqrt{(\xi/k)^2 - 1}} = \left(\frac{\xi}{k_m} \right)^2 - 1 \quad (145.2)$$

и решать графически. На рис. 145.1 линии *a* изображают зависимость левой части уравнения (145.2) от ξ/k (ветви с положительным

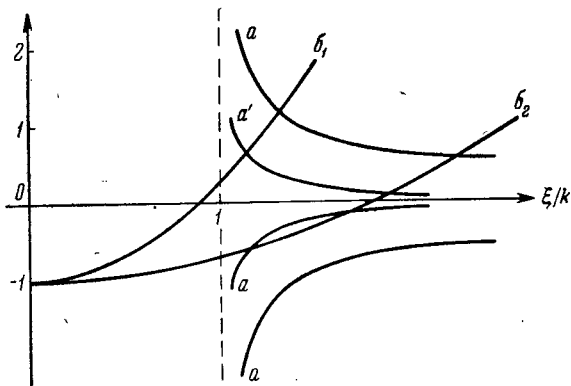


Рис. 145.1. *a* и *b* — соответственно графики левой и правой части уравнения (145.2); кривые *a'* соответствуют меньшим значениям $\rho/k\rho_m$ (т. е. большей частоте), чем кривые *a*.

и с отрицательным значением корня), а параболы b_1 и b_2 — зависимости правой части уравнения для случая $k_m < k$ (скорость свободных волн на мембране c_m больше скорости волн в среде) и для случая $k_m > k$ ($c_m < c$). В обоих случаях есть точка пересечения параболы с верхней ветвью кривой *a*. Из построения очевидно, что в обоих случаях абсцисса точки пересечения, т. е. искомое значение ξ/k , лежит правее единицы и правее нулей кривых *b*, соответствующих значениям $\xi/k_m = 1$. Следовательно,

искомое значение ξ удовлетворяет неравенствам $\xi > k$ и $\xi > k_m$, т. е. решения соответствуют неоднородным волнам в жидкости — поверхностным волнам, бегущим вдоль мембраны медленнее волн на ненагруженной мембране и убывающим экспоненциально при удалении от мембраны. Так как реакция неоднородной волны на мембрану в данном случае носит массовый характер, то ее действие равносильно некоторой присоединенной массе, что и объясняет замедляющее действие неоднородной волны, которую «тянет» за собой волна на мембране.

Но в случае $k_m < k$ есть еще и комплексное решение для ξ . Его легче всего найти для случая, когда величина $\rho/k\rho_m$ мала по сравнению с единицей («легкая среда»). Такое решение будем искать в виде

$$\xi^2 = k_m^2 (1 + \delta + i\varepsilon),$$

где $|\varepsilon| \ll 1$ и $|\delta| \ll 1$. Подставляя в (145.1), получим

$$(\delta + i\varepsilon) \sqrt{k_m^2 - k^2 + \delta k_m^2 + i\varepsilon k_m^2} = \frac{\rho}{\rho_m}.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения, имеем

$$(\delta^2 - \varepsilon^2 + 2i\delta\varepsilon)(k_m^2 - k^2 + \delta k_m^2 + i\varepsilon k_m^2) = \frac{\rho^2}{\rho_m^2}.$$

Разделяя вещественные и мнимые части, найдем

$$(\delta^2 - \varepsilon^2)(k_m^2 - k^2 + \delta k_m^2) - 2\delta\varepsilon^2 k_m^2 = \frac{\rho^2}{\rho_m^2},$$

$$2\delta(k_m^2 - k^2 + \delta k_m^2) + k_m^2(\delta^2 - \varepsilon^2) = 0.$$

Из второго уравнения следует, что δ имеет порядок ε^2 . Следовательно, поправка к скорости распространения — второго порядка малости по сравнению с малым коэффициентом затухания волны ε . Учитывая это обстоятельство, получим приближенно из первого уравнения

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_m} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_m^2}},$$

и из второго уравнения

$$\delta = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{k_m^2}{k^2 - k_m^2} = -\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_m^2} \frac{k_m^2}{(k^2 - k_m^2)^2}.$$

В этом случае, как видно из формул, скорость растет (во втором порядке малости) в результате реакции среды, а излучение волн приводит к затуханию волны, бегущей на мембране.

Заметим, что при $k_m > k$ дисперсионное уравнение может иметь еще два вещественных решения для ξ , соответствующих неоднородным волнам (эти решения показаны как пересечения кривой b_2 на рис. 145.1 с нижней ветвью кривой a'), но эти решения соответствуют неоднородным волнам, нарастающим при удалении от мембраны, и поэтому не могут создаваться волной, бегущей по мембране.

§ 146. Твердые волноводы

Подобно жидким слоям и трубам, твердые пластины и стержни ведут себя как волноводы: в них также без изменений могут распространяться только гармонические волны определенных типов — нормальные волны. Но в твердой среде, в отличие от жидкости, распространяются не только продольные, но и поперечные волны; кроме того, граничные условия для твердого тела сложнее, чем для жидкостей. Поэтому в твердом волноводе разнообразие нормальных волн больше, а сами эти волны образуют более сложные волновые поля, чем нормальные волны в жидком волноводе.

Мы рассмотрим только волноводы в виде слоя; при расчете удобно плоскость xy совместить со средней плоскостью слоя. Ось x расположим вдоль направления распространения нормальной волны. Толщину волновода обозначим через $2h$. Ограничимся случаем свободных стенок.

Один из типов нормальных волн в твердом волноводе похож на волны в жидком волноводе: это — нормальные волны, образованные каждая двумя поперечными плоскими волнами, поляризованными параллельно границам волновода. Смещения частиц в таких волнах происходят параллельно оси y и от координаты y не зависят. Граничные условия — обращение в нуль напряжений σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} при $z = \pm h$. Непосредственной проверкой легко установить, что нормальные волны этого типа можно записать так:

$$u_y = e^{i\xi x} \sin \zeta z = \frac{1}{2i} (e^{i\xi x + i\zeta z} - e^{i\xi x - i\zeta z})$$

или

$$u_y = e^{i\xi x} \cos \zeta z = \frac{1}{2} (e^{i\xi x + i\zeta z} + e^{i\xi x - i\zeta z}),$$

где $\xi^2 + \zeta^2 = k_i^2$ при условии $\zeta h = [(2n + 1)/2] \pi$ или $\zeta h = n\pi$ соответственно (n — целое число). Критические частоты получаются из соотношений $k_i h = [(2n + 1)/2] \pi$ и $k_i h = n\pi$ соответственно.

Распределение смещений по толщине волновода синусоидальное, причем по высоте укладывается целое число полуволн. Набор нормальных волн получается такой же, как для жидкого слоя со свободными стенками, но роль длины волны звука играет длина сдвиговой волны. Каждая нормальная волна — это суперпози-

ция двух сдвиговых волн, каждая из которых переходит в другую при отражении на границе.

Более интересны нормальные волны, в которых смещения частиц лежат в плоскости xz . Такие нормальные волны уже нельзя образовать только одной парой плоских волн, потому что при отражениях от границ слоя продольные волны переходят в поперечные и обратно. Нормальная волна такого типа должна быть образована двумя парами плоских волн: парой продольных и парой поперечных волн, взаимно переходящих друг в друга при отражениях. На рис. 146.1 показаны волновые векторы всех четырех волн. Согласно закону Снеллиуса компоненты волновых векторов в направлении, параллельном оси волновода, равны у всех четырех плоских волн, составляющих нормальную волну.

Нормальную волну такого типа можно записать через скалярный потенциал и (ввиду того, что движение в такой волне плоское) единственно отличную от нуля y -компоненту векторного потенциала в таком виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= ae^{i\xi x + i\zeta_1 z} + be^{i\xi x - i\zeta_1 z}, \\ \psi &= ce^{i\xi x + i\zeta_2 z} + de^{i\xi x - i\zeta_2 z}. \end{aligned} \quad (146.1)$$

Так как по оси z должны получаться стоячие волны, то должно быть $|a| = |b|$ и $|c| = |d|$. Все нормальные волны можно разбить на две группы: в одной из них смещения частиц симметричны относительно средней плоскости слоя, т. е. имеют место равенства

$$u_x(z) = u_x(-z); \quad u_z(z) = -u_z(-z),$$

а в другой группе смещения антисимметричны:

$$u_x(z) = -u_x(-z); \quad u_z(z) = u_z(-z).$$

Симметричные волны можно записать в таком виде:

$$\varphi = Ae^{i\xi x} \cos \zeta_1 z, \quad \psi = Be^{i\xi x} \sin \zeta_2 z. \quad (146.2)$$

Антисимметричные волны выразятся аналогичными формулами

$$\varphi = Ce^{i\xi x} \sin \zeta_1 z, \quad \psi = De^{i\xi x} \cos \zeta_2 z. \quad (146.3)$$

Граничные условия — это обращение в нуль напряжений σ_{xz} и σ_{zz} при $z = \pm h$. Из этих условий получим дисперсионное уравнение, т. е. уравнение, связывающее ξ с частотой для каждой нормальной волны; определив ξ , можно будет найти и отношение амплитуд A и B или C и D .

Начнем с волн симметричного типа. Граничные условия найдем, подставляя (146.2) в (141.13) и полагая $z = \pm h$:

$$\begin{aligned} A(k_i^2 - 2\xi^2) \cos \zeta_1 h - B2i\xi\zeta_1 \cos \zeta_1 h &= 0, \\ Ai2\xi\zeta_1 \sin \zeta_1 h - B(k_i^2 - 2\xi^2) \sin \zeta_1 h &= 0. \end{aligned} \quad (146.4)$$

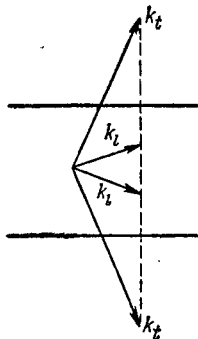


Рис. 146.1. Волновые векторы четырех плоских волн (две продольные и две поперечные), образующих одну нормальную волну в твердом волноводе.

Исключая коэффициенты A и B , получим дисперсионное уравнение

$$(k_i^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg} \zeta_i h + 4\xi^2 \zeta_i \operatorname{tg} \zeta_i h = 0. \quad (146.5)$$

При заданной частоте это уравнение имеет бесконечный дискретный набор решений для ξ . Для каждой частоты только несколько из первых решений для ξ будут вещественными, т. е. только несколько номеров нормальных волн будут распространяющимися; для других номеров волн ξ — чисто мнимое (как в жидких волноводах) или комплексное.

Особенно интересна нулевая волна, т. е. волна, распространяющаяся при любой частоте (критическая частота — нуль). Напомним, что в жидком волноводе со свободными стенками такой волны нет, в твердом же волноводе есть две такие волны (симметричная и антисимметричная). Будем следить за симметричной нулевой волной, начиная с очень малых частот, когда величины $\zeta_i h$ и $\xi_i h$ можно считать малыми по сравнению с единицей. Из (146.2) следует, в частности, что при этом распределение продольных смещений по сечению постоянно с точностью до квадрата этих малых величин. В дисперсионном уравнении можно положить приближенно (с той же точностью) $\operatorname{tg} \zeta_i h = \zeta_i h$ и $\operatorname{tg} \xi_i h = \xi_i h$. Тогда (146.5) примет вид

$$(k_i^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \zeta_i^2 = 0.$$

Отсюда видно, что при вещественном ξ , т. е. в распространяющейся волне, величина ζ_i должна быть чисто мнимой: продольная волна должна быть неоднородной поперек слоя. Подставляя сюда $\zeta_i^2 = -k_i^2 + \xi^2$ и упрощая, получим

$$\xi^2 = \frac{k_i^4}{4(k_i^2 - k_i^2)} = \frac{\rho\omega^2}{4\mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu)}.$$

Но $4\mu(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu) = E_{пл}$ — модуль Юнга для пластины. Если учесть еще характер деформаций, то ясно, что при малых частотах — это «юнговская» продольная волна в пластине. Пока частота остается малой, скорость этой волны от частоты не зависит. По мере роста частоты скорость монотонно падает и распределение смещений по сечению делается неравномерным. Можно показать, что при увеличении частоты величина ζ_i также делается чисто мнимой, и асимптотически при больших частотах величины $\zeta_i h$ и $\xi_i h$ делаются большими по сравнению с единицей. Тогда будет приближенно $\operatorname{tg} \zeta_i h = i$, $\operatorname{tg} \xi_i h = i$, и дисперсионное уравнение (146.5) приведет к виду

$$(k_i^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2 \zeta_i \zeta_i = 0,$$

совпадающему с дисперсионным уравнением рэлеевской волны. Следовательно, асимптотически юнговская волна при безграничном увеличении частоты превращается в две рэлеевские волны, бегущие

(синфазно) каждая по своей стороне слоя. Смещения заметны только вблизи границ («скин-слой»), а средняя часть слоя практически покоится.

Поведение следующих номеров нормальных волн более сложно. Без численного расчета удастся выяснить только поведение некоторых нормальных волн вблизи критических частот и асимптотическое поведение всех распространяющихся нормальных волн при стремлении частоты к бесконечности.

Так, для тех волн, у которых, как и в жидких волноводах, фазовая скорость обращается в бесконечность на некоторой частоте, можно найти эти «критические» частоты. В самом деле, при этой частоте должно выполняться условие $\xi = 0$ и, следовательно, $\zeta_l = k_l$ и $\zeta_s = k_s$. Подставляя в (146.4), приведем граничные условия к виду

$$A \cos k_l h = 0, \quad B \sin k_l h = 0.$$

Эти условия удовлетворяются либо при $k_l h = n\pi$ (тогда при этой частоте $A = 0$), либо при $k_l h = \frac{2n-1}{2}\pi$ (тогда $B = 0$).

В первом случае при критической частоте получается стоячая волна поперечного типа с фронтами, параллельными стенкам волновода. Во втором случае получается волна продольного типа.

Для каждой волны (кроме нулевой) найдется частота, при которой $\xi^2 = k_l^2/2$. Для волны номера $n \neq 0$ частота определится соотношением $\cos \zeta_l h = 0$, откуда $k_l h = \frac{2n-1}{\sqrt{2}}\pi$. При этой частоте $A = 0$ и волна состоит из двух сдвиговых волн, бегущих под углом 45° к оси волновода, и имеет фазовую скорость $c_l \sqrt{2}$. Такую волну можно записать в виде

$$\varphi = 0; \quad \psi = B e^{i \frac{2n-1}{2h} \pi x} \sin \frac{2n-1}{2h} \pi z.$$

Еще не доходя до этой частоты, при угле скольжения $\theta_{кр} = \arccos(c_l/c_s)$, продольные волны делаются неоднородными и остаются неоднородными при дальнейшем повышении частоты. Асимптотически при $\omega \rightarrow \infty$ всякая распространяющаяся волна (кроме нулевой) превращается в пару сдвиговых волн, бегущих под углами скольжения, стремящимися к нулю, и в пару неоднородных продольных волн, заметных только вблизи границ. Следовательно, фазовая скорость этих волн убывает, стремясь асимптотически к c_l .

Аналогичным образом можно рассмотреть и антисимметричные волны. Для них граничные условия запишутся в соответствии с (146.3) в виде

$$C(k_l^2 - 2\xi^2) \sin \zeta_l h + D 2i\xi\zeta_l \sin \zeta_s h = 0,$$

$$C 2i\xi\zeta_s \cos \zeta_l h + D(k_l^2 - 2\xi^2) \cos \zeta_s h = 0,$$

что приводит после исключения амплитуд к дисперсионному уравнению

$$(k_i^2 - 2\xi^2)^2 \operatorname{tg} \zeta_i h + 4\xi^2 \zeta_i \operatorname{tg} \zeta_i h = 0.$$

Найдем нулевую антисимметричную волну. Для малых частот величины $\zeta_i h$ и $\zeta_i h$ малы и должны быть чисто мнимыми. Если, однако, положить, как и для симметричных волн, $\operatorname{tg} \zeta_i h = \zeta_i h$ и $\operatorname{tg} \zeta_i h = \zeta_i h$, то члены, содержащие ξ^2 в дисперсионном уравнении, взаимно сокращаются: это слишком грубое приближение. Поэтому приходится для получения приближенного решения продолжить разложение тангенсов до второго члена:

$$\operatorname{tg} \zeta_i h = \zeta_i h + \frac{1}{3} (\zeta_i h)^3; \quad \operatorname{tg} \zeta_i h = \zeta_i h + \frac{1}{3} (\zeta_i h)^3.$$

Тогда дисперсионное уравнение приводится к виду

$$k_i^4 + \frac{1}{3} h^2 [(k_i^2 - 2\xi^2)^2 (k_i^2 - \xi^2) + 4\xi^2 (k_i^2 - \xi^2)^2] = 0,$$

откуда следует, что решение должно удовлетворять неравенству $\xi \gg k_i$. Считая, что это условие выполнено, и сохраняя только старшие члены по ξ (члены с четвертой степенью ξ), найдем

$$\xi^2 = \pm \sqrt{\frac{3}{4} \frac{k_i^4}{(k_i^2 - k_j^2) h^2}} = \pm \sqrt{\frac{3\rho\omega^2}{E_{пл} h^2}}.$$

Это — известное выражение для волнового числа изгибных волн на пластине. Положительный знак корня соответствует распространяющимся изгибным волнам, а отрицательный — волнам, экспоненциально затухающим вдоль волновода. Закон дисперсии для изгибных волн простой: при повышении частоты скорость растет пропорционально корню квадратному из частоты. Этот закон роста, однако, нельзя экстраполировать на высокие частоты: по мере того как величина $k_i h$ делается не очень малой по сравнению с единицей, рост скорости замедляется и при стремлении частоты к бесконечности нулевая нормальная волна превращается в пару рэлеевских волн, бегущих вдоль верхней и нижней границ волновода. Но, в отличие от случая симметричной нулевой волны, эти рэлеевские волны сдвинуты одна относительно другой на полволны.

Поведение волн высших порядков похоже в целом на поведение симметричных волн. Фазовая скорость обращается в бесконечность или при $k_i h = \frac{2n-1}{2} \pi$ (тогда при этой частоте $C = 0$ и волны рождаются как поперечные), или при $k_i h = n\pi$ (тогда $D = 0$ и волны рождаются как продольные). При увеличении частоты скорости всех распространяющихся волн стремятся асимптотически к скорости сдвиговой волны.

СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

§ 147. Типы сферических волн в твердом теле

Как в жидкости, так и в твердой среде колеблющиеся тела конечных размеров создают сферические волны, т. е. волны, которые на достаточном удалении от тела убывают вдоль каждого радиуса-вектора по закону $1/r$ и в которых угловое распределение амплитуд (характеристика направленности) не меняется с увеличением расстояния. Различие состоит в том, что в твердой среде колеблющееся тело излучает не только продольную волну, как в жидкости, но и поперечную, и каждая из них имеет свою характеристику направленности и свою скорость распространения.

Будем пользоваться сферической системой координат с радиусами-векторами, меридианами и параллелями в качестве координатных линий и с полюсом в центре волны. Как и для жидкости, будем изучать волны, для которых угловые зависимости величин, характеризующих волну, остаются неизменными на асимптотически (на большом расстоянии от центра волны), а начиная от самого центра. Все источники таких волн могут быть осуществлены в виде сфер с определенным распределением смещений на поверхности, причем для получения всех нормальных волн придется вообще задавать не только нормальные, но и касательные смещения или напряжения.

Мы ограничимся сферическими волнами, создаваемыми простейшими источниками: пульсирующей сферой (монополь), поступательно осциллирующей жесткой сферой (диполь) и вращательно осциллирующей жесткой сферой («крутоль»). Последний источник и чисто поперечная волна, им создаваемая, не имеют аналога в жидкой среде. Кроме того, рассмотрим стоячие сферические волны, а также колебания сферических полостей в твердой среде. Начнем с простейшего случая сферически-симметричных волн.

§ 148. Сферически-симметричные волны. Радиальные колебания твердой сферы

Из соображений симметрии ясно, что поперечные сферически-симметричные волны не существуют. Единственно возможная сферически-симметричная волна — продольная волна с чисто радиальными смещениями. Такую волну можно охарактеризовать

скалярным потенциалом смещений φ , также имеющим сферическую симметрию. Единственная отличная от нуля радиальная компонента смещения выразится через потенциал формулой

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (148.1)$$

Нормальное напряжение на сферических координатных поверхностях выразится формулой

$$\sigma_{rr} = \lambda \Delta \varphi + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}.$$

Но для сферически-симметричного случая

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

а в силу волнового уравнения $\Delta \varphi = (1/c_t^2) \ddot{\varphi}$. Поэтому напряжение можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi - 4\mu \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \mu \left(\frac{1}{c_t^2} \ddot{\varphi} - \frac{4}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right).$$

В частности, для гармонической волны найдем

$$\sigma_{rr} = -\mu \left(k_t^2 \varphi + \frac{4}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right). \quad (148.2)$$

Полученных формул достаточно, чтобы найти сферически-симметричные собственные колебания твердой сферы при тех или иных граничных условиях на ее поверхности, поле монополя в твердой среде, а также колебания сферической полости в твердой среде. В этом параграфе рассмотрим колебания твердой сферы.

Пусть сфера радиуса a помещена в вакуум. Граничным условием на поверхности сферы явится обращение в нуль нормального напряжения на поверхности сферы; остальные граничные условия выполняются автоматически вследствие симметрии движения. Потенциал смещений для искомого колебания должен иметь вид $\varphi = (\sin k_t r)/r$, где k_t , а вместе с тем и частота найдутся из граничного условия. Подставляя в (148.2), получим уравнение частот в виде

$$[(k_t a)^2 - 4] \sin k_t a + 4k_t a \cos k_t a = 0$$

или, после элементарного преобразования,

$$\operatorname{tg} k_t a = \frac{k_t a}{1 - \frac{1}{4} \frac{c_t^2}{c_l^2} (k_t a)^2}.$$

Напомним, что соответственное условие для жидкой сферы имеет

вид $ka = n\pi$, где n — целое. Уравнение частот удобно решать графически, преобразовав его к виду

$$k_1 a - n\pi = \arctg \frac{k_1 a}{1 - \frac{1}{4} \frac{c_1^2}{c^2} (k_1 a)^2}.$$

На рис. 148.1 семейство прямых, проведенных под углом 45° к осям, изображает различные ветви левой части уравнения в функции от $k_1 a$, а кривая с разрывом — правую часть уравнения. В точке разрыва знаменатель аргумента правой части обращается в нуль. Этому соответствует значение $k_1 a = 2(c_1/c) < \sqrt{2}$. С другой стороны, правая часть до разрыва остается большей, чем $k_1 a$. Поэтому в верхней полуплоскости пересечений кривой с семейством, дающих искомые значения $k_1 a$, нет; первое пересечение имеет место с прямой $y = k_1 a - \pi$, второе — с прямой $y = k_1 a - 2\pi$ и т. д., как видно из рисунка. Значение n равно числу сферических узловых поверхностей, на которых напряжение обращается в нуль. Колебание наименьшей частоты имеет только одну узловую поверхность — поверхность самого сферического объема. Для жидкой сферы того же радиуса и с той же скоростью продольных волн, что и в данной твердой среде, собственные значения $k_1 a$ давались бы пересечениями семейства с осью абсцисс: все решения были бы больше, чем для твердой сферы. Значит, при условии равной скорости звука собственные частоты для сферически-симметричных колебаний твердой сферы ниже, чем для жидкой сферы того же радиуса.

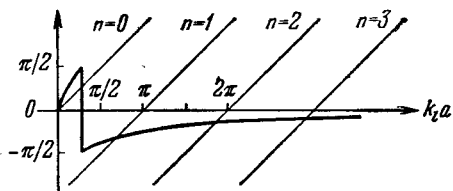


Рис. 148.1. Графическое определение собственных частот сферически-симметричных колебаний твердой сферы со свободной поверхностью.

Для собственных частот твердой сферы, ограниченной абсолютно жесткой сферической границей, уравнение частот получится из требования равенства нулю смещения частиц на границе: $\partial\varphi/\partial r = 0$ при $r = a$. Это приводит к частотному уравнению того же вида, что и в жидкости: $\operatorname{tg} k_1 a = k_1 a$.

Обратим внимание на то, что минимальный размер резонансной сферы при обоих типах граничных условий и при любом коэффициенте Пуассона имеет порядок длины продольной волны.

§ 149. Монополь в твердой среде

Потенциал смещений, создаваемый в твердой среде гармоническими пульсациями сферы, т. е. потенциал гармонического монополя, имеет вид

$$\varphi = Ae^{ik_1 r}/r. \quad (149.1)$$

Смещение u и скорость частиц v имеют соответственно вид

$$u = A \frac{ik_{lr} - 1}{r^2} e^{ik_l r}, \quad v = -i\omega u = -i\omega A \frac{ik_{lr} - 1}{r^2} e^{ik_l r}.$$

Отсюда видно, что объемная скорость V монополя (определяемая, как и для жидкостей, соотношением $V = \lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 v$) связана с коэффициентом A формулой

$$V = i\omega 4\pi A,$$

так что потенциал можно записать в виде

$$\varphi = -i \frac{V}{\omega} \frac{e^{ik_l r}}{4\pi r}.$$

Смещение и скорость частиц выразятся через объемную скорость так:

$$u = -i \frac{V}{\omega} \frac{ik_{lr} - 1}{4\pi r^2} e^{ik_l r}, \quad v = -V \frac{ik_{lr} - 1}{4\pi r^2} e^{ik_l r}.$$

Нормальное напряжение на сфере радиуса r найдем из (148.2):

$$\sigma_{rr} = i\mu \frac{V}{\omega} \frac{(k_{lr})^2 - 4 + 4ik_{lr}}{4\pi r^3} e^{ik_l r}.$$

Из этих формул можно найти мощность, излучаемую монополем, имеющим заданную объемную скорость. Для этого на сфере любого радиуса найдем импеданс данной волны $Z = -\sigma_{rr}/v$. Средняя за период плотность потока мощности будет равна вещественной части импеданса, умноженной на половину квадрата модуля скорости частиц на выбранной сфере.

Импеданс на сфере равен

$$Z = \frac{i\mu [(k_{lr})^2 - 4 + 4ik_{lr}]}{\omega r (ik_{lr} - 1)} = i\rho c_l \frac{4 + 4(k_{lr})^2 - (k_{lr})^2}{k_{lr} [1 + (k_{lr})^2]} + \rho c_l \frac{(k_{lr})^2}{1 + (k_{lr})^2}. \quad (149.2)$$

Квадрат модуля скорости частиц есть

$$|v|^2 = |V|^2 \frac{1 + (k_{lr})^2}{(4\pi r^2)^2}.$$

Таким образом, полная излучаемая мощность составит

$$J = \frac{1}{2} 4\pi r^2 \operatorname{Re} Z |v|^2 = \frac{1}{8\pi} \rho c_l k_l^2 |V|^2. \quad (149.3)$$

Эта формула совпадает с выражением для средней мощности, излучаемой монополем в жидкой среде.

При вычислении мощности можно было бы рассмотреть поле волны на большом расстоянии от центра волны и взять асимптотические выражения для напряжения и скорости частиц. Это дает

выражения

$$\sigma_{rr} \rightarrow iV \frac{\rho\omega}{4\pi r} e^{ik_l r}, \quad v \rightarrow -iV \frac{k_l}{4\pi r} e^{ik_l r}.$$

Таким образом, вдали от источника напряжение и скорость синфазны (и различаются знаками). Значит, при нахождении мощности можно просто взять половину произведения модулей напряжения и скорости, и это даст, после умножения на поверхность сферического фронта, проходящего через данную точку, среднюю излучаемую мощность. Это снова приведет к той же формуле (149.3).

Рассмотрим подробно зависимость вещественной и мнимой частей импеданса от частоты и радиуса (точнее, от произведения $k_l r$). Вещественная часть импеданса ведет себя в точности так же, как и для жидкой среды. Но поведение мнимой части совершенно другое. При малом радиусе реактивная часть импеданса равна приближенно

$$i \frac{4\rho c_l}{k_l r} = i \frac{4\mu}{\omega r},$$

т. е. имеет характер упругости, в противоположность случаю жидкой среды, где реактивная часть импеданса имеет массовый характер (присоединенная масса). При стремлении $k_l r$ к нулю импеданс стремится к бесконечности. Это значит, что при понижении частоты или уменьшении радиуса излучателя среда ведет себя по отношению к излучателю как все более жесткое тело. Это снова противоположно поведению жидкости, которая ведет себя в таком случае как все более мягкое тело: реактивная часть импеданса на поверхности малого пульсирующего шарика, погруженного в жидкость, есть $-i\rho\omega r$ и эта величина стремится к нулю при $kr \rightarrow 0$.

Дальнейшее поведение мнимой части импеданса при увеличении частоты зависит от коэффициента Пуассона. Если коэффициент Пуассона меньше $1/3$, то, согласно (139.6), $4k_l^2 - k_t^2 > 0$ и реактивная часть импеданса сохраняет характер упругости при любой частоте. Но при $\nu > 1/3$ величина $4k_l^2 - k_t^2$ отрицательна, и поэтому при увеличении частоты упругий импеданс уменьшается, обращается в нуль, а затем меняет знак, превращаясь в импеданс массового типа. Частоту, при которой мнимая часть импеданса обращается в нуль, можно рассматривать как резонансную частоту вынужденных колебаний сферической полости данного радиуса r , в которую помещен излучатель, создающий вынуждающую силу. Условие резонанса имеет вид

$$4 + 4(k_l r)^2 - (k_t r)^2 = 0,$$

что, согласно § 139, можно записать еще и так:

$$(k_l r)^2 = \frac{2(1-2\nu)}{3\nu-1} \quad \text{или} \quad (k_t r)^2 = \frac{4(1-\nu)}{3\nu-1}.$$

При резонансной частоте полости звуковая энергия излучается в среду самым выгодным образом: вся мощность излучателя расходуется только на излучение и требуемая реактивная мощность равна нулю. Импеданс среды равен при этом

$$Z = \rho c_l \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} = \rho c_l 2 \sqrt{\frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}}.$$

Особенно интересен случай водоподобных сред ($\nu \sim 1/2$). Тогда при резонансной частоте $k_l r \approx 2$, т. е. на дуге большого круга полости укладываются две длины сдвиговой волны. При абсолютной несжимаемости среды при резонансе точно $k_l r = 2$. Вещественная часть импеданса в несжимаемой среде равна нулю при любой частоте; таким образом, в несжимаемой среде полный импеданс полости при резонансной частоте равен нулю, излучение отсутствует, и, следовательно, такая полость может совершать свободные незатухающие колебания.

Обратим внимание на сходство колебания пустой полости в водоподобной твердой среде и газового пузырька в жидкости. Роль упругости газа играет сдвиговая упругость среды. Размер резонансной полости (в отличие от резонансной сферы, см. § 148) мал по сравнению с длиной продольной волны, хотя колебания в среде чисто продольные. В следующем параграфе мы увидим, что сходство распространяется и на свободные колебания полости и на рассеяние ею продольных волн.

§ 150. Колебания сферической полости в твердом теле. Рассеяние на резонансной полости

Теперь найдем свободные колебания полости в сжимаемой среде. В этом случае при радиальных колебаниях происходит излучение продольной волны и колебания затухают; значит, частота таких колебаний комплексна. Вещественную часть частоты и ее мнимую часть, равную коэффициенту затухания собственных колебаний полости, найдем, приравнявая нулю полный импеданс поверхности полости: колебания должны происходить в отсутствие сторонних сил. Значит, условием собственных колебаний будет уравнение

$$(k_l a)^2 - 4 + 4ik_l a = 0, \quad (150.1)$$

где a — радиус полости.

Решим его приближенно в наиболее интересном на практике случае водоподобной среды. Тогда колебания полости затухают слабо. В самом деле, примем, что комплексная частота равна $\omega(1 - i\varepsilon)$, где $|\varepsilon| \ll 1$, и подставим в (150.1) вместо k_l и k_l соответственно величины $k_l(1 - i\varepsilon)$ и $k_l(1 - i\varepsilon)$. Тогда приближенно (с точностью до ε^2) условие обращения в нуль импеданса разобьется на два: $k_l a = 2$ и $\varepsilon = 1/2 k_l a = k_l/k_l^*$. Итак, частота

*) Мнимостью, появляющейся в $k_l a$, можно пренебрегать.

собственных колебаний полости практически равна резонансной частоте ее вынужденных колебаний и затухание действительно мало.

В веществах типа резины отношение λ/μ может достигать нескольких сотен; следовательно, радиус полости, совершающей свободные пульсационные колебания данной частоты, может составлять всего несколько сотых долей длины продольной волны этой частоты в среде. Такие колебания убывают медленно, «высвечиваясь» в виде продольных сферических волн и затухая по закону $\exp[-(k_l/k_t)\omega t]$. Добротность колебаний равна, таким образом,

$$Q = \frac{1}{2} \frac{k_t}{k_l} = \sqrt{\frac{1-\nu}{2(1-2\nu)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Следует иметь в виду, что приведенный расчет добротности учитывает затухание колебаний в результате только излучения продольных волн пульсирующей полостью. Но обычно в водоподобных средах имеется значительное внутреннее трение, которое повышает затухание собственных колебаний полости и уменьшает их добротность (сравните с § 89). Поглощение в водоподобной среде связано со сдвиговыми деформациями, и его обычно можно учесть, приписывая комплексность модулю сдвига среды, т. е. полагая его равным $\mu(1 - i\eta)$. Если считать, что $\eta \ll 1$, то, подставляя комплексное значение модуля сдвига в выражение для волнового числа сдвиговой волны, получим условие резонанса в виде

$$(k_t a)^2 (1 - 2i\varepsilon + i\eta) - 4 + 4ik_t a + 4\varepsilon k_t a = 0,$$

откуда найдем: $k_t a = 2$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}(k_t a + \eta)$. Таким образом, частота собственных колебаний остается той же, что и в несжимаемой среде, и в этом случае, а затухание соответственно возрастает; добротность теперь принимает значение

$$Q = \frac{1}{k_t a + \eta} = \frac{1}{2(k_t/k_t) + \eta}.$$

Мы видели, что резонаторы, помещенные в жидкость (пузырьки, резонаторы Гельмгольца и т. п.), весьма сильно рассеивают падающий на них звук резонансной частоты. Естественно предположить, что велико будет и рассеяние звука (продольных волн) на полости, резонансная частота которой совпадает с частотой падающего звука. Механизм этого рассеяния такой же, как и в жидкости: под действием падающей волны полость придет в интенсивные колебания и будет переизлучать энергию падающей плоской волны в виде сферической волны.

Следует заметить, что, как и в жидкости, рассеянное поле будет состоять не только из сферически-симметричной волны, излучаемой полостью при ее колебаниях монопольного типа, но и из излучения другими видами колебаний (дипольными и т. п.). Объемная скорость для этих других колебаний равна нулю: поток смещения через границу полости в разных частях имеет разные знаки и

полный поток равен нулю. Но если резонансным является как раз симметричное колебание полости, то главный вклад в рассеянное поле даст именно оно.

Итак, будем искать рассеяние на сферической полости плоской волны с потенциалом смещений

$$\varphi = e^{ik_l x} = e^{ik_l r \cos \theta},$$

где θ — полярный угол. При подсчете возбуждения полости существенно только, каков полный поток смещения на поверхности полости: полость будет колебаться своим монопольным колебанием так же, как если бы падающее поле было сферически-симметричной волной с тем же потоком смещения, что и данная падающая волна.

Для нахождения такой эквивалентной сферической волны найдем поток вектора смещения, создаваемого данной плоской волной на поверхности сферы. Радиальное смещение на поверхности сферы равно $ik_l \cos \theta e^{ik_l r \cos \theta}$. Элемент поверхности сферы с данным полярным углом равен $2\pi r^2 \sin \theta d\theta$. Следовательно, полный поток вектора смещения через поверхность сферы равен

$$U = ik_l 2\pi r^2 \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta e^{ik_l r \cos \theta} d\theta.$$

Сделаем замену переменных $\cos \theta = z$. Тогда интеграл примет вид

$$- \int_{-1}^{+1} z e^{ik_l r z} dz = \frac{d}{d(ik_l r)} \int_{-1}^{+1} e^{ik_l r z} dz = \frac{d}{d(ik_l r)} \frac{2i \sin k_l r}{k_l r}.$$

Подставляя в формулу для U и деля на $4\pi r^2$, найдем радиальное смещение для искомой сферически-симметричной волны:

$$\frac{d}{dr} \frac{\sin k_l r}{k_l r}.$$

Следовательно, потенциал $(\sin k_l r)/k_l r$ создаст тот же поток вектора смещения через поверхность данной сферы, что и заданная плоская волна $e^{ik_l x}$. Потенциал же рассеянного сферически-симметричного колебания есть $A e^{ik_l r}/r$, где A — пока неизвестная амплитуда этого колебания. Поэтому суммарный потенциал положим равным

$$\varphi = \frac{\sin k_l r}{k_l r} + A \frac{e^{ik_l r}}{r}$$

и, приравняв нулю напряжение σ_{rr} , создаваемое на поверхности полости $r = a$, найдем из этого условия неизвестную амплитуду.

Согласно (148.2) имеем

$$\sigma_{rr} = -\frac{\mu}{k_l r^3} \left\{ [(k_l r)^2 - 4] \sin k_l r + 4k_l r \cos k_l r + \right. \\ \left. + A k_l [(k_l r)^2 - 4 + 4i k_l r] e^{i k_l r} \right\},$$

откуда, полагая $r = a$ и приравнявая σ_{rr} нулю, найдем

$$A = -\frac{1}{k_l} \frac{B}{[(k_l a)^2 - 4] \cos k_l a - 4k_l a \sin k_l a + iB},$$

где мы для краткости ввели обозначение

$$B = [(k_l a)^2 - 4] \sin k_l a + 4k_l a \cos k_l a.$$

Условие резонанса — это обращение в нуль вещественной части в знаменателе:

$$(k_l a)^2 - 4 = 4k_l a \operatorname{tg} k_l a.$$

Тогда для амплитуды получается значение $A = i/k_l$, а значит, объемная скорость соответственного колебания равна $V = -4\pi\omega/k_l$.

Отсюда находим излученную мощность:

$$J = \frac{1}{8\pi} \rho c_l k_l^2 |V|^2 = 2\rho c_l \pi \omega^2.$$

Но плотность потока мощности в падающей плоской волне $\varphi = e^{i k_l x}$ есть (см. § 139)

$$W = \frac{1}{2} \rho c_l \omega^2 k_l^2.$$

Следовательно, сечение рассеяния полости есть

$$\sigma = \frac{J}{W} = \frac{4\pi}{k_l^2},$$

как и у резонансного пузырька в жидкой среде. Для водоподобного тела резонансным рассеивателем является полость, радиус a которой удовлетворяет условию $k_l a = 2$.

Амплитуда колебаний и деформации среды вблизи полости велики по сравнению с колебаниями в падающей волне и, кроме того, имеют в основном характер сдвиговых деформаций, которые в падающей волне были сравнительно малы. Полость в водоподобной среде — а особенно резонансную полость — можно рассматривать как преобразователь деформации сжатия (в плоской волне) в сдвиговые деформации (в сферической волне). Поэтому при наличии поглощения при сдвиге подобные рассеиватели приводят также к большому поглощению звука. На этом их действии основано применение резиновых слоев, снабженных полостями в

качестве поглотителей подводного звука. Покрyтия из подобных слоев наносятся на подводные лодки для уменьшения отражения, что служит защитой от обнаружения их при помощи гидролокаторов.

§ 151. Крутоль

Жесткая сфера, погруженная в идеальную жидкость и совершающая вращательные колебания вокруг своей оси, оставляет жидкость в покое. Но такая же сфера, «вмороженная» в твердую среду, излучает волны поперечного типа. Такой излучатель поперечных волн назовем *крутолем*. Скорости частиц на поверхности крутоля ($r = a$) равны

$$u = u_0 \sin \theta,$$

где u_0 — амплитуда колебаний излучателя на экваторе сферы, а θ — полярный угол, отсчитываемый от оси вращения. Смещения

точек сферы всюду направлены по параллелям. Естественно предположить, что в среде будет распространяться волна смещений, также направленных в каждой точке по соответственной параллели, не зависящих от долготы и зависящих от полярного угла так же, как и на поверхности крутоля:

$$u = u(r) \sin \theta. \quad (151.1)$$

Такое движение чисто соленоидальное. Если удастся так подобрать функцию $u(r)$, чтобы

Рис. 151.1. Силы, действующие на элемент объема.

были выполнены как граничные условия на поверхности $r = a$ крутоля ($u(a) = u_0$), так и уравнение движения, то выражение (151.1) даст искомую поперечную волну смещений.

Выделим мысленно элементарный объем среды, ограниченный координатными поверхностями сферической системы r и $r + dr$, θ и $\theta + d\theta$, φ и $\varphi + d\varphi$ (рис. 151.1). Стороны этого элемента равны dr , $r d\theta$ и $r \sin \theta d\varphi$, а объем равен $r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$.

Нормальные напряжения по граням выделенного криволинейного параллелепипеда равны нулю. В направлении параллели действуют только силы, вызываемые напряжениями $\sigma_{r\varphi}$ и $\sigma_{\varphi r}$, равными друг другу, поскольку симметричен тензор напряжений. Очевидно, также, что результирующие силы, действующие на элементарный объем в направлении радиуса и меридиана, обращаются в нуль.

Остается рассчитать результирующую силу в направлении параллели. Общий для всех напряжений и смещений множитель

$\sin \theta$ будем пока опускать. Сила, действующая на грань $rd\theta r \sin \theta d\varphi$ и обусловленная напряжением — $\sigma_{r\varphi}$ равна

$$-r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \cdot \sigma_{r\varphi};$$

а сила, действующая на противоположную грань, равна

$$r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \cdot \sigma_{r\varphi} + dr \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \sigma_{r\varphi}).$$

Результирующая этих двух сил равна

$$\sin \theta dr d\theta d\varphi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\varphi}).$$

Далее, силы, приложенные к противоположным граням $dr \times r d\theta$, равны $r dr d\theta \cdot \sigma_{\varphi r}$ и направлены по радиусам-векторам, одна — к центру и другая — от центра. Интересующие нас компоненты сил — это проекции указанных сил на плоскость параллели (компоненты вдоль полярного диаметра взаимно уничтожаются). Эти проекции равны по абсолютной величине $r \sin \theta dr d\theta \cdot \sigma_{\varphi r}$ и направлены одна к центру параллели и другая от центра. Результирующая их направлена вдоль параллели и равна $r \sin \theta dr d\theta d\varphi \times \times \sigma_{\varphi r}$. Таким образом, результирующая всех сил, приложенных к данному элементу объема, направлена по касательной к параллели и равна

$$\begin{aligned} \sin \theta dr d\theta d\varphi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma_{r\varphi}) + r \sin \theta dr d\theta d\varphi \sigma_{\varphi r} = \\ = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \left(\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{3}{r} \sigma_{r\varphi} \right). \end{aligned}$$

Значит, уравнение движения данного элемента имеет вид

$$\rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \ddot{u} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \left(\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{3}{r} \sigma_{r\varphi} \right).$$

Деля обе части на объем элемента, получим уравнение движения в виде

$$\rho \ddot{u} - \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{3}{r} \sigma_{r\varphi} = 0.$$

Остается выразить напряжение $\sigma_{r\varphi}$ через смещение u . Деформация сдвига элемента равна половине изменения угла между ребрами dr и $r \sin \theta d\varphi$. Если бы направление ребра $r \sin \theta d\varphi$ не менялось, то это изменение угла равнялось бы $\frac{\partial u}{\partial r}$. Но это ребро поворачивается на угол u/r . Учитывая направление поворота, видим, что эту величину следует вычесть из $\frac{\partial u}{\partial r}$, чтобы получить искомую деформацию:

$$u_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right).$$

Соответственное сдвиговое напряжение равно, следовательно,

$$\sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right).$$

Подставляя в уравнение движения, найдем уравнение для u в виде

$$\rho \ddot{u} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\mu}{r^2} u = 0.$$

Для гармонического колебания получаем отсюда

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + \left(k_t^2 - \frac{2}{r^2} \right) u = 0.$$

Это — известное уравнение *сферических функций Бесселя* первого порядка. Решение, соответствующее расходящейся волне, есть, как легко проверить и непосредственной подстановкой,

$$u = A \frac{ik_t r - 1}{r^2} e^{ik_t r}.$$

Амплитуда A определяется из граничного условия $u(a) = u_0$:

$$A = u_0 \frac{a^2}{ik_t a - 1} e^{-ik_t a}.$$

Таким образом, окончательно поле крутоля получаем в виде

$$u = u_0 \frac{a^2}{r^2} \frac{ik_t r - 1}{ik_t a - 1} e^{ik_t(r-a)} \sin \theta.$$

Отсюда легко найти напряжение на поверхности крутильно осциллирующего сферического излучателя сдвиговых волн:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)_{r=a} = \mu u_0 \frac{a^2}{ik_t a - 1} \frac{3 - 3ik_t a - (k_t a)^2}{a^3} \sin \theta = \\ &= - \frac{3\mu u_0}{a} \frac{1 + \frac{2}{3} (k_t a)^2 - i \frac{1}{3} (k_t a)^3}{1 + (k_t a)^2} \sin \theta. \quad (151.2) \end{aligned}$$

Характеристика направленности поля крутоля совпадает с характеристикой вращающегося диполя (рис. 107.1).

Касательный импеданс среды на поверхности сферы найдем по формуле

$$Z_\tau = \frac{-\sigma_{r\varphi}}{-i\omega u_0 \sin \theta} = \frac{3\mu}{a\omega} \frac{i \left[1 + \frac{2}{3} (k_t a)^2 \right] + \frac{1}{3} (k_t a)^3}{1 + (k_t a)^2}.$$

Реактивная часть импеданса всегда положительна: реакция среды носит характер упругости; импеданс постоянен по всей сфере.

Особенно интересен случай малого радиуса сферы по сравнению с длиной сдвиговой волны. Тогда

$$Z_\tau \approx i \frac{3\mu}{\omega a} + \frac{\mu}{a\omega} (k_t a)^3 = i \frac{3\rho c_t^2}{\omega a} + \rho c_t (k_t a)^2.$$

Реактивная часть равна сопротивлению упругости при статическом сдвиге в слое толщиной в $1/3$ радиуса сферы. Активная часть импеданса мала по сравнению с реактивной: она относится к касательному импедансу в плоской сдвиговой волне как $(k_1 a)^2 : 1$.

Крутильный момент, с которым крутоль должен действовать на среду, чтобы создать данное излучение, равен

$$M = - \int_0^{\pi} \sigma_{r\theta} 2\pi a^3 \sin^2 \theta d\theta$$

или, согласно (151.2),

$$M = 8\pi a^2 \mu_0 \frac{1 + \frac{2}{3} (k_1 a)^2 - i \frac{1}{3} (k_1 a)^3}{1 + (k_1 a)^2}.$$

Если плотность вещества сферы есть ρ' , то момент инерции сферы равен $(8/15) \pi a^5 \rho'$ и крутильный момент, который следует прикладывать к сфере, чтобы получить то же движение, нужно увеличить на $M' = -(8/15) \pi a^2 \mu_0 (k_1 a)^2 (\rho'/\rho)$. Суммарный момент равен

$$M + M' =$$

$$= 8\pi a^2 \mu_0 \frac{1 + \frac{2}{3} (k_1 a)^2 \left(1 - \frac{1}{10} \frac{\rho'}{\rho}\right) - \frac{1}{15} (k_1 a)^4 \frac{\rho'}{\rho} - i \frac{1}{3} (k_1 a)^3}{1 + (k_1 a)^2}.$$

Если сфера есть отвердевший участок самой среды, то в этой формуле следует положить $\rho' = \rho$.

Для малого радиуса сферы приближенно $M = 8\pi \mu_0 a^2$.

Наконец, найдем мощность излучения крутоля. Так как угловая скорость вращения сферы равна $-i\omega_0/a$, то средняя активная мощность излучения J найдется как $-\frac{1}{2} \text{Im } M \cdot (\omega_0/a)$, т. е.

$$J = \frac{4}{3} \pi a \omega_0^2 \mu_0^2 \frac{(k_1 a)^3}{1 + (k_1 a)^2}.$$

Для малого радиуса сферы приближенно

$$J = \frac{4}{3} \pi a \omega_0^2 \mu_0^2 (k_1 a)^3.$$

В этом случае излученную мощность можно с достаточной точностью выразить через модуль момента M или через модуль его реактивной части в виде

$$J = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \rho c_l}{24\pi} \left(\frac{k_l |M|}{\rho c_l^2} \right)^2.$$

§ 152. Диполь в твердом теле

В жидкости дипольный излучатель — осциллирующая малая сфера. Назовем поле, создаваемое осциллирующей малой сферой в твердом теле, также дипольным излучением и найдем его характеристики.

Диполь в твердом теле может быть двух видов: это может быть сфера, вложенная в полость того же радиуса так, что среда может свободно скользить по поверхности сферы, и это может быть сфера, «вмороженная» в среду и увлекающая за собой среду. Хотя граничное условие в первом случае похоже на граничное условие для жидкой среды, поля в жидкости и в твердом теле будут совершенно различны: помимо потенциального поля смещений продольной волны (похожего по форме на поле в жидкости), в твердом теле в обоих случаях появится еще и вихревое поле сдвиговых волн, для которого никакой аналогии в жидкой среде нет.

Дело в том, что для диполя в жидкой среде на границе сферы имеется только одно граничное условие — совпадение нормальных смещений (или скоростей) сферы и среды: $u_r = u \cos \theta$ (угол отсчитывается от оси осцилляций). Это же требование остается и для осциллирующей сферы в твердом теле, но к нему добавляется еще условие обращения в нуль касательного напряжения на поверхности сферы $r = a$: $\sigma_{r\theta} = 0$ (первый случай), либо условие равенства касательных смещений $u_\theta = -u \sin \theta$ (второй случай). Поэтому, взяв скалярный потенциал в таком же виде, как и для жидкости,

$$\varphi = M \frac{ik_r r - 1}{4\pi r^2} e^{ik_r r} \cos \theta, \quad (152.1)$$

мы получим желательное угловое распределение (по косинусу) нормальных скоростей частиц, но второе условие окажется неудовлетворенным. Поэтому в среде возникает еще и вихревое поле. Его можно описать векторным потенциалом, который давал бы такое же угловое распределение для нормальных скоростей. Это — вектор с единственной не равной нулю компонентой, направленной по параллели и равной

$$\psi = AM \frac{ik_r r - 1}{4\pi r^2} e^{ik_r r} \sin \theta \cdot i_\varphi, \quad (152.2)$$

где i_φ — орт параллели.

Теперь можно распорядиться двумя остающимися пока неопределенными величинами M и A так, чтобы удовлетворить обоим граничным условиям.

Начало расчета одинаково для обоих видов второго граничного условия. Смещения частиц будут происходить в меридиональных плоскостях с полярной осью, совпадающей с направлением осцилляций сферы. Компоненты смещений выражаются через скалярный потенциал φ и не равную нулю компоненту ψ векторного потенциала следующим образом:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \psi \operatorname{ctg} \theta, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \psi. \end{aligned} \quad (152.3)$$

Нормальные и касательные напряжения в меридиональной плоскости равны в данном случае $\sigma_{rr} = \lambda u_{\alpha\alpha} + 2\mu u_{rr}$; $\sigma_{r\theta} = 2\mu u_{r\theta}$. Компоненты тензора деформации равны

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad u_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right); \quad u_{\alpha\alpha} = \Delta\varphi.$$

Подставляя сюда (152.3) и пользуясь уравнениями движения

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -k_t^2\varphi,$$

$$\Delta\psi = \Delta(0, 0, \psi) = i_\varphi \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2} (\operatorname{cosec}^2\theta)\psi \right] = -k_t^2\psi i_\varphi,$$

приведем выражения для компонент тензора напряжений к виду

$$\sigma_{rr} = -\mu \left[k_t^2\varphi + \frac{4}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) - 2 \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) \right], \quad (152.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\mu \left\{ k_t^2\psi - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right] \right\}.$$

Подставляя значения φ и ψ из (152.1) и (152.2), можно переписать формулы (152.3), (152.4) в виде

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{M}{4\pi} \cos\theta \left(\frac{dR_t}{dr} + A \frac{2}{r} R_t \right), \\ u_\theta &= -\frac{M}{4\pi} \sin\theta \left[\frac{1}{r} R_t + A \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rR_t) \right], \\ \sigma_{rr} &= -\mu \frac{M}{4\pi} \cos\theta \left[k_t^2 R_t + 4 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} R_t \right) - \right. \\ &\quad \left. - 4A \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} R_t \right) \right], \\ \sigma_{r\theta} &= -\mu \frac{M}{4\pi} \sin\theta \left\{ 2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} R_t \right) + \right. \\ &\quad \left. + A \left[k_t^2 R_t + 2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rR_t) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (152.5)$$

где введены обозначения

$$R_t = \frac{ik_t r - 1}{r^2} e^{ik_t r} \quad \text{и} \quad R_t = \frac{ik_t r - 1}{r^2} e^{ik_t r}.$$

Дифференцирование дает:

$$\frac{dR_l}{dr} = \frac{2 - 2ik_l r - (k_l r)^2}{r^3} e^{ik_l r},$$

$$\frac{d(rR_l)}{dr} = \frac{1 - ik_l r - (k_l r)^2}{r^2} e^{ik_l r},$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} R_l \right) = \frac{3 - 3ik_l r - (k_l r)^2}{r^4} e^{ik_l r},$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rR_l) \right] = \frac{-3 + 3ik_l r + 2(k_l r)^2 - i(k_l r)^3}{r^4} e^{ik_l r}.$$

Соответственные выражения производных для R_l получаются просто заменой k_l на k_i в этих формулах. Подставляя найденные выражения в (152.5), найдем:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{M}{4\pi r^3} \cos \theta \{ [2 - 2ik_l r - (k_l r)^2] e^{ik_l r} + \\ &\quad + 2A(ik_l r - 1) e^{ik_l r} \}, \\ u_\theta &= -\frac{M}{4\pi r^3} \sin \theta \{ (ik_l r - 1) e^{ik_l r} + \\ &\quad + A[1 - ik_l r - (k_l r)^2] e^{ik_l r} \}, \\ \sigma_{rr} &= -\mu \frac{M}{4\pi r^4} \cos \theta \{ [(k_l r)^2 (ik_l r - 1) + \\ &\quad + 4[3 - 3ik_l r - (k_l r)^2]] e^{ik_l r} - \\ &\quad - 4A[3 - 3ik_l r - (k_l r)^2] e^{ik_l r} \}, \\ \sigma_{r\theta} &= -\mu \frac{M}{4\pi r^4} \sin \theta \{ 2[3 - 3ik_l r - (k_l r)^2] e^{ik_l r} - \\ &\quad - A[6 - 6ik_l r - 3(k_l r)^2 + i(k_l r)^3] e^{ik_l r} \}. \end{aligned} \right\} \quad (152.6)$$

Характеристики направленности для u_r и σ_{rr} — обычные дипольные характеристики. Направленность для u_θ и $\sigma_{r\theta}$ дается такой же характеристикой, как и для крутоля. Обе характеристики в пространстве можно получить, вращая вокруг оси x систему четырех одинаковых окружностей, касающихся осей x и y в начале координат. При этом ось x соответствует направлению осцилляций.

Теперь найдем выражение для силы F , с которой сфера действует на среду. Эту силу можно выразить следующим интегралом по всей поверхности сферы:

$$F = - \int (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) dS.$$

Ввиду осевой симметрии всей картины можем принять за элемент поверхности идущую по параллели полоску ширины $a d\theta$; тогда $dS = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ и интеграл примет вид

$$F = -2\pi a^2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta \sin \theta - \sigma_{r\theta} \sin^2 \theta) d\theta.$$

Подставляя сюда значения σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$ для $r = a$ из (152.6), получим после простых преобразований

$$F = -\mu \frac{M}{3a^2} \beta^2 [(1 - i\alpha) e^{i\alpha} + 2A(1 - i\beta) e^{i\beta}], \quad (152.7)$$

где введены обозначения: $\alpha = k_1 a$; $\beta = k_2 a$.

Случай скользящей и замороженной сферы рассмотрим отдельно.

Для скользящей сферы одним из граничных условий является равенство нулю касательного напряжения на ее поверхности. Полагая в последней формуле (152.6) $\sigma_{r\theta} = 0$, найдем A :

$$A = \frac{6 - 6i\alpha - 2\alpha^2}{6 - 6i\beta - 3\beta^2 + i\beta^3} e^{i(\alpha - \beta)}. \quad (152.8)$$

Полученные выше формулы точные; они справедливы для любого размера сферы (или для любой частоты). Теперь дадим приближенные величины для сферы, малой по сравнению с длиной сдвиговой волны (и подавно по сравнению с длиной продольной волны в среде): будем считать малым β (и подавно α) и будем пренебрегать величинами α^2 и β^2 по сравнению с единицей. Подставляя (152.8) в (152.7), получим при этом условии

$$F = -\mu \frac{M\beta^2}{a^2} = -\rho\omega^2 M. \quad (152.9)$$

Далее, полагая $r = a$ в (152.6), выразим M через амплитуду колебаний сферы u (пренебрегая, как и в предыдущей формуле, малыми второго порядка по α и β). Для этого подставим в первое уравнение (152.6) величину (152.8); вначале придется сохранять все члены в числителе и в знаменателе, потому что старшие члены сокращаются. Произведя вычисления, найдем, пользуясь соотношением $u_r = u \cos \theta$:

$$M = -\frac{12\pi a^3 u}{3\beta^2 + \alpha^2} \left(1 - i \frac{2\beta^3 + \alpha^3}{3\beta^2 + \alpha^2}\right).$$

Теперь и силу, действующую со стороны сферы на среду, сможем выразить через смещение сферы:

$$F = \rho\omega^2 \frac{12\pi a^3 u}{3\beta^2 + \alpha^2} \left(1 - i \frac{2\beta^3 + \alpha^3}{3\beta^2 + \alpha^2}\right).$$

Если плотность сферы равна плотности среды ρ , то к F следует еще добавить инерциальную силу, соответствующую массе сферы,

равную $-\rho\omega^2 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 u$; однако этой величиной можно пренебречь по сравнению с упругой реакцией среды. Таким образом, F можно считать силой диполя в твердом теле. Очевидно,

$$|F| \approx \rho\omega^2 \frac{12\pi a^3 |u|}{3\beta^2 + \alpha^2}.$$

Отсюда видно, что коэффициент упругости для реакции среды равен

$$\kappa = \frac{|F|}{|u|} = \frac{12\rho\omega^2 \pi a^3}{3\beta^2 + \alpha^2} = 12\pi a \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{3\lambda + 7\mu} = \frac{12\pi a \mu}{3 + [\mu/(\lambda + 2\mu)]}.$$

Здесь учтена только реактивная часть силы упругости, соответствующая данному смещению сферы.

Полученных данных достаточно для того, чтобы найти энергию, излучаемую осциллирующей сферой в виде продольных и поперечных волн в окружающую среду. В самом деле, мощность излучения равна половине произведения амплитуды скорости колебания сферы на компоненту силы диполя, находящейся в фазе с этой скоростью. Скорость равна $-i\omega u$, а активная компонента силы есть (с той же точностью, что и выше)

$$-i|F| \frac{2\beta^3 + \alpha^3}{3\beta^2 + \alpha^2}.$$

Излучаемую мощность найдем в виде

$$J = \frac{1}{2} |\operatorname{Im} F| |\omega u| = \frac{|F|^2 (2\beta^3 + \alpha^3)}{24\pi\rho\omega a^3},$$

откуда после простых преобразований получим

$$J = \frac{\omega^2}{24\pi} \left[2 \left(\frac{|F|}{\mu} \right)^2 \rho c_t + \left(\frac{|F|}{\lambda + 2\mu} \right)^2 \rho c_l \right]. \quad (152.10)$$

Сравнивая с (104.2), найдем, что мощность излучения продольных волн в жидкость и в твердую среду (с той же скоростью продольных волн) одинакова при равных силах диполя, приложенных к среде со стороны. Если же сравнивать мощность излучения в твердую среду и в жидкость при одинаковых смещениях сфер одинаковых (малых) радиусов, то результаты получатся разные: излучение продольной волны в твердой среде оказывается в $\frac{36}{[3(k_t a)^2 + (k_l a)^2]^2}$ раз больше, чем в жидкости: при данной скорости движения требуемая сила в твердой среде гораздо больше, чем в жидкости.

Аналогичный расчет можно произвести и для «вмороженной» сферы. При этом условия на поверхности сферы имеют вид $u_r = u \cos \theta$, $u_\theta = -u \sin \theta$, что дает, согласно первым двум формулам (152.6),

$$(2 - 2i\alpha - \alpha^2) e^{i\alpha} + 2A(i\beta - 1) e^{i\beta} = (i\alpha - 1) e^{i\alpha} + A(1 - i\beta - \beta^2) e^{i\beta},$$

откуда точное значение величины A получается в виде

$$A = \frac{3 - 3i\alpha - \alpha^2}{3 - 3i\beta - \beta^2} e^{i(\alpha - \beta)}. \quad (152.11)$$

Переходя к приближенным формулам для $\beta \ll 1$, найдем для силы, действующей со стороны сферы на среду, снова ту же формулу (152.9). Подставляя во второе уравнение (152.6) величину (152.11), найдем и величину M :

$$M = - \frac{12\pi a^3 u}{2\beta^2 + \alpha^2} \left(1 - i \frac{2\beta^3 + \alpha^3}{2\beta^2 + \alpha^2} \right).$$

Следовательно,

$$F = \rho \omega^2 \frac{12\pi a^3 u}{2\beta^2 + \alpha^2} \left(1 - i \frac{2\beta^3 + \alpha^3}{2\beta^2 + \alpha^2} \right),$$

что дает коэффициент упругости, равный

$$\kappa = \frac{|F|}{|u|} = \frac{12\rho\omega^2\pi a^3}{2\beta^2 + \alpha^2} = 12\pi a \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{2\lambda + 5\mu} = \frac{12\pi a \mu}{2 + [\mu/(\lambda + 2\mu)]}.$$

Наконец, находя тем же способом, что и выше, излучаемую мощность, обнаружим, что она выразится той же формулой (152.10). Но смещения сферы оказываются теперь другими: отношение смещений для скользящей и «вмороженной» сфер больше единицы и равно

$$\frac{3\beta^2 + \alpha^2}{2\beta^2 + \alpha^2} = \frac{3\lambda + 7\mu}{2\lambda + 5\mu}.$$

Первый и второй члены в скобках выражения для излучаемой мощности (152.10) соответствуют излученным сдвиговым и продольным волнам соответственно. Распределение мощности между этими типами волн определяется отношением $J_{\text{сдв}}/J_{\text{прод}} = 2(c_1/c_2)$ независимо от граничных условий на сфере. Большая часть энергии всегда идет в сдвиговые волны. В водоподобной среде ($c_1/c_2 \ll 1$) отношение смещений для двух типов граничных условий равно приблизительно $3/2$. Эффективные коэффициенты упругости для водоподобной среды оказываются для двух случаев равными $4\pi a \mu$ и $6\pi a \mu$.

Михаил Александрович Исакович

ОБЩАЯ АКУСТИКА

М., 1973 г., 496 стр. с илл.

Редакторы *В. А. Григорова, Н. А. Райская*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *Н. Б. Румянцева*

Сдано в набор 22/111 1973 г. Под. к печати 31/X
1973 г. Бумага 60×90^{1/8}. Тип. № 2. Физ. печ. л. 31.
Усл. печ. л. 31. Уч.-изд. л. 32,24. Тираж 17 000 экз.
Т-16939. Цена книги 1 р. 23 к. Заказ № 140

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической
литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 6
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли
193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10